Elektrodynamik

Theoretische Physik 3

WS 2008/9

Gerhard Ecker

Fakultät für Physik
Universität Wien

Inhaltsverzeichnis

Danksagung

Ich danke Walter Grimus und Helmut Neufeld für zahlreiche Korrekturen und Verbesserungsvorschläge.

Lehrbücher

T. Fließbach, Elektrodynamik, Spektrum Akad. Verlag, Heidelberg, 1996
J. Honerkamp und H. Römer, Klassische Theoretische Physik, Springer, Berlin, 1989
S. Brandt und H.D. Dahmen, Elektrodynamik, Springer, Berlin, 1997
J.D. Jackson, Klassische Elektrodynamik, de Gruyter, 1983
L.D. Landau und E.M. Lifschitz, Lehrbuch der Theoretischen Physik
Bd. 2: Klassische Feldtheorie, H. Deutsch, Frankfurt, 1997

I Theoretische Grundlagen des Elektromagnetismus

I.1 Fundamentale makroskopische Kräfte

Moderne Physik: alle physikalischen Phänomene auf 4 fundamentale Wechselwirkungen zurückzuführen

makroskopische Kräfte	Kernkräfte
Gravitation	starke Wechselwirkung
Elektromagnetismus	schwache Wechselwirkung
verantwortlich für alle Phänomene	nur relevant für
mit $d \gg 10^{-15}$m	$d \lesssim 10^{-15}$m

einfachste Charakterisierung der beiden makroskopischen Kräfte:

2 Punktteilchen mit Massen m_1, m_2 und Ladungen q_1, q_2

Relativabstand $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad r = |\vec{r}|$

$\vec{K}_{12}(= -\vec{K}_{21})$:

Kraft des 2. Teilchens auf das 1.

Gravitation		Elektromagnetismus
$-\dfrac{G_N m_1 m_2}{r^3}\,\vec{r}$	$\vec{K}_{12}(\vec{r})$	$\dfrac{k_C q_1 q_2}{r^3}\,\vec{r}$
$G_N = 6.674 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^{-2}$		SI-System (MKSA)
		$k_C = (4\pi\varepsilon_0)^{-1} = \left(1.113 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C}^2\,\mathrm{N}^{-1}\,\mathrm{m}^{-2}\right)^{-1}$
Massen positiv		Ladungen beiderlei Vorzeichen
Anziehung		Anziehung ($q_1 q_2 < 0$) oder Abstoßung ($q_1 q_2 > 0$)
Newtonsches Gesetz		Coulomb-Gesetz

Vergleich der beiden Kräfte für 2 Protonen:

$m_1 = m_2 = m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg, $\qquad q_p = e = 1.602176487(40) \cdot 10^{-19}$ C(oulomb)

$$\frac{|\vec{K}_{\text{Coulomb}}|}{|\vec{K}_{\text{Newton}}|} = \frac{e^2\,k_C}{m_p^2\,G_N} = 1.2 \cdot 10^{36}$$

$\boxed{\text{Schlussfolgerungen}}$

- ☛ positive und negative Ladungen kompensieren einander offensichtlich äußerst genau in makroskopischen Körpern (Atome statt Ionen)
- ☛ im atomaren Bereich ($\sim 10^{-10}$ m) Elektromagnetismus einzige relevante Wechselwirkung $\longrightarrow$ verantwortlich für Struktur der Atome, Moleküle, Festkörper, ...

☛ Ladungskompensation nicht nur äußerst genau, sondern offenbar auch zeitunabhängig
$\longrightarrow$ nach heutigem Stand Erhaltung der Ladung absolutes Naturgesetz

Übungen: 2 „Punktteilchen" im Abstand von 1 m mit je 50 kg Protonen, deren Ladungen zu 99 % durch Elektronen abgesättigt sind. Vergleiche die Coulombkraft zwischen beiden Körpern mit dem „Gewicht" der Erde $m_{\text{Erde}}\, g$.

$$\boxed{\text{Ladungserhaltung} \quad \longrightarrow \quad \text{Kontinuitätsgleichung}}$$

meist sinnvoll für makroskopische Elektrodynamik (zum Unterschied von der Quantenelektrodynamik):

Mittelung der Ladungen über mikroskopische Bereiche, wobei

$$10^{-10}\ \text{m} \ll \text{Mittelungsbereich} \ll \text{makr. Distanzen} \qquad \longrightarrow \qquad \underline{\text{Ladungsdichte}}\ \rho(t,\vec{r})$$

$$\text{Ladung im Volumen } V:\ q_V(t) = \int_V d^3r\, \rho(t,\vec{r})$$

Änderung der Ladung nur durch

Hinein- und/oder Herausfließen

charakterisiert durch Stromdichte $\vec{j}(t,\vec{r})$: Ladung/(Zeit $\times$ Fläche)

(analog zu Massenfluss in der Kontinuumsmechanik)

Ladungsbilanz bei festgehaltenem Volumen:

$$\frac{dq_V(t)}{dt} = \int_V d^3r \frac{\partial\rho(t,\vec{r})}{\partial t} = -\int_{\partial V} d\vec{F}\cdot\vec{j}(t,\vec{r}) \underset{\text{Gauß}}{=} -\int_V d^3r\, \vec{\nabla}\vec{j}(t,\vec{r})$$

da Volumen beliebig $\longrightarrow$ Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho(t,\vec{r})}{\partial t} + \text{div}\vec{j}(t,\vec{r}) = 0 \qquad\qquad [\dot{\rho} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0]$$

Def.: durch Fläche F zur Zeit t fließende Stromstärke

$$I_F(t) = \int_F d\vec{F}\cdot\vec{j}(t,\vec{r})$$

Dimension: $[I_F]$= Ladung/Zeit $\longrightarrow$ SI-Einheit 1 A(mpère)= 1 C(oulomb)/s

Übungen: verifiziere die Kontinuitätsgleichung für ein geladenes Punktteilchen auf einer Trajektorie $\vec{r}_q(t)$ mit

$$\rho(t,\vec{r}) = q\,\delta^{(3)}\left(\vec{r}-\vec{r}_q(t)\right), \qquad \vec{j}(t,\vec{r}) = q\,\underbrace{\dot{\vec{r}}_q(t)}_{\vec{v}_q(t)}\,\delta^{(3)}\left(\vec{r}-\vec{r}_q(t)\right)$$

Bem.: in klassischer Elektrodynamik ist Ladungserhaltung eine Erfahrungstatsache, die über die Kontinuitätsgleichung in den Maxwell-Gleichungen enthalten ist; die Ladung als Erhaltungsgröße einer Symmetrie wird erst in der Q(uanten) E(lektro) D(ynamik) transparent

relevante Kopplungsstärke für QED: Feinstrukturkonstante

$$\alpha := \frac{e^2\,k_C}{\hbar c} = \frac{1}{137.035999679(94)}$$

I.2 Elektromagnetische Felder

abstrahieren elektrisches Feld aus dem Coulomb-Gesetz $\longrightarrow$

Ladung q_2 erzeugt im ganzen Raum ein **elektrostatisches Feld** $\vec{E}(\vec{r})$ der Form

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{k_C q_2(\vec{r} - \vec{r}_2)}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3}$$

dieses Vektorfeld ist für alle $\vec{r} \neq \vec{r}_2$ definiert $\longrightarrow$

Probeladung q_1 an der Stelle $\vec{r}_1$ spürt dann Coulomb-Kraft

$$\vec{K}_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = q_1\,\vec{E}(\vec{r}_1)$$

daher: elektrisches Feld = Kraft/Ladung $\longrightarrow$ erscheint zunächst als reiner Kunstgriff, die elektromagnetischen Felder gewinnen aber Eigenleben in den Maxwell-Gleichungen

experimentelle Tatsache: $\boxed{\text{Superpositionsprinzip}}$

betrachten N ruhende Ladungen q_i an den Orten $\vec{r}_i$ (Idealisierung) $\longrightarrow$

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_C \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

ausgedrückt durch die Ladungsdichte

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_C \int d^3r'\rho(\vec{r}\,')\frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

mit $\vec{\nabla}|\vec{r} - \vec{r}\,'|^{-1} = -|\vec{r} - \vec{r}\,'|^{-3}(\vec{r} - \vec{r}\,')$ $\longrightarrow$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\,(\Phi(\vec{r}) + \text{ konst.}) \\ \Phi(\vec{r}) &= k_C \int d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \qquad \text{elektrostatisches Potenzial} \end{aligned}$$

Folgerung: elektrostatisches Feld ist konservativ
Bew.: $\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Phi = 0$

bilden noch

$$\operatorname{div}\vec{E} = \vec{\nabla}\vec{E} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Phi = -\Delta\Phi = -k_C \int d^3r'\rho(\vec{r}\,')\,\Delta\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

zur Erinnerung (M2, Übungen):

$$\boxed{-\frac{1}{4\pi r} \text{ ist eine Greenfunktion der Poisson-Gleichung}}$$

$\longrightarrow$ $\quad \Delta\dfrac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}\,')$ $\quad$ und daher

$\underline{\text{elektrostatische Maxwell – Gleichung :}}$ $\quad \mathrm{div}\, \vec{E}(\vec{r}) = -k_C \int d^3r' \rho(\vec{r}\,')\, \Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = 4\pi k_C \rho(\vec{r})$

SI-Einheit des Potenzials (Spannung=Potenzialdifferenz)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \qquad \longrightarrow \qquad [\Phi] = \left[\frac{l\,K}{q}\right] = \frac{\mathrm{m\,N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} =: \underline{\mathrm{V(olt)}}$$

gebräuchliche Energieeinheit der Mikrophysik:

$$1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C\,V} = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

$\longrightarrow$ Energiezuwachs eines Elektrons nach Durchlaufen einer Spannung von 1 V

bis jetzt statischer Fall betrachtet, auf bewegte Ladungen wirken zusätzliche Kräfte

betrachten geladenes Punktteilchen am Ort $\vec{r}_q(t)$ mit Geschwindigkeit $\vec{v}_q(t)$ $\longrightarrow$

$$\underline{\text{Lorentz – Kraft}} \qquad \vec{K}_L(t) = q\left(\vec{E}(t,\vec{r}_q(t)) + k_L \vec{v}_q(t) \times \vec{B}(t,\vec{r}_q(t))\right)$$

sagt zunächst nur, dass zusätzliche Kraft orthogonal auf Geschwindigkeit existiert

$\longrightarrow$ definiert $\boxed{\text{magnetische(s) Feld(stärke) } \vec{B}(t,\vec{r})}$

Konstante k_L: genau wie k_C abhängig von Wahl der Einheiten für $\vec{E}$, bzw. $\vec{B}$ ($\rightarrow$ Maßsysteme)

Verallgemeinerung der Lorentz-Kraft für kontinuierliche Ladungsverteilung im elm. Feld

$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \int d^3r \left[\rho(t,\vec{r})\vec{E}(t,\vec{r}) + k_L \vec{j}(t,\vec{r}) \times \vec{B}(t,\vec{r})\right]$$

$\vec{P}(t)$: Gesamtimpuls der Ladungsverteilung

Bem.: unerwartete Form der Lorentz-Kraft $\longrightarrow$
hängt von Geschwindigkeit $\vec{v}$ und daher vom Inertialsystem ab!

wenn Relativitätsprinzip auch in der Elektrodynamik gilt $\longrightarrow$

$\vec{E}, \vec{B}$ abhängig vom Bezugssystem

naheliegende Interpretation:

$\vec{E}, \vec{B}$ verschiedene Manifestationen des <u>elektromagnetischen Feldes</u>

Feldgleichungen für Magnetfeld nicht ableitbar, aber zumindest eine davon ist sofort plausibel aufgrund des experimentellen Befundes (nach derzeitigem Wissensstand):

es gibt keine magnetischen Ladungen (magnetische Monopole)

$$\boxed{\mathrm{div}\, \vec{E}(t,\vec{r}) = 4\pi k_C \rho(t,\vec{r}) \qquad\qquad \mathrm{div}\, \vec{B}(t,\vec{r}) = 0}$$

sind bereits die vollständigen zeitabhängigen Maxwell-Gleichungen für $\mathrm{div}\, \vec{E}$, $\mathrm{div}\, \vec{B}$

auffallend: Feldgleichungen enthalten immer dieselben Differenzialoperationen $\mathrm{div}\, \vec{F}$, $\mathrm{rot}\, \vec{F}$

warum?

betrachten fast beliebiges[1] Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$ (Zeitabhängigkeit jetzt irrelevant)

mögliche Darstellung für $\vec{F}(\vec{r})$ (part. Integration im letzten Schritt)

$$\vec{F}(\vec{r}) = \int d^3r'\vec{F}(\vec{r}\,')\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,') = -\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\vec{F}(\vec{r}\,')\Delta\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\frac{\Delta\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Vektoranalysis: $\Delta\vec{F} = -\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F}) + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{F}) = -\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{F} + \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{F}$

$$\longrightarrow \qquad \vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r'\frac{\vec{\nabla}'\times(\vec{\nabla}'\times\vec{F}(\vec{r}\,')) - \vec{\nabla}'(\vec{\nabla}'\vec{F}(\vec{r}\,'))}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

manipulieren i-te (kart.) Komponente des 1.Teils mit part. Integration

$$\begin{aligned}
&\int d^3r'\frac{\left(\vec{\nabla}'\times\ \mathrm{rot}\vec{F}(\vec{r}\,')\right)_i}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\
&\quad = \varepsilon_{ijk}\int d^3r'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\frac{\partial}{\partial x'_j}(\mathrm{rot}\,\vec{F}(\vec{r}\,'))_k = -\varepsilon_{ijk}\int d^3r'\left(\frac{\partial}{\partial x'_j}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)(\mathrm{rot}\,\vec{F}(\vec{r}\,'))_k \\
&\quad = \varepsilon_{ijk}\int d^3r'\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}(\mathrm{rot}\,\vec{F}(\vec{r}\,'))_k = \left(\vec{\nabla}\times\int d^3r'\frac{\mathrm{rot}\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)_i
\end{aligned}$$

analoge Behandlung des 2. Terms ergibt insgesamt die beiden Vektorgleichungen

$$\begin{aligned}
\int d^3r'\frac{\vec{\nabla}'\times(\vec{\nabla}'\times\vec{F}(\vec{r}\,'))}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} &= \vec{\nabla}\times\int d^3r'\frac{\vec{\nabla}'\times\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\
\int d^3r'\frac{\vec{\nabla}'(\vec{\nabla}'\vec{F}(\vec{r}\,'))}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} &= \vec{\nabla}\int d^3r'\frac{\vec{\nabla}'\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}
\end{aligned}$$

und daher folgende Darstellung für das Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}\int d^3r'\frac{\mathrm{rot}\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{1}{4\pi}\mathrm{grad}\int d^3r'\frac{\mathrm{div}\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

Vektorfeld $\vec{F}$ kann durch seine Quellen (div $\vec{F}$) und Wirbel (rot $\vec{F}$) dargestellt werden

I.3 Maxwell-Gleichungen

Naturgesetze nicht ableitbar, aber Struktur kann plausibel gemacht werden

deduktiver Zugang (im Gegensatz zum historisch induktiven):

[1] zweimal stetig differenzierbar, $|\vec{F}| \leq \mathrm{const}/r^2$ für $r \to \infty$

$$\boxed{\text{Maxwell-Gleichungen postuliert} \quad \longrightarrow \quad \text{Konsequenzen untersucht}}$$

legen uns zunächst nicht auf ein bestimmtes Maßsystem fest $\longrightarrow$ k_C, k_L beliebig

zu beachten:

- ☛ Lorentz-Kraft: $\rho\,\vec{E}$ und $k_L\vec{j} \times \vec{B}$ sind als Kraftdichten (bereits in der Mechanik definiert) in allen Maßsystemen gleich
- ☛ ρ und $\vec{j}$ durch Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0$ verbunden, die ebenfalls in allen Maßsystemen gilt

Maxwell-Gleichungen für die Quellen $\vec{\nabla}\vec{E}$ und $\vec{\nabla}\vec{B}$ bereits bekannt:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E}(t, \vec{r}) = 4\pi k_C \rho(t, \vec{r}) \qquad \operatorname{div} \vec{B}(t, \vec{r}) = 0}$$

ausständig: Differenzialgleichungen für die Wirbel $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ und $\vec{\nabla} \times \vec{B}$

Dimensionsüberlegung (Lorentz-Kraft!):

$$[\vec{E}] = [k_L \vec{v} \times \vec{B}] \qquad \longrightarrow \qquad \left[\frac{\vec{E}}{l}\right] = \left[\frac{k_L \vec{B}}{t}\right]$$

bestätigt zumindest die Dimensionen im

$$\boxed{\text{Induktionsgesetz:} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{r}) + k_L \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{r})}{\partial t} = 0}$$

fehlt nur mehr Diffgl. für Wirbel des Magnetfeldes
zu erwarten: rot $\vec{B}$ (zumindest teilweise) durch Stromdichte $\vec{j}$ bestimmt

$$k_L \vec{\nabla} \times \vec{B} = k_A \vec{j} + \ldots$$

Faktor k_A sollte schon fixiert sein, da keine weitere Skalierungsfreiheit bei geg. k_C, k_L

tatsächlich (Dimensionen überprüfen!): $\quad k_A = \dfrac{4\pi k_C}{c^2} \quad$ (c: Lichtgeschwindigkeit)

$$\boxed{\text{Ampèresches Gesetz:} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi k_C}{k_L c^2}\,\vec{j}}$$

$\longrightarrow$ Stand der Elektrodynamik vor Maxwell

<u>Problem:</u> vorläufiges Gleichungssystem i.a. nicht mit Kontinuitätsgleichung verträglich

Divergenz des Ampèreschen Gesetzes:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \vec{\nabla}\vec{j} = 0$$

nur konsistent im statischen Fall $\dot{\rho} = 0$

Maxwell: Ampèresches Gesetz muss modifiziert (erweitert) werden

Ansatz in Analogie zum Induktionsgesetz:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{4\pi k_C}{k_L c^2}\,\vec{j} + k_M \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} && \text{Divergenz bilden} \\
0 &= \frac{4\pi k_C}{k_L c^2} \vec{\nabla}\vec{j} + k_M \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}\vec{E} \\
0 &= \dot{\rho}\left(-\frac{4\pi k_C}{k_L c^2} + 4\pi k_C k_M\right) \quad \longrightarrow && k_M = \frac{1}{k_L c^2}
\end{aligned}$$

Maxwell-Gleichungen in allgemeiner Form

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi k_C\,\rho \qquad \vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + k_L \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{k_L c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi k_C}{k_L c^2}\,\vec{j}$$

bilden zusammen mit der Lorentz-Kraft die Grundgleichungen der Elektrodynamik

$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \int d^3r \left[\rho(t,\vec{r})\vec{E}(t,\vec{r}) + k_L \vec{j}(t,\vec{r}) \times \vec{B}(t,\vec{r})\right]$$

Bem.:

- Konstante k_C, k_L beliebig wählbar
- Kontinuitätsgleichung folgt aus den Maxwell-Gleichungen

wichtige Eigenschaft: Linearität der Maxwell-Gleichungen $\longrightarrow$ Superpositionsprinzip:
wenn $\vec{E}_i$, $\vec{B}_i$ Lösungen für geg. ρ_i, $\vec{j}_i$ $(i = 1, 2)$ sind, dann sind $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$, $\vec{B}_1 + \vec{B}_2$ Lösungen der Maxwell-Gl. für $\rho_1 + \rho_2$, $\vec{j}_1 + \vec{j}_2$
Linearität ist eine Eigenschaft der klassischen Elektrodynamik, wird in der QED durch Effekte der $O(\hbar^n)$ $(n \geq 1)$ modifiziert

z.B.: Streuung von Licht an Licht nur quantenfeldtheoretisch (Euler, Heisenberg 1936) zu verstehen

Maxwell-Gl. im Vakuum: $\rho = 0, \vec{j} = 0$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{B}) - \Delta\vec{B} = -\Delta\vec{B} \qquad \longrightarrow$$

$$-\Delta\vec{B} - \frac{1}{k_L c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \Delta\vec{B} = 0$$

Folgerung: jede Komponente von $\vec{B}$ (analog für $\vec{E} \longrightarrow$ Übungen) erfüllt im materiefreien Raum die Wellengleichung mit Wellengeschwindigkeit c $\longrightarrow$

„Licht bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit“

d'Alembert-Operator: $\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Wellengleichung} \equiv \text{d'Alembert-Gleichung:}\\ \Box\, F(t,\vec{r}) = 0\end{array}}$$

I.4 Maßsysteme

k_C, k_L beliebig $\longrightarrow$ verschiedene Maßsysteme gebräuchlich
Experimentalphysik, Technik: SI=MKSA
Theor. Physik: Gauß-System
Fachliteratur (Teilchenphysik): Heaviside-System

Ziel: einfaches Umrechnungsverfahren von einem System ins andere
Vorgangsweise: $\vec{E}$, $\vec{B}$, ρ, $\vec{j}$ entsprechend skalieren (mit Konstanten multiplizieren), dass k_C, k_L verschwinden $\longrightarrow$

universelle Form der Maxwell-Gl. (entspricht $k_C = k_L = 1$)

zur Erinnerung: $\rho\vec{E}$ universell, aus MG $\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi k_C \rho$ $\longrightarrow$

$\vec{E}_u = \dfrac{\vec{E}}{\sqrt{k_C}}$, $\rho_u = \sqrt{k_C}\rho$ $\longrightarrow$ $\vec{\nabla}\vec{E}_u = 4\pi\rho_u$

Kontinuitätsgleichung $\longrightarrow$ $\vec{j}_u = \sqrt{k_C}\vec{j}$

Induktionsgesetz:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\times\vec{E} + k_L\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E}_u + \frac{k_L}{\sqrt{k_C}}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} &= 0 \qquad \longrightarrow \qquad \vec{B}_u = \frac{k_L}{\sqrt{k_C}}\vec{B} \end{aligned}$$

selbstverständlich auch $\vec{\nabla}\vec{B}_u = 0$

damit alle möglichen Skalierungen vorgenommen $\longrightarrow$
letzte Maxwell-Gleichung muss bereits universelle Form haben

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{k_C}}{k_L}\vec{\nabla}\times\vec{B}_u - \frac{1}{k_L c^2}\sqrt{k_C}\frac{\partial\vec{E}_u}{\partial t} &= \frac{4\pi k_C}{k_L c^2}\frac{1}{\sqrt{k_C}}\vec{j}_u \\ \longrightarrow \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}_u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}_u}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c^2}\vec{j}_u \end{aligned}$$

geg. 2 beliebige Maßsysteme S1, S2: da universelle Größen systemunabhängig sind $\longrightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{\vec{E}_1}{\sqrt{k_{C,1}}} &= \frac{\vec{E}_2}{\sqrt{k_{C,2}}}, \qquad & \frac{\vec{B}_1\, k_{L,1}}{\sqrt{k_{C,1}}} &= \frac{\vec{B}_2\, k_{L,2}}{\sqrt{k_{C,2}}} \\ \rho_1\sqrt{k_{C,1}} &= \rho_2\sqrt{k_{C,2}}, \qquad & \vec{j}_1\sqrt{k_{C,1}} &= \vec{j}_2\sqrt{k_{C,2}} \end{aligned}$$

Kriterien für „gutes“ Maßsystem: einfach, transparent $\longrightarrow$
offensichtlich nicht sehr restriktive Kriterien!

$$\boxed{\text{SI:} \quad k_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{c^2\mu_0}{4\pi},\ k_L = 1 \quad \longrightarrow \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}}$$

Bem.: in α ist e als e_{SI} zu verstehen; Feinstrukturkonstante α ist dagegen eine reine Zahl und daher unabhängig vom Maßsystem

Festlegung von μ_0 über Kraft zwischen 2 Strömen ($\to$ Magnetostatik) und Einheit A(mpère) des Stroms $\longrightarrow$ exakte Relation

$$\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}\,\mathrm{N\,A^{-2}} = 4\pi\, 10^{-7}\,\mathrm{kg\,m\,C^{-2}}$$

Konstante ε_0 über $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ definiert

da (seit 1983) $c = 299792458\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ exakt $\longrightarrow$ ε_0 ebenfalls exakt

Nachteile (aus Sicht des Theoretikers):

- ☛ nicht transparent, da $\vec{E}$ und $\vec{B}$ verschiedene Dimensionen haben, obwohl Manifestationen desselben elektromagnetischen Feldes
- ☛ nicht einfach, da zusätzliche Einheit A und daher k_C eigentlich überflüssig

beide Nachteile werden behoben im bevorzugten System der Theoretiker

$$\boxed{\text{Gauß-System:}\quad k_C = 1,\ k_L = \frac{1}{c} \quad\longrightarrow\quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}}$$

$$\boxed{\text{Maxwell-Gleichungen im Gauß-System}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\,\rho & \vec{\nabla}\vec{B} = 0 \\[1ex] \vec{\nabla}\times\vec{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 & \vec{\nabla}\times\vec{B} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \dfrac{4\pi}{c}\,\vec{j} \end{array}}$$

Lorentz-Kraft im Gauß-System (für Punktladung): $\vec{K}_L = q\left(\vec{E} + \dfrac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)$

zu beachten bei Umrechnung: Gauß verwendet g, cm statt kg, m im SI

Beispiel: Ladung $\rho_{\mathrm{G}}\sqrt{k_{C,\mathrm{G}}} = \rho_{\mathrm{SI}}\sqrt{k_{C,\mathrm{SI}}}$ $\longrightarrow$

$$\begin{aligned} e_{\mathrm{G}} &= \sqrt{\frac{k_{C,\mathrm{SI}}}{k_{C,\mathrm{G}}}}\, e_{\mathrm{SI}} = c\,10^{-7/2}\,\mathrm{kg^{1/2}\,m^{1/2}\,C^{-1}}\,1.60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \\ &= 1.52\cdot 10^{-14}\,\mathrm{kg^{1/2}\,m^{3/2}\,s^{-1}} = 4.80\cdot 10^{-10}\,\underbrace{\mathrm{g^{1/2}\,cm^{3/2}\,s^{-1}}}_{\mathrm{ESE}} \end{aligned}$$

<u>Übungen:</u> $\vec{E}, \vec{B}, I$ im Gauß-System

Teilchenphysik verwendet (zur Vermeidung der Faktoren 4π in den MG)

$$\boxed{\text{Heaviside-System:}\quad k_C = \frac{1}{4\pi},\ k_L = \frac{1}{c} \quad\longrightarrow\quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c}}$$

II Elektrostatik

für zeitunabhängige $\vec{E}, \vec{B}, \rho, \vec{j}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\,\rho & \vec{\nabla}\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 & \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j} \\ \text{Elektrostatik} & \text{Magnetostatik} \end{array}}$$

$\vec{E}$ und $\vec{B}$ entkoppelt $\longrightarrow$ Elektro- und Magnetostatik unabhängig zu behandeln

allgemein (bel. Zeitabhängigkeit):

Lorentz-Kraft leistet an Punktteilchen Arbeit (i.a. wegabhängig)

$$\begin{aligned} A(\vec{r}_1, \vec{r}_2; C) &= \int_C d\vec{r}\cdot\vec{K}_L \\ &= q\int_C d\vec{r}\cdot\left[\vec{E}(t,\vec{r}) + \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{c}\times\vec{B}(t,\vec{r})\right] \end{aligned}$$

da $d\vec{r}\cdot(\dot{\vec{r}}\times\vec{B}) = dt\,\dot{\vec{r}}\cdot(\dot{\vec{r}}\times\vec{B}) = 0$ $\longrightarrow$

$$\boxed{\text{Magnetfeld leistet keine Arbeit: „}\vec{B}\text{ ist wattlos“}}$$

daher allgemein $\quad A(\vec{r}_1, \vec{r}_2; C) = q\int_C d\vec{r}\cdot\vec{E}(t,\vec{r})$

Elektrostatik: $\quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{E}$ konservatives Feld

$\longrightarrow \quad \Phi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,'\cdot\vec{E}(\vec{r}\,')$ wegunabhängig: definiert Potenzial $\Phi(\vec{r})$

$$A(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = q\,\underbrace{[\Phi(\vec{r}_1) - \Phi(\vec{r}_2)]}_{V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)} \qquad \text{wegunabhängig}$$

Spannung $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$: Potenzialdifferenz zwischen den Punkten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$

$q\Phi(\vec{r})$: potenzielle Energie des geladenen Teilchens

II.1 Einfache Ladungsverteilungen

<u>Standardproblem der Elektrostatik:</u> geg. $\rho(\vec{r})$, gesucht $\vec{E}(\vec{r}), \Phi(\vec{r})$

in einfachen Fällen oft direkt lösbar

$$\begin{aligned} \int_V d^3r\vec{\nabla}\vec{E} &= \int_{\partial V} d\vec{F}\cdot\vec{E} \\ = 4\pi\int_V d^3r\rho &= 4\pi q_V \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Gaußsches Gesetz}}$

Fluss des elektrischen Feldes durch Oberfläche $\partial V \;=\; 4\pi\times$ Ladung im Volumen V

$$\int_{\partial V} d\vec{F}\cdot\vec{E} = 4\pi q_V$$

Bem.: $\vec{E}$ zeigt von positiver Ladung weg

Anwendung: <u>rotationssymmetrische Ladungsdichte $\rho(r)$</u>

Ansatz: $\Phi(r) \qquad \longrightarrow$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi(r) = -\frac{d\Phi}{dr}\vec{\nabla}r = \underbrace{-\frac{d\Phi}{dr}}_{E(r)}\,\frac{\vec{r}}{r}$$

Kugel mit Radius r

$$\begin{aligned}\int_{\partial V} d\vec{F}\cdot\vec{E} &= \int r^2 d\Omega\frac{\vec{r}}{r}\left(-\frac{d\Phi}{dr}\right)\frac{\vec{r}}{r}\\ &= -4\pi r^2\frac{d\Phi}{dr} = 4\pi q_V\\ &\longrightarrow\; E(r) = -\frac{d\Phi}{dr} = \frac{q_V}{r^2}\end{aligned}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_V}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}\;, \qquad\qquad \Phi(r) = \frac{q_V}{r} + \text{konst.}$$

Folgerungen:

- ☛ $|\vec{E}(\vec{r})|$ hängt nur von Ladung in Kugel ab
- ☛ kugelsymm. Ladungsdichte mit $q_V = 0$ erzeugt kein elektrisches Feld außerhalb der Kugel
- ☛ kein Feld im Inneren einer Hohlkugel (mit kugelsymm. $\rho(r)$ im Außenraum) $\longrightarrow$ charakteristisch für Potenziale $\sim 1/r$

<u>allg. Fall bei geg. $\rho(\vec{r})$:</u> mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \qquad \longrightarrow$

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}) \qquad \underline{\text{Poisson} - \text{Gleichung}}$$

Lösung der Poisson-Gleichung mit „geeigneten“ Randbedingungen $\longrightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$

allg. Lösung mit Greenfunktion (Vor.: Ladung $\int d^3r\,\rho(\vec{r})$ endlich)

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \Phi_{\text{hom}}(\vec{r})$$

$\Phi_{\text{hom}}(\vec{r})$: Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$

häufiger Fall: Ladung endlich und (Randbedingung) $\lim\limits_{r\to\infty} \Phi(\vec{r}) = 0 \quad \longrightarrow$

<u>vollständige Lösung</u> (Eindeutigkeit $\longrightarrow$ Randwertprobleme)

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r'\, \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\ , \qquad \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = \int d^3r'\, \frac{\rho(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

<u>Äquipotenzialflächen:</u> $\Phi(\vec{r}) =$ konstant

Flächennormale zeigt in Richtung von $\vec{\nabla}\Phi = -\vec{E}$

<u>Feldlinien:</u>

Kurven $\vec{r}(\tau)$, deren Tangenten

in jedem Punkt parallel zu $\vec{E}$

$$\longrightarrow \qquad \frac{d\vec{r}}{d\tau} \times \vec{E}(\vec{r}(\tau)) = 0$$

einfachstes Beispiel: <u>Kugel mit rotationssymm. $\rho(r)$</u>

$\Phi(r) =$ konstant $\quad\longrightarrow\quad$ $r =$konstant: Kugeloberflächen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \oint d\vec{r} \cdot \vec{E} = 0$$

$\longrightarrow$ keine geschlossenen Feldlinien in der Elektrostatik:

immer von positiver zu negativer Ladung

zur Veranschaulichung: Dichte der Feldlinien $\sim$ Feldstärke

$\boxed{\text{homogen geladene Platte}}$

$$\rho(\vec{r}) = \sigma\delta(z)$$

$$d^3r\rho(\vec{r}) = \sigma dxdy \qquad \longrightarrow$$

σ: (konstante) Flächenladungsdichte

da $\int d^3r\rho(\vec{r}) = \infty \quad \longrightarrow \quad$ Φ nicht mit Greenfunktion zu berechnen, statt dessen direkte Integration der Poisson-Gleichung

Ansatz (durch Symmetrie des Problems naheliegend): $\Phi = \Phi(z) \quad\longrightarrow\quad E_x = E_y = 0$

$$\Delta\Phi = -4\pi\rho \qquad \longrightarrow \qquad \frac{d^2\Phi}{dz^2} = -4\pi\sigma\delta(z)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dz} = -E_z &= -4\pi\sigma\Theta(z) + k_1 \\ \text{(wegen } z\,\delta(z) = 0) \qquad \Phi(z) &= -4\pi\sigma z\,\Theta(z) + k_1\,z + k_2 \end{aligned}$$

Symmetrieargument (als Randbedingung): $E_z(z>0) = -E_z(z<0)$ für gleiches $|z|$

$$
\begin{aligned}
\longrightarrow \qquad k_1 &= 2\pi\sigma\,[\Theta(z)+\Theta(-z)] = 2\pi\sigma \qquad (k_2 = 0 \;\; \text{o.B.d.A})\\
\Phi(z) &= -2\pi\sigma\, z\,[\Theta(z)-\Theta(-z)]\\
E_z(z) &= 2\pi\sigma\,[\Theta(z)-\Theta(-z)] = 2\pi\sigma\frac{z}{|z|}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{2 entgegengesetzt gleich geladene Platten}}$

„unendlicher Kondensator“

Modell für Plattenkondensator

Linearität der Maxwell-Gl. $\longrightarrow$ Superpositionsprinzip $\longrightarrow$

oberhalb und unterhalb des Kondensators: $\vec{E} = 0$

im Inneren: $E_z = 4\pi\sigma = 4\pi\dfrac{q}{F}$

Spannung=Potenzialdifferenz: $V = \dfrac{4\pi q}{F} d =: \dfrac{q}{C}$ mit Kapazität $C = \dfrac{F}{4\pi\, d}$

Einheit der Kapazität: cm (Gauß), SI: F(arad)= C(oulomb)/V(olt)

leicht nachzuprüfen ($\rightarrow$ Maßsysteme): $C_{\mathrm{G}} \simeq 9\cdot 10^{11}$ cm C_{SI}/F

$\boxed{\text{elektrostatische Energie}}$

potenzielle Energie eines geladenen Teilchens im <u>äußeren</u> Potenzial $\Phi(\vec{r}_q)$: $q\Phi(\vec{r}_q)$

wichtig: vom Punktteilchen erzeugtes Potenzial (Feld) ist darin nicht enthalten

betrachten N unendlich weit voneinander entfernte Punktladungen $\longrightarrow$

berechnen Arbeit, um sie an Orte $\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N$ zu bringen $\longrightarrow$

diese Energie steckt dann im elektr(ostat)ischen Feld

$q_1 \longrightarrow \vec{r}_1$: keine elektrostatische Arbeit notwendig $\longrightarrow$ $A_1 = 0$

Potenzial $\Phi(\vec{r}) = \Phi_1(\vec{r}) = \dfrac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}$

$q_2 \longrightarrow \vec{r}_2$: Arbeit $A_2 = q_2\Phi(\vec{r}_2) = \dfrac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}$ notwendig

Potenzial $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ mit $\Phi_i(\vec{r}) = \dfrac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$

$q_N \longrightarrow \vec{r}_N$: Arbeit $A_N = q_N\,(\Phi_1(\vec{r}_N)+\Phi_2(\vec{r}_N)+\cdots+\Phi_{N-1}(\vec{r}_N))$

Potenzial $\Phi(\vec{r}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$

insgesamt geleistete Arbeit

$$
\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 + \cdots + A_N = \sum_{j=2}^{N} q_j \sum_{i=1}^{j-1} \Phi_i(\vec{r}_j) = \sum_{j=2}^{N} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \\
A &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \qquad \text{(beachte Faktor 1/2)}
\end{aligned}
$$

ersetzen Punktteilchen durch allgemeine Ladungsdichte

$$
A = \frac{1}{2} \int d^3r \, d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r})\,\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}
$$

genau genommen: $\vec{r} \neq \vec{r}\,'$, da Selbstenergie nicht berücksichtigt
für stetige Ladungsdichten $\rho(\vec{r})$ allerdings ohnehin kein Beitrag

Energiebilanz: hineingesteckte Arbeit als elektrostatische Energie vorhanden

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \int d^3r \, \rho(\vec{r}) \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = -\frac{1}{8\pi} \int d^3r \, \Delta\Phi(\vec{r})\,\Phi(\vec{r}) \\
&= \frac{1}{8\pi} \int d^3r \, \vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \, \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})
\end{aligned}
$$

dabei endliche Ladungsverteilung vorausgesetzt $\longrightarrow$ kein Oberflächenterm bei part. Int.

