

# Geleitwort

<sup>1</sup> As a treatise on fuzzy set theory and its applications, “Foundations of Fuzzy Systems,” by R. Kruse, J. Gebhardt and F. Klawonn, has few equals. Succinct, authoritative and up-to-date, it covers the basic theory very thoroughly and precisely, with emphasis on those aspects of the theory which play an important role in its applications. This is especially true of the chapters dealing with the calculus of fuzzy if-then rules — a subset of fuzzy set theory which plays a central role in the applications relating to the conception and design of both control and knowledge-based systems.

To view the contents of “Foundations of Fuzzy Systems” in a proper perspective, a digression is in order.

First, it is important to recognize that any crisp theory  $X$  can be fuzzified — and hence generalized to fuzzy  $X$  — by replacing the concept of a crisp set in  $X$  by that of a fuzzy set. In application to basic fields such as arithmetic, topology, graph theory, probability theory, etc., fuzzification leads to fuzzy arithmetic, fuzzy topology, fuzzy graph theory, fuzzy probability theory, etc. Similarly, in application to applied fields such as system theory, neural network theory, stability theory, pattern recognition, mathematical programming, etc., fuzzification leads to fuzzy system theory, fuzzy neural network theory, fuzzy stability theory, fuzzy pattern recognition, fuzzy mathematical programming, etc. What is gained through fuzzification is greater generality, higher expressive power, an enhanced ability to model real world problems and a methodology for exploiting the tolerance for imprecision and uncertainty to achieve tractability, robustness and low solution cost. For these reasons, it is inevitable that, eventually, fuzzy set theory will pervade most scientific theories and will have a particularly strong impact in the realms of systems analysis, artificial intelligence, intelligent control, signal processing, numerical analysis, optimization techniques, diagnostics, linguistics, information processing, decision analysis, cognitive science and related fields. In a very basic sense, this is the leitmotiv of the “Foundations of Fuzzy Systems.”

Fuzzification applies not only to theories but, even more fundamentally, to concepts. One such concept — a concept which plays a central role in mathematics and its applications — is that of a theorem. In its traditional sense, a theorem may be viewed as a crisp if-then rule in which the premises form the antecedent. A fuzzy theorem, then, is a fuzzy if-then rule. A simple example of a fuzzy theorem is: if  $X$  and  $Y$  are large numbers then  $X + Y$  is a large number. A fuzzy theorem is categorical if the

---

<sup>1</sup>Geleitwort zur englischen Ausgabe „Foundations of Fuzzy Systems,” J. Wiley & Sons 1994.

truth value of the consequent is greater than or equal to that of the antecedent. In this sense, a categorical fuzzy theorem is reducible to a crisp theorem.

A dispositional fuzzy theorem is a usuality-qualified fuzzy if-then rule, that is, a rule which holds usually but not necessarily universally. For example, if  $X$  and  $Y$  are large numbers then usually  $X + Y$  is a very large number. In this case, the underlying assumption is that the truth value of the consequent is usually — but not necessarily always — greater than or equal to that of the antecedent. In the case of dispositional fuzzy theorems, usuality qualification is frequently implicit rather than explicit and the expressions for the antecedent and consequent are informal rather than formal.

Viewed in this perspective, in the first three chapters of “Foundations of Fuzzy Systems” most of the results may be interpreted as categorical fuzzy theorems. By contrast, in the last chapter on fuzzy control, the rules are categorical but the conclusions regarding system performance are in effect dispositional fuzzy theorems — even though they are not presented as such. What this points to is that in the realm of practical applications the concept of a dispositional fuzzy theorem plays a dominant role albeit in a disguised rather than explicit form.

“Foundations of Fuzzy Systems” contains much that is worthy of praise. The exposition is tight and yet reader-friendly. The historical notes at the end of each chapter are illuminating; the inclusion of exercises enhances the pedagogical value of the text; and the description of software tools should appeal strongly to those who are interested in implementation issues.

There is a minor point of semantics which I do not see in the same light as the authors. Specifically, in my view — which was articulated in some of my early papers on the application of fuzzy sets to linguistics — the term vague is not coextensive with fuzzy, although it is frequently used in this sense in the literature of philosophy and linguistics. Thus, in my perception, vague and fuzzy are distinct concepts, with vagueness pertaining to insufficient specificity whereas fuzziness relates to unsharpness of boundaries. For example, “I will see you sometime,” is vague and fuzzy while “I will meet you at approximately 5 pm” is fuzzy but not vague.

Putting aside minor matters, “Foundations of Fuzzy Systems” is a truly outstanding work. Much of the material is new and what is not new is treated with precision, clarity and concern for ease of understanding.

The exposition — as stated earlier — is authoritative, succinct and up-to-date. The authors deserve our thanks and congratulations for writing a book that contributes so importantly to the advancement of fuzzy set theory and its applications to fuzzy systems and related fields.

**Lotfi A. Zadeh**

*Berkeley, California, March 1994*

# Vorwort zur zweiten Auflage

Fuzzy-Systeme erfreuen sich wegen ihres Erfolges in Japan auch hierzulande wachsender Popularität, die sich in einer rasch ansteigenden Zahl industrieller Anwendungen, kommerzieller Entwicklungsumgebungen und Publikationen zeigt. Auch im universitären Bereich finden Fuzzy-Methoden zunehmend Interesse. Hinsichtlich der Integration von Vorlesungen über Fuzzy-Systeme in einzelne Studiengänge ist zu beachten, daß es sich hier um ein interdisziplinäres Gebiet handelt, das zwar auf theoretischen Grundlagen aus der Mengenlehre und der Logik aufbaut, dessen Hauptanwendungszweige jedoch in wissensbasierten Systemen (als Teilbereich der Künstlichen Intelligenz) sowie der Regelungstechnik (als klassische Ingenieurdisziplin) liegen.

Unser vornehmliches Ziel ist es daher, mit diesem Lehrbuch einen in erster Linie auf Studierende der Informatik nach dem Vordiplom ausgerichteten methodischen Einführungskurs in Fuzzy-Systeme zu geben, der die mathematische Ausbildung des Grundstudiums voraussetzt. Bezüglich Konzeption und Inhalt spricht dieser Kurs aber gleichermaßen Studierende anderer Fachrichtungen aus den Ingenieurwissenschaften, der angewandten Mathematik und den Naturwissenschaften an.

Der Lehrstoff basiert auf Vorlesungen, die der erste Autor seit dem Wintersemester 1984/85 regelmäßig an der Technischen Universität Braunschweig hält. Die Themenauswahl spiegelt nach der Darstellung allgemeiner Grundlagen zwei wichtige Anwendungsgebiete von Fuzzy-Systemen wider, nämlich das approximative Schließen in wissensbasierten Systemen und die Fuzzy-Regelung. Uns geht es dabei nicht nur um die Vermittlung fundamentaler Konzepte und deren Umsetzung, wie dies die Philosophie vieler anderer zur Zeit auf dem Markt erhältlicher Bücher ist; es geht insbesondere auch darum, den theoretischen Hintergrund und Fragen der Semantik zu klären, um den Lesern die für den fundierten Einsatz von Fuzzy-Systemen notwendige Sensibilität zu vermitteln.

Für Forscher und Entwickler sind sicherlich die an den eigentlichen Lehrstoff angefügten vertiefenden Bemerkungen von zusätzlichem Interesse, da sie die historische Entwicklung, weiterführende Literatur und Querbezüge zu anderen Fachrichtungen aufzeigen.

Das Buch enthält verschiedene Originalresultate, die im Rahmen von Kooperationsverträgen des Instituts für Betriebssysteme und Rechnerverbund der Technischen Universität Braunschweig mit der Fraunhofer Gesellschaft, der Dornier GmbH, der Siemens AG und der Volkswagen AG erzielt wurden. Die Autoren profitierten in erheblichem

Maße von ihrer Mitarbeit an dem ESPRIT-Projekt DRUMS (Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems, Basic Research Action No. 3085).

Verschiedene Kollegen aus der Wissenschaft und Projektpartner haben zur Verbesserung des Buches beigetragen. Wir danken insbesondere Hans Bandemer, Piero Bonissone, Didier Dubois, Patrik Eklund, Petr Hajek, Ulrich Höhle, Peter Klement, Janucz Kacprzyk, Ramon López de Mantaras, Abe Mamdani, Kai Michels, Serafín Moral, Detlef Nauck, Henri Prade, Michael M. Richter, Philippe Smets, Hideyuki Takagi, Herbert Toth, Enric Trillas, Lotfi Zadeh und Hans-Jürgen Zimmermann für fruchtbare Diskussionen, Toshiro Terano für die vielen Anregungen während eines Forschungsaufenthaltes am LIFE-Institut (Laboratory for International Fuzzy Engineering Research, Yokohama, Japan) sowie Hans Bangen, Joachim Beckmann, Hans-Joachim Bohn, Horst Weber und insbesondere Hartmut Wolff für die fachliche Unterstützung in den Projekten.

Die vorliegende zweite Auflage ist eine Überarbeitung und Verbesserung der 1993 erschienenen Erstauflage. Der Text wurde mehrfach in Vorlesungen und Schulungen benutzt und hat dabei von zahlreichen Anregungen aus dem Kreise der Studenten, Kollegen sowie den Teilnehmern der industriellen Tutorien profitiert.

Mittlerweile ist das Buch auch in einer englischen Übersetzung erhältlich: R. Kruse, J. Gebhardt, F. Klawonn, *Foundations of Fuzzy Systems*, Wiley, Chichester, 1994, ISBN 0-471-94243-X. Das in ihr enthaltene Vorwort von L.A. Zadeh haben wir hier aufgenommen.

Wir danken Susanne Schmidt, Heiner Bunjes, Yan Chu und Roland Stellmach für die Erstellung der  $\LaTeX$ -Dateien der Erstauflage, Christian Borgelt für die Überarbeitung der Dateien für die zweite Auflage sowie dem Teubner-Verlag für die gute Zusammenarbeit.

**R. Kruse**  
**J. Gebhardt**  
**F. Klawonn**

*Braunschweig, im Oktober 1994*

# Inhaltsverzeichnis

<b>Geleitwort</b>	<b>v</b>
<b>Vorwort zur zweiten Auflage</b>	<b>vii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Fuzzy-Systeme . . . . .	1
1.2 Modellierung vager, impräziser und unsicherer Informationen . . . . .	2
1.3 Zu diesem Buch . . . . .	4
<b>2 Grundlagen der Theorie der Fuzzy-Mengen</b>	<b>7</b>
2.1 Fuzzy-Mengen: Eine motivierende Einführung . . . . .	7
2.2 Einfache Repräsentationsformen für Fuzzy-Mengen . . . . .	14
2.3 Verknüpfungen von Fuzzy-Mengen . . . . .	21
2.4 Das Extensionsprinzip . . . . .	28
2.5 Effizientes Operieren auf Fuzzy-Mengen . . . . .	32
2.6 Zur Semantik von Fuzzy-Mengen . . . . .	43
2.6.1 Interpretation vager Konzepte . . . . .	44
2.6.2 Interpretation vager Umgebungen . . . . .	48
2.7 Fuzzy-Logik . . . . .	58
2.8 Ergänzende Bemerkungen und Quellenangaben . . . . .	67
2.8.1 Historische Entwicklung: Fuzzy-Systeme . . . . .	67
2.8.2 Fuzzy-Mengen und ihre Semantik . . . . .	70
2.8.3 Akquisition von Zugehörigkeitsgraden . . . . .	72
2.8.4 Fuzzy-Logik . . . . .	74
2.8.5 Das SOLD-System — Eine Implementierung . . . . .	75
2.8.6 Übungsaufgaben . . . . .	80

<b>3</b>	<b>Approximatives Schließen</b>	<b>83</b>
3.1	Possibilitätsverteilungen und Unsicherheitsmaße . . . . .	84
3.2	Konzeption eines Expertensystems für possibilistische Daten . . . . .	93
3.3	Interpretation possibilistischer Inferenzregeln . . . . .	108
3.4	Wissensrepräsentation und -propagation mit Hypergraphen . . . . .	116
3.5	Logikbasierte Inferenzmechanismen . . . . .	131
3.5.1	Possibilistische Logik . . . . .	134
3.5.2	Wahrheitsfunktionale Logiken . . . . .	141
3.6	Ergänzende Bemerkungen und Quellenangaben . . . . .	145
3.6.1	Historische Entwicklung: Approximatives Schließen . . . . .	145
3.6.2	Possibilitätsverteilungen . . . . .	147
3.6.3	Fuzzy-Maße . . . . .	151
3.6.4	Erweiterungen logikbasierter Inferenzmechanismen . . . . .	153
3.6.5	POSSINFER — Eine Implementierung . . . . .	154
3.6.6	Übungsaufgaben . . . . .	157
<b>4</b>	<b>Fuzzy-Regelung</b>	<b>161</b>
4.1	Kognitive versus klassische Modelle . . . . .	162
4.2	Zwei Ansätze zur Fuzzy-Regelung . . . . .	167
4.2.1	Der Ansatz von Mamdani . . . . .	167
4.2.2	Der Ansatz von Takagi und Sugeno . . . . .	178
4.3	Entwurf und Optimierung von Fuzzy-Reglern . . . . .	183
4.3.1	Festlegung der Meß- und Stellgrößen . . . . .	183
4.3.2	Die Wertebereiche für die Meß- und Stellgrößen . . . . .	184
4.3.3	Partitionierungen der Wertebereiche . . . . .	185
4.3.4	Die linguistischen Regeln . . . . .	185
4.3.5	Auswertung der linguistischen Regeln . . . . .	186
4.3.6	Die Wahl der Defuzzifikations-Strategie . . . . .	187
4.3.7	Optimierung eines Fuzzy-Reglers . . . . .	187
4.4	Fuzzy-Regelung auf der Basis von Gleichheitsrelationen . . . . .	188
4.4.1	Gleichheitsrelationen als Grundlage der Fuzzy-Regelung . . . . .	188
4.4.2	Interpretation eines Mamdani-Fuzzy-Reglers auf der Basis von Gleichheitsrelationen . . . . .	198
4.5	Fuzzy-Regelung und Relationalgleichungen . . . . .	211

4.6	Ergänzende Bemerkungen und Quellenangaben . . . . .	217
4.6.1	Historische Entwicklung: Fuzzy-Regelung . . . . .	217
4.6.2	Fuzzy-Regelungstechnik . . . . .	218
4.6.3	Realisierung von Fuzzy-Reglern . . . . .	220
4.6.4	Fuzzy-Regelung der Leerlaufdrehzahl eines PKW-Motors — Eine Implementierung . . . . .	223
4.6.5	Übungsaufgaben . . . . .	234
	<b>Symbole</b>	<b>237</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>241</b>
	<b>Index</b>	<b>273</b>





# Kapitel 1

## Einleitung

Dieses Kapitel gibt eine kurze Einführung in das Gebiet der Fuzzy-Systeme und die Konstruktion von Modellen zur Verarbeitung unvollkommener Informationen. Außerdem erläutern wir die Grundideen, die daraus resultierenden Strukturen und die Gliederung des Buches.

### 1.1 Fuzzy-Systeme

In den Ingenieur- und Naturwissenschaften bedient man sich zur Beschreibung von Systemen üblicherweise mathematischer Modelle. Typische Beispiele sind Modelle, die physikalische Gesetze beschreiben (z.B. Systeme von Differentialgleichungen), stochastische Modelle (z.B. Markov-Ketten), aber auch Modelle, die aus der mathematischen Logik hervorgegangen sind (z.B. das Entity-Relationship-Modell im Bereich der Datenbanksysteme). Eine generelle Schwierigkeit beim Aufbau von Modellen liegt darin, daß oft erhebliche Idealisierungen notwendig sind, um von einem konkreten Problem zu einem geeigneten mathematischen Modell zu gelangen. Die Fortschritte in der Computertechnologie haben zwar dazu geführt, daß wir prinzipiell immer komplexere Systeme handhaben können, dabei aber auch ständig wachsenden konzeptionellen Ansprüchen begegnen, um große Softwarepakete noch überschaubar zu halten. Ebenso verlieren riesige Datenbanken ihren Wert, wenn deren Benutzer nicht mehr in der Lage sind, die für sie relevanten Informationen sinnvoll zu extrahieren und sich in geeigneter Form präsentieren zu lassen.

Eine Methode, komplexe Systeme zu vereinfachen, besteht in der Tolerierung eines bestimmten Anteils an schon bei der Modellbildung. Die entstehenden Systeme sind zwar nicht perfekt, aber oft zur Lösung der Modellierungsaufgabe ausreichend. Das Prinzip, einen gewissen Informationsverlust hinzunehmen, hat sich bereits in wissensbasierten Systemen bewährt, in denen bei der Modellbildung die Unvollkommenheit von Expertenwissen berücksichtigt wird.

Bei Fuzzy-Systemen versucht man, durch das gezielte Verwenden imperfekter Informationen den Vorteil der gegenüber anderen Systemen reduzierten Komplexität auszunut-

zen. Zu grobe Modelle bergen natürlich die Gefahr in sich, daß wichtige Eigenschaften der realen Welt außer acht gelassen werden. Andererseits läßt sich die Frage, wie gut ein Modell ist, nicht allein anhand des Präzisionsgrades der einfließenden Informationen beantworten, sondern es müssen weitere Gütekriterien wie Korrektheit, Vollständigkeit, Adäquatheit, Effizienz und Benutzerfreundlichkeit berücksichtigt werden. Es ist daher nicht verwunderlich, daß ein Modell, das durch die systematische Einbeziehung imperfekter Informationen das interessierende System komplexitätsreduziert beschreibt, in bezug auf bestimmte Gütekriterien durchaus besser sein kann als ein Modell, das generell nur präzise Informationen zuläßt.

In den vergangenen Jahren hat die Verwendung von Fuzzy-Systemen vor allem im Bereich der Regelungstechnik verblüffende Erfolge erbracht. Fuzzy-Methoden sind daher Gegenstand dieses Lehrbuches und werden bezüglich ihrer Anwendbarkeit zur Modellierung mit Impräzision, Vagheit und Unsicherheit behafteter Informationen ausführlich behandelt. Bevor wir jedoch auf inhaltliche Details eingehen, geben wir zunächst eine kurze Begriffsbestimmung dessen, was wir unter den drei genannten Arten imperfekter Informationen (impräzise, vage und unsicher) verstehen.

## 1.2 Modellierung vager, impräziser und unsicherer Informationen

Im täglichen Leben wird *Vagheit* bewußt in Kauf genommen, um die Kommunikation zu erleichtern und Informationen auf den für gezieltes Handeln in einer bestimmten Situation wesentlichen Anteil zu beschränken. So ist beispielsweise die Verwendung des Adjektivs „schnell“ zur Beschreibung der Fortbewegung eines sich von vorn annähernden Fahrzeugs vollkommen ausreichend, um gegebenenfalls die Notwendigkeit eines Ausweichmanövers zu signalisieren. Welche exakte momentane Geschwindigkeit das Auto aufweist, dürfte in dieser speziellen Situation von untergeordneter Bedeutung sein.

Selbst wenn man davon absieht, daß vage Begriffe wie „schnell“ von Person zu Person verschieden aufgefaßt werden und auch relativ zum Kontext interpretiert werden müssen (die Geschwindigkeit eines schnellen Autos entspricht der eines langsamen Flugzeuges), kann eine bestimmte Person unter wohldefinierten Bedingungen die Fortbewegung von Autos mit vorgegebener Geschwindigkeit nicht immer eindeutig als „schnell“ bzw. „nicht schnell“ klassifizieren. Für manche Geschwindigkeiten ist die Zuordnung zwar klar, für andere fällt sie jedoch schwer, da menschliches Denken keine scharfe Grenze zwischen den vagen Konzepten „schnell“ und „nicht schnell“ zieht. Im folgenden werden wir solche unscharfen Übergänge mit Hilfe sogenannter *Fuzzy-Mengen* beschreiben. Voraussetzung hierfür ist, daß die Vagheit der Konzepte nicht allein auf ungenügender Spezifizierbarkeit beruht, sondern auch eine graduelle Zugehörigkeit zu solchen Konzepten im Sinne der Modellierung unscharfer Grenzen zugelassen ist. Das nächste Kapitel widmet sich ausführlich diesem Thema.

*Impräzision* von Informationen läßt sich darauf zurückführen, daß man nicht mit beliebiger Genauigkeit zu beobachten oder messen kann. Die einfachste Form dieser Art imperfekten Wissens sind Angaben wie „das Flugzeug ist zwischen 50.6 km und 50.8 km entfernt.“ Derartige Informationen beschreibt man üblicherweise durch (nichtstochastische) Fehlerintervalle [Moore66], die man auch als Spezialfall von Fuzzy-Mengen auffassen kann.

Die bekannteste Form von *Unsicherheit* ist mit Zufallsmechanismen verbunden, wie sie uns z.B. durch Würfelexperimente oder die Ziehung der Lottozahlen vertraut sind. Zu ihrer Beschreibung benutzt man üblicherweise probabilistische Modelle [Feller66]. In anderen Fällen hat man es jedoch mit Unsicherheit aufgrund subjektiver Einschätzung zu tun, wie sie etwa die qualitativ bewerteten Regeln medizinischer Experten widerspiegeln. So lautet die Regel 163 des Expertensystems MYCIN [Shortliffe75, Buchanan84] für die Diagnose bakteriogener Infektionskrankheiten

**If**           the morphology of the organism is rod, and  
                   the stain of the organism is gramneg, and  
                   the identity of the organism is not known with certainty, and  
                   the patient has had a genito-urinary manipulative procedure,  
**then**        there is weakly suggestive evidence that  
                   the identity of the organism is pseudomonas.

Der Experte war der Meinung, daß die Schlußfolgerung nur mit dem Grad „weakly suggestive evidence“ gezogen werden darf.

In MYCIN wird der *Kalkül der Sicherheitsgrade* [Shortliffe75] verwendet, der sich aber für andere Anwendungsgebiete als inkonsistent herausstellen kann [Heckerman88a]. Deshalb werden zur Unsicherheitsmodellierung oft stochastische Methoden benutzt [Kruse91a, Shafer90, Smithson89].

Der in diesem Buch vorgestellte Ansatz basiert auf der epistemischen Sichtweise von Fuzzy-Mengen als *Possibilitätsverteilungen*, die Gegenstand von Kapitel 3 sein wird. Die oben angesprochenen Arten imperfekten Wissens können auch gleichzeitig auftreten, z.B. wenn man ein Flugzeug aus einer vorgegebenen Menge von Flugzeugen zufällig auswählt (Unsicherheit), seine Entfernung bestimmt (Impräzision) und als „schnell“ oder „nicht schnell“ klassifiziert (Vagheit).

Ein alle drei Phänomene umfassender uniformer Kalkül erleichtert in diesem Fall natürlich die Modellierung. Wir werden sehen, daß ein großer Vorteil von Fuzzy-Systemen (z.B. den in Kapitel 4 exemplarisch vorgestellten Fuzzy-Reglern) darin zu sehen ist, daß sie eine solche einheitliche Behandlung von Vagheit, Impräzision und Unsicherheit gestatten.

### 1.3 Zu diesem Buch

Ziel dieses Buches ist es, einen methodisch gegliederten Einführungskurs in Fuzzy-Systeme zu geben. Es werden ausführlich Anwendungen von Fuzzy-Methoden für wissensbasierte Systeme und regelungstechnische Aufgabenstellungen diskutiert. Des Umfangs wegen mußten wir allerdings auf die Darstellung anderer wichtiger Einsatzbereiche für Fuzzy-Systeme verzichten.

Dieses Buch basiert auf einer vierstündigen Vorlesung mit zweistündiger Übung, die an der Technischen Universität Braunschweig für Studenten der Informatik, der Ingenieurwissenschaften und der Mathematik gehalten wird. Es werden selbstverständlich keinerlei Vorkenntnisse in der Theorie der Fuzzy-Systeme erwartet, jedoch sollte der Leser über Grundwissen in der Mengenlehre, der klassischen zweiwertigen Logik und der Wahrscheinlichkeitstheorie verfügen.

Der Lehrstoff wird in drei Kapiteln vermittelt. Kapitel 2 (Theorie der Fuzzy-Mengen) ist grundlegend, während die beiden Folgekapitel (Approximatives Schließen, Fuzzy-Regelung) unabhängig voneinander durchgearbeitet werden können. Jedes Kapitel ist in mehrere themenspezifische Abschnitte untergliedert, von denen der jeweils letzte ergänzende Bemerkungen und zahlreiche Quellenangaben enthält. In ihm werden historische Bemerkungen gemacht, neuere Entwicklungen angesprochen, Querbezüge zu anderen Forschungsgebieten hergestellt, Implementierungsmöglichkeiten anhand von Fallbeispielen aufgezeigt und auch Übungsaufgaben gestellt. Diese Ergänzungen mögen dem Leser helfen, seine Kenntnisse der Fuzzy-Systeme über den Lehrstoff hinaus gezielt zu erweitern und zu vertiefen.

Nach der Erläuterung der Konzeption dieses Lehrbuches geben wir einen Überblick über Motivation und Inhalte der einzelnen Kapitel. Abbildung 1.1 zeigt die Abhängigkeiten zwischen den Abschnitten.

In Kapitel 2 behandeln wir fundamentale Konzepte der Theorie der Fuzzy-Mengen und ihre Bezüge zur Fuzzy-Logik. Wir beginnen mit einer problemorientierten Hinführung auf den Begriff der Fuzzy-Menge, seiner formalen Definition und anschaulichen Interpretation. Danach gehen wir auf verschiedene Repräsentationsformen von Fuzzy-Mengen ein, zeigen auf, wie man Abbildungen auf gewöhnlichen Mengen auf Fuzzy-Mengen verallgemeinert (Extensionsprinzip), und untersuchen, unter welchen Bedingungen man effizient auf Fuzzy-Mengen operieren kann. Schließlich sprechen wir die in der Literatur über Fuzzy-Systeme vielfach vernachlässigte, vom theoretischen Standpunkt jedoch sehr wichtige Frage der Semantik von Zugehörigkeitsgraden in der für ein einführendes Lehrbuch geeigneten Tiefe an. Weitergehende Betrachtungen müssen den Fachaufsätzen, auf die wir am Ende des Kapitels hinweisen, vorbehalten bleiben.

In Kapitel 3 geht es darum, die erlernten Grundlagen in einem für die Informatik interessanten Gebiet anzuwenden. Wir haben hierzu die das Approximative Schließen ausgewählt, da es einen wesentlichen Forschungszweig der Fuzzy-Systeme widerspiegelt, aber auch Bezüge zu den wissensbasierten Systemen herstellt, wie sie aus der Künstlichen Intelligenz und der Theorie der Datenbanksysteme geläufig sind. Wir stel-

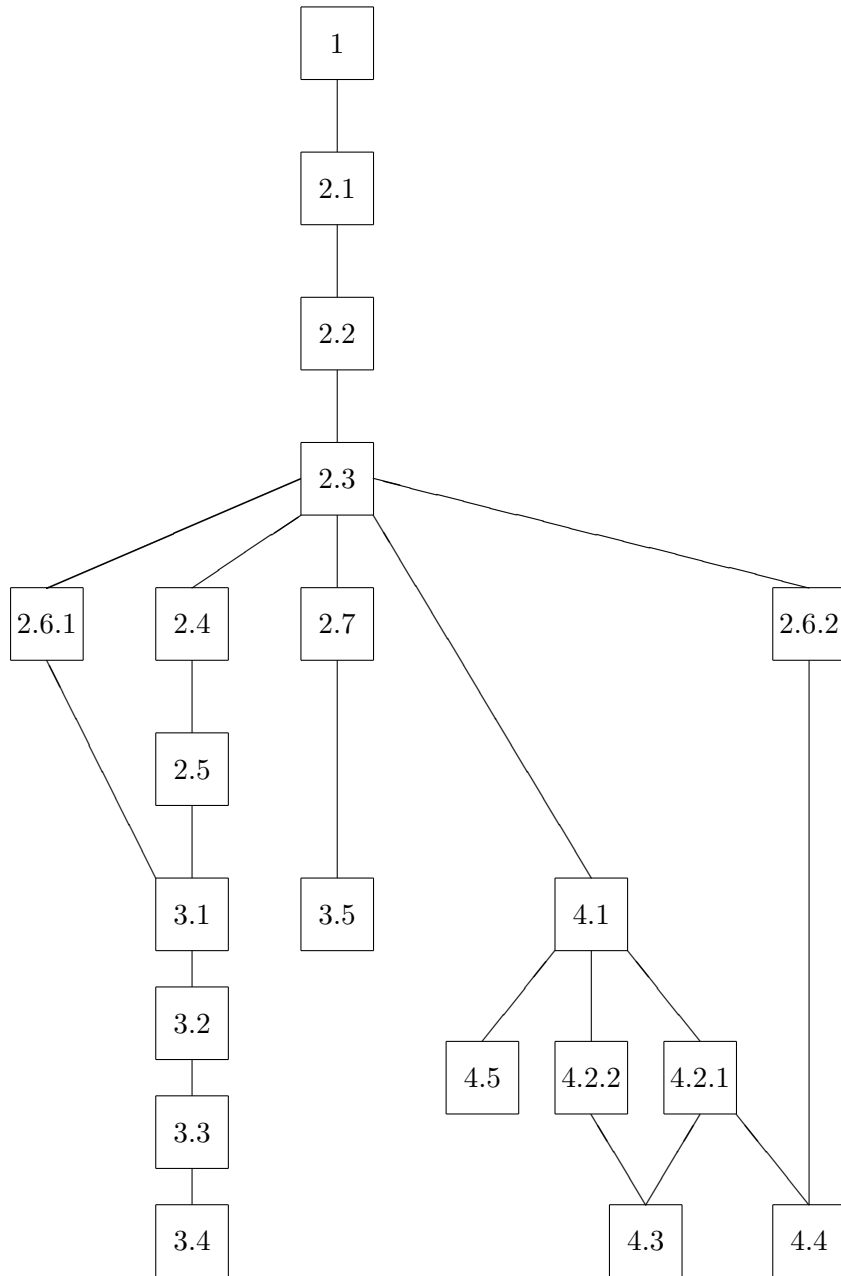


Abbildung 1.1: Abhängigkeiten zwischen den Abschnitten dieses Buches

len zunächst dar, auf welche Weise man Fuzzy-Mengen (in der epistemischen Sichtweise als Possibilitätsverteilungen) zur Beschreibung unsicherer Daten verwenden kann. In diesem Zusammenhang sind Grundlagen der Possibilitätstheorie und damit auch Ansätze zur Messung von Unsicherheit anzusprechen. Danach untersuchen wir, wie man Inferenz- und Propagationsmechanismen in einem mehrdimensionalen Raum von durch Hypergraphen spezifizierbaren qualitativen Abhängigkeiten realisiert, wenn sich generelles, bezüglich eines Anwendungsbereiches verfügbares Expertenwissen sowie spezielles, durch Beobachtungen gewonnenes Evidenzwissen mit Hilfe von Possibilitätsverteilungen darstellen lassen. Unter anderem wird dabei das Problem behandelt, wie man die aus Expertensystemen bekannten Regelbasen auf Possibilitätsverteilungen (anstelle von scharfen Daten) verallgemeinern und geeignet interpretieren sollte. Wir wählen hierbei einen in sich geschlossenen Zugang zur Possibilitätstheorie, der allerdings nicht der einzigmögliche ist. Es wird daher abschließend auch auf alternative Ansätze (z.B. possibilistische Logik) eingegangen.

Kapitel 4 befaßt sich mit der Regelungstechnik auf der Basis von Fuzzy-Mengen. Es werden die elementaren Prinzipien der Fuzzy-Regelung auf der Grundlage der Arbeiten von Mamdani und Takagi/Sugeno erläutert, wobei besonders Wert gelegt wurde auf eine saubere theoretische Modellierung, die auf den im zweiten Kapitel vorgestellten Konzepten aufbaut, einschließlich einer klaren Motivation der angewendeten Formalismen. Es werden keine Kenntnisse aus der Regelungstechnik vorausgesetzt. Ziel ist es, den Unterschied der auf einer kognitiven Modellierung beruhenden Fuzzy-Regler zu den klassischen Reglern zu vermitteln. Fuzzy-Regelung wird aufgefaßt als wissensbasierte Interpolation in vagen Umgebungen, die durch Gleichheits- oder Ähnlichkeitsrelationen beschrieben werden. In diesem Sinne werden Fuzzy-Regler als Echtzeit-Expertensysteme behandelt, die eine nichtlineare Kennfeldregelung ermöglichen.

Um die Lesbarkeit des Textes zu erhöhen, haben wir fast alle Quellenangaben in die ergänzenden Bemerkungen verlagert und im Anhang des Buches ein Symbolverzeichnis beigefügt. Die zugehörigen Referenzen können dem umfangreichen Literaturverzeichnis am Ende des Buches entnommen werden.

# Kapitel 2

## Grundlagen der Theorie der Fuzzy-Mengen

In diesem Kapitel führen wir in die Theorie der Fuzzy-Mengen ein, motivieren die grundlegenden Konzepte, behandeln die Repräsentation und Interpretation von Fuzzy-Mengen und betrachten insbesondere die wie Operationen auf Fuzzy-Mengen semantisch fundiert werden können.

Gegenstand des Abschnitts 2.1 ist, den Begriff der eine Fuzzy-Menge charakterisierenden Zugehörigkeitsfunktion zu erläutern. In Abschnitt 2.2 wird auf äquivalente Repräsentationsmöglichkeiten eingegangen. Abschnitt 2.3 erweitert mengentheoretische Grundoperationen auf Fuzzy-Mengen und bedient sich dabei des wichtigen Konzepts der  $t$ -Normen und der zu ihnen dualen  $t$ -Conormen. Durch Anwendung des in Abschnitt 2.4 motivierten Extensionsprinzips ist es möglich, Abbildungen reeller Zahlen auf Abbildungen von Fuzzy-Mengen zu verallgemeinern. Wie die erweiterten arithmetischen Operationen anhand der Mengenrepräsentation von Fuzzy-Mengen effizient ausgeführt werden können, wird in Abschnitt 2.5 behandelt.

Die Untersuchungen der vorhergehenden Abschnitte bilden die Grundlage für eine klare Darstellung der Semantik von Fuzzy-Mengen in Abschnitt 2.6. Wir gehen auf zwei unterschiedliche Interpretationen von Fuzzy-Mengen ein: Fuzzy-Mengen als Konturfunktionen zufälliger Mengen und als durch Gleichheitsrelationen und  $t$ -Normen induzierte Erweiterungen gewöhnlicher Mengen. Abschnitt 2.7 dient der Darstellung wichtiger Konzepte der Fuzzy-Logik. Abschnitt 2.8 schließlich enthält ergänzende Bemerkungen und Literaturverweise.

### 2.1 Fuzzy-Mengen: Eine motivierende Einführung

In der Mathematik können Konzepte und Eigenschaften oft durch Angabe von Teilmengen einer bestimmten Referenzmenge beschrieben werden. Wenn wir z.B. als Referenz-

menge die Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen wählen, kann die Eigenschaft *zweistellig* mit Hilfe der Menge

$$Z = \{10, 11, 12, \dots, 97, 98, 99\} \subseteq \mathbb{N}$$

dargestellt werden.

Neben dieser strukturell zwar recht einfachen, aber oft nicht anwendbaren Repräsentationsform kann das Adjektiv *zweistellig* auch als Prädikat aufgefaßt werden, d.h. für eine natürliche Zahl  $n$  ist *zweistellig*( $n$ ) genau dann wahr, wenn die Dezimaldarstellung von  $n$  aus genau zwei Ziffern besteht.

Zur Menge  $Z$  gehören daher alle natürlichen Zahlen, die das Prädikat *zweistellig* erfüllen:

$$Z = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{zweistellig}(n)\}.$$

Eine dritte Repräsentationsform eines Konzeptes oder einer Eigenschaft besteht in der Angabe der zugehörigen *charakteristischen Funktion*, die im Falle des Prädikates *zweistellige natürliche Zahl* durch

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_Z : \mathbb{N} &\rightarrow \{0, 1\} \\ \mathbb{1}_Z(n) &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{falls zweistellig}(n) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

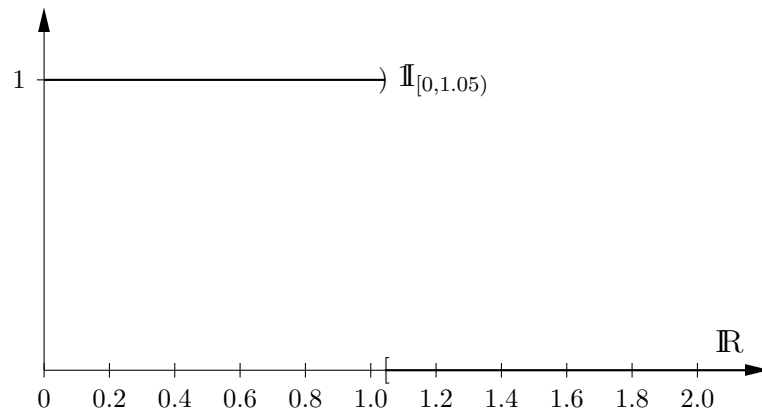
definiert ist.

Dabei werden die Elemente von  $Z$  aus den Elementen der betrachteten Referenzmenge  $\mathbb{N}$  hervorgehoben, indem die mit dem Funktionswert 1 „markiert“ werden. 0 und 1, die Elemente des Wertebereiches charakteristischer Funktionen, nennt man auch *Zugehörigkeitsgrade*.

**Beispiel 2.1** Die in Abbildung 2.1 dargestellte charakteristische Funktion beschreibt die Menge aller nicht-negativen reellen Zahlen, die kleiner als 1.05 sind. Die Unstetigkeitsstelle bei 1.05 ist auf natürliche Weise gegeben, wenn man die charakteristische Funktion zum Beispiel als die Menge aller Körpergrößen von Kindern ansieht, die kleiner als 1.05 m sind.  $\square$

Ob charakteristische Funktionen mit Wertebereich  $\{0, 1\}$  angemessen sind, ist jedoch fraglich, wenn man beispielsweise die Körpergrößen betrachtet, für die ein Kind als *groß* zu bezeichnen ist. Das Adjektiv *groß* beschreibt hier keine festgelegte Teilmenge der reellen Zahlen. Auch wenn man einmal davon absieht, daß der relative Begriff *groß* personen- und kontextabhängig verschieden aufgefaßt wird: ein einzelner Arzt (fester Kontext) wird vierjährige Jungen aus Deutschland (fester Kontext) im allgemeinen nicht eindeutig als *groß* bzw. *nicht groß* klassifizieren können. Es gibt zwar Körpergrößen, die in diesem Kontext stets als *groß* (z.B. 1.50 m) bzw. *nicht groß* (z.B. 0.70 m) angesehen werden, bei anderen (z.B. 1.10 m) fällt eine eindeutige Zuordnung jedoch schwer.



Abbildung 2.1: Charakteristische Funktion des Intervalls  $[0, 1.05)$ 

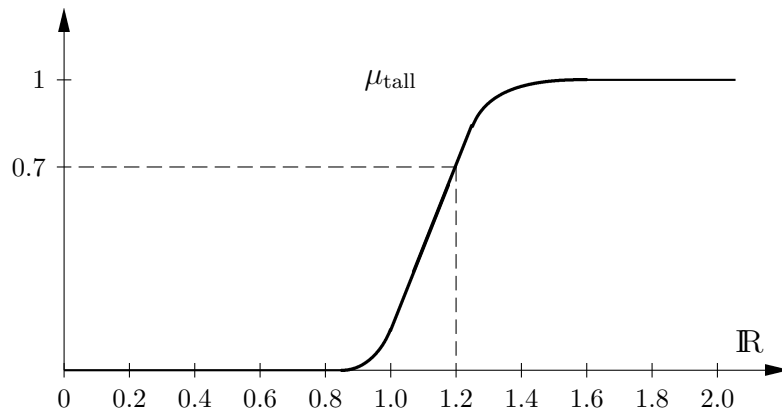
Der Kern des dargestellten Zuordnungsproblems besteht darin, daß eine Beschreibung mit Hilfe gewöhnlicher Mengen stets darauf hinausläuft, eine Körpergröße mit der Eigenschaft festzulegen, ab der ein Kind als *groß* zu bezeichnen ist, während ein Kind mit geringerer Körpergröße als *nicht groß* bezeichnet werden muß. Die in der entsprechenden charakteristischen Funktion auftretende Sprungstelle deckt sich allerdings nicht mit der intuitiven Einschätzung, daß es einen gleitenden Übergang von der Größe eines als *nicht groß* bezeichneten Kindes zu der Größe eines als *groß* zu bezeichnenden Kindes gibt.

Weitere Beispiele, in denen Darstellungen durch gewöhnliche Mengen als unnatürlich angesehen werden, findet man bei qualitativen Beschreibungen wie „Man nehme eine kleine Prise Salz“ oder „Wenn der Abstand zur Mauer gering und die Geschwindigkeit des Autos hoch ist, dann wird es Zeit zum Bremsen.“

Eine Methode, abgestufte Übergänge zu modellieren, besteht darin, neben den Zugehörigkeitsgraden 0 (gehört mit Sicherheit nicht dazu) und 1 (gehört mit Sicherheit dazu) noch weitere Zugehörigkeitsgrade zu verwenden. Der mathematisch einfachste Weg zur Einführung gradueller Zugehörigkeiten ist die Benutzung von Zugehörigkeitsgraden aus dem kompakten Intervall  $[0, 1]$ , deren Semantik natürlich noch genau festzulegen ist.

**Beispiel 2.2** In Abbildung 2.2 ist eine „verallgemeinerte“ charakteristische Funktion dargestellt, die das vage Prädikat *groß* aus der Sicht eines befragten Arztes im Kontext vierjähriger deutscher Jungen für alle Größenangaben aus  $\mathbb{R}$  beschreibt.

Jedem Wert  $x$  der Körpergröße wird ein Zugehörigkeitsgrad zugeordnet, z.B. der Größe 1.20 m der Wert 0.7. Intuitiv soll das heißen, daß in dem betrachteten Kontext die Größe 1.20 m weder prinzipiell als *groß* noch prinzipiell als *nicht groß* eingestuft wird, sondern die den Zugehörigkeitsgrad festlegende Person aufgrund ihrer Erfahrung auf einer Skala von 0 bis 1 den Zugehörigkeitsgrad 0.7 wählt. Je näher der Zugehörigkeitsgrad  $\mu_{\text{groß}}(x)$  bei 1 liegt, desto mehr genügt  $x$  dem Prädikat *groß*.  $\square$

Abbildung 2.2: Verallgemeinerte charakteristische Funktion  $\mu_{\text{groß}}$ 

Die Beispiele 2.1 und 2.2 legen nahe, linguistisch beschriebene Daten wie „ausreichende Benzinversorgung“, „hoher Durchsatz“ und „helle Beleuchtung“ mit Hilfe verallgemeinerter charakteristischer Funktionen zu formalisieren, die dann nicht nur gewöhnliche Mengen, sondern auch unscharfe Mengen (sogenannte *Fuzzy-Mengen*) beschreiben können.

**Definition 2.3** Eine **Fuzzy-Menge**  $\mu$  von  $X$  ist eine Funktion von der Referenzmenge  $X$  in das Einheitsintervall, d.h.

$$\mu : X \rightarrow [0, 1].$$

$F(X)$  bezeichne die Menge aller Fuzzy-Mengen von  $X$ .

Jede gewöhnliche Menge  $A$  (im Zusammenhang mit Fuzzy-Systemen oft als *crisp set* bezeichnet) kann (über die charakteristische Funktion  $\mathbb{1}_A$ ) als eine spezielle Fuzzy-Menge interpretiert werden.

Die Verwendung von Fuzzy-Mengen zur formalen Darstellung vager Daten geschieht im allgemeinen auf rein intuitiver Basis, da in vielen Anwendungen kein Modell zugrunde gelegt wird, das den Zugehörigkeitsgraden eine klare Interpretation zuordnet. Wir werden dieser Problematik in Abschnitt 2.6 nachgehen, uns vorerst jedoch auf eine rein deskriptive Behandlung der Theorie der Fuzzy-Mengen beschränken.

**Beispiel 2.4** Eine Maklergesellschaft bietet Wohnungen verschiedener Größe an. Ein Kriterium für die Qualität einer Wohnung sei die Anzahl der Räume. Für eine fünfköpfige Familie kann das vage Konzept „angemessene Anzahl Räume“ durch die Fuzzy Menge  $\mu : \{1, \dots, 8\} \rightarrow [0, 1]$  beschrieben werden, wobei die Zugehörigkeitsgrade  $\mu(1) = 0$ ,  $\mu(2) = 0.2$ ,  $\mu(3) = 0.5$ ,  $\mu(4) = 0.7$ ,  $\mu(5) = 1$ ,  $\mu(6) = 1$ ,  $\mu(7) = 0.8$ , und  $\mu(8) = 0.2$  betragen. Bei der subjektiven Festlegung der Zugehörigkeitsgrade wurde berücksichtigt, daß nur Wohnungen mit höchstens acht Räumen angeboten werden. Die Fuzzy-Menge drückt aus, daß fünf oder sechs Räume bevorzugt werden.  $\square$

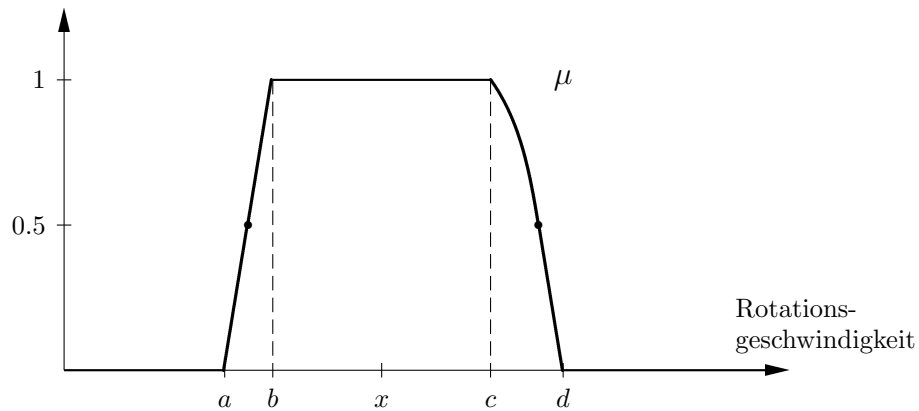


Abbildung 2.3: Fuzzy-Menge  $\mu$  zur Beschreibung der Rotationsgeschwindigkeit einer Festplatte

**Beispiel 2.5** Es sei  $x$  die für eine Festplatte angegebene Rotationsgeschwindigkeit in Umdrehungen pro Minute. Da eine solche Angabe stets mit Ungenauigkeit behaftet ist, erscheint es realistischer, die Aussage

Die Rotationsgeschwindigkeit hat den Wert *fast genau*  $x$

zu verwenden und geeignet zu interpretieren.

Wenn statistische Daten über das Verhalten der Festplatte verfügbar sind, sollte man probabilistische Ansätze vorziehen und die Information „fast genau  $x$ “ durch die bekannten Methoden der Fehlerrechnung behandeln. Aber wenn solche Daten nicht vorliegen, oder wenn sie mit Ungenauigkeiten behaftet sind, kann man zu Fuzzy Mengen wechseln, da diese oft von Experten intuitiv angegeben werden können.

Im vorliegenden Beispiel möge der befragte Experte die in Abbildung 2.3 angegebene Fuzzy-Menge  $\mu$  gewählt haben. Werte der Rotationsgeschwindigkeit, die kleiner als  $a$  sind oder größer als  $d$ , werden als unmöglich angesehen, während Werte zwischen  $b$  und  $c$  ohne Einschränkung möglich sind. Das kompakte Intervall  $[a, d]$  wird daher auch *Träger* und  $[b, c]$  *Kern* der Fuzzy-Menge genannt.

Außerdem hat der Experte die Rotationsgeschwindigkeiten, die den Zugehörigkeitsgrad 0.5 haben, vorgegeben und in den verbleibenden Bereichen einen streng monoton wachsenden bzw. fallenden Funktionsverlauf gewählt.  $\square$

Es sei an dieser Stelle explizit darauf hingewiesen, daß die in Abbildung 2.3 dargestellte Funktion *nicht* als Dichtefunktion im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie aufgefaßt werden darf. Rein formal betrachtet, braucht der Flächeninhalt unterhalb des Graphen von  $\mu$  nicht gleich 1 zu sein, und vom semantischen Standpunkt besteht ein wesentlicher Unterschied darin, daß die Definition von  $\mu$  auf der Angabe von Zugehörigkeitsgraden für alle Elemente von  $\mathbb{R}$  beruht, nicht jedoch auf der Vorgabe von Wahrscheinlichkeiten für Teilmengen von  $\mathbb{R}$ .

**Beispiel 2.6** Ein Röntgenbild läßt sich digitalisieren, indem man es unter ein Raster mit  $m \times n$  Pixeln legt und jedem Pixel einen Grauwert zuordnet.

Es sei  $P \stackrel{\text{def}}{=} \{x_1, \dots, x_m\} \times \{y_1, \dots, y_n\}$  die Menge der Pixel und  $G \stackrel{\text{def}}{=} \{g_0, \dots, g_{\max}\}$  die Menge der nach ihrer Dunkelheit geordneten Grautöne, wobei  $g_0$  dem Ton „weiß“ und  $g_{\max}$  dem Ton „schwarz“ entspreche.

Dann ist das vorliegende Röntgenbild mittels einer Funktion

$$\rho : P \rightarrow G$$

als Grauwertbild darstellbar. Ordnet man jedem Grauwert eine Zahl aus dem Einheitsintervall zu, etwa durch eine Funktion

$$\tau : G \rightarrow [0, 1]$$

mit  $\tau(g_0) = 0$ ,  $\tau(g_{\max}) = 1$  und  $\forall g, g' \in G : g \sqsubset g' \iff \tau(g) < \tau(g')$ , wobei  $\sqsubset$  die lineare Ordnung auf  $G$  sei, so kann man die Hintereinanderschaltung  $\tau \circ \rho$  der beiden Abbildungen  $\rho$  und  $\tau$  als charakteristische Funktion des Grauwertbildes auffassen. Neben der Interpretation linguistischer Daten sind Fuzzy-Mengen demnach auch zur Beschreibung von Grauwertbildern verwendbar.  $\square$

**Bemerkung 2.7** Das Beispiel 2.6 macht deutlich, daß bei der Betrachtung von Fuzzy-Mengen stets zu beachten ist, welches Objekt durch sie beschrieben wird. In der Literatur findet man eine Vielzahl möglicher Interpretationen (ähnlich wie für Wahrscheinlichkeitsverteilungen). In diesem Buch unterscheiden wir im wesentlichen zwischen zwei Interpretationen.

Bei der rein *objektbezogenen Interpretation* einer Fuzzy-Menge geht man davon aus, daß die entsprechende Fuzzy-Menge ein Element einer Menge vager Objekte beschreibt. Operationen auf diesen vagen Objekten werden mit Hilfe von Operationen auf Fuzzy-Mengen dargestellt. So sind z.B. Grauwertbilder vage Objekte, die mit Methoden der mathematischen Morphologie bearbeitet werden kann.

Im Falle der in Beispiel 2.6 angesprochenen Röntgenbilder liegt im Gegensatz dazu meist eine *epistemische Interpretation* des durch die Fuzzy-Menge beschriebenen Grauwertbildes vor, und zwar als vage Beobachtung eines existierenden scharfen Objektes. So ist ein Röntgenbild als vage (hier zweidimensionale) Wahrnehmung eines existierenden dreidimensionalen scharfen Objektes aufzufassen.

Im Beispiel 2.5 wird das vage Konzept „fast genau  $x$ “ durch die Fuzzy-Menge  $\mu$  beschrieben.  $\mu$  hat hier eine „objektbezogene“ Interpretation. Aber wenn wir die Rotationsgeschwindigkeit der Festplatte zu einem bestimmten Zeitpunkt beschreiben wollen, haben wir es nicht mit einem vagen Objekt sondern eher mit der Unsicherheit eines Beobachters zu tun, der die Rotationsgeschwindigkeit nicht exakt messen kann. Auch zur Beschreibung dieser Unsicherheit können Fuzzy-Mengen verwendet werden, doch werden sie dann im Sinne einer epistemischen Interpretation gedeutet und als Möglichkeitsverteilungen bezeichnet. In Kapitel 3 werden wir diese Interpretation genauer untersuchen.  $\square$

**Bemerkung 2.8** In Beispiel 2.6 ist es sinnvoll, das gesamte Intervall  $[0, 1]$  zuzulassen, da die Grautöne von der Dicke des durchleuchteten Materials abhängen. Dagegen erscheint dies in Anwendungen, in denen ein Experte nur qualitative Wertungen wie „Ich bin mir fast sicher, daß  $x$  dazugehört“ liefert, als Übermodellierung, da weder die Unterscheidung zweier Zugehörigkeitsgrade wie 0.915 und 0.916 noch eine Addierbarkeit von Zugehörigkeitsgraden zu rechtfertigen ist.

In solchen Fällen empfiehlt es sich, anstelle von  $[0, 1]$  einen beliebigen Verband (engl.: lattice)  $(L, \sqcap, \sqcup)$  zu betrachten, der eine rein qualitative Anordnung der in  $L$  enthaltenen Zugehörigkeitsgrade zum Ausdruck bringt. Falls es z.B. eine totale Ordnung auf  $L$  gibt (d.h. für alle  $l, l' \in L$  gilt  $l \leq l'$  oder  $l > l'$ ), so ist  $(L, \sqcap, \sqcup)$  durch

$$\begin{aligned} l \sqcap l' = l &\iff l \leq l' \\ l \sqcup l' = l &\iff l \geq l' \end{aligned}$$

definiert.

Diese Überlegung führt uns unmittelbar zu dem gegenüber Fuzzy-Mengen verallgemeinerten Begriff der  $L$ -Fuzzy-Menge.  $\square$

**Definition 2.9** Es sei  $(L, \sqcap, \sqcup)$  ein Verband mit dem kleinsten Element  $l_{\min}$  und dem größten Element  $l_{\max}$ . Eine  **$L$ -Fuzzy-Menge**  $\eta$  von  $X$  ist eine Funktion von der Referenzmenge  $X$  in die Menge  $L$ , d.h.

$$\eta : X \rightarrow L.$$

$L(X)$  symbolisiert die Menge aller  $L$ -Fuzzy-Mengen von  $X$ .

**Beispiel 2.10** Die sogenannte Sherman–Kent-Skala hat 19 Abstufungen mit folgenden (qualitativen) Werten für  $L$ :

$$\begin{aligned} l_{\min} &= \text{impossible} < \text{highly doubtful} < \text{only a slight chance} \\ &< \text{we believe not} < \text{unlikely} < \text{probably not} \\ &< \text{chances are slightly less than even} \\ &< \text{chances are about even} \\ &< \text{chances are slightly better than even} \\ &< \text{it's probable} < \text{chances are good} < \text{we estimate} \\ &< \text{we believe} < \text{likely} < \text{highly likely} \\ &< \text{highly probable} < \text{we are convinced} \\ &< \text{virtually (almost) certain} < \text{certain} = l_{\max}. \end{aligned} \quad \square$$

Beispiele wie die Bewertungshierarchie der Sherman–Kent-Skala zeigen, wie wichtig es ist, eine detaillierte Darlegung der Semantik von  $L$ -Fuzzy-Mengen und Fuzzy-Mengen als deren Spezialfälle vorzunehmen. Bevor wir auf diese Aspekte in Abschnitt 2.6 eingehen, wählen wir zunächst einen eher intuitiven Zugang zu Fuzzy-Mengen.

## 2.2 Einfache Repräsentationsformen für Fuzzy-Mengen

Im folgenden werden wir verschiedene Beispiele für Fuzzy-Mengen besprechen sowie Möglichkeiten zur Aufstellung und Repräsentation der sie charakterisierenden Zugehörigkeitsfunktionen betrachten.

Offenbar kann jede Fuzzy-Menge  $\mu$  von  $X$  durch die Angabe eines Zugehörigkeitsgrades  $\mu(x)$  für jedes Element  $x \in X$  beschrieben werden, doch ist eine solche Beschreibung nur dann praktikabel, wenn die Referenzmenge  $X$  endlich ist. Ist die Elementanzahl von  $X$  sehr groß, abzählbar unendlich, oder wird für  $X$  ein Kontinuum verwendet (z.B. für Temperatur- oder Geschwindigkeitsangaben), so läßt sich  $\mu(x)$  am besten mit Hilfe eines geeigneten, eventuell parametrisierten Funktionsterms angeben, wobei die Parameter dem konkret vorliegenden Modellierungsproblem anzupassen sind.

Ist  $X = \mathbb{R}$ , bedient man sich zur Beschreibung von  $\mu(x)$  meist linguistischer Ausdrücke wie „groß“, „etwa 10“ und „ungefähr zwischen  $a$  und  $b$ .“ Diese können durch Elemente geeigneter Klassen parametrisierter Fuzzy-Mengen, die der *Normalisiertheitsbedingung*  $\exists x \in X : \mu(x) = 1$  genügen und daher *normale Fuzzy-Mengen* genannt werden, interpretiert werden. Als Interpretation von „groß“ kann man zum Beispiel monoton nicht fallende Funktionen wie

$$\mu_{a,b}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{falls } a \leq x \leq b \\ 1, & \text{falls } x \geq b, \end{cases} \quad (2.1)$$

wobei  $a < b$  vorausgesetzt sei, verwenden.

Alternative Interpretationen sind stückweise lineare Funktionen wie z.B. jene in Abbildung 2.4, die als Parameter die Koordinaten der definierenden Punkte verwenden, aber auch Funktionen mit exponentiellem Anstieg wie

$$\mu_{a,b}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 - e^{-a(x-b)}, & \text{falls } x \geq b \\ 0, & \text{falls } x < b \end{cases} \quad (2.2)$$

mit  $a > 0$  und  $b \in \mathbb{R}$ .

Sprachliche Ausdrücke der Art „etwa 10,“ die häufig durch sogenannte *Fuzzy-Zahlen* repräsentiert werden, lassen sich am einfachsten durch symmetrische Dreiecksfunktionen

$$\mu_{m,d}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 - \left| \frac{m-x}{d} \right|, & \text{falls } m-d \leq x \leq m+d \\ 0, & \text{falls } x < m-d \text{ oder } x > m+d, \end{cases} \quad (2.3)$$

mit  $d > 0$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , sowie Gaußsche Glockenkurven der Form

$$\mu_{a,m}(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-a(x-m)^2} \quad (2.4)$$

mit  $a > 0$  und  $m \in \mathbb{R}$ , interpretieren.

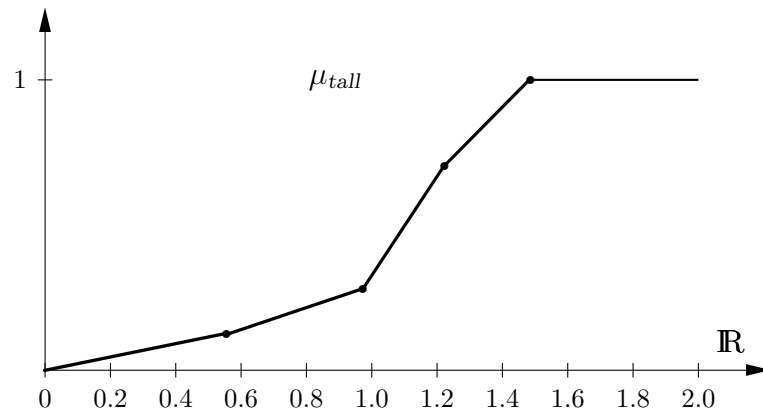


Abbildung 2.4: Interpretation des vagen Konzeptes „groß“ durch eine stückweise lineare Funktion

Analog kann man „ungefähr zwischen  $b$  und  $c$ “ am einfachsten durch die Trapezfunktion

$$\mu_{a,b,c,d}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{falls } a \leq x < b \\ 1, & \text{falls } b \leq x \leq c \\ \frac{x-d}{c-d}, & \text{falls } c < x \leq d \\ 0, & \text{falls } x < a \text{ or } x > d, \end{cases} \quad (2.5)$$

mit  $a < b < c < d$  und  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  beschreiben.

Man beachte, daß reelle Zahlen  $t$  durch

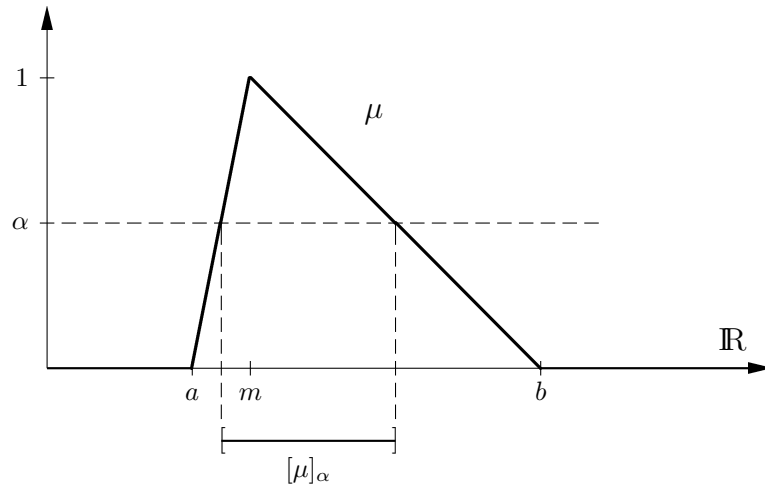
$$\mu_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I}_{\{t\}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = t \\ 0, & \text{falls } x \neq t \end{cases} \quad (2.6)$$

und Intervalle  $[a, b]$  durch

$$\mu_{a,b}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{falls } x < a \text{ oder } x > b. \end{cases} \quad (2.7)$$

beschrieben werden können. Reelle Zahlen und Intervalle können daher als Spezialfälle normaler Fuzzy-Mengen angesehen werden.

In den bisher betrachteten Beispielen haben wir Fuzzy-Mengen ausschließlich durch die sie charakterisierende Zugehörigkeitsfunktion  $\mu : X \rightarrow [0, 1]$  dargestellt. Diese Repräsentationsform entspricht der üblichen Sicht auf Funktionen, bei der jedem Element  $x$  aus der Referenzmenge  $X$  der Funktionswert  $\mu(x)$  zugeordnet wird. Wegen der graphischen Darstellung von  $\mu$  spricht man auch von der *vertikalen Repräsentation* der entsprechenden Fuzzy-Menge.

Abbildung 2.5:  $\alpha$ -Schnitt einer Fuzzy Menge  $\mu$ 

Vergleichbar der Motivation der in Definition 2.9 und Beispiel 2.10 vorgestellten  $L$ -Fuzzy-Mengen wird auch bei der Akquisition von Fuzzy-Mengen oft so vorgegangen, daß ein Experte für alle in einer bestimmten (endlichen) Teilmenge des Wertebereiches  $[0, 1]$  enthaltenen Zugehörigkeitsgrade  $\alpha$  festlegt, welche Elemente der Referenzmenge  $X$  mindestens mit dem Grad  $\alpha$  dem durch die Fuzzy-Menge beschriebenen vagen Konzept zugeordnet werden können. Dies entspricht der *horizontalen Repräsentation* von Fuzzy-Mengen anhand ihrer  $\alpha$ -Schnitte.

**Definition 2.11** Es sei  $\mu \in F(X)$  und  $\alpha \in [0, 1]$ . Dann heißt die Menge

$$[\mu]_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \mu(x) \geq \alpha\}$$

der  **$\alpha$ -Schnitt** von  $\mu$ .

**Beispiel 2.12** Es sei  $\mu$  die in Abbildung 2.5 dargestellte Dreiecksfunktion auf  $\mathbb{R}$ .

Man kann den  $\alpha$ -Schnitt von  $\mu$  konstruieren, indem man eine Waagerechte parallel zur  $x$ -Achse durch den Punkt  $(0, \alpha)$  zieht und den Teil des Graphen, der auf und oberhalb dieser Geraden liegt, auf die  $x$ -Achse projiziert. In diesem Fall ergibt sich

$$[\mu]_\alpha = \begin{cases} [a + \alpha(m - a), b - \alpha(b - m)], & \text{falls } 0 < \alpha \leq 1 \\ \mathbb{R}, & \text{falls } \alpha = 0. \end{cases} \quad \square$$

Die folgenden wichtigen Eigenschaften von  $\alpha$ -Schnitten lassen sich direkt aus Abbildung 2.5 ablesen.



**Satz 2.13** Für  $\mu \in F(X)$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  und  $\beta \in (0, 1]$  gilt:

- (a)  $[\mu]_0 = X$ ,
- (b)  $\alpha < \beta \implies [\mu]_\alpha \supseteq [\mu]_\beta$ ,
- (c)  $\bigcap_{\alpha < \beta} [\mu]_\alpha = [\mu]_\beta$ .

**B e w e i s :**

(a), (b): trivial.

(c) Sei  $\beta \in (0, 1]$  fest vorgegeben.

Für jedes  $\alpha \in [0, 1]$  mit  $\alpha < \beta$  gilt  $[\mu]_\alpha \supseteq [\mu]_\beta$ , also  $\bigcap_{\alpha < \beta} [\mu]_\alpha \supseteq [\mu]_\beta$ .

Um die andere Inklusionsrichtung zu zeigen, wählen wir ein  $x \in \bigcap_{\alpha < \beta} [\mu]_\alpha$ .

Ist  $\alpha < \beta$ , so gilt  $x \in [\mu]_\alpha$  und daher  $\mu(x) \geq \alpha$ .

Also ist  $\mu(x) \geq \sup\{\alpha \mid \alpha < \beta\} = \beta$  und folglich  $x \in [\mu]_\beta$ . □

Die Bedeutung der  $\alpha$ -Schnitte für die Anwendung von Fuzzy-Mengen besteht darin, daß sich jede Fuzzy-Menge durch ihre  $\alpha$ -Schnitte beschreiben läßt. Es gilt der folgende *Repräsentationssatz*.

**Satz 2.14** Es sei  $\mu \in F(X)$ . Dann ist

$$\mu(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \left\{ \min(\alpha, \mathbb{1}_{[\mu]_\alpha}(x)) \right\}.$$

**B e w e i s :**

Ist  $x \in X$  und  $\alpha \in [0, 1]$ , so gilt

$$\min(\alpha, \mathbb{1}_{[\mu]_\alpha}(x)) = \begin{cases} \alpha, & \text{falls } \mu(x) \geq \alpha \\ 0, & \text{falls } \mu(x) < \alpha. \end{cases}$$

Es folgt  $\mu(x) = \sup\{\alpha \mid \alpha \leq \mu(x)\} = \sup_{\alpha \in [0,1]} \left\{ \min(\alpha, \mathbb{1}_{[\mu]_\alpha}(x)) \right\}$ . □

Geometrisch ist eine Fuzzy-Menge die obere Einhüllende ihrer Niveaumengen. In Anwendungen empfiehlt es sich daher, wie bei den  $L$ -Fuzzy-Mengen bereits angedeutet, eine endliche Teilmenge  $L \subset [0, 1]$  relevanter, semantisch unterscheidbarer Zugehörigkeitsgrade auszuwählen und nur für diese die Niveaumengen der zu charakterisierenden Fuzzy-Mengen festzulegen. Es entsteht dann ein Mengensystem

$$\mathcal{A} = (A_\alpha)_{\alpha \in L}, \quad L \subseteq [0, 1], \quad |L| \in \mathbb{N}, \quad (2.8)$$

das für  $\alpha, \beta \in L$  den Konsistenzbedingungen

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad 0 \in L &\implies A_0 = X && \text{(Festlegung der Referenzmenge),} \\ \text{(b)} \quad \alpha < \beta &\implies A_\alpha \supseteq A_\beta && \text{(Monotonie)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

genügen muß und die Fuzzy-Menge

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{A}} : X &\rightarrow [0, 1], \\ \mu_{\mathcal{A}}(x) &= \sup_{\alpha \in L} \{\min(\alpha, \mathbb{1}_{A_\alpha}(x))\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

induziert.

Wird die Endlichkeit von  $L$  nicht gefordert, sondern der gesamte Wertebereich zugrunde gelegt ( $L = [0, 1]$ ), so hat  $\mu$  zusätzlich die Eigenschaft

$$\text{(c)} \quad \bigcap_{\alpha < \beta} A_\alpha = A_\beta \quad \text{(Stetigkeitsbedingung)} \quad (2.11)$$

zu erfüllen.

**Definition 2.15**  $\mathcal{FL}(X)$  bezeichne die Menge aller Mengensysteme  $(A_\alpha)_{\alpha \in [0,1]}$ , die den Bedingungen

$$(F1) \quad A_0 = X,$$

$$(F2) \quad \alpha < \beta \implies A_\alpha \supseteq A_\beta,$$

$$(F3) \quad \bigcap_{\alpha < \beta} A_\alpha = A_\beta$$

genügen.

**Bemerkung 2.16** Jedes Mengensystem  $\mathcal{A} = (A_\alpha)_{\alpha \in [0,1]}$  von  $X$ , das die Bedingungen (F1), (F2) und (F3) erfüllt, repräsentiert eine Fuzzy-Menge

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{A}} &\in F(X), \\ \mu_{\mathcal{A}}(x) &= \sup \{\alpha \mid \alpha \in [0, 1] \wedge x \in A_\alpha\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Liegt umgekehrt  $\mu \in F(X)$  vor, so genügt das Mengensystem  $([\mu]_\alpha)_{\alpha \in [0,1]}$  der  $\alpha$ -Schnitte von  $\mu$  nach Satz 2.13 den drei Bedingungen aus Definition 2.15.  $\square$

**Beispiel 2.17** Es sei  $X = [0, 15]$ . Um das vage Datum „ungefähr 5 oder größer-gleich 7“ darzustellen, wählt ein Experte fünf Zugehörigkeitsgrade  $L = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$  sowie die Niveaumengen  $A_0 = [0, 15]$ ,  $A_{0.25} = [3, 15]$ ,  $A_{0.5} = [4, 6] \cup [7, 15]$ ,  $A_{0.75} = [4.5, 5.5] \cup [7, 15]$  und  $A_1 = \{5\} \cup [7, 15]$ . Das Mengensystem  $(A_\alpha)_{\alpha \in L}$  induziert die in Abbildung 2.6 angegebene Fuzzy-Menge  $\mu_{\mathcal{A}}$ , wobei  $\mu_{\mathcal{A}}$  anschaulich als die obere Einhüllende des Mengensystems  $\mathcal{A}$  gewonnen werden kann.

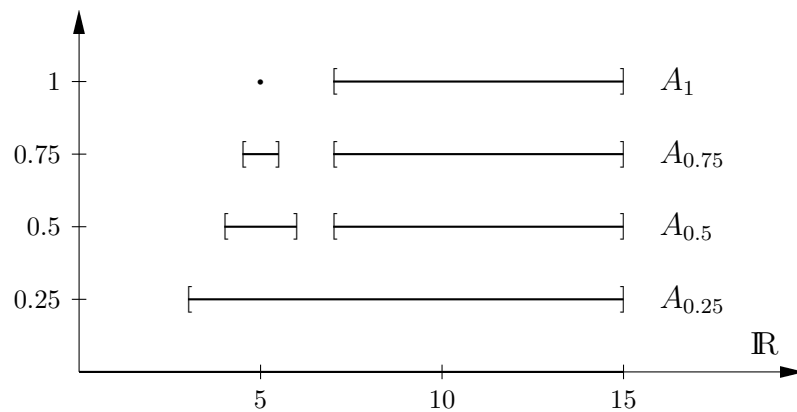


Abbildung 2.6: Das eine Fuzzy-Menge repräsentierende Mengensystem  $\mathcal{A}$  (horizontale Sicht)

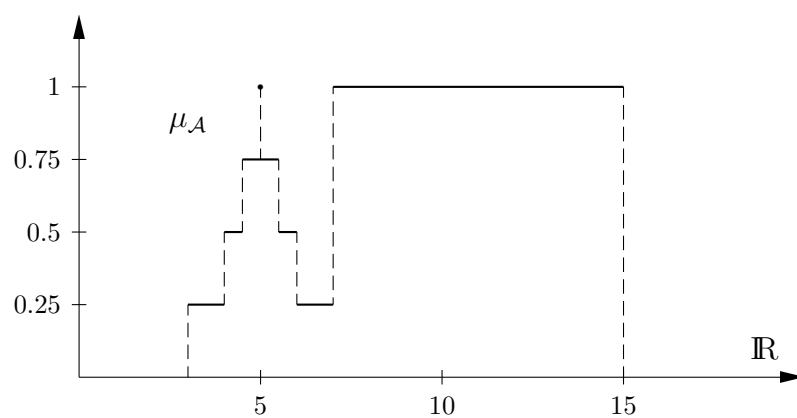
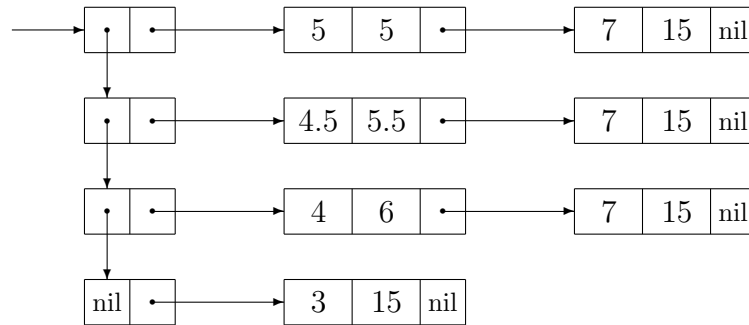


Abbildung 2.7: Die von  $\mathcal{A}$  induzierte Fuzzy-Menge  $\mu_{\mathcal{A}}$  (vertikale Sicht)

Abbildung 2.8: Repräsentation von  $\mu_A$  in einem Softwaretool

Man sieht hier deutlich den Unterschied zwischen der horizontalen (Abbildung 2.6) und der vertikalen Sicht auf Fuzzy-Mengen (Abbildung 2.7). Für eine speichersparende Repräsentation von Fuzzy-Mengen in Computern wird man die horizontale Sicht vorziehen und Diskretisierungen in beiden Achsenrichtungen vornehmen.

Während eine Diskretisierung in Ordinatenrichtung stets plausibel erscheint, muß sie in Abszissenrichtung — wie auch  $\mu_A$  erkennen läßt — nicht immer sinnvoll sein. Aus diesem Grund erfolgt zum Beispiel im interaktiven Softwaresystem SOLD (Statistics On Linguistic Data), das die statistische Analyse durch Fuzzy-Mengen interpretierbarer vager Daten erlaubt und in Abschnitt 2.8.5 detaillierter vorgestellt wird, ausschließlich die Aufteilung in eine in vernünftigen Grenzen wählbare endliche Anzahl äquidistanter Niveaus. Zur Speicherung der Fuzzy-Mengen  $\mu_A$  wird etwa die in Abbildung 2.8 dargestellte, an die Mengenrepräsentation angelehnte Datenstruktur benutzt.

Es handelt sich um eine Verkettung linearer Listen, in der für jedes  $\alpha$ -Niveau,  $\alpha \neq 0$ , eine endliche Vereinigung abgeschlossener Intervalle durch Angabe der entsprechenden Intervallgrenzen abgespeichert ist.

Die benutzte Datenstruktur, die natürlich voraussetzt, daß sich die Niveaumengen auf diese Weise angeben lassen, hat sich insbesondere bei arithmetischen Operationen auf Fuzzy-Mengen bewährt (vgl. Abschnitt 2.5).  $\square$

Die horizontale Sicht auf Fuzzy-Mengen ist dazu verwendbar, viele Begriffe bequem von gewöhnlichen Mengen auf Fuzzy-Mengen zu übertragen und zu verallgemeinern. Wir illustrieren dies am Beispiel der Teilmengenbeziehung:

Eine gewöhnliche Menge  $A$  heißt Teilmenge von  $A'$ , wenn jedes Element aus  $A$  auch in  $A'$  enthalten ist. Im Falle zweier Mengensysteme  $(A_\alpha)_{\alpha \in [0,1]}$  und  $(A'_\alpha)_{\alpha \in [0,1]}$  wird man für eine verallgemeinerte Teilmengenbeziehung fordern, daß  $A_\alpha \subseteq A'_\alpha$  für alle  $\alpha \in [0,1]$  gilt. Man zeigt dann sehr leicht, daß für die von den beiden Mengensystemen induzierten Fuzzy-Mengen  $\mu$  und  $\mu'$  genau dann  $\forall \alpha \in [0,1] : A_\alpha \subseteq A'_\alpha$  gilt, wenn  $(\forall x \in X : \mu(x) \leq \mu'(x))$  erfüllt ist. Wir definieren also:

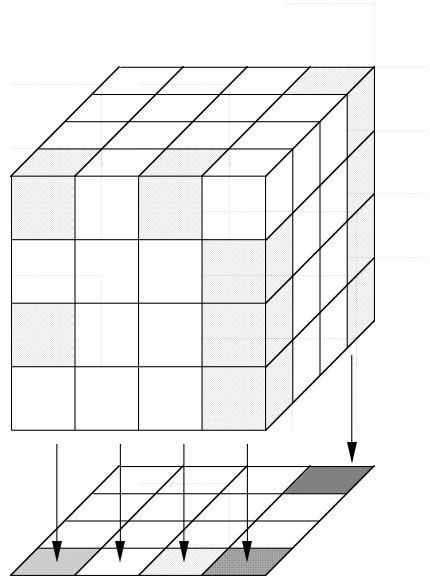


Abbildung 2.9: Entstehung eines Grauwertbildes

**Definition 2.18**  $\mu, \mu'$  seien zwei Fuzzy-Mengen von  $X$ .

$\mu$  heißt **Teilmenge** von  $\mu'$ , i.Z.  $\mu \subseteq \mu'$ , wenn für alle  $x \in X$  die Ungleichung  $\mu(x) \leq \mu'(x)$  gilt.

**Bemerkung 2.19** Offenbar gilt  $\mathbb{I}_\emptyset \subseteq \mu \subseteq \mathbb{I}_X$  und  $\mu \subseteq \mu' \wedge \mu' \subseteq \mu \implies \mu = \mu'$  für alle  $\mu', \mu \in F(X)$ . Demnach ist  $\mathbb{I}_\emptyset$  (d.h. die leere Menge) kleinstes und  $\mathbb{I}_X$  (d.h. die ganze Referenzmenge) größtes Element von  $F(X)$  bezüglich  $\subseteq$ , wobei  $\subseteq$  eine Halbordnung in der Menge  $F(X)$  bildet. Sind  $A$  und  $B$  scharfe Mengen, so gilt  $\mathbb{I}_A \subseteq \mathbb{I}_B$  genau dann, wenn  $A$  eine Teilmenge von  $B$  ist.

Folglich kann man  $\subseteq$  als Verallgemeinerung der gewöhnlichen Inklusion auf Fuzzy-Mengen ansehen.  $\square$

## 2.3 Verknüpfungen von Fuzzy-Mengen

Die grundlegenden Verknüpfungen der Mengenlehre — Durchschnitt, Vereinigung und Komplement — sollen im folgenden auch für Fuzzy-Mengen eingeführt werden. Eine Anregung, wie eine solche Verallgemeinerung mengentheoretischer Grundoperationen aussehen kann, liefert das nachstehende Beispiel.

**Beispiel 2.20** Ein Würfel  $W$  sei aus  $4 \times 4 \times 4$  kleineren Würfeln  $W_{i,j,k}$ ,  $1 \leq i, j, k \leq 4$ , gleichen Volumens zusammengesetzt, die entweder aus kristallklarem oder homogen grau gefärbtem Glas bestehen. Hält man  $W$  gegen das Sonnenlicht und betrachtet die Grundfläche, so sieht man auf ihr ein Grauwertbild mit fünf möglichen Graustufen, die durch die Anzahl der jeweils durchschienenen grauen Würfel bestimmt sind.

Wir können dieses Grauwertbild als  $L$ -Fuzzy-Menge oder auch als Fuzzy-Menge  $\mu_K : P \rightarrow G$  darstellen, wobei  $P = \{1, 2, 3, 4\}^2$  die Pixelmenge (Quadrate der Grundfläche von  $W$ ) und  $G = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$  die geordnete Menge der Graustufen bezeichne.  $K$  sei die den Würfel eindeutig festlegende Konfiguration der grauen Würfel, nämlich  $K = \{(i, j, k) \mid W_{i,j,k} \text{ ist grau gefärbt}\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}^3$ .

Sei  $\mathcal{K} = \{K \mid K \subseteq \{1, 2, 3, 4\}^3\}$  die Menge der möglichen Konfigurationen und  $\pi : \mathcal{K} \rightarrow F(P)$  die Abbildung, die jeder Konfiguration  $K$  ihr Grauwertbild  $\mu_K = \pi(K)$  zuordnet. Dann enthält  $\pi(K)$  zwar Informationen über die Lage der kleineren Würfel, erlaubt jedoch wegen der fehlenden Injektivität von  $\pi$  im allgemeinen keine Identifizierung von  $K$ , d.h.,  $\pi(K)$  läßt sich als informationskomprimierte Beschreibung von  $K$  auffassen.

Anhand der in diesem Beispiel benutzten (epistemischen) Semantik von Fuzzy-Mengen diskutieren wir das Problem der Schnittbildung von Fuzzy-Mengen:

Es seien  $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$  Konfigurationen zweier Würfel  $W_1$  und  $W_2$ . Den Schnitt dieser beiden Konfigurationen, d.h. die Konfiguration  $K_1 \cap K_2$ , die genau dort graue Würfel aufweist, wo sich sowohl in  $K_1$  als auch  $K_2$  graue Würfel befinden, erzeugt das Grauwertbild  $\mu_{K_1 \cap K_2} = \pi(K_1 \cap K_2)$ .

Im allgemeinen kann man aus der alleinigen Kenntnis der Grauwertbilder  $\mu_{K_1}$  und  $\mu_{K_2}$  das Grauwertbild  $\mu_{K_1 \cap K_2}$  nicht berechnen, denn es gilt für alle  $(i, j) \in P$ :

$$\max(0, \mu_{K_1}(i, j) + \mu_{K_2}(i, j) - 1) \leq \mu_{K_1 \cap K_2}(i, j) \leq \min(\mu_{K_1}(i, j), \mu_{K_2}(i, j)).$$

In speziellen Fällen und mit bestimmten Zusatzinformationen über  $K_1$  und  $K_2$  läßt sich  $\mu_{K_1 \cap K_2}$  jedoch aus  $\mu_{K_1}$  und  $\mu_{K_2}$  berechnen. Wir geben drei Beispiele an.

- 1) Es sei bekannt, daß bei den Konfigurationen  $K_1$  und  $K_2$  in jedem Stapel  $(i, j)$  die durchsichtigen Würfel oberhalb der grau gefärbten Würfel liegen. Dann ergibt sich

$$\mu_{K_1 \cap K_2}(i, j) = \min(\mu_{K_1}(i, j), \mu_{K_2}(i, j)).$$

- 2) Mit der Zusatzinformation, daß bei der Konfiguration  $K_1$  in jedem Stapel  $(i, j)$  die durchsichtigen Würfel oben, bei der Konfiguration  $K_2$  jedoch unten liegen, erhält man

$$\mu_{K_1 \cap K_2}(i, j) = \max(0, \mu_{K_1}(i, j) + \mu_{K_2}(i, j) - 1).$$

- 3) Wird vorausgesetzt, daß in jedem Stapel  $(i, j)$  jede zum Grauwert  $\mu_{K_1}(i, j)$  bzw.  $\mu_{K_2}(i, j)$  passende Anordnung von kleinen Würfeln gleich wahrscheinlich und unabhängig von der Stelle  $(i, j)$  und dem jeweils betrachteten Würfel ist, so kann man das „erwartete Graubild“ wie folgt definieren:

An der Stelle  $(i, j)$  gibt es in  $W_1$  genau  $\binom{4}{4\mu_{K_1}(i, j)}$  und in  $W_2$  genau  $\binom{4}{4\mu_{K_2}(i, j)}$  verschiedene Anordnungen, insgesamt ergeben sich also  $N = \binom{4}{4\mu_{K_1}(i, j)} \binom{4}{4\mu_{K_2}(i, j)}$  verschiedene gleichwahrscheinliche Kombinationen die folglich alle die gleiche

Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{N}$  besitzen. Werden die Kombinationen numeriert, und ist  $a_n(i, j)$  die durch die  $n$ -te Kombination induzierte Anzahl grau gefärbter Würfel im Stapel  $(i, j)$  des Schnittes von  $\mu_{K_1}$  und  $\mu_{K_2}$ , so ergibt sich als Erwartungswert

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{N} \cdot a_n(i, j) = \mu_{K_1}(i, j) \cdot \mu_{K_2}(i, j).$$

In diesem Fall ist es also sinnvoll,

$$\mu_{K_1 \cap K_2}(i, j) = \mu_{K_1}(i, j) \cdot \mu_{K_2}(i, j)$$

zu definieren.

Im Unterschied zur allgemeinen Situation, in der keine Zusatzinformationen über  $\mu_{K_1}$  und  $\mu_{K_2}$  vorliegen, hat man es in den drei besprochenen Spezialfällen mit *Wahrheitsfunktionalität* zu tun, d.h., aus der Kenntnis der Funktionswerte  $\mu_{K_1}(i, j)$  und  $\mu_{K_2}(i, j)$  kann man auf den Funktionswert  $\mu_{K_1 \cap K_2}(i, j)$  des Schnittes schließen.  $\square$

Wir benutzen jetzt das Beispiel 2.20, um der Frage nachzugehen, wie man die klassischen mengentheoretischen Grundoperationen auf Fuzzy-Mengen übertragen kann. Wir beginnen mit der Durchschnittsbildung und setzen wir voraus, daß der zu definierende Schnitt  $\mu \cap \mu'$  zweier Fuzzy-Mengen  $\mu, \mu' \in F(X)$  *elementweise* zu berechnen ist. Es gibt dann eine Funktion  $\sqcap : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  derart, daß

$$(\mu \cap \mu')(x) = \sqcap(\mu(x), \mu'(x))$$

gilt. Damit  $\sqcap$  als Schnittoperator akzeptabel ist, muß er geeigneten Axiomen genügen, die in der folgenden Definition angegeben werden und auf den aus der mehrwertigen Logik bekannten Begriff der  $t$ -Norm führen.

**Definition 2.21** Eine Funktion  $\top : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  heißt  **$t$ -Norm**, wenn die Bedingungen

- (i)  $\top(a, 1) = a$  (Einselement),
- (ii)  $a \leq b \implies \top(a, c) \leq \top(b, c)$  (Monotonie),
- (iii)  $\top(a, b) = \top(b, a)$  (Kommutativität),
- (iv)  $\top(a, \top(b, c)) = \top(\top(a, b), c)$  (Assoziativität).

erfüllt sind.

Offensichtlich ist  $\top$  monoton nicht-fallend in beiden Argumenten, und es gilt  $\top(a, 0) = 0$ .

(i) bedeutet, daß der Schnitt einer Fuzzy-Menge mit einer gewöhnlichen Menge nur zum Ausschluß von Elementen (der Zugehörigkeitsgrad wird 0) oder zum Erhalt des vorliegenden Zugehörigkeitsgrades führen darf.

(ii) sichert, daß monoton wachsende Zugehörigkeitsgrade in den Argumenten auch monoton wachsende Zugehörigkeitsgrade im Schnitt zweier Fuzzy-Mengen nach sich ziehen müssen.

Kommutativität (iii) und Assoziativität (iv) sind für einen erweiterten Schnittoperator selbstverständlich vorauszusetzen.

Die bekanntesten  $t$ -Normen finden sich bereits in Beispiel 2.20, nämlich

$$\begin{aligned} \top_{\min}(a, b) &\stackrel{\text{def}}{=} \min\{a, b\}, \\ \top_{\text{Luka}}(a, b) &\stackrel{\text{def}}{=} \max\{0, a + b - 1\}, \quad \text{und} \\ \top_{\text{prod}}(a, b) &\stackrel{\text{def}}{=} a \cdot b. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Dual zum Begriff der  $t$ -Norm wird der Begriff der  $t$ -Conorm benutzt, der zur Definition verschiedener verallgemeinerter Vereinigungsoperatoren herangezogen werden kann.

**Definition 2.22** Eine Funktion  $\perp : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  heißt genau dann  **$t$ -Conorm**, wenn  $\perp$  kommutativ, assoziativ, monoton nicht-fallend in beiden Argumenten ist und 0 als Einheit besitzt.

Bekannte Beispiele für  $t$ -Conormen sind

$$\begin{aligned} \perp_{\min}(a, b) &\stackrel{\text{def}}{=} \max\{a, b\}, \\ \perp_{\text{Luka}}(a, b) &\stackrel{\text{def}}{=} \min\{a + b, 1\}, \quad \text{and} \\ \perp_{\text{prod}}(a, b) &\stackrel{\text{def}}{=} a + b - ab. \end{aligned} \tag{2.14}$$

$t$ -Normen und  $t$ -Conormen induzieren Konnektive für Fuzzy-Mengen vermittelt

$$\begin{aligned} (\mu \cap_{\top} \mu')(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \top(\mu(x), \mu'(x)) \quad \text{und} \\ (\mu \cup_{\perp} \mu')(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \perp(\mu(x), \mu'(x)). \end{aligned} \tag{2.15}$$

**Beispiel 2.23** In seinem Aufsatz „Fuzzy Sets“ aus dem Jahre 1965 verwendete L.A. Zadeh die Operatoren

$$\begin{aligned} (\mu \cap \mu')(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \min\{\mu(x), \mu'(x)\} && \text{(Durchschnitt),} \\ (\mu \cup \mu')(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \max\{\mu(x), \mu'(x)\} && \text{(Vereinigung),} \\ \bar{\mu}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} 1 - \mu(x) && \text{(Komplement).} \end{aligned}$$

Das spezielle Paar von  $t$ -Norm  $\min$  und  $t$ -Conorm  $\max$  hat günstige algebraische Eigenschaften wie die Distributivgesetze

$$\begin{aligned} \mu \cap (\mu' \cup \mu'') &= (\mu \cap \mu') \cup (\mu \cap \mu'') \quad \text{und} \\ \mu \cup (\mu' \cap \mu'') &= (\mu \cup \mu') \cap (\mu \cup \mu''). \end{aligned} \tag{2.16}$$



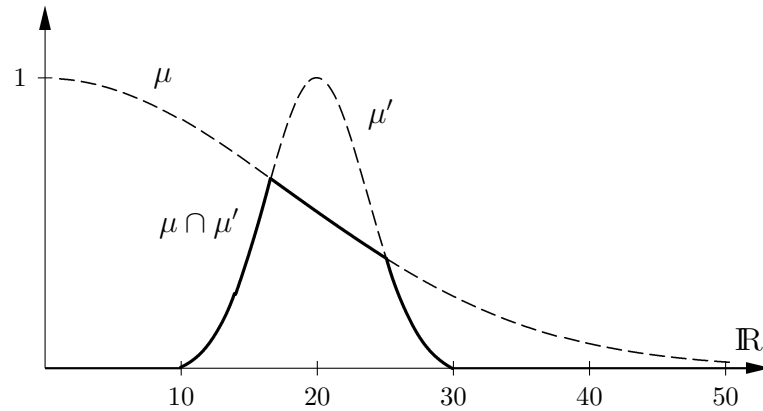


Abbildung 2.10: Durchschnitt zweier Fuzzy-Mengen

Die DeMorganschen Gesetze

$$\overline{\mu \cup \mu'} = \bar{\mu} \cap \bar{\mu'} \quad \text{und} \quad \overline{\mu \cap \mu'} = \bar{\mu} \cup \bar{\mu'} \quad (2.17)$$

gelten nicht nur für  $\cap$  und  $\cup$ , sondern für alle Paare von  $t$ -Normen und  $t$ -Conormen.  $(F(X), \cap, \cup)$  bildet einen vollständigen distributiven Verband mit dem Nullelement  $\mathbb{1}_\emptyset$  und dem Einselement  $\mathbb{1}_X$ .

Allerdings erhält man keine Boolesche Algebra, da es keinen Komplementoperator  $\bar{\phantom{x}}$  gibt, für den  $\mu \cap \bar{\mu} = \mathbb{1}_\emptyset$  und  $\mu \cup \bar{\mu} = \mathbb{1}_X$  stets erfüllt ist.

Vom praktischen Standpunkt aus gesehen, läßt sich mit dem Paar  $(\min, \max)$  sowohl rechnerisch als auch graphisch sehr gut arbeiten. Beschreiben  $\mu, \mu' \in F(\mathbb{R})$  zum Beispiel die linguistischen Werte „jung“ bzw. „ungefähr 20,“ so ergibt sich  $\mu \cap \mu'$ , wie in Abbildung 2.10 dargestellt.  $\square$

$(\min, \max)$  ist das einzige Paar distributiver und damit absorbierender und idempotenter  $t$ -Norm und  $t$ -Conorm. Wenn man also die Eigenschaften

$$\mu \cap \mu = \mu \quad \text{und} \quad \mu \cup \mu = \mu$$

für Fuzzy-Mengen  $\mu$  erhalten will, muß man dieses Paar von Operatoren verwenden. Da sich jedoch in vielen Anwendungen Fuzzy-Mengen — auch wenn sie dieselbe Charakterisierung besitzen — bei der Durchschnitts- bzw. Vereinigungsbildung gegenseitig beeinflussen, arbeitet man häufig statt mit  $(\min, \max)$  auch mit Paaren parametrischer Operatoren.

**Beispiel 2.24** Es sei  $(\top_\lambda, \perp_\lambda)$ ,  $\lambda \in (-1, \infty)$ , die parametrisierte *Weber-Familie* von  $t$ -Normen und  $t$ -Conormen, d.h.

$$\begin{aligned} \top_\lambda(a, b) &= \max \left\{ \frac{a + b - 1 + \lambda ab}{1 + \lambda}, 0 \right\} \quad \text{und} \\ \perp_\lambda(a, b) &= \min \left\{ a + b - \frac{\lambda ab}{1 + \lambda}, 1 \right\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Für  $\lambda = 0$  ergibt sich das Paar  $(\top_{\text{Luka}}, \perp_{\text{Luka}})$ , für  $\lambda \rightarrow \infty$  das Paar  $(\top_{\text{prod}}, \perp_{\text{prod}})$  und für  $\lambda \rightarrow -1$  das Paar  $(\top_{-1}, \perp_{-1})$  mit

$$\top_{-1}(a, b) = \begin{cases} a, & \text{falls } b = 1 \\ b, & \text{falls } a = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{drastisches Produkt})$$

und

$$\perp_{-1}(a, b) = \begin{cases} a, & \text{falls } b = 0 \\ b, & \text{falls } a = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{drastische Summe}).$$

□

Da jede  $t$ -Norm  $\top : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  die zu ihr duale  $t$ -Conorm

$$\begin{aligned} \perp : [0, 1]^2 &\rightarrow [0, 1], \\ \perp(a, b) &= 1 - \top(1 - a, 1 - b), \end{aligned} \quad (2.19)$$

definiert, lassen sich anhand gegebener  $t$ -Normen leicht sinnvolle Paare von  $t$ -Norm und  $t$ -Conorm ermitteln. Weitere Familien solcher Paare sind beispielsweise die

*Hamacher-Familie*

$$\begin{aligned} \top'_{\gamma}(a, b) &= \frac{ab}{\gamma + (1 - \gamma)(a + b - ab)}, \\ \perp'_{\gamma}(a, b) &= \frac{a + b - ab - (1 - \gamma)ab}{1 - (1 - \gamma)ab}, \quad \gamma > 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

und die

*Yager-Familie*

$$\begin{aligned} \top''_p(a, b) &= 1 - \min \left\{ [(1 - a)^p + (1 - b)^p]^{\frac{1}{p}}, 1 \right\}, \\ \perp''_p(a, b) &= \min \left\{ [a^p + b^p]^{\frac{1}{p}}, 1 \right\}, \quad p > 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

In der Yager-Familie erhält man für  $p \rightarrow 0$  das Paar  $(\top_{-1}, \perp_{-1})$ , für  $p \rightarrow \infty$  das Paar  $(\min, \max)$ . Sie deckt damit einen großen Bereich von  $t$ -Normen und  $t$ -Conormen ab, da man für alle  $t$ -Normen  $\top$  und  $t$ -Conormen  $\perp$  zeigen kann, daß

$$\begin{aligned} \top_{-1}(a, b) &\leq \top(a, b) \leq \min\{a, b\} \quad \text{und} \\ \max\{a, b\} &\leq \perp(a, b) \leq \perp_{-1}(a, b). \end{aligned} \quad (2.22)$$

gilt.

Mathematisch besonders attraktiv sind *Archimedische t-Normen* und *t-Conormen*.

**Definition 2.25** *Es seien  $\top : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  und  $\perp : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  zwei Funktionen.*

- (a)  $\top$  heißt **Archimedische t-Norm** genau dann, wenn  $\top$  eine stetige t-Norm ist und für alle  $a \in (0, 1)$  die Ungleichung  $\top(a, a) < a$  gilt.
- (b)  $\perp$  heißt **Archimedische t-Conorm** genau dann, wenn  $\perp$  eine stetige t-Conorm ist und für alle  $a \in (0, 1)$  die Ungleichung  $\perp(a, a) > a$  gilt.

Archimedische t-Normen lassen sich wie folgt repräsentieren.

**Satz 2.26** *Eine Funktion  $\top : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  ist genau dann eine Archimedische t-Norm, wenn eine streng monoton fallende stetige Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  existiert mit  $f(1) = 0$  und*

$$\top(a, b) = f^{(-1)}(f(a) + f(b)),$$

wobei  $f^{(-1)}$  die Pseudo-Inverse von  $f$  ist, d.h.

$$f^{(-1)}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \{x \in [0, 1] \mid f(x) = y\}, & \text{falls } y \in [0, f(0)] \\ 0, & \text{falls } y \in [f(0), \infty]. \end{cases}$$

Für  $f(0) = \infty$  ist  $\top$  streng monoton wachsend in beiden Argumenten.

**B e w e i s :**

Der Beweis dieses Satzes ist in [Schweizer61] zu finden. □

Analog kann jede Archimedische t-Conorm  $\perp$  durch eine streng monoton wachsende stetige Funktion  $g : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  mit  $g(0) = 0$ ,

$$\perp(a, b) = g^{(-1)}(g(a) + g(b))$$

und der Pseudo-Inversen

$$g^{(-1)}(y) = \begin{cases} \{x \in [0, 1] \mid g(x) = y\}, & \text{falls } y \in [0, g(1)] \\ 1, & \text{falls } y \in [g(1), \infty] \end{cases}$$

dargestellt werden.

Für  $g(1) = \infty$  ist  $\perp$  streng monoton wachsend in beiden Argumenten. Die genannten Funktionen  $f$  und  $g$  sind bis auf die Multiplikation mit einem positiven Faktor eindeutig bestimmt.

**Beispiel 2.27**

$$(a) \quad f_p : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad f_p(x) \stackrel{\text{def}}{=} (1-x)^p,$$

$$g_p : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad g_p(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^p, \quad p > 0.$$

$f_p$  ist streng monoton fallend mit  $f_p(1) = 0$  und  $f_p(0) = 1$ ,  $g_p$  hingegen streng monoton wachsend mit  $g_p(0) = 0$  und  $g_p(1) = 1$ .

Die von  $f_p$  und  $g_p$  induzierten Paare von  $t$ -Norm und  $t$ -Conorm bilden die Yager-Familie.

$$(b) \quad f : [0, \infty] \rightarrow [0, 1], \quad f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -\ln x, & \text{falls } x \in (0, 1] \\ \infty, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

$$g : [0, 1] \rightarrow [0, \infty], \quad g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -\ln(1-x), & \text{falls } x \in [0, 1) \\ \infty, & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

$f$  und  $g$  erfüllen die Voraussetzungen von Satz 2.26. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \top(a, b) &= f^{(-1)}(f(a) + f(b)) \\ &= f^{(-1)}(-\ln a - \ln b) && \text{(algebraisches Produkt),} \\ &= e^{\ln(a)+\ln(b)} = a \cdot b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \perp(a, b) &= g^{(-1)}(g(a) + g(b)) \\ &= g^{(-1)}(-\ln(1-a) - \ln(1-b)) && \text{(algebraische Summe).} \\ &= 1 - e^{\ln(1-a)+\ln(1-b)} = a + b - ab \end{aligned} \quad \square$$

Für die Axiomatisierung des Komplementes von Fuzzy-Mengen gibt es analoge Überlegungen: Man nennt eine Funktion  $n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  eine *Negation*, falls  $n(0) = 1$ ,  $n(1) = 0$  und  $n(a) \geq n(b)$  für alle  $a \leq b$  gilt. Am häufigsten benutzt wird die von Zadeh vorgeschlagene Negation

$$n(x) = 1 - x.$$

Sie ist *strikt*, d.h. streng monoton und stetig.

Jeder  $t$ -Norm  $\top$  wird über eine strikte Negation  $n$  eine duale  $t$ -Conorm  $\perp_n$  zugeordnet, für die

$$\perp_n(a, b) = n(\top(n(a), n(b))) \quad (2.23)$$

gilt. Im Falle  $\top = \min$  ergibt sich beispielsweise für  $n(x) = 1 - x$  die duale  $t$ -Conorm  $\perp_n = \max$ .

## 2.4 Das Extensionsprinzip

Während im vorhergehenden Abschnitt lediglich Möglichkeiten der Verallgemeinerung mengentheoretischer Operationen von gewöhnlichen Mengen auf Fuzzy-Mengen diskutiert wurden, soll nun ein allgemeines Verfahren angegeben werden, mit dem sich

Abbildungen der Form  $\phi : X^n \rightarrow Y$  zu Abbildungen der Art  $\hat{\phi} : F(X)^n \rightarrow F(Y)$  erweitern lassen. Die Motivation erfolgt auf intuitivem Niveau, ohne auf die Abschnitt 2.7 vorbehaltenen genauere Darlegung der Beziehungen zwischen der Theorie der Fuzzy-Mengen und mehrwertiger Logik näher einzugehen.

Es sei  $\mu \in F(\mathbb{R})$  die Interpretation eines durch den linguistischen Wert „ungefähr 2“ benannten vagen Konzepts durch eine Fuzzy-Menge. Den *Zugehörigkeitsgrad*  $\mu(2.2)$  der Zahl 2.2 zur Fuzzy-Menge  $\mu$  kann man auch als *Akzeptanzgrad* für die Korrektheit der vagen Aussage „2.2 ist ungefähr 2“ auffassen.

Zusätzlich sei nun  $\mu' \in F(\mathbb{R})$  als Interpretation des vagen Konzeptes „alt“ durch eine Fuzzy-Menge gewählt. Dann läßt sich umgekehrt der Akzeptanzgrad der zusammengesetzten Aussage „2.2 ist ungefähr 2, und 2.2 ist alt“ als Zugehörigkeitsgrad von 2.2 zum vagen Konzept „ungefähr 2 und alt“ — also zur Fuzzy-Menge  $\mu \cap \mu'$  — interpretieren.

Es stellt sich die Frage, wie man auf diesen verallgemeinerte Wahrheitswerte darstellenden „Akzeptanzgraden“ operiert. Prinzipiell wird man für die Repräsentation der Konjunktion irgendwelche  $t$ -Normen, für die der Disjunktion zu ihnen duale  $t$ -Conormen benutzen. In diesem Abschnitt beschränken wir uns jedoch auf die Verwendung des Paares  $(\min, \max)$ .

Es sei  $\mathcal{P}$  eine Menge vager Aussagen, die mittels der Konnektive *und* bzw. *oder* verknüpfbar sind. Die Abbildung  $\text{acc} : \mathcal{P} \rightarrow [0, 1]$  (acceptance) ordne jeder Aussage  $a \in \mathcal{P}$  ihren Akzeptanzgrad  $\text{acc}(a)$  zu:  $\text{acc}(a) = 0$  bedeute, daß  $a$  definitiv falsch ist,  $\text{acc}(a) = 1$  hingegen, daß  $a$  definitiv wahr ist. Schließlich läßt sich für  $\text{acc}(a) \in (0, 1)$  nur von *gradueller Wahrheit* der Aussage  $a$  sprechen.

Werden zwei Aussagen  $a, b \in \mathcal{P}$  miteinander verknüpft, so erfolgt ihre Bewertung nach folgendem Schema:

$$\begin{aligned} \text{acc}(a \text{ und } b) &= \text{acc}(a \wedge b) = \min\{\text{acc}(a), \text{acc}(b)\}, \\ \text{acc}(a \text{ oder } b) &= \text{acc}(a \vee b) = \max\{\text{acc}(a), \text{acc}(b)\}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Für unendlich viele Aussagen  $a_i, i \in I$ , definieren wir dazu passend

$$\begin{aligned} \text{acc}(\forall i \in I : a_i) &= \inf \{\text{acc}(a_i) \mid i \in I\}, \\ \text{acc}(\exists i \in I : a_i) &= \sup \{\text{acc}(a_i) \mid i \in I\}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Mit Hilfe des Konzeptes des Akzeptanzgrades vager Aussagen zeigen wir jetzt, wie man eine Funktion  $\phi : X^n \rightarrow Y$ , die den Tupeln  $(x_1, \dots, x_n)$  aus  $X^n$  den scharfen Funktionswert  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  aus  $Y$  zuordnet, geeignet auf eine Funktion  $\hat{\phi} : F(X)^n \rightarrow F(Y)$  erweitern kann, die vagen Beschreibungen  $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in F(X)^n$  von  $(x_1, \dots, x_n)$  den unscharfen Funktionswert  $\hat{\phi}(\mu_1, \dots, \mu_n)$  zuweist.

**Beispiel 2.28** Es sei  $+$  :  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die Addition reeller Zahlen. Sind die genauen Werte  $x_1$  und  $x_2$  einer Beobachtung nicht zugänglich, so wird man in einem ersten Modellierungsansatz versuchen, mit Intervallen  $A_1$  und  $A_2$  zu arbeiten, von denen man sicher ist, daß  $x_1 \in A_1$  und  $x_2 \in A_2$  gilt.

Die Addition von  $A_1$  und  $A_2$  wird über

$$A_1 + A_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{a_1 + a_2 \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2\},$$

definiert, eine Vorgehensweise, die aus der Intervallarithmetik wohlbekannt ist. Zum Beispiel ist

$$[4, 5] + [8, 10] = [12, 15],$$

d.h., man braucht nur die Intervallgrenzen zu addieren und zu einem neuen Intervall zusammenzufassen.  $\square$

Die Erweiterung einer Funktion  $\phi : X^n \rightarrow Y$  auf die Potenzmengen, wie sie auch im obigen Beispiel durchgeführt worden ist, ergibt im allgemeinen Fall

$$\begin{aligned} \bar{\phi} : (\mathfrak{P}(X))^n &\rightarrow \mathfrak{P}(Y), \\ \bar{\phi}(A_1, \dots, A_n) &= \{y \in Y \mid \exists (x_1, \dots, x_n) \in A_1 \times \dots \times A_n : \\ &\quad \phi(x_1, \dots, x_n) = y\}. \end{aligned}$$

Bestimmt man den Akzeptanzgrad der Aussage „ $y$  gehört zum Bild von  $(A_1, \dots, A_n)$ “, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &\text{acc}(y \text{ gehört zum Bild von } (A_1, \dots, A_n)) \\ &= \text{acc}(\exists (x_1, \dots, x_n) \in A_1 \times \dots \times A_n : \phi(x_1, \dots, x_n) = y) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{falls } \exists (x_1, \dots, x_n) \in A_1 \times \dots \times A_n : \phi(x_1, \dots, x_n) = y \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Bei der Erweiterung der Funktion  $\phi : X^n \rightarrow Y$  auf  $\hat{\phi} : F(X)^n \rightarrow F(Y)$  kann man analog vorgehen: Der Akzeptanzgrad der Aussage „ $y$  gehört zum Bild von  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ “ mit  $\mu_i \in F(X)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ist dann

$$\begin{aligned} &\text{acc}(y \text{ gehört zum Bild von } (\mu_1, \dots, \mu_n)) \\ &= \text{acc}(\exists (x_1, \dots, x_n) \in X^n : \begin{array}{l} x_1 \text{ gehört zu } \mu_1 \text{ und} \\ x_2 \text{ gehört zu } \mu_2 \text{ und} \\ \dots \text{ und} \\ x_n \text{ gehört zu } \mu_n \text{ und} \\ y = \phi(x_1, \dots, x_n) \end{array}) \\ &= \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in X^n} \{ \text{acc}(x_1 \text{ gehört zu } \mu_1 \text{ und} \\ &\quad \dots \text{ und} \\ &\quad x_n \text{ gehört zu } \mu_n \text{ und} \\ &\quad y = \phi(x_1, \dots, x_n)) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in X^n} \{ \min \{ \text{acc}(x_1 \text{ gehört zu } \mu_1), \\
&\quad \dots \\
&\quad \text{acc}(x_n \text{ gehört zu } \mu_n), \\
&\quad \text{acc}(y = \phi(x_1, \dots, x_n)) \} \} \\
&= \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in X^n: \\ y = \phi(x_1, \dots, x_n)}} \{ \min \{ \mu_1(x_1), \dots, \mu_n(x_n) \} \},
\end{aligned}$$

da der Akzeptanzgrad von  $x_i$  zu dem durch  $\mu_i$  beschriebenen vagen Konzept für  $i = 1, 2, \dots, n$  vereinbarungsgemäß gleich dem Zugehörigkeitsgrad  $\mu_i(x_i)$  ist, und da offenbar

$$\text{acc}(y = \phi(x_1, \dots, x_n)) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \phi(x_1, \dots, x_n) = y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt.

