



**Zur Theorie des
Regenbogens, der Glorie
und Halos**

Eugen Willerding

www.eugen-willerding.de

©2019 Eugen Willerding

Cover: F.E. Church: Rainy Season in the Tropics

Zur Theorie des Regenbogens, der Glorie und Halos

Eugen Willerding

Inhaltsverzeichnis

1 Kunst und Poesie der Betrachter	3
2 Rückblick auf eine lange Geschichte	14
3 Der Regenbogen und seine Deutungen	25
3.1 Das Modell der geometrischen Optik	29
3.1.1 Komplikationen durch abgeplattete Regentropfen	42
3.2 Modelle der Wellenoptik	44
3.2.1 Das Interferenzmodell	45
3.2.2 Die skalare Beugungstheorie	51
3.2.3 Die Farbmeterik des Regenbogens	59
3.3 Die elektrodynamische Streutheorie	63
3.4 Die Polarisation des Regenbogens	71
4 Das Phänomen der Glorie	74
4.1 Historische Berichte einer Anden Expedition	74
4.2 Das Brockengespenst in der Goethezeit	77
4.3 Interpretation im Rahmen der Mie-Theorie	83
5 Geometrische Optik der Halos	88
6 Schlussbemerkungen	97
Anhang	99
A.1 Klimawandel in 1000 Jahren	99
A.2 Meteorologica	100
A.3 Farbtafeln	104
Literaturverzeichnis	109

1 Kunst und Poesie der Betrachter

*... Allein wie herrlich, diesem Sturm erspriessend,
Wölbt sich des bunten Bogens Wechseldauer,
Bald rein gezeichnet, bald in Luft zerfliessend,
Umher verbreitend duftig kühle Schauer.
Der spiegelt ab das menschliche Bestreben.
Ihm sinne nach, und du begreifst genauer:
Am farbigen Abglanz haben wir das Leben.*

Goethes Faust, 2. Teil.

Der Mineraloge und Farbwissenschaftler SIEGFRIED RÖSCH (1899-1984) begann 1968 seinen wunderbaren Artikel „Der Regenbogen in Wissenschaft und Kunst“ mit den Worten ([66]): *Die Erscheinung des natürlichen Regenbogens gehört zu den grossartigsten Erlebnissen, die uns die Umwelt bietet. Wetteifert sie an Farbenpracht mit den Wundern der Pflanzen- und Tierwelt, so hat ihre Größe und Weiträumigkeit ähnlich den Dämmerungsfarben des Himmels, den Halos, Nordlichtern und dergleichen eine gewisse Beziehung zu astronomischen Aspekten: sie ist eine Himmelserscheinung. Hinzu kommt, daß wir den Regenbogen oft nach seelisch depressiv wirkenden Gewittern oder Regenschauern zugleich mit dem wiederkehrenden Sonnenschein erleben. Kein Wunder also, dass der Regenbogen im Volksglauben und in der Religion naturverbundener Völker oft eine Rolle spielt, dass er ein Versöhnungszeichen Gottes ist, und dass ihm manche psychischen Kräfte zugeschrieben werden („Regenbogen - Schlüsselchen“). Kein Wunder auch, dass zahlreiche Dichter ihn beschreiben und verwerten, Maler sein flüchtiges Bild dem Gedächtnis erhalten wollen.*

Das obige Zitat bringt uns zunächst zu dem mythologischen Begriff des *Regenbogenschlüsselchens*. Das Phänomen wurde zum erstenmal genauer

von dem Archäologen Franz Seraph STREBER (1805 - 1864) untersucht [72]. Der Name bezeichnet verschiedene Typen keltischer Goldmünzen, die im Gebiet von Ungarn, Österreich, Süddeutschland, Hessen und im rheinischen Raum gefunden wurden¹. Sie werden den keltischen Stämmen der *Boier* und *Vindeliker* und den Rheingermanen zugeordnet. Der Name Regenbogenschüsselchen entstand aufgrund ihrer charakteristischen Schüsselform und nach der *Legende*, wonach die Goldstücke am Berührungspunkt des Regenbogens auf der Erde hinterlassen worden seien (siehe auch Grimms – Märchen vom *Sterntaler*). Die Goldstücke wurden oft nach Regenfällen auf dem gepflügten Acker gefunden und da sich die Finder die Herkunft der schüsselförmigen Goldstückchen nicht erklären konnten, bildete sich die erwähnte Sage aus. Sie begünstigte im Volk den Glauben, die vom Himmel über den Regenbogen auf die Erde gefallenen Glücksbringer hätten medizinische Heilwirkung. Dieser Zusammenhang ist aber nur ein kleiner Teil der viele tausend Jahre alten Mythologie des Regenbogens. Im Folgenden sollen nur ein paar besonders schöne Fundstücke erwähnt werden. Schriftliche Zeugnisse gab es wohl schon im 2. vorchristlichen Jahrtausend in Mesopotamien, wo der Regenbogen als die *Liebeskette* der Göttin *Ishtar* angesehen wurde, die im Gilgamesch - Epos den König auf Umwegen zur Einsicht seiner Sterblichkeit führt. Vom Altvorderorient kommen wir nach Kleinasien, wo der griechische Dichter HOMER in seiner *Ilias* den Himmelsbogen im Sinne einer göttlichen Erscheinung erwähnt. Die Göttin des Windes und des Regenbogens, **Iris**, geleitet *Aphrodite* aus dem Kampfgebiet auf den Olympus([11]). Daraus hat sich sprachlich das Synonym für *Iris - Erscheinungen* für viele meteorologisch - optische Phänomene herausgebildet.

Eine weitere schöne Deutung aus dem asiatischen Raum kommt aus China. Die Bildung des Regenbogens wurde zum Teil einer Kombination aus dem *yin* und dem *yan* zugeschrieben, dem männlichen und dem weiblichen Prinzip. Das Phänomen des Haupt - und Nebenbogens ist spätestens im Jahre 1010 bekannt, denn es existiert eine Textstelle, in der gesagt wird, daß wenn beide Bögen gleichzeitig am Himmel erscheinen, der Hellere den männlichen, der Schwächere aber den weiblichen Lichtbogen darstellt.² Neben dieser religiös - mythologischen Bedeutung wurde der

¹Streber findet 1860 für die Mehrzahl der Münzen ein Durchschnittsgewicht von 7.514 [g], mit einer Streuung von 7.47 bis 7.57.

²Aydin Sayili, „The Aristotelian Explanation of the Rainbow“, ISIS, XXX, (1939),



Fig. 1.1: Henry Mosler (1841-1920). „The spirit of the rainbow“ (1912-1919). Für die Babylonier war der Regenbogen die Liebeskette der mesopotamischen Göttin **Ischtar**, die mit den Attributen Liebe und Krieg verbunden war (Gilgamesch - Epos), für die Griechen die Inkarnation der Göttin **Iris** (Darum auch Iris - Erscheinung).

Regenbogen in der näheren Vergangenheit auch in der Malerei (siehe Bilder (1.1,1.6) dargestellt, dann poetisch in der Literatur beschrieben und schließlich auch in Liedern und Filmen der Neuzeit besungen.

Was die epische Dichtung betrifft, möchte ich hier die von S. RÖSCH³ 1968 zitierte kleine Blütenlese in Stichworten wiederholen, ergänzt durch Textauszüge:

1.) EMANUEL GEIBEL und sein Gedicht aus Heroldsrufe für den deutschen Staatenbund: „Wann, o wann“;

... Seht ihr, wie der Regenbogen
Dort in sieben Farben quillt?

65-83.

³Siegfried Rösch (1899 - 1984), Mineraloge und Farbwissenschaftler. Weiterhin Beschäftigung mit Mathematik, Sonnenuhren, Archivierung, Photographie, Harmonielehre und Genealogie. In der Farbtheorie auch Zusammenarbeit mit Erwin Schrödinger.



Fig. 1.2: *Joseph Mallord William Turner (1775-1851): Romantische Szene am Buttermere Lake, Cumberland, Lake District 1797. Ausgestellt an der Royal Academy 1798.*

*Dennoch hoch und fest gezogen
Wölbt er sich, der Eintracht Bild.
Auf der Harfe laut und leise
Sind gespannt der Saiten viel;
Jede tönt nach ihrer Weise,
Dennoch gibt's ein klares Spiel.
O, wann rauschen so verschlungen
Eure Farben, Süd und Nord!
Harfenspiel der deutschen Zungen,
Wann erklingst du im Akkord! ...*

2.) FRIEDRICH VON SCHILLER: Wilhelm Tell, 2. Aufzug, 2. Auftritt
(Mondregenbogen; „Von Perlen baut sich eine Brücke“):

*Von Perlen baut sich eine Brücke
hoch über einen grauen See;
sie baut sich auf im Augenblicke*

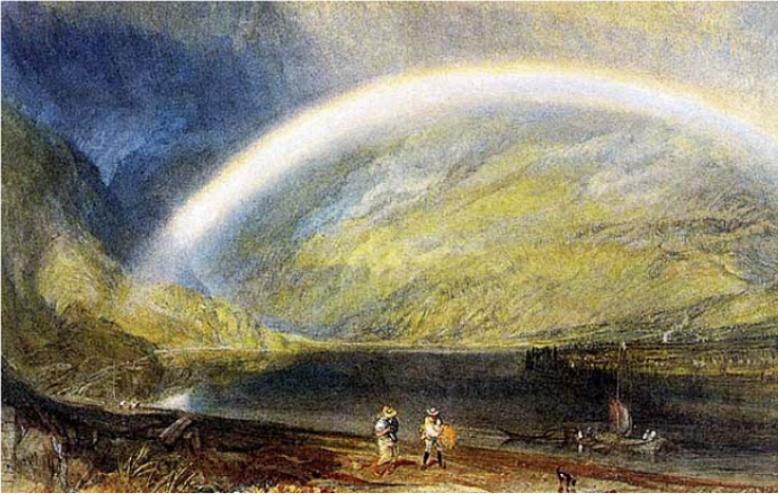


Fig. 1.3: *Joseph Mallord William Turner (1775-1851): Rainbow*

*und schwindelnd steigt sie in die Höh':
Der höchsten Schiffe höchste Masten
ziehn unter ihrem Bogen hin;
sie selber trug noch keine Lasten
und scheint, wie du ihr nahst, zu flieh'n.
Sie wird erst mit dem Strom und schwindet,
sowie des Wassers Flut versiegt.
So sprich, wo sich die Brücke findet,
und wer sie künstlich hat gefügt!*

3.) Bekannt war früher auch das Gedicht von JOHANN WOLFGANG VON GOETHE: „Der Regenbogen“:

*Grau und trüb und immer trüber
Kommt das Wetter angezogen,
Blitz und Donner sind vorüber,
Euch erquickt ein Regenbogen.
Frohe Zeichen zu gewahren
Wird der Erdkreis nimmer müde;
Schon seit vielen tausend Jahren
Spricht der Himmelsbogen: Friede!*



Fig. 1.4: *Regenbogen am Fuße des Pferdeschwanz - Wasserfalls im Yosemite Nationalpark in Kalifornien. Nur zu einer bestimmten Tages - und Jahreszeit kann dieses Farbspiel beobachtet werden. (Foto: Mei Xu)*

*Aus des Regens düstrer Trübe
Glänzt das Bild, das immer neue;
In den Tränen zarter Liebe
Spiegelt sich der Engel – Treue
Wilde Stürme, Kriegeswogen
Rasten über Hain und Dach;
Ewig doch und allgemach
Stellt sich her der bunte Bogen.*

4.) FRANZ GRILLPARZER (1791-1872): „Abschied von Gastein“ (Gedicht 1818); Ausschnitt:

*... Und wie die Perlen, die die Schönheit schmücken,
Des Wasserreiches wasserhelle Zier,
Den Finder, nicht die Geberin beglücken,
Das freudenlose, stille Muschelthier;
Denn Krankheit nur und
langer Schmerz entdrücken
Das heißgesuchte, traur'ge Kleinod ihr,*



Fig. 1.5: *Frederic Edwin Church (1826-1900): Rainy Season in the Tropics (1866).*

*Und was euch so entzückt mit seinen Strahlen,
Es ward erzeugt in Todesnoth und Qualen.*

*... Und wie der Wasserfall, des lautes Wogen
Die Gegend fällt mit Nebel und Getos;
Auf seinem Busen ruht der Regenbogen,
Und Diamanten schütteln rings sich los;
Er wäre gern im stillen Thal gezogen,
Gleich seinen Brüdern in der Wiesen Schoos,
Die Klippen, die sich ihm entgegensetzen,
Verschönern ihn, indem sie ihn verletzen...*

5.) EDUARD MÖRIKE: „Die Regenbrüder“ (Oper in zwei Akten, 1839; Mörikes Werke, Zürich 1947, Bd. 3, S. 321);

6.) MARIE HAMSUN (1881 - 1969): „Der Regenbogen“, Lebenserinnerungen;

7.) Fürst HERMANN V. PÜCKLER - MUSKAU (1785-1871): „*Briefe eines Verstorbenen*“, (Stuttgart 1836):

... „Wir segelten hierauf mit gutem Winde bei Passage, einem Fischerdorf, und Monkstown vorbei, das seinen Namen (Mönchstadt) von einer, im Wald darüber liegenden, Kloster-ruine herschreibt. Hier fing der, eine Zeitlang unterbrochene Regen, wieder an, gab aber diesmal Gelegenheit zu einer herrlichen Naturszene. Wir wandten uns, bei der Insel Arboulen, in die enge Bay von Cobh, die einen sehr schönen Anblick gewährte, denn ihren Eingang bildet links eine hohe Küste mit Häusern und Gärten, rechts die genannte Berginsel, auf der ein Fort, weitläufige Marinegebäude und Storehäuser stehen, die das Material für die Seemacht enthalten; vor uns aber, in der Bay selbst, lagen mehrere Linienschiffe und Fregatten der königlichen Flotte, nebst einem zweiten Deportiertenschiff vor Anker, und hinter diesen erhob sich die Stadt Cobh, stufenweise am Berge aufgebaut. Indem wir dies alles eben ansichtig wurden, trat, an einem feuergelben Fleck des Himmels hinter uns, die dem Untergehen nahe Sonne unter den regnenden Wolken hervor, während vorn sich ein Regenbogen, so vollständig und tiefgefärbt, als ich ihn nie mich erinnere gesehen zu haben, über den Eingang der Bay spannte, aus dem Meere emporwachsend und wieder in dasselbe herabsinkend, gleich einer Blumenpforte, Himmel und Erde zu verbinden bestimmt. Innerhalb seines riesenhaften Halbkreises erschien das Meer und die Schiffe, die ein Berg in unserm Rücken schon vor der Sonne deckte, ganz schwarz, wogegen die abendlichen Strahlen über das höhere Amphitheater von Cobh eine solche Glorie von Licht ergossen, daß die darin schwebenden Seemöwen wie klares Silber schimmerten, und jedes Fenster in der, den Felsen hinansteigenden, Stadt, wie glitzerndes Gold erglänzte. Dieser unbeschreiblich schöne Anblick hielt nicht nur in derselben Beleuchtung aus, während wir einfuhren, sondern, kurz vor dem Landen, verdoppelte sich der Regenbogen sogar, beide Bogen in gleicher Schönheit der Farben brennend, worauf aber auch beide, als wir noch kaum den Fuß ans Ufer gesetzt, fast

im Augenblick verschwanden...“

8.) HANS TROSCHEL (1899-1979): „*Am See der Milane*“, (Stettin 1936):

...Solchen Himmel, solche Wolken gibt es nur im Herbst. Tiefblau sind sie, violett, zimtbraun, schwarz und grau und oft haben sie ringsum einen hell silbrigen Saum. Der Himmel dahinter ist kobaltdunkel und blast nach unten in bläuliches Grün ab, um hinter dem Horizont mattgelb zu werden. Von Westen kommen die Wolken meist in wilder Jagd und hastigem Treiben. Dann wachsen sie ballig und riesengroß heran und verdecken die Sonne am Tage wohl hundertmal. Aber immer wieder über hundertmal am Tage lugt sie heraus oben aus den Wolkenfenstern, immer mit einem anderen Gesicht. Oft blendend weiß, dann strahlend – gelblich, golden, kupferfarben, später brennend ockerbraun, rotgelb und feurig und zum Abschied in dumpfroter Glut. Was die Sonne an Farben spendet, geben die Wolken, die an ihr vorüberziehen, dreifach farbig wieder. Andere kommen mit hängenden Fransen und wehenden Regentüchern und schütten Schauer ins Land. Auf ihr dunkles Grau zirkelt die Sonne einen Regenbogen. Wie merkwürdig herbstlich der bunte Bogen leuchtet mit dem Schlussakkord von Gelb, Orange und Rot. Das Auge sieht jetzt Farben überall. Das Herz spürt ihren Sinn. Der Wind, der über die Lande streicht, hat sonderbaren Duft. Was er erzählt, ist eigentümlich würzig und herb, und was er außer bunten Wolken mit sich bringt, ist unendlich farbenfroh...

Aber auch Lieder besingen den Zauber des Regenbogens. So wurde 1939 das Lied „*Somewhere over the rainbow*“ sehr bekannt, komponiert von Harold Arlen, getextet von E.Y. Harburg und gesungen von der damals noch jungen JUDY GARLAND in dem amerikanischen Märchenfilm *Der Zauberer von Oz*. Seit 2004 führt es die Liste der 100 besten Filmmusiken an. Der lyrische Text lautet leicht verkürzt:

Somewhere over the rainbow,

*Way up high
There's a land that I've heard of
Once in a lullaby.
Somewhere over the rainbow,
Skies are blue
And the dreams that you dare to dream,
Really do come true.
Somewhere over the rainbow,
Blue birds fly
Birds fly over the rainbow
Why then, oh why can't I?*

Weitere Songs waren „*Moon River*“, gesungen 1961 in dem Film „Frühstück bei Tiffany“ von AUDREY HEPBURN oder im Jahre 1967 „What a wonderful world“ von LOUIS ARMSTRONG.



Fig. 1.6: John Everett Millais (1829-1896): Das blinde Mädchen (*The blind Girl*). Im 19. Jahrhundert war der britische Maler Millais äußerst populär. Das obige Bild entstand in den Jahren 1854 - 1856 und zeigt ein blindes Mädchen mit ihrer Freundin bei einem abziehenden Gewitter, wobei sich am Horizont ein doppelter Regenbogen zeigt.

2 Rückblick auf eine lange Geschichte

Neben der Kunst, Poesie und Musik kann aber auch die wissenschaftliche Erforschung des Regenbogens auf eine Jahrtausende währende Tradition zurückblicken ([11]). Erstaunlich dabei ist, dass dieses atmosphärenoptische Phänomen bis in die jüngste Zeit immer wieder ungelöste Fragen aufwirft, deren Spektrum von schwierigen mathematischen und rechnerischen Problemen bis zu nur ansatzweise verstandenen physikalischen Modellvorstellungen reichen (z.B. das Problem der *Glorie*). Erst seit etwa 1990 sind zumindest die rein rechnerischen Probleme durch die heutigen schnellen Digitalrechner und Algorithmen gelöst.

Eine erschöpfende historische Darstellung ist hier natürlich nicht sinnvoll, aber die Hauptquelle für derartige Studien ist immer noch das Buch von CROMBIE ([22])¹. Die erste gut dokumentierte Diskussion zum Problem des Regenbogens stammt im europäischen Kulturkreis von ARISTOTELES in seiner *Meteorologica*. Hier werden schon viele wichtige Fragen zur Entstehung des Haupt- und Nebenbogens, des dunklen Bandes und der Farbeffekte gestellt. Im Anhang ist ein Ausschnitt der mathematischen Diskussion zu finden, mit deren Hilfe ARISTOTELES dem optischen Phänomen Herr werden wollte. Als nächster antiker Autor ist sicherlich SENECA der Jüngere zu nennen, der in seiner naturwissenschaftlichen Schrift *Naturales Quaestiones*, die aus acht Einzelbüchern besteht. Er diskutiert die Modelle seiner Vorgänger, bewertet sie und drückt aus, welchen Vorstellungen er sich anschließt. Über den Regenbogen oder allgemein über optische Reflexionen werden aber keine wirklich neuen Gedanken vorgestellt (Buch I: Meteorbuch). Eine weitere wichtige Persönlichkeit in der Geschichte des Regenbogens war ALEXANDER VON APHRODISIAS,

¹Alistair Cameron Crombie (1915-1996). Australischer Wissenschaftshistoriker. Seit 1953 lehrte er Wissenschaftsgeschichte in Oxford.



Fig. 2.1: Ein doppelter Regenbogen. Deutlich ist die umgekehrte Farbfolge im zweiten Himmelsbogen zu sehen. Zwischen dem inneren Hauptbogen und dem schwächeren äußeren Nebenbogen liegt das sogenannte dunkle „Alexanderband“, benannt nach ALEXANDER VON APHRODISIAS, der bekannteste Kommentator von den Werken Aristoteles. Er lehrte gegen Ende des zweiten Jahrhunderts in Athen am dortigen Lyceum Philosophie. Alexander von Apphrodisias meinte, dass die Region zwischen den beiden Bögen sehr hell sein müsste – doch das Gegenteil ist der Fall. Wirklich geklärt wurde das Paradoxon erst 1637 mit Hilfe des Brechungsgesetzes. (Bildquelle: wiki.pingry.org)

der wichtigste Kommentar der Werke Aristoteles. Er lebte und lehrte um das Jahr 200 in Athen. Bezüglich des Regenbogens machte er auf ein scheinbares Paradoxon aufmerksam, dass er in etwa so aussprach:

Im unteren helleren Hauptbogen ist die stärkste Farbe Rot am oberen Rand, die schwächste Farbe Blau am unteren Rand des Bogens; im oberen schwächeren und selteneren Nebenbogen ist aber Rot am unteren, Blau am oberen Rand des Bogens. Mit dem Prinzip der Stetigkeit in der Zunahme und Abnahme der Helligkeit bei Reflexionen sollte man aber erwarten, dass die Region zwischen diesen beiden Bögen sehr hell sein sollte. Aber genau das Gegenteil ist der Fall. Die Region ist dort wesentlich dunkler.

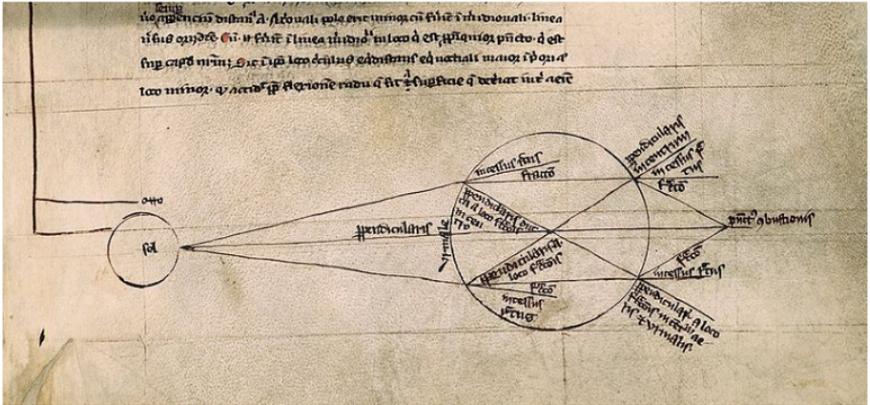


Fig. 2.2: Der Strahlengang von Licht in Wasserkugeln nach Robert Grosseteste - überliefert durch Roger Bacon. Ähnliche Experimente an „Schusterkugeln“ machte auch Goethe etwa 600 Jahre später. (Quelle: Alistair Cameron Crombie (1915-1996): Robert Grosseteste ([22]))

Wirklich geklärt wurde dieses scheinbare Paradoxon erst 1400 Jahre später. Ihm zu Ehren ist die Region zwischen den beiden Hauptbögen heute als *Alexanders dunkle Band* in die Literatur eingegangen.

Erst im Mittelalter erlebte Europa wieder eine geistige Erneuerung, was wahrscheinlich auch mit einem besseren Klima zu tun hatte. Zu nennen wäre hier sowohl ROBERT GROSSETESTE (1173-1253), englischer Theologe, Philosoph und Bischof von Lincoln, als auch THEODORICUS VON FREIBERG (1250-1311), auch bekannt als THIERRY VON FREIBURG, DIETRICH VON FREIBERG, THEODORICUS TEUTONICUS VON VRIBERG oder einfach Meister Dietrich. Beide gaben eine *im Prinzip richtige* qualitative Erklärung, die auf Experimenten mit Wasserkugeln beruhte. GROSSETESTE deduzierte zum erstenmal in Europa ein mathematisches Brechungsgesetz der Form $\alpha = n\beta$, was aber nur für sehr kleine Winkel (fast senkrechter Einfall) gültig ist und schon ein Jahrhundert früher von dem persischen Mathematiker und Astronomen ABU ALI AL-HASAN IBN AL-HAITHAM (965-1040) als falsch angesehen wurde². Der Letztere hatte wahrscheinlich das richtige Brechungsgesetz von dem persischen Mathe-

²Der persische Gelehrte ALHAZEN ist auch berühmt durch das Billard-Problem an der kreisförmigen Bande, was bei ihm als ein Reflexionsproblem an einem sphärischen Spiegel erscheint und Ptolemäus als Urheber zugeschrieben wird.

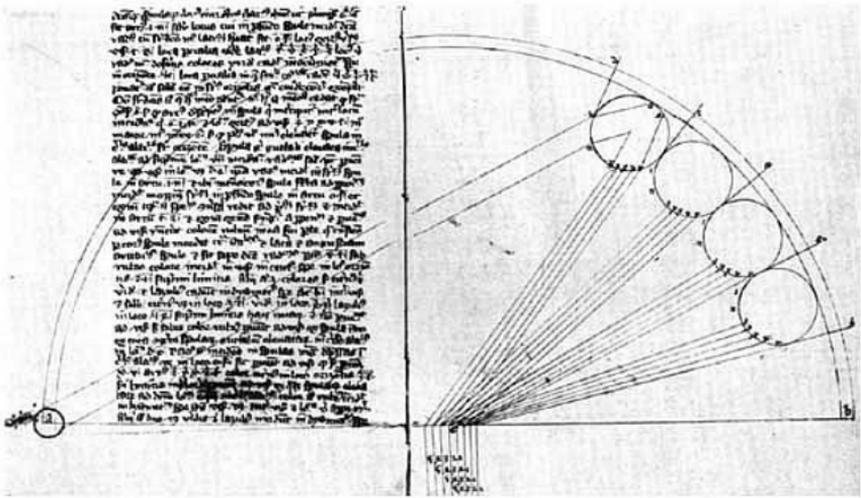


Fig. 2.3: Der Strahlengang von Licht in vier Wassertropfen nach einer Manuskriptkopie Theodoricus von Freiberg für den ersten Regenbogen (um 1304). Jeder der vier Tropfen erscheint dem Beobachter in einer anderen Farbe. (Quelle: Alistair Cameron Crombie (1915-1996): Robert Grosseteste ([22])).

matiker ABU SAD AL-ALA IBN SAHL (940?-1000?), der in Bagdad zur Blütezeit des Islams während des Abbasidenkalifats wirkte, übernommen. Es geriet dort aber wieder in Vergessenheit und wurde deshalb in Europa nicht bekannt ([64]) (siehe Fig. 2.5).

THEODORICUS war Theologe sowie Naturforscher und Mitglied des deutschen Dominikanerordens. Er hatte 1297 in Paris studiert und auch gelehrt. Er machte 400 Jahre vor Descartes bei einem Aufenthalt in Toulouse 1304 Experimente mit wassergefüllten Glaskugeln, um auf experimenteller Grundlage eine neue Modellvorstellung des Regenbogens zu erhalten. Er formulierte eine qualitativ richtige Erklärung des ersten und zweiten Regenbogens in seinem Werk *De iride et radialibus impressionibus* ([27]). Diese Arbeit stellt zweifellos einen Höhepunkt mittelalterlicher Naturforschung in Europa dar. Interessant ist auch, dass fast zur gleichen Zeit der persische Mathematiker und Physiker Kamal al-Din al-FARISI (ca. 1267-1320) zu einer ähnlichen Erklärung des Regenbogens gelangte.

THEODORICUS konnte um 1305 folgende wichtige Punkte rein *qualitativ*

und *experimentell* richtig ableiten:

- Die Farben des ersten und zweiten Regenbogens
- Durch Messungen an Wasserkugeln die Winkelpositionen des ersten und zweiten Bogens zum antisolaren Punkt
- Den Weg des Sonnenlichts innerhalb des Tropfens: das Licht wird beim Eintritt in den Wassertropfen gebrochen, dann einmal oder zweimal innerhalb des Tropfens reflektiert und schließlich beim Austritt noch einmal gebrochen
- Die Bildung des Bogens: Er erkennt die Rolle der einzelnen Regentropfen bei der Bildung des Himmelbogens
- Das Phänomen der Farbe und deren Umkehr im zweiten schwächeren Regenbogen

Nach THEODORICUS gibt es bis zu Beginn des 17. Jahrhunderts keine nennenswerten Fortschritte mehr. Der Astronom Johannes KEPLER, der erfolgreich die wahre Gestalt der Planetenbahnen aus den Beobachtungen von Tycho BRAHE zu Beginn des 17. Jahrhunderts ableiten konnte, hat sich zeit seines Lebens auch mit anderen mathematisch - physikalischen Fragestellungen beschäftigt. Bekannt sind insbesondere seine Untersuchungen zur Struktur der Schneeflocken und zur dichtesten Kugelpackung ($\pi/\sqrt{18}$, das Problem Nummer 18 von Hilbert aus dem Jahre 1900, welches erst 1998 bewiesen wurde). Wenig bekannt ist, dass er auch versucht hat, eine gegenüber den Vorstellungen von Aristoteles neue Theorie des Regenbogens zu entwickeln, in der nicht mehr die Struktur der Wolke, sondern nur noch die kleinen Regentropfen die zentrale Rolle spielen sollten. Doch Kepler scheiterte letztendlich an dem Problem der Regenbogenwinkel, weil er einfach nicht das richtige Brechungsgesetz von Lichtstrahlen an Wassertröpfchen finden konnte. 1606 entwarf er sein endgültiges Modell, nachdem mit dem englischen Gelehrten THOMAS HARRIOT (1560-1621) brieflich in Kontakt getreten war. Nun sind nur noch kleine „Regentropfen“ die wahre Ursache der Regenbögen. Doch seine Vorstellungen über Reflexion und Brechung im Regentropfen erreichen nicht die klaren Einsichten eines THEODORICUS um 1305 ([11]). Hauptursache war wohl das fehlende Brechungsgesetz

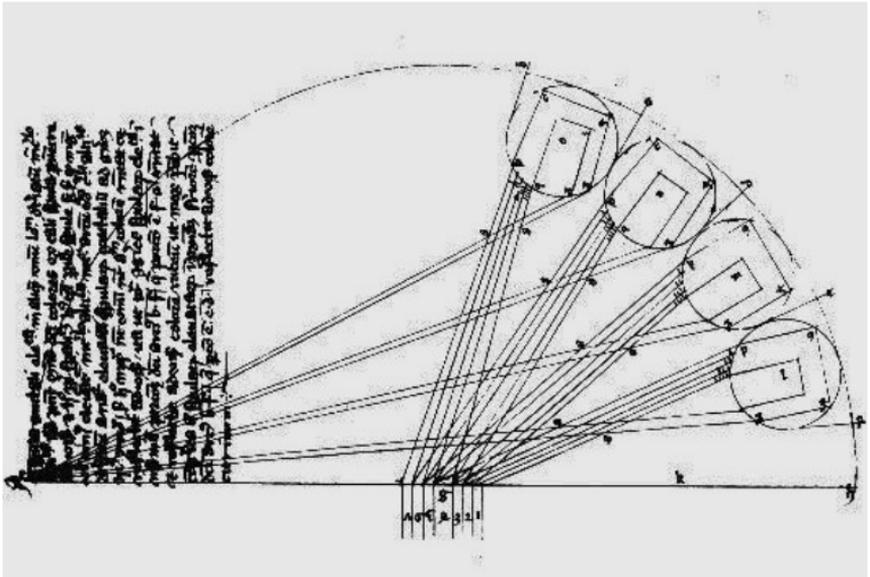


Fig. 2.4: THEODORICUS (1250-1311?) war seiner Zeit um 300 Jahre voraus. Das Bild zeigt ein Diagramm einer Manuskriptkopie Theodoricus, in dem er die Entstehung der umgekehrten Farbreihenfolge im zweiten Regenbogen näher erläutert ([22]). Erst im 19. Jahrhundert konnte man quantitative Farbberechnungen mit einer genaueren Dispersionstheorie der Brechung und einer neuen Wellenoptik durchführen. (Quelle: Alistair Cameron Crombie (1915-1996): Robert Grosseteste ([22]))

und eigene detaillierte Experimente. Die Winkeldaten der empirischen Tabellen, die er von HARRIOT bekam, versuchte er mit fast einem Dutzend verschiedener mathematischer Funktionen anzugleichen. Während das richtige Brechungsgesetz $\sin(\alpha) = n \sin(\beta)$ lautet (siehe Fig.(2.5)) , versuchte KEPLER es vergeblich mit zum Beispiel (siehe ([11]), Seite 187) $\alpha = \beta + k_1 \sec(\alpha)$, $\beta = k_2 \sin(\alpha)$, $\tan(\alpha) = k_3 \tan(\beta)$ und anderen. KEPLER wollte mit seinem Modell gleichzeitig auch einige Halo - Phänomene erklären.