$\boxed{\text{Energiedichte des elektrostatischen Feldes}}$

$$
\eta(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} \vec{E}(\vec{r})^2
$$

wird auch für allgemeine zeitabhängige elektrische Felder gelten

II.2 Randwertprobleme

typischer Fall: Volumen mit Ladungsverteilung, begrenzt durch (elektrische) Leiter

Leiter: frei bewegliche Elektronen (Metall), reagieren auf angelegtes Feld, erzeugen Gegenfeld, bis insgesamt (Gleichgewichtsbedingung der Elektrostatik)

$$
\vec{E}_{\text{innen}} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad \Phi_{\text{innen}} = \text{konst.}
$$

$\longrightarrow$ auch $\rho_{\text{innen}} = 0$ wegen $\Delta\Phi = -4\pi\rho$

$\longrightarrow$ Ionen und Elektronen kompensieren einander

Ladungen können sich höchstens an Leiteroberfläche ansammeln:

Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$

Ladung eines Flächenstücks $q_F = \int_F dF \, \sigma(\vec{r}) \qquad (dF = |d\vec{F}|)$

Problem: $\sigma(\vec{r})$ i.a. nicht von vornherein bekannt

Randbedingung an (Leiter-)Oberfläche

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{E} = E_{\text{tang}}\, \vec{t} + E_{\text{normal}}\, \vec{n} \;, \qquad \vec{t} \cdot \vec{n} = 0,\; \vec{t}^2 = \vec{n}^2 = 1$$

(tatsächlich 2 orthogonale Tangentialvektoren)

$$d \to 0 : \quad \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{E} = l \left(E^{\text{außen}}_{\text{tang}} - E^{\text{innen}}_{\text{tang}} \right) = 0$$

$\longrightarrow \quad \vec{E}_{\text{tang}}$ stetig an beliebiger Grenzfläche

Leiter: $\vec{E}_{\text{innen}} = 0 \longrightarrow E^{\text{außen}}_{\text{tang}} = 0$ an Grenzfläche

$\longrightarrow \quad \vec{E}$ immer normal auf Leiteroberfläche

Gaußsches Gesetz für Quader $d \times l \times b$:

$$\int_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{E} = \int_{F = l \times b} dF \vec{n} \cdot (\vec{E}^{\text{außen}} - \vec{E}^{\text{innen}}) = 4\pi q = 4\pi \int_F dF\, \sigma(\vec{r})$$

Quader $\longrightarrow$ Punkt $(F \to 0, d \to 0)$:

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{E}^{\text{außen}}(\vec{r}) - \vec{E}^{\text{innen}}(\vec{r}) \right) = 4\pi\sigma(\vec{r})$$

Folgerung: Unstetigkeit in $\vec{E}_{\text{normal}}$ wird durch Flächenladungsdichte σ bestimmt

Leiter: $\quad \vec{E}^{\text{innen}} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \vec{n} \cdot \vec{E}^{\text{außen}} = 4\pi\sigma = -\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\Phi$

Lösung des Problems mit Randbedingungen

Poisson-Gleichung $\qquad \Delta\Phi = -4\pi\rho$

inhomogene lineare partielle Diffgl. 2. Ordnung (elliptischer Typ)

allg. Lösung:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \Phi_s(\vec{r}) + \Phi_h(\vec{r}) \\ \Delta\Phi_s &= -4\pi\rho \;, \quad \Delta\Phi_h = 0 \end{aligned}$$

bei geg. spezieller Lösung Φ_s ist Φ_h dann so zu wählen, dass Gesamtlösung $\Phi = \Phi_s + \Phi_h$ die Randbedingungen erfüllt

aus der Theorie der elliptischen Diffgl.:

Laplace-Gleichung $\quad \Delta\Phi = 0$ im Volumen V zu lösen mit

i. Dirichlet-Randbedingung: $\quad \Phi(\vec{r}) = \Phi_0(\vec{r})$ vorgeg. auf ∂V oder

ii. Neumann-Randbedingung: $\quad \vec{n} \cdot \vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$ vorgeg. auf ∂V

Theorem: $\exists$ eindeutige Lösung der Laplace-Gleichung (und daher auch der ursprünglichen Poisson-Gleichung) für entweder Dirichlet oder Neumann, aber i.a. nicht für beide zugleich physikalische Wahl: Dirichlet, da Flächenladungsdichte σ i.a. nicht bekannt (kann aber aus der Lösung des Dirichlet-Problems im nachhinein berechnet werden)

Existenz: diskutieren einige analytische Methoden, im Prinzip immer numerisch lösbar

Eindeutigkeit:

ang., es $\exists\ \Phi_1(\vec{r}), \Phi_2(\vec{r})$ als Lösungen von $\Delta\Phi = -4\pi\rho$ mit $\Phi_i(\vec{r})|_{\partial V} = \Phi_0(\vec{r})$

betrachten Differenz $\quad \Psi(\vec{r}) = \Phi_1(\vec{r}) - \Phi_2(\vec{r}) \qquad \longrightarrow \qquad \Delta\Psi = 0\ , \quad \Psi|_{\partial V} = 0$

1. Greenscher Satz (Gaußscher Satz für $\vec{G} = \Psi\vec{\nabla}\Psi$)

$$\int_V d^3r \left(\vec{\nabla}\Psi \cdot \vec{\nabla}\Psi + \Psi \underbrace{\Delta\Psi}_{=0} \right) = \int_{\partial V} d\vec{F} \cdot \underbrace{\Psi}_{=0} \vec{\nabla}\Psi = 0$$

da $\quad \vec{\nabla}\Psi \cdot \vec{\nabla}\Psi \geq 0 \qquad \longrightarrow \qquad \vec{\nabla}\Psi = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \Psi(\vec{r}) = \text{konst. in ganz } V$

zusammen mit Randbedingung $\quad \Psi|_{\partial V} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \Psi(\vec{r}) \equiv 0 \quad \text{in ganz } V$ qed

Anwendung: Faraday-Käfig

ladungsfreier Raum, ganz von Leiter umschlossen

Innenraum: $\quad \Delta\Phi = 0$, am Rand $\Phi|_{\partial V} = \text{konst.}$

$\longrightarrow \quad \Phi(\vec{r}) = \text{konst.}$ eindeutige Lösung im Inneren

$\longrightarrow \quad \vec{E} = 0$ im Inneren, d.h. Innenraum feldfrei

Spitzenentladungen

2 leitende Kugeln

durch (leitenden) Draht verbunden

$\longrightarrow \quad \Phi = \text{konst.}$ auf beiden Kugeln

andererseits auf Kugeloberflächen (Vor.: „weit genug“ voneinander entfernt):

$$\Phi_i = \frac{q_i}{R_i}\ , \qquad \vec{E}_i = \frac{q_i}{R_i^2}\vec{n}_i \qquad (i = 1, 2)$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad \longrightarrow \quad \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2} \quad \longrightarrow \quad \frac{|\vec{E}_2|}{|\vec{E}_1|} = \frac{q_2 R_1^2}{q_1 R_2^2} = \frac{R_1}{R_2}$$

$\longrightarrow \qquad$ sehr hohe Feldstärken an Spitzen ($R_2 \ll R_1$)

Anwendung: Feldemissionsmikroskop ($|\vec{E}|$ bis 10^9 V/m erreicht)
$\longrightarrow \qquad$ Feynman Lectures

Methode der Bildladungen

Idee: scheinbare so genannte Bildladung im Leiter angesetzt, um Randbedingung $\Phi =$ konst. an Leiteroberfläche zu erreichen, nur für einfache Leitergeometrien verwendbar

einfachstes Beispiel: leitender Halbraum mit Punktladung im Außenraum

$$\Delta\Phi = -4\pi q\, \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad \vec{r}_0 = d\vec{e}_z$$

nur im Außenraum relevant

Leiter $\longrightarrow$ $\vec{E}^{\text{innen}} = 0$

Ansatz:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} + \Phi_h(\vec{r})$$

Randbedingung: $\Phi|_{\text{Rand}} = \Phi(z = 0) = \Phi_0 =$ konst.

daher: Lösung Φ_h der Laplace-Gleichung gesucht mit

$$\Phi_h(z = 0) = \Phi_0 - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + d^2}}$$

Lösung für $\Phi_h(\vec{r})$ (erfüllt alle Bedingungen):

$$\Phi_h(\vec{r}) = \Phi_0 - \frac{q}{|\vec{r} + \vec{r}_0|}$$

da im Außenraum ($z \geq 0$) $\Delta\Phi_h(\vec{r}) = 4\pi q\delta^{(3)}(\vec{r} + \vec{r}_0) = 0$

Gesamtlösung (nur für $z \geq 0$ gemeint)

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= q\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} - \frac{1}{|\vec{r} + \vec{r}_0|}\right) + \Phi_0 \\ \vec{E}(\vec{r}) &= q\left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} - \frac{\vec{r} + \vec{r}_0}{|\vec{r} + \vec{r}_0|^3}\right) \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ scheinbare negative Bildladung bei $\vec{r} = -\vec{r}_0$ (wo obige Formeln gar nicht gelten)

die auf der Oberfläche induzierte Flächenladungsdichte übt eine Kraft auf die Punktladung bei $\vec{r} = \vec{r}_0$ aus, die so genannte Bildkraft $\vec{K}_{\text{Bild}}(\vec{r}_0) = q\,\vec{E}_{\text{Influenz}}(\vec{r}_0)$, wobei das Influenzfeld durch die Bildladung „erzeugt“ wird:

$$\vec{E}_{\text{Influenz}}(\vec{r}) = -q\frac{\vec{r} + \vec{r}_0}{|\vec{r} + \vec{r}_0|^3} \quad \longrightarrow \quad \vec{K}_{\text{Bild}}(\vec{r}_0) = -\frac{q^2}{4r_0^3}\vec{r}_0$$

entspricht genau der (anziehenden) Coulombkraft, die die Bildladung auf die echte Ladung ausüben würde (Abstand $2r_0$ zwischen den Ladungen)

Übungen: Flächenladungsdichte $\sigma(z=0) = \frac{1}{4\pi}\vec{e}_z \cdot \vec{E}(z=0) = -\frac{2qd}{4\pi(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}$

$$\longrightarrow \quad \int dF\sigma(x,y) = -q, \text{ Feldlinien zeichnen}$$

Methode der Bildladungen funktioniert auch noch für den Fall von 2 Leiterebenen, die einen Winkel $\alpha = \frac{\pi}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ einschließen, mit einer Ladung zwischen den Leiterebenen (Halbraum: $n = 1$)
auch für leitende Kugel mit einer Punktladung im Außenraum anwendbar

$\boxed{\text{2-dimensionale Probleme}}$

eine Dimension manchmal irrelevant, z.B. für (langen) leitenden Zylinder
$\longrightarrow$ Analogie zwischen Elektrostatik und Potenzialströmung der idealen Flüssigkeit (wirbelfrei, inkompressibel, stationär)

ideale Flüssigkeit		Elektrostatik
Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r})$		elektrostatisches Feld $\vec{E}(\vec{r})$
$\vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{r}) = 0$	wirbelfrei	$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0$
	$\exists$ Potenzial $\Phi(\vec{r})$	
$\vec{v} = \vec{\nabla}\Phi$		$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$
$\vec{\nabla}\vec{v}(\vec{r}) = 0$ (inkompressibel)		$\vec{\nabla}\vec{E}(\vec{r}) = 0$ (ohne Ladungen)
	$\Delta\Phi = 0$	
Stromlinien	analog	Äquipotenziallinien
($\vec{v}$ parallel zur Oberfläche)		(aber $\vec{E} \perp$ Oberfläche)
$\Gamma = \oint d\vec{r} \cdot \vec{v} \neq 0$ (i.a.)	Zirkulation um Oberfläche	$\oint d\vec{r} \cdot \vec{E} = 0$ (immer)

Hydrodynamik: 2-dimensionale Lösungen durch holomorphe (analytische) Funktionen

$$f(z) = f(x + i\,y) = u(x,y) + i\,w(x,y)$$

Cauchy-Riemann Diffgl. $\longrightarrow$ $\Delta u(x,y) = \Delta w(x,y) = 0$
Funktionentheorie: $f(z)$ erzeugt konforme (winkeltreue) Abbildung $(x,y) \longrightarrow (u,w)$

$$\longrightarrow \quad u(x,y) = \text{konst.} \quad \perp \quad w(x,y) = \text{konst.}$$

Zylinder mit Basisradius R

ideale Flüssigkeit	Elektrostatik
$f(z) = v_\infty \left(z + \frac{R^2}{z}\right) - i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z$	$f(z) = -E_\infty \left(z + \frac{R^2}{z}\right)$

Diskussion der elektrostatischen Lösung

$$f(z) = -E_\infty \left(x + i\,y + \frac{R^2}{x^2+y^2}(x - i\,y)\right)$$

$$u(x,y) = -E_\infty x \left(1 + \frac{R^2}{x^2+y^2}\right) \qquad u(x,y) = \text{konst.: Feldlinien}$$

$$w(x,y) = -E_\infty y \left(1 - \frac{R^2}{x^2+y^2}\right) = \Phi(x,y) \qquad w(x,y) = \text{konst.: Äquipotenziallinien}$$

mit $r^2 = x^2 + y^2$

$$\vec{E}(x,y) = -\vec{\nabla} w(x,y) = E_\infty \left[\frac{2xyR^2}{r^4}\vec{e}_x + \left(1 - \frac{R^2}{r^4}(x^2-y^2)\right)\vec{e}_y\right]$$

$r \to \infty$: $\quad \vec{E} \longrightarrow E_\infty \vec{e}_y \qquad$ Feld asymptotisch in y-Richtung

Äquipotenziallinien: $\quad E_\infty y \left(1 - \dfrac{R^2}{r^2}\right) = \text{konst.} \quad \longrightarrow$

x-Achse ($y = 0$) und Zylindermantel ($r = R$) sind Äquipotenziallinien mit $\Phi = 0$

$r \to \infty$: $\quad y = \text{konst.}$ sind asymptotische Äquipotenziallinien

Interpretation: Lösung beschreibt leitenden Zylinder in einem asymptotisch homogenen elektrischen Feld (in der y-Richtung)

Übungen: Flächenladungsdichte auf Zylinder $\sigma(x,y) = \dfrac{E_\infty y}{2\pi R}$ mit Gesamtladung $q = 0$

allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung

Laplace-Operator in Kugelkoordinaten r, Θ, φ

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi(r,\Theta,\varphi) &= \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta \frac{\partial}{\partial\Theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\Theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\Phi \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial\Phi}{\partial\Theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\Theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right]
\end{aligned}$$

Separationsansatz (Einschränkung?)

$$\Phi(r,\Theta,\varphi) = \frac{1}{r}\,C(r)\,Y(\Theta,\varphi)$$

Kugelfunktionen $Y_{lm}(\Theta,\varphi)$: vollständiges Orthonormalsystem auf Kugeloberfläche

$$l = 0,1,2,\dots\ , \quad m = -l, -l+1, \dots, l$$

erfüllen Diffgl.

$$\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\Theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\Theta}\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\varphi^2} + l(l+1)Y_{lm} = 0$$

explizite Form

$$Y_{lm}(\Theta,\varphi) = \left(\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right)^{1/2} P_l^m(\cos\Theta)e^{im\varphi}$$

mit assoziierten (zugeordneten) Legendre-Funktionen

$$\begin{aligned} P_l^m(x) &= \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-x^2)^{|m|/2}\frac{d^{l+|m|}}{dx^{l+|m|}}(x^2-1)^l \\ &= (-1)^m(1-x^2)^{|m|/2}\frac{d^{|m|}P_l(x)}{dx^{|m|}} \end{aligned}$$

und Legendre-Polynomen

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$$

Legendre-Polynome bilden ein vollständiges Orthogonalsystem auf dem Intervall $[-1,1]$:

$$\int_{-1}^{1} dx P_k(x)P_l(x) = \frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$$

Orthonormalität der Kugelfunktionen:

$$\int d\Omega\, Y^*_{lm}(\Theta,\varphi)Y_{l'm'}(\Theta,\varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}\ , \qquad d\Omega = \sin\Theta d\Theta d\varphi$$

Vollständigkeit: jede auf der Kugeloberfläche quadratintegrable Funktion $f(\Theta,\varphi)$ (d.h. $\int d\Omega|f(\Theta,\varphi)|^2 < \infty$) kann eindeutig nach Kugelfunktionen entwickelt werden:

$$\begin{aligned} f(\Theta,\varphi) &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm}Y_{lm}(\Theta,\varphi) \\ \text{mit}\ \ a_{lm} &= \int d\Omega f(\Theta,\varphi)Y^*_{lm}(\Theta,\varphi) \end{aligned}$$

Vollständigkeit kann auch ausgedrückt werden als

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\Theta',\varphi')Y_{lm}(\Theta,\varphi) = \delta(\cos\Theta - \cos\Theta')\delta(\varphi-\varphi')$$

daher kann jede (auf der Kugel quadratintegrable) Funktion $\Phi(r, \Theta, \varphi)$ nach Kugelfunktionen entwickelt werden (ursprünglicher Separationsansatz daher keine Einschränkung)

$$\Phi(r, \Theta, \varphi) = \sum_{l,m} \frac{C_{lm}(r)}{r} Y_{lm}(\Theta, \varphi)$$

aus Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ folgt dann die (gewöhnliche) Diffgl. für die $C_{lm}(r)$:

$$\frac{d^2 C_{lm}}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} C_{lm} = 0$$

mit der allg. Lösung (mit Konstanten a_{lm}, b_{lm})

$$C_{lm}(r) = a_{lm} r^{l+1} + \frac{b_{lm}}{r^l}$$

und daher insgesamt

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung } \Delta\Phi = 0 \\ \Phi(r, \Theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(a_{lm} r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\Theta, \varphi)\end{array}}$$

Randbedingungen $\longrightarrow$ Koeffizienten a_{lm}, b_{lm}

Anwendungsbeispiel: geladener Ring (symmetrisch um z-Achse)

Zylinderkoordinate $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, daher

Ladungsdichte hier als $\rho_q(\vec{r})$ bezeichnet

$\rho_q(\vec{r}) = \frac{q}{2\pi a} \delta(\rho - a)\delta(z - b) \quad \longrightarrow$

$$\int d^3r\, \rho_q(\vec{r}) = \frac{q}{2\pi a} \int dz\, d\varphi\, \rho d\rho \delta(\rho - a)\delta(z - b) = q$$

keine φ-Abhängigkeit $\longrightarrow$ $m = 0$ $\longrightarrow$

$$\Phi(r, \Theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\Theta)$$

zur Bestimmung der Koeffizienten: $\vec{r}$ auf z-Achse $\longrightarrow$ $\Theta = 0$, $P_l(1) = 1$

$$\Phi(r, 0) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) = \int d^3r'\, \frac{\rho_q(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

da $\vec{r}$ jetzt auf z-Achse ($r_0^2 = a^2 + b^2$, $\tan\alpha = a/b$)

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = |\vec{r} - \vec{r}_0| = \left(r^2 + r_0^2 - 2r\, r_0 \cos\alpha \right)^{1/2}$$

$\longrightarrow$ Nenner des Integrals unabhängig von ρ, φ, z

$\longrightarrow$ trivial zu integrieren in Zylinderkoordinaten

$\Phi(r,0) \sim$ erzeugende Funktion der Legendre-Polynome

$$\Phi(r,0) = \frac{q}{\left(r^2 + r_0^2 - 2r\, r_0 \cos\alpha\right)^{1/2}} = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{\text{min}}^l}{r_{\text{max}}^{l+1}} P_l(\cos\alpha)$$

mit $r_{\text{min}} = \min(r, r_0)$, $r_{\text{max}} = \max(r, r_0)$

Koeffizientenvergleich $\longrightarrow$ a_l, b_l

<u>vollständige Lösung :</u> $$\Phi(r,\Theta) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{\text{min}}^l}{r_{\text{max}}^{l+1}} P_l(\cos\alpha) P_l(\cos\Theta)$$

Entwicklung wird unbrauchbar für $r \simeq r_0$, aber für $r \gg r_0$ (mit $P_1(x) = x$)

$$\Phi(r,\Theta) = \frac{q}{r}\left[1 + \frac{r_0}{r}\cos\alpha\cos\Theta + O(\frac{r_0^2}{r^2})\right]$$

$\longrightarrow$ Beispiel für

II.3 Multipolentwicklung

geg.: Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ in endlichem Volumen
gesucht: $\Phi(\vec{r}), \vec{E}(\vec{r})$ in großer Entfernung von der Ladungsverteilung

Randbedg.: $\Phi(\vec{r}) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\longrightarrow \quad \Phi(\vec{r}) = \int d^3r'\, \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = r\, |\vec{n} - \frac{\vec{r}\,'}{r}| \,, \qquad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Entwicklung des Nenners nach Potenzen von $\vec{r}\,'/r$ (für $r > r'$) mit Hilfe von (kart. Koord.)

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = r\left(1 + \frac{x_i' x_i'}{r^2} - \frac{2n_i x_i'}{r}\right)^{1/2}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} &= \frac{1}{r}\left(1 + \frac{n_i x_i'}{r} + \frac{3}{8}\frac{4n_i n_j x_i' x_j'}{r^2} - \frac{x_i' x_i'}{2r^2} + O[x'^3/r^3]\right) \\ &= \frac{1}{r}\left(1 + \frac{n_i x_i'}{r} + \frac{1}{2r^2}\left(3n_i n_j x_i' x_j' - x_i' x_i'\right) + O[x'^3/r^3]\right)\end{aligned}$$

<u>Multipolentwicklung :</u> $$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{r} + \underbrace{\frac{\vec{n}\cdot\vec{d}}{r^2}}_{\text{Dipol}} + \underbrace{\frac{n_i n_j Q_{ij}}{2r^3}}_{\text{Quadrupol}} + O(1/r^4)$$

kartesische Multipolmomente

Ladung $\quad q = \int d^3r\, \rho(\vec{r})$

Dipolmoment $\quad \vec{d} = \int d^3r\, \vec{r}\, \rho(\vec{r})$

Quadrupolmomenttensor $\quad Q_{ij} = \int d^3r\, \rho(\vec{r})(3x_ix_j - r^2\delta_{ij})\ , \quad Q_{ii} = 0,\ Q_{ji} = Q_{ij}$

Anzahl der unabhängigen Kenngrößen:

q	1	$l = 0$
$\vec{d}$	3	$l = 1$
Q_{ij}	5	$l = 2$
allgemein	$2l + 1$	l

direkt zu sehen in der sphärischen Darstellung mit Additionstheorem für Kugelfunktionen

$$P_l(\cos\alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\Theta', \varphi') Y_{lm}(\Theta, \varphi)$$

$$r > r'$$

$$\longrightarrow \qquad \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y^*_{lm}(\Theta', \varphi') Y_{lm}(\Theta, \varphi)$$

$$\longrightarrow \qquad \Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\Theta, \varphi)$$

sphärische Multipolmomente: $\quad q_{lm} = \int d^3r\, \rho(\vec{r}) r^l Y^*_{lm}(\Theta, \varphi)$

offensichtlich $2l + 1$ Kenngrößen

Dimension: $[q_{lm}] = \mathrm{e\,cm}^l$

Anwendung: in großer Entfernung von der Ladungsverteilung meist wenige Terme in der Multipolentwicklung bereits gute Näherung

kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\rho(r)$

$$\begin{aligned} q_{lm} &= \int d^3r \rho(r) r^l Y^*_{lm}(\Theta, \varphi) = \int_0^\infty dr\, r^{2+l}\, \rho(r) \int d\Omega\, Y^*_{lm}(\Theta, \varphi)\, \underbrace{Y_{00}\sqrt{4\pi}}_{1} \\ &= \delta_{l0}\delta_{m0}\sqrt{4\pi} \int_0^\infty dr\, r^2\, \rho(r) = \delta_{l0}\delta_{m0} \frac{q}{\sqrt{4\pi}} \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \qquad \Phi(\vec{r}) = 4\pi \frac{q}{\sqrt{4\pi}\, r} Y_{00} = \frac{q}{r}$$

Multipolmomente für $l > 0$: Maß für Abweichung von der Rotationssymmetrie

$$q_{00} = \frac{q}{\sqrt{4\pi}} \;, \quad q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} d_z \;, \quad q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (d_x - i\,d_y) \;, \ldots \qquad q_{l,-m} = q_{lm}^*$$

Abhängigkeit vom Bezugssystem

Multipolmomente i.a. abhängig vom Bezugssystem

Dipolmoment

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} + \vec{a} \\ \vec{d}' &= \int d^3r' \vec{r}' \rho'(\vec{r}') = \int d^3r (\vec{r} + \vec{a}) \rho'(\vec{r} + \vec{a}) \\ &= \int d^3r\, \vec{r} \rho(\vec{r}) + \vec{a} \int d^3r \rho(\vec{r}) \\ &= \vec{d} + q\,\vec{a} \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ nur für insgesamt neutrales Objekt ist Dipolmoment unabhängig von Wahl des Ursprungs

allgemein (ohne Beweis): das niedrigste nicht verschwindende Multipolmoment ist unabhängig von Wahl des Bezugssystems

Ladung $q \neq 0$ $\longrightarrow$ i.a. nur Ladung unabhängig vom Bezugssystem

Beispiele für elektrische Dipolmomente von Molekülen

		$\lvert\vec{d}\rvert$ in e cm
$H_2\,O$	Wasser	$0.4 \cdot 10^{-8}$
$N\,H_3$	Ammoniak	$0.3 \cdot 10^{-8}$

$\boxed{\text{elektrischer Dipol (für } q = 0)}$

$\vec{d} = \int d^3r\, \vec{r}\, \rho(\vec{r})$ $\longrightarrow$ zeigt in Richtung des positiven Ladungsüberschusses

$$\Phi_D(\vec{r}) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{d}}{r^2} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{r^3}$$

welche Ladungsverteilung ergibt ein reines Dipolfeld?

$$\rho(\vec{r}) = \frac{d}{2a} \left[\delta^{(3)}(\vec{r} - a\vec{e}_3) - \delta^{(3)}(\vec{r} + a\vec{e}_3) \right]$$

$$d = 2aq_0$$

$$\longrightarrow \quad q = q_0 - q_0 = 0 \;, \quad \vec{d} = d\,\vec{e}_3$$

betrachten Limes $a \to 0$:

$$\begin{aligned}
\rho(\vec{r}) &= \lim_{a\to 0} \frac{d}{2a}\left[\delta^{(3)}(\vec{r}-a\vec{e}_3) - \delta^{(3)}(\vec{r}+a\vec{e}_3)\right] = -d\frac{\partial}{\partial z}\delta^{(3)}(\vec{r}) = -\vec{d}\cdot\vec{\nabla}\delta^{(3)}(\vec{r}) \\
\Phi(\vec{r}) &= \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\int d^3r' \frac{\vec{d}\cdot\vec{\nabla}'\delta^{(3)}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\
&= \int d^3r' \delta^{(3)}(\vec{r}\,')\vec{d}\cdot\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\vec{d}\cdot\vec{\nabla}\int d^3r' \frac{\delta^{(3)}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\
&= -\vec{d}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r} = \frac{\vec{r}\cdot\vec{d}}{r^3}
\end{aligned}$$

Punktmultipole: Ladungsdichte enthält Ableitungen der δ-Funktion
natürlich genauso Idealisierung wie Punktladung selbst

<u>elektrisches Dipolfeld:</u>

$$\begin{aligned}
\vec{E}_D(\vec{r}) &= -\vec{\nabla}\Phi_D(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\frac{\vec{r}\cdot\vec{d}}{r^3} = -\frac{\vec{d}}{r^3} + \frac{3\,\vec{r}}{r^5}\vec{r}\cdot\vec{d} \\
&= \frac{1}{r^5}\left(3(\vec{r}\cdot\vec{d})\vec{r} - r^2\,\vec{d}\right) \qquad (r \neq 0)
\end{aligned}$$

Quadrupolmoment

symmetrischer Tensor: $Q_{ji} = Q_{ij}$ $\longrightarrow$ durch Hauptachsentransformation auf Diagonalform (stets angenommen, insbesondere für $q \neq 0$)

wegen $Q_{ii} = \operatorname{tr} Q = 0$ $\longrightarrow$ durch 2 Diagonalelemente charakterisiert

Spezialfall: Ladungsdichte zylindersymmetrisch $\rho = \rho(z, x^2+y^2)$

$\longrightarrow$ nur eine unabhängige Kenngröße = <u>das</u> Quadrupolmoment

am besten in sphärischer Basis:

$$q_{lm} = \int d^3r\,\rho(\vec{r})r^l Y^*_{lm}(\Theta,\varphi) = \int dr\,d\Theta\,d\varphi\,r^{2+l}\sin\Theta\,\rho(r\cos\Theta, r^2\sin^2\Theta)\,Y^*_{lm}(\Theta,\varphi)$$

da keine φ-Abhängigkeit des Integranden

$$q_{lm} = \delta_{m0}\,2\pi\int dr\,d\Theta\,\sin\Theta\,r^{2+l}\,\rho(r\cos\Theta, r^2\sin^2\Theta)\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\Theta)$$

$\longrightarrow$ q_{l0} ist <u>das</u> l-te Multipolmoment

$$\begin{aligned}
l=2: \qquad q_{20} &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\int d^3r\,\rho(\vec{r})r^2P_2(\cos\Theta) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\int d^3r\,\rho(\vec{r})r^2(3\cos^2\Theta - 1) \\
&= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\int d^3r\,\rho(\vec{r})(3z^2 - r^2) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}Q_{33}
\end{aligned}$$

für positiven Ladungsüberschuss

$q_{20} > 0$ $q_{20} < 0$

Energie einer Ladungsverteilung im äußeren Feld

elektrostatische potenzielle Energie

Punktladung $\quad U(\vec{r}_q) = q\Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_q)$

allgemein $\quad U = \int d^3r\, \rho(\vec{r})\Phi_{\text{ext}}(\vec{r})$

Vor.: $\rho(\vec{r})$ sei um $\vec{r}_0$ konzentriert

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\xi}$

Entwicklung in ξ:

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{ext}}(\vec{r}) &= \Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_0 + \vec{\xi}) = \Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_0) + \xi_i \frac{\partial \Phi_{\text{ext}}}{\partial x_i}|_{\xi=0} + \frac{1}{2}\xi_i\xi_j \frac{\partial^2 \Phi_{\text{ext}}}{\partial x_i \partial x_j}|_{\xi=0} + \ldots \\
&= \Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_0) + \xi_i \frac{\partial \Phi_{\text{ext}}}{\partial x_i}|_{\xi=0} + \frac{1}{6}\left(3\xi_i\xi_j - \vec{\xi}^2\delta_{ij}\right)\frac{\partial^2 \Phi_{\text{ext}}}{\partial x_i \partial x_j}|_{\xi=0} + \ldots
\end{aligned}$$

dabei benützt: $\quad \delta_{ij}\frac{\partial^2 \Phi_{\text{ext}}}{\partial x_i \partial x_j} = \Delta\Phi_{\text{ext}} = 0 \quad$ im betrachteten Volumen

$$\begin{aligned}
U &= \int d^3r\, \rho(\vec{r})\, \Phi_{\text{ext}}(\vec{r}) = \int d^3\xi\, \rho(\vec{r}_0 + \vec{\xi})\Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_0 + \vec{\xi}) \\
&= q\Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_0) + \int d^3\xi\, \rho'(\vec{\xi})\xi_i \frac{\partial \Phi_{\text{ext}}}{\partial x_i}|_{\xi=0} + \int d^3\xi\, \rho'(\vec{\xi})\frac{1}{6}(3\xi_i\xi_j - \vec{\xi}^2\delta_{ij})\frac{\partial^2 \Phi_{\text{ext}}}{\partial x_i \partial x_j}|_{\xi=0} + \ldots
\end{aligned}$$

mit

$$\frac{\partial \Phi_{\text{ext}}}{\partial x_i}|_{\xi=0} = -E_{\text{ext,i}}(\vec{r}_0)$$

$$\longrightarrow \qquad U = q\Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_0) - \vec{d}\cdot\vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_0) - \frac{1}{6}Q_{ij}\frac{\partial E_{\text{ext},j}}{\partial x_i}(\vec{r}_0) + \ldots$$