Insgesamt erhält man die erweiterte Abbildung

$$\hat{\phi} : F(X)^n \rightarrow F(Y)$$

mit

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(\mu_1, \dots, \mu_n) : Y &\rightarrow [0, 1], \\
\hat{\phi}(\mu_1, \dots, \mu_n)(y) &= \sup \{ \min \{ \mu_1(x_1), \dots, \mu_n(x_n) \} \mid \\
&\quad (x_1, \dots, x_n) \in X^n \\
&\quad \text{und } y = \phi(x_1, \dots, x_n) \}.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

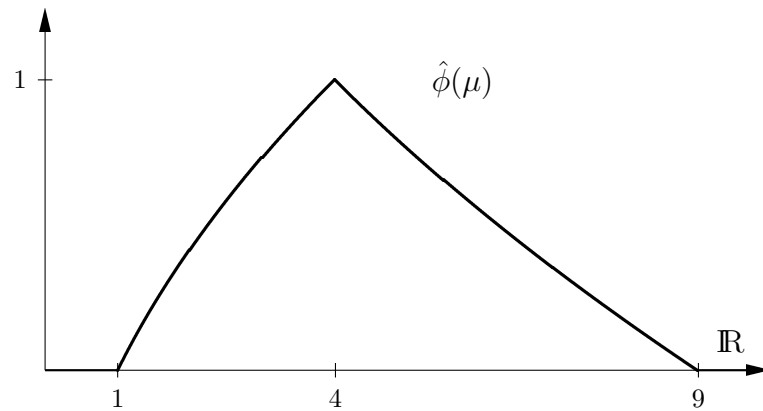
**Beispiel 2.29** Die Interpretation des vagen Konzepts „ungefähr 2“ durch eine Fuzzy-Menge sei

$$\mu \in F(\mathbb{R}), \quad \mu(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{falls } 1 \leq x \leq 2 \\ 3 - x, & \text{falls } 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Erweiterung der Abbildung  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$  auf Fuzzy-Mengen von  $\mathbb{R}$  ergibt

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(\mu) : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1], \\
\hat{\phi}(\mu)(y) &= \sup \{ \mu(x) \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = y \} \\
&= \begin{cases} \sqrt{y} - 1, & \text{falls } 1 \leq y \leq 4 \\ 3 - \sqrt{y}, & \text{falls } 4 \leq y \leq 9 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad \square
\end{aligned}$$

Die dargestellte Vorgehensweise, eine Funktion  $\phi : X^n \rightarrow Y$  auf  $\hat{\phi} : F(X)^n \rightarrow F(Y)$  zu erweitern, bezeichnet man als *Extensionsprinzip*.

Abbildung 2.11: Graphische Darstellung von  $\hat{\phi}(\mu)$  aus Beispiel 2.29

**Definition 2.30** Es sei  $\phi : X^n \rightarrow Y$  eine Abbildung. Die **Extension** von  $\phi$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \hat{\phi} : (F(X))^n &\rightarrow F(Y) \quad \text{mit} \\ \hat{\phi}(\mu_1, \dots, \mu_n)(y) &\stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\min\{\mu_1(x_1), \dots, \mu_n(x_n)\} \mid \\ &\quad (x_1, \dots, x_n) \in X^n \\ &\quad \text{und } y = \phi(x_1, \dots, x_n)\} \end{aligned}$$

Dabei sei  $\sup \emptyset = 0$  vereinbart.

Als erste Anwendung des Extensionsprinzips, das der „Fuzzifizierung“ ganzer Theorien zugrunde gelegt werden kann, betrachten wir im nächsten Abschnitt arithmetische Operationen auf unscharfen Intervallen.

## 2.5 Effizientes Operieren auf Fuzzy-Mengen

In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf die Untersuchung spezieller Klassen von Fuzzy-Mengen reeller Zahlen.

**Definition 2.31**

- (a)  $F_N(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu \in F(\mathbb{R}) \mid \exists x \in \mathbb{R} : \mu(x) = 1\}$ ,
- (b)  $F_C(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu \in F_N(\mathbb{R}) \mid \forall \alpha \in (0, 1] : [\mu]_\alpha \text{ kompakt}\}$ ,
- (c)  $F_I(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu \in F_N(\mathbb{R}) \mid \forall a, b, c \in \mathbb{R} : \\ a \leq c \leq b \Rightarrow \mu(c) \geq \min\{\mu(a), \mu(b)\}\}$ .



Die Elemente von  $F_N(\mathbb{R})$  heißen *normale Fuzzy-Mengen*. Die Voraussetzung der Normalität ist immer dann sinnvoll, wenn eine Fuzzy-Menge  $\mu \in F_N(\mathbb{R})$  als vage Beschreibung einer existierenden, aber nicht genau meßbaren reellwertigen Größe benutzt wird. In einem solchen Fall wäre es nicht plausibel, keiner einzigen reellen Zahl den maximalen Akzeptanzgrad 1 zuzuordnen.

Die in  $F_C(\mathbb{R})$  enthaltenen Fuzzy-Mengen sind von oben halbstetig, was zu einer im folgenden noch näher zu erklärenden Vereinfachung auf sie angewandter arithmetischer Operationen führt. Eine besondere Rolle spielen hierbei die Fuzzy-Mengen aus  $F_I(\mathbb{R})$ . Sie sind normal und *fuzzy-konvex* (d.h., alle ihre Niveaumengen sind konvex) und werden auch *Fuzzy-Intervalle* genannt, da ihr Kern ein gewöhnliches Intervall ist. Es ist zu beachten, daß Fuzzy-Konvexität nicht gleichbedeutend mit der Konvexität der charakteristischen Funktion ist. In ihrer Interpretation als vage Beschreibungen reeller Zahlen bezeichnet man die Elemente aus  $F_I(\mathbb{R})$  häufig auch als *Fuzzy-Zahlen*.

Um mit Fuzzy-Zahlen rechnen zu können, müssen die arithmetischen Grundoperationen definiert werden. Mit Hilfe des Extensionsprinzips erhalten wir die folgenden Festlegungen für die Summe  $\mu \oplus \mu'$ , das Produkt  $\mu \odot \mu'$  und den Reziprokwert  $\text{rec}(\mu)$  beliebiger Fuzzy-Mengen  $\mu, \mu' \in F(\mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} (\mu \oplus \mu')(t) &= \sup\{\min\{\mu(x_1), \mu'(x_2)\} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 + x_2 = t\}, \\ (\mu \odot \mu')(t) &= \sup\{\min\{\mu(x_1), \mu'(x_2)\} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 x_2 = t\}, \\ \text{rec}(\mu)(t) &= \sup\{\mu(x) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge \frac{1}{x} = t\}, \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Andere Operationen lassen sich auf analoge Weise definieren.

**Beispiel 2.32** In Abbildung 2.12 sind drei normale Fuzzy-Mengen  $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in F_C(\mathbb{R})$  angegeben;  $\mu_1$  und  $\mu_3$  sind sogar Fuzzy-Intervalle, wobei  $\mu_3$  die gewöhnliche Menge  $\{2\}$  ist.

Unter den für  $\mu_1 \oplus \mu_2$ ,  $\mu_1 \odot \mu_3$  und  $\text{rec}(\mu_1)$  dargestellten Graphen entsprechen die beiden ersten den intuitiven Erwartungen; bei  $\text{rec}(\mu_1)$  muß man sich klar machen, daß  $\mu_1(0) = 0.5$  gilt, die Division durch 0 nicht erlaubt ist und man daher einen asymptotischen Verlauf beim Zugehörigkeitsgrad 0.5 erhält. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{rec}(\mu_1)(t) &= \sup\{\mu_1(x) \mid x \in \mathbb{R} \wedge \frac{1}{x} = t\} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2t} + \frac{1}{2}, & \text{falls } t \leq -1 \quad \vee \quad t \geq 1 \\ 2 - \frac{1}{t}, & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{falls } -1 \leq t \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

Im allgemeinen sind Operationen auf Fuzzy-Mengen sehr viel komplizierter, insbesondere dann, wenn Fuzzy-Konvexität nicht gegeben ist und im Sinne von Definition 2.30 mit der vertikalen anstatt der horizontalen Repräsentation von Fuzzy-Mengen gearbeitet wird. Aus diesem Grund versucht man, Fuzzy-Arithmetik auf gewöhnliche Mengendarithmetik zurückzuführen und dabei von elementaren Operationen der

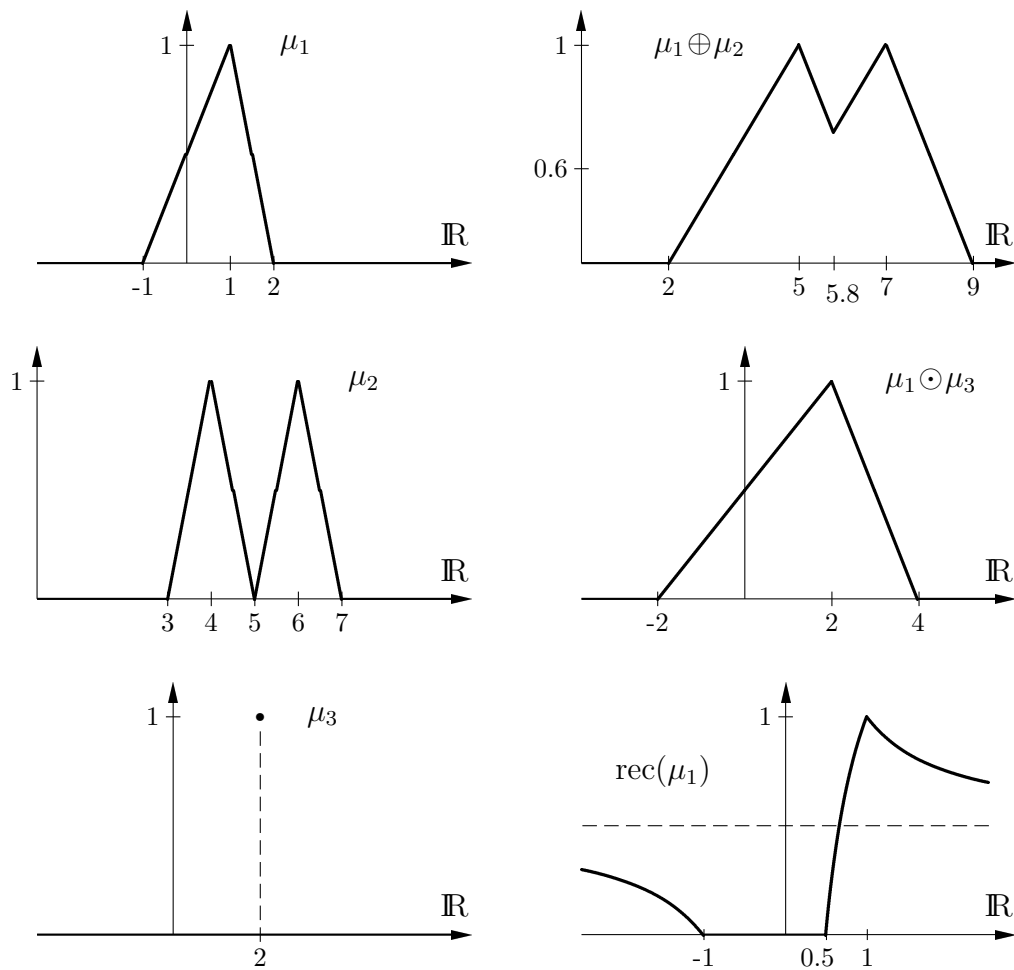


Abbildung 2.12: Arithmetische Operationen auf Fuzzy-Mengen

*Intervall-Arithmetik* zu profitieren. Hierbei kommen wir noch einmal auf das Konzept aus Definition 2.15 zurück. Die in ihr angegebene Stetigkeitseigenschaft (F3) kann man beweistechnisch benutzen, um eine Korrespondenz zwischen den Fuzzy-Mengen von  $\mathbb{R}$  und den Mengensystemen aus  $\mathcal{FL}(\mathbb{R})$  herzustellen. Tatsächlich ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{FL}(\mathbb{R}) &\rightarrow F(\mathbb{R}), \\ \phi \left( (A_\alpha)_{\alpha \in [0,1]} \right) &\stackrel{\text{def}}{=} \mu \end{aligned} \quad (2.27)$$

mit  $\mu(x) = \sup\{\alpha \mid \alpha \in [0, 1] \wedge x \in A_\alpha\}$  eine Bijektion.

Möchte man jedoch mit möglichst allgemeinen Mengensystemen  $\mathcal{A} = (A_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$  normale Fuzzy-Mengen repräsentieren, so verzichtet man auf die Stetigkeitsbedingung (F3) und die wegen  $\alpha \neq 0$  ohnehin überflüssig gewordene Bedingung (F1), um allein mit (F2) und der die Normalität sichernden Zusatzbedingung  $\bigcap_{\alpha \in (0,1)} A_\alpha \neq \emptyset$  die von  $\mathcal{A}$  induzierte Fuzzy-Menge  $\mu_{\mathcal{A}}$  mit

$$\mu_{\mathcal{A}}(t) = \sup\{\alpha \mid \alpha \in (0, 1) \wedge t \in A_\alpha\}.$$

festzulegen.

Das motiviert die folgende Begriffsbildung:

**Definition 2.33** Ein Mengensystem  $(A_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$  heißt **Mengenrepräsentation** von  $\mu \in F_N(\mathbb{R})$ , falls

- (a)  $0 < \alpha < \beta < 1 \implies A_\beta \subseteq A_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ , und
- (b)  $\mu(t) = \sup\{\alpha \mid \alpha \in (0, 1) \wedge t \in A_\alpha\}$

mit  $\sup \emptyset = 0$  gilt.

Wie der folgende Satz zeigt, kann eine Fuzzy-Menge mehrere Mengenrepräsentationen haben.

**Satz 2.34** Es sei  $\mu \in F_N(\mathbb{R})$ . Das Mengensystem  $(A_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$  ist genau dann eine Mengenrepräsentation von  $\mu$ , wenn für alle  $\alpha \in (0, 1)$  gilt:

$$\{t \in \mathbb{R} \mid \mu(t) > \alpha\} \subseteq A_\alpha \subseteq \{t \in \mathbb{R} \mid \mu(t) \geq \alpha\}$$

**B e w e i s :**

Es sei  $[\mu]_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{t \in \mathbb{R} \mid \mu(t) > \alpha\}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ .

„ $\implies$ “: Ausgehend von einer Mengenrepräsentation  $(A_\gamma)_{\gamma \in (0,1)}$  von  $\mu$  und beliebigem, aber festem  $\alpha \in (0, 1)$  gilt für alle  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} t \in [\mu]_{\underline{\alpha}} &\implies \mu(t) = \sup\{\gamma \mathbb{I}_{A_\gamma}(t) \mid \gamma \in (0, 1)\} > \alpha \\ &\implies \exists \beta \in (\alpha, 1) : t \in A_\beta \\ &\implies t \in A_\alpha. \end{aligned}$$

Mit  $\mu(t) \geq \alpha \cdot \mathbb{I}_{A_\alpha}(t) = \alpha$  läßt sich  $t \in A_\alpha$  zu  $t \in [\mu]_{\underline{\alpha}}$  abschwächen, d.h.  $[\mu]_{\underline{\alpha}} \subseteq A_\alpha \subseteq [\mu]_{\alpha}$ .

„ $\impliedby$ “: Die Inklusion  $[\mu]_{\underline{\gamma}} \subseteq A_\gamma \subseteq [\mu]_{\gamma}$  sei für alle  $\gamma \in (0, 1)$  erfüllt. Wir haben nachzuweisen, daß  $(A_\gamma)_{\gamma \in (0,1)}$  eine Mengenrepräsentation von  $\mu$  ist.

(a) Für  $0 < \alpha < \beta < 1$  gilt  $t \in [\mu]_{\underline{\beta}} \implies \mu(t) \geq \beta > \alpha \implies t \in [\mu]_{\underline{\alpha}}$  und damit auch  $[\mu]_{\underline{\beta}} \subseteq [\mu]_{\underline{\alpha}}$ .

Aufgrund der Voraussetzung  $[\mu]_{\underline{\gamma}} \subseteq A_\gamma \subseteq [\mu]_{\gamma}$ ,  $\gamma \in (0, 1)$ , ist demnach  $A_\beta \subseteq [\mu]_{\underline{\beta}} \subseteq [\mu]_{\underline{\alpha}} \subseteq A_\alpha$ .

(b) Um  $\mu(t) = \sup\{\alpha \mid \alpha \in (0, 1) \wedge t \in A_\alpha\}$  zu zeigen, sei zunächst  $\mu(t) > 0$ . Unter Anwendung des Repräsentationssatzes 2.14 und Berücksichtigung der Voraussetzung schließen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \left\{ \min\{\alpha, \mathbb{I}_{[\mu]_{\underline{\alpha}}}(t)\} \right\} \\ &= \sup\{\alpha \mid \alpha \in [0, 1] \wedge t \in [\mu]_{\underline{\alpha}}\} \\ &= \sup\{\alpha \mid \alpha \in (0, 1) \wedge t \in [\mu]_{\underline{\alpha}}\} \\ &\geq \sup\{\alpha \mid \alpha \in (0, 1) \wedge t \in A_\alpha\} \\ &\geq \sup\{\alpha \mid \alpha \in (0, 1) \wedge t \in [\mu]_{\underline{\alpha}}\} \\ &= \sup\{\alpha \mid \alpha \in (0, 1) \wedge \mu(t) > \alpha\} \\ &= \mu(t). \end{aligned}$$

Ist  $\mu(t) = 0$ , dann haben wir  $t \notin A_\alpha$  für alle  $\alpha \in (0, 1)$  und daher per definitionem  $\sup\{\alpha \mid \alpha \in (0, 1) \wedge t \in A_\alpha\} = \sup \emptyset = 0 = \mu(t)$ .  $\square$

**Bemerkung 2.35** Es sei  $\mu \in F_N(\mathbb{R})$ . In Definition 2.11 führten wir  $[\mu]_{\alpha} = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu(x) \geq \alpha\}$  für  $\alpha \in [0, 1]$  als den  $\alpha$ -Schnitt von  $\mu$  ein. Die Mengen  $[\mu]_{\underline{\alpha}} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid \mu(x) > \alpha\}$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , werden vielfach auch als die *strikten  $\alpha$ -Schnitte* von  $\mu$  bezeichnet.

Die durch sie induzierten Mengensysteme  $([\mu]_{\underline{\alpha}})_{\alpha \in (0,1)}$  und  $([\mu]_{\alpha})_{\alpha \in (0,1)}$  sind Mengenrepräsentationen von  $\mu$  und bilden nach Satz 2.34 offenbar die untere bzw. obere Schranke aller Mengenrepräsentationen von  $\mu$ .  $\square$

Der folgende Satz zeigt auf, wie man für beliebige Abbildungen  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit Hilfe von Mengenrepräsentationen  $((A_i)_{\alpha \in (0,1)})$  normaler Fuzzy-Mengen  $\mu_i \in F_N(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , zu einer Mengenrepräsentation der Extension  $\hat{\phi}(m\mu_1, \dots, m\mu_n)$  gelangt.

Seine Aussagen sind zum Beispiel dazu verwendbar, arithmetische Operationen auf Fuzzy-Mengen effizient durchzuführen.

**Satz 2.36** *Es seien  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  normale Fuzzy-Mengen von  $\mathbb{R}$  und  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung. Dann gilt:*

- (a)  $\forall \alpha \in [0, 1) : [\hat{\phi}(\mu_1, \dots, \mu_n)]_{\underline{\alpha}} = \phi([\mu_1]_{\underline{\alpha}}, \dots, [\mu_n]_{\underline{\alpha}}),$   
 (b)  $\forall \alpha \in (0, 1] : [\hat{\phi}(\mu_1, \dots, \mu_n)]_{\alpha} \supseteq \phi([\mu_1]_{\alpha}, \dots, [\mu_n]_{\alpha}),$   
 (c) *Falls  $((A_i)_{\alpha})_{\alpha \in (0,1)}$  eine Mengenrepräsentation von  $\mu_i, i = 1, 2, \dots, n,$  ist, dann ist  $(\phi((A_1)_{\alpha}, \dots, (A_n)_{\alpha}))_{\alpha \in (0,1)}$  eine Mengenrepräsentation von  $\hat{\phi}(\mu_1, \dots, \mu_n).$*

**B e w e i s :**

- (a) Es seien  $\alpha \in [0, 1)$  und  $t \in \mathbb{R}$  beliebig, aber fest vorgegeben.

$$\begin{aligned}
 t \in [\hat{\phi}(\mu_1, \dots, \mu_n)]_{\underline{\alpha}} & \\
 \iff t \in \{y \in \mathbb{R} \mid \hat{\phi}(\mu_1, \dots, \mu_n)(y) > \alpha\} & \\
 \iff t \in \{y \in \mathbb{R} \mid \sup\{\min\{\mu_1(x_1), \dots, \mu_n(x_n)\} \mid & \\
 (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \wedge \phi(x_1, \dots, x_n) = y\} > \alpha\} & \\
 \stackrel{(*)}{\iff} \exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : & \\
 \phi(x_1, \dots, x_n) = t \wedge \min\{\mu_1(x_1), \dots, \mu_n(x_n)\} > \alpha & \\
 \iff \exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : & \\
 \phi(x_1, \dots, x_n) = t \wedge (x_1, \dots, x_n) \in \times_{i=1}^n [\mu_i]_{\underline{\alpha}} & \\
 \iff t \in \phi([\mu_1]_{\underline{\alpha}}, \dots, [\mu_n]_{\underline{\alpha}}). &
 \end{aligned}$$

- (b) wie (a), jedoch ist an der Stelle (\*) aufgrund des auftretenden Supremums nur die Implikationsrichtung „ $\Leftarrow$ “ zugelassen.  
 (c) Die Aussage ist eine triviale Folgerung aus Satz 2.34, wenn wir

$$[\hat{\phi}(\mu_1, \dots, \mu_n)]_{\underline{\alpha}} \subseteq \phi((A_1)_{\alpha}, \dots, (A_n)_{\alpha}) \subseteq [\hat{\phi}(\mu_1, \dots, \mu_n)]_{\alpha}.$$

nachgewiesen haben.

Da  $((A_i)_{\alpha})_{\alpha \in (0,1)}$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  Mengenrepräsentationen von  $\mu_i$  sind, gilt unter Anwendung von Satz 2.34  $[\mu_i]_{\underline{\alpha}} \subseteq (A_i)_{\alpha} \subseteq [\mu_i]_{\alpha}$ . Wir benutzen (a) und (b) und erhalten schließlich

$$\begin{aligned}
 & [\hat{\phi}(\mu_1, \dots, \mu_n)]_{\underline{\alpha}} \\
 &= \phi([\mu_1]_{\underline{\alpha}}, \dots, [\mu_n]_{\underline{\alpha}}) \\
 &\subseteq \phi((A_1)_{\alpha}, \dots, (A_n)_{\alpha}) \\
 &\subseteq \phi([\mu_1]_{\alpha}, \dots, [\mu_n]_{\alpha}) \\
 &\subseteq [\hat{\phi}(\mu_1, \dots, \mu_n)]_{\alpha}.
 \end{aligned}$$

□

**Beispiel 2.32 (Fortsetzung)** Für  $\mu_1, \mu_2 \in F_C(\mathbb{R})$  mit

$$\mu_1(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2}, & \text{falls } -1 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & \text{falls } 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\mu_2(x) = \begin{cases} x-3, & \text{falls } 3 \leq x \leq 4 \\ 5-x, & \text{falls } 4 \leq x \leq 5 \\ x-5, & \text{falls } 5 \leq x \leq 6 \\ 7-x, & \text{falls } 6 \leq x \leq 7 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

erhalten wir die Mengenrepräsentationen  $([\mu_1]_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$  und  $([\mu_2]_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$  mit

$$\begin{aligned} [\mu_1]_\alpha &= [2\alpha - 1, 2 - \alpha], \\ [\mu_2]_\alpha &= [\alpha + 3, 5 - \alpha] \cup [\alpha + 5, 7 - \alpha]. \end{aligned}$$

Es sei  $\text{add} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{add}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x + y$ . Nach Satz 2.36 ist  $(A_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$  mit  $A_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \text{add}([\mu_1]_\alpha, [\mu_2]_\alpha)$  eine Mengenrepräsentation von  $\mu_1 \oplus \mu_2$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \text{add}([\mu_1]_\alpha, [\mu_2]_\alpha) = [3\alpha + 2, 7 - 2\alpha] \cup [3\alpha + 4, 9 - 2\alpha] \\ &= \begin{cases} [3\alpha + 2, 7 - 2\alpha] \cup [3\alpha + 4, 9 - 2\alpha], & \text{falls } \alpha \geq 0.6 \\ [3\alpha + 2, 9 - 2\alpha], & \text{falls } \alpha \leq 0.6, \end{cases} \end{aligned}$$

und daraus

$$(\mu_1 \oplus \mu_2)(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{3}, & \text{falls } 2 \leq x \leq 5 \\ \frac{7-x}{2}, & \text{falls } 5 \leq x \leq 5.8 \\ \frac{x-4}{3}, & \text{falls } 5.8 \leq x \leq 7 \\ \frac{9-x}{2}, & \text{falls } 7 \leq x \leq 9 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad \square$$

**Bemerkung 2.37** Die Fortführung des Beispiels 2.32 hat gezeigt, daß sich eine Mengenrepräsentation  $(A_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$  der Summe  $\mu_1 \oplus \mu_2$  zweier Fuzzy-Mengen aus  $F_C(\mathbb{R})$  dadurch finden läßt, daß die Niveaumengen  $A_\alpha$  durch Addition der  $\alpha$ -Schnitte von  $\mu_1$  und  $\mu_2$  gebildet werden. Auf analoge Weise kann man die Bestimmung von Mengenrepräsentationen für andere Verknüpfungen von Fuzzy-Mengen aus  $F_C(\mathbb{R})$  oft auf einfache Operationen der Intervallarithmetik reduzieren.

Im Falle der vier Grundrechenarten ergeben sich die folgenden Intervalloperationen:

Für  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} [a, b] + [c, d] &= [a + c, b + d], \\ [a, b] - [c, d] &= [a - d, b - c], \end{aligned}$$

$$[a, b] \cdot [c, d] = \begin{cases} [ac, bd], & \text{für } a \geq 0 \wedge c \geq 0 \\ [bd, ac], & \text{für } b < 0 \wedge d < 0 \\ [\min\{ad, bc\}, \max\{ad, bc\}], & \text{für } ab \geq 0 \wedge cd \geq 0 \\ & \wedge ac < 0 \\ [\min\{ad, bc\}, \max\{ac, bd\}], & \text{für } ab < 0 \vee cd < 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{[a, b]} = \begin{cases} \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right], & \text{falls } 0 \notin [a, b] \\ \left[\frac{1}{b}, \infty\right) \cup \left(-\infty, \frac{1}{a}\right], & \text{falls } a < 0 \wedge b > 0 \\ \left[\frac{1}{b}, \infty\right), & \text{falls } a = 0 \wedge b > 0 \\ \left(-\infty, \frac{1}{a}\right], & \text{falls } a < 0 \wedge b = 0. \end{cases}$$

Man beachte, daß die Addition, Subtraktion und Multiplikation zweier Fuzzy-Intervalle im Gegensatz zur Division nicht aus den Mengen  $F_C(\mathbb{R})$  bzw.  $F_I(\mathbb{R})$  herausführen.

Viele der für die arithmetischen Grundoperationen auf reellen Zahlen bekannten Rechengesetze lassen sich auf die entsprechenden Extensionen für Fuzzy-Mengen und folglich auch auf Intervalloperationen übertragen. So gilt für die Addition von Fuzzy-Mengen von  $\mathbb{R}$  wieder das Kommutativ- und das Assoziativgesetz, d.h., für  $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in F(\mathbb{R})$  ist

$$\begin{aligned} \mu_1 \oplus \mu_2 &= \mu_2 \oplus \mu_1, \\ \mu_1 \oplus (\mu_2 \oplus \mu_3) &= (\mu_1 \oplus \mu_2) \oplus \mu_3. \end{aligned}$$

Das Distributivgesetz gilt nicht in jedem Falle, jedoch kann man zeigen, daß

$$\mu_1 \odot (\mu_2 \oplus \mu_3) \subseteq (\mu_1 \odot \mu_2) \oplus (\mu_1 \odot \mu_3)$$

erfüllt ist.

Es sollte noch angemerkt werden, daß  $F(\mathbb{R})$  bezüglich der Addition keine Gruppe bildet. Es existiert zwar mit  $\mathbb{I}_{\{0\}}$  ein Nullelement, jedoch gibt es im allgemeinen kein additives Inverses. Dies läßt sich leicht aus der Tatsache folgern, daß die Gleichung

$$[2, 3] + A = \{0\}$$

auch im Bereich der gewöhnlichen Mengen keine Lösung besitzt. □

In Satz 2.36(b) wurde nachgewiesen, daß die für Anwendungen sehr wichtigen Mengenrepräsentationen der  $\alpha$ -Schnitte von Extensionen  $\hat{\phi}(\mu_1, \dots, \mu_n)$  im allgemeinen nicht direkt aus den  $\alpha$ -Schnitten der beteiligten Fuzzy-Mengen bestimmt werden können. Ein sehr einfaches Beispiel, das dies demonstriert, ist

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \phi(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I}_{\{1\}}, \\ \mu \in F_C(\mathbb{R}), & & \mu(x) &= \begin{cases} x, & \text{falls } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

mit  $[\hat{\phi}(\mu)]_1 = \{0, 1\} \supset \phi([\mu]_1) = \{1\}$ .

Beschränkt man sich allerdings auf die Betrachtung stetiger Funktionen  $\phi$  und von oben stetiger Fuzzy-Mengen  $\mu_1, \dots, \mu_n$ , so läßt sich in Satz 2.36(b) das Gleichheitszeichen erreichen.

**Satz 2.38** *Es sei  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in [F_C(\mathbb{R})]^n$  und  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Abbildung. Dann gilt:*

$$\forall \alpha \in (0, 1] : \hat{\phi}(\mu_1, \dots, \mu_n)_\alpha = \phi([\mu_1]_\alpha, \dots, [\mu_n]_\alpha).$$

**B e w e i s :**

Die Inklusionsrichtung „ $\supseteq$ “ ist wegen  $F_C(\mathbb{R}) \subseteq F_N(\mathbb{R})$  eine triviale Folgerung aus Satz 2.36(b). Zum Nachweis von „ $\subseteq$ “ seien  $\alpha \in (0, 1]$  und  $t \in \mathbb{R}$  beliebig, aber fest vorgegeben. Wir definieren

$$X_\alpha(t) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \phi(x_1, \dots, x_n) = t \wedge \forall i \in \{1, \dots, n\} : x_i \in [\mu_i]_\alpha\}$$

sowie

$$M(t) \stackrel{\text{def}}{=} \{\min\{\mu_1(x_1), \dots, \mu_n(x_n)\} \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \wedge \phi(x_1, \dots, x_n) = t\}.$$

1. *Fall:*  $X_\alpha(t) \neq \emptyset$ . Dann existiert ein  $(x_1, \dots, x_n) \in X_\alpha(t)$  mit  $x_i \in [\mu_i]_\alpha$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  und  $\phi(x_1, \dots, x_n) = t$ . Es gilt

$$t \in [\hat{\phi}(\mu_1, \dots, \mu_n)]_\alpha \iff t \in \phi([\mu_1]_\alpha, \dots, [\mu_n]_\alpha).$$

2. *Fall:*  $X_\alpha(t) = \emptyset$ . Wegen

$$\begin{aligned} & [\hat{\phi}(\mu_1, \dots, \mu_n)]_\alpha \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid \hat{\phi}(\mu_1, \dots, \mu_n)(y) \geq \alpha\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid \sup\{\min\{\mu_1(x_1), \dots, \mu_n(x_n)\} \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \\ & \quad \wedge \phi(x_1, \dots, x_n) = y\} \geq \alpha\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid \sup M(y) \geq \alpha\} \end{aligned}$$

muß  $\sup M(t) \geq \alpha$  sein, wenn  $t \in [\hat{\phi}(\mu_1, \dots, \mu_n)]_\alpha$  gilt.

Da wir  $X_\alpha(t) = \emptyset$  vorausgesetzt haben, ist  $m < \alpha$  für alle  $m \in M(t)$ . Also liegt mit  $\alpha$  ein Häufungspunkt von  $M(t)$  vor, d.h. es gibt eine streng monoton wachsende Folge  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Elementen  $\alpha_k \in M(t)$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \alpha$ .

Die Eigenschaft  $\alpha_k \in M(t)$  ist mit der Existenz von Tupeln  $(x_1^k, \dots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n$  verbunden, die den Bedingungen  $\phi(x_1^k, \dots, x_n^k) = t$  und  $\min\{\mu_1(x_1^k), \dots, \mu_n(x_n^k)\} = \alpha_k$ , also auch  $(x_1^k, \dots, x_n^k) \in \times_{i=1}^n [\mu_i]_{\alpha_k}$  genügen.

Laut Vereinbarung gilt  $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in [F_C(\mathbb{R})]^n$ . Demnach haben wir es bezüglich  $[\mu_i]_{\alpha_k}$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $k \in \mathbb{N}$  mit kompakten, also abgeschlossenen und beschränkten



Mengen reeller Zahlen zu tun. Damit sind auch  $\times_{i=1}^n [\mu_i]_{\alpha_k}$  für  $k \in \mathbb{N}$  kompakt. Wir schließen daraus, daß die Folge  $\left((x_1^k, \dots, x_n^k)\right)_{k \in \mathbb{N}}$  einen Häufungspunkt  $(x_1, \dots, x_n)$  und insbesondere eine gegen  $(x_1, \dots, x_n)$  konvergente Partialfolge  $\left((x_1^{i_k}, \dots, x_n^{i_k})\right)_{k \in \mathbb{N}}$  besitzt. Aus der Kompaktheit von  $\times_{i=1}^n [\mu_i]_{\beta}$  für  $\beta \in (0, 1]$  ergibt sich

$$(x_1, \dots, x_n) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \times_{i=1}^n [\mu_i]_{\alpha_k} = \times_{i=1}^n [\mu_i]_{\alpha}.$$

Die Funktion  $\phi$  ist auf der Menge  $\times_{i=1}^n [\mu_i]_{\alpha_1}$  stetig.

Per definitionem und aufgrund der Inklusionsbeziehung  $[\mu_i]_{\alpha_k} \supseteq [\mu_i]_{\alpha_{k+1}}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , erhalten wir hieraus

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (x_1^{i_k}, \dots, x_n^{i_k}) &= (x_1, \dots, x_n) \\ \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x_1^{i_k}, \dots, x_n^{i_k}) &= \phi(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Für alle  $k \in \mathbb{N}$  ist  $\phi(x_1^k, \dots, x_n^k) = t$ , also auch  $\phi(x_1, \dots, x_n) = t$  und  $(x_1, \dots, x_n) \in X_{\alpha}(t)$ . Das steht jedoch im Widerspruch zur eingangs getroffenen Annahme  $X_{\alpha}(t) = \emptyset$ .

Folglich tritt nur der erste Fall ein, d.h., die Behauptung ist bewiesen.  $\square$

Wie aus Satz 2.38 hervorgeht, liegt der Vorteil der horizontalen Repräsentation von Fuzzy-Mengen gegenüber der vertikalen Repräsentation darin, daß sie die Bestimmung der Funktionswerte von Extensionen im Vergleich zur direkten Anwendung von Definition 2.30 im allgemeinen erheblich vereinfacht. Ein Nachteil ist ohne Zweifel, daß man aus praxisorientierter Sicht zwar den Funktionsterm der Zugehörigkeitsfunktion einer Fuzzy-Menge im Rechner darstellen kann, normalerweise jedoch keine ihrer Mengenrepräsentationen. In Anwendungen wird man sich daher auf die Betrachtung einer endlichen Anzahl von Niveaus beschränken.

Für die Speicherung im Rechner und die Entwicklung effizienter Algorithmen zum Operieren auf Fuzzy-Mengen eignen sich insbesondere die folgenden Unterklassen von  $F_C(\mathbb{R})$ . Werden sie benutzt, so kann man in Satz 2.38 sogar auf die Stetigkeitsvoraussetzung für die Abbildung  $\phi$  verzichten.

**Definition 2.39** Die Fuzzy-Menge  $\mu \in F_N(\mathbb{R})$  gehört genau dann zur Klasse  $F_{D_k}(\mathbb{R})$  mit  $k \in \mathbb{N}$ , wenn

- (a)  $[\mu]_{\beta} = [\mu]_{i/k}$  gilt für alle  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  und  $\beta \in (\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]$ , und
- (b) für alle  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  ist die Menge  $[\mu]_{i/k}$  eine endliche Vereinigung abgeschlossener Intervalle.

**Satz 2.40** Aus  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in [F_{D_k}(\mathbb{R})]^n$  und  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  folgt

$$\forall \alpha \in (0, 1] : [\hat{\phi}(\mu_1, \dots, \mu_n)]_{\alpha} = \phi([\mu_1]_{\alpha}, \dots, [\mu_n]_{\alpha}).$$

B e w e i s :

Eigenschaft (b) aus der Definition 2.39 wird nicht benötigt. Mit (a) finden wir für jedes beliebig vorgewählte  $\alpha \in (0, 1]$  zwei Zahlen  $i_\alpha \in \{1, 2, \dots, k\}$  und  $\varepsilon_\alpha > 0$  mit  $\alpha, \alpha - \varepsilon_\alpha \in (\frac{i_\alpha - 1}{k}, \frac{i_\alpha}{k}]$ .

Sei  $y \in [\hat{\phi}(\mu_1, \dots, \mu_n)]_\alpha$ . Dann gibt es ein Tupel  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  mit  $\phi(\mu_1, \dots, \mu_n) = y$  und  $\min\{\mu_1(x_1), \dots, \mu_n(x_n)\} \geq \alpha - \varepsilon_\alpha$ . Damit ist  $(x_1, \dots, x_n) \in \times_{i=1}^n [\mu_i]_{\alpha - \varepsilon_\alpha}$ ,  $y \in \phi([\mu_1]_{\alpha - \varepsilon_\alpha}, \dots, [\mu_n]_{\alpha - \varepsilon_\alpha})$  und folglich  $[\hat{\phi}(\mu_1, \dots, \mu_n)]_\alpha \subseteq \phi([\mu_1]_{\alpha - \varepsilon_\alpha}, \dots, [\mu_n]_{\alpha - \varepsilon_\alpha})$ .

$\varepsilon_\alpha$  wurde so festgelegt, daß  $[\mu_i]_\alpha = [\mu_i]_{\alpha - \varepsilon_\alpha}$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  erfüllt ist, also auch  $\phi([\mu_1]_{\alpha - \varepsilon_\alpha}, \dots, [\mu_n]_{\alpha - \varepsilon_\alpha}) = \phi([\mu_1]_\alpha, \dots, [\mu_n]_\alpha)$ .

Wir verwenden schließlich Aussage (b) von Satz 2.36 und erhalten mit

$$\begin{aligned} \phi([\mu_1]_{\alpha - \varepsilon_\alpha}, \dots, [\mu_n]_{\alpha - \varepsilon_\alpha}) &= \phi([\mu_1]_\alpha, \dots, [\mu_n]_\alpha) \\ &\subseteq [\hat{\phi}(\mu_1, \dots, \mu_n)]_\alpha \\ &\subseteq \phi([\mu_1]_{\alpha - \varepsilon_\alpha}, \dots, [\mu_n]_{\alpha - \varepsilon_\alpha}) \end{aligned}$$

die zu beweisende Aussage. □

Neben den Fuzzy-Mengen aus  $F_{D_k}(\mathbb{R})$ , für die zum Beispiel im Programmsystem SOLD (Statistics On Linguistic Data, vgl. Abschnitt 2.7) sämtliche arithmetischen Grundoperationen unterstützt und niveauweise ausgeführt werden, ist oft auch die Klasse der Fuzzy-Intervalle vom  $L$ - $R$ -Typ zur Realisierung effizienter Berechnungen nützlich.

**Definition 2.41** *Es seien  $L, R : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  zwei auf ihrem Träger streng monoton fallende Funktionen mit der Eigenschaft  $L(0) = R(0) = 1$ .*

*Eine Fuzzy-Menge  $\mu \in F_I(\mathbb{R})$  heißt **Fuzzy-Intervall vom  $L$ - $R$ -Typ**, wenn  $M_1, M_2, l, r \in \mathbb{R}$  mit  $M_1 \leq M_2$ ,  $l > 0$  und  $r > 0$  existieren, so daß*

$$\mu(x) = \begin{cases} L\left(\frac{M_1 - x}{l}\right), & \text{falls } x \leq M_1 \\ R\left(\frac{x - M_2}{r}\right), & \text{falls } x \geq M_2 \\ 1, & \text{falls } M_1 \leq x \leq M_2 \end{cases}$$

*für alle  $x \in \mathbb{R}$  erfüllt ist.*

**Beispiel 2.42**  $L : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  und  $R : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  seien definiert durch

$$\begin{aligned} L(x) &= \begin{cases} 1 - x, & \text{falls } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\ R(x) &= \begin{cases} 1 - x, & \text{falls } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Zwei Fuzzy-Intervalle  $\mu$  und  $\mu'$  vom  $L$ - $R$ -Typ kann man durch ihre vier Parameter charakterisieren, nämlich

$$\begin{aligned} \mu &\hat{=} (M_1, M_2, l, r), \\ \mu' &\hat{=} (M'_1, M'_2, l', r'). \end{aligned}$$

Die Addition von  $\mu$  und  $\mu'$  ist direkt mit Hilfe der Parameter durchführbar. Man erhält

$$\mu \oplus \mu' \hat{=} (M_1 + M'_1, M_2 + M'_2, l + l', r + r'),$$

d.h.

$$\mu \oplus \mu'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{M_1 + M'_1 - x}{l + l'}, & \text{falls } M_1 + M'_1 - l - l' \leq x \leq M_1 + M'_1 \\ 1 - \frac{x - M_2 - M'_2}{r + r'}, & \text{falls } M_2 + M'_2 \leq x \leq M_2 + M'_2 + r + r' \\ 1, & \text{falls } M_1 + M'_1 \leq x \leq M_2 + M'_2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Produkt und der Quotient von Fuzzy-Intervallen vom  $L$ - $R$ -Typ führen allerdings aus der hier betrachteten  $L$ - $R$ -Klasse heraus.  $\square$

## 2.6 Zur Semantik von Fuzzy-Mengen

Bei der Entwicklung und Analyse neuer Konzepte wird von Mathematikern in der Regel die *axiomatische* Vorgehensweise bevorzugt: Man wählt eine geeignete mathematische Grundstruktur, die dann erweitert und analysiert werden kann. So hat sich in Büchern zur Wahrscheinlichkeitstheorie der Zugang über die Kolmogoroffschen Axiome und ihre formale Einbettung in die Maßtheorie durchgesetzt. Einen ähnlichen Weg haben wir bei der Einführung der klassischen Theorie der Fuzzy-Mengen beschrritten und werden ihn auch bei ihrer Begründung über mehrwertige Logiken wählen.

Die Existenz zahlreicher verschiedener Interpretationen von Wahrscheinlichkeiten sowie die Schwierigkeiten bei der Akquisition insbesondere subjektiver Wahrscheinlichkeiten zeigen jedoch, wie wichtig es ist, auch die *Semantik* der jeweils zu untersuchenden Konzepte deutlich zu machen. In den Arbeiten von de Finetti und Savage [de Finetti74, Savage72] werden Wahrscheinlichkeiten von Konzepten wie Nützlichkeit und Präferenz abgeleitet. Derartige Konzepte geben subjektiven Wahrscheinlichkeiten eine genaue Bedeutung und erlauben dadurch oft eine einfachere Akquisition. Ähnliche semantische Begründungen für Fuzzy-Mengen finden sich in der Literatur noch vergleichsweise wenig. Die am weitesten verbreiteten Anwendungen von Fuzzy-Mengen beziehen sich auf die Modellierung von *Präferenz*, *Unsicherheit* und *Ähnlichkeit*.

So dienen Fuzzy-Mengen beispielsweise der Erweiterung klassischer Constraint-Satisfaction-Probleme, indem sie Angaben zur *Präferenz* der Akzeptierbarkeit einzelner Werte bezüglich der Constraints einbeziehen.

Ein anderes Anwendungsgebiet von Fuzzy-Mengen ist die Repräsentation vager Information über existierende, im Falle vollständiger Information scharf beschreibbarer Zustände, wie sie etwa im Bereich der wissensbasierten Systeme auftreten. Fuzzy-Mengen können dann für Inferenzmechanismen und in ihrer epistemischen Interpretation als Possibilitätsverteilungen auch zur Quantifizierung der durch unvollständige

Informationen induzierten *Unsicherheit* über den entsprechenden Zustand benutzt werden. Auf diese Sicht von Fuzzy-Mengen wird ausführlich in Kapitel 3 eingegangen.

Die dritte Modellierungsdomäne von Fuzzy-Mengen ist auf *Ähnlichkeit* und *Ununterscheidbarkeit* ausgerichtet. Elemente mit dem Zugehörigkeitsgrad 1 werden als prototypisch aufgefaßt, niedrigere Zugehörigkeitsgrade quantifizieren die Ähnlichkeit zu diesen prototypischen Elementen quantifizieren. Eine sehr wichtige Anwendung dieser Sicht ist die Fuzzy-Regelung, die Gegenstand von Kapitel 4 sein wird.

Im folgenden untersuchen wir einführend zwei vielversprechende Ansätze zur Semantik von Fuzzy-Mengen, die wir an späterer Stelle benutzen werden.

Im ersten Ansatz dienen Fuzzy-Mengen zur komprimierten Darstellung impräziser, im allgemeinen widersprüchlicher Informationen über einen unbekanntes, jedoch existierenden Meßwert. Wir verwenden ein Modell, das auf einer Modifikation der Theorie der zufälligen Mengen [Matheron75, Dempster68] basiert.

Im Gegensatz zu dieser epistemischen Interpretation von Fuzzy-Mengen beruht der zweite Ansatz, den wir hier betrachten wollen, auf dem aus der Quantenphysik bekannten Problem, daß die im obigen Beispiel sicherlich sinnvolle Annahme einer exakt existierenden, aber nicht genau meßbaren Größe nicht mit allen in der Natur zu beobachtenden Erscheinungen vereinbar ist. Eine Methode, die zur Beschreibung derartiger Phänomene vorgeschlagen wurde, arbeitet mit Unschärfemengen [Ludwig90], bei denen nicht unterscheidbare Größen zu einer Menge zusammengefaßt werden. Wir verwenden alternativ die Theorie der Gleichheitsrelationen, um zu einer genaueren Modellierung solcher vagen Konzepte zu gelangen.

Man muß Fuzzy-Mengen in beiden Ansätzen als *induzierte* Konzepte ansehen, abgeleitet aus anderen grundlegenden Begriffsbildungen.

### 2.6.1 Interpretation vager Konzepte

Die grundlegende Annahme des im folgenden zu behandelnde Modell ist, daß die Vagheit von Daten auf dem Vorhandensein mengenwertiger Informationen in einem System konkurrierender Betrachtungskontexte beruht.

**Beispiel 2.43** Vier Personen werden befragt, bei welchen Körpergrößen Frauen in Braunschweig als „groß“ bezeichnet werden können. Die durch die Antworten dieser Personen erhaltenen Informationen sollen dazu benutzt werden, den linguistischen Wert „groß“ in einer möglichst komprimierten Form zu repräsentieren. Das Ergebnis der Befragung sei, daß die erste Person alle Frauen mit einer Körpergröße über 160 cm für groß hält, die zweite alle über 165 cm, die dritte alle über 170 cm und die vierte alle über 180 cm, d.h., jede einzelne Person beschreibt das Konzept „groß“ durch eine Menge von Längenangaben aus  $\mathbb{R}$ . □

In diesem Beispiel entsteht Vagheit dadurch, daß konkurrierende, eventuell sogar widersprüchliche Angaben gemacht werden. Ist der Betrachter in der Lage, Präferenzen

zwischen den Befragten anzugeben und sie gegebenenfalls mit Maßzahlen zu bewerten, so kann er eine verfeinerte Analyse durchführen. Verhalten sich die Maßzahlen wie Wahrscheinlichkeiten additiv, so liegt es nahe, den folgenden Begriff der *zufälligen Menge* zu definieren.

**Definition 2.44** *Es sei  $(C, \mathfrak{P}(C), P)$  ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum,  $X$  eine beliebige nicht-leere Referenzmenge und  $\Gamma : C \rightarrow \mathfrak{P}(X)$  eine mengenwertige Abbildung. Das Paar  $(P, \Gamma)$  wird **zufällige Menge** genannt. Die Funktionswerte  $\Gamma(c)$ ,  $c \in C$ , bezeichnet man als die **Fokalmengen** von  $(P, \Gamma)$ .*

D.h., eine zufällige Menge ist gewissermaßen eine mengenwertige Zufallsvariable, deren Wertevorrat durch die Fokalmengen gebildet wird. Jedes Element  $c \in C$  bezeichnen wir als *Kontext*. Es kann sich bei  $c$  wie im obigen Beispiel um eine befragte Person, allgemeiner um für die konkrete Anwendung zu unterscheidende Sicht handeln. Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P : \mathfrak{P}(C) \rightarrow [0, 1]$  wird hier ausschließlich dazu verwendet, Gewichte von Kontexten zu modellieren. Eine frequentistische Interpretation des Maßraumes  $(C, \mathfrak{P}(C), P)$  ist nicht gefordert, insbesondere auch nicht ein zugrunde liegendes Zufallsexperiment mit Ausgängen aus  $C$ . Das Festlegen der Gewichte kann sich aber dennoch an frequentistischen Verfahren orientieren. Für  $c \in C$  enthält  $\Gamma(c)$  genau diejenigen Elemente der Referenzmenge  $X$ , die aus der Sicht des Kontextes  $c$  für möglich gehalten werden.

**Beispiel 2.43 (Fortsetzung)** Jede der vier befragten Personen stellt einen „Kontext“ dar, d.h., wir definieren  $C \stackrel{\text{def}}{=} \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ . Da keine Präferenzen angegeben worden sind, wählen wir  $P(\{c_i\}) = 0.25$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Die Abbildung  $\Gamma : C \rightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{R})$  wird durch  $c_1 \mapsto (160, \infty)$ ,  $c_2 \mapsto (165, \infty)$ ,  $c_3 \mapsto (170, \infty)$  und  $c_4 \mapsto (180, \infty)$  festgelegt.

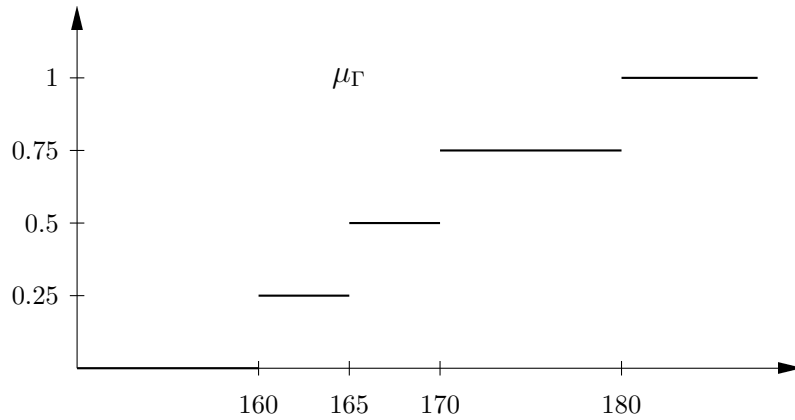
Die Frage, ob eine Frau in Braunschweig mit einer Körpergröße von 168 cm als groß zu bezeichnen sei, ist offenbar in den Kontexten  $c_1$  und  $c_2$  mit „ja,“ in  $c_3$  und  $c_4$  jedoch mit „nein“ zu beantworten. Die zusammenfassende Antwort „In zwei von vier Kontexten ist sie groß“ kann als hinreichend angesehen werden. Diese Informationskompression läßt sich für jede einzelne Längenangabe durchführen, indem man jedem Wert  $x \in \mathbb{R}$  das Gewicht

$$\frac{|\{c \in C \mid x \in \Gamma(c)\}|}{|C|} = \sum_{c \in C: x \in \Gamma(c)} P(\{c\})$$

der ihn bestätigenden Kontexte zuordnet und in Form eines verallgemeinerten Histogramms notiert (siehe Abbildung 2.13).

Formal entsteht eine Fuzzy-Menge  $\mu_\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , jedoch hat  $\mu_\Gamma$  eine fest vorgegebene Bedeutung. □

Im allgemeinen kann man für jede zufällige Menge  $(P, \Gamma)$  auf analoge Weise eine derartige komprimierte Darstellung finden. Sie wird auch *Konturfunktion von  $\Gamma$*  genannt.

Abbildung 2.13: Durch die zufällige Menge  $(P, \Gamma)$  induzierte Fuzzy-Menge

**Definition 2.45** Ist  $(P, \Gamma)$  mit  $\Gamma : C \rightarrow \mathfrak{P}(X)$  eine zufällige Menge, so heißt

$$\begin{aligned} \mu_\Gamma : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1], \\ x &\mapsto P(\{c \in C \mid x \in \Gamma(c)\}) \end{aligned}$$

die **Konturfunktion von  $\Gamma$** .

Man beachte, daß in diesem Ansatz *nicht* angenommen wird, daß die Mengen  $\Gamma(c)$  geschachtelt sind, d.h. daß für alle  $c, c' \in C$  entweder  $\Gamma(c) \subseteq \Gamma(c')$  oder  $\Gamma(c') \subseteq \Gamma(c)$  gilt.

Interpretiert man eine Fuzzy-Menge als Konturfunktion gibt es natürlich eine Vielzahl von Akquisitionsmethoden, die auf statistischen Verfahren beruhen. Ein entscheidender Vorteil dieser Interpretation ist darin zu sehen, daß sie die Verwendung einiger in der Praxis für den Durchschnitt und die Vereinigung benutzten  $t$ -Normen bzw.  $t$ -Conormen zu begründen vermag:

Es seien  $(P, \Gamma_1)$  und  $(P, \Gamma_2)$  zwei zufällige Mengen bezüglich des gemeinsamen endlichen Kontextmaßraumes  $(C, \mathfrak{P}(C), P)$ . Die kanonische Erweiterung der Operationen Schnitt, Vereinigung und Komplement auf zufällige Mengen erhält man dadurch, daß man die mengenwertigen Funktionswerte  $\Gamma_1(c)$ ,  $\Gamma_2(c)$  für jeden Kontext  $c \in C$  unter Anwendung der entsprechenden mengentheoretischen Operationen verknüpft.

**Definition 2.46** Es seien  $(P, \Gamma_1)$  und  $(P, \Gamma_2)$  mit  $\Gamma_1, \Gamma_2 : C \rightarrow \mathfrak{P}(X)$  zufällige Mengen.

$$\begin{aligned} (a) \quad & (P, \Gamma_1) \cap (P, \Gamma_2) \stackrel{\text{def}}{=} (P, \Gamma_1 \cap \Gamma_2), \\ & \Gamma_1 \cap \Gamma_2 : C \rightarrow \mathfrak{P}(X), \quad c \mapsto \Gamma_1(c) \cap \Gamma_2(c) \quad (\text{Durchschnitt}), \\ (b) \quad & (P, \Gamma_1) \cup (P, \Gamma_2) \stackrel{\text{def}}{=} (P, \Gamma_1 \cup \Gamma_2), \\ & \Gamma_1 \cup \Gamma_2 : C \rightarrow \mathfrak{P}(X), \quad c \mapsto \Gamma_1(c) \cup \Gamma_2(c) \quad (\text{Vereinigung}), \\ (c) \quad & \overline{(P, \Gamma_1)} \stackrel{\text{def}}{=} (P, \overline{\Gamma_1}), \\ & \overline{\Gamma_1} : C \rightarrow \mathfrak{P}(X), \quad c \mapsto \overline{\Gamma_1(c)} \quad (\text{Komplement}). \end{aligned}$$

**Satz 2.47** *Bezüglich der von den in Definition 2.46 angegebenen zufälligen Mengen induzierten Konturfunktionen gelten für alle  $x \in X$  die folgenden Beziehungen:*

$$(a) \max \{0, \mu_{\Gamma_1}(x) + \mu_{\Gamma_2}(x) - 1\} \leq \mu_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2}(x) \leq \min \{\mu_{\Gamma_1}(x), \mu_{\Gamma_2}(x)\},$$

$$(b) \max \{\mu_{\Gamma_1}(x), \mu_{\Gamma_2}(x)\} \leq \mu_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}(x) \leq \min \{1, \mu_{\Gamma_1}(x) + \mu_{\Gamma_2}(x)\},$$

$$(c) \mu_{\overline{\Gamma_1}}(x) = 1 - \mu_{\Gamma_1}(x).$$

B e w e i s :

$$\begin{aligned} (a) \max \{0, \mu_{\Gamma_1}(x) + \mu_{\Gamma_2}(x) - 1\} &= \max \{0, 1 - ((1 - \mu_{\Gamma_1}(x)) + (1 - \mu_{\Gamma_2}(x)))\} \\ &\leq 1 - P(\{c \in C \mid x \notin \Gamma_1(c) \vee x \notin \Gamma_2(c)\}) \\ &= P(\{c \in C \mid x \in \Gamma_1(c) \wedge x \in \Gamma_2(c)\}) \\ &= P(\{c \in C \mid x \in (\Gamma_1 \cap \Gamma_2)(c)\}) \\ &= \mu_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2}(x) \\ &\leq \min \{P(\{c \in C \mid x \in \Gamma_1(c)\}), P(\{c \in C \mid x \in \Gamma_2(c)\})\} \\ &= \min \{\mu_{\Gamma_1}(x), \mu_{\Gamma_2}(x)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \max \{\mu_{\Gamma_1}(x), \mu_{\Gamma_2}(x)\} &= \max \{P(\{c \in C \mid x \in \Gamma_1(c)\}), P(\{c \in C \mid x \in \Gamma_2(c)\})\} \\ &\leq \mu_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}(x) \\ &= P(\{c \in C \mid x \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)(c)\}) \\ &= P(\{c \in C \mid x \in \Gamma_1(c) \vee x \in \Gamma_2(c)\}) \\ &\leq \min \{P(\{c \in C \mid x \in \Gamma_1(c)\}) + P(\{c \in C \mid x \in \Gamma_2(c)\}), 1\} \\ &= \min \{\mu_{\Gamma_1}(x) + \mu_{\Gamma_2}(x), 1\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) \mu_{\overline{\Gamma_1}}(x) &= P(\{c \in C \mid x \in \overline{\Gamma_1}(c)\}) \\ &= 1 - P(\{c \in C \mid x \in \Gamma_1(c)\}) \\ &= 1 - \mu_{\Gamma_1}(x). \end{aligned}$$

□

Interpretiert man Fuzzy-Mengen als Konturfunktionen, so sagt der vorhergehende Satz aus, daß man nur auf der Grundlage der Zugehörigkeitsfunktion nicht zu einer eindeutigen Festlegung von Durchschnitt bzw. Vereinigung kommt, sondern aus einer Menge von Möglichkeiten wählen kann, die den Einschränkungen von Satz 2.47 unterliegen. Um trotzdem zu einer begründeten eindeutigen Verknüpfungsfunktion für Fuzzy-Mengen zu gelangen, sind zumindest „qualitative“ Informationen über die Belegung (die Fokalmengen) der Kontexte erforderlich. So läßt sich Beispiel 2.20 aus Abschnitt 2.3 leicht im Rahmen des angesprochenen Kontextmodells deuten.

## 2.6.2 Interpretation vager Umgebungen

Im Gegensatz zum Kontextmodell gehen wir im zweiten hier zu untersuchenden Ansatz davon aus, daß Vagheit durch die Nicht-Unterscheidbarkeit gewisser Objekte bezüglich einer vorgegebenen Betrachtungsumgebung begründet ist. Um zu einer angemessenen Formalisierung zu gelangen, beginnen wir mit der axiomatischen Einführung des in diesem Zusammenhang wichtigen Gleichheitsbegriffs.

**Definition 2.48** *Es sei  $\top$  eine  $t$ -Norm. Eine Abbildung  $E : X \times X \rightarrow [0, 1]$  heißt **Gleichheitsrelation bezüglich  $\top$** , wenn sie die Eigenschaften*

- (a)  $E(x, x) = 1$  (Reflexivität),
- (b)  $E(x, x') = E(x', x)$  (Symmetrie),
- (c)  $\top(E(x, x'), E(x', x'')) \leq E(x, x'')$  (Transitivität),

besitzt.

Der Wert  $E(x, x')$  wird als der Akzeptanzgrad interpretiert, mit dem  $x$  und  $x'$  als gleich bzw. nicht unterscheidbar angesehen werden.

Das einfachste Beispiel für eine Gleichheitsrelation ist die gewöhnlichen Gleichheit auf  $X$ , nämlich

$$E(x, x') = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = x' \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die beiden folgenden Beispiele motivieren die Verwendung von Gleichheitsrelationen bezüglich der  $t$ -Normen  $\top_{\min}$  und  $\top_{\text{Luka}}$ .

**Beispiel 2.49** Es sei  $X$  eine Menge von Objekten, die durch Milchglasscheiben betrachtet werden. Die Scheiben haben verschiedene Dicken, denen Maßzahlen zwischen 0 und 1 zugeordnet sind (zu dieser Interpretation von vagen Daten siehe auch [Kruse91a]). Seien  $x, y \in X$  zwei Objekte. Wir betrachten zunächst das isolierte Objekt  $x$  durch eine Milchglasscheibe der Dicke  $\alpha$ . Danach betrachten wir das isolierte Objekt  $y$  durch eine Scheibe gleicher Dicke. Wenn wir nun nicht entscheiden können, ob wir zwei verschiedene Objekte  $x$  und  $y$  oder aber zweimal dasselbe Objekt  $x$  betrachtet haben, sagen wir, daß  $x$  und  $y$   $\alpha$ -identisch sind ( $\alpha \in [0, 1]$ ). Wir definieren

$$E(x, y) = \sup\{1 - \alpha \mid x \text{ und } y \text{ sind } \alpha\text{-identisch}\},$$

wobei  $\sup \emptyset = 0$ . Offensichtlich gilt  $E(x, x) = 1$  und  $E(x, y) = E(y, x)$ . Seien nun  $x$  und  $y$   $\alpha$ -identisch und seien  $y$  und  $z$   $\beta$ -identisch. Außerdem sei  $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$ . Da  $\gamma \geq \alpha$  gilt, sind  $x$  und  $y$   $\gamma$ -identisch. Das gleiche Argument kann auf  $y$  und  $z$  angewendet werden. Das bedeutet, daß, wenn wir  $x$ ,  $y$ , und  $z$  durch eine Milchglasscheibe der Dicke  $\gamma$  betrachten, wir weder  $x$  von  $y$  noch  $y$  von  $z$  unterscheiden können, woraus folgt,



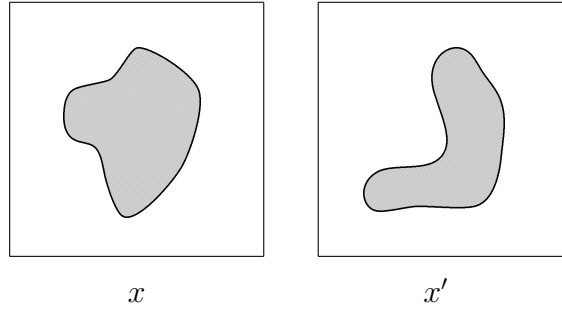


Abbildung 2.14: Zwei Schwarz-Weiß-Bilder

daß wir auch  $x$  nicht von  $z$  unterscheiden können. Mit anderen Worten,  $x$  und  $z$  sind  $\gamma$ -identisch. Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned}
 E(x, z) &= \sup\{1 - \gamma \mid x \text{ und } z \text{ sind } \gamma\text{-identisch}\} \\
 &\geq \sup\{1 - \gamma \mid x \text{ und } y \text{ sind } \gamma\text{-identisch und} \\
 &\quad y \text{ und } z \text{ sind } \gamma\text{-identisch}\} \\
 &\geq \sup\{1 - \max\{\alpha, \beta\} \mid x \text{ und } y \text{ sind } \alpha\text{-identisch und} \\
 &\quad y \text{ und } z \text{ sind } \beta\text{-identisch}\} \\
 &= \sup\{\min\{1 - \alpha, 1 - \beta\} \mid x \text{ und } y \text{ sind } \alpha\text{-identisch und} \\
 &\quad y \text{ und } z \text{ sind } \beta\text{-identisch}\} \\
 &= \min\{E(x, y), E(y, z)\}
 \end{aligned}$$

Das heißt,  $E$  ist eine Gleichheitsrelation bezüglich der  $t$ -norm  $\top_{\min}$ .  $\square$

**Beispiel 2.50** Es sei  $X$  eine Menge von Schwarz-Weiß-Bildern auf Quadraten mit der Seitenlänge 1 (wie z.B. in Abbildung 2.14).

Wir setzen voraus, daß für jedes Bild  $x$  die Menge  $S(x) \subseteq [0, 1]^2$  der schwarz gefärbten Punkte eine (Borel-)meßbare Teilmenge des Einheitsquadrates ist. Wir definieren

$$\begin{aligned}
 E_2(x, x') &= m \left[ \{(s, t) \in [0, 1]^2 \mid (s, t) \in (S(x) \cap S(x')) \right. \\
 &\quad \left. \cup ([0, 1]^2 - (S(x) \cup S(x')))\} \right],
 \end{aligned}$$

wobei  $m$  das Borel-Maß auf dem Einheitsquadrat ist.

Der Akzeptanzgrad  $E_2(x, x')$  für die Gleichheit zweier Bilder  $x$  und  $x'$  sei das Maß der Menge der Punkte, auf denen die beiden Bilder übereinstimmen.

Offenbar gilt wieder  $E_2(x, x) = 1$  und  $E_2(x, x') = E_2(x', x)$ . Außerdem erfüllt  $E_2$  die Ungleichung

$$E_2(x, x') + E_2(x', x'') - 1 \leq E_2(x, x''),$$

so daß  $E_2$  eine Gleichheitsrelation bezüglich der  $t$ -Norm  $\top_{\text{Luka}}$  ist.  $\square$

**Beispiel 2.51** In der Physik und in den Ingenieurwissenschaften stellt sich häufig das Problem, Meßfehler in die Modellierung einzubeziehen. Der einfachste Ansatz besteht darin, statt des Meßwertes  $x_0$  das Intervall  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$  anzugeben. Dabei ist  $\varepsilon > 0$  eine Schranke, die festlegt, wie hoch der Meßfehler maximal sein kann. Bei einer fest vorgegebenen (Meß-)Fehlerschranke  $\varepsilon$  kann der wahre Wert  $x_0^{(wahr)}$  bei gemessenem Wert  $x_0$  jeder Wert aus dem Intervall  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$  sein. Man identifiziert also alle Werte dieses Intervalls. Wir betrachten daher die Relation

$$R_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| \leq \varepsilon\}. \quad (2.28)$$

Im Falle der Messung  $x_0$  gilt dann für den wahren Wert  $x_0^{(wahr)}$ , daß  $(x_0, x_0^{(wahr)}) \in R_\varepsilon$  erfüllt ist.  $R_\varepsilon$  ist eine reflexive und symmetrische Relation.  $R_\varepsilon$  ist *nicht* transitiv. Wäre  $R_\varepsilon$  transitiv, läge es nahe, anstelle von  $\mathbb{R}$  die Quotientenmenge  $\mathbb{R}/R_\varepsilon$  zu betrachten, in der aufgrund des Meßfehlers nicht unterscheidbare Werte identifiziert werden. Die Nicht-Transitivität der Relation  $R_\varepsilon$  bedeutet: Obwohl  $a$  und  $b$  beziehungsweise  $b$  und  $c$  aufgrund der Meßungenauigkeit nicht unterscheidbar sind, also  $|a - b| \leq \varepsilon$  und  $|b - c| \leq \varepsilon$  gilt, kann  $a$  von  $c$  unterschieden werden, d.h.  $|a - c| > \varepsilon$ . Dieses Phänomen, das der Situation „ $a = b$ ,“ „ $b = c$ ,“ aber „ $a \neq c$ “ entspricht, wird *Poincaré-Paradoxon* genannt [Poincaré02, Poincaré04].

Wir betrachten nun für jede Meßfehlerschranke  $\varepsilon \in [0, 1]$  die Relation  $R_\varepsilon$  und definieren die Abbildung

$$\begin{aligned} E : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1], \\ (x, y) &\mapsto 1 - \inf\{\varepsilon \in [0, 1] \mid (x, y) \in R_\varepsilon\} \end{aligned} \quad (2.29)$$

mit  $\inf \emptyset \stackrel{\text{def}}{=} 1$ .

Offenbar ist  $E$  eine Gleichheitsrelation bezüglich der  $t$ -Norm  $\top_{\text{Luka}}$ , und es gilt für alle  $\varepsilon \in [0, 1]$ :

$$(x, y) \in R_\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad E(x, y) \geq 1 - \varepsilon.$$

Außerdem folgt  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] = \{x \in \mathbb{R} \mid E(x_0, x) \geq 1 - \varepsilon\}$ . In diesem Sinne beschreibt eine Gleichheitsrelation, welche Identifikationen wir vorzunehmen haben, wenn wir mit der Meßfehlerschranke  $\varepsilon \in [0, 1]$  messen. Ist eine Gleichheitsrelation  $E$  auf  $X$  gegeben und betrachten wir den Punkt  $x_0 \in X$ , entspricht die Menge  $\{x \in X \mid E(x_0, x) \geq 1 - \varepsilon\}$  der Menge der Punkte, die bei der Meßfehlerschranke  $\varepsilon$  von  $x_0$  nicht zu unterscheiden sind. Entsprechend enthält die Menge

$$R_\varepsilon^{(E)} = \{(x, y) \in X \times X \mid E(x, y) \geq 1 - \varepsilon\} \quad (2.30)$$

alle Paare  $(x, y)$ , die bei der Meßfehlerschranke  $\varepsilon$  nicht unterscheidbar sind.  $\square$

**Beispiel 2.52** In Beispiel 2.51 haben wir die Gleichheitsrelation untersucht, die durch die Standardmetrik auf  $\mathbb{R}$  induziert wird. Diese Metrik ist nicht immer angemessen, da sie keine Skalierungsfaktoren berücksichtigt. Wenn wir zum Beispiel berechnen wollen, zu welchem Grad das Alter zweier Personen gleich ist, so hängt das Ergebnis davon

ab, welche Einheit (Jahre, Monate, Tage, usw.) wir zur Messung des Alters benutzen. Um diesen Nachteil auszugleichen, führen wir einen Skalierungsfaktor  $c \geq 0$  ein und definieren die Gleichheitsrelation  $E^{(c)}$ :

$$E^{(c)}(x, x') = 1 - \min\{|c \cdot x - c \cdot x'|, 1\}. \quad (2.31)$$

Abhängig von der verwendeten Maßeinheit wählen wir dann einen passenden Skalierungsfaktor  $c$ .  $\square$

**Beispiel 2.53** In einigen Anwendungen ist es sinnvoll, die Idee eines Skalierungsfaktors, wie sie in Beispiel 2.52 vorgestellt wurde, zu modifizieren. Nehmen wir an, wir betrachten Werte aus dem reellen Intervall  $[a, b]$  (als Grundlage für unsere vage Umgebung). Anstelle eines einzigen Skalierungsfaktors für alle Werte kann man auch je nach Bereich verschiedene Skalierungsfaktoren angeben.

Eine vage Umgebung, induziert durch ein Meßinstrument, das im Bereich  $[-1, 1] \subseteq [a, b]$  mit hoher und außerhalb dieses Bereiches mit geringer Genauigkeit arbeitet, kann beschrieben werden, indem man etwa den Skalierungsfaktor 3 im Bereich  $[-1, 1]$  und den Skalierungsfaktor 0.5 außerhalb wählt. Dadurch vergrößern wir das Intervall  $[-1, 1]$  um den Faktor 3 und verkleinern die Intervalle  $[-1, a]$  und  $[1, b]$  um den Faktor 2 (d.h. wir „vergrößern“ sie um den Faktor 0.5). Wir illustrieren dieses Verfahren durch ein Beispiel: Sei  $a = -3$  und  $b = 5$ . Um den Abstand zwischen zwei Elementen  $x, x' \in [-3, 5]$ , zu „messen,“ bilden wir das Intervall  $[-3, 5]$  (stückweise linear) auf das Intervall  $[0, 9]$  ab, wobei  $[-3, -1]$ ,  $[-1, 1]$ ,  $[1, 5]$  linear abgebildet werden auf  $[0, 1]$ ,  $[1, 7]$  bzw.  $[7, 9]$ . Diese stückweise lineare Transformation ist durch die Abbildung

$$f : [-3, 5] \rightarrow [0, 9],$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0.5 \cdot (x + 3), & \text{falls } -3 \leq x \leq -1 \\ 3 \cdot (x + 1) + 1, & \text{falls } -1 \leq x \leq 1 \\ 0.5 \cdot (x - 1) + 7, & \text{falls } 1 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

gegeben. Die Gleichheitsrelation auf  $[-3, 5]$ , die durch diese Transformation induziert wird, ist definiert durch

$$E : [-3, 5] \times [-3, 5] \rightarrow [0, 1],$$

$$(x, x') \mapsto 1 - \min\{|f(x) - f(x')|, 1\}.$$

Diese Gleichheitsrelation modelliert die vage Umgebung, die durch das Meßinstrument, das im Bereich  $[-3, 5]$  nicht überall mit der gleichen Genauigkeit mißt, induziert wird. Die Gleichheitsrelation spiegelt somit Ununterscheidbarkeit wieder.

Folglich ist es sinnvoll, Gleichheitsrelationen zur Repräsentation von Ähnlichkeit einzusetzen. Wenn wir z.B. die Raumtemperatur regeln wollen, können wir ein Thermometer mit einer gewissen Meßgenauigkeit für Temperaturen zwischen  $0^\circ \text{C}$  und  $35^\circ \text{C}$  verwenden. Aber für unsere Zwecke sind wir auf den genauen Wert für eine Temperatur unter  $15^\circ \text{C}$  oder über  $27^\circ \text{C}$  nicht angewiesen, da wir diese Temperaturen als viel zu kalt

oder viel zu warm ansehen, so daß wir den Raum so stark wie möglich heizen bzw. kühlen müssen. Temperaturen zwischen  $15^\circ\text{C}$  und  $19^\circ\text{C}$  oder zwischen  $23^\circ\text{C}$  und  $27^\circ\text{C}$  werden zwar auch als zu kalt oder zu warm angesehen, aber es sollte maßvoll geheizt oder gekühlt werden. Für Temperaturen zwischen  $19^\circ\text{C}$  und  $23^\circ\text{C}$  sind wir dagegen an genaueren Meßwerten interessiert, da diese Temperaturen nahe am optimalen Wert liegen und eine Anpassung daher sehr vorsichtig erfolgen muß. Diese vage Umgebung können wir durch die Transformation

$$f : [0, 35] \rightarrow [0, 8],$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leq x \leq 15 \\ 0.25 \cdot (x - 15), & \text{falls } 15 \leq x \leq 19 \\ 1.5 \cdot (x - 19) + 1, & \text{falls } 19 \leq x \leq 23 \\ 0.25 \cdot (x - 23) + 7, & \text{falls } 23 \leq x \leq 27 \\ 8, & \text{falls } 27 \leq x \leq 35, \end{cases}$$

beschreiben, die zu der Gleichheitsrelation  $E(x, x') = 1 - \min\{|f(x) - f(x')|, 1\}$  führt.  $\square$

**Beispiel 2.54** In Beispiel 2.53 haben wir vage Umgebungen untersucht, in denen wir verschiedenen Intervallen Faktoren  $c \geq 0$  zuordneten. Ein Skalierungsfaktor  $c > 1$  für ein Intervall bedeutet, daß wir dieses Intervall „durch ein Vergrößerungsglas betrachten“ und daher ist die Ununterscheidbarkeit oder Ähnlichkeit der Werte aus diesem Intervall gering. Im Gegensatz dazu bedeutet ein Skalierungsfaktor  $c < 1$ , daß die Werte dieses Intervalls von großer Ähnlichkeit oder Ununterscheidbarkeit sind. Wir betrachten nun einen allgemeineren Ansatz, in dem wir jedem Element unserer vagen Umgebung einen eigenen Skalierungsfaktor zuordnen, der die Vergrößerung angibt, mit der wir die Nachbarschaft dieses Elementes betrachten. Wenn das Intervall  $[a, b]$  die zugrundeliegende Menge unserer vagen Umgebung ist, können wir diese Idee durch eine Abbildung  $c : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  realisieren. Unter der Voraussetzung, daß die Abbildung  $c$  integrierbar ist, ist die zugehörige Transformation durch

$$f : [a, b] \rightarrow [0, \infty),$$

$$x \mapsto \int_a^x c(t) dt.$$

gegeben. Wieder erhalten wir die Gleichheitsrelation, die unsere vage Umgebung beschreibt, durch

$$E : [a, b] \times [a, b] \rightarrow [0, 1],$$

$$(x, x') \mapsto 1 - \min\{|f(x) - f(x')|, 1\}$$

$$= 1 - \min\left\{\left|\int_x^{x'} c(x) dx\right|, 1\right\}. \quad \square$$

Die Ununterscheidbarkeit, die durch Gleichheitsrelationen induziert wird, sollte bei mathematischen Konzepten in dem Sinne berücksichtigt werden, daß Elemente mit

hohem Gleichheitsgrad zu ähnlichen Resultaten führen bzw. sich ähnlich verhalten. Diese Extensionalitätsforderung erläutern wir im folgenden anhand der Relation  $\in$  („ist Element von“) und dem Begriff der Abbildung.

**Definition 2.55** Es sei  $E$  eine Gleichheitsrelation auf  $X$  bezüglich der  $t$ -Norm  $\top$ . Eine Fuzzy-Menge  $\mu$  von  $X$ , die die Bedingung

$$\top(\mu(x), E(x, y)) \leq \mu(y) \quad (\text{Extensionalität})$$

erfüllt, heißt **extensional**.

Extensional sind nur solche Fuzzy-Mengen von  $X$ , die die Gleichheitsrelation in dem Sinne respektieren, daß zwei gemäß der Gleichheitsrelation ähnliche Objekte nicht erheblich voneinander abweichende Zugehörigkeitsgrade in bezug auf die Elemente von  $X$  haben dürfen.

Besonders einfache extensionale Fuzzy-Mengen sind die sogenannten *Singletons*  $\mu_{x_0}$  mit fest gewähltem  $x_0 \in X$  und

$$\mu_{x_0}(x) \stackrel{\text{def}}{=} E(x, x_0), \quad x \in X.$$

Die Fuzzy-Menge  $\mu_{x_0}$  ist die kleinste extensionale Fuzzy-Menge, für die  $\mu_{x_0}(x_0) = 1$  gilt, falls  $\top$  stetig ist.

**Beispiel 2.56** Es sei  $X = \mathbb{R}$ ,  $\delta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto |x - y|$  die Standardmetrik auf  $\mathbb{R}$  sowie  $E_\delta$  die von  $\delta$  bezüglich der  $t$ -Norm  $\top_{\text{Luka}}$  induzierte Gleichheitsrelation:

$$E_\delta(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \min\{\delta(x, y), 1\}.$$

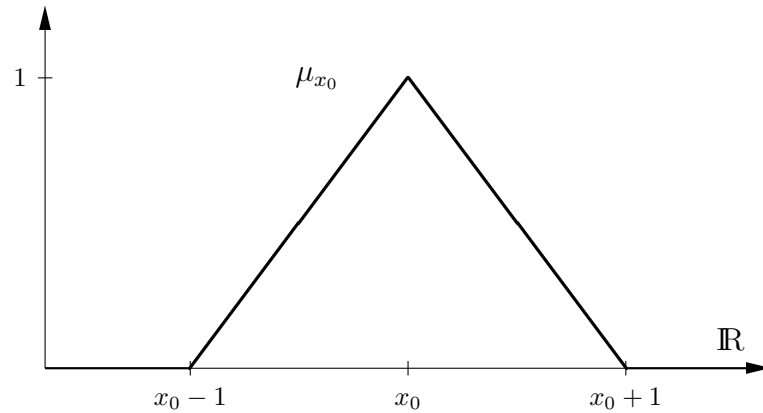
In diesem Fall besitzt das Singleton  $\mu_{x_0}$  die Zugehörigkeitsfunktion

$$\mu_{x_0}(x) = 1 - \min\{|x_0 - x|, 1\},$$

ist also die in Abbildung 2.15 angegebene Dreiecksfunktion.

Wenn wir eine Fuzzy-Menge als Singleton sehen und wenn wir annehmen, daß die zugehörige Gleichheitsrelation durch eine Skalierungsfunktion wie in Beispiel 2.54 induziert wird, dann erhalten wir folgende Interpretation von Zugehörigkeitsgraden: Die erste Ableitung einer Fuzzy-Menge im Punkt  $x$  bestimmt den Skalierungsfaktor oder die Unterscheidbarkeit in der Nachbarschaft von  $x$ .  $\square$

Nicht nur einzelne Elemente von  $X$  induzieren bezüglich einer Gleichheitsrelation Fuzzy-Mengen in Form von Singletons. Zu jeder Teilmenge von  $X$  kann die kleinste extensionale Fuzzy-Menge assoziiert werden.

Abbildung 2.15: Das von  $x_0$  induzierte Singleton

**Definition 2.57** Es sei  $E$  eine Gleichheitsrelation auf  $X$  bezüglich der stetigen  $t$ -Norm  $\top$ . Die **extensionale Hülle** der Menge  $M \subseteq X$  ist die Fuzzy-Menge

$$\mu_M : X \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto \sup\{E(x, x') \mid x' \in M\}.$$

$\mu_M$  ist die kleinste extensionale Fuzzy-Menge, für die  $\forall x \in M : \mu_M(x) = 1$  gilt. Definition 2.57 beschreibt, wie Fuzzy-Mengen aus gewöhnlichen Mengen entstehen können. Ist die Menge  $X$  mit einer Gleichheitsrelation versehen, die die Ununterscheidbarkeit von Elementen von  $X$  etwa im Sinne der Beispiele 2.49 oder 2.50 darstellt, läßt sich eine scharfe Menge aufgrund dieser Ununterscheidbarkeit nur als Fuzzy-Menge beobachten.

**Beispiel 2.58** Wir gehen von derselben Gleichheitsrelation auf  $\mathbb{R}$  aus wie im Beispiel 2.56. Es sei  $M = [a, b]$  ein Intervall. Die extensionale Hülle von  $M$  ist durch eine Trapezfunktion gegeben (siehe Abbildung 2.16).

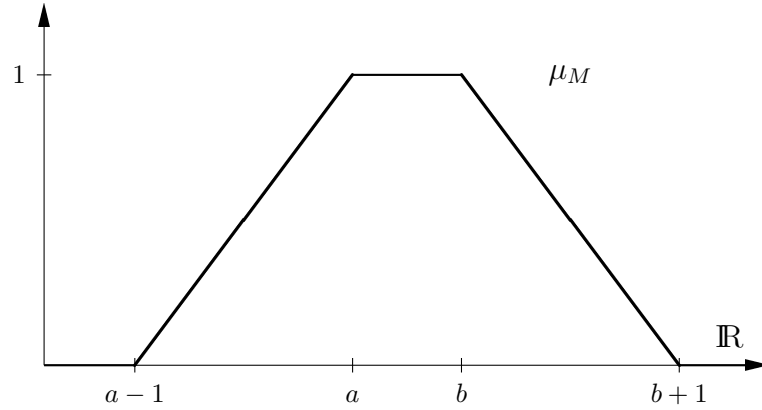
$$\mu_M(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a \leq x \leq b \\ x - a + 1, & \text{falls } a - 1 \leq x \leq a \\ b - x + 1, & \text{falls } b \leq x \leq b + 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad \square$$

Durch die Betrachtung von extensionalen Fuzzy-Mengen berücksichtigt man die durch eine Gleichheitsrelation induzierte Ununterscheidbarkeit von Objekten. Auch Abbildungen zwischen Mengen, auf denen Gleichheitsrelationen vorgegeben sind, sollten diese Gleichheitsrelationen respektieren.

**Definition 2.59** Es seien  $E$  und  $F$  Gleichheitsrelationen auf den Mengen  $X$  bzw.  $Y$ . Eine Abbildung  $\phi : X \rightarrow Y$  heißt **extensional** bezüglich  $E$  und  $F$ , wenn die Bedingung

$$E(x, x') \leq F(\phi(x), \phi(x'))$$

erfüllt ist.

Abbildung 2.16: Die extensionale Hülle des Intervalls  $[a, b]$ 

Die Extensionalität einer Abbildung  $\phi$  bedeutet, daß der Gleichheitsgrad der Bilder zweier Elemente unter  $\phi$  mindestens so groß ist wie der Gleichheitsgrad der Elemente selbst. Daraus folgt, daß die Bilder zweier Elemente nicht besser unterschieden werden können als die Originale.

**Beispiel 2.60** Wir interpretieren die Gleichheitsrelationen im Sinne des Beispiels 2.51 und wollen untersuchen, was die Extensionalität einer Abbildung  $\phi : X \rightarrow Y$  bedeutet. Auf  $X$  und  $Y$  seien die Gleichheitsrelationen  $E$  bzw.  $F$  gegeben.

$$\begin{aligned}
\phi \text{ ist extensional} &\iff \forall x, x' \in X : E(x, x') \leq F(\phi(x), \phi(x')) \\
&\iff \forall x, x' \in X, \forall \varepsilon \in [0, 1] : \\
&\quad (E(x, x') \geq 1 - \varepsilon \implies F(\phi(x), \phi(x')) \geq 1 - \varepsilon) \\
&\iff \forall x, x' \in X, \forall \varepsilon \in [0, 1] : \\
&\quad ((x, x') \in R_\varepsilon^{(E)} \implies (\phi(x), \phi(x')) \in R_\varepsilon^{(F)}) \\
&\iff \forall \varepsilon \in [0, 1] : (\phi \times \phi)(R_\varepsilon^{(E)}) \subseteq R_\varepsilon^{(F)}.
\end{aligned}$$

Die Extensionalität von  $\phi$  besagt also, daß  $\phi$  Meßfehlerschranken-erhaltend ist, d.h., sind  $x$  und  $x'$  in  $X$  bei einer Meßfehlerschranke von  $\varepsilon$  nicht unterscheidbar, sind auch  $\phi(x)$  und  $\phi(x')$  in  $Y$  bei derselben Meßfehlerschranke nicht unterscheidbar.  $\square$

Betrachten wir das kartesische Produkt  $X \times Y$  zweier Mengen  $X$  und  $Y$ , auf denen die Gleichheitsrelationen  $E$  und  $F$  gegeben sind, stellt sich die Frage nach einer Gleichheitsrelation auf der Menge  $X \times Y$ . Der folgende Satz zeichnet eine bestimmte Gleichheitsrelation als kanonisch aus.

**Satz 2.61** *Es seien  $E_1, E_2, \dots, E_n$  Gleichheitsrelationen bezüglich der  $t$ -Norm  $\top$  auf den Mengen  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Wir definieren*

$$\begin{aligned}
E : (X_1 \times \dots \times X_n)^2 &\rightarrow [0, 1], \\
((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) &\mapsto \min\{E_1(x_1, y_1), \dots, E_n(x_n, y_n)\}.
\end{aligned}$$

*Dann gilt:*



- (a)  $E$  ist eine Gleichheitsrelation bezüglich der  $t$ -Norm  $\top$  auf der Menge  $X_1 \times \dots \times X_n$ .
- (b) Für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  ist die Projektion  $\pi_i : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow X_i$ ,  
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$  extensional bezüglich  $E$  und  $E_i$ .
- (c) Ist  $E'$  eine Gleichheitsrelation bezüglich  $\top$  auf  $X_1 \times \dots \times X_n$ , so daß alle Projektionen  $\pi_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) extensional sind, so folgt  $E' \leq E$ .

B e w e i s :

- (a) Offenbar erfüllt  $E$  die Bedingungen (a) und (b) aus Definition 2.48. Für die Bedingung (c) benötigen wir die Monotonie von  $\top$ :

$$\begin{aligned}
& \top(E((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)), E((y_1, \dots, y_n), (z_1, \dots, z_n))) \\
&= \top(\min_{i=1, \dots, n} \{E_i(x_i, y_i)\}, \min_{i=1, \dots, n} \{E_i(y_i, z_i)\}) \\
&\leq \min_{i=1, \dots, n} \{\top(E_i(x_i, y_i), E_i(y_i, z_i))\} \\
&\leq \min_{i=1, \dots, n} \{E_i(x_i, z_i)\} \\
&= E((x_1, \dots, x_n), (z_1, \dots, z_n)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(b) } E((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) &= \min_{j=1, \dots, n} \{E_j(x_j, y_j)\} \\
&\leq E_i(x_i, y_i) \\
&= E_i(\pi_i(x_1, \dots, x_n), \pi_i(y_1, \dots, y_n)).
\end{aligned}$$

- (c) Wegen der Extensionalität der Projektion  $\pi_i$  bezüglich  $E'$  und  $E_i$  folgt für alle  $i = 1, \dots, n$

$$E'((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \leq E_i(x_i, y_i)$$

und daher

$$\begin{aligned}
E'((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) &\leq \min_{i=1, \dots, n} \{E_i(x_i, y_i)\} \\
&= E((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)). \quad \square
\end{aligned}$$

Satz 2.61 zeigt, daß  $E$  die größte Gleichheitsrelation auf  $X_1 \times \dots \times X_n$  ist, bei der alle Projektionen extensional sind.

Die besprochenen Grundlagen der Gleichheitsrelationen werden in Abschnitt 4.4 im Bereich der Fuzzy-Regelung angewandt. Es muß betont werden, daß besonders in Anwendungen, in denen reelle Zahlen als Meßwerte auftreten, Gleichheitsrelationen bezüglich der  $t$ -Norm  $\top_{\text{Luka}}$  die zentrale Rolle spielen, da sie gut geeignet sind, um Ungenauigkeiten oder Ununterscheidbarkeiten in der Art der Beispiele 2.51 und 2.60 zu modellieren.

$\varphi$	$\psi$	$\varphi \wedge \psi$
$w$	$w$	$w$
$w$	$f$	$f$
$f$	$w$	$f$
$f$	$f$	$f$

Tabelle 2.1: Die Wahrheitswerttabelle für die Konjunktion

## 2.7 Fuzzy-Logik

Die in den vorhergehenden Abschnitten beschriebenen Konzepte für Fuzzy-Mengen beruhen allein auf der Annahme, daß die Beziehung „ist Element von“ ( $\in$ ) nicht nur wahr oder falsch sein, sondern beliebige Werte aus dem Einheitsintervall annehmen kann. Faßt man  $\in$  als zweistelliges Prädikat auf, so wird in der Theorie der Fuzzy-Mengen die Forderung, daß einer Aussage einer der beiden Wahrheitswerte wahr oder falsch zugeordnet werden muß, nicht an das Prädikat  $\in$  gestellt. Alle anderen Aussagen und Prädikate — zum Beispiel die Gleichheit — bleiben jedoch zweiwertig. Als Grundlage der Mengenlehre dient die klassische Prädikatenlogik erster Stufe. Ersetzt man die klassische zweiwertige Logik durch eine mehrwertige Logik, ergeben sich nicht nur für das Prädikat  $\in$  mehr als zwei mögliche Wahrheitswerte. Läßt man anstelle der Wahrheitswerte  $w$  für wahr und  $f$  für falsch das Einheitsintervall  $[0,1]$  als Menge der Wahrheitswerte zu, können logische Konnektive wie  $\wedge$  (und),  $\vee$  (oder),  $\rightarrow$  (Implikation),  $\leftrightarrow$  (Bimplikation) oder  $\neg$  (Negation) nicht mehr in Form einer Tabelle wie in Tabelle 2.1 beschrieben werden.

Mit jedem logischen Konnektiv wird eine Abbildung  $[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$  (bzw.  $[0,1] \rightarrow [0,1]$  für die Negation) verbunden, mit deren Hilfe der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage aus den Wahrheitswerten der atomaren Aussagen bestimmt werden kann.

Mit den  $t$ -Normen und den  $t$ -Conormen haben wir bereits Auswertungsfunktionen für Konjunktionen und Disjunktionen kennengelernt. Tabelle 2.2 gibt einige Beispiele für Implikationen wieder. Dabei bezeichnet  $\llbracket \varphi \rrbracket \in [0,1]$  den Wahrheitswert der Aussage  $\varphi$ .

Für die Negation wird meistens  $\llbracket \neg \varphi \rrbracket = 1 - \llbracket \varphi \rrbracket$  verwendet. Die Bimplikation hängt im allgemeinen von der Implikation ab:

$$\llbracket \varphi \leftrightarrow \psi \rrbracket = \llbracket (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \rrbracket.$$

In dieser Gleichung ist auch die Konjunktion vorhanden. Setzen wir aber voraus, daß für die Implikation

$$\llbracket \varphi \rrbracket \leq \llbracket \psi \rrbracket \implies \llbracket \varphi \rightarrow \psi \rrbracket = 1$$

gilt, folgt  $\llbracket \varphi \rightarrow \psi \rrbracket = 1$  oder  $\llbracket \psi \rightarrow \varphi \rrbracket = 1$ . Wird die Konjunktion mittels einer  $t$ -Norm

Name	$\llbracket \varphi \rightarrow \psi \rrbracket$
Łukasiewicz	$\min\{1 - \llbracket \varphi \rrbracket + \llbracket \psi \rrbracket, 1\}$
Gödel	$\begin{cases} 1, & \text{falls } \llbracket \varphi \rrbracket \leq \llbracket \psi \rrbracket \\ \llbracket \psi \rrbracket, & \text{sonst} \end{cases}$
Goguen	$\begin{cases} 1, & \text{falls } \llbracket \varphi \rrbracket = 0 \\ \min\{1, \frac{\llbracket \psi \rrbracket}{\llbracket \varphi \rrbracket}\}, & \text{sonst} \end{cases}$
Kleene–Dienes	$\max\{1 - \llbracket \varphi \rrbracket, \llbracket \psi \rrbracket\}$
Zadeh	$\max\{1 - \llbracket \varphi \rrbracket, \min\{\llbracket \varphi \rrbracket, \llbracket \psi \rrbracket\}\}$
Reichenbach	$1 - \llbracket \varphi \rrbracket + \llbracket \varphi \rrbracket \cdot \llbracket \psi \rrbracket$

Tabelle 2.2: Einige Auswertungsfunktionen für Implikationen

$\top$  ausgewertet, erhalten wir

$$\llbracket \varphi \leftrightarrow \psi \rrbracket = \min\{\llbracket \varphi \rightarrow \psi \rrbracket, \llbracket \psi \rightarrow \varphi \rrbracket\}$$

unabhängig von  $\top$ .

Ähnlich wie in der klassischen Logik lassen sich logische Konnektive durch andere Konnektive ausdrücken. In Abschnitt 2.3 haben wir bereits gesehen, daß man durch

$$\llbracket \varphi \vee \psi \rrbracket = \llbracket \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rrbracket$$

die zu  $\top$  duale  $t$ -Conorm für die Disjunktion  $\vee$  erhält, wenn zur Konjunktion  $\wedge$  als Auswertungsfunktion die  $t$ -Norm  $\top$  assoziiert wird und die Negation  $\neg$  mittels  $\llbracket \neg\varphi \rrbracket = 1 - \llbracket \varphi \rrbracket$  definiert ist. Jedoch können Ausdrücke, die in der klassischen Logik äquivalent sind, zu verschiedenen Definitionen führen, wenn das Einheitsintervall als Wahrheitswertemenge zugrunde gelegt wird. So ergeben sich mit der Łukasiewicz-Implikation zwei verschiedene Disjunktionen:

$$\llbracket \varphi \vee_1 \psi \rrbracket = \llbracket \neg\varphi \rightarrow \psi \rrbracket = \min\{\llbracket \varphi \rrbracket + \llbracket \psi \rrbracket, 1\}, \quad (2.32)$$

$$\llbracket \varphi \vee_2 \psi \rrbracket = \llbracket \neg\varphi \rightarrow \neg(\psi \rightarrow \varphi) \rrbracket = \max\{\llbracket \varphi \rrbracket, \llbracket \psi \rrbracket\}. \quad (2.33)$$

In der klassischen (zweiwertigen) Logik sind die Formeln  $\neg\varphi \rightarrow \psi$  und  $\neg\varphi \rightarrow \neg(\psi \rightarrow \varphi)$  äquivalent zur Disjunktion von  $\varphi$  und  $\psi$ . Während in der klassischen Logik die Implikation äquivalent mit Hilfe der Negation und der Disjunktion dargestellt werden kann, läßt sich die Łukasiewicz-Implikation nur mit der Negation und der Disjunktion (2.32), aber nicht mit der Disjunktion (2.33) ausdrücken.

Eine Standardtechnik, um eine Implikation aus einer  $t$ -Norm zu erzeugen, ist die Residuenbildung.

**Definition 2.62** Sei  $\top$  eine stetige  $t$ -Norm. Eine Abbildung  $R : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  heißt **Residuum** von  $\top$ , wenn die Bedingung

$$\top(\alpha, \beta) \leq \gamma \Leftrightarrow \alpha \leq R(\beta, \gamma) \quad (2.34)$$

erfüllt ist.

**Satz 2.63** Sei  $\top$  eine stetige  $t$ -Norm. Dann gibt es genau ein Residuum von  $\top$ , nämlich

$$\begin{aligned} \bar{\top} : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow [0, 1], \\ (\beta, \gamma) &\mapsto \sup\{\alpha \in [0, 1] \mid \top(\alpha, \beta) \leq \gamma\}. \end{aligned}$$

**B e w e i s :**

Zuerst zeigen wir, daß  $\bar{\top}$  ein Residuum ist. Aus  $\top(\alpha, \beta) \leq \gamma$  schließen wir gemäß der Definition von  $\bar{\top}$  die Ungleichung  $\bar{\top}(\beta, \gamma) \geq \alpha$ . Wenn andererseits  $\alpha \leq \bar{\top}(\beta, \gamma)$  gilt, so erhalten wir wegen der Stetigkeit und Monotonie von  $\top$  die Ungleichung  $\top(\alpha, \beta) \leq \gamma$ . Folglich ist  $\bar{\top}$  ein Residuum von  $\top$ .

Wenn  $R$  ein anderes Residuum von  $\top$  ist, gilt für alle  $\alpha \in [0, 1]$ :  $\alpha \leq \bar{\top}(\beta, \gamma) \Leftrightarrow \top(\alpha, \beta) \leq \gamma \Leftrightarrow \alpha \leq R(\beta, \gamma)$ , und damit  $\bar{\top} = R$ .  $\square$

Wegen der Eindeutigkeit des Residuums, die in Satz 2.63 bewiesen wurde, bezeichnen wir im folgenden das Residuum der stetigen  $t$ -Norm stets mit  $\bar{\top}$ .

Eine  $t$ -Norm repräsentiert eine Wahrheitsfunktion einer Konjunktion, ein Residuum kann interpretiert werden als die Wahrheitsfunktion einer Implikation. Wir erläutern dies am Beispiel der klassischen zweiwertigen Logik (mit den Wahrheitswerten 0 und 1).

Offensichtlich gilt für alle Aussagen  $\varphi, \psi$  und  $\chi$

$$\llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket \leq \llbracket \chi \rrbracket \iff \llbracket \varphi \rrbracket \leq \llbracket \psi \rightarrow \chi \rrbracket. \quad (2.35)$$

Wir leiten Gleichung (2.34) aus Gleichung (2.35) her, indem wir die  $t$ -Norm  $\top$  als Wahrheitsfunktion für die Konjunktion und das Residuum  $R = \bar{\top}$  als Wahrheitsfunktion für die Implikation auffassen. Folglich induziert jede stetige  $t$ -Norm, interpretiert als Konjunktion, eine zugehörige Implikation.

Basierend auf der  $t$ -Norm als Konjunktion, können wir — mit Hilfe des Residuums als Implikation — eine logische Äquivalenz, die Biimplikation, definieren.

**Definition 2.64** Sei  $\top$  eine stetige  $t$ -Norm.

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\top} : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow [0, 1], \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \top(\bar{\top}(\alpha, \beta), \bar{\top}(\beta, \alpha)) \end{aligned}$$

heißt die durch  $\top$  induzierte **Biimplikation**

Diese Definition ist motiviert durch die Äquivalenz

$$\alpha \leftrightarrow \beta \iff (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha),$$

in der wir die Konjunktion mit der  $t$ -Norm  $\top$  und die Implikation mit dem Residuum  $\overrightarrow{\top}$  auswerten.

**Satz 2.65** Sei  $\top$  eine stetige  $t$ -Norm,  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ . Dann gilt

$$\overleftarrow{\top}(\alpha, \beta) = \overrightarrow{\top}(\max\{\alpha, \beta\}, \min\{\alpha, \beta\})$$

**B e w e i s :**

Wir betrachten zuerst den Fall  $\alpha \leq \beta$ . Folglich gilt  $\top(\alpha, 1) = \alpha \leq \beta$  und daher

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\top}(\alpha, \beta) &= \top(\sup\{\gamma \in [0, 1] \mid \top(\alpha, \gamma) \leq \beta\}, \overrightarrow{\top}(\beta, \alpha)) \\ &= \top(1, \overrightarrow{\top}(\beta, \alpha)) \\ &= \overrightarrow{\top}(\beta, \alpha). \end{aligned}$$

Im Fall  $\beta \leq \alpha$ , erhalten wir analog

$$\overleftarrow{\top}(\alpha, \beta) = \overrightarrow{\top}(\alpha, \beta). \quad \square$$

### Beispiel 2.66

(a)  $\top = \top_{\text{Luka}}$  führt zu der Łukasiewicz-Implikation als Residuum von  $\top$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\top}(\alpha, \beta) &= \sup\{\gamma \in [0, 1] \mid \max\{\alpha + \gamma - 1, 0\} \leq \beta\} \\ &= \sup\{\gamma \in [0, 1] \mid \alpha + \gamma - 1 \leq \beta\} \\ &= \sup\{\gamma \in [0, 1] \mid \gamma \leq 1 - \alpha + \beta\} \\ &= \min\{1 - \alpha + \beta, 1\}. \end{aligned}$$

Für die Biimplikation erhalten wir mit Satz 2.65:

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\top}(\alpha, \beta) &= \min\{1 - \max\{\alpha, \beta\} + \min\{\alpha, \beta\}, 1\} \\ &= 1 - |\alpha - \beta|. \end{aligned}$$

(b) Für  $\top = \top_{\text{min}}$  erhalten wir die Gödel-Implikation als Residuum:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\top}(\alpha, \beta) &= \sup\{\gamma \in [0, 1] \mid \min\{\alpha, \gamma\} \leq \beta\} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha \leq \beta \\ \beta, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die zugehörige Biimplikation ist

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\top}(\alpha, \beta) &= \overrightarrow{\top}(\max\{\alpha, \beta\}, \min\{\alpha, \beta\}) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha = \beta \\ \min\{\alpha, \beta\}, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

(c) Im Falle von  $\top = \top_{\text{prod}}$  ergibt sich die Goguen-Implikation als Residuum:

$$\begin{aligned}\vec{\top}(\alpha, \beta) &= \sup\{\gamma \in [0, 1] \mid \alpha \cdot \gamma \leq \beta\} \\ &= \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha}, & \text{falls } \beta < \alpha \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}\end{aligned}$$

und als Biimplikation

$$\begin{aligned}\vec{\top}(\alpha, \beta) &= \vec{\top}(\max\{\alpha, \beta\}, \min\{\alpha, \beta\}) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha = \beta \\ \frac{\min\{\alpha, \beta\}}{\max\{\alpha, \beta\}}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad \square\end{aligned}$$

Die Wahrheitswerte von Aussagen, die Quantoren enthalten, bestimmt man üblicherweise wie folgt:

$$\llbracket \forall x : P(x) \rrbracket = \inf\{\llbracket P(x) \rrbracket \mid x\}, \quad (2.36)$$

$$\llbracket \exists x : P(x) \rrbracket = \sup\{\llbracket P(x) \rrbracket \mid x\}. \quad (2.37)$$

Gleichung (2.36) für die Auswertung des Allquantors liefert den kleinstmöglichen Wahrheitswert für die Aussage  $P(x)$  über ein beliebiges Individuum  $x$ . Entsprechend ergibt (2.37) den größtmöglichen Wert für die Aussage  $P(x)$ .

Das Extensionsprinzip, das in Abschnitt 2.4 vorgestellt wurde, erlaubt es, gewöhnliche Abbildungen auf Fuzzy-Mengen zu erweitern. Es gründet auf der Tatsache, daß ein Element  $y \in Y$  genau dann zu dem Bild der Menge  $A_1 \times \dots \times A_n \subseteq X^n$  unter der Abbildung  $\phi : X^n \rightarrow Y$  gehört, wenn

$$\exists(x_1, \dots, x_n) \in X^n : (y = \phi(x_1, \dots, x_n) \wedge x_1 \in A_1 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n)$$

gilt. Die Anwendung des Extensionsprinzips ergibt für die Aussage „ $y \in \hat{\phi}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ “ einen Wahrheitswert im Einheitsintervall, d.h. nur für das Prädikat  $\in$  wird eine Erweiterung der möglichen Wahrheitswerte auf das Einheitsintervall vorgenommen.

Eine grundsätzliche Frage, die sich bei der Verwendung von Fuzzy-Mengen stellt, ist, ob die Erweiterung der Wahrheitswerte für das Prädikat  $\in$  von der Menge  $\{0, 1\}$  auf das Intervall  $[0, 1]$  die Erweiterung des Bereichs der Wahrheitswerte für alle Aussagen und Prädikate mit sich bringt. In dem folgenden Beispiel betrachten wir eine entsprechende Erweiterung der Wahrheitswerte für die Gleichheit.

**Beispiel 2.67** Wir fassen die Gleichheit als zweistelliges Prädikat auf. Zwei Mengen  $M$  und  $N$  sind genau dann gleich, wenn

$$\forall x : (x \in M \leftrightarrow x \in N)$$

gilt. Im folgenden betrachten wir für Fuzzy-Mengen  $\mu$  die Aussage „ $x \in \mu$ .“ Sie erhält den Wahrheitswert  $\llbracket x \in \mu \rrbracket = \mu(x)$ . Für zwei Fuzzy-Mengen  $\mu$  und  $\nu$  von  $X$  definieren wir den Wahrheitswert der Aussage „ $\mu = \nu$ “ durch

$$\llbracket \mu = \nu \rrbracket = \llbracket \forall x : (x \in \mu \leftrightarrow x \in \nu) \rrbracket \quad (2.38)$$

$$= \llbracket \forall x : ((x \in \mu \rightarrow x \in \nu) \wedge (x \in \nu \rightarrow x \in \mu)) \rrbracket. \quad (2.39)$$

Der Wert von  $\llbracket \mu = \nu \rrbracket$  hängt von der Wahl der Auswertungsfunktionen für die Implikation  $\rightarrow$  und die Konjunktion  $\wedge$  ab. Wird die Konjunktion durch eine beliebige  $t$ -Norm ausgewertet, ergibt sich bei Verwendung der Łukasiewicz-Implikation

$$\llbracket \mu = \nu \rrbracket = \inf\{1 - |\mu(x) - \nu(x)| \mid x \in X\}, \quad (2.40)$$

während die Gödel-Implikation

$$\llbracket \mu = \nu \rrbracket = \inf\{\text{göd}(\mu(x), \nu(x)) \mid x \in X\} \quad (2.41)$$

liefert, wobei

$$\begin{aligned} \text{göd} : [0, 1]^2 &\rightarrow [0, 1], \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha = \beta \\ \min\{\alpha, \beta\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

Verwendet man anstelle der scharfen Gleichheit für Fuzzy-Mengen die durch (2.40) induzierte Gleichheit, werden zwei „ähnliche“ Fuzzy-Mengen auch als fast gleich betrachtet, wie das folgende Beispiel zeigt:

**Beispiel 2.68** Die Fuzzy-Mengen  $\mu$  und  $\nu$  auf  $\mathbb{R}$  seien durch

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 1 \leq x \\ x, & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

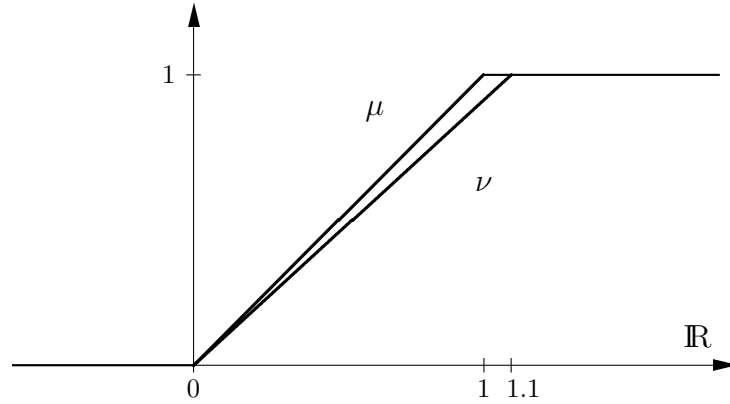
beziehungsweise

$$\nu(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 1.1 \leq x \\ \frac{10}{11}x, & \text{falls } 0 \leq x \leq 1.1 \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

gegeben (siehe Abbildung 2.17). Sowohl  $\mu$  als auch  $\nu$  können interpretiert werden als die Fuzzy Mengen jener Werte, die erheblich größer als Null sind.

Mit (2.40) ergibt sich  $\llbracket \mu = \nu \rrbracket = \frac{10}{11}$ . □

Der folgende Satz zeigt, daß die in (2.40) definierte unscharfe Gleichheit eine Gleichheitsrelation bezüglich der  $t$ -Norm  $\top_{\text{Łuka}}$  auf  $F(X)$  ist.

Abbildung 2.17: Zwei Fuzzy-Mengen mit Gleichheitsgrad  $\frac{10}{11}$ 

**Satz 2.69** *Die Abbildung*

$$E_{\text{Luka}}^{(X)} : F(X) \times F(X) \rightarrow [0, 1],$$

$$(\mu, \nu) \mapsto \inf\{1 - |\mu(x) - \nu(x)| \mid x \in X\}$$

ist eine Gleichheitsrelation bezüglich der  $t$ -Norm  $\top_{\text{Luka}}$  auf  $F(X)$ .

Bemerkung: Wenn ersichtlich ist, welche Referenzmenge gemeint ist, schreiben wir  $E_{\text{Luka}}$  statt  $E_{\text{Luka}}^{(X)}$ .