Einer der schillerndsten Zeitgenossen KEPLERS war MARCO ANTONIO DE DOMINIS (1560-1624), der ein kroatischer Bischof von Senj und Erzbischof von Split war und als Theologe, Philosoph, Mathematiker und Physiker wirkte. Im Jahre 1611 veröffentlichte er in Venedig sein Werk mit dem Titel: *Tractatus de radiis visus et lucis in vitris, perspectivis et*

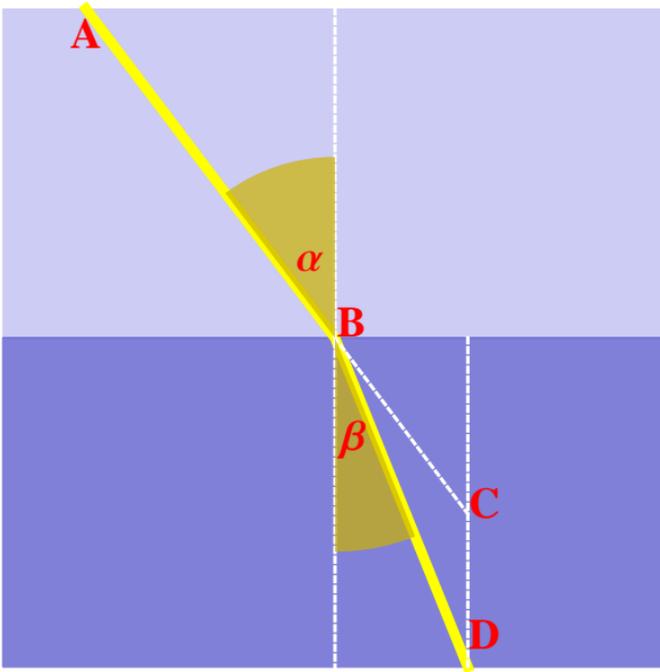


Fig. 2.5: Das Brechungsgesetz, welches heute nach WILLEBRORD SNELLIUS (1581-1621) benannt ist, aber schon dem persischen Mathematiker IBN SAHL (940?-1000?) bekannt war ([64]). Snellius wie Ibn Sahl stellten fest, dass ein Lichtstrahl, der von **A** kommend, bei **B** (Wasseroberfläche) so gebrochen wird, dass im Wasser das Streckenverhältnis $BD : BC = n$ immer eine Konstante ist. Dies ist äquivalent der Relation $\sin(\alpha) = n \sin(\beta)$. Die Richtung des einfallenden Strahls und das Lot auf die Grenzfläche bestimmen die Einfallsebene. Nach diesem Gesetz hat J. Kepler (1571-1630) im Briefwechsel mit THOMAS HARRIOT (1560-1621) vergeblich gesucht. Letzterer hat es wahrscheinlich schon 1601 aufgrund umfangreicher Messungen gekannt. DESCARTES verwendete diese Relation 1637, um „ray tracing“ in Wassertropfen durchzuführen.

iride, welches GOETHE in seiner Farbenlehre - historischer Teil - in höchsten Tönen lobte. Nach ISAAC NEWTON wird hier zum erstenmal eine richtige Erklärung des Regenbogens gegeben. Aus heutiger Sicht ist dies aber eine völlige Missinterpretation. Schaut man sich die Hauptfiguren in seinem Werk an (2.6), so wundert man sich über den Strahlengang im Wassertropfen auf der rechten Bildseite. Zwar wird der Lichtstrahl beim

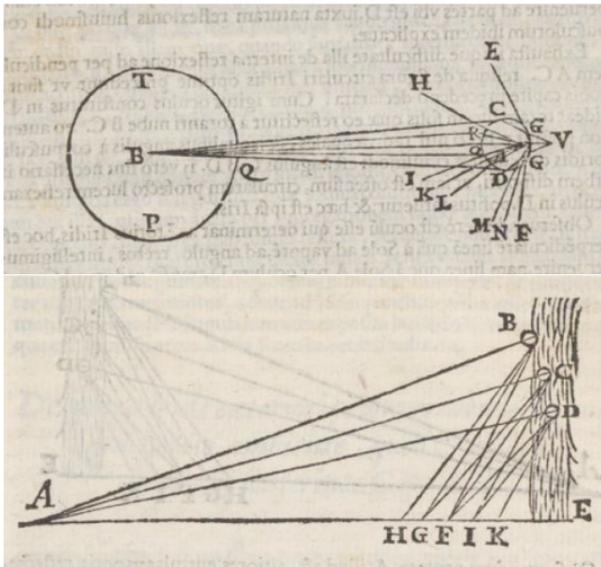


Fig. 2.6: Die eigenartigen Vorstellungen von Markantonio Dominis von 1611 zur Bildung des Regenbogens. Aufgrund dieser Skizze wird klar, dass er den entscheidenden geometrischen Strahlengang zur Bildung des Regenbogens nicht verstanden hatte. (Bild-Quelle: e-rara.ch)

Eintritt in den Tropfen gebrochen, aber beim Austritt scheint *überhaupt keine nochmalige Brechung* stattzufinden. Dies betont auch CARL B. BOYER in seinem Buch ([11]). Damit ist aber klar, dass DOMINIS nicht in der Lage war, den Hauptnerv bei der Bildung des Regenbogens im Sinne einer geometrischen Strahlenoptik zu verstehen.

Die erste wirklich erfolgreiche quantitative physikalische Rechnung zum Regenbogen ist mit dem Namen RENÉ DESCARTES verbunden, der seine Theorie 1637 im dritten Anhang seiner *Discours de la Méthode* mit dem Titel *Les Météores* veröffentlichte. Im nächsten Kapitel gehen wir darauf näher ein. Nachdem Descartes 1637 eine quantitative Simulation der Regenbogenstrahlen durchgeführt hatte, formulierten I. NEWTON und C. HUYGENS algebraische Formeln für die zwei Regenbogenwinkel. Im neunzehnten Jahrhundert bewegten dann Interferenzeffekte das wissenschaftliche Interesse. Hier stehen die Forschungen von THOMAS YOUNG (erste Skizze einer Wellentheorie für die Erklärung der Interferenzbögen)

und besonders die wellenoptischen Untersuchungen von GEORGE BIDELE AIRY im Mittelpunkt (z.B. das Airy-Integral), deren Auswirkungen bis in unser Zeitalter hinein wirksam sind.

Die endgültige mathematische Theorie (Vektor-Streutheorie) des Regenbogens wurde erst im Jahre 1908 auf der Basis der klassischen Elektrodynamik von GUSTAV MIE geschaffen³ zurück. Die Lösungen (**Mie-Streuung**) bestehen aus komplizierten Reihen mit sphärischen Besselfunktionen und Kugelfunktionen. Ein Vergleich von Theorie und Beobachtung beim Regenbogen war damals für Wassertropfen nicht möglich, da der numerische Aufwand viel zu groß gewesen wäre. Darum handelt die Arbeit von Mie von 1908 auch nicht vom Regenbogen, sondern von der Lichtstreuung an „kollodialen Metallösungen“. Die Erforschung des Regenbogens wird heute durch den Einsatz von Lasern entscheidend erleichtert. Dies ermöglicht die extrem präzise künstliche Erzeugung des Phänomens im Labor. Damit sind auch Algorithmen zur Berechnung der Mie-Reihen systematisch überprüfbar. Nicht unerwähnt bleiben sollte, dass diese Fortschritte zur Entwicklung und Anwendung von Messverfahren in technischen Disziplinen geführt haben (Messung von Tropfenradien mit Hilfe optischer Beugung).

Ein kreisförmiger Regenbogen entsteht also, wenn einfallendes Sonnenlicht in kugelförmigen Regentöpfchen gebrochen werden. Um das farbenfrohe großartige Phänomen beobachten zu können, muss man mit dem Rücken zur Sonne stehen (siehe Fig. 2.7). Der Mittelpunkt des Kreises (von dem der Regenbogen ein Teil ist) liegt auf der durch die Sonne und das Auge des Beobachters bestimmten Gerade. Aus diesem Grunde sieht jeder Beobachter den Regenbogen an einer anderen Stelle des Firmaments. Der wirksame Kegelmantel, auf dem das Licht durch Rückstreuung zum Beobachter gelangt, wandern mit dem Auge mit, ist also nicht ortsfest. Ändert die Sonne ihre Position am Himmel, dann ändert auch der Regenbogen seine Gestalt. Deshalb ist der Regenbogen bei hochstehender Sonne flach gewölbt, bei tiefstehender Sonne dagegen

³Gustav Adolf Feodor Wilhelm Ludwig Mie (1868 - 1957) studierte ab 1886 an der Universität Rostock Mathematik und Physik. Neben diesen Fächern hörte er Vorlesungen in Chemie, Zoologie, Geologie, Mineralogie, Astronomie sowie Logik und Metaphysik. An der Universität Heidelberg promovierte er mit 22 Jahren im Fach Mathematik. 1902 ging er nach Greifswald und lehrte dort theoretische Physik. 1908 erschien seine fundamentale Arbeit zur „Mie - Streuung“. 1924 ging er schließlich an die Universität Freiburg.

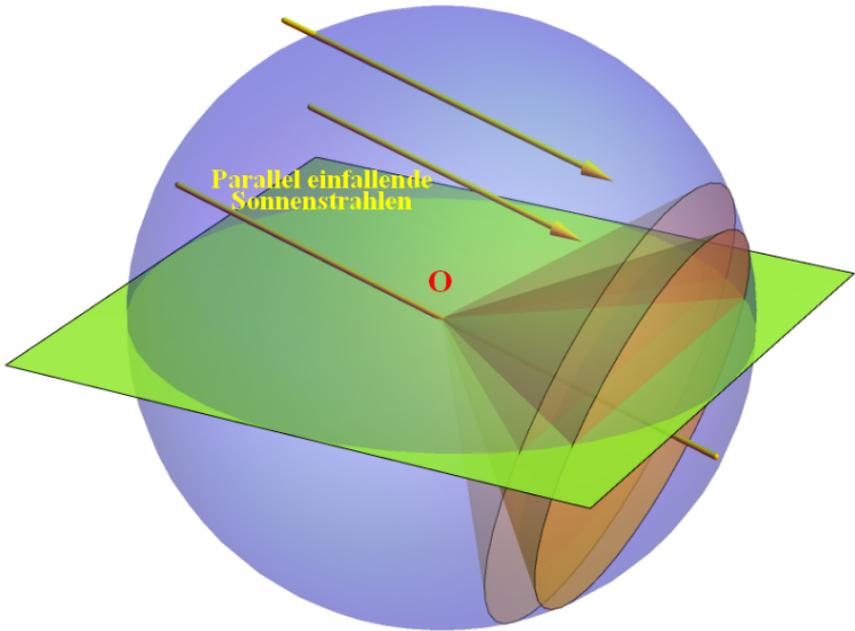


Fig. 2.7: Die Entstehung des Regenbogens (Hauptbogen und der seltenere Nebensbogen) an der Himmelssphäre. Der Beobachter befindet sich am Punkt **O** und hat die Sonne im Rücken. Um den antisolaren Punkt sieht er dann Rückstreulicht von kleinen kugelförmigen Wassertropfen in der Wolke längs eines scheinbaren Kegelmantels mit den halben Öffnungswinkeln von etwa 42 Grad und 51 Grad. Im Gegensatz zu Aristoteles spielt die Geometrie der Wolke keine Rolle, nur die Streuwinkel an exakt kugelförmigen Wassertropfen. Aristoteles wie auch Seneca bemerken aber, dass im Winter ein Regenbogen zu jeder Tageszeit entstehen kann, im Sommer dagegen nur in den Morgen- und Abendstunden.

hoch gewölbt, wobei er aber immer ein Halbkreis darstellt, solange die Tröpfchen kugelförmig sind. Seine höchste Wölbung erreicht er genau bei Sonnenuntergang (wenn also die Sonne am Horizont steht): Er hat dann

die Form eines Halbkreises, die Achse des Lichtkegels liegt horizontal. Man kann die bemerkenswerte Feststellung machen:

Kein Teil des Regenbogens befindet sich an einem bestimmten Ort. Es gibt ihn nur in Beziehung zum Auge des Betrachters und zur Position der Sonne (Lichtquelle) am Firmament.

Kurz noch eine Bemerkung zum Begriff "*Theorie*". Das Wort *Theorie* leitet sich ab vom Griechischen *theorein*: beobachten, betrachten, [an]schauen; somit bedeutet *Zur Theorie des Regenbogens* nichts anderes als *Zur Anschauung, Überlegung, Einsicht, wissenschaftlichen Betrachtung des Regenbogens*. Wörtlich heißt es aber auch: „Schau des Göttlichen“, (theos) - oder „*Zur göttlichen Anschauung des Regenbogens*“.

3 Der Regenbogen und seine Deutungen

Warum sieht man bei der Rückwärtssteuung von Sonnenlicht an Regentropfen nur ein oder zwei schmale bunte Lichtbänder eines Regenbogens? Wir wollen zunächst das Phänomen rein qualitativ erläutern und in späteren Kapiteln auf die Details der physikalischen Theorie und Modelle eingehen.

In unserer einfachsten Modellvorstellung soll Sonnenlicht an *kugelförmigen* Wassertropfen gebrochen und im Inneren derselben einmal oder mehrfach reflektiert werden. Das Licht wird dabei von der Regenfront wieder zum Betrachter zurückgeworfen und durch die dabei stattfindenden Brechungen in die Spektralfarben zerlegt. Dies ist deshalb der Fall, weil Licht unterschiedlicher Wellenlänge (also unterschiedlicher Farbe) unterschiedlich stark gebrochen wird (Dispersion). Das kurzwellige blaue Licht wird stärker gebrochen als das langwelligere rote Licht. Dadurch entsteht der in den Spektralfarben leuchtende Regenbogen, der außen rot ist und sich nach innen in den Spektralfarben bis zum Blau - Violett fortsetzt. Neben dem sogenannten Hauptregenbogen kann man manchmal auch einen etwas schwächeren Nebenregenbogen sehen. Er kommt durch einen anderen Verlauf des Lichtstrahls im Regentropfen zustande: Die Farbreihenfolge des Nebenregenbogen ist umgekehrt zu der des Hauptregenbogens. Die unterschiedlichen Brechungen und Reflexionen ergeben bei spezifischen Winkeln ein extreme Konzentration der Lichtstrahlen, welche bei einer inneren Reflexion bei etwa 42° und bei zwei inneren Reflexionen bei etwa 51° liegen. Genau unter diesen Winkeln bauen sich die zwei Regenbögen auf: Unter 42° sieht man den Hauptregenbogen und unter 51° den Nebenregenbogen. Der dritte und vierte Regenbogen liegt als Ringhalo um die Sonne und ist nur schwer in der Natur nachweisbar. Die Positionen des dritten und vierten Bogens wurden zum erstenmal von dem Astronomen Halley rein theoretisch berechnet. Der

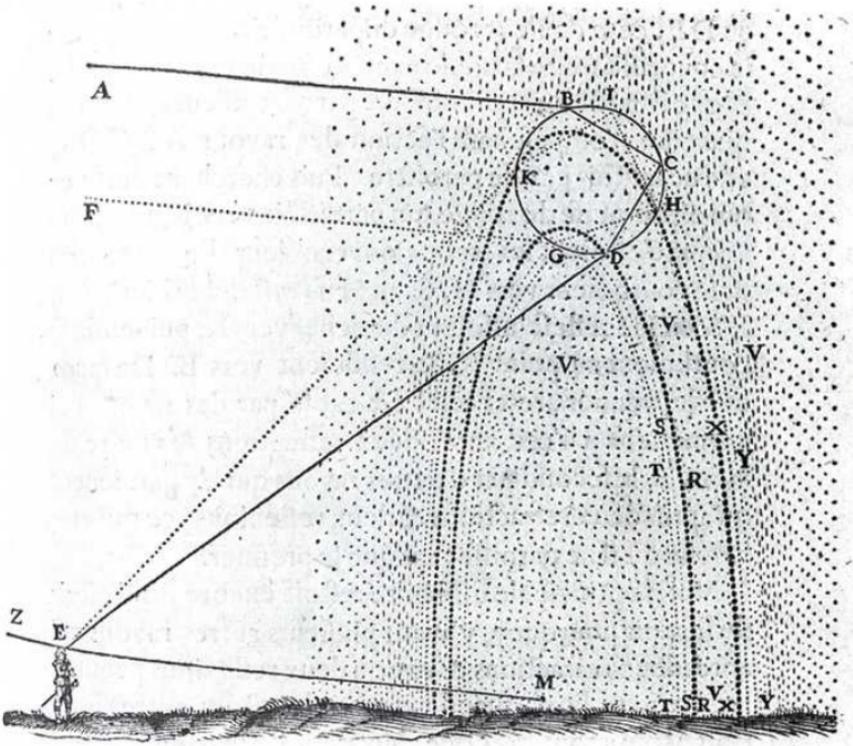


Fig. 3.1: Entstehung des Regenbogens nach der Originalskizze von Descartes 1637. Beim Hauptbogen wird der Lichtstrahl **ABCDE** einmal, beim Nebenbogen **FGHKE** zweimal im Inneren des Wassertropfens reflektiert. Eine Extremalbedingung des Ablenkwinkels um den antisolaren Punkt **M** bestimmt dann den Hauptbogen $\theta_1 = \angle MED \approx 42^\circ$ und den Nebenbogen $\theta_2 = \angle MEK \approx 51^\circ$ (Kauستiken).

dritte Regenbogen soll unter idealen Bedingungen (tief stehende Abendsonne) beobachtbar sein, obwohl andere (z.B. S. Rösch) dies bezweifeln. Es war im Übrigen Isaak Newton, der auch einen Regenbogen "nullter" Ordnung vorschlug, das heißt ohne innere Reflexion im Regentropfen. Dieser Regenbogen ist allerdings nicht beobachtbar.

Es muss hier ausdrücklich betont werden, dass wir die Annahme von *kugelförmigen* Wassertropfen machen. Dies ist sicherlich eine gute Näherung für kleine Tröpfchen (0.01 mm-0.50 mm), die relativ langsam

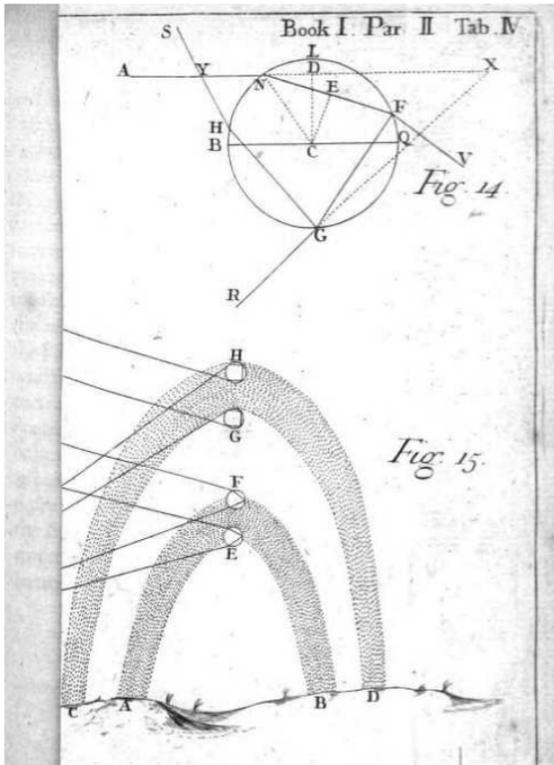


Fig. 3.2: Die Figuren zur Entstehung des Regenbogens (Hauptbogen und Nebenbogen) nach I. Newton in seiner *OPTICS*, vierte Auflage, 1730. Mit Hilfe des Differentialkalküls konnte Newton die Regenbogenwinkel direkt berechnen.

herunterfallen. Das Größenspektrum erstreckt sich dabei etwa zwischen 0.1 mm bis etwa 4.5 mm Durchmesser. Größere Tröpfchen (≈ 1 mm) gehen von der Kugelgestalt zunächst in die Form von abgeflachten Rotationsellipsoiden über, die aber zunehmend nach oben gestreckt werden ([7]). Die Fallgeschwindigkeit in Meter pro Sekunde ist dabei ungefähr der doppelte Durchmesser der Tröpfchen in Millimeter. Fallende Regentropfen haben also keineswegs die Gestalt von fallenden Wasserhahn Tropfen (ein weit verbreiteter Mythos (Tropfenform einer Träne)!). Große Regentropfen werden ab einer bestimmten Fallstrecke auch instabil (Bildung eines „Fallschirms“) und zerplatzen wieder in kleinere Tröpfchen. Der Vorgang des Wachstums zu größeren Tropfen beginnt dann von vorne. Letztlich ist

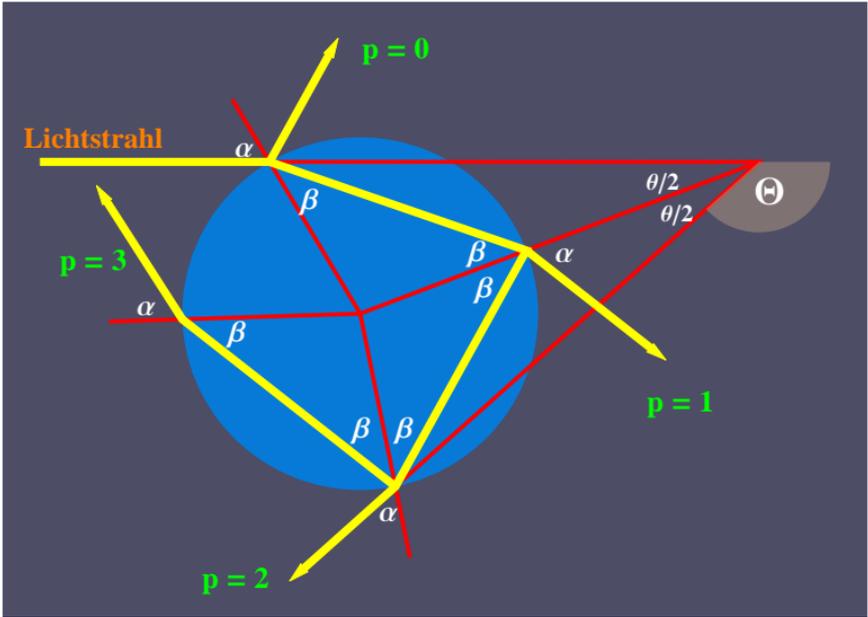


Fig. 3.3: Die Entstehung des Regenbogens ($p = 2$: Hauptbogen; $p = 3$: Nebenbogen) durch p -fache Durchquerung oder $p - 1$ -fache innere Reflexion eines geometrischen Sonnenstrahles (gelb) in einem kugelförmigen Wassertropfen (dunkelblau). In der geometrischen Optik stellt der Regenbogen eine KAUSTIK (Brennlinie) dar, welche als Einhüllende von gebrochenen und reflektierten Lichtstrahlen aufgefaßt werden kann. Genau an dieser ringförmigen Grenzlinie ist die Intensität maximal.

die Größe der Regentropfen damit von der Fallhöhe, dem Luftdruck und der Windstärke abhängig.

Ein vorübergehend nicht - kreisförmiger Querschnitt größerer Regentropfen in einer Wolke kann zur Entstehung eines sehr seltenen „Zwillingsbogens“ („twinned bow“) führen, wobei meistens der Hauptbogen in zwei enge parallele Bögen aufgespalten ist. Eine spezielle Untersuchung der geometrischen Optik eines rotationssymmetrischen ellipsoidischen Wassertropfens ist eine interessante analytische Übungsaufgabe.

3.1 Das Modell der geometrischen Optik

Wir wollen jetzt die genaue Brechungsformel von Lichtstrahlen an *kugelförmigen Wassertropfen* anwenden – eine Aufgabe, die schon Descartes 1637 in geometrischer und numerischer Form sehr aufwendig durchgeführt hat („ray tracing“).

Nach Figur (3.3) tritt ein Lichtstrahl mit dem Winkel α in den kugelförmigen Wassertropfen ein und wird um den Winkel $\alpha - \beta$ abgelenkt, wobei β den Brechungswinkel oder Refraktionswinkel darstellt. Jede Reflektion des geometrischen Lichtstrahls an der Innenseite des Wassertropfens führt zu einer weiteren Ablenkung – und zwar um den Betrag $\pi - 2\beta$ oder $180^\circ - 2\beta$ (siehe Figur (3.3)). Der Streuwinkel des ersten Regenbogens, der hier mit dem Uhrzeigersinn gezählt wird, ergibt sich der Skizze (3.3) nach zu $\Theta = 2\alpha - 4\beta + 180^\circ$. Durchquert der Lichtstrahl den Regentropfen p -mal, so gilt allgemein $\Theta = 2(\alpha - p\beta) + 180^\circ(p - 1)$. Diese Relation gilt auch für $p = 0$. Der „Streuwinkel“ der *totalen Ablenkung* Θ nach *zwei Brechungen* und N inneren Reflektionen am Wassertropfen ist dann durch den Ausdruck

$$\begin{aligned}\Theta &= 2(\alpha - \beta) + N(\pi - 2\beta) \\ &\equiv 2(\alpha - (N + 1)\beta) + N\pi\end{aligned}\quad (3.1)$$

gegeben. Hinzu kommt noch das Brechungsgesetz

$$\sin[\alpha] = \mathbf{n} \sin[\beta], \quad (3.2)$$

welches in dieser Form einem JOHANNES KEPLER noch unbekannt war, da er trotz zahlreicher Refraktionstabellen nicht auf die richtige Formel kam. \mathbf{n} bezeichnet den Brechungsindex von Wasser gegen Luft, der natürlich von der Wellenlänge des Lichtes abhängt. Im Folgenden soll jetzt anstatt der Anzahl N innerer Reflexionen des Lichtstrahls die Anzahl p eingeführt werden, die angibt, wie häufig der Lichtstrahl den Wassertropfen durchquert. Es gilt dann

$$p = N + 1. \quad (3.3)$$

Der Hauptbogen entspräche dann $p = 2$, der Nebbogen $p = 3$. Für den Streuwinkel gilt jetzt

$$\Theta_p = 2(\alpha - p\beta) + (p - 1)\pi \quad (3.4)$$

und für das totale Differential erhält man

$$\begin{aligned} d\Theta_p &= 2d\alpha - 2pd\beta \\ \cos[\alpha]d\alpha &= n\cos[\beta]d\beta. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Aus der Extremalbedingung $d\Theta_p \equiv 0$ folgt

$$d\alpha = pd\beta. \quad (3.6)$$

Mit (3.5) ergibt sich sodann

$$p\cos[\alpha_p] = n\cos[\beta_p] \quad (3.7)$$

oder mit Hilfe des Brechungsgesetzes

$$\tan[\alpha_p] = p\tan[\beta_p]. \quad (3.8)$$

Die Gleichungen (3.2) und (3.7) stellen zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten α und β dar. Man erhält für den *kritischen Einfallswinkel* α_p am Regentropfen

$$\cos[\alpha_p] = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{p^2 - 1}}; \quad \sin[\alpha_p] = \sqrt{\frac{p^2 - n^2}{p^2 - 1}} \quad (3.9)$$

und für den *kritischen Brechungswinkel* β_p im Regentropfen

$$\cos[\beta_p] = \frac{p}{n}\sqrt{\frac{n^2 - 1}{p^2 - 1}}, \quad \sin[\beta_p] = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{p^2 - n^2}{p^2 - 1}}. \quad (3.10)$$

Die obigen Beziehungen könnte man die *vier goldenen Formeln* des Regenbogens nennen. Um mit den *Fresnelschen Formeln* die Polarisation der Bögen zu berechnen, benötigten wir später auch noch die aus den obigen Formeln folgenden Relationen

$$\frac{\sin[\alpha_p - \beta_p]}{\sin[\alpha_p + \beta_p]} = \frac{p - 1}{p + 1}, \quad (3.11)$$

$$\frac{\tan[\alpha_p - \beta_p]}{\tan[\alpha_p + \beta_p]} = \frac{n^2 - p}{n^2 + p}. \quad (3.12)$$

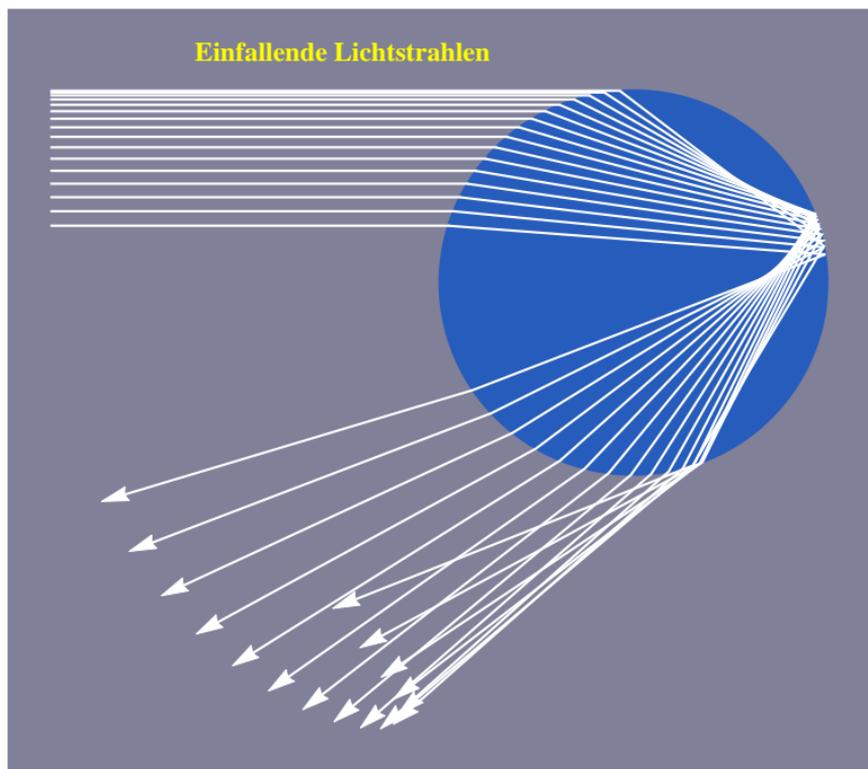


Fig. 3.4: Strahlengang von einigen Lichtstrahlen um den kritischen Descarteschen Eintrittswinkel bei **einmaliger** Reflexion in einen Wassertropfen. Die Strahlen häufen sich um einen bestimmten Grenzwinkel (Kauistik).