Bem.: $\vec{d}$, $Q_{ij}, \ldots$ sind Multipolmomente mit Ursprung des Koordinatensystems bei $\vec{r}_0$

Kraft des äußeren Feldes auf Ladungsverteilung:

$$\vec{K}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) = q\vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}) + (\vec{d}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}) + \ldots$$

wegen (die letzten 3 Terme verschwinden alle)

$$\vec{\nabla}(\vec{d}\cdot\vec{E}) = (\vec{d}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} + (\vec{E}\cdot\vec{\nabla})\vec{d} + \vec{d}\times\text{rot}\,\vec{E} + \vec{E}\times\text{rot}\,\vec{d}$$

Dipolpotenzial $\quad U_D = -\vec{d} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}$ hängt auch vom Winkel zwischen $\vec{d}$ und $\vec{E}_{\text{ext}}$ ab

$U_D = -d\, E_{\text{ext}} \cos\Theta$

verallgem. Kraft $\quad -\dfrac{\partial U}{\partial \Theta}$

$\longrightarrow$ Drehmoment $|\vec{N}| = |d\, E_{\text{ext}} \sin\Theta|$

$\vec{N} \perp \vec{E}_{\text{ext}},\, \vec{d}$

explizite Rechnung: $\quad \vec{N} = \vec{d} \times \vec{E}_{\text{ext}}$

Drehmoment versucht, Dipol in energetisch günstigste Lage zu drehen, wo $\vec{d} \,||\, \vec{E}_{\text{ext}}$

Grund: $\vec{E}_{\text{ext}}$ zeigt von $+$ nach $-$

$\vec{d}$ in Richtung positiver Ladungsüberschuss

$\longrightarrow$ Dipol stellt sich parallel zum äußeren Feld ein

III Magnetostatik

keine Statik im engeren Sinn: Magnetfeld hängt mit Bewegung geladener Teilchen zusammen

Vor.: stationäre Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$
zusammen mit zeitunabhängigem Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$

Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik

$$\boxed{\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \qquad\qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j}}$$

Lorentz-Kraft: $\vec{K}_L = \int d^3r \left[\rho(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) + \frac{1}{c}\vec{j}(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r})\right]$

integrale Form der Maxwell-G.:

Zirkulation $Z_B = \oint_C d\vec{r}\cdot\vec{B}$

$Z_B = \int_F d\vec{F}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\int_F d\vec{F}\cdot\vec{j}$

$Z_B = \frac{4\pi}{c} I_F$

Satz von Ampère

magnetischer Fluss

$\Phi_B = \int_{\partial V} d\vec{F}\cdot\vec{B} = \int_V d^3r\,\vec{\nabla}\vec{B} = 0$

keine magnetischen Ladungen $\longrightarrow$
gleich viele $\vec{B}$-Feldlinien in und aus V $\rightarrow$
magnetische Feldlinien stets geschlossen

III.1 Vektorpotenzial und Magnetfeld

$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \exists\,\vec{A}(\vec{r})$ mit $\vec{B}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r})$

Vektorpotenzial $\vec{A}(\vec{r})$ (analog zum skalaren Potenzial $\Phi(\vec{r})$)

nicht eindeutig bestimmt bei geg. Magnetfeld $\longrightarrow$

Eichtransformation mit beliebigem Skalarfeld $\Lambda(\vec{r})$

$$\begin{aligned} \vec{A}'(\vec{r}) &= \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r}) \\ \longrightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{A}' &= \vec{\nabla}\times\vec{A} \end{aligned}$$

Eichinvarianz: in klass. Elektrodynamik vor allem zur Vereinfachung der Gleichungen durch günstige Wahl von $\Lambda(\vec{r})$

QED: quantisiertes elektromagnetisches Feld $\sim$ Potenziale $\Phi, \vec{A}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \longrightarrow \qquad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) - \Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

sinnvolle Wahl der Eichung:

Coulomb-Eichung: $\vec{\nabla}\vec{A} = 0 \qquad \longrightarrow$

$$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Bem.: $\vec{\nabla}\vec{j} = 0$ verträglich mit Coulomb-Eichung

Lösung der 3 Poisson-Gleichungen analog zur Elektrostatik (wenn Integral $\exists$)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r'\,\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$\longrightarrow$ spezielle Lösung für $\vec{B}(\vec{r})$

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{1}{c}\int d^3r'\,\frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \\ \text{analog} \quad \vec{E}(\vec{r}) &= \int d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \end{aligned}$$

Randwertproblem der Magnetostatik

mit obiger spezieller Lösung $\vec{B}_s$ erfüllt auch $\vec{B} = \vec{B}_s + \vec{\nabla}\Psi$ die Maxwell-G. $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

außerdem

$$\vec{\nabla}\vec{B} = \vec{\nabla}\vec{B}_s + \Delta\Psi = \Delta\Psi = 0$$

mathematisch völlig äquivalent zur Elektrostatik:

Laplace-Gleichung $\Delta\Psi = 0$ mit geeigneten Randbedingungen

physikalisch komplexer: z.B. kann $\vec{B}$ i.a. in einen Leiter eindringen

Spezialfall Supraleiter: $\vec{B}$ tangential an Oberfläche $\longrightarrow$ Neumannsche Randbedingung an Ψ

stromführender Draht

häufiger Fall:

vernachlässigbarer Querschnitt F_1, F_2

Vor.: Stromstärke überall im Draht gleich groß

$$I = \int_{F_1} d\vec{F}\cdot\vec{j} = \int_{F_2} d\vec{F}\cdot\vec{j}$$

Draht durch Kurve $\vec{r}\,'(\tau)$ beschrieben $\qquad \longrightarrow \qquad$ für beliebige Funktion $f(\vec{r}\,')$

$$\begin{aligned} \int d^3r'\vec{j}(\vec{r}\,')f(\vec{r}\,') &= \int d\vec{F}\cdot\vec{j}\int d\vec{r}\,'(\tau)f(\vec{r}\,'(\tau)) \\ &= I\int d\vec{r}\,'(\tau)f(\vec{r}\,'(\tau)) = I\int d\tau\frac{d\vec{r}\,'}{d\tau}f(\vec{r}\,'(\tau)) \end{aligned}$$

speziell für Vektorpotenzial

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \frac{I}{c}\frac{d\vec{r}'(\tau)}{|\vec{r}-\vec{r}'(\tau)|}$$

oder direkt für das von einem Draht erzeugte Magnetfeld

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I}{c}\int d\vec{r}'(\tau)\times\frac{\vec{r}-\vec{r}'(\tau)}{|\vec{r}-\vec{r}'(\tau)|^3} \qquad \underline{\text{Biot} - \text{Savart}}$$

Anwendung: (unendlich) <u>langer gerader von Strom I durchflossener Draht</u>

mögliche Parametrisierung (Zylinderkoord.):

$\vec{r}'(\tau) = \vec{e}_z\,\rho\tan\tau \quad \longrightarrow$

$d\vec{r}' = \rho\,\vec{e}_z\frac{d\tan\tau}{d\tau}d\tau = \frac{\rho}{\cos^2\tau}\vec{e}_z\,d\tau$

$\vec{e}_z\times(\vec{r}-\vec{r}') \qquad \longrightarrow$

$\vec{B}$ nur in φ-Richtung: $\vec{B} = B\vec{e}_\varphi$

Berechnung des Integrals $\quad\longrightarrow\quad$ Übungen

Symmetrieüberlegung mit Satz von Ampère:

keine z,φ-Abhängigkeit von $B \quad\longrightarrow\quad \vec{B}(\vec{r}) = B(\rho)\,\vec{e}_\varphi$

Zirkulation um Kreis mit Radius ρ

$$\begin{aligned} Z_B &= \oint_{\text{Kreis}} d\vec{r}\cdot\vec{B} = \int_0^{2\pi}\rho d\varphi\vec{e}_\varphi\cdot\vec{B} = 2\pi\,\rho\,B(\rho) \\ &= \int d\vec{F}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \frac{4\pi}{c}\,I \qquad\longrightarrow\qquad \vec{B} = \frac{2I}{c\rho}\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Feldlinien: konzentrische Kreise

Rechte-Hand-Regel:

Daumen in Stromrichtung

$\vec{B}$ in Fingerrichtung

Strom von unten nach oben

<u>Kraft zwischen zwei parallelen (unendlich langen) Drähten</u>

Kraft auf Drahtstück dl_1 :

kein Beitrag von Draht 1 (Biot-Savart)

nur Magnetfeld von Draht 2 relevant

$d\vec{K}_1 = d^3r_1\frac{1}{c}\vec{j}_1\times\vec{B} = \frac{I_1}{c}d\vec{l}_1\times\vec{B}$

$d\vec{K}_1 = \frac{2I_1I_2}{c^2d}d\vec{l}_1\times\vec{e}_\varphi$

$I_1 I_2 > 0$ (< 0): Anziehung (Abstoßung) Betrag $\dfrac{d|\vec{K}_1|}{dl_1} = \dfrac{2|I_1 I_2|}{c^2 d}$

SI-System: $I_G\sqrt{k_{C,G}} = I_{SI}\sqrt{k_{C,SI}} \quad \longrightarrow \quad I_G = c\sqrt{\dfrac{\mu_0}{4\pi}} I_{SI}$

daher im SI-System: $\dfrac{d|\vec{K}_1|}{dl_1} = \dfrac{2|I_1 I_2|}{d}\dfrac{\mu_0}{4\pi}$

Definition des Ampère: 2 parallele Ströme mit $I_1 = I_2 = 1\,\mathrm{A}$ in $d = 1\,\mathrm{m}$ Entfernung üben eine Kraft/Länge von $2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N/m}$ aufeinander aus $\longrightarrow$ legt μ_0 fest:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} = 10^{-7}\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{C}^2}$$

Magnetfeld einer (unendlich langen) dicht gewickelten Spule

bel. Querschnitt, dichte Wicklung: N/l Windungen pro Länge

Beh.: Lösung der Maxwell-G.

$B_x = B_y = 0$

$$B_z = \begin{cases} \dfrac{4\pi IN}{cl} & \text{innen} \\ 0 & \text{außen} \end{cases}$$

offenbar innen und außen: $\vec{\nabla}\vec{B} = 0,\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$

Randbedingung an Oberfläche (vgl. Elektrostatik mit $\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\,\rho$):

$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \quad \longrightarrow \quad$ Normalkomponente von $\vec{B}$ stetig an Oberfläche (trivial erfüllt)

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} \quad \longrightarrow \quad$ Satz von Ampère muss noch an der Oberfläche verifiziert werden

Strom in die (Papier-, Tafel-)Ebene hinein

geschlossener Weg im Uhrzeigersinn ($d\vec{F} \mid\mid \vec{j}$)

$$Z_B = \oint d\vec{r} \cdot \vec{B} = \frac{4\pi}{c} NI$$
$$= l\left(B_z^{\text{innen}} - B_z^{\text{außen}}\right) = l\frac{4\pi IN}{cl}$$

Zusammenfassung: Magnetfeld einer dicht gewickelten Spule verschwindet im Außenraum (außer bei Spulenenden), $\vec{B}$ im Inneren zeigt in Richtung der Spulenachse (rechte-Hand-Regel!) mit konstantem $B = \dfrac{4\pi IN}{cl}$

III.2 Multipolentwicklung

lokalisierte Stromverteilung

$$r > r'\ , \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

wie in der Elektrostatik:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{r}\left\{1 + \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}\,'}{r} + \frac{n_i n_j}{2r^2}\left(3x_i' x_j' - r'^2\delta_{ij}\right) + O[x'^3/r^3]\right\}$$

Multipolentwicklung des Vektorpotenzials

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{cr}\int d^3r' \vec{j}(\vec{r}\,') + \frac{1}{cr^2}\int d^3r' (\vec{n}\cdot\vec{r}\,')\vec{j}(\vec{r}\,') + \ldots$$

Nebenrechnung: $\quad \vec{\nabla}\left(x_j\,\vec{j}(\vec{r})\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_j\, j_i\right) = \delta_{ij} j_i + x_j \underbrace{\vec{\nabla}\vec{j}}_{0} = j_j$

für bel. (differenzierbare) Funktion $f(\vec{r})$:

$$\int d^3r \vec{\nabla}\left(x_j\,\vec{j}(\vec{r})\right) f(\vec{r}) = \int d^3r\, j_j(\vec{r})\, f(\vec{r}) = -\int d^3r\, x_j \vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{\nabla} f(\vec{r})$$

im letzten Schritt part. Integration: kein Oberflächenterm wegen lokalisiertem $\vec{j}$

<u>i. $f(\vec{r}) = 1$</u> $\quad\longrightarrow\quad \int d^3r\,\vec{j}(\vec{r}) = 0 \quad\leftarrow\quad$ keine magnetischen Monopole

Grund: gleich viele positive und negative Beiträge (in jeder Richtung) für lokalisiertes $\vec{j}$

<u>ii. $f(\vec{r}) = x_i$</u>

$$\int d^3r\, x_i\, j_j(\vec{r}) = -\int d^3r\, x_j\, j_k(\vec{r})\partial_k x_i = -\int d^3r\, x_j\, j_i(\vec{r})$$

beschränken uns ab jetzt auf Dipolanteil

$$\vec{A}_D(\vec{r}) = \frac{1}{cr^2}\int d^3r' \vec{j}(\vec{r}\,')(\vec{n}\cdot\vec{r}\,') = \frac{1}{r^2}\vec{\mu}\times\vec{n} = \frac{1}{r^3}\vec{\mu}\times\vec{r}$$

mit $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$ und

$$\int d^3r' j_i\, n_j\, x_j' = \frac{n_j}{2}\int d^3r' (j_i\, x_j' - j_j\, x_i') = \frac{1}{2}\int d^3r' \left[(\vec{r}\,'\times\vec{j})\times\vec{n}\right]_i$$

Def.: <u>magnetisches Dipolmoment</u> der Stromdichte $\vec{j}$ (unabhängig vom Bezugssystem!)

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c}\int d^3r\,\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})$$

<u>Vergleich</u>

magnetischer	Dipol	elektrischer
$\vec{A}_D(\vec{r}) = \frac{\vec{\mu}\times\vec{r}}{r^3}$		$\Phi_D(\vec{r}) = \frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{r^3}$
$\vec{B}_D(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}_D = \frac{1}{r^5}\left[3(\vec{\mu}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{\mu}\right]$	$(r > 0)$	$\vec{E}_D$: $\quad\vec{\mu}\longrightarrow\vec{d}$
$\vec{j}_D = -c\,\vec{\mu}\times\vec{\nabla}\delta^{(3)}(\vec{r})$	Punktdipol	$\rho_D = -\vec{d}\cdot\vec{\nabla}\delta^{(3)}(\vec{r})$

<u>Folgerung:</u> in großer Entfernung von lokalisierter Stromverteilung ist $\vec{B}$ in 1. Näherung ein Dipolfeld

Beispiele: Kompass, Drahtschleife, Erde, ...

$\boxed{\text{Drahtschleife}}$

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int d^3r\, \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})$$
$$= -\frac{I}{2c} \oint d\vec{r} \times \vec{r}$$

Rechtsschraube: $\vec{\mu} \,||\, \vec{e}_z$ für

$\vec{j}$ entgegen Uhrzeigersinn

mit Flächensatz $\quad dF = \dfrac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}|$

$$\vec{\mu} = \frac{I}{2c}\vec{e}_z | \oint d\vec{r} \times \vec{r}| = \frac{I}{c} F\, \vec{e}_z$$

<u>Energie einer Stromverteilung im äußeren Magnetfeld</u>

ähnlich wie im elektrischen Fall

Lorentz-Kraft auf Stromverteilung durch $\vec{B}_{\text{ext}}$

$$\begin{aligned}
\vec{K}(\vec{r}_0) &= \frac{1}{c} \int d^3\xi\, \vec{j}(\vec{\xi}) \times \vec{B}_{\text{ext}}(\vec{r}_0 + \vec{\xi}) \\
&= \frac{1}{c} \underbrace{\int d^3\xi\, \vec{j}(\vec{\xi})}_{0} \times \vec{B}_{\text{ext}}(\vec{r}_0) + \frac{1}{c} \int d^3\xi\, \vec{j}(\vec{\xi}) \times (\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla}_0) \vec{B}_{\text{ext}}(\vec{r}_0) + \dots
\end{aligned}$$

betrachten wieder nur Dipolanteil: nach einigen Umformungen

$$\vec{K}_D(\vec{r}) = \vec{\nabla} \left(\vec{\mu} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}(\vec{r}) \right)$$

und daher potenzielle Energie (gemeinsam mit elektrischem Anteil) einer Strom- und Ladungsverteilung in der <u>Dipolnäherung</u>

$$U_D(\vec{r}) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}(\vec{r}) - \vec{d} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r})$$

ebenfalls analog zur Elektrostatik

Drehmoment $\qquad \vec{N} = \vec{\mu} \times \vec{B}_{\text{ext}}$

dreht $\vec{\mu}$ in Richtung von $\vec{B}_{\text{ext}}$ $\quad \longrightarrow \quad$ Kompass

Punktladungen mit Massen m_a, Ladungen q_a, Trajektorien $\vec{r}_a(t)$ $(a = 1, \dots, N)$

in diesem Abschnitt beliebige Zeitabhängigkeit

$$\text{Stromdichte} \quad \vec{j}(t, \vec{r}) = \sum_a q_a \dot{\vec{r}}_a(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_a(t))$$

$$\text{Impulsdichte} \quad \vec{p}(t, \vec{r}) = \sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_a(t))$$

$$\longrightarrow \qquad \text{Gesamtimpuls} \quad \vec{P} = \int d^3r\, \vec{p} = \sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a$$

magnetisches (Dipol-)Moment

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int d^3r\, \vec{r} \times \vec{j}$$

Drehimpuls

$$\vec{L} = \int d^3r\, \vec{r} \times \vec{p}$$

Spezialfall: alle Teilchen gleiches Verhältnis $q_a/m_a =: q/m$ $\longrightarrow$

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \frac{q}{m} \sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_a(t)) = \frac{q}{m} \vec{p} \\ \longrightarrow \qquad \vec{\mu} &= \frac{q}{2mc} \vec{L} \end{aligned}$$

$\Gamma = \dfrac{q}{2mc}$: gyromagnetisches Verhältnis

QM, QFT: selbst für einzelnes Teilchen Relation modifiziert

für freies Teilchen mit Spin-Vektor(-Operator) $\vec{S}$

$$\vec{\mu} = g \frac{q}{2mc} \vec{S} \qquad \text{(Landé – Faktor } g\text{)}$$

Elektron: Spin 1/2 (in Einheiten von $\hbar$)

$$\longrightarrow \qquad \mu_e = \frac{g_e}{2} \mu_B \qquad \left(\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} \text{ Bohrsches Magneton}\right)$$

Dirac-Gleichung: $g_e = 2$ (wie für alle Fermionen, also Teilchen mit halbzahligem Spin)

QFT (QED): weitere Korrekturen

Schwinger (1948): $\dfrac{g_e}{2} = 1 + \dfrac{\alpha}{2\pi} + O(\alpha^2)$

Korrekturen bis zur Ordnung α^4 bekannt

eine der am genauesten gemessenen und berechneten Größen der Physik

wird heute zur Bestimmung der Feinstrukturkonstante α herangezogen

Bewegung im konstanten Magnetfeld

Lagrangefunktion eines geladenen Punktteilchens im äußeren elektromagnetischen Feld

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}(t)^2 - q\Phi(t, \vec{r}(t)) + \frac{q}{c} \vec{A}(t, \vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$$

gilt allgemein, hier für Potenziale $\Phi(\vec{r}), \vec{A}(\vec{r})$ ohne explizite Zeitabhängigkeit betrachtet

Euler-Lagrange: $\quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \dfrac{\partial L}{\partial x_i}$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i\right) &= -q\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{q}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\dot{x}_j \\
m\,\ddot{x}_i &= -q\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{q}{c}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\dot{x}_j - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\dot{x}_j\right) = -q\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{q}{c}\left(\dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\right)_i \\
\longrightarrow \qquad m\,\ddot{\vec{r}} &= -q\vec{\nabla}\Phi + \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}\right) \qquad \underline{\text{Lorentz}-\text{Kraft}}
\end{aligned}$$

betrachten jetzt <u>mehrere geladene Teilchen im konstanten Magnetfeld</u>

Beh.: geeignetes Vektorpotenzial für konstantes Magnetfeld $\quad \vec{A}(\vec{r}) = \dfrac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$

Bew.: $\quad \varepsilon_{ijk}\nabla_j A_k = \dfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}B_l\nabla_j x_m = \dfrac{1}{2}\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klj}B_l = \dfrac{B_l}{2}\left(\delta_{il}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{lj}\right) = B_i$

$\longrightarrow$ relevanter Term in L

$$L_B = \frac{1}{c}\sum_a q_a\vec{A}(\vec{r}_a(t)) \cdot \dot{\vec{r}}_a(t) = \sum_a \frac{q_a}{2c}(\vec{B} \times \vec{r}_a) \cdot \dot{\vec{r}}_a = \vec{B} \cdot \sum_a \frac{q_a}{2c}\vec{r}_a \times \dot{\vec{r}}_a = \vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

nicht überraschend: $\quad L_B = \vec{\mu} \cdot \vec{B} = -U_D$

mit magnetischem Dipolmoment für N Punktteilchen $\vec{\mu} = \dfrac{1}{2c}\sum_a q_a\vec{r}_a \times \dot{\vec{r}}_a$

andere Situation:

<u>geladene Punktteilchen in einem kugelsymmetrischen Potenzial ohne Magnetfeld</u>

$$L = \sum_a \frac{m_a}{2}\dot{\vec{r}}_a^{\,2} - U(\vec{r}_a)$$

Übergang zu gleichförmig rotierendem System mit Drehachse durch Zentrum des kugelsymmetrischen Potenzials

Bewegung im Nichtinertialsystem (T1):

$(0, \vec{n}_i) \longrightarrow (0, \vec{e}_i(t)) \quad (i = 1, 2, 3)$

$\longrightarrow \quad \dot{\vec{r}} = \vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{b}$

mit $\ \vec{r} = \vec{b} = b_i(t)\vec{e}_i(t), \quad \vec{v} = \dot{b}_i(t)\vec{e}_i(t)$

Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$: $\quad \dot{\vec{e}}_i = \vec{\Omega} \times \vec{e}_i$

$$L = \sum_a \frac{m_a}{2}\dot{\vec{r}}_a^{\,2} - U(\vec{r}_a) = \frac{1}{2}\sum_a m_a\left(\vec{v}_a + \vec{\Omega} \times \vec{b}_a\right)^2 - U(\vec{b}_a)$$

Vor.: $\quad q_a/m_a = q/m$ gleich für alle Teilchen

Wahl der (konstanten) Winkelgeschwindigkeit: $\vec{\Omega} = \dfrac{q}{2mc}\vec{B}$

für genügend kleine Magnetfelder (d.h. $\vec{B}^2$ vernachlässigbar) $\longrightarrow$

$$\begin{aligned}
L &= \sum_a \left(\frac{m_a}{2} \vec{v}_a^2 + m_a \vec{v}_a \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{b}_a) \right) - U(\vec{b}_a) + O(\vec{B}^2) \\
&\simeq \frac{1}{2} \sum_a m_a \vec{v}_a^2 + \frac{q}{2mc} \sum_a m_a \vec{B} \cdot (\vec{b}_a \times \vec{v}_a) - U(\vec{b}_a) \\
&= \frac{1}{2} \sum_a m_a \vec{v}_a^2 + \vec{B} \cdot \frac{1}{2c} \sum_a q_a (\vec{b}_a \times \vec{v}_a) - U(\vec{b}_a) \\
&= \frac{1}{2} \sum_a m_a \vec{v}_a^2 + \vec{\mu} \cdot \vec{B} - U(\vec{b}_a)
\end{aligned}$$

wobei $\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \sum_a q_a \vec{b}_a \times \vec{v}_a$ magnetisches Dipolmoment im rotierenden System

$\boxed{\text{Satz von Larmor}}$

System von Ladungen mit gleichem Verhältnis q_a/m_a im rotationssymmetrischen Potenzial und konstantem Magnetfeld verhält sich annähernd wie ein System im selben Potenzial (ohne Magnetfeld) in einem Koordinatensystem, das mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega} = \frac{q}{2mc} \vec{B}$ gleichmäßig um das Zentrum rotiert.

Larmor-Frequenz: $\Omega = \frac{q}{2mc} B$

IV Zeitabhängige elektromagnetische Felder

Elektrizität und Magnetismus: 2. große Vereinheitlichung der Physik durch Maxwell

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{\nabla}\vec{E}(t,\vec{r}) = 4\pi\,\rho(t,\vec{r}) & \vec{\nabla}\vec{B}(t,\vec{r}) = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{r}) + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t} = 0 & \vec{\nabla}\times\vec{B}(t,\vec{r}) - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}(t,\vec{r})}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j}(t,\vec{r}) \end{array}}$$

Idee: Potenziale $\Phi(t,\vec{r}), \vec{A}(t,\vec{r})$ so eingeführt, dass homogene MG identisch erfüllt sind

$$\vec{\nabla}\vec{B}(t,\vec{r}) = 0 \quad \xrightarrow{\exists\vec{A}(t,\vec{r})} \quad \vec{B}(t,\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(t,\vec{r})$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\longrightarrow \quad \exists\ \Phi(t,\vec{r}): \qquad \vec{E}(t,\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(t,\vec{r}) - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t}$$

damit Problem von 6 Feldern $\vec{E},\vec{B}$ auf 4 Felder $\Phi,\vec{A}$ reduziert

<u>Eichinvarianz:</u> für beliebiges (differenzierbares) Skalarfeld $\Lambda(t,\vec{r})$ mit

$$\vec{A}'(t,\vec{r}) = \vec{A}(t,\vec{r}) + \vec{\nabla}\Lambda(t,\vec{r}) \qquad\qquad \Phi'(t,\vec{r}) = \Phi(t,\vec{r}) - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda(t,\vec{r})}{\partial t}$$

gilt

$$\begin{aligned} \vec{B}' = \vec{\nabla}\times\vec{A}' &= \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B} \\ \vec{E}' = -\vec{\nabla}\Phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} &= \vec{E} + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\Lambda = \vec{E} \end{aligned}$$

<u>Folgerung:</u> physikalische (messbare) Felder $\vec{E},\vec{B}$ bleiben bei Eichtransformationen ungeändert

kann zur Vereinfachung der MG verwendet werden $\longrightarrow$
tatsächlich nur mehr 3 unabhängige Felder zu bestimmen

IV.1 Energie- und Impulsbilanz

betrachten System von Ladungen (Ladungs-, Stromdichten) und elektromagnetische Felder

Vermutung:

Bewegungsenergie (Impuls) der Materie $\quad\Leftrightarrow\quad$ Feldenergie (-impuls)

$$dE_{\mathrm{Mat(erie)}} = \sum_a \vec{K}_L(\vec{r}_a)\cdot d\vec{r}_a = \sum_a q_a\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{r}}_a\times\vec{B}\right)\cdot\dot{\vec{r}}_a\,dt = \sum_a q_a\,\dot{\vec{r}}_a\cdot\vec{E}\,dt$$

$$\longrightarrow \quad \text{für allg. Stromdichte:} \qquad \frac{dE_{\mathrm{Mat}}}{dt} = \int d^3r\,\vec{j}(t,\vec{r})\cdot\vec{E}(t,\vec{r})$$

mit $\vec{\nabla}(\vec{E}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = -\frac{1}{c}\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \quad \longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\vec{j}\cdot\vec{E} &= \vec{E}\cdot\left(\frac{c}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \\
&= -\frac{c}{4\pi}\vec{\nabla}(\vec{E}\times\vec{B}) - \frac{1}{4\pi}\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{4\pi}\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\
&= -\frac{c}{4\pi}\vec{\nabla}(\vec{E}\times\vec{B}) - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}^2+\vec{B}^2\right)
\end{aligned}$$

$$\longrightarrow \qquad \frac{dE_{\text{Mat}}}{dt} + \frac{1}{8\pi}\int d^3r\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}^2+\vec{B}^2\right) + \frac{c}{4\pi}\int d^3r\,\vec{\nabla}(\vec{E}\times\vec{B}) = 0$$

Energiedichte: $\quad u_{\text{em}} = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2+\vec{B}^2\right) \qquad$ (Verallgemeinerung von $\eta = \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2$)

Energiestromdichte (Poynting-Vektor): $\quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B}$

Energiebilanz (bei festgehaltenem V)

$$\frac{dE_{\text{Mat}}(t)}{dt} + \frac{d}{dt}\int_V d^3r\,u_{\text{em}}(t,\vec{r}) + \int_{\partial V} d\vec{F}\cdot\vec{S}(t,\vec{r}) = 0$$

Dimensionen:

$[\vec{S}]$ = Energie/(Fläche x Zeit)

$[\vec{S}/c^2]$ = Impuls/Volumen $\quad$ (Impulsdichte des elm. Feldes $\rightarrow$ nächste Seite)

Vor.: alle Ladungen und Felder in V (z.B. gesamter Raum) $\quad \longrightarrow$

Energieerhaltung im abgeschlossenen System

$$\frac{d}{dt}(E_{\text{Mat}} + E_{\text{em}}) = 0$$

$E_{\text{em}}(t) = \int d^3r\,u_{\text{em}}(t,\vec{r}) \qquad$ Gesamtenergie des elm. Feldes

Materie im endlichen Volumen:

Energieänderung i.a. durch Energiefluss des Feldes (Poynting-Vektor) kompensiert

analoge Überlegung für Impulsbilanz:

$$\frac{d\vec{P}_{\text{Mat}}(t)}{dt} = \int d^3r\,\left[\rho(t,\vec{r})\vec{E}(t,\vec{r}) + \frac{1}{c}\vec{j}(t,\vec{r})\times\vec{B}(t,\vec{r})\right]$$

Übungen: Einsetzen von $\rho = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\vec{E}, \quad \frac{\vec{j}}{c} = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \longrightarrow$

$$\frac{dP_{\text{Mat},i}}{dt} + \frac{d}{dt}\int_V d^3r\,\frac{S_i}{c^2} = \int_V d^3r\,\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$$

Maxwellscher Spannungstensor (analog Spannungstensor der Kontinuumsmechanik):

$$T_{ij} = T_{ji} = \frac{1}{4\pi}\left[E_i\,E_j + B_i\,B_j - \delta_{ij}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)/2\right] \qquad \longrightarrow \qquad T_{ii} = -u_{\mathrm{em}}$$

Impuls des elm. Feldes:

$$\vec{P}_{\mathrm{em}} = \int d^3r\,\vec{S}/c^2 \qquad \text{(„Licht bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit“)}$$

Impulsbilanz

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(P_{\mathrm{Mat}} + P_{\mathrm{em}}\right)_i = \int_{\partial V} dF_j\,T_{ij}}$$

rechte Seite: Kraft auf Oberfläche des Volumens (s. Kontinuumsmechanik)

für abgeschlossenes System:

<u>Impulserhaltung</u> $\qquad \frac{d}{dt}\left(\vec{P}_{\mathrm{Mat}} + \vec{P}_{\mathrm{em}}\right) = 0$

Energie- und Impulsbilanz: Hinweis auf Eigenständigkeit von $\vec{E}, \vec{B}$
nicht offensichtlich in klassischer Elektrodynamik

QFT: Materie und Strahlung durch Quantenfelder beschrieben, allerdings
Materie = massive Quarks und Leptonen (Spin 1/2)
Strahlung = masselose Photonen (Spin 1)

IV.2 Induktionsgesetz

unabhängig von Ladungs- und Stromdichten

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E}(t,\vec{r}) + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t} = 0}$$

Drahtschleife im Magnetfeld

magnetischer Fluss

$$\Phi_B(t) = \int_{F(t)} d\vec{F} \cdot \vec{B}(t,\vec{r})$$

Änderung von $\Phi_B(t)$:

$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$ **und** $\frac{dF}{dt} \neq 0$

Veranschaulichung in einer Raumdimension:

$$\frac{d}{dt}\int_{g_1(t)}^{g_2(t)} dx\,f(t,x) = \int_{g_1(t)}^{g_2(t)} dx\,\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + \dot{g}_2(t)\,f(t,g_2(t)) - \dot{g}_1(t)\,f(t,g_1(t))$$

für aktuellen Fall

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Phi_B(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\int_{F(t+\Delta t)} d\vec{F}\cdot\vec{B}(t+\Delta t,\vec{r}) - \int_{F(t)} d\vec{F}\cdot\vec{B}(t,\vec{r})\right\} \\
&= \int_{F(t)} d\vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{F(t+\Delta t)-F(t)} d\vec{F}\cdot\vec{B}(t,\vec{r})
\end{aligned}
$$

Volumen zwischen 2 Flächen (Gauß):

$$
0 = \int_V d^3r\,\vec{\nabla}\vec{B} \;=
$$

$$
\int_{F(t+\Delta t)} d\vec{F}\cdot\vec{B} - \int_{F(t)} d\vec{F}\cdot\vec{B} + \oint (d\vec{r}\times\vec{v}\,\Delta t)\cdot\vec{B}
$$

Folgerung: $\displaystyle \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{F(t+\Delta t)-F(t)} d\vec{F}\cdot\vec{B} = -\oint_{\partial F} d\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{B})$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Phi_B(t)}{dt} &= \int_{F(t)} d\vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \oint_{\partial F} d\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{B}) \\
&= -c\oint_{\partial F} d\vec{r}\cdot\left(\vec{E}+\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right) \qquad \text{mit} \quad \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -c\,\vec{\nabla}\times\vec{E}
\end{aligned}
$$

<u>elektromotorische Kraft (EMK)</u> = induzierte Spannung: $\oint d\vec{r}\cdot(\vec{E}+\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B})$

N.B.: weder ρ noch $\vec{j}$ kommen vor $\longrightarrow$ EMK auch im Vakuum erzeugt

wenn Leiter vorhanden $\longrightarrow$ Strom induziert

in meisten Fällen gute Näherung ($\sim$ Reibungskraft auf Ladungsträger im Festkörper)

$$
\vec{j} = \sigma\left(\vec{E}+\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right) \qquad \underline{\text{Ohmsches Gesetz}}
$$

mit <u>Leitfähigkeit</u> σ

$$
\text{EMK} = V_{12} = \frac{1}{\sigma}\int_1^2 d\vec{r}\cdot\vec{j} = \frac{I\,L}{\sigma\,Q}
$$

wobei L die Länge und Q der (kleine) Querschnitt des Leiters sind

Folgerung:

$$
\text{EMK} = I\,R \quad \text{mit} \quad R = \frac{L}{\sigma Q} \qquad \underline{\text{Ohmscher Widerstand}}
$$

Leitfähigkeit stark temperaturabhängig

Material	Ag	Cu	Fe	Si	Glas
$\frac{1}{\sigma}$ (in Ω m)	$1.6 \cdot 10^{-8}$	$1.7 \cdot 10^{-8}$	$9.7 \cdot 10^{-8}$	20	$10^{10 \div 14}$
bei 20°C		Leiter		Halbleiter	Isolator

spezifischer elektrischer Widerstand (Resistivität): $\frac{1}{\sigma} = \frac{Q}{L} R$

SI-Einheiten: $1\ \Omega = 1\,\mathrm{V}/1\,\mathrm{A}$

Lenzsche Regel ($\leftarrow$ Energieerhaltung)

$$I\,R = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int d\vec{F}\cdot\vec{B}$$

Schleife festgehalten, $\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} > 0$

$\longrightarrow$ $I < 0$ (math. neg. Sinn) $\longrightarrow$

erzeugt $\vec{B}_{\text{ind}}$ nach unten (Rechtsschraube!)