**B e w e i s :**

Es seien  $\mu, \nu, \eta \in F(X)$ . Offenbar gilt  $E_{\text{Luka}}(\mu, \mu) = 1$  und  $E_{\text{Luka}}(\mu, \nu) = E_{\text{Luka}}(\nu, \mu)$ .

$$\begin{aligned} & \top_{\text{Luka}}(E_{\text{Luka}}(\mu, \nu), E_{\text{Luka}}(\nu, \eta)) \\ &= \max\left\{\inf_{x \in X}\{1 - |\mu(x) - \nu(x)|\} \right. \\ & \quad \left. + \inf_{x \in X}\{1 - |\nu(x) - \eta(x)|\} - 1, 0\right\}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Da  $E_{\text{Luka}}(\mu, \eta) \geq 0$  ist, brauchen wir nur den Fall zu betrachten, für den das Maximum in (2.42) einen Wert größer als Null annimmt.

$$\begin{aligned} & \inf_{x \in X}\{1 - |\mu(x) - \nu(x)|\} + \inf_{x \in X}\{1 - |\nu(x) - \eta(x)|\} - 1 \\ & \leq \inf_{x \in X}\{1 - (|\mu(x) - \nu(x)| + |\nu(x) - \eta(x)|)\} \\ & \leq \inf_{x \in X}\{1 - |\mu(x) - \eta(x)|\} \\ & = E_{\text{Luka}}(\mu, \eta). \end{aligned}$$

□



Das im Abschnitt 2.4 vorgestellte Extensionsprinzip erweitert Abbildungen  $\phi : X^n \rightarrow Y$  zu  $\hat{\phi} : F(X)^n \rightarrow F(Y)$ . Die Abbildung  $\hat{\phi}$  ist extensional bezüglich der in (2.40) beschriebenen Gleichheitsrelationen auf Fuzzy-Mengen. Wir verwenden dazu auf der Menge  $F(X)^n$  die Gleichheitsrelation

$$\begin{aligned} E_{\text{Luka}}^{(n)}((\mu_1, \dots, \mu_n), (\nu_1, \dots, \nu_n)) \\ = \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in X^n} \{1 - |\min\{\mu_1(x_1), \dots, \mu_n(x_n)\} \\ - \min\{\nu_1(x_1), \dots, \nu_n(x_n)\}|\} \end{aligned}$$

Indem wir die Abbildung

$$(\mu_1, \dots, \mu_n) \mapsto \mu \in F(X^n)$$

mit

$$\mu(x_1, \dots, x_n) = \min\{\mu_1(x_1), \dots, \mu_n(x_n)\}$$

definieren, betten wir die Menge  $F(X)^n$  in die Menge  $F(X^n)$  ein. Auf  $F(X^n)$  betrachten wir die Gleichheitsrelation  $E_{\text{Luka}}^{(X^n)}$ .  $E_{\text{Luka}}^{(n)}$  ist dann die Einschränkung der Gleichheitsrelation  $E_{\text{Luka}}^{(X^n)}$  auf die Menge  $F(X)^n$ .

**Satz 2.70** *Es sei  $\phi : X^n \rightarrow Y$  eine Abbildung.*

*Dann ist die Abbildung  $\hat{\phi} : F(X)^n \rightarrow F(Y)$  extensional bezüglich der Gleichheitsrelation  $E_{\text{Luka}}^{(n)}$  auf  $F(X)^n$  und der Gleichheitsrelation  $E_{\text{Luka}}^{(Y)}$  auf  $F(Y)$ .*

**B e w e i s :**

Es seien  $\mu_i, \nu_i \in F(X)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Wir zeigen, daß für jedes  $0 < \varepsilon \leq 1$  die Bedingung

$$E_{\text{Luka}}^{(Y)}(\hat{\phi}(\mu_1, \dots, \mu_n), \hat{\phi}(\nu_1, \dots, \nu_n)) < \varepsilon \quad (2.43)$$

die Ungleichung

$$E_{\text{Luka}}^{(n)}((\mu_1, \dots, \mu_n), (\nu_1, \dots, \nu_n)) < \varepsilon, \quad (2.44)$$

impliziert, woraus die Extensionalität von  $\hat{\phi}$  folgt. Es sei ein beliebiges  $0 < \varepsilon \leq 1$  vorgegeben, so daß (2.43) erfüllt ist. Nach Definition von  $E_{\text{Luka}}^{(Y)}$  und  $\hat{\phi}$  gilt

$$\begin{aligned} \inf_{y \in Y} \left\{ 1 - \left| \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in X^n: \\ \phi(x_1, \dots, x_n) = y}} \{\min\{\mu_1(x_1), \dots, \mu_n(x_n)\}\} \right. \right. \\ \left. \left. - \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in X^n: \\ \phi(x_1, \dots, x_n) = y}} \{\min\{\nu_1(x_1), \dots, \nu_n(x_n)\}\} \right| \right\} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Das heißt, es existiert ein  $y_\varepsilon \in Y$  mit

$$\begin{aligned} 1 - \left| \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in X^n: \\ \phi(x_1, \dots, x_n) = y_\varepsilon}} \{\min\{\mu_1(x_1), \dots, \mu_n(x_n)\}\} \right. \\ \left. - \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in X^n: \\ \phi(x_1, \dots, x_n) = y_\varepsilon}} \{\min\{\nu_1(x_1), \dots, \nu_n(x_n)\}\} \right| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Wegen  $\varepsilon \leq 1$  folgt, daß die beiden Suprema in (2.45) nicht denselben Wert annehmen können. Daher sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in X^n: \\ \phi(x_1, \dots, x_n) = y_\varepsilon}} \{\min\{\nu_1(x_1), \dots, \nu_n(x_n)\}\} \\ & < \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in X^n: \\ \phi(x_1, \dots, x_n) = y_\varepsilon}} \{\min\{\mu_1(x_1), \dots, \mu_n(x_n)\}\}. \end{aligned}$$

Damit existiert ein  $(x_1^{(\varepsilon)}, \dots, x_n^{(\varepsilon)}) \in X^n$  mit  $\phi(x_1^{(\varepsilon)}, \dots, x_n^{(\varepsilon)}) = y_\varepsilon$ , so daß

$$\begin{aligned} 1 - \min\{\mu_1(x_1^{(\varepsilon)}), \dots, \mu_n(x_n^{(\varepsilon)})\} \\ + \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in X^n: \\ \phi(x_1, \dots, x_n) = y_\varepsilon}} \{\min\{\nu_1(x_1), \dots, \nu_n(x_n)\}\} < \varepsilon \end{aligned}$$

gilt. Insbesondere folgt

$$1 - \min\{\mu_1(x_1^{(\varepsilon)}), \dots, \mu_n(x_n^{(\varepsilon)})\} + \min\{\nu_1(x_1^{(\varepsilon)}), \dots, \nu_n(x_n^{(\varepsilon)})\} < \varepsilon.$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} & E_{\text{Luka}}^{(n)}((\mu_1, \dots, \mu_n)(\nu_1, \dots, \nu_n)) \\ & = \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in X^n} \{1 - |\min\{\mu_1(x_1), \dots, \mu_n(x_n)\} \\ & \quad - \min\{\nu_1(x_1), \dots, \nu_n(x_n)\}|\} \\ & \leq 1 - |\min\{\mu_1(x_1^{(\varepsilon)}), \dots, \mu_n(x_n^{(\varepsilon)})\} - \min\{\nu_1(x_1^{(\varepsilon)}), \dots, \nu_n(x_n^{(\varepsilon)})\}| \\ & = 1 - \min\{\mu_1(x_1^{(\varepsilon)}), \dots, \mu_n(x_n^{(\varepsilon)})\} + \min\{\nu_1(x_1^{(\varepsilon)}), \dots, \nu_n(x_n^{(\varepsilon)})\} \\ & < \varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

Wir haben gezeigt, daß durch die Interpretation der Implikation in (2.38) im Sinne von Łukasiewicz eine Gleichheitsrelation bezüglich der  $t$ -Norm  $\top_{\text{Luka}}$  auf den Fuzzy-Mengen von  $X$  induziert wird. Das Extensionsprinzip führt zu einer extensionalen Abbildung bezüglich dieser Gleichheitsrelation. Wird anstelle der Łukasiewicz-Implikation in (2.38) die Gödel-Implikation verwendet, ergibt sich eine Gleichheitsrelation bezüglich der  $t$ -Norm  $\top_{\text{min}}$  auf  $F(X)$ . Für diese Gleichheitsrelation läßt sich ein zum Satz 2.70 analoger Satz beweisen, d.h., auch bezüglich dieser Gleichheitsrelation verhält sich das Extensionsprinzip extensional.

In Abschnitt 2.6.2 haben wir gezeigt, wie eine gegebene Gleichheitsrelation eine Fuzzy-Menge als extensionale Hülle einer gewöhnlichen Menge induziert (vgl. Beispiele 2.56 und 2.58). Umgekehrt können wir als Ergebnis festhalten, daß auf der Menge der Fuzzy-Mengen von  $X$  kanonisch eine Gleichheitsrelation mittels Satz 2.70 erzeugt wird. Diese Gleichheitsrelation spiegelt die Idee wider, daß „ähnliche“ Fuzzy-Mengen auch „fast gleich“ sind. Auch lassen sich Konzepte wie das Extensionsprinzip mit Hilfe dieser Gleichheitsrelation beurteilen. „Ähnliche“ Fuzzy-Mengen sollten zu „ähnlichen“ Resultaten führen, was nichts anderes bedeutet, als daß Konzepte für Fuzzy-Mengen Extensionaleigenschaften bezüglich dieser Gleichheitsrelation besitzen sollten.

## 2.8 Ergänzende Bemerkungen und Quellenangaben

In diesem Abschnitt geben wir zusätzliche Hinweise zur historischen Entwicklung der Fuzzy-Systeme, zu Fuzzy-Mengen und deren Semantik, dem Problem der Wahl geeigneter Zugehörigkeitsfunktionen, zur Fuzzy-Logik und schließlich zur Fuzzy-Datenanalyse, deren Anwendung mit Hilfe der kurzen Beschreibung eines Softwaretools für statistische Untersuchungen anhand von vagen Daten aufgezeigt wird. Außerdem sind hier die für Kapitel 2 relevanten Quellenangaben und weitere Referenzen auf empfehlenswerte Zusatzliteratur zu finden.

### 2.8.1 Historische Entwicklung: Fuzzy-Systeme

Das Konzept der Fuzzy-Menge wurde Mitte der Sechziger Jahre von L.A. Zadeh vorgeschlagen, um die Modellierung komplexer Systeme zu vereinfachen. Zadeh hatte bereits vorher bedeutende Beiträge zur Regeltechnik (z.B. [Desoer63]) geleistet. Aufgrund der steigenden Komplexität der von ihm untersuchten Systeme erklärte er in [Zadeh73]

“...that the conventional quantitative techniques of system analysis are intrinsically unsuited for dealing with humanistic systems or, for that matter, any system whose complexity is comparable to that of humanistic systems. The basis of this contention rests on what might be called the *principle of incompatibility*. Stated informally, the essence of this principle is that as the complexity of a system increases, our ability to make precise and yet significant statements about its behaviour diminishes until a threshold is reached beyond which precision and significance (or relevance) become almost mutually exclusive characteristics.”

In diesem Aufsatz befürwortet er daher einen anderen Ansatz [Zadeh73]:

“...based on the premise that the key elements in human thinking are not numbers, but labels of fuzzy sets, that is, classes of objects in which the transition from membership to non-membership is gradual rather than abrupt. Indeed the pervasiveness of fuzziness in human thought processes suggests that much of the logic behind human reasoning is not the traditional two-valued or even multi-valued logic, but a logic with fuzzy truths, fuzzy connectives, and fuzzy rules of inference.”

Die kurz danach erschienenen Publikationen waren überwiegend auf die theoretische Analyse vielversprechender Anwendungen von Fuzzy-Mengen, die im wesentlichen aus der Fuzzifizierung bekannter Theorien hervorgegangen waren, ausgerichtet. Eine sehr umfassend kommentierte Bibliographie, die das erste Jahrzehnt dieses Forschungszweigs abdeckt, verfaßten B.R. Gaines und L.J. Kohout [Gaines77]. Eine repräsentative

Zusammenfassung der bis 1978 veröffentlichten Literatur im Bereich der Fuzzy-Mengen und Fuzzy-Systeme gibt das Buch [Dubois80a] von D. Dubois und H. Prade. Die wichtigsten Aufsätze von L.A. Zadeh, der die Entwicklung der gesamten Theorie bis heute maßgeblich beeinflusst hat, sind in [Yager87] enthalten. In [Dubois93b] sind wichtige Originalarbeiten verschiedener Autoren zusammengestellt und kompetent kommentiert.

Ab etwa 1975 wurde neben weiterer theoretischer Vertiefung versucht, konkrete Anwendungen sowohl im Labormaßstab als auch für den großtechnischen Einsatz zu finden. Als Pionier auf dem Gebiet der Fuzzy-Regelungstechnik gilt E.H. Mamdani [Mamdani76]. Die Steuerung von Zementbrennprozessen [Holmblad82] war die erste erfolgreich realisierte großtechnische Anwendung. In Japan wurde schon sehr früh das Potential von Fuzzy-Regelung erkannt, gefördert und durch spektakuläre Anwendungen wie der U-Bahn von Sendai, aber auch durch einfacheren, kommerziell überaus erfolgreichen Einsatz in Konsumgütern ausgenutzt [Terano91]. Weitere Einsatzgebiete für Fuzzy-Methoden wurden in den Bereichen Wissensverarbeitung, Künstliche Intelligenz [Smets88] sowie in der unscharfen Datenanalyse gesehen [Miyamoto90, Bezdek81, Bandemer92].

In Europa und in den U.S.A. fanden L.A. Zadeh's Konzepte und erste Resultate im Bereich der Regelungstechnik und der Mathematik nur wenig Anklang. R.E. Kalman bemerkte 1972 zu einer Präsentation von L.A. Zadeh:

“His proposals could be severely, ferociously, even brutally criticized from a technical point of view ... Professor Zadeh's fears of unjust criticism can be mitigated by recalling that the alchemists were not prosecuted for their beliefs but because they failed to produce gold.”

S. MacLane schreibt noch 1986 in einer Bewertung der Fuzzy-Mengen:

“It was hoped that this ingenious notion would lead to all sorts of fruitful applications, to fuzzy automata, fuzzy decision theory and elsewhere. However, as yet most of the intended applications turn out to be just extensive exercises, not actually applicable.”

Während die Idee der Fuzzy-Regelung von Ingenieuren rundweg abgelehnt wurde, störte gute Mathematiker die zum Teil schlechte Qualität [Arbib77] der Aufsätze im Bereich der Fuzzy-Systeme (P.T. Johnstone bemerkte 1988: Fuzzy mathematics is not an excuse for fuzzy thinking) und die Tatsache, daß viele Autoren sich ohne weitergehende Betrachtungen auf bloße Anwendungen des Extensionsprinzips innerhalb der sie interessierenden Theorien beschränkten. Dies führte dazu, daß das Wort „fuzzy“ in zahlreichen Anwendungen von Fuzzy-Mengen und sinnvollen Fuzzifizierungen vermieden wurde. Eine der umstrittensten Themen war die Frage „Ist Fuzziness nur Wahrscheinlichkeit in geschickter Verkleidung?“ und der Anspruch vieler Befürworter der Wahrscheinlichkeitstheorie — „alles was ihr macht [mit Fuzzy-Mengen] können

wir [mit Wahrscheinlichkeitsrechnung] besser“ [Lindley87]. Eine aktuelle Untersuchung dieser Auseinandersetzung enthält die Sonderausgabe über Fuzziness contra Wahrscheinlichkeit der IEEE Transactions of Fuzzy Systems, Feb. 94, Vol. 2, No. 1. Für Verwirrung sorgte die Tatsache, daß die in der Industrie mit dem Schlagwort „Fuzzy Logic“ bezeichneten Methoden häufig nichts mit der mathematischen (mehrwertigen) Logik zu tun haben: Fuzzy-Logik wird hier in allgemeinerem umgangssprachlichen Sinne verwendet.

Erst Pressemeldungen über Erfolge der Fuzzy-Systeme in Japan („Matsushita hat 1990 mit Fuzzy-Produkten 1 Milliarde US \$ Umsatz gemacht,“ „Fuzzy wurde 1990 zum Wort des Jahres in Japan gewählt“), die Werbemaßnahmen für Konsumgüter (z.B. die Verwendung von Fuzzy-Techniken in Kameras) sowie die Anmeldung von Patenten (Fuzzy-ABS für Kraftfahrzeuge) führten auch hierzulande zu einem starken Interesse an Fuzzy-Systemen. Erstaunlicherweise haben erst diese Pressemeldungen dazu geführt, daß Fuzzy-Systeme in größerem Umfang in der Forschung und Lehre Beachtung fanden. Die Fachgruppe „Fuzzy Systeme“ der Gesellschaft für Informatik wurde aus diesem Grunde auch erst im Jahre 1993 gegründet.

Die meisten erfolgreichen industriellen Anwendungen wurden im Bereich der Fuzzy-Regelung (siehe Kapitel 4) und der Fuzzy-Expertensysteme (siehe Kapitel 3) entwickelt. Andere industrielle Anwendungsgebiete für Fuzzy-Systeme, die in diesem Buch nicht behandelt werden, sind besonders die Fuzzy-Datenanalyse [Bellman66, Ruspini69, Ruspini70, Bezdek81, Bocklisch86, Kruse87b, Tanaka87, Tanaka88, Näther90] [Bandemer92, Bezdek92a, Bezdek92b, Bandemer93a, Krishnapuram93a], Fuzzy-Bildverarbeitung und Computersehen [Keller85, Krishnapuram93b], Fuzzy-Information-Retrieval [Kraft83], Fuzzy-Datenbanken [Buckles82, Umamo82, Zemankova-Leech84, Bosc88], und entscheidungsunterstützende Systeme [Bellman70, Zimmermann84] [Zimmermann87, Chen92]. Eine kommentierte Übersicht über die in Deutschland besonders stark diskutierten Anwendungen der Fuzzy-Logik findet sich in [Kruse94]. Die Berichte in den Konferenzbänden [Reusch92, Reusch93] und die Anwendungsbeispiele in [Zimmermann93, Zimmermann94] geben einen Eindruck der vielfältigen Einsatzmöglichkeiten der Fuzzy-Logik.

Oft stellt sich heraus, daß es vorteilhafter ist, Fuzzy-Methoden in Kombination mit anderen Techniken wie neuronalen Netzwerken [Nauck94], probabilistischen Methoden, genetischen Algorithmen, usw. einzusetzen als allein. Dies zeigt z.B. die steigende Zahl sogenannter „neurofuzzy“ Verbrauchsgüter [Asakawa94]. Die Argumentation aus der Sicht der Industrie lautet [Zadeh94]:

“In traditional — hard — computing the prime desiderata are precision, certainty and rigor. By contrast the point of departure in ‘soft computing’ is the thesis that precision and certainty carry a cost and that computation, reasoning, and decision making should exploit — wherever possible — the tolerance for imprecision and uncertainty.”

## 2.8.2 Fuzzy-Mengen und ihre Semantik

Der für die Theorie der Fuzzy-Mengen grundlegende Aufsatz stammt von L.A. Zadeh [Zadeh65]. Vor ihm waren aber schon andere an der Modellierung von Vagheit interessiert, etwa der Philosoph M. Black, der vage Symbole durch Konsistenzprofile beschrieb [Black37], oder der Mathematiker K. Menger, der erstmals den französischen Begriff „ensembles flou“ und seine englische Übersetzung „hazy set“ für seine Idee von „wolkenartigen Punkten“ [Menger51] in der probabilistischen Geometrie benutzte. In [Goguen67] wird der Begriff der  $L$ -Fuzzy-Menge eingeführt, um mit einer erweiterten Klasse von Zugehörigkeiten arbeiten zu können. Die Idee, geschichtete Mengensysteme zur Repräsentation zu verwenden, findet sich in [Gentilhomme68]. C.V. Negoita und D.A. Ralescu [Negoita75] haben mit ihrem sogenannten Repräsentationssatz gezeigt, daß diese beiden Darstellungsarten äquivalent sind. Die zugrunde liegende algebraische Sichtweise von Fuzzy-Mengen ist mathematisch sehr sauber und ausführlich in dem Artikel [Goodman91a, Goodman91b] aufgearbeitet. Die Verwendung verallgemeinerter Operationen auf Indikatorfunktionen für Komplement, Durchschnitt und Vereinigung wurde von L.A. Zadeh vorgeschlagen. Die erste axiomatische Analyse in diesem Bereich geht auf R.E. Bellman und M. Giertz zurück. In dem Aufsatz [Bellman73] zeigten sie die Eindeutigkeit von  $(\min, \max)$  unter der Voraussetzung, daß die verwendeten Abbildungen  $\top$  und  $\perp$  den Axiomen der Stetigkeit, Distributivität, strengen Monotonie von  $\top(a, a)$  und  $\perp(a, a)$  in  $a$  und den Ungleichungen  $\top(a, b) \leq \min\{a, b\}$  sowie  $\perp(a, b) \geq \max\{a, b\}$  genügen.

Wie in empirischen Studien nachgewiesen wurde, kommt man mit dem konjunktiven Operator  $\min$  und dem disjunktiven Operator  $\max$  oft nicht aus, da sie die Bewertungsweise des menschlichen Denkens nur sehr grob annähern [Zimmermann80, Zimmermann91]. Aus diesem Grund verwendet man seit längerem an das jeweilige Problem angepaßte Klassen von Operatoren, wie sie beispielsweise in [Yager80, Yager82, Hamacher78, Frank79, Dubois80b, Dombi82] und [Alsina83] beschrieben sind. Zur mathematischen Fundierung dient das Konzept der  $t$ -Norm (triangular norm) und  $t$ -Conorm (triangular conorm), das ursprünglich zur Analyse statistischer metrischer Räume verwandt [Menger42] und insbesondere von B. Schweizer und A. Sklar analysiert wurde [Schweizer61, Schweizer63, Schweizer83]. Die Grundideen für den Bereich der Fuzzy-Mengen sind in [Dubois82, Weber83] klar beschrieben.

Die Bedeutung des Extensionsprinzips für die Theorie der Fuzzy-Mengen wurde erstmalig in [Zadeh75] dargelegt. Es kann dazu benutzt werden, ganze Theorien zu „fuzzifizieren,“ wie es etwa bei der Theorie der hier nicht behandelten fuzzy-topologischen Räume [Lowen76] geschah. Wir haben uns in diesem Kapitel lediglich mit der Anwendung des Extensionsprinzips zur Erweiterung der Arithmetik auf Fuzzy-Mengen von  $\mathbb{R}$  befaßt. Fuzzy-Arithmetik kann als eine Verallgemeinerung der Intervallarithmetik [Moore66, Moore79] angesehen werden. Das Buch [Kaufmann85] widmet sich speziell diesem Thema.

Der Begriff der Fuzzy-Relation wird erstmals in dem Aufsatz [Zadeh71a] erwähnt. In ihm wird als Verallgemeinerung der gewöhnlichen Äquivalenzrelation die „similarity

relation“ eingeführt, die als binäre Fuzzy-Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist und deren  $\alpha$ -Schnitte gewöhnliche Äquivalenzrelationen sind. Die für das approximative Schließen wichtigen Konzepte der Projektion und der zylindrischen Erweiterung von Relationen wurden ebenfalls von L.A. Zadeh auf Fuzzy-Relationen verallgemeinert [Zadeh75].

Für eine sinnvolle Anwendung von Fuzzy-Mengen sind semantische Aspekte von fundamentaler Bedeutung. Die beiden hier vorgestellten Zugänge zur Interpretation von Fuzzy-Mengen basieren auf Arbeiten der Autoren dieses Buches. Als Anregung dienten die Aufsätze [Hisdal88] und [Höhle91].

Der erste Ansatz zur Behandlung unsicheren Wissens versteht Fuzzy-Mengen als komprimierte Repräsentation konkurrierender impräziser Informationen und damit als induziertes Konzept. Analoge Betrachtungsweisen haben sich auch in anderen Kalkülen bewährt. So findet man z.B. die Begriffsbildungen *one point coverage* für Zufallsmengen [Nguyen78b, Nguyen84], *contour function* für Belief-Funktionen [Shafer76] und *falling shadow* innerhalb der mengenwertigen Statistik [Wang83, König92]. Unsere Sicht von Fuzzy-Mengen als induziertes Konzept ist ausführlich in [Gebhardt92b] beschrieben. In dieser Quelle wird auf den semantischen Hintergrund, dessen mathematische Präzisierung und insbesondere auf die sich ergebenden Konsequenzen für das zu dieser Interpretation konforme Operieren auf Fuzzy-Mengen eingegangen. Es stellt sich unter anderem heraus, auf welche Weise sich das Extensionsprinzip und einige in der Praxis häufig benutzte Paare von  $t$ -Norm und  $t$ -Conorm nicht nur motivieren, sondern anhand klar spezifizierbarer semantischer Nebenbedingungen unter Bewahrung von Konsistenzeigenschaften als unumgänglich beweisen lassen. Außerdem sei erwähnt, daß die zugrunde liegende Modellierung es erlaubt, eine tieferliegende Fundierung und entsprechende Erweiterung der Possibilitätstheorie [Dubois87b] vorzunehmen, deren Einführung wir in Kapitel 3 im wesentlichen auf das für Anwendungen sehr wichtige approximative Schließen in wissensbasierten Systemen reduzieren werden. Ähnliche Ansätze sind in [Goodman82, Orlov78] beschrieben; eine Übersicht bietet [Dubois89a].

Der zweite von uns angesprochene Ansatz zur Interpretation von Fuzzy-Mengen basiert auf dem Konzept der Gleichheitsrelation nach [Höhle91] und auf früheren Aufsätzen, in denen die Begriffe „similarity relation“ [Zadeh71a, Ruspini90] und „indistinguishability operator“ [Trillas84] benutzt wurden. Die Idee ist, scharfe Daten auch in unscharfen Betrachtungsbedingungen angemessen handhaben zu können. Die Gleichheitsrelationen dienen zur Beschreibung vager Umgebungen und induzieren Fuzzy-Mengen als Punkte in diesen vagen Umgebungen. Diese Sichtweise von Fuzzy-Mengen erweist sich als ausgesprochen nützlich für die Methoden der Fuzzy-Regelung, die Gegenstand von Kapitel 4 sein werden. Die zugehörigen theoretischen Untersuchungen sind [Klawonn93a, Klawonn93b, Klawonn94] zu entnehmen.

Aus Platzgründen können wesentliche Konzepte hier nicht ausführlich behandelt werden. Für die linguistische Modellierung benötigt man z.B. Fuzzy-Mengen vom Typ 2, die Fuzzy-Mengen als Zugehörigkeitsgrade besitzen [Mizumoto76]. Für die Typ2-Fuzzy-Menge *intelligent* kann man z.B. die (Typ1-)Fuzzy-Mengen *mäßig*, *durchschnittlich*, *überdurchschnittlich* und *herausragend* verwenden. Andere Konzepte, die bei der Mo-

dellierung linguistischer Ausdrücke benutzt werden, sind *fuzzy quantifiers* (*viele, fast alle, manche*), *fuzzy truth values* (*sehr richtig, mehr oder weniger falsch*) und *linguistic hedges* (*sehr, ziemlich*) [Klir88, Zimmermann91].

Auch auf Bezüge zwischen Fuzzy-Mengen und Informationstheorie können wir nicht eingehen. Die Frage, wie man den Grad der Vagheit einer Fuzzy-Menge definieren soll, wurde schon recht früh axiomatisch durch die Analyse von *measures of fuzziness* [Knopfmacher75] und die Verwendung von Entropiebegriffen [de Luca72, Kruse83a] untersucht. Eine gute Übersicht über Informationsmaße, die in verschiedenen Unsicherheitskalkülen verwendet werden, und weitere, für die Anwendung von Fuzzy-Mengen interessante Konzepte, sind in [Klir88, Klir87, Zadeh83a, Pal94] zu finden.

Zadeh weist in seinem Vorwort zu Recht auf den qualitativen Unterschied der beiden Sätze „Ich sehe Dich irgendwann“ und „Ich treffe Dich um ungefähr fünf Uhr.“ Mit der ersten Aussage kann man wenig anfangen, da sie nicht recht zu quantifizieren ist (der Sprecher des Satzes will sich auch gar nicht festlegen), die zweite Aussage kann man dagegen mit Fuzzy-Mengen gut beschreiben. Anders als Zadeh und genau wie die Psychologen Smithson [Smithson89] und Black [Black37] bezeichnen wir beide Aussagen als vage, wobei die erste Aussage als nicht spezifisch (*nonspecific, indistinct*), die zweite dagegen als unscharf (*fuzzy*) gilt. Jedoch ist natürlich auch diese Unterscheidung subjektiv.

### 2.8.3 Akquisition von Zugehörigkeitsgraden

Ein Hauptproblem bei der Entwicklung von Fuzzy-Systemen ist die Wahl geeigneter Zugehörigkeitsfunktionen. Die Analyse der in Anwendungen benutzten Zugehörigkeitsgrade zeigt, daß es nicht wie bei der frequentistischen Interpretation von Wahrscheinlichkeiten auf den exakten numerischen Wert im Intervall  $[0, 1]$  ankommt, sondern nur auf seine Größenordnung. Dies wird auch durch psychologische Untersuchungen gestützt, die zeigen, daß ein Mensch normalerweise nur zu einer Differenzierung von (höchstens) sieben bis elf Zugehörigkeitsgraden imstande ist.

Aus der Sicht der Meßtheorie (Theorie der Metrisierung) [Krantz71a, Krantz71b] [Luce90] wird das Intervall  $[0, 1]$  also nur als Ordinalskala verwendet. Ist  $L$  eine Menge und  $\sqsubseteq$  eine totale Ordnung auf  $L$  mit existierendem kleinsten und größten Element, so kann diese Ordinalskala direkt als Wertebereich für  $L$ -Fuzzy-Mengen benutzt werden. Eine konnexe Präferenzrelation  $\sqsubseteq$  auf einer Menge  $X$  ist eine transitive Relation, die die Bedingung  $x \sqsubseteq y \vee y \sqsubseteq x$  erfüllt. Ist  $\sqsubseteq$  eine konnexe Präferenzrelation auf der endlichen, nicht-leeren Menge  $X$  mit der intuitiven Bedeutung „Der Zugehörigkeitsgrad von  $x$  (zu einer Fuzzy-Menge  $\mu$ ) ist höchstens so groß wie der Zugehörigkeitsgrad von  $x'$  (zu  $\mu$ )“, so läßt sich leicht nachprüfen, daß es eine Funktion  $\mu_{\sqsubseteq} : X \rightarrow [0, 1]$  gibt, die für alle  $x \in X$  die Eigenschaft

$$x \sqsubseteq x' \iff \mu_{\sqsubseteq}(x) \leq \mu_{\sqsubseteq}(x')$$

hat. Ist die Funktion  $\mu_{\sqsubseteq}$  nur bis auf monoton wachsende Transformationen  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  eindeutig festgelegt, d.h., erfüllt jede Funktion  $f \circ \mu_{\sqsubseteq}$  ebenfalls die



Kompatibilitätsbedingung

$$x \sqsubseteq x' \iff f \circ \mu_{\sqsubseteq}(x) \leq f \circ \mu_{\sqsubseteq}(x'),$$

so spricht man von einem ordinalen Skalenniveau. Die fehlende Eindeutigkeit ist bei der Verknüpfung dieser Fuzzy-Mengen zu berücksichtigen [French88, Turksen91].

Ist es möglich, nicht nur Präferenzen der Form  $x \sqsubseteq x'$ , sondern auch Präferenzen zweiter Ordnung der Form

„ $[x \sqsubseteq x']$  hat einen Akzeptanzgrad, der höchstens so groß ist wie der von  $[x'' \sqsubseteq x''']$ ,“  
i.Z.  $[x \sqsubseteq x'] \lesssim [x'' \sqsubseteq x''']$ ,

anzugeben, so kann man, falls  $\lesssim$  die Axiome einer algebraischen Differenzstruktur erfüllt [Krantz71a, Krantz71b, Luce90], eine Funktion  $\mu$  finden, die die Eigenschaften

$$x \sqsubseteq x' \iff \mu(x) \leq \mu(x')$$

und

$$[x \sqsubseteq x'] \lesssim [x'' \sqsubseteq x'''] \iff \mu(x') - \mu(x) \leq \mu(x''') - \mu(x'').$$

aufweist. Dabei ist  $\mu$  bis auf die affine Transformation

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto \alpha x + \beta, \quad \alpha > 0.$$

festgelegt. Die entsprechende Skala wird auch als Intervallskala bezeichnet.

In der Wahrscheinlichkeitstheorie sind stärkere Bedingungen an die Präferenzen zwischen den Elementen einer  $\sigma$ -Algebra zu stellen, um die Eindeutigkeit des entsprechenden Wahrscheinlichkeitsmaßes zu sichern [Savage72, Dubois89b, Cox46]. Die dort verwendeten metrischen Skalen sind allerdings für Fuzzy-Anwendungen oft zu restriktiv.

Für die Akquisition und Konstruktion von Zugehörigkeitsfunktionen werden in der Literatur zahlreiche Verfahren vorgeschlagen. Übersichten finden sich in [Dubois80a, Turksen91, Norwich84]. Die meisten dieser Verfahren basieren auf statistischen Methoden, die als *direct rating*, *polling*, *set-valued statistics* und *reverse rating* bezeichnet werden, oder auf der Analyse relativer Präferenzen [Saaty74, Saaty78].

Die Wahl der Zugehörigkeitsfunktionen sowie der Operatoren ist eng mit Aspekten der Entscheidungstheorie verknüpft. In [French88, French84] wird auf die dabei zu berücksichtigenden Probleme eingegangen. Vergleichbare Ansätze zur Wahl eines Wahrscheinlichkeitsmaßes im Rahmen der subjektiven Wahrscheinlichkeitstheorie werden in den Aufsätzen [Winkler67a] und [Winkler67b] diskutiert.

In ingenieurwissenschaftlichen Anwendungen spielt die Wahl der Zugehörigkeitsfunktion allerdings eine weniger wichtige Rolle, da oft nur die qualitativen Eigenschaften von Funktionen (wie z.B. die Monotonie in einem gewissen Bereich) gebraucht und reelle Zahlen nur aus Darstellungsgründen benutzt werden, was man oft mit einer Sensitivitätsanalyse nachweisen kann. Trotzdem sollte diese Tatsache Anwender nicht dazu verleiten, Fuzzy-Systeme mit ungenauen mathematischen Methoden implementieren zu wollen.

### 2.8.4 Fuzzy-Logik

Fuzzy-Logik wird im Kontext mehrwertiger Logiken gesehen. Denn obwohl die Begründung der Fuzzy-Mengen L.A. Zadeh zugeschrieben wird, war er nicht der erste, der anstelle der zwei Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“ das Einheitsintervall zuließ. Bereits 1922 diskutierte J. Łukasiewicz eine Logik mit Wahrheitswerten aus dem Einheitsintervall als Verallgemeinerung seiner dreiwertigen Logik, in der er neben den Werten 0 („falsch“) und 1 („wahr“) auch den Wert  $\frac{1}{2}$  („unbestimmt“) betrachtete. Eine Sammlung der wichtigsten Veröffentlichungen Łukasiewiczs findet sich in [Łukasiewicz30]. Die Idee, von der Zweiwertigkeit der klassischen Logik abzuweichen, wurde bereits 1878 von H. MacColl [MacColl78] erwähnt. Seitdem wurden verschiedene mehrwertige Logiken entwickelt, die jedoch nur zu einem geringen Teil auf dem Einheitsintervall basieren. Eine Einführung in das Thema mehrwertige Logik geben [Rosser52] und [Rescher69], ein Werk, das einen ausführlichen historischen Überblick bis 1969 enthält, sowie L. Bolc und P. Borowik [Bolc92].

Die Verwendung von mehr als zwei Wahrheitswerten kann dadurch motiviert werden, daß weitere Wahrheitswerte neben „wahr“ und „falsch“ mit einer konkreten Bedeutung (z.B. „unbestimmt“) benötigt werden. Außerdem induziert ein syntaktisches Deduktionsverfahren im allgemeinen eine Lindenbaum-Algebra, die als Menge der Wahrheitswerte verwendet werden kann. Die Lindenbaum-Algebra erhält man als Quotientenmenge der logischen Ausdrücke nach der Äquivalenzrelation, bei der zwei logische Ausdrücke  $\varphi$  und  $\psi$  genau dann als äquivalent angesehen werden, wenn sich sowohl  $\varphi$  aus  $\psi$  als auch  $\psi$  aus  $\varphi$  mit Hilfe des syntaktischen Deduktionsverfahrens herleiten läßt. Das Deduktionsverfahren induziert eine Ordnungsrelation auf den Äquivalenzklassen, wobei die Äquivalenzklasse von  $\varphi$  genau dann kleiner oder gleich der Äquivalenzklasse von  $\psi$  ist, falls sich  $\psi$  aus  $\varphi$  syntaktisch beweisen läßt. Im Falle der klassischen Logik sind Lindenbaum-Algebren Boolesche Algebren. Für die intuitionistische Logik ergeben sich Heyting-Algebren [Dummett77], während die Łukasiewicz-Logik MV-Algebren [Chang58] induziert. In der Logik spielt das Einheitsintervall unter den MV-Algebren fast dieselbe zentrale Rolle wie die zweielementige Boolesche Algebra unter den Booleschen Algebren. Daher wird die auf dem Einheitsintervall basierende Fuzzy-Logik eng mit der Łukasiewicz-Logik assoziiert.

Der Zugang zur Logik über Lindenbaum-Algebren ist vor allem algebraisch und verbandstheoretisch orientiert [Rasiowa70], doch läßt sich Logik auch aus der Sicht der Kategorientheorie motivieren wie etwa in der Topos-Theorie [Goldblatt79]. Fuzzy-Mengen lassen sich in der Topos-Theorie als charakterisierende Morphismen (Funktionen) von Subobjekten (Untermengen) interpretieren. Allerdings ist die Topos-Theorie eher mit der intuitionistischen Logik verbunden als mit der Łukasiewicz-Logik. Einen Überblick über die Zusammenhänge zwischen Fuzzy-Mengen und Kategorientheorie geben [Höhle91, Stout91] und [Rodabaugh92].

In den kategorientheoretischen Ansätzen spielen neben der unscharfen Elementbeziehung auch unscharfe Gleichheit und lokale Existenz eine wichtige Rolle. Lokale Existenz bedeutet, daß der einem Objekt zugeordnete Existenzgrad kleiner als 1 ist. In

der Fuzzy-Logik werden unscharfe Gleichheit und lokale Existenz selten betrachtet, obwohl die Konzepte der Gleichheit und der Existenz fundamental für jede Prädikatenlogik sind. Dagegen findet man in der Literatur neben den üblichen Existenz- und Allquantoren andere *linguistische Quantoren* wie „viele,“ „die meisten,“ „einige“ usw. [Zadeh83a, Bouchon-Meunier92, Dubois90]

Eine Fuzzy-Logik, in der Unschärfe durch die Ununterscheidbarkeit möglicher Welten entsteht, die durch Fuzzy-Ähnlichkeitsrelationen modelliert wird, ist in [Ruspini91] beschrieben.

### 2.8.5 Das SOLD-System — Eine Implementierung

Ein sehr wichtiges Anwendungsgebiet der Theorie der Fuzzy-Mengen ist die Modellierung und statistische Analyse mit Vagheit behafteter Daten. Dabei haben wir zwischen den zwei schon angesprochenen Sichtweisen vager Daten zu unterscheiden. Die erste betrachtet ein vages Datum als real vorhandenes Objekt. Als Beispiel sei ein physikalisches Graubild genannt. Diese Sichtweise wird daher auch als *objektbezogene* Interpretation vager Daten bezeichnet. Bei der zweiten, der *epistemischen* Interpretation, werden vage Daten nur zur Beschreibung eines nicht exakt zugänglichen, jedoch existierenden präzisen Wertes verwandt. Bei der ersten Interpretation untersucht man also nicht reellwertige Daten, sondern komplexere Objekte. Im einfachsten Fall handelt es sich hierbei um Mengen, wie sie im Rahmen der Theorie der zufälligen Mengen [Matheron75, Kendall74, Stoyan87] auftreten.

Der Schlüssel für statistische Analysen nichtklassischer Daten liegt immer in einem entsprechenden „Gesetz der großen Zahlen,“ dessen Gültigkeit für den Fall mengenwertiger Daten in [Artstein75] bewiesen wurde. Für Fuzzy-Daten kann man einen analogen Satz nachweisen [Ralescu82, Puri86, Kruse82c], der es gestattet, eine Fuzzy-Wahrscheinlichkeitstheorie zu entwickeln und damit das Fundament für eine mathematische Statistik mit Fuzzy-Daten zu legen [Kruse82c, Kruse84]. In den Büchern [Bandemer92, Kruse87d] wird die Fuzzy-Datenanalyse und deren praktische Anwendbarkeit detailliert beschrieben. Vergleichbare Ansätze sind in [Gil88, Czogala86] [Hirota81] diskutiert worden.

Bei der epistemischen Interpretation wird die Existenz eines (unbekannten) Originalwertes vorausgesetzt, so daß Fuzzy-Mengen zur Beschreibung der Vagheit und Unsicherheit über die genaue Lage dieses Originals in einer Menge möglicher Werte dienen. Auf diese Interpretation von Fuzzy-Mengen gehen wir ausführlich in Kapitel 3 ein. Üblicherweise benutzt man den Ausdruck „Possibilitätsverteilung“ statt „Fuzzy-Menge mit epistemischer Interpretation.“ Die Idee, solche Daten statistisch zu analysieren, wird erstmals in [Kwakernaak78a, Kwakernaak78b] beschrieben. In [Kruse87d, Kruse92] werden einige Aspekte der statistischen Inferenz possibilistischer Daten behandelt. Die dort analysierten Methoden sind in das aus über 20.000 Zeilen PASCAL-Code bestehende Softwaretool SOLD (Statistics On Linguistic Data) eingegangen [Kruse87a, Kruse89]. In [Bandemer92] finden sich ähnliche Methoden. Weitere Untersuchungen zur Semantik vager Daten sind [Gebhardt92a] zu entnehmen.

Als ein Beispiel für die Umsetzung vieler in diesem Kapitel besprochener Konzepte, Methoden und Resultate werden wir kurz das Softwaretool SOLD (Statistics On Linguistic Data) vorstellen, das die Modellierung und statistische Analyse durch Fuzzy-Mengen interpretierbarer linguistischer Daten unterstützt [Kruse89]. Kommerzielle Versionen von SOLD, die im Rahmen eines Kooperationsvertrages zwischen dem Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund der Technischen Universität Braunschweig und der Siemens AG München in PASCAL-XT entwickelt wurden, laufen unter den Betriebssystemen BS2000 und SINIX.

Die Anwendung des SOLD-Systems besteht aus zwei konzeptionell getrennt zu betrachtenden Schritten.

Im ersten Schritt (*Spezifikationsphase*) ermöglicht SOLD seinem Benutzer, eine Applikationsumgebung zu entwickeln (z.B. zur Analyse von Wetterdaten), die aus einer endlichen Menge von *Attributen* (z.B. *Bewölkung*, *Temperatur*, *Niederschlag*) mit zugehörigen *Wertebereichen* besteht (Intervalle reeller Zahlen, etwa  $[0, 100]$  für den Bedeckungsgrad des Himmels in %). Für jedes Attribut  $A$  gibt der Benutzer verschiedene (möglicherweise parametrisierte) *elementare linguistische Werte* vor (z.B. *wolkig* bzw. *ungefähr(75)* als vage Bedeckungsgrade) und definiert für jeden dieser linguistischen Werte  $w$  die ihm als Interpretation zuzuordnende Fuzzy-Menge  $\mu_w$ . SOLD stellt hierfür 15 verschiedene Klassen parametrisierter Fuzzy-Mengen von  $\mathbb{R}$  (z.B. in Form von Dreieck-, Rechteck-, Trapez-, Gauß- und Exponentialfunktionen) sowie 16 logische bzw. arithmetische, nach dem Extensionsprinzip verallgemeinerte Operatoren (*und*, *oder*, *nicht*,  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ,  $/$ ,  $**$ ) und Funktionen (z.B.  $\exp$ ,  $\log$ ,  $\min$ ,  $\max$ ) zur Verfügung.

Die Verwendung kontextfreier generierender Grammatiken  $G_A$  gestattet die Verknüpfung elementarer linguistischer Werte mittels logischer Operatoren (*und*, *oder*, *nicht*) und sogenannter linguistischer Hecken (z.B. *sehr* und *ziemlich* zur Spezifitätsverstärkung bzw. -abschwächung vager Konzepte). Dadurch entstehen die formalen Sprachen  $L(G_A)$  der zur Beschreibung der Werte der Attribute  $A$  zulässigen linguistischen Ausdrücke (z.B. *wolkenlos oder heiter* als linguistischer Ausdruck bezüglich des Attributs *Bewölkung*).

Im zweiten Schritt (*Analysephase*) können die in der Spezifikationsphase entworfenen Anwendungsumgebungen verwendet werden, um Zufallsstichproben durch Tupel linguistischer Ausdrücke zu beschreiben. Da die Stichproben aus real existierenden, aber im allgemeinen nicht exakt beobachteten Zahlenwerten bestehen, werden die den jeweiligen linguistischen Ausdrücken zugeordneten Fuzzy-Mengen epistemisch als vage Daten interpretiert.

Das SOLD-System erlaubt es, konvexe Fuzzy-Schätzer für diverse charakteristische Parameter der den Attributen zugrunde liegenden generischen Zufallsvariablen zu ermitteln (z.B. für Erwartungswert, Varianz, p-Quantile, Variationsweite). Des weiteren berechnet SOLD Fuzzy-Schätzungen für die unbekannt Parameter diverser Klassen vorgegebener Verteilungen und bestimmt auch Fuzzy-Tests für ein- bzw. zweiseitige Hypothesen bezüglich der Parameter normalverteilter Zufallsvariabler.

Die in SOLD verwendeten Algorithmen basieren im wesentlichen auf Resultaten über Fuzzy-Statistik, die in der Monographie [Kruse87d] vorgestellt wurden. Es ist anzumerken, daß die aus der traditionellen Statistik geläufigen Schätzfunktionen zwar ohne Probleme mit Hilfe des Extensionsprinzips von reellen Zahlen auf Fuzzy-Mengen verallgemeinert werden können, die betreffenden Zugehörigkeitsgrade der resultierenden Fuzzy-Schätzer außer in Trivialfällen jedoch kaum praktisch bestimmbar sind. In SOLD werden daher ausschließlich Fuzzy-Mengen der Klassen  $F_{D_k}(\mathbb{R})$  (vgl. Definition 2.39) benutzt. Die auszuführenden Operationen sind in diesem Fall gemäß Satz 2.40 auf die  $\alpha$ -Schnitte der beteiligten Fuzzy-Mengen reduzierbar. Die mit der genannten Einschränkung erzielte Vereinfachung garantiert allerdings nicht, daß auf diese Weise effiziente Implementierungen erzielt werden, da Operationen auf  $\alpha$ -Schnitten nicht elementarer Intervallarithmetik entsprechen. Man kann die auftretenden Schwierigkeiten bereits am folgenden Beispiel der Bestimmung eines Fuzzy-Schätzers für die Varianz erkennen:

Es sei  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  die bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsraumes  $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$  definierte Zufallsvariable und  $F_U$  ihre Verteilungsfunktion. Anhand einer Realisierung  $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$  der Zufallsstichprobe  $(U_1, \dots, U_n)$  mit vollständig unabhängigen und nach  $F_U$  identisch verteilten Zufallsvariablen  $U_1, \dots, U_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 2$ , läßt sich der Parameter  $\text{Var } U$  mit Hilfe der Stichprobenvarianz (d.h. dem modifizierten zweiten zentrierten Stichprobenmoment)

$$S_n(U_1, \dots, U_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n \left( U_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n U_j \right)^2 \right).$$

schätzen.  $S_n(U_1, \dots, U_n)$  ist ein erwartungstreuer, konsistenter Schätzer für  $\text{Var } U$ .

Ist  $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in [F_{D_k}(\mathbb{R})]^n$  für ein vereinbartes  $k \in \mathbb{N}$  die Beschreibung einer vagen Beobachtung von  $(u_1, \dots, u_n)$ , so erhalten wir nach dem Extensionsprinzip den folgenden Fuzzy-Schätzer für  $\text{Var } U$ :

$$\begin{aligned} \hat{S}_n : [F_{D_k}(\mathbb{R})]^n &\rightarrow [F_{D_k}(\mathbb{R})], \\ \hat{S}_n(\mu_1, \dots, \mu_n)(y) &= \sup \{ \min\{\mu_1(x_1), \dots, \mu_n(x_n)\} \mid \\ &\quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \wedge S_n(x_1, \dots, x_n) = y \}. \end{aligned}$$

Die Anwendung von Satz 2.40 führt auf die  $\alpha$ -Schnitte

$$\begin{aligned} &[\hat{S}_n(\mu_1, \dots, \mu_n)]_\alpha \\ &= S_n([\mu_1]_\alpha, \dots, [\mu_n]_\alpha) \\ &= \left\{ y \mid \exists (x_1, \dots, x_n) \in \times_{i=1}^n [\mu_i]_\alpha : S_n(x_1, \dots, x_n) = y \right\} \\ &= \left\{ y \mid \exists (x_1, \dots, x_n) \in \times_{i=1}^n [\mu_i]_\alpha : \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right)^2 = y \right\}. \end{aligned}$$

Da

$$S_n([\mu_1]_\alpha, \dots, [\mu_n]_\alpha) \subseteq \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( [\mu_i]_\alpha - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [\mu_j]_\alpha \right)^2,$$

gilt, Gleichheit aber im allgemeinen nicht gegeben ist, läßt sich  $S_n([\mu_1]_\alpha, \dots, [\mu_n]_\alpha)$  nicht durch elementare Intervallarithmetik bestimmen.

Der Realisierung von SOLD mußten daher weitere mathematische Betrachtungen vorausgehen, die der Entwicklung effizienter Algorithmen für die Berechnung von Fuzzy-Schätzern dienlich waren. Einige Ergebnisse sind in [Kruse87d, Gebhardt90] nachzulesen.

Die während der Analysephase durch statistische Inferenz bezüglich eines Attributs  $A$  berechnete Fuzzy-Menge  $\nu$  (z.B. Fuzzy-Schätzung für die Varianz der *Temperatur*) wird nicht — wie man auf den ersten Blick erwarten könnte — von SOLD in einen linguistischen Ausdruck rücktransformiert. Das Problem liegt darin, daß man im allgemeinen kein  $w \in L(G_A)$  finden wird, für das  $\nu \equiv \mu_w$  gilt. Folglich ist man auf *linguistische Approximation* von  $\nu$  angewiesen, also die Bestimmung solcher linguistischen Ausdrücke  $w$  aus  $L(G_A)$ , deren Interpretationen  $\mu_w$  die gegebene Fuzzy-Menge  $\nu$  möglichst gut annähern. Der *Abstand* zwischen Fuzzy-Mengen wird dabei mit Hilfe der *verallgemeinerten Hausdorffschen Pseudometrik*  $d_\infty$  gemessen, die durch

$$d_\infty(\mu, \mu') = \sup_{\alpha \in (0,1]} \{d_H([\mu]_\alpha, [\mu']_\alpha)\}, \quad (\mu, \mu') \in [F_C(\mathbb{R})]^2,$$

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} |a - b|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} |a - b| \right\}.$$

definiert ist;  $d_H$  nennt man die *Hausdorff-Pseudometrik* in  $\mathbb{R}$ .

Das Ziel der linguistischen Approximation ist es demnach, ein  $w_{\text{opt}} \in L(G_A)$  zu ermitteln, für das

$$\forall w \in L(G_A) : \quad d_\infty(\mu_{w_{\text{opt}}}, \nu) \leq d_\infty(\mu_w, \nu).$$

gilt.

Da diese Optimierungsaufgabe meistens sehr schwierig ist und bei ungünstig gewählter Sprache  $L(G_A)$  zu unbefriedigenden Approximationen führen kann (zu großer Hausdorff-Abstand oder zu komplizierte linguistische Ausdrücke), benutzt SOLD die Sprache  $L(G_A)$  nur zur Benennung der in den auf  $A$  bezogenen Stichproben auftretenden vagen Daten. SOLD berechnet zwar den Hausdorff-Abstand  $d_\infty(\mu_w, \nu)$  zwischen  $\nu$  und einer vom Benutzer durch einen geeignet erscheinenden linguistischen Ausdruck  $w \in L(G_A)$  vorgegebenen Fuzzy-Menge  $\mu_w$ , führt jedoch keine eigenständige linguistische Approximation durch, zumal der aus ihr hervorgehende linguistische Ausdruck dem sich der statistischen Inferenz anschließenden Entscheidungsprozeß (*Decision Making*) ohnehin nicht nützen würde.

Abbildung 2.18: Das SOLD-System

Zur Illustration der Benutzung des SOLD-Systems stellen wir abschließend einen Ausschnitt aus einer Sitzung vor, die einer Prototyp-Version des Softwaretools unter dem Betriebssystem GEMDOS entnommen wurde.

## 2.8.6 Übungsaufgaben

**Aufgabe 2.1** Es sei  $(A_\alpha)_{\alpha \in [0,1]}$  das durch

$$A_\alpha = \begin{cases} \left[1 - \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}, 1 + \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}\right], & \text{falls } \alpha > 0 \\ \mathbb{R}, & \text{falls } \alpha = 0. \end{cases}$$

definierte Mengensystem.

Zeigen Sie, daß dieses System die Bedingungen aus Definition 2.15 erfüllt, und bestimmen Sie die zugehörige Fuzzy-Menge  $\mu \in F(\mathbb{R})$ .

**Aufgabe 2.2** Weisen Sie nach, daß die Yager-Familie von  $t$ -Normen und  $t$ -Conormen folgende Eigenschaften hat:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \top_p''(a, b) = \top_{-1}(a, b),$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \perp_p''(a, b) = \perp_{-1}(a, b),$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \top_p''(a, b) = \top_{\min}(a, b),$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \perp_p''(a, b) = \perp_{\min}(a, b).$$

$C_p''(a) \stackrel{\text{def}}{=} (1 - a^p)^{\frac{1}{p}}$  sei das Yager-Komplement.

Zeigen Sie, daß  $\perp_p''(a, C_p''(a)) = 1$  gilt.

**Aufgabe 2.3** Berechnen Sie die Summe zweier Fuzzy-Intervalle vom Typ

$$\mu_{r,s}(t) = e^{-\left(\frac{t-r}{s}\right)^2}, \quad r, s \in \mathbb{R}, \quad s > 0.$$

**Aufgabe 2.4** Bestimmen Sie eine Mengenrepräsentation von

$$\mu : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad \mu(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, & \text{falls } -1 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{falls } 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und berechnen Sie damit den Reziprokwert von  $\mu$ .

**Aufgabe 2.5** Es sei  $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ;  $\phi(a, b) = \max\{a, b\}$ .

$$\mu_1 : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]; \quad \begin{array}{l} \mu_1(0) = 1, \quad \mu_1(1) = 0.5, \quad \mu_1(2) = 0.2, \\ \mu_1(3) = 0.1, \quad \mu_1(n) = 0, \quad \text{für } n \geq 4, \end{array}$$

$$\mu_2 : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]; \quad \begin{array}{l} \mu_2(0) = 0.1, \quad \mu_2(1) = 0.4, \quad \mu_2(2) = 0.9, \\ \mu_2(n) = 0, \quad \text{für } n \geq 3. \end{array}$$

Bestimmen Sie  $\hat{\phi}(\mu_1, \mu_2)$ .



**Aufgabe 2.6** Es sei  $(X, \delta)$  ein metrischer Raum.

Zeigen Sie, daß  $E_\delta$  mit  $E_\delta(x, x') = 1 - \min\{\delta(x, x'), 1\}$  eine Gleichheitsrelation bezüglich  $\top_{\text{Luka}}$  ist.

**Aufgabe 2.7** Wir betrachten eine Referenzmenge  $X = \{m, w\}$  und Fuzzy-Mengen  $\mu_1 : X \rightarrow [0, 1]$ ,  $\mu_2 : X \rightarrow [0, 1]$  mit  $\mu_1(m) = 0.8$ ,  $\mu_1(w) = 0.2$ ,  $\mu_2(m) = 0.4$ ,  $\mu_2(w) = 0.6$ . Außerdem sei  $C = \{c_1, \dots, c_{10}\}$  eine Kontextmenge mit den Bewertungen  $P(\{c_i\}) = 0.1$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ . Bestimmen Sie zufällige Mengen  $\Gamma'_1, \Gamma''_1, \Gamma'_2, \Gamma''_2$  mit den Eigenschaften  $\mu_{\Gamma'_1} = \mu_{\Gamma''_1} = \mu_1$ ,  $\mu_{\Gamma'_2} = \mu_{\Gamma''_2} = \mu_2$ ,

$$\mu_{\Gamma'_1 \cap \Gamma'_2}(x) = \max\{0, \mu_{\Gamma'_1}(x) + \mu_{\Gamma'_2}(x) - 1\}$$

und

$$\mu_{\Gamma''_1 \cap \Gamma''_2}(x) = \min\{\mu_{\Gamma''_1}(x), \mu_{\Gamma''_2}(x)\}.$$

**Aufgabe 2.8** Zeigen Sie, daß die Ungleichung in Beispiel 2.50 erfüllt ist.

**Aufgabe 2.9** Es seien  $\top$  und  $\top'$  zwei  $t$ -Normen, für die  $\top' \leq \top$  gilt. Zeigen Sie: Ist  $E : X \times X \rightarrow [0, 1]$  eine Gleichheitsrelation bezüglich  $\top$ , so ist  $E$  auch eine Gleichheitsrelation bezüglich  $\top'$ .

**Aufgabe 2.10** Zeigen Sie, daß durch die Gleichung (2.41) eine Gleichheitsrelation bezüglich der  $t$ -Norm  $\top_{\min}$  auf  $F(X)$  definiert wird.

**Aufgabe 2.11** Formulieren und beweisen Sie ein Analogon zu Satz 2.70, in dem die Lukasiewicz-Implikation durch die Gödel-Implikation ersetzt wird.

**Aufgabe 2.12** Es seien  $E$  und  $F$  Gleichheitsrelationen bezüglich der  $t$ -Norm  $\top$  auf den Mengen  $X$  beziehungsweise  $Y$ .

Zeigen Sie, daß durch  $G((x, y), (x', y')) = \top(E(x, x'), F(y, y'))$  eine Gleichheitsrelation bezüglich  $\top$  auf  $X \times Y$  definiert wird.



# Kapitel 3

## Approximatives Schließen

Seit einiger Zeit setzt sich im Bereich der Künstlichen Intelligenz immer mehr die Auffassung durch, daß eine semantische Fundierung der Einbeziehung von Vagheits- und Unsicherheitsaspekten in die allgemeine Konzeption wissensbasierter Systeme unumgänglich ist. So gibt es nach eher heuristisch agierenden Systemen wie MYCIN [Buchanan84] (medizinische Diagnose) inzwischen unter anderem einige wahrscheinlichkeitstheoretisch abgesicherte professionelle Tools, die *approximatives Schließen* anhand unscharfen Wissens erlauben. Besonders erwähnt seien HUGIN [Andersen89] und PATHFINDER [Heckerman90].

Gegenstand dieses Kapitels ist die Untersuchung eines alternativen Zugangs zu approximativem Schließen, der sich statt auf *probabilistisches* auf *possibilistisches* Schließen bezieht. Wir stellen ein Konzept possibilistischen Fokussierens vor, das dadurch von den meisten anderen Ansätzen abweicht, daß wir Possibilitätsverteilungen als *informationskomprimierte* Darstellungen (nicht notwendigerweise geschachtelter) Zufallsfolgen (siehe Abschnitt 2.6.1) interpretieren und eine auf die Erfüllung von Nebenbedingungen (Constraints) bezogene Sichtweise des possibilistischen Schließens bevorzugen, die *nicht* auf einem spezifischen Konditionierungskonzept für unsicheres Wissen basiert.

In Abschnitt 3.1 untersuchen wir die wichtige Unterscheidung zwischen einem *vagen Konzept* und einem *vagen Datum*. Die epistemische Interpretation von Fuzzy-Mengen, die mit der vagen Beschreibung von Daten verbunden ist, führt uns zum Begriff der *Possibilitätsverteilung* und damit zu den Grundlagen der Possibilitätstheorie. Sollen anhand vager Daten Entscheidungen getroffen werden, so sind diese als Folge der auftretenden Vagheit stets mit einer gewissen *Unsicherheit* behaftet. Dies legt die Einführung verschiedener *Unsicherheitsmaße* nahe, die mit den aus der Maßtheorie bekannten Wahrscheinlichkeitsmaßen verglichen werden können.

In Abschnitt 3.2 zeigen wir eine Anwendung von Possibilitätsverteilungen im Bereich der Künstlichen Intelligenz, indem wir ein Expertensystem konzipieren, das approximatives Schließen realisiert, wenn sich generelles, bezüglich einer Anwendungsdomäne verfügbares *Expertenwissen* (als unscharfe Regeln) sowie spezielles, situationsabhängiges, durch Beobachtungen erhaltenes und dem *Fokussieren* dienendes *Evidenzwissen*

(in Form unscharfer Fakten) mit Hilfe von Possibilitätsverteilungen auf einem mehrdimensionalen Betrachtungsuniversum repräsentieren lassen. Wie man solche Possibilitätsverteilungen als Interpretation von (possibilistischen) Inferenzregeln bestimmen kann, wird in Abschnitt 3.3 behandelt.

Ziel von Abschnitt 3.4 ist es, im Gegensatz zu den vorhergehenden Betrachtungen nicht die innerhalb der Wissensbasis existierenden *quantitativen* Abhängigkeiten zu untersuchen, sondern die Repräsentation *qualitativer* Abhängigkeiten durch Hypergraphen zur Entwicklung effizienter Propagationsalgorithmen auszunutzen.

Abschnitt 3.5 stellt einen alternativen Ansatz des approximativen Schließens vor: logikbasierte Inferenzmechanismen. In den ergänzenden Bemerkungen des Abschnittes 3.6 findet sich neben zahlreichen Quellenangaben und einem Implementierungsbeispiel auch eine Kurzdarstellung weiterer, aus der Literatur bekannter Zugänge zur Possibilitätstheorie.

### 3.1 Possibilitätsverteilungen und Unsicherheitsmaße

Wir befassen uns in diesem Kapitel mit Methoden der Wissensrepräsentation und -propagation für solche Systeme, die auf der Anwendung der Theorie der Fuzzy-Mengen beruhen und eine Wissensbasis aufweisen, die aus konjunktiv miteinander verknüpften *Inferenzregeln* der Form

*R: If  $X$  is  $\mu_X$  then  $Y$  is  $\mu_Y$*

bestehen, in denen  $X, Y$  zwei verschiedene, einen Objekttyp (partiell) beschreibende Attribute und  $\mu_X, \mu_Y$  Fuzzy-Mengen auf den Wertebereichen der diesen Attributen zugeordneten Datentypen sind.

Als einfaches Beispiel betrachten wir die vage Aussage

*Schnelle Autos sind teuer*

angeführt. Sie stellt zwei Eigenschaften eines Autos — nämlich seine (Höchst-) *Geschwindigkeit* und seinen (Neu-) *Preis* —, in eine vage Relation zueinander, die mit Hilfe der durch Fuzzy-Mengen interpretierbaren vagen Konzepte *schnell* und *teuer* beschrieben wird. Als Inferenzregel, die der oben genannten vagen Aussage entspricht, ergibt sich

*R: if  $Geschwindigkeit$  is  $schnell$  then  $Preis$  is  $teuer$ ,*

wobei man etwa von den Wertebereichen  $\text{Dom}(Geschwindigkeit) = [0, 300]$  (in km/h) und  $\text{Dom}(Preis) = [0, 500.000]$  (in DM) ausgehen könnte.

Bei der Betrachtung vager Regeln treten prinzipiell zwei Schwierigkeiten auf, nämlich

- (a) das Problem, wie eine vage Regel interpretiert und dann mit Hilfe einer geeigneten Fuzzy-Menge repräsentiert werden kann, und
- (b) das Problem, wie man zu einem semantisch fundierten Inferenzmechanismus gelangt, der approximatives Schließen anhand eines konjunktiven Systems vager Regeln und konkret vorgegebener vager Daten erlaubt.

In unserem einführenden Beispiel kann man als Lösung für (a) eine  $R$  repräsentierende *Fuzzy-Relation*

$$\mu_R : \text{Dom}(\textit{Geschwindigkeit}) \times \text{Dom}(\textit{Preis}) \rightarrow [0, 1]$$

aufstellen.

Das in (b) angesprochene approximative Schließen könnte etwa so motiviert sein, daß wir anhand des vorliegenden Regelsystems mehr über ein bestimmtes Auto  $A$  zu erfahren wünschen, über das lediglich bekannt ist, daß seine Höchstgeschwindigkeit sprachlich als *mäßig schnell* bezeichnet und durch eine Fuzzy-Menge  $\mu_F$  beschrieben wird. Es stellt sich dann die Frage, was aus

dem vagen Faktum  $F$  : *Geschwindigkeit is mäßig schnell*  
 und der vagen Regel  $R$  : **If** *Geschwindigkeit is schnell*  
**then** *Preis is teuer*

über den Preis von  $A$  ausgesagt werden kann.

Als Resultat des Inferenzmechanismus müßte ein durch eine Fuzzy-Menge  $\mu : \text{Dom}(\textit{Preis}) \rightarrow [0, 1]$  festgelegtes und nur von  $\mu_F$  und  $\mu_R$  abhängendes vages Datum ermittelt werden. Wenn wir approximatives Schließen alternativ mit Hilfe mehrwertiger Logiken erklären, so ist  $R$  als *Implikationsregel* interpretierbar, und der auf  $F$  und  $R$  anzuwendende Inferenzmechanismus entspricht einer Verallgemeinerung des aus der zweiwertigen Logik bekannten Modus Ponens. Die Verallgemeinerung besteht darin, daß die Voraussetzungen für die Anwendung des Modus Ponens abgeschwächt werden, denn der Modus Ponens liefert nur bei Übereinstimmung der Prämisse  $F$  mit dem Antecedenz von  $R$  (*Geschwindigkeit is schnell*) als Konklusion die Konsequenz von  $R$  (*Preis is teuer*), was offenbar nicht mit unserem Beispiel vereinbar ist, da *mäßig schnell* und *schnell* sicherlich durch verschiedene Fuzzy-Mengen repräsentiert werden.

Wie wir bereits im letzten Kapitel angesprochen haben, bestand Zadeh's ursprüngliche Idee bei der Entwicklung der Theorie der Fuzzy-Mengen darin, den Begriff der charakteristischen Funktion einer gewöhnlichen Menge so zu erweitern, daß nicht nur zwischen Zugehörigkeit und Nicht-Zugehörigkeit der Elemente einer vorgegebenen Referenzmenge zu einer interessierenden Untermenge unterschieden wird, sondern auch graduelle Zugehörigkeit zugelassen ist. Ein wichtiges Motiv für diese Erweiterung ergab sich aus der Absicht, mit Vagheit behaftete Aussagen, wie sie im täglichen Leben gebräuchlich sind und daher auch als unscharfe Expertenmeinungen im Bereich der wissensbasierten

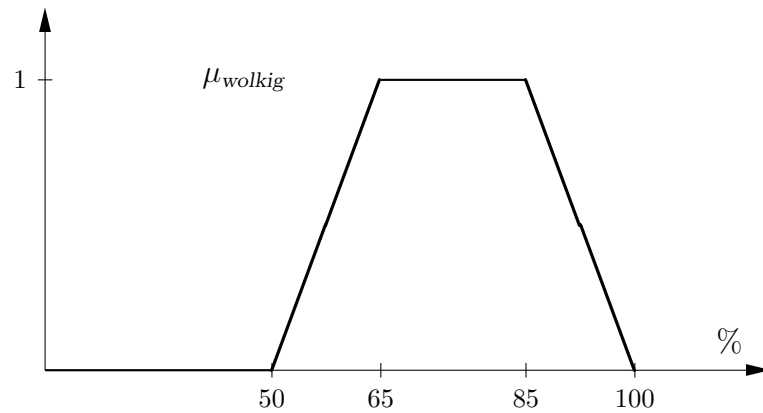


Abbildung 3.1: Interpretation des vagen Konzeptes *wolkig* durch eine Fuzzy-Menge

Systeme auftreten, innerhalb eines hierfür geeigneten formalen Rahmens quantitativ repräsentieren und interpretieren zu können.

So ist z.B. „Es ist wolkig“ eine Aussage, in der ein (abstraktes) Objekt (nämlich das Wetter) mit Hilfe eines vagen Konzeptes (*wolkig*) in bezug auf ein Attribut des Wetters (Bedeckungsgrad) beschrieben wird. Die angegebene vage Aussage spiegelt sehr deutlich das im Alltag gebräuchliche und auch vernünftige Verhalten wider, Informationen nur auf das situativ Wesentliche zu reduzieren, um dadurch die Kommunikation zu vereinfachen. In diesem Sinne ist die Verwendung des vagen Konzeptes *wolkig* in den meisten Fällen nützlicher, als von einem zweifelsohne präziser von einem Bedeckungsgrad von 71.26 % zu sprechen, zumal es in der Praxis für einen Beobachter ohnehin äußerst schwierig sein dürfte, ohne erheblichen technischen Aufwand derart genaue Angaben machen zu können. Fassen wir *wolkig* als sprachliche Beschreibung eines durch eine Fuzzy-Menge interpretierten vagen Konzeptes auf, so ist die in Abbildung 3.1 graphisch dargestellte Fuzzy-Menge  $\mu_{\text{wolkig}}$  eine denkbare Interpretation.

Wir fassen  $\mu_{\text{wolkig}} : X \rightarrow [0, 1]$  mit der Referenzmenge  $X = [0, 100]$  aller möglichen Bedeckungsgrade als Fuzzy-Menge der als *wolkig* zu bezeichnenden Bedeckungsgrade auf und  $\mu_{\text{wolkig}}(x)$  als denjenigen *Zugehörigkeitsgrad*, mit dem  $x \in X$  dem vagen Konzept *wolkig* zuzuordnen ist, d.h. als denjenigen Grad, mit dem  $x$  aufgrund der gewählten Interpretation durch die Fuzzy-Menge  $\mu_{\text{wolkig}}$  als *wolkig* zu bezeichnen ist.

Diese *konzeptorientierte Sichtweise* von  $\mu_{\text{wolkig}}$  als Fuzzy-Menge genügt jedoch nicht, wenn wir beispielsweise den an der Wetterstation Hannover-Flughafen am 3.8.1992 um 14.00 Uhr MESZ vorliegenden Bedeckungsgrad angeben wollen. Dann dient *wolkig* eher als sprachliche Beschreibung eines *vagen Datums*, da uns in diesem Fall nicht so sehr interessiert, was man konzeptionell unter *wolkig* versteht, sondern wir setzen voraus, daß zum oben genannten Zeitpunkt und angegebenen Ort ein bestimmter Bedeckungsgrad  $x_0 \in [0, 100]$  existierte, den wir aufgrund der uns zur Verfügung stehenden Informationen jedoch nur mit Hilfe des vagen Datums *wolkig* beschreiben wollen. Dies ist die sogenannte *epistemische Interpretation* der charakteristischen Funktion  $\mu_{\text{wolkig}}$  als

*Possibilitätsverteilung*, in der  $\mu_{\text{wolkig}}(x)$  als *Möglichkeitsgrad* angesehen wird, mit dem  $x \in X$  dem vorhandenen, aber nicht genau meßbaren Bewölkungsgrad  $x_0$  entspricht.

$\mu_{\text{wolkig}}(x) = 0$  bedeutet, daß  $x = x_0$  unmöglich ist,

$\mu_{\text{wolkig}}(x) = 1$  hingegen, daß  $x = x_0$  ohne jede Einschränkung als möglich erachtet wird,

$\mu_{\text{wolkig}}(x) \in (0, 1)$  schließlich, daß  $x = x_0$  zu dem durch  $\mu_{\text{wolkig}}(x)$  spezifizierten Grad aufgrund des vorliegenden vagen Datums  $\mu_{\text{wolkig}}$  als möglich anzusehen ist.

Fuzzy-Mengen und Possibilitätsverteilungen haben also bezüglich ihrer Repräsentation die gleiche mathematische Beschreibung, jedoch verschiedene Interpretationen. Zwischen beiden Begriffsbildungen besteht allerdings ein so enger semantischer Zusammenhang, daß wir fast alle der in Kapitel 2 erarbeiteten Resultate über Fuzzy-Mengen — insbesondere auch das Extensionsprinzip — auf Possibilitätsverteilungen übertragen können. Wird nämlich z.B. die angegebene Funktion  $\mu_{\text{wolkig}}$  als Possibilitätsverteilung und damit als unscharfe Beschreibung eines real existierenden Bedeckungsgrades  $x_0$  angesehen, so läßt sich dieser Sachverhalt auch so interpretieren, daß  $x_0$  per Voraussetzung das vage Konzept *wolkig* erfüllt, die zugehörige Fuzzy-Menge  $\mu_{\text{wolkig}} \in F([0, 100])$  demnach die Menge der für  $x_0$  möglichen Werte ist und  $\mu_{\text{wolkig}}(x)$  für beliebiges  $x \in [0, 100]$  folglich nicht nur den Grad angibt, mit dem  $x$  zu  $\mu_{\text{wolkig}}$  gehört, sondern auch den Möglichkeitsgrad, mit dem  $x = x_0$  gilt,  $x$  also die gesuchte Originalbewölkung  $x_0$  ist.

Jede Possibilitätsverteilung läßt sich formal auf diese Weise als Fuzzy-Menge behandeln, und umgekehrt kann jede die *Normalisiertheitseigenschaft* ( $\exists x \in X : \mu(x) = 1$ ) erfüllende Fuzzy-Menge  $\mu \in F(X)$  auch als Possibilitätsverteilung über  $X$  angesehen werden. Man spricht dann von der *epistemischen Interpretation dieser Fuzzy-Menge als Possibilitätsverteilung*. Die Forderung der Normalisiertheit von Possibilitätsverteilungen beruht auf der Überlegung, daß es für jede einen existierenden Objektzustand  $x_0 \in X$  unscharf beschreibende Possibilitätsverteilung mindestens ein Element  $x$  der Referenzmenge geben muß, für das  $x = x_0$  ohne jede Einschränkung für möglich gehalten wird. Andernfalls wäre die gewählte Beschreibung in sich nicht konsistent. Die Voraussetzung  $x_0 \in X$  nennt man auch *Closed World Assumption*, d.h., der unbekannte Objektzustand  $x_0$  ist mit Sicherheit ein Element der in die Betrachtungen einbezogenen Menge  $X$  der prinzipiell möglichen Objektzustände.

Um Possibilitätsverteilungen von Fuzzy-Mengen symbolisch zu unterscheiden, werden wir Possibilitätsverteilungen meist mit  $\pi$  bezeichnen, die ihnen zugrunde liegende Referenzmenge, die man gerade im Zusammenhang mit Anwendungen im Bereich der wissensbasierten Systeme vielfach auch *Universum* (Universe of Discourse) nennt, mit  $\Omega$ . Für den uns unbekanntem Objektzustand, der uns interessiert und den wir durch eine Possibilitätsverteilung  $\pi_0$  beschreiben, verwenden wir das Zeichen  $\omega_0$ .

**Definition 3.1** Eine **Possibilitätsverteilung**  $\pi$  über  $\Omega$  ist eine Funktion von der Grundmenge (Referenzmenge) bzw. dem **Universum**  $\Omega$  in das Einheitsintervall, d.h.

$$\pi : \Omega \rightarrow [0, 1],$$

für die  $(\exists \omega \in \Omega : \pi(\omega) = 1)$  (**Normalisiertheitseigenschaft**) erfüllt ist.

$\text{POSS}(\Omega)$  bezeichne die Menge aller Possibilitätsverteilungen über  $\Omega$ .

Der Name „Possibilitätsverteilung“ ist in Anlehnung an den aus der Wahrscheinlichkeitstheorie bekannten Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung gewählt worden. Betrachten wir einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$  mit Grundmenge  $\Omega$  der Elementarereignisse,  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{S}$  der zu bewertenden Ereignisse und Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$ , so bezieht sich einer der vielen Anwendungsbereiche von  $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$  auf die Beschreibung eines Zufallsexperiments, dessen mögliche Ausgänge in  $\Omega$  liegen. Für jedes beliebige Ereignis  $A \in \mathfrak{S}$  gibt  $P(A)$  die (objektive) *Wahrscheinlichkeit* dafür an, daß der außer in Trivialfällen (etwa  $|\Omega| = 1$ ) nicht vorhersagbare Ausgang des Experiments in  $A$  liegt. Auf analoge Weise kann man bei Verwendung von Possibilitätsverteilungen nach der *Möglichkeit* fragen, daß für den unbekanntem Objektzustand  $\omega_0 \in A$  gilt. Man beachte, daß die Semantiken dieser beiden Ansätze voneinander abweichen, denn es ist, um ein anschauliches Beispiel zu geben, ein großer Unterschied, ob es *möglich* oder *wahrscheinlich* ist, daß eine Person vier Eier zum Frühstück ißt.

Anstelle von Wahrscheinlichkeitsmaßen definieren wir im folgenden *Unsicherheitsmaße*, die sich eher an den Prinzipien *possibilistischen* denn *probabilistischen* Schließens orientieren.

Wenn eine Possibilitätsverteilung  $\pi_0 \in \text{POSS}(\Omega)$  für einen unbekanntem Objektzustand  $\omega_0 \in \Omega$  vorliegt, so gibt  $\text{Poss}_{\pi_0}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\pi_0(\omega) \mid \omega \in A\}$  für alle Kandidaten  $A \subseteq \Omega$  für  $\omega_0$  die Möglichkeit an, daß  $\omega_0 \in A$  wahr ist.

Es ist zu beachten, daß ein hoher Wert von  $\text{Poss}_{\pi_0}(A)$  keinesfalls ausreichend ist, um einigermaßen sicher sein zu können, daß  $\omega_0$  tatsächlich zu  $A$  gehört. Vielmehr sollte man auch  $\text{Poss}_{\pi_0}(\Omega \setminus A)$  berücksichtigen und  $\text{Nec}_{\pi_0}(A) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \text{Poss}_{\pi_0}(\Omega \setminus A)$  berechnen. Je höher der Wert von  $\text{Nec}_{\pi_0}(A)$ , um so sicherer kann man sein, daß  $\omega_0 \in A$  zutrifft. Diese Überlegungen motivieren die Definition der folgenden beiden Funktionen.

**Definition 3.2** Es sei  $\pi \in \text{POSS}(\Omega)$  eine Possibilitätsverteilung.

$$(a) \text{ Poss}_{\pi} : \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1],$$

$$\text{Poss}_{\pi}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\pi(\omega) \mid \omega \in A\}, \quad \text{sup } \emptyset = 0,$$

heißt das **Possibilitätsmaß von  $\pi$** .

$$(b) \text{ Nec}_{\pi} : \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1],$$

$$\text{Nec}_{\pi}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{1 - \pi(\omega) \mid \omega \in \Omega \setminus A\}, \quad \text{inf } \emptyset = 1,$$

heißt das **Notwendigkeitsmaß von  $\pi$** .



**Beispiel 3.3** Betrachten wir Abbildung 3.1 und nehmen wir an, daß  $\pi_0 \equiv \mu_{\text{wolkig}} \in \text{POSS}([0, 100])$  eine Possibilitätsverteilung ist, die den Bedeckungsgrad am Flughafen in Hannover am 8. März 1992 um 2 Uhr nachmittags angibt.

Indem wir  $A = [65, 70]$  wählen, erhalten wir  $\text{Poss}_{\pi_0}(A) = 1$  und  $\text{Nec}_{\pi_0}(A) = 0$ , was bedeutet, daß  $\omega_0 \in [65, 70]$  bezüglich  $\pi_0$  ohne Einschränkungen als möglich angesehen wird, aber in keiner Weise sicher (notwendig) ist. Es ist hervorzuheben, daß  $\pi_0$  nicht als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion interpretiert werden sollte, da  $\int_{[0,100]} \pi_0(\omega) d\omega = 35$  ist. Aber auch eine Normalisierung auf  $\pi'_0 \equiv \frac{1}{35} \pi_0$  ergibt für das von  $\pi'_0$  induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  den Wert  $P(A) = \frac{1}{7}$ , also ein Ergebnis, das von  $\text{Poss}_{\pi_0}(A)$  bzw.  $\text{Nec}_{\pi_0}(A)$ , abweicht.  $\square$

Beispiel 3.3 verdeutlicht, daß *Wahrscheinlichkeitstheorie* und *Possibilitätstheorie* (die Theorie der Possibilitätsverteilungen, Possibilitätsmaße und der zu ihnen dualen Notwendigkeitsmaße) ganz verschiedene Unsicherheitsphänomene modellieren. Zwar sind beide Ansätze wenigstens in dem Sinne verwandt, daß die Möglichkeit eines Ereignisses aus seiner Wahrscheinlichkeit folgt; aber während Wahrscheinlichkeitsmaße additiv sind, sind Possibilitätsmaße und Notwendigkeitsmaße subadditiv bzw. superadditiv.

Der folgende Satz faßt einige weitere Eigenschaften zusammen.

**Satz 3.4** Für alle  $\pi \in \text{POSS}(\Omega)$  und alle  $A, B \subseteq \Omega$  gilt:

- (a)  $\text{Poss}_{\pi}(\emptyset) = \text{Nec}_{\pi}(\emptyset) = 0$ ,
- (b)  $\text{Poss}_{\pi}(\Omega) = \text{Nec}_{\pi}(\Omega) = 1$ ,
- (c)  $\text{Poss}_{\pi}(A \cup B) = \max \{ \text{Poss}_{\pi}(A), \text{Poss}_{\pi}(B) \}$ ,
- (d)  $\text{Nec}_{\pi}(A \cap B) = \min \{ \text{Nec}_{\pi}(A), \text{Nec}_{\pi}(B) \}$ ,
- (e)  $\text{Poss}_{\pi}(A \cap B) \leq \min \{ \text{Poss}_{\pi}(A), \text{Poss}_{\pi}(B) \}$ ,
- (f)  $\text{Nec}_{\pi}(A \cup B) \geq \max \{ \text{Nec}_{\pi}(A), \text{Nec}_{\pi}(B) \}$ ,
- (g)  $\text{Nec}_{\pi}(A) \leq \text{Poss}_{\pi}(A)$ .

**B e w e i s :**

(a) und (b) sind trivial.

$$\begin{aligned}
 \text{(c) } \text{Poss}_{\pi}(A \cup B) &= \sup \{ \pi(\omega) \mid \omega \in A \cup B \} \\
 &= \sup \{ \pi(\omega) \mid \omega \in A \vee \omega \in B \} \\
 &= \max \{ \sup \{ \pi(\omega) \mid \omega \in A \}, \sup \{ \pi(\omega) \mid \omega \in B \} \} \\
 &= \max \{ \text{Poss}_{\pi}(A), \text{Poss}_{\pi}(B) \}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(d) \text{ Nec}_\pi(A \cap B) &= 1 - \text{Poss}_\pi(\Omega \setminus (A \cap B)) \\
&= 1 - \sup \{ \pi(\omega) \mid \omega \in \Omega \setminus A \vee \omega \in \Omega \setminus B \} \\
&= 1 - \max \{ \sup \{ \pi(\omega) \mid \omega \in \Omega \setminus A \}, \\
&\quad \sup \{ \pi(\omega) \mid \omega \in \Omega \setminus B \} \} \\
&= \min \{ 1 - \text{Poss}_\pi(\Omega \setminus A), 1 - \text{Poss}_\pi(\Omega \setminus B) \} \\
&= \min \{ \text{Nec}_\pi(A), \text{Nec}_\pi(B) \}.
\end{aligned}$$

(e) und (f) sind Folgerungen aus (c) und (d), wenn man beachtet, daß

$$C \subseteq D \implies \text{Nec}_\pi(C) \leq \text{Nec}_\pi(D)$$

und

$$C \subseteq D \implies \text{Poss}_\pi(C) \leq \text{Poss}_\pi(D)$$

für beliebige  $C, D \subseteq \Omega$  gelten.

(g) Für  $\text{Poss}_\pi(A) < 1$  erhalten wir unter Beachtung der Normalisiertheitseigenschaft von Possibilitätsverteilungen  $\text{Poss}_\pi(\Omega \setminus A) = 1$  und folglich  $\text{Nec}_\pi(A) = 0 \leq \text{Poss}_\pi(A)$ .

Wenn  $\text{Poss}_\pi(A) = 1$  ist, so ist trivialerweise  $\text{Nec}_\pi(A) \leq \text{Poss}_\pi(A)$ .  $\square$

In der Anwendung wird impräzises und unsicheres Wissen über  $\omega_0$  nicht immer direkt mit Hilfe einer Possibilitätsverteilung  $\pi_0$  formalisiert, sondern oft durch eine Menge von *Beschränkungen (Constraints)*, die Untermengen  $A$  von  $\Omega$  auszeichnen und einige Einschränkungen bezüglich  $\pi_0$  angeben. In diesem Zusammenhang sollten zwei Arten von Aussagen unterschieden werden:

- *Sicherheitsangaben* sind Aussagen der Art „Es ist wenigstens mit Grad  $\alpha$  sicher, daß  $\omega_0 \in A$ “ (oder kurz: „ $A$  ist  $\alpha$ -sicher für  $\omega_0$ “).
- *Möglichkeitsangaben* sind Aussagen der Art „ $A$  ist wenigstens mit Grad  $\alpha$  ein (ohne Einschränkungen) möglicher Bereich für  $\omega_0$ “ (oder kurz: „ $A$  ist  $\alpha$ -möglich für  $\omega_0$ “).

Genauer kann „ $A$  ist  $\alpha$ -sicher für  $\omega_0$ “ interpretiert werden als die Beschränkung  $\text{Nec}_{\pi_0}(A) \geq \alpha$ . „ $A$  ist  $\alpha$ -möglich für  $\omega_0$ “ entspricht hingegen  $\Delta_{\pi_0}(A) \geq \alpha$ , wobei

$$\begin{aligned}
\Delta_{\pi_0} : \mathfrak{P}(\Omega) &\rightarrow [0, 1], \\
\Delta_{\pi_0}(A) &\stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ \pi_0(\omega) \mid \omega \in A \}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

das Unsicherheitsmaß der *garantierten Möglichkeit* und

$$\begin{aligned}
\nabla_{\pi_0} : \mathfrak{P}(\Omega) &\rightarrow [0, 1], \\
\nabla_{\pi_0}(A) &\stackrel{\text{def}}{=} 1 - \Delta_{\pi_0}(\Omega \setminus A)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

das duale Maß der *möglichen Sicherheit* genannt wird. Aus der Gleichung  $\text{Nec}_{\pi_0}(A) = \inf\{1 - \pi_0(\omega) \mid \omega \in \Omega \setminus A\}$  folgt die Äquivalenz der Beschränkungen  $\text{Nec}_{\pi_0}(A) \geq \alpha$  und  $(\forall \omega \in \Omega \setminus A : \pi_0(\omega) \leq 1 - \alpha)$ . Unter Einbeziehung der Tatsache, daß es keine Einschränkungen bezüglich  $\omega \in A$  gibt, kann „ $A$  ist  $\alpha$ -sicher für  $\omega_0$ “ übersetzt werden in  $(\forall \omega \in \Omega : \pi_0(\omega) \leq \max\{\mathbb{1}_A(\omega), 1 - \alpha\})$ .

Alternativ kann diese Beschränkung durch eine *Beschränkungsfunktion*

$$c : \Omega \rightarrow \mathfrak{P}([0, 1]),$$

dargestellt werden, in der  $c(\omega)$  die Menge aller nicht zurückzuweisender Kandidaten für  $\pi_0(\omega)$  ist. In diesem Sinne kann „ $A$  ist  $\alpha$ -sicher für  $\omega_0$ “ dargestellt werden mit Hilfe der Beschränkungsfunktion, die durch

$$c(\omega) = [0, \max\{\mathbb{1}_A(\omega), 1 - \alpha\}], \quad \omega \in \Omega. \quad (3.3)$$

definiert ist.

In bezug auf Möglichkeitsangaben und unter Beachtung von  $\Delta_{\pi_0}(A) = \inf\{\pi_0(\omega) \mid \omega \in A\}$ , erhalten wir die Äquivalenz von  $\Delta_{\pi_0}(A) \geq \alpha$  und  $(\forall \omega \in A : \pi_0(\omega) \geq \alpha)$ . Da es keine Einschränkungen bezüglich der Werte  $\omega \in \Omega \setminus A$  gibt, kann „ $A$  ist  $\alpha$ -möglich für  $\omega_0$ “ übersetzt werden in  $(\forall \omega \in \Omega : \pi_0(\omega) \geq \min\{\mathbb{1}_A(\omega), \alpha\})$ , was durch die Beschränkungsfunktion

$$\begin{aligned} c : \Omega &\rightarrow \mathfrak{P}([0, 1]), \\ c(\omega) &= [\min\{\mathbb{1}_A(\omega), \alpha\}, 1]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

darstellbar ist.

Liegen  $k$  (vollständig verlässliche) Informationen vor, die die möglichen Werte für  $\omega_0$  beschränken, formalisiert durch  $c_j : \Omega \rightarrow \mathfrak{P}([0, 1])$ ,  $j = 1, \dots, k$ , so führt die Konjunktion dieser Beschränkungen zu der Beschränkungsfunktion

$$\begin{aligned} c : \Omega &\rightarrow \mathfrak{P}([0, 1]), \\ c(\omega) &\stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{j=1}^k c_j(\omega). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die vollständige Verlässlichkeit sichert, daß  $\pi_0$  eine Possibilitätsverteilung ist. Anderenfalls zeigt sich, daß die Quellen widersprüchlich sind.

Nehmen wir an, daß alle gegebenen Beschränkungen vereint werden konnten, so erhalten wir eine einzige Beschränkungsfunktion  $c_0 : \Omega \rightarrow \mathfrak{P}([0, 1])$ , die unser imperfektes Wissen über  $\omega_0$  wiedergibt. Das Fehlen jeder Beschränkung entspricht der völligen Unwissenheit, formalisiert durch  $c_0(\omega) = [0, 1]$  für alle  $\omega \in \Omega$ . Vollständiges Wissen über  $\omega_0$  wird durch  $c_0(\omega_0) = \{1\}$  und  $c_0(\omega) = \{0\}$  für alle  $\omega \in \Omega \setminus \{\omega_0\}$  modelliert.

Da jede Possibilitätsverteilung  $\pi \in \text{POSS}(\Omega)$  mit  $(\forall \omega \in \Omega : \pi(\omega) \in c_0(\omega))$  die zugrundegelegten Beschränkungen erfüllt, brauchen wir ein Metakonzept possibilistischen

Schließens, um eine eindeutige Wahl von  $\pi_0$  zu begründen. Ein mögliches vernünftiges Metakonzept ist das sogenannte *Prinzip der minimalen Spezifzität*. Es spielt eine ähnliche Rolle in der Possibilitätstheorie wie die Anwendung des Prinzips der maximalen Entropie in der Wahrscheinlichkeitstheorie und gibt die Forderung des gesunden Menschenverstandes wieder, daß nur solche Werte ausgeschlossen werden sollten, die unmöglich sind. Eine Anwendung dieses Prinzips liefert, daß  $\pi_0(\omega)$  für alle  $\omega \in \Omega$  festgelegt werden muß als der größte Möglichkeitsgrad, der den gegebenen Bedingungen genügt. Das bedeutet, daß  $\pi_0(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sup(c_0(\omega))$ . Man nennt eine Possibilitätsverteilung  $\pi \in \text{POSS}(\Omega)$  *mindestens so spezifisch wie* eine andere Possibilitätsverteilung  $\pi' \in \text{POSS}(\Omega)$  genannt wird, wenn  $(\forall \omega \in \Omega : \pi(\omega) \leq \pi'(\omega))$  gilt. Daher ist  $\pi_0$  tatsächlich von minimaler Spezifzität unter allen Possibilitätsverteilungen  $\pi \in \text{POSS}(\Omega)$  die  $c_0$  erfüllen und zwar in der Weise, daß  $(\forall \omega \in \Omega : \pi(\omega) \in c_0(\omega))$  gilt.

Es sollte hervorgehoben werden, daß die Forderung der Prinzips der minimalen Spezifzität vernünftig ist, wenn Sicherheitsangaben umzusetzen sind. Handelt es sich jedoch um Möglichkeitsangaben, brauchen wir ein anderes Metaprinzip, das ausdrückt, daß alles, was nicht als möglich bekannt ist, vernachlässigt werden kann. Das motiviert ein *Prinzip maximaler Spezifzität* und  $\pi_0(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \inf(c_0(\omega))$ .

Nachdem wir die Darstellung von unsicherer und impräziser Information über einen unbekanntem Wert  $\omega_0 \in \Omega$  mit Hilfe von Possibilitätsfunktionen  $\pi_0 \in \text{POSS}(\Omega)$  geklärt haben, wenden wir uns jetzt der Frage zu, wie man auf solchen Possibilitätsverteilungen operiert. Nehmen wir an,  $\omega_0 = (\omega_0^{(1)}, \dots, \omega_0^{(n)}) \in \Omega$  sei ein Tupel von einzelnen Attributwerten  $\omega_0^{(i)} \in \Omega^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , von denen jeder imperfekt beschrieben ist durch eine Beschränkungsfunktion  $c^{(i)} : \Omega^{(i)} \rightarrow \mathfrak{P}([0, 1])$  mit durch die Forderung des Prinzips minimaler Spezifzität induzierter Possibilitätsverteilung  $\pi_0^{(i)} \in \text{POSS}(\Omega^{(i)})$ .

Sei eine Abbildung  $\varphi : \times_{i=1}^n \Omega^{(i)} \rightarrow \Omega'$  gegeben. Wir betrachten die Berechnung der zugehörigen Beschränkungsfunktion  $c' : \Omega' \rightarrow \mathfrak{P}([0, 1])$  für  $\varphi(\omega_0)$ , und ihrer induzierten Possibilitätsverteilung, beschrieben durch  $\hat{\varphi}(\pi_0^{(1)}, \dots, \pi_0^{(n)})$ . Da  $c^{(i)}$  keine Information über  $\omega_0^{(j)}$ ,  $j \neq i$ , enthält, kann sie zu einer Beschränkungsfunktion für  $\omega_0$  erweitert werden:

$$\begin{aligned} c_i : \Omega &\rightarrow \mathfrak{P}([0, 1]), \\ c_i(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)}) &\stackrel{\text{def}}{=} c^{(i)}(\omega^{(i)}). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Die Konjunktion der Beschränkungen ergibt

$$\begin{aligned} c : \Omega &\rightarrow \mathfrak{P}([0, 1]), \\ c(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)}) &\stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{i=1}^n c^{(i)}(\omega^{(i)}). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Sie drückt aus, daß  $\pi_0(\omega) \in c(\omega)$  erfüllt sein muß. Da aus  $\pi_0(\omega) \in c(\omega)$  genau  $\hat{\varphi}(\pi_0^{(1)}, \dots, \pi_0^{(n)}) \in c'(\varphi(\omega_0^{(1)}, \dots, \omega_0^{(n)}))$  folgen sollte (und nichts anderes), ist

$$\begin{aligned}
c' : \Omega' &\rightarrow \mathfrak{P}([0, 1]) && \text{gegeben durch} \\
c'(\omega') &= \bigcup \{c(\omega) \mid \omega \in \Omega \text{ and } \omega' = \varphi(\omega)\}. && (3.8)
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung des Prinzips der minimalen Spezifität erhalten wir

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(\pi_0^{(1)}, \dots, \pi_0^{(n)})(\omega') \\
= \sup(c'(\omega')) &&& (3.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \sup\{\min\{\pi_0^{(1)}(\omega^{(1)}), \dots, \pi_0^{(n)}(\omega^{(n)})\} \mid \\
(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)}) \in \Omega \text{ and } \varphi(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)}) = \omega'\}, &&& (3.10)
\end{aligned}$$

d.h. das wohlbekannte *Extensionsprinzip*, das für Fuzzy-Mengen bereits in Abschnitt 2.4 vorgestellt wurde.

Es ist zu beachten, daß die epistemische Sicht einer normalen Fuzzy-Menge  $\pi_0 \in F_N(\Omega)$  als Possibilitätsverteilung für  $\omega_0$  bedeutet, daß die Akzeptanzgrade  $\pi_0(\omega) = \text{acc}(\omega \text{ gehört zu } \pi_0)$  als Möglichkeitsgrade  $\pi_0(\omega) = \text{Möglichkeit}(\omega = \omega_0)$  interpretiert werden müssen. Tatsächlich stimmt

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(\pi_0^{(1)}, \dots, \pi_0^{(n)})(\omega') &= \text{Möglichkeit}(\omega' = \varphi(\omega_0^{(1)}, \dots, \omega_0^{(n)})) \\
&= \text{acc}(\omega' \text{ gehört zu } \hat{\varphi}(\pi_0^{(1)}, \dots, \pi_0^{(n)}))
\end{aligned}$$

überein mit der Motivierung aus Abschnitt 2.4. Dennoch muß hervorgehoben werden, daß das Extensionsprinzip für Fuzzy-Mengen durch die Wahl eines anderen Paares von zugrundeliegender  $t$ -Norm und  $t$ -Conorm modifiziert werden kann, während (*min*, *max*) die einzigmögliche Wahl ist, wenn man von der Semantik einer Possibilitätsverteilung und dem Prinzip der minimalen Spezifität ausgeht.

## 3.2 Konzeption eines Expertensystems für possibilistische Daten

Eine wichtige Anwendung der im vorhergehenden Abschnitt entwickelten Konzepte ist das *possibilistische Schließen* in wissensbasierten Systemen. Sei  $\omega_0 \in \Omega$  der unbekannteste aktuelle Zustand eines betrachteten Objektes.  $\Omega$  kann als das kartesische Produkt  $\Omega = \times_{i=1}^n \Omega^{(i)}$  der Wertebereiche der zur Beschreibung von  $\omega_0$  gewählten Attribute  $A^{(i)}$  aufgefaßt werden. Wir nehmen daher an, daß  $\omega_0$  ein  $n$ -Tupel  $(\omega_0^{(1)}, \dots, \omega_0^{(n)})$  von Attributwerten  $\omega_0^{(i)} \in \Omega^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ist.

Die Theorie des *approximativen Schließens*, wie sie von L.A. Zadeh vorgeschlagen wurde, ist eine Methodologie zur Darstellung imperfekten Wissens über  $\omega_0$  durch Possibilitätsverteilungen und zur Auffindung möglichst genauer Beschreibungen der einzelnen Attributwerte  $\omega_0^{(i)}$ .

Das Hauptziel der kommenden Abschnitte wird es sein, die mathematische Modellierung einer Klasse von Expertensystemen vorzugeben, in denen generelles Expertenwissen über einen Weltausschnitt mit Hilfe von Possibilitätsverteilungen repräsentierbar ist. Dem Anwender eines solchen Systems soll es ermöglicht werden, anwendungsabhängige, ebenfalls durch Possibilitätsverteilungen darstellbare Beobachtungen des bestehenden Zustandes des Weltausschnittes als Fakten zu einzubeziehen und die bei Berücksichtigung der vorhandenen Wissensbasis resultierenden Schlußfolgerungen über diesen Zustand durch Verwendung eines geeigneten Inferenzmechanismus zu bestimmen.

Ist  $\omega_0 \in \Omega$  der interessierende Zustand,  $\varrho \in \text{POSS}(\Omega)$  die Darstellung des generell über Objektzustände dieses Weltausschnittes vorliegenden Expertenwissens und  $\varepsilon \in \text{POSS}(\Omega)$  die darüber hinaus vorhandene Repräsentation einer speziellen Beobachtung von  $\omega_0$ , so wird sich das a priori über  $\omega_0$  gegebene Wissen  $\varrho$  aufgrund von  $\varepsilon$  bei konjunktiver Verknüpfung von  $\varrho$  und  $\varepsilon$  zu  $\varrho_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\varrho, \varepsilon\}$  *spezialisieren* lassen. Man bezeichnet  $\varrho$  auch als die zugrunde liegende *Wissensbasis* und  $\varepsilon$  als *Evidenz* bezüglich  $\omega_0$ . Wenn  $\varrho$  und  $\varepsilon$  einander nicht widersprechen, wird auch  $\varrho_\varepsilon$  wieder eine Possibilitätsverteilung über  $\Omega$  sein. Es gilt  $(\forall \omega \in \Omega : \varrho_\varepsilon(\omega) \leq \varrho(\omega))$ , d.h.,  $\varrho_\varepsilon$  ist *mindestens so spezifisch wie  $\varrho$*  und damit auch mindestens so informativ, was die unscharfe Beschreibung von  $\omega_0$  betrifft.

**Definition 3.5** *Es seien  $\pi_1, \pi_2 \in \text{POSS}(\Omega)$  zwei Possibilitätsverteilungen über einem beliebigen Universum  $\Omega$ .  $\pi_1$  heißt **mindestens so spezifisch wie  $\pi_2$**  (i.Z.:  $\pi_1 \sqsubseteq \pi_2$ ), wenn für alle  $\omega \in \Omega$  die Ungleichung  $\pi_1(\omega) \leq \pi_2(\omega)$  erfüllt ist.*

*Gilt außerdem  $\pi_1 \not\equiv \pi_2$ , so nennt man  $\pi_1$  **spezifischer als  $\pi_2$**  (i.Z.:  $\pi_1 \sqsubset \pi_2$ ).*

Die uns beschäftigenden Expertensysteme sind der Einfachheit halber dadurch eingeschränkt, daß sie keine Konzepte zur Modifikation der Struktur des Expertenwissens (sogenannte *allgemeine Belief-Revision-Konzepte*) einbeziehen, sondern lediglich dazu dienen, die Spezialisierung des über einen zu betrachtenden Objektzustand  $\omega_0$  a priori zur Verfügung stehenden (statischen) Expertenwissens mit Hilfe von Evidenzen vorzunehmen. Man spricht in einem solchen Fall auch von der *Fokussierung* des Wissens über  $\omega_0$  durch die herangezogenen Evidenzen. Aus diesem Grund werden wir die von uns zu entwerfenden Expertensysteme kurz als *possibilistische F-Expertensysteme* bezeichnen.

Im folgenden reduzieren wir unsere Untersuchungen zunächst auf den Spezialfall solcher F-Expertensysteme, die mit impräzisen Daten umgehen können. Diese Systeme erlauben es, einen Zustand  $\omega_0 \in \Omega$  auf der Basis unvollständiger Informationen über  $\omega_0$  mit Hilfe einer Untermenge  $E \subseteq \Omega$ , für die  $\omega_0 \in E$  vorausgesetzt wird, impräzise zu beschreiben. Ein Spezialfall liegt offenbar deshalb vor, weil man  $E$  auch als Possibilitätsverteilung  $\mathbb{I}_E \in \text{POSS}(\Omega)$  interpretieren kann.

Welche prinzipiellen Struktur die im weiteren Verlauf zu behandelnden Expertensysteme aufweisen sollen, verdeutlichen wir anhand des folgenden motivierenden Beispiels.

**Beispiel 3.6** Wir betrachten eine Wissensbasis, die zuständigen Behörden und mögliche Maßnahmen bei Ölverschmutzungen von Gewässern beschreibt. Der zu modellierende Weltausschnitt bezieht sich auf die drei Attribute *Verschmutzungsort*, *zuständige Behörde* und *Maßnahme* mit den ihnen zugeordneten Wertebereichen

$$\begin{array}{lll} \Omega^{(1)} & \stackrel{\text{def}}{=} & \text{Dom}(\text{Verschmutzungsort}) & \stackrel{\text{def}}{=} & \{z_3, z_2, z_1, ka, td, ld\}, \\ \Omega^{(2)} & \stackrel{\text{def}}{=} & \text{Dom}(\text{zuständige Behörde}) & \stackrel{\text{def}}{=} & \{fw, ha, wp, gs\}, \\ \Omega^{(3)} & \stackrel{\text{def}}{=} & \text{Dom}(\text{Maßnahme}) & \stackrel{\text{def}}{=} & \{vw, rg, ge, fn\}. \end{array}$$

Als Verschmutzungsorte unterscheiden wir *offene See* ( $z_3$ ), *12-Meilen-Zone* ( $z_2$ ), *3-Meilen-Zone* ( $z_1$ ), *Kanal* ( $ka$ ), *Tankdock* ( $td$ ) und *Ladedock* ( $ld$ ). Wir nehmen an, daß die Zuständigkeiten im Falle auftretender Verschmutzungen bei der *Feuerwehr* ( $fw$ ), der *Hafenaufsicht* ( $ha$ ), der *Wasserschutzpolizei* ( $wp$ ) und dem *Grenzschutz* ( $gs$ ) liegen. Die möglichen Maßnahmen sind das Aussprechen einer *Verwarnung* ( $vw$ ), das Erstellen einer *Rechnung* ( $rg$ ), das Verhängen einer *Geldstrafe* ( $ge$ ) und die Durchführung einer *Festnahme* ( $fn$ ).

Das Universum  $\Omega = \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)} \times \Omega^{(3)}$  besteht aus allen a priori zugelassenen *Zuständen* (*Elementarereignissen*) innerhalb des Weltausschnittes. Das Element  $(z_2, gs, vw) \in \Omega$  drückt z.B. aus, daß das Erteilen einer Verwarnung durch den Grenzschutz in der 12-Meilen-Zone ein mögliches Elementarereignis darstellt und damit auch in einem zu untersuchenden Fall von Ölverschmutzung auftreten könnte. Aber nicht alle der in  $\Omega$  enthaltenen Tripel sind mit unserem Hintergrundwissen vereinbare Elementarereignisse. So wird die Feuerwehr prinzipiell niemanden festnehmen, d.h.,  $(z_3, fw, fn)$  gehört zu den von uns nicht akzeptierbaren Zuständen.

Nach der durch die Wahl von  $\Omega = \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)} \times \Omega^{(3)}$  vorgenommenen groben formalen Strukturierung des betrachteten Weltausschnittes besteht die zweite Phase des Entwurfs unseres einfachen Expertensystems darin, Hintergrundkenntnisse über diesen Weltausschnitt einzubeziehen und die durch dieses Wissen induzierte Menge  $R \subseteq \Omega$  der a posteriori möglichen bzw. erlaubten Zustände zu bestimmen. Werden sehr viele Attribute betrachtet, so wird  $R$  in der Praxis von einem Experten nicht direkt angegeben, sondern resultiert aus Expertenaussagen (Regeln), die Relationen auf den Wertebereichen einer Auswahl aller auftretenden Attribute festlegen. In unserem Beispiel möge ein Experte die nachfolgenden Regeln bezüglich Verschmutzungsort und zuständiger Behörde aufgestellt haben:

- ( $R_1$ ) Allein der Grenzschutz ist zuständig für die offene See und die 12-Meilen-Zone.
- ( $R_2$ ) Der Zuständigkeitsbereich der Hafenaufsicht beschränkt sich auf die Dockanlagen.
- ( $R_3$ ) Die Wasserschutzpolizei und der Grenzschutz besitzen keine Kompetenz für die Dockanlagen.
- ( $R_4$ ) Der Grenzschutz ist nicht für den Kanal zuständig.

$R^*$	$fw$	$ha$	$wp$	$gs$
$z_3$	○	○	○	●
$z_2$	○	○	○	●
$z_1$	●	○	●	●
$ka$	●	○	●	○
$td$	○	●	○	○
$ld$	●	●	○	○

Tabelle 3.1: Eine Relation zwischen Verschmutzungsorten und zuständigen Behörden

( $R_5$ ) Die Hafenaufsicht hat die exklusive Zuständigkeit für das Tankdock.

( $R_6$ ) Die Feuerwehr besitzt keine Ausrüstung für Einsätze auf offener See.

Jede der hier aufgeführten Regeln legt eine Relation  $R_i \subseteq \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$  fest. Die Regel ( $R_3$ ) führt beispielsweise auf

$$R_3 \stackrel{\text{def}}{=} \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)} \setminus \{(td, wp), (ld, wp), (td, gs), (ld, gs)\}.$$

Setzen wir voraus, daß alle Expertenaussagen wahr und daher konjunktiv verknüpfbar sind, so liefert die Bildung des mengentheoretischen Durchschnitts der zugehörigen Relationen

$$R^* \stackrel{\text{def}}{=} R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_6$$

die durch unsere sechs Regeln induzierte Relation zwischen den Wertebereichen der Attribute *Verschmutzungsort* und *zuständige Behörde*. Tabelle 3.1 zeigt die Darstellung von  $R^*$ .

Enthält ein Tabellenfeld das Zeichen ○, so ist das entsprechende Paar von Attributwerten mit dem durch  $R^*$  spezifizierten Expertenwissen unvereinbar. Das Zeichen ● zeigt dagegen an, daß das Paar aufgrund des Expertenwissens nicht ausgeschlossen werden kann und daher solange als möglich angesehen werden muß, bis es im Widerspruch zu einer bei einem etwaigen Belief-Revision-Prozeß der Wissensbasis neu hinzukommenden oder modifizierten Regel steht.

Durch Erweiterung von  $R^*$  auf  $\Omega$  gelangen wir zu der Menge

$$\{(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)}) \in \Omega \mid (\omega^{(1)}, \omega^{(2)}) \in R^*\} \subseteq \Omega$$

der mit den formulierten Regeln vereinbaren Zustände innerhalb unseres Weltausschnittes.

Wir ziehen noch weiteres Expertenwissen hinzu, das aus Angaben über Behörden und die ihnen zur Verfügung stehenden Maßnahmen zuläßt und mit Hilfe der in Tabelle 3.2 angegebenen Relation  $R^{**} \subseteq \Omega^{(2)} \times \Omega^{(3)}$  repräsentierbar sein möge.



$R^{**}$	$vw$	$rg$	$ge$	$fn$
$fw$	○	●	●	○
$ha$	○	●	○	○
$wp$	○	●	●	●
$gs$	●	○	○	○

Tabelle 3.2: Eine Relation zwischen zuständigen Behörden und Maßnahmen

Nach Einbeziehung von  $R^{**}$  erhalten wir schließlich mit

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \{(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)}) \in \Omega \mid (\omega^{(1)}, \omega^{(2)}) \in R^* \wedge (\omega^{(2)}, \omega^{(3)}) \in R^{**}\}$$

die *Wissensbasis* unseres Expertensystems. Sie kann dazu benutzt werden, das bezüglich einer aufgetretenen Ölverschmutzung vorliegende (impräzise) Datenmaterial zu präzisieren.