Der Quotient aus den Sinus-Funktionen ist für Wassertropfen positiv, derjenige der Tangens-Funktionen aber negativ. Die trigonometrische Struktur der Gleichungen (3.9,3.10) legt es nahe, mit Hilfe der Eulerschen Relation nur noch mit komplexen Zeigern zu rechnen. Mit $i^2 = -1$ gilt also auch

$$\begin{aligned}
 e^{i\alpha_p} &= \frac{\sqrt{\mathbf{n}^2 - 1} + i\sqrt{p^2 - \mathbf{n}^2}}{\sqrt{p^2 - 1}}, \\
 e^{i\beta_p} &= \frac{p\sqrt{\mathbf{n}^2 - 1} + i\sqrt{p^2 - \mathbf{n}^2}}{\mathbf{n}\sqrt{p^2 - 1}}.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

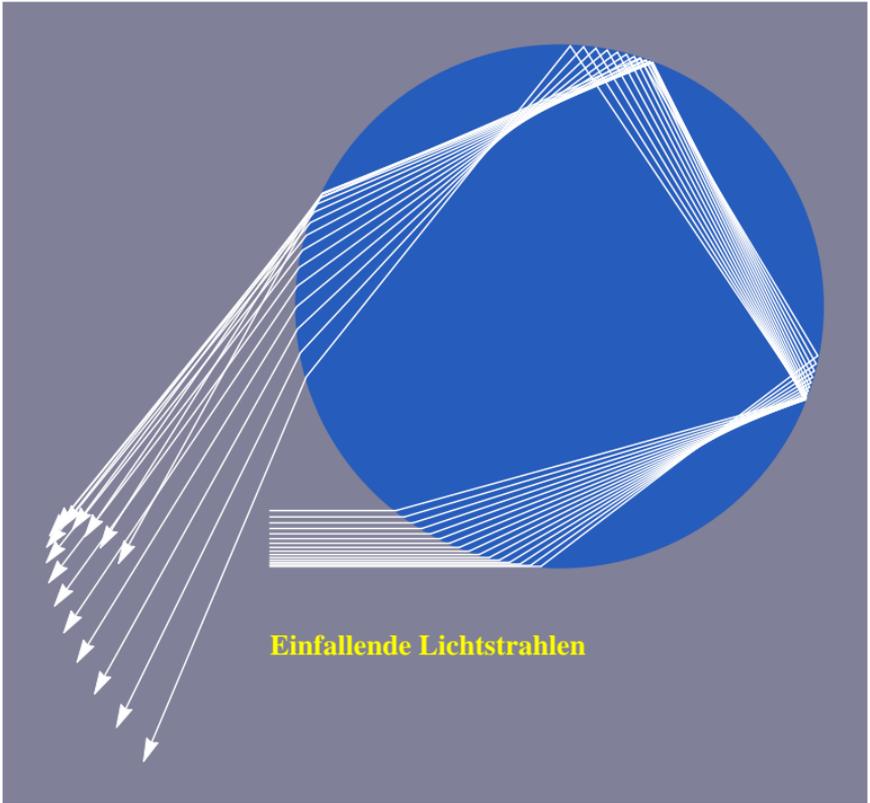


Fig. 3.5: Strahlengang von einigen Lichtstrahlen um den kritischen Descarteschen Eintrittswinkel bei **zweimaliger** Reflexion in einen Wassertropfen. Die Strahlen häufen sich auch hier um einen bestimmten Grenzwinkel, wo die Lichtintensität maximal wird (Kaustik).

Wegen (3.4) hat man für den halben Streuwinkel

$$\frac{\Theta_p}{2} = (p - 1) \frac{\pi}{2} + \alpha - p\beta \quad (3.14)$$

Mit der Abkürzung $p = N + 1$ erhalten wir so die endgültige Formel für

den kritischen *Descartes'schen* Streuwinkel Θ

$$\exp \left[\imath \frac{\Theta_p}{2} \right] = \left(\frac{\sqrt{p^2 - \mathbf{n}^2} - \imath \sqrt{\mathbf{n}^2 - 1}}{\sqrt{p^2 - 1}} \right) \times \left(\frac{\sqrt{p^2 - \mathbf{n}^2} + \imath p \sqrt{\mathbf{n}^2 - 1}}{\mathbf{n} \sqrt{p^2 - 1}} \right)^p. \quad (3.15)$$

Diese Formel gilt für $p > 1$. Jeder der in den beiden Klammern stehende Ausdruck ist eine komplexe Zahl vom Betrag 1 (*komplexer Zeiger*). Wie man sieht, entstehen in der geometrischen Streutheorie auf ganz zwanglose Weise *Halbwinkelformeln*. Im Falle sehr großer $p = N + 1$ existiert eine asymptotische Formel für die geometrischen Regenbogenwinkel. Sie folgt aus der obigen Beziehung und lautet nach für $N \rightarrow \infty$

$$\Theta_p = 2 \arctan[\sqrt{\mathbf{n}^2 - 1}] p - \frac{\sqrt{\mathbf{n}^2 - 1}}{p} - \frac{(2 + \mathbf{n}^2)\sqrt{\mathbf{n}^2 - 1}}{p^3} - O|p^{-4}|. \quad (3.16)$$

Ab $p \sim 10$ ist die Abweichung zwischen der exakten und der asymptotischen Formel für den Streuwinkel kleiner als 1 Grad. Die konstante Winkelzunahme der Regenbogenwinkel höherer Ordnung ist nach der asymptotischen Formel

$$\tan \left[\frac{\delta \Theta_N}{2} \right] = \sqrt{\mathbf{n}^2 - 1}, \quad (3.17)$$

was bei einem Brechungsindex $\mathbf{n} = 4/3$ etwa $82^\circ 49' 9.28''$ entspricht. Häufig ist es zweckmäßig, auch noch den Winkel θ_p des Regenbogens ($p = N+1$) - ter Ordnung vom *antisolaren Punkt* einzuführen. Es gilt dann einfach

$$\theta_p + \Theta_p = \pi. \quad (3.18)$$

Im Folgenden sollen für die ersten vier Regenbögen die trigonometrischen Formeln zur Bestimmung ihrer Winkel angegeben werden¹

¹Diese Formeln für die Regenbogenwinkel θ bzw. Θ hat schon der französische Physiker JACQUES BABINET (1794-1872) abgeleitet. Dies erwähnt FELIX BILLET in seiner Abhandlung von 1868 ([8]. Man könnte sie also die Babinet'schen Regenbogenformeln nennen.

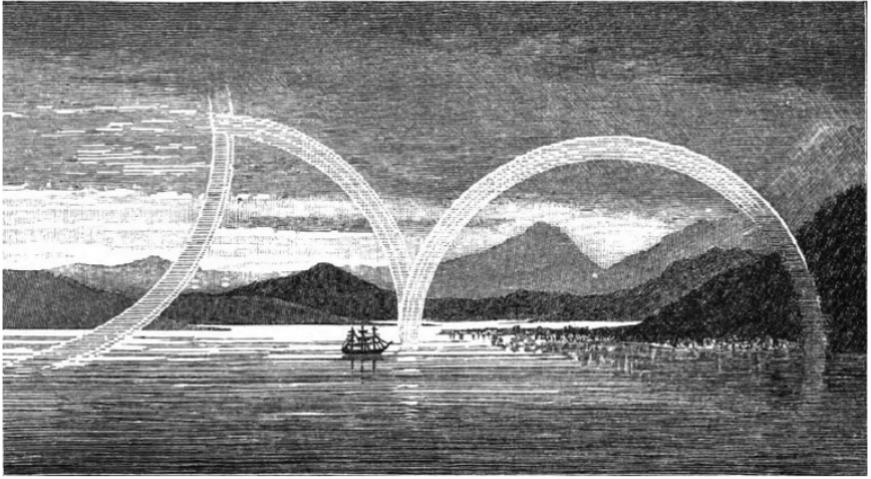


Fig. 3.6: *Anomale Reflexions - Regenbögen in Schottland über einem See.* Autor war Hannah, *Nature* 21, Seite 56, 1879. Auch bei Pernter ([59]), Seite 557 abgedruckt.

(N = 1 | p = 2): Bei einmaliger inneren Reflexion im Wassertropfen folgt für den ersten Regenbogen (Hauptbogen) der Winkel zum antisolaren Punkt

$$\sin \left[\frac{\theta_2}{2} \right] = \frac{(4 - \mathbf{n}^2)^{3/2}}{3\sqrt{3} \mathbf{n}^2} \quad (3.19)$$

oder

$$\cos \left[\frac{\theta_2}{2} \right] = \frac{(8 + \mathbf{n}^2)\sqrt{\mathbf{n}^2 - 1}}{3\sqrt{3} \mathbf{n}^2} \quad (3.20)$$

(N = 2 | p = 3): Bei zweimaliger inneren Reflexion im Wassertropfen folgt für den zweiten Regenbogen (Nebenbogen) der Winkel zum antisolaren Punkt

$$\sin \left[\frac{\theta_3}{2} \right] = \frac{\mathbf{n}^4 + 18\mathbf{n}^2 - 27}{8 \mathbf{n}^3} \quad (3.21)$$

oder

$$\cos \left[\frac{\theta_3}{2} \right] = \frac{(9 - \mathbf{n}^2)\sqrt{(\mathbf{n}^2 - 1)(9 - \mathbf{n}^2)}}{8 \mathbf{n}^3} \quad (3.22)$$

(N = 3 | p = 4): Bei dreimaliger inneren Reflexion im Wassertropfen folgt für den dritten Regenbogen der Winkel zum solaren Punkt

$$\cos \left[\frac{\Theta_4}{2} \right] = \frac{(27\mathbf{n}^2 - 32)(16 - \mathbf{n}^2)^{3/2}}{75\sqrt{15} \mathbf{n}^4} \quad (3.23)$$

oder

$$\sin \left[\frac{\Theta_4}{2} \right] = \frac{(2048 - 896\mathbf{n}^2 - 27\mathbf{n}^4)\sqrt{\mathbf{n}^2 - 1}}{75\sqrt{15} \mathbf{n}^4} \quad (3.24)$$

Während der erste und zweite Regenbogen in der Natur häufig beobachtbar werden, ist der dritte Bogen nur äußerst selten – wenn überhaupt – wahrnehmbar. Nach S. RÖSCH sollte dies nur mit einem Polarisationsfilter möglich sein, um das Streulicht des Hintergrundes zu reduzieren). Mit $\mathbf{n} = 4/3$ folgt daraus $\theta_4 = 138^\circ.38$, also ein Regenbogen mit einem Radius von 41.62° *um die Sonne*, wie zuerst von Halley zu Beginn des 18. Jahrhunderts berechnet. Für wahrscheinlich über 2000 Jahre hat man in der falschen Himmelhälfte nach dem dritten Bogen gesucht! Es gab in der neueren Vergangenheit tatsächlich Beobachter, die behaupten, diesen Bogen dritter Ordnung gesehen zu haben. Mit moderner Technik und Kontrastverstärkung sollte dies zweifellos möglich sein.

(N = 4 | p = 5): Bei viermaliger inneren Reflexion im Wassertropfen folgt für den vierten Regenbogen der Winkel zum solaren Punkt

$$\cos \left[\frac{\Theta_5}{2} \right] = \frac{(3125 - 3750\mathbf{n}^2 + 825\mathbf{n}^4 + 16\mathbf{n}^6)}{216 \mathbf{n}^5} \quad (3.25)$$

oder

$$\sin \left[\frac{\Theta_5}{2} \right] = \frac{(625 - 425\mathbf{n}^2 + 16\mathbf{n}^4)\sqrt{(\mathbf{n}^2 - 1)(25 - \mathbf{n}^2)}}{216 \mathbf{n}^5} \quad (3.26)$$

In der Natur dürfte dieser Bogen vom dritten Bogen überlagert sein und nur schwer nachzuweisen sein. Die folgende Tabelle zeigt für die ersten zwanzig Bögen ihre zugehörigen Winkelradien am Himmel. Da dieser Brechungsindex \mathbf{n} schwach von der Wellenlänge λ des Lichtes abhängt, erklären sich so – nach Newton – im Rahmen der geometrischen Optik die *Farben* des Regenbogens. Die Darstellung der Lichtbrechung

N	Θ_p°	N	Θ_p°
1	137.97	11	90.39
2	129.02	12	7.24
3	41.61	13	75.85
4	43.86	14	158.92
5	128.42	15	118.05
6	147.53	16	35.05
7	63.79	17	47.94
8	19.74	18	130.90
9	103.12	19	146.14
10	173.59	20	63.20

Tab. 3.1: Der Streuwinkel Θ_p , gerechnet vom antisolaren Punkt, für die ersten 20 Regenbögen ($p = N + 1$). für den Brechungsindex wurde $\mathbf{n} = 4/3$ angenommen. Streuwinkel größer 90 Grad liegen auf der Himmelshälfte des antisolaren Punktes.

an Wassertropfen kann alternativ auch in der Sprache des physikalischen „Stoßparameters“ $b \equiv \sin(\alpha)$ oder „Streuparameters“ geschehen, der den senkrechten Abstand des einfallendes „Lichtteilchens“ von der Tropfenmitte in Einheiten des Tropfenhalbmessers a beschreibt. Mit

$$b = \sin(\alpha) \quad (3.27)$$

gilt anstatt (3.4) auch

$$\Theta_p(b) = 2 \left\{ \arcsin[b] - p \arcsin \left[\frac{b}{\mathbf{n}} \right] \right\} + (p - 1) \pi \quad (3.28)$$

Aus der Extremalbedingung $\Theta'_p[b] \equiv 0$ folgt sofort für den „kritischen Stoßparameter“

$$b_p = \sqrt{\frac{p^2 - \mathbf{n}^2}{p^2 - 1}}. \quad (3.29)$$



Fig. 3.7: *Der Regenbogen: Vom Mythos zum Paradies der mathematischen Physik, indem auch Blumen der physikalischen Mathematik blühen.*

Wird diese Größe wieder in (3.4) eingesetzt, so erhält man die alternative Streuwinkelformel

$$\Theta_p[b_p] = 2p \arccos \left[\frac{1}{\mathbf{n}} \sqrt{\frac{p^2 - \mathbf{n}^2}{p^2 - 1}} \right] - 2 \arccos \left[\sqrt{\frac{p^2 - \mathbf{n}^2}{p^2 - 1}} \right] \quad (3.30)$$

Natürlich muss hier unter Umständen der Modulus 2π genommen werden. für später ist es wichtig, das Verhalten von Lichtstrahlen in der Umgebung des kritischen Stoßparameters b_p zu kennen. Wir setzen also mit der

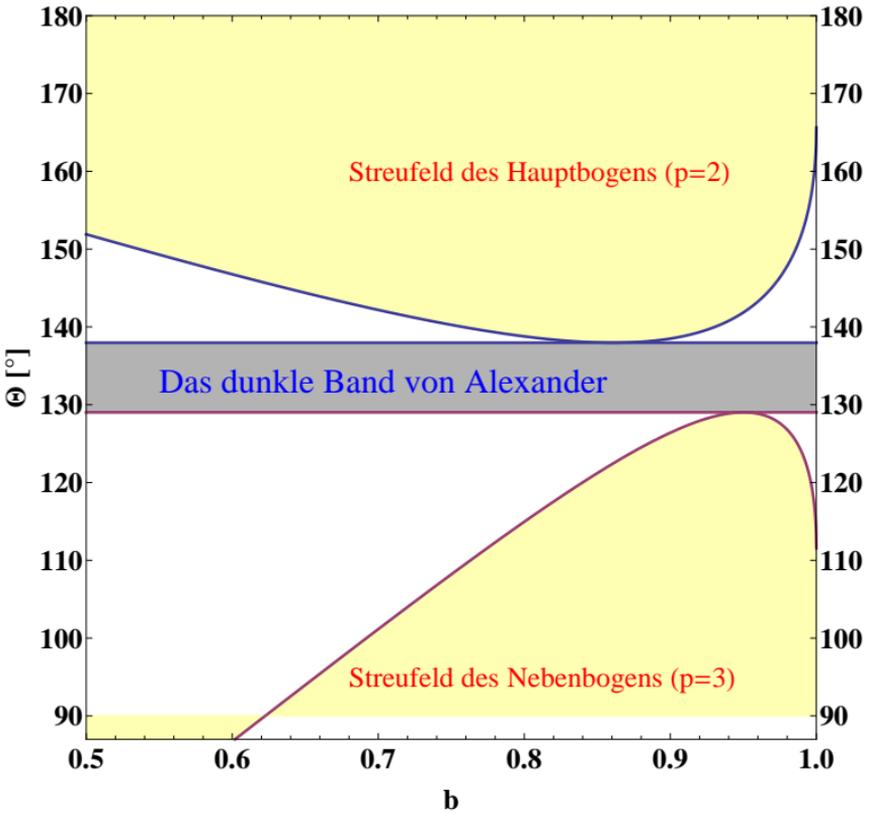


Fig. 3.8: Der Streuwinkel für den ersten und zweiten Regenbogen in der Himmelshälfte um den antisolaren Punkt. Zwischen den beiden Bögen liegt das dunkle Band von ALEXANDER, in dessen Winkelbereich kein Streulicht reicht.

kleinen Größe ξ

$$b = b_p + \xi \quad (3.31)$$

und entwickeln (3.28) bis zur zweiten Ordnung in ξ

$$\Theta_p[\xi] = \Theta_p[b_p] + \frac{(p^2 - 1)^2 \sqrt{p^2 - \mathbf{n}^2}}{p^2 (\mathbf{n}^2 - 1)^{3/2}} \xi^2 + O|\xi^3| \quad (3.32)$$

Die zweite Ableitung an dieser Extremstelle des Regenbogenwinkels p -ter Ordnung lautet

$$\Theta''_p = \Theta''_p[b_p] \equiv 2 \frac{(p^2 - 1)^2}{p^2} \sqrt{\frac{p^2 - \mathbf{n}^2}{(\mathbf{n}^2 - 1)^3}}. \quad (3.33)$$

Da diese Größe positiv ist, ist die Ablenkung des Lichtstrahls als Funktion des Stoßparameters b ein Minimum. Die Größe (3.33) benötigen wir später in der *Beugungstheorie* des Regenbogens nach G.B. AIRY. In der Figur (3.9) werden mit Formel (3.30) die Regenbögen bis zur Ordnung 50 in ihrer Position, Breite und Farbenorientierung graphisch veranschaulicht. Das Bild ist eine moderne Darstellung der *klassischen Rose* von FELIX BILLET (1808-1882), der sie in seiner ausführlichen Untersuchung zu den höheren Regenbögen 1868 benutzte. Die radiale Skala ist logarithmisch gestaucht, so dass eine vierarmige Spirale entsteht („Regenbogenspirale“). Die Ursache dieser vier Arme liegt im asymptotischen Winkel (3.17), der nahe bei 90 Grad liegt. Daher liegen Bögen der Ordnung $p \rightarrow p + 4$ wieder nahezu an gleicher Winkelposition. Im 17. Jahrhundert hat insbesondere CHRISTIAAN HUYGENS (1629-1695) (Der Entdecker des Saturnmondes Titan und der wahren Gestalt des Saturnringes 1659) das Problem behandelt, aus dem gemessenen Regenbogenwinkel θ_2 oder θ_3 auf den Brechungsindex \mathbf{n} zu schließen. Hierzu muss man eine kubische oder eine biquadratische algebraische Gleichung lösen, ein mathematisch aktuelles Problem der damaligen Zeit (~ 1652). für den ersten Bogen (also $p = 2$) läßt sich dieses Problem durch den folgenden Formelsatz am einfachsten lösen: Mit dem Hilfswinkel φ ergibt sich der Brechungsindex zu

$$\tan \left[\frac{\varphi}{2} \right] = \sqrt[3]{\tan \left[\frac{\theta_2}{4} \right]}, \quad (3.34)$$

$$\mathbf{n} = \sqrt{1 + 3 \cos[\varphi]^2}. \quad (3.35)$$

Praktische Bedeutung hätte diese Formel wahrscheinlich nur für das Labor, wenn man den Brechungsindex von dünnen Glasfieberstäben oder von Wasser mit einem dünnen Wasserstrahl aus einer Leitung mit einem Laser bestimmen will. In der Natur wäre, wenn überhaupt, nur

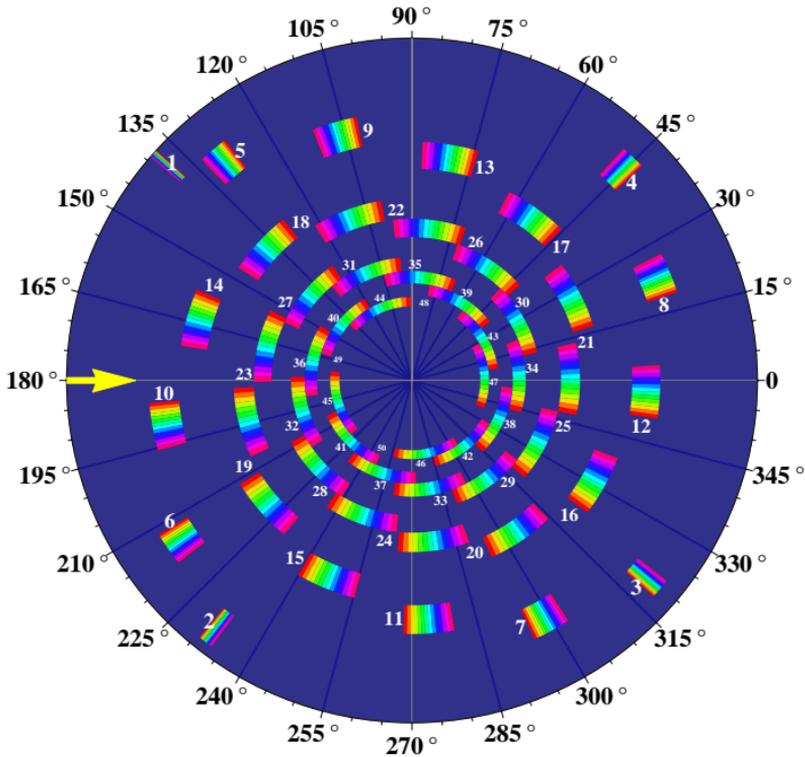


Fig. 3.9: Die vierarmige „Regenbogenspirale“, eine moderne erweiterte Variante der „Rose des 19 premiers Arcs - en - ciel de l'eau“ ([8]). Das Polardiagramm zeigt die Winkelpositionen, die zunehmende Breite und idealisierte Farbfolge für die einzelnen Regenbögen bis zur fünfzigsten Ordnung, berechnet mit (3.30) für $p = 2$ bis $p = 52$. Die Zahlen in der Figur bezeichnen die um eins verminderte Ordnung des Regenbogens (Hauptbogen hat die Nummer 1 ($p = 2$)). Der gelbe Pfeil bei 180 Grad bezeichnet den einfallenden Sonnenstrahl auf den Wassertropfen, den man sich in der Mitte des Diagrammes zu denken hat.

der *Differenzwinkel* zwischen dem Hauptbogen und dem Nebenbogen, also $\Theta_3 - \Theta_2$, relativ leicht und schnell messbar. Dies ist aber das alte Problem von Huygens um das Jahr 1705.

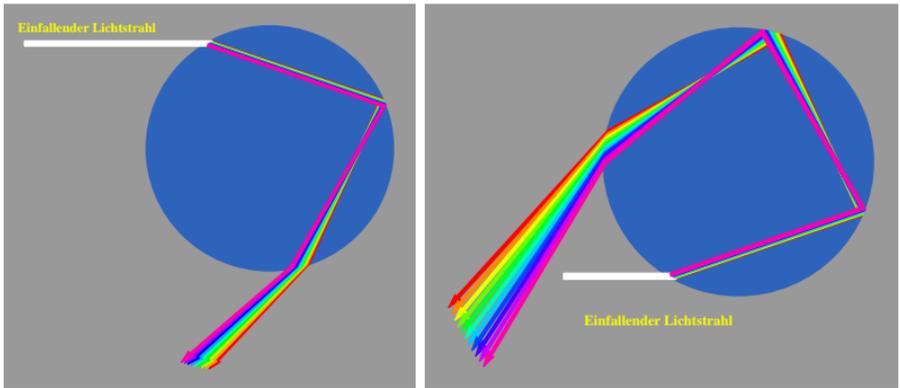


Fig. 3.10: *Mit Hilfe einer einfachen Dispersionstheorie konnte Newton eine erste Deutung der Regenbogenfarben liefern. Auch gelang ihm so die Erklärung, warum beim selteneren zweiten Bogen die Farbfolge umgekehrt zum ersten Bogen ist. Die Figur zeigt bei einem Wassertropfen für die beiden Hauptbögen die Auffächerung der „prismatischen Farbanteile“ des weißen Lichtes in der Umgebung des extremalen (mindestgedrehten) Winkels.*

Schwierigkeiten bereitet die *Brechzahl* $\mathbf{n}[\lambda]$ für normales Wasser (z.B. nicht Salzwasser). Sie ist als Funktion der Wellenlänge λ keineswegs so genau bekannt wie man vielleicht meinen könnte. In der Literatur gibt es hier unterschiedliche Normwerte. In der Tabelle (3.2) sind Standards des **IAPWS** für die Funktion $\mathbf{n}[\lambda]$ (Real - und Imaginärteil) zusammengestellt². Eine analytisch gute Approximation der Dispersionsrelation $\mathbf{n}(\lambda)$ wird schon durch die *Cauchy Relation*

$$\mathbf{n}[\lambda] = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (3.36)$$

geleistet.

Die Wellenlänge für die Cauchy - Parameter A und B werden hier in $[nm]$ angegeben. Die best angepassten Werte sind $A = 1.32528$ und $B = 3093[nm^2]$.

Mit dieser Entdeckung der sogenannten *Dispersion des Lichtes* bei Wechselwirkung mit einem optisch dichterem Medium konnte NEWTON

²„Release on refractive index of ordinary water substance as a function of wavelength, temperature and pressure“ (September 1997) published by International Association for the Properties of Water and Steam (IAPWS)

λ [nm]	$n[\lambda]$	$\kappa[\lambda]$
375	1.34730	3.01E-10
400	1.34451	2.11E-10
425	1.34235	1.62E-10
450	1.34055	3.30E-10
475	1.33903	4.31E-10
500	1.33772	8.12E-10
525	1.33659	1.74E-09
550	1.33560	2.47E-09
575	1.33472	3.53E-09
600	1.33393	1.06E-08
625	1.33322	1.41E-08
650	1.33257	1.76E-08
675	1.33197	2.41E-08
700	1.33141	3.48E-08

Tab. 3.2: Der komplexe Brechungsindex $n[\lambda] + i\kappa[\lambda]$ von Wasser als Funktion der Wellenlänge λ . Der Extinktionskoeffizient $\kappa[\lambda]$ beschreibt die Absorption der Strahlung im Medium.

in seinen frühen *Optical Lectures* eine erste Erklärung der Regenbogenfarben vorlegen. Insbesondere die umgekehrte Farbfolge in den beiden Hauptbögen war nun einer physikalischen Erklärung zugänglich (siehe Figur (3.10)).

3.1.1 Komplikationen durch abgeplattete Regentropfen

Sehr selten wird am Hauptbogen das Phänomen beobachtet, dass der farbige Lichtbogen in der Umgebung seiner Spitze in zwei Bögen aufgespalten ist, die nur wenige Grad von einander entfernt übereinander stehen. Die Farbfolge ist in beiden Bögen gleich. Man spricht dann von einem „Zwillingsbogen“ (*twinned rainbow*). Als Erklärung kommt eigentlich nur die Existenz von zwei unterschiedlichen Arten von Regentropfen in der Wolke in Frage: Zusätzlich zu den kleinen kugelförmigen haben sich auch größere leicht abgeplattete Tropfen dazugesellt, deren Kausitik bei einem leicht veränderten Descarteschen Winkel liegt. Schon der italienische Physiker G.B. VENTURI (1746-1822) wie auch der Physiker,

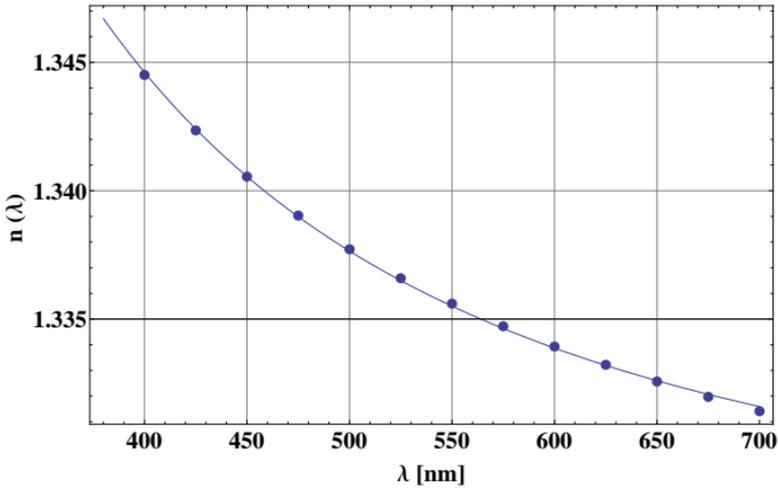


Fig. 3.11: Der Brechungsindex (Brechzahl) n von destilliertem Wasser als Funktion der Wellenlänge λ der Lichtphotonen. Mit der Cauchyrelation (3.36) und ihren zwei Parametern lässt sich der Verlauf analytisch beschreiben.

Meteorologe und Astronom H.W. BRANDES (1777-1834) vermuteten die Existenz solcher nicht-sphärischen Regentropfen, um gewisse überzählige Farbringe innerhalb des Hauptbogens mit Hilfe der geometrischen Optik zu erklären ([78], [12]).

Für eine quantitative Berechnung benötigen wir ein mathematisches Modell für den geometrischen Querschnitt eines fallenden Wassertropfens. Analog zur Arbeit von SADEGHI ET AL. (2012) ([67]) entwickeln wir den Querschnitt in Polarkoordinaten in eine Fourierreihe der Form

$$r[\varphi] = a (1 + c_0 + c_1 \sin[\varphi] + c_2 \cos[2\varphi] + \dots) \quad (3.37)$$

Der Polarwinkel φ wird hier von der Horizontalebene („Äquatorebene“) des Tropfens gerechnet. Der als klein angenommene Koeffizient c_2 beschreibt so in erster Näherung die Exzentrizität des Tropfenquerschnittes und c_1 seine Asymmetrie bezüglich der Horizontalebene. Es gilt allgemein $r[\varphi] \equiv r[\pi - \varphi]$. Der Koeffizient $c_0 \equiv -c_2/3$ garantiert in linearer Näherung der Koeffizienten die Gleichheit des Volumens mit der Ausgangskugel mit Radius a . für die Berechnung des geometrischen Strahlenganges spielt aber die absolute Dimension des Tropfens keine Rolle. Wir behalten uns



Fig. 3.12: Ein Regenbogen (Hauptbogen) mit „überzähligen“ rosa-farbenen Interferenzbögen. Mit dem Modell der geometrischen Optik (Photonen - Teilchenbild) kann diese Erscheinung nur sehr gekünstelt durch Annahme von unterschiedlich abgeflachten Regentropfen erklärt werden. Dagegen gelingt im „Wellenbild“ von Photonen eine sehr elegante Deutung als „Brechung“ und „Interferenz“ von „Lichtwellen“ an kugelförmigen Wassertropfen. (Bild-Quelle: Wikimedia Commons (Andrew Dunn))

in der Zukunft vor, die Modifikation der Descarteschen Winkel in erster Ordnung von c_1 und c_2 zu berechnen.

3.2 Modelle der Wellenoptik

Im frühen 18. Jahrhundert konnten durch das geometrische Modell der Strahlenbrechung von DESCARTES und die zusätzliche Dispersionstheorie von NEWTON die Erscheinungsformen des Regenbogens recht gut erklärt werden. Doch es gab schon einige Details beim Hauptbogen, die mit diesen Theorien nicht erklärbar waren. Beunruhigend war zum Beispiel

1748 der Bericht des ANTONIO DE ULLOA von einem „*weißen Regenbogen*“ auf dem Berg Pambamarca in Peru. Die Nachricht wurde so populär, dass er „Ulloa’s Ring“ genannt wurde. Bei dem Phänomen der Glorie werden wir auf diesen Bericht zurückkommen. Auch sahen aufmerksame Beobachter innerhalb des normalen Hauptbogens häufig „überzählige“ meist violette Farbringe, welche dort nach der normalen Dispersionstheorie mit Brechung nicht sein durften (siehe Fig. (3.12)). Ihr gegenseitiger Abstand war auch nicht immer gleich. Diese Erscheinung musste etwas mit der Wellennatur des Lichtes zu tun.

3.2.1 Das Interferenzmodell

Erste Hinweise auf eine neue Lichttheorie lieferte 1717 die Entdeckung und theoretische Beschreibung durch NEWTON, dass sich an sehr dünnen Glasblättchen farbige Ringe ausbilden. (*Newtonsche Farbringe*)³. Auch die Farberscheinungen auf dünnen Seifenblasen und Ölschichten zeigen ähnliche wiederkehrende Farbstreifen oder Farbmuster. Erklärbar ist dieses Phänomen wohl nur durch ein periodisches Auslöschen von sich überlagernden „Lichtwellen“.