$\longrightarrow$ wirkt $\partial\vec{B}/\partial t$ entgegen

Folgerung: durch Induktion erzeugte Kraft, bzw. Magnetfeld versucht, verursachende Bewegung zu hemmen ($\longrightarrow$ Wirbelstrombremse), bzw. verursachendes Magnetfeld zu schwächen ($\longrightarrow$ Diamagnetismus)

IV.3 Allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen

Aufgabe: $\vec{E}(t,\vec{r})$, $\vec{B}(t,\vec{r})$ zu berechnen bei geg. $\rho(t,\vec{r})$, $\vec{j}(t,\vec{r})$

benützen dazu die Potenziale $\Phi(t,\vec{r}), \vec{A}(t,\vec{r})$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\,, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

homogene MG automatisch erfüllt $\longrightarrow$ nur mehr inhomogene MG zu lösen

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\rho \qquad \longrightarrow \qquad -\Delta\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\vec{A}) = 4\pi\rho$$

mit $\quad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = -\Delta\vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A})$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \longrightarrow \qquad -\Delta\vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\longrightarrow \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} + \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

4 gekoppelte lineare partielle Diffgl. 2. Ordnung für Φ, $\vec{A}$

Vereinfachung durch geschickte Wahl der Eichung

Beh. ($\rightarrow$ Übungen): bei geg. Φ, $\vec{A}$ kann Eichfunktion $\Lambda(t,\vec{r})$ stets so gewählt werden, dass nach einer Eichtransformation

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \qquad \Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0 \qquad \underline{\text{Lorenz} - \text{Eichung}}$$

Verallgemeinerung der Coulomb-Eichung im zeitabhängigen Fall $\longrightarrow$

$$\boxed{\text{inhomogene Wellengleichungen}}$$

$$\boxed{\begin{array}{cc} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta\Phi = 4\pi\rho \ , & \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} \\ \Box\,\Phi = 4\pi\rho \ , & \Box\,\vec{A} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} \end{array}}$$

$\longrightarrow$ 4 entkoppelte lineare part. Diffgl. für Φ, $\vec{A}$ (durch Lorenz-Eichung verbunden!)

allg. Lösung einer inhomogenen linearen Diffgl.:

$$\begin{aligned} \Phi(t,\vec{r}) &= \Phi_s(t,\vec{r}) + \Phi_h(t,\vec{r}) \\ \Box\,\Phi_s = 4\pi\rho \ , & \qquad \Box\,\Phi_h = 0 \end{aligned}$$

bekanntes Rezept (völlig analog für $\vec{A}$):

eine spezielle Lösung Φ_s plus **allgemeine** Lösung Φ_h

Standardmethode: Φ_s mit <u>Greenfunktion</u> berechnen

Berechnung der Greenfunktion: Fourier-Transformation für $\Phi(t,\vec{r})$, $\rho(t,\vec{r})$ in t
(Vor.: $\Phi,\ \rho \in L_1(-\infty,\infty)$)

$$\Phi(t,\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \tilde{\Phi}(\omega,\vec{r}) e^{i\omega t} \qquad \rho(t,\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \tilde{\rho}(\omega,\vec{r}) e^{i\omega t}$$

$$\Box\,\Phi = 4\pi\rho \qquad \longrightarrow \qquad \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(-\frac{\omega^2}{c^2} - \Delta\right) \tilde{\Phi}(\omega,\vec{r}) e^{i\omega t} = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \tilde{\rho}(\omega,\vec{r}) e^{i\omega t}$$

Umkehrung der Fourier-T.

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{\Phi}(\omega,\vec{r}) = -4\pi\tilde{\rho}(\omega,\vec{r}) \qquad \underline{\text{Helmholtz} - \text{Gleichung}}$$

Greenfunktion der Helmholtz-G. ($\leftarrow$ Übungen)

$$(\Delta + k^2)\frac{e^{ikr}}{r} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}) \qquad k = \pm\,\omega/c$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \qquad \tilde{\Phi}(\omega,\vec{r}) &= \int d^3r'\, G_{\mathrm{H}}(\vec{r}-\vec{r}\,';\omega)\, \tilde{\rho}(\omega,\vec{r}\,') \\ G_{\mathrm{H}}(\vec{r}-\vec{r}\,';\omega) &= \frac{e^{\pm i\frac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \end{aligned}$$

daher spezielle Lösung für (skalares) Potenzial

$$\begin{aligned}
\Phi(t,\vec{r}) &= \int d\omega \int d^3r' \, \tilde{\rho}(\omega,\vec{r}') \frac{e^{i\omega\left(t \pm |\vec{r}-\vec{r}'|/c\right)}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int d^3r' \, \frac{\rho(t \pm |\vec{r}-\vec{r}'|/c, \vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\
\Phi_{\substack{\text{av}\\\text{ret}}}(t,\vec{r}) &= \int dt' d^3r' \, G_{\substack{\text{av}\\\text{ret}}}(t-t', \vec{r}-\vec{r}') \, \rho(t',\vec{r}')
\end{aligned}$$

avancierte, bzw. retardierte Greenfunktion der inhomogenen Wellengleichung

$$G_{\substack{\text{av}\\\text{ret}}}(t-t', \vec{r}-\vec{r}') = \frac{\delta(t-t' \pm |\vec{r}-\vec{r}'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \ , \qquad \Box \, G_{\substack{\text{av}\\\text{ret}}}(t,\vec{r}) = 4\pi\delta(t)\delta^{(3)}(\vec{r})$$

Interpretation:

zur Berechnung des Potenzials $\Phi(t,\vec{r})$ für geg. Raum-Zeit-Punkt $(t,\vec{r})$
Ladungsdichte $\rho(t',\vec{r}') \ \forall \, (t',\vec{r}')$ benötigt mit

$t' = t + \lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert/c$	$t' > t$	avancierte Greenfunktion G_{av}
$t' = t - \lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert/c$	$t' < t$	retardierte Greenfunktion G_{ret}

<u>retardiertes Potenzial</u>

$$\Phi_{\text{ret}}(t,\vec{r}) = \int d^3r' \, \frac{\rho(t - |\vec{r}-\vec{r}'|/c, \vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\Box \, \Phi_{\text{ret}}(t,\vec{r}) = 4\pi\rho(t,\vec{r})$$

$\longrightarrow$ Ladungsdichte ρ nur am
sog. <u>Rückwärts-Lichtkegel</u> relevant:

alle $(t',\vec{r}')$ mit $t' = t - |\vec{r}-\vec{r}'|/c$

vollständige Lösung:

$$\Phi(t,\vec{r}) = \Phi_{\text{ret}}(t,\vec{r}) + \Phi_{\text{ein}}(t,\vec{r}) \ , \qquad \Box \, \Phi_{\text{ein}}(t,\vec{r}) = 0$$

für zeitlich lokalisierte Ladungsdichte, d.h. insbesondere $\rho = 0$ für $t < T$ $\longrightarrow$
für $t < T$ nur einlaufendes Feld (Potenzial): $\Phi(t,\vec{r}) = \Phi_{\text{ein}}(t,\vec{r})$
mathematisch völlig äquivalent: avanciertes Potenzial $\Phi_{\text{av}}(t,\vec{r})$ mit vollständiger Lösung

$$\Phi(t,\vec{r}) = \Phi_{\text{av}}(t,\vec{r}) + \Phi_{\text{aus}}(t,\vec{r}) \ , \qquad \Box \, \Phi_{\text{aus}}(t,\vec{r}) = 0$$

physikalisch häufiger $\Phi_{\text{ret}} + \Phi_{\text{ein}}$ anwendbar:

Präparation der Ladungsdichte **vor** Messung des Feldes

Huygenssches Prinzip

betrachten Punktquelle in Raum und Zeit: $\rho(t,\vec{r}) = \delta(t)\,\delta^{(3)}(\vec{r})$

$$\Phi_{\text{ret}}(t,\vec{r}) = \frac{\delta(t - r/c)}{r}$$

Störung pflanzt sich konzentrisch vom Ursprung mit Geschwindigkeit c fort $\longrightarrow$

jeder Punkt $\vec{r}$ empfängt zur Zeit $t = r/c$ ein „scharfes“ Signal, vorher und nachher nichts

nur scheinbar offensichtlich: Huygenssches Prinzip gilt nur in ungeraden Raumdimensionen ($d \geq 3$), in geraden gibt es einen Nachhall $\longrightarrow$ Problematik der Wellenwanne für Demonstration von Wellenphänomenen im Raum

retardierte Potenziale

$$\boxed{\Phi_{\text{ret}}(t,\vec{r}) = \int d^3r'\,\frac{\rho(t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c, \vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,, \qquad \vec{A}_{\text{ret}}(t,\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r'\,\frac{\vec{j}(t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c, \vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

speziell für Punktteilchen

$$\rho(t,\vec{r}) = q\,\delta^{(3)}\left(\vec{r} - \vec{r}_q(t)\right), \qquad \vec{j}(t,\vec{r}) = q\,\dot{\vec{r}}_q(t)\,\delta^{(3)}\left(\vec{r} - \vec{r}_q(t)\right)$$

Berechnung für skalares Potenzial:

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{ret}}(t,\vec{r}) &= q\int d^3r'\frac{\delta^{(3)}(\vec{r}\,' - \vec{r}_q(t_{\text{ret}}))}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = q\int d\tau\, d^3r'\,\delta(\tau - t + |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)\frac{\delta^{(3)}(\vec{r}\,' - \vec{r}_q(\tau))}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\
&= q\int d\tau\frac{\delta(\tau - t + |\vec{r}-\vec{r}_q(\tau)|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}_q(\tau)|}\,, \qquad t_{\text{ret}} = t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c
\end{aligned}$$

Integration über τ: wenn überhaupt Lösung existiert $\longrightarrow$

<u>eindeutige</u> Lösung von $\tau - t + |\vec{r} - \vec{r}_q(\tau)|/c = 0 \quad \longrightarrow \quad \tau = t_{\text{ret}}$

eindeutig wegen $\left|\frac{d\vec{r}_q}{d\tau} = \vec{v}_q\right| < c$

Def.: $\vec{R}(\tau) := \vec{r} - \vec{r}_q(\tau)$

$\longrightarrow \quad R(t_{\text{ret}}) = |\vec{r} - \vec{r}_q(t_{\text{ret}})| = c(t - t_{\text{ret}})$

Auswertung der $\delta-$Funktion:

da eindeutige (und einfache) Nullstelle

$$\longrightarrow \qquad \delta(F(\tau)) = \frac{\delta(\tau - t_{\text{ret}})}{|\dot{F}(t_{\text{ret}})|} \qquad \text{mit} \qquad F(\tau) = \tau - t + R(\tau)/c \qquad \longrightarrow$$

$$\Phi_{\text{ret}}(t,\vec{r}) = \frac{q}{R(t_{\text{ret}})\,|\dot{F}(t_{\text{ret}})|}$$

$\dot F(\tau) = 1 + \dot R(\tau)/c \qquad \longrightarrow \qquad \dot R(\tau)$ zu berechnen

$$R(\tau)^2 = \vec R(\tau)^2 \qquad \longrightarrow \qquad 2R\,\dot R = 2\vec R \cdot \dot{\vec R} = -2\vec R \cdot \dot{\vec r}_q(\tau) = -2\vec R \cdot \vec v_q(\tau)$$

und daher (unter Vorwegnahme, dass stets $\dot F(t_{\text{ret}}) > 0$)

$$R(t_{\text{ret}})\,|\dot F(t_{\text{ret}})| = R(t_{\text{ret}}) + R(t_{\text{ret}})\,\dot R(t_{\text{ret}})/c = R(t_{\text{ret}}) - \vec R(t_{\text{ret}}) \cdot \vec v_q(t_{\text{ret}})/c$$

$$\boxed{\text{Liénard-Wiechert-Potenziale}}$$

$$\boxed{\Phi(t,\vec r) = \frac{q}{R(t_{\text{ret}}) - \vec R(t_{\text{ret}}) \cdot \vec v_q(t_{\text{ret}})/c}\,, \qquad \vec A(t,\vec r) = \frac{q\,\vec v_q(t_{\text{ret}})}{c\,R(t_{\text{ret}}) - \vec R(t_{\text{ret}}) \cdot \vec v_q(t_{\text{ret}})}}$$

IV.4 Elektromagnetische Wellen

Maxwell-G. im Vakuum $\quad\longrightarrow\quad$ Wellengleichungen $\quad \Box\,\vec E(t,\vec r) = \Box\,\vec B(t,\vec r) = 0$

allerdings mehr Information in MG

jedes „vernünftige“ Vektorfeld $\vec E(t,\vec r)$ (jede Komponente $\in L_1(-\infty,\infty)$ in jeder Variable) durch 4-dim. Fouriertransformation darstellbar

$$\vec E(t,\vec r) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3k\, \tilde{\vec E}(\omega,\vec k)\, e^{i\,(\vec k \cdot \vec r - \omega t)}$$

$$\Box\,\vec E = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3k\, \tilde{\vec E}(\omega,\vec k) \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec k^2\right) e^{i\,(\vec k \cdot \vec r - \omega t)} = 0$$

Umkehrung der Fourier-T. (eindeutig!) $\quad\longrightarrow\quad \omega^2 = c^2\,\vec k^2 = c^2\,k^2 \qquad$ (für $\tilde{\vec E}(\omega,\vec k) \neq 0$)

daher allgemeine Lösung als 3-dim. Fourier-Transformierte

$$\vec E(t,\vec r) = \int d^3k\, \vec E_0(\vec k)\, e^{i\,(\vec k \cdot \vec r - \omega t)}$$

können uns auf $\omega = +c\,k$ beschränken ($\vec E_0(\vec k)$ i.a. komplexe Vektorfunktion)

analog

$$\vec B(t,\vec r) = \int d^3k\, \vec B_0(\vec k)\, e^{i\,(\vec k \cdot \vec r - \omega t)}$$

Maxwell-G.

$$\vec\nabla \vec E = 0 \quad\longrightarrow\quad \vec k \cdot \vec E_0(\vec k) = 0$$

$$\vec\nabla \times \vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec B}{\partial t} \quad\longrightarrow\quad i\,\vec k \times \vec E_0(\vec k) = i\frac{\omega}{c}\vec B_0(\vec k)$$

$$\longrightarrow\quad \vec B_0(\vec k) = \frac{c}{\omega}\vec k \times \vec E_0(\vec k) \qquad \longrightarrow \qquad |\vec E_0| = |\vec B_0|$$

$\longrightarrow \qquad \vec{\nabla}\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad$ automatisch erfüllt

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \int d^3k\, \vec{E}_0(\vec{k})\, e^{i\,(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B}(t,\vec{r}) = \int d^3k\, \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E}_0(\vec{k})\, e^{i\,(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

mit $\qquad \vec{k}\cdot\vec{E}_0(\vec{k}) = 0$

Folgerung: allg. Lösung ist (Linearität der MG!)

$$\boxed{\text{Überlagerung von monochromatischen ebenen Wellen} \qquad e^{i\,(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}}$$

monochromatisch: durch einzigen Wellenzahlvektor $\vec{k}$ gekennzeichnet

zur Erinnerung: warum als <u>ebene Wellen</u> bezeichnet?

physikalisch realisierbare Wellen: $\qquad \mathrm{Re}\, e^{i\,(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$ [oder $\mathrm{Im}\, e^{i\,(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$]

Fortpflanzung in Richtung $\vec{k}/k \qquad \longrightarrow \qquad$ speziell für $\vec{k} = k\,\vec{e}_x$

$\cos\,(k\,x - \omega\,t) = \cos k\,(x - c\,t)$

Welle nach rechts mit Geschw. c

Wellen nach links: $\vec{k} = -k\,\vec{e}_x$

allg.: Ebenen $\vec{k}\cdot\vec{r}$ =konst. pflanzen sich mit Geschwindigkeit $\omega/k = c$ in Richtung $\vec{k}/k$ fort

Welle zerfließt nicht $\qquad \leftrightarrow \qquad \omega$ linear in k

andere Ausdrucksweise: Welle zeigt keine Dispersion (gilt nicht mehr in Materie, s. Kap. V)

Notation: $\qquad \vec{k}$: Wellen(zahl)vektor, $\qquad k = |\vec{k}|$: Wellenzahl

Abstand zwischen benachbarten Maxima bei festem t: $\qquad k\,\Delta x = 2\pi \qquad \longrightarrow$

Wellenlänge:	$\lambda = \frac{2\pi}{k}$	Phase der Welle:	$\varphi = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t$
Kreisfrequenz:	$\omega = c\,k = \frac{2\pi\,c}{\lambda}$	Frequenz:	$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi}$

Lichtgeschwindigkeit $c \quad = \quad$ Phasengeschwindigkeit: Geschwindigkeit, mit der sich Ebenen φ =konst. fortpflanzen

<u>monochromatische ebene elektromagnetische Wellen</u> (in komplexer Notation)

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \mathrm{Re}\left\{\vec{E}_0\, e^{i\,(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\right\}, \qquad \vec{B}(t,\vec{r}) = \mathrm{Re}\left\{\frac{\vec{k}}{k}\times\vec{E}_0\, e^{i\,(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\right\}, \qquad \vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0$$

$$\longrightarrow \qquad \vec{E}\perp\vec{k}\,, \quad \vec{B}\perp\vec{k}\,, \quad \vec{E}\perp\vec{B}\,, \quad |\vec{E}| = |\vec{B}|$$

$\longrightarrow$ $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind transversal polarisiert, d.h. orthogonal auf Ausbreitungsrichtung

<u>Energie- und Impulsdichte</u>

für festes $\vec{r}$: Felder oszillieren in t $\longrightarrow$
betrachten zeitgemittelte Größen über eine Periode $T = 1/\nu = 2\pi/\omega$

Def.: $\langle A \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, A(t,\vec{r})$ Zeitmittel der Größe A

$$\longrightarrow \qquad \langle \vec{E} \rangle = \langle \vec{B} \rangle = 0$$

Energie- und Impulsdichten sind aber quadratisch in den Feldern

$$\begin{aligned}
\vec{E}(t,\vec{r}) &= \mathrm{Re}\left\{\vec{E}_0\, e^{i\,(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{(\vec{E}_{0,r} + i\vec{E}_{0,i})(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right\} \\
&= \vec{E}_{0,r}\cos\varphi - \vec{E}_{0,i}\sin\varphi \qquad\qquad (\varphi = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \\
\vec{E}^2 &= \vec{E}_{0,r}^2\cos^2\varphi + \vec{E}_{0,i}^2\sin^2\varphi - 2\vec{E}_{0,r}\cdot\vec{E}_{0,i}\sin\varphi\cos\varphi \\
\longrightarrow \quad \langle \vec{E}^2 \rangle &= \frac{1}{2}\left(\vec{E}_{0,r}^2 + \vec{E}_{0,i}^2\right) = \frac{1}{2}\vec{E}_0\cdot\vec{E}_0^* \\
\text{analog} \quad \langle \vec{E}\cdot\vec{B} \rangle &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(\vec{E}_0\cdot\vec{B}_0^*) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(\vec{E}_0^*\cdot\vec{B}_0)
\end{aligned}$$

mittlere Energiedichte (mit $|\vec{E}_0| = |\vec{B}_0|$)

$$\langle u_{\mathrm{em}} \rangle = \frac{1}{8\pi}\langle \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \rangle = \frac{1}{16\pi}\left(\vec{E}_0\cdot\vec{E}_0^* + \vec{B}_0\cdot\vec{B}_0^*\right) = \frac{1}{8\pi}\vec{E}_0\cdot\vec{E}_0^*$$

mittlere Energiestromdichte (Poynting-Vektor)

$$\begin{aligned}
\langle \vec{S} \rangle &= \frac{c}{4\pi}\langle \vec{E}\times\vec{B} \rangle = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\,(\vec{E}_0\times\vec{B}_0^*) \\
\vec{E}_0\times\vec{B}_0^* &= \vec{E}_0\times(\vec{k}\times\vec{E}_0^*)\frac{1}{k} = \frac{\vec{k}}{k}\,\vec{E}_0\cdot\vec{E}_0^* \\
\longrightarrow \qquad \langle \vec{S} \rangle &= \frac{\vec{k}}{k}\,\frac{c}{8\pi}\vec{E}_0\cdot\vec{E}_0^* = c\,\frac{\vec{k}}{k}\,\langle u_{\mathrm{em}} \rangle
\end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Welle transportiert Energie mit Lichtgeschwindigkeit c in Richtung $\vec{k}$

Impulsdichte: $\langle \frac{\vec{S}}{c^2} \rangle = \frac{\vec{k}}{k}\,\frac{\langle u_{\mathrm{em}} \rangle}{c}$ $\longrightarrow$

Energie-Impuls-Beziehung für masselose Teilchen (Photonen):

$$|\vec{p}| = \frac{E}{c} \qquad \longrightarrow \qquad \text{spezielle Relativitätstheorie (Kap. VI)}$$

<u>Polarisation</u>

wieder monochromatische ebene Welle betrachtet:

$$\vec{k} = k\vec{e}_z \qquad \longrightarrow \qquad \vec{E},\, \vec{B} \text{ oszillieren in } (x,y)\text{−Ebene}$$

beschränken uns auf $\vec{E}$, da $\vec{B} = \dfrac{\vec{k}}{k} \times \vec{E}$

allg. Polarzerlegung ($\vec{E}_0$ i.a. komplex!): $\quad \vec{E}_0^2 = |\vec{E}_0^2|\, e^{2i\alpha}$

analoge Zerlegung: $\quad \vec{E}_0\, e^{-i\alpha} = \vec{b}_1 + i\,\vec{b}_2 \;, \qquad \vec{b}_i$ reell, $\vec{b}_i \perp \vec{k}$

$$\begin{aligned} \vec{E}_0^2\, e^{-2i\alpha} &= \vec{b}_1^2 - \vec{b}_2^2 + 2i\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = |\vec{E}_0^2| \\ &\longrightarrow \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 0 \;, \quad \vec{b}_1^2 \geq \vec{b}_2^2 \end{aligned}$$

Wahl der Achsen: $\quad \vec{e}_x = \dfrac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} \;, \quad \vec{e}_y = \pm\dfrac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|} \qquad$ (wenn $\vec{b}_2 = 0 : \quad \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_x$)

$$\begin{aligned} \vec{E}(t,\vec{r}) &= \mathrm{Re}\left\{\vec{E}_0\, e^{i\,(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{(b_1\,\vec{e}_x \pm i\, b_2\,\vec{e}_y)\, e^{i\varphi}\right\} \\ &= \underbrace{b_1\,\cos\varphi}_{E_x(t,\vec{r})}\,\vec{e}_x \underbrace{\mp b_2\,\sin\varphi}_{E_y(t,\vec{r})}\,\vec{e}_y \qquad\qquad \varphi = kz - \omega t + \alpha \;, \quad b_i = |\vec{b}_i| \end{aligned}$$

<u>Polarisationsellipse:</u> $\quad \dfrac{E_x^2}{b_1^2} + \dfrac{E_y^2}{b_2^2} = 1$

rechts polarisiert $\qquad\qquad$ links polarisiert

mit $\quad \dfrac{d\varphi}{dt} = -\omega < 0, \quad \vec{k} = k\,\vec{e}_z \quad$ (aus der Zeichenebene heraus)

allg. Fall: $\qquad \vec{E}$ (und damit $\vec{B}$) elliptisch polarisiert

Spezialfälle

$b_2 = 0 :$ $\qquad \vec{E}$ ($\vec{B}$) linear polarisiert

$b_1 = b_2 :$ $\qquad \vec{E}$ ($\vec{B}$) zirkular polarisiert

Linearität der MG: allg. Fall als Superposition zweier orthogonal linear pol. oder zweier entgegengesetzt zirkular pol. Wellen darstellbar

N.B.: monochromatische ebene Welle ist eine Idealisierung, da

$$\langle u_{\text{em}} \rangle = \text{konst.} \qquad \longrightarrow \qquad \text{Energie} = \int d^3r \, \langle u_{\text{em}} \rangle = \infty$$

physikalisch realisierbar sind nur

$$\boxed{\text{Wellenpakete} \quad \equiv \quad \text{Überlagerung von monochromatischen ebenen Wellen}}$$

typisches Wellenpaket (für festes t)

räumliche Ausdehnung $\Delta\, x \sim l$

Theorie der Fourier-T. $\longrightarrow$

Wellenzahlbereich $\Delta\, k \gtrsim 1/l$ notwendig $\longrightarrow$

klassische Unschärferelation: $\Delta\, x\, \Delta\, k \gtrsim 1$

Übungen: Gaußsches Wellenpaket

bis jetzt Wellen im gesamten Raum betrachtet; wesentlich kompliziertere Situation:

Wellen in durch Metallwände begrenztem Volumen

endliches Volumen $\longrightarrow$ Hohlraumresonator
Volumen in einer Richtung unbegrenzt $\longrightarrow$ Wellenleiter (z.B. Koaxialkabel)

Randbedingungen an Metalloberfläche ?

Vor.: Frequenzen nicht zu groß, d.h. Zeitabhängigkeit des Feldes nicht zu stark $\longrightarrow$
Idealisierung des perfekten Leiters wie in der Elektrostatik
$\longrightarrow \quad \vec{E}_{\text{tang}}|_{\partial V} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \vec{n} \times \vec{E}|_{\partial V} = 0$ mit Normalenvektor $\vec{n}$ auf Metalloberfläche

Magnetfeld

$$\dot{\vec{B}} = -c\vec{\nabla} \times \vec{E} \qquad \longrightarrow \qquad \vec{n} \cdot \dot{\vec{B}} = -c(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{n} = -c\vec{\nabla}(\vec{E} \times \vec{n})$$

daher insgesamt Randbedingungen an Metalloberfläche ∂V

$$\vec{n} \times \vec{E}|_{\partial V} = 0\ , \qquad\qquad \vec{n} \cdot \dot{\vec{B}}|_{\partial V} = 0$$

gute Näherung für Radiofrequenzen ($\nu \lesssim 10^9$ Hz), sicher nicht für UV-Frequenzen oder höher ($\nu \gtrsim 10^{16}$ Hz); Metalle können für sehr große Frequenzen transparent werden

$$\boxed{\text{rechteckiger Wellenleiter}}$$

in $z-$Richtung offen

rechteckiger Querschnitt:

$0 \le x \le L_1,\ 0 \le y \le L_2$

im Inneren Vakuum: $\Box\, \vec{E} = \Box\, \vec{B} = 0$

Rechteckquerschnitt erlaubt Lösung mit Separationsansatz:

$$E_i = f_i(x)\, g_i(y)\, h_i(z)\, T_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$\frac{1}{E_i}\Box\, E_i = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \frac{f_i''}{f_i} + \frac{g_i''}{g_i} + \frac{h_i''}{h_i} - \frac{1}{c^2}\frac{T_i''}{T_i} = 0$$

Folgerung: mit $\omega_i^2 = c^2\,(k_{1i}^2 + k_{2i}^2 + k_{3i}^2)$

$$\frac{f_i''}{f_i} = -k_{1i}^2\,, \quad \frac{g_i''}{g_i} = -k_{2i}^2\,, \quad \frac{h_i''}{h_i} = -k_{3i}^2\,, \quad \frac{T_i''}{T_i} = -\omega_i^2$$

$\longrightarrow$ Lösung ist Produkt ebener Wellen, z.B. $f_i(x) = f_i(0)e^{\pm i k_{1i} x}$

E_1: muss verschwinden für $y = 0$ und $y = L_2$ (Tangentialkomponente)

$$\longrightarrow \qquad g_1(y) \propto \sin\frac{n_1 \pi y}{L_2} \qquad (n_1 = 0, 1, 2, \dots)\text{ , d.h. } k_{21} = \pm\frac{n_1\pi}{L_2}$$

analog für E_2: $\quad f_2(x) \propto \sin\dfrac{m_1\pi x}{L_1}$ $\qquad$ (Vorzeichen egal)

E_3: tangential für $x = 0$, L_1 und $y = 0$, L_2 $\quad\longrightarrow\quad E_3 \propto \sin\dfrac{m_2\pi x}{L_1}\,\sin\dfrac{n_2\pi y}{L_2}$

$$\begin{aligned}
E_1 &= C_1\, f_1(x)\,\sin\frac{n_1\pi y}{L_2}\, e^{i(k_1 z - \omega_1 t)} \\
E_2 &= C_2\,\sin\frac{m_1\pi x}{L_1}\, g_2(y)\, e^{i(k_2 z - \omega_2 t)} \qquad\qquad (k_{3i} \equiv k_i) \\
E_3 &= C_3\,\sin\frac{m_2\pi x}{L_1}\,\sin\frac{n_2\pi y}{L_2}\, e^{i(k_3 z - \omega_3 t)}
\end{aligned}$$

mit i.a. komplexen Koeffizienten C_i: am Ende immer Realteil zu nehmen

jede Komponente erfüllt Wellengleichung, außerdem muss gelten $\quad \vec{\nabla}\vec{E} = 0 \quad \longrightarrow$

$$\begin{aligned}
0 \;=\; & C_1\, f_1'(x)\,\sin\frac{n_1\pi y}{L_2}\, e^{i(k_1 z - \omega_1 t)} + C_2\,\sin\frac{m_1\pi x}{L_1}\, g_2'(y)\, e^{i(k_2 z - \omega_2 t)} \\
& + i\, k_3\, C_3\,\sin\frac{m_2\pi x}{L_1}\,\sin\frac{n_2\pi y}{L_2}\, e^{i(k_3 z - \omega_3 t)}
\end{aligned}$$

gilt $\forall\, t$ $\quad\longrightarrow\quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 =: \omega$

gilt $\forall\, z$ $\quad\longrightarrow\quad k_1 = k_2 = k_3 =: k_z$

außerdem: $\quad m_1 = m_2 =: m$ und $n_1 = n_2 =: n$ $\quad$ und

$$f_1'(x) \propto \sin\frac{m\pi x}{L_1} \qquad\longrightarrow\qquad f_1(x) \propto \cos\frac{m\pi x}{L_1}$$

$$g_2'(y) \propto \sin\frac{n\pi y}{L_2} \qquad\longrightarrow\qquad g_2(y) \propto \cos\frac{n\pi y}{L_2}$$

<u>Lösung für $\vec{E}$</u> $\quad$ (mit $\omega^2 = c^2\,(\dfrac{m^2\pi^2}{L_1^2} + \dfrac{n^2\pi^2}{L_2^2} + k_z^2)$):

$$\begin{aligned}
E_1 &= C_1\,\cos\frac{m\pi x}{L_1}\,\sin\frac{n\pi y}{L_2}\, e^{i(k_z z - \omega t)} \\
E_2 &= C_2\,\sin\frac{m\pi x}{L_1}\,\cos\frac{n\pi y}{L_2}\, e^{i(k_z z - \omega t)} \\
E_3 &= C_3\,\sin\frac{m\pi x}{L_1}\,\sin\frac{n\pi y}{L_2}\, e^{i(k_z z - \omega t)}
\end{aligned}$$

zusätzlich $\vec{\nabla}\vec{E} = 0$ zu erfüllen $\longrightarrow$

$$-C_1 \frac{m\pi}{L_1} - C_2 \frac{n\pi}{L_2} + i\, k_z\, C_3 = 0$$

$\longrightarrow$ 2 unabhängige Amplituden = 2 unabhängige Polarisationen

Magnetfeld $\vec{B}$ bereits bestimmt wegen

$$\dot{\vec{B}} = -c\vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\,\omega\,\vec{B}$$

erfüllt automatisch $\vec{\nabla}\vec{B} = 0$, $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$ und Randbedingung

z.B.:

$$B_3 = -i\frac{c}{\omega}\left(\frac{C_2 m\pi}{L_1} - \frac{C_1 n\pi}{L_2}\right)\cos\frac{m\pi x}{L_1}\,\cos\frac{n\pi y}{L_2}\,e^{i(k_z z - \omega t)}$$

für $m = n = 0$ $\longrightarrow$ $\vec{E} = \vec{B} = 0$ triviale Lösung $\longrightarrow$

untere Schranke für mögliche Frequenzen (Filter!)

$$\omega \geq c\,\pi \min\left(\frac{1}{L_1}, \frac{1}{L_2}\right)$$

ohne Beweis: wenn $E_3 = B_3 = 0$ $\longrightarrow$ $\vec{E} = \vec{B} = 0$

daher: allgemeine Lösung ist Überlagerung von

transversale elektrische Wellen	TE	$E_3 = 0,\ B_3 \neq 0$
transversale magnetische Wellen	TM	$E_3 \neq 0,\ B_3 = 0$

Übungen: TE- und TM-Wellen minimaler Frequenz

Koaxialkabel: konzentrische Kreiszylinder $\longrightarrow$ $\exists$ auch TEM-Wellen mit $E_3 = B_3 = 0$