Seien etwa die folgenden *Fakten* (durch Beobachter festgestellte *Evidenzen*) über einen Unglücksfall bekannt:

( $E_1$ ) Die Wasserschutzpolizei war nicht involviert.

( $E_2$ ) Der Unfall fand entweder im Kanal oder am Tankdock statt.

( $E_1$ ) und ( $E_2$ ) lassen sich wie folgt formalisieren:

$$E_1 \stackrel{\text{def}}{=} \Omega^{(2)} \setminus \{wp\},$$

$$E_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{ka, td\}.$$

Die Menge der mit ( $E_1$ ) und ( $E_2$ ) vereinbaren Zustände ist daher

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \{(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)}) \in \Omega \mid \omega^{(2)} \in E_1 \wedge \omega^{(1)} \in E_2\}.$$

Um aus  $R$  und  $E$  Schlußfolgerungen ziehen zu können, setzen wir die Gültigkeit der *Closed World Assumption* voraus, nach der es einen dem betreffenden Unglücksfall in unserem Weltausschnitt entsprechenden Originalzustand  $\omega_0 = (\omega_0^{(1)}, \omega_0^{(2)}, \omega_0^{(3)}) \in \Omega$  geben muß. Für ihn gilt  $\omega_0 \in R \cap E$  und folglich

$$\omega_0^{(1)} \in \{ka, td\},$$

$$\omega_0^{(2)} \in \{fw, ha\},$$

$$\omega_0^{(3)} \in \{rg, ge\}.$$

Die Ölverschmutzung trat also im Kanal oder am Tankdock auf (diese Information entspricht  $E_2$ ). Es war die Hafenaufsicht oder die Feuerwehr involviert; die ergriffene Maßnahme bestand in der Erstellung einer Rechnung oder im Verhängen einer Geldstrafe (diese Informationen gehen über  $E_1$  hinaus und sind auf das Einbeziehen der Wissensbasis zurückzuführen).  $\square$

Aus Beispiel 3.6 ist ersichtlich, daß wir zur Repräsentation von Expertenwissen und Benutzerevidenzen, aber auch zur eleganten Darstellung des anzuwendenden Inferenzmechanismus Produkträume und sie betreffende Operationen benötigen. Die folgenden Definitionen führen die entsprechenden Begriffe und die zugehörige Symbolik ein.

**Definition 3.7** Eine Familie  $\mathcal{U} = (\Omega^{(i)})_{i \in \mathbb{N}_n}$  nichtleerer Wertebereiche  $\Omega^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , heißt **Universum der Dimension  $n$** .  $\mathbb{N}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \dots, n\}$  ist die diesem Universum zugeordnete **Indexmenge**.

Für jede nicht-leere Indexuntermenge  $I \subseteq \mathbb{N}_n$  definieren wir den **Produktraum**

$$\Omega^I \stackrel{\text{def}}{=} \times_{i \in I} \Omega^{(i)}.$$

Für den Produktraum  $\Omega^{\mathbb{N}_n}$  schreiben wir abkürzend auch nur  $\Omega$ .

**Bemerkung 3.8** Es sei  $I = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$  mit  $i_1 < i_2 < \dots < i_m$  und  $0 < m \leq n$  eine Indexuntermenge von  $\mathbb{N}_n$ . Jedes Element  $\omega \in \Omega^I$  läßt sich durch ein  $m$ -Tupel  $(\omega^{(i_1)}, \dots, \omega^{(i_m)})$  repräsentieren, für das  $\omega^{(i)} \in \Omega^{(i)}$ ,  $i \in I$ , gilt.  $\square$

**Definition 3.9** Es sei  $\mathcal{U} = (\Omega^{(i)})_{i \in \mathbb{N}_n}$  ein Universum der Dimension  $n$ . Außerdem seien  $C, S$  und  $T$  Indexuntermengen von  $\mathbb{N}_n$ , die den Bedingungen  $T = S \cup C$ ,  $S \cap C = \emptyset$  und  $S \neq \emptyset$  genügen.

$$(a) \text{ red}_S^T : \Omega^T \rightarrow \Omega^S,$$

$$\text{red}_S^T(\omega^T) = \omega^S \text{ with } (\forall i \in S : (\omega^S)^{(i)} = (\omega^T)^{(i)})$$

heißt **punktweise Projektion** von  $\Omega^T$  auf  $\Omega^S$ .

$$(b) \Pi_S^T : \mathfrak{P}(\Omega^T) \rightarrow \mathfrak{P}(\Omega^S),$$

$$\Pi_S^T(A) = \{\omega^S \in \Omega^S \mid \exists \omega^T \in A : \text{red}_S^T(\omega^T) = \omega^S\}$$

nennt man die **Projektion** von  $\Omega^T$  auf  $\Omega^S$ .

$$(c) \hat{\Pi}_S^T : \mathfrak{P}(\Omega^S) \rightarrow \mathfrak{P}(\Omega^T),$$

$$\hat{\Pi}_S^T(B) = \{\omega^T \in \Omega^T \mid \text{red}_S^T(\omega^T) \in B\}$$

wird als **zylindrische Extension** von  $\Omega^S$  auf  $\Omega^T$  bezeichnet.

Uns stehen jetzt die formalen Hilfsmittel zur Verfügung, um das mathematische Modell für Expertensysteme des in Beispiel 3.6 angegebenen Typs einschließlich des bei ihrer Anwendung auf Benutzerevidenzen auszuführenden Inferenzmechanismus allgemein zu beschreiben. Die Definition und Applikation dieser Expertensysteme besteht aus vier konzeptionell voneinander zu trennenden Phasen.

In der *ersten Phase* führt die von einem oder mehreren Experten eingeleitete Wissensakquisition zur Vereinbarung der für den zu modellierenden Weltausschnitt wichtigen

Attribute  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit den ihnen zugeordneten Wertebereichen  $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}, \dots, \Omega^{(n)}$ . Durch Vorgabe des Universums  $\mathcal{U} \stackrel{\text{def}}{=} (\Omega^{(i)})_{i \in \mathbb{N}_n}$  ist die *Repräsentationsstruktur* für das Expertenwissen festgelegt.  $\Omega = \Omega^{\mathbb{N}_n}$  bildet dabei die Menge aller a priori möglichen Zustände des betrachteten Weltausschnittes.

Die *zweite Phase* dient der Formulierung von Regeln, die auf der Basis des Expertenwissens *generelle Abhängigkeiten* zwischen den Wertebereichen der beteiligten Attribute  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$  zum Ausdruck bringen. Die einzelnen Regeln  $R_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , werden normalerweise nicht alle Attribute betreffen, sondern sich lediglich auf die durch eine Indexmenge  $M_j \subseteq \mathbb{N}_n$  geringer Kardinalität identifizierten Attribute  $X^{(i)}$ ,  $i \in M_j$  beziehen.

$R_j$  ist daher als Untermenge des (niederdimensionalen) Produktraumes  $\Omega^{M_j}$  repräsentierbar. Da  $R_j$  keinerlei Informationen über die nicht durch  $M_j$  indizierten Attribute enthält, besteht  $\hat{\Pi}_{M_j}^{\mathbb{N}_n}(R_j)$  aus allen mit der Regel  $R_j$  vereinbaren Zuständen des zu modellierenden Weltausschnittes. Regeln, die sich auf dieselbe Indexmenge beziehen, lassen sich ohne Schwierigkeiten durch Schnittbildung der sie repräsentierenden Relationen zu einer einzigen Regel zusammenfassen. Wir setzen aus diesem Grund voraus, daß wir zur Angabe der Wissensbasis ein endliches System von Regeln  $R_1, \dots, R_l$  mit  $R_j \subseteq \Omega^{M_j}$ ,  $j = 1, \dots, l$ , wählen, deren Indexmengen  $M_j$  paarweise verschieden (im allgemeinen aber nicht paarweise disjunkt) sind und der Bedingung  $\bigcup_{j=1}^l M_j = \mathbb{N}_n$  genügen.

Diese Bedingung stellt sicher, daß das zu repräsentierende Expertenwissen auch alle Attribute umfaßt. Um partielle Abhängigkeiten zu vermeiden, verlangen wir außerdem, daß keine Indexmenge in einer anderen enthalten sein darf.

**Definition 3.10** *Es sei  $\mathbb{N}_n$  die Indexmenge eines Universums  $\mathcal{U}$ . Eine Menge  $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \dots, M_l\}$  mit  $\emptyset \neq M_j \subseteq \mathbb{N}_n$ ,  $j = 1, \dots, l$ ,  $l \in \mathbb{N}$  heißt **Modularisierung von  $\mathbb{N}_n$** , wenn gilt:*

$$(a) \bigcup_{j=1}^l M_j = \mathbb{N}_n$$

$$(b) \forall i, j \in \mathbb{N}_l : i \neq j \Rightarrow M_i \not\subseteq M_j.$$

Wir gehen davon aus, daß sämtliche Expertenaussagen absolut zuverlässig sind und daher konjunktiv miteinander verknüpft werden dürfen. Diese Voraussetzung legt die folgende Definition nahe.

**Definition 3.11** *Es sei  $\mathcal{U} = (\Omega^{(i)})_{i \in \mathbb{N}_n}$  ein Universum der Dimension  $n$  und  $\mathcal{M}$  eine Modularisierung von  $\mathbb{N}_n$ .*

$\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M}) = \{R^M \mid M \in \mathcal{M}\}$  mit  $R^M \subseteq \Omega^M$  heißt **Regelsystem** bezüglich  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{M}$ ,

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{M \in \mathcal{M}} \hat{\Pi}_M^{\mathbb{N}_n}(R^M)$$

die von  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  induzierte **Wissensbasis**.

Nach der Wissensakquisition und -repräsentation folgt in der *dritten Phase* die Anwendung der vorliegenden Wissensbasis auf konkrete Problemstellungen. Es werde gemäß der *Closed World Assumption* davon ausgegangen, daß es im Zusammenhang mit der jeweiligen Anwendung einen Objektzustand gibt, der dem Tupel  $(\omega_0^{(1)}, \dots, \omega_0^{(n)}) \in \Omega$  entspricht. Des weiteren setzen wir voraus, daß der Benutzer der Wissensbasis seine eigenen Beobachtungen der Attributwerte  $\omega_0^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , als *Evidenzen (Fakten)*  $E^{(i)} \subseteq \Omega^{(i)}$  darstellen kann. Genau wie die Experten möge auch der Benutzer nur korrekte Angaben machen, so daß  $\omega_0^{(i)} \in E^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , als wahr angenommen werden darf. Im günstigsten Fall enthält  $E^{(i)}$  nur ein einziges Element, was einer präzisen Beobachtung von  $\omega_0^{(i)}$  entspricht. Im ungünstigsten Fall läßt  $E^{(i)} = \Omega^{(i)}$  keinerlei Restriktionen für  $\omega_0^{(i)}$  zu und spiegelt damit die totale Unkenntnis dieses Attributwertes wider. Auf analoge Weise, wie die in der zweiten Phase aufgestellten Regeln  $R_1, \dots, R_l$  die Menge der aufgrund des Expertenwissens möglichen Objektzustände  $R$  induzieren, legen die Evidenzen  $E^{(i)}$  die Menge  $E$  der anwendungsbezogen aus Benutzersicht möglichen Objektzustände fest.

Was die vom Benutzer eingebrachte Evidenz betrifft, so wollen wir die Verallgemeinerung vornehmen, daß er nicht nur eindimensionale Beobachtungen  $E^{(i)} \subseteq \Omega^{(i)}$ ,  $i \in \mathbb{N}_n$ , sondern auch Beziehungen zwischen Attributen verwenden darf. Dies muß allerdings in dem Rahmen geschehen, der mit der Aufstellung des Regelsystems verbundenen Modularisierung  $\mathcal{M}$  festgelegt ist, d.h., daß Evidenzen keine neuen kausalen Abhängigkeiten zwischen Attributen herstellen.

In einem vom Benutzer spezifizierten System von Evidenzen  $E_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , mit  $E_k \subseteq \Omega^{N_k}$ ,  $\emptyset \neq N_k \subseteq \mathbb{N}_n$  muß daher für alle  $M \in \mathcal{M}$  und alle  $k \in \{1, \dots, m\}$  gewährleistet sein, daß entweder  $N_k \subseteq M$  oder  $N_k \cap M = \emptyset$  gilt, d.h., die den Evidenzen  $E_k$  zugeordneten Indexmengen bilden eine zu  $\mathcal{M}$  kompatible Partitionierung von  $\mathbb{N}_n$ .

**Definition 3.12** *Es sei  $\mathcal{U}$  ein  $n$ -dimensionales Universum und  $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_l\}$  eine Modularisierung von  $\mathbb{N}_n$ .*

*Eine Partitionierung  $\mathcal{N} = \{N_1, \dots, N_m\}$ ,  $\emptyset \neq N_k \subseteq \mathbb{N}_n$ ,  $k = 1, \dots, m$ , von  $\mathbb{N}_n$  heißt **kompatibel zu  $\mathcal{M}$** , wenn für jedes  $M \in \mathcal{M}$  eine Untermenge  $\mathcal{N}^* \subseteq \mathcal{N}$  von Partitionen existiert, so daß  $M = \bigcup \{N \mid N \in \mathcal{N}^*\}$  gilt.*

**Definition 3.13** *Es sei  $\mathcal{U} = (\Omega^{(i)})_{i \in \mathbb{N}_n}$  ein  $n$ -dimensionales Universum,  $\mathcal{M}$  eine Modularisierung von  $\mathbb{N}_n$  und  $\mathcal{N}$  eine zu  $\mathcal{M}$  kompatible Partitionierung von  $\mathbb{N}_n$ .*

$\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}) = \{E^N \mid N \in \mathcal{N}\}$  mit  $E^N \subseteq \Omega^N$  heißt **Evidenzsystem** bezüglich  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{N}$ ,

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{N \in \mathcal{N}} \hat{\Pi}_N^{\mathbb{N}_n} (E^N)$$

die von  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$  induzierte **totale Evidenz**.

Wir kommen nun zur abschließenden *vierten Phase*, in der ein Benutzer des Expertensystems die Wissensbasis  $R$  und eine anwendungsinduzierte totale Evidenz  $E$  dazu

verwendet, Schlußfolgerungen zu ziehen, d.h. durch Ausführen eines *Inferenzmechanismus* den durch  $R$  und  $E$  (impräzise) beschriebenen Objektzustand  $(\omega_0^{(1)}, \dots, \omega_0^{(n)})$  so genau wie möglich zu bestimmen. Der Benutzer wird vor allem an möglichst genauen Angaben über die einzelnen Attributwerte  $\omega_0^{(i)}$  interessiert sein, also an den Mengen  $\kappa^{(i)} = \Pi_{\{i\}}^{\mathbb{N}_n}(R \cap E)$ , die wir als *i-te Restriktionen* bezeichnen wollen. Zusammengefaßt ergibt sich die folgende Definition eines F-Expertensystems:

**Definition 3.14** Ein **F-Expertensystem**  $\mathcal{X}$  ist ein Quadrupel  $(\mathcal{U}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M}))$  mit  $n$ -dimensionalem Universum  $\mathcal{U} = (\Omega^{(i)})_{i \in \mathbb{N}_n}$ , Modularisierung  $\mathcal{M}$  von  $\mathbb{N}_n$ , zu  $\mathcal{M}$  kompatibler Partitionierung  $\mathcal{N}$  von  $\mathbb{N}_n$  und Regelsystem  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ . Ist  $R$  die von  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  induzierte Wissensbasis und  $E$  die von einem Evidenzsystem  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$  induzierte totale Evidenz, so nennen wir

$$\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})) \stackrel{\text{def}}{=} R \cap E$$

den **Zustand** von  $\mathcal{X}$  bezüglich  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$ ,

$$\kappa^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_{\{i\}}^{\mathbb{N}_n}(\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))), \quad i = 1, \dots, n,$$

die *i-ten Restriktionen* von  $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))$ .

**Beispiel 3.6 (Fortsetzung)** Mit den neu hinzugekommenen Definitionen können wir das eingangs dieses Abschnittes angesprochene Expertensystem zur Betrachtung von zuständigen Behörden und möglichen Maßnahmen bei Ölverschmutzungen von Gewässern etwas genauer beschreiben:

1. Phase: Festlegung der Repräsentationsstruktur

Es wurde ein Universum  $(\Omega^{(i)})_{i \in \mathbb{N}_3}$  mit den Wertebereichen  $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}, \Omega^{(3)}$  der Attribute *Verschmutzungsort*, *zuständige Behörde* und *Maßnahme* vorgegeben.

2. Phase: Erstellen der Wissensbasis

Die vom ersten Experten formulierten Regeln  $R_1, \dots, R_6$  beziehen sich auf die Indexmenge  $M_1 = \{1, 2\}$  und wurden daher zu einer Regel  $R^{M_1} \stackrel{\text{def}}{=} R^* \subseteq \Omega^{M_1}$  zusammengefaßt. Die Aussagen des zweiten Experten führten auf die Regel  $R^{M_2} \stackrel{\text{def}}{=} R^{**} \subseteq \Omega^{M_2}$  mit  $M_2 = \{2, 3\}$ . Die durch  $R^{M_1}$  und  $R^{M_2}$  bestimmte Wissensbasis ist demnach

$$R = \hat{\Pi}_{\{1,2\}}^{\{1,2,3\}}(R^{M_1}) \cap \hat{\Pi}_{\{2,3\}}^{\{1,2,3\}}(R^{M_2}).$$

3. Phase: Anwendungsabhängige Angabe einer totalen Evidenz

Anhand der vom Benutzer vorgegebenen Fakten zu einer konkret aufgetretenen Ölverschmutzung ermitteln wir die folgenden Einschränkungen:

$$\begin{aligned}
E^{(1)} &= \{ka, td\} && \text{(resultiert aus } (E_2)), \\
E^{(2)} &= \{fw, ha, gs\} && \text{(resultiert aus } (E_1)), \\
E^{(3)} &= \Omega^{(3)} && \text{(keine Information über die ergriffene Maßnahme)}.
\end{aligned}$$

Die durch  $E^{(1)}$ ,  $E^{(2)}$  und  $E^{(3)}$  beschriebene totale Evidenz ist also

$$E = \bigcap_{i \in \{1,2,3\}} \hat{\Pi}_{\{i\}}^{\{1,2,3\}}(E^{(i)}).$$

#### 4. Phase: Inferenzmechanismus ausführen

Für die  $i$ -ten Restriktionen ergibt sich  $\kappa^{(i)} = \Pi_{\{i\}}^{\{1,2,3\}}(R \cap E)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , und damit

$$\begin{aligned}
\kappa^{(1)} &= \{ka, td\}, \\
\kappa^{(2)} &= \{fw, ha\}, \\
\kappa^{(3)} &= \{rg, ge\}.
\end{aligned}$$

Unser Expertensystem läßt sich unter Heranziehung der bisher innerhalb des Beispiels benutzten Symbolik wie folgt angeben:

$$\begin{aligned}
\mathcal{X} &= (\mathcal{U}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})) && \text{(F-Expertensystem),} \\
\mathcal{U} &= (\Omega^{(i)})_{i \in \mathbb{N}_3} && \text{(Universum),} \\
\mathcal{M} &= \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} && \text{(Modularisierung),} \\
\mathcal{N} &= \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} && \text{(zu } \mathcal{M} \text{ kompatible Partitionierung),} \\
\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M}) &= \{R^{\{1,2\}}, R^{\{2,3\}}\} && \text{(Regelsystem).}
\end{aligned}$$

In der Anwendung wurden unter Verwendung des Evidenzsystems  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}) = \{E^{(1)}, E^{(2)}, E^{(3)}\}$  die  $i$ -ten Restriktionen  $\kappa^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , bestimmt.  $\square$

F-Expertensysteme sind auf das Fokussieren impräzisen Wissens ausgerichtet. Als Verallgemeinerung lassen sich problemlos possibilistische F-Expertensysteme  $\mathcal{X} = (\mathcal{U}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M}))$  einführen. In ihnen besteht das Regelsystem  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  nicht aus gewöhnlichen Relationen  $R^M \subseteq \Omega^M$ ,  $M \in \mathcal{M}$ , sondern aus Possibilitätsverteilungen  $\varrho^M \in \text{POSS}(\Omega^M)$ , die jeweils eine unscharfe Beziehung (eine possibilistische Relation) zwischen den Werten der durch die Indexmenge  $M$  ausgewählten Attribute beschreiben. Auf analoge Weise werden Evidenzsysteme  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$  mit possibilistischen Evidenzen  $\varepsilon^N \in \text{POSS}(\Omega^N)$ ,  $N \in \mathcal{N}$ , in die Betrachtungen einbezogen. Dabei ist  $\varepsilon^N$  eine Possibilitätsverteilung für die durch  $N$  indizierten Attributwerte eines zu beschreibenden Objektzustandes  $\omega_0 \in \Omega$ . Wie bei den F-Expertensystemen geht es darum, mit Hilfe des durch  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  allgemein über  $\omega_0$  vorhandenen Wissens und der situationsabhängig hinzukommenden, speziell auf  $\omega_0$  bezogenen Evidenzen aus  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$  die spezifischste der mit diesem Gesamtwissen vereinbaren Possibilitätsverteilungen zur Beschreibung von  $\omega_0$  zu ermitteln. Diese Possibilitätsverteilung  $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))$  wird auch als Zustand von  $\mathcal{X}$  bezüglich  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$  bezeichnet. Um  $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))$  aufzufinden, sind einige Vorüberlegungen notwendig:

Es sei  $M \in \mathcal{M}$  eine Indexmenge und  $\varrho^M$  die ihr zugeordnete Possibilitätsverteilung aus dem Regelsystem  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ .  $\varrho^M$  sagt nichts über die durch  $\mathbb{N}_n \setminus M$  indizierten Attribute aus. Soll also der Objektzustand  $\omega_0$  mit Hilfe einer Possibilitätsverteilung  $\varrho$  über  $\Omega$  anhand von  $\varrho^M$  unscharf beschrieben werden, so muß für alle  $\omega, \omega' \in \Omega$  mit  $\omega \neq \omega'$  und  $\text{red}_M^{\mathbb{N}_n}(\omega) = \text{red}_M^{\mathbb{N}_n}(\omega')$  stets  $\varrho(\omega) = \varrho(\omega') = \varrho^M(\text{red}_M^{\mathbb{N}_n}(\omega))$  gelten, da anderenfalls  $\varrho^M$  einen unbeabsichtigten Einfluß auf die Possibilitätsgrade von Werten der durch  $\mathbb{N}_n \setminus M$  indizierten Attribute nehmen würde. Die eindeutig bestimmte Possibilitätsverteilung  $\varrho$  nennt man die zylindrische Extension von  $\varrho^M$  auf  $\Omega$ .

**Definition 3.15** *Es sei  $\mathcal{U} = (\Omega^{(i)})_{i \in \mathbb{N}_n}$  ein  $n$ -dimensionales Universum,  $M$  eine Indexmenge mit  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{N}_n$  und  $\text{ext}_M^{\mathbb{N}_n}$  die durch*

$$\begin{aligned} \text{ext}_M^{\mathbb{N}_n} : \text{POSS}(\Omega^M) &\rightarrow \text{POSS}(\Omega), \\ \text{ext}_M^{\mathbb{N}_n}(\pi)(\omega) &\stackrel{\text{def}}{=} \pi(\text{red}_M^{\mathbb{N}_n}(\omega)). \end{aligned}$$

*definierte Abbildung. Für  $\pi \in \text{POSS}(\Omega^M)$  heißt  $\text{ext}_M^{\mathbb{N}_n}(\pi)$  die **zylindrische Extension von  $\pi$  auf  $\Omega$** .*

Wir benutzen zylindrische Extensionen, um die durch das Regelsystem  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  induzierte Wissensbasis  $\varrho$  anzugeben. Für  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M}) = \{\varrho^M \mid M \in \mathcal{M}\}$  erhält man

$$\varrho = \min \left\{ \text{ext}_M^{\mathbb{N}_n}(\varrho^M) \mid M \in \mathcal{M} \right\}, \quad (3.11)$$

wobei der *min*-Operator die im Sinne des Extensionsprinzips und des Prinzips minimaler Spezifität zur konjunktiven Verknüpfung der auftretenden Possibilitätsverteilungen  $\text{ext}_M^{\mathbb{N}_n}(\varrho^M)$  gewählte *t*-Norm ist.

Während  $\text{ext}_M^{\mathbb{N}_n}(\varrho^M) \in \text{POSS}(\Omega)$  stets erfüllt ist, muß die Normalisiertheitseigenschaft allerdings nicht notwendigerweise auch für die resultierende Wissensbasis  $\varrho$  gelten. Ist  $\varrho$  allerdings eine Possibilitätsverteilung, so bezeichnen wir diese Wissensbasis als *widerspruchsfrei*.

**Definition 3.16** *Es sei  $\mathcal{U} = (\Omega^{(i)})_{i \in \mathbb{N}_n}$  ein Universum der Dimension  $n$  und  $\mathcal{M}$  eine Modularisierung von  $\mathbb{N}_n$ . Wir bezeichnen  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M}) = \{\varrho^M \mid M \in \mathcal{M}\}$  mit  $\varrho^M \in \text{POSS}(\Omega^M)$  als **possibilistisches Regelsystem** bezüglich  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{M}$  und die Funktion*

$$\begin{aligned} \varrho : \Omega &\rightarrow [0, 1], \\ \varrho(\omega) &\stackrel{\text{def}}{=} \min \left\{ \text{ext}_M^{\mathbb{N}_n}(\varrho^M)(\omega) \mid M \in \mathcal{M} \right\} \end{aligned}$$

*als die von  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  induzierte possibilistische Wissensbasis.  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  heißt genau dann widerspruchsfrei, wenn  $\varrho \in \text{POSS}(\Omega)$  gilt.*

Auf völlig analoge Art läßt sich der Begriff der totalen Evidenz wie folgt auf Possibilitätsverteilungen verallgemeinern:

**Definition 3.17** Es sei  $\mathcal{U} = (\Omega^{(i)})_{i \in \mathbb{N}_n}$  ein  $n$ -dimensionales Universum,  $\mathcal{M}$  eine Modularisierung von  $\mathbb{N}_n$  und  $\mathcal{N}$  eine zu  $\mathcal{M}$  kompatible Partitionierung von  $\mathbb{N}_n$ .

$\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}) = \{\varepsilon^N \mid N \in \mathcal{N}\}$  mit  $\varepsilon^N \in \text{POSS}(\Omega^N)$  heißt **possibilistisches Evidenzsystem** bezüglich  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{N}$ , die Funktion

$$\begin{aligned} \varepsilon : \Omega &\rightarrow [0, 1], \\ \varepsilon(\omega) &\stackrel{\text{def}}{=} \min \left\{ \text{ext}_N^{\mathbb{N}_n}(\varepsilon^N)(\omega) \mid N \in \mathcal{N} \right\} \end{aligned}$$

die von  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$  induzierte **totale Evidenz**.

$\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$  wird genau dann **widerspruchsfrei** genannt, wenn  $\varepsilon \in \text{POSS}(\Omega)$  erfüllt ist.

Der vom allgemeinem Wissen (d.h.  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ ) und dem situationsabhängigen zusätzlichen Wissen (d.h.  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$ ) abhängende Zustand  $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))$  eines possibilistischen F-Expertensystems  $\mathcal{X}$  ergibt sich als konjunktive Verknüpfung der Wissensbasis  $\varrho$  mit der totalen Evidenz  $\varepsilon$ , d.h.

$$\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})) \equiv \min\{\varrho, \varepsilon\}. \quad (3.12)$$

Falls  $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})) \notin \text{POSS}(\Omega)$  gilt, zeigt dies die Inkonsistenz von  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  und  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$  an. Andernfalls läßt sich  $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))$  auswerten, indem die  $i$ -ten Restriktionen  $\kappa^{(i)}$  von  $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))$  bestimmt werden, also die Projektionen der Possibilitätsverteilung  $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))$  auf die Wertebereiche  $\Omega^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Dies geschieht einfach durch Anwendung des Extensionsprinzips auf die Projektionsabbildungen  $\text{red}_{\{i\}}^{\mathbb{N}_n}$ .

**Definition 3.18** Es sei  $\mathcal{U} = (\Omega^{(i)})_{i \in \mathbb{N}_n}$  ein  $n$ -dimensionales Universum,  $M$  eine Indexmenge mit  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{N}_n$  und  $\text{proj}_M^{\mathbb{N}_n}$  die durch

$$\begin{aligned} \text{proj}_M^{\mathbb{N}_n} : \text{POSS}(\Omega) &\rightarrow \text{POSS}(\Omega^M), \\ \text{proj}_M^{\mathbb{N}_n}(\pi)(\omega) &\stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \pi(\omega') \mid \omega' \in \Omega \wedge \omega = \text{red}_M^{\mathbb{N}_n}(\omega') \right\}. \end{aligned}$$

definierte Abbildung. Für  $\pi \in \text{POSS}(\Omega)$  nennt man  $\text{proj}_M^{\mathbb{N}_n}(\pi)$  die **Projektion von  $\pi$  auf  $\Omega^M$** .

Die  $i$ -te Restriktion von  $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))$  ist demnach

$$\kappa^{(i)} \equiv \text{proj}_{\{i\}}^{\mathbb{N}_n}(\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))). \quad (3.13)$$

Ist  $\omega_0 \in \Omega$  ein durch  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  allgemein und durch  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$  speziell beschriebener Objektzustand, so ist  $\kappa^{(i)}$  die spezifischste der mit  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  und  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$  vereinbaren Possibilitätsverteilungen, die den Attributwert  $\text{red}_{\{i\}}^{\mathbb{N}_n}(\omega_0)$  unscharf beschreiben. Zusammenfassend kommen wir zur nachstehenden Definition eines possibilistischen F-Expertensystems.



**Definition 3.19** *Unter einem possibilistischen F-Expertensystem  $\mathcal{X}$  versteht man ein Quadrupel  $\mathcal{X} = (\mathcal{U}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M}))$  mit  $n$ -dimensionalem Universum  $\mathcal{U} = (\Omega^{(i)})_{i \in \mathbb{N}_n}$ , Modularisierung  $\mathcal{M}$  von  $\mathbb{N}_n$ , zu  $\mathcal{M}$  kompatibler Partitionierung  $\mathcal{N}$  von  $\mathbb{N}_n$  und widerspruchsfreiem possibilistischem Regelsystem  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  bezüglich  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{M}$ . Ist  $\varrho$  die von  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  induzierte possibilistische Wissensbasis und  $\varepsilon$  die von einem bezüglich  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{N}$  gewählten widerspruchsfreien possibilistischen Evidenzsystem  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$  induzierte totale Evidenz, so heißt die Funktion*

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})) : \Omega &\rightarrow [0, 1], \\ \sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))(\omega) &\stackrel{\text{def}}{=} \min \{ \varrho(\omega), \varepsilon(\omega) \} \end{aligned}$$

der **Zustand** von  $\mathcal{X}$  bezüglich  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$ .  $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))$  wird genau dann **konsistent** genannt, wenn er eine Possibilitätsverteilung über  $\Omega$  ist. Schließlich bezeichnen wir die aus konsistentem  $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))$  bestimmbaren Possibilitätsverteilungen  $\kappa^{(i)} \in \text{POSS}(\Omega^{(i)})$  mit

$$\kappa^{(i)}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \text{proj}_{\{i\}}^{\mathbb{N}_n}(\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))(\omega)), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

als die  **$i$ -ten Restriktionen** von  $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))$ .

**Beispiel 3.6 (Fortsetzung)** Wir modifizieren  $\mathcal{X} = (\mathcal{U}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M}))$  in ein sehr einfaches possibilistisches F-Expertensystem, indem wir folgendes Regelsystem benutzen:

$\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \varrho^{\{1,2\}}, \varrho^{\{2,3\}} \}$ . Die beiden in ihm enthaltenen Possibilitätsverteilungen seien wie in Tabelle 3.3 vorgegeben.

Es handelt sich um ein widerspruchsfreies Regelsystem, da für die induzierte Wissensbasis  $\varrho$  zum Beispiel

$$\begin{aligned} \varrho(z_2, wp, bl) &= \min \left\{ \left( \text{ext}_{\{1,2\}}^{\{1,2,3\}} \left( \varrho^{\{1,2\}} \right) \right) (z_2, wp, bl), \right. \\ &\quad \left. \left( \text{ext}_{\{2,3\}}^{\{1,2,3\}} \left( \varrho^{\{2,3\}} \right) \right) (z_2, wp, bl) \right\} \\ &= \min \left\{ \varrho^{\{1,2\}}(z_2, wp), \varrho^{\{2,3\}}(wp, bl) \right\} \\ &= 1. \end{aligned}$$

gilt.

Als Evidenzsystem betrachten wir  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \varepsilon^{\{1\}}, \varepsilon^{\{2\}}, \varepsilon^{\{3\}} \}$  mit  $\varepsilon^{\{2\}} \equiv \mathbb{1}_{\Omega^{(2)}}$ ,  $\varepsilon^{\{3\}} \equiv \mathbb{1}_{\Omega^{(3)}}$  und in Tabelle 3.4 definierter Evidenz  $\varepsilon^{\{1\}}$ .

Trivialerweise ist auch die durch  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$  induzierte totale Evidenz  $\varepsilon$  widerspruchsfrei. Da beispielsweise  $\varrho(z_2, wp, rg) = \varepsilon(z_2, wp, rg) = 1$  gilt, befindet sich  $\mathcal{X}$  für  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$  in einem konsistenten Zustand  $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))$ , der den Objektzuständen  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$  die in Tabelle 3.5 aufgeführten Possibilitätsgrade zuordnet.

		$\omega_2$				$\varrho^{\{1,2\}}(\omega_1, \omega_2)$
		$fw$	$ha$	$wp$	$gs$	
$\omega_1$	$ld$	1	1	1	1	
	$td$	1	1	1	1	
	$ka$	0.4	0	1	1	
	$z_1$	0.4	0	0.8	1	
	$z_2$	0.4	0	1	1	
	$z_3$	1	0	1	1	

		$\omega_3$				$\varrho^{\{2,3\}}(\omega_2, \omega_3)$
		$vw$	$rg$	$ge$	$fn$	
$\omega_2$	$fw$	0	1	1	0	
	$ha$	0	1	0	0	
	$wp$	0	1	1	1	
	$gs$	1	0	0	0	

Tabelle 3.3: Darstellung von  $\varrho^{\{1,2\}}$  und  $\varrho^{\{2,3\}}$ 

$\omega_1$	$ld$	$td$	$ka$	$z_1$	$z_2$	$z_3$
$\varepsilon^{\{1\}}(\omega_1)$	0	0	0.3	0.7	1	0

Tabelle 3.4: Repräsentation von  $\varepsilon^{\{1\}}$

		$\omega_3$				
		$vw$	$rg$	$ge$	$fn$	$\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))(ca, \omega_2, \omega_3)$
$\omega_2$	$fw$	0	0.3	0.3	0	
	$ha$	0	0	0	0	
	$wp$	0	0.3	0.3	0.3	
	$gs$	0.3	0	0	0	

		$\omega_3$				
		$vw$	$rg$	$ge$	$fn$	$\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))(z_1, \omega_2, \omega_3)$
$\omega_2$	$fw$	0	0.4	0.4	0	
	$ha$	0	0	0	0	
	$wp$	0	0.7	0.7	0.7	
	$gs$	0.7	0	0	0	

		$\omega_3$				
		$vw$	$rg$	$ge$	$fn$	$\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))(z_2, \omega_2, \omega_3)$
$\omega_2$	$fw$	0	0.4	0.4	0	
	$ha$	0	0	0	0	
	$wp$	0	1	1	1	
	$gs$	1	0	0	0	

Tabelle 3.5: Bestimmung des Zustands  $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))$

$\omega_1$	$ld$	$td$	$ka$	$z_1$	$z_2$	$z_3$
$\kappa^{(1)}(\omega_1)$	0	0	0.3	0.7	1	0
$\omega_2$	$fw$	$ha$	$wp$	$gs$		
$\kappa^{(2)}(\omega_2)$	0.4	0	1	1		
$\omega_3$	$vw$	$rg$	$ge$	$fn$		
$\kappa^{(3)}(\omega_3)$	1	1	1	1		

Tabelle 3.6:  $i$ -te Restriktionen von  $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))$

Ist  $\omega_0 \in \Omega$  ein durch  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  und  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$  possibilistisch beschriebener Objektzustand, so lassen sich für seine Attributwerte  $\omega_i = \text{red}_{\{i\}}^{\{1,2,3\}}(\omega_0)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , die in Tabelle 3.6 angegebenen Possibilitätsverteilungen ermitteln.

Diese  $i$ -ten Restriktionen  $\kappa^{(i)}$  von  $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))$  sind die spezifischsten Possibilitätsverteilungen, die man aus  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  und  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$  für die Attributwerte von  $\omega_0$  bestimmen kann. Die Verwendung noch spezifischerer Possibilitätsverteilungen wäre eine über  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  und  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$  hinausgehende, nicht zu rechtfertigende Spezialisierung des bezüglich  $\omega_0$  vorhandenen possibilistischen Wissens.  $\square$

### 3.3 Interpretation possibilistischer Inferenzregeln

Bei unseren bisherigen Betrachtungen von (possibilistischen) F-Expertensystemen  $(\mathcal{U}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M}))$  mit  $n$ -dimensionalem Universum  $\mathcal{U} = (\Omega^{(i)})_{i \in \mathbb{N}_n}$  haben wir stets bei der Darstellung der Wissensbasis direkten Bezug auf das zugrunde liegende Regelsystem  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  genommen und dabei implizit vorausgesetzt, daß der jeweilige Experte die in ihm enthaltenen gewöhnlichen Relationen  $R^M \subseteq \Omega^M$  bzw. Possibilitätsverteilungen  $\varrho^M \in \text{POSS}(\Omega^M)$  vorgibt. In vielen Anwendungsbereichen wird jedoch eine andere Art der Wissensrepräsentation bevorzugt, die sich eines Systems konjunktiv verknüpfter und im Sinne logischer Implikationen zu interpretierender Regeln bedient. Für den Fall eines F-Expertensystems haben die dann auftretenden impräzisen Inferenzregeln die Form

$$R_j : \text{if } \xi^{S_j} \text{ in } A_j \text{ then } \xi^{T_j} \text{ in } B_j, \quad j = 1, \dots, r,$$

wobei  $A_j \subseteq \Omega^{S_j}$ ,  $B_j \subseteq \Omega^{T_j}$  mit  $\emptyset \neq S_j \subseteq \mathbb{N}_n$  und  $\emptyset \neq T_j \subseteq \mathbb{N}_n$ ,  $S_j \cap T_j = \emptyset$  vorausgesetzt wird.

Die Regel  $R_j$  stellt eine Beziehung zwischen den Werten der durch die Indexmengen  $S_j$  und  $T_j$  indizierten Attribute her.  $\xi$  sei eine Variable mit dem Wertebereich  $\Omega$ ,  $\xi^{S_j} \stackrel{\text{def}}{=} \text{red}_{S_j}^{\mathbb{N}_n}(\xi)$  und  $\xi^{T_j} \stackrel{\text{def}}{=} \text{red}_{T_j}^{\mathbb{N}_n}(\xi)$  ihre Projektion auf  $\Omega^{S_j}$  bzw.  $\Omega^{T_j}$ .

$R_j$  sagt aus, daß für alle mit dieser impräzisen Inferenzregel vereinbaren Objektzustände  $\xi \in \Omega$  die Gültigkeit von  $\xi^{S_j} \in A_j$  auch die Gültigkeit von  $\xi^{T_j} \in B_j$  nach sich zieht. Ist allerdings  $\xi^{S_j} \in \Omega^{S_j} \setminus A_j$ , so erlaubt  $R_j$  keine über  $\xi^{T_j} \in \Omega^{T_j}$  hinausgehende spezialisierende Aussage bezüglich des Wertes von  $\xi^{T_j}$ .

Repräsentiert man  $R_j$  als Relation auf  $\Omega^{S_j \cup T_j}$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} R_j &= \left( \hat{\Pi}_{S_j}^{S_j \cup T_j}(A_j) \cap \hat{\Pi}_{T_j}^{S_j \cup T_j}(B_j) \right) \cup \hat{\Pi}_{S_j}^{S_j \cup T_j}(\Omega^{S_j} \setminus A_j) \\ &= \hat{\Pi}_{S_j}^{S_j \cup T_j}(\Omega^{S_j} \setminus A_j) \cup \hat{\Pi}_{T_j}^{S_j \cup T_j}(B_j). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Läßt sich in einem Anwendungsbeispiel das vorhandene Expertenwissen mit Hilfe impräziser Inferenzregeln und induziertem Relationensystem  $(R_j)_{j=1}^r$  formalisieren, so

gilt für die Relationen  $R^M$ ,  $M \in \mathcal{M}$ , im Regelsystem  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  des entsprechenden F-Expertensystems:

$$R^M = \Pi_M^{\mathbb{N}^n} \left( \bigcap_{j=1}^r \hat{\Pi}_{S_j \cup T_j}^{\mathbb{N}^n}(R_j) \right). \quad (3.15)$$

**Beispiel 3.6 (Fortsetzung)** Um die bei auftretenden Ölverschmutzungen zu berücksichtigenden Beziehungen zwischen Verschmutzungsorten und zuständigen Behörden anzugeben, stellen wir insgesamt sechs umgangssprachlich formulierte Regeln auf. Exemplarisch sei die Regel ( $R_1$ ) wiederholt:

( $R_1$ ) Allein der Grenzschutz ist zuständig für die offene See und die 12-Meilen-Zone.

Auf die Notation impräziser Inferenzregeln übertragen, läßt sie sich durch

$$R_1 : \quad \text{if Verschmutzungsort in } \{z_3, z_2\} \\ \quad \text{then zuständige Behörde in } \{gs\}$$

bzw.

$$R_1 : \quad \text{if } \xi^{S_1} \text{ in } A_1 \text{ then } \xi^{T_1} \text{ in } B_1,$$

mit  $\xi \in \Omega$ ,  $S_1 = \{1\}$ ,  $T_1 = \{2\}$ ,  $A_1 = \{z_3, z_2\}$  und  $B_1 = \{gs\}$  repräsentieren.

Analog erhalten wir die übrigen Regeln:

$$\begin{aligned} R_2 : & \quad \text{if zuständige Behörde in } \{ha\} \\ & \quad \text{then Verschmutzungsort in } \{td, ld\}, \\ R_3 : & \quad \text{if Verschmutzungsort in } \{td, ld\} \\ & \quad \text{then zuständige Behörde in } \text{Dom}(\text{zuständige Behörde}) \setminus \{wp, gs\}, \\ R_4 : & \quad \text{if Verschmutzungsort in } \{ka\} \\ & \quad \text{then zuständige Behörde in } \text{Dom}(\text{zuständige Behörde}) \setminus \{fw\}, \\ R_5 : & \quad \text{if Verschmutzungsort in } \{td\} \\ & \quad \text{then zuständige Behörde in } \{ha\}, \\ R_6 : & \quad \text{if zuständige Behörde in } \{fw\} \\ & \quad \text{then Verschmutzungsort in } \text{Dom}(\text{Verschmutzungsort}) \setminus \{z_3\}. \end{aligned}$$

Der Übergang zur relationalen Darstellung der impräzisen Inferenzregeln liefert z.B.

$$\begin{aligned} R_3 &= \hat{\Pi}_{\{1\}}^{\{1,2\}}(\{z_3, z_2, z_1, ka\}) \cup \hat{\Pi}_{\{2\}}^{\{1,2\}}(\{fw, ha\}) \\ &= \Omega^{\{1,2\}} \setminus \{(wp, td), (wp, ld), (fw, td), (fw, ld)\}. \end{aligned}$$

Alle aufgeführten Regeln beziehen sich auf die Indexmenge  $M_1$  der Modularisierung  $\mathcal{M} = \{M_1, M_2\}$  mit  $M_1 = \{1, 2\}$  und  $M_2 = \{2, 3\}$ .

Wir berechnen schließlich  $R^{M_1} = \bigcap_{i=1}^6 R_i$ . Diese Relation wurde bereits in Tabelle 3.1 dargestellt.  $\square$

Nach der Einführung des einfachen Konzepts impräziser Inferenzregeln gehen wir jetzt zum allgemeineren Fall eines Systems  $(R_j)_{j=1}^r$  konjunktiv verknüpfter possibilistischer Inferenzregeln über, das in der Form

$$R_j : \text{if } \xi^{S_j} \text{ is } \mu_j \text{ then } \xi^{T_j} \text{ is } \nu_j, \quad j = 1, \dots, r,$$

mit  $\mu_j \in \text{POSS}(\Omega^{S_j})$ ,  $\nu_j \in \text{POSS}(\Omega^{T_j})$  und  $\emptyset \neq S_j \subseteq \mathbb{N}_n$ ,  $\emptyset \neq T_j \subseteq \mathbb{N}_n$ ,  $S_j \cap T_j = \emptyset$  angegeben wird. Auch hier stellt die Regel  $R_j$  eine Beziehung zwischen den Werten der durch die Mengen  $S_j$  und  $T_j$  indizierten Attribute her.

$\xi$  ist eine Variable, die als Werte beliebige Possibilitätsverteilungen über  $\Omega$  annimmt. Analog zu den impräzisen Inferenzregeln wollen wir mit  $\xi^{S_j}$  und  $\xi^{T_j}$  die Projektionen von  $\xi$  auf  $\Omega^{S_j}$  bzw.  $\Omega^{T_j}$  bezeichnen, d.h., es soll  $\xi^{S_j} \equiv \text{proj}_{S_j}^{\mathbb{N}_n}(\xi)$  und  $\xi^{T_j} \equiv \text{proj}_{T_j}^{\mathbb{N}_n}(\xi)$  gelten.

Das in possibilistischen Inferenzregeln auftretende Symbol **is** dient als linguistische Beschreibung des Operators  $\sqsubseteq$  und ist daher als „is as least as specific as“ zu lesen. Die Verwendung von **is** anstelle von  $\sqsubseteq$  hat den Vorteil, daß auf diese Weise jede Regel  $R_j$  sehr anschaulich einen Teil des Expertenwissens widerspiegeln kann, sofern auch  $\xi^{S_j}$ ,  $\mu_j$ ,  $\xi^{T_j}$  und  $\nu_j$  durch geeignete sprachliche Terme ersetzt und lediglich als deren Interpretation betrachtet werden.

Im Sinne einer logischen Implikation sagt eine possibilistische Inferenzregel  $R_j$  aus, daß für alle mit ihr vereinbaren Objektzustände  $\omega_0 \in \Omega$  folgendes gelten soll: Ist  $\xi \in \text{POSS}(\Omega)$  eine  $\omega_0$  unscharf beschreibende Possibilitätsverteilung, so ist mit der Gültigkeit von  $\xi^{S_j} \sqsubseteq \mu_j$  auch die Gültigkeit von  $\xi^{T_j} \sqsubseteq \nu_j$  verbunden.

Für den Fall  $\xi^{S_j} \not\sqsubseteq \mu_j$  sagt die Regel explizit nichts Einschränkendes über  $\xi^{T_j}$ ; implizit kann jedoch für  $\min\{\xi^{S_j}, \mu_j\} \neq 0$  aufgrund der oben genannten Implikationsbeziehung durchaus eine über  $\xi^{T_j} \sqsubseteq \mathbb{1}_{\Omega^{T_j}}$  hinausgehende Spezialisierung von  $\xi^{T_j}$  hervorgerufen werden. Anhand dieser Interpretationsgrundlage werden wir nun eine geeignete Repräsentation possibilistischer Inferenzregeln  $R_j$  durch Possibilitätsverteilungen  $\pi_j \in \text{POSS}(\Omega^{S_j \cup T_j})$  bestimmen. Dazu formalisieren wir als ersten Schritt die durch  $R_j$  festgelegten Bedingungen für den mit  $R_j$  verbundenen Inferenzmechanismus.

Wenn wir die gesuchte Possibilitätsverteilung  $\pi_j \in \text{POSS}(\Omega^{S_j \cup T_j})$  als possibilistische Relation zur unscharfen Beschreibung der Projektion  $\text{red}_{S_j \cup T_j}^{\mathbb{N}_n}(\omega_0)$  eines zu beobachtenden Objektzustandes  $\omega_0 \in \Omega$  auffassen und die zu diesem allgemeinen Expertenwissen bezüglich  $\omega_0$  hinzukommende Beobachtung von  $\text{red}_{S_j}^{\mathbb{N}_n}(\omega_0)$  mit Hilfe einer Possibilitätsverteilung  $\xi^{S_j} \in \text{POSS}(\Omega^{S_j})$  darstellen, dann soll der Inferenzmechanismus durch konjunktive Verknüpfung von  $\xi^{S_j}$  und  $\pi_j$  eine möglichst spezifische Possibilitätsverteilung

$\xi^{T_j} \in \text{POSS}(\Omega^{T_j})$  für  $\text{red}_{T_j}^{N_n}(\omega_0)$  hervorbringen. Hierbei ist natürlich anzumerken, daß  $\xi^{T_j} \in \text{POSS}(\Omega^{T_j})$  nur dann immer gelten muß, wenn  $\xi^{T_j}$  und  $\pi_j$  auf einen konsistenten Zustand des entsprechenden possibilistischen F-Expertensystems führen.

Der Inferenzmechanismus beruht auf der partiellen Funktion

$$\begin{aligned} \text{infer}_j &: \Omega^{S_j} \times \Omega^{S_j \cup T_j} \rightarrow \Omega^{T_j}, \\ \text{infer}_j(\omega, \omega') &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{red}_{T_j}^{S_j \cup T_j}(\omega'), & \text{falls } \text{red}_{S_j}^{S_j \cup T_j}(\omega') = \omega \\ \text{undefiniert}, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.16)$$

und erzeugt unter Anwendung des Extensionsprinzips  $\xi^{T_j} \equiv \widehat{\text{infer}}_j(\xi^{S_j}, \pi_j)$ .

Um  $\pi_j$  zu ermitteln, greifen wir auf die geforderte Bedingung

$$\xi^{S_j} \sqsubseteq \mu_j \implies \xi^{T_j} \sqsubseteq \nu_j. \quad (3.17)$$

zurück. Mit Ausnahme unbedeutender Trivialfälle ist  $\pi_j$  durch diese Bedingung nicht eindeutig bestimmt. Da aber  $\xi^{T_j} \sqsubseteq \nu_j$  keinerlei Auskunft darüber gibt, auf welche Art  $\xi^{T_j}$  gegebenenfalls spezifischer sein soll als  $\nu_j$ , ist es vernünftig, nach der am wenigsten spezifischen Possibilitätsverteilung  $\pi_j$  zu suchen, die im Zusammenhang mit dem besprochenen Inferenzmechanismus die Bedingung (3.17) erfüllt. In unserem Fall haben wir deshalb für  $\pi_j$  die Bedingung

$$\widehat{\text{infer}}_j(\mu_j, \pi_j) \equiv \nu_j, \quad (3.18)$$

zu fordern, was der Bedingung (3.17) für  $\xi^{S_j} \equiv \mu_j$  unter Berücksichtigung des Prinzips minimaler Spezifität entspricht.

Aus Satz 2.36(a), der sich, wie man seinem Beweis sofort entnehmen kann, von normalen Fuzzy-Mengen unmittelbar auf beliebige Possibilitätsverteilungen übertragen läßt, entnehmen wir die folgende Darstellung der strengen  $\alpha$ -Schnitte der Possibilitätsverteilung  $\widehat{\text{infer}}_j(\mu_j, \pi_j)$ :

$$\left[ \widehat{\text{infer}}_j(\mu_j, \pi_j) \right]_{\underline{\alpha}} = \text{infer}_j \left( [\mu_j]_{\underline{\alpha}}, [\pi_j]_{\underline{\alpha}} \right). \quad (3.19)$$

Für  $\alpha \in [0, 1)$  berechnen wir:

$$\begin{aligned} &\text{infer}_j \left( [\mu_j]_{\underline{\alpha}}, [\pi_j]_{\underline{\alpha}} \right) \\ &= \{ \omega \in \Omega^{T_j} \mid (\exists \omega' \in [\mu_j]_{\underline{\alpha}}) (\exists \omega'' \in [\pi_j]_{\underline{\alpha}}) : \text{infer}_j(\omega', \omega'') = \omega \} \\ &= \{ \omega \in \Omega^{T_j} \mid (\exists \omega' \in [\mu_j]_{\underline{\alpha}}) (\exists \omega'' \in [\pi_j]_{\underline{\alpha}}) : \\ &\quad \text{red}_{S_j}^{S_j \cup T_j}(\omega'') = \omega' \wedge \text{red}_{T_j}^{S_j \cup T_j}(\omega'') = \omega \} \\ &= \Pi_{T_j}^{S_j \cup T_j} \left( \widehat{\Pi}_{S_j}^{S_j \cup T_j} \left( [\mu_j]_{\underline{\alpha}} \right) \cap [\pi_j]_{\underline{\alpha}} \right). \end{aligned}$$

Die Bedingung (3.18) kann demnach nur für solche Possibilitätsverteilungen  $\pi_j$  gelten, für die

$$[\pi_j]_{\alpha} \subseteq \hat{\Pi}_{T_j}^{S_j \cup T_j}([\nu_j]_{\alpha}) \cup \hat{\Pi}_{S_j}^{S_j \cup T_j}(\Omega^{S_j} \setminus [\mu_j]_{\alpha}) \quad (3.20)$$

erfüllt ist. Also haben wir für  $\omega \in \Omega^{S_j \cup T_j}$ ,  $\omega^{S_j} \stackrel{\text{def}}{=} \text{red}_{S_j}^{S_j \cup T_j}(\omega)$  und  $\omega^{T_j} \stackrel{\text{def}}{=} \text{red}_{T_j}^{S_j \cup T_j}(\omega)$  die Beziehung:

$$\begin{aligned} \omega \in [\pi_j]_{\alpha} &\implies (\omega^{S_j} \in [\mu_j]_{\alpha} \wedge \omega^{T_j} \in [\nu_j]_{\alpha}) \vee \omega^{S_j} \notin [\mu_j]_{\alpha} \\ &\iff (\mu_j(\omega^{S_j}) > \alpha \wedge \nu_j(\omega^{T_j}) > \alpha) \vee \mu_j(\omega^{S_j}) \leq \alpha, \end{aligned}$$

Folglich ist die eindeutig bestimmte Possibilitätsverteilung  $\pi_j$  minimaler Spezifizität die von  $\mu_j$  und  $\nu_j$  induzierte *Gödelrelation*  $\varrho^{\text{Gödel}}[\mu_j, \nu_j] \in \text{POSS}(\Omega^{S_j \cup T_j})$  mit

$$\varrho^{\text{Gödel}}[\mu_j, \nu_j](\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \nu_j(\omega^{T_j}), & \text{if } \mu_j(\omega^{S_j}) > \nu_j(\omega^{T_j}) \\ 1, & \text{if } \mu_j(\omega^{S_j}) \leq \nu_j(\omega^{T_j}). \end{cases} \quad (3.21)$$

Abschließend sei noch angemerkt, daß die Gödelrelation nicht nur (3.18), sondern natürlich auch der Bedingung (3.17) genügt, da

$$\xi^{S_j} \sqsubseteq \mu_j \implies \xi^{T_j} \equiv \widehat{\text{infer}}_j(\xi^{S_j}, \varrho^{\text{Gödel}}[\mu_j, \nu_j]) \equiv \nu_j$$

gilt, und außerdem, wie unter Einbeziehung des Prinzips minimaler Spezifizität nicht anders zu erwarten ist,

$$\min\{\xi^{S_j}, \mu_j\} \equiv 0 \implies \widehat{\text{infer}}_j(\xi^{S_j}, \varrho^{\text{Gödel}}[\mu_j, \nu_j]) \equiv \mathbb{1}_{\Omega^{T_j}}.$$

gewährleistet.

**Beispiel 3.6 (Fortsetzung)** Ein Experte gibt die folgende possibilistische Inferenzregel als Darstellung der unscharfen Beziehungen zwischen Verschmutzungsorten außerhalb der Hafenanlagen in der Nähe der 3-Meilen-Zone und den zuständigen Behörden an:

$$R : \text{ if } \xi^{\{1\}} \text{ is } \mu \text{ then } \xi^{\{2\}} \text{ is } \nu.$$

Die Variable  $\xi$  darf Werte aus  $\text{POSS}(\Omega)$  annehmen. Die konstanten Possibilitätsverteilungen  $\mu \in \text{POSS}(\Omega^{(1)})$  und  $\nu \in \text{POSS}(\Omega^{(2)})$  seien wie in Abbildung 3.2 definiert.

Sie induzieren die in Tabelle 3.7 aufgeführte Gödelrelation  $\varrho^{\text{Gödel}}[\mu, \nu]$ , die mit der bereits in Tabelle 3.3 dargestellten Possibilitätsverteilung  $\varrho^{\{1,2\}}$  übereinstimmt.  $\square$

Mit den obigen Ausführungen wollen wir Beispiel 3.6, das uns bisher durch dieses Kapitel begleitet hat, beenden. Zur weiteren Veranschaulichung der Gödelrelationen möge ein einfaches Beispiel dienen, das anstelle des bisher benutzten endlichen Universums ein Kontinuum verwendet.



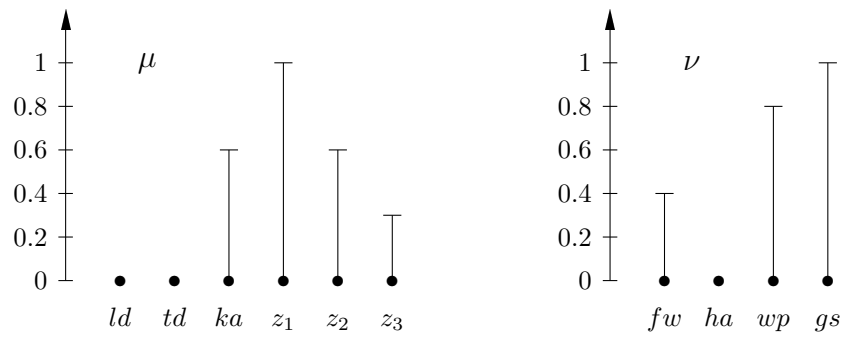


Abbildung 3.2: Zwei Possibilitätsverteilungen  $\mu$  und  $\nu$

		$\omega_2$				$\varrho^{\text{Gödel}}[\mu, \nu](\omega_1, \omega_2)$
		$fw$	$ha$	$wp$	$gs$	
$\omega_1$	$ld$	1	1	1	1	
	$td$	1	1	1	1	
	$ka$	0.4	0	1	1	
	$z_1$	0.4	0	0.8	1	
	$z_2$	0.4	0	1	1	
	$z_3$	1	0	1	1	

Tabelle 3.7: Tabellarische Darstellung der von  $\mu$  und  $\nu$  induzierten Gödelrelation

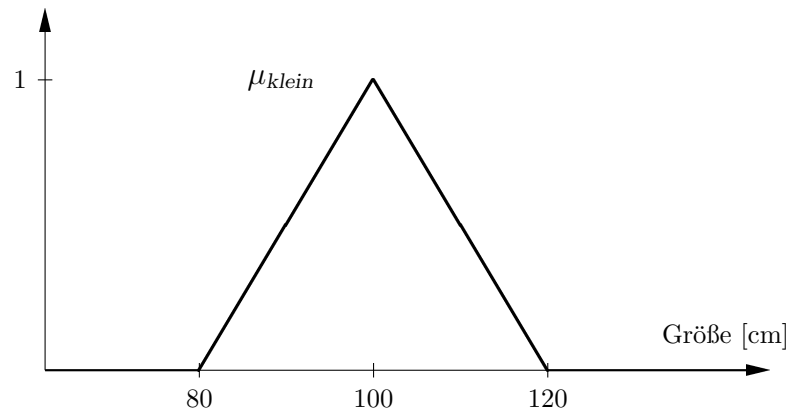


Abbildung 3.3: Possibilitätsverteilung des linguistischen Wertes „klein“

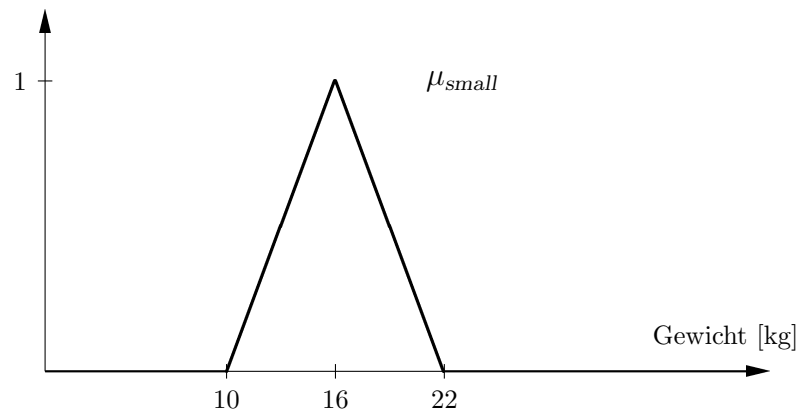


Abbildung 3.4: Possibilitätsverteilung des linguistischen Wertes „gering“

**Beispiel 3.20** Ein Experte formuliert eine unscharfe Relation zwischen der Größe und dem Gewicht von Personen mit Hilfe der Regel

$R_1$  : **if** Größe **is** klein **then** Gewicht **is** gering.

Er benutzt das zweidimensionale Universum  $\mathcal{U} = (\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)})$  mit den Wertebereichen  $\Omega^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Dom}(\text{Größe}) \stackrel{\text{def}}{=} [40, 250] \subset \mathbb{R}$  (in cm) und  $\Omega^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Dom}(\text{Gewicht}) \stackrel{\text{def}}{=} [1.5, 300] \subset \mathbb{R}$  (in kg) und interpretiert die linguistischen Werte „klein“ und „gering“ mit Hilfe der in den Abbildungen 3.3 und 3.4 dargestellten Possibilitätsverteilungen  $\mu_1 \in \text{POSS}(\Omega^{(1)})$  und  $\nu_1 \in \text{POSS}(\Omega^{(2)})$ .

Die induzierte Gödelrelation  $\rho^{\text{Gödel}}[\mu_1, \nu_1] \in \text{POSS}(\Omega)$  werde dazu benutzt, die spezifischste der mit  $R_1$  vereinbaren und dem Prinzip der minimalen Spezifität genügenden Possibilitätsverteilungen  $\xi^{\{2\}} \in \text{POSS}(\Omega^{(2)})$  für das Gewicht eines Jungen namens Marcel zu finden, dessen Größe mit Hilfe der durch Abbildung 3.5 vorgegebenen Possibilitätsverteilung  $\xi^{\{1\}} \in \text{POSS}(\Omega^{(1)})$  angegeben ist.

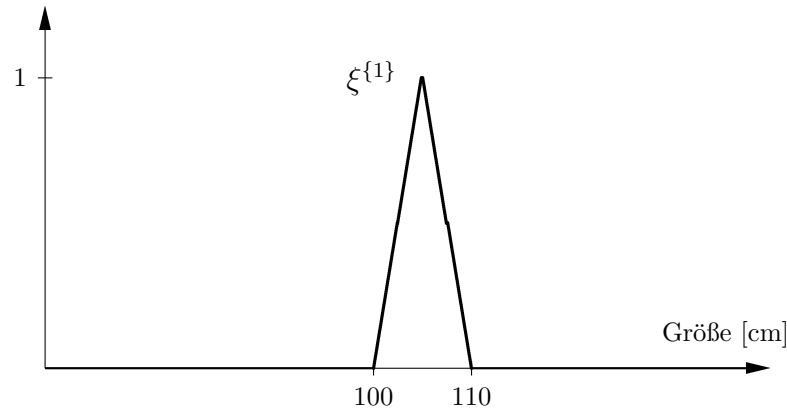


Abbildung 3.5: Possibilitätsverteilung der Größe von Marcel

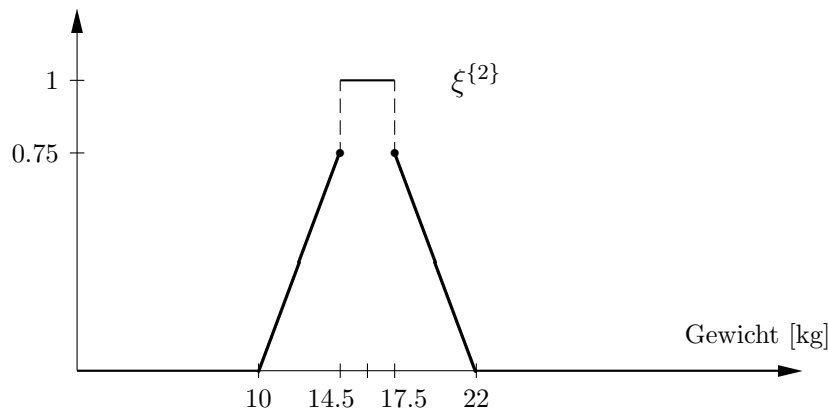


Abbildung 3.6: Resultierende Possibilitätsverteilung des Gewichts von Marcel (in kg)

Für  $\xi^{\{2\}} \equiv \widehat{\text{infer}}_1(\xi^{\{1\}}, \varrho^{\text{Gödel}}[\mu_1, \nu_1])$  ergibt sich die in Abbildung 3.6 aufgezeigte graphische Darstellung.

Durch das Hinzufügen weiterer possibilistischer Inferenzregeln der Art

$$R_j : \text{if } \textit{Größe} \text{ is } \mu_j \text{ then } \textit{Gewicht} \text{ is } \nu_j, \quad j = 1, \dots, r,$$

und deren zugehöriger Gödelrelationen  $\varrho^{\text{Gödel}}[\mu_j, \nu_j]$  könnte z.B. das gesamte Expertenwissen über die unscharfe Beziehung zwischen *Größe* und *Gewicht* festgelegt werden. In einem gegebenenfalls um einige Attribute (z.B. *Alter*, *Beruf* usw.) erweiterten possibilistischen F-Expertensystem  $(\mathcal{U}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M}))$  mit  $n$ -dimensionalem Universum  $\mathcal{U} = (\Omega^{(i)})_{i \in \mathbb{N}_n}$ ,  $n \geq 2$ , würden dann  $R_1, R_2, \dots, R_r$  durch

$$\varrho^{\{1,2\}} \stackrel{\text{def}}{=} \min_{j=1, \dots, r} \{ \varrho^{\text{Gödel}}[\mu_j, \nu_j] \}$$

repräsentiert werden und bezüglich der Indexmenge  $\{1, 2\} \in \mathcal{M}$  in das Regelsystem  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M}) = \{ \varrho^M \mid M \in \mathcal{M} \}$  eingehen. Dabei sollte beachtet werden, daß  $\varrho^{\{1,2\}}$  eine

Possibilitätsverteilung ist und somit zur Widerspruchsfreiheit von  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  beiträgt.  $\square$

### 3.4 Wissensrepräsentation und -propagation mit Hypergraphen

Die beiden vorhergehenden Abschnitte dienten dazu, das Konzept des (possibilistischen) F-Expertensystems vorzustellen und dabei auch darauf einzugehen, wie die in wissensbasierten Systemen häufig auftretenden Wenn-Dann-Inferenzregeln innerhalb des hier benutzten formalen Rahmens zu interpretieren sind.

Jetzt richtet sich unser Interesse auf die Entwicklung eines geeigneten *Propagationsalgorithmus*, der es erlaubt, die Zustände  $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))$  von (possibilistischen) F-Expertensystemen  $\mathcal{X}$  in bezug auf Evidenzsysteme  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$  mit möglichst geringem Aufwand bestimmen und damit die  $i$ -ten Restriktionen  $\kappa^{(i)}$  dieser Zustände berechnen zu können.

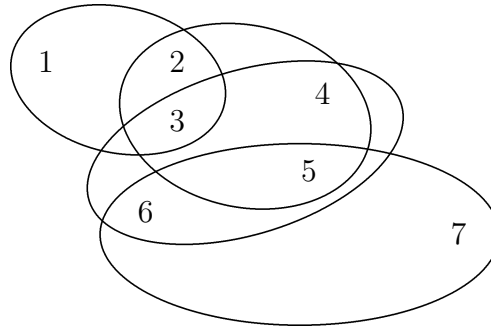
Zunächst konzentrieren wir unsere Betrachtungen auf den Spezialfall gewöhnlicher F-Expertensysteme, wie sie in Definition 3.14 eingeführt wurden. Wir wissen bereits, daß sich  $\kappa^{(i)}$  in der Form

$$\begin{aligned} \kappa^{(i)} &= \Pi_{\{i\}}^{\mathbb{N}_n} \left( \bigcap_{M \in \mathcal{M}} \hat{\Pi}_M^{\mathbb{N}_n}(R^M) \cap \bigcap_{N \in \mathcal{N}} \hat{\Pi}_N^{\mathbb{N}_n}(E^N) \right) \\ &= \Pi_{\{i\}}^{\mathbb{N}_n} (\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))). \end{aligned} \quad (3.22)$$

darstellen läßt. Aus dieser Repräsentation resultiert ein trivialer Propagationsalgorithmus, der  $\kappa^{(i)}$  durch Ausführung der oben angegebenen zylindrischen Extensionen, Durchschnittsbildungen und Projektionen berechnet. So einfach dieser Algorithmus auch ist, er ist wenig praktikabel, da er  $\kappa^{(i)}$  über  $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))$  bestimmt und folglich auf  $n$ -stelligen Relationen operieren muß, deren Kardinalität sehr schnell Probleme mit sich bringen kann.

Exemplarisch betrachten wir diesbezüglich ein für realistische Anwendungen recht elementares F-Expertensystem  $\mathcal{X} = (\mathcal{U}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M}))$  mit 10-dimensionalem Universum  $\mathcal{U} = (\Omega^{(i)})_{i \in \mathbb{N}_{10}}$  und Wertebereichen  $\Omega^{(i)}$  mit  $|\Omega^{(i)}| = 6$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ . Es sei  $M = \{1, 2\} \in \mathcal{M}$  eine Indexmenge aus der Modularisierung  $\mathcal{M}$  und  $R^M \in \mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  mit  $|R^M| = 12$  eine Relation aus dem Regelsystem  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ . Dann benutzt der oben angesprochene Propagationsalgorithmus zur Berechnung der  $\kappa^{(i)}$  unter anderem die Relation  $\hat{\Pi}_M^{\mathbb{N}_{10}}(R^M)$ , die aufgrund ihrer extremen Tupelzahl  $|\hat{\Pi}_M^{\mathbb{N}_{10}}(R^M)| = 12 \cdot 6^8 = 20.155.392$  kaum noch handhabbar ist.

Man sollte daher versuchen, bei der Propagation die in  $\Omega$  durchgeführten Schnittoperationen in niederdimensionale Unterräume zu verlagern und auf diese Weise den erwähnten *globalen* (d.h. auf  $\Omega$  bezogenen) Algorithmus in einen *lokal* operierenden (d.h. auf  $\Omega^M$  mit  $M \in \mathcal{M}$  bezogenen) Algorithmus umzugestalten. Da die hierbei

Abbildung 3.7: Der von  $\mathcal{M}$  induzierte Hypergraph  $H_{\mathcal{M}}$ 

wichtigen Unterräume durch die Modularisierung  $\mathcal{M}$  vorbestimmt sind, die die existierenden qualitativen Abhängigkeiten zwischen allen beteiligten Attributen zum Ausdruck bringt, empfiehlt es sich,  $\mathcal{M}$  nicht nur abstrakt als Menge von Indextmengen aufzufassen, sondern auch graphisch zu veranschaulichen.

**Definition 3.21** Ein **Hypergraph** ist ein Paar  $(V, \mathfrak{E})$  aus einer endlichen Menge  $V$  von **Knoten** und einer Menge  $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{P}(V)$  von **Hyperkanten**, die den folgenden Bedingungen genügen:

- (a)  $\forall E \in \mathfrak{E} : E \neq \emptyset$
- (b)  $\bigcup_{E \in \mathfrak{E}} E = V$

Offensichtlich induziert jede Modularisierung  $\mathcal{M}$  von  $\mathbb{N}_n$  einen Hypergraphen  $H_{\mathcal{M}} = (\mathbb{N}_n, \mathcal{M})$ .

**Beispiel 3.22** Es sei  $\mathcal{M} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{5, 6, 7\}\}$  eine Modularisierung von  $\mathbb{N}_7$ .  $H_{\mathcal{M}} = (\mathbb{N}_7, \mathcal{M})$  ist in Abbildung 3.7 anschaulich dargestellt.  $\square$

Bevor wir den gewünschten lokalen Propagationsalgorithmus für F-Expertensysteme vorstellen, führen wir noch die nachstehende Eigenschaft von Hyperkanten ein:

**Definition 3.23** Es seien  $E_1, E_2 \in \mathfrak{E}$  zwei verschiedene Hyperkanten des Hypergraphen  $(V, \mathfrak{E})$ .  $E_1$  und  $E_2$  heißen **überlappend**, wenn gilt:

$$E_1 \not\subseteq E_2 \wedge E_2 \not\subseteq E_1 \wedge E_1 \cap E_2 \neq \emptyset.$$

Überlappende Hyperkanten  $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$  des durch die Modularisierung  $\mathcal{M}$  eines F-Expertensystems  $\mathcal{X} = (\mathcal{U}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M}))$  induzierten Hypergraphen  $H_{\mathcal{M}}$  sind für uns deshalb so wichtig, weil sie auf die qualitativen Abhängigkeiten hinweisen, die zwischen den durch  $M_1$  und  $M_2$  indizierten Attributen bestehen. Wir bezeichnen  $H_{\mathcal{M}}$  daher auch als den *Abhängigkeitshypergraphen* des zugrunde liegenden F-Expertensystems

$\mathcal{X}$ . Es sei in diesem Zusammenhang angemerkt, daß aufgrund der Definition 3.10 jedes Paar  $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$  von Indexmengen einer Modularisierung  $\mathcal{M}$  stets den Bedingungen  $M_1 \not\subseteq M_2$  und  $M_2 \not\subseteq M_1$  genügt, die Überlappungseigenschaft in diesem Fall also schon durch das Vorhandensein eines durch  $M_1$  und  $M_2$  gemeinsam angesprochenen Attributs von  $\mathcal{X}$  gegeben ist.

Der nun folgende lokale Propagationsalgorithmus für F-Expertensysteme ist in einer selbsterklärenden, PASCAL-ähnlichen Notation unter Verzicht auf Typenangaben geschrieben. Durch den Aufruf der Prozedur *Fokussiere*, die auf die globalen Variablen  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  und  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$  im Sinne der bisher von uns verwandten Bezeichnungen zurückgreift, läßt sich das aufgrund des Evidenzsystems  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}) = \{E^N \mid N \in \mathcal{N}\}$  modifizierte Relationensystem  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M}) = \{R^M \mid M \in \mathcal{M}\}$  mit  $(\forall M \in \mathcal{M} : R^M := \Pi_M^{\mathbb{N}_n}(\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))))$  bestimmen. Das Symbol „:=“ ist als Wertzuweisung zu lesen.

Die dem Algorithmus zugrunde liegende Idee ist, Informationen über die aufgrund der einzubeziehenden Evidenzen nicht mehr möglichen Attributwerte innerhalb des Hypergraphen auf Wegen sich überlappender Hyperkanten weiterzureichen, um dadurch in den einzelnen Relationen  $R^M$  Tupel und damit gegebenenfalls weitere Attributwerte ausschließen zu können. Dieses Verfahren führt natürlich nur dann zu spezifischsten Relationen, wenn das Regelsystem *redundanzfrei* ist, d.h., keine der in  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  vorkommenden Relationen  $R^M$  enthält Tupel, die nicht aus der Projektion der induzierten Wissensbasis  $R$  auf  $\Omega^M$  hervorgehen. Im Falle der Redundanzfreiheit lassen sich nach der Ausführung des Propagationsalgorithmus die gesuchten  $i$ -ten Restriktionen von  $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))$  durch

$$\kappa^{(i)} = \Pi_{\{i\}}^M(R^M) \text{ für alle } M \in \mathcal{M} \text{ mit } i \in M.$$

ermitteln. Das modifizierte Regelsystem ist dann selbst wiederum redundanzfrei. Wird die Redundanzfreiheit nicht vorausgesetzt, so erhält man durch die oben angegebenen Projektionen zumindest Obermengen von  $\kappa^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Definition 3.24** *Ein bezüglich eines  $n$ -dimensionalen Universums  $\mathcal{U}$  und einer Modularisierung  $\mathcal{M}$  von  $\mathbb{N}_n$  aufgestelltes Regelsystem  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M}) = \{R^M \mid M \in \mathcal{M}\}$  heißt **redundanzfrei**, wenn gilt:*

$$\forall M \in \mathcal{M} : R^M = \Pi_M^{\mathbb{N}_n} \left( \bigcap_{M^* \in \mathcal{M}} \hat{\Pi}_{M^*}^{\mathbb{N}_n} (R^{M^*}) \right).$$

Anschaulich besagt die Redundanzfreiheit, daß alle in  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  enthaltenen Relationen  $R^M$  nur Tupel enthalten, die aus der Projektion der induzierten Wissensbasis  $R$  auf  $\Omega^M$  hervorgehen. Redundanz dagegen bedeutet, daß der Experte „überflüssige“ Tupel in eine der Relationen  $R^M$  aufgenommen hat, d.h. solche, die sich mit Hilfe der anderen Relationen — ohne Evidenzwissen — ausschließen lassen.

**Algorithmus 3.25**

**procedure** Fokussiere;

**var**  $\mathcal{N}^*$ ;  $N$ ;  $M$ ;  $R^*$ ;

**begin**

$\mathcal{N}^* := \mathcal{N}$ ;

**while**  $\mathcal{N}^* \neq \emptyset$  **do**

**begin**

        wähle ein  $N \in \mathcal{N}^*$ ;

$\mathcal{N}^* := \mathcal{N}^* \setminus \{N\}$ ;

        wähle ein  $M \in \mathcal{M}$  mit  $N \subseteq M$ ;

$R^* := \hat{\Pi}_N^M(E^N) \cap R^M$ ;

**if**  $R^* \neq R^M$

**then begin**

$R^M := R^*$ ;

            Propagiere( $M$ )

**end**

**end**

**end** {Fokussiere};

**procedure** Propagiere( $M$ );

**var**  $\mathcal{M}^*$ ;  $R^*$ ;

**begin**

$\mathcal{M}^* := \mathcal{M} \setminus \{M\}$ ;

**while**  $\mathcal{M}^* \neq \emptyset$  **do**

**begin**

        wähle ein  $M^* \in \mathcal{M}^*$ ;

$\mathcal{M}^* := \mathcal{M}^* \setminus \{M^*\}$ ;

**if**  $M^*$  und  $M$  überlappen einander

**then begin**

$R^* := R^{M^*} \cap \hat{\Pi}_{M^* \cap M}^{M^*} \left( \Pi_{M^* \cap M}^M(R^M) \right)$ ;

**if**  $R^* \neq R^{M^*}$

**then begin**

$R^{M^*} := R^*$ ;

                Propagiere( $M^*$ )

**end**

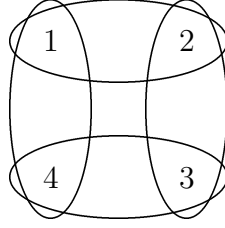
**end**

**end**

**end** {Propagiere};

□

Der oben aufgeführte lokale Propagationsalgorithmus operiert nicht generell auf  $n$ -stelligen Relationen, sondern höchstens auf  $\max\{|M| \mid M \in \mathcal{M}\}$ -stelligen Relationen. Der

Abbildung 3.8: Der Abhängigkeitshypergraph von  $\mathcal{X}_r$ 

Aufwand, der schließlich mit der Bestimmung der  $\kappa^{(i)}$  verbunden ist, hängt jedoch nicht allein von der Kardinalität der an  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  beteiligten Relationen ab, sondern ebenso von den strukturellen Eigenschaften des Hypergraphen  $H_{\mathcal{M}}$ . Anhand des folgenden Beispiels wird gezeigt, daß solche Hypergraphen  $H_{\mathcal{M}}$ , in denen mindestens ein *Zyklus* vorhanden ist, zu nicht akzeptierbarer Ineffizienz des dargestellten Propagationsalgorithmus führen können.

Den Begriff des Zyklus werden wir danach für Hypergraphen formalisieren; seine intuitive Bedeutung wird bereits durch das Beispiel geklärt.

**Beispiel 3.26** Es sei  $\mathcal{X}_r = (\mathcal{U}_r, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{R}_r(\mathcal{U}_r, \mathcal{M}))$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , ein F-Expertensystem mit vierdimensionalem Universum

$\mathcal{U}_r = (\Omega_r^{(1)}, \Omega_r^{(2)}, \Omega_r^{(3)}, \Omega_r^{(4)})$ ,  $\Omega_r^{(i)} = \{0, 1, \dots, r\}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , der Modularisierung  $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$

mit  $M_1 = \{1, 2\}$ ,  $M_2 = \{2, 3\}$ ,  $M_3 = \{3, 4\}$ ,  $M_4 = \{1, 4\}$ ,

der zu  $\mathcal{M}$  kompatiblen Partitionierung  $\mathcal{N} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$  von  $\mathbb{N}_4$

und dem Regelsystem  $\mathcal{R}_r(\mathcal{U}_r, \mathcal{M}) = \{R_r^{M_1}, R_r^{M_2}, R_r^{M_3}, R_r^{M_4}\}$

mit  $R_r^{M_1} = R_r^{M_2} = R_r^{M_3} = \{(i, i) \mid i \in \{0, 1, \dots, r\}\}$

und  $R_r^{M_4} = \{((i+1) \bmod r, i) \mid i \in \{0, \dots, r-1\}\} \cup \{(r, r)\}$ .

Wenden wir Propagationsalgorithmus 3.25 auf das Evidenzsystem  $\mathcal{E}_r(\mathcal{U}_r, \mathcal{N}) = \{E_r^{\{1\}}, E_r^{\{2\}}, E_r^{\{3\}}, E_r^{\{4\}}\}$  mit  $E_r^{\{1\}} = \Omega_r^{(1)} \setminus \{0\}$ ,  $E_r^{\{2\}} = \Omega_r^{(2)}$ ,  $E_r^{\{3\}} = \Omega_r^{(3)}$ ,  $E_r^{\{4\}} = \Omega_r^{(4)}$ , an, so werden die im Regelsystem  $\mathcal{R}_r(\mathcal{U}_r, \mathcal{M})$  enthaltenen Relationen wie folgt spezialisiert:

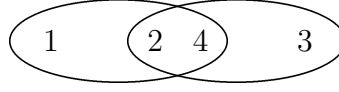
$$R_r^{M_j} := \{(r, r)\}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Für die  $i$ -ten Restriktionen  $\kappa^{(i)}$  des durch  $\mathcal{E}_r(\mathcal{U}_r, \mathcal{N})$  induzierten Zustands  $\sigma(\mathcal{X}_r, \mathcal{E}_r(\mathcal{U}_r, \mathcal{N}))$  von  $\mathcal{X}$  ergibt sich also:

$$\kappa^{(i)} = \{r\}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Die Propagation kann z.B. zyklisch über die Hyperkantenfolge  $(M_1, M_2, M_3, M_4, M_1, M_2, \dots)$  ausgeführt werden. Jeder Aufruf der Prozedur *Propagiere* ist auf eine Schnittbildung zurückzuführen, die genau ein Element aus einer der im Algorithmus benutzten Relationen  $R^M$  bzw.  $R^{M^*}$  entfernt. Um das Endergebnis zu erhalten, sind daher



Abbildung 3.9: Der Abhängigkeitshypergraph von  $\mathcal{X}'_r$ 

$4r$  Ausführungen der Prozedur *Propagiere* erforderlich, d.h., der Hypergraph  $H_{\mathcal{M}}$  wird während der Propagation  $r$ -mal zyklisch durchlaufen.

Die hier sichtbar werdenden Effizienzprobleme entstehen durch die anfänglich nicht gegebene Redundanzfreiheit des Regelsystems  $\mathcal{R}_r(\mathcal{U}_r, \mathcal{M})$ , aber auch als Konsequenz der ungünstigen Modularisierung  $\mathcal{M}$ , die zyklische Abhängigkeiten zwischen den beteiligten Attributen widerspiegelt. In bezug auf das gegebene Beispiel liegt es nahe, den vorhandenen Zyklus durch geeignete Verschmelzung von Knoten zu beseitigen.

Als Alternative wählen wir das F-Expertensystem  $\mathcal{X}'_r = (\mathcal{U}_r, \mathcal{M}', \mathcal{N}, \mathcal{R}_r(\mathcal{U}_r, \mathcal{M}'))$  mit

$$\begin{aligned} \mathcal{M}' &= \{M'_1, M'_2\}, & M'_1 &= M_1 \cup M_4, & M'_2 &= M_2 \cup M_3, \\ \mathcal{R}_r(\mathcal{U}_r, \mathcal{M}') &= \{R_r^{M'_1}, R_r^{M'_2}\}, & R_r^{M'_1} &= \hat{\Pi}_{M_1}^{M'_1}(R_r^{M_1}) \cap \hat{\Pi}_{M_4}^{M'_1}(R_r^{M_4}), \\ & & R_r^{M'_2} &= \hat{\Pi}_{M_2}^{M'_2}(R_r^{M_2}) \cap \hat{\Pi}_{M_3}^{M'_2}(R_r^{M_3}), \end{aligned}$$

und dem in Abbildung 3.9 dargestellten induzierten Hypergraphen  $H_{\mathcal{M}'}$ .

$\mathcal{X}_r$  und  $\mathcal{X}'_r$  heißen *äquivalent*, da sie bei gleicher durch  $\mathcal{E}(\mathcal{U}_r, \mathcal{N})$  gegebener totaler Evidenz zum gleichen Zustand  $\sigma(\mathcal{X}_r, \mathcal{E}(\mathcal{U}_r, \mathcal{N})) = \sigma(\mathcal{X}'_r, \mathcal{E}(\mathcal{U}_r, \mathcal{N}))$  führen.

Wenden wir den lokalen Propagationsalgorithmus auf  $\mathcal{X}'_r$  bezüglich  $\mathcal{E}(\mathcal{U}_r, \mathcal{N})$  an, so werden die initialen, ebenfalls nicht redundanzfreien Relationen

$$\begin{aligned} R_r^{M'_1} &= \{(i, i, (i+r-1) \bmod r) \mid i \in \{0, \dots, r-1\}\} \cup \{(r, r, r)\}, \\ R_r^{M'_2} &= \{(i, i, i) \mid i \in \{0, 1, \dots, r\}\}, \end{aligned}$$

durch ihn zu den Relationen

$$R_r^{M'_1} := R_r^{M'_2} := \{(r, r, r)\}.$$

spezialisiert.

Dieses Resultat wird nun schon bei der zweiten Ausführung der Prozedur *Propagiere* erreicht.  $\square$

**Definition 3.27**  $\mathcal{X}_1 = (\mathcal{U}_1, \mathcal{M}_1, \mathcal{N}_1, \mathcal{R}(\mathcal{U}_1, \mathcal{M}_1))$  und  $\mathcal{X}_2 = (\mathcal{U}_2, \mathcal{M}_2, \mathcal{N}_2, \mathcal{R}(\mathcal{U}_2, \mathcal{M}_2))$  seien zwei F-Expertensysteme.  $\mathcal{X}_1$  und  $\mathcal{X}_2$  heißen **äquivalent**, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (a)  $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$ ,
- (b)  $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$ ,
- (c) für alle Evidenzsysteme  $\mathcal{E}(\mathcal{U}_1, \mathcal{N}_1)$ :  $\sigma(\mathcal{X}_1, \mathcal{E}(\mathcal{U}_1, \mathcal{N}_1)) = \sigma(\mathcal{X}_2, \mathcal{E}(\mathcal{U}_1, \mathcal{N}_1))$ .

Ohne zunächst das Problem fehlender Redundanzfreiheit der Regelsysteme von F-Expertensystemen zu berücksichtigen, hat Beispiel 3.26 bereits angedeutet, daß die Verwendung eines alternativen äquivalenten F-Expertensystems zu einem beachtlichen Effizienzgewinn bei der Propagation führen kann. In der Tat wird sich herausstellen, daß es ausgesprochen günstig ist, auf solche Systeme  $\mathcal{X} = (\mathcal{U}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M}))$  zurückzugreifen, deren durch die Modularisierung  $\mathcal{M}$  induzierter Hypergraph  $H_{\mathcal{M}}$  keine Zyklen aufweist. Was man unter Zyklenfreiheit von Hypergraphen versteht, und wie man sie erreichen kann, klären wir anhand der folgenden Definitionen.

**Definition 3.28** Es sei  $H = (V, \mathfrak{E})$  ein Hypergraph. Eine Hyperkante  $T \in \mathfrak{E}$  heißt **Blatt**, wenn  $|\mathfrak{E}| = 1$  gilt oder aber eine Hyperkante  $E \in \mathfrak{E} \setminus \{T\}$  mit  $E \cap T \neq \emptyset$  existiert, so daß  $(\forall E' \in \mathfrak{E} \setminus \{T\} : T \cap E' \subseteq E)$  ist.

Blätter sind demnach solche Hyperkanten, die durch eine andere Hyperkante vom Rest des Hypergraphen abgeschirmt werden.

**Beispiel 3.26 (Fortsetzung)** Die Hyperkanten  $E_1$  und  $E_4$  des angegebenen Hypergraphen sind Blätter, denn  $E_1$  wird durch  $E_2$  und  $E_4$  durch  $E_3$  vom Rest des Hypergraphen abgeschirmt.  $\square$

**Definition 3.29** Ein Hypergraph  $H = (V, \mathfrak{E})$  heißt **Hyperbaum**, wenn es eine Anordnung  $E : \{1, 2, \dots, |\mathfrak{E}|\} \rightarrow \mathfrak{E}$  seiner Hyperkanten gibt, so daß  $E(k)$  für  $k = 1, \dots, |\mathfrak{E}|$  ein Blatt im Hypergraphen  $\left( \bigcup_{i=1}^k E(i), \{E(i) \mid i \in \{1, \dots, k\}\} \right)$  ist. Die endliche Folge  $(E(k))_{k=1}^{|\mathfrak{E}|}$  wird dann eine **Konstruktionssequenz für  $H$**  genannt.

Im allgemeinen erweist sich Definition 3.29 als recht unpraktisch, wenn es darum geht festzustellen, ob ein gegebener Hypergraph ein Hyperbaum ist oder nicht. Eine sehr einfache Möglichkeit, auf Hyperbaumeigenschaft zu prüfen, beruht auf der Idee, statt einer Konstruktionssequenz umgekehrt eine *Reduktionssequenz* zu ermitteln, die einen bestehenden Hypergraphen genau dann durch Entfernen aller seiner Knoten und Hyperkanten schließlich auflöst, wenn er ein Hyperbaum ist. Ein entsprechendes Verfahren ist die *Graham-Reduktion*, die sich wie folgt formulieren läßt:

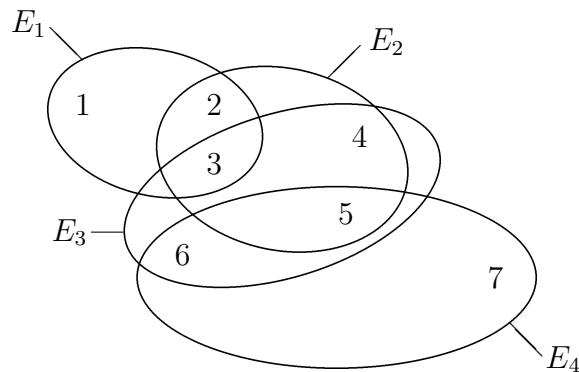


Abbildung 3.10: Dieser Hypergraph ist ein Hyperbaum mit den Konstruktionssequenzen  $(E_1, E_2, E_3, E_4)$  und  $(E_4, E_3, E_2, E_1)$

**Algorithmus 3.30** [Graham-Reduktion] Ein Hypergraph  $H = (V, \mathfrak{E})$  ist genau dann ein Hyperbaum, wenn alle Knoten von  $H$  durch iterative Anwendung der beiden folgenden Operationen entfernt werden können:

- (i) Entferne einen Knoten, der in nur einer Hyperkante vorkommt.
- (ii) Entferne eine Hyperkante, die in einer anderen Hyperkante enthalten ist.  $\square$

**Beispiel 3.26 (Fortsetzung)** Die Anwendung des nicht-deterministischen Algorithmus 3.30 führt z.B. auf die folgende Reduktion:

- (1.) Entferne Knoten 1.
- (2.) Entferne Hyperkante  $\{2, 3\}$ .
- (3.) Entferne Knoten 2.
- (4.) Entferne Hyperkante  $\{3, 4, 5\}$ .
- (5.) Entferne Knoten 3.
- (6.) Entferne Knoten 4.
- (7.) Entferne Hyperkante  $\{5, 6\}$ .
- (8.) Entferne Knoten 5.
- (9.) Entferne Knoten 6.
- (10.) Entferne Knoten 7.

Es ist dabei zu beachten, daß das Entfernen eines Knotens nicht nur die Knotenmenge, sondern auch die Menge der Hyperkanten verändert.  $\square$

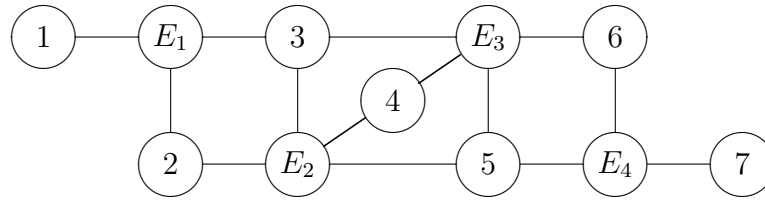


Abbildung 3.11: Induzierter ungerichteter Graph des Hyperbaums aus Abbildung 3.10

Hyperbäume kann man als zyklenfreie Hypergraphen auffassen. Ist der von einem F-Expertensystem  $\mathcal{X} = (\mathcal{U}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M}))$  durch die Modularisierung  $\mathcal{M}$  induzierte Abhängigkeitshypergraph  $H_{\mathcal{M}}$  ein Hyperbaum, so ermöglicht dies — wie wir später noch sehen werden — ein effizientes Propagationsverfahren.

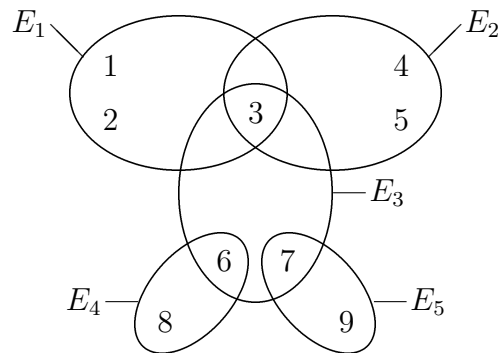
Eine besonders einfache und durchaus befriedigende Aufwandsabschätzung Propagationsalgorithmus 3.25 ergibt sich, wenn  $H_{\mathcal{M}}$  der speziellen Klasse *einfacher Hyperbäume* angehört. Da diese als Abhängigkeitshypergraphen von F-Expertensystemen jedoch nur selten auftreten, verfolgen wir noch einen weiteren Ansatz, der darauf beruht, daß sich jedes F-Expertensystem in ein äquivalentes System mit redundanzfreiem Regelsystem transformieren läßt. Dies ist ohne Abänderung des Abhängigkeitshypergraphen möglich, während alternative Methoden versuchen, mit Hilfe einer modifizierten Modularisierung zu einem äquivalenten F-Expertensystem mit induziertem einfachem Hyperbaum als Abhängigkeitshypergraphen zu gelangen.

Wir führen jetzt den Begriff des einfachen Hyperbaums ein und geben dann in Satz 3.33 den mit Algorithmus 3.25 unter verschiedenen Voraussetzungen verbundenen Propagationsaufwand durch die maximal erforderliche Anzahl von Aufrufen der Prozedur *Propagiere* an. Der Anteil des Aufwandes, der aus den im Propagationsalgorithmus auszuführenden Schnittoperationen entsteht, bleibt in Satz 3.33 bewußt unberücksichtigt, da er nicht allein durch den Abhängigkeitshypergraphen  $H_{\mathcal{M}}$ , sondern auch von der Kardinalität der jeweils vorliegenden Relationen des Regelsystems  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  beeinflußt wird.

**Definition 3.31** *Es sei  $H = (V, \mathfrak{E})$  ein Hyperbaum. Man bezeichnet  $G(H) = (V', \mathfrak{E}')$  mit  $V' = V \cup \mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{E}' = \{\{v, E\} \mid E \in \mathfrak{E}, v \in E\}$  als **den von  $H$  induzierten ungerichteten Graphen**.  $H$  heißt **einfacher Hyperbaum**, falls  $G(H)$  zyklensfrei ist, wenn also keine Folge  $(E_i)_{i=0}^k$  von Hyperkanten  $E_i \in \mathfrak{E}'$  mit  $E_i = \{v_i, v_{i+1}\}$  und  $v_0 = v_k$  existiert.*

**Beispiel 3.26 (Fortsetzung)** Den vom Hyperbaum in Abbildung 3.10 induzierten ungerichteten Graphen kann man in der für gewöhnliche Graphen geläufigen Darstellung der Abbildung 3.11 angeben.

Es sei darauf hingewiesen, daß gewöhnliche Graphen spezielle Hypergraphen sind, nämlich solche, die ausschließlich Hyperkanten der Kardinalität 2 aufweisen. Der oben präsentierte Graph enthält offensichtlich diverse Zyklen.  $\square$

Abbildung 3.12: Ein Hyperbaum  $H$ 

**Beispiel 3.32** Die Abbildungen 3.12 und 3.13 zeigen einen einfachen Hyperbaum mit seinem induzierten zyklensfreien ungerichteten Graphen.  $\square$

**Satz 3.33** Wird Propagationsalgorithmus 3.25 bezüglich eines  $F$ -Expertensystems  $\mathcal{X} = (\mathcal{U}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M}))$  mit Regelsystem  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M}) = \{R^M \mid M \in \mathcal{M}\}$  und von  $\mathcal{M}$  induziertem Abhängigkeitshypergraphen  $H_{\mathcal{M}}$  auf ein Evidenzsystem  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$  angewandt, so erhält man für die Anzahl  $k$  der Aufrufe der Prozedur Propagiere die folgenden Abschätzungen:

$$(a) \quad k \leq \sum_{M \in \mathcal{M}} |R^M|$$

$$(b) \quad H_{\mathcal{M}} \text{ einfacher Hyperbaum} \implies k \leq |\mathcal{N}| \cdot |\mathcal{M}|$$

$$(c) \quad \mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \text{ redundanzfrei} \implies k \leq |\mathcal{N}| \cdot |\mathcal{M}|$$

**B e w e i s :**

Wir beziehen uns auf die in Algorithmus 3.25 benutzten Variablennamen und Anweisungen:

- (a) Ein Aufruf  $Propagiere(M)$ ,  $M \in \mathcal{M}$ , erfolgt sowohl in der Prozedur *Fokussiere* als auch (rekursiv) in der Prozedur *Propagiere* nur dann, wenn zuvor eine Wertzuweisung an die globale Variable  $R^M$  unter Veränderung ihres bisherigen Wertes stattgefunden hat. Eine solche Veränderung ist stets mit dem Entfernen mindestens eines Elementes aus  $R^M$  verbunden. Insgesamt können daher maximal  $\sum_{M \in \mathcal{M}} |R^M|$  Veränderungen und folglich ebensoviele Aufrufe der Prozedur *Propagiere* erfolgen.

Dem Nachweis von (b) und (c) stellen wir einige Überlegungen voran:

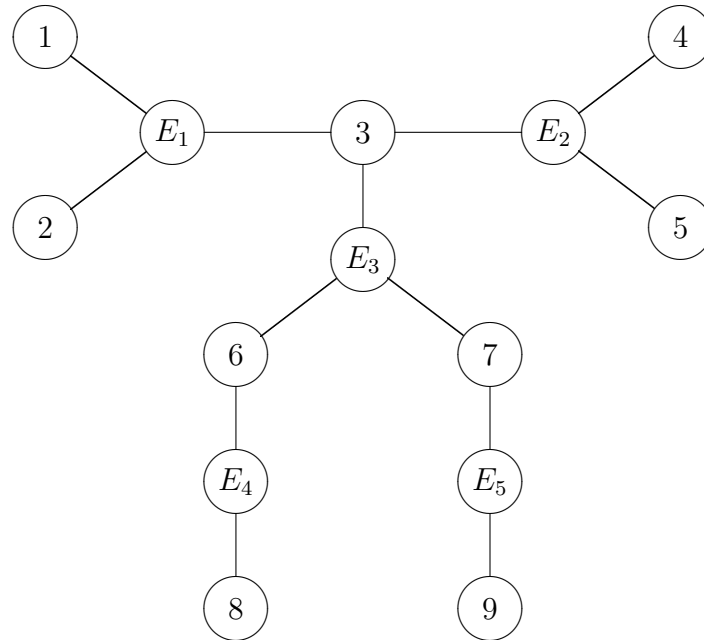


Abbildung 3.13: Der durch den Hyperbaum  $H$  induzierte ungerichtete Graph  $G(H)$

Die iterative Anweisung innerhalb der Prozedur *Fokussiere* wird  $|\mathcal{N}|$ -mal durchlaufen. Jeder Durchlauf ist mit höchstens einem Aufruf der Prozedur *Propagiere* verbunden. Erfolgt ein Aufruf *Propagiere*( $M$ ),  $M \in \mathcal{M}$ , dann kann die diesen Aufruf verursachende Veränderung des Wertes von  $R^M$  auch eine Veränderung der Werte von  $R^{M^*}$  bei denjenigen  $M^* \in \mathcal{M}$  nach sich ziehen, die von  $M$  aus über einen Weg sich überlappender Hyperkanten in  $H_{\mathcal{M}}$  erreichbar sind. Wird  $R^{M^*}$  für irgendein  $M^* \in \mathcal{M}$  (eventuell also auch wiederum  $M$ ) verändert, so hat dies einen rekursiven Aufruf der Prozedur *Propagiere* mit aktuellem Parameter  $M^*$  zur Folge.

Wir werden zeigen, daß unter den in (b) bzw. (c) getroffenen Voraussetzungen jede Relation  $R^{M^*}$ ,  $M^* \in \mathcal{M} \setminus \{M\}$ , während der Ausführung von *Propagiere*( $M$ ) höchstens einmal im Wert modifiziert wird,  $R^M$  hingegen unverändert bleibt.

Da die rekursiven Aufrufe von *Propagiere* nur nach Wertveränderungen erfolgen, kann es bei jedem Aufruf *Propagiere*( $M$ ) aus der Prozedur *Fokussiere* höchstens  $|\mathcal{M}| - 1$  zusätzliche (rekursive) Aufrufe der Prozedur *Propagiere* geben. Insgesamt zählen wir unter diesen Bedingungen maximal  $|\mathcal{N}| \cdot |\mathcal{M}|$  Aufrufe dieser Prozedur.

- (b) Ist  $H_{\mathcal{M}}$  ein einfacher Hyperbaum, so enthält der von ihm induzierte ungerichtete Graph  $G(H_{\mathcal{M}})$  keinen Zyklus. Zwei oder mehrere einander paarweise überlappende Hyperkanten haben daher stets genau einen gemeinsamen Knoten.

Bei vorgegebenem  $M \in \mathcal{M}$  ist folglich jedes  $M^* \in \mathcal{M} \setminus \{M\}$  auf genau einem Wege sich überlappender Hyperkanten von  $M$  aus erreichbar. Da ein etwaiger Prozeduraufruf *Propagiere*( $M^*$ ) aufgrund der maximal einelementigen Schnitt-

te der Hyperkanten von  $H_{\mathcal{M}}$  zu keiner Modifikation des Wertes von  $R^{M^*}$  mehr führen kann, ist für jedes  $M^* \in \mathcal{M}$  höchstens eine Wertveränderung von  $R^{M^*}$  zu verzeichnen.

- (c) Für einen beliebigen Aufruf  $Propagiere(M)$ ,  $M \in \mathcal{M}$ , sei  $\omega \in R^M$  ein bei der vorausgehenden Wertzuweisung aus  $R^M$  entferntes Tupel. Wenn wir für  $M^* \in \mathcal{M}$  mit  $R_{\text{alt}}^{M^*}$  den Wert von  $R^{M^*}$  vor dieser Wertzuweisung, mit  $R_{\text{akt}}^M$  den Wert von  $R^M$  nach der Wertzuweisung und mit  $R_{\text{neu}}^{M^*}$  den Wert von  $R^{M^*}$  nach Ausführung des Propagationsalgorithmus bezeichnen, dann gilt:

$$(i) \quad R_{\text{akt}}^M = R_{\text{alt}}^M \setminus \{\omega\},$$

$$(ii) \quad R_{\text{neu}}^M = \Pi_M^{\mathbb{N}_n} \left( \bigcap_{M^* \in \mathcal{M} \setminus \{M\}} \hat{\Pi}_{M^*}^{\mathbb{N}_n} (R_{\text{alt}}^{M^*}) \cap \hat{\Pi}_M^{\mathbb{N}_n} (R_{\text{akt}}^M) \right).$$

Wegen der vorausgesetzten Redundanzfreiheit von  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  gilt außerdem:

$$(iii) \quad R_{\text{alt}}^M = \Pi_M^{\mathbb{N}_n} \left( \bigcap_{M^* \in \mathcal{M}} \hat{\Pi}_{M^*}^{\mathbb{N}_n} (R_{\text{alt}}^{M^*}) \right).$$

Wir fassen diese drei Bedingungen zusammen und erhalten

$$\begin{aligned} R_{\text{neu}}^M &\stackrel{(i),(ii)}{=} \Pi_M^{\mathbb{N}_n} \left( \bigcap_{M^* \in \mathcal{M}} \hat{\Pi}_{M^*}^{\mathbb{N}_n} (R_{\text{alt}}^{M^*}) \cap \hat{\Pi}_M^{\mathbb{N}_n} (R_{\text{akt}}^M) \right) \\ &\stackrel{(iii)}{=} R_{\text{alt}}^M \cap R_{\text{akt}}^M \\ &\stackrel{(i)}{=} R_{\text{akt}}^M. \end{aligned}$$

Demnach wird  $R^M$  durch den Propagationsalgorithmus nach dem Aufruf von  $Propagiere(M)$  nicht mehr verändert.

Mit den obigen Vorüberlegungen folgen hieraus die Behauptungen.  $\square$

**Beispiel 3.26 (Fortsetzung)** Wir stellten bereits fest, daß die Anwendung des Propagationsalgorithmus 3.25 auf das Evidenzsystem  $\mathcal{E}(\mathcal{U}_r, \mathcal{N})$  für  $\mathcal{X}_r$  insgesamt  $4r$  Aufrufe der Prozedur  $Propagiere$  mit sich bringt.

Der diesen F-Expertensystemen zugeordnete Abhängigkeitshypergraph hat einen Zyklus, ist also kein Hyperbaum. Wegen  $r = |R_r^{M_i}|$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , gilt  $4r = \sum_{M \in \mathcal{M}} |R^M|$ . Die in Satz 3.33(a) angegebene obere Schranke wird daher tatsächlich angenommen.

Um die für  $\mathcal{X}_r$  zu verzeichnende Ineffizienz des Propagationsalgorithmus zu vermeiden, führten wir die zu  $\mathcal{X}_r$  äquivalenten F-Expertensysteme  $\mathcal{X}'_r$  ein. Sie basierten auf der Idee, Hyperkanten von  $H_{\mathcal{M}}$  gezielt derart miteinander zu verschmelzen, daß der von der neuen Modularisierung  $\mathcal{M}'$  induzierte Abhängigkeitshypergraph  $H_{\mathcal{M}'}$  ein Hyperbaum ist.

Alternativ kann man  $H_{\mathcal{M}}$  zu einem einfachen Hyperbaum  $H_{\mathcal{M}''}$  modifizieren, indem man die Knoten 2 und 4 zu einem einzigen Knoten verschmilzt. Dazu ist jedoch eine

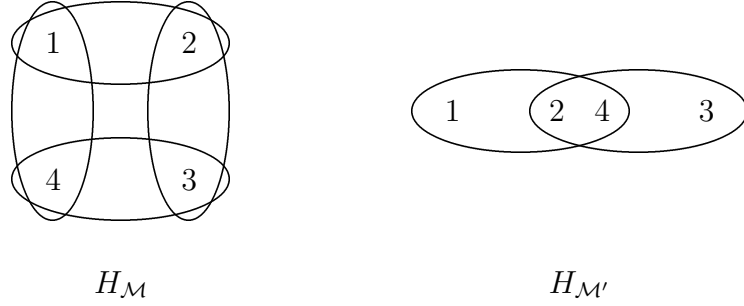


Abbildung 3.14: Abhängigkeitshypergraph vor und nach der Kantenverschmelzung

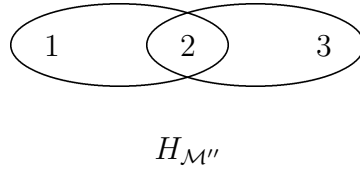


Abbildung 3.15: Durch Knotenverschmelzung entstandener Abhängigkeitshypergraph

strukturelle Veränderung des gesamten F-Expertensystems (insbesondere auch eine Neudefinition des Universums  $\mathcal{U}_r$ ) vorzunehmen:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{X}_r'' &\stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{U}_r'', \mathcal{M}'', \mathcal{N}'', \mathcal{R}_r(\mathcal{U}'', \mathcal{M}'')\}, \\
 \mathcal{U}_r'' &\stackrel{\text{def}}{=} (\Omega_r^{(1)}, \Omega_r^{(2)} \times \Omega_r^{(4)}, \Omega_r^{(3)}), \\
 \mathcal{M}'' &\stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{M}_1'', \mathcal{M}_2''\}, \mathcal{M}_1'' \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2\}, \mathcal{M}_2'' \stackrel{\text{def}}{=} \{2, 3\}, \\
 \mathcal{N}'' &\stackrel{\text{def}}{=} \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \\
 R^{M_1''} &\stackrel{\text{def}}{=} \{(i, (i, (i + r - 1) \bmod r)) \mid i \in \{0, 1, \dots, r - 1\}\} \cup \{(r, (r, r))\}, \\
 R^{M_2''} &\stackrel{\text{def}}{=} \{(i, (i, i)) \mid i \in \{0, 1, \dots, r\}\}.
 \end{aligned}$$

Der in Abbildung 3.15 dargestellte induzierte Hypergraph  $H_{\mathcal{M}''}$  ist ein einfacher Hyperbaum. Die Knoten 2 und 4 des Hyperbaumes  $H_{\mathcal{M}'}$  werden jetzt durch den Knoten 2 repräsentiert, dem dafür allerdings der *zweidimensionale* Wertebereich  $\Omega_r^{(2)} \times \Omega_r^{(4)}$  zugeordnet ist.