Bis 1800 gelang es nicht, die „überzähligen“ Farbbögen innerhalb des ersten Regenbogens plausibel zu erklären. Der italienische Physiker G.B. VENTURI (1746-1822) wie auch der Physiker, Meteorologe und Astronom H.W. BRANDES (1777-1834) vermuteten, dass unterschiedlich abgeflachte Regentropfen für die überzähligen farbigen Bögen verantwortlich sein könnten ([78], [12]). Doch schon THOMAS YOUNG (1773-1829) entwarf in seinen *Bakerian Lectures* im November 1803 wohl als Erster ein Interferenzmodell für Lichtwellen an Wassertropfen, indem er zwei dicht benachbarte parallele Lichtstrahlen um den minimalen Descarteschen Streuwinkel überlagerte und die richtungsabhängigen Gangunterschiede der Lichtwellen quantitativ abschätzte (siehe Fig. (3.13),[85]). Die Größe der Tropfen im Regenschauer muss dabei möglichst identisch sein. THOMAS YOUNG berichtet selber über die Entdeckung des Interferenzprinzips mit folgenden Worten:([86])

It was in May, 1801, that I discovered, by reflecting on the

³Schon früher als NEWTON durch ROBERT HOOKE in seinem 1664 erschienen Buch „Micrographia“ beschrieben und mit Hilfe eines eigenen Wellenmodells erklärt

beautiful experiments of Newton, a law which appears to me to account for a greater variety of interesting phenomena than any other optical principle that has yet been made known. I shall endeavour to explain this law by a comparison: Suppose a number of equal waves of water to move upon the surface of a stagnant lake, with a certain constant velocity, and to enter a narrow channel leading out of the lake; suppose than another similar cause to have excited another equal series of waves, which arrive at the same channel, with the same velocity, and with the same time with the first. neither series of waves will destroy the other, but their effects will be combined: if they enter the channel in such a manner that the elevations of one series coincide with those of the other, they must together produce a series of greater joint elevations; but if the elevations of one series are so situated as to correspond to the depressions of the other, they must exactly fill up those depressions, and the surface of the water must remain smooth; at least I can discover no alternative, either from theory or from experiment. Now, I maintain that similar effects take place whenever two portions of light are thus mixed; and this I call the general law of the interference of light.

Da YOUNG in seiner Vorlesung mathematisch wenig explizit war, wollen wir seine Modellvorstellungen quantitativ nachvollziehen (siehe auch [35]) Nach Figur (3.13) treten plan-parallele Lichtstrahlen senkrecht durch eine Messschranke w_1 in den oberen Sektor eines Tropfens ein, werden zweimal gebrochen und einmal reflektiert und passieren wieder symmetrisch eine zweite Messschranke w_2 , die symmetrisch zu w_1 und senkrecht auf jedem Strahl steht. Wenn die eintretenden Lichtwellen bei w_1 die gleiche Phase haben, so ist zu untersuchen, welche *Phasenverschiebung* sie zueinander beim Passieren von w_2 erlitten haben. Es kommt also darauf an, die Phasenverschiebung der beiden „Lichtkanäle“ als Funktion der Winkelabweichung $\Delta\Theta = \Theta - \Theta_2$ zu berechnen.

Dank DESCARTES wissen wir, dass es in unmittelbarer Nähe auf entgegengesetzten Seiten zum kritischen Descartes'schen Strahl immer Strahlenpaare gibt, die zwar leicht stärker abgelenkt werden, dafür aber parallel zueinander sind und somit interferieren können. Mit der kleinen Abwei-

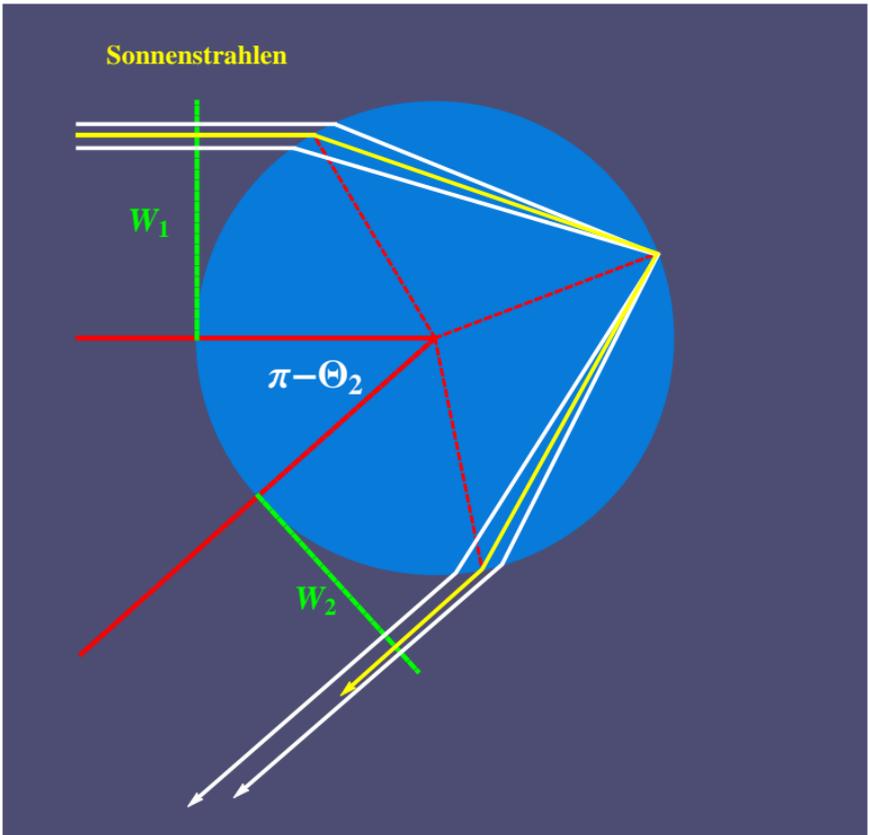


Fig. 3.13: Die Erklärung der „überzähligen“ Ringbögen unterhalb des Hauptbogens als Interferenzerscheinung von parallelen Lichtstrahlen um den Descartes'schen Winkel (gelber Strahl) durch THOMAS YOUNG 1803.

chung ξ vom Descartes'schen Streuparameter b_2 für den Hauptbogen

$$b = b_2 + \xi = \sqrt{\frac{4 - \mathbf{n}^2}{3}} + \xi \quad (3.38)$$

und erhalten wir zunächst für die Winkelabweichung $\Delta\Theta = \Theta - \Theta_2$ bis

zur dritten Ordnung in ξ

$$\begin{aligned} \Theta - \Theta_2 &= \frac{9}{4} \sqrt{\frac{4 - \mathbf{n}^2}{(\mathbf{n}^2 - 1)^3}} \xi^2 + \\ &\frac{3\sqrt{3}}{16} \frac{(56 - 11\mathbf{n}^2)}{(\mathbf{n}^2 - 1)^{5/2}} \xi^3 + O|\xi^4| \end{aligned} \quad (3.39)$$

Es gibt hier einen positiven und einen negativen Zweig von ξ , die Lichtwellen in die gleiche Richtung senden. Um die Phasenverschiebung als Funktion von ξ zu berechnen, benötigen wir die *optische Weglänge* S des Lichtstrahls von w_1 nach w_2 . Mit Fig. (3.3) ergibt sich zunächst in *Einheiten des Tropfenradius* für den Hauptbogen

$$S = 2 (1 - \cos[\alpha]) + 4 \mathbf{n} \cos[\beta] \quad (3.40)$$

oder

$$S = 2 \left(1 - \sqrt{1 - b^2} \right) + 4 \sqrt{\mathbf{n}^2 - b^2} \quad (3.41)$$

Da im Wassertropfen die Phasengeschwindigkeit des Lichtes kleiner ist, wird der geometrische Weg durch den Faktor \mathbf{n} des Brechungsindex verlängert. Wie beim Streuwinkel erhalten wir so für die optische Weglänge die Entwicklung bis zur dritten Ordnung in ξ

$$\begin{aligned} S &= 2 + 2\sqrt{3(\mathbf{n}^2 - 1)} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{4 - \mathbf{n}^2}{(\mathbf{n}^2 - 1)^{3/2}} \xi^2 + \\ &+ \frac{9\sqrt{4 - \mathbf{n}^2} (16 - \mathbf{n}^2)}{16 (\mathbf{n}^2 - 1)^{5/2}} \xi^3 + O|\xi^4| \end{aligned} \quad (3.42)$$

Durch Umkehrung der Reihe (3.39) nach den beiden Zweigen von ξ und Einsetzen in (3.42) ergeben sich so die beiden möglichen optischen Weglängen für Lichtwellen in der Richtung $\Delta\Theta$

$$\begin{aligned} S_{\pm} &= 2 + 2\sqrt{3(\mathbf{n}^2 - 1)} + \sqrt{\frac{4 - \mathbf{n}^2}{3}} (\Theta - \Theta_2) \\ &\pm \frac{4(\mathbf{n}^2 - 1)^{3/4}}{9(4 - \mathbf{n}^2)^{1/4}} (\Theta - \Theta_2)^{3/2} + \dots \end{aligned} \quad (3.43)$$

oder einfacher

$$\begin{aligned}
 S_{\pm} &= 2 + 2\sqrt{3(\mathbf{n}^2 - 1)} + b_2(\Theta - \Theta_2) \\
 &\pm \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\Theta_2'}}(\Theta - \Theta_2)^{3/2} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{3.44}$$

Diese Reihe hätte man auch einfacher ableiten können, denn aus den Definitionen von $S(b)$ und $\Theta(b)$ folgt leicht die Relation

$$\frac{dS}{db} = b \frac{d\Theta}{db}; \quad \frac{\partial S}{\partial \Theta} = b \equiv b_2 + \xi
 \tag{3.45}$$

Durch Umkehrung von (3.39) in *erster Ordnung* $(\Theta - \Theta_2)$ nach $\xi(\Theta - \Theta_2)$ und ergibt sich durch Einsetzen in (3.45) bis auf eine Integrationskonstante sofort die Beziehung (3.44). Die Phasen der beiden sich überlagernden Elementarwellen lauten nun

$$\Phi_{\pm} = k a S_{\pm},
 \tag{3.46}$$

wo a den Tropfenhalbmesser und $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl der Lichtwelle bezeichnen. Werden diese zwei parallelen Strahlen mit den Phasen $\Phi_{(+)}$ und $\Phi_{(-)}$ überlagert, ergäbe sich im Geiste von THOMAS YOUNG die resultierende Intensität

$$|\exp[i\Phi_{+}] + \exp[i\Phi_{-}]|^2 = 4 \cos \left[\frac{\Phi_{+} - \Phi_{-}}{2} \right]^2
 \tag{3.47}$$

Doch hier machte YOUNG einen kleinen Fehler. Er konnte noch nicht wissen, dass beim Überschreiten einer Brennpunktlinie noch ein zusätzlicher Phasensprung von $\pi/2$ zwischen der einfallenden und der reflektierten Welle im Fernbereich zu berücksichtigen ist. So liest man bei ARNOLD SOMMERFELD([69]):

Die vielgestaltigen Kaustiken (Fokallinien, Brennpunktlinien), die sich in einer gewölbten Tasse bei punktförmiger Beleuchtung abzeichnen, sind uns aus dem täglichen Leben vertraut. Sie können geometrisch - optisch als Enveloppen von Strahlbüscheln konstruiert werden. Die genauere Untersuchung ihrer Umgebung führt auf Beugungsprobleme, welche insbesondere

von AIRY behandelt worden sind.

Ein Brennpunkt (Fokus) ist nach der geometrischen Optik eine unendliche Konzentration von Strahlen. Die Wellenoptik läßt diese (physikalisch offenbar unzulässige) Singularität in ein Lichtgebirge von endlicher Amplitude und Ausdehnung auf. Beim Überschreiten des Brennpunktes tritt ein Phasensprung auf von der Größe π , der experimentell von GOUY, SAGNAC und anderen studiert worden ist. Bei einer Brennlinie, wie sie zum Beispiel aus der Strahlenkonvergenz einer Zylinderwelle entsteht, tritt an die Stelle von π der Phasensprung $\pi/2$.

SOMMERFELD erwähnt dann insbesondere eine Arbeit von DEBYE, die auf dieses Problem genauer eingeht und es löst ([24]). Wir machen uns diese Ergebnisse zu Nutzen und werden gegenüber THOMAS YOUNG eine bezüglich des Phasensprungs korrigierte Interferenzsumme der Form

$$\left| \exp \left[i \Phi_+ - i \frac{\pi}{4} \right] + \exp \left[i \Phi_- + i \frac{\pi}{4} \right] \right|^2 = 4 \cos \left[\frac{\Phi_+ - \Phi_-}{2} - \frac{\pi}{4} \right]^2 \quad (3.48)$$

annehmen. Mit (3.44) und (3.46) ergibt sich so für die oszillierende Intensitätsverteilung ohne Berücksichtigung der Abnahme der Amplitude der Ausdruck

$$\sim \text{COS} \left[\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\Theta''_2}} k a (\Theta - \Theta_2)^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right]^2 \quad (3.49)$$

THOMAS YOUNG diskutiert selber nur ein *qualitatives Resultat in Worten*, explizite Formeln gab er in seinen *Bakerian Lecture* nicht an. Die kritische Stelle lautet ([85]):

...the magnitude of these rings depending on that of the drop, according to the difference of time occupied in the passage of the two portions, which thus proceed in parallel directions to the spectator's eye, after having been differently refracted and reflected within the drop. This difference varies at first, nearly as the square of the angular distance from the primitive rainbow...

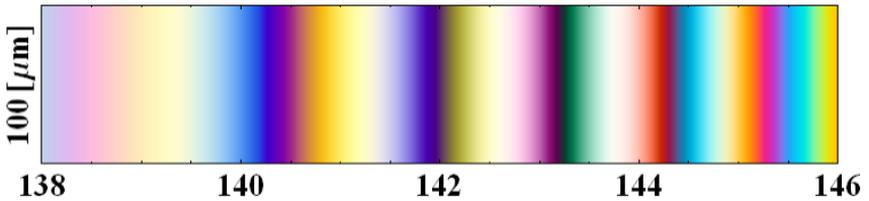


Fig. 3.14: Interferenzbögen nach YOUNG für Tropfen von $100\mu\text{m}$ Radius (Halbmesser), berechnet mit (3.49) und einer Farbtheorie. Die relativen Intensitäten stimmen nicht gut mit der Wirklichkeit überein, aber die Winkelposition der Bögen und ihre Farben entsprechen schon weitgehend der genaueren AIRY Theorie (siehe nächstes Kapitel und Farbmatrik).

Der letzte Satz muss wohl so gedeutet werden, dass THOMAS YOUNG in der Intensitätsformel (3.49) anstatt des richtigen Terms $(\Theta - \Theta_2)^{3/2}$ den quadratischen Term $(\Theta - \Theta_2)^2$ erhalten hat. Es bleibt leider unklar, wie und warum YOUNG im Jahre 1803 diese Abhängigkeit für die Wellenphase erhalten hat.

Im nächsten Kapitel werden wir sehen, dass AIRY mit einer anderen Modellvorstellung im Jahre 1838 asymptotisch eine identische Abstandsverteilung für die „Interferenzbögen“ des Regenbogens wie in Formel (3.49) erhielt.

3.2.2 Die skalare Beugungstheorie

Über 30 Jahre später gelang es dann drei ehemaligen „Cambridge Studenten“, eine neue *Interferenz - Beugungstheorie* des Regenbogens auf der Grundlage der alten Lichtwellentheorie von CHRISTIAAN HUYGENS (*Huygenssches Prinzip*) zu entwickeln. Einer war GEORGE BIDDELL AIRY⁴, der zweite war der Mineraloge WILLIAM HALLOWES MILLER (1801 - 1880) und der dritte war der Physiker und Chemiker RICHARD POTTER (1799 - 1886). Wie CARL BOYER in seinem Buch bemerkte, zeichnete

⁴George Biddell Airy (1801-1892). Zu seiner Zeit war Airy ein bedeutender und einflussreicher Wissenschaftler. 46 Jahre (1835-1881) lang war er der *Astronomer Royal* und von 1872 bis 1873 *Präsident der Royal Society*. Er schrieb 518 wissenschaftliche Artikel und 11 Bücher über Themen aus Astronomie, Physik, klassischer Geschichte, Technik und Geophysik (Gezeitentheorie)

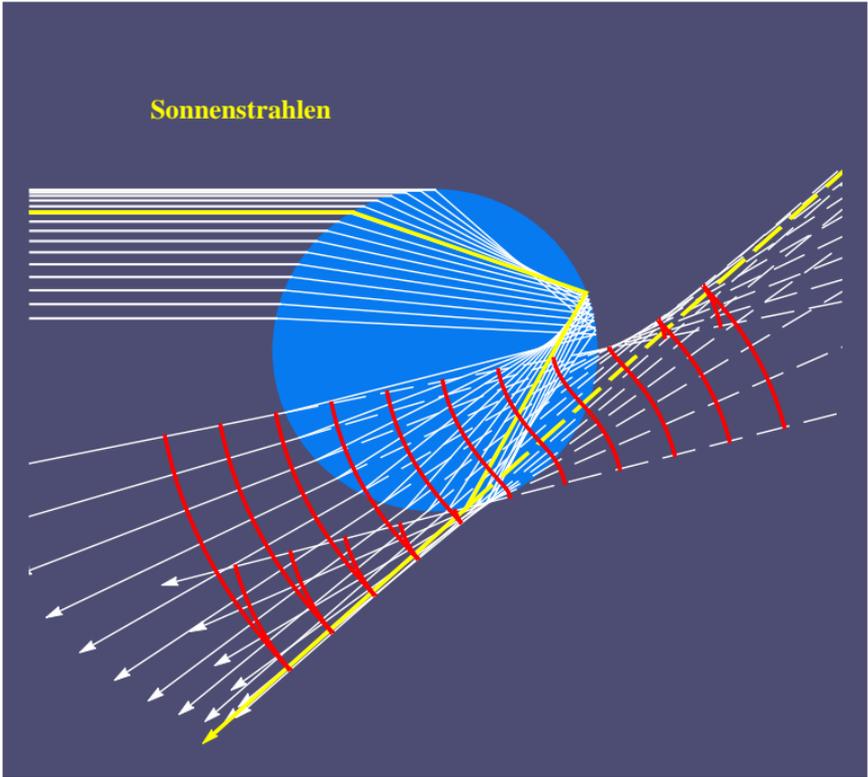


Fig. 3.15: Strahlengänge (weiß) und die dazu orthogonalen Wellenfronten (rot) für verschiedene Zeitpunkte beim ersten Regenbogen im AIRY- Modell: Die ausgehende Wellenfront wurde virtuell nach rückwärts verlängert. Der kritische Descartes'schen Winkel ist hier gelb dargestellt. Während beim Eintritt im oberen Teil des Tropfens die Wellenfronten planar sind, werden sie beim Austritt stark gewölbt und erleiden zudem eine **Bifurkation in Zipfelform** („cusp wave“). Bei der Berechnung der Wellenfront kommt es auf die optische Weglänge jedes Strahles an.

diese Männer zwei Eigenschaften aus: „Langlebigkeit“ und „Cambridge Training“. Das Problem war also die Berechnung der Lichtintensität in der Nähe einer „Kauistik“, also einer Einhüllenden von Lichtstrahlen (Brennkurve). Das Huygenssche Prinzip besteht darin, dass man eine beliebige *Wellenfront* als Ausgangspunkt von sekundären sphärischen Kugelwellen ansehen kann. Ist die Intensitätsverteilung entlang einer

Wellenfront bekannt, so kann die Intensitätsverteilung im übrigen Raum durch die Überlagerung von Kugelwellen genau rekonstruiert werden. für die *austretenden* Cartesischen Strahlen des ersten Regenbogens sind die dazugehörigen Wellenfronten in Fig. (3.15) in roter Farbe veranschaulicht. Nach dem Huygensschen Prinzip ist auch erlaubt, virtuelle nach rückwärts verlängerte Strahlen und ihre Wellenfronten zu betrachten.

Wir wollen die Berechnungen dieser kritischen Wellenfronten nach AIRY in moderner Form wiederholen und graphisch genauer veranschaulichen. In Figur (3.15) führen wir ein Koordinatensystem mit komplexen Zahlen ein. Im Ursprung liegt der Mittelpunkt des Tropfens, dessen Radius gleichzeitig die Längeneinheit ist. Mit den Winkeln α und β wie bei dem Modell der geometrischen Optik sind dann der Eintrittsort, der innere Reflexionsort und der Austrittsort eines Lichtstrahls durch die komplexen Zahlen

$$-e^{-i\alpha}, \quad +e^{i(2\beta-\alpha)}, \quad -e^{i(4\beta-\alpha)} \quad (3.50)$$

gegeben. Der Winkel β hängt hier natürlich über das Brechungsgesetz mit dem Winkel α zusammen (siehe auch Fig. (3.3)) . Der komplexe Zeiger des austretenden Lichtstrahles lautet

$$-e^{i(4\beta-2\alpha)}. \quad (3.51)$$

Die komplexe Gleichung für das Cartesischen Lichtstrahlenbüschel ist dann

$$-e^{i(4\beta-\alpha)} - \tau e^{i(4\beta-2\alpha)}, \quad (3.52)$$

wobei τ eine Art dimensionslosen Zeitparameter oder optischen Weglängenparameter darstellt, der für die reellen austretenden Strahlen positiv, für die rückwärtigen virtuellen Strahlen aber negativ ist. Die optische Weglänge eines Lichtstrahles, der nach Figur (3.13) von der Schranke W_1 nach einer Brechung und einer inneren Reflexion wieder den Tropfenrand erreicht, beträgt in Einheiten des Tropfenradius

$$s(\alpha, \beta) = 1 - \cos(\alpha) + 4 \mathbf{n} \cos(\beta) \quad (3.53)$$

Der effektive Laufzeitparameter τ in (3.52) ist dann gegenüber der Referenz des Descartes'schen Strahles

$$\tau = \tau' + s(\alpha_2, \beta_2) - s(\alpha, \beta) \quad (3.54)$$

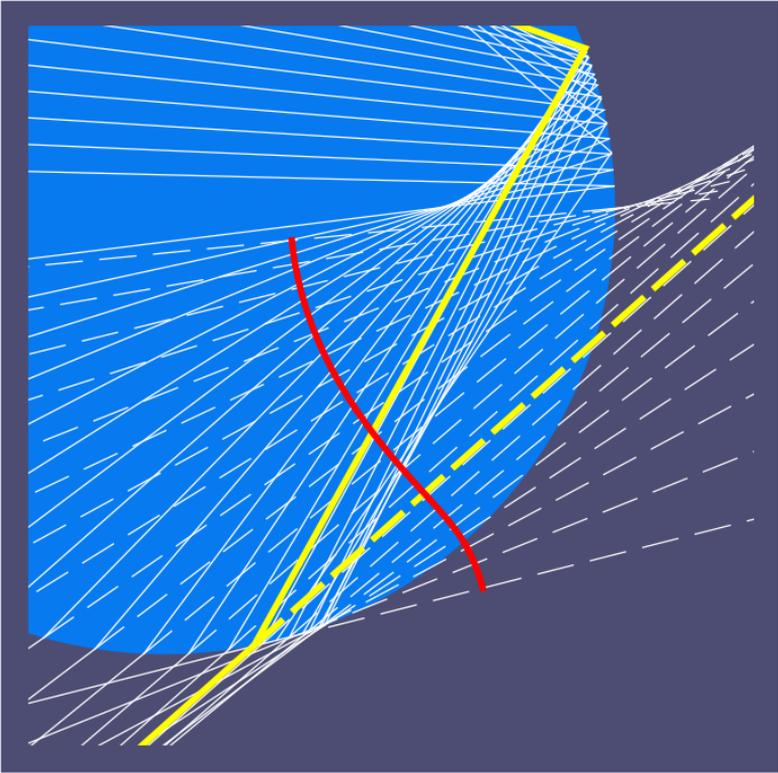


Fig. 3.16: Ausschnittsvergrößerung der nach rückwärts verlängerten virtuellen Lichtstrahlen um den Cartesischen Winkel (gelb gestrichelt). Rot eingetragen ist die von AIRY nach dem Huygensschen Prinzip gewählte anfängliche Wellenfront, welche in der Entfernung $\cos(\alpha_2)$ vom Austrittspunkt des Cartesischen Strahls in Einheiten des Tropfenradius den Strahl orthogonal schneidet. Die Wellenfront ist in unmittelbarer Umgebung des kritischen Strahls eine kubische Parabel.

Damit erhalten wir für die austretende kohärente Wellenfront die komplexe Funktion

$$\mathbf{w} = -e^{i(4\beta - \alpha)} - (\tau' + s(\alpha_2, \beta_2) - s(\alpha, \beta)) e^{i(4\beta - 2\alpha)}, \quad (3.55)$$

wobei τ' ein willkürlicher Kurvenparameter ist.

Mit dieser Gleichung wurden die Wellenfronten mit den kohärenten Eintrittsbedingungen in den Tropfen in Fig. (3.15) berechnet. Beim

Austritt erleidet die Wellenfront eine charakteristische *Bifurkation in Zipfelform*. In Fig. (3.16) ist die virtuell rückwärts liegende anfängliche Wellenfront von AIRY für $\tau' = -\cos(\alpha_2)$ zu sehen. Um die algebraische Struktur dieser Wellenfront genauer zu beschreiben, verschieben wir mit der Translation

$$\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{w} + e^{\iota(4\beta_2 - \alpha_2)} \quad (3.56)$$

den Austrittspunkt des Lichtstrahl in den Koordinatenursprung. Mit der Rotation und anschließenden Translation

$$\mathbf{w} \rightarrow \iota e^{-\iota(4\beta_2 - 2\alpha_2)} \mathbf{w} - \iota \cos(\alpha_2) \quad (3.57)$$

wird der Cartesische Strahl in die imaginäre Achse gedreht und die Wellenfront durch die Translation auf den Koordinatenursprung zurückgesetzt, so dass der nach rückwärts gerichtete Strahl in die positive Richtung dieser Achse zeigt. Mit alledem erhalten wir so für die Wellenfront \mathbf{w} die komplexe Zahl

$$\mathbf{w} = e^{-\iota(2\alpha - 2\alpha_2 + 4\beta_2 - 4\beta)} \{-\iota(2 \cos[\alpha] - 2 \cos[\alpha_2] - 4\mathbf{n} \cos[\beta] + 4\mathbf{n} \cos[\beta_2]) + \sin[\alpha]\} - \sin[\alpha_2] \quad (3.58)$$

Mit Hilfe der Größen (3.38), (3.39) und (3.40) in der YOUNG - schen Theorie können wir dies auch

$$\mathbf{w} = e^{-\iota(\Theta - \Theta_2)} [\iota(S - S_2) + b_2 + \xi] - b_2 \quad (3.59)$$

schreiben. In Fig. (3.17) ist diese Wellenfront für den Brechungsindex $\mathbf{n} = 4/3$ graphisch dargestellt. Am Cartesischen Strahl besitzt sie einen Wendepunkt. Dies sieht man sofort, wenn man die parametrische Darstellung von \mathbf{w} nach dem Parameter ξ in eine Taylorreihe entwickelt. Man erhält so mit Airy für die Wellenfront um die kritischen Descartes'schen Winkel den Ausdruck

$$\mathbf{w} = \xi - \frac{1}{6} \iota \Theta_2'' \xi^3 + \dots, \quad (3.60)$$

wobei Θ_2'' durch die Formel (3.33) gegeben ist. Die Wellenamplitude um den Cartesischen Strahl variiert somit genähert in der Form

$$\psi = \exp \left[-\frac{1}{6} \iota k a \Theta_2'' \xi^3 \right] + \dots \quad (3.61)$$

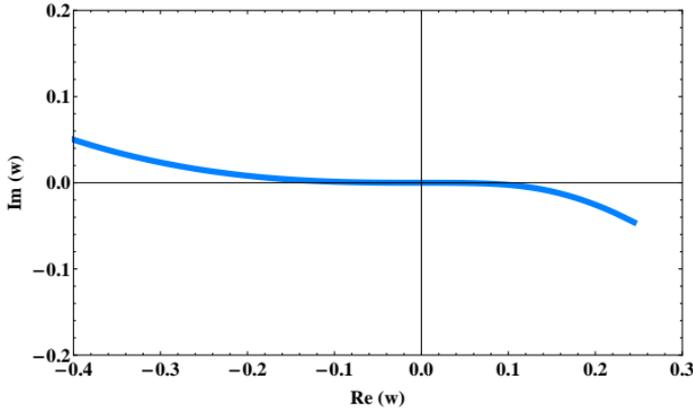


Fig. 3.17: Die durch die Formel (3.59) beschriebene Airy-Wellenfront in Einheiten des Tropfenhalbmessers a . Die gleiche Struktur ist in Fig. (3.16) gezeigt. Die Umgebung um den Koordinatenursprung wird durch (3.60) gut approximiert.