Hohlraumresonator (endliches Volumen): auch k_z quantisiert
$\longrightarrow$ rein diskretes Frequenzspektrum, stehende Wellen analog schwingender Saite

reale Systeme: $\vec{E}$, $\vec{B}$ dringen in Metall ein $\longrightarrow$ Ohmsche Verluste, gedämpfte Wellen

IV.5 Langsam veränderliche Felder in der Nahzone

Vor.:

- ☛ ρ, $\vec{j} \neq 0$ in Gebiet mit Durchmesser $\sim d$
- ☛ $\vec{E}$, $\vec{B}$ nur in der Nähe von ρ, $\vec{j} \neq 0$ berechnet
  $\longrightarrow$ $|\vec{r} - \vec{r}\,'| \lesssim d$
- ☛ $\vec{E}$, $\vec{B}$ ändern sich langsam:
  durch maximale Frequenz $\nu = 1/T$ charakterisiert

Änderung langsam im Vergleich womit, d.h. $\nu \ll ?$

$$\frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda} \ll \frac{1}{d} \qquad \leftrightarrow \qquad d \ll \lambda$$

Beispiel: UKW-Empfänger mit $d \sim 1$ cm, $\quad \nu \sim 100$ MHz$=10^8$ s^{-1} (Ö3)

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 300 \text{ cm} \quad \gg \quad d$$

retardierte Zeit:

$$\begin{aligned} t_{\text{ret}} &= t - |\vec{r} - \vec{r}\,'|/c = t\left[1 - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{ct}\right] \\ &= t\left[1 + O\left(\frac{d}{cT}\right)\right] \simeq t \qquad \text{für } t \gtrsim T \quad (\text{da } d \ll cT) \end{aligned}$$

daher Retardierung in 1. Näherung ignoriert (instantane Näherung):

$$\Phi_{\text{ret}}(t,\vec{r}) = \int d^3r'\, \frac{\rho(t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c, \vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \quad \simeq \quad \int d^3r'\, \frac{\rho(t,\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\vec{A}_{\text{ret}}(t,\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r'\, \frac{\vec{j}(t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c, \vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \quad \simeq \quad \frac{1}{c}\int d^3r'\, \frac{\vec{j}(t,\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi_{\text{ret}} - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}_{\text{ret}} \quad \simeq \quad \underbrace{\int d^3r'\, \frac{\rho(t,\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}}_{\vec{E}_{\text{inst}}(t,\vec{r})} \underbrace{-\frac{1}{c^2}\int d^3r'\, \frac{\frac{\partial \vec{j}(t,\vec{r}\,')}{\partial t}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{\vec{E}_{\text{ind}}(t,\vec{r})}$$

$$\vec{B}(t,\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}_{\text{ret}} \quad \simeq \quad \frac{1}{c}\int d^3r'\, \frac{\vec{j}(t,\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} =: \vec{B}_{\text{inst}}(t,\vec{r})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_{\text{inst}} + \vec{E}_{\text{ind}}\right) \quad &= \quad \underline{\vec{\nabla}\times\vec{E}_{\text{ind}}} \\ = -\frac{1}{c^2}\int d^3r'\, \vec{\nabla}\times \frac{\frac{\partial \vec{j}(t,\vec{r}\,')}{\partial t}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \quad &= \quad \underline{-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}_{\text{inst}}}{\partial t}} \end{aligned}$$

<u>Interpretation:</u>

instantan:	$\rho \longrightarrow \vec{E}_{\text{inst}}\ , \quad \vec{j} \longrightarrow \vec{B}_{\text{inst}}$	
zeitliche Änderung:	$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial \vec{B}_{\text{inst}}}{\partial t} \longrightarrow \vec{E}_{\text{ind}}$	Wechselstrom

$\boxed{\text{Schaltkreise}}$

aufgebaut aus so genannten elementaren Schaltkreisen:
beschränken uns auf einige (idealisierte) Elemente

2 bel. Punkte betrachtet

Strom fließt von 1 $\longrightarrow$ 2

Spannungsabfall: da $\vec{\nabla} \times \vec{E}_{\text{inst}} = 0$

$$\longrightarrow \quad V_{12} = \int_1^2 d\vec{r} \cdot \vec{E}_{\text{inst}} = \Phi_1 - \Phi_2$$

	z.B.: Generator im E-Werk
EMK	$V_{12} = -\mathcal{E}$ unabhängig vom Strom I
Ohmscher Widerstand	$V_{12} = R\,I$ $\vec{E}_{\text{inst}} = \frac{1}{\sigma}\vec{j}$
Kondensator	$q_1(t) = \int_{-\infty}^{t} dt'\, I(t'), \quad q_2(t) = -q_1(t)$ $V_{12} = \frac{q_1}{C}$ mit Kapazität C
Spule (Leiterschleife)	I erzeugt $\vec{B}_{\text{inst}} \propto I$ $\frac{dI}{dt} \longrightarrow \frac{\partial \vec{B}_{\text{inst}}}{\partial t} \longrightarrow \vec{E}_{\text{ind}} \propto \frac{dI}{dt}$

da in <u>idealer</u> Schleife kein Widerstand ($\sigma \to \infty$) $\longrightarrow$
Ladungen bauen entgegengesetztes $\vec{E}_{\text{inst}} \propto \frac{dI}{dt}$ auf, so dass $\vec{E}_{\text{inst}} + \vec{E}_{\text{ind}} \simeq 0$:

$$\text{Selbstinduktion} \qquad V_{12} = L\frac{dI}{dt}$$

Einheit der Induktivität L (Selbstinduktionskoeffizient: hängt nur von Leitergeometrie ab) im SI-System: $[L] = \mathrm{H(enry)} = \mathrm{V\,s/\,A}$

Stromverlauf in beliebiger Schaltung bestimmt durch

$$\boxed{\text{Kirchhoffsche Regeln}}$$

1. $\vec{\nabla} \times \vec{E}_{\text{inst}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \oint d\vec{r} \cdot \vec{E}_{\text{inst}} = 0$:
   in jedem Schaltkreis $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow N \longrightarrow 1$ gilt
   $$V_{12} + V_{23} + \cdots + V_{N1} = 0$$
   <u>Summe der Spannungsabfälle verschwindet</u>
2. Ladungen können sich nur in einem Kondensator ansammeln $\longrightarrow$
   <u>Summe der in einen Verdrahtungspunkt einfließenden Ströme verschwindet</u>

einfachstes (idealisiertes) Beispiel: ungedämpfter Schwingkreis

$$-\mathcal{E} + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} dt'\, I(t') = 0$$

$$I(t) = \frac{dq}{dt} \qquad \longrightarrow \qquad L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = \mathcal{E}$$

Analogie zum ungedämpften harmonischen Oszillator

$$m\frac{d^2\eta}{dt^2} + m\omega_0^2\,\eta = K \qquad \longrightarrow \qquad L \cong m\ , \quad \eta \cong q\ , \quad K \cong \mathcal{E}$$

$\longrightarrow$ Thomson-Formel $\qquad \omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$

homogene Lösung ($\mathcal{E} = 0$): ungedämpfte Schwingung mit Frequenz $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

realistischeres Anwendungsbeispiel

$$-\mathcal{E} + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} dt'\, I_2(t') = 0$$

$$-\mathcal{E} + L\frac{dI}{dt} + R\,I_1 = 0$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$\begin{aligned} -C\frac{d\mathcal{E}}{dt} + L\,C\frac{d^2I}{dt^2} + I_2 &= 0 \\ -\frac{\mathcal{E}}{R} + \frac{L}{R}\frac{dI}{dt} + I_1 &= 0 \end{aligned}$$

Summe beider Gleichungen: (wenn I bekannt $\longrightarrow I_1,\ I_2$ berechenbar)

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = \frac{1}{RLC}\mathcal{E} + \frac{1}{L}\frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

harmonischer Oszillator mit Reibung und äußerer Kraft

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\rho\frac{d\eta}{dt} + \omega_0^2\,\eta = \frac{K}{m}$$

☛ Eigenfrequenz $\quad \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ $\qquad$ Thomson

☛ Reibung $\cong$ Dämpfung $\quad 2\rho = \dfrac{1}{RC}$

Vor.: EMK periodische Wechselspannung $\quad \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0\,\cos\omega t = \mathcal{E}_0\,\mathrm{Re}\,e^{i\omega t}\ , \quad \mathcal{E}_0 > 0$

allg. Lösung: $\qquad I(t) = I_s(t) + I_h(t)$

homogene Lösung $\quad I_h(t) \propto e^{-\rho\, t} \cong e^{-t/(2RC)} \qquad$ Einschwingvorgang

für $t \gg RC$ bleibt nur erzwungene Schwingung übrig:

$$I(t) \simeq I_s(t) = I_0 \cos(\omega t + \delta) = I_0 \mathrm{Re}\, e^{i(\omega t + \delta)} \;, \quad I_0 > 0$$

Einsetzen in Diffgl. (komplexe Notation, am Ende Realteil nehmen)

$$I_0\, e^{i\delta} \left(-\omega^2 + \frac{i\omega}{RC} + \frac{1}{LC} \right) e^{i\omega t} = \mathcal{E}_0 \left(\frac{1}{RLC} + \frac{i\omega}{L} \right) e^{i\omega t}$$

nach Vor.: $\quad \mathcal{E}_0 > 0$, $I_0 > 0 \qquad \longrightarrow$

$$I_0\, e^{i\delta}\, Z = \mathcal{E}_0 \;, \qquad\qquad Z = e^{-i\delta} |Z|$$

<u>Impedanz (Wechselstromwiderstand) Z</u> frequenzabhängig!

$$Z = \frac{\frac{1}{LC} + \frac{i\omega}{RC} - \omega^2}{\frac{1}{RLC} + \frac{i\omega}{L}} = \frac{1 + i\omega \frac{L}{R} - \omega^2 LC}{\frac{1}{R} + i\omega C} = i\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R} + i\omega C}$$

Serie $\qquad Z = Z_1 + Z_2$

parallel $\qquad \dfrac{1}{Z} = \dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2}$

für unsere idealen Elemente:

$$Z = R \qquad\qquad Z = i\omega\, L \qquad\qquad Z = \frac{1}{i\omega\, C}$$

daher in unserem Beispiel: $\quad Z = Z_1 + \dfrac{1}{\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}} = i\omega L + \dfrac{1}{\frac{1}{R} + i\omega C}$

Resonanz: $\quad \omega \to \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad Z \to \dfrac{i\omega_0 \frac{L}{R}}{\frac{1}{R} + i\omega_0 C} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$R \to \infty$: $\quad$ 2. Kreis blockiert $\quad \longrightarrow \quad$ 1. Kreis in Resonanz $\quad \longrightarrow \quad I_0 = \dfrac{\mathcal{E}_0}{|Z|} \to \infty$

$\longrightarrow \quad$ sehr großer Strom für $\omega \to \omega_0$

Impedanz: große Vereinfachung komplizierter Schaltungen durch komplexe Notation

IV.6 Elektromagnetische Strahlung (Fernzone)

Vor.: kleine Quelle, d.h. $\quad d \ll \lambda$

$d \sim r \ll \lambda$: Nahzone $\longrightarrow$ Schaltkreise

$d \ll r,\, \lambda$: Fernzone $\longrightarrow$ Strahlung

welcher Anteil des Feldes ist für $r \gg d$ relevant?

$$\vec{A}_{\rm ret}(t,\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r'\,\frac{\vec{j}(t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c,\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \quad\longrightarrow\quad \vec{A}_{\rm ret}(t,\vec{r}) \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{1}{r}$$

scheint zu implizieren: $\quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}_{\rm ret} \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{1}{r^2}$??

würde bedeuten, dass Poynting-Vektor $\quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B} \underset{r\to\infty}{\sim}$ mind. wie $\frac{1}{r^3}$??

abgestrahlte Leistung $\quad P = \int d\vec{F}\cdot\vec{S} \sim \frac{r^2}{r^3} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$

widerspricht offensichtlich der Erfahrung

$\longrightarrow \qquad$ muss Anteile von $\vec{E}$, $\vec{B} = O\left(\frac{1}{r}\right)$ geben: <u>Strahlungsfelder</u>

kann nur an Retardierung liegen, die bei obiger Überlegung ignoriert wurde

betrachten zunächst Punktteilchen (Liénard-Wiechert)

$$\Phi_{\rm ret}(t,\vec{r}) = \frac{q}{R(t_{\rm ret}) - \vec{R}(t_{\rm ret})\cdot\vec{v}_q(t_{\rm ret})/c}\,, \qquad \vec{A}_{\rm ret}(t,\vec{r}) = \frac{q\,\vec{v}_q(t_{\rm ret})}{c\,R(t_{\rm ret}) - \vec{R}(t_{\rm ret})\cdot\vec{v}_q(t_{\rm ret})}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi_{\rm ret} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_{\rm ret}}{\partial t}\,, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}_{\rm ret}$$

wobei

$$\vec{R}(t) = \vec{r} - \vec{r}_q(t)\,, \quad R(t_{\rm ret}) = |\vec{r} - \vec{r}_q(t_{\rm ret})| = c(t - t_{\rm ret}) \qquad\longrightarrow\qquad t_{\rm ret}(t,\vec{r})$$

Problem für Ableitungen: t, $\vec{r}$ stecken in $t_{\rm ret}$, und zwar in $\vec{R}$ und $\vec{v}_q$
nach eher langwieriger Ableitung (z.B.: Fließbach, Kap. 23)

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = q\left\{\frac{(\vec{n}-\vec{\beta})(1-\beta^2)}{\kappa^3R^2} + \frac{1}{c\kappa^3R}\,\vec{n}\times\left[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right]\right\}\,, \qquad \vec{B}(t,\vec{r}) = \vec{n}\times\vec{E}(t,\vec{r})$$

mit

$$\vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}\,, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}_q}{c}\,, \quad \kappa = 1 - \vec{n}\cdot\vec{\beta}$$

alle Größen $\vec{n}$, $\vec{\beta}$, κ, R sind Funktionen von $t_{\rm ret}$

Folgerungen:

- ☛ für gleichförmig bewegtes Teilchen ($\dot{\vec{\beta}} = 0$)

$$\vec{E} = \frac{q(\vec{n} - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{\kappa^3 R^2} = O\left(\frac{1}{r^2}\right) \qquad \text{keine Strahlung}$$

- ☛ Strahlungsfeld ist prop. Beschleunigung $\dot{\vec{\beta}}$

$$\vec{E}_{\text{Str}}(t, \vec{r}) = \frac{q\,\vec{n} \times \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\right]}{cR(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3}|_{\text{ret}} \;, \qquad \vec{B}_{\text{Str}} = \vec{n} \times \vec{E}_{\text{Str}}$$

$\longrightarrow$ radiale Komponente der Energiestromdichte

$$\begin{aligned}
\vec{S} \cdot \vec{n} &= \frac{c}{4\pi}\,\vec{n} \cdot (\vec{E}_{\text{Str}} \times \vec{B}_{\text{Str}}) = \frac{c}{4\pi}\,(\vec{n} \times \vec{E}_{\text{Str}}) \cdot \vec{B}_{\text{Str}} = \frac{c}{4\pi}\,|\vec{B}_{\text{Str}}|^2 \\
&= \frac{c}{4\pi}\,|\vec{E}_{\text{Str}}|^2 = \frac{q^2}{4\pi c R^2} \frac{|\vec{n} \times \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\right]|^2}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^6}|_{\text{ret}}
\end{aligned}$$

in Raumwinkel $d\Omega$ abgestrahlte Leistung: $dP = d\vec{F} \cdot \vec{S} = \vec{S} \cdot \vec{n}\, R^2 d\Omega$

differenzielle Strahlungsleistung

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{|\vec{n} \times \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\right]|^2}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^6}|_{\text{ret}}$$

nichtrelativistischer Fall: $\beta \ll 1$

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{\text{Str}} &\simeq \frac{q\,\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{v}})}{c^2 R} \\
\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{v}}) &= (\vec{n} \cdot \dot{\vec{v}})\,\vec{n} - \dot{\vec{v}} \\
&= |\dot{\vec{v}}| \cos\theta\,\vec{n} - |\dot{\vec{v}}| \cos\theta\,\vec{n} - \dot{\vec{v}}_\perp \;, \qquad \dot{\vec{v}} = |\dot{\vec{v}}| \cos\theta\,\vec{n} + \dot{\vec{v}}_\perp \;, \quad \vec{n} \cdot \dot{\vec{v}}_\perp = 0 \\
&\longrightarrow \qquad \vec{E}_{\text{Str}} \simeq -\frac{q\,\dot{\vec{v}}_\perp}{c^2 R} \;\perp\; \vec{n}
\end{aligned}$$

nichtrelativistische Strahlungsformel

$$\frac{dP_{\text{nrel}}}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3}\,\dot{\vec{v}}_\perp^{\,2} = \frac{q^2}{4\pi c^3}\,\dot{v}(t_{\text{ret}})^2 \sin^2\theta$$

maximale Abstrahlung	orthogonal auf	Beschleunigung
keine Abstrahlung	in Richtung	Beschleunigung

relativistischer Fall $\longrightarrow$ Kap. VI

allgemeine Ladungs- und Stromverteilung ρ, $\vec{j}$

nur Potenziale und Felder der $O(1/r)$ für $r \to \infty$ sind für Strahlung relevant

Multipolentwicklung: $\quad t - \dfrac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c} = t - \dfrac{r}{c} + \dfrac{\vec{n}\cdot\vec{r}\,'}{c} + O\left(\dfrac{1}{r}\right) \,, \qquad \vec{n} = \vec{r}/r$

$$\Phi_{\rm Str}(t,\vec{r}) = \frac{1}{r}\int d^3r'\,\rho(t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}\,'}{c},\vec{r}\,')\,, \qquad \vec{A}_{\rm Str}(t,\vec{r}) = \frac{1}{cr}\int d^3r'\,\vec{j}(t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}\,'}{c},\vec{r}\,')$$

$$\frac{|\vec{n}\cdot\vec{r}\,'|}{c} \lesssim \frac{d}{c} \ll \frac{\lambda}{c} = T = \frac{1}{\nu} \qquad \text{(große Wellenlängen : } \lambda \gg d)$$

$\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{r}\,'|}{c}$ gibt unterschiedliche Verzögerungen der Quellpunkte $\vec{r}\,'$ am Aufpunkt $\vec{r}$ an

- ☛ für $\lambda \gg d$ „Verzögerungseffekte" klein
- ☛ Entwicklung von ρ, $\vec{j}$ um $t - r/c$ nach $\vec{n}\cdot\vec{r}\,'/c$
- ☛ je größer Frequenz ν, desto mehr Terme müssen in dieser Multipolentwicklung berücksichtigt werden: $\mathrm{E1}, \mathrm{M1}, \mathrm{E2}, \mathrm{M2}, \ldots$

beschränken uns auf den führenden Term:

elektrische Dipol- oder E1-Strahlung

$$\begin{aligned}
\vec{A}_{\rm Str}(t,\vec{r}) &= \frac{1}{cr}\int d^3r'\,\vec{j}(t-\frac{r}{c},\vec{r}\,') + \ldots \\
\Phi_{\rm Str}(t,\vec{r}) &= \frac{1}{r}\int d^3r'\,\rho(t-\frac{r}{c},\vec{r}\,') + \frac{1}{r}\int d^3r'\,\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}\,'}{c}\,\frac{\partial\rho(t-\frac{r}{c},\vec{r}\,')}{\partial t} + \ldots
\end{aligned}$$

1. Term in $\Phi_{\rm Str}$ ist $q/r \qquad \longrightarrow \qquad$ kein Beitrag zur Strahlung

$$\begin{aligned}
\Phi_{\rm E1}(t,\vec{r}) &= \frac{\vec{n}}{cr}\int d^3r'\,\vec{r}\,'\,\frac{\partial\rho(t-\frac{r}{c},\vec{r}\,')}{\partial t} = \frac{\vec{n}\cdot\dot{\vec{d}}(t-\frac{r}{c})}{cr} \\
\int d^3r'\,\vec{r}\,'\,\frac{\partial\rho(t-\frac{r}{c},\vec{r}\,')}{\partial t} &= -\int d^3r'\,\vec{r}\,'\,\vec{\nabla}'\vec{j}(t-\frac{r}{c},\vec{r}\,') \overset{\text{p. Int.}}{=} \int d^3r'\,\vec{j}(t-\frac{r}{c},\vec{r}\,') \quad \longrightarrow \\
\vec{A}_{\rm E1}(t,\vec{r}) &= \frac{1}{cr}\int d^3r'\,\vec{j}(t-\frac{r}{c},\vec{r}\,') = \frac{\dot{\vec{d}}(t-\frac{r}{c})}{cr}
\end{aligned}$$

$$\vec{B}_{\rm E1} = \vec{\nabla}\times\vec{A}_{\rm E1} = \frac{1}{cr}\,\vec{\nabla}\times\dot{\vec{d}}(t-\frac{r}{c}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

mit $\partial_i\,\dot{\vec{d}}(t-\dfrac{r}{c}) = \ddot{\vec{d}}\,(t-\dfrac{r}{c})\left(-\dfrac{1}{c}\right)\partial_i\,r = -\dfrac{x_i}{rc}\,\ddot{\vec{d}}\,(t-\dfrac{r}{c})$

$$\vec{B}_{\rm E1}(t,\vec{r}) = \frac{\ddot{\vec{d}}\,(t-\frac{r}{c})\times\vec{n}}{rc^2}\,, \qquad \vec{E}_{\rm E1} = \vec{B}_{\rm E1}\times\vec{n}$$

differenzielle Strahlungsleistung

$$\frac{dP_{\mathrm{E1}}}{d\Omega} = r^2\,\vec S\cdot\vec n = r^2\frac{c}{4\pi}\,\vec n\cdot(\vec E_{\mathrm{E1}}\times\vec B_{\mathrm{E1}})$$

$$= r^2\frac{c}{4\pi}\,|\vec B_{\mathrm{E1}}|^2 = \frac{|\,\ddot{\vec d}\,(t-\frac{r}{c})|^2\sin^2\theta}{4\pi c^3}$$

<u>gesamte abgestrahlte Leistung</u>

$$P_{\mathrm{E1}} = \int d\Omega\,\frac{dP_{\mathrm{E1}}}{d\Omega} = \frac{|\,\ddot{\vec d}\,(t-\frac{r}{c})|^2}{4\pi c^3}\int d\Omega\,\sin^2\theta = \frac{2|\,\ddot{\vec d}\,(t-\frac{r}{c})|^2}{3c^3}$$

M1-Strahlung: $\quad P_{\mathrm{M1}} = \dfrac{2|\,\ddot{\vec\mu}\,(t-\frac{r}{c})|^2}{3c^3}$

<u>Übungen:</u> nichtrelativistisches Punktteilchen strahlt nur E1-Strahlung ab

Spezialfall

$$\boxed{\text{Hertzscher Dipol}}$$

monochromatisch schwingender Dipol: $\quad \vec d(t) = \vec d_0\,\cos\omega t = \vec d_0\,\mathrm{Re}\left[e^{-i\omega t}\right]$

in komplexer Notation: $\quad \vec d\left(t-\frac{r}{c}\right) = \vec d_0\,e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)} = \vec d_0\,e^{-i(\omega t-kr)}$

$$\vec B_{\mathrm{HD}}(t,\vec r) = -\frac{\omega^2}{rc^2}\vec d\times\vec n = k^2\,\vec n\times\vec d_0\,\frac{e^{-i(\omega t-kr)}}{r}\ , \qquad \vec E_{\mathrm{HD}}(t,\vec r) = \vec B_{\mathrm{HD}}(t,\vec r)\times\vec n$$

$\longrightarrow$ auslaufende Kugelwelle

zeitgemittelte abgestrahlte Leistung:

$$\begin{aligned}\langle\frac{dP_{\mathrm{HD}}}{d\Omega}\rangle &= \frac{c}{4\pi}\,r^2\,\vec n\langle\vec E_{\mathrm{HD}}(t,\vec r)\times\vec B_{\mathrm{HD}}(t,\vec r)\rangle = \frac{cr^2}{8\pi}\,\vec n\,\mathrm{Re}\left[\vec E_{\mathrm{HD}}(\vec r)\times\vec B^*_{\mathrm{HD}}(\vec r)\right]\\ &= \frac{cr^2}{8\pi}\,|\vec B_{\mathrm{HD}}(\vec r)|^2 = \frac{ck^4}{8\pi}|\vec n\times\vec d_0|^2\end{aligned}$$

Polardiagramm

$$|\vec n\times\vec d_0| = d_0\,\sin\theta$$

$$\langle\frac{dP_{\mathrm{HD}}}{d\Omega}\rangle = \frac{\omega^4 d_0^2\,\sin^2\theta}{8\pi c^3}$$

gesamte abgestrahlte Leistung:

$$\langle P_{\mathrm{HD}}\rangle = \frac{\omega^4 d_0^2}{3c^3}$$

IV.7 Streuung

typisches Streuexperiment

gestreute Welle

einfallende Welle Ladungen beschleunigt

Vor.:

i. einfallende monochromatische ebene Welle

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \mathrm{Re}\left[\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right] \ , \quad \vec{B} = \frac{\vec{k}}{k}\times\vec{E}$$

ii. Punktladung sei in einem Oszillatorpotenzial gebunden (Modell für im Atom gebundenes Elektron): Ladung q, Frequenz ω_0, Dämpfung Γ

iii. Bewegung nichtrelativistisch ($v \ll c$) $\quad\longrightarrow\quad$ $\vec{v}\times\vec{B}$ vernachlässigbar

iv. Wellenlänge der einfallenden Welle groß: $\lambda \gg |\vec{r}_q|$

Bewegungsgleichung für Punktladung mit Trajektorie $\vec{r}_q(t)$:

$$m\,\ddot{\vec{r}}_q + m\Gamma\,\dot{\vec{r}}_q + m\omega_0^2\,\vec{r}_q = q\,\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}_q-\omega t)} + O(v/c)$$

Reibungskraft $-m\Gamma\,\dot{\vec{r}}_q$: verursacht durch verschiedene Prozesse, die dem Punktteilchen Energie entziehen (Abstrahlung, Stoßprozesse, ...)

Dipolnäherung: mit $k\,r_q = 2\pi r_q/\lambda \ll 1$

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_q} = 1 + O(r_q/\lambda)$$

allg. Lösung: $\quad \vec{r}_q(t) = \vec{r}_{q,s}(t) + \vec{r}_{q,h}(t) \qquad$ ($\vec{r}_{q,h}$ klingt mit $e^{-\Gamma t/2}$ ab)

Ansatz: $\quad \vec{r}_{q,s}(t) = \vec{r}_0\, e^{-i\omega t}$

$$\longrightarrow \qquad (-\omega^2 - i\Gamma\omega + \omega_0^2)\,\vec{r}_0 = \frac{q}{m}\,\vec{E}_0$$

$\longrightarrow$ zeitabhängiges Dipolmoment

$$\vec{d}(t) = q\,\vec{r}_0\, e^{-i\omega t} = \frac{q^2\vec{E}_0/m}{\omega_0^2-\omega^2-i\Gamma\omega} e^{-i\omega t}$$

Vor.: einfallende Welle linear polarisiert $\longrightarrow$ $\vec{E}_0 = e^{i\delta}\vec{E}_{0,r}$ mit reellem Vektor $\vec{E}_{0,r}$

zeitgemittelte Dipolstrahlung

$$\langle\frac{dP}{d\Omega}\rangle = \frac{\omega^4 q^2\, |\vec{r}_0|^2\, \sin^2\theta}{8\pi c^3} = \frac{c}{8\pi}\,|\vec{E}_0|^2 \left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4 \sin^2\theta}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}$$

strikt elastische Streuung:

keine Frequenzänderung in

der gestreuten Welle

Def.: <u>differenzieller Wirkungsquerschnitt</u>

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel } d\Omega}{\text{einfallende Leistung pro Fläche}} = \frac{\langle\frac{dP}{d\Omega}\rangle}{\langle|\vec{S}|\rangle}$$

mit $\langle|\vec{S}|\rangle = c\langle u_{\text{em}}\rangle = \frac{c}{8\pi}|\vec{E}_0|^2$

diff. Wirkungsquerschnitt für Streuung von linear polarisierter Welle an gebundener Ladung

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4 \sin^2\theta}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}}$$

integrierter Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

$$= \frac{8\pi}{3}\left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}$$

<u>Elektronen:</u> $\frac{e^2}{m_e c^2} = 2.8 \text{ fm} = r_{\text{kl}}$

klassischer Elektronenradius

<u>Rayleigh-Streuung: $\omega \ll \omega_0$</u>

relevant für Streuung von Sonnenlicht an Molekülen in der Atmosphäre

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_{\text{kl}}^2 \frac{\omega^4}{\omega_0^4}$$

$\longrightarrow$ blaues Sonnenlicht stärker gestreut als rotes

$$\frac{\sigma_{\text{blau}}}{\sigma_{\text{rot}}} = \frac{\omega_{\text{blau}}^4}{\omega_{\text{rot}}^4} = \frac{\lambda_{\text{rot}}^4}{\lambda_{\text{blau}}^4} \simeq \left(\frac{700 \text{ nm}}{400 \text{ nm}}\right)^4 \simeq 10$$

☛ Erklärung von Himmelsblau und Abendröte

Resonanzstreuung: $\omega \simeq \omega_0$

starke Energieabhängigkeit $\longrightarrow$ Instrument zur Strukturuntersuchung

$$\sigma(\omega = \omega_0) = \sigma_{\text{Res}} = \frac{8\pi}{3} r_{\text{kl}}^2 \frac{\omega_0^2}{\Gamma^2}$$

wo ist $\sigma(\omega) = \sigma_{\text{Res}}/2\,$?

wenn $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \simeq \omega_0^2 \Gamma^2$ (für $\Gamma \ll \omega_0$)

Lösung (für $\Gamma \ll \omega_0$):

$$\omega = \omega_0 \pm \frac{\Gamma}{2}$$

$\longrightarrow$ Γ = Gesamtbreite bei halbem Maximum

QM, QFT: Energieunschärfe des (Resonanz-)Zustands $\sim \hbar\Gamma = \dfrac{\hbar}{\tau}$

(τ = Lebensdauer des Zustands)

Thomson-Streuung: $\omega \gg \omega_0, \Gamma$

insbesondere für freie Elektronen ($\omega_0 = 0$)

$$\sigma_{\text{T(homson)}} = \frac{8\pi}{3} r_{\text{kl}}^2$$

bisher immer linear polarisiertes Licht betrachtet

für Praxis noch wichtiger: Streuung von unpolarisiertem Licht

unpolarisiertes Licht: statistisches Gemisch aller möglichen Polarisationen

Resultat (ohne Rechnung; θ = Streuwinkel zwischen ein- und auslaufender Welle):

$$\frac{d\sigma_{\text{T,unpol}}}{d\Omega} = \left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 \left(1 - \frac{\sin^2\theta}{2}\right)$$

integrierter Querschnitt:

$$\sigma_{\text{T,unpol}} = \int d\Omega \frac{d\sigma_{\text{T,unpol}}}{d\Omega} = 2\pi \left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \frac{1+\cos^2\theta}{2} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2$$

$\longrightarrow$ selbes Ergebnis wie vorher für σ_{T}, da im integrierten Querschnitt natürlich keine Richtung (der Polarisation) ausgezeichnet

QFT: Compton-Streuung $\gamma\, e^- \to \gamma\, e^-$

Frequenz ($\sim$ Energie) des Photons reduziert ($\leftrightarrow$ Rückstoß des gestreuten Elektrons)

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{1 + \dfrac{2\hbar\omega}{m_e c^2}\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$$

Frequenzverminderung ist ein Quanteneffekt:

$$\omega' \to \omega \quad \text{für} \quad \hbar \to 0$$

Klein-Nishina-Formel für Streuung unpolarisierter Photonen

$$\frac{d\sigma_{\text{unpol}}}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'}\right) - \frac{\sin^2\theta}{2}\right]$$

bisherige Betrachtung für ein einzelnes Streuzentrum:

wie sieht der Wirkungsquerschnitt für N Streuzentren (Atome, Elektronen, ...) aus?

i. inkohärente Streuung

wenn Streuzentren unabhängig voneinander abstrahlen $\longrightarrow$

$$\sigma_N = N\,\sigma$$

Bsp.: Rayleigh-Streuung von sichtbarem Licht in Atmosphäre $\longrightarrow$
Luftmoleküle statistisch verteilt: inkohärente Streuung

ii. kohärente Streuung

konstruktive Interferenz der einzelnen Streuwellen $\longrightarrow$

$$\sigma_N = N^2\,\sigma$$

Bsp.: Wasserdampf in der Atmosphäre; Wassertröpfchen mit Durchmesser $d \sim 2 \div 500$ nm bestehen aus N Molekülen $\longrightarrow$ für sichtbares Licht ($400 \div 700$ nm) schwingen induzierte Dipolmomente in Phase $\longrightarrow$ $\vec{d}_{\text{Tröpfchen}} = N\,\vec{d}_{\text{Molekül}}$ $\longrightarrow$ Wolken weitgehend undurchsichtig, da Licht stark gestreut wird

andererseits: homogenes Wasser hat $d > \lambda$ $\longrightarrow$ Moleküle in verschiedenen Teilen der Wassertropfen nicht mehr in Phase $\longrightarrow$ homogenes Wasser relativ durchsichtig (inkohärente Streuung)

allg.:

kohärente Streuung $\leftrightarrow$ Interferenz (konstruktiv oder destruktiv)

Paradebeispiel: Beugung von Röntgenstrahlen an Kristallen (Laue-Bedingungen)

V Elektrodynamik in kontinuierlichen Medien

Vorgangsweise analog zur Kontinuumsmechanik:

unmöglich (und unnötig), elm. Felder für 10^{23} Ladungen zu berechnen $\longrightarrow$

Mittelung über mikroskopische Bereiche

Mittelungsfunktion $f(\vec{r})$

Vor.: $f(\vec{r})$ rotationssymmetrisch

typische Form $\longrightarrow$

$$\int d^3r\, f(\vec{r}) = 1$$

$$\langle \vec{E}_{\mathrm{mikr}} \rangle = \int d^3r'\, f(\vec{r}\,')\, \vec{E}_{\mathrm{mikr}}(t, \vec{r} + \vec{r}\,') =: \vec{E}(t, \vec{r})$$

gemitteltes Feld wieder mit $\vec{E}$ bezeichnet, obwohl jetzt andere Bedeutung als das ursprüngliche Feld $\vec{E}_{\mathrm{mikr}}$

zur Erinnerung: Molekülgröße etwa 1 Å=0.1 nm, $\lambda_{\mathrm{Licht}} \sim 600$ nm $\longrightarrow$
gemittelte Felder sinnvoll im optischen Bereich, nicht im Röntgenbereich ($\lambda \sim$ Å) und natürlich erst recht nicht für $\gamma-$Strahlung

wichtig: es gibt keine neue Elektrodynamik in Materie!