Für das strukturell auf analoge Weise modifizierte Evidenzsystem  $\mathcal{E}(\mathcal{U}_r'', \mathcal{N}'') \stackrel{\text{def}}{=} \{E_r^{\{1\}}, E_r^{\{2\}}, E_r^{\{3\}}\}$  mit  $E_r^{\{1\}} = \Omega_r^{(1)} \setminus \{0\}$ ,  $E_r^{\{2\}} = \Omega_r^{(2)} \times \Omega_r^{(4)}$  und  $E_r^{\{3\}} = \Omega_r^{(3)}$  gilt gemäß der Aussage von Satz 3.33(b), daß höchstens  $k \leq |\mathcal{M}''| = 2$  Aufrufe der Prozedur *Prozogniere* benötigt werden. Man prüft leicht nach, daß genau zwei Aufrufe stattfinden.

Wenn wir ohne Veränderung der Modularisierung  $\mathcal{M}$  das redundanzfreie Regelsystem  $\mathcal{R}_r^{\text{opt}}(\mathcal{M}) = \{R_{\text{opt}}^{M_1}, R_{\text{opt}}^{M_2}, R_{\text{opt}}^{M_3}, R_{\text{opt}}^{M_4}\}$  bestimmen wollen, haben wir die gesamte Wis-



sensbasis  $R$  einzubeziehen, da der in  $H_{\mathcal{M}}$  vorhandene Zyklus alle vier Knoten des Hypergraphen betrifft.

Mit  $R = \bigcap_{i=1}^4 \hat{\Pi}_{M_i}^{\{1,2,3,4\}}(R_r^{M_i}) = \{(r, r, r, r)\}$  ergibt sich  $R_{\text{opt}}^{M_1} = R_{\text{opt}}^{M_2} = R_{\text{opt}}^{M_3} = R_{\text{opt}}^{M_4} = \{(r, r)\}$ , wobei  $R_{\text{opt}}^{M_i} \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_{M_i}^{\{1,2,3,4\}}(R)$  definiert sei.

$\mathcal{X}_r^{\text{opt}} = (\mathcal{U}_r, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{R}_r^{\text{opt}}(\mathcal{U}_r, \mathcal{M}))$  ist dann ein zu  $\mathcal{X}_r$  äquivalentes F-Expertensystem mit unverändertem Abhängigkeitshypergraphen  $H_{\mathcal{M}}$ , aber redundanzfreiem Regelsystem  $\mathcal{R}_r^{\text{opt}}(\mathcal{U}_r, \mathcal{M})$ .

Bei Anwendung des Propagationsalgorithmus auf das Evidenzsystem  $\mathcal{E}(\mathcal{U}_r, \mathcal{N})$  sind unter Einbeziehung der Tatsache, daß es hier nur zu einem einzigen Aufruf der Prozedur *Propagiere* aus der Prozedur *Fokussiere* kommt, insgesamt  $k \leq |\mathcal{M}| = 4$  Durchführungen der Prozedur *Propagiere* zu erwarten. Durch Nachprüfen bestätigt man, daß die obere Schranke angenommen wird, also genau vier Aufrufe dieser Prozedur stattfinden.  $\square$

Prinzipiell läßt sich mit Hilfe der vorgestellten Methode der *Kantenverschmelzung* jedes F-Expertensystem mit beliebigem Abhängigkeitshypergraphen in ein äquivalentes System mit induziertem Abhängigkeitshyperbaum transformieren. Nimmt man zusätzliche elementare strukturelle Veränderungen auch in bezug auf das zugrunde liegende Universum in Kauf, kann man sogar die Umformung in einen einfachen Hyperbaum erreichen, wobei die dargestellte Methode der *Knotenverschmelzung* anzuwenden ist. In beiden Fällen haben wir jedoch zu berücksichtigen, daß die Stelligkeit der im Regelsystem enthaltenen Relationen wächst und dadurch auf andere Art zu Effizienzproblemen führen kann, die sich auf den erheblich größeren Aufwand der im Propagationsalgorithmus auszuführenden Schnittoperationen beziehen und in Satz 3.33 nicht betrachtet worden sind.

Aus diesem Grund bietet sich eine alternative Vorgehensweise an, die gegebenenfalls die im Abhängigkeitshypergraphen vorhandenen Zyklen ignoriert und ohne vorhergehende Veränderung der Modularisierung ein redundanzfreies Regelsystem ermittelt. Bei geschickter Ausnutzung der Struktur des Abhängigkeitshypergraphen braucht man dabei im allgemeinen nicht die hochdimensionale Relation, die die gesamte Wissensbasis repräsentiert, in die Berechnungen mit einzubeziehen, sondern kann sich auch hier auf die explizite Betrachtung derjenigen niederdimensionalen Unterräume beschränken, die durch die Hyperkanten des durch Kantenverschmelzung entstehenden Hyperbaumes identifiziert werden.

Auch wenn die Konstruktion eines redundanzfreien Regelsystems oft aufwendig ist, so ist ihre Durchführung dennoch vorteilhaft, weil dieser Aufwand nur ein einziges Mal bezüglich des vorhandenen Expertenwissens betrieben werden muß, dann aber das konstruierte Regelsystem für beliebige Evidenzsysteme (d.h. für beliebige Fokussiervorgänge) nutzbar ist.

Wir wollen unsere Untersuchungen über die effiziente Propagation in F-Expertensystemen mit der Bemerkung abschließen, daß der vorgestellte Propagationsalgorithmus 3.25

bei Erfüllung geeigneter Nebenbedingungen noch verbessert werden kann. Ein Ansatz besteht darin, die Prozedur *Propagiere* nicht für jedes  $N \in \mathcal{N}$  von der Prozedur *Fokussiere* durch  $Propagiere(M)$  mit einem  $M \in \mathcal{M}$ , für das  $N \subseteq M$  gilt, neu aufzurufen, sondern nach Einbeziehung aller Evidenzen des vorliegenden Evidenzsystems in die Relationen  $R^M$  eine gemeinschaftliche Propagation anzustreben.

Eine solche Vereinfachung läßt sich ohne große Mühe durchführen, wenn  $H_{\mathcal{M}}$  ein Hyperbaum ist. Man kann dann so vorgehen:  $H_{\mathcal{M}}$  wird gemäß einer seiner Konstruktionssequenzen vorwärts und dann in umgekehrter Hyperkantenreihenfolge rückwärts durchlaufen, wobei die erforderlichen Veränderungen in den den Hyperkanten  $M$  zugeordneten Relationen  $R^M$  berücksichtigt werden. Nach diesem Sammeln aller Evidenzen können sie in einem dritten Durchlauf verteilt werden. Im Gegensatz zu Algorithmus 3.25 wird auch dann weiter propagiert, wenn keine Veränderung in einer Relation  $R^M$  stattgefunden hat. Da nur Hyperbäume betrachtet werden, lassen sich auch initial nicht redundanzfreie Regelsysteme durch die Propagation in redundanzfreie Regelsysteme überführen.

Wir erhalten den folgenden gegenüber 3.25 für (nicht notwendigerweise einfache) Hyperbäume modifizierten Propagationsalgorithmus, der lediglich  $|\mathcal{N}| + 3|\mathcal{M}|$  Schnittoperationen benötigt. Die Bezeichner seien wie in 3.25 gewählt. Außerdem sei  $(M(k))_{k=1}^{|\mathcal{M}|}$  eine Konstruktionssequenz für  $H_{\mathcal{M}}$ .

### Algorithmus 3.34

**procedure** Fokussiere;

**var**  $\mathcal{N}^*$ ;  $M$ ;  $N$ ;  $j$ ;  $k$ ;

**begin**

    {Evidenzsystem einbeziehen}

$\mathcal{N}^* := \mathcal{N}$ ;

**while**  $\mathcal{N}^* \neq \emptyset$  **do**

**begin**

        Wähle ein  $N \in \mathcal{N}^*$ ;

$\mathcal{N}^* := \mathcal{N}^* \setminus \{N\}$ ;

        Wähle ein  $M \in \mathcal{M}$  mit  $N \subseteq M$ ;

$R^M := \hat{\Pi}_N^M(E^N) \cap R^M$

**end**;

    {Propagiere}

**for**  $k := 2$  **to**  $|\mathcal{M}|$  **do** {Evidenzen sammeln: vorwärts}

**begin**

$M := M(j)$  mit  $j = \max\{j \mid M(j) \text{ überlappt } M(k) \text{ und } j < k\}$ ;

$R^{M(k)} := R^{M(k)} \cap \hat{\Pi}_{M \cap M(k)}^{M(k)} \left( \Pi_{M \cap M(k)}^M(R^M) \right)$

**end**;

**for**  $k := |\mathcal{M}| - 1$  **to** 1 **do** {Evidenzen sammeln: rückwärts}

**begin**

```


$$M := M(j) \text{ mit } j = \min\{j \mid M(j) \text{ überlappt } M(k) \text{ und } j > k\};$$


$$R^{M(k)} := R^{M(k)} \cap \hat{\Pi}_{M \cap M(k)}^{M(k)} \left( \Pi_{M \cap M(k)}^M(R^M) \right)$$

end;
for  $k := 2$  to  $|\mathcal{M}|$  do {Evidenzen verteilen}
begin
 $M := M(j) \text{ mit } j = \max\{j \mid M(j) \text{ überlappt } M(k) \text{ und } j < k\};$ 
 $R^{M(k)} := R^{M(k)} \cap \hat{\Pi}_{M \cap M(k)}^{M(k)} \left( \Pi_{M \cap M(k)}^M(R^M) \right)$ 
end;
end; {Fokussiere}

```

□

Die in diesem Abschnitt zusammengetragenen Resultate lassen sich unmittelbar auf die allgemeineren possibilistischen F-Expertensysteme übertragen, weil die untersuchten Abhängigkeitshypergraphen lediglich von der Modularisierung des jeweiligen Expertensystems induziert werden, aber nicht durch die das Regelsystem und die in einer Anwendung benutzten Evidenzsysteme betreffenden Possibilitätsverteilungen beeinflusst werden.

Außerdem ist der für unsere Betrachtungen grundlegende Algorithmus 3.25 nur dahingehend zu modifizieren, daß die in ihm vorkommenden Schnittoperationen durch die *min*-Operation ersetzt und alle zylindrischen Extensionen und Projektionen auf Possibilitätsverteilungen anstelle gewöhnlicher Relationen bezogen werden. Dies hat jedoch keine Auswirkungen auf die für unsere Untersuchungen maßgebliche Anzahl von Aufrufen der Prozedur *Propagiere*. Es ist allerdings zu berücksichtigen, daß der zur Ausführung der genannten Operationen erforderliche Zeitbedarf wächst, da possibilistische Regel- bzw. Evidenzsysteme natürlich einen höheren Repräsentationsaufwand mit sich bringen. Einige Aspekte der Implementierung werden in den ergänzenden Bemerkungen des Abschnittes 3.6 angesprochen.

## 3.5 Logikbasierte Inferenzmechanismen

Die bisher in diesem Kapitel vorgestellten Methoden setzen voraus, daß Aussagen über eine festgelegte Grundmenge oder einen vorgegebenen Wertebereich getroffen werden. Bei der Betrachtung von physikalischen (Meß-)Größen ist diese Voraussetzung dadurch erfüllt, daß im allgemeinen eine Grundmenge von möglichen Werten angegeben werden kann (z.B. das Intervall  $[0, 300]$  (cm) für die Körpergröße von Menschen). In Datenbankanwendungen läßt sich jedoch nur selten eine feste Grundmenge angeben. Zu einem bestimmten Zeitpunkt kann zwar die Grundmenge ermittelt werden, doch ändert sich diese Grundmenge durch das Löschen alter und das Hinzufügen neuer Datensätze.

Eine Datenbank, in der Informationen über verschiedene Software-Pakete gespeichert sind, könnte z.B. die folgende Angabe enthalten:

Jedes Software-Paket, das unter der Version 4 des Betriebssystems  
ablauffähig ist, ist auch unter der Version 5 ablauffähig.

Diese Regel läßt sich leicht durch eine logischen Implikation  $\forall s : (v4(s) \rightarrow v5(s))$  darstellen. Das Prädikat  $vn(s)$  ist genau dann erfüllt, wenn  $s$  ein Software-Paket ist, das unter der Version  $n$  des Betriebssystems ablauffähig ist ( $n = 4, 5$ ). Die Grundmenge der Software-Pakete  $s$  muß nicht näher spezifiziert werden.

Soll zusätzlich zu sicheren Regeln wie der eben betrachteten auch unsicheres oder vages Wissen in die Datenbank aufgenommen werden, müssen für dessen Handhabung Konzepte zur Verfügung gestellt werden, die nicht auf einer mengentheoretischen, sondern auf einer logischen Grundlage basieren.

Hierfür werden logischen Aussagen Zahlen zwischen 0 und 1 zugeordnet. Bezeichnet  $d(\varphi)$  die Zahl, die der Aussage  $\varphi$  zugeordnet ist, können wir aus der Information  $d(\varphi) = \alpha$  und  $d(\varphi \rightarrow \psi) = \beta$  allerdings erst dann über  $d(\psi)$  herleiten, wenn wir wissen, was die Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$  bedeuten. Es ist daher notwendig, eine Semantik für diese Zahlen festzulegen, um sinnvolle Inferenzmechanismen in Form eines verallgemeinerten Modus Ponens (aus  $p$  und  $p \rightarrow q$  folgere  $q$ ) zu erhalten, der es erlaubt, aus  $d(\varphi \rightarrow \psi)$  und  $d(\varphi)$  den Wert  $d(\psi)$  zu bestimmen oder zumindest die Herleitung einer unteren Schranke für  $d(\psi)$  aus unteren Schranken für  $d(\varphi \rightarrow \psi)$  und  $d(\varphi)$  ermöglicht.

In der klassischen Logik wird streng zwischen Syntax und Semantik unterschieden. Der syntaktische oder beweistheoretische Aspekt der Logik beschäftigt sich mit der Herleitung von Aussagen unter Anwendung formaler Ableitungsregeln in der Art des Modus Ponens. Läßt sich eine Aussage  $\varphi$  auf diese Weise syntaktisch aus einer Menge von Aussagen (Axiomen)  $A$  beweisen, schreibt man  $A \vdash \varphi$ . Der syntaktische Teil einer Logik besteht also vor allem in der formalen Manipulation von Symbolen, ohne daß diesen Symbolen eine konkrete Bedeutung zugeordnet wäre.

Für die Semantik oder den modelltheoretischen Aspekt der klassischen Logik geht man davon aus, daß durch eine Menge von Aussagen  $A$  „Welten“ modelliert werden. Die Semantik legt fest, auf welche Weise die Formeln einer Logik zu deuten sind, indem jedem Zeichen der Logik eine Interpretation zugeordnet wird. Durch diese Interpretation erhält jede Aussage einen Wahrheitswert — *wahr* oder *falsch*. Eine Interpretation, in der alle Aussagen aus  $A$  wahr sind, heißt ein Modell von  $A$ . Erhält die Aussage  $\varphi$  in jedem Modell von  $A$  den Wahrheitswert *wahr* so läßt sich  $\varphi$  semantisch aus  $A$  ableiten, in Zeichen  $A \models \varphi$ .

Allerdings läßt sich im allgemeinen die Behauptung  $A \models \varphi$  nicht schematisch beweisen, da dazu alle Modelle von  $A$ , von denen es unendlich viele geben kann, überprüft werden müßten. Daher verwendet man syntaktische Ableitungsverfahren, die eine schematische Herleitung von Aussagen erlauben, wobei die *Korrektheit* eines solchen Ableitungsverfahrens wichtig ist, d.h., daß sich mit ihm nur Aussagen schematisch herleiten lassen, die auch in jedem Modell wahr sind. Formal bedeutet das,  $A \vdash \varphi$  impliziert  $A \models \varphi$ . Umgekehrt versteht man unter *Vollständigkeit*, daß eine Aussage, die in jedem Modell gültig ist, auch schematisch beweisbar ist, d.h.,  $A \models \varphi$  impliziert  $A \vdash \varphi$ .

Diese scharfe Trennung zwischen Syntax und Semantik wird in Logiken, die einer Aussage  $\varphi$  einen Unsicherheits- oder Wahrheitsgrad  $d(\varphi) \in [0, 1]$  zuordnen, häufig nicht vorgenommen. Es werden nur Verfahren angegeben, wie etwa  $d(\psi)$  aus der Kenntnis

von  $d(\varphi)$  und  $d(\varphi \rightarrow \psi)$  bestimmt werden kann. Eine saubere Modellierung setzt jedoch eine klare Beschreibung der Phänomene voraus, die repräsentiert werden sollen. Denn obwohl sie häufig nicht separat modelliert werden, sind die Phänomene (Un-)Sicherheit über die Korrektheit einer Aussage und gradueller Wahrheitswert prinzipiell verschieden. Um dies zu veranschaulichen, legen wir folgendes Modell zugrunde:

Mit Hilfe logischer Aussagen soll eine „Welt“ oder eine Situation modelliert werden. Wir betrachten eine Aussage  $\varphi$  und eine zu modellierende Situation  $S$  und unterscheiden vier Fälle.

(i) scharfe Aussage ( $\varphi$ ), scharfe Information (über  $S$ ):

$\varphi$  ist eine klar definierte Aussage, die entweder wahr oder falsch ist.  $S$  bestimmt die zu modellierende Situation eindeutig.  $\varphi$  könnte z.B. die Aussage „Hans ist 182 cm groß“ sein. Da  $S$  die zu beschreibende Situation eindeutig festlegt, ist die tatsächliche Größe von Hans bekannt, so daß eindeutig ermittelt werden kann, ob  $\varphi$  wahr oder falsch ist. Dieser Fall entspricht dem, was mit Hilfe der klassischen Logik modelliert werden kann.

(ii) vage Aussage, scharfe Information:

In diesem Fall kann der Aussage  $\varphi$  nur ein gradueller Wahrheitswert zugeordnet werden.  $\varphi$  könnte beispielsweise „Hans ist groß“ lauten. Die Größe von Hans ist bekannt (scharfe Information), z.B. 185 cm. In diesem Beispiel ist es nicht sinnvoll,  $\varphi$  eindeutig als wahr oder falsch zu klassifizieren.  $\varphi$  kann nur ein gradueller Wahrheitswert zugeordnet werden. Für die Darstellung dieser Situation eignen sich wahrheitsfunktionale mehrwertige Logiken (siehe Abschnitt 3.5.2).

(iii) scharfe Aussage, unscharfe Information:

Dieser Fall entspricht der Umkehrung des Falles (ii).  $\varphi$  wäre dann die Behauptung „Hans ist 185 cm groß“, während die exakte Größe von Hans nicht bekannt ist, sondern nur, daß Hans groß ist. In diesem Beispiel ist die Aussage  $\varphi$  entweder wahr oder falsch, wenn auch der Wahrheitswert nicht eindeutig bestimmt werden kann. Man kann daher höchstens eine Zahl festlegen, die angibt, mit welcher Sicherheit  $\varphi$  für wahr gehalten wird, oder inwieweit es für möglich erachtet wird, daß  $\varphi$  wahr ist. Für die Modellierung dieses Falles könnte die possibilistische Logik verwendet werden (siehe Abschnitt 3.5.1).

(iv) unscharfe Aussage, unscharfe Information:

Dies ist der komplizierteste Fall, in dem sowohl graduelle Wahrheitswerte als auch Unsicherheit über den (graduellen) Wahrheitswert der Aussage gemeinsam auftreten können. Für die Aussage  $\varphi$  „Hans ist groß“ kann aus der Information, daß Helmut klein und Hans deutlich größer als Helmut ist, kein eindeutiger gradueller Wahrheitswert festgelegt werden. Ein möglicher Ansatz, dieses Beispiel zu behandeln, besteht in der Verwendung von Fuzzy-Wahrheitswerten, d.h., als Wahrheitswerte werden Fuzzy-Mengen von  $[0, 1]$  zugelassen.

Im Fall (iv) treten die Einzelphänomene der Fälle (ii) und (iii) gemeinsam auf, wodurch eine saubere Modellierung dieses Falles nur mit sehr großem Aufwand erreichbar

ist. Aus diesem Grund und um den Unterschied zwischen (Un-)Sicherheitsgraden und graduellen Wahrheitswerten deutlich zu machen, betrachten wir in den folgenden beiden Abschnitten nur die Fälle (ii) und (iii). Desweiteren beschränken wir uns auf die Behandlung der Aussagenlogik. Eine Erweiterung auf die Prädikatenlogik erster Stufe ist prinzipiell möglich, würde aber tiefere Kenntnisse der Prädikatenlogik voraussetzen und den für logische Kalküle innerhalb dieses Buches vorgesehenen Rahmen sprengen.

### 3.5.1 Possibilistische Logik

Die Idee der *possibilistischen Logik* besteht darin, jeder logischen Aussage eine Zahl zuzuordnen, die angibt, inwieweit die Aussage notwendigerweise für wahr gehalten wird. Wir betrachten im folgenden die Menge  $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, \dots\}$  atomarer Ausdrücke oder atomarer Aussagen.  $\mathcal{L}$  bezeichne die Menge der logischen Ausdrücke, die sich aus den atomaren Ausdrücken aus  $\mathcal{P}$  und den logischen Konnektiven  $\wedge, \vee$  und  $\neg$  unter eventueller Verwendung der Klammersymbole „(“ und „)“ zusammensetzen lassen.

Eine *Klausel* ist ein logischer Ausdruck der Form

$$\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n,$$

in dem  $\varphi_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ein atomarer Ausdruck oder die Negation eines atomaren Ausdrucks ist.

Klauseln werden üblicherweise als Regeln interpretiert, da die Klausel  $\neg p_{i_1} \vee \dots \vee \neg p_{i_k} \vee p_{i_{k+1}} \vee \dots \vee p_{i_n}$  äquivalent zur Implikation  $p_{i_1} \wedge \dots \wedge p_{i_k} \longrightarrow p_{i_{k+1}} \vee \dots \vee p_{i_n}$  ist. Für die Menge aller Klauseln schreiben wir  $\mathcal{K}_0$ .  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \cup \{\top, \perp\}$  enthält neben den Klauseln noch die Aussage  $\top$  bzw.  $\perp$ , die immer wahr bzw. immer falsch ist. Jeder aussagenlogische Ausdruck läßt sich äquivalent als Konjunktion von Klauseln schreiben.

**Definition 3.35** Ein **Notwendigkeitsmaß** auf  $\mathcal{L}$  ist eine Abbildung  $N : \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$ , die die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (i)  $N(\top) = 1$
- (ii)  $N(\perp) = 0$
- (iii)  $N(\varphi \wedge \psi) = \min \{N(\varphi), N(\psi)\}$
- (iv) Sind  $\varphi$  und  $\psi$  äquivalente logische Ausdrücke, folgt  $N(\varphi) = N(\psi)$ .

$N(\varphi)$  gibt an, inwieweit  $\varphi$  notwendigerweise für wahr gehalten wird. Aus den Eigenschaften (ii), (iii) und (iv) folgt, daß für alle  $\varphi \in \mathcal{L}$  mindestens einer der beiden Werte  $N(\varphi)$  und  $N(\neg\varphi)$  Null sein muß. Für die Konjunktion zweier Aussagen  $\varphi$  und  $\psi$  läßt sich der Wert  $N(\varphi \wedge \psi)$  allein aus der Kenntnis von  $N(\varphi)$  und  $N(\psi)$  bestimmen. Dies gilt nicht für die Disjunktion und die Negation. Aus diesem Grund wird die possibilistische Logik als *nicht-wahrheitsfunktional* bezeichnet.

**Beispiel 3.36** Es sei

$$N : \mathcal{L} \rightarrow [0, 1], \quad \varphi \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } \varphi \text{ eine Tautologie ist} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt für atomare Aussagen  $p_0$  und  $p_1$ :  $N(p_0) = N(\neg p_0) = N(p_1) = N(\neg p_1) = 0$ , aber  $N(p_0 \vee \neg p_0) = N(\top) = 1 \neq 0 = N(p_0 \vee p_1)$ . Entsprechend gilt für die Negation  $N(\perp) = N(p_0) = 0$ , aber  $N(\neg \perp) = N(\top) = 1 \neq 0 = N(\neg p_0)$ .  $\square$

Für die Disjunktion gilt im allgemeinen nur  $N(\varphi \vee \psi) \geq \max\{N(\varphi), N(\psi)\}$  wegen  $N(\varphi) = N(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) = \min\{N(\varphi), N(\varphi \vee \psi)\}$  bzw.  $N(\psi) = N(\psi \wedge (\varphi \vee \psi)) = \min\{N(\psi), N(\varphi \vee \psi)\}$ .

**Definition 3.37** Eine Abbildung  $\Pi : \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$  heißt **Possibilitätsmaß** auf  $\mathcal{L}$ , falls ein Notwendigkeitsmaß  $N$  existiert, so daß

$$\Pi(\varphi) = 1 - N(\neg\varphi)$$

*gilt.*

Possibilitätsmaße stellen das zu Notwendigkeitsmaßen duale Konzept dar. Sie besitzen ebenfalls die Eigenschaften (i), (ii) und (iv) aus Definition 3.35. Außerdem gilt immer  $\Pi(\varphi \vee \psi) = \max\{\Pi(\varphi), \Pi(\psi)\}$ , während im allgemeinen nur  $\Pi(\varphi \wedge \psi) \leq \min\{\Pi(\varphi), \Pi(\psi)\}$  erfüllt ist. Der Wert  $\Pi(\varphi)$  gibt an, inwieweit die Gültigkeit der Aussage  $\varphi$  für möglich erachtet wird. Im folgenden werden wir uns ausschließlich auf Notwendigkeitsmaße beschränken und Possibilitätsmaße nicht weiter behandeln.

**Definition 3.38**  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K} \times (0, 1]$  heißt **unsichere Wissensbasis**, falls  $\{(\top, \alpha) \mid \alpha \in (0, 1]\} \subseteq \mathcal{W}$  gilt.

Eine unsichere Wissensbasis besteht aus einer Menge von Klauseln, denen jeweils eine Zahl zugeordnet ist. Ein Paar der Form  $(\varphi, \alpha) \in \mathcal{K} \times (0, 1]$  wird als *unsichere Klausel* bezeichnet, wobei  $\alpha$  eine untere Schranke für ein (unbekanntes) Notwendigkeitsmaß  $N$  angibt, d.h.,  $(\varphi, \alpha) \in \mathcal{W}$  bedeutet  $N(\varphi) \geq \alpha$ . Die Forderung  $\{(\top, \alpha) \mid \alpha \in (0, 1]\} \subseteq \mathcal{W}$  wird nur aus formalen Gründen gestellt, um sicherzustellen, daß, falls  $(\varphi, \alpha)$  aus  $\mathcal{W}$  ableitbar ist, auch  $(\varphi, \beta)$  mit  $\beta \leq \alpha$  aus  $\mathcal{W}$  ableitbar ist. Eine herkömmliche Wissensbasis  $W \subseteq \mathcal{K}$  (Menge von Axiomen) entspricht der unsicheren Wissensbasis  $\mathcal{W} = W \times \{1\}$ . Um aus einer unsicheren Wissensbasis  $\mathcal{W}$  eine unsichere Klausel  $(\varphi, \alpha)$  abzuleiten, benötigen wir ein Beweisverfahren. Wir verallgemeinern dazu das Resolutionsprinzip. Das *possibilistische Resolutionsprinzip* läßt sich schematisch folgendermaßen darstellen:

$$\frac{(\psi \vee \varphi_1, \alpha_1) \quad (\neg\psi \vee \varphi_2, \alpha_2)}{(\varphi_1 \vee \varphi_2, \min\{\alpha_1, \alpha_2\})}.$$

Es besagt, daß aus der Kenntnis von  $(\psi \vee \varphi_1, \alpha_1)$  und  $(\neg\psi \vee \varphi_2, \alpha_2)$ , was  $N(\psi \vee \varphi_1) \geq \alpha_1$  bzw.  $N(\neg\psi \vee \varphi_2) \geq \alpha_2$  entspricht,  $(\varphi_1 \vee \varphi_2, \min\{\alpha_1, \alpha_2\})$ , d.h.  $N(\varphi_1 \vee \varphi_2) \geq \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$  geschlossen werden kann. Die Rechtfertigung für diesen Schluß liefert:

$$\begin{aligned}
& \text{Aus } N(\psi \vee \varphi_1) \geq \alpha_1 \text{ und } N(\neg\psi \vee \varphi_2) \geq \alpha_2 \text{ folgt} \\
N(\varphi_1 \vee \varphi_2) & \geq \min\{N(\varphi_1 \vee \varphi_2), N((\psi \vee \varphi_1) \wedge (\neg\psi \vee \varphi_2))\} \\
& = N((\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge ((\psi \vee \varphi_1) \wedge (\neg\psi \vee \varphi_2))) \\
& = N((\psi \vee \varphi_1) \wedge (\neg\psi \vee \varphi_2)) \\
& = \min\{N(\psi \vee \varphi_1), N(\neg\psi \vee \varphi_2)\} \\
& \geq \min\{\alpha_1, \alpha_2\}.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des possibilistischen Resolutionsprinzips lassen sich aus einer unsicheren Wissensbasis schrittweise neue unsichere Klauseln ableiten.

**Definition 3.39** *Es seien  $\mathcal{W}$  und  $\mathcal{W}'$  unsichere Wissensbasen.  $\mathcal{W}'$  ist **direkt** aus  $\mathcal{W}$  ableitbar, falls es eine unsichere Klausel  $(\varphi, \alpha) \in \mathcal{K} \times (0, 1]$  gibt, so daß gilt:*

$$(i) \quad \mathcal{W} = \mathcal{W}' \setminus \{(\varphi, \alpha)\}$$

(ii) *Es existieren Klauseln  $\psi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{K}$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1]$  mit*

$$(a) \quad \alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$$

$$(b) \quad \varphi \text{ ist äquivalent zu } \varphi_1 \vee \varphi_2$$

$$(c) \quad (\psi \vee \varphi_1, \alpha_1), (\neg\psi \vee \varphi_2, \alpha_2) \in \mathcal{W}.$$

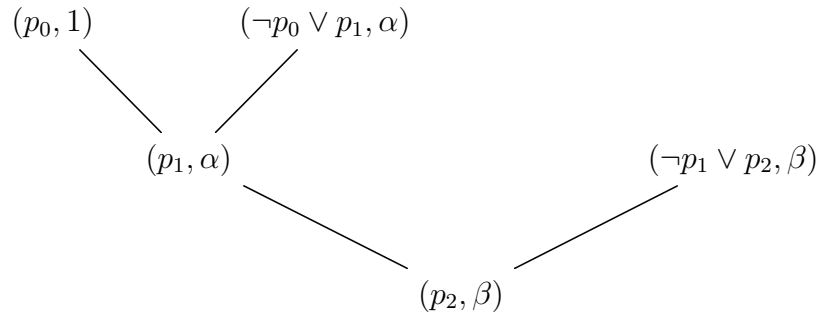
**Definition 3.40** *Es sei  $\mathcal{W}$  eine unsichere Wissensbasis,  $(\varphi, \alpha) \in \mathcal{K} \times (0, 1]$  eine unsichere Klausel. Wir sagen,  $(\varphi, \alpha)$  ist aus  $\mathcal{W}$  **beweisbar** (i.Z.:  $\mathcal{W} \vdash (\varphi, \alpha)$ ), falls es eine Folge  $\mathcal{W}_0, \mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_n$  unsicherer Wissensbasen gibt mit*

$$(i) \quad \mathcal{W}_0 = \mathcal{W}$$

(ii)  $\mathcal{W}_{i+1}$  ist aus  $\mathcal{W}_i$  direkt ableitbar

$$(iii) \quad (\varphi, \alpha) \in \mathcal{W}_n.$$



Abbildung 3.16: Possibilistische Resolution für  $(p_2, \beta)$  aus Beispiel 3.41

**Beispiel 3.41** Wir betrachten die folgende (unsichere) Wissensbasis:

- Wenn Anna eine Studentin ist, ist sie sehr wahrscheinlich jünger als 30 Jahre.
- Wenn Anna jünger als 30 Jahre ist, ist sie wahrscheinlich ledig.
- Wenn Anna eine Studentin ist und Kinder hat, ist sie mit allergrößter Wahrscheinlichkeit nicht ledig.
- Anna ist eine Studentin.

Um diese Wissensbasis im Rahmen der possibilistischen Logik behandeln zu können, führen wir folgende atomare Ausdrücke ein:

- $p_0$  : Anna ist eine Studentin.
- $p_1$  : Anna ist weniger als 30 Jahre alt.
- $p_2$  : Anna ist unverheiratet.
- $p_3$  : Anna hat Kinder.

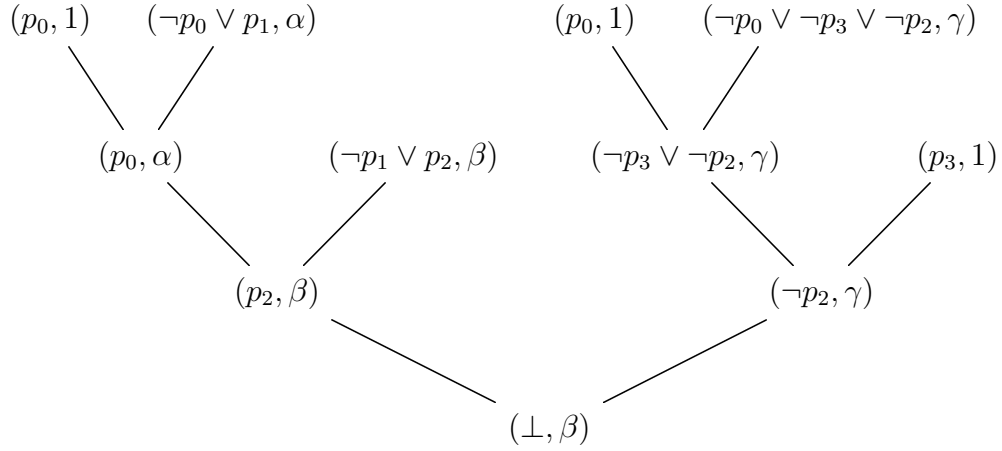
Die unsichere Wissensbasis läßt sich formal in der Form

$$\mathcal{W} = \{(\neg p_0 \vee p_1, \alpha), (\neg p_1 \vee p_2, \beta), (\neg p_0 \vee \neg p_3 \vee \neg p_2, \gamma), (p_0, 1)\} \cup \{(\top, \delta) \mid \delta \in (0, 1]\}$$

mit  $0 < \beta < \alpha < \gamma < 1$  darstellen.

Mit Hilfe possibilistischer Resolution läßt sich  $\mathcal{W} \vdash (p_2, \beta)$ , d.h., Anna ist wahrscheinlich ledig, beweisen.

Fügen wir zu der unsicheren Wissensbasis  $\mathcal{W}$  die Aussage, daß Anna Kinder hat, hinzu, d.h., wir betrachten die Wissensbasis  $\mathcal{W}' = \mathcal{W} \cup \{(p_3, 1)\}$ , so zeigt sich, daß  $\mathcal{W}'$   $\beta$ -inkonsistent ist, d.h., es gilt  $\mathcal{W}' \vdash (\perp, \beta)$ . Die Resolutionsbeweise sind schematisch in den Abbildungen 3.16 und 3.17 dargestellt.  $\square$

Abbildung 3.17: Possibilistische Resolution für  $(\perp, \beta)$  aus Beispiel 3.41

Nachdem wir die Syntax der possibilistischen Logik festgelegt haben, betrachten wir nun die Semantik. Eine (gewöhnliche) Interpretation  $I : \mathcal{P} \rightarrow \{\text{wahr, falsch}\}$  ordnet jedem atomaren Ausdruck einen der beiden Wahrheitswerte wahr oder falsch zu. Jedem logischen Ausdruck aus  $\mathcal{L}$  kann daher unter Verwendung der Regeln für  $\wedge, \vee$  und  $\neg$  eindeutig ein durch  $I$  induzierter Wahrheitswert zugeordnet werden, d.h.,  $I$  ist kanonisch zur Abbildung  $I^* : \mathcal{L} \rightarrow \{\text{wahr, falsch}\}$  fortsetzbar.

Identifiziert man eine Interpretation  $I$  mit der Menge der atomaren Aussagen, die unter  $I$  den Wert *wahr* erhalten, so kann man eine unsichere Wissensbasis auf folgende Weise als Fuzzy-Menge auf der Menge  $\mathfrak{P}(\mathcal{P})$  der Interpretationen auffassen.

**Definition 3.42** *Es sei  $\mathcal{W}$  eine unsichere Wissensbasis,  $(\varphi, \alpha) \in \mathcal{K} \times (0, 1]$ .*

(i) *Die Fuzzy-Menge  $\mu_{(\varphi, \alpha)} \in F(\mathfrak{P}(\mathcal{P}))$  ist durch*

$$\mu_{(\varphi, \alpha)}(I) = \begin{cases} 1, & \text{falls } I^*(\varphi) = \text{wahr} \\ 1 - \alpha, & \text{sonst.} \end{cases}$$

*gegeben.*

(ii)  *$\mu_{\mathcal{W}} \in F(\mathfrak{P}(\mathcal{P}))$  wird durch*

$$\mu_{\mathcal{W}}(I) = \inf \{ \mu_{(\varphi, \alpha)}(I) \mid (\varphi, \alpha) \in \mathcal{W} \}$$

*festgelegt.*

(iii) *Der Wert*

$$\text{cons}(\mathcal{W}) = \sup \{ \mu_{\mathcal{W}}(I) \mid I \in \mathfrak{P}(\mathcal{P}) \}$$

*heißt **Konsistenzgrad** von  $\mathcal{W}$ .*

(iv) Der Wert

$$\text{inc}(\mathcal{W}) = 1 - \text{cons}(\mathcal{W})$$

wird als **Inkonsistenzgrad** von  $\mathcal{W}$  bezeichnet.

Der Wert  $\mu_{(\varphi, \alpha)}(I) \in [0, 1]$  gibt an, inwieweit die Interpretation  $I$  mit der unsicheren Klausel  $(\varphi, \alpha)$  verträglich ist. Ist  $\varphi$  unter  $I$  wahr, so ist  $I$  völlig verträglich mit  $(\varphi, \alpha)$ . Gilt  $I^*(\varphi) = \text{falsch}$ , obwohl  $\varphi$  ein Notwendigkeitsgrad von mindestens  $\alpha$  zugeordnet wird, ist  $I$  nur zu  $1 - \alpha$  mit  $(\varphi, \alpha)$  verträglich.

Die Verträglichkeit einer Interpretation  $I$  mit einer unsicheren Wissensbasis  $\mathcal{W}$ , d.h. einer Menge von unsicheren Klauseln, wird als Infimum der Verträglichkeiten von  $I$  mit den unsicheren Klauseln aus  $\mathcal{W}$  definiert, denn  $I$  sollte mit  $\mathcal{W}$  nicht verträglicher sein als  $I$  mit irgendeiner einzelnen Klausel aus  $\mathcal{W}$ .

Der Konsistenzgrad ist der größtmögliche Wert, zu dem eine Interpretation mit der unsicheren Wissensbasis  $\mathcal{W}$  verträglich sein kann. Der Inkonsistenzgrad ist der kleinstmögliche Notwendigkeitsgrad, so daß die Menge aller Klauseln, denen ein größerer Notwendigkeitsgrad in der unsicheren Wissensbasis zugeordnet wird, im Sinne der klassischen Logik konsistent ist.

Die folgende Definition beschreibt, was wir unter semantischer Herleitbarkeit in der possibilistischen Logik verstehen.

**Definition 3.43** *Es sei  $\mathcal{W}$  eine unsichere Wissensbasis,  $(\varphi, \alpha) \in \mathcal{K} \times (0, 1]$ . Wir schreiben*

$$\mathcal{W} \models (\varphi, \alpha)$$

*falls  $\text{inc}(\mathcal{W} \cup \{(\neg\varphi, 1)\}) \geq \alpha$  gilt.*

Dieser Definition entspricht in der klassischen Logik, daß eine Klausel  $\varphi$  aus einer Menge von Klauseln  $W$  genau dann beweisbar ist, wenn  $W \cup \{\neg\varphi\}$  inkonsistent ist. Man beachte, daß  $\neg\varphi$  im allgemeinen keine Klausel ist. Definition 3.42 läßt sich aber auf beliebige (Mengen von) Formeln vom Typ  $(\varphi, \alpha) \in \mathcal{L} \times (0, 1]$  anwenden.

**Satz 3.44 (Korrektheit der possibilistischen Logik)** *Es sei  $\mathcal{W}$  eine unsichere Wissensbasis,  $(\varphi, \alpha) \in \mathcal{K} \times (0, 1]$ . Dann gilt*

$$\mathcal{W} \vdash (\varphi, \alpha) \implies \mathcal{W} \models (\varphi, \alpha).$$

**B e w e i s :**

Es sei  $\mathcal{W}_{(\varphi, \alpha)} \subseteq \mathcal{W}$  die Menge der unsicheren Klauseln aus  $\mathcal{W}$ , die für den possibilistischen Resolutionsbeweis für  $(\varphi, \alpha)$  verwendet werden. Offenbar gilt  $\mathcal{W}_{(\varphi, \alpha)} \subseteq \mathcal{K} \times [\alpha, 1]$ , denn in einem Schritt der possibilistischen Resolution kann der Notwendigkeitsgrad nur kleiner werden oder höchstens gleich bleiben (siehe Definition 3.39(ii)(a)).

Definiere

$$W_{(\varphi, \alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \psi \mid \text{es existiert ein } \beta \in [\alpha, 1] \text{ mit } (\psi, \beta) \in \mathcal{W}_{(\varphi, \alpha)} \},$$

d.h.  $W_{(\varphi, \alpha)}$  ist die Menge der den unsicheren Klauseln in  $\mathcal{W}_{(\varphi, \alpha)}$  entsprechenden (normalen) Klauseln. Aus dem possibilistischen Resolutionsbeweis für  $(\varphi, \alpha)$  erhält man durch Weglassen der Notwendigkeitsgrade einen Resolutionsbeweis für  $\varphi$  aus  $W_{(\varphi, \alpha)}$ . Das bedeutet, daß die Menge  $W' \stackrel{\text{def}}{=} W_{(\varphi, \alpha)} \cup \{ \neg\varphi \}$  (im Sinne der klassischen Logik) inkonsistent ist. Für jede Interpretation  $I$  folgt daher, daß eine Aussage  $\psi_I \in W'$  existiert, so daß  $I^*(\psi_I) = \text{falsch}$  erfüllt ist. Somit gilt für jede Interpretation  $I$

$$\mu_{\mathcal{W} \cup \{(\neg\varphi, 1)\}}(I) \leq 1 - \alpha,$$

denn für alle  $(\psi, \beta) \in \mathcal{W}_{(\varphi, \alpha)}$  gilt ja  $\beta \geq \alpha$ , so daß  $\mu_{(\psi, \beta)}(I) \leq 1 - \alpha$  sein muß. Damit folgt

$$\begin{aligned} \text{inc}(\mathcal{W} \cup \{(\neg\varphi, 1)\}) &\stackrel{\text{Def. 3.42(iii),(iv)}}{=} 1 - \sup \{ \mu_{\mathcal{W} \cup \{(\neg\varphi, 1)\}}(I) \mid I \in \mathfrak{P}(\mathcal{P}) \} \\ &\geq 1 - (1 - \alpha) \\ &= \alpha. \end{aligned} \quad \square$$

**Satz 3.45 (Vollständigkeit der possibilistischen Logik)** Sei  $\mathcal{W}$  eine unsichere Wissensbasis,  $(\varphi, \alpha) \in \mathcal{K} \times (0, 1]$ . Dann gilt

$$\mathcal{W} \models (\varphi, \alpha) \implies \mathcal{W} \vdash (\varphi, \alpha).$$

**B e w e i s :**

Nach Definition von  $\mathcal{W} \models (\varphi, \alpha)$  gilt

$$\alpha \leq \text{inc}(\mathcal{W} \cup \{(\neg\varphi, 1)\}) = 1 - \sup \{ \mu_{\mathcal{W} \cup \{(\neg\varphi, 1)\}}(I) \mid I \in \mathfrak{P}(\mathcal{P}) \}.$$

Somit folgt

$$\sup \{ \mu_{\mathcal{W} \cup \{(\neg\varphi, 1)\}}(I) \mid I \in \mathfrak{P}(\mathcal{P}) \} \leq 1 - \alpha,$$

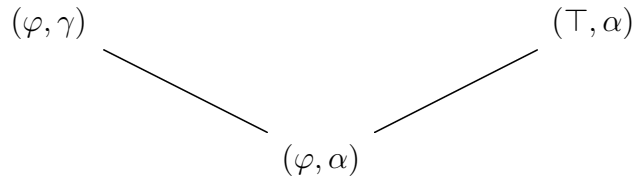
d.h., für jede Interpretation  $I$  gilt

$$\mu_{\mathcal{W} \cup \{(\neg\varphi, 1)\}}(I) \leq 1 - \alpha$$

Das bedeutet, daß die Menge

$$W = \{ \psi \mid \text{es existiert ein } \beta \in [\alpha, 1] \text{ mit } (\psi, \beta) \in \mathcal{W} \} \cup \{ \neg\varphi \}$$

inkonsistent ist. Also läßt sich die Klausel  $\varphi$  aus der Menge  $W \setminus \{ \neg\varphi \}$  mit Hilfe gewöhnlicher Resolution beweisen. Dieser Resolutionsbeweis läßt sich in einen possibilistischen Resolutionsbeweis transformieren, in dem nur unsichere Klauseln  $(\psi, \beta) \in \mathcal{W}$  mit  $\beta \geq \alpha$  verwendet werden, so daß wir  $\mathcal{W} \vdash (\varphi, \gamma)$  mit  $\gamma \geq \alpha$  erhalten. Mit der in Abbildungen 3.18 dargestellten possibilistischen Resolution ergibt sich  $\mathcal{W} \vdash (\varphi, \alpha)$ .  $\square$

Abbildung 3.18: Possibilistische Resolution für  $(\varphi, \alpha)$ 

### 3.5.2 Wahrheitsfunktionale Logiken

Nachdem wir die possibilistische Logik als Beispiel einer nicht-wahrheitsfunktionalen Logik kennengelernt haben, wenden wir uns nun wahrheitsfunktionalen Logiken zu.

Wir betrachten wiederum die Menge  $\mathcal{P}$  atomarer Ausdrücke. Wir beschränken uns auf die logischen Konnektive  $\rightarrow$ ,  $\wedge$  und  $\vee$ . Für die Menge aller aus atomaren Ausdrücken mit Hilfe von  $\rightarrow$ ,  $\wedge$  und  $\vee$  (und eventuell Klammersymbolen) erzeugbaren logischen Ausdrücke schreiben wir wiederum  $\mathcal{L}$ .

Anstelle der Wahrheitswertmenge  $\{\text{wahr}, \text{falsch}\}$  lassen wir alle Zahlen aus dem Einheitsintervall  $[0, 1]$ , von 0 für *falsch* und 1 für *wahr* zu. Eine Interpretation  $I$  ist daher eine Abbildung  $I : \mathcal{P} \rightarrow [0, 1]$ . Um den Wahrheitswert eines zusammengesetzten Ausdrucks unter einer Interpretation  $I$  bestimmen zu können, müssen Auswertungsfunktionen für die logischen Konnektive festgelegt werden. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß  $\rightarrow$  als Łukasiewicz-Implikation,  $\wedge$  als stetige  $t$ -Norm und  $\vee$  als stetige  $t$ -Conorm interpretiert wird. Für den Wahrheitswert eines zusammengesetzten Ausdrucks  $\varphi$  unter der Interpretation  $I$  schreiben wir wieder  $I^*(\varphi)$ .

**Definition 3.46** *Ein Ausdruck der Form*

$$\varphi \rightarrow p,$$

wobei  $p \in \mathcal{P}$  gilt und  $\varphi$  ein logischer Ausdruck ist, der aus atomaren Ausdrücken und den Konnektiven  $\wedge$  und  $\vee$  zusammengesetzt ist, heißt **Implikationsausdruck**. Die Menge der Implikationsausdrücke wird mit  $\mathcal{I}$  bezeichnet.

Um später Korrektheits- und Vollständigkeitseigenschaften nachweisen zu können, beschränken wir uns im wesentlichen auf Implikations- und atomare Ausdrücke.

**Definition 3.47** *Eine Fuzzy-Wissensbasis  $w$  ist eine Abbildung*

$$w : \mathcal{I} \cup \mathcal{P} \rightarrow [0, 1].$$

Eine Fuzzy-Wissensbasis ist als untere Schranke für die durch eine Interpretation  $I$  induzierte Abbildung  $I^* : \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$  zu verstehen, d.h.,  $w$  drückt aus, daß jeder Formel  $\varphi \in \mathcal{I} \cup \mathcal{P}$  ein Wahrheitswert größer oder gleich  $w(\varphi)$  zugeordnet werden sollte.

Eine gewöhnliche Wissensbasis  $W \subseteq \mathcal{I} \cup \mathcal{P}$  kann als Fuzzy-Wissensbasis

$$w : \mathcal{I} \cup \mathcal{P} \rightarrow [0, 1], \quad \varphi \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } \varphi \in W \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

aufgefaßt werden.

**Definition 3.48** *Es sei  $w$  eine Fuzzy-Wissensbasis und  $I : \mathcal{P} \rightarrow [0, 1]$  eine Interpretation.  $I$  ist mit  $w$  **kompatibel**, falls für alle  $\varphi \in \mathcal{I} \cup \mathcal{P}$  gilt:  $w(\varphi) \leq I^*(\varphi)$ .*

**Definition 3.49** *Es sei  $w$  eine Fuzzy-Wissensbasis. Die Abbildung  $\text{Th}_w : \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$  wird durch*

$$\text{Th}_w(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{I^*(\varphi) \mid I \text{ ist eine mit } w \text{ kompatible Interpretation}\}.$$

definiert.

$\text{Th}_w$  ist die Fuzzy-Menge aller aus  $w$  semantisch ableitbaren Ausdrücke. Definition 3.49 entspricht in der klassischen Logik der Definition

$$\text{Th}_W^{(\text{klassisch})} \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \mid \text{Für alle Interpretationen } I, \\ \text{für die die Gleichung } I^*(\psi) = \text{wahr} \text{ erfüllt ist} \\ \text{für alle } \psi \in W \text{ erfüllt ist, gilt } I^*(\varphi) = \text{wahr}\},$$

d.h.  $\text{Th}_W^{(\text{klassisch})}$  bezeichnet die Menge aller aus der (gewöhnlichen) Wissensbasis  $W$  semantisch ableitbaren Ausdrücke.

Damit haben wir eine Semantik für unsere wahrheitsfunktionale Logik definiert. Zur Festlegung einer Syntax verallgemeinern wir den Modus Ponens. Dazu betrachten wir eine Fuzzy-Wissensbasis  $w$ , einen Implikationsausdruck  $\varphi \rightarrow p$  und eine mit  $w$  kompatible Interpretation  $I$ . Wir definieren die Interpretation  $I_w$ , wobei  $I_w(q) = w(q)$  mit  $q \in \mathcal{P}$  ist. Da  $I$  mit  $w$  kompatibel ist, gilt  $I_w \leq I$ . Aufgrund der Monotonieeigenschaften der  $t$ -Normen und der  $t$ -Conormen erhalten wir  $I_w^*(\varphi) \leq I^*(\varphi)$ . Wegen der Kompatibilität von  $I$  mit  $w$  folgt

$$\begin{aligned} w(\varphi \rightarrow p) &\leq I^*(\varphi \rightarrow p) \\ &= \min\{1 - I^*(\varphi) + I(p), 1\}. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$w(\varphi \rightarrow p) \leq 1 - I^*(\varphi) + I(p),$$

und somit

$$w(\varphi \rightarrow p) + I_w^*(\varphi) - 1 \leq w(\varphi \rightarrow p) + I^*(\varphi) - 1 \leq I(p),$$

so daß sich aus  $w$  die neue untere Schranke  $w(\varphi \rightarrow p) + I_w^*(\varphi) - 1$  für den atomaren Ausdruck  $p$  ableiten läßt. Die folgende Definition formalisiert dieses Beweisverfahren.

**Definition 3.50** *Es seien  $w$  und  $w'$  Fuzzy-Wissensbasen.*

(i)  $w'$  ist **direkt aus  $w$  ableitbar**, falls es einen Implikationsausdruck  $\varphi \rightarrow p$  gibt, so daß gilt

$$(a) \quad w'(p) \leq \max \{w(\varphi \rightarrow p) + I_w^*(\varphi) - 1, w(p)\}$$

$$(b) \quad \text{Für alle } \psi \in (\mathcal{I} \cup \mathcal{P}) \setminus \{p\} \text{ folgt } w'(\psi) \leq w(\psi).$$

(ii)  $w'$  ist **aus  $w$  ableitbar**, falls eine Folge  $w_0, w_1, \dots, w_n$  von Fuzzy-Wissensbasen existiert mit

$$(a) \quad w_0 = w$$

$$(b) \quad w_n = w'$$

$$(c) \quad w_{i+1} \text{ ist aus } w_i \text{ direkt ableitbar.}$$

**Definition 3.51** *Es sei  $w$  eine Fuzzy-Wissensbasis. Die Abbildung  $\text{th}_w : \mathcal{P} \rightarrow [0, 1]$  ist durch*

$$\text{th}_w(p) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{w'(p) \mid w' \text{ ist aus } w \text{ ableitbar}\}.$$

*gegeben.*

$\text{th}_w$  ist die Fuzzy-Menge der aus  $w$  syntaktisch beweisbaren atomaren Ausdrücke.

**Satz 3.52 (Korrektheit)** *Es sei  $w$  eine Fuzzy-Wissensbasis,  $p \in \mathcal{P}$ . Dann gilt*

$$\text{th}_w(p) \leq \text{Th}_w(p).$$

**B e w e i s :**

Die direkte Ableitbarkeit wurde so definiert, daß sie Kompatibilitätserhaltend ist, d.h., ist die Interpretation  $I$  mit  $w$  kompatibel, ist  $I$  auch mit der aus  $w$  direkt ableitbaren Fuzzy-Wissensbasis  $w'$  kompatibel. Mittels vollständiger Induktion erhalten wir, daß eine mit  $w$  kompatible Interpretation  $I$  auch mit jeder aus  $w$  ableitbaren Fuzzy-Wissensbasis  $w'$  kompatibel ist. Damit gilt für alle an der Infimumbildung in der Definition 3.49 beteiligten Interpretationen  $I$  und für alle an der Supremumbildung in Definition 3.51 beteiligten Fuzzy-Wissensbasen  $w'$  die Ungleichung  $w'(p) \leq I(p)$ , womit die Behauptung des Satzes folgt.  $\square$

**Satz 3.53 (Vollständigkeit)** *Es sei  $w$  eine Fuzzy-Wissensbasis,  $p \in \mathcal{P}$ . Dann gilt*

$$\text{th}_w(p) \geq \text{Th}_w(p).$$

B e w e i s :

Definiere  $I_0 \stackrel{\text{def}}{=} \text{th}_w$ . Wir zeigen zunächst, daß die Interpretation  $I_0$  mit  $w$  kompatibel ist. Für atomare Ausdrücke  $q \in \mathcal{P}$  gilt nach Definition von  $\text{th}_w$  die Ungleichung  $w(q) \leq I_0(q)$ . Es sei  $\varphi \rightarrow q$  ein Implikationsausdruck. Wir nehmen an, es gelte

$$w(\varphi \rightarrow q) > I_0^*(\varphi \rightarrow q) = I_0(q) - I_0^*(\varphi) + 1,$$

d.h.

$$w(\varphi \rightarrow q) + I_0^*(\varphi) - 1 > I_0(q).$$

$p_{i_1}, \dots, p_{i_n}$  seien die in  $\varphi$  auftretenden atomaren Ausdrücke. Wegen der Monotonie und der Stetigkeit der zur Auswertung von  $\wedge$  bzw.  $\vee$  verwendeten  $t$ -Norm bzw.  $t$ -Conorm existieren  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$ , so daß die Interpretation

$$I_1(r) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} I_0(r) - \varepsilon_j, & \text{falls } r = p_{i_j} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

die Bedingung

$$w(\varphi \rightarrow q) + I_1^*(\varphi) - 1 > I_0(q) \quad (3.23)$$

erfüllt. Wir legen die Fuzzy-Wissensbasis  $w'$  durch

$$w'(\psi) = \begin{cases} I_1(\psi), & \text{falls } \psi \in \mathcal{P} \\ w(\psi), & \text{falls } \psi \in \mathcal{I}. \end{cases}$$

fest.

Für jeden der atomaren Ausdrücke  $p_{i_j}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) gibt es eine aus  $w$  ableitbare Fuzzy-Wissensbasis  $w_j$  mit  $w_j(p_{i_j}) > w'(p_{i_j})$ , da  $w'(p_{i_j}) < \text{th}_w(p_{i_j})$  gilt. Also ist auch  $w'$  aus  $w$  ableitbar. Aus  $w'$  können wir aber direkt die Fuzzy-Wissensbasis  $w''$  mit

$$w''(\psi) = \begin{cases} w(\varphi \rightarrow q) + I_{w'}^*(\varphi) - 1, & \text{falls } \psi = q \\ w'(\psi), & \text{sonst.} \end{cases}$$

ableiten. Das impliziert den Widerspruch

$$\begin{aligned} I_0(q) &< w(\varphi \rightarrow q) + I_1^*(\varphi) - 1 \\ &= w''(q) \\ &\leq \text{th}_w(q). \end{aligned}$$

Also ist  $I_0$  mit  $w$  kompatibel, und es folgt für alle  $p \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned} \text{th}_w(p) &= I_0(p) \\ &\geq \inf\{I(p) \mid I \text{ ist mit } w \text{ kompatibel}\} \\ &= \text{Th}_w(p). \end{aligned} \quad \square$$



## 3.6 Ergänzende Bemerkungen und Quellenangaben

Im folgenden weisen wir auf einige Möglichkeiten zur Wissensvertiefung in bezug auf verschiedene Methoden des approximativen Schließens, die Interpretation von Possibilitätsverteilungen und possibilistischen Inferenzregeln hin, untersuchen außerdem Fuzzy-Maße und betrachten Erweiterungen der logikbasierten Inferenzmechanismen. Schließlich stellen wir kurz ein Softwaretool zur Realisierung possibilistischen Schließens in mehrdimensionalen Räumen vor. Wie schon in Kapitel 2 werden die ergänzenden Bemerkungen von einer Vielzahl wichtiger Literaturempfehlungen begleitet.

### 3.6.1 Historische Entwicklung: Approximatives Schließen

Im Forschungsgebiet „Künstliche Intelligenz“ werden traditionell Methoden aus der Logik verwandt. Aus diesem Grunde hat man zunächst versucht, das Problem der Repräsentation und Propagation unsicheren Expertenwissens dadurch zu lösen, daß man symbolischen Ausdrücken (z.B. logischen Formeln) numerische Gewichte zuordnete. Der bekannteste Ansatz besteht darin, Fakten und Regeln durch sogenannte Sicherheitsfaktoren [Shortliffe75] zu bewerten, die während des Prozesses der Problemlösung geeignet verrechnet werden und wegen der Einfachheit der verwendeten Algorithmen das Abarbeiten der Regeln numerisch kaum behindern. Mit dem Expertensystem MYCIN [Buchanan84] wurde eindrucksvoll belegt, daß ein solches heuristisches Verfahren durchaus zum Erfolg führen kann. Erweiterungen und Verbesserungen dieses Ansatzes wurden in die Inferenzsysteme RUM [Bonissone87], FLOPS [Buckley86] und MILORD [Godo89] einbezogen. Ein gemeinsames Problem aller MYCIN-ähnlichen Inferenzsysteme besteht allerdings darin, daß die in ihnen verwandte Kombination unsicherer Konklusionen zu falschen Resultaten führen kann [Heckerman88a]. Das ist eine Schwäche, die mit dem Fehlen von Modularität in wissensbasierten Systemen zusammenhängt [Heckerman88b]. Ein Hauptproblem stellt die Angabe einer Semantik der den logischen Formeln zugewiesenen Zahlen dar. Auf die dabei notwendige Unterscheidung zwischen Wahrheitsgraden und Unsicherheitsgraden (siehe Abschnitt 3.5) wird seit längerem hingewiesen [Dubois91a].

Im Gegensatz zu den logikbasierten Inferenzmechanismen, die leicht Eingang in die KI-Literatur fanden, sind die verschiedenen numerischen Kalküle zur Behandlung unsicheren Wissens anfangs wenig beachtet worden (siehe z.B. [Kruse91a]). Es ist nicht überraschend, daß zunächst die probabilistischen Kalküle [Pearl88, Neapolitan90] wegen ihrer mathematischen Sauberkeit dominierten; andere Methoden wurden als überflüssig erachtet [Cheeseman86]. In Anwendungen werden jedoch Fuzzy-Mengen sehr erfolgreich eingesetzt, so daß auch in der Forschung mittlerweile ein reger Dialog zwischen den verschiedenen Schulen der Unsicherheitsmodellierung stattfindet. In Europa wurde hier insbesondere durch die ESPRIT-Projekte DRUMS, DRUMS-II (Basic Research Actions Nr. 3085–6156) wertvolle Arbeit geleistet [Kruse91c, Clarke93].

Die ersten Ansätze, approximatives Schließen mit Hilfe eines auf Fuzzy-Mengen verallgemeinerten Modus Ponens zu beschreiben, stammen von L.A. Zadeh [Zadeh73]. In [Zadeh79, Zadeh83b] wird der Mechanismus detailliert erklärt. Besser kann man die dort vorgestellten Verfahren allerdings erläutern, indem man Possibilitätsverteilungen zur Repräsentation unvollständigen Wissens verwendet. Ein ausführlicher Überblick über Fuzzy-Logik und verwandte Gebiete findet sich in [Zadeh92]. Einige Anwendungen von Fuzzy-Expertensystemen sind in [Kandel91] aufgeführt.

Der Begriff eines (possibilistischen) F-Expertensystems, den wir in diesem Kapitel benutzt haben, bezieht sich auf eine spezielle Klasse wissensbasierter Systeme, die auf die Fokussierung einer gegebenen Wissensbasis durch verfügbare Evidenzen eingeschränkt sind. Es gibt aber auch andere Operationen, die das dynamische Verhalten der Wissensbasis betreffen und u.U. seine Struktur verändern können. Diese Operationen sind wohlbekannt unter den Namen *updating* und *belief revision*. Um ein tieferes Verständnis der Semantik dieser und verwandter Konzepte zu erlangen, empfehlen wir [Gärdenfors88, Gärdenfors92] und [Katsuno91]. Die Methoden, die in diesen Büchern untersucht werden, sind zum Teil auch auf possibilistisches Schließen anwendbar [Dubois92b].

Die Strukturierung qualitativer Abhängigkeiten in einer Wissensbasis mit Hilfe von Hypergraphen wird in vielen Bereichen der Informatik verwendet. Eine breite Darstellung der allgemeinen Grundlagen findet man in [Berge73] und [Golumbic80]. Hypergraphen als ein wichtiges Konzept für die Theorie der relationalen Datenbanken werden zum Beispiel in [Maier83] behandelt. Neuere Zugänge zur Verwaltung von Unsicherheit und Vagheit in Datenbanksystemen durch die Anwendung von Possibilitätsfunktionen sind in [Bosc92, Bosc93] beschrieben. In der Künstlichen Intelligenz sind Hyperbäume von großem Interesse für *Bayessche Netze*, die den F-Expertensystemen nahestehen, jedoch probabilistische anstelle possibilistischer Daten sowie ein explizites Konditionierungskonzept verwenden [Pearl86, Lauritzen88, Andreassen87].

Wissensbasierte Systeme, die ein entscheidungstheoretisches Modell als Rahmen für Wissensrepräsentation und Inferenzmechanismus verwenden, werden gewöhnlich *normative Expertensysteme* genannt. Diese Modelle basieren auf dem Konzept eines *Influenzdiagramms* [Shachter88]. In diesem Kapitel haben wir nur solche Influenzdiagramme vorgestellt, die keine Entscheidungskanten oder Nützlichkeitskanten enthalten und die auch unter den Namen *belief networks* [Pearl88] bzw. *knowledge maps* [Howard81] bekannt sind.

Ein wichtiger Forschungsgegenstand in diesem Bereich ist das qualitative und quantitative Lernen aus Datenbanken von Beispielen, das sich in unserem Fall auf die Identifikation des Abhängigkeitshypergraphen bzw. der (possibilistischen) Regelbasis bezieht. Das Lernen kausaler probabilistischer Netzwerke wird z.B. in [Cooper92] untersucht, entsprechende possibilistische Verfahren werden in [Gebhardt94] vorgestellt.

### 3.6.2 Possibilitätsverteilungen

Während die Theorie der Fuzzy-Mengen eng verbunden ist mit der Betrachtung vager Konzepte, bezieht sich die Anwendung der Possibilitätstheorie auf die imperfekte Beschreibung eines existierenden Elementes  $\omega_0$  eines Universums  $\Omega$ . In [Zadeh78a] wird vorgeschlagen, Unsicherheit über  $\omega_0$  mit Hilfe des Possibilitätsmaßes  $\Pi : \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ ,  $\Pi(A) = \sup\{\mu(\omega) \mid \omega \in A\}$  zu modellieren, wenn eine Fuzzy-Menge  $\mu : \Omega \rightarrow [0, 1]$  als einzige Beschreibung von  $\omega_0$  gegeben ist. Diese grundlegende Idee wurde in Laufe der Zeit verfeinert, siehe z.B. [Higashi83, Delgado87, Zadeh81, Giles82, Nguyen79, Yager83, Yager80b], und schließlich in [Dubois87b] axiomatisch aufgebaut, wobei Possibilitätsverteilungen und Possibilitätsmaße ohne zugrundeliegende Fuzzy-Mengen analysiert werden. In [Yager92a] wird das Konzept der Spezifität einer Possibilitätsverteilung behandelt. Damit erweist sich die Possibilitätstheorie als geeignet, um unsicheres Wissen zu behandeln, das auf kontextabhängigen qualitativen Präferenzen beruht. An ähnlichen Ideen arbeiteten bereits früher der Wirtschaftswissenschaftler G.L.S. Shackle [Shackle61], der an einer Theorie der „Grade möglicher Überraschung“ interessiert war, und die Philosophen L.J. Cohen [Cohen73] and N. Rescher [Rescher76], die Grade induktiver Stützung und Plausibilitätsgrade untersuchten.

Neben diesen Ansätzen wurde die Possibilitätstheorie auf ganz verschiedener semantische Grundlage aufgebaut. Einige Autoren betrachten Possibilitätsmaße als obere Einhüllende einer Menge von Wahrscheinlichkeiten: Wenn  $\Pi$  ein Possibilitätsmaß ist, so stimmt die obere Wahrscheinlichkeit  $P^* : \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ ,  $P^*(A) = \sup\{P(A) \mid P \in P_\Pi\}$ , induziert durch die Menge  $P_\Pi = \{P \mid \forall A \subseteq \Omega : P(A) \leq \Pi(A)\}$ , mit  $\Pi$  überein, d.h., es gilt  $P^* = \Pi$  [Dubois88].

Jedem Statistiker fallen außerdem einige offensichtliche Beziehungen zu Likelihood-Funktionen [Loginov66, Stallings77] auf. Eine entsprechende Rechtfertigung der Possibilitätstheorie wurde in [Dubois93] gegeben. Darüberhinaus ist die Beziehung zu Spohn's Theorie der epistemischen Zustände zu erwähnen [Spohn88, Spohn90], von der sich herausstellte, daß sie eine weitere Deutungsmöglichkeit der Possibilitätstheorie ist [Dubois93b].

Das Konzept einer Possibilitätsverteilung basiert auf der epistemischen Interpretation von Fuzzy-Mengen und kann folglich auch über die Interpretation vager Konzepte als Konturfunktionen von Zufallsmengen gedeutet werden, wie in Abschnitt 2.6.1 gezeigt wurde. Dieser Ansatz (siehe [Nguyen78b, Hestir91, Goodman82, Wang83]) hat den Vorteil klarer Semantik und ist dazu geeignet, einige für die Praxis wesentliche Schlußfolgerungsmethoden zu motivieren. Verfeinerte Semantiken, die auf Ansätzen von [Strassen64, Dempster67, Dempster68] und [Kampé de Fériet82] beruhen und die Operationen auf Possibilitätsverteilungen, das Prinzip der minimalen Spezifität, die Entscheidungsfindung mit Hilfe von Possibilitäts- und anderen Unsicherheitsmaßen sowie die besondere Rolle der Gödel-Relation sehr viel besser begründen können, sprengen den Rahmen dieses Buches. Einzelheiten sind unter anderem in [Gebhardt93a, Gebhardt93b, Gebhardt93c] enthalten.

Ein zentrales Forschungsthema des approximativen Schließens ist die Repräsentation

von Wenn-Dann-Regeln, da entsprechende Formalismen auch im Bereich der Fuzzy-Regelung benötigt werden. Aus der oben präsentierten Sicht geht es dabei um die Wahl einer entsprechenden zweidimensionalen Possibilitätsverteilung. Im folgenden werden zunächst rein algebraische Methoden untersucht. Es wird versucht, eine Regel der Form

$$\text{if } \xi \text{ is } \mu_A \text{ then } \eta \text{ is } \mu_B$$

durch eine Possibilitätsverteilung der Form

$$\pi(x, y) = I(\mu_A(x), \mu_B(y)),$$

zu modellieren, in der  $I$  eine Implikation einer mehrwertigen Logik ist. Es gibt drei gut untersuchte Klassen von Implikationsoperatoren, die in [Trillas85, Dubois84, Weber83] analysiert werden (vgl. auch Abschnitt 2.7)

- *S-Implikationen* sind Implikationen der Form

$$I(a, b) = \perp(n(a), b),$$

wobei für  $\perp$  eine  $t$ -Conorm (für die mehrwertige Disjunktion) und für  $n$  eine streng monoton fallende, involutorische Funktion von  $[0, 1]$  in  $[0, 1]$  mit  $n(0) = 1$  (eine strenge Negation) verwendet wird. Bekannteste Vertreter sind die *Kleene–Dienes-Implikation*  $I_K(a, b) = \max(1 - a, b)$  mit  $\perp'_K = \max$ , die *Reichenbach-Implikation*  $I_R(a, b) = 1 - a + ab$  mit  $\perp_R(a, b) = a + b - ab$  und die *Lukasiewicz-Implikation*  $I_L(a, b) = \min(1, 1 - a + b)$  mit  $\perp_L(a, b) = \min(1, a + b)$ . Sie basieren auf der materialen Deutung der Implikation  $p \rightarrow q$  als  $\neg p \vee q$ .

- *R-Implikationen* spiegeln eine partielle Ordnung auf der Menge der Aussagen wider: Es wird  $I(a, b) = 1$  genau dann gewählt, wenn  $a \leq b$  ist. Diese Implikationen basieren auf einem Residuenkonzept in Verbänden und sind definiert durch

$$I(a, b) = \sup \{c \in [0, 1] \mid \top(a, c) \leq b\},$$

wobei  $\top$  eine  $t$ -Norm ist.

Für  $\top = \min$  erhält man die *Gödel-Implikation* mit  $I_G(a, b) = 1$  für  $a \leq b$  und  $I_G(a, b) = b$  für  $a > b$ . Für  $\top_L = \max(0, a + b - 1)$  ergibt sich wieder die Lukasiewicz-Implikation  $I_L(a, b)$ .

- Die sogenannten *QL-Implikationen* verwenden als Funktional

$$I(a, b) = \perp(n(a), \top(a, b)),$$

wobei  $\perp$  eine  $t$ -Conorm,  $n$  eine strenge Negation und  $\top$  durch  $\top(a, b) = n(\perp(n(a), n(b)))$  definiert ist.

*Zadehs Implikation*  $I_Z(a, b) = \max(1 - a, \min(a, b))$  wird durch  $\perp = \max$  und  $n(a) = 1 - a$  erzeugt. In [Mizumoto85, Dubois91a] und [Bandler80] werden Eigenschaften von Fuzzy-Implikationen analysiert. Man beachte, daß der Name QL-Implikation irreführend ist, da es sich genaugenommen nicht um Implikationen im Sinne der klassischen Logik handelt.

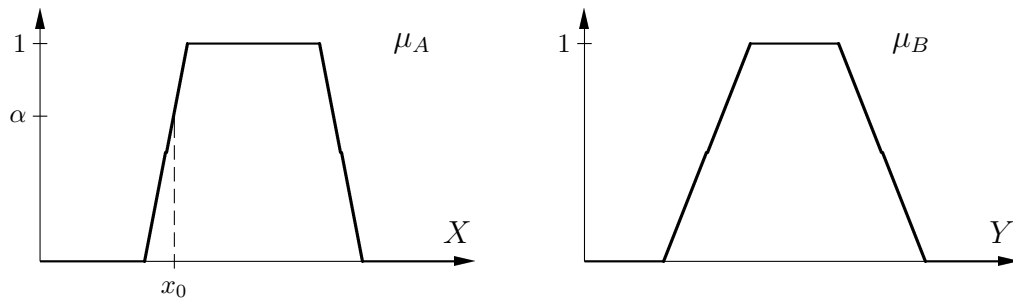


Abbildung 3.19: Zwei Possibilitätsverteilungen

Ein anderer Zugang zur Interpretation von Regeln der Form

**if  $\xi$  is  $\mu_A$  then  $\eta$  is  $\mu_B$**

besteht darin, die als Interpretation gewählte Possibilitätsverteilung  $\pi$  durch semantisch begründbare Restriktionen zu definieren. So kann man die oben genannten Regeln z.B. als graduelle Regeln „Je mehr  $\mu_A$ , desto mehr  $\mu_B$ “ ansehen und  $\pi$  über die Ungleichungen

$$\min(\mu_A(x), \pi(x, y)) \leq \mu_B(y)$$

für alle  $(x, y) \in X \times Y$  einschränken. Das Prinzip der minimalen Spezifität liefert in diesem Fall für  $\pi$  die Gödel-Implikation  $I_G$  [Dubois92b]. Ein weiterer Zugang eröffnet sich durch den auf Fuzzy-Mengen verallgemeinerten Modus Ponens. Mit ihm lassen sich geeignete Possibilitätsmaße axiomatisch herleiten [Fukami80], wobei allerdings nur die Gödel-Implikation  $I_G$  zufriedenstellende Resultate liefert [Dubois85]. Die fundamentale Rolle von  $I_G$  wird ja auch durch den Abschnitt 3.3 und die schon erwähnten, von den semantischen Grundlagen her weiterführenden Arbeiten [Gebhardt92a] und [Gebhardt93c] gestützt.

Beschreibt man die zur Interpretation der genannten Wenn-Dann-Regeln herangezogene Possibilitätsverteilung durch  $\pi_I(x, y) = I(\mu_A(x), \mu_B(y))$ , wobei für  $\mu_A$  und  $\mu_B$  die in Abbildung 3.19 skizzierten Possibilitätsverteilungen verwandt werden, zieht man außerdem für  $I$  die Implikationen  $I_G$ ,  $I_K$ ,  $I_{\min}$  mit  $I_{\min}(a, b) = \min(a, b)$  und  $I_L$  heran, und führt schließlich den possibilistischen Inferenzmechanismus für die scharfe Eingabe  $x_0$  mit  $\mu_A(x_0) = \alpha$  aus ( $x_0$  wird dabei natürlich durch die Possibilitätsverteilung  $\pi_{x_0}$  mit  $\pi_{x_0}(x_0) = 1$  und  $\pi_{x_0}(x) = 0$  für  $x \neq x_0$  beschrieben), so ergeben sich die in Abbildung 3.20 gezeigten Projektionen (Possibilitätsverteilungen für den Ausgabewert  $\eta$ ).

Im allgemeinen Fall der Propagation in mehrdimensionalen Räumen kann man die von [Shenoy90] für rein probabilistische Ansätze und die Dempster–Shafer-Theorie formulierten Ideen auf Possibilitätsverteilungen übertragen und auf diese Weise zu lokalen Propagationsalgorithmen kommen [Fonck92]. Eine naheliegende Idee ist es, anhand

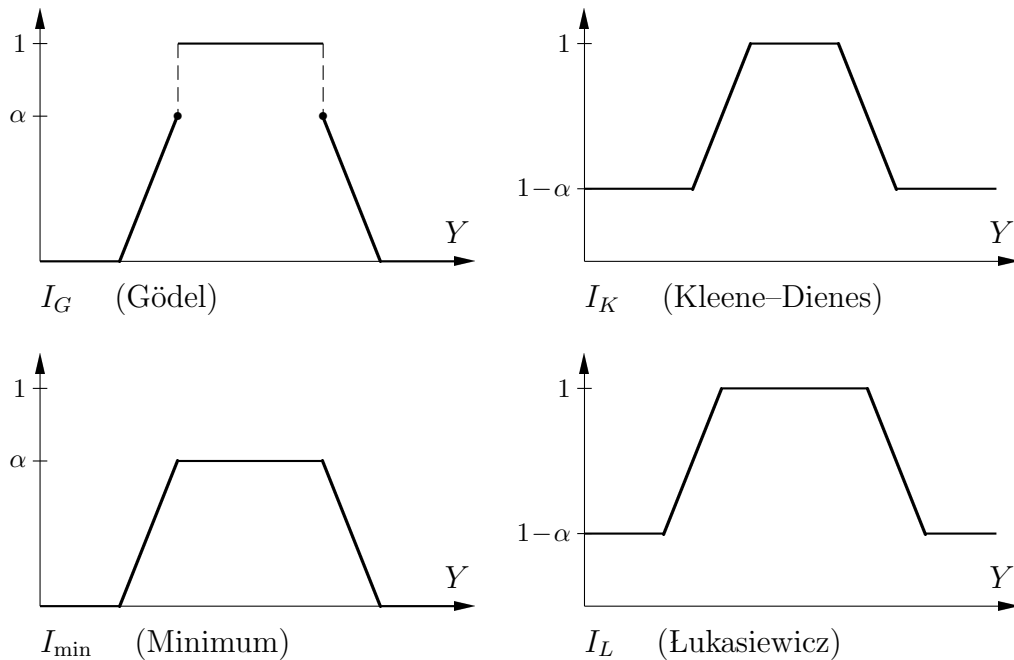


Abbildung 3.20: Resultierende Possibilitätsverteilungen nach Anwendung des possibilistischen Inferenzmechanismus auf die scharfe Eingabe  $x_0$

*bedingter* Possibilitätsmaße auf den durch die Hyperkanten eines Abhängigkeitshypergraphen spezifizierten Teilräumen ein Possibilitätsmaß auf dem Produktraum zu definieren, wie dies für den probabilistischen Fall in [Lauritzen88] durchgeführt wurde. Ist  $\Pi$  ein Possibilitätsmaß auf  $X$ , so erhält man über die Beziehung

$$\Pi(A \cap B) = \Pi(B|A) * \Pi(A) \quad (3.24)$$

für alle  $A, B \subseteq X$  mit  $\Pi(A) \neq 0$  eine Restriktion für die Definition des bedingten Possibilitätsmaßes  $\Pi(\cdot|A)$ , wobei  $*$  ein geeignet zu wählender Operator ist. Auf einer analogen Forderung basieren die Cox-Axiome für bedingte Wahrscheinlichkeiten [Cox46], bei denen sich für  $*$  die Produktbildung ergibt. In bezug auf Possibilitätsmaße erweist sich für  $*$  das Minimum als geeignet [Dubois87a]. Das am wenigsten spezifische bedingte Possibilitätsmaß, das unter der Voraussetzung  $\Pi(A) \neq 0$  die obige Beziehung für  $*$  = min erfüllt, ist

$$\Pi(B|A) = \begin{cases} 1, & \text{if } A \neq \emptyset \wedge \Pi(A) = \Pi(A \cap B) \\ \Pi(A \cap B), & \text{if } \Pi(A \cap B) < \Pi(A) \\ 0, & \text{if } A \cap B = \emptyset. \end{cases}$$

Kritik an diesen Ansätzen sowie alternative Vorschläge finden sich in [Nguyen78a, Ramer89, Dubois91d, Bouchon87, Benferhat94].

Die bestehende Kontroverse über die Anwendbarkeit von Möglichkeit und (subjektiver) Wahrscheinlichkeit [Cheeseman86], besonders des Bayesschen Ansatzes, rührt daher, daß die beiden Kalküle vergleichbare Unsicherheitsaspekte modellieren. Natürlich

gibt es Beziehungen zwischen den beiden Kalkülen, aber man kann auch Interpretationen von Possibilitätsverteilungen finden, die nichts mit Wahrscheinlichkeitstheorie zu tun haben und auf *Ähnlichkeitsrelationen* [Ruspini90] bzw. *Präferenzrelationen* [Dubois93a] beruhen.

### 3.6.3 Fuzzy-Maße

Ein spezielles Element  $\omega_0$  einer Grundgesamtheit  $\Omega$  kann man auch dadurch beschreiben, daß man alle Teilmengen  $A$  von  $\Omega$  angibt, die  $\omega_0$  enthalten. Mathematisch läßt sich dies durch die Funktion

$$\begin{aligned} g_{\omega_0} : \mathfrak{P}(\Omega) &\rightarrow \{0, 1\}, \\ g_{\omega_0}(A) = 1 &\iff \omega_0 \in A. \end{aligned}$$

erfassen. In vielen praktischen Fällen ist jedoch  $\omega_0$  nicht genau bekannt, z.B. wenn  $\omega_0$  der Ausgang eines Zufallsexperimentes ist. Man kann aber oft die Wahrscheinlichkeit dafür angeben, daß der unbekannte Ausgang  $\omega_0$  in einer Menge  $A$  liegt, und das Wissen über die Unsicherheit des Experiments mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  beschreiben.  $P$  besitzt die Eigenschaften  $P(\emptyset) = 0$ ,  $P(\Omega) = 1$  und ist  $\sigma$ -additiv, d.h., wenn  $A_1, A_2, \dots$  ein System disjunkter Mengen von  $\Omega$  ist, so gilt  $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ . Das Buch [Fine73] beleuchtet verschiedene mathematische und interpretative Aspekte der Wahrscheinlichkeitstheorie, [Halmos50] beschreibt wesentliche Ergebnisse im Bereich der Maßtheorie, die auf  $\sigma$ -additiven Maßen basiert. Auch in anderen Unsicherheitskalkülen werden Mengenfunktionen genutzt [Kruse91a, Kruse91b].

Die Wahl der Mengenfunktion hängt dabei sehr stark von der betrachteten Semantik ab. Fast allen Semantiken sind folgende Minimalanforderungen an die Mengenfunktion gemeinsam: Ein Fuzzy-Maß  $g : \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  ist eine Mengenfunktion, die die Eigenschaften  $g(\emptyset) = 0$ ,  $g(\Omega) = 1$  und  $A \subseteq B \implies g(A) \leq g(B)$  für alle  $A, B \subseteq \Omega$  erfüllt. Für nicht-endliche Grundbereiche  $\Omega$  wird zusätzlich die Stetigkeit gefordert: Ist  $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$  ein Mengensystem mit der Eigenschaft, daß jede monotone Folge  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$  oder  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$  von Mengen  $A_i \in \mathcal{A}$  gegen ein Element aus  $\mathcal{A}$  strebt, so gilt für jede dieser monotonen Mengenfolgen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(A_n) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right).$$

Für  $\mathcal{A}$  wird dabei im nicht-endlichen Fall üblicherweise eine geeignete  $\sigma$ -Algebra gewählt.

Von praktischem Interesse sind die  $\lambda$ -additiven Fuzzy-Maße, für die die Eigenschaft

$$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda g_\lambda(A)g_\lambda(B)$$

für alle  $A, B \in \mathcal{A}$  mit  $A \cap B = \emptyset$  gilt [Sugeno74, Kruse82a, Kruse82b]. In [Grabisch92, Lamata89] finden sich neuere Resultate zu diesem Forschungsgebiet. Die Monographie

[Wang92] widmet sich ausschließlich Fuzzy-Maßen. Fuzzy-Maße auf verallgemeinerten  $\sigma$ -Algebren, den *Fuzzy-Algebren*, werden in [Klement80, Klement82, Butnariu93] diskutiert.

Im folgenden betrachten wir wichtige Beispiele von Fuzzy-Maßen und beschränken uns dabei auf endliche Grundgesamtheiten  $\Omega$ .

Ein *Belief-Maß* [Shafer76, Smets81] ist eine Mengenfunktion

$$\text{Bel} : \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1],$$

die neben den Eigenschaften der Fuzzy-Maße das zusätzliche Axiom

$$\text{Bel} \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \geq \sum_{I: \emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} \text{Bel} \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  und jede Auswahl  $A_1, \dots, A_n$  von Teilmengen von  $\Omega$  erfüllt.

Analog versteht man unter einem *Plausibilitätsmaß* eine Funktion

$$\text{Pl} : \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1],$$

die Fuzzy-Maß ist und außerdem dem Axiom

$$\text{Pl} \left( \bigcap_{i=1}^n A_i \right) \leq \sum_{I: \emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} \text{Pl} \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right).$$

genügt. Für beliebige  $A \subseteq \Omega$  gilt  $\text{Bel}(A) = 1 - \text{Pl}(\Omega \setminus A)$ .

Belief-Maße und Plausibilitätsmaße werden insbesondere in der Theorie der zufälligen Mengen [Stoyan87, Matheron75] benötigt. Ist  $(X, \mathfrak{S}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $\Gamma : X \rightarrow \mathfrak{P}(\Omega)$  eine mengenwertige Abbildung, so ist

$$\begin{aligned} m_\Gamma : \mathfrak{P}(\Omega) &\rightarrow [0, 1], \\ m_\Gamma(A) &\stackrel{\text{def}}{=} P(\{x \in X \mid \Gamma(x) = A\}) \end{aligned}$$

die *induzierte Massenverteilung* auf  $X$ , die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Teilmengen von  $\Omega$  auftreten. Für eine fest vorgegebene Menge  $B \subseteq \Omega$  interessiert man sich dafür, mit welcher Wahrscheinlichkeit die durch  $\Gamma$  erzeugten nichtleeren Mengen  $\Gamma(x)$  ganz sicher in  $B$  enthalten sind (Belief) bzw. einen nichtleeren Schnitt mit  $B$  haben (Plausibilität). Daraus ergeben sich offenbar die Werte

$$\text{Bel}_\Gamma(B) = P(\{x \in X \mid \emptyset \neq \Gamma(x) \subseteq B\}) = \sum_{A: A \subseteq B} m_\Gamma(A)$$

und

$$\text{Pl}_\Gamma(B) = P(\{x \in X \mid \Gamma(x) \cap B \neq \emptyset\}) = \sum_{A: A \cap B \neq \emptyset} m_\Gamma(A).$$



Die auf diese Weise definierten Mengenfunktionen  $\text{Bel}_\Gamma : \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  und  $\text{Pl}_\Gamma : \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ , die auch *Belief-Funktionen* bzw. *Plausibilitätsfunktionen* genannt werden, sind Belief-Maße bzw. Plausibilitätsmaße [Dempster67]. G. Shafer schlug in [Shafer76] vor, eine Theorie der Belief-Funktionen zu entwickeln, die ganz auf die Betrachtung der zugrunde liegenden zufälligen Mengen verzichtet. Fortschritte in der Dempster–Shafer-Theorie werden in [Yager94] untersucht.

Einen speziellen Typus zufälliger Mengen bilden solche, bei denen für je zwei Mengen  $\Gamma(x)$  und  $\Gamma(x')$  die Beziehung  $\Gamma(x) \subseteq \Gamma(x')$  oder  $\Gamma(x) \supseteq \Gamma(x')$  gilt. Sie werden als *konsonant* bezeichnet. Das zugehörige Belief-Maß  $\text{Bel}_\Gamma$  erfüllt die Bedingungen  $\text{Bel}_\Gamma(\emptyset) = 0$ ,  $\text{Bel}_\Gamma(\Omega) = 1$  und  $\text{Bel}_\Gamma(A \cap B) = \min(\text{Bel}_\Gamma(A), \text{Bel}_\Gamma(B))$  für beliebige  $A, B \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ . Für das induzierte Plausibilitätsmaß  $\text{Pl}_\Gamma$  gilt entsprechend  $\text{Pl}_\Gamma(\emptyset) = 0$ ,  $\text{Pl}_\Gamma(\Omega) = 1$  und  $\text{Pl}_\Gamma(A \cup B) = \max(\text{Pl}_\Gamma(A), \text{Pl}_\Gamma(B))$  für alle  $A, B \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ . Offenbar kann dann jedes dieser Plausibilitätsmaße  $\text{Pl}_\Gamma$  eindeutig durch die Possibilitätsverteilung  $\pi_\Gamma : \Omega \rightarrow [0, 1]$  und die Gleichungen  $\pi_\Gamma(\omega) = \text{Pl}_\Gamma(\{\omega\})$  und  $\text{Pl}_\Gamma(A) = \max_{\omega \in A} \{\pi_\Gamma(\omega)\}$  festgelegt werden.

Im Fall unendlicher Grundgesamtheiten  $\Omega$  kann die Theorie der zufälligen Mengen zwar prinzipiell betrachtet werden [Matheron75], jedoch ist ihre Anwendung in bezug auf Possibilitätsverteilungen schwieriger, da Possibilitätsmaße nicht notwendigerweise die Stetigkeitsaxiome von Fuzzy-Maßen [Puri82] erfüllen.

### 3.6.4 Erweiterungen logikbasierter Inferenzmechanismen

Wir haben uns im Abschnitt 3.5 bei der Betrachtung logikbasierter Inferenzmechanismen der Einfachheit halber auf aussagenlogische Kalküle beschränkt. Die Erweiterung der possibilistischen Logik zu einer Prädikatenlogik erster Stufe ist unter Erhaltung der in Abschnitt 3.5.1 vorgestellten Korrektheits- und Vollständigkeitsresultate möglich [Dubois87a, Dubois89a, Dubois91a]. Das gleiche gilt für die in Abschnitt 3.5.2 diskutierte Logik. Dabei darf die Łukasiewicz-Implikation auch durch die Gödel-Implikation ersetzt werden [Klawonn92c].

Das Einheitsintervall wird im Rahmen der possibilistischen Logik oft nur für eine Rangordnung der Formeln benutzt [Dubois91c]. Das auf mengentheoretische Ansätze zugeschnittene Kontext-Modell aus Abschnitt 2.6.1 läßt sich jedoch auf logische Kalküle übertragen, so daß die in der possibilistischen Logik verwendeten Zahlen maßtheoretisch interpretiert werden können [Klawonn92d].

Neben den hier vorgestellten Ansätzen wurden weitere logikbasierte Inferenzmechanismen in Verbindung mit Wahrheitswerten oder Unsicherheitsgraden aus dem Einheitsintervall in [Lee71, Lee72, Mukaidono82, Yager85, Orci85, Orci89] vorgestellt. Gemeinsame Grundlage dieser Ansätze ist das Resolutionsprinzip, so daß sich auf diese Weise Verallgemeinerungen des logischen Programmierens [Lloyd87], insbesondere von Prolog-Systemen [Cordes92, Clocksin91] entwerfen lassen.

Die erste Programmiersprache für die Implementierung von Fuzzy Inferenzen, genannt FUZZY, stammt von Le Faivre [Le Faivre74]. Eine Version, die fuzzy-wertige Wahr-

heitswerte beinhaltet, wurde in [Freksa81] beschrieben. In der Folgezeit wurden zahlreiche Fuzzy-Prolog-Systeme vorgestellt wie Fuzzy-Prolog-ELF [Ishizuka85], FPROLOG [Martin87], Fuzzy Prolog [Mukaidono89]. Einige Versionen können linguistische Wahrheitswerte wie „Es ist mehr oder weniger wahr“, die durch Fuzzy-Mengen auf dem Intervall  $[0, 1]$  beschrieben sind, in einer logischen Programmierumgebung behandeln [Umano87]. In diesen Ansätzen wird jedoch nicht sauber die Unterscheidung zwischen Wahrheitswerten und Unsicherheitsgraden vorgenommen. Eine ausführliche Übersicht über logikbasierte Fuzzy-Systeme ist in [Dubois91a] enthalten.

Die Methodik, Wahrheitswerte außer *wahr* und *falsch* in die formale Sprache eines Logikkalküls einzubeziehen und die Deduktionsmechanismen durch das Hinzufügen geeigneter Axiome entsprechend zu modifizieren, wie es in der Fuzzy-Logik von Pavelka [Pavelka79] und deren Erweiterungen [Novák90a, Novák90b, Novák92] vorgeschlagen wird, ist auch aus dem Bereich der probabilistischen Logiken bekannt [Nilsson86, Bacchus90]. In diesen probabilistischen Kalkülen werden die Zahlen aus dem Einheitsintervall allerdings streng im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie — sei es als subjektive Wahrscheinlichkeiten oder als relative Häufigkeiten — gedeutet.

### 3.6.5 POSSINFER — Eine Implementierung

In den Abschnitten 3.2, 3.3 und 3.4 haben wir ausführlich die theoretischen Grundlagen einer speziellen Klasse wissensbasierter Systeme diskutiert, die wir als possibilistische F-Expertensysteme bezeichneten. Die Anwendung der dargestellten Methoden ist Gegenstand einer Kooperation, die zwischen dem Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund der Technischen Universität Braunschweig und der Deutschen Aerospace in Friedrichshafen besteht. Zu ihr gehörte auch der Entwurf und die Realisierung der Prototypversion des Softwaretools POSSINFER (Possibilistic Inference), das in der Programmiersprache C auf SUN-Workstations unter SUN-UNIX mit Hilfe von X-Windows und OSF/Motif implementiert ist.

Da POSSINFER im wesentlichen die in diesem Kapitel behandelten Konzepte verwendet, brauchen wir an dieser Stelle nicht mehr auf die theoretischen Hintergründe einzugehen, sondern können uns auf einige Bemerkungen zur Implementierung beschränken. Eine POSSINFER-Sitzung besteht aus den bereits in Abschnitt 3.2 angesprochenen folgenden vier Phasen:

- (1) Festlegung einer Repräsentationsstruktur für das Expertenwissen durch Vereinbarung von  $n$  Attributen und einem zugeordneten  $n$ -dimensionalen Universum  $\mathcal{U}$ .
- (2) Erstellen einer Wissensbasis, indem zuerst ein Hypergraph zur Beschreibung qualitativer Abhängigkeiten zwischen den beteiligten Attributen und damit eine geeignete Modularisierung  $\mathcal{M}$  vorgegeben wird, wonach die Quantifizierung dieser allgemeinen Abhängigkeiten durch ein System possibilistischer Relationen, also die Definition eines Regelsystems  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  erfolgt.

- (3) Anwendungsabhängige Angabe einer totalen Evidenz durch Spezifikation eines Evidenzsystems  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$ , das auf der speziellen, zu  $\mathcal{M}$  kompatiblen Partitionierung  $\mathcal{N} = \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$  beruht.
- (4) Ausführung des Inferenzmechanismus durch Starten des Propagationsalgorithmus, der die  $i$ -ten Restriktionen  $\kappa^{(i)}$  des Zustands  $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))$  für  $\mathcal{X} = (\mathcal{U}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M}))$  bestimmt.

Zu Phase (1) ist anzumerken, daß die Wertebereiche  $\Omega^{(i)}$ , die den Attributen  $A_i$  zugeordnet werden dürfen, den aus imperativen Programmiersprachen bekannten Wertebereichen der Standardtypen *real* und *int* oder selbstdefinierten Aufzählungstypen entsprechen. Darüber hinaus bietet POSSINFER die Möglichkeit der attributbezogenen Vereinbarung einer endlichen Anzahl von Namen mit ihnen zugewiesenen (parametrisierten) Possibilitätsverteilungen. Sie dienen der verständlicheren Spezifikation von Regel- und Evidenzsystemen in den Phasen (2) und (3).

Aus praktischen Erwägungen können die Possibilitätsverteilungen nicht beliebig gewählt werden. Die zugrunde liegenden Wertebereiche  $\Omega^{(i)}$  sind zwar prinzipiell endlich (wenn nicht per definitionem, so doch wegen der approximierten Darstellung ihrer Elemente); allerdings empfiehlt es sich bei entsprechend hoher Kardinalität von  $\Omega^{(i)}$  (insbesondere bei den Datentypen *real* bzw. *int*), Operationen auf die horizontale Repräsentation von Possibilitätsverteilungen durch deren  $\alpha$ -Schnitte zu beziehen, also ähnlich wie in dem in Abschnitt 2.8.5 beschriebenen Softwaretool SOLD ausschließlich Possibilitätsverteilungen der Form  $F_{D_k}(\mathbb{R})$  zu verwenden. Selbst für kleines  $k \in \mathbb{N}$  werfen jedoch die auf den Niveaumengen auszuführenden Operationen — obwohl es sich hierbei lediglich um zylindrische Extension, Schnittbildung und Projektion handelt — Effizienzprobleme auf, da wegen der Mehrstelligkeit der Relationen  $R \in \mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  Vereinigungen mehrdimensionaler Intervalle zu bilden sind.

POSSINFER läßt deshalb anstelle der durch  $F_{D_k}(\mathbb{R})$  induzierten Partitionierung der Menge  $[0, 1]$  der Possibilitätsgrade eine Partitionierung der Wertebereiche  $\Omega^{(i)}$  in endlich viele Intervalle zu, wobei  $\Omega^{(i)}$  dann de facto nur noch deren Repräsentanten enthält. Dies erlaubt die einfache Ausführung der genannten Operationen mit der vertikalen Repräsentation von Possibilitätsverteilungen. Es werden nur die Operatoren *min* und *max* benötigt. Des weiteren können z.B. Arrays anstelle verketteter dynamischer Datenstrukturen benutzt werden, eine aufwendige Verwaltung entfällt.

Die der Phase (2) zugeordnete Erstellung der Wissensbasis läßt sich unter X-Windows und OSF/Motif sehr anschaulich mit der Konstruktion des Hypergraphen  $H_{\mathcal{M}}$  auf dem Bildschirm beginnen. Die Festlegung der die einzelnen Attribute repräsentierenden Knoten von  $H_{\mathcal{M}}$  gehört dabei noch zu Phase (1). Die Spezifikation des Regelsystems  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  ist mit der Festlegung der Hyperkanten verbunden. Für jedes  $M \in \mathcal{M}$  kann  $\varrho^M \in \mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  entweder durch elementweise Zuordnung der Possibilitätsgrade definiert werden oder aber durch Festlegung eines konjunktiven Systems possibilistischer Inferenzregeln, bei deren Beschreibung auf die in Phase (1) vorgegebenen Possibilitätsverteilungen zurückgegriffen werden darf. Intern werden diese possibilistischen Inferenzregeln mit Hilfe der jeweiligen Gödelrelation interpretiert.

Abbildung 3.21: Das System POSSINFER

Nachdem in den Phasen (1) und (2) eine für mehrere POSSINFER-Sitzungen verwendbare Anwendungsumgebung als possibilistisches F-Expertensystem  $\mathcal{X} = (\mathcal{U}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M}))$  mit  $\mathcal{N} = \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$  definiert wurde, erfolgt in den Phasen (3) und (4) das approximative Schließen mit  $\mathcal{X}$ . In Phase (3) wird zunächst ein Evidenzsystems  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$  festgelegt, indem für jedes Attribut  $A_i$  als beobachteter Wert eine Possibilitätsverteilung über  $\Omega^{(i)}$  vorgegeben wird, bevor in Phase (4) schließlich der Propagationsalgorithmus die  $i$ -ten Restriktionen  $\kappa^{(i)}$  des Zustands  $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))$  bestimmt und deren graphische Darstellung in den jeweiligen Attributen zugeordneten Fenstern veranlaßt.

Evidenzsysteme und durch Propagation berechnete Possibilitätsverteilungen können über vorhandene Schnittstellen anderen Programmen zur weiteren Bearbeitung zugänglich gemacht werden. Umgekehrt ist das Einlesen von Regel- und Evidenzsystemen möglich, die mit anderen Programmen (ggf. unter Verwendung von Datenbanksystemen) erzeugt wurden.

### 3.6.6 Übungsaufgaben

**Aufgabe 3.1** Ein Meteorologe beobachtet am selben Ort zu zwei verschiedenen Zeitpunkten  $t_1, t_2$  den Bedeckungsgrad des Himmels. Zum Zeitpunkt  $t_1$  bezeichnet er ihn als *heiter*, zum Zeitpunkt  $t_2$  als *wolkig*. Die diesen linguistischen Beschreibungen entsprechenden vagen Daten repräsentiert er mit Hilfe der beiden Possibilitätsverteilungen  $\pi_1, \pi_2 : [0, 100] \rightarrow [0, 1]$  aus Abbildung 3.22.

$\pi_i$  dient für  $i = 1, 2$  der vagen Beschreibung des zum Zeitpunkt  $t_i$  vorliegenden Bedeckungsgrades  $\omega_i$  (in Prozent).

Der Meteorologe interessiert sich für den Mittelwert der beiden Bedeckungsgrade, also für  $\Phi(\omega_1, \omega_2)$  mit

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x, y) = \frac{1}{2}(x + y).$$

- Bestimmen Sie die aus der Anwendung des Extensionsprinzips resultierende Possibilitätsverteilung  $\hat{\Phi}(\pi_1, \pi_2)$ .
- $A_1 = [20, 30]$ ,  $A_2 = [50, 60]$  und  $A_3 = [30, 70]$  seien impräzise Beschreibungen von  $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ . Berechnen Sie  $\text{Nec}_{\hat{\Phi}(\pi_1, \pi_2)}(A_i)$  und  $\text{Poss}_{\hat{\Phi}(\pi_1, \pi_2)}(A_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Interpretieren Sie diese Werte.

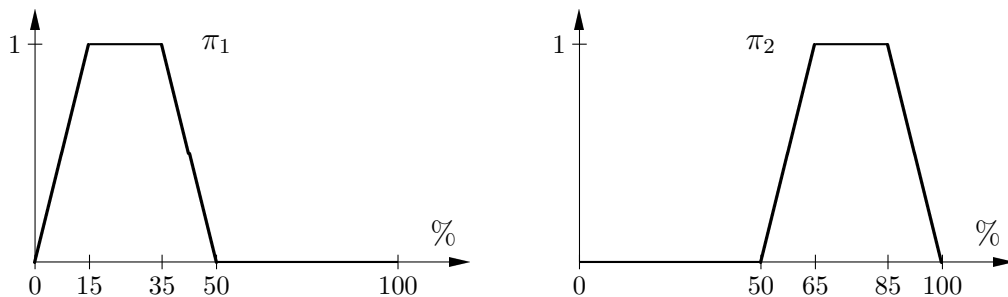


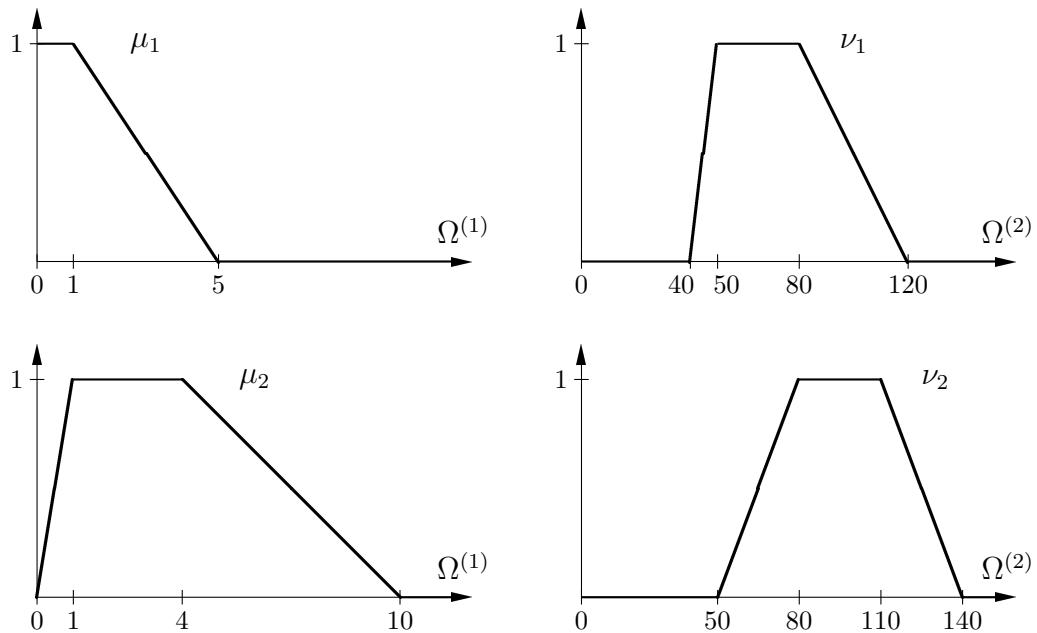
Abbildung 3.22: Possibilitätsverteilungen aus Aufgabe 3.1

**Aufgabe 3.2** Es liege vages Wissen über allgemeine Beziehungen zwischen dem Alter und der Größe von Personen in Form der linguistischen Regeln

- $$\begin{aligned} L_1: & \text{ if } \text{Alter is Baby then } \text{Größe is sehr klein,} \\ L_2: & \text{ if } \text{Alter is Kleinkind then } \text{Größe is klein,} \end{aligned}$$

vor, die durch das folgende System konjunktiv verknüpfter possibilistischer Inferenzregeln interpretiert werden:

- $$\begin{aligned} R_1: & \text{ if } \xi^{\{1\}} \text{ is } \mu_1 \text{ then } \xi^{\{2\}} \text{ is } \nu_1, \\ R_2: & \text{ if } \xi^{\{1\}} \text{ is } \mu_2 \text{ then } \xi^{\{2\}} \text{ is } \nu_2, \end{aligned}$$

Abbildung 3.23: Die Possibilitätsverteilungen  $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$  aus Aufgabe 3.2

Dabei gelte  $\mu_1, \mu_2 \in \text{Poss}(\Omega^{(1)})$ ,  $\nu_1, \nu_2 \in \text{Poss}(\Omega^{(2)})$  mit  
 $\Omega^{(1)} = \text{Dom}(\text{Alter}) = [0, 150]$  (Alter in Jahren),  
 $\Omega^{(2)} = \text{Dom}(\text{Größe}) = [40, 250]$  (Größe in cm),  
 $\Omega = \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ .

- a) Bestimmen Sie die durch  $R_1$  und  $R_2$  induzierten Gödelrelationen  $\varrho_1 \equiv \varrho^{\text{Gödel}}[\mu_1, \nu_1]$  und  $\varrho_2 \equiv \varrho^{\text{Gödel}}[\mu_2, \nu_2]$ .
- b) Patrick ist ein Junge im Alter zwischen zwei und drei Jahren. Was läßt sich anhand der Wissensbasis  $\varrho \equiv \min\{\varrho^{\text{Gödel}}[\mu_1, \nu_1], \varrho^{\text{Gödel}}[\mu_2, \nu_2]\}$  über Patricks Körpergröße aussagen?

Bestimmen Sie zur Beantwortung dieser Frage analog zu Abschnitt 3.3 zunächst die Possibilitätsverteilungen  $\pi_j \equiv \widehat{\text{infer}}_j(\mathbb{I}_{[2,3]}, \varrho_j)$ ,  $j = 1, 2$ , und dann die resultierende Possibilitätsverteilung  $\pi \equiv \min(\pi_1, \pi_2)$ .

**Aufgabe 3.3** Es sei  $\mathcal{X} = (\mathcal{U}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{R})$  ein possibilistisches F-Expertensystem mit  $\mathcal{U} = \left(\Omega^{(i)}\right)_{i=1}^4$ ,  
 $\Omega^{(1)} = \{a_1, b_1, c_1\}$ ,  $\Omega^{(2)} = \{a_2, b_2\}$ ,  $\Omega^{(3)} = \{a_3, b_3\}$ ,  $\Omega^{(4)} = \{a_4, b_5\}$ ,  
 $\mathcal{M} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}\}$ , und  $\mathcal{N} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ .  
 $\mathcal{R} = \{\varrho^{\{1,2\}}, \varrho^{\{2,3\}}, \varrho^{\{3,4\}}, \varrho^{\{1,4\}}\}$  sei durch Tabelle 3.8 vorgegeben.

x \ y	a <sub>2</sub>	b <sub>2</sub>
a <sub>1</sub>	0.2	0.3
b <sub>1</sub>	1	0.2
c <sub>1</sub>	0.7	1

 $\varrho^{\{1,2\}}(x, y)$ 

x \ y	a <sub>3</sub>	b <sub>3</sub>
a <sub>2</sub>	0.3	1
b <sub>2</sub>	1	0.5

 $\varrho^{\{2,3\}}(x, y)$ 

x \ y	a <sub>4</sub>	b <sub>4</sub>
a <sub>3</sub>	1	0.3
b <sub>3</sub>	0.2	1

 $\varrho^{\{3,4\}}(x, y)$ 

x \ y	a <sub>4</sub>	b <sub>4</sub>
a <sub>1</sub>	0.8	1
b <sub>1</sub>	0.1	0.6
c <sub>1</sub>	1	0.7

 $\varrho^{\{1,4\}}(x, y)$ 
Tabelle 3.8: Die Regelbasis  $\mathcal{R}$  aus Aufgabe 3.3

a)  $\mathcal{X}$  heißt *redundanzfrei*, wenn

$$\forall M \in \mathcal{M} : \varrho^M = \text{proj}_M^{\mathbb{N}} \left( \min_{M^* \in \mathcal{M}} \text{ext}_{M^*}^{\mathbb{N}_4} (\varrho^{M^*}) \right)$$

erfüllt ist. Bestimmen Sie ein zu  $\mathcal{X}$  äquivalentes, redundanzfreies possibilistisches F-Expertensystem  $\mathcal{X}' = (\mathcal{U}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{R}')$ .

b) Überführen Sie  $\mathcal{X}$  in ein äquivalentes possibilistisches F-Expertensystem  $\mathcal{X}'' = (\mathcal{U}, \mathcal{M}'', \mathcal{N}, \mathcal{R}'')$  mit Abhängigkeitshyperbaum  $H_{\mathcal{M}''}$ .

c) Berechnen Sie für  $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}) = \{\varepsilon^{\{1\}}, \varepsilon^{\{2\}}, \varepsilon^{\{3\}}\}$  mit  $\varepsilon^{\{1\}} \equiv \mathbb{1}_{\Omega^{(1)}}$ ,  $\varepsilon^{\{2\}} \equiv \mathbb{1}_{\Omega^{(2)}}$ ,  $\varepsilon^{\{3\}} \equiv \mathbb{1}_{\Omega^{(3)}}$ , und  $\varepsilon^{\{4\}} : \Omega^{(4)} \rightarrow [0, 1]$ ,  $\varepsilon^{\{4\}}(a_4) = 1$ ,  $\varepsilon^{\{4\}}(b_4) = 0.3$ , die  $i$ -ten Restriktionen  $\kappa^{(i)}$  von  $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

**Aufgabe 3.4** Es seien die folgenden unsicheren Aussagen gegeben:

- Wenn Tweety ein Vogel ist und Tweety keinen verletzten Flügel hat, kann er fliegen. (0.9)
- Wenn Tweety ein Pinguin ist, ist er ein Vogel. (1.0)
- Wenn Tweety ein Pinguin ist, kann er nicht fliegen. (1.0)
- Tweety ist ein Vogel. (0.7)
- Tweetys Flügel sind unverletzt. (0.8)

Die Zahl in Klammern bezeichnet, inwieweit die jeweilige Aussage mindestens für notwendigerweise wahr gehalten wird.