Die einfachste Version der skalaren Beugungstheorie lautet nach dem mathematischen Physiker G.R. KIRCHHOFF (1824-1887)([38]) jetzt

$$\frac{k}{2\pi i} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}}{R} \psi[\xi'] d\xi'. \quad (3.62)$$

Man erkennt hier das Huygenssche Prinzip der Lichtausbreitung, dass von jeder Stelle einer Wellenfront man sich wieder eine Kugelwelle vorstellen kann, wodurch die Lichtausbreitung fortschreitet. Für die Intensitätsverteilung des Hauptbogens ($p = 2$) $I_2(\Theta_2(\lambda) - \Theta)$, wobei $\Theta_2(\lambda)$ den Descartes'schen Winkel des Hauptbogens vom solaren Punkt bezeichnet, erhält man so mit G.B. AIRY den asymptotischen Ausdruck (*Kaustikrechnung für den Hauptbogen*)

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[i k a \left(\xi (\Theta - \Theta_2) - \frac{\Theta_2'' \xi^3}{6} \right) \right] d\xi \right|^2 \quad (3.63)$$

Das Integral könnte man mit der Methode der stationären Phase (Sattelpunktmethode) genähert berechnen. Mit der Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$ gilt nach einer geeigneten Substitution für den *optischen Wirkungsquerschnitt*

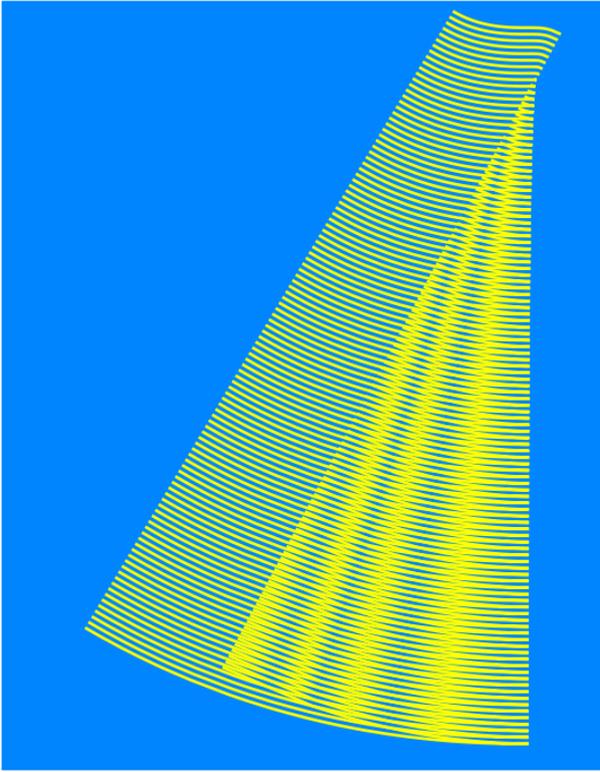


Fig. 3.18: Die sich überlagernden Airy'schen Wellenfronten beim Austreten aus dem Wassertropfen bilden durch ihre seltsame „Zipforn - Bifurkation“ (cusp wave) ein eigenartiges Wellenmuster, was in Analogie zu Wasserwellen als Entstehung der überzähligen Interferenz - Regenbögen gedeutet werden kann (siehe auch Fig. (3.15)). Man sieht auch, dass das erste stärkste Wellenmuster nicht in Richtung des Cartesischen Strahls parallel zum rechten Bildrand entsteht.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto (ka)^{1/3} \mathbf{Ai} \left[-\sqrt[3]{\left(\frac{2(ka)^2}{\Theta_2''}\right)} (\Theta - \Theta_2) \right]^2 \quad (3.64)$$

Die Funktion $\mathbf{Ai}(z)$ ist das berühmte *Regenbogenintegral* (Airy - Funktion oder heute Spezialfall der **Airy - Fock Funktionen**) und wird definiert

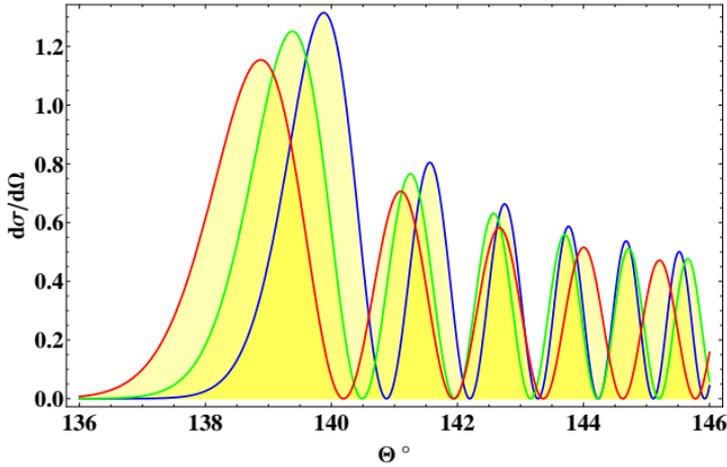


Fig. 3.19: Die Intensitätsverteilung des Streulichtes um den ersten Hauptbogen für Wassertropfen der Größe $a = 100 \mu\text{m}$ bei den drei Wellenlängen $\lambda = 0.650 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.510 \mu\text{m}$ und $\lambda = 0.440 \mu\text{m}$, berechnet mit (3.64). Die höchste Intensität wird bei jeder Wellenlänge nicht am Descartes'schen Winkel erreicht. Je kleiner das Verhältnis $2\pi a/\lambda$, desto größer werden die Abstände der Beugungsringe. Die endgültigen Farben des Regenbogens bei einem bestimmten Winkel entstehen in guter Näherung durch die Mischung dieser unterschiedlichen Farbanteile (RGBColor).

durch ([2], [3])

$$\mathbf{Ai}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \left[z u + \frac{1}{3} u^3 \right] du. \quad (3.65)$$

Die asymptotische Darstellung dieser Funktion für $z \rightarrow -\infty$ lautet

$$\mathbf{Ai}(-z)_{z \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi} z^{1/4}} \cos \left[\frac{2}{3} z^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right] \quad (3.66)$$

Einsetzen der physikalisch - optischen Größen führt ohne die *Amplitudenmodulation* zur Formel für die Intensitätsschwankungen in den Interferenzbögen

$$\sim \text{COS} \left[\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\Theta_2''}} k a (\Theta - \Theta_2)^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right]^2 \quad (3.67)$$

Die Winkelabstände der *Beugungs-Interferenzbögen* werden also entscheidend durch das Verhältnis von $ka = 2\pi a/\lambda$, dem Tropfenhalbmesser zur Wellenlänge des Lichtes, bestimmt. Das Ergebnis entspricht so auch der *modifizierten Young Theorie*. Beim Hauptbogen liegen die Interferenz - Beugungsringe *innerhalb* des kritischen Descartes'schen Winkels ($\Theta > \Theta_2$). Mit dem Airy-Modell ist es so auf neue Art möglich, die inneren Interferenzbögen des Hauptbogens zu verstehen. Dies gilt insbesondere für den **Nebelbogen** am Tage und den **Nebel - Mondbogen**, den man nur bei Nacht um den Vollmond beobachten kann.

3.2.3 Die Farbmeterik des Regenbogens

In dem Buch „*Gespräche mit Goethe in den letzten Jahren seines Lebens*“ von JOHANN PETER ECKERMANN (1792-1854) werden vom 1. Februar 1827 die folgenden Worte GOETHES zitiert:

...In der Farbenlehre steht mir noch die Entwicklung des Regenbogens bevor, woran ich zunächst gehen werde. Es ist dieses eine äußerst schwierige Aufgabe, die ich jedoch zu lösen hoffe. Es ist mir aus diesem Grunde lieb, jetzt mit Ihnen die „Farbenlehre“ wieder durchzugehen, wodurch sich denn, zumal bei ihrem Interesse für die Sache, alles wieder anfrischt...

Und am 1. März 1827 folgt:

... Sodann verhandelten wir viel über die Farbenlehre, über die subjektiven prismatischen Versuche und über die Gesetze, nach denen der Regenbogen sich bildet. Er freute sich über meine fortwährend sich vergrößernde Teilnahme an diesen schwierigen Gegenständen...

Schließlich zitiert J.P. ECKERMANN am 21. Dezember 1831 Goethe mit den Worten:

... So wissen wir zum Beispiel im allgemeinen recht gut, dass die grüne Farbe durch eine Mischung des Gelben und Blauen entsteht: allein bis einer sagen kann, er begreife das Grün des Regenbogens, oder das Grün des Laubes, oder das Grün des Meerwassers, dieses erfordert ein so allseitiges Durchschreiten

des Farbenreiches und eine daraus entspringende solche Höhe von Einsicht, zu welcher bis jetzt kaum jemand gelangt ist...

Diese Zitate sollen genügen, um zu zeigen, welches Interesse und welche Mühen Goethe darauf verwendet hat, mit seiner *Farbenlehre* insbesondere das „Wesen“ der Regenbogenfarben zu erklären. R. SAFRANSKI schreibt in seiner Goethe-Biographie ([68]):

...Die Beschränkung auf die Welt der Wirkungen bei Goethe weist einerseits die metaphysische Spekulation zurück. Zurückgewiesen aber wird auch die Verlockung, aus dem Kreis der Anschaulichkeiten herauszutreten. Einspruch also zuerst gegen die metaphysische und dann gegen die mathematische Verflüchtigung der Wirklichkeit. Das eine Mal geht es gegen die ehrwürdige Platonische Tradition, das andere Mal gegen den Geist der von NEWTON angestoßenen modernen Naturwissenschaft, die sich im Unanschaulichen verliert. Mit welcher gigantischen Reichweite man vom Unanschaulichen her, in das man sich in der Moderne hinausgedacht hat, machtvoll in die anschauliche Wirklichkeit zurückwirken kann, ahnte Goethe zu diesem Zeitpunkt noch nicht...

Anerkennung erzielte GOETHE so nur in der Kategorie *Physiologische Farben*. Die Ergebnisse seiner *Physischen Farbentheorie* sah Goethe irrtümlich als Widerlegung der Newton'schen Farbentheorie an.⁵

Eine erste physikalische Erklärung der Farben des Regenbogens auf der Grundlage der Wellenoptik und der Dreifarbenlehre von MAXWELL - HELMHOLTZ gelang erst J.M. PERNTER 1897 mit Hilfe der skalaren Beugungstheorie von G.B. AIRY ([58]). PERNTER gelang es, für unterschiedliche Tröpfchengrößen a die Farben des Regenbogens und seiner *Interferenzbögen* um den ersten Descartes'schen Winkel abzuleiten. Der Rechenaufwand war aber erheblich. PERNTER benutzte hierzu die Dreifarbenlehre und die *Farbgleichungen nach J.C. MAXWELL und H. HELMHOLTZ*. J.C. MAXWELL formulierte 1861 das RGB - System **Rot** = 630nm, **Grün** = 528nm und **Blau** = 457nm. E. Buchwald (1886 - 1975) hat diese Farbrechnungen des Regenbogens dann mit neueren Methoden

⁵Goethe selbst legte im späteren Leben auf seine Farbenlehre mehr Wert als auf sein gesamtes literarisches Schaffen.

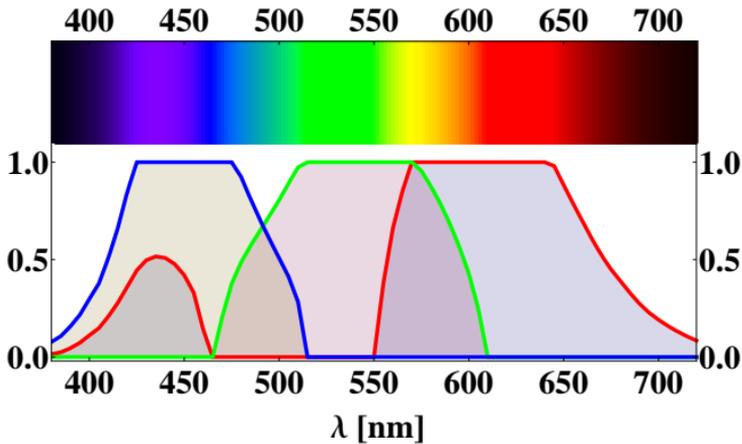


Fig. 3.20: Das standardisierte CIE-Farbspektrum von 1931 im XYZ - Farbraum, hier umgerechnet in den RGB - Farbraum. Der untere Teil der Graphik zeigt die **RGB** - Farbwertfunktionen (RGB - Koordinaten von 0 bis 1) als Funktion der Wellenlänge λ in Nanometern, nichtlinear korrigiert durch den Gammawert $\gamma = 2.2$ für Standardmonitore. Der obere Teil zeigt das resultierende Mischfarbenspektrum, wie es ein „mittleres menschliches Auge“ empfindet.

(CIE - Standardfarbtafel) 1946 verbessert ([18]). Um diese Rechnungen mit heutigen elektronischen Hilfsmitteln zu wiederholen, müssen zunächst für jede Wellenlänge die entsprechenden Beiträge (Farben) des **RGB** - Farbsystems „Rot, Grün, Blau“ aus dem CIE - Tristimulus - System **XYZ** berechnet und dann mit einer nichtlinearen „Gammakorrektur“ für Monitore versehen werden. Die in der Literatur nicht ganz eindeutigen Funktionen $\mathbf{R}(\lambda)$, $\mathbf{G}(\lambda)$ und $\mathbf{B}(\lambda)$ sind fundamental für die Berechnung der Mischfarben in den Interferenzbögen eines Regenbogens. Das CIE - Normfarbsystem wurde von der Internationalen Beleuchtungskommission (CIE - *Commission internationale de l'éclairage*) definiert, um eine Relation zwischen der menschlichen Farbwahrnehmung (Farbe) und den physikalischen Ursachen des Farbreizes (Farbvalenz) herzustellen. Die durch zahlreiche Messungen festgelegten XYZ - Farbwerte als Funktion der Wellenlänge sind zusammen mit den D65 - Standardbeleuchtungen in Tabellen festgelegt. Durch eine Matrixtransformation können diese Werte dann in das RGB - System umgerechnet werden. Die dazu nötige

Transformation lautet

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +3.2406 & -1.5372 & -0.4986 \\ -0.9689 & +1.8758 & +0.0415 \\ +0.0557 & -0.2040 & +1.0570 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

Entstehen dabei Werte über 1 oder unter 0, werden sie auf ihren Maximalwert 1 oder ihren Minimalwert 0 abgeschnitten. Um den heutigen elektronischen Darstellungen (HDV - Monitore) gerechnet zu werden, muss anschließend noch für jeden RGB - Farbkanal eine *Gamma Korrektur* durchgeführt werden, welche die Farbwerte nichtlinear in Richtung des Maximalwertes 1 schiebt. für diese nichtlineare Gamma - Korrektur wurde hier die Funktion

$$\gamma_c(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 0 \\ -0.055 + 1.055 x^{0.416}; & 0 < x < 0.0031308 \\ 1; & 0.0031308 \leq x < 1 \\ & x \geq 1 \end{cases} \quad (3.69)$$

benutzt ([20]). Jeder der drei berechneten Farbkoordinaten wird also noch transformiert zu $(R, G, B) \rightarrow (\gamma_c(R), \gamma_c(G), \gamma_c(B))$. Mit dem Begriff *Gamut* (Tonleiter, Farbskala) wird dann die Menge aller Farben bezeichnet, die ein Gerät (z. B. ein Monitor, Drucker, Scanner, Film) darstellen, wiedergeben oder aufzeichnen kann. Reines *Rot* ($\lambda = 630\text{nm}$) bedeutet $(R, G, B) \rightarrow (1, 0, 0)$, reines *grün* ($\lambda = 528\text{nm}$) $(R, G, B) \rightarrow (0, 1, 0)$ und reines *blau* ($\lambda = 457\text{nm}$) bedeutet $(R, G, B) \rightarrow (0, 0, 1)$. Die Farbe *schwarz* ist jetzt $(R, G, B) \rightarrow (0, 0, 0)$, reines *weiß* $(R, G, B) \rightarrow (1, 1, 1)$.

Die eigentliche Berechnung der Tristimulus - Farbwerte XYZ des Hauptbogens geschieht nun mit den drei Formeln

$$X(\Theta) = \frac{\sum_i I_2(\Theta, \lambda_i) X_{CIE}(\lambda_i) I_{D65}(\lambda_i)}{\sum_i X_{CIE}(\lambda_i) I_{D65}(\lambda_i)} \quad (3.70)$$

$$Y(\Theta) = \frac{\sum_i I_2(\Theta, \lambda_i) Y_{CIE}(\lambda_i) I_{D65}(\lambda_i)}{\sum_i Y_{CIE}(\lambda_i) I_{D65}(\lambda_i)} \quad (3.71)$$

$$Z(\Theta) = \frac{\sum_i I_2(\Theta, \lambda_i) Z_{CIE}(\lambda_i) I_{D65}(\lambda_i)}{\sum_i Z_{CIE}(\lambda_i) I_{D65}(\lambda_i)}. \quad (3.72)$$

Die Zahlen für $XYZ_{CIE}(\lambda_i)$ und die Beleuchtungsstärke $I_{D65}(\lambda_i)$ müssen aus den CIE - Standardtabellen entnommen werden. Mit den XYZ

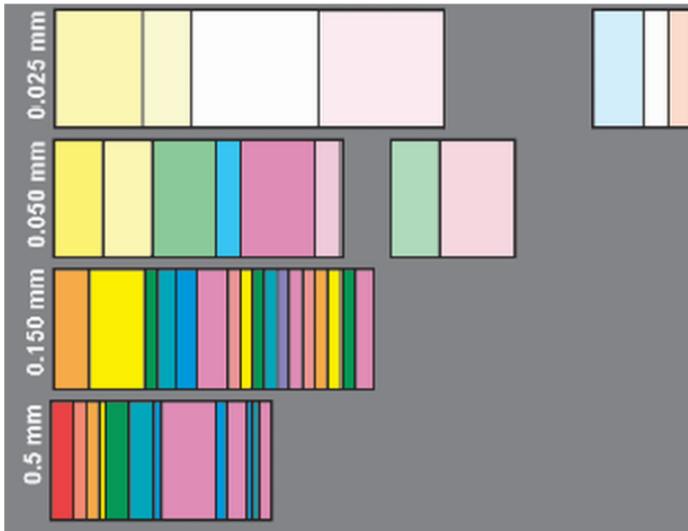


Fig. 3.21: Erste Farberechnungen des Hauptregenbogens nach der Airy - Beugungstheorie für vier unterschiedliche Tropfenradien von J.M. PERNTER 1905 ([60]). Der Rechenaufwand war trotz vereinfachter Farbtheorie für damalige Verhältnisse erheblich.

- Farbraum kann man in den RGB - Farbraum mit der obigen Matrixgleichung umrechnen. Die sich daraus ergebenden farbigen Spektren des Regenbogens sind in den Figuren (A.3 - A.7) im Anhang (A.3) dargestellt. J.M. PERNTER berücksichtigte 1902 auch die endliche Ausdehnung der Sonnenscheibe; ein Effekt, auf den zuvor die Japaner AICHI und TANAKA-DATE aufmerksam gemacht hatten. Dadurch wird nämlich die Anzahl der sichtbaren Interferenzbögen und deren Farbkontraste etwas verwischt.

3.3 Die elektrodynamische Streutheorie

Doch auch das skalare wellenoptische Modell nach AIRY ist – strenggenommen – eine Näherung der wahren Verhältnisse im Rahmen einer linearen elektrodynamischen Feldtheorie nach J.C. MAXWELL mit Randbedingungen für den elektrischen und magnetischen *Vektor* des klassischen Lichtwellenfeldes auf einer Kugeloberfläche (Wassertropfen). Das Airy - Modell erklärt zum Beispiel nicht genau die Details der Polarisation des

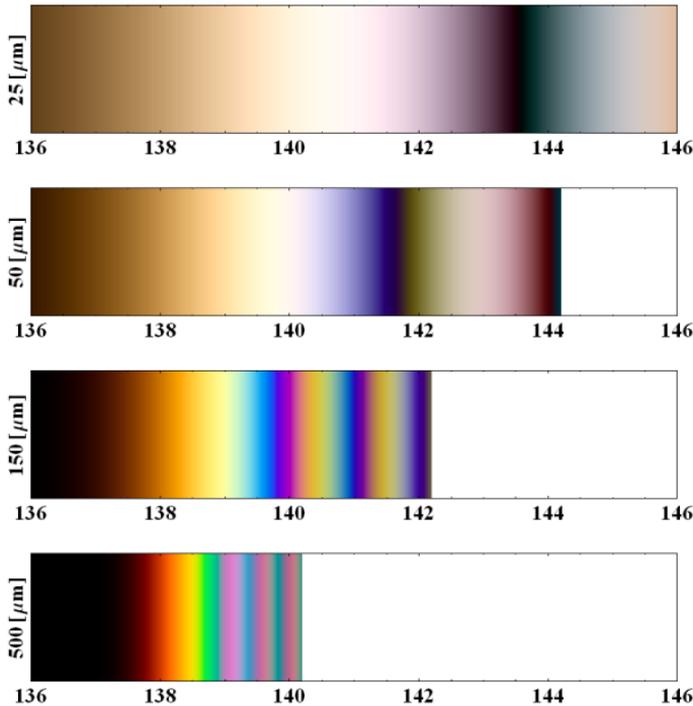


Fig. 3.22: Wiederholung der Farbberechnungen des Hauptregenbogens von J.M. PERNTER für vier unterschiedliche Tropfenradien nach der neuen Farbtheorie. Gegenüber der alten Berechnung von J.M. PERNTER gibt es im Detail einige kleine Unterschiede. Im Anhang (A.3 sind noch ausführlichere Tafeln zu finden.

gestreuten Regenbogenlichts.

Erst 1908 gelang es GUSTAV MIE (1868-1957) auf der Grundlage der Maxwell'schen Theorie der Elektrodynamik eine vollständige *Streutheorie einer elektromagnetischen Welle* an einer homogenen Kugel mit dem komplexen Brechungsindex $\mathbf{N} = \mathbf{n} + i\kappa$ (Brechzahl und Extinktionszahl) abzuleiten (*Mie - Reihen*)([47]). Im gleichen Jahr gelang es PETER DEBYE (1884 - 1966), dass entsprechende Streuproblem für den Zylinder ebenfalls streng zu lösen (*Debye - Reihen*)([23]).

Auf die Herleitung der Endformeln verzichten wir hier. Stattdessen geben wir hier die Endresultate an, die etwas einfacheren Formeln von

Debye für das Zylinderproblem sollen später folgen. Erst um 1980 zeigte sich durch numerische Rechnungen, dass die **Airy - Theorie** eine sehr gute asymptotische Approximation der **Mie - Theorie** darstellt und auch für sehr kleine Wassertropfen gültig ist. Ein tieferes physikalisches Verständnis - besonders der Glorie - ist aber bis heute schwierig geblieben.

Die Theorie von GUSTAV MIE beruht auf der vektoriellen elektrodynamischen Feldtheorie des Lichtes. Man geht davon aus, dass eine ebene elektromagnetische Welle aus dem Unendlichen auf eine homogene isotrope Kugel vom Radius a trifft und dort erzwungene sekundäre elektromagnetische Schwingungen innerhalb und außerhalb der Kugel (Wassertropfen) anregen. Für die Intensitäten des *unpolarisierten* I_{UP} Lichtstrahls, des *senkrecht polarisierten* Lichtstrahls I_{\perp} und des *parallel polarisierten* Lichtstrahls I_{\parallel} im Fernfeld der Kugel gelten die Definitionen (Θ ist jetzt wie früher der Streuwinkel, gemessen vom solaren Punkt im Intervall $0 \leq \Theta \leq \pi$)

$$I_{\perp} \propto |S_{\perp}(\Theta)|^2, \quad I_{\parallel} \propto |S_{\parallel}(\Theta)|^2 \quad (3.73)$$

und damit

$$I_{UP} \propto \frac{1}{2} (|S_{\perp}(\Theta)|^2 + |S_{\parallel}(\Theta)|^2). \quad (3.74)$$

für den Grad der Polarisation gilt

$$p = \frac{|S_{\perp}(\Theta)|^2 - |S_{\parallel}(\Theta)|^2}{|S_{\perp}(\Theta)|^2 + |S_{\parallel}(\Theta)|^2} \quad (3.75)$$

Hauptproblem sind die Streuamplituden $S_{\perp}(\Theta)$ und $S_{\parallel}(\Theta)$. für sie gilt die Entwicklung

$$S_{\perp}(\Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [A_n \pi_n(\Theta) + B_n \tau_n(\Theta)] \quad (3.76)$$

und

$$S_{\parallel}(\Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [B_n \pi_n(\Theta) + A_n \tau_n(\Theta)] \quad (3.77)$$

Dabei gilt für die zwei azimuthalen Winkelfunktionen

$$\pi_n(\Theta) = \frac{\mathbf{P}_n^{(1)}(\cos(\Theta))}{\sin(\Theta)}, \quad (3.78)$$



Fig. 3.23: Ein Mondnebelbogen, erzeugt vom tiefstehenden Vollmond an einer Nebelwand bei Nacht. Auch in diesem Bild ist ein Interferenzbeugungsring innerhalb des Hauptbogens zu erahnen. Noch vor über 2300 Jahren beklagte sich Aristoteles (384-322), dass er innerhalb von fünfzig Jahren nur zweimal ein solches Phänomen gesehen hätte. Heutzutage werden nur wenige Menschen in ihrem Leben ein solch zauberhaftes Erscheinung mit eigenen Augen zu sehen bekommen. (Foto: Andre Wagner)

$$\tau_n(\Theta) = \frac{d\mathbf{P}_n^{(1)}(\cos(\Theta))}{d\Theta}, \quad (3.79)$$

wobei $\mathbf{P}_n^m(z)$ zugeordnete Kugelfunktionen oder verallgemeinerte Legendrepolynome darstellen. Mit $m = 0$ werden sie auch (nach Thomson und Tait) zonale Kugelfunktionen, mit $m \neq 0$ auch tesserale Kugelfunktionen genannt. für die obigen Funktionen gelten die asymptotischen Darstellungen ($n \rightarrow \infty$)

$$\pi_n(\Theta) \sim \sqrt{\frac{2(n+1/2)}{\pi \sin(\Theta)^3}} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \Theta + \frac{\pi}{4} \right] \quad (3.80)$$

$$\tau_n(\Theta) \sim \sqrt{\frac{2(n+1/2)^3}{\pi \sin(\Theta)}} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \Theta + \frac{3\pi}{4} \right]. \quad (3.81)$$

Die Umgebungen von $\Theta = 0$ und $\Theta = \pi$ sind dabei ausgenommen. Die

Koeffizienten A_n und B_n der *Streumatrix* sind der eigentlich komplizierteste Teil der Mie-Theorie und das Bestimmende im Streuprozess. Das Lichtwellenfeld besteht aufgrund der obigen Entwicklung aus sehr vielen *Partialwellen*, wobei physikalisch die Koeffizienten A_n die *elektrischen Partialwellen* und die Koeffizienten B_n die *magnetischen Partialwellen* beschreiben. Eine gestreute Partialwelle besteht somit aus einem elektrischen und magnetischen Multipolfeld. Mit dem Tropfenradius a definiert man jetzt die *äußere Wellenzahl*

$$X = k a \equiv \frac{2\pi a}{\lambda}. \quad (3.82)$$

Dann gilt

$$A_n = \frac{\psi'_n(\mathbf{n} X) \psi_n(X) - \mathbf{n} \psi_n(\mathbf{n} X) \psi'_n(X)}{\psi'_n(\mathbf{n} X) \zeta_n(X) - \mathbf{n} \psi_n(\mathbf{n} X) \zeta'_n(X)} \quad (3.83)$$

und

$$B_n = \frac{\mathbf{n} \psi'_n(\mathbf{n} X) \psi_n(X) - \psi_n(\mathbf{n} X) \psi'_n(X)}{\mathbf{n} \psi'_n(\mathbf{n} X) \zeta_n(X) - \psi_n(\mathbf{n} X) \zeta'_n(X)} \quad (3.84)$$

wobei $\mathbf{n} X$ die *innere Wellenzahl* des Wassertropfens ist. Die Funktionen $\psi(z)$ und $\zeta(z)$ sind modifizierte sphärische Besselfunktionen (Riccati - Bessel - Hankel Funktionen) und werden in der Literatur definiert durch

$$\psi_n(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} \mathbf{J}_{n+1/2}(z) \quad (3.85)$$

und

$$\zeta_n(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} (\mathbf{J}_{n+1/2}(z) + \imath \mathbf{Y}_{n+1/2}(z)) \quad (3.86)$$

oder einfach

$$\zeta_n(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} \mathbf{H}\mathbf{1}_{n+1/2}(z). \quad (3.87)$$

Die beiden klassischen Funktionen $\mathbf{J}_n(z)$, $\mathbf{Y}_n(z)$ und die Hankelfunktion erster Art $\mathbf{H}\mathbf{1}_n(z)$ sind auch für *komplexe Werte* der kontinuierlichen Variablen $n \rightarrow \nu$ und z definiert. Dies ist dann von Bedeutung, wenn eine reelle Summe über ganze Zahlen durch eine Kontourintegration in der komplexen ν - Ebene ersetzt werden kann. Mit dem obigen Formelsatz ist das Streuproblem von Licht an einem *kleinen Wassertropfen* und



Fig. 3.24: Ein Nebel-Regenbogen, erzeugt von Wassertropfen mit einem Radius von etwa $15\mu\text{m}$ (siehe Fig. (A.5)). Hier kann man die Interferenz - Beugungsringe der Wellenoptik, theoretisch durch Airy 1838 erklärt (Regenbogenintegral), deutlich erkennen. Das Descartes'sche Modell der geometrischen Optik ist hier völlig unzureichend geworden. (Foto: NASA - picture of the day)

somit das Problem des **Regenbogens** und auch der physikalisch nur ansatzweise verständlichen **Glorie im Prinzip** gelöst.

Doch die eigentlichen Schwierigkeiten beginnen bei der numerischen Auswertung der Mie - Reihen. Um zum Beispiel für einen Wassertropfen von $a = 500\mu\text{m}$ die Streuamplituden $S_1(\Theta)$ und $S_2(\Theta)$ zu berechnen, müssen mindestens 5000 Reihenglieder aufsummiert werden. Für diese Anzahl $N_{\text{Mie-Terme}}$ der benötigten Terme gilt mit dem Größenparameter X die untere Abschätzung ([9])

$$N_{\text{Mie-Terme}} \approx X + 4X^{1/3} + 2 \quad (3.88)$$

Eine ähnliche Abschätzung geben auch Khare und Wiscombe um 1980, basierend auf umfangreichen numerischen Rechnungen ([83]). Schon bei A. SOMMERFELD liest man (*Vorlesungen über Theoretische Physik*; Band 4 Optik, Paragraph 38: Über exakt lösbare Beugungsprobleme): *Das einfachste Beispiel dafür ist die Kugel, bei der sich das elektromagnetische Feld durch Reihen darstellen läßt, die nach Kugelfunktionen und Besselfunktionen mit halbzahligem Index fortschreiten. G. MIE hat diese*

Reihen diskutiert für kolloidale Teilchen beliebigen Materials. Aber hier zeigt sich schon die mathematische Schwierigkeit, die dieser „Methode der Reihenentwicklung“ allgemein anhaftet: für größere Teilchen konvergieren diese Reihen so schlecht, dass sie praktisch unbrauchbar werden. Andernfalls hätten wir in ihnen auch numerisch eine vollständige Lösung des Regenbogenproblems. . .

Dasselbe wie von der Kugel gilt auch vom kreiszylindrischem Draht, bei dem das Feld durch Entwicklungen nach trigonometrischen und Besselfunktionen vom ganzen Index darstellbar ist. Diese Reihen sind vollkommen geeignet für das Gebiet der Hertz'schen Wellen, versagen aber im optischen Gebiet.

Debye hat diese Schwierigkeit durch seine berühmten asymptotischen Darstellungen der Besselfunktionen gemeistert. Das Problem des parabolischen Zylinders ist von Epstein auf Hermitesche Funktionen zurückgeführt. . . .

1937 gelang es den Physikern B. VAN DER POL und H. BREMMER mit den *Debye'schen Reihen* für eine Kugelstreuung und der Methode der stationären Phase zu zeigen, dass die *Airy-Theorie* als Grenzfall der Mie-Theorie aufgefasst werden kann. Mit Hilfe von Computerberechnungen der Mie-Reihen zeigte sich ab etwa 1980 (siehe Bohren, Huffmann ([9]), dass zwar die Airy-Theorie approximativ erhalten bleibt, aber zusätzliche hochfrequente chaotische „Kräuselwellen“ der klassischen Airy-Funktion überlagert sind (Reflektierte Photonen an der Tropfenoberfläche), welche in einem natürlichen Regenbogen natürlich nicht beobachtbar sind.

Um zu einem tieferen physikalischen Verständnis dieser Streu-Phänomene zu gelangen, hatten KHARE und H.M. NUSSENZVEIG 1969 die glückliche Idee, die schwerfälligen *diskreten Summen* in den Mie-Reihen zunächst durch eine *Sommerfeld - Watson Transformation* in ein komplexes Kontourintegral zu verwandeln (*Regge - Kalkül*) und die Konvergenz der aufsummierten Residuen durch eine spezielle Poisson'schen Summationsformel der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{g} \left(n + \frac{1}{2} \right) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{i\pi m} \int_0^{\infty} \mathbf{g}(\nu) e^{2\pi i m \nu} d\nu \quad (3.89)$$

erheblich zu verbessern. Mit einer leichten Umformung kann dies zu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{g}\left(n + \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \mathbf{g}(\nu) d\nu + 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m \int_0^{\infty} \mathbf{g}(\nu) \cos(2\pi m \nu) d\nu \quad (3.90)$$

zusammengefasst werden. Durch Umformung des Integrationsweges in die komplexe ν - Ebene (modifizierte Watson - Transformation) wird es dann mit dem Residuensatz der Funktionentheorie im Integranden auf die Polstellen des Integranden („Regge - Pole“) und auch auf spezielle „Sattelpunkte“ oder „stationäre Phasenpunkte“ ankommen (Methode nach **Chester-Friedman-Ursell** (CFU; 1957)). Einfache Versionen hierzu hatten schon der Mathematiker Poincare und 1918 Watson beim Studium der Ausbreitung von Radiowellen entlang der Erdoberfläche entwickelt (erläutert auch von A. Sommerfeld in seinen Vorlesungen über Theoretische Physik ([80];[69])). Je nachdem ob man die *Mie - Reihen* oder die modifizierten *Debye - Reihen* zur Darstellung der Feldamplituden benutzt, ergeben sich unterschiedliche Polstellen in der komplexen ν Ebene. Der eine Faktor mit den „Regge - Polen“ (*stehende Wellen*) lautet

$$\frac{1}{\mathbf{J}_{\nu+1}(\mathbf{n} X) \mathbf{H1}_{\nu}(X) - \mathbf{n} \mathbf{J}_{\nu}(\mathbf{n} X) \mathbf{H1}_{\nu+1}(X)}. \quad (3.91)$$

Im Bild der Debye'schen Reihenentwicklung (*laufende Wellen*) entsteht dagegen mit den Hankelfunktionen erster und zweiter Art der Amplitudenfaktor

$$\frac{1}{\mathbf{H1}_{\nu}(X) \mathbf{H2}_{\nu+1}(\mathbf{n} X) - \mathbf{n} \mathbf{H1}_{\nu+1}(X) \mathbf{H2}_{\nu}(\mathbf{n} X)}. \quad (3.92)$$

Physikalisch erinnert dieses Vorgehen an die Bestimmung der Eigenfrequenzen oder Resonanzstellen eines Oszillators unter äußerer Krafteinwirkung. Die Polstellen der obigen Funktionen hängen offensichtlich nur von der Brechzahl \mathbf{n} und dem Größenparameter $X = k a \equiv 2\pi a/\lambda$ ab. Der Imaginärteil der Polstellen bedeutet dabei physikalisch die Dämpfung einer „Kriechwelle“ an der Oberfläche des Wassertropfens. Noch um 1980 hieß es vielfach, dass die extrem schlecht konvergenten Mie - Reihen sich verhalten würden wie *an elephant that would never fly*. Doch der unerschöpflichen mathematischen Möglichkeiten und der Entdeckung elektronischer Halbleiter ist es heute zu verdanken, dass der „ *schwerfällige Elefant das Fliegen inzwischen gelernt hat*“.