Maxwell-G. sind die fundamentalen Feldgleichungen auch in kontinuierlichen Medien
makroskopische Maxwell-G. sind phänomenologische Näherungen, die in der Praxis von großem Nutzen sind

V.1 Polarisierung und Magnetisierung

makroskopische MG schauen zunächst wie die fundamentalen MG aus, ausgenommen

$$\rho,\ \vec{j} \qquad \longrightarrow \qquad \text{gemittelte Größen } \langle\rho\rangle,\ \langle\vec{j}\rangle$$

Grund: partielle Ableitungen kommutieren mit Mittelung der Felder

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(t,\vec{r}) &= \int d^3r'\, f(\vec{r}\,')\frac{\partial}{\partial t}\,\vec{E}_{\mathrm{mikr}}(t,\vec{r}+\vec{r}\,') \\
\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{E}(t,\vec{r}) &= \int d^3r'\, f(\vec{r}\,')\frac{\partial}{\partial x_i}\,\vec{E}_{\mathrm{mikr}}(t,\vec{r}+\vec{r}\,')
\end{aligned}$$

wie sind $\langle\rho\rangle$, $\langle\vec{j}\rangle$ zu verstehen?

mittlere Ladungsdichte $\langle\rho\rangle$

Materie besteht aus Atomen, Molekülen (elektrisch neutral) und „freien“ Ladungsträgern (Ionen, Elektronen) $\longrightarrow$

Aufspaltung: $\rho = \rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{geb}}$ mit

$$\int_V d^3r\,\rho_{\text{frei}} = q_V\ , \qquad \int_V d^3r\,\rho_{\text{geb}} = 0$$

$$\rho_{\text{frei}}(t,\vec{r}) = \sum_a q_a \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_a(t))\ , \qquad \rho_{\text{geb}}(t,\vec{r}) = \sum_\alpha \rho_\alpha(t, \vec{r} - \vec{r}_\alpha(t))$$

wobei die atomaren (molekularen) Ladungsdichten ρ_α bei $\vec{r} = \vec{r}_\alpha$ lokalisiert sind ($d \sim$ Å)

Mittelung der gebundenen Ladungsdichte

$$\begin{aligned}
\langle \rho_{\text{geb}}(t,\vec{r})\rangle &= \sum_\alpha \int d^3r' f(\vec{r}\,')\rho_\alpha(t, \vec{r} - \vec{r}_\alpha(t) + \vec{r}\,') = \sum_\alpha \int d^3r'' f(\vec{r}\,'' + \vec{r}_\alpha(t) - \vec{r})\rho_\alpha(t, \vec{r}\,'') \\
&= \sum_\alpha f(\vec{r} - \vec{r}_\alpha(t)) \underbrace{\int d^3r''\,\rho_\alpha(t,\vec{r}\,'')}_{=0\ \text{(neutrale Einheiten)}} - \sum_\alpha \vec{\nabla} f(\vec{r} - \vec{r}_\alpha(t)) \underbrace{\int d^3r''\vec{r}\,''\,\rho_\alpha(t,\vec{r}\,'')}_{\vec{d}_\alpha(t)} + \dots
\end{aligned}$$

dabei wurde die Mittelungsfunktion in der Dipolnäherung um $\vec{r} - \vec{r}_\alpha(t)$ entwickelt:

$$\begin{aligned}
f(\vec{r}\,'' + \vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}) &= f(\vec{r} - \vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}\,'') \\
&= f(\vec{r} - \vec{r}_\alpha(t)) - \vec{r}\,'' \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r} - \vec{r}_\alpha(t)) + O(r''^2)
\end{aligned}$$

daher

$$\begin{aligned}
\langle \rho_{\text{geb}}(t,\vec{r})\rangle &= -\vec{\nabla} \sum_\alpha \vec{d}_\alpha(t)\, f(\vec{r} - \vec{r}_\alpha(t)) \\
&= -\vec{\nabla} \int d^3r' \sum_\alpha \vec{d}_\alpha(t)\, \delta^{(3)}(\vec{r}\,' - \vec{r}_\alpha(t))\, f(\vec{r} - \vec{r}\,') = -\vec{\nabla}\vec{P}(t,\vec{r}) =: \rho_{\text{pol}}(t,\vec{r})
\end{aligned}$$

Def.: <u>Polarisierung</u>

$$\begin{aligned}
\vec{P}(t,\vec{r}) &= \langle \sum_\alpha \vec{d}_\alpha(t)\, \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_\alpha(t))\rangle \\
&= \frac{\text{elektrisches Dipolmoment}}{\text{Volumen}} = \text{Dipoldichte der neutralen Einheiten}
\end{aligned}$$

da es bei Punktladungen nichts zu mitteln gibt $\longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\langle \rho(t,\vec{r})\rangle &= \langle \rho_{\text{frei}}(t,\vec{r})\rangle + \rho_{\text{pol}}(t,\vec{r}) \\
&= \rho_{\text{frei}}(t,\vec{r}) - \vec{\nabla}\vec{P}(t,\vec{r})
\end{aligned}$$

Ladungserhaltung $\longrightarrow$ Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0$

muss separat für die freien Ladungen gelten: $\dot{\rho}_{\text{frei}} + \vec{\nabla}\vec{j}_{\text{frei}} = 0$

analoge Analyse für die Stromdichte

$$\vec{j}(t,\vec{r}) = \vec{j}_{\text{frei}}(t,\vec{r}) + \vec{j}_{\text{geb}}(t,\vec{r})$$

integrierte Polarisierung

$$\int_V d^3r\, \vec{P}(t,\vec{r}) = \sum_{\alpha\in V} \vec{d}_\alpha(t)$$

analoge Definition der magnetischen Dipoldichte $\vec{M}(t,\vec{r})$ (Magnetisierung) der gebundenen (neutralen) Objekte

$$\vec{M}(t,\vec{r})\, d^3r = \sum_{\alpha\in d^3r} \vec{\mu}_\alpha(t)$$

diese Magnetisierung führt auf einen gemittelten Strom (alles in Dipolnäherung!)

$$\vec{j}_{\text{mag}}(t,\vec{r}) = c\,\vec{\nabla}\times\vec{M}(t,\vec{r})$$

kann allerdings noch nicht alles sein: auch Polarisierung trägt zum gemittelten Strom bei

$$\begin{aligned} \langle\rho(t,\vec{r})\rangle &= \rho_{\text{frei}}(t,\vec{r}) + \rho_{\text{pol}}(t,\vec{r}) \\ \langle\vec{j}(t,\vec{r})\rangle &= \vec{j}_{\text{frei}}(t,\vec{r}) + \vec{j}_{\text{mag}}(t,\vec{r}) + \vec{j}_{\text{pol}}(t,\vec{r}) \end{aligned}$$

Kontinuitätsgleichung $\longrightarrow$

$$\dot{\rho}_{\text{pol}} = -\vec{\nabla}\vec{j}_{\text{mag}} - \vec{\nabla}\vec{j}_{\text{pol}} = -\vec{\nabla}\vec{j}_{\text{pol}} = -\vec{\nabla}\dot{\vec{P}}$$

$\longrightarrow$ konsistente (und richtige) Wahl:

$$\vec{j}_{\text{pol}} = \frac{\partial\vec{P}(t,\vec{r})}{\partial t}$$

homogene Maxwell-G. bleiben bei der Mittelung unverändert

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0\,, \qquad \vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

Mittelung betrifft nur die inhomogenen MG:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\langle\rho\rangle = 4\pi\left(\rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{pol}}\right) = 4\pi\rho_{\text{frei}} - 4\pi\vec{\nabla}\vec{P}$$

Def.: D-Feld (elektrisches Hilfsfeld, dielektrische Verschiebung, elektrische Induktion, elektrische Erregung, ...)

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$$

daher

$$\vec{\nabla}\vec{D} = 4\pi\rho_{\text{frei}}$$

letzte Maxwell-G.:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}_{\text{frei}} + \vec{j}_{\text{mag}} + \vec{j}_{\text{pol}}\right) \\ &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\text{frei}} + 4\pi\,\vec{\nabla}\times\vec{M} + \frac{4\pi}{c}\dot{\vec{P}} \\ \longrightarrow \quad \vec{\nabla}\times\left(\vec{B} - 4\pi\vec{M}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E} + 4\pi\vec{P}\right) &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\text{frei}} \end{aligned}$$

Def.: H-Feld (magnetisches Hilfsfeld, magnetische Feldstärke, magnetische Erregung, ...)

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$$

$\boxed{\text{Maxwell-Gleichungen in Materie (Dipolnäherung)}}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{\nabla}\vec{D} = 4\pi\,\rho_{\text{frei}} && \vec{\nabla}\vec{B} = 0 \\ &\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 && \vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j}_{\text{frei}} \end{aligned}}$$

Lorentz-Kraft: nach wie vor durch die (jetzt gemittelten) Felder $\vec{E}$, $\vec{B}$ bestimmt

allerdings mit ρ_{frei}, $\vec{j}_{\text{frei}}$: $\quad \vec{K}_L(t) = \int d^3r \left[\rho_{\text{frei}}(t,\vec{r})\vec{E}(t,\vec{r}) + \frac{1}{c}\vec{j}_{\text{frei}}(t,\vec{r})\times\vec{B}(t,\vec{r})\right]$

<u>Problem:</u> ρ_{frei}, $\vec{j}_{\text{frei}}$ legen i.a. $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$ noch nicht fest
$\vec{P}$, $\vec{M}$ normalerweise nicht vorgegeben, sondern stellen sich erst in Abhängigkeit von $\vec{E}$, $\vec{B}$ ein $\longrightarrow$ weitere phänomenologische Annahmen notwendig

$\boxed{\text{atomistische Erklärung von Polarisierung und Magnetisierung}}$

a. induzierte $\vec{P}$, $\vec{M}$

   Atome, Moleküle besitzen zunächst keine Dipolmomente, durch äußeres Feld werden sie aber induziert (Deformation der Elektronenhülle) $\longrightarrow$ $\vec{P} \parallel \vec{E}$, $\vec{M}$ antiparallel $\vec{B}$ (Lenzsche Regel, Diamagnetismus)

b. Orientierungspolarisierung, -magnetisierung

   Atome, Moleküle besitzen Dipolmomente, die aber zunächst zufallsverteilt sind; werden im äußeren Feld ausgerichtet $\longrightarrow$ $\vec{P} \parallel \vec{E}$, $\vec{M} \parallel \vec{B}$ (Paramagnetismus) wegen Drehmoment der äußeren Felder auf Dipolmomente

c. spontane $\vec{P}$, $\vec{M}$

   benachbarte Dipole wechselwirken miteinander $\longrightarrow$ Dipoldichte $\neq 0$ auch ohne äußere Felder; starke Temperaturabhängigkeit (nur für kleine T; Phasenübergang bei $T = T_c$) und nur in geordneten Medien: Ferroelektrizität, Ferromagnetismus $\longrightarrow$ komplizierter Zusammenhang zwischen $\vec{D}$ und $\vec{E}$, bzw. $\vec{H}$ und $\vec{B}$ (Hysterese) $\longrightarrow$ Physik der kondensierten Materie

<u>Energiebilanz</u>

früher: $\vec{j}\cdot\vec{E}$ durch $\vec{E}$, $\vec{B}$ ausgedrückt
jetzt: da Lorentz-Kraft ungeändert (allerdings für $\vec{j}_{\text{frei}}$)

$$\frac{dE_{\text{Mat}}}{dt} = \int d^3r\,\vec{j}_{\text{frei}}\cdot\vec{E}$$

mit

$$\begin{aligned} \vec{j}_{\text{frei}}\cdot\vec{E} &= -\frac{c}{4\pi}\vec{\nabla}(\vec{E}\times\vec{H}) - \frac{1}{4\pi}\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{4\pi}\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ &= -\vec{\nabla}\,\vec{S} - \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} \end{aligned}$$

mit

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H}\ , \qquad \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\cdot\dot{\vec{D}} + \vec{H}\cdot\dot{\vec{B}}\right)$$

häufiger Fall (s. nächster Abschnitt): $\vec{D} = \text{konst. } \vec{E},\ \vec{H} = \text{konst. } \vec{B} \quad \longrightarrow$

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}\right)$$

Randbedingungen zwischen 2 Medien

analog wie im statischen Fall

(für zeitlich wenig veränderliche Felder):

Oberflächenladungsdichte σ_{frei}

zur Vereinfachung: keine Oberflächenstromdichte

$$\vec{\nabla}\vec{D} = 4\pi\,\rho_{\text{frei}} \qquad \longrightarrow \qquad \left(\vec{D}_{II} - \vec{D}_{I}\right)\cdot\vec{n} = 4\pi\,\sigma_{\text{frei}}$$

Gauß (Normalkomponenten)

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \left(\vec{B}_{II} - \vec{B}_{I}\right)\cdot\vec{n} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j}_{\text{frei}} \qquad \longrightarrow \qquad \vec{n}\times\left(\vec{H}_{II} - \vec{H}_{I}\right) = 0$$

Stokes (Tangentialkomponenten)

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \vec{n}\times\left(\vec{E}_{II} - \vec{E}_{I}\right) = 0$$

diese Randbedingungen werden im letzten Abschnitt gebraucht

V.2 Isotrope Medien

phänomenologische Näherungen zur Lösung der Maxwell-G. in Medien eingeführt
für schwache Felder: $\vec{P}\propto\vec{E}\ ,\quad \vec{M}\propto\vec{B}$ (oder $\vec{H}$)
sicher nicht richtig für Ferroelektrizität, -magnetismus

Beispiel (s. Abschnitt über Streuung):

induziertes Dipolmoment im zeitabhängigen äußeren Feld

$$\vec{d} = \frac{q^2\vec{E}/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} = \alpha\,\vec{E}$$

mit Polarisierbarkeit α (komplex, frequenzabhängig in der Fourierdarstellung)

$$\longrightarrow \qquad \vec{P} = \langle\sum_\beta \vec{d}_\beta\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_\beta)\rangle = \alpha\,\vec{E}\langle\sum_\beta \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_\beta)\rangle = n_0\,\alpha\,\vec{E}$$

wenn alle $\vec{d}_\beta$ gleich: n_0= Dichte der Atome (Moleküle)

Def.: elektrische Suszeptibilität χ_e

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} \vec{D} &= \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \varepsilon\vec{E} \\ \varepsilon &= 1 + 4\pi\chi_e \qquad \text{Permittivität (Dielektrizitätskonstante)} \end{aligned}$$

analog: magnetische Suszeptibilität χ_m

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} \vec{B} &= \vec{H} + 4\pi\vec{M} = \mu\vec{H} \\ \mu &= 1 + 4\pi\chi_m \qquad \text{Permeabilität} \end{aligned}$$

Bem.: $\varepsilon \to 1$, $\mu \to 1$ ergeben MG im Vakuum, aber Achtung: makroskopische MG ableitbar durch Mittelung der fundamentalen MG, aber natürlich nicht umgekehrt

selbst bei angenommenem linearen Zusammenhang verschiedene Möglichkeiten:

ε, μ i.a. zeit- und ortsabhängig

in Kristallen Tensoren statt Skalare

Ferromagnetismus: keine Linearität mehr (Hysterese) $\longrightarrow$ gleich $\vec{B}(\vec{H})$ angeben

für weitere Diskussion: räumliche Homogenität $\longrightarrow$ ε, μ ortsunabhängig

zunächst auch Zeitunabhängigkeit vorausgesetzt $\longrightarrow$ ε, μ tatsächlich Konstante

große Vereinfachung: $\vec{D}(t, \vec{r}) = \varepsilon\, \vec{E}(t, \vec{r})$, $\vec{B}(t, \vec{r}) = \mu\, \vec{H}(t, \vec{r})$

$\longrightarrow$ MG im wesentlichen wie im Vakuum zu lösen

Kondensator mit Medium (Dielektrikum)

$\vec{\nabla}\vec{D} = 4\pi\rho_{\text{frei}}$, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

$\varepsilon =$ konst. $\longrightarrow$ $\vec{\nabla} \times \vec{D} = 0$

$\longrightarrow$ $\vec{D} = 4\pi \dfrac{q}{F}\vec{e}_z = \varepsilon\, \vec{E}$

Potenzial hängt mit Kraft und daher

mit $\vec{E}$ zusammen: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$

Spannung: $V = \Phi(z = 0) - \Phi(z = d) = d\,|\vec{E}| = \dfrac{4\pi\, q\, d}{\varepsilon F} = \dfrac{q}{C}$

$\longrightarrow$ Kapazität wird durch Dielektrikum erhöht (immer $\varepsilon \geq 1$):

$$C = \frac{\varepsilon F}{4\pi d}$$

typische Werte von ε (bei 20° C)

Luft: 1.0006, Glas: $4 \div 10$, Wasser: 80

Spule mit para(ferro-)magnetischem Medium ($\mu > 1$)

$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{frei}}$, $\vec{\nabla}\vec{B} = 0$

$\mu =$ konst. $\longrightarrow$ $\vec{\nabla}\vec{H} = 0$

daher frühere Lösung für $\vec{B}$ jetzt für $\vec{H}$:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{4\pi IN}{cl} \vec{e}_3 && \text{innen} \\ &= 0 && \text{außen} \end{aligned}$$

und daher: $\vec{B} = \mu\vec{H} = \frac{4\pi IN\mu}{cl}\vec{e}_3$ (innen)

$\longrightarrow$ große Verstärkung von $\vec{B}$ (relevant für Lorentzkraft, Induktion, ...) durch Eisenkern

zeitabhängige Felder

beschränken uns auf elektrisches Feld; Polarisierung jetzt nicht mehr instantan $\longrightarrow$ Ansatz (Dimension der Suszeptibilität jetzt $[\chi_e] = \text{s}^{-1}$): zeitliche Faltung

$$\vec{P}(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, \chi_e(t') \, \vec{E}(t - t', \vec{r})$$

Kausalität: $\vec{P}(t, \vec{r})$ kann nur von $\vec{E}(t - t', \vec{r})$ für $t' > 0$ (d.h. aus früheren Zeiten) beeinflusst werden

$$\longrightarrow \quad \chi_e(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < 0$$

Fouriertransformation:

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \, f(t) \, e^{i\omega t} \qquad \text{für} \quad f = \vec{P}, \, \vec{E}, \, \chi_e$$

Theorie der FT (leicht zu verifizieren): Faltung $\longrightarrow$ Produkt, d.h.

$$\tilde{\vec{P}}(\omega, \vec{r}) = \tilde{\chi}_e(\omega) \, \tilde{\vec{E}}(\omega, \vec{r})$$

$\longrightarrow$ fouriertransformierte Suszeptibilität $\tilde{\chi}_e(\omega)$ wieder dimensionslos

$$\tilde{\vec{D}}(\omega, \vec{r}) = \tilde{\varepsilon}(\omega) \, \tilde{\vec{E}}(\omega, \vec{r}) = [1 + 4\pi \, \tilde{\chi}_e(\omega)] \, \tilde{\vec{E}}(\omega, \vec{r})$$

im Oszillatormodell:

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = 1 + \frac{4\pi n_0 q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma}$$

Bem.: $\varepsilon(t)$ immer reell, $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ i.a. komplex (wie im Oszillatormodell)

untersuchen $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ als Funktion der komplexen Variable ω

Pole von $\tilde{\varepsilon}(\omega)$, wenn $\quad \omega^2 + i\omega\Gamma - \omega_0^2 = 0$

Vor.: $\omega_0 > \Gamma/2 \quad \longrightarrow$

$$\omega_{1,2} = -\frac{i\Gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}}$$

beide Pole in der unteren Halbebene

wegen $\Gamma > 0$ (Dämpfung)

Beh.: kein Zufall, sondern folgt ganz allgemein aus der Kausalität

Bew.: da $\chi_e(t) = 0$ für $t < 0$

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = 1 + 4\pi\,\tilde{\chi}_e(\omega) = 1 + 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} dt\,\chi_e(t)\,e^{i\omega t} = 1 + 4\pi \int_0^{\infty} dt\,\chi_e(t)\,e^{i\omega t}$$

zerlegen ω in Real- und Imaginärteil: $\omega = \omega_r + i\omega_i \qquad \longrightarrow$

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = 1 + 4\pi \int_0^{\infty} dt\,\chi_e(t)\,e^{i\omega_r t - \omega_i t}$$

$\longrightarrow$ Integral $\exists$ stets für $\omega_i \geq 0$ wegen $t \geq 0 \qquad \longrightarrow \qquad \tilde{\varepsilon}(\omega)$ ist analytisch in der oberen Halbebene (und hat dort insbesondere keine Pole) qed

Wegintegral in der komplexen $\omega-$Ebene

$$\oint_C d\omega'\,\frac{\tilde{\varepsilon}(\omega') - 1}{\omega' - \omega}$$

Integral über Halbkreis:
verschwindet für $R \to \infty$

Cauchy:

$$\int_{-\infty}^{\omega-\varepsilon} + \int + \int_{\omega+\varepsilon}^{\infty} = P\int_{-\infty}^{\infty} + \int = 0$$

mit Hauptwert(integral) $\qquad P\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{\omega-\varepsilon} + \int_{\omega+\varepsilon}^{\infty}\right)$

andererseits folgt aus dem Residuensatz

$$P\int_{-\infty}^{\infty} + \int = 2\pi i\,[\tilde{\varepsilon}(\omega) - 1]$$

leicht nachzuprüfen: $\displaystyle\int \frac{dz}{z} + \int \frac{dz}{z} = 0 \qquad$ (hier $z = \omega' - \omega$)

Summe Cauchy und Residuensatz: $\qquad P\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} = i\pi\,[\tilde{\varepsilon}(\omega) - 1]$ und daher explizit

<u>Dispersionsrelation</u>

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = 1 - \frac{i}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\,\frac{\tilde{\varepsilon}(\omega') - 1}{\omega' - \omega}$$

Dispersionsrelation verbindet $\mathrm{Re}\,\tilde{\varepsilon}(\omega)$ (Dispersion) und $\mathrm{Im}\,\tilde{\varepsilon}(\omega)$ (Absorption)

$\chi_e(t)^* = \chi_e(t)$ impliziert

$$\mathrm{Re}\,\tilde{\varepsilon}(-\omega) = \mathrm{Re}\,\tilde{\varepsilon}(\omega)\ , \qquad \mathrm{Im}\,\tilde{\varepsilon}(-\omega) = -\mathrm{Im}\,\tilde{\varepsilon}(\omega)$$

Zerlegung der Dispersionsrelation in Real- und Imaginärteil und Benützung von $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega) = \int_0^{\infty} d\omega\,[f(\omega) + f(-\omega)]$ ergibt die

Kramers-Kronig-Relationen

$$\boxed{\mathrm{Re}\,\tilde{\varepsilon}(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi}P\int_0^{\infty} d\omega' \frac{\omega'\mathrm{Im}\,\tilde{\varepsilon}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2}\ , \qquad \mathrm{Im}\,\tilde{\varepsilon}(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi}P\int_0^{\infty} d\omega' \frac{\mathrm{Re}\,\tilde{\varepsilon}(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2}}$$

diese Relationen folgen einzig und allein aus der Kausalität

Konsequenzen:
i. im statischen Limes ($\omega = 0$) ist $\tilde{\varepsilon}(0)$ immer reell (da $\mathrm{Im}\,\tilde{\varepsilon}(0) = 0$)
ii. $\tilde{\varepsilon}(0)$: Dielektrizitätskonstante im engeren Sinn
$\tilde{\varepsilon}(0) = \mathrm{Re}\,\tilde{\varepsilon}(0) \geq 1$ für $\mathrm{Im}\,\tilde{\varepsilon}(\omega) \geq 0$ (nächster Abschnitt)

Dispersionsrelationen kommen in vielen Bereichen der Physik zur Anwendung,

z.B. auch in der Quantenfeldtheorie:

Kausalität $\longrightarrow$ analytische Struktur von (Streu-)Amplituden $\longrightarrow$ Dispersionsrelationen

V.3 Elektromagnetische Wellen in kontinuierlichen Medien

Vor.:

i. isotropes und homogenes Medium: ε, μ ortsunabhängig

ii. Zeit-, bzw. Frequenzabhängigkeit zugelassen: nicht zu große Frequenzen (Wellenlänge $\lambda \gg$ Mittelungsbereich notwendig)

iii. $\rho_{\mathrm{frei}} = 0$, $\vec{j}_{\mathrm{frei}} = 0$

Ansatz: monochromatische Welle $\qquad$ ($\varepsilon(\omega)$, etc. jetzt ohne Tilde geschrieben)

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \mathrm{Re}\left\{\vec{E}(\vec{r})\,e^{-i\omega t}\right\}\ , \qquad \vec{D}(t,\vec{r}) = \mathrm{Re}\left\{\varepsilon(\omega)\,\vec{E}(\vec{r})\,e^{-i\omega t}\right\}$$

$$\vec{B}(t,\vec{r}) = \mathrm{Re}\left\{\vec{B}(\vec{r})\,e^{-i\omega t}\right\}\ , \qquad \vec{H}(t,\vec{r}) = \mathrm{Re}\left\{\frac{\vec{B}(\vec{r})}{\mu(\omega)}\,e^{-i\omega t}\right\}$$

ω reell vorausgesetzt (sonst exp. Anwachsen oder Abfall in der Zeit)

$\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ i.a. komplex (s. Oszillatormodell)

Maxwell-G. im Medium:

$$\vec{\nabla}\vec{E}(\vec{r}) = 0 \ , \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r}) - \frac{i\omega}{c}\,\vec{B}(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{\nabla}\vec{B}(\vec{r}) = 0 \ , \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r}) + \frac{i\omega\varepsilon\mu}{c}\,\vec{E}(\vec{r}) = 0$$

mit $\quad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{B}) - \Delta\vec{B} = -\Delta\vec{B} \quad$ (analog für $\vec{E}$ wegen $\rho_{\text{frei}} = 0$)

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \frac{i\omega}{c}\,\vec{\nabla}\times\vec{B} = -\Delta\vec{E} - \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}\,\vec{E} = 0$$

$$\longrightarrow \qquad \left(\Delta + \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}\right)\vec{E}(\vec{r}) = 0 \ , \qquad \left(\Delta + \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}\right)\vec{B}(\vec{r}) = 0$$

Lösung durch ebene Wellen:

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \mathrm{Re}\left\{\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right\} \ , \qquad \vec{B}(t,\vec{r}) = \mathrm{Re}\left\{\vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right\}$$

mit

$$\omega^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\,\vec{k}^2 = \frac{c^2}{n^2}\,\vec{k}^2 = c^2\vec{k}_0^2 \ , \qquad \vec{k} = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{k}_0$$

da ω und c reell, $\varepsilon\mu$ i.a. komplex $\quad\longrightarrow\quad$ $\vec{k}$ i.a. komplex $\quad$ (zur Vereinfachung: $\vec{k}_0$ reell)

Def.: <u>Brechungsindex</u> $\quad n = \sqrt{\varepsilon\mu} \quad$ (i.a. komplexe Funktion von ω)

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} = n_r + i\kappa = |n|\,e^{i\delta} \ , \qquad \vec{k} = (n_r + i\kappa)\,\vec{k}_0$$

zusätzliche Konsequenzen der Maxwell-G. (völlig analog zum Vakuumfall)

$$\vec{k}_0\cdot\vec{E}_0 = 0 \ , \qquad \vec{k}_0\times\vec{E}_0 = \frac{\omega}{cn}\,\vec{B}_0$$

$$\vec{k}_0\cdot\vec{B}_0 = 0 \ , \qquad \vec{k}_0\times\vec{B}_0 = -\frac{n\omega}{c}\,\vec{E}_0$$

Folgerungen:

wie im Vakuum $\quad \vec{E}\perp\vec{k}_0$, $\quad \vec{B}\perp\vec{k}_0$, $\quad \vec{E}\perp\vec{B}$, $\quad$ aber $\quad |\vec{E}| \neq |\vec{B}|$ (wenn $|n| \neq 1$)

Polarisation ebenfalls wie im Vakuum: i.a. elliptische Polarisation

betrachten Spezialfall der linearen Polarisation: $\vec{E}_0$ reell

$$\begin{aligned}
\vec{E}(t,\vec{r}) &= \vec{E}_0\,\mathrm{Re}\left\{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right\} = \vec{E}_0\,\cos\left(n_r\vec{k}_0\cdot\vec{r} - \omega t\right)e^{-\kappa\vec{k}_0\cdot\vec{r}} \\
\vec{B}_0 &= n\frac{\vec{k}_0}{k_0}\times\vec{E}_0 = |n|\;e^{i\delta}\frac{\vec{k}_0}{k_0}\times\vec{E}_0 \\
\vec{B}(t,\vec{r}) &= |n|\,\frac{\vec{k}_0}{k_0}\times\vec{E}_0\,\cos\left(n_r\vec{k}_0\cdot\vec{r} - \omega t + \delta\right)e^{-\kappa\vec{k}_0\cdot\vec{r}}
\end{aligned}$$

$\longrightarrow \qquad$ gedämpfte ebene Wellen in Richtung $\vec{k}_0$; $\vec{B}$ zu $\vec{E}$ phasenverschoben

Phasengeschwindigkeit

Maximum der ebenen Welle bewegt sich mit Geschwindigkeit

$$v_P = \frac{\omega}{n_r k_0} = \frac{c}{n_r}$$

in Richtung $\vec{k}_0$: $v_P(\omega)$ ist i.a. frequenzabhängig $\longrightarrow$ Dispersion (s. weiter unten)

Wellenlänge: $n_r k_0 \lambda = 2\pi \longrightarrow \lambda = \frac{2\pi}{n_r k_0} = \frac{\lambda_0}{n_r}$

wenn $\kappa > 0 \longrightarrow$ Dämpfung der Amplituden in Ausbreitungsrichtung $\vec{k}_0$

explizite Form im Oszillatormodell:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi n_0 q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} \,, \qquad \mu(\omega) = 1$$

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} \;\rightarrow\; n^2 = \varepsilon\mu = n_r^2 - \kappa^2 + 2in_r\kappa \,, \qquad \operatorname{Im}\varepsilon = 2n_r\kappa$$

$$\operatorname{Im}\varepsilon = \frac{4\pi n_0 q^2 \omega\Gamma/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} \;>\; 0$$

da $n_r > 0$ in allen realistischen Fällen (n_r: Brechungsindex im engeren Sinn) $\longrightarrow$

tatsächlich Dämpfung in Richtung der Wellenausbreitung: $\kappa = \frac{\operatorname{Im}\varepsilon}{2n_r} > 0$

Folgerung: z.B. exponentielle Abnahme der Energiedichte

$$u_{\mathrm{em}} = \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon\vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu}\right) \;\sim\; e^{-2\kappa k_0 \frac{\vec{k}_0\cdot\vec{r}}{k_0}}$$

Absorptionskoeffizient $= 2\kappa k_0 = \frac{k_0 \operatorname{Im}\varepsilon}{n_r}$

$\longrightarrow$ Intensität der Welle fällt auf einer Absorptionslänge $l_A = \frac{1}{2\kappa k_0}$ auf e-ten Teil ab

Energieverlust: Strahlung, Streuung an Atomen, Erwärmung des Mediums, etc.

weitere Konsequenz der Dämpfung: Phasenverschiebung $\delta = \arctan\frac{\kappa}{n_r}$ und

$$|\vec{B}(t + \frac{\delta}{\omega}, \vec{r})| = |n|\,|\vec{E}(t,\vec{r})| \,, \qquad |n| \neq 1 \;\text{ i.a.}$$

typische Frequenzabhängigkeit von $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$

betrachten wieder Oszillatormodell:

$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma}$

$a = 4\pi n_0 q^2/m > 0 \,,\; \mu = 1 \,,\; n^2 = \varepsilon(\omega)$

$\operatorname{Re}\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{a(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}$

$\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega) = \dfrac{a\omega\Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}$

ähnlicher Verlauf für

Brechungsindex $\quad n_r(\omega) \sim \sqrt{\mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega)}$
(bei kleiner Dämpfung)

und für $\kappa(\omega) = \dfrac{\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega)}{2n_r(\omega)}$

bei kleiner Dämpfung:

$$n^2 = \varepsilon\mu = n_r^2 - \kappa^2 + 2in_r\kappa \qquad \longrightarrow \qquad 2n_r \frac{dn_r}{d\omega} \simeq \frac{d\mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega)}{d\omega}$$

man unterscheidet daher

normale Dispersion	anomale Dispersion
$\dfrac{dn_r}{d\omega} > 0$	$\dfrac{dn_r}{d\omega} < 0$
wenig Absorption	starke Absorption
weit weg von Resonanz	Nähe einer Resonanz

Dispersion

beschränken uns auf normale Dispersion ($\kappa \simeq 0$) $\quad\longrightarrow\quad$ $n\,,\,\vec{k} = n\,\vec{k}_0$ annähernd reell
$\longrightarrow$ ebene Wellen fast wie im Vakuum

allerdings: $\quad \omega(k)$ i.a. nicht mehr linear in k, da

$$\omega^2 = \frac{c^2k^2}{n^2(\omega(k))}$$

Bem.: $\quad n \simeq n_r$ im weiteren nicht unterschieden

physikalisch realisierbar sind Wellenpakete

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \int d^3k\,\vec{E}(\vec{k})\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(k)t)}$$

zur Vereinfachung Beschränkung auf eine Raumdimension (f: Komponente von $\vec{E}$, $\vec{B}$)

$$f(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\,\tilde{f}(k)e^{i(kx - \omega(k)t)}$$

verschiedene Wellenzahlen $\quad\longrightarrow\quad$ verschiedene Phasengeschwindigkeiten $v_P(k) = \omega(k)/k$

betrachten jetzt ein fast monochromatisches Wellenpaket

Spektrum der Welle: $|\tilde{f}(k)|^2$

entwickeln $\omega(k)$ um k_0, wo
Spektrum ausgeprägtes Maximum hat

$$\begin{aligned}
\omega(k) &= \omega(k_0) + \underbrace{\frac{d\omega(k)}{dk}|_{k=k_0}}_{v_G}(k-k_0) + O\left[(k-k_0)^2\right] \\
f(t,x) &\simeq \int dk\, \tilde{f}(k) e^{i(kx - \omega(k_0)t - v_G(k-k_0)t)} \\
&= e^{it(v_G k_0 - \omega(k_0))} \int dk\, \tilde{f}(k)\, e^{ik(x - v_G t)} = e^{it(v_G k_0 - \omega(k_0))} f(0, x - v_G t)
\end{aligned}$$

Folgerung:

$|f(t,x)| = |f(0, x - v_G t)|$

wenn höhere Terme in Entwicklung

von $\omega(k)$ um k_0 vernachlässigbar

$\longrightarrow$ Welle pflanzt sich fort mit

$$\boxed{\text{Gruppengeschwindigkeit} \quad v_G = \frac{d\omega(k)}{dk}|_{k=k_0}}$$

<u>Elektrodynamik</u>

Vakuum: $\varepsilon\mu = 1 \quad \longrightarrow \quad \omega(k) = kc \quad \longrightarrow \quad v_G = \frac{d\omega(k)}{dk} = c = v_P$

Wellenleiter (ähnlich für Plasmawellen): andere Dispersionsrelation

$$\begin{aligned}
\omega(k) = \sqrt{\omega_{\min}^2 + c^2k^2} \quad &\longrightarrow \quad v_P = \frac{\omega(k)}{k} = c\sqrt{1 + \frac{\omega_{\min}^2}{c^2k^2}} \, > \, c \\
&\longrightarrow \quad v_G = \frac{d\omega(k)}{dk} = \frac{c^2k}{\sqrt{\omega_{\min}^2 + c^2k^2}} = c\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_{\min}^2}{c^2k^2}}} \, < \, c
\end{aligned}$$

interessante Frage: gilt immer $v_G \leq c$?