Übersetzen Sie diese Aussagen in eine geeignete unsichere Wissensbasis und bestimmen Sie mit Hilfe possibilistischer Resolution den Inkonsistenzgrad dieser Wissensbasis.





# Kapitel 4

## Fuzzy-Regelung

Die größten Erfolge im Bereich industrieller und kommerzieller Anwendungen von Fuzzy-Systemen wurden bisher durch *Fuzzy-Regler* (Fuzzy-Controller) erzielt. Dieses Kapitel, das der Fuzzy-Regelung gewidmet ist, setzt keine Kenntnisse aus der Regelungstechnik voraus. Es ist daher sowohl für den Leserkreis geeignet, der sich ganz allgemein für Fuzzy-Systeme interessiert und in diesem Kapitel spezielle Anwendungsmöglichkeiten kennenlernt, als auch für Personen, die sich vorwiegend mit Regelungstechnik beschäftigen und hier eine Darstellung der grundlegenden Methoden einschließlich einer semantischen Fundierung der Fuzzy-Regler finden.

Nach einer Klärung der prinzipiellen Unterschiede zwischen der klassischen Regelungstechnik, die ein physikalisches Modell des Prozesses zugrundelegt, und der Fuzzy-Regelung, bei der die Modellierung menschlichen Expertenverhaltens im Vordergrund steht, in Abschnitt 4.1 stellen wir im Abschnitt 4.2 intuitiv motivierte Methoden der Fuzzy-Regelung vor, ohne ihre Semantik zu hinterfragen. Abschnitt 4.3 beschreibt die einzelnen Schritte des Entwurfs und Probleme, die bei Entwurf und Optimierung eines Fuzzy-Reglers auftreten können.

Gegenstand von Abschnitt 4.4 ist die Entwicklung eines Fuzzy-Reglers, dem eine saubere Semantik auf der Basis von Gleichheitsrelationen zugrundeliegt. Es stellt sich heraus, daß dadurch ein in Abschnitt 4.2 intuitiv motivierter Fuzzy-Regler aus auf einer formalen Basis hergeleitet werden kann.

Relationalgleichungen, die in Abschnitt 4.5 behandelt werden, liefern einen weiteren, fundierten Zugang zur Fuzzy-Regelung, der sich an das approximative Schließen anlehnt.

Als durchgängiges Beispiel wird das Stabbalance-Problem benutzt, das zwar Regelungstechnikern keine besonderen Schwierigkeiten bereitet, jedoch als Übungsbeispiel einer nicht-linearen Regelung gut geeignet ist.

## 4.1 Kognitive versus klassische Modelle

Wir werden Fuzzy-Regler nicht aus der Sicht der Regelungstechnik betrachten. Dies würde eine Vertrautheit des Lesers mit den elementaren Begriffen und den grundlegenden Konzepten der Regelungstechnik voraussetzen und den Leserkreis unnötig einengen. Wir wollen vielmehr anhand eines sehr vereinfachten Modells einer Regelstrecke die am weitesten verbreiteten Methoden der Fuzzy-Regelung vorstellen und legen vor allem Wert auf eine saubere Fundierung und Motivierung der beschriebenen Konzepte, sofern sich eine Semantik angeben läßt. Dies bedeutet nicht, daß dieses Kapitel für einen Regelungstechniker uninteressant und ohne Bedeutung ist. Das Gegenteil dürfte der Fall sein. Ein tiefgehendes Verständnis der zugrundeliegenden Prinzipien der Fuzzy-Regelung sollte einen Regelungstechniker in die Lage versetzen, die Anwendbarkeit von Fuzzy-Reglern auf kompliziertere Prozesse einzuschätzen, die Verfahren angemessen zu verwenden und bereits bestehende Anwendungen zu verstehen und kritisch zu prüfen.

Wir fassen Fuzzy-Regelung als eine Möglichkeit auf, nichtlineare Kennfeldregler zu definieren, wobei die nichtlineare Übertragungsfunktion definiert werden kann, ohne jeden einzelnen Wert des Kennfeldes angeben zu müssen. Die Entwicklung kann als eine Art wissenbasierter Interpolation gesehen werden. Der entstehende Kennfeldregler kann mit den Standardmethoden der Regelungstechnik analysiert werden.

Unser sehr vereinfachtes Modell eines regelungstechnischen Problems läßt sich wie folgt beschreiben. Wir betrachten ein (technisches) System — z.B. einen elektrischen Motor, der einen Fahrstuhl antreibt, oder eine Raumheizung. Für dieses System schreiben wir ein gewünschtes Verhalten vor — etwa, daß der Motor eine bestimmte Drehzahl einzuhalten hat oder die Heizung den Raum auf eine vorgegebene Temperatur erwärmt. Charakteristisch für solche Systeme ist, daß eine Größe, die sich im Laufe der Zeit verändern kann, auf einen vorgegebenen Sollwert eingestellt werden soll. Wir bezeichnen diese Größe als *Ausgangsgröße*. Im Falle des Motors ist die Ausgangsgröße die Drehzahl, bei der Heizung ist es die Temperatur. Die Ausgangsgröße wird durch eine *Stellgröße*, die wir regulieren können, beeinflußt. Für den Motor verwenden wir die Stromzufuhr als Stellgröße, für die Heizung die Größe der Öffnung des Thermostatventils. Neben der Stellgröße existieren noch *Störgrößen*, die ebenfalls einen Einfluß auf die Ausgangsgröße ausüben und sich im Zeitverlauf ändern können. Eine Störgröße im Falle des Fahrstuhls stellt die Beladung dar. Störgrößen bei der Heizung sind z.B. die Außentemperatur und die Sonneneinstrahlung durch ein Fenster.

Die Bestimmung des aktuellen Stellwertes wird im allgemeinen auf der Basis der aktuellen Meßwerte für die Ausgangsgröße  $\xi$  und die Änderung der Ausgangsgröße  $\Delta\xi = \frac{d\xi}{dt}$  durchgeführt. Wird die Ausgangsgröße in diskreten Zeittakten gemessen, setzt man häufig  $\Delta\xi(t_{n+1}) = \xi(t_{n+1}) - \xi(t_n)$ , so daß  $\Delta\xi$  nicht zusätzlich gemessen werden muß.

**Beispiel 4.1 (Stabbalance-Problem)** Bei dem Stabbalance-Problem (inverted pendulum) handelt es sich um die Aufgabe, einen Stab im Schwerfeld der Erde durch geeignete Bewegung des Fußpunktes vertikal zu balancieren. Das untere Ende des Stabs darf entlang der horizontalen Achse reibungsfrei bewegt werden (vgl. Abbildung 4.1).

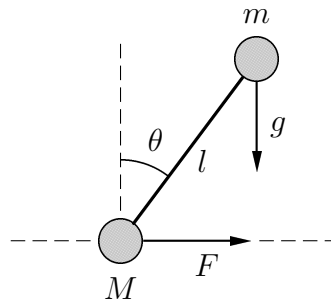


Abbildung 4.1: Das Stabbalance-Problem

Die Kraft, die den Stab, dessen Schaft masselos ist und an dessen Kopf- und Fußende sich eine punktförmige Masse  $m$  bzw.  $M$  befindet, entlang der Achse bewegt, soll so reguliert werden, daß der Stab nach Möglichkeit senkrecht auf der Achse steht. Zur Bestimmung dieser Kraft werden der Winkel  $\theta$  des Stabs relativ zur vertikalen Achse und die Änderung des Winkels, d.h. die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ , gemessen. Ausgangsgröße ist damit der Winkel  $\theta$ ; die Stellgröße ist die Kraft  $F$ . Abbildung 4.1 zeigt einen positiven Winkel  $\theta$  und eine positive Kraft  $F$ . Eine negative Winkelgeschwindigkeit entspricht einer Bewegung des Stabes im Uhrzeigersinn.  $\square$

Das Stabbalance-Problem wird uns in diesem Kapitel zur Veranschaulichung der vorgestellten Begriffe und Methoden dienen und daher immer wieder aufgegriffen werden. Dieses Beispiel wurde gewählt, weil es besonders anschaulich ist, nicht, weil es mit Methoden der herkömmlichen Regelungstechnik schwer wäre, das Stabbalance-Problem zu lösen.

Die Regelungstechnik beschränkt sich natürlich im allgemeinen nicht auf die Messung der Ausgangsgröße  $\xi$  und der Änderung der Ausgangsgröße  $\Delta\xi = \frac{d\xi}{dt}$ . Oft ist es sinnvoll, auch höhere Ableitungen der Ausgangsgröße zu betrachten oder weitere Größen zu messen. Bei Heizungsanlagen wird beispielsweise meistens ein Außentemperaturfühler eingesetzt. Anstelle einer direkten Bestimmung der Stellgröße kann auch die Änderung der Stellgröße angegeben werden. In diesem Fall bietet sich die aktuelle Stellgröße als weitere Meß- bzw. Eingangsgröße an.

Wir werden daher im folgenden nur noch von *Meßgrößen* bzw. *Eingangsgrößen*  $\xi_1, \dots, \xi_n$  und einer „Stellgröße“  $\eta$  sprechen (Die Anführungszeichen weisen darauf hin, daß wir für  $\eta$  nicht nur die Stellgröße selbst, sondern auch ihre Änderung zulassen). Die Meßgrößen werden zur Berechnung eines Wertes für  $\eta$  verwendet. Wir gehen davon aus, daß die Meßgröße  $\xi_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) Werte aus der Menge  $X_i$ , die Stellgröße Werte aus der Menge  $Y$  annehmen kann. Als Lösung der regelungstechnischen Aufgabe wollen wir abstrakt die Angabe einer geeigneten *Kontrollfunktion*  $\varphi : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$  ansehen, die zu jedem Tupel von Meßwerten  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$  einen geeigneten Stellwert  $y = \varphi(x_1, \dots, x_n)$  bestimmt.

**Beispiel 4.1 (Fortsetzung)** Für das Stabbalance-Problem definieren wir  $X_1 \stackrel{\text{def}}{=} [-90, 90]$ , d.h., der Winkel  $\theta$  kann zwischen  $-90^\circ$  und  $+90^\circ$  schwanken. Theoretisch ist jeder reelle Wert für die Winkelgeschwindigkeit denkbar. Extrem hohe Winkelgeschwindigkeiten können aber nur künstlich herbeigeführt werden. Außerdem sind Meßgeräte nur in der Lage, einen beschränkten Wertebereich zu erfassen. Wir setzen daher voraus, daß  $-45 \leq \dot{\theta} \leq 45$  gilt (Einheit: Grad pro Sekunde), d.h.  $X_2 \stackrel{\text{def}}{=} [-45, 45]$ .

Für die Kraft  $F$  lassen sich analoge Überlegungen wie für die Winkelgeschwindigkeit anstellen. Wir gehen davon aus, daß Werte zwischen  $-10$  und  $+10$  (Einheit: Newton) für die Kraft zulässig sind und definieren daher  $Y \stackrel{\text{def}}{=} [-10, 10]$ .  $\square$

Das Prinzip der klassischen Regelungstechnik basiert auf einer formalen Beschreibung des technischen Systems meist in Form von Differentialgleichungen. Die Ermittlung der Abbildung  $\varphi$  entspricht der Berechnung einer geeigneten Lösung für diese Differentialgleichungen. Dazu verwendet man oft Approximierungsverfahren oder die Linearisierung der Gleichungen.

**Beispiel 4.1 (Fortsetzung)** Das Stabbalance-Problem läßt sich durch die Differentialgleichung

$$(M + m) \sin^2 \theta \cdot l \cdot \ddot{\theta} + m \cdot l \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 - (m + M) \cdot g \cdot \sin \theta = -F \cdot \cos \theta,$$

beschreiben. Dabei ist

- $g$  : Gravitationskonstante,
- $l$  : Stablänge,
- $m$  : Masse am Kopfende des Stabs,
- $M$  : Masse am Fußende des Stabs.

Aus dieser Differentialgleichung ist  $F(t)$  so zu bestimmen, daß  $\theta(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert und  $\dot{\theta}(t)$  einen geeigneten Verlauf aufweist.

Diese beschriebene Analyse des Stabbalance-Problems setzt voraus, daß die aufgestellte Differentialgleichung ein gutes Modell der Realität ist. Man benötigt daher entsprechende physikalische Kenntnisse über den Prozeß.  $\square$

Bei vielen Prozessen läßt sich aber kein geeignetes mathematisches Modell angeben, oder die Beschreibung in Form von Differentialgleichungen kann nur mit sehr großem Aufwand vorgenommen werden. Selbst wenn eine Beschreibung in Form von Differentialgleichungen vorliegt, kann die Lösung dieser Differentialgleichungen noch große Schwierigkeiten bereiten. Außerdem setzt eine solche Vorgehensweise entsprechendes physikalisches und mathematisches Wissen bei der Person voraus, die einen Regler entwickeln soll.

Im Zentrum der klassischen Regelungstechnik steht also das physikalisch-mathematische Modell des zu regelnden Systems. Sicherlich ist dies ein sehr sinnvoller Ansatz.

Aber offenbar ist eine Regelung auch ohne einen solchen Ansatz möglich. Ein Mensch kann beispielsweise fahrradfahren, ohne überhaupt zu wissen, was Differentialgleichungen sind.

Als Alternative zur klassischen regelungstechnischen Methode, bei der der Prozeß modelliert wird, bietet sich daher an, das Verhalten eines Menschen, der diesen Prozeß regeln kann, zu modellieren und zu simulieren. Das Aufstellen eines Modells für das Verhalten eines menschlichen „Regelungsexperten“ nennen wir *kognitive Analyse*. Zur Durchführung einer kognitiven Analyse kann ein Experte direkt befragt werden: Der Experte formuliert dann sein Wissen in Form von *linguistischen Regeln*<sup>1</sup>. Anstelle der Expertenbefragung ist auch eine Beobachtung des Expertenverhaltens möglich, um die Ergebnisse der Beobachtung zur Aufstellung von geeigneten (linguistischen) Regeln zu verwenden. Im Falle des Stabbalance-Problems wäre

Wenn  $\theta$  ungefähr Null und  $\dot{\theta}$  ebenfalls ungefähr Null ist,  
dann muß auch  $F$  ungefähr Null sein.

offenbar eine sinnvolle linguistische Regel. Zur Lösung des Stabbalance-Problems werden weitere Regeln benötigt, auf die wir später noch zurückkommen werden.

Linguistisch formulierte Regeln bestehen im allgemeinen aus einer Prämisse, die eine bestimmte Situation in Form einer (unscharfen) Spezifikation der Werte der Meßgrößen beschreibt, und einer Konklusion, die den geeigneten Stellwert für diese Situation (unscharf) angibt.

Linguistische Regeln eignen sich zwar zur Beschreibung des Expertenverhaltens. Eine automatisierte Regelung erfordert aber, daß bei gegebenen scharfen Werten für die Meßgrößen ein geeigneter scharfer Wert für die Stellgröße berechnet wird. Dies ist allein mit den linguistischen Regeln nicht zu erreichen. Um die linguistischen Regeln für eine automatisierte Regelung verwenden zu können, muß zunächst eine angemessene mathematische Modellierung der in den Regeln auftretenden unscharfen linguistischen Terme wie *ungefähr Null*, *positiv klein* usw. gefunden werden. Hierfür bieten sich Fuzzy-Mengen an. Desweiteren muß festgelegt werden, wie die scharfen Werte für die Meßgrößen zu den linguistischen Termen, denen Fuzzy-Mengen in der mathematischen Modellierung entsprechen, korrespondieren und wie die Regeln die Meßwerte verarbeiten sollen. Als Ergebnis wäre eine Fuzzy-Menge denkbar, die einem linguistischen Term entspricht, der eine geeignete Wahl der Stellgröße angibt. Schließlich muß hieraus ein scharfer Stellwert bestimmt werden.

Eine geeignete Architektur zur Umsetzung eines kognitiven Modells in einem Regler ist in Abbildung 4.2 dargestellt.

- Das *Fuzzifizierungs-Interface* nimmt den aktuellen Meßwert auf und führt gegebenenfalls eine Transformation des Meßwertes in einen geeigneten Wertebereich

<sup>1</sup>Wir sprechen hier von „linguistischen“ Regeln und Ausdrücken, da diese Terminologie bei Fuzzy-Reglern üblich ist, auch wenn es korrekt „natürlichsprachlich“ statt „linguistisch“ heißen müßte.

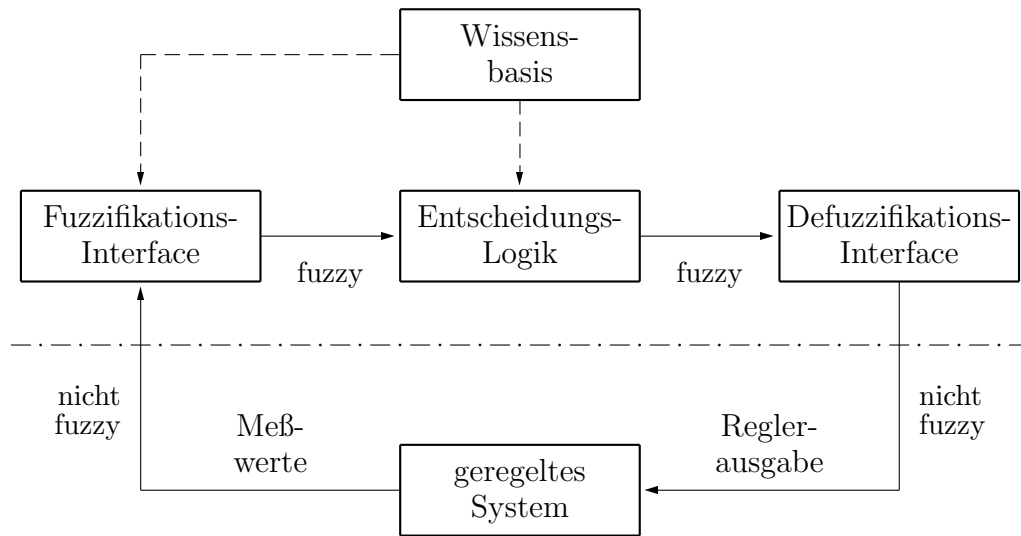


Abbildung 4.2: Architektur eines Fuzzy-Reglers

durch (z.B. könnte die Skalierung so gewählt werden, daß sämtliche Eingabewerte zwischen  $-1$  und  $+1$  liegen). Das Fuzzifizierungs-Interface kann außerdem dazu verwendet werden, den Meßwert in einen linguistischen Term oder eine Fuzzy-Menge umzuwandeln. Im allgemeinen wird der scharfe Meßwert  $x_0$  in die Fuzzy-Menge  $\mathbb{I}_{\{x_0\}}$  mit

$$\mathbb{I}_{\{x_0\}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = x_0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

transformiert. Liegen Informationen über die Genauigkeit der Messung vor oder ist die Messung an sich unscharf, können anstelle der Fuzzy-Menge  $\mathbb{I}_{\{x_0\}}$ , die die charakteristische Funktion der Menge  $\{x_0\}$  darstellt, andere Fuzzy-Mengen auftreten.

- Die *Wissensbasis* beinhaltet zum einen Informationen über die Wertebereiche der Meß- und Stellgrößen, eventuelle Normierungen und die zu den linguistischen Termen assoziierten Fuzzy-Mengen. Diese Informationen bilden die *Datenbasis*. Zum anderen enthält die Wissensbasis eine *Regelbasis* in Form von linguistischen Kontrollregeln.
- Die *Entscheidungslogik* stellt das Rechenwerk des Fuzzy-Reglers dar, in dem aus den Meßgrößen mit Hilfe der Wissensbasis Informationen über die Stellgröße gewonnen werden.
- Das *Defuzzifizierungs-Interface* hat die Aufgabe, aus den von der Entscheidungslogik gegebenen Informationen über die Stellgröße einen scharfen Stellwert zu bestimmen — gegebenenfalls einschließlich einer entsprechenden Transformation.

## 4.2 Zwei Ansätze zur Fuzzy-Regelung

Wir stellen in diesem Abschnitt zwei unterschiedlich arbeitende Fuzzy-Regler vor, die sehr intuitiv motiviert sind. Eine strengere Analyse der Semantik der Fuzzy-Regler wird in Abschnitt 4.4 ausgeführt, indem ein formaler Rahmen für das Verständnis und die Interpretation des Ansatzes von Mamdani vorgestellt wird.

In beiden Ansätzen ist das Ziel die Spezifikation einer Regelfunktion. Nur die Modelle und die Methoden sind „fuzzy“, das sich ergebende Kennfeld selbst ist stets scharf. Sonst wäre es auch nicht möglich, diese Modelle anzuwenden.

### 4.2.1 Der Ansatz von Mamdani

Bei diesem Ansatz formuliert der Experte sein Wissen in Form von linguistischen Regeln. Zunächst werden die linguistischen Terme festgelegt, die in den linguistischen Regeln auftreten können. Wir müssen daher für jede der Wertemengen  $X_1, \dots, X_n$  (für die Meßgrößen) und  $Y$  (für die Stellgröße) geeignete linguistische Terme wie *ungefähr Null*, *positiv klein* usw. bestimmen. Dabei kann *ungefähr Null* bezogen auf die Meßgröße  $\xi_1$  durchaus etwas anderes bedeuten als für die Meßgröße  $\xi_2$ . Für die Menge  $X_1$  könnten wir beispielsweise die drei linguistischen Terme *negativ*, *ungefähr Null* und *positiv* verwenden. Für die mathematische Modellierung wird jedem der drei linguistischen Terme eine Fuzzy-Menge zugeordnet.

Da die linguistischen Terme formal nur Namen für die Fuzzy-Mengen oder die durch die Fuzzy-Mengen repräsentierten Konzepte darstellen, werden wir im folgenden zuerst die Fuzzy-Mengen festlegen und danach jede Fuzzy-Menge mit einem passenden linguistischen Term versehen. Um geeignete Regeln für die Wissensbasis des Fuzzy-Reglers aufstellen zu können, wird also zunächst jede der Mengen  $X_1, \dots, X_n$  und  $Y$  mit Hilfe von Fuzzy-Mengen „partitioniert.“ Dazu werden auf der Menge  $X_1$   $p_1$  verschiedene Fuzzy-Mengen  $\mu_1^{(1)}, \dots, \mu_{p_1}^{(1)} \in F(X_1)$  definiert und jede dieser Fuzzy-Mengen mit einem linguistischen Term assoziiert. Entspricht die Menge  $X_1$  einem Intervall  $[a, b]$  reeller Zahlen, werden häufig Dreiecksfunktionen der Form

$$\begin{aligned} \mu_{x_0, \varepsilon} : [a, b] &\rightarrow [0, 1], \\ x &\mapsto 1 - \min\{\varepsilon \cdot |x - x_0|, 1\} \end{aligned}$$

verwendet. Der Wert  $x_0 \in [a, b]$  gibt die Spitze des Dreiecks an, d.h., es ist  $\mu_{x_0, \varepsilon}(x_0) = 1$ . Der Parameter  $\varepsilon > 0$  bestimmt, wie spitzwinklig ( $\varepsilon \geq 1$ ) oder wie stumpfwinklig ( $0 < \varepsilon \leq 1$ ) das Dreieck ist. Gilt  $a < x_1 < \dots < x_{p_1} < b$ , so werden meist nur die Fuzzy-Mengen  $\mu_2^{(1)}, \dots, \mu_{p_1-1}^{(1)}$  als Dreiecksfunktionen definiert. An den „Rändern“ des Intervalls verwendet man dagegen oft

$$\begin{aligned} \mu_1^{(1)} : [a, b] &\rightarrow [0, 1], \\ x &\mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \leq x_1 \\ 1 - \min\{\varepsilon \cdot (x - x_1), 1\}, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

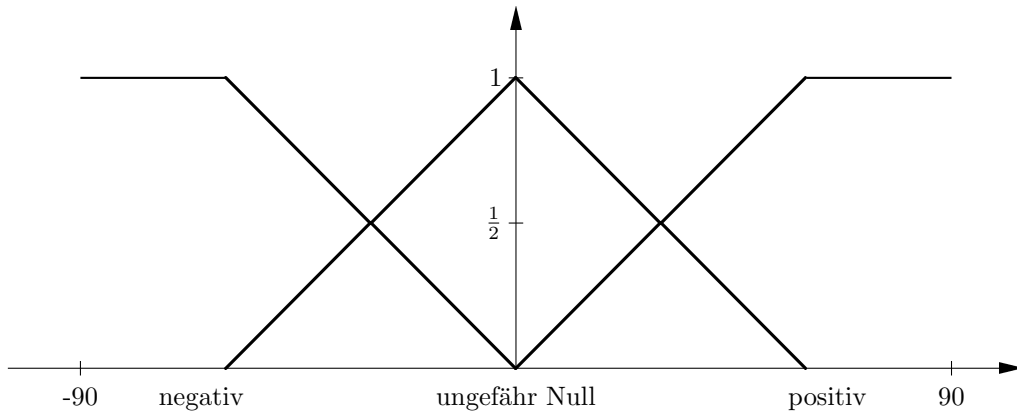


Abbildung 4.3: Eine grobe Partitionierung

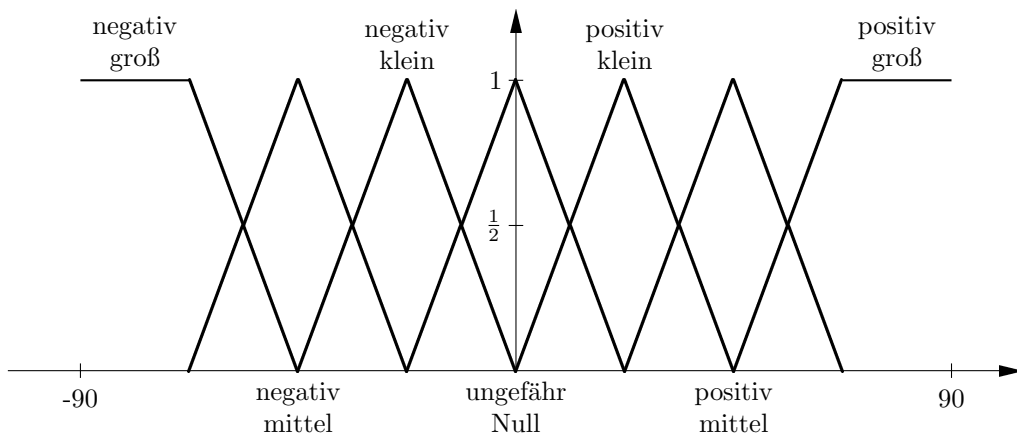


Abbildung 4.4: Eine feine Partitionierung

für die linke und

$$\mu_{p_1}^{(1)} : [a, b] \rightarrow [0, 1],$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x_{p_1} \leq x \\ 1 - \min\{\varepsilon \cdot (x_{p_1} - x), 1\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

für die rechte Grenze. Jeder Fuzzy-Menge  $\mu_1^{(1)}, \dots, \mu_{p_1}^{(1)}$  wird ein linguistischer Term wie *positiv klein* zugeordnet. Abbildung 4.3 zeigt eine grobe Partitionierung der Menge  $[-90, 90]$  mit 3 Fuzzy-Mengen, denen die linguistischen Terme *negativ*, *etwa Null* und *positiv* zugeordnet sind. In Abbildung 4.4 ist eine feinere Partitionierung mit sieben Fuzzy-Mengen dargestellt. Die Fuzzy-Mengen entsprechen den linguistischen Termen *negativ groß*, *negativ mittel*, *negativ klein*, *etwa Null*, *positiv klein*, *positiv mittel* und *positiv groß*.



Dreiecksfunktionen werden vor allem deswegen verwendet, weil die innerhalb des Fuzzy-Reglers durchzuführenden Berechnungen bei stückweise linearen Funktionen sehr einfach werden. Im Abschnitt 4.4 werden wir sehen, daß die Dreiecksfunktionen außerdem als Singletons im Sinne des Beispiels 2.56 eine wichtige Rolle spielen.

Prinzipiell sind anstelle der Dreiecksfunktionen beliebige Fuzzy-Mengen zugelassen. Um die Fuzzy-Mengen als ungefähre Zahlenwerte oder unscharfe Intervalle interpretieren zu können, empfehlen sich unimodale Funktionen bzw. Fuzzy-Zahlen oder Fuzzy-Intervalle, d.h. Elemente aus  $F_I(\mathbb{R})$ . Häufig werden die Fuzzy-Mengen so gewählt, daß die Bedingung

$$i \neq j \Rightarrow \sup_{x \in X_1} \{\min\{\mu_i^{(1)}(x), \mu_j^{(1)}(x)\}\} \leq 0.5.$$

erfüllt ist, was wir später als Disjunktheitsforderung interpretieren werden.

So wie die Menge  $X_1$  in die  $p_1$  Fuzzy-Mengen  $\mu_1^{(1)}, \dots, \mu_{p_1}^{(1)}$  unterteilt wird, werden auch Partitionierungen mit Hilfe von  $p_i$  ( $i = 2, \dots, n$ ) bzw.  $p$  Fuzzy-Mengen  $\mu_1^{(i)}, \dots, \mu_{p_i}^{(i)} \in F(X_i)$  bzw.  $\mu_1, \dots, \mu_p \in F(Y)$  der Mengen  $X_2, \dots, X_n$  und  $Y$  vorgenommen.

Diese Partitionierungen und die mit den Fuzzy-Mengen assoziierten linguistischen Terme stellen die Datenbasis innerhalb der Wissensbasis des Fuzzy-Reglers dar.

**Beispiel 4.1 (Fortsetzung)** Für das Stabbalance-Problem wählen wir für die Menge  $X_1$  eine Partitionierung, wie sie in Abbildung 4.4 dargestellt ist. Die Träger der einzelnen Fuzzy-Mengen (die Menge der Punkte, bei denen der Zugehörigkeitsgrad größer als Null ist, vgl. Beispiel 2.5) sind Intervalle von einer Länge eines Viertels des Gesamtbereichs  $X_1$ , d.h., die Dreiecke haben eine Breite von 45. Für die Mengen  $X_2$  und  $Y$  wählen wir entsprechende Partitionierungen, bei denen die Dreiecke eine Breite von 22.5 bzw. 5 haben.  $\square$

Nachdem die Partitionierungen der Mengen  $X_1, \dots, X_n, Y$  festgelegt sind, spezifizieren wir nun die Regelbasis. Die Regelbasis besteht aus  $k$  Kontrollregeln der Form

$$\text{if } \xi_1 \text{ is } A_{i_1,r} \text{ and } \dots \text{ and } \xi_n \text{ is } A_{i_n,r} \text{ then } \eta \text{ is } B \quad (r = 1, \dots, k).$$

Dabei sind  $A_{i_1,r}, \dots, A_{i_n,r}$  und  $B$  linguistische Terme, die den Fuzzy-Mengen  $\mu_{i_1,r}^{(1)}, \dots, \mu_{i_n,r}^{(n)}$  bzw.  $\mu_{i_r}$  gemäß den Partitionierungen der Mengen  $X_1, \dots, X_n$  bzw.  $Y$  entsprechen. Diese Kontrollregeln sollen hier im Falle des Ansatzes von Mamdani nicht als Implikationen, sondern im Sinne einer stückweise definierten Funktion verstanden werden, d.h., die  $k$  Regeln entsprechen der „Funktionsdefinition“  $\eta = \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)$  mit

$$\eta \hat{=} \begin{cases} B_{i_1} & \text{falls } \xi_1 \hat{=} A_{i_1,1} \text{ und } \dots \text{ und } \xi_n \hat{=} A_{i_n,1} \\ \vdots & \vdots \\ B_{i_k} & \text{falls } \xi_1 \hat{=} A_{i_1,k} \text{ und } \dots \text{ und } \xi_n \hat{=} A_{i_n,k}. \end{cases}$$

$$\theta$$

	$ng$	$nm$	$nk$	$uN$	$pk$	$pm$	$pg$
$\dot{\theta}$	$ng$		$pk$	$pg$			
	$nm$			$pm$			
	$nk$	$nm$		$pk$			
	$uN$	$ng$	$nm$	$nk$	$uN$	$pk$	$pg$
	$pk$			$nk$	$pk$		$pm$
	$pm$			$nm$			
	$pg$			$ng$	$nk$		

Tabelle 4.1: Die Regelbasis für das Stabbalance-Problem.

**Beispiel 4.1 (Fortsetzung)** Für das Stabbalance-Problem verwenden wir die in Tabelle 4.1 dargestellte Regelbasis mit 19 Regeln. Dabei ist beispielsweise der Eintrag in der zweiten Zeile der Tabelle als die Regel

**if  $\theta$  is ungefähr Null and  $\dot{\theta}$  is negativ mittel  
then  $F$  is positiv mittel.**

zu lesen. Die Tabelle ist nicht vollständig ausgefüllt, d.h., es wurde nicht für jedes mögliche Paar von linguistischen Termen für den Winkel und die Winkelgeschwindigkeit ein linguistischer Term für die Stellgröße angegeben. Da die einzelnen Tabelleneinträge — wie wir noch sehen werden — nicht disjunkten Fällen entsprechen, ist es nicht notwendig, die gesamte Tabelle auszufüllen. Außerdem brauchen wir für bestimmte Extremsituationen, in denen der Stab nicht mehr vor dem Umfallen bewahrt werden kann, keine Stellgröße anzugeben.  $\square$

Ein vom Fuzzifizierungs-Interface aufgenommenes Tupel  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$  von aktuellen Meßwerten wird (gegebenenfalls nach einer Transformation) direkt an die Entscheidungslogik weitergegeben; eine echte Fuzzifizierung findet also nicht statt.

Die Entscheidungslogik wertet zunächst jede Regel  $R_r$  einzeln aus. Betrachten wir die Regel

**if  $\xi_1$  is  $A_{i_1,r}$  and ... and  $\xi_n$  is  $A_{i_n,r}$  then  $\eta$  is  $B_{i_r}$ .**

Zur Auswertung wird zuerst der Erfüllungs- oder Akzeptanzgrad bestimmt, zu dem die Prämisse bei den vorliegenden Meßwerten erfüllt ist. Dazu wird für  $\nu = 1, \dots, n$  der Wert  $\mu^{(\nu)}(x_\nu)$  berechnet, der angibt, in wieweit der Meßwert  $x_\nu$  dem zu der Fuzzy-Menge  $\mu^{(\nu)}$  gehörenden linguistischen Term entspricht. Da in der Prämisse der Regel  $R_r$  verlangt wird, daß  $x_1, \dots, x_n$  den linguistischen Term  $A_{i_1,r}, \dots$  bzw.  $A_{i_n,r}$  erfüllt, müssen die Werte  $\mu_{i_{\nu,r}}^{(\nu)}(x_\nu)$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) geeignet konjunktiv verknüpft werden. Dies

geschieht durch Berechnung des Wertes  $\alpha = \min\{\mu_{i_1,r}^{(1)}, \dots, \mu_{i_n,r}^{(n)}\}$ . Damit erhalten wir für jede Regel  $R_r$  der  $k$  Regeln den Wert

$$\alpha_r \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\mu_{i_1,r}^{(1)}(x_1), \dots, \mu_{i_n,r}^{(n)}(x_n)\}. \quad (4.1)$$

Der Wert (4.1) gibt den Erfüllungsgrad der Prämisse der Regel  $R_r$  an. Als Ausgabe der Regel  $R_r$  ergibt sich dann die Fuzzy-Menge von Stellwerten, die man durch „Abschneiden“ der „Ausgabe“-Fuzzy-Menge  $\mu_{i_r}$  der Regel  $R_r$  bei dem durch (4.1) gegebenen Zugehörigkeitsgrad erhält. Formal induziert die Regel  $R_r$  bei gegebenen Meßwerten  $(x_1, \dots, x_n)$  die Fuzzy-Menge

$$\begin{aligned} \mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}(R_r)} : Y &\rightarrow [0, 1], \\ y &\mapsto \min\{\mu_{i_1,r}^{(1)}(x_1), \dots, \mu_{i_n,r}^{(n)}(x_n), \mu_{i_r}(y)\}. \end{aligned}$$

Für den Fall, daß  $\mu_{i_1,r}^{(1)}(x_1) = \dots = \mu_{i_n,r}^{(n)}(x_n) = 1$  gilt, folgt  $\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}(R_r)} = \mu_{i_r}$ , d.h., erfüllen die Meßwerte die Prämisse der Regel  $R_r$  vollständig, liefert die Regel  $R_r$  gerade ihre „Konklusions“-Fuzzy-Menge als Ausgabe. Falls für ein  $\nu \in \{1, \dots, n\}$   $\mu_{i_\nu,r}^{(\nu)}(x_\nu) = 0$  gilt, ergibt sich für die Regel  $R_r$  die Fuzzy-Menge, die identisch 0 ist.

**Beispiel 4.1 (Fortsetzung)** Die aktuellen Meßwerte für den Winkel und die Winkelgeschwindigkeit seien  $\theta = 36^\circ$  bzw.  $\dot{\theta} = -2.25^\circ \cdot \text{s}^{-1}$ . Die einzigen Regeln, für die der Wert (4.1) nicht Null wird, sind die beiden Regeln

$R_1$ : **if**  $\theta$  **is** positiv klein **and**  $\dot{\theta}$  **is** ungefähr Null  
**then**  $F$  **is** positiv klein

und

$R_2$ : **if**  $\theta$  **is** positiv mittel **and**  $\dot{\theta}$  **is** ungefähr Null  
**then**  $F$  **is** positiv mittel.

Für  $R_1$  ist die Prämisse nach der Gleichung (4.1) zum Grad  $0.4 = \min\{0.4, 0.8\}$  erfüllt, so daß wir

$$\mu_{36, -2.25}^{\text{output}(R_1)}(y) = \begin{cases} \frac{2}{5} \cdot y, & \text{falls } 0 \leq y \leq 1 \\ 0.4, & \text{falls } 1 \leq y \leq 4 \\ 2 - \frac{2}{5} \cdot y, & \text{falls } 4 \leq y \leq 5 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

erhalten. Für die Regel  $R_2$  ergibt sich der Wert  $0.6 = \min\{0.6, 0.8\}$  für den Erfüllungsgrad der Prämisse und damit

$$\mu_{36, -2.25}^{\text{output}(R_2)}(y) = \begin{cases} \frac{2}{5} \cdot y - 1, & \text{falls } 2.5 \leq y \leq 4 \\ 0.6, & \text{falls } 4 \leq y \leq 6 \\ 3 - \frac{2}{5} \cdot y, & \text{falls } 6 \leq y \leq 7.5 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Abbildungen 4.5 und 4.6 veranschaulichen die Auswertungen der Regeln  $R_1$  bzw.  $R_2$ . Die waagerechte gepunktete Linie gibt jeweils den Akzeptanzgrad für die Prämisse der jeweiligen Regel an, so daß die Fuzzy-Menge für die Stellgröße auf dieser Höhe „abgeschnitten“ werden muß. Als Ergebnisse der beiden Regeln erhalten wir die schraffierten Fuzzy-Mengen.

Für alle anderen Regeln ergibt sich ein Erfüllungsgrad von Null für die Prämisse, so daß diese Regeln jeweils die Fuzzy-Menge, die konstant Null ist, als Resultat liefern.  $\square$

Nachdem die Entscheidungslogik jede einzelne Regel ausgewertet hat, muß sie die bei der Auswertung erhaltenen Fuzzy-Mengen mittels Maximumbildung (Vereinigung) zu einer Fuzzy-Menge zusammenfügen. Insgesamt liefert die Entscheidungslogik die Fuzzy-Menge

$$\begin{aligned} \mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}} : Y &\rightarrow [0, 1], \\ y &\mapsto \max_{r \in \{1, \dots, k\}} \left\{ \min \{ \mu_{i_1, r}^{(1)}(x_1), \dots, \mu_{i_n, r}^{(n)}(x_n), \mu_{i_r}(y) \} \right\}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

die dem Defuzzifizierungs-Interface zur Bestimmung eines scharfen Ausgabewertes übergeben wird.

**Beispiel 4.1 (Fortsetzung)** Legen wir die Meßwerte  $\theta = 36^\circ$  und  $\dot{\theta} = -2.25^\circ \cdot \text{s}^{-1}$  zugrunde, ergeben sich die in den Abbildungen 4.5 und 4.6 rechts dargestellten Fuzzy-Mengen. Die Vereinigung dieser beiden Fuzzy-Mengen liefert die in Abbildung 4.7 gezeigte Fuzzy-Menge

$$\mu_{36, -2.25}^{\text{output}}(y) = \begin{cases} \frac{2}{5} \cdot y, & \text{falls } 0 \leq y \leq 1 \\ 0.4, & \text{falls } 1 \leq y \leq 3.5 \\ \frac{2}{5} \cdot y - 1, & \text{falls } 3.5 \leq y \leq 4 \\ 0.6, & \text{falls } 4 \leq y \leq 6 \\ 3 - \frac{2}{5} \cdot y, & \text{falls } 6 \leq y \leq 7.5 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Fuzzy-Mengen, die die Auswertungen der anderen Regeln liefern, brauchen nicht berücksichtigt zu werden, da sie konstant Null sind und somit bei der Vereinigung (Maximumbildung) keine Rolle spielen.  $\square$

Mit Hilfe der obigen Methode erhält man eine Abbildung, die jedem Tupel  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$  von Meßwerten eine Fuzzy-Menge — nämlich  $\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}}$  — von  $Y$  zuordnet. Die Entscheidungslogik berechnet keinen scharfen Stellwert, sondern beschreibt den Stellwert nur in Form einer Fuzzy-Menge. Die Aufgabe des Defuzzifizierungs-Interface ist es, aus der Fuzzy-Menge  $\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}}$  einen scharfen Stellwert zu gewinnen („defuzzifizieren“). Hierfür wird meistens eine der drei folgenden Methoden verwendet.

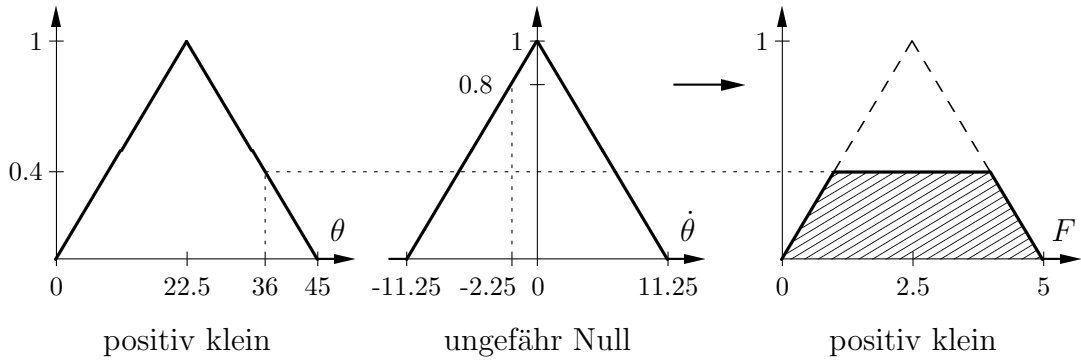


Abbildung 4.5: Auswertung der Regel  $R_1$

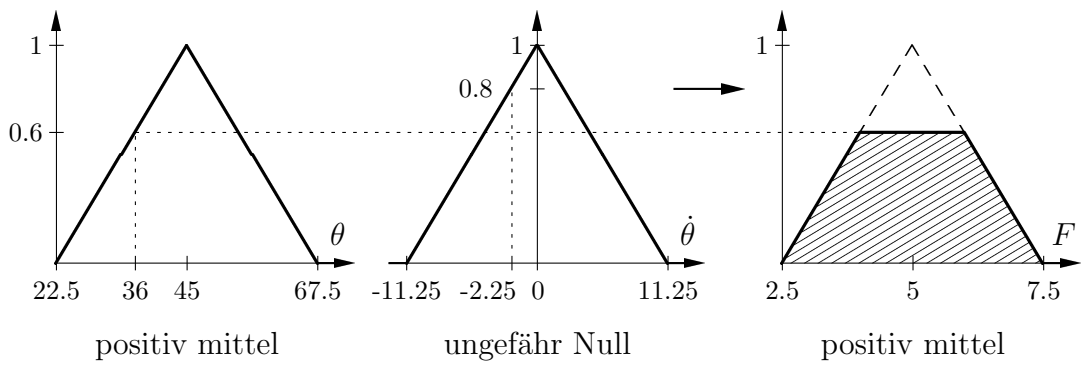


Abbildung 4.6: Auswertung der Regel  $R_2$

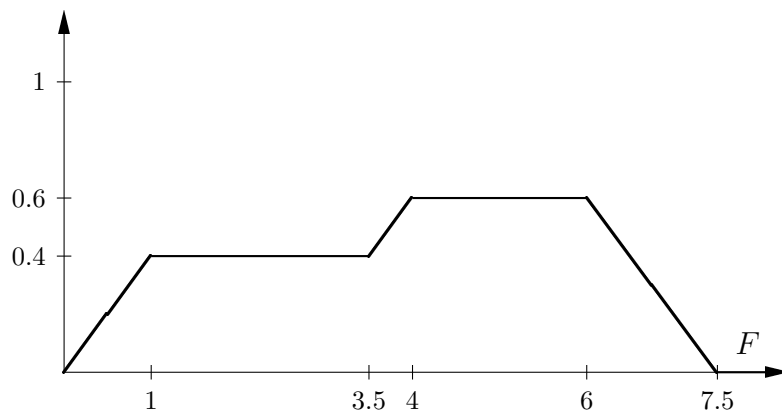


Abbildung 4.7: Die Fuzzy-Menge  $\mu_{36, -2.25}^{\text{output}}$

### Die Max-Kriterium-Methode

Bei der Max-Kriterium-Methode wird ein beliebiger Wert  $y \in Y$  ausgewählt, für den die Fuzzy-Menge  $\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}}$  ihren maximalen Zugehörigkeitsgrad annimmt. In Beispiel 4.1 (vgl. Abbildung 4.7) bedeutet das, daß jeder Wert  $y \in [4, 6]$  als Stellwert verwendet werden darf.

Der Vorteil dieser Methode besteht darin, daß sie auch anwendbar ist, wenn  $Y$  eine beliebige Menge von Kontrollaktionen, aber keine Teilmenge der reellen Zahlen ist. Der Nachteil besteht darin, daß die Max-Kriterium-Methode eigentlich eine Klasse von Defuzzifizierungsstrategien darstellt, da nicht vorgegeben wird, welcher der Werte mit maximalem Zugehörigkeitsgrad zu wählen ist. Wird nach jeder Messung ein Wert zufällig ausgewählt, ist das Verhalten des Fuzzy-Reglers nicht-deterministisch. Außerdem kann er ein sehr sprunghaftes Regelverhalten aufweisen.

### Die Mean-of-Maxima-Methode (MOM)

Für die Mean-of-Maxima-Methode wird vorausgesetzt, daß die Menge  $Y$  ein Intervall ist und daß die Menge  $\text{Max}(\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}}) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid \forall y' \in Y : \mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}}(y') \leq \mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}}(y)\}$  nicht-leer und (Borel-)meßbar ist. Als scharfer Stellwert wird der Mittelwert über die Menge  $\text{Max}(\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}})$  gewählt. Falls die Menge  $\text{Max}(\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}})$  endlich ist, ergibt sich der Stellwert zu

$$\eta = \frac{1}{|\text{Max}(\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}})|} \sum_{y \in \text{Max}(\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}})} y,$$

andernfalls zu

$$\eta = \frac{1}{\int_{y \in \text{Max}(\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}})} dy} \cdot \int_{y \in \text{Max}(\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}})} y dy$$

Es muß nicht unbedingt  $\eta \in \text{Max}(\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}})$  gelten. Dies kann unerwünschte Folgen haben, die in Beispiel 4.2 beschrieben werden.

Die Mean-of-Maxima-Methode führt — zumindest bei der Verwendung von symmetrischen Dreiecksfunktionen bei der Partitionierung der Menge  $Y$  — zu einem unstetigen Verlauf der Stellgröße. Denn da die Menge  $\text{Max}(\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}})$  in den meisten Fällen allein von der Fuzzy-Menge  $\mu_{i_r}$  bestimmt wird, für die der Erfüllungsgrad der Prämisse der entsprechenden Regel  $R_r$  am größten ist, ist  $\text{Max}(\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}})$  ein symmetrisches Intervall um den Punkt  $y_{i_r}$ , bei dem  $\mu_{i_r}$  den Wert 1 annimmt. Solange die Fuzzy-Menge  $\mu_{i_r}$  „dominiert“, bleibt die Stellgröße daher unverändert bei dem Wert  $y_{i_r}$ . Erst wenn die Prämisse einer anderen Regel  $R_s$  einen höheren Erfüllungsgrad als die Prämisse der Regel  $R_r$  liefert, wird sprunghaft auf den Stellwert umgestellt, bei dem die Dreiecksfunktion  $\mu_{i_s}$  den Wert 1 annimmt. Durch dieses unstetige Regelverhalten können ruckartige Änderungen in der Regelstrecke hervorgerufen werden, die außerdem eine starke Belastung der Stelleinrichtung zur Folge haben, was im allgemeinen unerwünscht ist.

### Die Schwerpunktmethode (Centre-of-Gravity-Methode, COG)

Für die Schwerpunktmethode bedarf es derselben Voraussetzungen wie für die Mean-of-Maxima-Methode. Als Stellwert  $\eta$  wird der Wert verwendet, der unter dem Schwerpunkt der durch die Funktion  $\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}}$  und der  $y$ -Achse begrenzten Fläche liegt. Formal bedeutet das

$$\eta = \frac{1}{\int_{y \in Y} \mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}}(y) dy} \cdot \int_{y \in Y} y \cdot \mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}}(y) dy. \quad (4.3)$$

Die Schwerpunktmethode hat den Vorteil, fast immer ein relativ glattes Regelverhalten zu erzeugen. Die der Schwerpunktmethode zugrundeliegende Idee besteht darin, die Regeln entsprechend dem Erfüllungsgrad ihrer Prämissen bei der Stellwertberechnung zu berücksichtigen. Setzen wir ein stetiges Verhalten des zu steuernden Prozesses voraus, so garantiert die Schwerpunktmethode die folgende Eigenschaft: War eine Kontrollregel im vorherigen Regelschritt dominierend, d.h., war der Erfüllungsgrad der Prämisse für diese Regel am größten, so ist sie bei der Bestimmung des nächsten Stellwertes zwar nicht notwendigerweise wiederum dominierend, jedoch wird sie einen Einfluß auf die Schwerpunktberechnung nehmen, da durch die Stetigkeit des Prozesses für keine Regel der Erfüllungsgrad der Prämisse von einem großen Wert in einem Schritt auf 0 fallen kann.

Die Nachteile der Schwerpunktmethode bestehen darin, daß die Schwerpunktbildung formal aus der Sicht der Theorie der Fuzzy-Mengen kaum zu rechtfertigen ist, daß sie sehr aufwendig zu berechnen ist und daß die im Beispiel 4.2 erwähnte Anomalie auftreten kann.

Die Schwerpunktmethode wird auch Centre-of-Area-Methode (COA) genannt. Denn der gleiche Wert wie bei der Schwerpunktmethode ergibt sich auch, wenn man als Ausgabe den Wert wählt, durch den die durch die Fuzzy-Menge  $\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}}$  beschriebene Fläche in zwei gleichgroße Teile geteilt wird.

**Beispiel 4.1 (Fortsetzung)** Die Defuzzifizierung der in Abbildung 4.7 dargestellten Fuzzy-Menge liefert den Wert  $F = 5$  mit der Mean-of-Maxima-Methode. Die Schwerpunktbildung ergibt  $F = \frac{245}{62} \approx 3.95$  (vgl. Abbildung 4.8).  $\square$

Obwohl die Schwerpunkts- und die Mean-of-Maxima-Methode auf den ersten Blick sehr plausibel erscheinen, können sie in bestimmten Fällen — wie etwa im folgenden Beispiel — unerwünschte Ergebnisse produzieren.

**Beispiel 4.2** Wir betrachten einen Fuzzy-Regler, der ein Modellauto so lenken soll, daß es Hindernissen automatisch ausweicht. Taucht ein Hindernis genau in Fahrtrichtung des Autos auf, könnte die in Abbildung 4.9 dargestellte Fuzzy-Menge das Ergebnis der Entscheidungslogik sein. Diese Fuzzy-Menge kann als „weiche nach links oder nach rechts aus“ interpretiert werden — eine plausible Kontrollanweisung.

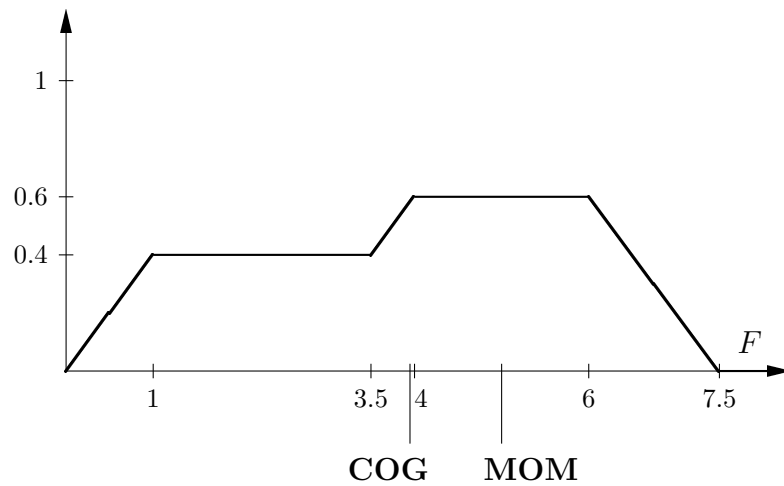


Abbildung 4.8: Defuzzifizierung mit Hilfe der Schwerpunkts- und der Mean-of-Maxima-Methode

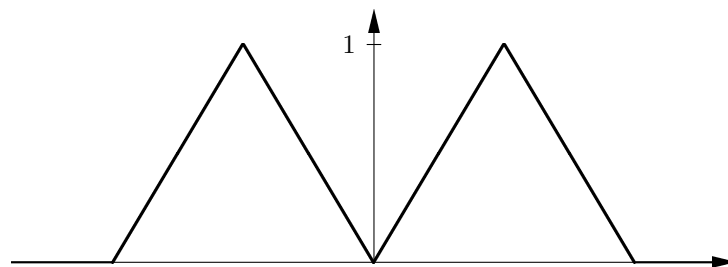


Abbildung 4.9: Eine Fuzzy-Menge, bei der die Defuzzifizierungsstrategien MOM und COG zu unerwünschten Resultaten führen können.



Sowohl die Schwerpunkts- als auch die Mean-of-Maxima-Methode liefern jedoch als Kontrollaktion den Wert 0, d.h., das Auto fährt weiter direkt auf das Hindernis zu, bis es zu einer Kollision kommt.  $\square$

Die in Beispiel 4.2 dargestellte Anomalie tritt bei konvexen Fuzzy-Mengen nicht auf. Konvexe Fuzzy-Mengen können als Repräsentation eines einzelnen (unscharfen) Wertes oder Intervalls aufgefaßt werden. In Beispiel 4.2 erweisen sich aber zwei gegensätzliche Kontrollaktionen als vernünftig. Die Kontrollregeln beschreiben in diesem Fall ein nicht-deterministisches Verhalten des Kontrollexperten, der sich zwischen den Alternativen nach links oder nach rechts auszuweichen entscheiden kann.

Die Defuzzifizierung läßt sich in zwei verschiedene Aufgaben unterteilen:

- (i) Umwandlung einer Fuzzy-Menge in scharfe Werte
- (ii) Auswahl einer Aktion unter mehreren Kontrollaktionen

Gehen wir davon aus, daß die zu defuzzifizierende Fuzzy-Menge einen einzelnen (unscharfen) Stellwert repräsentiert, entfällt die zweite Aufgabe. Es genügt, aus der gegebenen Fuzzy-Menge den Stellwert zu bestimmen. Die Defuzzifizierungsstrategien MOM und COG gehen von dieser Voraussetzung aus. Stellt die zu defuzzifizierende Fuzzy-Menge aber eine Menge mit mehreren Elementen dar, müssen die Aufgaben (i) und (ii) durchgeführt werden. Dabei spielt ihre Reihenfolge eine Rolle für die anzuwendenden Techniken.

Wird zuerst die Aufgabe (ii) bearbeitet, müssen wir aus einer gegebenen Fuzzy-Menge, die eine mehrelementige Menge repräsentiert, eine (Teil-)Fuzzy-Menge bestimmen, die nur ein einzelnes Element wiedergibt. Diese Fuzzy-Menge könnte dann mit Hilfe der Strategien MOM oder COG zu einem scharfen Wert defuzzifiziert werden. In Beispiel 4.2 würde dies bedeuten, zunächst die in Abbildung 4.9 dargestellte Fuzzy-Menge auf eines der beiden Dreiecke — etwa das linke — zu reduzieren und dann dieses Dreieck zu defuzzifizieren, so daß wir als Resultat „nach links ausweichen“ erhalten.

Die andere Möglichkeit besteht darin, zuerst Aufgabe (i) zu lösen, wodurch wir eine mehrelementige Menge möglicher Werten erhalten und danach einen beliebigen Wert aus dieser Menge auszuwählen. In Beispiel 4.2 würde dieses Verfahren die beiden Werte liefern, bei denen die Dreiecksfunktionen ihre Maxima annehmen, so daß man sich schließlich für einen der beiden Werte entscheiden müßte.

Um die Problematik mehrere Werte darstellender Fuzzy-Mengen zu umgehen, sollten die Kontrollregeln so formuliert werden, daß sie einen deterministischen Kontrollexperten modellieren, so daß die Ausgabe der Entscheidungslogik in Form der Fuzzy-Menge  $\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}}$  als einzelner (unscharfer) Wert zu interpretieren ist. Dadurch erübrigt sich die Aufgabe (ii) der Defuzzifikation. Die Einschränkung auf deterministisches Verhalten ist nicht besonders gravierend, da ein Fuzzy-Regler schon aus Gründen der

Zuverlässigkeit und Vorhersagbarkeit deterministisch arbeiten sollte und der Kontroll-experte sich ja nur in den Situationen, wo mehrere Kontrollaktionen möglich sind, bei der Spezifikation der Regeln für eine Aktion entscheiden muß. Formal bedeutet diese Einschränkung, daß der Experte bei der Spezifikation der Regeln keine allgemeine Relation  $R \subseteq (X_1 \times \dots \times X_n) \times Y$  von korrekten Ein-Ausgabe-Tupeln beschreibt, sondern sich auf eine Funktion  $\varphi : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$  beschränkt — also eine Relation  $R \subseteq (X_1 \times \dots \times X_n) \times Y$ , bei der es zu jedem  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$  genau einen Wert  $y \in Y$  gibt, so daß  $((x_1, \dots, x_n), y) \in R$  gilt.

### 4.2.2 Der Ansatz von Takagi und Sugeno

Die auf Takagi und Sugeno zurückgehende Methode der Fuzzy-Regelung entspricht einer Modifizierung des Ansatzes von Mamdani.

Für einen Sugeno-Fuzzy-Regler werden nur die Mengen  $X_1 \times \dots \times X_n$  für die Meßgrößen wie bei dem Ansatz von Mamdani durch Fuzzy-Mengen partitioniert. Für die Menge  $Y$  der möglichen Stellwerte wird keine Partitionierung benötigt. Die  $k$  Kontrollregeln sind jetzt von der Form

$$\begin{aligned} R_r : \quad & \mathbf{if} \ \xi_1 \ \mathbf{is} \ A_{i_1,r} \ \mathbf{and} \ \dots \ \mathbf{and} \ \xi_n \ \mathbf{is} \ A_{i_n,r} \\ & \mathbf{then} \ \eta = f_r(\xi_1, \dots, \xi_n), \\ & r = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

Dabei ist  $f_r$  eine Abbildung von  $X_1 \times \dots \times X_n$  nach  $Y$  ( $r = 1, \dots, k$ ). Im allgemeinen wird angenommen, daß  $f_r$  linear ist, d.h.  $f_r(x_1, \dots, x_n) = a_1^{(r)} \cdot x_1 + \dots + a_n^{(r)} \cdot x_n + a^{(r)}$ .

Die Aufgabe der Entscheidungslogik ist es nun, bei gegebenen Meßwerten  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$  für jede Regel  $R_r$  den Wert  $f_r(x_1, \dots, x_n)$  und den Erfüllungsgrad  $\alpha_r$  der Prämisse, der genau wie im Falle des Mamdani-Fuzzy-Reglers nach der Gleichung (4.1) berechnet wird, zu bestimmen. Der Stellwert  $\eta$  ergibt sich direkt aus der Formel

$$\eta = \frac{\sum_{r=1}^k \alpha_r \cdot f_r(x_1, \dots, x_n)}{\sum_{r=1}^k \alpha_r}.$$

Es wird also die mit den Erfüllungsgraden der Prämissen gewichtete Summe der Ausgabewerte der einzelnen Regeln als Stellwert verwendet. Eine Defuzzifizierung ist daher beim Sugeno-Regler nicht notwendig.

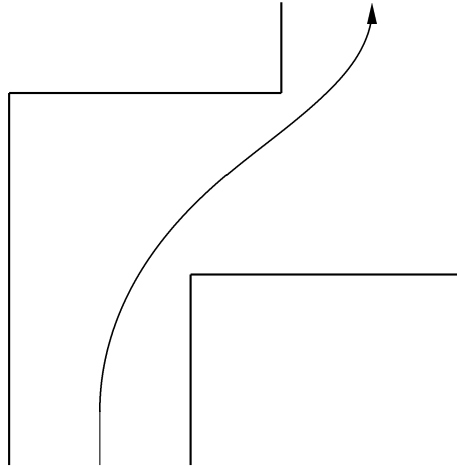


Abbildung 4.10: Das Durchfahren einer Kurve

**Beispiel 4.3** Ein Modellauto soll mit konstanter Geschwindigkeit durch eine Kurve, wie sie in Abbildung 4.10 dargestellt ist, gesteuert werden.

Dabei können die folgenden Meßgrößen verwendet werden (vgl. Abbildung 4.11):

- $\xi_1$ : Abstand des Autos zur Einfahrt in die Kurve,
- $\xi_2$ : Abstand des Autos zur inneren Wand,
- $\xi_3$ : Richtung (Winkel) des Autos,
- $\xi_4$ : Abstand des Autos zur äußeren Wand.

Die Stellgröße  $\eta$  ist die Drehgeschwindigkeit des Lenkrads. Die Mengen der möglichen Werte für die Meßgrößen sind  $X_1 = [0, 150]$  (cm),  $X_2 = [0, 150]$  (cm),  $X_3 = [-90, 90]$  (°) und  $X_4 = [0, 150]$  (cm). Die zugehörigen Partitionierungen sind in Abbildung 4.12 dargestellt.

Die für die Steuerung des Autos verwendeten Regeln sind von der Form

$$\begin{aligned}
 R_r: \quad & \text{if } \xi_1 \text{ is } A \text{ and } \xi_2 \text{ is } B \text{ and } \xi_3 \text{ is } C \text{ and } \xi_4 \text{ is } D \\
 & \text{then } \eta = p_0^{(A,B,C,D)} + p_1^{(A,B,C,D)} \cdot \xi_1 + p_2^{(A,B,C,D)} \cdot \xi_2 \\
 & \quad + p_3^{(A,B,C,D)} \cdot \xi_3 + p_4^{(A,B,C,D)} \cdot \xi_4.
 \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
 A & \in \{\text{klein, mittel, groß}\}, \\
 B & \in \{\text{klein, groß}\}, \\
 C & \in \{\text{außen, vorwärts, innen}\}, \\
 D & \in \{\text{klein}\}, \\
 p_0^{(A,B,C,D)}, \dots, p_4^{(A,B,C,D)} & \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

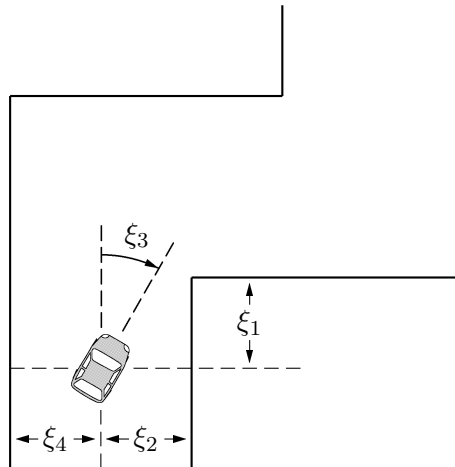


Abbildung 4.11: Die Meßgrößen für die Steuerung des Autos

Es sind auch Regeln zulässig, in denen nicht alle vier Meßgrößen  $\xi_1, \dots, \xi_4$  auftauchen. Die in den Regeln für die Stellgröße auftretenden Funktionen  $\eta = f_r(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$  werden hier wie in den meisten Anwendungen als linear in den Stellgrößen  $\xi_1, \dots, \xi_4$  vorausgesetzt. Die für die Steuerung des Autos verwendeten Regeln sind in der Tabelle 4.3 aufgelistet.

Ist das Auto 10 cm von der Einfahrt zur Kurve entfernt ( $\xi_1 = 10$ ), beträgt der Abstand des Autos zur Innenwand der Kurve 30 cm ( $\xi_2 = 30$ ), zur Außenwand 50 cm ( $\xi_4 = 50$ ) und steht das Auto gerade ( $\xi_3 = 0$ ), ergibt die Auswertung der Regeln  $R_1, \dots, R_{20}$  nach der Gleichung (4.1) nur für die Regeln  $R_4$  und  $R_7$  einen von Null verschiedenen Wert. Die Zugehörigkeitsgrade für diese Werte zu den einzelnen Fuzzy-Mengen sind in der Tabelle 4.2 aufgeführt.

Für die Prämissen der Regeln  $R_4$  und  $R_7$  ergibt sich ein Erfüllungsgrad von  $\alpha_4 = \frac{1}{4}$  bzw.  $\alpha_7 = \frac{1}{6}$ . Als Wichtungsfaktoren für die Regeln erhalten wir daher  $W_4 = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{3}{5}$  für die Regel  $R_4$  und  $W_7 = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{2}{5}$  für die Regel  $R_7$ .

Die Regeln  $R_4$  und  $R_7$  liefern den Wert

$$\begin{aligned}\eta_4 &= 0.303 - 0.026 \cdot 10 + 0.061 \cdot 30 - 0.050 \cdot 0 + 0.000 \cdot 50 \\ &= 1.873\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\eta_7 &= 2.990 - 0.017 \cdot 10 + 0.000 \cdot 30 - 0.021 \cdot 0 + 0.000 \cdot 50 \\ &= 2.820,\end{aligned}$$

Die Stellgröße  $\eta$  wird als das gewichtete Mittel dieser Werte berechnet, so daß sich

$$\eta = \frac{3}{5} \cdot 1.873 + \frac{2}{5} \cdot 2.820 = 2.2518.$$

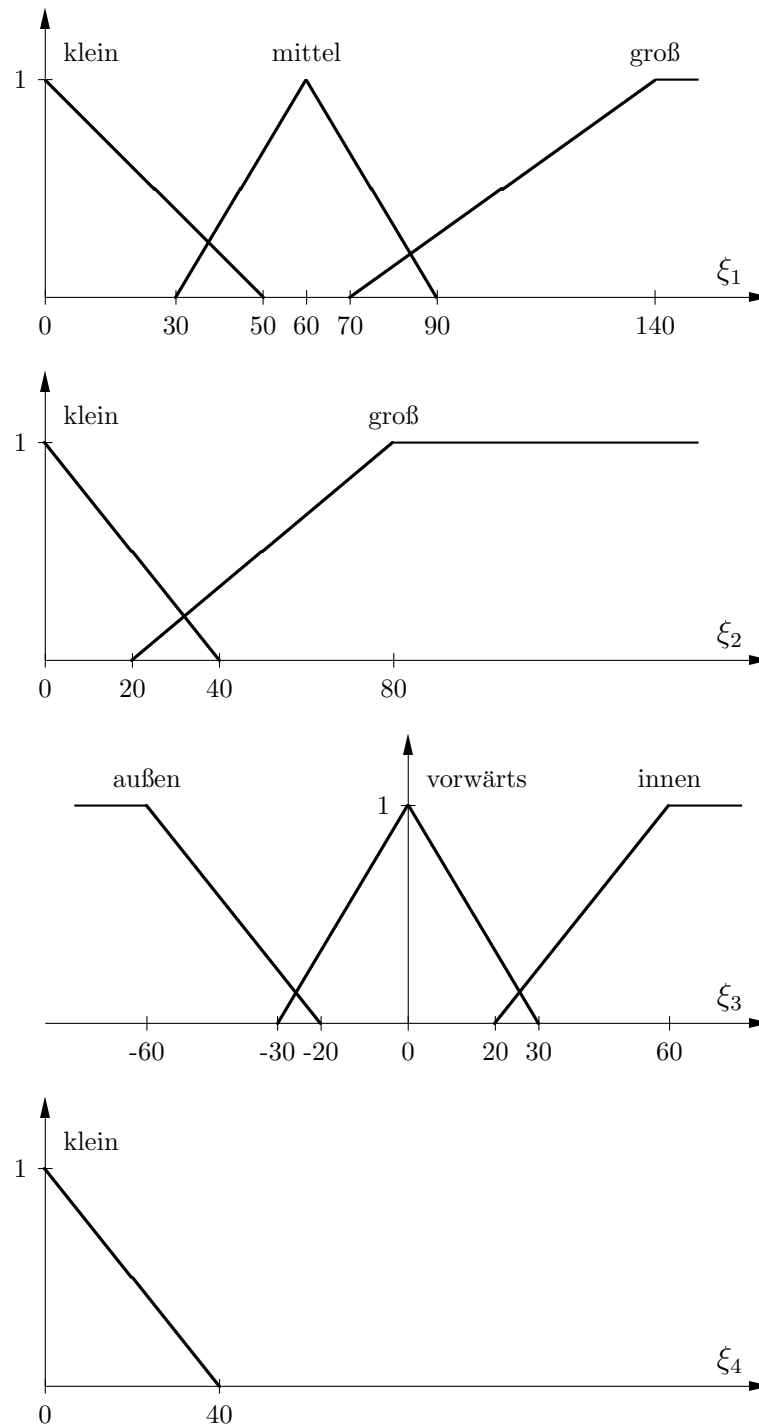


Abbildung 4.12: Die Partitionierungen der Mengen  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  und  $X_4$ .

	klein	mittel	groß
$\xi_1 = 10$	0.8	0	0

Zugehörigkeitsgrade des Wertes  $\xi_1 = 10$   
zu den Fuzzy-Mengen der Partitionierung von  $X_1$ .

	klein	groß
$\xi_2 = 30$	0.25	0.167

Zugehörigkeitsgrade des Wertes  $\xi_2 = 30$   
zu den Fuzzy-Mengen der Partitionierung von  $X_2$ .

	außen	vorwärts	innen
$\xi_3 = 0$	0	1	0

Zugehörigkeitsgrade des Wertes  $\xi_3 = 0$   
zu den Fuzzy-Mengen der Partitionierung von  $X_3$ .

	klein
$\xi_4 = 50$	0

Zugehörigkeitsgrad des Wertes  $\xi_4 = 50$   
zu der Fuzzy-Menge der Partitionierung von  $X_4$ .

Tabelle 4.2: Die Zugehörigkeitsgrade für die Steuerung des Autos

Regel	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$	$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$
$R_1$	–	–	außen	klein	3.000	0.000	0.000	-0.045	-0.004
$R_2$	–	–	vorwärts	klein	3.000	0.000	0.000	-0.030	-0.090
$R_3$	klein	klein	außen	–	3.000	-0.041	0.004	0.000	0.000
$R_4$	klein	klein	vorwärts	–	0.303	-0.026	0.061	-0.050	0.000
$R_5$	klein	klein	innen	–	0.000	-0.025	0.070	-0.075	0.000
$R_6$	klein	groß	außen	–	3.000	-0.066	0.000	-0.034	0.000
$R_7$	klein	groß	vorwärts	–	2.990	-0.017	0.000	-0.021	0.000
$R_8$	klein	groß	innen	–	1.500	0.025	0.000	-0.050	0.000
$R_9$	mittel	klein	außen	–	3.000	-0.017	0.005	-0.036	0.000
$R_{10}$	mittel	klein	vorwärts	–	0.053	-0.038	0.080	-0.034	0.000
$R_{11}$	mittel	klein	innen	–	-1.220	-0.016	0.047	-0.018	0.000
$R_{12}$	mittel	groß	außen	–	3.000	-0.027	0.000	-0.044	0.000
$R_{13}$	mittel	groß	vorwärts	–	7.000	-0.049	0.000	-0.041	0.000
$R_{14}$	mittel	groß	innen	–	4.000	-0.025	0.000	-0.100	0.000
$R_{15}$	groß	klein	außen	–	0.370	0.000	0.000	-0.007	0.000
$R_{16}$	groß	klein	vorwärts	–	-0.900	0.000	0.034	-0.030	0.000
$R_{17}$	groß	klein	innen	–	-1.500	0.000	0.005	-0.100	0.000
$R_{18}$	groß	groß	außen	–	1.000	0.000	0.000	-0.013	0.000
$R_{19}$	groß	groß	vorwärts	–	0.000	0.000	0.000	-0.006	0.000
$R_{20}$	groß	groß	innen	–	0.000	0.000	0.000	-0.010	0.000

Tabelle 4.3: Die Regeln zur Steuerung des Autos

ergibt.

□

## 4.3 Entwurf und Optimierung von Fuzzy-Reglern

In diesem Abschnitt erläutern wir kurz die bei der Entwicklung eines Fuzzy-Reglers auszuführenden Schritte und die dabei möglicherweise zu berücksichtigenden Probleme.

### 4.3.1 Festlegung der Meß- und Stellgrößen

Der Entwurf eines Fuzzy-Reglers erfordert zuerst die Festlegung einer geeigneten Datenbasis innerhalb der Wissensbasis. Die Festsetzung der Meß- und Stellgrößen ergibt sich bei einfachen Prozessen — wie etwa dem Stabbalance-Problem — von selbst. Bei komplizierteren Prozessen ist nicht immer offensichtlich, welche Meßdaten für eine zufriedenstellende Regelung benötigt werden. Ein Fuzzy-Regler zur Steuerung einer Klimaanlage erfordert sicherlich einen Meßfühler für die Temperatur und die relative Luftfeuchtigkeit im zu klimatisierenden Raum. Es kann aber sehr nützlich, aber auch nicht unbedingt notwendig sein, zusätzlich die Außentemperatur zu kennen, die im allgemeinen relativ leicht zugänglich ist, sofern ein Außentemperaturfühler mit dem

Regler verbunden werden kann. Eine andere, möglicherweise wichtige Einflußgröße ist die Anzahl der Menschen im zu klimatisierenden Raum. Die automatische Messung dieser Anzahl dürfte allerdings schwer zu realisieren sein. Bei der Festlegung der Stellgröße sollte berücksichtigt werden, daß im allgemeinen ein besseres Regelungsverhalten erzielt wird, wenn der Fuzzy-Regler die Änderung des Stellwertes anstelle des eigentlichen Stellwertes bestimmt. Werden mehrere Stellgrößen benötigt, muß für jede Stellgröße ein eigener Fuzzy-Regler entworfen werden. Bei der Spezifikation der Regeln ist später darauf zu achten, daß sich die Effekte zweier Stellgrößen aufheben oder addieren können.

Häufig gibt es für den zu regelnden Prozeß genau einen angestrebten Idealzustand. Beim Stabbalance-Problem wird dieser Zustand durch die Werte  $\theta = 0$  und  $\dot{\theta} = 0$  beschrieben, d.h., der Stab steht aufrecht und bewegt sich nicht. Für solche Prozesse kann es sinnvoll sein, aus den gemessenen Größen die Änderung der Abweichung (Fehleränderung) zu bestimmen und diese Werte als Eingabe für den Fuzzy-Regler zu verwenden. Beim Stabbalance-Problem entspricht der gemessene Winkel dem Fehler und die gemessene Winkelgeschwindigkeit der Fehleränderung. Im allgemeinen müssen der Fehler und die Fehleränderung erst aus den von den Meßfühlern ermittelten Werten berechnet werden. Für eine Klimaanlage ergibt sich der Fehler der Temperatur aus der Differenz der gemessenen Temperatur und der gewünschten Temperatur.

### 4.3.2 Die Wertebereiche für die Meß- und Stellgrößen

Nach der Festlegung der Meß- und Stellgrößen müssen die Wertebereiche für diese Größen, d.h. die Mengen  $X_1, \dots, X_n$  und  $Y$  definiert werden. Für bestimmte Größen legt die Natur des Prozesses diese Mengen fest — z.B. kann im Falle des Stabbalance-Problems der Winkel offenbar genau die Werte zwischen  $-90^\circ$  und  $+90^\circ$  annehmen. Für andere Größen müssen die Wertebereiche aus Erfahrung oder heuristisch bestimmt werden. So steht beim Stabbalance-Problem nicht unmittelbar fest, welche Werte der Winkelgeschwindigkeit man sinnvollerweise betrachtet. Außerdem müssen technische Einschränkungen berücksichtigt werden. Es sollten Meßfühler vorhanden sein, die den gesamten Wertebereich erfassen können und eine genügend große Meßgenauigkeit aufweisen. Weiter ergeben sich Beschränkungen für die Stellgröße aus der Realisierung der gewünschten Kontrollaktionen. Die Kraft  $F$  für das Stabbalance-Problem kann sicherlich nicht beliebig groß gewählt werden.

Häufig werden Analog-Digital-Wandler eingesetzt, die die analogen Messungen der Meßfühler in diskrete, digitale Werte umsetzen. In diesem Fall bietet sich eine Diskretisierung der Wertebereiche an, so daß  $X_1, \dots, X_n$  und  $Y$  endliche Mengen werden. Eine Diskretisierung entspricht einer Aufteilung eines Intervalls in endlich viele Teilintervalle. Aus jedem dieser Teilintervalle wird ein Wert gewählt, der repräsentativ für alle anderen Werte des Intervalls steht. Neben der Diskretisierung kann auch eine Transformation oder Normierung der Wertebereiche — z.B. in das Intervall  $[-1, 1]$  — vorgenommen werden. Diese Transformation muß nicht linear sein.



### 4.3.3 Partitionierungen der Wertebereiche

Nach der Bestimmung geeigneter Wertebereiche für die Meß- und Stellgrößen müssen diese Wertebereiche durch Fuzzy-Mengen partitioniert und entsprechende linguistische Terme mit den Fuzzy-Mengen assoziiert werden. Im Falle eines Sugeno-Fuzzy-Reglers muß dies nur für die Meßgrößen geschehen.

Auch hierbei kann eine Diskretisierung in dem Sinne, daß nur endlich viele Werte aus dem Einheitsintervall als Zugehörigkeitsgrade für die Fuzzy-Mengen zugelassen werden, sinnvoll sein.

Bei der Partitionierung jedes einzelnen Wertebereichs muß die Anzahl der Fuzzy-Mengen und ihre Form festgelegt werden. Zur Festlegung der Form eignen sich am besten parametrisierte Funktionen, wie z.B. Dreiecksfunktionen, deren Parameter die Breite der Basis und die Lage der Spitze sind.

### 4.3.4 Die linguistischen Regeln

Ist der Aufbau der Datenbasis mit der Angabe der Meß- und Stellgrößen und der Festlegung geeigneter Wertebereiche einschließlich der Partitionierungen durch Fuzzy-Mengen abgeschlossen, müssen die Kontrollregeln mit Hilfe der zu den Fuzzy-Mengen gehörenden linguistischen Terme aufgestellt werden. Für die Formulierung der Kontrollregeln bieten sich vier verschiedene Methoden an:

- (i) Ein Experte, der in der Lage ist, den Prozeß „manuell“ zu regeln, gibt linguistische Regeln an, die seine Handlungsweise widerspiegeln.
- (ii) Ein Experte, der den Prozeß regeln kann, wird über einen längeren Zeitraum beobachtet und die Prozeßdaten — d.h. die Meßgrößen und die zugehörigen Stellgrößen — werden erfaßt. Aus diesen Prozeßdaten versucht man Regeln abzuleiten, die das Verhalten des Experten nachbilden. Die Gewinnung der Regeln aus den Prozeßdaten kann direkt durch Analyse der Daten, durch Clustering- oder Fuzzy-Clustering-Verfahren [Bezdek81] geschehen.
- (iii) Der Prozeß wird mit Hilfe eines Fuzzy-Modells beschrieben, aus dem die Kontrollregeln abgeleitet werden können. Diese Methodik befindet sich zur Zeit noch in der Entwicklung.
- (iv) Der Fuzzy-Regler lernt die Regeln selbst unter Verwendung von Meta-Wissen, aus dem erkennbar ist, ob eine durchgeführte Kontrollaktion gut oder schlecht war. Vorschläge für diese Technik finden sich in [Procyk79, Scharf85, Shao88, Tanaka88, Sugeno85b].

Für den Fall, daß — wie oben beschrieben — der Fehler und die Fehleränderung als Einflußgrößen für den Fuzzy-Regler verwendet werden, kann auf Standardregeln wie „Wenn Fehler und Fehleränderung Null sind, dann keine eingreifende Kontrollaktion“

oder „Wenn der Fehler nicht Null ist, aber die Fehleränderung eine Verringerung des Fehlers bewirkt, dann keine Änderung der Kontrollaktion“ zurückgegriffen werden.

Es sollte garantiert sein, daß für jedes mögliche Meßtuplel mindestens eine Regel feuert — d.h., der Erfüllungsgrad der Prämisse größer als Null ist — damit eine Kontrollaktion berechnet werden kann. Es ist nicht unbedingt notwendig, dabei den gesamten Produktraum  $X_1 \times \dots \times X_n$  als Menge der möglichen Meßtupel zu betrachten. Beim Stabbalance-Problem haben wir im Beispiel 4.1 keine Regeln angegeben, die in den Fällen  $\theta = 88^\circ$  und  $\dot{\theta} = \pm 44^\circ \cdot \text{s}^{-1}$  greifen. Für  $\dot{\theta} = -44^\circ \cdot \text{s}^{-1}$  ist bei einem Winkel von  $\theta = 88^\circ$  das Umfallen des Stabes wohl nicht mehr zu verhindern. Die Kombination  $\theta = 88^\circ$  und  $\dot{\theta} = +44^\circ \cdot \text{s}^{-1}$  — der Stab ist fast umgefallen, richtet sich aber mit enormer Geschwindigkeit wieder auf — stellt eine unrealistische Situation dar, die in der Praxis nicht vorkommt, da sie nur künstlich herbeigeführt werden kann.

Die Vollständigkeit der Regelbasis, die garantiert, daß für jede (realistische) Situation eine Kontrollaktion bestimmt werden kann, setzt voraus, daß genügend viele Regeln definiert werden. Allerdings sollte die Anzahl der Regeln nicht nur der schnelleren Berechenbarkeit wegen nicht zu groß gewählt werden. Die disjunktive Verknüpfung der Resultate (Fuzzy-Mengen) der einzelnen Regeln hat zur Folge, daß die Ausgabe-Fuzzy-Menge aller Regeln umso unschärfer (größer) wird, je mehr Regeln vorhanden sind. Auf diese Anomalie, daß eine scheinbar genauere Beschreibung mit vielen Regeln zu unschärferen Ergebnissen führt, werden wir in den folgenden beiden Abschnitten noch eingehen.

Um später das Defuzzifizieren zu vereinfachen und einen zuverlässigen Regler mit vorhersagbarem Verhalten zu bekommen, sollte, wie bereits oben erwähnt, bei der Festlegung der Regeln darauf geachtet werden, daß ein deterministisches Verhalten des Kontrollexperten modelliert wird, so daß für jede Situation nur eine Kontrollaktion vorgesehen ist und nicht wie im Beispiel 4.2 mehrere Aktionen in Frage kommen.

### 4.3.5 Auswertung der linguistischen Regeln

Ebenfalls ist innerhalb der Regelbasis festzulegen, auf welche Weise der Erfüllungsgrad der Prämisse einer Regel berechnet werden soll. Am häufigsten wird hierfür das Minimum wie in Gleichung (4.1) verwendet, aber im Prinzip kann an die Stelle des Minimums jede beliebige  $t$ -Norm treten. Allerdings sollten in Anwendungen, in denen ein glattes Regelverhalten erwünscht ist, nur stetige  $t$ -Normen benutzt werden.

Teilweise wird zwar der Erfüllungsgrad  $\alpha_r$  der Prämisse einer einzelnen Regel  $R_r$  wie in Gleichung (4.1) bestimmt, aber die Berechnung der „Ausgabe“ der Regel  $R_r$  erfolgt nicht wie bei der Fuzzy-Menge  $\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}}$  durch Bildung des Minimums von  $\alpha_r$  und der zur Regel  $R_r$  gehörenden Fuzzy-Menge  $\mu_{i_r}$ , sondern durch das Produkt  $\alpha_r \cdot \mu_{i_r}$ . Diese Technik wird als *Dot-Methode* bzw. als *Max-Dot-Methode* bezeichnet, wenn die Fuzzy-Mengen  $\alpha_r \cdot \mu_{i_r}$ , die sich bei der Auswertung der einzelnen Regeln ergeben, mit Hilfe des Maximum-Operators vereinigt werden.

Für den Mamdani-Fuzzy-Regler ist zusätzlich festzulegen, wie die aus den einzelnen Regeln erhaltenen Fuzzy-Mengen zusammengefügt werden sollen. Es empfiehlt sich in fast allen Fällen, die Gleichung (4.2) anzuwenden. Allerdings ist es möglich, das Maximum durch eine andere (stetige)  $t$ -Conorm zu ersetzen.

Für den Sugeno-Fuzzy-Regler muß für jede Regel  $R_r$  eine entsprechende Ausgabefunktion  $f_r$  definiert werden, womit der Rohentwurf eines Sugeno-Fuzzy-Reglers abgeschlossen ist. Die Funktionen  $f_r$  — meist lineare Funktionen der Meßgrö-

ßen — müssen heuristisch geschätzt, aus Beobachtungen abgeleitet oder durch analytische Methoden gefunden werden. Letztere Möglichkeit ist anwendbar, wenn geeignete Übertragungsfunktionen für bestimmte Gebiete des Eingabewertebereichs bekannt sind, z.B. eine Linearisierung des Prozesses in jedem Gebiet. In diesem Fall kann ein Sugeno-Regler benutzt werden, um weich zwischen den Übertragungsfunktionen der verschiedenen Gebiete umzuschalten, wenn der Prozeß die Grenze zwischen zwei Gebieten überschreitet.

Sowohl für den Mamdani- als auch für den Sugeno-Fuzzy-Regler haben wir die scharfen Meßwerte direkt bei der Auswertung der Regeln verwendet, so daß keine echte Fuzzifizierung vorgenommen worden ist. Bei ungenauen Meßwerten ist eine Fuzzifizierung der scharfen Meßwerte denkbar, indem anstelle des Meßwertes eine geeignete Fuzzy-Menge betrachtet wird — etwa eine Dreiecksfunktion, die für den Meßwert den Zugehörigkeitsgrad 1 annimmt, oder eine entsprechende Trapezfunktion. Da sich für die Fuzzifizierung bisher noch keine allgemein akzeptierte Technik durchgesetzt hat, wollen wir auf dieses Thema nicht näher eingehen.

### 4.3.6 Die Wahl der Defuzzifikations-Strategie

Der Mamdani-Fuzzy-Regler erfordert die Wahl einer geeigneten Defuzzifizierungs-Strategie. Hier bietet sich trotz der fehlenden Semantik die Schwerpunktmethode an. Für den Fall, daß eine Diskretisierung des Wertebereiches  $Y$  für die Stellgröße vorgenommen wurde, muß die Gleichung (4.3) für die Berechnung der Schwerpunktskoordinate zu

$$\eta = \frac{1}{\sum_{y \in Y} \mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}}(y)} \cdot \sum_{y \in Y} y \cdot \mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}}(y).$$

modifiziert werden. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß diese Art der Defuzzifikation voraussetzt, daß durch die Kontrollregeln ein deterministisches Regelverhalten beschrieben wird, so daß Probleme wie in Beispiel 4.2 nicht auftreten können.

Eine Besprechung anderer Defuzzifizierungs-Strategien findet sich in Abschnitt 4.2.

### 4.3.7 Optimierung eines Fuzzy-Reglers

Der erste Entwurf eines Fuzzy-Reglers wird im allgemeinen nicht zu einem optimalen Regelverhalten führen. Um das Regelverhalten zu verbessern, muß ein gezieltes Abstimmen (Tuning) vorgenommen werden. Je nachdem, wie gut oder schlecht der zu

regelnde Prozeß durch den ersten Entwurf des Fuzzy-Reglers gesteuert werden kann, können kleine Änderungen von einzelnen Parametern, die zum Beispiel die genaue Form und Lage einzelner Fuzzy-Mengen der Partitionierungen festlegen, oder feinere Partitionierungen einschließlich einer Neuformulierung der Kontrollregeln nötig sein. Im ungünstigsten Fall kann sich herausstellen, daß tiefgreifende Veränderungen vorgenommen werden müssen, die einen vollständig neuen Entwurf des Fuzzy-Reglers erforderlich machen. Dies kann durch die Erkenntnis hervorgerufen werden, daß die Meßinformationen keine vernünftige Regelung ermöglichen, da die Meßfühler zu ungenau oder zu träge sind oder gar bisher unberücksichtigte Größen gemessen werden müssen.

Von dem Fall, in dem der erste Entwurf des Fuzzy-Reglers verworfen werden muß, einmal abgesehen, hängen die Optimierungsmaßnahmen sehr stark von dem zu regelnden Prozeß und der gewünschten Güte des Regelverhaltens ab. Allgemein läßt sich aber feststellen, daß durch das Prinzip des Fuzzy-Reglers Verbesserungen sehr gezielt vorgenommen werden können, da in Situationen, in denen der Fuzzy-Regler nicht das gewünschte Regelverhalten zeigt, die Regeln, die auf die Berechnung der Kontrollaktion Einfluß haben, leicht identifiziert werden können. Nur diese Regeln bzw. die in ihnen verwendeten Fuzzy-Mengen müssen verändert werden, und diese Änderungen beeinflussen das Regelverhalten nur „lokal“ für die Situationen, in denen eine Verbesserung des Fuzzy-Reglers erforderlich ist.

## 4.4 Fuzzy-Regelung auf der Basis von Gleichheitsrelationen

Die in Abschnitt 4.2 vorgestellten Methoden der Fuzzy-Regelung basieren auf der Umsetzung heuristischer Ideen. Eine genaue Interpretation der einzelnen Techniken wurde nicht angegeben. Die bei dem Mamdani-Fuzzy-Regler verwendete Vorgehensweise läßt sich auf der Basis von Gleichheitsrelationen als (Fuzzy-)Interpolation interpretieren. Ehe wir erklären können, in welchem Sinne ein Mamdani-Regler eine solche (Fuzzy-)Interpolation durchführt, werden wir zunächst einen anscheinend vom Mamdani-Fuzzy-Regler völlig verschiedenen Ansatz betrachten, dann aber zeigen, daß sich dieselben Berechnungsschritte ergeben.

Abschnitt 4.4.2 zeigt umgekehrt, wann ein Mamdani-Fuzzy-Regler im Sinne von Abschnitt 4.4.1 interpretierbar ist.

### 4.4.1 Gleichheitsrelationen als Grundlage der Fuzzy-Regelung

Wir werden in diesem Abschnitt einen Zugang zur Fuzzy-Regelung entwickeln, der sich von den bisher vorgestellten unterscheidet. Er basiert auf der Idee, daß folgende Informationen über den zu regelnden Prozeß verfügbar sind:

- Für einige Eingabewerte kann eine sinnvolle Steueraktion wenigstens angenähert abgegeben werden.
- Den Wertebereichen der Eingabe- und Stellvariablen wohnt eine Ununterscheidbarkeit inne. Diese beschreibt, inwieweit Eingabe- oder Stellwerte im Kontext des Prozesses übereinstimmen, z.B. daß eine Differenz von weniger als 0.00001 in der Steueraktion keinen wesentlichen Einfluß auf das Verhalten des Prozesses hat. Das problembezogene Wissen über diese Ununterscheidbarkeit ist verfügbar. Wir werden sehen, daß man solche Ununterscheidbarkeit durch Gleichheitsrelationen modellieren kann.

Wir nehmen an, daß für einige Eingabewerte Näherungen geeigneter Stellwerte bekannt seien. Wir erwarten außerdem, daß auf kleine Änderungen der Eingaben nur mit kleinen Änderungen der Stellwerte reagiert werden muß

3 — ohne eine genaue Definition des Begriffes „kleine Änderung“ zu geben. Unser Ziel ist es, aus einigen Fällen, in denen der Stellwert bekannt ist, zusammen mit einer formalen Spezifikation, was „kleine Änderung“ im Zusammenhang mit dem betrachteten Prozeß bedeutet, eine Übertragungsfunktion abzuleiten.

### Spezifikation einer partiellen Übertragungsfunktion

Wir gehen davon aus, daß ein Kontrollexperte für bestimmte Meßtupel  $(x_1^{(r)}, \dots, x_n^{(r)}) \in X_1 \times \dots \times X_n$  ( $r = 1, \dots, k$ ) einen guten Wert  $y^{(r)}$  für die Stellgröße angeben kann. Die Werte müssen nicht notwendigerweise exakt sein, da die prozeßinhärente Ununterscheidbarkeit kleine Abweichungen zuläßt.

Um deterministisches Verhalten sicherzustellen, setzen wir voraus, daß keine zwei Regeln dieselben Prämissen besitzen, d.h., es gilt:  $x_1^{(r)} = x_1^{(s)} \wedge \dots \wedge x_n^{(r)} = x_n^{(s)} \implies r = s$ . Der Experte darf also nur einen Stellwert je Meßtupel angeben.

Formal erhalten wir eine Abbildung  $\varphi_0 : X_0 \rightarrow Y$ , wobei  $X_0 = \{(x_1^{(r)}, \dots, x_n^{(r)}) \mid r \in \{1, \dots, k\}\}$  die Menge derjenigen Meßtupel ist, für die der Experte einen Stellwert spezifiziert hat. Allein aus der Abbildung  $\varphi_0$ , die eine partielle Abbildung von  $X_1 \times \dots \times X_n$  nach  $Y$  darstellt, läßt sich keine vollständige Übertragungsfunktion  $\varphi : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$  ableiten, die für jedes Meßtupel  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$  einen geeigneten Stellwert  $y \in Y$  liefert.

### Spezifikation der Ununterscheidbarkeitsstruktur

Diese Aussage trifft jedoch nur zu, wenn wir jedes Meßtupel  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$  als isoliert und unabhängig von allen anderen Meßtupeln ansehen. Setzen wir voraus, daß die Mengen  $X_1 \times \dots \times X_n, Y$  reelle Intervalle sind, ist diese isolierte Sichtweise nicht realistisch. Der Kontrollexperte kann zum einen zwei nahe beieinanderliegende reelle Meßwerte aufgrund einer begrenzten Meßgenauigkeit nicht unterscheiden. Zum anderen interessiert ihn bei der Entscheidung für einen Stellwert eine vernachlässigbare, kleine

Abweichung der Meßwerte oder des Stellwertes überhaupt nicht. Ein Experte, der in der Lage ist, einen Prozeß manuell zu regeln, löst weder komplizierte Differentialgleichungen im Kopf, noch benötigt er Werte, die auf zwanzig Stellen hinter dem Komma genau sind.

Diese einerseits durch die begrenzte Meßgenauigkeit erzwungene und andererseits vom Experten beabsichtigte Ununterscheidbarkeit von bestimmten Werten modellieren wir mit Hilfe von Gleichheitsrelationen  $E_1, \dots, E_n, F$  auf den Mengen  $X_1, \dots, X_n$  bzw.  $Y$ . Diese Gleichheitsrelationen können im Sinne von Beispiel 2.51 aufgefaßt werden. Man erinnere sich auch an die Beispiele 2.54 und 2.60.

Wir fordern nicht, daß die Gleichheitsrelationen durch die Standardmetrik auf den Intervallen  $X_1, \dots, X_n, Y$  erzeugt werden. Oft gibt es Bereiche, in denen der Experte eine sehr genaue Unterscheidung der Werte vornimmt, während er sich in anderen Bereichen nur für ihre ungefähre Größe interessiert. Beim Stabbalance-Problem wird sich bei einer Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}$  von  $0^\circ \cdot \text{s}^{-1}$  die Kontrollaktion bei einem Winkel  $\theta$  von  $65^\circ$  nur wenig von der bei einem Winkel von  $55^\circ$  unterscheiden. In beiden Fällen steht das Pendel sehr schief und ein starkes Eingreifen ist notwendig, um es wieder aufzurichten. Für die Winkel  $\theta = -5^\circ$  und  $\theta = +5^\circ$ , die sich auch nur um  $10^\circ$  unterscheiden sieht die Situation anders aus: Es ist sehr wichtig zu wissen, ob das Pendel nach links oder nach rechts geneigt ist.

Es ist daher sinnvoll eine Gleichheitsrelation mit Hilfe von Skalierungsfunktionen anzugeben.

**Beispiel 4.4** Es sei  $c : [-90, +90] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  eine integrierbare Funktion und

$$\begin{aligned} f : [-90, +90] &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \theta &\mapsto \int_{-90}^{\theta} c(x) dx. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Die Verwendung der Gleichheitsrelation  $E_{f(\delta)}$  bedeutet, daß wir uns die Umgebung des Winkels  $\theta$  mit einer „Lupe“ mit dem Vergrößerungsfaktor  $c(\theta)$  ansehen. Ein Vergrößerungsfaktor kleiner als 1 entspricht einer Verkleinerung. Wenn wir bei Winkeln zwischen  $-10^\circ$  und  $+10^\circ$  sehr genau unterscheiden und bei Winkeln  $\theta$  mit  $|\theta| > 10$  nur sehr grob unterscheiden wollen, können wir

$$\begin{aligned} c : [-90, +90] &\rightarrow \mathbb{R}^+, \\ \theta &\mapsto \begin{cases} 2, & \text{falls } -10 \leq \theta \leq 10 \\ \frac{1}{2}, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

definieren und die Gleichheitsrelation  $E_{f(\delta)}$  verwenden, wobei  $f$  wie in (4.4) definiert ist. Im allgemeinen wird man eher eine stetige Funktion  $c$  verwenden, die bei Null ihr Maximum annimmt.  $\square$

Skalierungsfaktoren sind eine Möglichkeit, eine Gleichheitsrelation anzugeben. Andere Methoden werden in Abschnitt 4.4.2 untersucht.

### Bestimmung der fuzzy-wertigen Regelfunktion

Die Informationen, die wir von dem Kontrollexperten benötigen, bestehen in der Angabe von  $k$  „Regel“-Tupeln  $((x_1^{(r)}, \dots, x_n^{(r)}), y^{(r)})$  ( $r = 1, \dots, k$ ) und in der Beschreibung der Gleichheitsrelationen, die die Ununterscheidbarkeit der Meß- und Stellwerte wiedergeben.

Unser Ziel ist, aus diesen Informationen eine Übertragungsfunktion  $\varphi : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$  abzuleiten. Wenn wir die durch die Gleichheitsrelationen induzierte Ununterscheidbarkeit berücksichtigen, können wir nicht erwarten, eine scharfe Funktion  $\varphi$  zu erhalten. Vielmehr sollten alle unsere Konzepte an die Gleichheitsrelationen angepaßt werden. Wir versuchen daher nicht, die Funktion  $\varphi$  oder — gleichwertig dazu — ihren Graphen zu bestimmen, sondern interessieren uns für die extensionale Hülle des Graphen.

Dafür benötigen wir eine Gleichheitsrelation auf dem Produktraum  $X_1 \times \dots \times X_n \times Y$ . Wegen des Satzes 2.61 ist es naheliegend, die Gleichheitsrelation

$$E((x_1, \dots, x_n, y), (x'_1, \dots, x'_n, y')) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{E_1(x_1, x'_1), \dots, E_n(x_n, x'_n), F(y, y')\}. \quad (4.5)$$

zu verwenden. Diese Gleichheitsrelation setzt die Unabhängigkeit der durch die einzelnen Gleichheitsrelationen  $E_1, \dots, E_n, F$  induzierten Ununterscheidbarkeit auf den Mengen  $X_1, \dots, X_n$  bzw.  $Y$  voraus. Unabhängigkeit der Ununterscheidbarkeit meint hier: Die Ununterscheidbarkeit des Tupels  $(x_1, x_2, \dots, y)$  vom Tupel  $(x'_1, x_2, \dots, y)$  hängt nicht von der Wahl der Werte  $x_2, \dots, x_n, y$  ab. Falls diese Unabhängigkeitsvoraussetzung nicht erfüllt sein sollte, müssen einzelne Räume  $X_i$  und  $X_j$  zu dem Produktraum  $X_i \times X_j$  zusammengefaßt werden und eine Gleichheitsrelation, die die Abhängigkeit der Ununterscheidbarkeit widerspiegelt, auf dem Produktraum definiert werden. Im ungünstigsten Fall kann die Gleichheitsrelation  $E$  nur direkt auf dem gesamten Produktraum  $X_1 \times \dots \times X_n \times Y$  angegeben werden. Es sei darauf hingewiesen, daß eine Abhängigkeit der Meßgrößen  $\xi_i$  und  $\xi_j$  im allgemeinen keine Abhängigkeit der Ununterscheidbarkeit der Werte aus den Mengen  $X_i$  und  $X_j$  induziert.

Wir gehen im folgenden davon aus, daß die Gleichheitsrelation (4.5) die Ununterscheidbarkeit auf der Menge  $X_1 \times \dots \times X_n \times Y$  korrekt wiedergibt.

Für die Mengen  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) und  $Y$  definieren wir die Menge

$$X_i^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X_i \mid \exists r \in \{1, \dots, k\} : x = x_i^{(r)}\}, \quad (4.6)$$

bzw.

$$Y^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_0(X_0) = \{y \in Y \mid \exists r \in \{1, \dots, k\} : y = y^{(r)}\}. \quad (4.7)$$

Die Mengen  $X_i^{(0)}$  und  $Y^{(0)}$  enthalten alle Werte, die in einem der vom Experten vorgegebenen Meß-Stellgrößentupel  $(x_1^{(r)}, \dots, x_n^{(r)}, y^{(r)})$  ( $r = 1, \dots, k$ ) vorkommen.

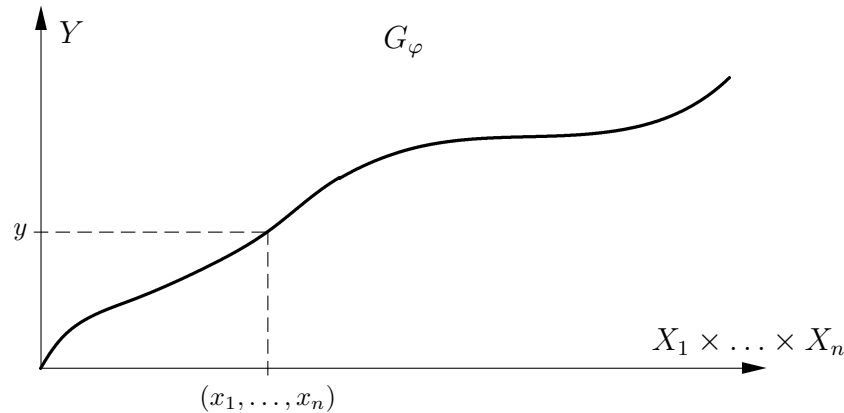


Abbildung 4.13: Bestimmung des Wertes  $y = \varphi(x_1, \dots, x_n)$  aus dem Graphen  $G_\varphi$ .

Zu jedem  $x_0 \in X_1^{(0)}$  betrachten wir das durch die Gleichheitsrelation  $E_1$  induzierte Singleton  $\mu_{x_0}$ , das durch

$$\mu_{x_0}(x) = E_1(x, x_0). \quad (4.8)$$

gegeben ist.

Wenn die Gleichheitsrelation  $E_1$  wie in Beispiel 2.52 gegeben ist, werden die Singletons durch Dreiecksfunktionen dargestellt.

Die Mengen  $X_i$ ,  $i = 2, \dots, n$  und  $Y$  sowie die zugehörigen Gleichheitsrelationen  $E_i$  bzw.  $F$  werden in ähnlicher Weise behandelt.

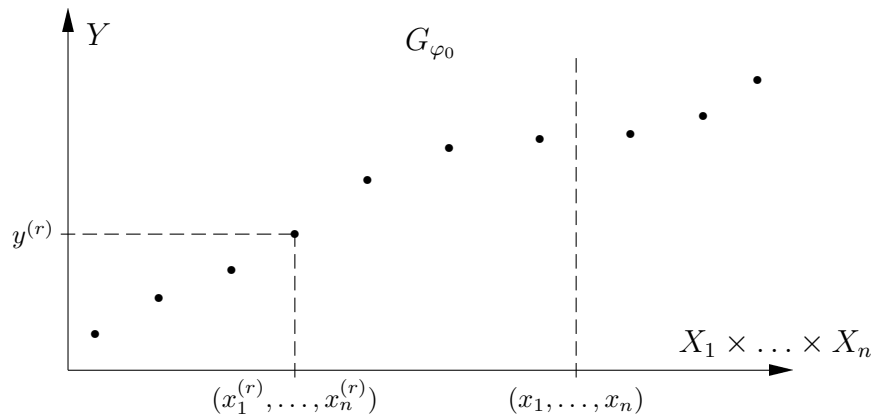
Wir wenden uns nun dem Problem zu, wie wir zu dem gemessenen Tupel  $(x_1, \dots, x_n)$  den richtigen Wert  $y$  für die Stellgröße wählen sollen. Dazu betrachten wir zunächst den hypothetischen Fall, daß die Funktion  $\varphi : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$  vollständig vorgegeben ist und beschreiben eine etwas umständlich erscheinende Art der Bestimmung des Wertes  $y = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ , die aber für den Fall einer partiellen Funktion  $\varphi_0$  und der Kenntnis der Gleichheitsrelationen sehr nützlich sein wird.

$$G_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \dots, x_n, y) \in X_1 \times \dots \times X_n \times Y \mid \varphi(x_1, \dots, x_n) = y\}$$

bezeichne den Graphen von  $\varphi$ . Den Wert  $y = \varphi(x_1, \dots, x_n)$  erhalten wir aus dem Graphen  $G_\varphi$ , indem wir die (eielementige) Menge  $\{y \in Y \mid (x_1, \dots, x_n, y) \in G_\varphi\}$  bestimmen, d.h., wir erweitern  $\{(x_1, \dots, x_n)\}$  zylindrisch auf  $X_1 \times \dots \times X_n \times Y$ , bilden den Durchschnitt dieser zylindrischen Erweiterungen auf dem Graphen von  $\varphi_0$  und projizieren das Resultat auf die Menge  $Y$ . Abbildung 4.13 veranschaulicht dieses Verfahren.

Da die Funktion  $\varphi$  jedoch nicht vollständig bekannt ist, sondern nur eine partielle Abbildung  $\varphi_0$  vom Experten angegeben wurde, läßt sich dieses Verfahren ohne die Berücksichtigung der gegebenen Gleichheitsrelation nicht anwenden, da die Menge  $\{y \in Y \mid (x_1, \dots, x_n, y) \in G_{\varphi_0}\}$  leer ist, wenn nicht zufällig das Tupel  $(x_1, \dots, x_n)$  mit einem der Tupel  $(x_1^{(r)}, \dots, x_n^{(r)})$ ,  $r \in \{1, \dots, k\}$ , übereinstimmt (vgl. Abbildung 4.14).



Abbildung 4.14: Der Wert  $\varphi_0(x_1, \dots, x_n)$  ist nicht definiert

Die Gleichheitsrelation (4.5) können wir dazu verwenden, die Definitionslücken von  $\varphi_0$  auszufüllen, indem wir das oben beschriebene Verfahren zur Berechnung von  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  bzw.  $\varphi_0(x_1, \dots, x_n)$  auf die extensionale Hülle des entsprechenden Graphen anwenden. Die extensionale Hülle von  $\varphi_0$  ist die Fuzzy-Menge

$$\begin{aligned} & \mu_{\varphi_0}(x'_1, \dots, x'_n, y') \\ &= \max_{r \in \{1, \dots, k\}} \left\{ \min \{ E_1(x_1^{(r)}, x'_1), \dots, E_n(x_n^{(r)}, x'_n), F(y^{(r)}, y') \} \right\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

$\mu_{\varphi_0}$  ist die kleinste Fuzzy-Menge, die den Graphen von  $\varphi_0$  enthält und die Gleichheitsrelation im Sinne der Definition 2.55 respektiert. Offenbar gilt  $\mu_{\varphi_0} \leq \mu_{\varphi}$ , wobei  $\mu_{\varphi}$  die extensionale Hülle des Graphen von  $\varphi$  ist. Da aber die Funktion  $\varphi$  nicht bekannt ist, müssen wir die Funktion aus  $\mu_{\varphi_0}$  bestimmen.