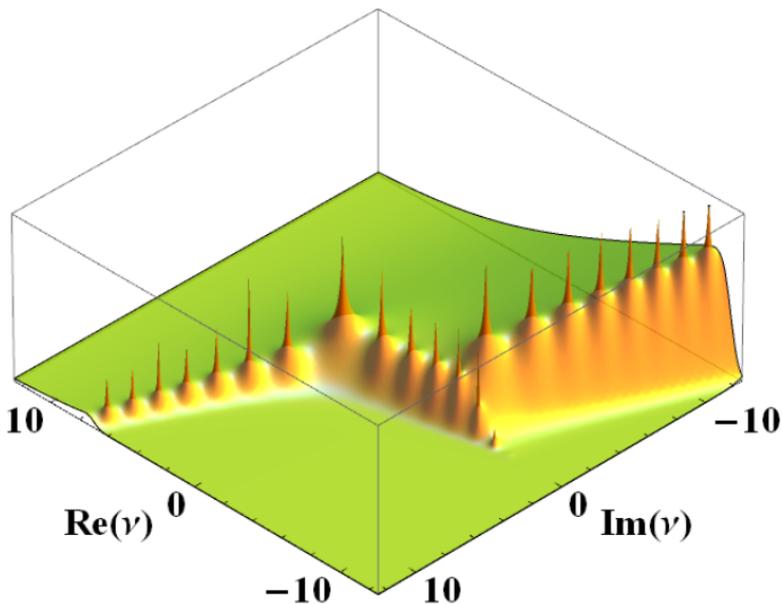


Fig. 3.25: Der logarithmisch skalierte Betrag der Funktion (3.91) in der komplexen ν - Ebene für den Brechungsindex $\mathbf{n} = 4/3$ und die äußere Wellenzahl $X = \pi$. Die nahe bei $\Im(\nu) = 0$ liegenden Polstellen gehören zu den „breiten“ Resonanzen, die davon weggehenden gehören zu den „Oberflächenwellen“ („Kriechwellen“) des Wassertropfens. Mehr Details der CAM - Streutheorie in ([1]).

3.4 Die Polarisation des Regenbogens

Schon zu Beginn des 19. Jahrhunderts wurde festgestellt, dass das Licht des Regenbogens *polarisiert* ist. Entdeckt wurde es wohl von BIOT in den Jahren 1811 - 1812, genauer studiert von BREWSTER 1812 - 1816, GOETHE zwischen 1817 und 1820, ARAGO im Jahre 1828 und später von BILLET zwischen 1863 und 1868 ([41]). Mit Hilfe der *Fresnel'schen Formeln*, angewandt auf die Descartes'schen Lichtstrahlen, ist es möglich, die Intensitäten und den Polarisationsgrad von Regenbögen der Ordnung $p = N + 1$ genähert zu berechnen. Mit den Formeln (3.11,3.12) gilt für die Wellenamplituden senkrecht (\perp) wie parallel (\parallel) zur Einfallsebene

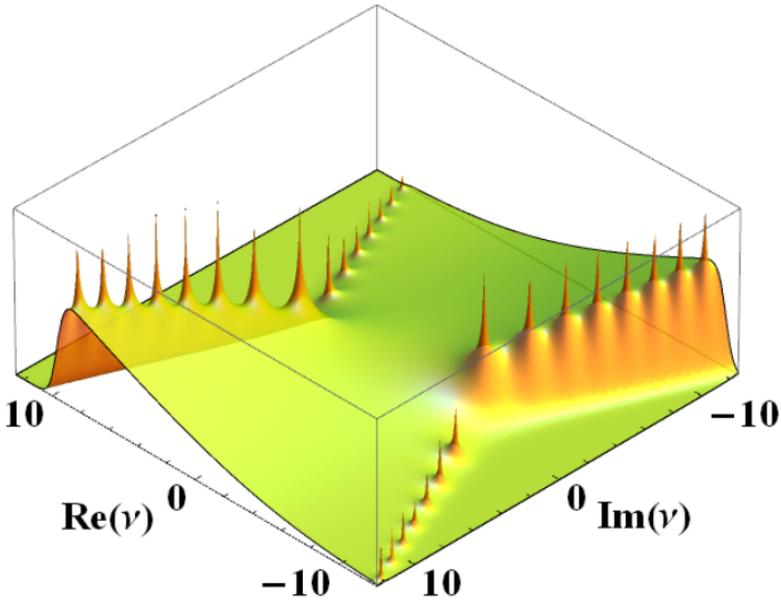


Fig. 3.26: Der logarithmisch skalierte Betrag der Funktion (3.92) in der komplexen ν -Ebene für den Brechungsindex $\mathbf{n} = 4/3$ und die äußere Wellenzahl $X = \pi$. Ziel der Watson - Sommerfeld Transformation ist es, in dieser Ebene einen Integrationsweg längst des „steilsten Abstieges“ und die Beiträge der Residuen der Polstellen zu finden. Mehr Details der CAM - Theorie nach Nussenzeig in ([1]).

nach $N = p - 1$ inneren Reflexionen ([41])

$$S_{\perp}(N) = \left[1 - \left(\frac{p-1}{p+1} \right)^2 \right] \left(\frac{p-1}{p+1} \right)^N \quad (3.93)$$

sowie

$$S_{\parallel}(N, \mathbf{n}) = \left[1 - \left(\frac{\mathbf{n}^2 - p}{\mathbf{n}^2 + p} \right)^2 \right] \left(\frac{\mathbf{n}^2 - p}{\mathbf{n}^2 + p} \right)^N \quad (3.94)$$

Der letzte Ausdruck für die Amplitude kann auch negativ sein. Diese beiden Ausdrücke können dann mit F. ULIU ([76]) sehr einfach reduziert werden zu

$$S_{\perp}(N) = \frac{4(N+1)N^N}{(N+2)^{N+2}}, \quad (3.95)$$

$$S_{\parallel}(N, \mathbf{n}) = \frac{4\mathbf{n}^2(N+1)(\mathbf{n}^2 - (N+1))^N}{(\mathbf{n}^2 + N + 1)^{N+2}}. \quad (3.96)$$

Die einzelnen Intensitäten sind dann durch

$$I_{\perp} = |S_{\perp}|^2, \quad I_{\parallel} = |S_{\parallel}|^2 \quad (3.97)$$

gegeben. Richtig verstanden wurden diese Beziehungen aber erst im Rahmen der elektrodynamischen Theorie von J.C. MAXWELL. In dieser Theorie definiert man auch den *Polarisationsgrad* der Lichtwelle durch den Ausdruck

$$\mathbf{P}(N) = \frac{|S_{\perp}(N)|^2 - |S_{\parallel}(N, \mathbf{n})|^2}{|S_{\perp}(N)|^2 + |S_{\parallel}(N, \mathbf{n})|^2} \quad (3.98)$$

Daraus ergibt sich für den Hauptbogen $N = 1$ und $\mathbf{n} = 4/3$ ein Polarisationsgrad von $\mathbf{P}(1) = 0.9247$, für den Nebenbogen $\mathbf{P}(2) = 0.8077$, für den dritten und vierten Bogen schließlich $\mathbf{P}(3) = 0.7810$ und $\mathbf{P}(4) = 0.7702$.

für die Intensitäten in beiden Polarisationsrichtungen lassen sich asymptotische Formeln angeben. für große N gilt dann

$$I_{\perp} = \frac{16 e^{-4}}{N^2} + O|N^{-3}| \quad (3.99)$$

und

$$I_{\parallel} = \frac{16 \mathbf{n}^4 e^{-4 \mathbf{n}^2}}{N^2} + O|N^{-3}|. \quad (3.100)$$

für den Polarisationsgrad im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ gilt somit

$$\mathbf{P}(\infty) = \frac{1 - \mathbf{n}^4 e^{-4(\mathbf{n}^2 - 1)}}{1 + \mathbf{n}^4 e^{-4(\mathbf{n}^2 - 1)}}. \quad (3.101)$$

für $\mathbf{n} = 4/3$ ergibt sich daraus ein Polarisationsgrad von $\mathbf{P}(\infty) = \mathbf{0.75315}$.

Nach Formel (3.96) wird der Polarisationsgrad 1, wenn die Bedingung

$$\mathbf{n} = \sqrt{p} \equiv \sqrt{N + 1} \quad (3.102)$$

erfüllt ist. Dieses Ergebnis folgt auch aus der Forderung, dass der Winkel α_p in den Descarteschen Regenbogenformeln die Bedingung $\tan[\alpha_p] = \mathbf{n}$ (Brewster - Winkel) erfüllt. Beim ersten Regenbogen ist diese Bedingung recht gut eingehalten. *Das Licht „schwingt“ dann tangential zum Regenbogenkreis.*

4 Das Phänomen der Glorie

*Es ist stets die Idee des Paradieses,
auf die es ankommt*

Tania Blixen

Die komplizierten mathematischen Reihen der MIE - Theorie enthalten nicht nur eine quantitative Erklärung des Regenbogens, sondern auch die vollständige Theorie der Kränze (Koronae; Beugungsringe um die Sonne und um den Mond bei Nebel; $\Theta \approx 0^\circ$) und natürlich der Glorie ($\Theta \approx 180^\circ$). Die Glorie entsteht um den Schatten eines Beobachters an einer Nebelwand durch Rückstreuung des Sonnenlichts (Brockengespenst, Heiligenschein¹) und stellt ein System von feinen konzentrischen Interferenzringen dar. In Teilen Chinas wird dieser „Heiligenschein“ auch als *Buddha's Licht* bezeichnet und verehrt. Aus Europa stammen zwei interessante Berichte aus dem 18. Jahrhundert, die im folgenden Kapitel näher zitiert werden sollen.

4.1 Historische Berichte einer Anden Expedition

Erste Beobachtungsberichte einer Glorie lieferte von 1737 bis 1739 eine französische geodätische Expedition in Peru, die dort Messungen ausführte, um den Streit zwischen Newton und Cassini über die Figur der Erde zu entscheiden. Der französische Gelehrte PIERRE BOUGUER (1698-1758) und der spanische Gelehrte und Kapitän ANTONIO DE ULLOA (1716-1795) gaben beide einen Bericht über dieses merkwürdige optische Phänomen ab. A. ULLOA schildert unter anderem:([77])

Die Erscheinung wurde erst auf dem Pambamarca beobachtet,

¹Mit „Heiligenschein“ bezeichnet man auch das leuchtende Licht um den Schatten eines Beobachters auf feuchtem Gras, welches durch kleine hängende Tautropfen und deren fokussiertes Sonnenlicht hervorgerufen wird.



Fig. 4.1: Das „echte“ Brockengespenst: Ein vergrößerter Schatten des Beobachters auf der sich ändernden Nebelwand, und ein mystischer „Heiligenschein“ um den Kopf des Beobachters. So oder ähnlich müssen auch im Jahre 1735 Bouguer und Ulloa dieses Mysterium des Lichtes gesehen haben. (Quelle: Wikimedia Commons: Tanzawa)

als wir uns das erstenmal auf dieser Höhenwüste (Parama) aufhielten; sie bestand aus einem vollen Regenbogen, der dreifach ausgebildet war in folgender Weise: Bei Tagesanbruch waren diese Höhen ganz in sehr dichte Wolken gehüllt, die von der aufgehenden Sonne zerstreut wurden; nur leichte Dünste, die das Auge nicht wahrnahm, blieben zurück. Auf der dem Sonnenaufgang entgegengesetzten Seite desselben Berges, etwa 10 Toisen von unserem Standorte, sah man, wie in einem Spiegel, das Bild jedes der Unsrigen mit drei konzentrischen Regenbogen um seinen Kopf, deren Farben so angeordnet waren, dass die letzte des vorausgehenden Regenbogens die erste des folgenden berührte. Außerhalb aller, etwas davon entfernt, sah man einen vierten Bogen, welcher aus rein weißer Farbe gebildet war. Alle Bögen standen senkrecht auf dem Horizonte, und sowie sich der einzelne von einem Orte zum anderen be-

wegte, begleitete ihn die Erscheinung vollkommen in derselben Anordnung. Aber das Erstaunlichste daran war, dass von den sechs oder sieben Personen, welche da beisammen waren, jeder die Erscheinung nur an sich selbst sah, von den anderen dabei aber nichts bemerkte. Der Durchmesser der Bögen veränderte sich allmählich, wie die Sonne sich über den Horizont erhob. Anfänglich war der Durchmesser des innersten Regenbogens, gemessen an der äußersten Farbe desselben, nahe 5.5 Grad und der des äußersten weißen Bogens erreichte volle 67.0 Grade. Zu Beginn der Erscheinung hatten die Bögen eine ovale oder elliptische Gestalt - der Sonnenscheibe entsprechend -, später bildeten sie sich aus und wurden vollkommen kreisförmig. Jeder der kleine Regenbogen hatte einen fleischfarbigen oder roten Bogen, wo diese Farbe (gegen den Mittelpunkt) verschwand, erschien Orange, welchem Gelb folgte, dass in Grüngelb und schließlich in Grün verlief, wobei stets das Rot zu äußerst blieb.

PIERRE BOUGUER beschreibt dieselbe Erscheinung 1749 folgendermaßen ([10]):

Man sieht auf den Höhen dieser Berge fast täglich ein Erscheinung, die so alt sein muss wie die Welt, die aber, wie es scheint, vor uns niemand gesehen hat. Das erste mal, da wir sie sahen, waren wir alle zusammen auf einem weniger hohen Berg namens Pambamarea. Eine Wolke, in welcher wir steckten und die sich auflöste, lies uns die Sonne als sie gerade aufging sehen; sie war sehr strahlend. Die Wolke legte sich auf die andere Seite; sie war keine dreißig Schritte und noch viel zu wenig von uns entfernt, um jene Weiße anzunehmen, von der ich oben gesprochen - da sah jeder von uns seinen Schatten auf die Wolke fallen, aber jeder nur den seinen, weil die Wolke keine einheitliche Oberfläche darbot². Der geringe Abstand ermöglichte es, dass man alle Teile des Schattens unterscheiden konnte; man sah Arme, die Beine, den Kopf. Das, was uns aber verblüffte, war die Erscheinung einer Glorie oder

²Dies gilt hier nur wegen der Nähe der Nebelwand

Aureole, die den Kopf zierte und aus drei oder vier kleinen konzentrischen Kränzen von sehr lebhaften Farben bestand, jeder Kranz mit den gleichen Farben ausgestattet wie der Hauptregenbogen, mit Rot an der Außenseite. Die Abstände dieser Ringe waren gleich, der letztere war etwas schwächer. Endlich sahen wir in großer Entfernung einen großen weißen Ring, der alle anderen umgab. Das war also eine Art Apotheose für jeden Beobachter und ich darf nicht ermangeln zu bemerken, dass jeder still sich der Freude hingab, sich mit all diesen Farbenringen geschmückt zu sehen, ohne das leiseste von denen seiner Nachbarn zu bemerken. Ich beeile mich, mit den ersten Linealen, deren ich habhaft werden konnte, eine Art Armbrustmessregel zu verfertigen, um die Durchmesser zu messen. Ich befürchtete, dass dieses wunderbare Schauspiel sich nicht häufig zeigen werde. Ich hatte später Gelegenheit zu beobachten, dass die Durchmesser von Moment zu Moment sich änderten, dabei aber stets die Gleichheit der gegenseitigen Abstände beibehielten, ob sie nun größer oder kleiner wurden. Die Erscheinung bildet sich überdies nur auf Wolken, und zwar auf jenen, welche aus Eiselementen bestehen, und nicht auf den Regentropfen wie der Regenbogen. Gewöhnlich war der Durchmesser des ersten „Regenbogens“ beiläufig 5.6 Grad, des zweiten beiläufig 11 Grad, des folgenden etwa 17 Grad u.s.w.; der Durchmesser des weißen Ringes war beiläufig 67 Grad.

4.2 Das Brockengespenst in der Goethezeit

In der deutschen Literatur hat sich im Laufe des 19. Jahrhunderts für den durch das Sonnenlicht erzeugten riesenhaften und beweglichen Schatten eines Beobachters auf eine Nebelwand der Begriff *Brockengespenst* eingebürgert. Obwohl das genaue Zitat fehlt, war es wohl J. W. GOETHE selber, der diesen Begriff schuf und in seiner Farbenlehre die scheinbar *regenbogenartigen* Farben des Heiligenscheins (Glorie) beschrieb. Im Folgenden sollen zwei weitere sehr lebendige Schilderungen dieser bezaubernden Re-

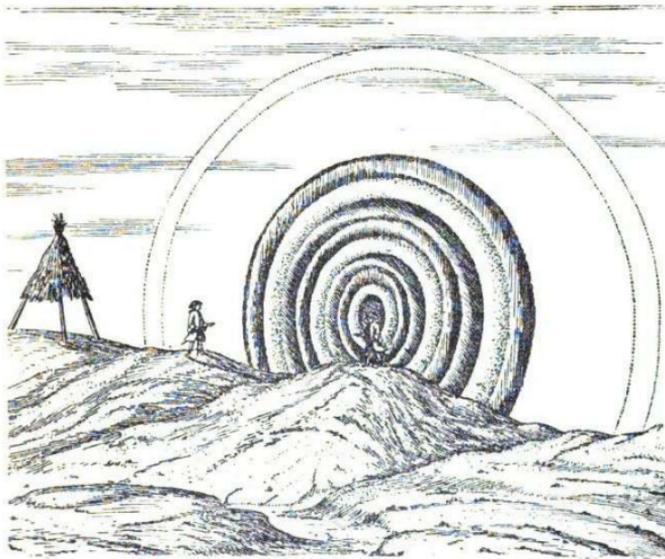


Fig. 4.2: Originalskizze von Antonio de Ulloa (1716-1795) aus dem Jahre 1748 zur Beobachtung einer Glorie in den Anden von Peru([77]). Er bemerkte unter anderem: „Aber das Erstaunlichste daran war, dass von den sechs oder sieben Personen, welche da beisammen waren, jeder die Erscheinung nur an sich selbst sah, von den anderen dabei aber nichts bemerkte.“

flexionserscheinung aus Reisebildern des 19. Jahrhunderts zitiert werden³. Die erste Schilderung stammt von dem Theologen, Schriftsteller und Freimaurer C. W. SPIEKER (1780-1858) aus seiner dritten Bearbeitung (1852) seiner beiden Harzreisen aus den Jahren 1800 und 1850 ([70]):

Der Abend war angebrochen. Die Sonne ging hinter den Wolken unter und gab diesen eine überraschende Färbung. Ein kupferartiges Rot durchdrang das düstre Gewölk, am Horizont hochrot, je näher der Mitte des Himmels, desto dunkler. Dazwischen zogen lichthelle Streifen, deren Kanten rot eingefasst waren. Die Wolken waren in brodelnder Bewegung und spielten in alle Farben von aschgrau, schmutzigrot und dunkelblau. Die Sonne mochte schon unterm Horizont sein, als sie noch ihre letzten Strahlen in eine höhere Wolkenschicht warf und

³Die Quellen verdanke ich im Internet dem [Goethezeitportal](#)

dadurch ein magisches Licht um den Brocken verbreitete, das bald erlosch, worauf sogleich eine tiefe Finsternis eintrat.

Wir begaben uns eiligst in das Brockenhaus, wo uns ein frugales, gut zubereitetes Abendessen und ein Glas Markebrunner stärkte. Der Wirt, der sich zu uns gesetzt hatte, unterhielt uns auf eine angenehme Weise von seinen Erfahrungen und Beobachtungen, die er seit einer Reihe von Jahren in allen Jahreszeiten (denn er verlässt auch im Winter seine luftige Sennerei nicht) auf seinem Bructerus gemacht hatte. Der wackre Nehse⁴ gehört nicht zu den phantasiereichen Erzählern, die ihre Erlebnisse durch abenteuerliche Dinge und poetische Fiktionen interessanter zu machen suchen. Man fühlt die Wahrheit in seinen Erzählungen bald heraus. Unter anderm gab er uns eine Erklärung von dem sogenannten Brockengepenst, das er schon mehre Male gesehn und auch in seinem Brockenbuche beschrieben hat. Wenn die Sonne beim Auf- und Untergang mit dem Brocken in gleicher Höhe steht und zu derselben Zeit auf der entgegengesetzten Seite in den Tälern sich Nebel bilden und am Brocken hinaufsteigen, der Brocken selbst aber nebelfrei zwischen der Sonne und der Nebelwand steht, so wirft die Sonne den Schatten des Brockens mit allen darauf befindlichen Gegenständen, mit Haus, Turm, Menschen und Tieren auf die Nebelwand, aber in riesenhafter Größe. Diese Luftspiegelung ist um so klarer, je dichter und näher der Nebel, um so größer aber weniger scharf und deutlich, wenn er entfernter und lockerer ist. Im Sommer legt sich eine Art von Heiligenschein in den Farben des Regenbogens um das Haupt der Menschen, im Winter verwandelt sich dieser Schein in drei hochgelbe und glänzende Strahlenbündel. Ist es sehr kalt, so bilden die gefrorenen Teilchen kleine glimmende Sterne um jene Strahlenbündel.

Die obige Beschreibung bezieht sich weitgehend auf das damals sehr populäre Brockenbuch des schon oben erwähnten CARL EDUARD NEHSE

⁴CARL EDUARD NEHSE (1793-1855?), Naturforscher, Schriftsteller und Gastwirt im Brockenhaus von 1834-1850.



Fig. 4.3: *Drei helle und sich kreuzende Lichtbögen in einer Eiswolken um den antisolaren Punkt, beobachtet unterhalb der Horizontlinie von einem Flugzeug aus. Der Schatten des Beobachters oder Fliegers befindet sich im Lichtzentrum. Dieses seltene Phänomen entspricht dem „Brockengespenst“ im Winter bei sehr rauhem Eisnebel mit hexagonalen Eiskristallen unterschiedlicher Orientierungen, wie es auch C.E. NEHSE in seinem Brockenbuch von 1840 beschrieben hat. Es handelt sich um keine Beugungserscheinung, sondern um ein Zusammenspiel unterschiedlicher Halophänomene (Anti-solarer Bogen von Parry, unterer Nebensonnenbogen)(Quelle: Jacob Klee - 12. November 2000)*

(1793-1855?), welches 1840 in Wernigerode erschien ([49]). Dort heißt es nämlich sehr authentisch:

Eine seltenere Erscheinung ist das Nebelbild oder sogenannte Brockengespenst, zwar nicht so selten, wie in verschiedenen Harztaschenbüchern angegeben wird, nämlich, dass solches nur im Herbst, und nur beim Sonnenuntergange sichtbar sei, vielmehr ist es in allen Jahreszeiten, sowohl bei dem Auf- als

Untergänge der Sonne zu sehen, wie dies mehrjährige Erfahrung gelehrt hat. Im Jahre 1838 wurde es neunmal, und 1839 siebenmal, im Februar, März, April, Juli, August, November und Dezember, Abends und Morgens, gesehen. Verschieden ist jedoch diese von mir näher und genau beobachtete Lufterrscheinung. Wenn die Sonne bei ihrem Auf- und Untergange mit dem Brocken in gleicher Höhe steht, sich dann auf entgegengesetzter Seite unten in den Tälern Nebel bilden, diese am Brocken in die Höhe steigen, der nebelfrei Brocken aber zwischen dem Nebel und der Sonne steht: so wirft die Sonne den Schatten des Brockens und aller auf ihm befindlichen Gegenstände an diese Nebelwand, an der sich nun riesenhafte Gestalten bilden, die bald sich verkleinern, bald vergrößern, je nachdem sich der Nebel nähert, entfernt, oder durch das Aufrollen desselben in ihm Lücken entstehen. Ist der Nebel trocken, so sieht man, außer seinem eigenen Schatten, auch den seiner Nachbarn; ist er feucht, so sieht man nur seinen, mit einem regenbogenfarbigen Heiligenschein umgeben. Dieser Heiligenschein verschönert sich und wird strahlender, je nasser und dicker der Nebel ist, und je näher derselbe kommt. Bei rauhem Nebel im Winter bietet diese Erscheinung einen anderen Anblick; dann erhält der Schatten nicht den kreisförmigen regenbogenfarbigen Heiligenschein, sondern es gehen vom Haupte des Schattens drei gelbe, hell glänzende, scharf gezeichnete und weit strahlende Scheine rechts und links vom Auge und senkrecht, ungefähr in nebenstehender Form (siehe Fig. (4.3)) und in hochgelber Farbe. Dieses Nebelbild oder sogenannte Brockengespenst ist das schönste hier wahrgenommene Phänomen, besonders wenn es sehr kalt, und die im Nebel enthaltene Feuchtigkeit stark gefroren ist, wo dann die gefrorenen Teilchen kleine glimmende Sternchen um die drei Strahlen bilden, welche so glänzend blinkern, dass das Auge nicht lange hineinzusehen vermag.

Der Lyriker HERMANN FERDINAND FREILIGRATH (1810-1876) lies den Brockenwirt und sein Gespenst schon 1844 in seiner Gedichtsammlung *Ein Glaubensbekenntnis* in die deutsche Literatur eingehen. Diese enthält unter



Fig. 4.4: *Das Brockengespenst.* Holzschnitt nach einer Zeichnung von F. STROBANT. Aus: *Le tour de monde, Paris 1865.* Hier nach DENNERT: *Geschichte des Brockens und der Brockenreisen*, Abb. 18.

anderem „*Auch ein Walpurgisnachtstraum*“, angereichert mit Figuren aus Shakespeares „*Sommernachtstraum*“, Tiecks „*Gestiefeltem Kater*“, einem Feuerdrachen und mit dem Schatten Voltaires. Zu diesem bunten Reigen tritt auch der „*Brockenwirt*“ mit den Versen:

*Herr, steh' mir bei! So wirr und toll
Trieb's lange nicht der Böse!
Der ganze liebe Brocken voll!*



Fig. 4.5: Der veränderliche Schatten eines Fliegers an einer Wolke und eine Glorie (Farbringe) um den Schatten des Flugzeuges (Schatten des Beobachters). Die Glorie wurde zum erstenmal 1735 von dem spanischen Wissenschaftler ULLOA und dem Franzosen BOUGUER während einer Andenüberquerung beschrieben. Noch um das Jahr 1800 als „**Ring des Ulloa**“ bezeichnet, in Teilen Chinas noch heute als Buddha's Licht verehrt, handelt es sich hier **nicht** um ein Regenbogenring. Eine einfache physikalische Erklärung der Intensitätsverteilung der Lichtringe in der Glorie als Rückwärtsstreuung für unterschiedliche Nebeltröpfchengrößen gibt es nicht. Quelle: Wikipedia Commons.

Gut' Nacht - ich heiße Nehse!

Eine fast wörtliche Zusammenfassung der Schilderungen NEHSES erschien dann im *Sagenbuch des Preußischen Staats* von J. G. T. GRASSE aus dem Jahre 1868 ([28])

4.3 Interpretation im Rahmen der Mie-Theorie

Während das Phänomen des „Brockengespenstes“ durch den Naturforscher und Theologen J. E. SILBERSCHLAG (1721-1791) im Jahre 1780 durch eigene Beobachtungen überzeugend geklärt wurde, gehört das im vorherigen Kapitel erwähnte seltene Winter - Phänomen der gelblich-

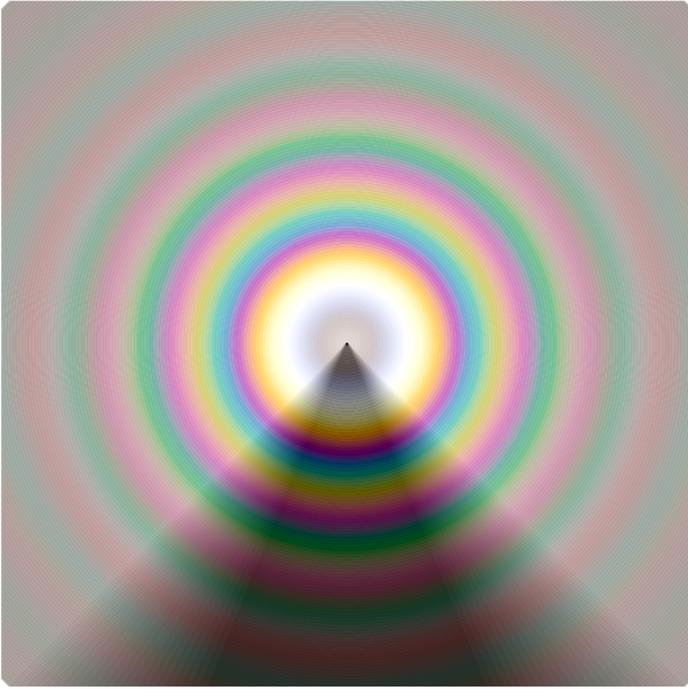


Fig. 4.6: *Simulation des sogenannten „Brockengespenstes“ im Sommer an sehr kleinen Nebeltröpfchen. Der Brockenwirt C.E. NEHSE hat in seinem Brockenbuch von 1840 die Beobachtung gemacht, dass der farbige „Heiligenschein“ nur im Sommer bei Temperaturen über Null zu sehen ist.*

weißen Strahlen sicherlich schon in den nächsten Abschnitt über *Halos*. Damals blieb diese optische Erscheinung ungeklärt.

Doch auch die Deutung der farbigen Glorienerscheinung blieb im 19. Jahrhundert ein Rätsel. Der Physiker und Optiker J. FRAUNHOFER glaubte, dass die Nebeltropfen um den Kopf des Beobachters für die Lichterscheinung verantwortlich sind. Später hat der berühmte Geophysiker und Meteorologe ALFRED WEGENER bei Ballonflügen um 1910 festgestellt, dass die damals gegebene Erklärung der Glorie als Beugungsphänomen nicht stimmig ist. Besonders die Ringradien und die Helligkeit des ersten Ringes widersprechen dem dem Betragsquadrat einer einfachen Besselfunktion erster Ordnung, wie sie von J.M. PERNTNER berechnet wurde. Nach Vorarbeiten von H. BUCERIUS 1946 ([17]) war

es wieder ein Astronom, nämlich H.C. VAN DE HULST, der 1957 eine verbesserte halbempirische Theorie der Glorie auf der Grundlage der Mie'schen Reihen vorschlug, in der nun „elektromagnetische Kriechwellen“ auf Wassertropfen eine Rolle spielen sollten ([33]). In „nullter“ Näherung ergibt sich dabei für die Intensität des *unpolarisierten Lichtes* der Glorie um den antisolaren Punkt

$$I_{Glorie} \sim (c_1 + c_2)^2 \mathbf{J}_0^2 \left[\frac{4\pi a}{\lambda} \sin \left[\frac{\Theta}{2} \right] \right] + (c_1 - c_2)^2 \mathbf{J}_2^2 \left[\frac{4\pi a}{\lambda} \sin \left[\frac{\Theta}{2} \right] \right]. \quad (4.1)$$

Die Folge der Ringradien wird durch diese Lösung gut beschrieben, aber die stark variable zentrale Aufhellung bei $\theta = 0^\circ$, die nach Beobachtungen und Rechnungen (Mie-Reihen) stark vom Tropfenradius a abhängt, wird hier nur empirisch durch die Koeffizienten c_1 und c_2 angenähert, wobei c_2 gegenüber c_1 immer negativ ist. In analoger Weise erhält man mit der Abkürzung

$$u = \frac{4\pi a}{\lambda} \sin \left[\frac{\Theta}{2} \right] \quad (4.2)$$

für die Höfe um den Mond in Vorwärtsreue die genaueren Approximationen

$$I_{Korona} \sim |\mathbf{J}_0[u] + \mathbf{J}_2[u]|^2 \quad (4.3)$$

Das Gesetz für die Abstände der Lichtringe ist in den beiden Fällen etwas unterschiedlich. Aufgrund der Relation $\mathbf{J}_0[u] + \mathbf{J}_2[u] = 2\mathbf{J}_1[u]/u$ kann die zweite der obigen Darstellungen auf die bekannte Form eines Beugungsproblems nach FRAUNHOFER in der Form

$$I_{Korona} \sim \left| 2 \frac{\mathbf{J}_1[u]}{u} \right|^2 \quad (4.4)$$

zurückgeführt werden. Diese Formel beschreibt die „Beugungsringe“ um Sonne oder Mond bei diesig - nebligem Tagen. Doch auch nach Vulkan- ausbrüchen können durch die kleinen Aerosolteilchen in der Atmosphäre solche Beugungsringe entstehen (z.B. sogenannter it „Bishop'scher Ring“ um die Sonne nach dem Krakatau - Ausbruch 1883)⁵.