Wellen im Medium:

$$\omega(k) = \frac{kc}{n(\omega)} \quad \longrightarrow \quad v_P = \frac{c}{n}$$

leiten die Gleichung $n(\omega)\omega = ck$ nach k ab

$$\frac{dn}{d\omega}\frac{d\omega}{dk}\omega + n\frac{d\omega}{dk} = c \quad \longrightarrow \quad v_G = \frac{d\omega(k)}{dk} = \frac{c}{n + \omega\frac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{n\left[1 + \frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}\right]}$$

normale Dispersion: $\frac{dn}{d\omega} > 0\,,\; n > 1 \quad \longrightarrow$

$$v_G \, < \, v_P \, < \, c$$

anomale Dispersion: $\operatorname{Im} n$ nicht vernachlässigbar

$\longrightarrow$ v_G keine aussagekräftige Größe

Gruppengeschwindigkeit v_G: bei Spektrum mit scharfem Maximum Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Zentrums des Wellenpakets

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit sind zu unterscheiden von der Front(oder Signal)geschwindigkeit eines im Ortsraum lokalisierten Wellenpakets

Theorie der Fourier-T.:

$$v_F = \lim_{k\to\infty} \omega(k)/k$$

Hochfrequenzlimes:

Mittelung der Kontinuumselektrodynamik
nicht mehr sinnvoll $\longrightarrow$ Hochfrequenzwelle „sieht" körnige (atomare) Struktur
zwischen den Atomen ist aber Vakuum $\longrightarrow$ $v_F = c$ (Plausibilitätsargument, kein Beweis)

tatsächlich erfordern hohe Frequenzen Behandlung mit Quantenfeldtheorie:
relativistische QFT $\longrightarrow$ $v_F = c$ (Kausalität)

eigentliche Bedeutung der

$$\underline{\text{Dispersion} \;=\; \text{Zerfließen von Wellenpaketen}}$$

in der Näherung

$$\omega(k) \simeq \omega(k_0) + v_G(k-k_0) \qquad \longrightarrow \qquad v_G \simeq v_P$$

wenn $v_G \neq v_P$: Wellenpaket zerfließt, weil verschiedene Fourierkomponenten
versch. Phasengeschwindigkeiten haben $\longrightarrow$
offenbar höhere Terme in der Entwicklung von $\omega(k)$ ausschlaggebend

einfaches Modell: Gaußsches Wellenpaket mit quadratischem Term in $\omega(k)$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \frac{b}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{b^2(k-k_0)^2}{2}} \\ \omega(k) &= \omega_0\left(1+\frac{a^2k^2}{2}\right) \qquad \longrightarrow \qquad v_G = \frac{d\omega(k)}{dk}|_{k_0} = a^2\omega_0 k_0 \end{aligned}$$

Konstante a, b: Längen, die Wellenpaket und Dispersion charakterisieren

$$f(t,x) = \int dk\,\tilde{f}(k) e^{i(kx-\omega(k)t)} = \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \int dk\, e^{-\dfrac{b^2(k-k_0)^2}{2}} e^{ikx - i\omega_0 t\left(1+\dfrac{a^2k^2}{2}\right)}$$

Nebenrechnung für Exponenten:

$$\begin{aligned} g(t,x,k) &= -\frac{b^2}{2}(k-k_0)^2 + ikx - i\omega_0 t - i\omega_0 t\frac{a^2k^2}{2} \\ &= -\frac{b^2}{2}\, d(t)^2(k-k_0)^2 + ik(x-v_G t) - i\omega_0 t\left(1-\frac{a^2k_0^2}{2}\right) \\ &= -\frac{b^2}{2}\, d(t)^2(k-k_0)^2 + i(k-k_0)(x-v_G t) + ik_0 x - i\omega(k_0)t \end{aligned}$$

mit

$$d(t)^2 = 1 + \frac{i\omega_0 a^2}{b^2}\, t\,, \qquad v_G = a^2\omega_0 k_0$$

mit neuer Integrationsvariable $k' = k - k_0$ und dem Integral

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-\frac{L^2k^2}{2}}\, e^{ikz} = \frac{1}{L}\, e^{-\frac{z^2}{2L^2}}$$

ergibt sich als explizite Form des Wellenpakets

$$f(t,x) = \frac{e^{ik_0x - i\omega(k_0)t}}{d(t)} e^{-\frac{(x-v_Gt)^2}{2b^2d(t)^2}}$$

<u>$t = 0:$</u>

$$|f(0,x)| = e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

<u>$t > 0:$</u>

$$|f(t,x)| = \frac{e^{-\frac{(x-v_Gt)^2}{2b^2|d(t)|^4}}}{|d(t)|}$$

Interpretation der Zeitabhängigkeit:

Maximum des Wellenpakets bewegt sich mit Gruppengeschwindigkeit v_G

Breite $\sim\; b|d(t)|^2 = b\left(1+\omega_0^2t^2\frac{a^4}{b^4}\right)^{1/2}$ wächst mit t

Breite wächst umso rascher, je kleiner b/a $\longrightarrow$ schmälere Wellenpakete zerfließen rascher (Maximum wird dabei kleiner mit wachsendem t)

<u>Grund:</u> klassische Unschärferelation $\Delta x\,\Delta k \gtrsim 1$

- ☛ kleines b $\leftrightarrow$ breites Spektrum $|\tilde{f}(k)|^2$
- ☛ größerer Bereich von verschiedenen Phasengeschwindigkeiten

V.4 Reflexion und Brechung

experimentelle Situation: 2 verschiedene Medien I, II mit Brechungsindizes $n_I = \sqrt{\varepsilon_I}$ $(\mu_I = 1)$, $n_{II} = \sqrt{\varepsilon_{II}}$ $(\mu_{II} = 1)$

Vor.: Medien durch (x,y)-Ebene getrennt, n_I reell, $n_{II} = n_{II,r} + i\kappa_{II}$
einfallende elektromagnetische Welle in I fällt auf Trennfläche

<u>einfallende Welle</u> ($z \leq 0$)

(komplexe Notation)

$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$

$\vec{B} = \vec{k} \times \vec{E}/k_0$, $\vec{k} = n_I \vec{k}_0$, $\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0$

Randbedg.:

an Grenzfläche $\rho_{\text{frei}} = 0$, $\vec{j}_{\text{frei}} = 0$

N.B.: Zeichnung nur für

reelle $\vec{E}_0, \vec{E}_0', \vec{E}_0'', n_{II}$ sinnvoll

Randbedingung an die Felder (s. Abschnitt V.1):

Tangentialkomponenten von $\vec{E}$, $\vec{H} = \vec{B}$ (wegen $\mu = 1$) stetig bei $z = 0$
Normalkomponenten von $\vec{D}$, $\vec{B}$ stetig bei $z = 0$

$\longrightarrow$ muss i.a. auch eine Welle in II geben: <u>gebrochene Welle</u>

$$\vec{E}'(t,\vec{r}) = \vec{E}_0'\, e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r} - \omega' t)}\,, \qquad \vec{B}' = \vec{k}' \times \vec{E}'/k_0' \qquad (z \geq 0)$$

damit sind die Randbedingungen i.a. noch nicht zu erfüllen

$\longrightarrow$ $\exists$ i.a. auch eine <u>reflektierte Welle</u>

$$\vec{E}''(t,\vec{r}) = \vec{E}_0''\, e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{r} - \omega'' t)}\,, \qquad \vec{B}'' = \vec{k}'' \times \vec{E}''/k_0'' \qquad (z \leq 0)$$

dabei gilt natürlich $\dfrac{\vec{k}^2}{n_I^2} = k_0^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$, etc.

beginnen mit Tangentialkomponenten von $\vec{E}$

$$z = 0: \qquad \vec{e}_z \times \left[\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + \vec{E}_0''\, e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{r} - \omega'' t)}\right] = \vec{e}_z \times \vec{E}_0'\, e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r} - \omega' t)}$$

muss für alle Zeiten gelten $\longrightarrow$ $\omega = \omega' = \omega''$

$$\longrightarrow \quad \frac{k^2}{n_I^2} = \frac{k''^2}{n_I^2} = \frac{k'^2}{n_{II}^2} = \frac{\omega^2}{c^2} = k_0^2 \quad \longrightarrow \quad k = k'' \quad (\vec{k},\, \vec{k}'' \text{ reell})$$

legen $\vec{k}$ in die (x,z)-Ebene: $\vec{E} \propto e^{i(k_1 x + k_3 z - \omega t)}$

Randbedg. ($z = 0$) $\forall\, y$ $\longrightarrow$ $k_2' = k_2'' = 0$ $\longrightarrow$

<u>$\vec{k}$, $\vec{k}'$, $\vec{k}''$ liegen in einer Ebene</u>

$\forall\, x$ ($z = 0$) $\longrightarrow$ $k_1 = k_1' = k_1''$

$$\sin\varphi = \frac{k_1}{k},\ \sin\varphi'' = \frac{k_1''}{k''} = \frac{k_1}{k} \qquad \longrightarrow$$

$$\boxed{\text{Reflexionsgesetz (Einfallswinkel=Ausfallswinkel):}\quad \varphi = \varphi''}$$

Vor.: $\kappa_{II} \ll n_{II,r}$ $\quad\longrightarrow\quad$ schwach gedämpfte Welle in II

$e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}} = e^{i\,\mathrm{Re}\,\vec{k}'\cdot\vec{r}}\,e^{-\mathrm{Im}\,\vec{k}'\cdot\vec{r}}$ $\quad\longrightarrow$

$\mathrm{Re}\,\vec{k}'$ definiert Richtung der gebrochenen Welle $\quad\longrightarrow$

$$\sin\varphi' = \frac{k_1'}{|\mathrm{Re}\,\vec{k}'|} = \frac{k_1}{|\mathrm{Re}\,(\vec{k}_0'\,n_{II})|} = \frac{k_1}{k_0|\mathrm{Re}\,(n_{II,r}+i\kappa_{II})|} = \frac{k_0 n_I \sin\varphi}{k_0 n_{II,r}}$$

$$\boxed{\text{Brechungsgesetz (Snellsches Gesetz):}\quad n_I\sin\varphi = n_{II,r}\sin\varphi'}$$

damit sind Exponentialfaktoren in allen Wellen gleich (für $z=0$)
verbleibende Randbedg. setzen $\vec{E}_0, \vec{E}_0', \vec{E}_0''$ (i.a. komplex) in Beziehung zueinander

Normalkomponenten von $\vec{D}$, $\vec{B}$

i. $$\varepsilon_I(\vec{E}_0+\vec{E}_0'')\cdot\vec{e}_z = \varepsilon_{II}\vec{E}_0'\cdot\vec{e}_z$$

ii. $$\left(\vec{k}\times\vec{E}_0+\vec{k}''\times\vec{E}_0''\right)\cdot\vec{e}_z = \left(\vec{k}'\times\vec{E}_0'\right)\cdot\vec{e}_z$$

Tangentialkomponenten von $\vec{E}$, $\vec{H}=\vec{B}$

iii. $$(\vec{E}_0+\vec{E}_0'')\times\vec{e}_z = \vec{E}_0'\times\vec{e}_z$$

iv. $$\left(\vec{k}\times\vec{E}_0+\vec{k}''\times\vec{E}_0''\right)\times\vec{e}_z = \left(\vec{k}'\times\vec{E}_0'\right)\times\vec{e}_z$$

bel. einfallende Welle ist Überlagerung zweier orthogonal aufeinander linear pol. Wellen; beschränken uns hier auf den Fall, dass $\vec{E}_0$ in der Einfallsebene liegt, d.h. $\vec{E}_0\cdot\vec{e}_y = 0$

Randbedg. $\quad\longrightarrow\quad$ $\vec{E}_0, \vec{E}_0', \vec{E}_0''$ alle in Einfallsebene

N.B.: $E_0 = \sqrt{\vec{E}_0^2}$, $E_0'' = \sqrt{\vec{E}_0''^2}$, $\varepsilon_I = n_I^2$ alle reell; $\quad E_0' = \sqrt{\vec{E}_0'^2}$, $\varepsilon_{II} = n_{II}^2$ i.a. komplex

$$\text{i}\quad\longrightarrow\quad n_I^2\left(E_0+E_0''\right)\sin\varphi = n_{II}^2E_0'\sin\overline{\varphi}'$$

dabei ist die i.a. (für $\kappa_{II}\neq 0$) komplexe Größe $\sin\overline{\varphi}'$ def. durch

$$k_1' = k'\sin\overline{\varphi}' \qquad\qquad (k_1' \text{ reell, } k' \text{ komplex})$$

Relation ii ist identisch erfüllt, da $\vec{k}\times\vec{E}\propto\vec{e}_y$

$$\text{iii}\quad\longrightarrow\quad \left(E_0-E_0''\right)\cos\varphi = E_0'\cos\overline{\varphi}'\ , \qquad\qquad \sin^2\overline{\varphi}'+\cos^2\overline{\varphi}' = 1$$

iv: da $\vec{k}\times\vec{E}\propto\vec{e}_y$ $\quad\longrightarrow\quad$ resultierender Vektor in x-Richtung

da $\vec{k}\cdot\vec{E} = 0$ $\quad\longrightarrow\quad$ Produkt der Beträge $k\,E$ geht ein; mit

$$\frac{k^2}{k_0^2} = \frac{k''^2}{k_0^2} = n_I^2\ , \qquad \frac{k'^2}{k_0^2} = n_{II}^2 \qquad\longrightarrow$$

$$n_I\left(E_0+E_0''\right) = n_{II}E_0'$$

i + iv $\quad\longrightarrow\quad$ allg. Form des Brechungsgesetzes für komplexes n_{II}

$$n_I \sin\varphi = n_{II} \sin\overline{\varphi}'$$

iii + iv: 2 Gleichungen für E_0', E_0'' ($\overline{\varphi}'$ mit Hilfe des Brechungsgesetzes eliminiert)

<u>Fresnelsche Formeln</u> (für $\vec{E}_0$ in Einfallsebene)

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2n_I n_{II} \cos\varphi}{n_{II}^2 \cos\varphi + n_I\sqrt{n_{II}^2 - n_I^2 \sin^2\varphi}} \ , \qquad \frac{E_0''}{E_0} = \frac{n_{II}^2 \cos\varphi - n_I\sqrt{n_{II}^2 - n_I^2 \sin^2\varphi}}{n_{II}^2 \cos\varphi + n_I\sqrt{n_{II}^2 - n_I^2 \sin^2\varphi}}$$

i.a. komplexe Größen; wenn n_{II} komplex: $\quad \sqrt{n_{II}^2 - n_I^2 \sin^2\varphi} = n_{II} \cos\overline{\varphi}'$

zeitgemittelte Energiestromdichte

$$\begin{aligned} <\vec{S}> &= \frac{c}{4\pi} <\vec{E}\times\vec{H}> = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left(\vec{E}_0\times\vec{H}_0^*\right) \overset{\mu=1}{=} \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left(\vec{E}_0\times\vec{B}_0^*\right) \\ &= \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left\{\vec{E}_0\times\left(\frac{n}{k_0}\vec{k}_0\times\vec{E}_0\right)^*\right\} = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left\{n\frac{\vec{k}_0}{k_0}\vec{E}_0\cdot\vec{E}_0^*\right\} = \frac{c}{8\pi}|E_0|^2\frac{\vec{k}_0}{k_0}\,\mathrm{Re}\,n \end{aligned}$$

<u>Reflexionskoeffizient $R_{||}$</u> (für $\vec{E}$ in Einfallsebene)

$$R_{||} = \frac{|<\vec{S}''>|}{|<\vec{S}>|} = \frac{|E_0''|^2}{|E_0|^2} \overset{\varphi=0}{=} \frac{|n_{II}-n_I|^2}{|n_{II}+n_I|^2} = \frac{(n_{II,r}-n_I)^2+\kappa_{II}^2}{(n_{II,r}+n_I)^2+\kappa_{II}^2}$$

<u>Transmissionskoeffizient $T_{||}$</u>

$$T_{||} = \frac{|<\vec{S}'>|}{|<\vec{S}>|} = \frac{|E_0'|^2\mathrm{Re}\,n_{II}}{|E_0|^2 n_I} \overset{\varphi=0}{=} \frac{4n_I\mathrm{Re}\,n_{II}}{|n_{II}+n_I|^2} = \frac{4n_I n_{II,r}}{(n_{II,r}+n_I)^2+\kappa_{II}^2}$$

Energieerhaltung: $\quad R_{||} + T_{||} = 1$

für sichtbares Licht: Medium I = Luft, $n_I \simeq 1$

Wasser: $\quad n_{II,r} \simeq 1.33,\ \kappa_{II} \ll n_{II,r} \quad\longrightarrow\quad R_{||} \simeq 0.02$

$\longrightarrow$ Wasser ist transparent: $\quad T_{||} \simeq 0.98$

Metall: $\quad n_{II} \simeq i\kappa_{II} \quad\longrightarrow\quad T_{||} \simeq 0 \quad\longrightarrow\quad R_{||} \simeq 1$

Metallspiegel!

im weiteren angenommen: $\quad$ <u>n_{II} reell</u>

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2n_I\cos\varphi}{n_{II}\cos\varphi + n_I\cos\varphi'} \ , \qquad \frac{E_0''}{E_0} = \frac{n_{II}\cos\varphi - n_I\cos\varphi'}{n_{II}\cos\varphi + n_I\cos\varphi'}$$

Folgerung: $\ E_0'' = 0$ für $n_{II}\cos\varphi_B = n_I\cos\varphi'$

zusammen mit Brechungsgesetz $\ n_I\sin\varphi_B = n_{II}\sin\varphi'$ kann φ' eliminiert werden $\qquad\longrightarrow$

Ergebnis

$$\tan\varphi_B = \frac{n_{II}}{n_I} \qquad \longrightarrow \qquad \tan\varphi' = \frac{n_I}{n_{II}} = \cot\varphi_B \qquad \longrightarrow \qquad \varphi_B + \varphi' = \frac{\pi}{2}$$

φ_B: Brewsterscher Winkel

bei $\varphi = \varphi_B$: kein reflektierter Strahl

wenn $\vec{E}$ in Einfallsebene

$\longrightarrow$ bei einfallender unpolarisierter

Strahlung ist reflektierte Welle

vollständig polarisiert mit $\vec{E}'' \perp$ Ebene

Herstellung von polarisiertem Licht

(orth. polar. Komp. immer $\neq 0$)

Symmetrierelation für allgemeine Winkel:

$\dfrac{|E_0''|}{|E_0|}$ ungeändert bei $\varphi \leftrightarrow \varphi'$ und $n_I \leftrightarrow n_{II}$ $\longrightarrow$ Reflexionskoeffizient gleich groß für Wellen, die von I nach II unter Winkel φ einfallen wie für Wellen, die von II nach I unter Winkel φ' einfallen, wobei $n_I \sin\varphi = n_{II} \sin\varphi'$

Totalreflexion

Einfall vom optisch dichteren ins optisch dünnere Medium: $n_{II} < n_I$ (beide reell)

$$\sin\varphi = \frac{n_{II}}{n_I}\sin\varphi' \leq \frac{n_{II}}{n_I} < 1 \qquad \longrightarrow \qquad \varphi \leq \varphi_{\mathrm{TR}} = \arcsin\frac{n_{II}}{n_I}$$

$\longrightarrow$ Totalreflexion für $\varphi > \varphi_{\mathrm{TR}}$

Anwendungen: Glasfaser als Lichtleiter, Röntgenlinsen

VI Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

Mechanik: ausgezeichnete Rolle der Inertialsysteme

Relativitätsprinzip: alle Inertialsysteme gleichberechtigt $\longrightarrow$
Forminvarianz der Newtonschen Gleichungen unter Galilei-Transformationen

Elektrodynamik: offenbar nicht invariant unter Galilei-Transformationen,
da Lichtgeschwindigkeit ausgezeichnet

von Maxwell bis 1905: MG gelten in einem bevorzugten Bezugssystem, in dem der Träger
der elektromagnetischen Wellen ruht (Äther)

Michelson und Morley (1887): Lichtgeschwindigkeit in allen Richtungen gleich, obwohl Erde
sicher keine ausgezeichnete Position im Universum
(Bewegung der Erde im Sonnensystem, in der Milchstraße, gegenüber Fixsternen)

Einstein („Zur Elektrodynamik bewegter Körper“ , 1905): wenn c in allen Inertialsystemen
den gleichen Wert hat $\longrightarrow$ Modifikation der Galilei-Transformationen notwendig
kein Äther, aber gravierende Änderung des Zeitbegriffs $\longrightarrow$
Relativität der Gleichzeitigkeit

Galilei-Transformationen $\longrightarrow$ Lorentz-Transformationen

wichtiger Unterschied:

(Maxwellsche) Elektrodynamik ist bereits eine lorentzinvariante Theorie
(Newtonsche) Mechanik muss dagegen modifiziert werden, um Invarianz unter
Lorentz-Transformationen zu erreichen

VI.1 Relativitätsprinzip und Lorentz-Transformationen

IS: $t, \vec{r}$ IS$'$: $t', \vec{r}\,'$

(spezielle) Galilei-Transformation:

$t' = t$ (universelle Zeit)

$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}\,t$

$$\longrightarrow \quad \frac{d\vec{r}\,'}{dt'} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{v}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{d^2\vec{r}\,'}{dt'^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad \longrightarrow \qquad \text{Galilei-Invarianz der Mechanik}$$

angenommen, Elektrodynamik wäre galileiinvariant:

IS: Lichtgeschwindigkeit$=c$ $\longrightarrow$ IS$'$: $c' = c - v$ (in Richtung $\vec{v}$)

Widerspruch zum Experiment $\longrightarrow$ Relation zwischen $(t, \vec{r})$ und $(t', \vec{r}\,')$ muss geändert werden

welche Kriterien sind maßgebend?

verlangen nach wie vor das

Relativitätsprinzip: kein Inertialsystem ist vor einem anderen ausgezeichnet

$\longrightarrow$ sehr starke Einschränkung an mögliche Transformationen

stellen 3 Forderungen an erlaubte Transformationen zwischen Inertialsystemen

A. Eigenschaft der kräftefreien Bewegung

geradlinig, gleichförmig in IS $\Leftrightarrow$ geradlinig, gleichförmig in IS$'$

Folgerung: lineare Transformation zwischen $(t, \vec{r})$ und $(t', \vec{r}\,')$

Eigenschaft unter räumlichen Drehungen:

t, t' Skalare, $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$ Vektoren $\longrightarrow$

allgemeiner Ansatz:

$$\begin{aligned} t' &= a\,t + b\,\vec{v}\cdot\vec{r} \\ \vec{r}\,' &= d\,\vec{r} + e\,\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{r}) + f\,\vec{v}\,t \end{aligned}$$

$a(\vec{v}), \ldots, f(\vec{v})$ drehinvariant $\longrightarrow$ nur von $v = |\vec{v}|$ abhängig

Festlegung: $\vec{r}\,' = 0$ soll $\vec{r} = \vec{v}\,t$ entsprechen

$$\longrightarrow \qquad d + e\,v^2 + f = 0$$

B. Inverse Transformation: IS $\xrightarrow{\vec{v}}$ IS$'$ $\Leftrightarrow$ IS$'$ $\xrightarrow{-\vec{v}}$ IS

sehr starke Einschränkung $\longrightarrow$ nur mehr einzige unbestimmte Funktion $a(v)$

$$\begin{aligned} t' &= a\,t + \frac{1-a^2}{a\,v^2}\vec{v}\cdot\vec{r} \\ \vec{r}\,' &= \vec{r} + \frac{a-1}{v^2}\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{r}) - a\,\vec{v}\,t \end{aligned}$$

C. Gruppeneigenschaft

IS $\xrightarrow{\vec{v}}$ IS$'$ $\xrightarrow{\vec{w}}$ IS$''$ $\Rightarrow$ IS $\xrightarrow{\vec{u}}$ IS$''$ selbe Struktur mit $\vec{u}(\vec{v}, \vec{w})$

Forderung legt $a(v)$ bis auf eine Konstante K fest:

$$a(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{K^2}}} =: \gamma$$

außerdem folgt aus der Gruppeneigenschaft das Geschwindigkeitsadditionstheorem:

$$\text{wenn } \vec{v} \,||\, \vec{w} \qquad \longrightarrow \qquad \vec{u} = \frac{\vec{v} + \vec{w}}{1 + \dfrac{vw}{K^2}}$$

Geschwindigkeitsadditionstheorem für allg. $\vec{v}$, $\vec{w}$ $\longrightarrow$ Übungen

legen $\vec{v}$ in die x-Richtung:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{K^2}\right) & y' &= y \\ x' &= \gamma\,(x - v\,t) & z' &= z \end{aligned}$$

was ist die Bedeutung der Konstanten K (Dimension einer Geschwindigkeit)?

$$\begin{aligned} x'^2 - K^2\,t'^2 &= \gamma^2 \left(x^2 - 2v\,x\,t + v^2\,t^2 - K^2\,t^2 + 2v\,x\,t - \frac{v^2\,x^2}{K^2} \right) \\ &= \gamma^2 \left[x^2 \left(1 - \frac{v^2}{K^2}\right) - K^2\,t^2 \left(1 - \frac{v^2}{K^2}\right) \right] = x^2 - K^2\,t^2 \end{aligned}$$

Folgerung:

$$\boxed{\begin{array}{c} K \text{ ist eine invariante Geschwindigkeit} \\[1ex] x = \pm K\,t \qquad \leftrightarrow \qquad x' = \pm K\,t' \end{array}}$$

<u>i. Galilei, Newton:</u> es gibt keine (endliche) invariante Geschwindigkeit $\longrightarrow$ $K = \infty$

$$\underline{\text{Galilei – Transformation}}\ (\gamma = 1): \qquad \begin{aligned} t' &= t & y' &= y \\ x' &= x - v\,t & z' &= z \end{aligned}$$

<u>ii. Einstein:</u> $K = c = 299792458\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ Lichtgeschwindigkeit

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) & y' &= y \\ x' &= \gamma\,(x - v\,t) & z' &= z \end{aligned}$$

spezielle (eigentliche, orthochrone) <u>Lorentz-Transformation</u> mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\ , \qquad \vec{u} = \frac{\vec{v} + \vec{w}}{1 + \dfrac{vw}{c^2}} \qquad (\text{für } \vec{v} \parallel \vec{w})$$

betrachten massives Teilchen in IS mit Geschwindigkeit $w < c$:
Lorentz-Transformation (in Richtung von $-\vec{w}$): immer $v < c$, damit $\gamma < \infty$

$$\text{in IS}': \qquad w' = \frac{v + w}{1 + \dfrac{vw}{c^2}}$$

für festes w ist w' streng monoton wachsend in v

$$\text{da} \ \lim_{v \to c} \frac{v + w}{1 + \dfrac{vw}{c^2}} = c \qquad \longrightarrow \qquad w' = \frac{v + w}{1 + \dfrac{vw}{c^2}} < c$$

Folgerung: c ist eine Grenzgeschwindigkeit $\longrightarrow$ massive Teilchen haben immer $v < c$
(s. Abschnitt VI.4: Relativistische Mechanik)

andererseits:

$$w = c \qquad \longrightarrow \qquad \frac{v + w}{1 + \dfrac{vw}{c^2}} = c$$

$\longrightarrow$ masselose Teilchen (wie Photonen, s. relativistische Mechanik) haben in allen IS Lichtgeschwindigkeit c ($\leftarrow$ Invarianz von c)

allgemeine Form einer speziellen (eigentlichen, orthochronen) Lorentz-Transformation

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{c^2}\right) , \qquad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \\ \vec{r}\,' &= \vec{r} + \frac{\gamma - 1}{v^2}\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{r}) - \gamma\vec{v}\,t \end{aligned}$$

wichtigste Konsequenz:

da Raum- und Zeitkoordinaten gemischt $\longrightarrow$ keine universelle Zeit mehr $\longrightarrow$ Begriff der Gleichzeitigkeit nicht mehr unabhängig vom IS

$\longrightarrow$ Ursache aller begrifflichen Schwierigkeiten der speziellen Relativitätstheorie (SRT)

Raum und Zeit zur Beschreibung von Ereignissen notwendig

Raum-Zeit-Diagramm

auf 1 Raumdimension beschränkt

t'-Achse: $x' = 0$

$\longrightarrow$ $x = v\,t$, $\tan\alpha = \dfrac{v}{c}$

x'-Achse: $t' = 0$

$t - \dfrac{vx}{c^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad x = \dfrac{c^2}{v}t$

$\tan\beta = \dfrac{ct}{x} = \dfrac{ct}{\frac{c^2\,t}{v}} = \dfrac{v}{c}$

$\longrightarrow$ $\alpha = \beta$

bereits abgeleitet: $x = \pm c\,t \quad \leftrightarrow \quad x' = \pm c\,t'$ Lichtkegel

Lichtkegel für 3 Raumdimensionen: $r^2 = c^2t^2$

Grenzgeschwindigkeit c $\longrightarrow$ Tangente der Weltlinie (Trajektorie in der Raum-Zeit) eines massiven Teilchens immer innerhalb des Lichtkegels

Relativität der Gleichzeitigkeit

Raum-Zeit-Punkte A,B: bei $t = 0$ (gleichzeitig in IS) Lichtblitz nach rechts, bzw. links

IS: A und B gleichzeitig

IS$'$: B war vor A !

unausweichliche Konsequenz der

Invarianz von c

Zeitordnung verschiedene Bedeutung

bei Galilei- und Lorentz-Transformationen

Newton (Galilei)	Einstein (Lorentz)
Zukunft	Zukunft
Vergangenheit	Vergangenheit
Gegenwart: $t' = t = 0$	Ereignisse G, G':
universelle Zeit	potenzielle Gegenwart

Abstand zweier Raum-Zeit-Punkte (Ereignisse) definiert einen Vierervektor $(ct, \vec{r})$

lorentzinvariante Klassifizierung (da $c^2\,t^2 - r^2$ unabhängig vom IS)

$c^2\,t^2 - r^2 > 0$	$t > 0$	zeitartiger Abstand	Zukunft
— " —	$t < 0$	— " —	Vergangenheit
$c^2\,t^2 - r^2 = 0$		lichtartiger Abstand	
$c^2\,t^2 - r^2 < 0$		raumartiger Abstand	potenzielle Gegenwart

potenzielle Gegenwart: $\exists$ IS, so dass Ereignisse gleichzeitig in diesem IS

Grenzgeschwindigkeit c: nur zeitartig oder lichtartig getrennte Ereignisse können kausal miteinander verbunden sein

Konsequenzen der Relativität der Gleichzeitigkeit

A. Zeitdilatation (Motto: Laufen erhält jung!)

Uhren synchronisiert

$t = 0,\ x = 0$

$t' = 0,\ x' = 0$

Uhr in IS: $t = T,\ x = 0$

Uhr in IS′: $x' = 0\ (x = v\,T)$

$$t' = \frac{T - \frac{v}{c^2} v\,T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,T$$

Zeitdilatation: $t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,T < T \quad \longrightarrow$ bewegte Uhren gehen langsamer

Relativitätsprinzip: von IS′ aus betrachtet, geht die in IS ruhende Uhr langsamer!