Für ein gemessenes Tupel  $(x_1, \dots, x_n)$  induziert  $\mu_{\varphi_0}$  die Fuzzy-Menge

$$\begin{aligned} \mu_{\varphi_0}^{(x_1, \dots, x_n)} : Y &\rightarrow [0, 1], \\ y &\mapsto \mu_{\varphi_0}(x_1, \dots, x_n, y) \end{aligned} \quad (4.10)$$

die der Menge  $\{y \in Y \mid (x_1, \dots, x_n, y) \in G_{\varphi_0}\}$  unter Berücksichtigung der Gleichheitsrelation (4.5) entspricht. Der folgende Satz 4.5 zeigt, daß diese Fuzzy-Menge genau die Fuzzy-Menge  $\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}}$  eines entsprechenden Mamdani-Fuzzy-Reglers ist.

### Die Beziehungen zu Mamdanis Modell

Die Methode, die extensionale Hülle des Graphen der partiellen Funktion zu bilden, führt auf eine Ausgabe in Form einer Fuzzy-Menge. Diese ist identisch mit der Ausgabe-Fuzzy-Menge  $\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}}$  eines entsprechenden Mamdani-Fuzzy-Reglers. Um diesen Mam-

dani-Regler anzugeben, identifizieren wir die Ein-/Ausgabebetupel der partiellen Funktion mit den linguistischen Steuerregeln

$$\begin{aligned}
 R_r: \quad & \mathbf{if} \quad \xi_1 \mathbf{is} \text{ ungefähr } x_1^{(r)} \\
 & \mathbf{and} \dots \\
 & \mathbf{and} \quad \xi_n \mathbf{is} \text{ ungefähr } x_n^{(r)} \\
 & \mathbf{then} \quad \eta \mathbf{is} \quad y^{(r)}.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Die in den Regeln auftretenden linguistischen Werte *ungefähr*  $x_i^{(r)}$  bzw. *ungefähr*  $y^{(r)}$  werden mit den Werten  $x_i^{(r)}$  bzw.  $y^{(r)}$  induzierten Singletons identifiziert, d.h., mit den Fuzzy-Mengen  $\mu_{x_i^{(r)}}(x) = E_i(x_i^{(r)}, x)$  bzw.  $\mu_{y^{(r)}} = F(y^{(r)}, y)$ .

**Satz 4.5** *Es sei  $\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}}$  die nach (4.2) bestimmte Fuzzy-Menge, die von der Entscheidungslogik des Mamdani-Fuzzy-Reglers mit der folgenden Wissensbasis berechnet wird:*

- *Die Partitionierung der Menge  $X_1$  ist durch die in (4.8) definierten Fuzzy-Mengen  $\mu_{x_0}$  gegeben, wobei  $(x_0 \in X_1^{(0)})$  gilt. Die Partitionierungen der Mengen  $X_2, \dots, X_n, Y$  seien entsprechend definiert.*
- *Eine Fuzzy-Menge der Form  $\mu_{x_0}$  wird mit dem linguistischen Term ungefähr  $x_0$  assoziiert.*
- *Die Regelbasis besteht aus den in (4.11) beschriebenen Regeln  $R_r$  ( $r = 1, \dots, k$ ).*

Dann gilt für die in (4.10) gegebene Fuzzy-Menge:

$$\mu_{\varphi_0}^{(x_1, \dots, x_n)} = \mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}}.$$

**B e w e i s :**

$$\begin{aligned}
 \mu_{\varphi_0}^{(x_1, \dots, x_n)}(y) &= \mu_{\varphi_0}(x_1, \dots, x_n, y) \\
 &= \max_{r \in \{1, \dots, k\}} \left\{ \min \{ E_1(x_1^{(r)}, x_1), \dots, E_n(x_n^{(r)}, x_n), F(y^{(r)}, y) \} \right\} \\
 &= \max_{r \in \{1, \dots, k\}} \left\{ \min \{ \mu_{x_1^{(r)}}(x_1), \dots, \mu_{x_n^{(r)}}(x_n), \mu_{y^{(r)}}(y) \} \right\} \\
 &= \mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}}(y).
 \end{aligned} \quad \square$$

Die Möglichkeit, einen auf Gleichheitsrelationen basierenden Regler in einen Mamdani-Fuzzy-Regler zu übersetzen, liefert jedoch keine Grundlage für die Interpretation des Mamdanischen Modells. Vom praktischen Standpunkt aus öffnet diese Übersetzungsmöglichkeit aber ein weites Spektrum an Soft- und Hardware, die ursprünglich für

Mamdani-Fuzzy-Regler entstanden, für Regler, die auf der Basis von Gleichheitsrelationen entwickelt wurden. Wir werden später zeigen, wie umgekehrt aus einem Mamdani-Fuzzy-Regler die Gleichheitsrelationen und die partielle Abbildung  $\varphi_0$  abgeleitet werden können.

### Bestimmung einer scharfen Regelfunktion

Das Problem der Defuzzifizierung läßt sich auch bei dem auf Gleichheitsrelationen basierenden Ansatz nicht ohne weiteres lösen. Wenn wir eine Defuzzifizierungsmethode festlegen, erhalten wir eine Abbildung  $\varphi : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ . Wir stellen an diese Abbildung zwei Forderungen:

- (i)  $\varphi$  ist eine Fortsetzung der partiellen Abbildung  $\varphi_0$ , d.h., es gilt  $\varphi|_{X_0} = \varphi_0$ , d.h.  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \varphi_0(x_1, \dots, x_n)$  für alle  $(x_1, \dots, x_n) \in X_0$ .
- (ii)  $\varphi : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$  ist extensional bezüglich der Gleichheitsrelationen

$$E_0 : (X_1 \times \dots \times X_n)^2 \rightarrow [0, 1],$$

$$((x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n)) \mapsto \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \{E_i(x_i, x'_i)\}$$

auf  $X_1 \times \dots \times X_n$  und  $F$  auf  $Y$ .

Die erste Bedingung ist plausibel. Daß auch die zweite Forderung vernünftig ist, zeigt folgende Überlegung. Wir interpretieren die Gleichheitsrelationen im Sinne des Beispiels 2.51. Aus Beispiel 2.60 erhalten wir, daß die Extensionalität von  $\varphi$  gleichbedeutend damit ist, daß  $\varphi$  meßfehlerschranken-erhaltend ist.

Unter dieser Voraussetzung ergibt sich eine recht starke Einschränkung für die Defuzzifizierungsstrategie. Wir betrachten dazu das Meßtupel  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$  und eine Regel  $R_r$  ( $r \in \{1, \dots, k\}$ ). Es sei

$$\alpha_r \stackrel{\text{def}}{=} \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \{E_i(x_i^{(r)}, x_i)\} = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \{\mu_{x_i^{(r)}}(x_i)\}. \quad (4.12)$$

Dann folgt aus der Extensionalität von  $\varphi$ , daß

$$\alpha_r \leq F(y^{(r)}, \varphi(x_1, \dots, x_n)) = \mu_{y^{(r)}}(\varphi(x_1, \dots, x_n)) \quad (4.13)$$

erfüllt sein muß und folglich der Stellwert  $y$  zum  $\alpha_r$ -Schnitt der Fuzzy-Menge  $\mu_{y^{(r)}}$  gehört. Da diese Bedingung an alle Regeln  $R_r$  ( $r = 1, \dots, k$ ) gestellt wird, muß der Stellwert  $y$  aus der Menge

$$\bigcap_{r=1}^k [\mu_{y^{(r)}}]_{\alpha_r} = \bigcap_{r=1}^k \{y \in Y \mid \alpha_r \leq \mu_{y^{(r)}}(y)\}. \quad (4.14)$$

gewählt werden. In der Interpretation der Extensionalität als Meßfehlerschrankenerhaltung entspricht das der folgenden Vorgehensweise. Für ein Meßtupel  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$  betrachten wir jede Regel  $R_r$  ( $r = 1, \dots, k$ ) einzeln. Der Wert  $1 - \alpha_r$  stellt die kleinste Meßfehlerschranke dar, bei der wir  $(x_1, \dots, x_n)$  und  $(x_1^{(r)}, \dots, x_n^{(r)})$  nicht unterscheiden können. Da die gesuchte Funktion  $\varphi$  meßfehlerschranken-erhaltend ist, müssen die Werte  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  und  $y^{(r)} = \varphi(x_1^{(r)}, \dots, x_n^{(r)})$  bei der Meßfehlerschranke  $\alpha_r$  ununterscheidbar sein, so daß (4.13) erfüllt und damit die Stellgröße in der Menge (4.14) enthalten sein muß.

Betrachten wir den in Satz 4.5 beschriebenen, äquivalenten Mamdani-Fuzzy-Regler, läßt sich das oben Beschriebene durch das folgende Beispiel veranschaulichen.

**Beispiel 4.6** Wir betrachten die drei „Regeln,“ die durch die Tupel  $(x_1^{(r)}, \dots, x_n^{(r)}, y^{(r)})$ , wobei  $r \in \{1, 2, 3\}$ , beschrieben werden. Auf den Mengen  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) und  $Y$  seien die Gleichheitsrelationen  $E_i$  bzw.  $F$  gegeben. Mit Hilfe des Satzes 4.5 erhalten wir einen Mamdani-Fuzzy-Regler. Wir nehmen an, daß das Meßtupel  $(x_1, \dots, x_n)$  gegeben sei. Für  $r \in \{1, 2, 3\}$  ist

$$\begin{aligned} \alpha_r &= \min\{\mu_{x_1^{(r)}}(x_1), \dots, \mu_{x_n^{(r)}}(x_n)\} \\ &= \min\{E_1(x_1^{(r)}, x_1), \dots, E_n(x_n^{(r)}, x_n)\} \end{aligned}$$

der Erfüllungsgrad der Prämisse der jeweiligen Regel. Werden die Singletons  $\mu_{y^{(r)}}$  durch Dreiecksfunktionen dargestellt, läßt sich die Menge (4.14), aus der der Stellwert gewählt werden sollte, um die Extensionalität der Funktion  $\varphi$  zu gewährleisten, durch Abbildung 4.15 veranschaulichen.  $\square$

Zur Bestimmung der Menge (4.14) ist es weder erforderlich noch sinnvoll, die Fuzzy-Menge  $\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}}$  zu berechnen, da die einzelnen Fuzzy-Mengen  $\mu_{x_1, \dots, x_n}^{\text{output}(R_r)}$  ( $r = 1, \dots, k$ ) benötigt werden.

**Beispiel 4.7** Bei einem Winkel  $\theta = 36^\circ$  und einer Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta} = -2.25^\circ \cdot \text{s}^{-1}$  ist der Wert  $\alpha_r$  nur für die beiden in den Abbildungen 4.5 und 4.6 veranschaulichten Regeln ungleich Null. Die Menge (4.14) der möglichen Stellwerte enthält nur einen einzigen Wert — nämlich  $F = 4 \text{ N}$ .

Danach ist der einzige vernünftige Wert für die Defuzzifikation  $F = 4 \text{ N}$ . Weder die Schwerpunkts- noch die Mean-of-Maxima-Methode liefern diesen Wert. Allerdings ergibt sich bei der Schwerpunktsmethode eine gute Näherung.  $\square$

Wie Beispiel 4.7 zeigt, kann es sinnvoll sein, die Menge (4.14) zu bestimmen, anstatt eine Defuzzifizierungsstrategie anzuwenden. Diese Menge läßt sich aber nur dann sinnvoll interpretieren, wenn der Fuzzy-Regler auf der Basis von Gleichheitsrelationen entworfen wurde. Die Angabe von geeigneten Gleichheitsrelationen kann sich als problematisch erweisen, da die Definition einer Gleichheitsrelation eine Gesamtsicht auf

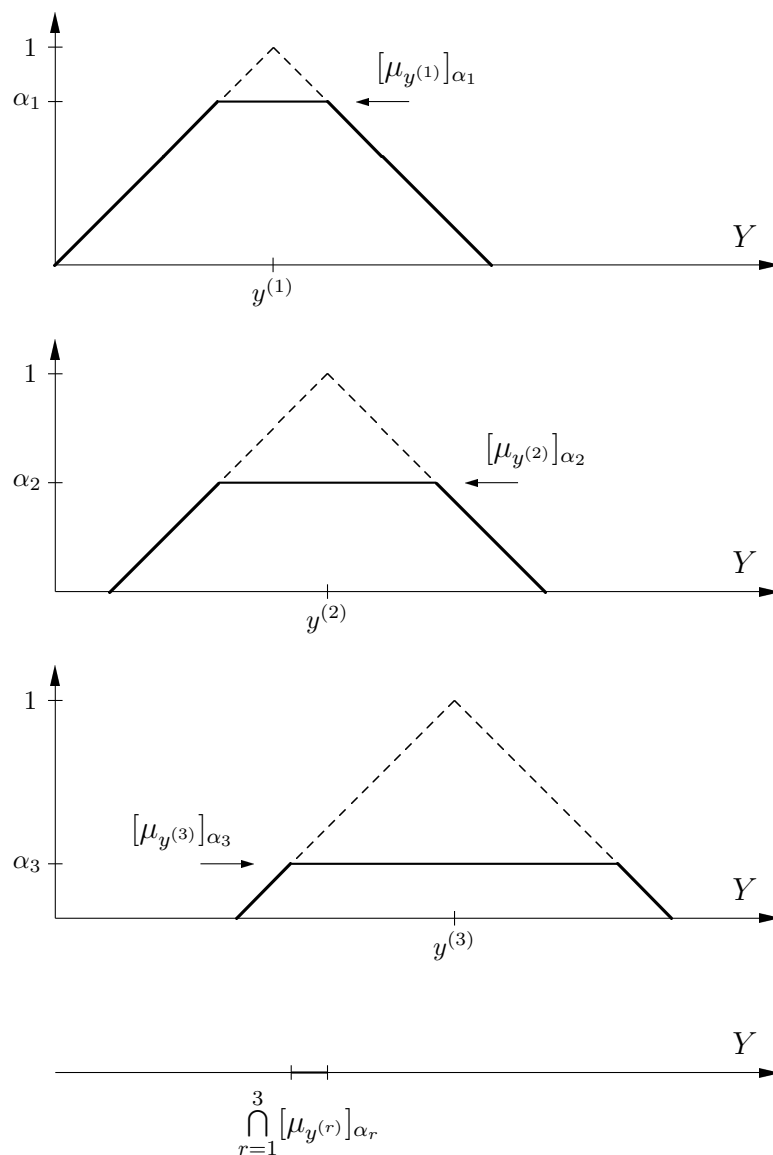


Abbildung 4.15: Soll die resultierende Funktion extensional sein, muß die Defuzzifikation einen Wert aus der Menge  $\bigcap_{r=1}^3 [\mu_{y^{(r)}}]_{\alpha_r}$  liefern.

die Grundmenge erfordert, während Fuzzy-Mengen meist nur in einem bestimmten Bereich — also lokal — angegeben werden. Im folgenden werden wir daher zeigen, wann ein Mamdani-Fuzzy-Regler als ein auf Gleichheitsrelationen basierender Fuzzy-Regler verstanden werden kann.

#### 4.4.2 Interpretation eines Mamdani-Fuzzy-Reglers auf der Basis von Gleichheitsrelationen

Die obigen Überlegungen haben gezeigt, daß ein auf Gleichheitsrelationen basierender Fuzzy-Regler mit einer klaren sematischen Grundlage in einen Mamdani-Fuzzy-Regler, der nur heuristisch motiviert ist, übersetzt werden kann. Eine offensichtliche Frage, die sich damit stellt, ist, ob jeder Mamdani-Fuzzy-Regler mit Hilfe von Gleichheitsrelationen interpretiert werden kann. Die Einbettung des Mamdani-Reglers in den formalen Rahmen der Gleichheitsrelationen erhellt seine Funktionalität und ermöglicht es zu prüfen, ob die gewählten Regeln konsistent sind im Sinne der Interpretation mit Hilfe von Gleichheitsrelationen.

Es sei ein Mamdani-Fuzzy-Regler mit den Partitionierungen  $\{\mu_j^{(i)} \mid j \in \{1, \dots, p_i\}\}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) und  $\{\mu_j \mid j \in \{1, \dots, p\}\}$  der Mengen  $X_i$  bzw.  $Y$  und der Regelbasis  $\{R_r \mid r \in \{1, \dots, k\}\}$  gegeben. Um diesen Mamdani-Fuzzy-Regler als einen Fuzzy-Regler zu interpretieren, der auf Gleichheitsrelationen basiert, müssen folgende Schritte durchgeführt werden.

- (1) Zu jeder Fuzzy-Menge  $\mu_j^{(i)}$  ( $j \in \{1, \dots, p_i\}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ ) und  $\mu_j$  ( $j \in \{1, \dots, p\}$ ) bestimmen wir Punkte  $x_j^{(i)} \in X_i$  bzw.  $y_j \in Y$ .
- (2) Wir definieren Gleichheitsrelationen  $E_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) und  $F$  auf den Mengen  $X_i$  bzw.  $Y$ , so daß die Fuzzy-Mengen  $\mu_j^{(i)}$  und  $\mu_j$  als von den Punkten  $x_j^{(i)}$  bzw.  $y_j$  induzierte Singletons aufgefaßt werden können, d.h., es gilt

$$\begin{aligned} \mu_j^{(i)}(x) &= \mu_{x_j^{(i)}}(x) = E_i(x_j^{(i)}, x) \quad \text{bzw.} \\ \mu_j(y) &= \mu_{y_j}(y) = F(y_j, y), \end{aligned}$$

- (3) In den Regeln müssen die linguistischen Terme  $A_j^{(i)}$  und  $B_j$  durch die Terme *ungefähr*  $x_j^{(i)}$  bzw. *ungefähr*  $y_j$  ersetzt werden.

Der dritte Schritt bereitet offenbar keine Schwierigkeiten, wenn Schritt (1) und (2) durchgeführt sind. Für Schritt (1) brauchen wir nur vorauszusetzen, daß alle in den Partitionierungen auftretenden Fuzzy-Mengen normal sind, also für alle  $i, j$

$$[\mu_j^{(i)}]_1 \neq \emptyset \quad \text{and} \quad [\mu_j]_1 \neq \emptyset$$

gilt. Unter dieser Voraussetzung können wir für jede Fuzzy-Menge einen Wert  $x_j^{(i)} \in X_i$  bzw.  $y_j \in Y$  auswählen, so daß  $\mu_j^{(i)}(x_j^{(i)}) = 1$  bzw.  $\mu_j(y_j) = 1$  erfüllt ist, und ordnen diesen Wert der entsprechenden Fuzzy-Menge zu.

Der wesentliche Schritt ist der zweite, der nur unter bestimmten Voraussetzungen durchgeführt werden kann. In Schritt (2) werden die Mengen  $X_1, \dots, X_n, Y$  isoliert behandelt. Wir haben also das folgende allgemeiner formulierte Problem für jede dieser Mengen zu lösen:

*Gegeben* ist eine Familie  $(\mu_i)_{i \in I}$  von Fuzzy-Mengen von  $X$  und eine Familie  $(x_i)_{i \in I}$  von Elementen von  $X$  mit

$$\forall i \in I : \mu_i(x_i) = 1.$$

*Gesucht* ist eine Gleichheitsrelation  $E$  auf der Menge  $X$ , so daß die Fuzzy-Mengen  $\mu_i$  ( $i \in I$ ) den durch die Elemente  $x_i$  induzierten Singletons entsprechen, d.h., es gilt

$$\forall i \in I : \mu_i = \mu_{x_i}.$$

Dieses Problem läßt sich mit Hilfe des Konzeptes der Biimplikation lösen.

**Satz 4.8** *Es sei  $\top$  eine stetige  $t$ -Norm. Desweiteren sei  $(\mu_i)_{i \in I}$  eine nicht-leere Familie von Fuzzy-Mengen von  $X$  und  $(x_i)_{i \in I}$  eine Familie von Elementen von  $X$  mit*

$$\forall i \in I : \mu_i(x_i) = 1.$$

*Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Es existiert eine Gleichheitsrelation  $E$  bezüglich  $\top$  auf  $X$ , so daß die Fuzzy-Mengen  $\mu_i$  den durch die Punkte  $x_i$  induzierten Singletons entsprechen, d.h., es gilt*

$$\mu_i = \mu_{x_i} \tag{4.15}$$

*für alle  $i \in I$ .*

(ii) *Für alle  $i, j \in I$  gilt die Ungleichung*

$$\sup_{x \in X} \{ \top(\mu_i(x), \mu_j(x)) \} \leq \inf_{y \in X} \{ \overleftrightarrow{\top}(\mu_i(y), \mu_j(y)) \} \tag{4.16}$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, betrachten wir die anscheinend sehr technische Bedingung (ii). Diese Bedingung entspricht im Sinne von Abschnitt 2.7 gerade der „Übersetzung“ der Aussage:

Für alle  $i, j \in I$  gilt:

$$(\exists x \in X : (x \in \mu_i \wedge x \in \mu_j)) \rightarrow \forall y \in X : (y \in \mu_i \leftrightarrow y \in \mu_j).$$

Mit anderen Worten: Die Bedingung (ii) fordert, daß der Grad der Nicht-Disjunktheit der Fuzzy-Mengen  $\mu_i$  und  $\mu_j$  höchstens so groß sein darf wie ihr Gleichheitsgrad. Für gewöhnliche Mengen entspricht dies der Forderung, daß die Mengen entweder disjunkt oder gleich sein müssen. Dies rechtfertigt auch die Verwendung des Begriffs Partitionierung für die Menge der mit den linguistischen Termen assoziierten Fuzzy-Mengen. Bei einer Partitionierung verlangt man, daß die zur Partitionierung gehörenden Mengen paarweise disjunkt sind.

**B e w e i s :**

(i)  $\Rightarrow$  (ii)

Es sei  $E$  eine Gleichheitsrelation, die der Bedingung (4.15) genügt. Wir beweisen (4.16), indem wir zeigen, daß die Ungleichungen

$$\sup_{x \in X} \{\top(\mu_i(x), \mu_j(x))\} \leq E(x_i, x_j) \quad (4.17)$$

und

$$E(x_i, x_j) \leq \inf_{y \in X} \{\overleftrightarrow{\top}(\mu_i(y), \mu_j(y))\} \quad (4.18)$$

gelten. Aus der Voraussetzung (4.15) erhalten wir

$$\begin{aligned} \sup_{x \in X} \{\top(\mu_i(x), \mu_j(x))\} &= \sup_{x \in X} \{\top(E(x_i, x), E(x_j, x))\} \\ &\stackrel{E \text{ transitiv}}{\leq} \sup_{x \in X} E(x_i, x_j) \\ &= E(x_i, x_j), \end{aligned}$$

woraus (4.17) folgt. Wir weisen (4.18) nach, indem wir für alle  $y \in X$  die Ungleichung

$$E(x_i, x_j) \leq \overleftrightarrow{\top}(\mu_i(y), \mu_j(y))$$

beweisen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte  $E(x_i, y) \geq E(x_j, y)$ . Zusammen mit (4.15) ergibt sich

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\top}(\mu_i(y), \mu_j(y)) &= \sup \{ \alpha \in [0, 1] \mid \top(\max\{E(x_i, y), E(x_j, y)\}, \alpha) \\ &\leq \min\{E(x_i, y), E(x_j, y)\} \} \\ &= \sup \{ \alpha \in [0, 1] \mid \top(E(x_i, y), \alpha) \leq E(x_j, y) \} \\ &\geq E(x_i, x_j), \end{aligned}$$

da wegen der Transitivität von  $E$  für  $\alpha = E(x_j, x_i)$  die Ungleichung  $\top(E(x_i, y), \alpha) \leq E(x_j, y)$  erfüllt ist.

(ii)  $\Rightarrow$  (i)

Wir definieren die Gleichheitsrelation  $E : X \times X \rightarrow [0, 1]$  durch

$$E(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{i \in I} \{ \overleftrightarrow{\top}(\mu_i(x), \mu_i(y)) \}. \quad (4.19)$$



Zunächst weisen wir, ohne die Bedingung (ii) zu verwenden, nach, daß  $E$  eine Gleichheitsrelation ist.

$$\begin{aligned}
 \text{(a) } E(x, x) &= \inf_{i \in I} \{ \sup \{ \alpha \in [0, 1] \mid \top(\max\{\mu_i(x), \mu_i(x)\}, \alpha) \\
 &\leq \min\{\mu_i(x), \mu_i(x)\} \} \} \\
 &= \inf_{i \in I} \{ \sup \{ \alpha \in [0, 1] \mid \top(\mu_i(x), \alpha) \leq \mu_i(x) \} \} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

(b) Offenbar gilt  $E(x, y) = E(y, x)$ , da aus Satz 2.63  $\overleftrightarrow{\top}(\alpha, \beta) = \overleftrightarrow{\top}(\beta, \alpha)$  folgt.

(c)  $\top(E(x, y), E(y, z))$

$$\begin{aligned}
 &= \top \left( \inf_{i \in I} \left\{ \sup \{ \alpha \in [0, 1] \mid \top(\max\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}, \alpha) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \leq \min\{\mu_i(x), \mu_i(y)\} \right\}, \right. \\
 &\quad \left. \inf_{j \in I} \left\{ \sup \{ \beta \in [0, 1] \mid \top(\max\{\mu_j(y), \mu_j(z)\}, \beta) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \leq \min\{\mu_j(y), \mu_j(z)\} \right\} \right) \\
 \stackrel{\top \text{ stetig}}{=} &\inf_{i, j \in I} \left\{ \top \left( \sup \{ \alpha \in [0, 1] \mid \top(\max\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}, \alpha) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \leq \min\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}, \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \sup \{ \beta \in [0, 1] \mid \top(\max\{\mu_j(y), \mu_j(z)\}, \beta) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \leq \min\{\mu_j(y), \mu_j(z)\} \right\} \right) \\
 \leq &\inf_{i \in I} \left\{ \top \left( \sup \{ \alpha \in [0, 1] \mid \top(\max\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}, \alpha) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \leq \min\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}, \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \sup \{ \beta \in [0, 1] \mid \top(\max\{\mu_i(y), \mu_i(z)\}, \beta) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \leq \min\{\mu_i(y), \mu_i(z)\} \right\} \right) \\
 = &\inf_{i \in I} \left\{ \sup_{\alpha, \beta \in [0, 1]} \{ \top(\alpha, \beta) \mid \top(\max\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}, \alpha) \right. \\
 &\quad \left. \leq \min\{\mu_i(x), \mu_i(y)\} \wedge \right. \\
 &\quad \left. \top(\max\{\mu_i(y), \mu_i(z)\}, \beta) \right. \\
 &\quad \left. \leq \min\{\mu_i(y), \mu_i(z)\} \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Wir beweisen, daß (4.20) kleiner oder gleich

$$\begin{aligned}
 E(x, z) &= \inf_{i \in I} \left\{ \sup \{ \gamma \in [0, 1] \mid \top(\max\{\mu_i(x), \mu_i(z)\}, \gamma) \right. \\
 &\quad \left. \leq \min\{\mu_i(x), \mu_i(z)\} \right\},
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

ist, indem wir zeigen, daß für alle  $i \in I$  und für alle  $\varepsilon \in [0, 1)$  die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\begin{aligned} (\varepsilon < \sup_{\alpha, \beta \in [0, 1]} \{ \top(\alpha, \beta) \mid \top(\max\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}, \alpha) \\ \leq \min\{\mu_i(x), \mu_i(y)\} \wedge \\ \top(\max\{\mu_i(y), \mu_i(z)\}, \beta) \\ \leq \min\{\mu_i(y), \mu_i(z)\} \}) \end{aligned} \quad (4.22)$$

$\implies$

$$\begin{aligned} (\varepsilon < \sup \{ \gamma \in [0, 1] \mid \top(\max\{\mu_i(x), \mu_i(z)\}, \gamma) \\ \leq \min\{\mu_i(x), \mu_i(z)\} \}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Es gelte also (4.22). Dann existieren  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ , die den drei Bedingungen

$$\top(\alpha, \beta) > \varepsilon,$$

$$\top(\max\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}, \alpha) \leq \min\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}, \quad (4.24)$$

$$\top(\max\{\mu_i(y), \mu_i(z)\}, \beta) \leq \min\{\mu_i(y), \mu_i(z)\}. \quad (4.25)$$

genügen. Wir definieren  $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \top(\alpha, \beta)$  und zeigen, daß

$$\top(\max\{\mu_i(x), \mu_i(z)\}, \gamma) \leq \min\{\mu_i(x), \mu_i(z)\}. \quad (4.26)$$

gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $\mu_i(x) \leq \mu_i(z)$ , so daß sich (4.26) zu

$$\top(\mu_i(z), \gamma) \leq \mu_i(x).$$

vereinfacht.

Fall 1:  $\mu_i(y) \leq \mu_i(x) \leq \mu_i(z)$ .

Es folgt

$$\begin{aligned} \top(\mu_i(z), \gamma) &= \top(\mu_i(z), \top(\alpha, \beta)) \\ &= \top(\top(\mu_i(z), \beta), \alpha) \\ &\stackrel{(4.25)}{\leq} \top(\mu_i(y), \alpha) \\ &\leq \mu_i(y) \\ &\leq \mu_i(x). \end{aligned}$$

Fall 2:  $\mu_i(x) \leq \mu_i(y) \leq \mu_i(z)$ .

Für diesen Fall erhalten wir analog zu Fall 1

$$\top(\mu_i(z), \gamma) \leq \top(\mu_i(y), \alpha),$$

und mit (4.24)

$$\top(\mu_i(y), \alpha) \leq \mu_i(x).$$

Fall 3:  $\mu_i(x) \leq \mu_i(z) \leq \mu_i(y)$ .

Es ergibt sich mit (4.24)

$$\top(\mu_i(z), \gamma) \leq \top(\mu_i(y), \gamma) \leq \top(\mu_i(y), \alpha) \leq \mu_i(x).$$

Damit gilt die Ungleichung (4.26), aus der die Ungleichung (4.23) folgt.  $E$  ist also auch transitiv und damit eine Gleichheitsrelation.

Es bleibt noch zu zeigen, daß  $\mu_i = \mu_{x_i}$  gilt. Wir beweisen zuerst  $\mu_{x_i} \leq \mu_i$ :

$$\begin{aligned} \mu_{x_i}(x) &= E(x, x_i) \\ &= \inf_{j \in I} \left\{ \sup \{ \alpha \in [0, 1] \mid \top(\max\{\mu_j(x_i), \mu_j(x)\}, \alpha) \right. \\ &\quad \left. \leq \min\{\mu_j(x_i), \mu_j(x)\} \} \right\} \\ &\leq \sup \{ \alpha \in [0, 1] \mid \top(\max\{\mu_i(x_i), \mu_i(x)\}, \alpha) \\ &\quad \leq \min\{\mu_i(x_i), \mu_i(x)\} \} \\ &= \sup \{ \alpha \in [0, 1] \mid \top(1, \alpha) \leq \mu_i(x) \} \\ &= \mu_i(x). \end{aligned}$$

Schließlich zeigen wir  $\mu_i \leq \mu_{x_i}$ , indem wir für alle  $j \in I$

$$\sup \{ \alpha \in [0, 1] \mid \top(\max\{\mu_j(x_i), \mu_j(x)\}, \alpha) \leq \min\{\mu_j(x_i), \mu_j(x)\} \} \geq \mu_i(x) \quad (4.27)$$

nachweisen.

Fall 1:  $\mu_j(x_i) \leq \mu_j(x)$ .

Damit vereinfacht sich die linke Seite von (4.27) zu

$$\sup \{ \alpha \in [0, 1] \mid \top(\mu_j(x), \alpha) \leq \mu_j(x_i) \}. \quad (4.28)$$

Der Ausdruck (4.28) ist größer oder gleich  $\mu_i(x)$ , falls  $\top(\mu_j(x), \mu_i(x)) \leq \mu_j(x_i)$  erfüllt ist. Mit der Voraussetzung (ii) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\top(\mu_j(x), \mu_i(x)) &\leq \inf_{y \in X} \left\{ \sup \{ \beta \in [0, 1] \mid \top(\max\{\mu_j(y), \mu_i(y)\}, \beta) \right. \\
&\quad \left. \leq \min\{\mu_j(y), \mu_i(y)\} \right\} \\
&\leq \sup \{ \beta \in [0, 1] \mid \top(\max\{\mu_j(x_i), \mu_i(x_i)\}, \beta) \\
&\quad \leq \min\{\mu_j(x_i), \mu_i(x_i)\} \} \\
&= \mu_j(x_i).
\end{aligned}$$

Fall 2:  $\mu_j(x) \leq \mu_j(x_i)$ .

Für diesen Fall vereinfacht sich die linke Seite von (4.27) zu

$$\sup\{\alpha \in [0, 1] \mid \top(\mu_j(x_i), \alpha) \leq \mu_j(x)\},$$

so daß wir

$$\top(\mu_j(x_i), \mu_i(x)) \leq \mu_j(x). \quad (4.29)$$

nachweisen müssen. Falls  $\mu_i(x) \leq \mu_j(x)$  gilt, ist (4.29) offenbar erfüllt. Es sei also  $\mu_j(x) \leq \mu_i(x)$ . Dann folgt wegen  $\mu_i(x_i) = 1$

$$\begin{aligned}
\mu_j(x_i) &= \top(\mu_j(x_i), \mu_i(x_i)) \\
&\leq \sup_{z \in X} \{ \top(\mu_j(z), \mu_i(z)) \} \\
&\stackrel{(ii)}{\leq} \inf_{z \in X} \left\{ \overset{\leftrightarrow}{\top}(\mu_j(z), \mu_i(z)) \right\} \\
&\leq \overset{\leftrightarrow}{\top}(\mu_j(x), \mu_i(x)) \\
&= \sup \{ \alpha \in [0, 1] \mid \top(\max\{\mu_j(x), \mu_i(x)\}, \alpha) \\
&\quad \leq \min\{\mu_j(x), \mu_i(x)\} \} \\
&= \sup \{ \alpha \in [0, 1] \mid \top(\mu_i(x), \alpha) \leq \mu_j(x) \}
\end{aligned}$$

und somit  $\top(\mu_i(x), \mu_j(x_i)) \leq \mu_j(x)$ , da  $\top$  monoton und stetig ist.  $\square$

Die Bedingung (ii) des Satzes 4.8 haben wir im Beweis weder verwendet, um zu zeigen, daß durch (4.19) eine Gleichheitsrelation definiert wird, noch um  $\mu_i \geq \mu_{x_i}$  nachzuweisen. Die Bedingung (ii) wird nur für die Ungleichung  $\mu_{x_i} \geq \mu_i$  benötigt.

Der folgende Satz zeigt, daß (4.19) die größte Gleichheitsrelation ist, bei der alle  $\mu_i$  extensional sind.

**Satz 4.9** *Es sei  $\top$  eine stetige  $t$ -Norm. Desweiteren sei  $(\mu_i)_{i \in I}$  eine Familie von Fuzzy-Mengen von  $X$ . Dann ist die durch (4.19) definierte Gleichheitsrelation  $E$  die größte Gleichheitsrelation bezüglich  $\top$ , für die  $\mu_i$  für alle  $i \in I$  extensional ist.*

B e w e i s :

Wir zeigen zuerst, daß  $\mu_i$  ( $i \in I$ ) extensional bezüglich  $E$  ist:

$$\begin{aligned}
& \top(\mu_i(x), E(x, y)) \\
&= \top(\mu_i(x), \inf_{j \in I} \{\overleftrightarrow{\top}(\mu_j(x), \mu_j(y))\}) \\
&\leq \top(\mu_i(x), \overleftrightarrow{\top}(\mu_i(x), \mu_i(y))) \\
&\stackrel{\top \text{ stetig}}{=} \sup_{\alpha \in [0,1]} \{\top(\mu_i(x), \alpha) \mid \top(\max\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}, \alpha) \\
&\hspace{15em} \leq \min\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}\}.
\end{aligned}$$

Falls  $\mu_i(x) \leq \mu_i(y)$  gilt, vereinfacht sich (4.30) zu

$$\begin{aligned}
& \sup_{\alpha \in [0,1]} \{\top(\mu_i(x), \alpha) \mid \top(\mu_i(y), \alpha) \leq \mu_i(x)\} \\
&\leq \sup_{\alpha \in [0,1]} \{\top(\mu_i(x), \alpha) \mid \top(\mu_i(x), \alpha) \leq \mu_i(x)\} \\
&= \top(\mu_i(x), 1) \\
&= \mu_i(x) \\
&\leq \mu_i(y).
\end{aligned}$$

Im Falle  $\mu_i(y) \leq \mu_i(x)$  wird (4.30) zu

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} \{\top(\mu_i(x), \alpha) \mid \top(\mu_i(x), \alpha) \leq \mu_i(y)\} = \mu_i(y).$$

Also ist  $\mu_i$  extensional bezüglich  $E$ .

Sei  $E'$  eine Gleichheitsrelation bezüglich  $\top$ , für die  $\mu_i$  für alle  $i \in I$  extensional ist. Wir zeigen, daß für alle  $i \in I$

$$\overleftrightarrow{\top}(\mu_i(x), \mu_i(y)) \geq E'(x, y)$$

gilt, woraus wir  $E \geq E'$  folgern können. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $\mu_i(x) \leq \mu_i(y)$ . Dann folgt

$$\overleftrightarrow{\top}(\mu_i(x), \mu_i(y)) = \sup\{\alpha \in [0, 1] \mid \top(\mu_i(y), \alpha) \leq \mu_i(x)\}. \quad (4.30)$$

Da  $\mu_i$  extensional bezüglich  $E'$  ist, gilt

$$\top(\mu_i(y), E'(x, y)) \leq \mu_i(x),$$

so daß (4.30) einen Wert größer oder gleich  $E'(x, y)$  liefert.  $\square$

Mit Satz 4.9 erhalten wir, daß die in (4.19) definierte Gleichheitsrelation die größte Gleichheitsrelation ist, bei der die Fuzzy-Mengen als Singletons interpretierbar sind.

**Satz 4.10** *Es sei  $\top$  eine stetige  $t$ -Norm. Desweiteren sei  $(\mu_i)_{i \in I}$  eine nicht-leere Familie von Fuzzy-Mengen von  $X$  und  $(x_i)_{i \in I}$  eine Familie von Elementen von  $X$  mit*

$$\forall i \in I : \mu_i(x_i) = 1.$$

*Außerdem gelte für alle  $i, j \in I$  die Ungleichung (4.16) aus Satz 4.8.*

*Dann ist die in (4.19) definierte Gleichheitsrelation  $E$  die größte Gleichheitsrelation bezüglich  $\top$ , die (4.15) erfüllt.*

**B e w e i s :**

Im Beweis des Satzes 4.8 haben wir gezeigt, daß  $E$  der Forderung (4.15) genügt. Ist  $E'$  eine beliebige Gleichheitsrelation bezüglich  $\top$ , so sind die Fuzzy-Mengen  $\mu_i = \mu_{x_i}$  ( $i \in I$ ) als Singletons und damit als extensionale Hüllen einelementiger Mengen extensional bezüglich  $E'$ . Nach Satz 4.9 ist  $E$  aber die größte Gleichheitsrelation, bezüglich derer die Fuzzy-Mengen  $\mu_i$  ( $i \in I$ ) extensional sind.  $\square$

Satz 4.10 zeigt, daß wir im Falle der Existenz einer Gleichheitsrelation, bei der die Fuzzy-Mengen als Singletons interpretierbar sind, mit der Gleichung (4.19) die größte derartige Gleichheitsrelation berechnen können. Obwohl die Forderung (4.16) sinnvoll zu interpretieren ist und eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Gleichheitsrelation darstellt, unter der die Fuzzy-Mengen als Singletons angesehen werden können, ist es nicht einfach, diese Bedingung zu überprüfen. Wir geben daher eine einfachere, hinreichende Bedingung an, die sich leichter überprüfen läßt.

**Satz 4.11** *Es sei  $\top$  eine stetige  $t$ -Norm. Desweiteren sei  $(\mu_i)_{i \in I}$  eine nicht-leere Familie von Fuzzy-Mengen von  $X$  und  $(x_i)_{i \in I}$  eine Familie von Elementen von  $X$  mit*

$$\forall i \in I : \mu_i(x_i) = 1.$$

*Außerdem gelte für alle  $i, j \in I$  mit  $i \neq j$  und für alle  $x \in X$  die Gleichung*

$$\top(\mu_i(x), \mu_j(x)) = 0. \quad (4.31)$$

*Dann erfüllt die in (4.19) definierte Gleichheitsrelation  $E$  die Bedingung (4.15).*

**B e w e i s :**

Für  $i \neq j$  impliziert (4.31) offenbar (4.16). Für  $i = j$  liefert die rechte Seite von (4.16) den Wert 1, so daß (4.16) auch in diesem Fall erfüllt ist. Aus Satz 4.8 und dem zugehörigen Beweis können wir folgern, daß  $E$  der Bedingung (4.15) genügt.  $\square$

(4.31) entspricht der Forderung, daß die Fuzzy-Mengen der Familie  $(\mu_i)_{i \in I}$  paarweise disjunkt sind bezüglich des durch die  $t$ -Norm  $\top$  induzierten Durchschnittsoperators.

**Beispiel 4.12** Es sei  $\top = \top_{\text{Luka}}$ . Indem wir die im Beispiel 2.66 berechnete Formel für die Biimplikation verwenden, erhalten wir, daß die Bedingung (4.16) aus Satz 4.8 der Ungleichung

$$\sup_{x \in X} \{\mu_i(x) + \mu_j(x) - 1\} \leq \inf_{y \in X} \{1 - |\mu_i(y) - \mu_j(y)|\}. \quad (4.32)$$

entspricht. Die rechte Seite von (4.32) ist genau derselbe Ausdruck wie die in Satz 2.69, der den Gleichheitsgrad zweier Fuzzy-Mengen definiert.

Die Bedingung (4.31) des Satzes 4.11 ist für  $\top = \top_{\text{Luka}}$  äquivalent zu

$$\mu_i(x) + \mu_j(x) \leq 1. \quad (4.33)$$

Man beachte, daß diese Bedingung die übliche Annahme für Fuzzy-Partitionierungen erfüllt, daß für jedes Element des Bereichs die Summe seiner Zugehörigkeitsgrade zu den Fuzzy-Mengen der Fuzzy-Partitionierung 1 ergibt. Die Partitionierungen in Beispiel 4.1 sind so gewählt, daß sie (4.33) genügen, so daß wir Satz 4.11 anwenden können.

Wir betrachten exemplarisch die durch (4.19) induzierte Gleichheitsrelation  $E$  auf der Menge  $X_1 = [-90, 90]$  der möglichen Winkel. Die sieben zu der entsprechenden Partitionierung gehörenden Fuzzy-Mengen bezeichnen wir mit  $\mu_{ng}, \mu_{nm}, \mu_{nk}, \mu_{uN}, \mu_{pk}, \mu_{pm}$  und  $\mu_{pg}$ . Dabei ist

$$\mu_{nb}(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \theta \leq -67.5 \\ -\frac{\theta}{22.5} - 2, & \text{falls } -67.5 \leq \theta \leq -45 \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\mu_{pb}(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 67.5 \leq \theta \\ \frac{\theta}{22.5} - 2, & \text{falls } 45 \leq \theta \leq 67.5 \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\mu_w(\theta) = 1 - \min \left\{ \frac{|\theta - \theta_w|}{22.5}, 1 \right\}, \quad (w \in \{nm, nk, uN, pk, pm\}),$$

mit  $\theta_{nm} = -45, \theta_{nk} = -22.5, \theta_{uN} = 0, \theta_{pk} = 22.5, \theta_{pm} = 45$  (vgl. auch Abbildung 4.4). Wir definieren  $W = \{ng, nm, nk, uN, pk, pm, pg\}$ . Mit dieser Notation folgt

$$E(\theta, \theta') = \min \{1 - |\mu_w(\theta) - \mu_w(\theta')| \mid w \in W\}. \quad (4.34)$$

In Tabelle 4.4 ist für einige Winkel  $\theta$  und  $\theta'$  der Gleichheitsgrad  $E(\theta, \theta')$  angegeben. Unterhalb des Wertes  $E(\theta, \theta')$  ist zusätzlich eine Fuzzy-Menge der Partitionierung bzw. deren zugehöriger Index  $w$  aufgeführt, für die

$$E(\theta, \theta') = 1 - |\mu_w(\theta) - \mu_w(\theta')|,$$

gilt, d.h. für die das Minimum in (4.34) angenommen wird.

$\theta' \quad \theta$	0	5.625	11.25	16.875	22.5	28.125	33.75	39.375	45	61.875	67.5	73.125
0	1 <i>uN</i>	0.75 <i>uN</i>	0.5 <i>uN</i>	0.25 <i>uN</i>	0 <i>uN</i>	0 <i>uN</i>	0 <i>uN</i>	0 <i>uN</i>	0 <i>uN</i>	0 <i>uN</i>	0 <i>uN</i>	0 <i>uN</i>
5.625		1 <i>uN</i>	0.75 <i>uN</i>	0.5 <i>uN</i>	0.25 <i>uN</i>	0.25 <i>uN</i>	0.25 <i>uN</i>	0.25 <i>uN</i>	0 <i>pm</i>	0.25 <i>uN</i>	0 <i>pg</i>	0 <i>pg</i>
11.25			1 <i>uN</i>	0.75 <i>uN</i>	0.5 <i>uN</i>	0.5 <i>uN</i>	0.5 <i>uN</i>	0.25 <i>pm</i>	0 <i>pm</i>	0.25 <i>pg</i>	0 <i>pg</i>	0 <i>pg</i>
16.875				1 <i>uN</i>	0.75 <i>uN</i>	0.75 <i>uN</i>	0.5 <i>pm</i>	0.25 <i>pm</i>	0 <i>pm</i>	0.25 <i>pk</i>	0 <i>pg</i>	0 <i>pg</i>
22.5					1 <i>uN</i>	0.75 <i>pk</i>	0.5 <i>pk</i>	0.25 <i>pk</i>	0 <i>pk</i>	0 <i>pk</i>	0 <i>pk</i>	0 <i>pk</i>
28.125						1 <i>uN</i>	0.75 <i>pk</i>	0.5 <i>pk</i>	0.25 <i>pk</i>	0.25 <i>pk</i>	0 <i>pg</i>	0 <i>pg</i>
33.75							1 <i>uN</i>	0.75 <i>pk</i>	0.5 <i>pk</i>	0.25 <i>pg</i>	0 <i>pg</i>	0 <i>pg</i>
39.375								1 <i>uN</i>	0.75 <i>pk</i>	0.25 <i>pg</i>	0 <i>pg</i>	0 <i>pg</i>
45									1 <i>uN</i>	0.25 <i>pm</i>	0 <i>pm</i>	0 <i>pm</i>
61.875										1 <i>uN</i>	0.75 <i>pg</i>	0.75 <i>pg</i>
67.5											1 <i>uN</i>	1 <i>uN</i>
73.125												1 <i>uN</i>

Tabelle 4.4: Einige Werte der nach (4.19) berechneten Gleichheitsrelationen



Beispielsweise bedeutet der Eintrag in der dritten Zeile und der vierten Spalte, daß  $E(16.875, 11.25) = 0.75$  gilt, und daß dieser Wert angenommen wird, wenn in (4.34)  $w = uN$  gewählt wird, d.h.  $1 - |\mu_{uN}(16.875) - \mu_{uN}(11.25)| = 0.75$ . Im allgemeinen wird das Minimum in (4.34) nicht nur bei einem  $w$ , sondern bei mehreren angenommen, z.B. wäre hier der Tabelleneintrag  $w = pk$  statt  $w = uN$  ebenfalls zulässig. Wegen der Symmetrie der Gleichheitsrelation  $E$  wurde nur der Tabellenteil oberhalb der Hauptdiagonalen ausgefüllt.

Die Verwendung der Dreiecksfunktionen für die Partitionierung (siehe Abbildung 4.4) könnte zunächst zu der Vermutung führen, daß die Gleichheitsrelation  $E$  durch die Metrik  $\delta$  mit  $\delta(\theta, \theta') = \frac{1}{22.5}|\theta - \theta'|$  induziert wird. Wie im Beispiel 2.56 ergeben sich bei der durch die Metrik  $\delta$  induzierten Gleichheitsrelation  $E_\delta$  gerade die Dreiecksfunktionen als Singletons. Die erste Zeile der Tabelle 4.4 scheint diesen Verdacht zu erhärten, da wir aus ihr ablesen können, daß

$$E(\theta, \theta') = E_\delta(\theta, \theta') = 1 - \min \left\{ \frac{1}{22.5}|\theta - \theta'|, 1 \right\}.$$

gilt. Bei genauerer Betrachtung der Tabelle zeigt sich jedoch, daß im allgemeinen nur  $E_\delta \leq E$  erfüllt ist. Erstens ist die Gleichheitsrelation  $E$  an den Rändern (d.h. bei Winkeln kleiner als  $-67.5^\circ$  bzw. größer als  $67.5^\circ$ ) sehr grob, da für alle Winkel  $\theta, \theta' \in [67.5, 90]$  folgt:  $E(\theta, \theta') = 1$  (vgl. z.B. den Tabelleneintrag für  $\theta = 67.5$  und  $\theta = 73.125$ ). Dieses Phänomen erklärt sich durch die Wahl der Fuzzy-Mengen  $\mu_{pg}$  bzw.  $\mu_{ng}$ . Zweitens treten folgende zunächst paradox erscheinende Werte auf:  $E(5.625, 45) = 0$ , aber  $E(5.625, 61.875) = 0.25$ , obwohl  $5.625 < 45 < 61.875$  gilt. Die Ursache hierfür liegt in der schlechten Überdeckungseigenschaft, die die Partitionierung besitzt. Es gilt beispielsweise

$$\sup\{\mu_w(11.25) \mid w \in \{ng, nm, nk, uN, pk, pm, pg\}\} = 0.5.$$

Wegen der Definition von  $E$  läßt sich folgende Abschätzung für  $E(\theta, \theta')$  angeben:

$$\begin{aligned} E(\theta, \theta') &= \min\{1 - |\mu_w(\theta) - \mu_w(\theta')| \mid w \in W\} \\ &\geq 1 - \max\{\max\{\mu_w(\theta), \mu_w(\theta')\} \mid w \in W\} \\ &\quad + \min\{\min\{\mu_w(\theta), \mu_w(\theta')\} \mid w \in W\} \\ &\geq 1 - \max\{\max\{\mu_w(\theta), \mu_w(\theta')\} \mid w \in W\}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Für  $\theta = 5.625$  und  $\theta' = 61.875$  liefert (4.35) den Wert 0.25. (4.35) läßt sich wie folgt interpretieren. Die Fuzzy-Menge

$$\begin{aligned} \mu : [-90, 90] &\rightarrow [0, 1], \\ \theta &\mapsto \sup\{\mu_w(\theta) \mid w \in W\}, \end{aligned}$$

die der Vereinigung der Fuzzy-Mengen  $\mu_w$  ( $w \in W$ ) entspricht, gibt an, inwieweit jedes einzelne Element  $\theta \in [-90, 90]$  von der Partitionierung erfaßt (überdeckt) wird.

(4.35) besagt also, daß zwei Elemente  $\theta, \theta' \in [-90, 90]$  (unter  $E$ ) höchstens so gut unterschieden werden können, wie sie durch die Partitionierung überdeckt werden. (4.35) ist äquivalent zu

$$E(\theta, \theta') \geq 1 - \max\{\mu(\theta), \mu(\theta')\}.$$

Die Wahl der  $t$ -Norm  $\top_{\text{Luka}}$  für die Berechnung der Gleichheitsrelation  $E$  ist nicht allein durch die Beispiele 2.51 und 2.56 motiviert, sie hat auch pragmatische Gründe. Beispielsweise existiert für  $\top = \top_{\min}$  oder  $\top = \top_{\text{prod}}$  keine Gleichheitsrelation auf der Menge  $[-90, 90]$ , so daß die Fuzzy-Mengen  $\mu_w$  ( $w \in W$ ) als Singletons interpretierbar sind. Die Begründung hierfür liefert Satz 4.8. Es gilt

$$\sup_{\theta \in [-90, 90]} \{\top(\mu_{uN}(\theta), \mu_{pk}(\theta))\} = \begin{cases} 0.5, & \text{falls } \top = \top_{\min} \\ 0.25, & \text{falls } \top = \top_{\text{prod}}, \end{cases}$$

aber

$$\inf_{\theta \in [-90, 90]} \{\overset{\leftrightarrow}{\top}(\mu_{uN}(\theta), \mu_{pk}(\theta))\} = 0$$

sowohl für  $\top = \top_{\min}$  als auch für  $\top = \top_{\text{prod}}$ , so daß die Bedingung (ii) des Satzes 4.8 für diese  $t$ -Normen nicht erfüllt ist.

An dieser Stelle sollte betont werden, daß die Verwendung des Minimum-Operators (vgl. (4.9)) bei Fuzzy-Reglern nicht von der für die Gleichheitsrelationen verwendeten  $t$ -Norm abhängt. Der Minimum-Operator stammt aus der Gleichung (4.5), in der davon ausgegangen wird, daß die beteiligten Gleichheitsrelationen „unabhängig“ sind, so daß die Gleichheitsrelation für den Produktraum der Meß- und Stellgrößen sinnvoll erscheint. Daher ist es durchaus gerechtfertigt, die in (4.2) beschriebene „Max-Min-Inferenzmethode“ für den Mamdani-Fuzzy-Regler zu verwenden, selbst wenn man den Regler auf der Basis von Gleichheitsrelationen bezüglich einer beliebigen  $t$ -Norm interpretiert.

Die  $t$ -Norm sollte so gewählt werden, daß die Gleichheitsrelationen sinnvoll gedeutet werden können. Wie wir bereits in den Beispielen 2.51 und 2.52 gesehen haben, lassen sich die  $t$ -Normen  $\top_{\min}$  und insbesondere  $\top_{\text{Luka}}$  anschaulich begründen. Allerdings ist die Existenz einer geeigneten Gleichheitsrelation bezüglich einer fest gewählten  $t$ -Norm bei einer vorgegebenen Partitionierung nicht garantiert. Wir haben gerade gezeigt, daß die Fuzzy-Mengen der Partitionierung  $\{\mu_w \mid w \in W\}$  als Singletons im Sinne einer Gleichheitsrelation bezüglich der  $t$ -Norm  $\top_{\text{Luka}}$  gedeutet werden können — nicht jedoch bezüglich  $\top_{\min}$  oder  $\top_{\text{prod}}$ .

Die Verwendung einer geeigneten  $t$ -Norm für die Gleichheitsrelation erlaubt eine wesentlich schwächere Bedingung als die Forderung (4.33), um die Existenz einer Gleichheitsrelation zu garantieren, bezüglich derer die Fuzzy-Mengen als Singletons interpretierbar sind. Hier bietet sich als Kandidat eine  $t$ -Norm  $\top_p''$  der Yager-Familie mit sehr kleinem Parameter  $p > 0$  an. In diesem Fall ergibt sich anstelle von (4.33) die schwächere Voraussetzung

$$(1 - \mu_i(x))^p + (1 - \mu_j(x))^p \geq 1.$$

Allerdings ist es schwierig, eine geeignete Semantik für Gleichheitsrelationen bezüglich solcher  $t$ -Normen anzugeben.  $\square$

Eine Fuzzy-Partitionierung, die bestimmte sinnvolle Bedingungen erfüllt, induziert eine Gleichheitsrelation unter der die Fuzzy-Mengen als Singletons interpretiert werden können. Die unmittelbare Vereinfachung auf eine Gleichheitsrelation kann sich jedoch als schwierig erweisen. Manchmal ist ein Experte in der Lage, Fuzzy-Mengen anzugeben, die gemäß der zu bestimmenden Gleichheitsrelation als Singletons interpretiert werden können. Durch ein Singleton für einen bestimmten Punkt  $x_0$  (in Form einer Fuzzy-Menge  $\mu_{x_0}$ ) kann lokal in einer gewissen Umgebung des Punktes  $x_0$  eine Gleichheitsrelation bestimmt werden. Es kann daher sinnvoll sein, direkt Fuzzy-Partitionierungen anstelle der Gleichheitsrelationen zu definieren. Es ist möglich, mit Hilfe von Satz 4.8 und Gleichung (4.19), die zu einer gegebenen Fuzzy-Partitionierung gehörige Gleichheitsrelation zu bestimmen. Folglich liefert Satz 4.8 eine Prüfverfahren, ob eine gegebene Partitionierung sinnvoll ist. Es ist zu beachten, daß die Faustregel, die fordert, daß die Zugehörigkeitsgrade benachbarter Fuzzy-Mengen  $\mu_i$  und  $\mu_j$  einer Fuzzy-Partitionierung sich zu 1 addieren, sicherstellt, daß die zugehörige Gleichheitsrelation (in bezug auf die  $t$ -Norm  $\top_{\text{Luka}}$ ) existiert.

## 4.5 Fuzzy-Regelung und Relationalgleichungen

In diesem Abschnitt wenden wir die Theorie der (Fuzzy-)Relationalgleichungen auf Fuzzy-Regler an. Dazu fassen wir die Meßgrößen  $\xi_1, \dots, \xi_n$  zu einer Meßgröße bzw. zu einem Meßgrößentupel  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  zusammen. Der Wertebereich von  $\xi$  ist der Produktraum  $X = X_1 \times \dots \times X_n$ . Die zu betrachtenden Regeln haben die Form

$$\text{if } \xi \text{ is } A \text{ then } \eta \text{ is } B, \quad (4.36)$$

Dabei stellen  $A$  und  $B$  linguistische Terme dar, denen jeweils eine Fuzzy-Menge  $\mu_A$  von  $X$  bzw.  $\nu_B$  von  $Y$  entspricht. Regeln der Art

$$\text{if } \xi_1 \text{ is } A_1 \text{ and } \dots \text{ and } \xi_n \text{ is } A_n \text{ then } \eta \text{ is } B,$$

wie wir sie im Rahmen des Mamdani-Fuzzy-Reglers kennengelernt haben, lassen sich ohne weiteres in die Form (4.36) übersetzen. Dem „linguistischen Term“  $A = (A_1, \dots, A_n)$  wird einfach die Fuzzy-Menge

$$\begin{aligned} \mu_A : X &\rightarrow [0, 1], \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \min\{\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)\}, \end{aligned}$$

zugeordnet. Dabei ist  $\mu_{A_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) die dem linguistischen Term  $A_i$  entsprechende Fuzzy-Menge.

Um die Begründung der Fuzzy-Regelung über die Theorie der Relationalgleichungen besser veranschaulichen zu können, betrachten wir zunächst nur scharfe Mengen. Die

Lösung einer Regelungsaufgabe besteht in der Angabe einer Funktion  $\varphi : X \rightarrow Y$ , die jedem Meßwert  $x \in X$  einen geeigneten Stellwert zuordnet. Formal entspricht die Abbildung  $\varphi$  der Relation

$$R_\varphi = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y. \quad (4.37)$$

Mit Hilfe der Relation  $R_\varphi$  läßt sich für einen Meßwert  $x \in X$  der Stellwert  $\varphi(x)$  durch die Beziehung

$$\{\varphi(x)\} = \{x\} \circ R_\varphi.$$

berechnen. Dabei ist die Komposition  $\circ$  einer Menge  $M \subseteq X$  mit einer Relation  $R \subseteq X \times Y$  wie üblich durch

$$M \circ R \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid \exists x \in X : (x \in M \wedge (x, y) \in R)\} \subseteq Y. \quad (4.38)$$

definiert.

Wir verallgemeinern diesen Ansatz auf Mengen von Meß- und Stellwerten. Gegeben seien die Mengen  $M_1, \dots, M_r \subseteq X$  und  $N_1, \dots, N_r \subseteq Y$ . Gesucht ist eine Relation  $R \subseteq X \times Y$  mit

$$\forall i \in \{1, \dots, r\} : N_i = M_i \circ R. \quad (4.39)$$

Diese Beziehungen sollen bedeuten, daß der Stellwert aus der Menge  $N_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) zu wählen ist, falls der Meßwert aus der Menge  $M_i$  stammt. Wenn wir aus der Vorgabe der Mengen  $M_1, \dots, M_r$  und  $N_1, \dots, N_r$  die Relation  $R$  bestimmt haben, können wir für eine beliebige Menge  $M \subseteq X$  von Meßwerten die zugehörige Menge  $N = M \circ R$  von Stellwerten berechnen.  $M$  könnte dabei einer impräzisen Beobachtung der Stellgröße entsprechen. Wir setzen hierbei nicht voraus, daß die Relation  $R$  eine Abbildung im Sinne von (4.37) wiedergibt.

Das zu lösende Problem besteht damit in der Bestimmung einer Relation  $R$ , die die Bedingung (4.39) bei fest vorgegebenen Mengen  $M_i$  bzw.  $N_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) erfüllt. Nachdem wir das Problem für scharfe Mengen formuliert haben, wenden wir uns der Verallgemeinerung auf Fuzzy-Mengen zu.

Gegeben seien Fuzzy-Mengen  $\mu_1, \dots, \mu_r$  von  $X$  bzw.  $\nu_1, \dots, \nu_r$  von  $Y$ . Gesucht ist eine *Fuzzy-Relation*  $\varrho$ , d.h. eine Fuzzy-Menge von  $X \times Y$ , die der Forderung

$$\forall i \in \{1, \dots, r\} : \nu_i = \mu_i \circ \varrho.$$

genügt. Zunächst müssen wir erklären, wie die Komposition  $\circ$  einer Fuzzy-Menge  $\mu$  von  $X$  mit einer Fuzzy-Relation  $\varrho$  auf  $X \times Y$  definiert ist. Wir verwenden dafür die Gleichung (4.38) und „fuzzifizieren“ sie nach den Regeln des Abschnitts 2.7. Man erhält, daß die Komposition der Fuzzy-Menge  $\mu$  mit der Fuzzy-Relation  $\varrho$  die Fuzzy-Menge

$$\mu \circ \varrho : Y \rightarrow [0, 1], \quad y \mapsto \sup_{x \in X} \{\min\{\mu(x), \varrho(x, y)\}\} \quad (4.40)$$

von  $Y$  liefert. Die Konjunktion in (4.38) werten wir durch das Minimum, den Existenzquantor durch das Supremum.

$\varrho$	140	160	180	200	220
$k$	1.0	0.5	0.1	0.0	0.0
$m$	0.0	0.5	1.0	0.5	0.0
$g$	0.0	0.0	0.4	0.8	1.0

Tabelle 4.5: Die Fuzzy-Relation  $\varrho$ 

				1.0	0.5	0.1	0.0	0.0
				0.0	0.5	1.0	0.5	0.0
				0.0	0.0	0.4	0.8	1.0
0.0	0.6	1.0		0.0	0.5	0.6	0.8	1.0

Tabelle 4.6: Falk-Schema zur Berechnung von  $\nu = \mu \circ \varrho$ 

**Beispiel 4.13** Wir betrachten die Menge  $X = \{k, m, g\}$  der Autoklassen Kleinwagen ( $k$ ), Mittelklassewagen ( $m$ ) und Auto der gehobenen Klasse ( $g$ ).  $Y = \{140, 160, 180, 200, 220\}$  sei die Menge der möglichen Höchstgeschwindigkeiten (in km/h). Die Fuzzy-Relation  $\varrho$  (siehe Tabelle 4.5) über der Menge  $X \times Y$  gibt für jedes Paar  $(x, y) \in X \times Y$  an, inwieweit es für möglich gehalten wird, daß die Höchstgeschwindigkeit eines Wagens der Klasse  $x$  gerade  $y$  beträgt.

Die Fuzzy-Menge  $\nu$  von  $Y$  der möglichen Geschwindigkeiten eines Klein- oder Mittelklassewagens können wir mit Hilfe der Gleichung (4.40) berechnen, indem wir als Fuzzy-Menge  $\mu$  von  $X$  die charakteristische Funktion der Menge  $\{k, m\}$  wählen, d.h.  $\mu = \mathbb{1}_{\{k, m\}}$ . Für  $\nu$  ergibt sich  $\nu(140) = 1.0$ ,  $\nu(160) = 0.5$ ,  $\nu(180) = 1.0$ ,  $\nu(200) = 0.5$ ,  $\nu(220) = 0.0$ .

Wenn wir etwas über die Höchstgeschwindigkeit eines Autos erfahren wollen, das von einem süddeutschen Autohersteller produziert wurde, bietet sich die Fuzzy-Menge  $\mu$  mit  $\mu(k) = 0.0$ ,  $\mu(m) = 0.6$ ,  $\mu(g) = 1.0$  als Repräsentant der möglichen Klassen des Autos an. Die Berechnung der Fuzzy-Menge  $\nu$  der möglichen Höchstgeschwindigkeiten mit Hilfe der Gleichung (4.40) läßt sich durch ein Falk-Schema, wie in der Tabelle 4.6 dargestellt, veranschaulichen. Wir schreiben dazu die Fuzzy-Menge  $\mu$  als Zeilenvektor links unten in das Schema. Die Fuzzy-Relation  $\varrho$  wird wie in Tabelle 4.5 in Matrixform oben in das Schema eingetragen. Die Fuzzy-Menge  $\nu$  ergibt sich dann als Zeilenvektor unten rechts. Zur Berechnung des Wertes  $\nu(140)$  transponieren wir den Zeilenvektor, der die Fuzzy-Menge  $\mu$  repräsentiert, und bilden mit dem ersten Spaltenvektor komponentenweise das Minimum. Das Maximum der drei so erhaltenen Werte ist der Zugehörigkeitsgrad des Elementes 140 zu der Fuzzy-Menge  $\nu$ . Die Zugehörigkeitsgrade der anderen Geschwindigkeiten erhält man entsprechend. Es ergibt sich  $\nu(140) = 0.0$ ,  $\nu(160) = 0.5$ ,  $\nu(180) = 0.6$ ,  $\nu(200) = 0.8$ ,  $\nu(220) = 1.0$ .  $\square$

Um einen Satz über die Lösbarkeit einer einzelnen Relationalgleichung  $\nu = \mu \circ \varrho$  formulieren zu können, benötigen wir die Gödel-Relation  $\varrho_{\mu,\nu}^{\text{Gödel}}$ , die auf der Gödel-Implikation basiert. In der Terminologie des Abschnittes 2.7 wird  $\varrho_{\mu,\nu}^{\text{Gödel}}$  definiert durch

$$(x, y) \in \varrho_{\mu,\nu}^{\text{Gödel}} \iff (x \in \mu \rightarrow y \in \nu), \quad (4.41)$$

wobei die Implikation  $\rightarrow$  im Sinne der Gödel-Implikation ausgewertet wird, d.h.

$$\varrho_{\mu,\nu}^{\text{Gödel}} = \begin{cases} \nu(x), & \text{falls } \nu(x) < \mu(x) \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Satz 4.14** *Es seien  $\mu \in F(X)$ ,  $\nu \in F(Y)$ . Außerdem sei  $\varrho \in F(X \times Y)$  eine Fuzzy-Relation, die die Relationalgleichung  $\nu = \mu \circ \varrho$  erfüllt. Dann folgt*

- (i)  $\varrho \leq \varrho_{\mu,\nu}^{\text{Gödel}}$
- (ii) *Die Gödel-Relation ist ebenfalls eine Lösung der Relationalgleichung, d.h.  $\nu = \mu \circ \varrho_{\mu,\nu}^{\text{Gödel}}$ .*

**B e w e i s :**

- (i) Es sei  $x \in X$ ,  $y \in Y$ .  
Falls  $\mu(x) \leq \nu(y)$  gilt, folgt  $\varrho(x, y) \leq 1 = \varrho_{\mu,\nu}^{\text{Gödel}}(x, y)$ .  
Es gelte also  $\nu(y) < \mu(x)$ . Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \varrho_{\mu,\nu}^{\text{Gödel}}(x, y) &= \nu(y) \\ &= \sup_{x' \in X} \{\min\{\mu(x'), \varrho(x', y)\}\} \\ &\geq \min\{\mu(x), \varrho(x, y)\}. \end{aligned}$$

Wegen  $\mu(x) > \nu(y)$  folgt  $\min\{\mu(x), \varrho(x, y)\} = \varrho(x, y)$ .

- (ii) Es sei  $y \in Y$ . Offenbar gilt

$$(\mu \circ \varrho_{\mu,\nu}^{\text{Gödel}})(y) = \sup_{x \in X} \{\min\{\mu(x), \varrho_{\mu,\nu}^{\text{Gödel}}(x, y)\}\} \leq \nu(y)$$

- (i) impliziert

$$\begin{aligned} \nu(y) &= (\mu \circ \varrho)(y) \\ &= \sup_{x \in X} \{\min\{\mu(x), \varrho(x, y)\}\} \\ &\leq \sup_{x \in X} \{\min\{\mu(x), \varrho_{\mu,\nu}^{\text{Gödel}}(x, y)\}\} \\ &= (\mu \circ \varrho_{\mu,\nu}^{\text{Gödel}})(y). \end{aligned} \quad \square$$

Satz 4.14 besagt, daß die Gödel-Relation die größte Lösung der Relationalgleichung  $\nu = \mu \circ \varrho$  ist, sofern überhaupt eine Lösung dieser Gleichung existiert. Der folgende Satz erweitert diese Aussage auf ein System von  $r$  Relationalgleichungen  $\nu_i = \mu_i \circ \varrho$  ( $i = 1, \dots, r$ ). Wenn dieses System überhaupt eine Lösung besitzt, so ist die Fuzzy-Relation  $\min_{i \in \{1, \dots, r\}} \{\varrho_{\mu_i, \nu_i}^{\text{Gödel}}\}$  die größte Lösung dieses Systems.

**Satz 4.15** *Es seien  $\mu_i \in F(X), \nu_i \in F(Y)$  ( $i = 1, \dots, r$ ). Außerdem sei  $\varrho \in F(X \times Y)$  eine Fuzzy-Relation, die das System von  $r$  Relationalgleichungen  $\nu_i = \mu_i \circ \varrho$  löst. Mit der Abkürzung  $\varrho_r \stackrel{\text{def}}{=} \min_{i \in \{1, \dots, r\}} \{\varrho_{\mu_i, \nu_i}^{\text{Gödel}}\}$  folgt*

$$(i) \quad \varrho \leq \varrho_r,$$

$$(ii) \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} : \quad \nu_i = \mu_i \circ \varrho_r.$$

**B e w e i s :**

(i) Mit Satz 4.14(i) folgt

$$\forall i \in \{1, \dots, r\} : \quad \varrho \leq \varrho_{\mu_i, \nu_i}^{\text{Gödel}}$$

und damit  $\varrho \leq \varrho_r$ .

(ii) Es sei  $i \in \{1, \dots, r\}, y \in Y$ . Wir erhalten

$$(\mu_i \circ \varrho_r)(y) \leq (\mu_i \circ \varrho_{\mu_i, \nu_i}^{\text{Gödel}})(y) \leq \nu_i(y).$$

Außerdem gilt

$$\nu_i(y) = (\mu_i \circ \varrho)(y) \leq (\mu_i \circ \varrho_r)(y). \quad \square$$

Das Prinzip der Lösung von Systemen von Relationalgleichungen  $\nu_i = \varrho \circ \mu_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) auf der Basis der Sätze 4.14 und 4.15 besteht darin, zunächst für jede einzelne Relationalgleichung die größte Lösung in Form der Gödel-Relation zu bestimmen, um dann durch das Minimum über die Lösungen der einzelnen Gleichungen eine Gesamtlösung für das System zu erhalten. Sofern das System von Relationalgleichungen überhaupt eine Lösung besitzt, führt dieses Verfahren auch zum Ziel. Setzen wir die Lösbarkeit voraus, so entspricht die schrittweise Berechnung der Lösung  $\varrho_r$  in der Form

$$\varrho_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1}_{X \times Y}, \quad \varrho_{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\varrho_i, \varrho_{\mu_i, \nu_i}^{\text{Gödel}}\} \quad (i = 0, \dots, r-1)$$

dem Prinzip, sukzessive die Systeme von Relationalgleichungen  $\mathcal{R}_i = \{\nu_1 = \mu_1 \circ \varrho, \dots, \nu_i = \mu_i \circ \varrho\}$  ( $i = 0, \dots, r$ ) jeweils durch die größte Fuzzy-Relation  $\varrho_i$  zu lösen, und diese Fuzzy-Relation jeweils zur Lösung einer weiteren Relationalgleichung zu verkleinern.

Es ist naheliegend, dieses Prinzip umkehren zu wollen, d.h., von der kleinsten Lösung einer Relationalgleichung auszugehen und diese schrittweise zu vergrößern, um eine

Lösung des System zu finden. Im allgemeinen gibt es jedoch keine kleinste Lösung einer Relationalgleichung, selbst wenn eine Lösung der Relationalgleichung existiert. Man behilft sich daher mit einer „kleinen“ Lösung der Relationalgleichung, die in der folgenden Definition beschrieben wird.

**Definition 4.16** *Es seien  $\mu \in F(X)$ ,  $\nu \in F(Y)$ . Die Fuzzy-Relation*

$$\varrho_{\mu,\nu}^{\min} : X \times Y \rightarrow [0, 1], \quad (x, y) \mapsto \min\{\mu(x), \nu(y)\}$$

*heißt kartesisches Produkt der Fuzzy-Mengen  $\mu$  und  $\nu$ .*

Existiert überhaupt eine Lösung einer Relationalgleichung, so ist auch das kartesische Produkt der auftretenden Fuzzy-Mengen eine Lösung.

**Satz 4.17** *Es seien  $\mu \in F(X)$ ,  $\nu \in F(Y)$ . Außerdem sei  $\varrho \in F(X \times Y)$  eine Fuzzy-Relation, die die Relationalgleichung  $\nu = \mu \circ \varrho$  erfüllt. Dann folgt  $\nu = \mu \circ \varrho_{\mu,\nu}^{\min}$ .*

**B e w e i s :**

Es sei  $y \in Y$ . Es gilt

$$\begin{aligned} (\mu \circ \varrho_{\mu,\nu}^{\min})(y) &= \sup_{x \in X} \left\{ \min\{\mu(x), \varrho_{\mu,\nu}^{\min}(x, y)\} \right\} \\ &= \min \left\{ \sup_{x \in X} \{\mu(x)\}, \nu(y) \right\}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Außerdem erhalten wir aus

$$(\mu \circ \varrho)(y) = \sup_{x \in X} \left\{ \min\{\mu(x), \varrho(x, y)\} \right\} = \nu(y),$$

daß  $\sup\{\mu(x) \mid x \in X\} \geq \nu(y)$  erfüllt sein muß. Dies impliziert, daß (4.42) gleich  $\nu(y)$  ist.  $\square$

Soll ein System von Relationalgleichungen  $\nu_i = \mu_i \circ \varrho$  ( $i = 1, \dots, r$ ) mit Hilfe des Satzes 4.17 gelöst werden, bietet sich das „Zusammensetzen“ der Gesamtlösung  $\varrho$  aus den „kleinen“ Lösungen  $\varrho_{\mu_i,\nu_i}^{\min}$  der einzelnen Relationalgleichungen an. Ein sinnvoller Ansatz für eine Lösung ist

$$\varrho = \max\{\varrho_{\mu_i,\nu_i}^{\min} \mid i \in \{1, \dots, r\}\}. \quad (4.43)$$

Ist ein scharfer Meßwert  $x_0 \in X$  gegeben, den wir durch seine charakteristische Funktion  $\mathbb{1}_{\{x_0\}}$  repräsentieren, und verwenden wir die Fuzzy-Relation  $\varrho$  zur Berechnung der Fuzzy-Menge  $\nu \in F(Y)$  für den Stellwert, so erhalten wir

$$\nu(y) = (\mathbb{1}_{\{x_0\}} \circ \varrho)(y) \quad (4.44)$$

$$= \max_{i \in \{1, \dots, r\}} \left\{ \sup_{x \in X} \left\{ \min\{\mathbb{1}_{\{x_0\}}(x), \varrho_{\mu_i,\nu_i}^{\min}(x, y)\} \right\} \right\} \quad (4.45)$$

$$= \max_{i \in \{1, \dots, r\}} \left\{ \min\{\mu_i(x_0), \nu_i(y)\} \right\}. \quad (4.46)$$



Dieses Ergebnis entspricht genau der Fuzzy-Menge, die wir bei einem Mamdani-Fuzzy-Regler für den Stellwert erhalten (vgl. Gleichung (4.2)). In diesem Sinne kann ein Mamdani-Fuzzy-Regler auch auf der Basis von Relationalgleichungen begründet werden. Eine konsequentere Vorgehensweise im Hinblick auf die Lösung von Relationalgleichungen stellt allerdings die Verwendung der Gödel-Relation anstelle des kartesischen Produkts dar, da für die Gödel-Relation der allgemeinere Satz 4.15 gilt, während für das kartesische Produkt nur der schwächere Satz 4.17 erfüllt ist, der dem Satz 4.14 für die Gödel-Relation entspricht.

Wir haben mit Satz 4.15 sowohl ein Lösbarkeitskriterium für Systeme von Relationalgleichungen als auch eine Lösung im Falle der Lösbarkeit angegeben. Die angegebene Lösung ist die Relation  $\varrho_r$ . Das Lösbarkeitskriterium besteht in der Bedingung, daß  $\varrho_r$  das System von Relationalgleichungen löst. Eine leichter prüfbare Bedingung wäre jedoch wünschenswert. Diese könnte z.B. die sehr einschränkende Forderung der Disjunktheit der Fuzzy-Mengen  $\mu_1, \dots, \mu_r$  sein, d.h., es muß für alle  $i \neq j$

$$\min\{\mu_i, \mu_j\} = 0$$

gelten.

Die zentrale Rolle, die die Gödel-Relation bei der Lösung von Systemen von Relationalgleichungen spielt, hängt mit der Wahl des Minimumoperators in (4.40) für die Konjunktion in (4.38) zusammen. Eine andere  $t$ -Norm  $\top$  an dieser Stelle würde zu einer anderen Fuzzy-Relation anstelle der Gödel-Relation führen. Die entsprechende Fuzzy-Relation erhält man, indem die Implikation in (4.41) durch das zu  $\top$  gehörende Residuum ausgewertet wird.

## 4.6 Ergänzende Bemerkungen und Quellenangaben

Neben einem historischen Abriß der Entwicklung der Theorie und der Anwendungen der Fuzzy-Regelung in den letzten beiden Jahrzehnten gehen wir in diesem Abschnitt auch auf Anwendungsmöglichkeiten der in diesem Kapitel vorgestellten Konzepte und Methoden ein. Als Beispiel wird die Implementierung eines Fuzzy-Reglers zur Leerlaufregelung eines PKW-Motors beschrieben.

### 4.6.1 Historische Entwicklung: Fuzzy-Regelung

Die erste Anwendung der Fuzzy-Regelung im Labormaßstab, bei der ein Fuzzy-Regler zur Steuerung einer Dampfmaschine sowohl die Wärmezufuhr für die Dampferzeugung als auch die Ventilstellung für die Dampfzufuhr regelt, wurde in [Mamdani75] beschrieben. Implizit liegen dieser richtungsweisenden Arbeit einige von L.A. Zadeh entwickelte Konzepte zugrunde [Zadeh72b, Zadeh73, Zadeh71b]. Diesen Ideen folgend wurde die Fuzzy-Regeltechnik in [Kickert78, Braae79, Procyk79, Baldwin80, Tong80, Tong84,

Hirota80] ausgearbeitet. Die erste großtechnische Anwendung der Fuzzy-Regelung bestand in der Steuerung von Zementbrennprozessen [Holmblad82]. In [Sugeno85b] wurden später Prototypen von Fuzzy-Reglern für unterschiedliche Anwendungsgebiete vorgestellt. Der Durchbruch für Fuzzy-Techniken in Japan fand 1987 statt, als die U-Bahn in Sendai in Betrieb genommen wurde, die vollautomatisch mit Fuzzy-Reglern fährt [Yasunubo83, Yasunubo85]. International wurden die Aktivitäten im Bereich der „Fuzzy Logic“ bekannt, als das japanische LIFE-Institut (Laboratory for International Fuzzy Engineering Research) 1989 gegründet wurde, das zur Hälfte vom japanischen Ministerium für internationalen Handel und Industrie (MITI) und zur Hälfte von 49 Industrieunternehmen vieler Branchen getragen wird. Die Arbeiten aus Japan erhoben nicht den Anspruch, neue Konzepte aufzuzeigen, sondern wurden als Anwendung der Theorien von L.A. Zadeh gesehen. Neu war, daß japanische Hersteller überwiegend Hardware-Lösungen wie Fuzzy-Chips oder Fuzzy-Computer genannte spezielle Mikroprozessoren verwendeten.

1990 wurde oft von erfolgreichen industriellen Anwendungen in Japan im Bereich der Haushaltsgeräte wie Waschmaschinen, Camcorder und Staubsauger, aber auch in Container-Hubkränen, Aufzügen und Kraftwerken berichtet und erste, auch in Europa gültige Patente für Fuzzy-Computer wurden erteilt (offizielle deutsche Übersetzung in der Patentschrift: fusseliger Computer). Einige erfolgreiche Anwendungen werden in [White92, Hirota93, Jamshidi93, Terano92, Kandel91, Munakata94, Asakawa94, Kruse94] vorgestellt.

## 4.6.2 Fuzzy-Regelungstechnik

Fuzzy-Regelsysteme können auf zwei Arten interpretiert werden. Einmal wird Fuzzy-Regelungstechnik aufgefaßt als spezieller Typ eines Echtzeit-Expertensystems, das einen Teil des Wissens eines menschlichen Bedieners oder Verfahrenstechnikers durch Situations-Handlungs-Regeln repräsentiert — in [Taunton89] findet man einen Überblick experimenteller Anwendungen von Expertensystemen in der Prozeßsteuertechnik. In diesem Buch verwenden wir die zweite Interpretation, die von Regelungstechnikern bevorzugt wird: Ein Fuzzy-Regler ist ein nicht-lineares, zeit-invariantes, dynamikfreies Rückkopplungsgesetz. In dieser Sichtweise ist das zu regelnde System ein nicht-fuzzy System, ein Fuzzy-Regler gehört zur Klasse der nicht-linearen Regler (oft als tabellenbasierte Regler bezeichnet), für die die Übertragungsfunktion im Prinzip eine statische, vieldimensionale, nicht-lineare Abbildung über den Raum der Reglereingaben ist (dieser Reglertyp wird in der Regelungstechnik oft dann verwendet, wenn alle anderen Versuche, das Problem zu lösen, fehlgeschlagen sind [Pfeiffer93]).

In den zahlreichen Anwendungen der Fuzzy-Regelung dienen vor allem die Mamdani- [Mamdani75] und Sugeno-Fuzzy-Regler [Sugeno85a, Sugeno85c, Sugeno85d] als Grundlage. Häufig werden auch Modifikationen dieser Regler entwickelt: Ein Überblick über verschiedene Konzepte und Techniken der Fuzzy-Regelung ist in [Pedrycz93, Driankov93, Klawonn95] enthalten.

Zu Mißverständnissen — insbesondere bei der Darstellung von Mamdani-Fuzzy-Reglern — führte häufig eine falsche Sichtweise, die einzelne Regeln im Sinne von logischen Implikationen betrachtet und die Regelbasis als System konjunktiv verknüpfter Regeln auffaßt. Bezeichnungen wie Generalized Modus Ponens für den Minimum-Operator tragen zur Verwirrung bei. Es ist durchaus möglich, Fuzzy-Regler auf der Basis einer Interpretation der Regeln als logische Implikationen zu entwerfen. Dies führt aber zu Berechnungsvorschriften, die von denen der Mamdani- und Sugeno-Fuzzy-Regler abweichen. Eine Deutung der Regelbasis als possibilistisches Regelsystem, wie es im Abschnitt 3.3 diskutiert wurde, hat die Verwendung der Gödel-Implikation zur Folge, so daß sich ein Fuzzy-Regler ergibt, der eher dem im Abschnitt 4.5 vorgestellten Entwurf auf der Grundlage von Relationalgleichungen entspricht [Gottwald86a, Gottwald86b, Gebhardt93b]. Eine streng logische Interpretation der Regeln ergibt einen Fuzzy-Regler, dessen Entscheidungslogik auch eine scharfe Menge anstelle einer Fuzzy-Menge liefern kann [Klawonn92b].

In Abschnitt 4.4 haben wir gezeigt, daß Fuzzy-Regler in das Gebiet der Interpolations- und Approximationstheorie eingebettet werden können [Klawonn93a, Klawonn93b]. In diesem Zusammenhang sind theoretische Ergebnisse über Fuzzy-Regler von Bedeutung, z.B. die der Arbeiten [Kosko92a] und [Buckley93b], in denen bewiesen wird, daß durch bestimmte Fuzzy-Regler jede stetige Funktion auf einer kompakten Menge bis zu einem beliebigen Grad an Genauigkeit angenähert werden kann.

Gleichheitsrelationen, die die Grundlage des Abschnittes 4.4 bilden, werden ausführlich in [Höhle90, Höhle91, Coulon92, Höhle92] behandelt, wo auch verschiedene Verallgemeinerungen dieses Konzepts erörtert werden, z.B. durch Ersetzung der Forderung nach totaler Existenz oder durch Ersetzung des Einheitsintervalls durch andere Verbände (Heyting-Algebren, MV-Algebren, Boolesche Algebren [Höhle85, Klawonn92a]). Gleichheitsrelationen werden oft auch als *Ähnlichkeitsrelationen* (similarity relations) [Zadeh71b] oder *Ununterscheidbarkeitsoperatoren* (indistinguishability operators) [Valverde85, Jacas92] bezeichnet. Der Begriff Operator wird verwendet, da Gleichheitsrelationen als Fuzzy-Relationen wie im Abschnitt 4.5 aufgefaßt werden. In diesem Sinne läßt sich für die  $t$ -Norm  $\top_{\min}$  die extensionale Hülle  $\nu$  einer Menge — oder allgemeiner — einer Fuzzy-Menge  $\mu$  bezüglich der Gleichheitsrelation  $E$  mittels  $\nu = \mu \circ E$  berechnen. Ein Resultat der Aufsätze [Valverde85, Jacas92] ist, daß die Gleichheitsrelation (4.19) die Extensionalität aller Fuzzy-Mengen einer Familie  $(\mu_i)_{i \in I}$  garantiert. Satz 4.8 verschärft dieses Ergebnis dadurch, daß die Fuzzy-Mengen  $\mu_i$  sogar als Singletons interpretiert werden können, wenn die dort geforderte Voraussetzung erfüllt ist.

Betrachtet man Gleichheitsrelationen als Ununterscheidbarkeitsoperatoren, führt diese Sichtweise zu Fuzzy-Relationalgleichungen. Der Begriff der Fuzzy-Relationalgleichung für die in (4.40) beschriebene Max-Min-Komposition stammt von E. Sanchez [Sanchez76]. Dieser Gleichungstyp wurde für endliche Mengen in [Czogala82] ausführlich diskutiert und in [Gottwald86a, Gottwald86b] analysiert. [Nola89, Nola83] beschreiben umfassend diese Theorie sowie Verallgemeinerungen für andere Relationalgleichungstypen. Eine ausführliche Darstellung des Zusammenhangs zwischen Fuzzy-Relationen und Fuzzy-Regelung findet sich in [Pedrycz93].

### 4.6.3 Realisierung von Fuzzy-Reglern

Das Ziel eines Lehrbuches besteht vor allem darin, die grundlegenden Konzepte einer Theorie oder eines Modells zu vermitteln. Wir haben daher in Kapitel 4 vor allem Wert darauf gelegt, die Idee der kognitiven Analyse eines Prozesses, die elementaren Fuzzy-Regler von Mamdani und Sugeno und die Semantik von Fuzzy-Reglern auf der Basis von Gleichheitsrelationen oder Fuzzy-Relationalgleichungen darzustellen. Zu den pragmatischen Aspekten beim Entwurf und der Realisierung eines Fuzzy-Reglers geben wir hier nur einige Hinweise.

Soll ein regelungstechnisches Problem mit Hilfe eines Fuzzy-Reglers gelöst werden, so müssen die vorgestellten Konzepte nicht unbedingt eigenständig implementiert werden. Es werden inzwischen von verschiedenen Firmen Entwurfswerkzeuge angeboten, die die Realisierung eines Fuzzy-Reglers unterstützen. Unter einer graphischen Oberfläche oder mit Hilfe eines Texteditors können bei diesen Tools sowohl Regeln und Fuzzy-Mengen eingegeben und verändert als auch — bei einigen Programmen — ein geeigneter Inferenzmechanismus der Entscheidungslogik ausgewählt werden. Manche enthalten einen Simulator, andere verfügen über entsprechende Schnittstellen. Als Resultat erhält man bei einer reinen Softwarelösung den Fuzzy-Regler in Form von C-, PASCAL-, ADA- oder FORTRAN-Code. Andere Entwicklungswerkzeuge ermöglichen direkt die Programmierung spezieller Fuzzy-Hardware, die eine sehr schnelle Durchführung der Operationen verspricht.

Der Vorteil solcher Systeme besteht darin, daß eine komfortable Umgebung zur schnellen Realisierung eines Fuzzy-Reglers bereitgestellt wird, die eine aufwendige Eigenentwicklung erspart. Ob sich der Kauf rentiert, hängt vom Einzelfall ab. Ein Nachteil ist sicherlich die z.B. durch sehr eingeschränkte Formen von Fuzzy-Mengen (Dreiecksfunktionen, Trapeze) oder vereinfachende Defuzzifizierungsstrategien oft geringe Flexibilität der Produkte.

Soll eine eigene Implementierung vorgenommen werden, müssen Kompromisse zwischen aufwendigen, flexiblen Modellen und einfachen, aber schnellen Realisierungen getroffen werden. In den meisten Fällen ist es sinnvoll eine geeignete Diskretisierung sowohl in Ordinateurichtung für die Zugehörigkeitsgrade als auch in Abzissenrichtung für die Werte der Meßgrößen und der Stellgröße vorzunehmen.

Für die Implementierung Fuzzy-Reglers mit Echtzeitanforderungen bieten sich drei Möglichkeiten an.

- Die Berechnungen der Entscheidungslogik werden auf der Grundlage geeigneter Hardware direkt ausgeführt. Dies führt zu hohen Anforderungen an die Rechenleistung, dafür wird aber nur eine geringe Speicherkapazität benötigt.
- Das durch den Fuzzy Regler induzierte Kennfeld, d.h. die Übertragungsfunktion, wird vorberechnet und gespeichert, so daß um den Preis eines hohen Speicheraufwands keine große Rechnerleistung erforderlich ist.

- Als Kompromiß zwischen den beiden erstgenannten Lösungen kann die Relationsmatrix, die wie am Ende des Abschnitts 4.5 angegeben zu berechnen ist, abgespeichert werden.

Eine effiziente Implementierung eines Fuzzy-Reglers setzt voraus, daß die verwendeten Operationen einfach und schnell ausführbar sind. Beliebige Fuzzy-Mengen anstelle stückweise linearer Zugehörigkeitsfunktionen oder anderer  $t$ -Normen und  $t$ -Conormen als das Minimum bzw. das Maximum führen oft zu aufwendigen Berechnungen, so daß möglicherweise nicht mehr den Anforderungen an die Reaktionszeiten genügt werden kann. Häufig wird auch eine Modifikation der Schwerpunktmethode zur Defuzzifizierung verwendet. Anstelle der rechenintensiven Gleichung (4.3) bzw. der im Abschnitt 4.3.6 angegebenen Version für diskrete Mengen bestimmt man die Abzissenwerte der Schwerpunkte  $y_r$  der Fuzzy-Mengen  $\mu_r$  für die Stellgröße in der Regel  $R_r$  im voraus und bildet anschließend das mit den Erfüllungsgraden  $\alpha_r$  der Prämissen der zugehörigen Regeln gewichtete Mittel.

$$\eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{r=1}^k \alpha_r y_r}{\sum_{r=1}^k \alpha_r}, \quad \text{wobei}$$

$$y_r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\int_{y \in Y} \mu_r(y) dy} \int_{y \in Y} y \mu_r(y) dy \quad \text{bzw.}$$

$$y_r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sum_{y \in Y} \mu_r(y)} \sum_{y \in Y} y \mu_r(y).$$

Die Defuzzifizierung ist ein prinzipielles Problem der Fuzzy-Regelungstechnik, das in den meisten Fällen auf völlig heuristischer Grundlage gelöst wird. In letzter Zeit wurden einige Defuzzifizierungsmethoden, die Methoden wie COG und MOM verallgemeinern, vorgeschlagen [Yager93a, Yager93b]. Einige Defuzzifizierungsstrategien sind sogar durch Patente geschützt [Frank93]. Dennoch bleibt die Defuzzifizierung ein heuristisches Gebiet, obwohl einige Autoren Bedingungen formuliert haben, die von jeder sinnvollen Defuzzifizierungsmethode erfüllt werden sollten [Driankov93, Runkler93].

Insgesamt sollte man die hier vorgestellten Konzepte nur als Grundlagen und nicht als Vorschriften verstehen. Wir haben z.B. aus Gründen der Vereinfachung fast immer vorausgesetzt, daß in der Prämisse einer Regel alle Meßgrößen  $\xi_1, \dots, \xi_n$  auftauchen. In Anwendungen kann jedoch der Fall eintreten, daß für bestimmte Bereiche einiger Meßgrößen der Wert der anderen Meßgrößen für die Bestimmung der Stellgröße belanglos ist. In diesem Fall ergeben sich einige Regeln, in denen nur die für diese Regel relevanten Meßgrößen auftreten. Es ist ebenfalls möglich, neben der Und-Verknüpfung in den Regeln auch Konnektive wie Disjunktion oder Negation mit entsprechenden Auswertungsfunktionen zuzulassen. Desweiteren kann dem Fuzzy-Regler auch ein I-Glied nachgeschaltet werden, so daß die Ausgabe des Fuzzy-Reglers nicht die Stellgröße selbst, sondern nur deren Änderung beschreibt.

Nach dem Rohentwurf eines Fuzzy-Reglers sind im allgemeinen noch Feineinstellungen und Optimierungen vorzunehmen. Soll diese Optimierung nicht manuell durchgeführt werden, sind geeignete automatische Verfahren bereitzustellen. Hierfür bieten sich Neuronale Netze an, die das Erlernen einer optimalen Regelungsstrategie unterstützen können. Im Rahmen dieses Buches geben wir nur einige Hinweise zu den zahlreichen Vorschlägen zur Kopplung von Fuzzy-Reglern und Neuronalen Netzen. Details finden sich in der Monographie [Nauck94].

Die einfachste Möglichkeit, Neuronale Netze zur Verbesserung eines Fuzzy-Reglers einzusetzen, besteht in dem Erlernen bestimmter Parameter des Reglers durch ein Neuronales Netz. Werden beispielsweise die Fuzzy-Mengen in parametrisierter Form angegeben, kann ein Neuronales Netz diese Parameter optimieren und somit die zu den linguistischen Termen korrespondierenden Fuzzy-Mengen erlernen [Ichihashi91, Nomura92a]. Andere Ansätze lassen beliebige Fuzzy-Mengen zu und erlernen den Erfüllungsgrad der Prämisse einer Regel mit einem Multilayer Perzeptron [Hayashi92, Takagi91a, Takagi91b] durch geeignetes Clustering. Techniken der Fuzzy-Cluster-Analyse in Verbindung mit Neuronalen Netzen [Bezdek92b] werden auch in [Kosko92b] verwendet.

Bei der Kombination von Fuzzy-Reglern und Neuronalen Netzen muß nicht unbedingt eine strenge Trennung zwischen dem Regler und dem Netz vorgenommen werden. Eine solche Trennung bedeutet, daß das Neuronale Netz dafür eingesetzt wird, bestimmte Parameter oder Teile des Fuzzy-Reglers zu erlernen. H.R. Berenji [Berenji92] stellt eine spezielle Architektur eines Neuronalen Netzes vor, die ermöglicht, das Neuronale Netz als Fuzzy-Regler zu interpretieren. Umgekehrt gibt es Ansätze, einen Fuzzy-Regler als Neuronales Netz zu interpretieren [Eklund92b, Nauck92a, Nauck92b, Nauck93]. Vorschläge zur Kopplung von Neuronalen Netzen und Fuzzy-Systemen im allgemeinen findet man z.B. in [Eklund92a, Keller92a, Keller92b], für Mustererkennungsprobleme in [Pao89].

Zur automatischen Optimierung von Fuzzy-Reglern lassen sich neben Neuronalen Netzen auch Genetische Algorithmen einsetzen, mit denen beispielsweise (parametrische) Fuzzy-Mengen [Karr89, Karr92a, Karr92b, Karr92c, Nomura92b, Quian92, Lee93] [Kinzel94a], die Anzahl der Regeln [Karr91, Hopf94, Kinzel94b] oder auch eine geeignete Fuzzy-Relation im Sinne des Abschnittes 4.5 [Pham91] erlernt werden können.

Aus der Sicht der Regelungstechnik sind die in diesem Buch untersuchten Fuzzy-Regler regelbasierte Regler. Um mit Regeln darstellen zu können, die angeben, wie ein Experte das System beherrscht, muß man einen entsprechend großen, vollständigen und widerspruchsfreien Satz von Regeln aufstellen, der oft schwer zu überschauen und zu warten ist. Dies hat sich schon bei der Entwicklung regelbasierter Systeme in der Künstlichen Intelligenz (KI) als kompliziertes Problem herausgestellt. Außerdem arbeitet ein Fuzzy-Regler nur als reiner (nichtlinearer) Proportionalregler seiner Eingangsgrößen. Um die Regelung von zeitlichen Veränderungen seiner Regelgröße abhängig zu machen, muß man einen Differenzierer außerhalb des Fuzzy-Reglers vorschalten und die zeitliche Veränderung als weitere Eingangsgröße auffassen.

Im Gegensatz zu den verschiedenen klassischen Regeltechniken gibt es für Fuzzy-

Regler nur wenige Methoden die Stabilität garantieren oder mit denen man auf Stabilität prüfen kann. Existiert jedoch kein mathematisches Modell wegen nicht ausreichend genauer Sensorinformationen, der Komplexität und der Kopplungsstruktur des Systems, des veränderlichen Prozeßverhaltens oder wegen Schwierigkeiten beim Vorhersagen der Dynamik des Systems, dann ist weder für klassische regeltechnische noch für Fuzzy-Methoden eine Stabilitätsprüfung möglich. In der Praxis geschieht die Überprüfung dann oft durch Simulationen und massives Testen. Falls ein lineares Systemmodell existiert, kann ein guter Regler systematisch auf der Basis klassischer Methoden (z.B. PID-Regler) entworfen werden. Das gleiche gilt zum Teil auch für nicht-lineare Modelle [Isermann92], aber Untersuchungen wie [Boverie91, Boverie92], in denen Fuzzy-, PID-, und adaptive Regler durch einen Benchmarktest verglichen wurden, zeigen, daß es oft sehr gute Gründe gibt, dennoch Fuzzy-Regler einzusetzen [Pfeiffer93]. Für einfache Fälle gibt es sogar schon Methoden zur Stabilitätsprüfung (z.B. [Bouslama92, Tanaka92, Hwang92, Driankov93, Kiendl93]), aber es muß festgestellt werden, daß immer noch ein Mangel an systematischen Entwurfsmethoden für Fuzzy-Regler besteht. Der Einsatz eines Fuzzy-Reglers bietet sich an, wenn

- kein zufriedenstellendes Modell des zu regelnden Prozesses existiert oder
- ein solches Modell nur mit (zu) hohem Aufwand erstellt werden kann,

ein Experte jedoch in der Lage ist, statt eines Prozeßmodells sein Wissen in Form von linguistischen Regeln anzugeben, wie dies bei einem Zementbrennofen [Holmblad82] oder in unserem im folgenden Abschnitt dargelegten Fallbeispiel möglich ist.

Fuzzy-Regelung kann außerdem angewendet werden für unkomplizierte, robuste technische Prozesse, für die keine besonders hohen Qualitätsanforderungen bestehen und für die billige Standard-Hardwarelösungen (z.B. Fuzzy-Chips) verwendet werden können, etwa im Falle von Haushaltsgeräten wie Staubsaugern. Fuzzy-Methoden führen in solchen Anwendungen oft zu einer Zeitersparnis bei der Entwicklung des Reglers.

#### 4.6.4 Fuzzy-Regelung der Leerlaufdrehzahl eines PKW-Motors — Eine Implementierung

Die in diesem Kapitel vorgestellten Konzepte und Methoden der Fuzzy-Regelung wurden in einer Kooperation zwischen dem Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund der TU Braunschweig und der Volkswagen AG Wolfsburg auf das Problem der Leerlaufdrehzahlregelung des VW 2000cc 116hp Motors (Golf GTI) angewandt. Es stellte sich heraus, daß Fuzzy-Methoden zu einem einfacheren Entwurf und einer besseren Regelqualität gegenüber dem vorhandenen Serienregler führen.

Das Motiv für diese Anwendung war, daß die in den letzten Jahren verschärften Anforderungen an die Reduzierung von Kraftstoffverbrauch und Schadstoffemission bei Kraftfahrzeugmotoren auch zu einer Absenkung der Leerlaufdrehzahl zwangen. Bei der Regelung der Leerlaufdrehzahl ist zu beachten, daß das Einschalten motorbelastender

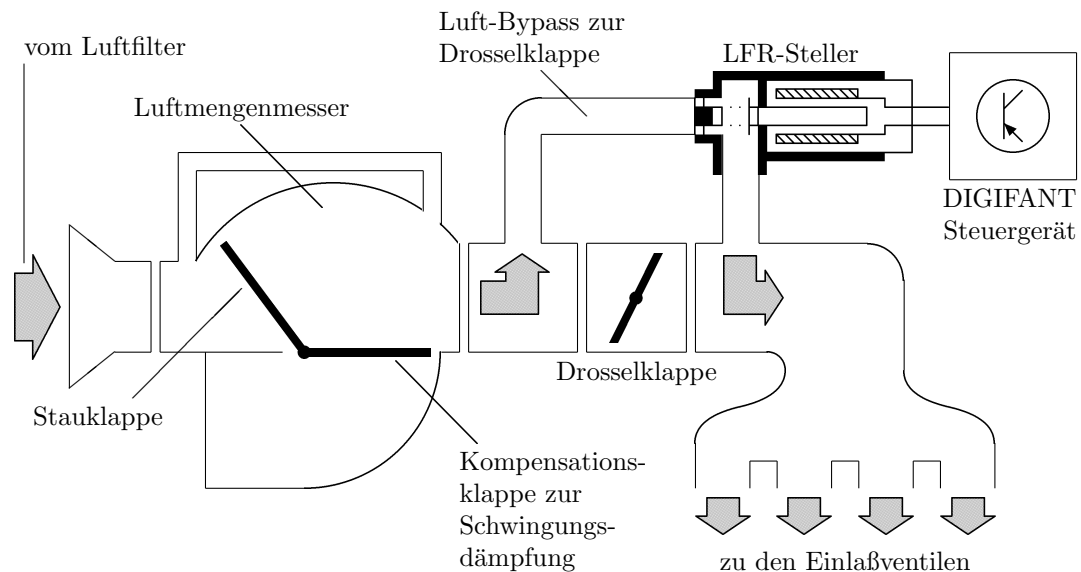


Abbildung 4.16: Prinzip der Leerlaufdrehzahlregelung

Komforteinrichtungen wie Klimaanlage oder Servolenkung bei verminderter Solldrehzahl zu kritischen Drehzahlabfällen führen kann, die eine äußerst flexible Regelung erfordern.

Konventionelle Regelungstechnik führte bisher wegen Schwierigkeit der Regelstrecke (verursacht z.B. durch die Totzeit des Motors nach einer Füllungsänderung sowie die mangelnde Qualität der Drehzahlinformation) zu komplexen, schlecht überschaubaren Lösungen mit teilweise unbefriedigenden Ergebnissen. Es lag daher nahe, innerhalb der Kooperation einen anderen Weg zu beschreiten. Es wurde nicht versucht, ein möglichst detailliertes physikalisches Modell des zu regelnden Prozesses zu finden, sondern einen Fuzzy-Regler zu entwerfen und zu implementieren.

### Grundlagen der Leerlaufdrehzahlregelung

Man unterscheidet zwei Arten der Leerlaufdrehzahlregelung: die Zündwinkelregelung und die Füllungsregelung. Bei dem entwickelten Fuzzy-Regler wurde aus Effizienzgründen nur die Füllungsregelung unter Beibehaltung der Zündwinkelregelung des Serienfahrzeuges realisiert.

Das Prinzip dieser Regelung ist in Abbildung 4.16 dargestellt. In einem Bypass zur Drosselklappe befindet sich der LFR-Steller zur Leerlauffüllungsregelung, welches den Querschnitt des Bypasses bei Bedarf verändert. Am betrachteten Fahrzeug kann im Leerlauf ein plötzlicher Drehzahlabfall beispielsweise durch folgende Belastungen ausgelöst werden:

- Zuschalten elektrischer Aggregate, die den Motor über den Drehstromgenerator



- belasten,
- Zuschalten der Klimaanlage, die den Motor über einen Kompressor belastet,
- Aktivieren der Servolenkung; hierbei wird der Motor über die Hydraulikpumpe belastet.

Die Füllungsregelung hat die Aufgabe, den Drehzahlabfall durch Vergrößern des Querschnittes so zu kompensieren, daß die Drehzahl so schnell und genau wie möglich wieder den Sollwert erreicht.

Eines der Hauptprobleme ist das ohnehin geringe Drehmoment bei einer geringen Drehzahl, so daß in Extremsituationen (z.B. kombiniertes Zuschalten von Klimaanlage und Servolenkung) schnell eintretende starke Drehzahleinbrüche die Folge sind. Desweiteren wird am vorliegenden Aggregat die Drehzahl aus dem Hallsignal ermittelt, d.h., durch Fertigungstoleranzen, Zahnflankenspiele und Torsionsschwingungen ergeben sich Drehzahldifferenzen bis zu  $\pm 30$  rpm, so daß mit einer relativ schlechten Drehzahlinformation gearbeitet werden muß. Ein weiteres Problem ist die Vielzahl stochastischer Störprozesse, wie verschleppte Verbrennungen oder Streuungen im Zünd- bzw. Einspritzsystem, da ein Füllungsregler auf Drehzahlabweichungen dieser Ursache nicht zu stark, in manchen Fällen überhaupt nicht reagieren darf, um das System nicht zum Schwingen anzuregen. Das schwerwiegendste Problem jedoch ist die Totzeit der Regelstrecke. Bei einer Änderung der Füllung dauert es ca. 10 Zündungen, bis der Motor sein verändertes Drehmoment abgibt (Gaslaufzeiten).

### Entwicklung des Fuzzy-Reglers

Um die angesprochenen Schwierigkeiten zu bewältigen, wurde beim Entwurf des Fuzzy-Reglers zur Füllungsregelung zwei Regler miteinander kombiniert. Den Kern bildet ein auf der mathematischen Grundlage der Gleichheitsrelationen konstruierter Mamdani-Fuzzy-Regler (MFC), der in einen „Meta-Regler“ eingebettet ist.

Der Fuzzy-Regler ist extern auf einem Laptop in C implementiert. Die Anbindung geschieht über das Steuergerät des Motormanagementsystems. Als Eingabegrößen werden die Drehzahl DRZ0\_LO, die Solldrehzahl LFRSDRZ und ein Statusflag dKLIMA der Klimaanlage (on/off) verarbeitet.

Der Stromwert LFRSTREI für den LFR-Steller dient als Sollgröße. Der Meta-Controller besteht im wesentlichen aus drei Komponenten: der Datenaufbereitung, der Zustandserkennung (mit MFC-Aktivierung) und der Regelbereichsbegrenzung. Die Datenaufbereitung sorgt durch Mittelung der verrauschten Daten für auswertbare Drehzahlinformationen. Die Zustandserkennung aktiviert bei Bedarf den MFC, so daß ein neuer Stellwert berechnet wird. Dazu werden sowohl die aufbereiteten als auch die Originaldaten verarbeitet. Dem MFC ist eine Regelbereichsbegrenzung als Sicherheitsstufe nachgeschaltet. Beim Einschalten der Klimaanlage wird durch die MFC-Aktivierung statt eines berechneten Stellwertes ein Vorsteuerwert ausgegeben.

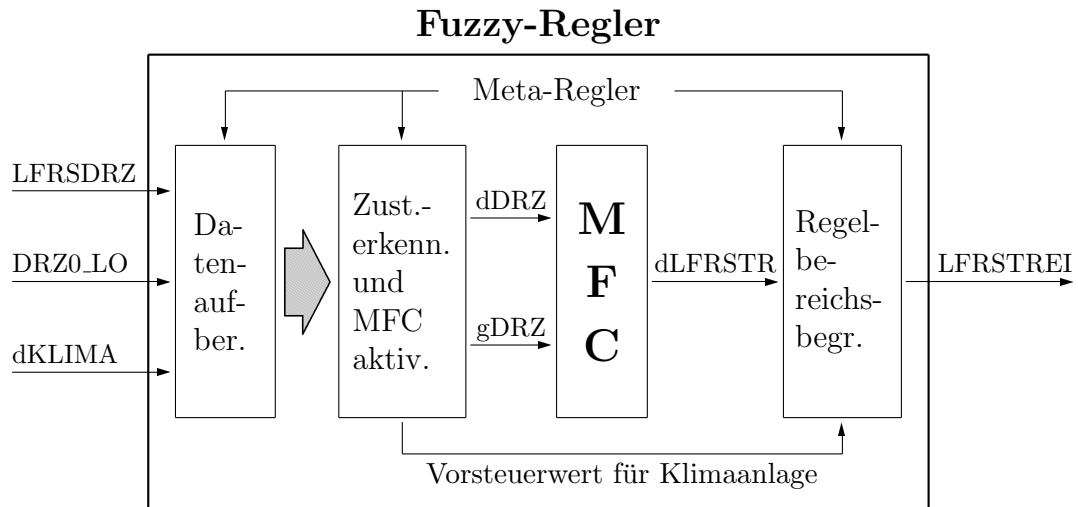


Abbildung 4.17: Aufbau des Fuzzy-Reglers

Die Eingabevariablen (Meßwerte) des MFC sind die Drehzahlabweichung  $dDRZ$  und der Drehzahlgradient  $gDRZ$ , die Ausgabevariable (Stellgröße) ist die Änderung des LFR-Stromes  $dLFRSTR$ . Die Center-of-Gravity-Strategie dient zur Defuzzifizierung. Abbildung 4.18 zeigt das durch den MFC induzierte Kennfeld.