⁵Bishop, S. E. (29 January 1885), „Krakatoa“, Nature **31** (796): 288-289

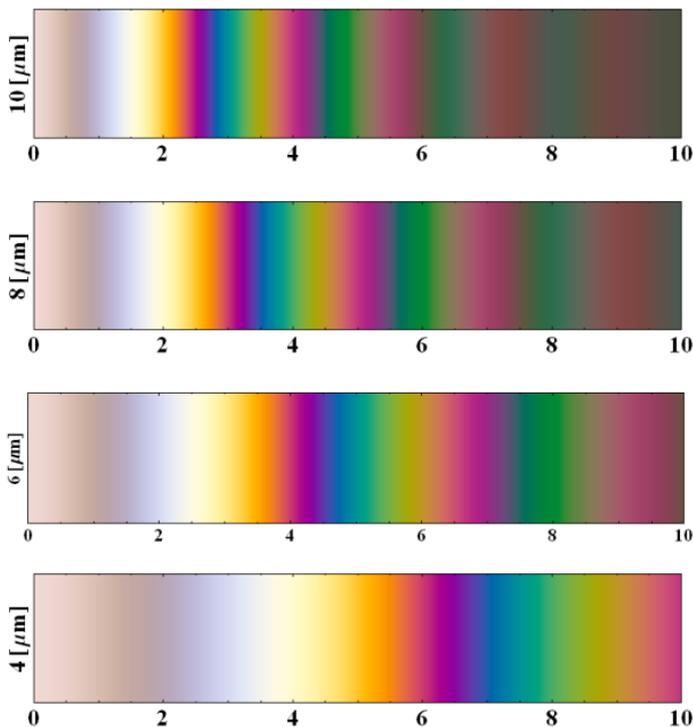


Fig. 4.7: Simulation der farbigen Glorienringe in der Näherung $(c_1, c_2) = (1, -0.4)$ (siehe 4.1) als Funktion des Tropfenradius, entstanden durch Rückstreuung des Sonnenlichts an Wassertröpfchen sowie „Kriechwellen“ an deren Oberflächen. Auffällig ist die starke Helligkeit des ersten Ringes, der häufig in seinem Zentrum einen noch stärkeren bläulichen Schimmer als in dieser Simulation zeigt. Es gibt bis heute für die Glorienerscheinung keine einfache physikalische Erklärung.

Die letztendlich gültige Erklärung der Glorie liegt in den Mie - Reihen verborgen und kann nur mit mathematischen Sätzen der Funktionentheorie (CAM-Theorie nach NUSSENZVEIG) verstanden werden. Die genauere analytische Darstellung ist aber wesentlich komplizierter und **physikalisch unanschaulicher** als diejenige für den Regenbogen. Ein Anteil kommt von den Kriechwellen her, beschrieben durch „Regge- Pole“ in der komplexen ν - Ebene, die ironischerweise mit den *tangentialen Strahlen* der Keplerschen-Theorie des Regenbogens zusammenhängen. Diese



Fig. 4.8: *Beugungsringe um den Vollmond bei leicht bewölktem, diesigem Himmel. Dies ist keine Glorie (Rückwärtsstreuung), sondern eine Korona (Vorwärtsstreuung). (siehe Formel (4.4) Quelle: commons.wikimedia.org*

Strahlen führen zu Resonanzen, die dann die Intensität der Glorie deutlich erhöhen. Schließlich ist auch noch der Regenbogen **10**ter Ordnung ($p = 11$; siehe Figur (3.9)) sehr schwach beteiligt, der nur wenige Grad vom antisolaren Punkt entfernt liegt.

Der Regenbogen und die Glorie sind somit ein ideales Beispiel für ein beobachtbares Phänomen, welches mit unterschiedlich schwierigen mathematischen Methoden „erlebt“ werden kann und unerwartete Ideenverbindungen zu unterschiedlichen Gebieten der Physik aufzeigt. Auch heute noch ist die Theorie des Regenbogens und der Glorie, wie schon in den vergangenen *Jahrtausenden*, ein Paradies für mathematische Naturforscher und Philosophen geblieben. *Aber auch das direkte meditative Erlebnis eines solchen Phänomens in der Natur stellt eine einzigartige Quelle innerlicher „Spiritualität“ dar.*

5 Geometrische Optik der Halos

Der bibliophile antike Klassiker auf dem Gebiet der meteorologischen Optik (Regenbögen, Glorien und Haloerscheinungen) im deutschen Sprachraum ist das Buch *Meteorologische Optik* ([59]) von den Österreichern JOSEPH MARIA PERENTER (1848-1908) und FELIX MARIA EXNER (1876-1930), ein kunstvolles Meisterwerk, das in heutigen Antiquariaten nur noch selten zu finden und in seiner Form einmalig und nicht wiederholbar ist. In diesem Werk werden zum erstenmal auch systematisch historische *Halo*-Beobachtungen geschildert. Wohl die erste bildliche Dokumentation einer *Halo*-Erscheinung ist die über Stockholm vom 20. April 1535 (*Vädersonstavlän*). Berühmt ist weiterhin die Beobachtung des Astronomen CHRISTOPH SCHEINER 1630 in Rom und des Astronomen JOHANN HEVELIUS am 20. Februar 1661. Auch das “Petersburger Phänomen“, eine Haloerscheinung, die der deutsch-russische Pharmazeut und Chemiker JOHANN TOBIAS LOWITZ (1757-1804) am 18. Juni 1790 in Sankt Petersburg beobachtet hat, ist in die Literatur als spektakuläre Himmelserscheinung eingegangen.¹ HEVELIUS schildert bezüglich des Danziger Phänomens 1672:

Am Sonntag den 20. Februar neuen Stils 1661 etwa 11 Uhr, da die Sonne in der Nähe des Meridians sich befand und der Himmel ringsum heiter erschien, zeigten sich am Himmel mit vollendeter Klarheit gleichzeitig sieben Sonnen, die zum Teil weiß, zum Teil aber auch mehrfarbig waren...

Einen ersten Versuch einer Deutung dieses “*Danziger Halos*“ gab CHRISTIAAN HUYGENS 1703. Berühmt sind insbesondere die Haloringe um Sonne oder Mond von 22° und 46° . Sie werden von schwebenden Eiskristall-Plättchen und Eiskristall-Prismen mit *hexagonaler* Struktur erzeugt. Hier

¹J.T. LOWITZ war Sohn des Astronomen und Geographen GEORG MORITZ LOWITZ (1722-1774), der ebenfalls Mitglied der Petersburger Akademie war.



Fig. 5.1: Die Haloerscheinung über Stockholm vom 20. April 1535 (Vädarsolstavlan). Restaurierte oder übermalte Version von 1636, in der nach heutigem Wissensstand auch einige künstlerische Freiheiten eingingen. (Quelle: [wikimedia.commons](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Vädarsolstavlan.jpg))

muss also der Strahlengang durch ein Prisma mit einem Prismenwinkel ϕ untersucht werden. Ähnlich wie beim Regenbogen ergeben sich auch hier minimale Ablenkungswinkel, wo die Lichtintensität nach der geometrischen Optik maximal wird (Kaustiken). Da bei den Haloringen keine

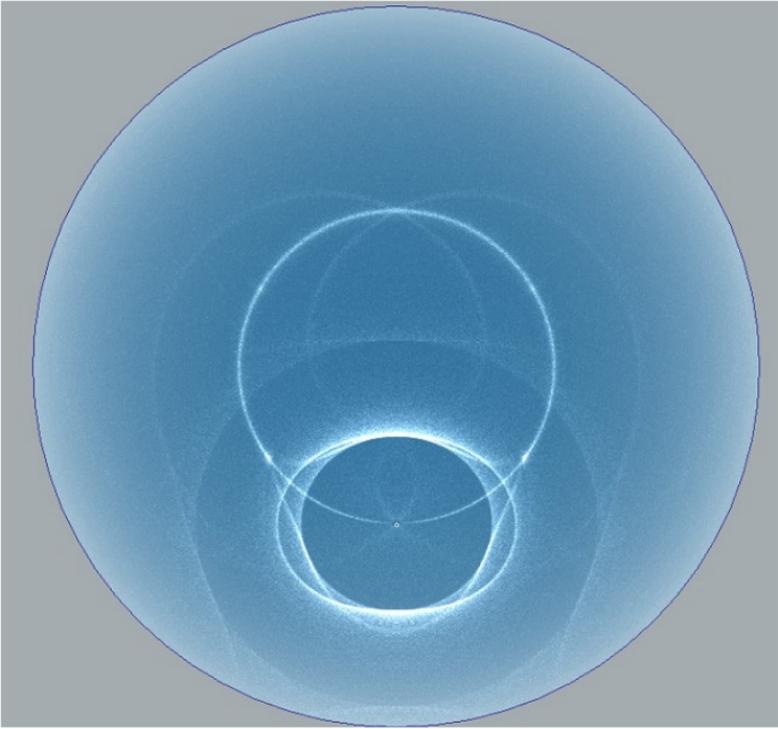


Fig. 5.3: *Simulation des berühmten “Petersburger Phänomens“, beobachtet von Lowitz 1790 in Skt. Petersburg. Sonnenstand 51 Grad über Horizont. Software von Les Cowley und Michael Schroeder (siehe [88])*

Richtung. Das Gleiche geschieht beim Durchgang durch die zweite Grenzfläche. Auch hier erfährt er eine Ablenkung von $\alpha_1 - \beta_1$. Der gesamte Streuwinkel Θ beträgt somit

$$\Theta = \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2. \quad (5.1)$$

Aufgrund der elementaren geometrischen Relation

$$\beta_1 + \beta_2 = \phi \quad (5.2)$$

zwischen den brechenden Winkeln und dem Winkel der Kristallkante gilt somit auch

$$\Theta + \phi = \alpha_1 + \alpha_2. \quad (5.3)$$

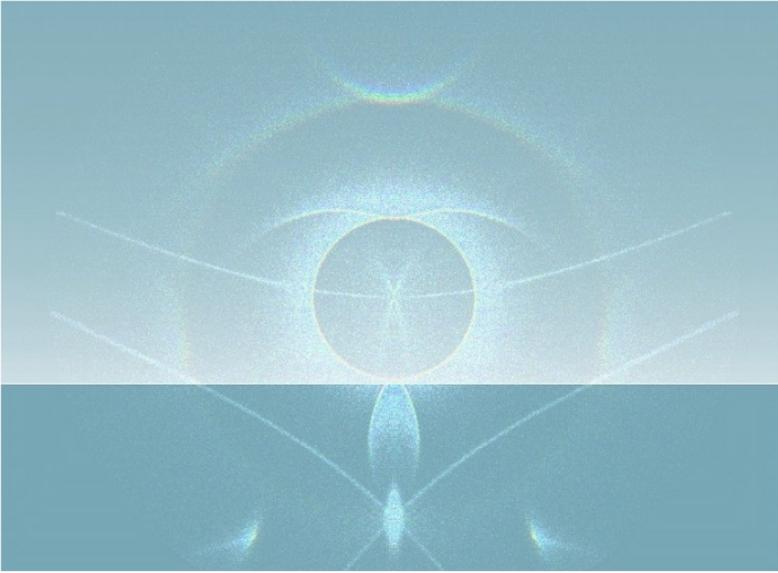


Fig. 5.4: *Simulation des “Parry 1820“ Halophänomens, beobachtet von William Edward Parry am 8. April 1820 in der kanadischen Arktis. Spektakuläre Lichtphänomene dieser Art lassen vermuten, dass diese in früheren Zeiten als “göttliche“ oder “biblische“ Zeichen am Himmel gedeutet wurden. (siehe [11])*

Diese Relation gilt für einen beliebigen Einfallswinkel α_1 . Wir suchen nun aber nach einem Einfallswinkel, der eine *minimale* Ablenkung Θ zur Folge hat - also eine Kaustik definiert. Nach dem Brechungsgesetz gilt einerseits

$$\sin[\alpha_1] = \mathbf{n} \sin[\beta_1]; \quad \sin[\alpha_2] = \mathbf{n} \sin[\beta_2] \quad (5.4)$$

und andererseits durch Differentiation

$$\begin{aligned} \cos[\alpha_1] d\alpha_1 &= \mathbf{n} \cos[\beta_1] d\beta_1 \\ \cos[\alpha_2] d\alpha_2 &= \mathbf{n} \cos[\beta_2] d\beta_2 \end{aligned}$$

Wegen (5.2) folgt aber $d\beta_1 + d\beta_2 = 0$ und somit auch

$$\frac{\cos[\alpha_1]}{\cos[\alpha_2]} = \frac{\cos[\beta_1]}{\cos[\beta_2]}. \quad (5.5)$$

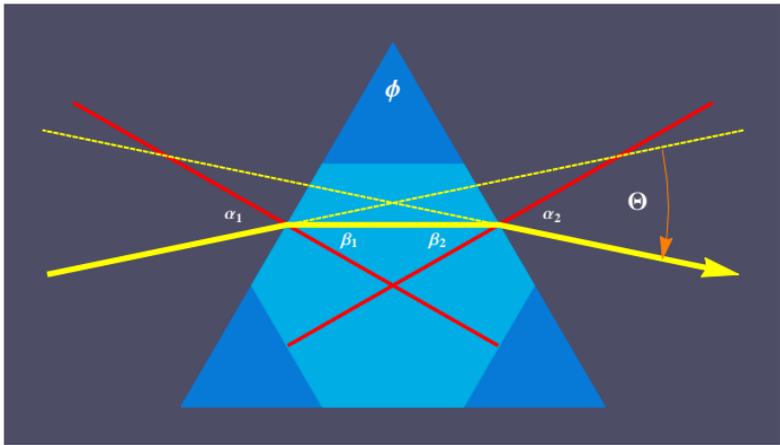


Fig. 5.5: Brechung eines Lichtstrahles an einem hexagonalen Eiskristall, wobei die brechenden Prismenkanten einen Winkel von 60° machen. Größte Helligkeit tritt bei der minimalen symmetrischen Ablenkung $\beta_1 = \beta_2 \equiv \phi/2$ auf. Der französische Physiker EDME MARIOTTE (1620-1684) hat mit diesem Modell zum erstenmal den 22 Grad Haloring um die Sonne erklärt.

Quadrieren wir diese Relation und benutzen die beiden Brechungsgesetze (5.4), so erhalten wir die Bedingung

$$(\mathbf{n}^2 - 1)(\cos[2\alpha_1] - \cos[2\alpha_2]) \sec[\alpha_2] = 0. \quad (5.6)$$

Solange $\mathbf{n} \neq 1$ ist, folgt hieraus die allgemeine Bedingung

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2. \quad (5.7)$$

Der Strahlengang muss also symmetrisch zur Einfallsb- und Ausfallsebene sein. Außerdem gilt jetzt auch mit (5.2)

$$\beta_1 = \beta_2 \equiv \frac{\phi}{2}. \quad (5.8)$$

Mit (5.3) und dem Brechungsgesetz folgt dann endgültig die wichtige Gleichung

$$\boxed{\sin\left[\frac{\Theta}{2} + \frac{\phi}{2}\right] = \mathbf{n} \sin\left[\frac{\phi}{2}\right]}, \quad (5.9)$$



Fig. 5.6: Ein 22 Grad Halo um den Vollmond. Der Radius des Lichtringes wird durch die Formel (5.9) beschrieben. (Quelle: wikipedia.org)

wo \mathbf{n} den Brechungsindex der Eiskristalle, ϕ die brechende Kristallkante (Prismenkante) und Θ den *minimalen* Streuwinkel oder effektiven Ringradius bezeichnet. für das 22 Grad Halo gilt $\phi = \pi/3$ und für das 46 Grad Halo $\phi = \pi/2$. Mit dieser Formel wird auch erklärlich, weshalb das Halo innen rot, außen aber mehr blau leuchtet. Der Brechungsindex für Eis ist gegenüber Wasser etwas erniedrigt und liegt für rotes Licht bei etwa $\mathbf{n} \approx 1.31$ und ist für blaues Licht etwas größer. Analog wie bei Wasser (3.36) gilt für Eiskristalle mit praktisch verschwindender Doppelbrechung

$$\mathbf{n}[\lambda] = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (5.10)$$

mit den Cauchy - Parameter $A = 1.310$ und $B = 2643[nm^2]$. Die obige Gleichung für die ringförmigen Halos ist nur ein Spezialfall einer allgemeineren Beziehung, welche das Phänomen der Nebensonnen (*sun dogs*) beschreibt. Dies sind helle Lichtflecken rechts und links von der tiefstehenden Sonne in etwas mehr als 22 Grad Abstand. Die Position



Fig. 5.7: Spektakuläre Haloerscheinung bei der Südpolstation in der Antarktis 1979: Man sieht eine Nebensonne („sun dogs“), den Bogen von Lowitz und andere Lichtbögen. Quelle: wikimedia commons: John Bortniak NOAA 1979

dieser Nebensonnen wird vollständig beschrieben durch die Formeln

$$\cos[H] \sin \left[\frac{\Theta}{2} + \frac{\phi}{2} \right] = \sqrt{\mathbf{n}^2 - \sin[H]^2} \sin \left[\frac{\phi}{2} \right], \quad (5.11)$$

$$\sin \left[\frac{\theta}{2} \right] = \cos[H] \sin \left[\frac{\Theta}{2} \right]. \quad (5.12)$$

Hier bedeutet Θ den Azimutalabstand der Nebensonnen von der Sonne und θ den Großkreisbogenabstand von der Sonne. H bedeutet die Höhe der Sonne über dem Horizont. Der Prismenwinkel für die klassischen Nebensonnen wäre hier $\phi = \pi/3$. Ein weiteres bemerkenswertes Halo-Phänomen ist der *zirkumzenitale* Bogen, der in seinen Farben an den Regenbogen erinnert. Er stellt einen unvollständigen Kreis um den Zenit dar und wird von senkrecht ausgerichteten Kristallsäulen erzeugt. Seine Höhe h über Horizont ist gegeben durch

$$\sin[h] = \sqrt{\mathbf{n}^2 - \cos[H]^2}, \quad (5.13)$$

wo H wieder die Höhe der Sonne über dem Horizont bezeichnet. Komplementär hierzu gibt es auch den selteneren farbigen zirkumhorizontalen Bogen, dessen Höhe durch

$$\cos[h] = \sqrt{\mathbf{n}^2 - \sin[H]^2} \quad (5.14)$$

gegeben ist.

Im 19. Jahrhundert entstand eine rege Diskussion über die Deutung auch seltenerer Halophänomene. Bekannte Namen tauchen hier auf – wie GALLE, die Gebrüder BRAVAIS ([13, 14, 15]), PERNTER oder ALFRED WEGENER. Viele Fragen sind geklärt, aber es gibt auch heute noch Phänomene, die nicht so einfach zu deuten sind wie zum Beispiel der V-fürmige *Bogen von Moilanen*, der von dem Finnen MOILANEN 1995 zum erstenmal innerhalb des 22 Grad Halos bei tiefstehender Sonne fotografiert wurde.

6 Schlussbemerkungen

Optische Phänomene in der Erdatmosphäre waren für den Menschen schon immer ein „himmlisches Zeichen“, welches es zu deuten galt. Die Häufigkeit dieser Erscheinungen sind letztendlich vom Wetter und sogar wie bei den Halos - von dem langfristigen Klima abhängig. Siehe insbesondere Fig (A.1) im Anhang.

In der heutigen Zeit ist es relativ leicht möglich, mit einem PC oder Notebook und einer aus dem Internet erhältlichen Software eigene umfangreiche Analysen des Regenbogens auf der Grundlage der Mie-Theorie oder Simulationen von Halo-Phänomenen durchzuführen (siehe auch [88]). Wichtig ist hier der **BHMIE**-Algorithmus für Mie-Reihen, entwickelt von dem Meteorologen Craig Bohren und dem Physiker Donald Huffman, der auf älteren Algorithmen aufbaut ([9]). Komplizierte Farbberechnungen des Regenbogens und der Glorie sind nun möglich, die noch 1980 nur Großrechner durchführen konnten. Doch wie zu Pernter's Zeiten lassen sich auch mit dem *Regenbogenintegral* eigene approximative Farbberechnungen durchführen. Dem Gebiet kann man immer wieder neue Seiten abgewinnen - das Geheimnis des Regenbogens ist seine unerschöpfliche „Unendlichkeit“.

Das Schlusswort möchte ich wieder J.W. GOETHE überlassen, der sich in seiner „metaphysischen“ Farbenlehre auch mit den Regenbogenfarben beschäftigt hat. Im Briefwechsel mit SULPIZ BOISSERDE gibt er seinem Freunde genaue Anweisungen zum Studium der Regenbogenerscheinung an wassergefüllten Glaskugeln („Schusterkugeln“). In einem seiner letzten Briefe vom 25. Februar 1832¹ schreibt er :

...Nun aber denken Sie nicht, dass Sie diese Angelegenheit jemals los werden. Wenn sie Ihnen das ganze Leben über zu schaffen macht, müssen Sie sichs gefallen lassen. Entfernen Sie die Kugel den Sommer über nicht aus Ihrer Nähe. ... So

¹Goethe starb am 22. März 1832

wird man aus dem Ganzen ins Einzelne und aus dem Einzelnen ins Ganze getrieben, man mag wollen oder nicht.

für freundliche Teilnahme dankbar, fortgesetzte Geduld wünschend, ferneres Vertrauen hoffend.

J. W. von Goethe

Anhang

A.1 Klimawandel in 1000 Jahren

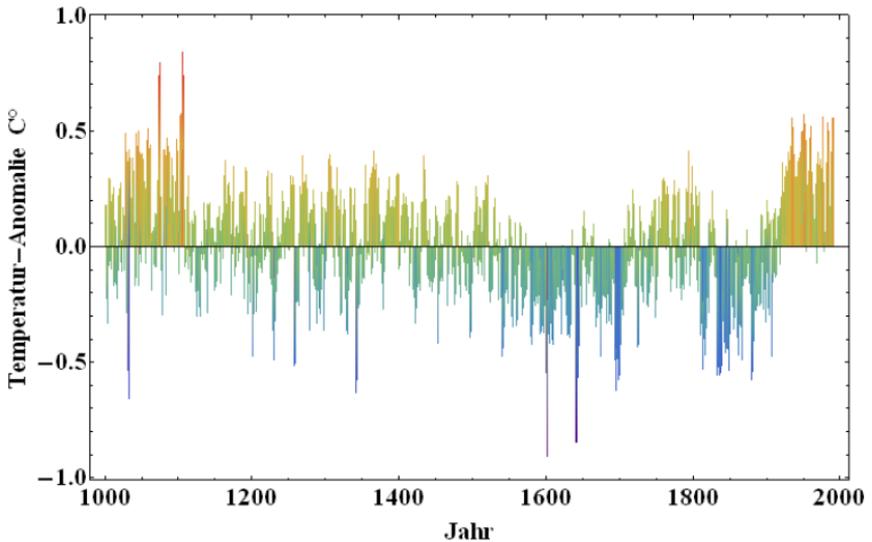


Fig. A.1: Die Schwankungen der mittleren Jahrestemperatur in den letzten 1000 Jahre auf der Nordhalbkugel, abgeleitet im wesentlichen aus Eisbohrkernen, Korallen, Baumringen und historischen Daten. Deutlich ist die sogenannte "kleine Eiszeit" zwischen den Jahren 1600 und 1700 und auch um 1850 zu erkennen, wo die Winter in Europa sehr kalt waren. Das erklärt, warum gerade in dieser Zeit selbst in Rom 1630 von Christoph Scheiner die spektakulärsten Halophänomene beobachtet wurden. Quelle:([34]) Quelle: P.D. Jones, K.R. Briffa, T.P. Barnett, and S.F.B. Tett, 1998, „High-resolution Palaeoclimatic Records for the last Millennium: Interpretation, Integration and Comparison with General Circulation Model Control-run Temperatures“, *The Holocene* 8, 1998, 455-471.

A.2 Meteorologica

Die „Biographie des Regenbogens“ ist schon viele tausend Jahre alt. Ein bemerkenswertes Dokument stammt dabei von dem griechischen Philosophen und Naturforscher ARISTOTELES. Unter anderem schrieb er in seiner *Meteorologica* - Buch III - Kapitel 2 vor über 2350 Jahren über den Regenbogen folgendes:¹ ([4])

Wir wollen nun über Halo – Erscheinungen und über den Regenbogen sprechen, über ihre Natur und ihre Ursachen, ferner über Nebensonnen und Lichtsäulen. Alle diese Naturerscheinungen stammen nämlich von derselben Ursache her. Zunächst aber müssen die Eigenschaften dieser Phänomene, und was bei jedem einzelnen vorgeht, bestimmt werden. [...]

Beim Regenbogen gibt es nie einen vollen Kreis, auch keinen Bogen, der größer ist als der Halbkreis. Bei Sonnenuntergang und -aufgang ist der Kreis am kleinsten, das Kreissegment am grössten; steht die Sonne höher, so ist der Kreis größer, das Segment kleiner. Nach der Herbst Tag - und - Nachtgleiche, wenn die Tage kürzer sind, kann das Phänomen zu beliebiger Stunde des Tages auftreten, im Sommer aber nicht um die Mittagszeit. [...]

Dies also lässt sich an den genannten Phänomenen im Einzelnen beobachten. Ihre Ursache aber ist in allen Fällen die gleiche: überall handelt es sich um Strahlenbrechung. Die Unterschiede beruhen auf der besonderen Weise der Brechung, auf der Art der reflektierenden Fläche, und darin, ob die Strahlen zur Sonne oder zu einem anderen hellglänzenden Gegenstand hin gebrochen werden. Ein Regenbogen wird tagsüber sichtbar: an sein Auftreten bei Nacht, vom Mondlicht her, glaubten die Alten nicht. Dieser ihr Eindruck beruhte auf der Seltenheit des Phänomens, das ihnen deswegen verborgen blieb. Es kommt schon vor, aber nicht häufig. Die Ursache ist, dass in der Dunkelheit die Farben nicht zu sehen sind und ausserdem noch viele Bedingungen des Entstehens zusammentreffen müssen – und zwar sämtliche an einem einzelnen Tag im Monat: ausschliesslich bei Vollmond ist ein Mondregenbogen zu erwarten, und auch dann nur, wenn der Mond auf – oder untergeht. Darum haben wir ihn innerhalb von mehr als fünfzig Jahren nur zweimal erlebt. [...]

¹Dem Text zugrunde liegt eine Übersetzung von H. Strohm, Darmstadt 1970, S. 76-87

Kapitel 4. Dass der Regenbogen eine Reflektionserscheinung ist, wurde früher festgestellt; von welcher Art diese ist, wie ihre jeweiligen Besonderheiten zustande kommen und was deren Ursache ist, dies wollen wir nun darlegen. [...]

Vor allem aber findet Brechung von Wasser her statt, und Wasser, das eben in Bildung begriffen ist, wirkt in diesem Sinn stärker als Luft; denn jedes Teilchen, die zusammentretend einen Regentropfen ergeben, ist notwendigerweise ein besserer Spiegel als Nebel. Nun lehrt der Augenschein (wie es auch bereits früher dargestellt wurde), dass in solchen Spiegeln sich bloß die Farbe zeigt, die Form jedoch nicht deutlich wird. Unmittelbar vorm Regnen, also, wenn die Luft im Gewölk sich schon zu Tropfen zusammenschließt, aber noch kein Regen fällt, muss sich, falls gegenüber die Sonne steht oder eine andere Lichtquelle, die die Wolke zum Spiegel werden lässt und eine Brechung (des Sehens) von der Wolke zum hellen Objekt hin bewirkt, ein Bild der Farbe, nicht der Form ergeben. Jedes einzelne der spiegelnden Teilchen ist klein und nicht zu sehen, nur das ganze ausgedehnte Kontinuum, das sie zusammensetzen, ist sichtbar: folglich muss es das ausgedehnte Kontinuum einer Farbe sein, was da erscheint. Denn jedes spiegelnde Teilchen bietet die gleiche Farbe, wie sie das zusammenhängende Ganze hat. Diese Bedingungen sind theoretisch möglich; und so kann, wenn Sonne und Wolke die entsprechende Position einnehmen und wir (als Beobachter) in der Mitte stehen, damit gerechnet werden, dass die Brechung einen (Farb-)Eindruck hervorruft. [...]

Kapitel 5. Die Tatsache, dass ein Regenbogen weder einen Vollkreis bilden kann noch ein Segment, das größer ist als ein Halbkreis, sowie die anderen Eigenheiten des Phänomens lassen sich aus der gezeichneten Figur ersehen.

A sei eine Halbkugel über dem Horizontkreis, dessen Mittelpunkt sei **K**, **H** ein über dem Horizont aufsteigender Punkt. Wenn nun von **K** Geraden so gezogen werden, dass sie gewissermaßen einen Kegelmantel, mit **HK** als Achse, bilden, und wenn dann die Verbindungslinien **KM** dort von der Halbkugel zu **H** abgewinkelt werden (mit **HKM** als stumpfem Winkel), werden die so gezogenen Geraden auf eine Kreisperipherie fallen. Geschieht diese Abwinkelung dann, wenn das Gestirn gerade auf- oder untergeht, dann ist der Teil des Kreises oberhalb der Erde (= des Regenbogens), der vom Horizont abgeschnitten wird, ein Halbkreis. Erhebt sich das Gestirn

H über den Horizont, so wird das Kreissegment immer kleiner, und am kleinsten, wenn das Gestirn seine Mittagshöhe erreicht hat.

Zunächst sei die Position des Aufgangs, im Punkt **H**, gegeben, und **KM** werden zu **H** abgewinkelt; es sei die Ebene **A** angelegt, so wie sie durch das Dreieck **HKM** bestimmt ist. Ihre Schnittebene mit der Halbkugel wird ein großer Kreis sein, **A** – dabei kommt es nicht darauf an, welche durch das Dreieck **KMH** angelegte Ebene es ist von den verschiedenen, die durch **HK** gehen. für alle Geraden nun, die von den Punkten **H** und **K** gezogen werden und die zueinander in einem bestimmten (gegebenen) Verhältnis stehen, gilt, dass sie nur zu einem Punkt des Halbkreises **A** konstruiert werden können. Denn da die Punkte **K** und **H** und die Gerade **HK** gegeben sind, muss auch **MH** gegeben sein, also auch das Verhältnis **MH** zu **MK**. Dann wird **M** auf einer gegebenen Kreisperipherie liegen, die durch **NM** bezeichnet sei. Damit ist der Schnittpunkt der beiden Kreise gegeben. Keine zwei Geraden lassen sich, mit demselben Verhältnis zueinander und in derselben Fläche, zu einem anderen Punkt konstruieren als zu einem, der auf der Peripherie **NM** liegt (*Apolloniuskreis*). Lässt man nun den Halbkreis **A** um **HKII** als Achse rotieren, dann müssen die von **H**, **K** zu **M** gebrochenen Geraden in sämtlichen Ebenen, die die rotierende Figur nacheinander einnimmt, gleiche Positionen haben und durchweg den gleichen Winkel bilden; und der Winkel, den **HM** und **MII** mit **HII** bilden, muss sich immerfort gleich bleiben. So entsteht über **HII** und **KII** eine Reihe von Dreiecken, die sämtlich den Dreiecken **HMII** und **KMII** gleich sind. Ihre Höhen müssen auf denselben Punkt der Strecke **HII** fallen und gleich sein. Dieser Fußpunkt sei **O**. **O** ist der Mittelpunkt des Kreises, von dem ein Halbkreis (= als Regenbogen) vom Horizont abgeschnitten wird.

Weiter sei **AKΓ** der Horizont, über den sich die Sonne **H** erhoben hat; die Achse (der rotierenden Figur) sei jetzt **HII**. Dann wiederholen sich alle früheren Beweise, jedoch wird der Pol des Kreises **II** unter dem Horizont **AΓ** liegen, weil **H** sich über ihn erhoben hat. Es liegen dann auf derselben Geraden die Kreismittelpunkte **II** und **O** sowie der Mittelpunkt **K** des Kreises, der jetzt die Höhe des aufgestiegenen Himmelkörpers bestimmen läßt; es ist dies der Kreis (mit dem Durchmesser) **HII**. Nachdem aber **KH** sich oberhalb des Durchmessers **AΓ** befindet, muss der Mittelpunkt – nämlich **O** (des Regenbogenkreises) – unterhalb des früheren Horizonts **AΓ** liegen, auf der Strecke **KII**. Folglich muss das

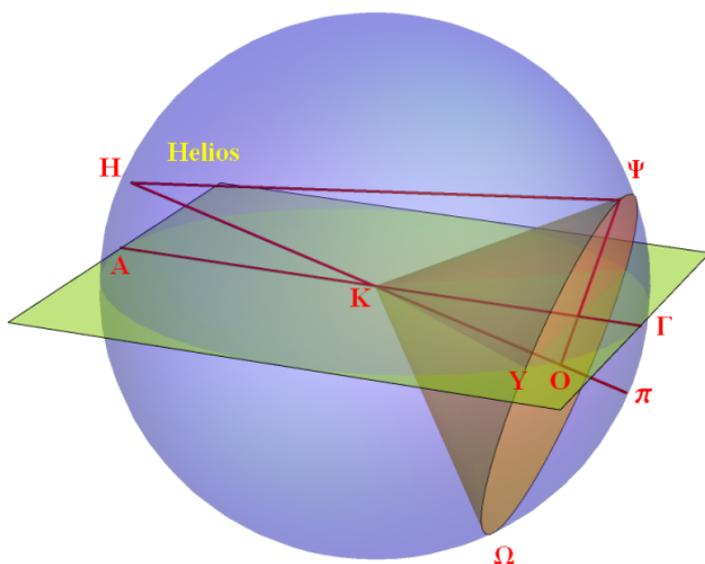


Fig. A.2: Die Modellvorstellung von Aristoteles zur Bildung des Regenbogens in seiner *METEOROLOGICA*. Letztendlich scheitert seine Erklärung, weil er nur mit der Geometrie der Wolke nicht die charakteristischen Winkel der Erscheinung bestimmen kann.

Kreissegment ΨY , oberhalb des Horizonts, kleiner sein als ein Halbkreis; denn das Segment $\Psi Y Z$ war (im vorigen Fall) ein Halbkreis, der aber jetzt (teilweise) vom Horizont $A\Gamma$ abgeschnitten ist. Das andere Segment Ω (des Regenbogenkreises) muss dann unsichtbar sein, da die Sonne über dem Horizont steht. Der sichtbare Teil wird mittags am kleinsten sein; denn je höher H steht, desto tiefer stehen die Kreismittelpunkte Π und O (= Regenbogenkreis).

A.3 Farbtafeln

Im folgenden werden für eine Reihe von Tropfenradien oder Tropfenhalbmesser a die entsprechenden Farberscheinungen des Regenbogens (Hauptbogen) um den Descartes'schen Winkel (Kauistik) dargestellt. Streulicht des Untergrundes oder die endliche Ausdehnung der Sonnenscheibe wurden dabei noch nicht berücksichtigt.

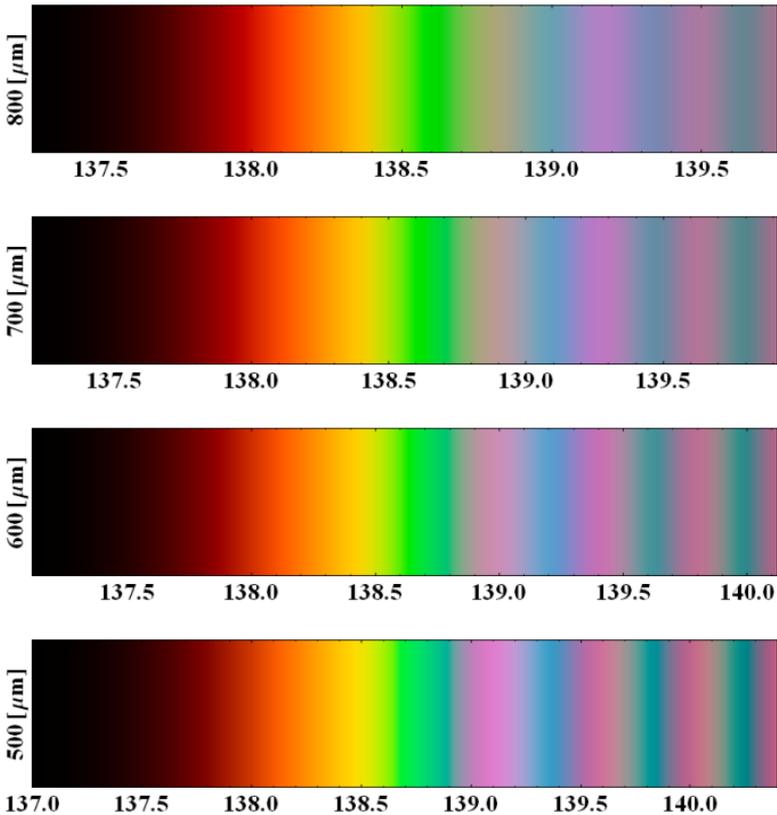


Fig. A.3: Die Farben des Regenbogens (Hauptbogens) als Funktion des Streuwinkels θ in Grad und des Halbmessers a der Wassertropfen in μm . Idealisierte Rechnung mit punktförmiger Sonne und konstanter Amplitude der Airy - Funktion. für Wassertropfenradien größer $400\mu\text{m}$ zeichnet sich deutlich ein grün - gelbes Band innerhalb des roten Bandes ab.

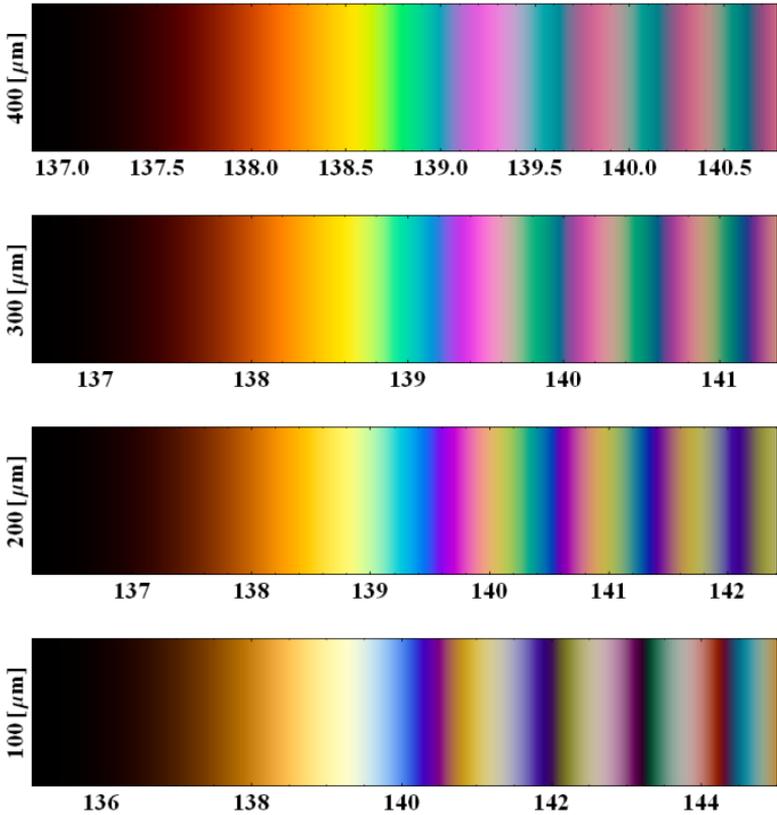


Fig. A.4: Die Farben des Regenbogens für Tropfenradien zwischen $100\mu\text{m}$ und $400\mu\text{m}$ als Funktion des Streuwinkels Θ . Das satte Rot des ersten Bogens bei größeren Wassertropfen geht mehr in orange Farbe über. Bögen mit $200\mu\text{m}$ bis $300\mu\text{m}$ großen Tropfen zeigen einen deutlichen hellblauen Interferenzring. Die höheren Interferenzbögen nehmen eine deutlich gelbliche Farbtonung an.

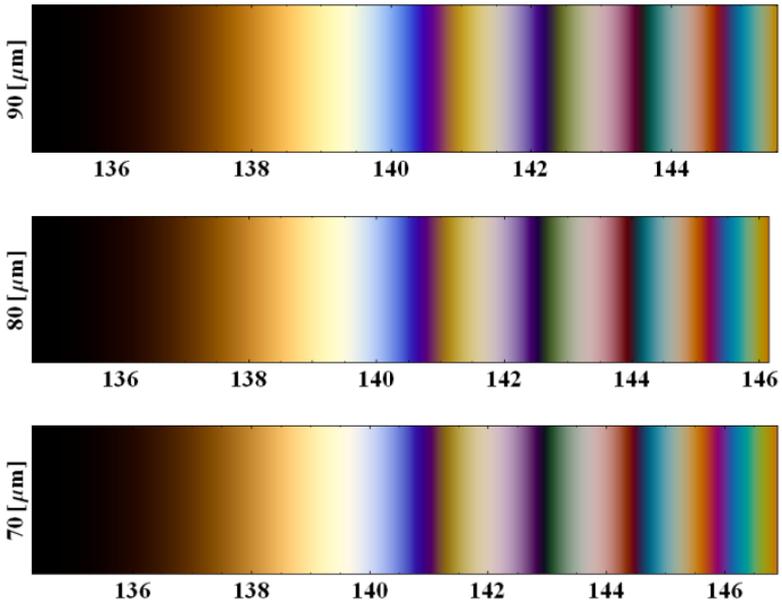


Fig. A.5: Die Farben des Regenbogens für Tropfenradien zwischen $70\mu\text{m}$ und $90\mu\text{m}$ als Funktion des Streuwinkels Θ . Das satte Rot des ersten Bogens für größere Wassertropfen ist jetzt verschwunden. Stattdessen haben die Interferenzbögen nun eine deutliche gelbliche Farbtonung.

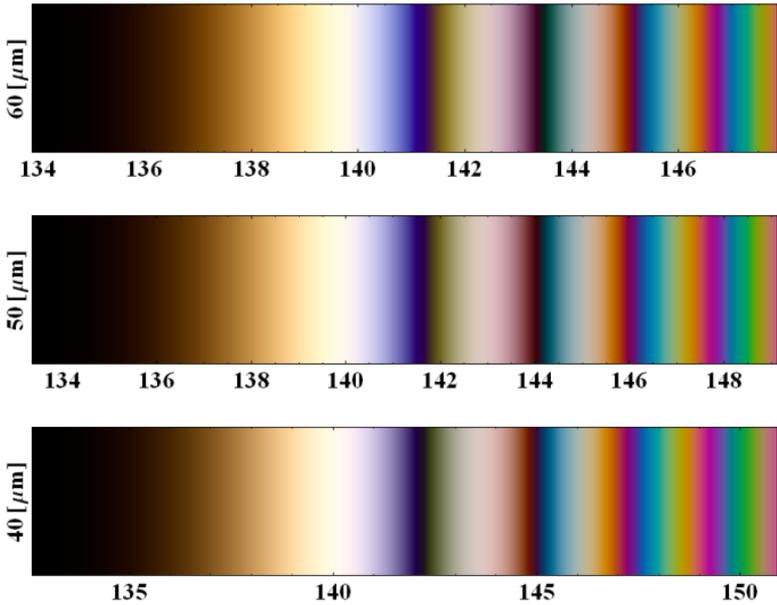


Fig. A.6: Die Farben des Regenbogens für Tropfenradien zwischen $60 \mu\text{m}$ und $40 \mu\text{m}$. Der gelbe Ton in den Interferenzbögen ist jetzt verschwunden.

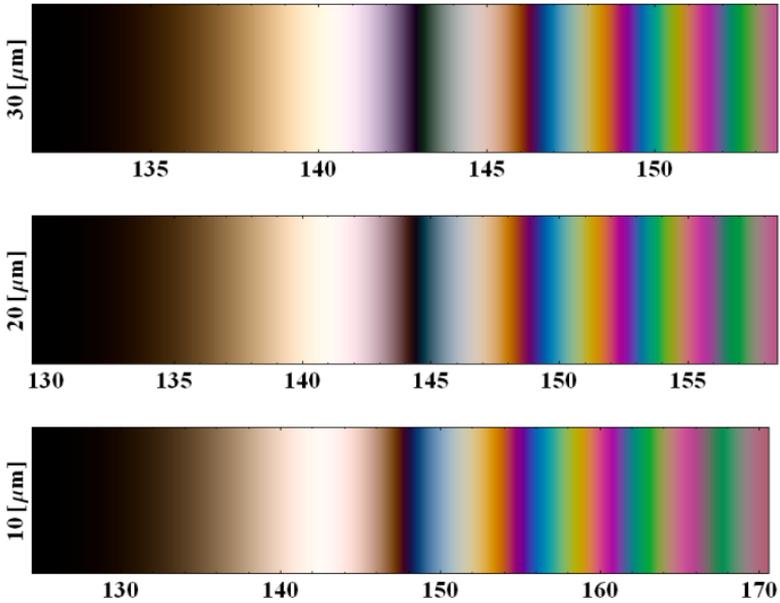


Fig. A.7: Die Farben des weißen Regenbogens (Nebelbogens) für Tropfenradien zwischen 10μ und $30 \mu\text{m}$. Der erste Bogen wird immer farbloser, während der zweite eine charakteristische Färbung an den Rändern aufweist. Die Umkehrung der Farbfolge in den Interferenzbögen (Rot jetzt am Innenrand der Interferenzbögen und nicht am Außenrand wie beim Hauptbogen) wurde bei Polarexpeditionen Ende des 19. Jahrhunderts immer wieder beobachtet und bestätigte zusammen mit den Winkelmessungen so die Airy - Approximation und die Farbrechnungen für den Nebelbogen. ([58]).

Literaturverzeichnis

- [1] Adams, J.A.: [The mathematical physics of rainbows and glories](#), Physics Reports **356**, Issues 4-5, pp. 229-365, (2002)
- [2] Airy, Sir G.B.: [On the Intensity of Light in the Neighbourhood of a Caustic](#). Transaction of the Cambridge Philosophical Society, **6** (1838), 379-403
- [3] Airy, G.B.: [Supplement to a paper , On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic](#), Transactions of the Cambridge Philosophical Society **8** (1849), 595-600.
- [4] Aristoteles:[Meteorologica](#) with an English translation by H.D.P. Lee, Loeb Classical Library, Cambridge Mass., 1952
- [5] Babinet, J. *Mémoires d'optique météorologique*. Comptes Rendus, **IV** (1837), 638-648
- [6] Bacon, Francis: *The Works*, **14** Vol., collected and edited by James Spedding, Robert Leslie Ellis and Douglas Denon Heath. London 1857-1874. Reprint: Frommann-Holzboog, Stuttgart-Bad Cannstatt 1961, ISBN 978-3-7728-0023-8
- [7] Beard, K.V. & C. Chuang 1987: *A new model for the equilibrium shape of raindrops*. Journal of the Atmospheric Sciences **44**, 11, 1509-1524
- [8] Billet, F. (1868): [Mémoire sur les Dix-neuf premiers arcs-en-ciel de l'eau](#). Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure Sér. 1, **5** (1868), p. 67-109
- [9] Bohren, C.F., Huffman, D.R.: *Absorption and scattering of light by Small Particles*. John Wiley & Sons; New York, 1983

- [10] Bouguer, P. & C.M. de la Condamine: *La Figure de la Terre*, Paris 1749
- [11] Boyer, Carl B. : *The Rainbow. From Myth to Mathematics*. Sagamore Press, Inc. (1959). Reprint as paperback by Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1987)
- [12] Brandes, H.W. 1816: [Venturi's Theorie des farbigen Bogens, welcher sich oft an der inneren Seite des Regenbogens zeigt, dargestellt mit einigen Anmerkungen](#). *Ann. Phys.* **52**, pp. 385-397. (1816)
- [13] Bravais, A. *Notice sur l'arc-en-ciel*. *Annuaire Météorologique de la France pour 1849*, pp. 311-334
- [14] Bravais, A. *Notice sur l'arc-en-ciel blanc*, *Journal de l'Ecole Royale Polytechnique*, Tome **XVIII**, Cahier 30 (1845), 97-122. Bravais verteidigt hier seine Hypothese, dass der weiße Regenbogen durch "hohle" Wassertropfen (Wassertropfen mit Luftblase) erzeugt wird.
- [15] Bravais, A. *Memoire sur les Halos et les Phénomènes Optiques qui les accompagnent*. *Journal de l'Ecole Royale Polytechnique*, Tome **XVIII**, Cahier 31 (1847), 1-270, (1847) Die umfangreichste Halo-Theorie des 19. Jahrhunderts.
- [16] Brewster, D.: *On the laws which regulate the polarisation of light by reflection from transparent bodies*, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **105**: 125-159, (1815)
- [17] Bucerius, H.: *Theorie des Regenbogens und der Glorie*. *Zeitschrift für Optik*, Band **1**, pp. 188 - 212, 1946
- [18] Buchwald, E. *Die Farben des Regenbogens*. *Annalen der Physik* **43**, 488 - 493, 1948
- [19] De Dominis, Marco Antonio: *Tractatus de radiis visus et lucis in vitris perspectivis et iride*, Venedig, (1611)
- [20] Canfield, P.: *Farben dünner Plättchen*. [demonstrations.wolfram](#)
- [21] Chester, C., Friedman, B. & F. Ursell: *An extension of the method of steepest descents*, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **53**, pp. 599-611, (1957).

- [22] Crombie, A.C.: *Robert Grosseteste and the origins of experimental science 1100-1700*. Oxford, Clarendon Press, 1953 (ISBN 0-19-824189-5) Das wohl wichtigste historische Standardwerk auch über die Geschichte des Regenbogens
- [23] Debye, P.: *Das Elektromagnetische Feld um einen Zylinder und die Theorie des Regenbogens*, Physikalische Zeitschrift **9**, pp. 775-778, (1908). Die fundamentale Arbeit zur Mie'schen Streutheorie und die Entwicklung von Reihen nach Bessel - Hankelfunktionen
- [24] Debye, P.: *Das Verhalten der Lichtwellen in der Nähe eines Brennpunktes oder einer Brennlinie*. Ann. Phys.**30**, p. 755, (1909)
- [25] Descartes, R. : [Les Météores](#), 1637
- [26] Franz, W.: *Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen*, Berlin, 1957 Walter Franz (1911 - 1992) arbeitete als „Sommerfeldschüler“ unter anderem auch über „Kriechwellen“ in der Beugungstheorie
- [27] Theoderich (Dietrich) von Freiberg, Theodoricus Teutonicus de Vriberg (?1245 - ?1320) *De iride et radialibus impressionibus* (On the rainbow and radiant impressions), oder *Über den Regenbogen und die durch Strahlen erzeugten Eindrücke* geschrieben um 1305. Herausgegeben durch Joseph Würschmidt (1886-1950): *Beiträge zur Geschichte der Philosophie des Mittelalters*, Band **XII**, Heft **5/6**, Münster i.W., Aschendorff 1914. Wiederentdeckt wurden diese Schriften durch den italienischen Gelehrten Giovanni Battista Venturi (1746-1822).
- [28] Johann Georg Theodor Grässe: *Sagenbuch des Preußischen Staats*. Bd. 1. Glogau: Carl Flemming 1868, Nr. 530, S. 476f. Zit. n. Deutsche Literatur von Luther bis Tucholsky. Großbibliothek (Digitale Bibliothek; 125) Berlin: Directmedia 2005, S. 192.226-192.227.
- [29] Grandy, W.T. Jr.: *Scattering of Waves from Large Spheres*, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 2000. Dieses Buch liefert für die theoretische Seite der klassischen Streutheorie einen ausgezeichneten Überblick

- [30] Greenler, R. *Rainbows, Halos, and Glories* Cambridge University Press, 1980.
- [31] Heilermann, Johannes: *Über den dritten Regenbogen*. Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht **XI**, pp.72-73, (1880) J. Heilemann berichtet hier über seine Beobachtungen aus einem fahrenden Zug
- [32] Halley, E. *De iride, sive de arcu coelesti, dissertatio geometrica*. Royal Society of London, Philosophical Transactions, **XXII**, 714-725, 1700-1701
- [33] Van de Hulst, H.C.: *Light Scattering by small Particles*, John Wiley & Sons, Inc. New York 1957
- [34] P.D. Jones, K.R. Briffa, T.P. Barnett, and S.F.B. Tett, 1998, *High-resolution Palaeoclimatic Records for the last Millennium: Interpretation, Integration and Comparison with General Circulation Model Control-run Temperatures*, The Holocene **8**, 1998, 455-471.
- [35] Jackson, J.D: *From Alexander of Aphrodisias to Young and Airy*, Physics Reports **320**, 27-36 (1999).
- [36] Khare, V., Nussenzveig, H.M.: Theory of the Rainbow. Physical Review Letters, **33**, 16, pp.976-980 (1974)
- [37] Khare, V., Nussenzveig, H.M.: Theory of the Glory. Physical Review Letters, **38**, pp.1279-1282 (1977)
- [38] Kirchhoff, C.G. 1876-1894: *Vorlesungen über mathematische Physik*. 4 Bände, B. G. Teubner, Leipzig 1876-1894.
- [39] Kramer, Stephen P. & Daniel Mark Duffy: *Theodoric's Rainbow*. W H Freeman & Co (Sd) September 1995
- [40] Lee, Raymond L.: Mie theory, Airy theory and natural rainbow. APPLIED OPTICS **37**, 1506-1519 (1998)
- [41] Lommel, E.: *Bemerkungen über die Polarisation des Regenbogens*, Sitzungsberichte der Physik.-Medic. Societät zu Erlangen vom 19. Februar, 1877, 3 Seiten; auch Annalen der Physik **237**, Heft 5, pp. 147-150, (1877)

- [42] Malus, E.L. (1809): *Sur une propriété de la lumière réfléchie (On a property of reflected light)*, Memoires de physique et de chimie de la Societe d'Arcueil, **2**, pp. 143-158.
- [43] Malus, E.L. (1809): *Sur une propriété de la lumière réfléchie par les corps diaphanes (On a property of light reflected by translucent substances)*, Nouveau Bulletin des Sciences [par la Societe Philomatique de Paris], **1**: 266-270.
- [44] Malus, E.L. : *Théorie de la double refraction de la lumière dans les substances cristallisées [Theory of the double refraction of light in crystallized substances]* Paris, France: Garnery, 1810).
- [45] Marci, Johann Marcus: [t Thaumantias, sive liber de arcu coelesti](#). Prag, 1648
- [46] Mariotte, E.: [Oeuvres de M. Mariotte](#). Nouvelles Edition Tome I, a la Haye, 1740
- [47] Mie, G. : Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen. Annalen der Physik, Vierte Folge, Band **25**, 1908, No. 3, S. 377-445.
- [48] Möbius, W. : Zur Theorie des Regenbogens an Kugeln von 1 bis 10 Lichtwellenlängen Durchmesser. *Preisschriften gekrönt und herausgegeben von der fürstlichen Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig*, XLII (1912), 1-31
- [49] Nehse, Carl Eduard : [Der Brocken und seine Merkwürdigkeiten](#). Gedruckt in der Hofbuchdruckerei zu Wernigerode, bei E. Thiele, 1840
- [50] Newton, I. : *Optical Lectures*. Translated into English, London, 1728.
- [51] Newton, I. : [Optics](#). Fourth Edition, London, 1730.
- [52] Nussenzweig, H.M.: High-Frequency Scattering by a Transparent Sphere. II. Theory of the Rainbow and the Glory, Journal of Mathematical Physics, **10**, 125 - 176 , (1969)

- [53] Nussenzweig, H.M.: Theory of the Rainbow. *Sci.America* **236**, 116-127, (1977)
- [54] Nussenzweig, H.M.: *Diffraction effects in Semiclassical Scattering*. (Montroll Memorial Lecture Series in Mathematical Physics). Cambridge University Press, 1992, 252pp.
- [55] Nussenzweig, H.M.: The complex angular momentum theory of the rainbow and the glory. *J. Opt. Soc. Am.* **69**, 1068-1079 (1979)
- [56] Nussenzweig, H.M.: *The Science of the Glory*. *Scientific American* **306**, 68-73 (2012)
- [57] Pernter, J.M., „Zur Theorie des Bishop'schen Ringes und Folgeerscheinungen des Krakatau-Ausbruches“, *Met. Z.* **6**; zugleich *Z. d. Oesterr. Ges. f. Met.* **24** (redig. von J. Hann u. W. Köppen), 329 - 339, 401-418, 447-466, Zitat 455, and *Met. Z.* **7**, bzw. 25, 41-50 (1889).
- [58] Pernter, J.M., „Die Farben des Regenbogens und der weisse Regenbogen.“ *Sitzungsberichte der Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Classe der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften*, CVI (1897), Heft 3-4, Part IIa, 135-235
- [59] Pernter, J.M. und Exner, F.M.: [Meteorologische Optik](#), Verlag Wilhelm Braumüller, Wien und Leipzig, (first edition 1910, second edition 1922), 799 pp. J.M. Pernter (1848 - 1908), der zeitweise dem Orden der Jesuiten angehörte, wurde zum Schreiben dieses Klassikers durch den Ausbruch des Krakatoa 1883 angeregt. Monatelang war damals auch in Europa um die Sonne ein Haloring (Bishop's Sonnenring) von etwa 28° Radius beobachtbar, dessen Ursache Beugung an etwa $2\mu\text{m}$ kleinen Sulfat - Aerosol - Teilchen in der Stratosphäre war. [deutsche-biographie.de](#) ↑
- [60] Pernter, J.M.: Zur Theorie des von einer kreisförmigen Lichtquelle erzeugten Regenbogens. *Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, Math.-Naturw. Klasse, CXIV, Abt. IIa*, Juni 1905
- [61] Pernter, J.M.: Ein Versuch der richtigen Theorie des Regenbogens Eingang in die Mittelschulen zu verschaffen. *Kaiser-Jubiläums-Hefte der Zeitschrift für die österreichischen Gymnasien*, Wien 1898.

- [62] J. W. Strutt (Lord Rayleigh): *The Incidence of Light Upon a Transparent Sphere*, Royal Soc. of London, Proceedings, Ser. A, **LXXXIV**, 25-46, 1910.
- [63] Rashed, R.: *A pioneer in anaclastics: Ibn Sahl on burning mirrors and lenses*, Isis **81**, pp. 464-491, 1990.
- [64] Rashed, R.: *Geometrie et dioptrique au Xe siecle. Ibn Sahl, al-Quhi et Ibn al-Haytham*. Les Belles Lettres, Paris 1993.
- [65] Regge, T.E. (1960): *Bound states, shadow states and the Mandelstam representation*. *Nuovo Cimento* **18**, 947
- [66] Rösch, S. (1968): [Der Regenbogen in Wissenschaft und Kunst](#), Applied Optics **7**, 233-239.
- [67] Sadeghi,I.; Munoz, A.; Laven, P.; Jarosz, W.; Seron, F.; Gutierrez, D. & H.W. Jensen. *Physically - Based Simulation of Rainbows*. ACM Transactions on Graphics (TOG) , **31**, Issue 1, pp. 1-12, February 2012.
- [68] Safranski, Rüdiger 2013: *Goethe Kunstwerk des Lebens*. Biographie, Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG; 2013
- [69] Sommerfeld, A.: Vorlesungen über Theoretische Physik. Band **4**, *Optik* (hier & 38 und besonders & 45 für Phasensprung bei Brennlinien und Brennpunkten) und auch Band **6**, *Partielle Differentialgleichungen der Physik*. Verlag Harri Deutsch 1978/1992.
- [70] Spieker, Christian Wilhelm : [tDer Harz. Seine Geschichte, Ruinen und Sagen. Zwei Reisen in den Jahren 1800 und 1850](#). Berlin: Gebauersche Buchhandlung (J. Petsch) 1852 (Digitalisierung durch Google), S. 175f.
- [71] Stratton,A.: *Electromagnetic Theory*, New York: McGraw-Hill, 1941.
- [72] Streber, Franz 1860: *Über die sogenannten Regenbogen - Schüsselchen*. Von der Heimath und dem Alter der sogenannten Regenbogen - Schüsselchen. München 1860. Verlag der k. Akademie

- [73] Tape, W. (1980). [Analytical Foundations of Halo Theory](#). Journal Optical Society of America, Volume **70**, Issue 10, pp. 1175
- [74] Tape, W. (1994): Atmospheric Halos, Antarctic Research Series, Vol. **64**, (American Geophysical Union, 1994).
- [75] Tape, W. & J. Moilanen. 2006: *Atmospheric Halos and the Search for Angle X*. American Geophysical Union Washington, DC, Copyright 2006 by the American Geophysical Union 2000 Florida Avenue, NW
- [76] Uliu, F.S.: *About the primary rainbow and its polarization*. Romanian Reports in Physics, Vol. **60**, No. 3, P. 763 - 776, 2008
- [77] Ulloa, D. Antonio & Juan, D. Jorge 1748: [Observaciones astronomicas phisicas hechas de orden de S. Mag. en los reynos del Peru - de las quales se deduce la figura, y magnitud de la tierra y se aplica a la navegacion.](#) und *Relaciones Historica del viage hecho de orden de S. Mag. a la America Meridional*, Tomo I-III, Madrid, 1748 (Die Schilderung der Glorie und des Nebelbogens befindet sich im letzteren Werk auf Seite 592, die Abbildung auf Seite 599)
- [78] Venturi, G.B.: [Commentari sopra la storia e le teorie dell' ottica](#) [Commentary on the history and theory of optics], vol. 1 , (Bologna, (Italy): Fratelli Masi, e Compagno, 1814), III. *Dell' iride, degli aloni e de' paregli* [On the rainbow, halos, and parhelia] (1814)
- [79] Wang, R.T. and H. C. van de Hulst, Rainbows: Mie computations and the Airy approximation, Appl. Opt. **30**, 106 - 117, 1991 Diese Arbeit enthält insbesondere analytische Formeln für die Airy - Theorie
- [80] Watson, G.N.: *The transmission of electric waves around the Earth*. Proc. Roy. Soc. London Series **A 95**, 83, pp. 546-563, (1919)
- [81] Wegener, A.(1925): [Theorie der Haupthalos](#). Archiv Deutsche Seewarte **43** (2), 1-32, (1925)
- [82] Wiedemann, E.: *Theorie des Regenbogens von Ibn al Haitam*. Sitzungsberichte der Physikalisch-Medzizinischen Sozietät Erlangen **XLII**, pp. 39-56, (1914)

- [83] Wiscombe, W.J.: Mie scattering calculations: advances in technique and fast, vector-speed computer codes, NCAR/TN-140 + STR, National Center for Atmospheric Research, Boulder, Colorado, 1979
- [84] Würschmidt, J.: *Die Theorie des Regenbogens und des Halo bei Ibn al Haitam und bei Dietrich von Freiberg*, Meteorologische Zeitschrift **XXXI**, pp. 484-487, (1914)
- [85] Young, Th.: [Experiments and Calculations Relative to Physical Optics](#), Phil. Trans., Roy. Soc. London, **94**, 1-16 (1804)
- [86] *Life of Thomas Young, M.D., F.R.S.* by George Peacock, D.D.; London: John Murray, Albemarle Street, 1855
- [87] Auf [dieser Internetseite](#) des Arbeitskreises Meteore e.V. findet man zahlreiche Fotos und Beobachtungsbeiträge zur meteorologischen Optik.
- [88] Fast alles zur Mietheorie des Regenbogens einschließlich Programm findet man auf der homepage von Philip Laven aus Genf: [philiplaven.com](#) ↑. Zur Theorie der Glorie ist die Seite von Les Cowley sehr interessant: [sundog.clara.co.uk](#) ↑. Ein sehr umfangreiches Programm zu Halo-Simulation von Les Cowley und Michael Schroeder findet man bei [sundog.clara.co.uk](#) ↑.