### Umsetzung des Konzepts der Gleichheitsrelation

Als Meßgrößen für den Fuzzy-Regler auf der Basis von Gleichheitsrelationen wurden

- die Abweichung  $dDRZ$  von der Solldrehzahl in Umdrehungen pro Minute und
- die Änderung  $gDRZ$  der Drehzahl zwischen zwei Zündungen ebenfalls in Umdrehungen pro Minute

gewählt. Bei der Analyse der Regelstrecke stellte sich heraus, daß  $dDRZ$  Werte aus dem Intervall  $\Omega^{(dDRZ)} = [-70, 70]$  und  $gDRZ$  Werte aus dem Bereich  $\Omega^{(gDRZ)} = [-40, 40]$  annehmen kann. Die Stellgröße  $dLFRSTR$  gibt die Änderung des Leerlauffüllungsregelungstromes an.  $dLFRSTR$  kann Werte aus der Menge  $\Omega^{(dLFRSTR)} = [-25, 25]$  annehmen. Aus technischen, durch die Stelleinrichtungen bedingten Gründen entspricht eine Einheit der Größe  $dLFRSTR$  3.125 nA.

Die Gleichheitsrelationen  $E_{dDRZ}$ ,  $E_{gDRZ}$  und  $E_{dLFRSTR}$  auf  $\Omega^{(dDRZ)}$ ,  $\Omega^{(gDRZ)}$  bzw.  $\Omega^{(dLFRSTR)}$  wurden wie in Beispiel 4.4 durch Angabe von integrierbaren Funktionen  $c_v : \Omega^{(v)} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  (wobei  $v \in \{dDRZ, gDRZ, dLFRSTR\}$ ) festgelegt. Die Mengen  $\Omega^{(v)}$  wurden in geeignete Bereiche eingeteilt, für die jeweils ein konstanter Skalierungs- oder Vergrößerungsfaktor bestimmt wurde. Die relativ geringe Genauigkeit der Drehzahlmessung ließ es sinnvoll erscheinen, in den Bereichen um den Wert 0 bei allen Größen

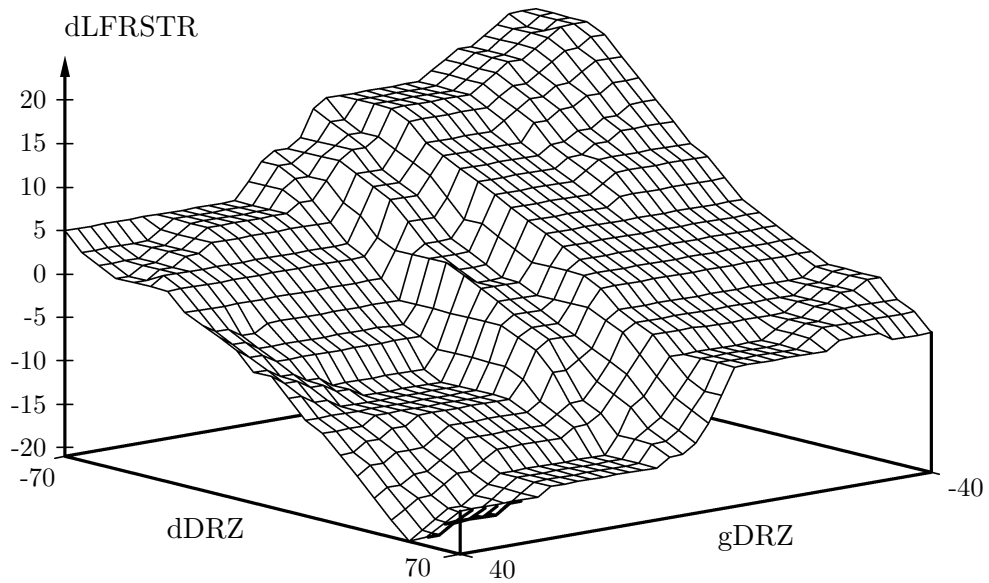


Abbildung 4.18: Kennfeld des MFC

keine Unterscheidung vorzunehmen. Sonst hätten geringe Abweichungen aufgrund von Meßungenauigkeiten ständig zu unnötigen Regulationsaktionen geführt. Im einzelnen wurden die Funktionen  $c_v$  wie folgt gewählt:

$$c_{\text{dDRZ}} : \Omega^{(\text{dDRZ})} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{20}, & \text{falls } -70 \leq x < -30 \\ \frac{1}{28}, & \text{falls } -30 \leq x < -2 \\ 0, & \text{falls } -2 \leq x < 2 \\ \frac{1}{28}, & \text{falls } 2 \leq x < 30 \\ \frac{1}{20}, & \text{falls } 30 \leq x \leq 70 \end{cases}$$

$$c_{\text{gDRZ}} : \Omega^{(\text{gDRZ})} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{33}, & \text{falls } -40 \leq x < -7 \\ 0, & \text{falls } -7 \leq x < -4 \\ 1, & \text{falls } -4 \leq x < -2 \\ 0, & \text{falls } -2 \leq x < 2 \\ 1, & \text{falls } 2 \leq x < 4 \\ 0, & \text{falls } 4 \leq x < 7 \\ \frac{1}{33}, & \text{falls } 7 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

		gDRZ						
dDRZ	$\varphi_0$	-40	-6	-3	0	3	6	40
	-70	20	15	15	10	10	5	5
	-50	20	15	10	10	10	5	0
	-30	15	10	5	5	5	0	0
	0	5	5	0	0	0	-10	-5
	30	0	0	0	-5	-5	-10	-15
	50	0	-5	-5	-10	-15	-15	-20
	70	-5	-5	-10	-15	-15	-15	-15

Tabelle 4.7: Die partielle Abbildung  $\varphi_0$  zur Regelung der Leerlaufdrehzahl

$$c_{\text{dLFRSTR}} : \Omega^{(\text{dLFRSTR})} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } -25 \leq x < -20 \\ \frac{1}{5}, & \text{falls } -20 \leq x < -5 \\ \frac{1}{4}, & \text{falls } -5 \leq x < -1 \\ 0, & \text{falls } -1 \leq x < 1 \\ \frac{1}{4}, & \text{falls } 1 \leq x < 5 \\ \frac{1}{5}, & \text{falls } 5 \leq x < 20 \\ 0, & \text{falls } 20 \leq x \leq 25. \end{cases}$$

Für den Fuzzy-Regler wird neben den Gleichheitsrelationen noch eine partielle Abbildung  $\varphi_0 : \Omega^{(\text{dDRZ})} \times \Omega^{(\text{gDRZ})} \rightarrow \Omega^{(\text{dLFRSTR})}$  benötigt, die bestimmten Meßtupeln einen geeigneten Stellwert zuordnet. Auf der Grundlage von Messungen am Versuchsmotor ergab sich die partielle Abbildung  $\varphi_0$  wie in Tabelle 4.7 beschrieben.

Mit Hilfe der Gleichheitsrelationen und der partiellen Abbildung  $\varphi_0$  läßt sich ein Fuzzy-Regler konstruieren, der, wie im Abschnitt 4.4.1 beschrieben, für das Meßtupel  $(x, x') \in \Omega^{(\text{dDRZ})} \times \Omega^{(\text{gDRZ})}$  die Fuzzy-Menge  $\mu_{\varphi_0}^{(x, x')}$  (vgl. (4.10)) von  $\Omega^{(\text{dLFRSTR})}$  als Ausgabe liefert. Um aus dieser Fuzzy-Menge einen konkreten Wert zu ermitteln, wurde die Defuzzifizierungsstrategie COG angewendet. Die so erhaltene Abbildung ist nicht extensional. Es existiert keine extensionale Fortsetzung  $\varphi$  der partiellen Abbildung  $\varphi_0$ . Um dies einzusehen, betrachten wir die Meßwerte dDRZ = 15 und gDRZ = 40. Vergleichen wir diese Werte mit dem Meßtupel (0, 40), ergibt sich ein Gleichheitsgrad von

$$\min \{E_{\text{dREV}}(15, 0), E_{\text{gREV}}(40, 40)\} = E_{\text{dREV}}(15, 0) = 0.5$$

so daß im Falle der Extensionalität

$$\begin{aligned} E_{\text{dLFRSTR}}(\varphi(15, 40), \varphi(0, 40)) &= E_{\text{dLFRSTR}}(\varphi(15, 40), \varphi_0(0, 40)) \\ &= E_{\text{dLFRSTR}}(\varphi(15, 40), -5) \\ &\geq 0.5 \end{aligned}$$

	$nr$	$ng$	$nm$	$nk$	$uN$	$pk$	$pm$	$pg$	$pr$
$\Omega^{(dDRZ)}$	–	–70	–50	–30	0	30	50	70	–
$\Omega^{(gDRZ)}$	–	–40	–5	–3	0	3	5	40	–
$\Omega^{(dLFRSTR)}$	–20	–15	–10	–5	0	5	10	15	20

Tabelle 4.8: Die zu den durch die Werte induzierten Singletons assoziierten linguistischen Terme

folgt. Das bedeutet, daß  $\varphi(15, 40) \in [-7.5, -2.5]$  gelten muß. Ersetzen wir das Meßtupel  $(0, 40)$  durch das Tupel  $(30, 40)$ , erhalten wir ebenfalls einen Gleichheitsgrad von 0.5 zu dem Tupel  $(15, 40)$ . Hieraus können wir analog

$$E_{dLFRSTR}(\varphi(15, 40), \varphi(30, 40)) = E_{dLFRSTR}(\varphi(15, 40), -15) \geq 0.5$$

und somit  $\varphi(15, 40) \in [-17.5, -12.5]$  schließen, was zu einem Widerspruch führt.

Der Fuzzy-Regler auf der Basis von Gleichheitsrelationen läßt sich im Sinne des Abschnitts 4.4.2 in einen Mamdani-Fuzzy-Regler übersetzen. Für die Partitionierungen der Mengen  $\Omega^{(dDRZ)}$ ,  $\Omega^{(gDRZ)}$  und  $\Omega^{(dLFRSTR)}$  verwenden wir dazu die Fuzzy-Mengen, die durch die bei der Abbildung auftretenden Werte als Singletons induziert werden. Jeder dieser Fuzzy-Mengen ordnen wir einen linguistischen Term der Art negativ riesig ( $nr$ ), negativ groß ( $ng$ ), negativ mittel ( $nm$ ), negativ klein ( $nk$ ), ungefähr Null ( $uN$ ), positiv klein ( $pk$ ), positiv mittel ( $pm$ ), positiv groß ( $pg$ ) bzw. positiv riesig ( $pr$ ) zu. Tabelle 4.8 zeigt die Zuordnung der Werte zu den linguistischen Termen für die Variablen  $dDRZ$ ,  $gDRZ$  und  $dLFRSTR$ .

Abbildung 4.19 veranschaulicht die durch diese Fuzzy-Mengen definierten Partitionierungen.

Für den Mamdani-Fuzzy-Regler muß die partielle Abbildung  $\varphi_0$  in linguistische Regeln der Form

$$\text{if } dDRZ \text{ is } A \text{ and } gDRZ \text{ is } B \text{ then } dLFRSTR \text{ is } C.$$

übersetzt werden. Tabelle 4.9 gibt die Regeln schematisch nach dem Muster von Tabelle 4.7 wieder.

### Vergleich des Fuzzy-Reglers mit dem Serienregler

Die folgenden Abbildungen zeigen in direktem Vergleich das Verhaltens beider Regler im Falle einer Belastung durch Servolenkung bzw. Klimaanlage. Ein Meßpunkt entspricht einer Zündung, d.h. der Zeit für 180°-Kurbelwinkel. LFRSTRAUS bzw. LFRSTREI stellen jeweils den zeitlichen Verlauf der Ausgabe des Serienreglers bzw.

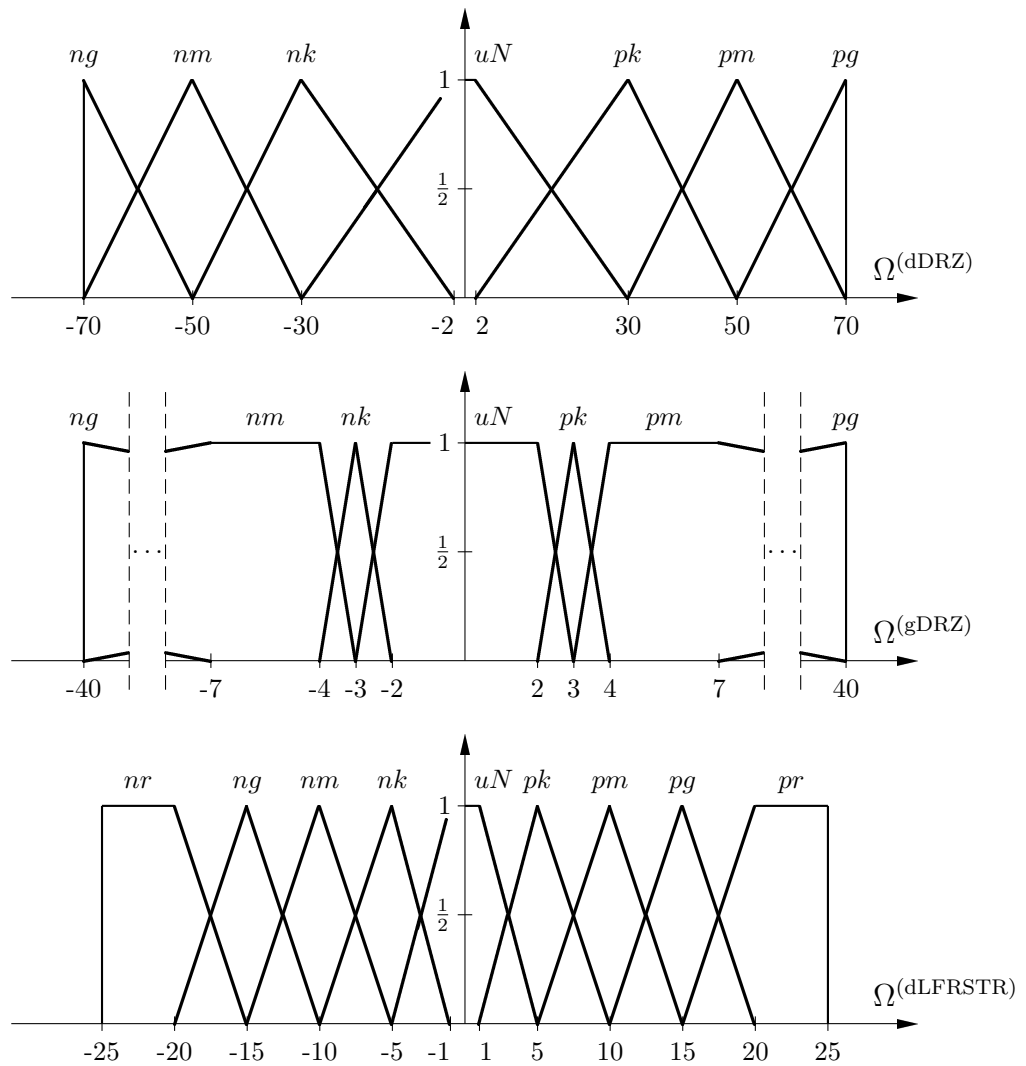


Abbildung 4.19: Die Partitionierungen der Mengen  $\Omega^{(dDRZ)}$ ,  $\Omega^{(gDRZ)}$ , und  $\Omega^{(dLFRSTR)}$

		gDRZ							
		$ng$	$nm$	$nk$	$uN$	$pk$	$pm$	$pg$	
dDRZ	$ng$	$pr$	$pg$	$pg$	$pm$	$pm$	$pk$	$pk$	
	$nm$	$pr$	$pg$	$pm$	$pm$	$pk$	$pk$	$uN$	
	$nk$	$pg$	$pm$	$pk$	$pk$	$uN$	$uN$	$uN$	
	$uN$	$pk$	$pk$	$uN$	$uN$	$uN$	$nm$	$nk$	
	$pk$	$uN$	$uN$	$uN$	$nk$	$nk$	$nm$	$ng$	
	$pm$	$uN$	$nk$	$nk$	$nm$	$ng$	$ng$	$nr$	
	$pg$	$nk$	$nk$	$nm$	$ng$	$ng$	$ng$	$ng$	

Tabelle 4.9: Die Regeln für die Regelung der Leerlaufdrehzahl

des Fuzzy-Reglers dar. Abbildungen 4.20 und 4.21 zeigen das Verhalten beim Aktivieren der Servolenkung, Abbildungen 4.22 und 4.23 das Verhalten beim Zuschalten der Klimaanlage. Das Drehzahlüber- und -unterschwingen bei Zu- bzw. Abschalten der zusätzlichen Belastung ist wegen der Totzeit des Motors nicht vollständig zu vermeiden.

Der Fuzzy-Regler weist, verglichen mit dem Serienregler, ein sehr ruhiges Regelverhalten auf. Außerdem läßt sich ein genaues und schnelles Erreichen der Sollvorgabe und eine sehr große Stabilität auch bei langsam steigender Belastung erkennen. Die Drehzahl zeigt selbst nach starken Belastungsänderungen keine Schwingungen. Weitere Vorteile der Verwendung eines Fuzzy-Reglers liegen in der guten Zustandstrennung, der einfachen Abstimmbbarkeit und der kurzen Entwicklungszeit.

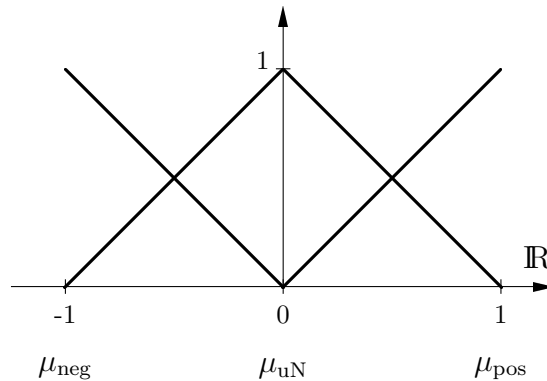
Abbildung 4.20: Servolenkung mit Serienregler

Abbildung 4.21: Servolenkung mit Fuzzy-Regler



Abbildung 4.22: Klimaanlage mit Serienregler

Abbildung 4.23: Klimaanlage mit Fuzzy-Regler

Abbildung 4.24: Die Partitionierungen der Mengen  $X_1$ ,  $X_2$  und  $Y$ 

	$\xi_1$		
	neg	uN	pos
$\xi_2$	neg	neg	uN
	uN		uN
	pos	uN	pos

Tabelle 4.10: Die Regelbasis für den Mamdani-Fuzzy-Regler

### 4.6.5 Übungsaufgaben

**Aufgabe 4.1** Wir betrachten einen Mamdani-Fuzzy-Regler mit den zwei Meßgrößen  $\xi_1 \in X_1 = [-1, 1]$  und  $\xi_2 \in X_2 = [-1, 1]$  und der Stellgröße  $\eta \in Y = [-1, 1]$ . Die Partitionierungen der Mengen  $X_1, X_2$  und  $Y$  sind in Abbildung 4.24 dargestellt. Die Regelbasis ist in Tabelle 4.10 angegeben.

- Berechnen Sie für die folgenden Meßtupel  $(\xi_1, \xi_2)$  den Stellwert  $\eta$ , der sich bei der Defuzzifikationsstrategie COG ergibt.  
 $(\xi_1, \xi_2) \in \{(0, 0), (1, 1), (1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0.25, 0.5), (-0.25, 0.5), (0.75, 0.75)\}$
- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion  $\varphi : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ , die durch die Defuzzifizierungsstrategie MOM induziert wird.
- Zeigen Sie, daß die in Abbildung 4.24 angegebene Partitionierung die Bedingung (i) des Satzes 4.8 bezüglich der  $t$ -Norm  $\top_{\text{Luka}}$  erfüllt. Wie lautet die durch diese Partitionierung induzierte Gleichheitsrelation  $E$ , die durch die Gleichung (4.24) bestimmt wird? Übersetzen Sie die Regelbasis in eine partielle Funktion von  $X_1 \times X_2$  nach  $Y$ , indem Sie die Fuzzy-Mengen als Singletons bezüglich der Gleichheitsrelation  $E$  auffassen.

$\xi_1$	$\xi_2$	$\eta$
<i>neg</i>	<i>uN</i>	$-0.5\xi_1 + 0.2\xi_2 + 0.1$
<i>uN</i>	<i>neg</i>	$0.3\xi_1 - 0.3\xi_2$
<i>uN</i>	<i>uN</i>	$0.1\xi_1 + 0.1\xi_2$
<i>uN</i>	<i>pos</i>	$0.3\xi_1 + 0.4\xi_2 - 0.2$
<i>pos</i>	<i>uN</i>	$-0.5\xi_1 - 0.5\xi_2$

Tabelle 4.11: Die Regelbasis für den Sugeno-Fuzzy-Regler

- (d) Die Fuzzy-Mengen aus Abbildung 4.24 können als Singletons bezüglich der Gleichheitsrelation  $E_\rho(x, x') = 1 - \min\{|x - x'|, 1\}$  interpretiert werden. Die Regeltabelle 4.10 läßt sich dann wie im Aufgabenteil (c) in eine partielle Funktion übersetzen. Soll die Übertragungsfunktion  $\varphi : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$  eine extensionale Fortsetzung dieser partiellen Funktion sein, so muß der Stellwert  $\eta \in Y$  zu einem Meßtupel  $(\xi_1, \xi_2) \in X_1 \times X_2$  aus der in (4.16) definierten Menge stammen. Berechnen Sie diese Menge für die Meßtupel aus dem Aufgabenteil (a). Zeigen Sie, daß die Funktion

$$\varphi : X_1 \times X_2 \rightarrow Y, \quad (x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

eine extensionale Fortsetzung der durch die Regelbasis induzierten partiellen Funktion ist.

**Aufgabe 4.2** Wir betrachten einen Sugeno-Fuzzy-Regler mit denselben Meß- und Stellgrößen wie in Aufgabe 4.1. Die Partitionierungen der Mengen  $X_1$  und  $X_2$  seien wie in Abbildung 4.24 beschrieben vorgegeben. Die Regelbasis zeigt Tabelle 4.11. Berechnen Sie den jeweiligen Stellwert für die Meßtupel aus Aufgabe 4.1(a).

**Aufgabe 4.3** Bestimmen Sie Gleichheitsrelationen bezüglich der  $t$ -Norm  $\top_{\text{Luka}}$ , so daß sich die in Abbildung 4.12 dargestellten Fuzzy-Mengen als Singletons interpretieren lassen. Definieren Sie die Gleichheitsrelationen mittels einer „Lupenfunktion“  $c$  wie im Beispiel 4.4.

	$a$	$b$	$c$
$\mu_1$	1.0	0.6	0.2
$\mu_2$	0.0	0.8	1.0
$\mu_3$	0.9	0.1	0.0

Tabelle 4.12: Drei Fuzzy-Mengen von  $X$ 

	$y$	$z$
$\nu_1$	1.0	0.4
$\nu_2$	0.6	1.0
$\nu_3$	0.9	0.5

Tabelle 4.13: Drei Fuzzy-Mengen von  $Y$ 

**Aufgabe 4.4** Es sei  $X = \{a, b, c\}$ ,  $Y = \{y, z\}$ . Die Fuzzy-Mengen  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  von  $X$  und  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  von  $Y$  sind in Tabelle 4.12 bzw. 4.13 angegeben.

- (a) Zeigen Sie, daß das System der beiden Relationalgleichungen  $\nu_i = \mu_i \circ \varrho$  ( $i = 1, 2$ ) lösbar ist und geben Sie die größte Fuzzy-Relation, die das System löst, an. Liefert die durch die Gleichung (4.43) definierte Fuzzy-Relation ebenfalls eine Lösung?
- (b) Beweisen Sie, daß das System  $\nu_i = \mu_i \circ \varrho$  ( $i = 1, 2, 3$ ) von Relationalgleichungen keine Lösung besitzt.

# Symbole

$\subseteq$	Teilmenge von	8
$\subset$	echte Teilmenge von	8
$\mathbb{1}_M$	charakteristische Funktion von $M$	8
$\mu$	Fuzzy-Menge	10
$F(X)$	Menge aller Fuzzy-Mengen von $X$	10
$L(X)$	Menge aller $L$ -Fuzzy-Mengen von $X$	13
$\mu_\alpha$	$\alpha$ -Schnitt von $\mu$	16
$\underline{\mu}_\alpha$	striktter $\alpha$ -Schnitt von $\mu$	36
$\top$	$t$ -Norm	23
$\perp$	$t$ -Conorm	24
$\cap$	Durchschnitt (auch für Fuzzy-Mengen)	24
$\cup$	Vereinigung (auch für Fuzzy-Mengen)	24
$\bar{\phantom{x}}$ (z.B. $\bar{\mu}$ )	Komplement (auch für Fuzzy-Mengen)	24
$\text{acc}(a)$	gradueller Wahrheitswert der Aussage $a$	29
$\mathfrak{P}(X)$	Potenzmenge (Menge aller Teilmengen) von $X$	30
$\hat{\phi}$	Extension der Abbildung $\phi$	32
$F_N(\mathbb{R})$	Klasse aller normalen Fuzzy-Mengen von $\mathbb{R}$	32
$F_C(\mathbb{R})$	Klasse aller von oben halbstetigen Fuzzy-Mengen von $\mathbb{R}$	32
$F_I(\mathbb{R})$	Klasse aller Fuzzy-Intervalle von $\mathbb{R}$	32
$\oplus$	Addition von Fuzzy-Mengen	33
$\odot$	Multiplikation von Fuzzy-Mengen	33
$F_{D_K}(\mathbb{R})$	Teilklasse von $F_N(\mathbb{R})$ mit endlichem Wertebereich	41
$(P, \Gamma)$	zufällige Menge	45
$ A $	Kardinalität (Anzahl der Elemente) der Menge $A$	45
$E$	Gleichheitsrelation	48
$\mu_{x_0}$	extensionale Hülle der Menge $\{x_0\}$	53
$\mu_M$	extensionale Hülle der Menge $M$	54
$\llbracket \varphi \rrbracket$	Wahrheitswert der Aussage $\varphi$	58

$\Omega$	Universum (Menge aller möglichen Objektzustände)	87
$\pi$	Possibilitätsverteilung	88
$\text{POSS}(\Omega)$	Menge aller Possibilitätsverteilungen auf $\Omega$	88
$\text{Poss}_\pi$	Possibilitätsmaß einer Possibilitätsverteilung $\pi$	88
$\text{Nec}_\pi$	Notwendigkeitsmaß einer Possibilitätsverteilung $\pi$	88
$\equiv$	identische Funktionen	78
$\sqsubseteq$	wenigstens so spezifisch wie (für Possibilitätsverteilungen)	94
$\sqsubset$	spezifischer als (für Possibilitätsverteilungen)	94
$\mathbb{N}_n$	Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ der ersten $n$ natürlichen Zahlen	98
$\Omega^I$	Teilraum von $\Omega$ gemäß der Indexmenge $I$	98
$\text{red}_S^T$	punktweise Projektion (von Mengen)	98
$\Pi_S^T$	Projektion (von Mengen)	98
$\hat{\Pi}_S^T$	zylindrische Erweiterung (von Mengen)	98
$\mathcal{U}$	Universum	98
$\mathcal{M}$	Modularisierung	99
$\mathcal{N}$	Partitionierung	100
$\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$	(possibilistische) Regelbasis bezüglich $\mathcal{U}$ und $\mathcal{M}$	99,103
$\varrho$	(possibilistische) Wissensbasis bezüglich $\mathcal{U}$ und $\mathcal{M}$	94,103
$\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$	(possibilistisches) Evidenzsystem bezüglich $\mathcal{U}$ und $\mathcal{N}$	100,104
$\text{ext}_M^{\mathbb{N}_n}$	zylindrische Erweiterung (von Possibilitätsverteilungen)	103
$\text{proj}_M^{\mathbb{N}_n}$	Projektion (von Possibilitätsverteilungen)	104
$\mathcal{X}$	(possibilistisches) F-Expertensystem	101,105
$\kappa^{(i)}$	$i$ -te Restriktionen ( $i = 1, \dots, n$ ) des Zustands eines (possibilistischen) F-Expertensystems	101,101
$\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N}))$	Zustand von $\mathcal{X}$ bezüglich $\mathcal{E}(\mathcal{U}, \mathcal{N})$	101,104
$H_{\mathcal{M}}$	von $\mathcal{M}$ induzierter Hypergraph	117
$\mathcal{P}$	Menge atomarer Aussagen	134
$\mathcal{L}$	Menge aller aussagenlogischen Ausdrücke	134
$\mathcal{K}_0$	Menge aller aussagenlogischen Klauseln	134
$\mathcal{K}$	$\mathcal{K}_0 \cup \{\top, \perp\}$	134
$\top$	wahre Aussage	134
$\perp$	falsche Aussage	134
$N$	Notwendigkeitsmaß	134
$\Pi$	Possibilitätsmaß	135
$\mathcal{W}$	unsichere Wissensbasis	135
$\vdash$	syntaktische Ableitbarkeit	136
$\models$	semantische Ableitbarkeit	139
$I$	Interpretation	138

$\mu_{(\varphi, \alpha)}$	von der unsicheren Klausel $(\varphi, \alpha)$ induzierte Fuzzy-Menge von Interpretationen	138
$\mu_{\mathcal{W}}$	von der unsicheren Wissensbasis $\mathcal{W}$ induzierte Fuzzy-Menge von Interpretationen	138
$\text{cons}(\mathcal{W})$	Konsistenzgrad der unsicheren Wissensbasis $\mathcal{W}$	138
$\text{inc}(\mathcal{W})$	Inkonsistenzgrad der unsicheren Wissensbasis $\mathcal{W}$	139
$\mathcal{I}$	Menge aller Implikationen	141
$w$	Fuzzy-Wissensbasis	141
$\text{Th}_w$	Fuzzy-Menge aller aus $w$ semantisch ableitbaren Aussagen	142
$\text{th}_w$	Fuzzy-Menge aller aus $w$ syntaktisch ableitbaren Aussagen	143





# Literaturverzeichnis

Über das Gebiet der Fuzzy Systeme gibt es mittlerweile eine ganze Reihe von Fachbüchern, die wir in den entsprechenden Kapiteln zitiert haben. Zur Vertiefung empfehlen wir die Lektüre der Original-Literatur in den Zeitschriften *Fuzzy Sets and Systems*, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, *International Journal of Approximate Reasoning*, und *International Journal of Intelligent Systems* um nur die wichtigsten, auf Fuzzy Systeme spezialisierten Zeitschriften zu nennen. Die neuesten Ergebnisse im Bereich Fuzzy Systeme findet man in Konferenzunterlagen wie z.B. zu der seit 1985 zweijährig stattfindenden Tagung der *International Fuzzy Systems Association* (IFSA) sowie zu den internationalen Tagungen *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems* (IPMU), *IEEE International Conference on Fuzzy Systems* (FUZZIEEE), *European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing* (EU-FIT) und zu den vielen anderen Tagungen zu diesem Thema. Die Fachgruppe „Fuzzy Systeme“ der Gesellschaft für Informatik ist ein geeigneter Ansprechpartner für Informatiker.

- [Alsina83] C. Alsina, E. Trillas und L. Valverde. On some Logical Connectives for Fuzzy Set Theory. *J. of Math. Anal. and Applications*, 93:15–26, 1983.
- [Andersen89] S.K. Andersen, K.G. Olesen, V.F. Jensen und F. Jensen. HUGIN — A Shell for Building Bayesian Belief Universes for Expert Systems. *Proc. 11th IJCAI*, Detroit, 1080–1085, Morgan Kaufman, San Mateo, CA, 1989.
- [Andreassen87] S. Andreassen, M. Woldbye, B. Falckand und S.K. Andersen. MUNIN — A Causal Probabilistic Network for Interpretation of Electromyographic Findings. *Proc. 10th IJCAI*, Milan, 366–372, Morgan Kaufman, San Mateo, CA, 1987.
- [Arbib77] M. Arbib. Book Reviews, Vol. 3, *Bul. of the AMS*, 83:946–951, 1977
- [Artstein75] Z. Artstein und R.A. Vitale. A Strong Law of Large Numbers for Random Compact Sets. *Ann. Probability*, 3:879–882, 1975.

- [Asakawa94] K. Asakawa und H. Takagi. Neural Networks in Japan. *Communications of the ACM*, Vol. 37, 3:106–112, 1994.
- [Bacchus90] F. Bacchus. *Representing and Reasoning with Probabilistic Knowledge*. MIT Press, Cambridge, MA, 1990.
- [Baldwin79] J.F. Baldwin. A New Approach to Approximate Reasoning Using a Fuzzy Logic. *Fuzzy Sets and Systems*, 2:309–325, 1979.
- [Baldwin80] J.F. Baldwin und N.C.F. Guild. Modelling Controllers using Fuzzy Relations. *Kybernetes*, 9:223–229, 1980.
- [Bandemer92] H. Bandemer und W. Näther. *Fuzzy Data Analysis*. Series: *Mathematical and Statistical Methods*. Kluwer, Dordrecht, 1992.
- [Bandemer93a] H. Bandemer, Hg. *Modelling Uncertain Data*. Mathematical Research Vol. 68, Akademie Verlag, Berlin 1993.
- [Bandemer93b] H. Bandemer und S. Gottwald. *Einführung in Fuzzy Methoden*. Akademie Verlag, Berlin, 1993.
- [Bandler80] W. Bandler und L.J. Kohout. Fuzzy Power Sets and Fuzzy Implication Operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 4:13–30, 1980.
- [Bellman66] R.E. Bellman, R. Kalaba und L.A. Zadeh. Abstraction and Pattern Classification. *J. Math. Anal. and Appl.* 2:581–586, 1966
- [Bellman70] R.E. Bellman und L.A. Zadeh. Decision-Making in a Fuzzy Environment. *Management Sciences*, 17:141–164, 1970.
- [Bellman73] R. Bellman und M. Giertz. On the Analytic Formalism of the Theory of Fuzzy Sets. *Information Sciences*, 5:149–156, 1973.
- [Benferhat94] S. Benferhat, D. Dubois und H. Prade. Expressing Independence in a Possibilistic Framework and its Application to Default Reasoning. *Proc. 11th European Conference on Artificial Intelligence*, 1994
- [Berenji92] H.R. Berenji. A Reinforcement Learning Based Architecture for Fuzzy Logic Control. *Int. J. of Approximate Reasoning*, 6:267–292, 1992.
- [Berge73] C. Berge. *Graphs and Hypergraphs*. North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [Bezdek81] J.C. Bezdek. *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*. Plenum Press, New York, 1981.

- [Bezdek92a] J.C. Bezdek und S.K. Pal, Hg. *Fuzzy Models for Pattern Recognition*. IEEE Press, New York, 1992.
- [Bezdek92b] J.C. Bezdek, E.C. Tsao und N.K. Pal. Fuzzy Kohonen Clustering Networks. *Proc. IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, San Diego, 1035–1043, IEEE Press, New York, 1992.
- [Black37] M. Black. Vagueness: an exercise in logical analysis. *Philosophy of Science*, 4:427–455, 1937.
- [Bocklisch86] S.F. Bocklisch, S. Orlovski, M. Peschel und Y. Nishiwaki, Hg. *Fuzzy Sets Applications, Methodological Approaches and Results*. Akademie Verlag, Berlin, 1986.
- [Bocklisch87] S.F. Bocklisch. *Prozeßanalyse mit unscharfen Verfahren*. Technik Verlag, Berlin, 1987.
- [Bolc92] L. Bolc und P. Borowik. *Many-Valued Logics*. Springer, Berlin, 1992.
- [Bonissone87] P.R. Bonissone, S.S. Gans und K.S. Decker. RUM: A Layered Architecture for Reasoning with Uncertainty. *Proc. 10th IJCAI*, Milan, 891–898, Morgan Kaufman, San Mateo, NY, 1987.
- [Bosc88] P. Bosc, M. Galibourg und G. Hamon. Fuzzy Querying with SQL: Extensions and Implementation Aspects. *Fuzzy Sets and Systems* 28:333-349, 1988.
- [Bosc92] P. Bosc und O. Pivert. Fuzzy Querying in Conventional Databases. In: L.A. Zadeh und J. Kacprzyk, Hg., *Fuzzy Logic for the Management of Uncertainty*, 645–672. John Wiley and Sons, New York, 1992.
- [Bosc93] P. Bosc und H. Prade. An Introduction to Fuzzy Set and Possibility Theory-Based Approaches to the Treatment of Uncertainty and Imprecision in Data Base Management Systems. *Proc. Workshop on Uncertainty Management in Information Systems: From Needs to Solutions*, Santa Catalina, Avalon, CA, 1993.
- [Bouchon87] B. Bouchon. Fuzzy Inferences and Conditional Possibility Distributions. *Fuzzy Sets and Systems* 23:33-41, 1987.
- [Bouchon-Meunier92] B. Bouchon-Meunier. Fuzzy Logic and Knowledge Representation Using Linguistic Modifiers. In: L.A. Zadeh und J. Kacprzyk, Hg., *Fuzzy Logic for the Management of Uncertainty*, 399–414. John Wiley and Sons, New York, 1992.

- [Bouslama92] F. Bouslama und A. Ichikawa. Application of Limit Fuzzy Controllers to Stability Analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 49:103–120, 1992.
- [Boverie91] S. Boverie, B. Demaya und A. Titli. Fuzzy Logic Control Compared with Other Automatic Control Approaches. *Proc. 30th IEEE Conf. on Decision and Control*, Brighton, 1991.
- [Boverie92] S. Boverie, B. Demaya, R. Ketata und A. Titli. Performance Evaluation of Fuzzy Controller. *Proc. Symposium on Intelligent Components and Instruments for Control Applications*, Malaga, 1992.
- [Braae79] M. Braae und D.A. Rutherford. Selection of Parameters from a Fuzzy Logic Controller. *Fuzzy Sets and Systems*, 2:185–199, 1979.
- [Buchanan84] B.G. Buchanan und E.H. Shortliffe. *Rule Based Expert Systems: The MYCIN Experiment of the Stanford Heuristic Programming Project*. Addison Wesley, Reading, MA, 1984.
- [Buckles82] B.P. Buckles und F.E. Petry. A Fuzzy Representation of Data for Relational Databases. *Fuzzy Sets and Systems*, 7:213–226, 1982.
- [Buckley86] J.J. Buckley, W. Siler und D.M. Tucker. A Fuzzy Expert System. *Fuzzy Sets and Systems*, 20:1–16, 1986.
- [Buckley92] J.J. Buckley. Theory of the Fuzzy Controller: An Introduction. *Fuzzy Sets and Systems*, 51:249–258, 1992.
- [Buckley93a] J.J. Buckley. Controllable Processes and the Fuzzy Controller. *Fuzzy Sets and Systems*, 53:27–32, 1993.
- [Buckley93b] J.J. Buckley. Sugeno Type Controllers are Universal Controllers. *Fuzzy Sets and Systems*, 53:299–304, 1993.
- [Butnariu93] D. Butnariu und E.P. Klement. *Triangular Norm-based Measures and Games with Fuzzy Coalitions*. Kluwer, Dordrecht, 1993.
- [Chang58] C.C. Chang. Algebraic Analysis of Many-Valued Logics. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88:467–490, 1958.
- [Cheeseman86] P. Cheeseman. Probability versus Fuzzy Reasoning. In: L.N. Kanal und J.F. Lemmer, Hg., *Uncertainty in Artificial Intelligence*, 85–102. North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [Chen92] S.J. Chen und C.L. Hwang, Hg. *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making*. Springer, Berlin, 1992.

- [Chiu88] S. Chiu und M. Togai. A Fuzzy Logic Programming Environment for Real Time Control. *Int. J. of Approximate Reasoning* 2:163–175, 1988.
- [Clarke93] M. Clarke, R. Kruse und S. Moral, Hg. *Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty*, Springer, Berlin, 1993.
- [Clocksin91] W.S. Clocksin und C.S. Mellish. *Programmieren in Prolog*. Springer, Berlin, 1991.
- [Cohen73] L.J. Cohen. A Note on Inductive Logic. *The J. of Philosophy* LXX:27-40, 1973.
- [Cooper92] G. Cooper und E. Herskovits. A Bayesian Method for the Induction of Probabilistic Networks from Data. *Machine Learning*, 9:309–347, 1992.
- [Cordes92] R. Cordes, R. Kruse, H. Langendörfer und H. Rust. *Prolog — Eine methodische Einführung*, 3. Auflage. Vieweg, Wiesbaden, 1992.
- [Coulon92] J. Coulon, J.-L. Coulon und U. Höhle. Classification of Extremal Subobjects over SM-SET. In: S.E. Rodabaugh, E.P. Klement und U. Höhle, Hg., *Applications of Category Theory to Fuzzy Subsets*, 9–31. Kluwer, Dordrecht, 1992.
- [Cox46] R. Cox. Probability, Frequency, and Reasonable Expectation. *American J. of Physics*, 14:1–13, 1946.
- [Czogala82] E. Czogala, J. Drewniak und W. Pedrycz. Fuzzy Relation Equations on a Finite Set. *Fuzzy Sets and Systems*, 7:89–101, 1982.
- [Czogala86] E. Czogala und K. Hirota. *Probabilistic Sets: Fuzzy and Stochastic Approach to Decision, Control and Recognition Processes*. Verlag TÜV Rheinland, Köln, 1986.
- [Delgado87] M. Delgado und S. Moral. On the Concept of Possibility Probability Consistency. *Fuzzy Sets and Systems* 21:311–318, 1987.
- [Dempster67] A.P. Dempster. Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping. *Ann. Math. Stat.*, 38:325–339, 1967.
- [Dempster68] A.P. Dempster. Upper and Lower Probabilities Induced by a Random Closed Interval. *Ann. Math. Stat.*, 39:957–966, 1968.
- [Desoer63] C.A. Desoer und L.A. Zadeh. *Linear System Theory — The State Space Approach*. McGraw-Hill, New York, 1963.

- [Dombi82] J. Dombi. A General Class of Fuzzy Operators, the De Morgan Class of Fuzzy Operators and Fuzziness Measures Induced by Fuzzy Operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 8:149–163, 1982.
- [Driankov93] D. Driankov, H. Hellendoorn und M. Reinfrank. *An Introduction to Fuzzy Control*. Springer, Berlin, 1993.
- [Dubois80a] D. Dubois und H. Prade. *Fuzzy Sets and Systems — Theory and Applications*. Academic Press, New York, 1980.
- [Dubois80b] D. Dubois und H. Prade. New Results about Properties and Semantics of Fuzzy Set Theoretic Operators. In: P.P. Wang und S.K. Chang, Hg., *Fuzzy Sets: Theory and Application to Policy Analysis and Information Systems*, 59–75. Plenum Press, New York, 1980.
- [Dubois82] D. Dubois und H. Prade. A Class of Fuzzy Measures Based on Triangular Norms. *Int. J. of General Systems*, 8:43–61, 1982.
- [Dubois84] D. Dubois und H. Prade. Fuzzy Logics and the Generalized Modus Ponens Revisited. *Int. J. of Cybernetes and Systems*, 15:293–331, 1984.
- [Dubois85] D. Dubois und H. Prade. The Generalized Modus Ponens under sup-min Composition — A Theoretical Study. In: M.M. Gupta, A. Kandel, W. Bandler und J.B. Kiszka, Hg., *Approximate Reasoning in Expert Systems*, 217–232. North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [Dubois87a] D. Dubois und H. Prade. Necessity Measures and the Resolution Principle. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 17:474–478, 1987.
- [Dubois87b] D. Dubois und H. Prade. *Possibility Theory — An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*. Plenum Press, New York, 1987.
- [Dubois88] D. Dubois und H. Prade. Modelling Uncertainty and Inductive Inference. *Acta Psychologica*, 68:53–78, 1988.
- [Dubois89a] D. Dubois, J. Lang und H. Prade. Automated Reasoning Using Possibilistic Logic: Semantics, Belief Revision and Variable Certainty Weights. *Proc. 5th Workshop on Uncertainty in Artificial Intelligence*, Windsor, Ontario, 81–87, Morgan Kaufman, San Mateo, CA, 1989.
- [Dubois89b] D. Dubois und H. Prade. Fuzzy Sets, Probability and Measurement. *European J. of Operational Research*, 40:135–154, 1989.

- [Dubois90] D. Dubois, H. Prade und J.M. Toucas. Inference with Imprecise Numerical Quantifiers. In: Z. Ras and M. Zemankova, Hg., *Intelligent Systems: State of the Art and Future Directions*, 52–72. Ellis Horwood, Chichester, 1990.
- [Dubois91a] D. Dubois, J. Lang und H. Prade. Fuzzy Sets in Approximate Reasoning, Part 2: Logical Approaches. *Fuzzy Sets and Systems*, 40:203–244, 1991.
- [Dubois91b] D. Dubois und H. Prade. Basic Issues on Fuzzy Rules and their Application to Fuzzy Control. *Proc. IJCAI'91 Workshop on Fuzzy Control*, 5–17, Sydney, 1991.
- [Dubois91c] D. Dubois und H. Prade. Epistemic Entrenchment and Possibilistic Logic. *Artificial Intelligence*, 50:223–239, 1991.
- [Dubois91d] D. Dubois und H. Prade. Fuzzy Sets in Approximate Reasoning, Part 1: Inference with Possibility Distributions. *Fuzzy Sets and Systems*, 40:143–202, 1991.
- [Dubois92a] D. Dubois und H. Prade. Belief Change and Possibility Theory. In: P. Gärdenfors, Hg., *Belief Revision*, 142–182. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [Dubois92b] D. Dubois und H. Prade. Possibility Theory as a Basis for Preference Propagation in Automated Reasoning. *Proc. IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, San Diego, 821–832, IEEE Press, New York, 1992.
- [Dubois93] D. Dubois, S. Moral und H. Prade. A Semantics for Possibility Theory Based on Likelihoods. *CEC-ESPRIT III BRA 6156 DRUMS II*, Annual Report 1993.
- [Dubois93a] D. Dubois und H. Prade. Fuzzy Sets and Probability: Misunderstandings, Bridges and Gaps. *Proc. 2nd IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, San Francisco, 1059–1068, IEEE Press, New York, 1993.
- [Dubois93b] D. Dubois, H. Prade und R.R. Yager, Hg. *Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems*. Morgan Kaufman, San Mateo, CA, 1993.
- [Dubois94] D. Dubois und H. Prade. Similarity based Approximate Reasoning. In: J.M. Zurada, R.J. Marks II und C.J. Robinson, Hg. *Computational Intelligence, Imitating Life*, 69–80. IEEE Press, New York, 1994.

- [Dummett77] M. Dummett. *Elements of Intuitionism*. Clarendon Press, Oxford, 1977.
- [Eklund92a] P. Eklund und F. Klawonn. Neural Fuzzy Logic Programming. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 3:815–818, 1992.
- [Eklund92b] P. Eklund, F. Klawonn und D. Nauck. Distributing Errors in Neural Fuzzy Control. *Proc. Int. Conf. on Fuzzy Logic and Neural Networks*, 2:1139–1142, Iizuka, 1992.
- [Esogbue83] A.O. Esogbue und R.C. Elder. Measurement and Valuation of a Fuzzy Mathematical Model for Medical Diagnosis. *Fuzzy Sets and Systems*, 10:223–242, 1983.
- [Evans89] G.W. Evans, W. Karwowski und M.R. Wilhelm. *Applications of Fuzzy Set Methodologies in Industrial Engineering*. North-Holland, Amsterdam, 1989.
- [Fedrizzi91] M. Fedrizzi, J. Kacprzyk und M. Roubens. *Interactive Fuzzy Optimization*. Springer, Berlin, 1991.
- [Felix93] R. Felix. Fuzzy Logik: Schrittmacher der Zukunft. *Elektronik*, 2:92–97, 1993.
- [Feller66] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Application* (two volumes). John Wiley and Sons, New York, 1966.
- [Fine73] T.L. Fine. *Theories of Probability: An Examination of Foundations*. Academic Press, New York, 1973.
- [de Finetti74] B. de Finetti. *Theory of Probability*. John Wiley and Sons, London, 1974.
- [Fonck92] P. Fonck. Propagating Uncertainty in a Directed Acyclic Graph. *Proc. IPMU'92*, 17–20, Palma de Mallorca, 1992.
- [Frank79] M.J. Frank. On the Simultaneous Associativity of  $F(x, y)$  and  $x + y - F(x, y)$ . *Aequationes Math.*, 19:137–152, 1979.
- [Frank93] H. Frank. FUZZY-BOX: A New Fuzzy Controller Design System. *Proc. EUFIT'93*, 839–844, Aachen, 1993.
- [Freksa81] C. Freksa. *Linguistic Pattern Characterization and Analysis*. Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley, CA, USA, 1981.
- [French84] S. French. Fuzzy Decision Analysis; Some Criticism. *Management Sciences*, 20:29–44, 1984.



- [French88] S. French. *Decision Theory: An Introduction to the Mathematics of Rationality*. Ellis Horwood, Chichester, 1988.
- [Fukami80] S. Fukami, M. Mizumoto und K. Tanaka. Some Considerations on Fuzzy Conditional Inference. *Fuzzy Sets and Systems*, 4:243–273, 1980.
- [Gaines76] B.R. Gaines. Foundations of Fuzzy Reasoning. *Int. J. of Man Machine Studies*, 8:623–668, 1976.
- [Gaines77] B.R. Gaines und L.J. Kohout. The Fuzzy Decade: A Bibliography of Fuzzy Systems and Closely Related Topics. *Int. J. of Man Machine Studies*, 9:1–68, 1977.
- [Gärdenfors88] P. Gärdenfors. *Knowledge in Flux, Modelling the Dynamics of Epistemic States*. MIT Press, Cambridge, MA, 1988.
- [Gärdenfors92] P. Gärdenfors, Hg. *Belief Revision*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [Gebhardt90] J. Gebhardt und R. Kruse. Some New Aspects of Testing Hypothesis in Fuzzy Statistics. *Proc. NAFIPS'90 Conf.*, 185–187, Toronto, 1990.
- [Gebhardt92a] J. Gebhardt. On the Epistemic View of Fuzzy Statistics. In: H. Bandemer, Hg., *Modelling Uncertain Data*. Series: *Mathematical Research*, 68:136–141. Akademie Verlag, Berlin, 1992.
- [Gebhardt92b] J. Gebhardt und R. Kruse. A Possibilistic Interpretation of Fuzzy Sets by the Context Model. *Proc. IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, 1089–1096, San Diego, 1992. IEEE.
- [Gebhardt93a] J. Gebhardt und R. Kruse. The Context Model — An Integrating View of Vagueness and Uncertainty. *Int. J. of Approximate Reasoning* 9, 283–314, 1993.
- [Gebhardt93b] J. Gebhardt und R. Kruse. A New Approach to Semantic Aspects of Possibilistic Reasoning. In: M. Clarke, R. Kruse und S. Moral, Hg., *Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty*, 151–159. Springer, Berlin, 1993
- [Gebhardt93c] J. Gebhardt und R. Kruse. A Comparative Discussion of Combination Rules in Numerical Settings. *CEC-ESPRIT III BRA 6156 DRUMS II*, 37p. Annual Report, 1993.
- [Gebhardt93d] J. Gebhardt, R. Kruse, M. Otte und M. Schröder. A Fuzzy Idle Speed Controller. *26th Int. Symp. on Automotive Technology and Automation*, 459–463. Aachen, 1993.

- [Gebhardt94] J. Gebhardt und R. Kruse. Focusing and Learning in Possibilistic Dependency Networks. *Proc. Workshop Fuzzy-Systeme*, München, 1994.
- [Gentilhomme68] Y. Gentilhomme. Les ensembles flous en linguistique. *Cahiers de Ling. Théor. et Appl.*, 5:47–65, 1968.
- [Gil88] M.A. Gil. On the Loss of Information due to Fuzziness in Experimental Observations. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 40:627–639, 1988.
- [Giles82] R. Giles. Foundations for a Theory of Possibility. In: M.M. Gupta und E. Sanchez, Hg., *Fuzzy Information and Decision Processes*, 183–195. North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [Godo89] L. Godo, R. Lopez de Mantaras, C. Sierra und A. Verdaguer. MILORD: The Architecture and the Management of Linguistically Expressed Uncertainty. *Int. J. of Intelligent Systems*, 4:471–501, 1989.
- [Goguen67] J.A. Goguen. L-Fuzzy Sets. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 18:145–174, 1967.
- [Goguen69] J.A. Goguen. The Logic of Inexact Concepts. *Synthese*, 19:325–373, 1969.
- [Goldblatt79] R. Goldblatt. *Topoi, The Categorical Analysis of Logic*. North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [Golumbic80] M.C. Golumbic. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Academic Press, London, 1980.
- [Goodman82] I.R. Goodman. Fuzzy Sets as Equivalence Classes of Random Sets. In: R.R. Yager, Hg., *Recent Developments in Fuzzy Sets and Possibility Theory*, 327–343. Pergamon Press, New York, 1982.
- [Goodman91a] I.R. Goodman. Algebraic and Probabilistic Bases for Fuzzy Sets and the Development of Fuzzy Conditioning. In: I.R. Goodman, M.M. Gupta, H.T. Nguyen und G.S. Koges, Hg., *Conditional Logic in Expert Systems*, 1–69. North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [Goodman91b] I.R. Goodman, M.M. Gupta, H.T. Nguyen und G.S. Koges, Hg. *Conditional Logic in Expert Systems*. North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [Gottwald86a] S. Gottwald. Characterizations of the Solvability of Fuzzy Equations. *Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik*, 22:67–91, 1986.

- [Gottwald86b] S. Gottwald und W. Pedrycz. Solvability of Fuzzy Relational Equations and Manipulation of Fuzzy Data. *Fuzzy Sets and Systems*, 18:45–65, 1986.
- [Gottwald93] S. Gottwald. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. Series: *Artificial Intelligence*. Vieweg, Wiesbaden, 1993.
- [Grabisch92] M. Grabisch, T. Murofushi und M. Sugeno. Fuzzy Measure of Fuzzy Events Defined by Fuzzy Integrals. *Fuzzy Sets and Systems*, 50:293–313, 1992.
- [Gupta77] M.M. Gupta, G.N. Saridis und B.R. Gaines, Hg. *Fuzzy Automata and Decision Processes*. North-Holland, New York, 1977.
- [Gupta79] M.M. Gupta, R.K. Ragade und R.R. Yager, Hg. *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*. North-Holland, New York, 1979.
- [Gupta82a] M.M. Gupta und E. Sanchez, Hg. *Approximate Reasoning in Decision Analysis*. North-Holland, New York, 1982.
- [Gupta82b] M.M. Gupta und E. Sanchez, Hg. *Fuzzy Information and Decision Processes*. North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [Gupta85] M.M. Gupta, A. Kandel, W. Bandler und J.B. Kiszka, Hg. *Approximate Reasoning in Expert Systems*. North-Holland, New York, 1985.
- [Halmos50] P.R. Halmos. *Measure Theory*. Van Nostrand, Princeton, NJ, 1950.
- [Hamacher78] H. Hamacher. Über logische Verknüpfungen unscharfer Aussagen und deren zugehörige Bewertungsfunktionen. In: R. Trappl, G.J. Klir und L. Ricciardi, Hg., *Progress in Cybernetics and Systems Research 3*, 276–288. Hemisphere, Washington, DC, 1978.
- [Hayashi92] I. Hayashi, H. Namura, H. Yamasaki und N. Wakami. Construction of Fuzzy Inference Rules by Neural Network Driven Fuzzy Reasoning with Learning Functions. *Int. J. of Approximate Reasoning*, 6:241–266, 1992.
- [Heckerman88a] D.E. Heckerman. Probabilistic Interpretation for MYCIN's Certainty Factors. In: J. Lemmer und L.N. Kanal, Hg., *Uncertainty in Artificial Intelligence (2)*, 167–196. North-Holland, Amsterdam, 1988.

- [Heckerman88b] D.E. Heckerman und E.J. Horritz. The Myth of Modularity in Rule Based Systems for Reasoning with Uncertainty. In: J.F. Lemmer und L.N. Kanal, Hg., *Uncertainty in Artificial Intelligence (2)*, 23–34. North-Holland, 1988.
- [Heckerman90] D.E. Heckerman. *Probabilistic Similarity Networks*. MIT Press, Cambridge, MA, 1990.
- [Hestir91] K. Hestir, H.T. Nguyen und G.S. Rogers. A Random Set Formalism for Evidential Reasoning. In: I.R. Goodman, M.M. Gupta, H.T. Nguyen und G.S. Rogers, Hg., *Conditional Logic in Expert Systems*, 309–344. North-Holland, 1991.
- [Higashi83] M. Higashi und G.J. Klir. Measures of Uncertainty and Information based on Possibility Distributions. *Int. J. of General Systems* 9:43–58, 1983.
- [Hirota80] K. Hirota, Y. Arai und S. Hachisu. Fuzzy Controlled Robot Arm Playing Ping Pong Game. *Fuzzy Sets and Systems*, 3:193–219, 1980.
- [Hirota81] K. Hirota. Concepts of Probabilistic Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 5:31–46, 1981.
- [Hirota93] K. Hirota, Hg. *Industrial Applications of Fuzzy Technology*. Springer, Tokyo, 1993.
- [Hisdal78] E. Hisdal. Conditional Possibilities, Independence, and Non-Interaction. *Fuzzy Sets and Systems*, 1:283–297, 1978.
- [Hisdal88] E. Hisdal. Are Grades of Membership Probabilities? *Fuzzy Sets and Systems*, 35:325–347, 1988.
- [Höhle85] U. Höhle. The Category of B-Fuzzy Topological Spaces. *Analysis of Fuzzy Information*, 1:185–194, 1985.
- [Höhle90] U. Höhle. The Poincaré Paradox and the Cluster Problem. In: A. Dress und A. v. Haeseler, Hg., *Trees and Hierarchical Structures, Lecture Notes in Biomathematics 84*, 117–124. Springer, 1990.
- [Höhle91] U. Höhle und L.N. Stout. Foundations of Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 40:257–296, 1991.
- [Höhle92] U. Höhle. M-Valued Sets and Sheaves over Integral Commutative CL-Monoids. In: S.E. Rodabaugh, E.P. Klement und U. Höhle, Hg., *Applications of Category Theory to Fuzzy Subsets*, 33–72. Kluwer, Dordrecht, 1992.

- [Holmblad82] L.P. Holmblad und J.J. Østergaard. Control of a Cement Kiln by Fuzzy Logic. In: M.M. Gupta und E. Sanchez, Hg., *Fuzzy Information and Decision Processes*, 389–400. North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [Hopf94] J. Hopf und F. Klawonn. Learning the Rule Base of a Fuzzy Controller by a Genetic Algorithm. In: R. Kruse, J. Gebhardt und R. Palm, Hg. *Fuzzy Systems in Computer Science*, Vieweg, Wiesbaden, 1994.
- [Howard81] R.A. Howard und J.E. Matheson. Influence Diagrams. In: R.A. Howard und J.E. Matheson, Hg., *Readings on the Principles and Applications of Decision Analysis, Vol. 2*, 721–762. Strategic Decisions Group, Menlo Park, CA, 1981.
- [Hwang92] G.-C. Hwang und S. Lin. A Stability Approach to Fuzzy Control. *Fuzzy Sets and Systems*, 48:279–288, 1992.
- [Ichihashi91] H. Ichihashi. Iterative Fuzzy Modeling and a Hierarchical Network. In: R. Lowen und M. Roubens, Hg., *Proc. 4th IFSA Congress, Engineering*, 49–52, Brussels, 1991.
- [Isermann92] R. Isermann, K.H. Lachmann und D. Matko. *Adaptive Control Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.
- [Ishizuka85] M. Ishizuka und N. Kaisai. Prolog-ELF Incorporating Fuzzy Logic. *Proc. 9th IJCAI*, Los Angeles, 701–703, Morgan Kaufman, San Mateo, CA, 1985.
- [Jacas92] J. Jacas und J. Recasens. Eigenvectors and Generators of Fuzzy Relations. *Proc. IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, 687–694, San Diego, 1992. IEEE.
- [Jamshidi93] M. Jamshidi, N. Vadiiee und T.J. Ross, Hg. *Fuzzy Logic and Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993.
- [Kacprzyk83] J. Kacprzyk und R.R. Yager, Hg. *Management Decision Support Systems Using Fuzzy Sets and Possibility Theory*. Verlag TÜV Rheinland, Köln, 1983.
- [Kacprzyk88] J. Kacprzyk und M. Fedrizzi, Hg. *Combining Fuzzy Imprecision with Probabilistic Uncertainty in Decision Making*. Springer, Berlin, 1988.
- [Kacprzyk90] J. Kacprzyk und M. Fedrizzi. *Multiperson Decision Making Models Using Fuzzy Sets and Possibility Theory*. Kluwer, Dordrecht, 1990.

- [Kampé de Fériet82] J. Kampé de Fériet. Interpretation of Membership Functions in Terms of Plausibility and Belief. In: M.M. Gupta und E. Sanchez, Hg., *Fuzzy Information and Decision Making 1982*, 93–98, 1982
- [Kandel86] A. Kandel. *Fuzzy Mathematical Techniques with Applications*. Addison Wesley, Reading, MA, 1986.
- [Kandel91] A. Kandel und G. Langholz, Hg. *Fuzzy Control Systems*. CRC Press, Boca Raton, 1991.
- [Karr89] C. Karr, L. Freeman und D. Meredith. Improved Fuzzy Process Control of Spacecraft Autonomous Rendezvous Using a Genetic Algorithm. *Proc. SPIE Conf. on Intelligent Control and Adaptive Systems*, 274–283, SPIE, 1989.
- [Karr91] C. Karr. Applying Genetics to Fuzzy Logic. *AI Expert*, 6:26–33, 1991.
- [Karr92a] C. Karr. Design of an Adaptive Fuzzy Logic Controller Using a Genetic Algorithm. *Proc. Int. Conf. of Genetic Algorithms*, 450–457, 1992.
- [Karr92b] C. Karr und E. Gentry. A Genetic-Based Adaptive pH Fuzzy Logic Controller. *Proc. Int. Fuzzy Systems and Intelligent Control Conf.*, 255–264, 1992.
- [Karr92c] C. Karr, S. Sharma, W. Hatcher und T. Harper. Control of an Exothermic Chemical Reaction Using Fuzzy Logic and Genetic Algorithms. *Proc. Int. Fuzzy Systems and Intelligent Control Conf.*, 246–254, 1992.
- [Katsuno91] H. Katsuno und A.O. Mendelson. Proportional Knowledge Base Revisions and Minimal Change. *Artificial Intelligence* 52:263–294, 1991.
- [Kaufmann85] A. Kaufmann und M.M. Gupta. *Introduction to Fuzzy Arithmetic*. Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1985.
- [Keller85] J.M. Keller, G. Hobson, J. Wooton, A. Nofarich und K. Luetkemeyer. Fuzzy Confidence Measures in Midlevel Vision. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 15:580–585, 1985.
- [Keller92a] J.M. Keller und H. Tahani. Implementation of Conjunctive and Disjunctive Fuzzy Logic Rules with Neural Networks. *Int. J. of Approximate Reasoning*, 6:221–240, 1992.

- [Keller92b] J.M. Keller, R.R. Yager und H. Tahani. Neural Network Implementation of Fuzzy Logic. *Fuzzy Sets and Systems*, 45:1–12, 1992.
- [Kendall74] D.G. Kendall. Foundations of a Theory of Random Sets. In: E.F. Harding und D.G. Kendall, Hg., *Stochastic Geometry*, 322–376. John Wiley and Sons, Chichester, 1974.
- [Kickert78] W.J.M. Kickert und E.H. Mamdani. Analysis of a Fuzzy Controller. *Fuzzy Sets and Systems* 1:29–44, 1978.
- [Kiendl93] H. Kiendl und J.J. Rüger. Fast Real-time Fuzzy Controller Realization and Computer-aided Proof of Stability. *First European Congress on Fuzzy and Intelligent Technologies*, 124–129. Aachen, 1993.
- [Kinzel94a] J. Kinzel, F. Klawonn und R. Kruse. Algorithmen zum Erlernen und Optimieren von Fuzzy-Reglern. *Proc. 4. Dortmunder Fuzzy-Tage*, 92–99. Dortmund, 1994.
- [Kinzel94b] J. Kinzel, F. Klawonn und R. Kruse. Modifications of Genetic Algorithms for Designing and Optimizing Fuzzy Controllers. *Proc. IEEE Conference on Evolutionary Computation*, Orlando, 1994.
- [Kitainik93] L. Kitainik. *Fuzzy Decision Procedures with Binary Relations*. Kluwer, Dordrecht, 1993.
- [Klawonn92a] F. Klawonn. Fuzzy Unit Interval and Fuzzy Paths. In: S.E. Rodabaugh, E.P. Klement und U. Höhle, Hg., *Applications of Category Theory to Fuzzy Subsets*, 245–256. Kluwer, Dordrecht, 1992.
- [Klawonn92b] F. Klawonn. On a Łukasiewicz Logic Based Controller. *Proc. MEPP'92 Int. Seminar on Fuzzy Control through Neural Interpretations of Fuzzy Sets*, 53–56, Turku, 1992. *Reports on Computer Science & Mathematics, Series B*, No. 14, Åbo Akademie.
- [Klawonn92c] F. Klawonn. Prolog Extensions to Many-Valued Logics. In: U. Höhle und E.P. Klement, Hg., *Proc. 14th Linz Seminar on Fuzzy Set Theory: Non-Classical Logics and their Applications*, 42–45, Linz, 1992. Johannes Kepler Universität.
- [Klawonn92d] F. Klawonn, J. Gebhardt und R. Kruse. Logical Approaches to Uncertainty and Vagueness in the View of the Context Model. *Proc. IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, 1375–1382, San Diego, 1992. IEEE.

- [Klawonn93a] F. Klawonn und R. Kruse. Equality Relations as a Basis for Fuzzy Control. *Fuzzy Sets and Systems*, 54:147–156, 1993.
- [Klawonn93b] F. Klawonn und R. Kruse. Fuzzy Control as Interpolation on the Basis of Equality Relations. *Proc. IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, San Francisco, IEEE Press, New York, 1993.
- [Klawonn94] F. Klawonn. Fuzzy Sets and Vague Environments. *Fuzzy Sets and Systems* 66:207–221, 1994.
- [Klawonn95] F. Klawonn, R. Kruse und K. Michels. *Fuzzy-Regler*. Hanser, München, 1995.
- [Klement80] E.P. Klement. Fuzzy  $\sigma$ -Algebras and Fuzzy Measurable Functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 4:83–93, 1980.
- [Klement82] E.P. Klement. A Theory of Fuzzy Measures: A Survey. In: M.M. Gupta und E. Sanchez, Hg., *Fuzzy Information and Decision Processes*, 59–65. North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [Klir87] G.J. Klir. Where Do We Stand on Measures of Uncertainty, Ambiguity, Fuzziness and the Like? *Fuzzy Sets and Systems*, 24, 1987.
- [Klir88] G.J. Klir und T.A. Folger. *Fuzzy Sets, Uncertainty and Information*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [Knopfmacher75] J. Knopfmacher. On Measures of Fuzziness. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 49:529–534, 1975.
- [König92] D. König und V. Schmidt. *Zufällige Punktprozesse*. Series: *Teubner Skripten zur Mathematischen Stochastik*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1992.
- [Kosko92a] B. Kosko. Fuzzy Systems as Universal Approximators. *Proc. IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, 1153–1162, San Diego, 1992. IEEE.
- [Kosko92b] B. Kosko. *Neural Networks and Fuzzy Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.
- [Kraft83] D.H. Kraft und D.A. Buell. Fuzzy Sets and Generalized Boolean Retrieval Systems. *Int. J. of Man-Machine Studies* 19:45–56, 1983.
- [Krantz71a] D.H. Krantz, R.D. Luce, P. Suppes und A. Tversky. *Foundations of Measurement*, Vol. 1. Academic Press, New York, 1971.



- [Krantz71b] D.H. Krantz, R.D. Luce, P. Suppes und A. Tversky. *Foundations of Measurement*, Vol. 2. Academic Press, New York, 1971.
- [Krishnapuram93a] R. Krishnapuram und J.M. Keller, A Possibilistic Approach to Clustering. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1:98–110, 1993.
- [Krishnapuram93b] R. Krishnapuram, J.M. Keller und Y. Ma, Quantitative Analysis of Properties and Spatial Relations of Fuzzy Image Regions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1:222–233, 1993.
- [Kruse82a] R. Kruse. A Note on  $\lambda$ -additive Fuzzy-Measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 8:219–222, 1982.
- [Kruse82b] R. Kruse. On the Construction of Fuzzy Measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 8:323–327, 1982.
- [Kruse82c] R. Kruse. The Strong Law of Large Numbers for Fuzzy Random Variables. *Information Sciences*, 28:233–241, 1982.
- [Kruse83a] R. Kruse. On the Entropy of Fuzzy Events. *Kybernetes*, 12:53–57, 1983.
- [Kruse83b] R. Kruse. *Schätzfunktionen für Parameter von unscharfen Zufallsvariablen*. Habilitationsschrift, TU Braunschweig, 1983.
- [Kruse84] R. Kruse. Statistical Estimation with Linguistic Data. *Information Sciences*, 33:197–207, 1984.
- [Kruse87a] R. Kruse. On a Software Tool for Statistics with Linguistic Data. *Fuzzy Sets and Systems*, 24:377–383, 1987.
- [Kruse87b] R. Kruse. On the Variance of Random Sets. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 122:469–473, 1987.
- [Kruse87c] R. Kruse. Parametric Statistics in the Presence of Vague Data. *Proc. 2nd IFSA Congress*, Tokyo, 1987.
- [Kruse87d] R. Kruse und K.D. Meyer. *Statistics with Vague Data*. Series B: *Mathematical and Statistical Methods*. Reidel, Dordrecht, 1987.
- [Kruse89] R. Kruse und J. Gebhardt. On a Dialog System for Modelling and Statistical Analysis of Linguistic Data. *Proc. IFSA Congress*, 157–160, Seattle, 1989.
- [Kruse90] R. Kruse und E. Schwecke. Fuzzy Reasoning in a Multidimensional Space of Hypothesis. *Int. J. of Approximate Reasoning*, 4:47–68, 1990.

- [Kruse91a] R. Kruse, E. Schwecke und J. Heinsohn. *Uncertainty and Vagueness in Knowledge Based Systems: Numerical Methods*. Series: *Artificial Intelligence*. Springer, Berlin, 1991.
- [Kruse91b] R. Kruse, E. Schwecke und F. Klawonn. On a Tool for Reasoning with Mass Distributions. *Proc. 12th IJCAI*, Sydney, 1190–1195, Morgan Kaufman, San Mateo, CA, 1991.
- [Kruse91c] R. Kruse und P. Siegel, Hg. *Symbolic and Quantitative Approaches to Uncertainty*. Springer, 1991.
- [Kruse92] R. Kruse. On the Semantic Foundations of Fuzzy Probability Theory and Fuzzy Statistics. In: H. Bandemer, Hg., *Modelling Uncertain Data*, 131–135. Akademie Verlag, Berlin, 1992.
- [Kruse93] R. Kruse und M. Schröder. An Application of Equality Relations to Idle Speed Control. *Proc. 1st European Congress on Fuzzy and Intelligent Technologies*, 370–376, Aachen, 1993.
- [Kruse94] R. Kruse, J. Gebhardt und R. Palm, Hg. *Fuzzy Systems in Computer Science*. Vieweg, Wiesbaden, 1994.
- [Kwakernaak78a] H. Kwakernaak. Fuzzy Random Variables Part 1: Definitions and Theorems. *Information Sciences*, 15:1–15, 1978.
- [Kwakernaak78b] H. Kwakernaak. Fuzzy Random Variables Part 2: Algorithms and Examples for the Discrete Case. *Information Sciences*, 17:253–278, 1978.
- [Lamata89] M.T. Lamata und S. Moral. Classification of Fuzzy Measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 33:243–253, 1989.
- [Larsen80] P.M. Larsen. Industrial Applications of Fuzzy Logic Control. *Int. J. of Man Machine Studies*, 12:3–10, 1980.
- [Lauritzen88] S.L. Lauritzen und D.J. Spiegelhalter. Local Computations with Probabilities on Graphical Structures and their Application to Expert Systems. *J. of the Royal Stat. Soc., Series B*, 50:157–224, 1988.
- [Le Faivre74] R.A. Le Faivre. The Representation of Fuzzy Knowledge. *J. of Cybernetics*, 4:57–66, 1974.
- [Lee71] R.C.T. Lee und C.L. Chang. Some Properties of Fuzzy Logic. *Information and Control*, 19:417–431, 1971.
- [Lee72] R.C.T. Lee. Fuzzy Logic and the Resolution Principle. *J. Association of Computation and Machines*, 19:109–119, 1972.

- [Lee90a] C.C. Lee. Fuzzy Logic in Control Systems: Fuzzy Logic Controller Part I. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 20:404–418, IEEE Press, New York, 1990.
- [Lee90b] C.C. Lee. Fuzzy Logic in Control Systems: Fuzzy Logic Controller Part II. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 20:419–443, 1990.
- [Lee93] M.A. Lee und H. Takagi. Integrating Design Stages of Fuzzy Systems Using Genetic Algorithms. *Proc. IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, San Francisco, 1993.
- [Lindley87] D.V. Lindley. The Probability Approach to the Treatment of Uncertainty in Artificial Intelligence and Expert Systems. *Stat. Sci.* 2:17–24, 1987.
- [Lloyd87] J.W. Lloyd. *Foundations of Logic Programming*. Springer, Berlin, 1987.
- [Loginov66] V.I. Loginov. Probability Treatment of Zadeh's Membership Function and their Use in Pattern Recognition. *Eng. Cybernetics*, 68–69, 1966
- [Lowen76] R. Lowen. Fuzzy Topological Spaces and Fuzzy Compactness. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 56:621–633, 1976.
- [de Luca72] A. de Luca und S. Termini. A Definition of a Nonprobabilistic Entropy in the Setting of Fuzzy Set Theory. *Information and Control*, 20:301–312, 1972.
- [Luce90] R.D. Luce, D.H. Krantz, P. Suppes und A. Tversky. *Foundations of Measurement*, Vol. 3. Academic Press, New York, 1990.
- [Ludwig90] G. Ludwig. *Die Grundstrukturen einer physikalischen Theorie*. Springer, Berlin, 1990.
- [Łukasiewicz30] J. Łukasiewicz. *Philosophical Remarks on Many-valued Systems of Propositional Logic*, 1930. Reprinted in *Selected Works*, L. Borkowski, Hg., *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam, 1970, 153–179.
- [MacColl78] H. MacColl. The Calculus of Equivalent Statements and Integration. *Proc. Limits. of the London Mathematical Society* 9, 1878.
- [Maier83] D. Maier. *The Theory of Relational Databases*. Pitman, London, 1983.

- [Mamdani74] E.H. Mamdani. Applications of Fuzzy Algorithms for Simple Dynamic Plant. *Proc. IEEE* 121:1585–1588, 1974.
- [Mamdani75] E.H. Mamdani und S. Assilian. An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller. *Int. J. of Man Machine Studies*, 7:1–13, 1975.
- [Mamdani76] E.H. Mamdani. Advances in the Linguistic Synthesis of Fuzzy Controllers. *Int. J. of Man Machine Studies*, 8:669–678, 1976.
- [Mamdani77] E.H. Mamdani. Application of Fuzzy Logic to Approximate Reasoning Using Linguistic Systems. *IEEE Trans. on Computers*, 26:1182–1191, 1977.
- [Mamdani81] E.H. Mamdani und B.R. Gaines, Hg. *Fuzzy Reasoning and its Applications*. Academic Press, London, 1981.
- [Martin87] T.P. Martin, J.F. Baldwin und B.W. Pilsworth. The Implementation of FProlog — A Fuzzy Prolog Interpreter. *Fuzzy Sets and Systems*, 23:119–129, 1987.
- [Matheron75] G. Matheron. *Random Sets and Integral Geometry*. John Wiley and Sons, New York, 1975.
- [Mayer93] A. Mayer, B. Mechler, A. Schlindwein und R. Wolke. *Fuzzy Logic — Einführung und Leitfaden zur praktischen Anwendung*, Addison-Wesley, Bonn, 1993.
- [Menger42] K. Menger. Statistical Metrics. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 28:535–537, 1942.
- [Menger51] K. Menger. Ensembles flous et fonctions aléatoires. *C. R. Acad. Sci.*, 232:2001–2003, 1951.
- [Miyamoto90] S. Miyamoto. *Fuzzy Sets in Information Retrieval and Cluster Analysis*. Kluwer, Dordrecht, 1990.
- [Mizumoto76] M. Mizumoto und K. Tanaka. Some Properties of Fuzzy Sets of Type 2. *Information and Control*, 31:312–340, 1976.
- [Mizumoto85] M. Mizumoto. Extended Fuzzy Reasoning. In: M.M. Gupta, A. Kandel, W. Bandler und J.B. Kiszka, Hg., *Approximate Reasoning in Expert Systems*, 71–85. North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [Moore66] R.E. Moore. *Interval Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.

- [Moore79] R.E. Moore. *Methods and Applications of Interval Analysis*. SIAM, Philadelphia, 1979.
- [Mukaidono82] M. Mukaidono. Fuzzy Inference in Resolution Style. In: R.R. Yager, Hg., *Fuzzy Sets and Possibility Theory — Recent Developments*, 224–231. Pergamon Press, Oxford, 1982.
- [Mukaidono89] M. Mukaidono, Z.L. Shen und L. Ding. Fundamentals of Fuzzy Prolog. *Int. J. of Approximate Reasoning*, 3:179–193, 1989.
- [Munakata94] T. Munakata und Y. Jani. Fuzzy Systems: An Overview. *Communications of the ACM*, Vol. 37, 3:69–76, 1994.
- [Näther90] W. Näther und M. Albrecht. Linear Regression with Random Fuzzy Observations. *Statistics*, 21:521–531, 1990.
- [Nauck92a] D. Nauck und R. Kruse. Interpreting Changes in the Membership Functions of a Self-Adaptive Neural Fuzzy Controller. *Proc. 2nd Int. Workshop Industrial Applications of Fuzzy Control and Intelligent Systems (IFIS'92)*, 146–152, College Station, 1992.
- [Nauck92b] D. Nauck und R. Kruse. Neural Fuzzy Controller Learning by Fuzzy Error Propagation. *Proc. NAFIPS'92 Conf.*, 388–397, Puerto Vallarta, 1992.
- [Nauck93] D. Nauck und R. Kruse. A Fuzzy Neural Network Learning Fuzzy Control Rules and Membership Functions by Fuzzy Error Backpropagation. *Proc. IEEE-ICNN'93*, San Francisco, IEEE Press, New York, 1993.
- [Nauck94] D. Nauck, F. Klawonn und R. Kruse. *Neuronale Netze und Fuzzy Systeme*. Vieweg, Wiesbaden, 1994.
- [Neapolitan90] R.E. Neapolitan. *Probabilistic Reasoning in Expert Systems: Theory and Algorithms*. John Wiley and Sons, New York, 1990.
- [Negoita75] C.V. Negoita und D.A. Ralescu. Representation Theorems for Fuzzy Concepts. *Kybernetes*, 4:169–174, 1975.
- [Nguyen78a] H.T. Nguyen. On Conditional Probability Distributions. *Fuzzy Sets and Systems*, 1:299–309, 1978.
- [Nguyen78b] H.T. Nguyen. On Random Sets and Belief Functions. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 65:531–542, 1978.
- [Nguyen79] H.T. Nguyen. Towards a Calculus of the Mathematical Notion of Possibility. In: M.M. Gupta, R.K. Ragade und R.R. Yager, Hg. *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*, 235–246. North-Holland, Amsterdam, 1979.

- [Nguyen84] H.T. Nguyen. Using Random Sets. *Information Science*, 34:265–274, 1984.
- [Nilsson86] N.J. Nilsson. Probabilistic Logic. *Artificial Intelligence*, 28:71–87, 1986.
- [Nola83] A.D. Nola und S. Sessa. On the Set of Solutions of Composite Fuzzy Relation Equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 9:275–285, 1983.
- [Nola86] A.D. Nola und A.G.S. Ventre, Hg. *The Mathematics of Fuzzy Systems*. Verlag TÜV Rheinland, Köln, 1986.
- [Nola89] A.D. Nola, S. Sessa, W. Pedrycz und E. Sanchez. *Fuzzy Relation Equations and their Application to Knowledge Engineering*. Kluwer, Dordrecht, 1989.
- [Nomura92a] H. Nomura, I. Hayashi und N. Wakami. A Learning Method of Fuzzy Inference Rules by Descent Method. *Proc. IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, San Diego, 371–378, IEEE Press, New York, 1992.
- [Nomura92b] H. Nomura, I. Hayashi und N. Wakami. A Self-Tuning Method of Fuzzy Reasoning by Genetic Algorithm. *Proc. Int. Fuzzy Systems and Intelligent Control Conf.*, 236–245, 1992.
- [Norwich84] A.M. Norwich und I.B. Turksen. A Model for the Measurement of Membership and the Consequences of its Empirical Implementation. *Fuzzy Sets and Systems*, 12:1–25, 1984.
- [Novák90a] V. Novák. On the Syntactico–Semantical Completeness of First Order Fuzzy Logic, Part I: Syntax and Semantics. *Kybernetika*, 26:47–66, 1990.
- [Novák90b] V. Novák. On the Syntactico–Semantical Completeness of First Order Fuzzy Logic, Part II: Main Results. *Kybernetika*, 26:134–154, 1990.
- [Novák92] V. Novák. On the Logical Basis of Approximate Reasoning. In: V. Novák, J. Ramík, M. Mareš, M. Černý, und J. Nekola, Hg., *Fuzzy Approach to Reasoning and Decision Making*, 17–27. Kluwer, Dordrecht, 1992.
- [Orci85] I.P. Orci. Programming in Fuzzy Logic for Expert System Design. *Proc. 5th Int. Workshop on Expert Systems and their Applications*, 1179–1190, Avignon, 1985.

- [Orci89] I.P. Orci. Programming in Possibilistic Logic. *Int. J. of Expert Systems*, 2:79–96, 1989.
- [Orlov78] A.I. Orlov. Fuzzy and Random Sets (in Russisch). *Prikladnoiï Mnogomiernii Statistcheskii Analiz*, 262–280. Nauka, Moscow, 1978.
- [Ovchinnikov84] S.V. Ovchinnikov. Representation of Transitive Fuzzy Relations. In: H.J. Skala, S. Termini und E. Trillas, Hg., *Aspects of Vagueness*, 105–118. Reidel, Dordrecht, 1984.
- [Pal94] N.R. Pal und J.C. Bezdek. Measuring Fuzzy Uncertainty. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 2:107–118. IEEE Press, New York, 1994.
- [Palm92] R. Palm. Sliding Mode Control. *Proc. IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, San Diego, 519–526, IEEE Press, New York, 1992.
- [Pao89] Y.-H. Pao. *Adaptive Pattern Recognition and Neural Networks*. Addison Wesley, Reading, MA, 1989.
- [Pavelka79] J. Pavelka. On Fuzzy Logic I, II, III. *Zeitschr. Math. Logik Grundl. Math.*, 25:45–52, 119–134, 447–464, 1979.
- [Pearl86] J. Pearl. Fusion, Propagation, and Structuring in Belief Networks. *Artificial Intelligence*, 29:241–288, 1986.
- [Pearl88] J. Pearl. *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems. Networks of Plausible Inference*. Morgan Kaufman, San Mateo, CA, 1988.
- [Pedrycz81] W. Pedrycz. An Approach to the Analysis of Fuzzy Systems. *Int. J. of Control*, 34:403–421, 1981.
- [Pedrycz93] W. Pedrycz. *Fuzzy Control and Fuzzy Systems*. Research Studies Press, Taunton, 2nd edition, 1993.
- [Pfeiffer93] B.M. Pfeiffer und R. Isermann. Criteria for Successful Applications of Fuzzy Control. *First European Congress on Fuzzy and Intelligent Technologies*, 1403–1409. Aachen, 1993.
- [Pham91] D.T. Pham und D. Karaboga. Optimum Design of Fuzzy Logic Controllers Using Genetic Algorithms. *J. of Systems Engineering*, 1:114–118, 1991.
- [Poincaré02] H. Poincaré. *La Science et L'Hypothèse*. Flammarion, Paris, 1902.
- [Poincaré04] H. Poincaré. *La Valeur de la Science*. Flammarion, Paris, 1904.

- [Prade86] H. Prade und C.V. Negoita, Hg. *Fuzzy Logic in Knowledge Engineering*. Verlag TÜV Rheinland, Köln, 1986.
- [Procyk79] T.J. Procyk und E.H. Mamdani. A Linguistic Self-Organizing Process Controller. *Automatica*, 15:15–30, 1979.
- [Puri82] M.L. Puri und D.A. Ralescu. A Possibility Measure is not a Fuzzy Measure. *Fuzzy Sets and Systems*, 7:311–313, 1982.
- [Puri86] M.L. Puri und D.A. Ralescu. Fuzzy Random Variables. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 114:409–422, 1986.
- [Quian92] Y. Quian, P. Tessier und G. Dumont. Fuzzy Logic Based Modeling and Optimization. *Proc. 2nd Int. Conf. on Fuzzy Logic and Neural Networks*, 349–352, Iizuka, 1992.
- [Ralescu82] D.A. Ralescu. Fuzzy Logic and Statistical Estimation. *Proc. 2nd World Conf. on Mathematics at the Service of Man*, 1982.
- [Ramer89] A. Ramer. Conditional Possibility Measures. *Proc. 3rd IFSA Congress*, 412–415, Seattle, 1989.
- [Rasiowa70] H. Rasiowa und R. Sikorski. *The Mathematics of Metamathematics*. Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1970.
- [Rescher69] N. Rescher. *Many-Valued Logic*. McGraw-Hill, New York, 1969.
- [Rescher76] N. Rescher. *Plausible Reasoning: An Introduction to the Theory and Practice of Plausible Inference*. Van Gorcom, Assen, Amsterdam, 1976.
- [Reusch92] B. Reusch, Hg. *Fuzzy Logic — Theorie und Praxis*. 2. Dortmunder Fuzzy-Tage, Springer, Berlin, 1992.
- [Reusch93] B. Reusch, Hg. *Fuzzy Logic — Theorie und Praxis*. 2. Dortmunder Fuzzy-Tage, Springer, Berlin, 1993.
- [Rodabaugh92] S.E. Rodabaugh, E.P. Klement und U. Höhle, Hg. *Applications of Category Theory to Fuzzy Subsets*. Kluwer, Dordrecht, 1992.
- [Rommelfanger93] H. Rommelfanger. *Fuzzy Decision Support-Systeme — Entscheiden bei Unschärfe*. Springer, Heidelberg, 1993.
- [Rosser52] J.B. Rosser und A.R. Turquette. *Many-Valued Logics*. North-Holland, Amsterdam, 1952.
- [Runkler93] T.A. Runkler und M. Glesner. A Set of Axioms for Defuzzification Strategies: Towards A Theory of Rational Defuzzification Operators. *Proc. 2nd IEEE International Conf. on Fuzzy Systems*, San Francisco, 1161–1161, IEEE Press, New York, 1993.



- [Ruspini69] E.H. Ruspini. A New Approach to Clustering. *Information and Control*, 15:22–32, 1969.
- [Ruspini70] E.H. Ruspini. Numerical Methods for Fuzzy Clustering. *Information Sciences*, 2:319–350, 1970.
- [Ruspini90] E.H. Ruspini. Similarity Based Modells for Possibilistic Logics. *Proc. 3rd Int. Conf. on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge Based Systems*, 56–58, 1990.
- [Ruspini91] E.H. Ruspini. On the Semantics of Fuzzy Logic. *Int. J. of Approximate Reasoning*, 5:45–88, 1991.
- [Saaty74] T.L. Saaty. Measuring the Fuzziness of Sets. *J. of Cybernetics*, 4:53–61, 1974.
- [Saaty78] T.L. Saaty. Exploring the Interface Between Hierarchies, Multiple Objectives, and Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 1:57–68, 1978.
- [Sanchez76] E. Sanchez. Resolution of Composite Fuzzy Relation Equations. *Information and Control*, 30:38–48, 1976.
- [Savage72] L.J. Savage. *The Foundations of Statistics*. Dover Publ., New York, 1972.
- [Scharf85] E.M. Scharf und N.J. Mandve. The Application of a Fuzzy Controller to the Control of a Multi-Degree-Freedom Robot Arm. In: M. Sugeno, Hg., *Industrial Applications of Fuzzy Control*, 41–62. North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [Schweizer61] B. Schweizer und A. Sklar. Associative Functions and Statistical Triangle Inequalities. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 8:169–186, 1961.
- [Schweizer63] B. Schweizer und A. Sklar. Associative Functions and Abstract Semigroups. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 10:69–81, 1963.
- [Schweizer83] B. Schweizer und A. Sklar. *Probabilistic Metric Spaces*. North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [Shachter88] R.D. Shachter. Evaluating Influence Diagrams. *Operations Research*, 33, 1988.
- [Shackle61] G.L.S. Shackle. *Decision, Order, and Time in Human Affairs*. Cambridge University Press, Cambridge, 1961.

- [Shafer76] G. Shafer. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1976.
- [Shafer90] G. Shafer und J. Pearl. *Readings in Uncertain Reasoning*. Morgan Kaufman, San Mateo, CA, 1990.
- [Shao88] S. Shao. Fuzzy Self-Organizing Controller and its Application for Dynamic Processes. *Fuzzy Sets and Systems*, 26:151–164, 1988.
- [Shenoy90] P.P. Shenoy und G. Shafer. Axioms for Probability and Belief Function Propagation. In: R.D. Shachter, T.S. Levitt, L.N. Kanal, and J.F. Lemmer, Hg., *Uncertainty in Artificial Intelligence (4)*, 169–198. North-Holland, Amsterdam, 1990.
- [Shortliffe75] E. Shortliffe und B.G. Buchanan. A Model of Inexact Reasoning in Medicine. *Mathematical Biosciences*, 23:351–379, 1975.
- [Skala78] H.J. Skala. On Many-valued Logics. *Fuzzy Sets and Systems*, 1:129–149, 1978.
- [Skala84] H.J. Skala, S. Termini und E. Trillas, Hg. *Aspects of Vagueness*. Reidel, Dordrecht, 1984.
- [Smets81] P. Smets. Medical Diagnosis: Fuzzy Sets and Degrees of Belief. *Fuzzy Sets and Systems*, 5:259–266, 1981.
- [Smets88] P. Smets, A. Mamdani, D. Dubois und H. Prade. *Non Standard Logics for Automated Reasoning*. Academic Press, London, 1988.
- [Smithson89] M. Smithson. *Ignorance and Uncertainty*. Springer, New York, 1989.
- [Spies93] M. Spies. *Unsicheres Wissen*. Spektrum, Heidelberg, 1993.
- [Spohn88] W. Spohn, Ordinal Conditional Functions: A Dynamic Theory of Epistemic States. In: W. Harper und B. Skryms, Hg., *Causation in Decision, Belief Change, and Statistics*, 105–134, Kluwer, Dordrecht, 1988.
- [Spohn90] W. Spohn, A General Non-Probabilistic Theory of Inductive Reasoning. In: R.D. Shachter, T.S. Levitt, L.N. Kanal und J.F. Lemmer, Hg., *Uncertainty in Artificial Intelligence*, 149–158. North-Holland, Amsterdam 1990
- [Stallings77] W. Stallings. Fuzzy Set Theory versus Bayesian Statistics. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 7:216–219, 1977.
- [Stout91] L.N. Stout. A Survey of Fuzzy Set and Topos Theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 42:3–14, 1991.

- [Stoyan87] D. Stoyan, W.S. Kendall und J. Mecke. *Stochastic Geometry and its Applications*. John Wiley and Sons, Chichester, 1987.
- [Strassen64] V. Strassen. Meßfehler und Information. *Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* 2:273–305, 1964.
- [Sugeno74] M. Sugeno. *Theory of Fuzzy Integral and its Application*. Ph. D. Thesis, Tokyo Inst. of Technology, Tokyo, 1974.
- [Sugeno85a] M. Sugeno, Hg. *Industrial Applications of Fuzzy Control*. North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [Sugeno85b] M. Sugeno. An Introductory Survey of Fuzzy Control. *Information Sciences*, 36:59–83, 1985.
- [Sugeno85c] M. Sugeno und K. Murakami. An Experimental Study on Fuzzy Parking Control Using a Model Car. In: M. Sugeno, Hg., *Industrial Applications on Fuzzy Control*, 125–138. North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [Sugeno85d] M. Sugeno und M. Nishida. Fuzzy Control of Model Car. *Fuzzy Sets and Systems*, 16:103–113, 1985.
- [Sugeno93] M. Sugeno und T. Yasukawa. A Fuzzy-Logic-Based Approach to Qualitative Modeling. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 1:7–31, 1993.
- [Takagi85] T. Takagi und M. Sugeno. Fuzzy Identification of Systems and its Application to Modelling and Control. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 15:116–132, 1985.
- [Takagi91a] H. Takagi und I. Hayashi. NN-Driven Fuzzy Reasoning. *Int. J. of Approximate Reasoning*, (Special Issue of IIZUKA'88), 5:191–212, 1991.
- [Takagi91b] H. Takagi, N. Suzuki, T. Kouda. Neural Networks Designed on Approximate Reasoning Architecture and its Applications. *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol. 3, 5:752–760, 1992.
- [Tanaka87] H. Tanaka. Fuzzy Data Analysis by Possibilistic Linear Models. *Fuzzy Sets and Systems*, 24:363–375, 1987.
- [Tanaka88] H. Tanaka und Watada. Possibilistic Linear Systems and their Application to Linear Regression Models. *Fuzzy Sets and Systems*, 27:275–289, 1988.
- [Tanaka92] K. Tanaka und M. Sugeno. Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 45:135–156, 1992.

- [Taunton89] C. Taunton. Expert Systems in Process Control: An Overview. *ISA '89 Advanced Control Conference*, 51–55. Birmingham, 1989.
- [Terano91] T. Terano, K. Asai und M. Sugeno. *Fuzzy System Theory and its Applications*. Academic Press, Boston, MA, 1991.
- [Terano92] T. Terano, M. Sugeno, M. Mukaidono und K. Shigemasu, Hg. *Fuzzy Engineering toward Human Friendly Systems*. IOS Press, Amsterdam, 1992.
- [Tong80] R.M. Tong. Some Properties of Fuzzy Feedback Systems. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 10:327–331, 1980.
- [Tong84] R.M. Tong. A Retrospective View of Fuzzy Control Systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 14:199–210, 1984.
- [Toth92] H. Toth. Reconstruction Possibilities for Fuzzy Sets: Towards a New Level of Understanding? *Fuzzy Sets and Systems*, 52:283–304, 1992.
- [Trillas84] E. Trillas und L. Valverde. An Inquiry into Indistinguishability Operators. In: H.J. Skala, S. Termini und E. Trillas, Hg., *Aspects of Vagueness*, 231–256. Reidel, Dordrecht, 1984.
- [Trillas85] E. Trillas und L. Valverde. On the Implication and Indistinguishability in the Setting of Fuzzy Logic. In: J. Kacprzyk und R.R. Yager, Hg., *Management Decision Support Systems Using Fuzzy Sets and Possibility Theory*, 198–212. Verlag TÜV Rheinland, Köln, 1985.
- [Turksen91] I.B. Turksen. Measurement of Membership Functions and their Acquisition. *Fuzzy Sets and Systems*, 40:5–38, 1991.
- [Umano82] M. Umano. FREEDOM-0 — A Fuzzy Database System. In: M.M. Gupta und E. Sanchez, Hg., *Fuzzy Information and Decision Processes*, 339–347. North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [Umano87] M. Umano. Fuzzy Set Prolog. *Proc. 2nd IFSA Congress*, 750–753, Tokyo, Japan, 1987.
- [Valverde85] L. Valverde. On the Structure of F-Indistinguishability Operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 17:313–328, 85.
- [Viertl90] R. Viertl. *Einführung in die Stochastik*. Kap. VII: Statistische Analyse für unscharfe Daten. Springer, Wien, 1990.
- [Wang80] P.P. Wang und S.K. Chang, Hg. *Fuzzy Sets: Theory and Application to Policy Analysis and Information Systems*. Plenum Press, New York, 1980.

- [Wang83] P.Z. Wang. From the Fuzzy Statistics to the Falling Random Subsets. In: P.P. Wang, Hg., *Advances in Fuzzy Sets, Possibility and Applications*, 81–96. Plenum Press, New York, 1983.
- [Wang92] Z. Wang und G.J. Klir. *Fuzzy Measure Theory*. Plenum Press, New York, 1992.
- [Wang93] P.Z. Wang und K.F. Loer, Hg. *Mind and Computer — Fuzzy Science and Engineering*. World Scientific, Singapore, 1993.
- [Weber83] S. Weber. A General Concept of Fuzzy Connectives, Negation and Implication Based on  $t$ -Norms and  $t$ -Conorms. *Fuzzy Sets and Systems*, 11:115–134, 1983.
- [Whalen85] T. Whalen und B. Scott. Alternative Logics for Approximate Reasoning in Expert Systems: A Comparative Study. *Int. J. of Man Machine Studies*, 22:327–346, 1985.
- [White92] D.A. White und D.A. Sofge, Hg. *Handbook of Intelligent Control*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1992.
- [Winkler67a] R.L. Winkler. The Assessment of prior distributors in Bayesian Analysis, *J. of the American Statistical Association*, Vol. 62, 319:776–800, 1967.
- [Winkler67b] R.L. Winkler. The Quantification of Judgement: Some Methodological Suggestions, *J. of the American Statistical Association*, Vol. 62, 320:1105–1119, 1967.
- [Yager80] R.R. Yager. On a General Class of Fuzzy Connectives. *Fuzzy Sets and Systems*, 4:235–242, 1980.
- [Yager80b] R.R. Yager. Aspects of Possibilistic Uncertainty. *Int. J. of Man-Machine Studies* 12:283–298, 1980.
- [Yager82] R.R. Yager. Some Procedures for Selecting Fuzzy Set Theoretic Operators. *Int. J. of General Systems*, 8:115–124, 1982.
- [Yager83] R.R. Yager. An Introduction to Applications of Possibility Theory. *Human Systems Management*, 3:246–269, 1983.
- [Yager85] R.R. Yager. Inference in a Multivalued Logic System. *Int. J. of Man Machine Studies*, 23:27–44, 1985.
- [Yager87] R.R. Yager, S. Ovchinnikov, R.M. Tong und H.T. Nguyen. *Fuzzy Sets and Applications*. Selected Papers by L.A. Zadeh. John Wiley and Sons, New York, 1987.

- [Yager92a] R.R. Yager und L.A. Zadeh. *An Introduction to Fuzzy Logic Applications in Intelligent Systems*. Kluwer, Boston, MA, 1992.
- [Yager92b] R.R. Yager. On the Specificity of a Possibilistic Distribution. *Fuzzy Sets and Systems* 50:279–292, 1992.
- [Yager93a] R.R. Yager und D.P. Filev. SLIDE: A Simple Adaptive Defuzzification Method. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 1, 1:69–78, 1993.
- [Yager93b] R.R. Yager und D.P. Filev. On the Issue of Defuzzification and Selection Based on a Fuzzy Set. *Fuzzy Sets and System*, 55:255–271, 1993.
- [Yager94] R.R. Yager, M. Fedrizzi und J. Kacprzyk, Hg. *Advances in the Dempster–Shafer Theory of Evidence*. Wiley & Sons, New York, 1994.
- [Yasunubo83] S. Yasunubo, S. Miyamoto und H. Ihara. Fuzzy Control for an Automatic Train Operation System. *Proc. 4th IFAC/IFIP/IFORS Int. Conf. on Control in Transportation Systems*, 33–39, Baden-Baden, Germany 1983.
- [Yasunubo85] S. Yasunubo und S. Miyamoto. Automatic Train Operation by Predictive Fuzzy Control. In: M. Sugeno, Hg., *Industrial Applications of Fuzzy Control*, 1–18. North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [Zadeh65] L.A. Zadeh. Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.
- [Zadeh68] L.A. Zadeh. Probability Measures of Fuzzy Events. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 10:421–427, 1968.
- [Zadeh71a] L.A. Zadeh. Similarity Relations and Fuzzy Orderings. *Information Sciences*, 3:177–200, 1971.
- [Zadeh71b] L.A. Zadeh. Towards a Theory of Fuzzy Systems. In: R.E. Kalman und N. de Claris, Hg. *Aspects of Networks and System Theory*, 469–490, Rinehart and Winston, NY, 1971.
- [Zadeh72a] L.A. Zadeh. A Fuzzy-Set-Theoretic Interpretation of Linguistic Hedges. *J. of Cybernetics*, 2:4–34, 1972.
- [Zadeh72b] L.A. Zadeh. A Rationale for Fuzzy Control. *J. Dynamic Systems, Measurement and Control, Series 6*, 94:3–4, 1972.

- [Zadeh73] L.A. Zadeh. Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 3:28–44, 1973.
- [Zadeh75] L.A. Zadeh. The Concepts of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning. *Information Sciences*, 8:199–249, 301–357, 9:43–80, 1975.
- [Zadeh76] L.A. Zadeh. A Fuzzy–Algorithmic Approach to the Definition of Complex or Imprecise Concepts. *Int. J. of Man Machine Studies*, 8:249–291, 1976.
- [Zadeh78a] L.A. Zadeh. Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1:3–28, 1978.
- [Zadeh78b] L.A. Zadeh. PRUF — A Meaning Representation Language for Natural Languages. *Int. J. of Man Machine Studies*, 10:395–460, 1978.
- [Zadeh79] L.A. Zadeh. A Theory of Approximate Reasoning. In: J.E. Hayes, D. Michie und L.I. Mikulich, Hg., *Machine Intelligence (9)*, 149–194. John Wiley and Sons, New York, 1979.
- [Zadeh81] L.A. Zadeh. Possibilistic Theory and Soft Data Analysis. In: L. Cobb und R. Thrall, Hg., *Mathematical Frontiers of Social and Policy Sciences* 69–129, Westview Press, Boulder, 1981.
- [Zadeh83a] L.A. Zadeh. A Computational Approach to Fuzzy Quantifiers in Natural Language. *Comput. and Maths. with Applications*, 9:149–184, 1983.
- [Zadeh83b] L.A. Zadeh. The Role of Fuzzy Logic in the Management of Uncertainty in Expert Systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 11:199–227, 1983.
- [Zadeh84] L.A. Zadeh. A Theory of Commonsense Knowledge. In: H.J. Skala, S. Termini und E. Trillas, Hg., *Aspects of Vagueness*, 257–296. Reidel, Dordrecht, 1984.
- [Zadeh85] L.A. Zadeh. Syllogistic Reasoning in Fuzzy Logic and its Application to Usuality and Reasoning with Dispositions. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 15:754–763, 1985.
- [Zadeh86] L.A. Zadeh. Test-Score Semantics as a Basis for a Computational Approach to the Representation of Meaning. *Literary and Linguistic Computing*, 1:24–35, 1986.

- [Zadeh92] L.A. Zadeh und J. Kacprzyk, Hg. *Fuzzy Logic for the Management of Uncertainty*. John Wiley and Sons, New York, 1992.
- [Zadeh94] L.A. Zadeh. Fuzzy Logic, Neural Networks, and Soft Computing. *Communications of the ACM*, 37:77-84, 1994.
- [Zemankova-Leech84] M. Zemankova-Leech und A. Kandel. *Fuzzy Relational Data Bases — A Key to Expert Systems*. Verlag TÜV Rheinland, Köln, 1984.
- [Zimmermann80] H.J. Zimmermann und P. Zysno. Latent Connectives in Human Decision Making. *Fuzzy Sets and Systems*, 4:37–51, 1980.
- [Zimmermann84] H.J. Zimmermann, L.A. Zadeh und B.R. Gaines, Hg. *Fuzzy Sets and Decision Analysis*. North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [Zimmermann87] H.J. Zimmermann. *Fuzzy Sets, Decision Making and Expert Systems*. Kluwer, Boston, 1987.
- [Zimmermann91] H.J. Zimmermann. *Fuzzy Set Theory and its Applications*. Kluwer, Boston, 2nd edition, 1991.
- [Zimmermann93] H.J. Zimmermann. *Fuzzy Technologien*. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1993.
- [Zimmermann94] H.J. Zimmermann und C. v. Altrock, Hg. *Fuzzy Logik, Band 2: Anwendungen*. Oldenbourg, München, 1994.
- [Zurada94] J.M. Zurada, R.J. Marks II und C.J. Robinson, Hg. *Computational Intelligence, Imitating Life*, IEEE Press, New York, 1994.



# Index

- Ähnlichkeitsrelation, 217
- $\alpha$ -Schnitt einer Fuzzy-Menge, 16
  - strikt, 36
- Abhängigkeitshypergraph, 116
- Akzeptanzgrad, 29
- approximatives Schließen, 81
- Ausgangsgröße, 160
- Bayessche Netze, 144
- belief revision, 144
- Belief-Funktion, 151
- Belief-Maß, 150
- Belief-Revision, 92
- Biimplikation, 59
- Blatt, 120
- Centre-of-Area-Methode, 173
- Centre-of-Gravity-Methode, 173
- charakteristische Funktion, 8
- Closed World Assumption, 85, 95
- COA, 173
- COG, 173
- contour function, 70
- crisp set, 10
- Datenbasis, 164
- Decision Making, 77
- Defuzzifizierungs-Interface, 164
- direct rating, 72
- Dot-Methode, 184
- einfacher Hyperbaum, 122
- Eingabegröße, 161
- elementarer linguistischer Wert, 75
- Elementarereignis, 93
- Entscheidungslogik, 164
- Evidenz, 92
  - totale, 98, 102
- Evidenzsystem, 98
  - possibilistisches, 102
  - widerspruchsfreies, 102
- Evidenzwissen, 81
- Expertenwissen, 81
- Extension, 32
- extensional, 53, 54
- extensionale Hülle, 53
- Extensionsprinzip, 31
- F-Expertensystem, 99
  - Äquivalenz, 120
  - possibilistisches, 92, 103
- falling shadow, 70
- Fokalmengen, 45
- Fokussieren, 81, 92
- Fuzzifizierungs-Interface, 163
- fuzzy quantifier, 71
- fuzzy truth value, 71
- Fuzzy-Intervall, 33
  - vom *L-R*-Typ, 42
- fuzzy-konvex, 33
- Fuzzy-Maß, 149
- Fuzzy-Menge, 10
  - Abstand, 77
  - epistemische Interpretation, 12, 85
  - horizontale Repräsentation, 16
  - kartesisches Produkt, 214
  - Kern, 11
  - normale, 14, 33
  - objektbezogene Interpretation, 12
  - Teilmenge, 21
  - Träger, 11
  - vertikale Repräsentation, 15
- Fuzzy-Regler, 159
- Fuzzy-Relation, 83, 210

- Fuzzy-Wissensbasis, 139
- Fuzzy-Zahlen, 14, 33
- Gödelrelation, 110
- Gleichheitsrelation, 48
- graduelle Wahrheit, 29
- Graham-Reduktion, 120
- Hausdorff-Pseudometrik, 77
- Hyperbaum, 120
- Hypergraph, 115
- Hyperkante, 115
- i-te Restriktion, 99, 103
- Implikation
  - Lukasiewicz, 58, 146
  - Gödel, 58, 146
  - Goguen, 58
  - Kleene–Dienes, 58, 146
  - QL, 146
  - R, 146
  - Reichenbach, 58, 146
  - S, 146
  - Zadeh, 58, 146
- Implikationsausdruck, 139
- Implikationsregel, 83
- Indexmenge, 96
- Inferenzmechanismus, 99
- Inferenzregel, 82
- Influenzdiagramm, 144
- Inkonsistenzgrad, 137
- Intervall-Arithmetik, 33
- Kantenverschmelzung, 127
- Knoten, 115
- Knotenverschmelzung, 127
- knowledge map, 144
- kognitive Analyse, 163
- Konsistenzgrad, 136
- Konstruktionssequenz, 120
- Kontext, 45
- Kontrollfunktion, 161
- Konturfunktion, 46
- konzeptorientierte Sichtweise, 84
- L-Fuzzy-Menge, 13
- linguistic hedge, 71
- linguistische Approximation, 77
- linguistische Regel, 163
- linguistischer Quantor, 74
- Möglichkeitsgrad, 84
- Max-Dot-Methode, 184
- Max-Kriterium-Methode, 172
- Meßgröße, 161
- Mean-of-Maxima-Methode, 172
- Mengenrepräsentation, 35
- mindestens so spezifisch wie, 92
- Modularisierung, 97
- MOM, 172
- nicht-wahrheitsfunktional, 133
- Normalisiertheitseigenschaft, 85, 86
- Notwendigkeitsmaß, 86, 132
- oder, 29
- one point coverage, 70
- Plausibilitätsfunktion, 151
- Plausibilitätsmaß, 150
- Poincaré-Paradoxon, 50
- polling, 72
- possibilistische Logik, 132
- possibilistisches Resolutionsprinzip, 134
- Possibilitätsmaß, 86, 133
- Possibilitätsverteilung, 81, 84, 86
- Possibilitätsverteilungen, 12
- Produktraum, 96
- Projektion, 96
  - punktweise, 96
- Propagationsalgorithmus, 114
- Reduktionssequenz, 120
- Redundanzfreiheit, 116, 157
- Regelbasis, 164
- Regelsystem, 97
  - possibilistisches, 101
  - redundanzfreies, 116
  - widerspruchsfreies, 101
- Repräsentationssatz, 17
- reverse rating, 72

- Schwerpunktmethode, 173
- Semantik, 43
- set-valued statistics, 72
- Singleton, 53
- Spezifikationsphase, 75
- spezifischer als, 92
- Störgröße, 160
- Stellgröße, 160
  
- t-Conorm, 24
  - Archimedische, 27
- t-Norm, 23
  - Archimedische, 27
  
- und, 29
- Universum, 85, 86, 96
- unsichere Klausel, 133
- Unsicherheitsmaß, 81
- Ununterscheidbarkeitsoperator, 217
  
- vages Datum, 81, 84
- vages Konzept, 81
  
- Wahrheitsfunktionalität, 23
- Wahrscheinlichkeit, 86
- widerspruchsfrei, 101
- Wissensbasis, 92, 95, 97, 101, 164
  - unsichere, 133
  
- zufällige Menge, 45
  - konsonante, 151
- Zugehörigkeitsgrad, 8, 29, 84
- Zustand, 103
  - konsistenter, 103
- Zyklus, 118
- zylindrische Extension, 96, 101