Veranschaulichung mit <u>spezieller Uhr in IS′</u>:

L.-T. $\perp$ auf Lichtweg

$\longrightarrow$ Abstand d ungeändert

IS′: $\quad t' = \dfrac{2d}{c}$

<u>von IS aus betrachtet:</u>

misst Zeit $t = T$

$$\left(\frac{c\,T}{2}\right)^2 = \left(\frac{v\,T}{2}\right)^2 + d^2$$

$$= \left(\frac{v\,T}{2}\right)^2 + \left(\frac{c\,t'}{2}\right)^2$$

$$\longrightarrow \qquad t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,T$$

unausweichliche Konsequenz der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit

$\boxed{\text{Realität der Zeitdilatation}}$

Myonen: instabile Geschwister der Elektronen, mittlere Lebensdauer im Ruhsystem: $\tau_\mu = 2.2 \cdot 10^{-6}$ s (zerfallen fast ausschließlich in Elektronen und Neutrinos: $\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \overline{\nu_e}$) werden in Atmosphäre durch Höhenstrahlung erzeugt $\longrightarrow$ sollten nach einer Strecke $c\,\tau_\mu = 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}\ 2.2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s} = 660\ \mathrm{m}$ zerfallen sein (genauer: ursprüngliche Zahl auf e-ten Teil abgesunken)

tatsächlich erreichen auch Myonen die Erde, die in 30 km Höhe erzeugt wurden

Grund: wegen Zeitdilatation fliegen Myonen im Mittel eine Strecke $\gamma\,c\,\tau_\mu \gg 660$ m für $v \lesssim c$
da im IS(Erde): $t = \gamma\,t' = \gamma\,\tau_\mu \gg \tau_\mu$

Zeiten t, t' offensichtlich

keine invariante Bedeutung

beliebig bewegte Uhr (kein IS i.a.)

infinitesimaler lorentzinvarianter Abstand:
$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$

im augenblicklichen Ruhsystem IS′ (Geschw. $\vec{v}(t_0)$ relativ zu IS): $dx' = dy' = dz' = 0$

$\longrightarrow \qquad ds^2 = c^2\, dt'^{\,2} \qquad \longrightarrow \qquad dt' = \frac{1}{c} ds$: infinitesimale Eigenzeit $d\tau$

für endliches Wegstück:

$$\begin{aligned} \tau_2 - \tau_1 &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = \frac{1}{c}\int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 / c^2} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}} = \int_{t_1'}^{t_2'} dt' \sqrt{1 - \left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt'}\right)^2 / c^2} \end{aligned}$$

Eigenzeit τ ist unabhängig vom Inertialsystem und für beliebige Weltlinien berechenbar

offenbar gilt (für Zeiten t_1, t_2 in beliebigem IS)

$$|\tau_2 - \tau_1| \leq |t_2 - t_1|$$

Messung des anomalen magnetischen Moments des Myons

Myon-Speicherring (Brookhaven National Laboratories):
Myonen durch Magnetfeld auf Kreisbahn gehalten

$v \simeq 0.99942\, c \;\rightarrow\; \gamma = 29.3$

$v\tau_\mu \simeq c\tau_\mu = 660$ m

naive Erwartung:

Myonen im Mittel nach

$n = \frac{660 \text{ m}}{2R\pi} = 7.5$ Runden zerfallen

tatsächlich zerfallen die Myonen im Mittel erst nach 220 Runden
$\longrightarrow$ sehr genaue Bestätigung des γ-Faktors

$$\tau_\mu = \int_0^T dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2(t)}{c^2}} = T\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \longrightarrow \quad \frac{T}{\tau_\mu} = \gamma = \frac{220}{7.5} = 29.3$$

Bem.: $v = 0.999\, c$ würde $n = 168$ Runden ergeben $\longrightarrow$ sehr präziser Test für SRT

biologisch unbedenkliche Version des Zwillingsparadoxons:
Vergleichsprobe von Myonen in Ruhe sind im Mittel bereits nach τ_μ zerfallen, während die beschleunigten Myonen $\gamma\tau_\mu$ leben, also 29.3 mal länger
N.B.: kein Paradoxon, da kreisende Myonen kein Inertialsystem definieren!

B. Lorentzkontraktion=Längenkontraktion (Motto: Laufen macht schlank!)

Übereinkunft: Längen immer zu gleichen Zeiten in geg. IS gemessen
da Gleichzeitigkeit vom IS abhängt, auch Längenmessung abhängig vom IS

Stab der Länge L soll in IS$'$ ruhen

Messung in IS zur Zeit $t = 0$: $\Delta x = \overline{AB}$

Messung in IS$'$: $\Delta x' = \overline{AB'} = L$

$x' = L: \quad \dfrac{L}{\gamma} = x - v\,t$

$t = 0: \quad x_B = \Delta x = \dfrac{L}{\gamma} = \dfrac{\Delta x'}{\gamma}$

$\longrightarrow \qquad \Delta x = \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}\,\Delta x'$

Folgerung: bewegte Maßstäbe sind „kürzer“ $\longrightarrow$
Konsequenz aus Def. der Längenmessung und Relativität der Gleichzeitigkeit

VI.2 Minkowski-Raum und Lorentz-Gruppe

L.-T. mischen räumliche und zeitliche Komponenten $\longrightarrow$
$(ct, \vec{r})$ zu Vierervektor zusammengefasst, Koordinaten parametrisieren Ereignisse = Punkte in der Raum-Zeit (Minkowski-Raum $\mathbb{M}^4$)

Skalarprodukt in $\mathbb{M}^4$

Ziel: $c^2\,t^2 - \vec{r}^{\,2}$ lorentzinvariante Größe (im Gegensatz zu $c^2\,t^2 + \vec{r}^{\,2}$)

Basis in $\mathbb{M}^4$: e_μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$

Konvention: griechische Indizes für Vierervektoren $(\mu = 0, 1, 2, 3)$, keine Vektorpfeile
lateinische Indizes für Dreiervektoren $(i = 1, 2, 3)$, Vektorpfeile

Def. des Skalarprodukts in $\mathbb{M}^4$:

$$e_\mu \cdot e_\nu = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\eta_{\mu\nu}$: metrischer Tensor (pseudo-euklidische Metrik)

$x \in \mathbb{M}^4$: $\quad x = x^\mu\,e_\mu$ — Summenkonvention!
$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ — kontravariante Komponenten
$x^0 = c\,t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ — des Vierervektors x

$\longrightarrow$ lorentzinvariantes (aber nicht positiv definites) Skalarprodukt

$$\begin{aligned} x \cdot y &= x^\mu\,e_\mu \cdot y^\nu\,e_\nu = x^\mu y^\nu\,e_\mu \cdot e_\nu = x^\mu y^\nu\,\eta_{\mu\nu} \\ &= x^0 y^0 - \sum_{i=1}^{3} x^i y^i = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \\ x^2 &:= x \cdot x = x^{0\,2} - \vec{r}^{\,2} = c^2\,t^2 - \vec{r}^{\,2} \end{aligned}$$

bis jetzt: spezielle L.-T. betrachtet (Boosts)

suchen jetzt allgemeine lineare Transformationen $x \longrightarrow x',\ y \longrightarrow y'$ der Form

$$z'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} z^{\nu} + a^{\mu} \qquad\qquad z = x, y$$

mit reeller 4x4-Matrix L und reellem Vierervektor a, die den lorentzinvarianten Abstand

$$(x-y)^2 = \eta_{\mu\nu}(x-y)^{\mu}(x-y)^{\nu} = (x^0-y^0)^2 - (\vec{x}-\vec{y})^2$$

ungeändert lassen

Komponenten a^{μ}: zeitliche ($\mu = 0$) und räumliche ($\mu = i = 1,2,3$) Translationen

homogener Anteil (zur Vereinfachung $y = 0$ gesetzt):

$$\begin{aligned} x'^{\,2} &= \eta_{\mu\nu} x'^{\,\mu} x'^{\,\nu} = \eta_{\mu\nu} L^{\mu}{}_{\lambda} L^{\nu}{}_{\rho} x^{\lambda} x^{\rho} = x^2 = \eta_{\lambda\rho} x^{\lambda} x^{\rho} \\ &\longrightarrow\ \eta_{\mu\nu} L^{\mu}{}_{\lambda} L^{\nu}{}_{\rho} = \eta_{\lambda\rho} = L^{\top\mu}_{\lambda} \eta_{\mu\nu} L^{\nu}{}_{\rho} \quad \longrightarrow \quad L^{\top} \eta\, L = \eta \end{aligned}$$

mit der transponierten Matrix: $L^{\top\mu}_{\lambda} := L^{\mu}{}_{\lambda}$

Analogie zu orthogonalen Transformationen: $O^{\top}\, \mathbb{1}\, O = \mathbb{1}$

$\longrightarrow$ Lorentz-Transformationen sind pseudo-orthogonale Transformationen

spezielle L.-T. in x-Richtung:

$$\begin{aligned} c\,t' &= \gamma\left(c\,t - \frac{v}{c}x\right) \\ x' &= \gamma\left(x - \frac{v}{c}c\,t\right) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \qquad\qquad L^{\mu}{}_{\lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Def.: $\gamma =: \cosh\psi \qquad \longrightarrow \qquad$ <u>Rapidität ψ</u>

$$\longrightarrow \qquad \sinh^2\psi = \cosh^2\psi - 1 = \gamma^2 - 1 = \frac{1 - 1 + v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} = \frac{v^2}{c^2}\gamma^2$$

im (x^0, x^1) Unterraum

$$L = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{pseudo} - \text{orthogonale Transformation}$$

Menge aller L.-T. bilden die Lorentz-Gruppe:

$$L_i^{\top}\eta\, L_i = \eta \quad (i = 1,2) \quad \longrightarrow \quad (L_1 L_2)^{\top}\eta\, L_1 L_2 = L_2^{\top} L_1^{\top}\eta\, L_1 L_2 = L_2^{\top}\eta\, L_2 = \eta$$

bekannte Untergruppe:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & D & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad D^{\top}(-\mathbb{1})D = -\mathbb{1}\ \rightarrow\ D^{\top} D = \mathbb{1}$$

orthogonale Gruppe $O(3)$

zur Erinnerung: orthogonale Gruppe $O(3)$ zerfällt in 2 Teile

$\det D = 1$	Drehungen	$SO(3)$
$\det D = -1$	Drehspiegelungen	keine Gruppe

Lorentz-Gruppe $O(3,1)$: 4 Zusammenhangskomponenten

$$L^\top \eta\, L = \eta \quad\longrightarrow\quad \det L^\top \underbrace{\det\eta}_{-1} \det L = \underbrace{\det\eta}_{-1}$$

$$(\det L)^2 = 1 \quad\longrightarrow\quad \det L = \pm 1$$

$$\left(L^\top \eta\, L\right)_{00} = \eta_{00} = 1 = \eta_{\mu\nu}\, L^\mu{}_0\, L^\nu{}_0 = \left(L^0{}_0\right)^2 - \sum_{i=1}^{3}\left(L^i{}_0\right)^2 \qquad\longrightarrow\qquad \left(L^0{}_0\right)^2 \geq 1$$

daher: $L^0{}_0$ entweder ≥ 1 oder ≤ -1

	$\det L$	sgn $L^0{}_0$	
$\mathcal{L}_+^\uparrow$	1	1	
$\mathcal{L}_-^\uparrow$	-1	1	P
$\mathcal{L}_+^\downarrow$	1	-1	$P\,T$
$\mathcal{L}_-^\downarrow$	-1	-1	T

$\mathcal{L}_+^\uparrow$: Untergruppe $SO(3,1)$ der eigentlichen orthochronen L.T.

$\mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow$: Untergruppe der orthochronen L.T.

spezielle L.T. (Boost) in x-Richtung:

$$L = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi & & \\ -\sinh\psi & \cosh\psi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \det L = \cosh^2\psi - \sinh^2\psi = 1 \\ \cosh\psi \geq 1 \;\longrightarrow\; \text{sgn } L^0{}_0 = 1 \\ \underline{\text{eigentlich, orthochron}} \end{aligned}$$

Raumspiegelung P(arität)

$x'^0 = x^0,\ x'^i = -x^i \qquad\longrightarrow\qquad \det L = -1,\ \text{sgn } L^0{}_0 = 1$

Zeitumkehr T

$x'^0 = -x^0,\ x'^i = x^i \qquad\longrightarrow\qquad \det L = -1,\ \text{sgn } L^0{}_0 = -1$

N.B.: nur eigentliche orthochrone L.T. sind stetig mit der Einheit verbunden

fundamentale Wechselwirkungen:

Naturgesetze sind nach derzeitigem Stand invariant bezüglich $\mathcal{L}_+^\uparrow$ (plus Translationen) aber nicht bezüglich P und T (verletzt durch schwache Wechselwirkungen) starke und elektromagnetische Wechselwirkungen invariant unter der gesamten Poincaré-Gruppe (semi-direktes Produkt von Lorentz-Gruppe und Translationen) o.B.: jede eigentliche orthochrone L.T. kann als Produkt einer Drehung um den Winkel ϕ um eine Achse $\vec{\phi} = \phi\,\vec{n}$ und einer speziellen L.T. (Boost) mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ dargestellt werden

$$x' = L_{\text{Rot}}(\vec{\phi})\, L_{\text{Boost}}(\vec{v})\, x + a \tag{VI.1}$$

Folgerung:	Lorentz-Gruppe hat	6	Parameter	$(\vec{\phi},\, \vec{v})$
	Poincaré-Gruppe hat	10	Parameter	$(\vec{\phi},\, \vec{v},\, a^\mu)$

Poincaré-Invarianz $\longrightarrow$ 10 Erhaltungsgrößen
(selbe Anzahl wie bei Galilei-Invarianz)

Tensoren und Tensorfelder auf dem Minkowski-Raum

Def.: 4 Größen $V^\mu = (V^0, V^1, V^2, V^3)$ bilden die kontravarianten Komponenten eines Vierervektors $V = V^\mu\, e_\mu$, wenn sie sich unter Poincaré-T. wie die Differenziale dx^μ transformieren

$$dx'^{\,\mu} = L^\mu{}_\nu dx^\nu \quad \longrightarrow \quad V'^{\,\mu} = L^\mu{}_\nu V^\nu \qquad\qquad (L^\top \eta\, L = \eta)$$

$\longrightarrow$ Transformation der Basisvektoren: $e_\nu = e'_\mu\, L^\mu{}_\nu$ (passive Transformation)

$$V = V^\nu\, e_\nu = V^\nu\, e'_\mu\, L^\mu{}_\nu = L^\mu{}_\nu\, V^\nu\, e'_\mu = V'^{\,\mu}\, e'_\mu$$

Tensoren:

n-stufiger Lorentz-Tensor $T = T^{\mu_1 \ldots \mu_n}\, e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_n}$ mit
kontravarianten Komponenten: $T'^{\,\mu_1 \ldots \mu_n} = L^{\mu_1}{}_{\nu_1} \ldots L^{\mu_n}{}_{\nu_n}\, T^{\nu_1 \ldots \nu_n}$

Basisvektoren e^μ des Dualraums von $\mathbb{M}^4$:

$$e^\mu \cdot e_\nu = \delta^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \delta_\nu{}^\mu$$

Beh.: $e_\nu = \eta_{\nu\mu}\, e^\mu$

Bew.: $e_\mu \cdot e_\nu = e_\mu \cdot \eta_{\nu\lambda}\, e^\lambda = \eta_{\nu\lambda}\, e_\mu \cdot e^\lambda = \eta_{\nu\lambda}\, \delta_\mu{}^\lambda = \eta_{\nu\mu} = \eta_{\mu\nu}$

wie im Euklidischen: $\mathbb{M}^4$ kann mit seinem Dualraum identifiziert werden

$$V = V^\mu\, e_\mu = V^\mu \eta_{\mu\nu}\, e^\nu =: V_\nu\, e^\nu$$

Def.: $V_\nu = \eta_{\mu\nu}\, V^\mu = \eta_{\nu\mu}\, V^\mu$ kovariante Komponenten des Vierervektors V

$$\longrightarrow \qquad V_\mu = (V_0, V_1, V_2, V_3) = (V^0, -V^1, -V^2, -V^3)$$

Transformationsverhalten der kovarianten Komponenten (leicht nachzuprüfen): $V'_\mu\, L^\mu{}_\nu = V_\nu$

analog für beliebige Tensoren ("Indexziehen" mit metrischem Tensor):

$$\begin{aligned} T_{\mu_1 \ldots \mu_n} &= \eta_{\mu_1 \nu_1} \ldots \eta_{\mu_n \nu_n}\, T^{\nu_1 \ldots \nu_n} \\ T_{\nu_1 \ldots \nu_n} &= T'_{\mu_1 \ldots \mu_n}\, L^{\mu_1}{}_{\nu_1} \ldots L^{\mu_n}{}_{\nu_n} \end{aligned}$$

metrischer Tensor ist ein <u>invarianter Tensor</u> 2. Stufe mit kovarianten Komp. $\eta_{\mu\nu}$:

$$\eta_{\mu\nu}\, L^{\mu}{}_{\lambda} L^{\nu}{}_{\rho} = \eta_{\lambda\rho} \quad \longrightarrow \quad \eta'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

kontravariante Komponenten:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho}\eta^{\lambda\rho} \quad \longrightarrow \quad \eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

daher Indexziehen auch mit $\eta^{\mu\nu}$: $\quad V^{\mu} = \eta^{\mu\nu}\, V_{\nu}$

auch gemischte Tensorkomponenten möglich, z.B.

$\delta^{\mu}{}_{\nu}$ gemischte Komponenten des metrischen Tensors: $\quad \delta^{\mu}{}_{\nu} = \eta^{\mu\lambda}\eta_{\lambda\nu} = \eta_{\nu\lambda}\eta^{\lambda\mu} = \delta_{\nu}{}^{\mu}$

N.B.: $\hat{\delta}_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,1,1,1)$ sind <u>nicht</u> die (kovarianten) Komponenten eines invarianten Tensors

einfachster Tensor: <u>Skalar</u> = Tensor nullter Stufe (invariant unter L.T.)
wichtiges Beispiel: elektrische Ladung q ist ein Skalar

außerdem: Skalarprodukt zweier Vierervektoren ist ein Skalar

$$V \cdot W = \eta_{\mu\nu}\, V^{\mu}\, W^{\nu} = \eta^{\mu\nu}\, V_{\mu}\, W_{\nu} = V^{\mu}\, W_{\mu} = V_{\mu}\, W^{\mu}$$

weitere wichtige (Lorentz-)Skalare:

– 4-dimensionales Volumselement

$$\begin{aligned} d^4x &= dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c\, dt\, dx\, dy\, dz \\ d^4x' &= |\det \underbrace{\frac{\partial x'^{\,\mu}}{\partial x^{\nu}}}_{L^{\mu}{}_{\nu}}|\, d^4x = d^4x \qquad (\text{wegen} \quad |\det L| = 1) \end{aligned}$$

– invariantes Linienelement $\quad ds^2 = (c\, dt)^2 - (d\vec{r})^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^{\mu} dx^{\nu} = dx^{\mu} dx_{\mu}$

4-dimensionaler ε-Tensor (Levi-Cività-Symbol):

Def.: kovariante Komponenten

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & (\mu\nu\rho\sigma) \text{ gerade Perm. von } (0123) \\ -1 & (\mu\nu\rho\sigma) \text{ ungerade Perm. von } (0123) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ε-Tensor ist ein invarianter Pseudo-Tensor:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, L^{\mu}{}_{\alpha} L^{\nu}{}_{\beta} L^{\rho}{}_{\gamma} L^{\sigma}{}_{\delta} = \det L\ \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

dreht bei uneigentlichen L.T. das Vorzeichen um
(wie 3-dimensionaler ε-Tensor bei Drehspiegelungen)

<u>Relativitätsprinzip:</u> Naturgesetze haben in jedem IS dieselbe Form $\longrightarrow$

Tensorgleichungen $\quad T_1 = T_2 \quad$ (beide Seiten gleiches Verhalten bei IS $\longrightarrow$ IS$'$)

Feldtheorie (im Gegensatz zur Punktmechanik):

<u>Tensorfelder</u> $\quad T(x) \quad$ mit (kontravarianten) Komponenten $T^{\mu_1 \cdots \mu_n}(x)$

Lorentz-Transformation für Tensorfelder:

$$T'^{\mu_1\dots\mu_n}(x') = L^{\mu_1}_{\ \nu_1}\dots L^{\mu_n}_{\ \nu_n}\,T^{\nu_1\dots\nu_n}(x)$$

d.h.: Raum-Zeit-Argumente müssen ebenfalls transformiert werden!

skalares Feld: $\Phi'(x') = \Phi(x)$

Vektorfeld, Tensorfeld (z.B. elm. Feldstärke-Tensor), etc.:

$$V'^{\mu}(x') = L^{\mu}_{\ \nu}\,V^{\nu}(x), \qquad F'^{\mu\nu}(x') = L^{\mu}_{\ \lambda}L^{\nu}_{\ \rho}\,F^{\lambda\rho}(x), \ \dots$$

Feldgleichungen enthalten Ableitungen von Tensorfeldern; einfachstes Beispiel:

4-Gradient eines skalaren Feldes mit Komponenten $\dfrac{\partial\Phi(x)}{\partial x^{\mu}}$

Transformationsverhalten unter L.T.:

$$\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial\Phi'(x')}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial\Phi'(x')}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial\Phi'(x')}{\partial x'^{\mu}}\,L^{\mu}_{\ \nu}$$

$\longrightarrow \quad \Phi_{,\,\mu} := \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^{\mu}}$ sind die kovarianten Komponenten des Gradientenvektorfeldes $\nabla\Phi$

analog für mehrfache Ableitungen, Indexziehen wie bei allen Tensoren

spezieller Differenzialoperator:

$$\eta^{\mu\nu}\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \eta^{\mu\nu}\,\partial_{\mu}\partial_{\nu} = \partial^{\mu}\partial_{\mu} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \Box$$

$\longrightarrow$ d'Alembert-Operator ist ein lorentzinvarianter Differenzialoperator

konkret: ist $T(x)$ ein Tensorfeld n-ter Stufe, dann ist auch
$\Box\,T(x)$ – " –

Kontraktion (analog wie für euklidische Tensoren):

sind $T^{\mu_1\dots\mu_n}$ die (kontravarianten) Komponenten eines Tensors n-ter Stufe, dann sind

$$T^{\mu_1\dots\mu_{i-2}\nu}{}_{\nu}{}^{\mu_{i+1}\dots\mu_n} = \eta_{\mu_{i-1}\mu_i}\,T^{\mu_1\dots\mu_{i-2}\mu_{i-1}\mu_i\mu_{i+1}\dots\mu_n}$$

die (kontravarianten) Komponenten eines Tensors der Stufe n-2

VI.3 Elektrodynamik

Ziel: MG in lorentzkovariante Form bringen (Tensorgleichungen im Minkowski-Raum)
$\longrightarrow$ Elektrodynamik erfüllt Relativitätsprinzip für L.-T.

Ladungs- und Stromdichte als Felder in $\mathbb{M}^4$:

$$\rho(x) = \rho(t,\vec{r})\ , \qquad \vec{j}(x) = \vec{j}(t,\vec{r})$$

betrachten stromführenden Draht in 2 verschiedenen IS (alle Ladungen haben gleiche Geschwindigkeit)

IS IS′

alle Ladungen Geschw. $\vec{v}$ mitbewegtes System (ruhende Ladungen)

Ladungserhaltung: Gesamtladung q unabhängig vom IS (q ist ein Skalar)
da Querschnitt F bei L.T. nicht geändert

$$q = L\,F\,\rho(x) = L'\,F\,\rho'(x')$$

Lorentz-Kontraktion: $L = \gamma^{-1} L'$ (bewegter Draht kürzer) $\longrightarrow$

$$\rho'(x') = \frac{L}{L'}\rho(x) = \gamma^{-1}\rho(x)\ , \qquad \vec{j}(x) = \rho(x)\,\vec{v}$$

Beh.: ρ und $\vec{j}$ transformieren unter L.T. wie t und $\vec{r}$ $\longrightarrow$ $j^\mu(x) = \Big(c\rho(x), \vec{j}(x)\Big)$

kontravariante Komponenten der <u>Viererstrom(dichte) $j(x)$</u> (Vektorfeld)

Bew. (da $\vec{v} \,||\, \vec{j}$):

$$\begin{aligned} \rho'(x') &= \gamma\left(\rho(x) - \frac{\vec{v}}{c^2}\cdot\vec{j}(x)\right) = \gamma\rho(x)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma^{-1}\rho(x) \\ \vec{j}'(x') &= \gamma\left(-\vec{v}\,\rho(x) + \vec{j}(x)\right) = 0 \end{aligned}$$

qed

Kontinuitätsgleichung:

$$\dot{\rho} + \vec{\nabla}\vec{j} = \frac{\partial(c\rho)}{\partial(ct)} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0$$

da $\dfrac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} =: \partial_\mu j^\mu =: j^\mu{}_{,\mu}$ skalares Feld $\longrightarrow$

Kontinuitätsgleichung (Stromerhaltung) lorentzinvariante Aussage: $\partial_\mu j^\mu = 0$

<u>Viererstrom für Punktteilchen</u>

Weltlinie $z^\mu(s)$ mit Weglänge s
(invariante Weglänge $s = c\tau$)
Geschw.: $\vec{v}(s) = c\dfrac{d\vec{z}}{dz^0} = c\dfrac{d\vec{z}}{ds}\dfrac{ds}{dz^0}$
für geg. $x^0, \vec{r}$: $x^0 = z^0(s) \to \overline{s}(x^0)$
$\rho, \vec{j}$ nur dann $\neq 0$, wenn $\vec{r} = \vec{z}(\overline{s}(x^0))$

$$\longrightarrow \qquad \begin{aligned} \rho(x^0,\vec{r}) &= q\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{z}(\overline{s})) \\ \vec{j}(x^0,\vec{r}) &= q\,\vec{v}(\overline{s})\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{z}(\overline{s})) \end{aligned}$$

Ziel: Viererstrom $j(x)$ in manifest kovariante Form bringen

für jede stetige Funktion $f(x^0)$ gilt offenbar

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz^0\,\delta(x^0-z^0)\,f(z^0)=f(x^0)$$

parametrisieren z^0 mit Weglänge s $\qquad\longrightarrow$

$$\int ds\,\frac{dz^0}{ds}\delta(x^0-z^0(s))\,\underbrace{f(z^0(s))}_{g(s)}=\underbrace{f(x^0)}_{g(\overline{s})}$$

und daher für $g(s)=\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{z}(s))$, bzw. $g(s)=\dfrac{d\vec{z}}{ds}\dfrac{ds}{dz^0}\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{z}(s))$:

$$\begin{aligned} cq\int ds\,\frac{dz^0}{ds}\delta(x^0-z^0(s))\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{z}(s)) &= cq\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{z}(\overline{s}))=c\,\rho(x) \\ cq\int ds\,\frac{d\vec{z}}{ds}\delta(x^0-z^0(s))\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{z}(s)) &= q\,\vec{v}(\overline{s})\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{z}(\overline{s}))=\vec{j}(x) \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ endgültige Form

$$j^\mu(x)=(c\,\rho,\vec{j})=c\,q\int ds\,\frac{dz^\mu}{ds}\,\delta^{(4)}(x-z(s))$$

mit 4-dimensionaler $\delta-$Funktion $\delta^{(4)}(x)=\delta(x^0)\,\delta^{(3)}(\vec{r})$

leicht nachzuprüfen: $\delta-$Funktion ist eine lorentzinvariante Distribution

$$\delta^{(4)}(x')=\delta^{(4)}(x) \qquad\qquad \text{für} \quad x'^{\,\mu}=L^\mu{}_\nu x^\nu$$

damit folgt sofort das richtige Transformationsverhalten

$$j'^{\,\mu}(x')=L^\mu{}_\nu j^\nu(x)$$

Def.: <u>Vierergeschwindigkeit $u(s)$</u> eines Punktteilchens mit kontravarianten Komponenten

$$u^\mu(s)=c\frac{dz^\mu}{ds}=c\frac{dz^\mu}{dz^0}\frac{dz^0}{ds}=c\frac{dz^0}{ds}\left(1,\frac{d\vec{z}}{dz^0}\right)$$

mit $ds^2=dz^{0\,2}-(d\vec{z})^2$:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dz^0} &= \sqrt{1-\left(\frac{d\vec{z}}{dz^0}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}=\gamma^{-1} \\ \longrightarrow \quad u^\mu(s) &= \gamma\,(c,\vec{v}(s)) \qquad \longrightarrow \qquad u^\mu u_\mu=\gamma^2(c^2-v^2)=c^2 \end{aligned}$$

$\longrightarrow \qquad u(s)$ ist ein zeitartiger Vierervektor

Vierervektorfeld des Stromes: $\quad j^\mu(x) = q \int ds\, u^\mu(s)\, \delta^{(4)}(x - z(s))$

inhomogene MG:

$$\Box\Phi(x) = 4\pi\,\rho(x)\ , \qquad \Box\vec{A}(x) = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j}(x)$$

da d'Alembert-Operator $\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \partial^\mu\partial_\mu$ lorentzinvarianter Differenzialoperator

$$\longrightarrow \qquad \Box A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c}\, j^\mu(x)$$

inhomogene MG für das Viererpotenzial $A(x)$ mit Komponenten $A^\mu(x) = \Big(\Phi(x), \vec{A}(x)\Big)$ gilt allerdings nur in der Lorenz-Eichung

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{A} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^0} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = \partial_\mu A^\mu = A^\mu{}_{,\mu} = 0$$

$\longrightarrow$ Lorenz-Eichung ebenfalls lorentzinvariante Aussage

Bem.: Lorentzinvarianz hier von Vorteil, aber nicht unbedingt notwendig,
da Potenziale keine unmittelbare physikalische Bedeutung
(auch nichtlorentzinvariante Eichungen möglich)

Eichtransformation:

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= \Phi(x) - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda(x)}{\partial t} = \Phi(x) - \frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x^0} = \Phi(x) - \frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x_0} \\
\vec{A}'(x) &= \vec{A}(x) + \vec{\nabla}\Lambda(x) \ \longrightarrow\ A'^{\,i}(x) = A^i(x) + \frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x^i} = A^i(x) - \frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x_i} \\
\longrightarrow \qquad A'^{\,\mu}(x) &= A^\mu(x) - \frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x_\mu} = A^\mu(x) - \partial^\mu\Lambda(x)
\end{aligned}$$

Def.: elektromagnetischer Feldstärketensor $F(x)$ (2-stufiges Tensorfeld)

$$F^{\mu\nu}(x) := \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A^\nu(x)}{\partial x_\mu} = \partial^\nu A^\mu(x) - \partial^\mu A^\nu(x) = -F^{\nu\mu}(x)$$

Eichtransformation:

$$F'^{\,\mu\nu} = \partial^\nu A'^{\,\mu} - \partial^\mu A'^{\,\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu(\partial^\mu\Lambda) + \partial^\mu(\partial^\nu\Lambda) = F^{\mu\nu}$$

$\longrightarrow \qquad F(x)$ ist ein eichinvariantes Tensorfeld

$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \qquad \longrightarrow \qquad$ 6 unabhängige Komponenten

$$\begin{aligned}
F^{0i} &= \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = \frac{\partial A^0}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_0} = -\frac{\partial A^0}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{c\partial t} \\
&= -\frac{\partial\Phi}{\partial x^i} - \frac{1}{c}\frac{\partial A^i}{\partial t} = E_i \qquad\qquad (\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})
\end{aligned}$$

Achtung: E_i (und B_i) sind **nicht** die (kovarianten) Komponenten eines Vierervektors, sondern Komponenten eines 2-stufigen Tensors!

$$F^{ij} \quad = \quad \partial^j A^i - \partial^i A^j = \frac{\partial A^i}{\partial x_j} - \frac{\partial A^j}{\partial x_i} = -\frac{\partial A^i}{\partial x^j} + \frac{\partial A^j}{\partial x^i} = \varepsilon_{ijk}\, B_k$$

$$\longrightarrow \qquad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

in der Lorenz-Eichung:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \partial_\nu(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = \Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

Folgerung: $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 = \partial_\mu j^\mu$ Stromerhaltung (Kontinuitätsgleichung)

eichinvariante, manifest lorentzkovariante Form der inhomogenen MG:

$$\boxed{\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu}$$

Def.: dualer Feldstärketensor $\tilde{F}$ mit kovarianten Komponenten

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \quad \longrightarrow \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

homogene MG (Übungen): $\displaystyle \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} = \partial^\nu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0$

manifest lorentzkovariante Form der Maxwell-Gleichungen
$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu \,, \qquad \qquad \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$

Bem.:

- ☛ $\tilde{F}$ ist ein Pseudotensor 2. Stufe mit $\tilde{\tilde{F}} = F$ (Involution)
- ☛ Asymmetrie zwischen $F, \tilde{F}$ ($\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$ bis auf Vorzeichen) wegen Abwesenheit magnetischer Monopole: $\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$
- ☛ Lorentz-Kraft nicht in lorentzkovarianter Form $\longrightarrow$ zuerst relativistische Mechanik formulieren

lorentzinvariante Kombinationen von $\vec{E}, \vec{B}$

$F(x)$ 2-stufiges Tensorfeld $\longrightarrow$ $F^\mu_{\ \mu}$ skalares Feld, allerdings $F^\mu_{\ \mu} \equiv 0$
$\longrightarrow$ skalare Kombinationen mindestens quadratisch in $\vec{E}, \vec{B}$

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= 2F^{0i}F_{0i} + F^{ij}F_{ij} = 2\left(\vec{B}^2 - \vec{E}^2\right) && \text{Skalar} \\ \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma} &= 4\varepsilon_{0ijk}F^{0i}F^{jk} = 4\varepsilon_{ijk}F^{0i}F^{jk} = 8\vec{E}\cdot\vec{B} && \text{Pseudoskalar} \end{aligned}$$

Folgerungen:

- rein elektrisches Feld $\vec{E}$ in IS kann nicht zu einem rein magnetischen Feld $\vec{B}'$ in IS$'$ werden
- $\vec{E} \perp \vec{B}$ gilt in allen IS, da $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$ lorentzinvariante Aussage (Strahlungsfeld!)

Lorentz-Transformation der Felder $\vec{E}, \vec{B}$

L.T.: $x'^{\mu} = L^\mu_{\ \nu}x^\nu$
$F(x)$ 2-stufiges Tensorfeld $\longrightarrow$ $F'^{\mu\nu}(x') = L^\mu_{\ \lambda}L^\nu_{\ \rho}F^{\lambda\rho}(x)$
für spezielle L.T. in x-Richtung (Boost: $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$)

$$L^\mu_{\ \nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L = L^\top \ \text{ in diesem Fall}$$

explizite Berechnung von $F'^{\mu\nu}(x') = L^\mu_{\ \lambda}F^{\lambda\rho}(x)L^{\top\,\nu}_{\rho}$:

$$\begin{aligned} E'_x(x') &= E_x(x)\ , \quad E'_y(x') = \gamma\left(E_y(x) - \frac{v}{c}B_z(x)\right)\ , \quad E'_z(x') = \gamma\left(E_z(x) + \frac{v}{c}B_y(x)\right) \\ B'_x(x') &= B_x(x)\ , \quad B'_y(x') = \gamma\left(B_y(x) + \frac{v}{c}E_z(x)\right)\ , \quad B'_z(x') = \gamma\left(B_z(x) - \frac{v}{c}E_y(x)\right) \end{aligned}$$

Notation: $\vec{E} = E_{||}\,\vec{e}_x + \vec{E}_\perp$, analog für $\vec{B}$

$$\begin{aligned} E'_{||}(x') &= E_{||}(x)\ , & B'_{||}(x') &= B_{||}(x) \\ \vec{E}'_\perp(x') &= \gamma\left(\vec{E}_\perp(x) + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}_\perp(x)\right)\ , & \vec{B}'_\perp(x') &= \gamma\left(\vec{B}_\perp(x) - \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{E}_\perp(x)\right) \end{aligned}$$

Feld einer gleichförmig bewegten Ladung

Ladung q soll im Ursprung von IS$'$ ruhen:

$$\vec{E}'(x') = \frac{q\,\vec{r}'}{r'^3}\ , \qquad \vec{B}'(x') = 0$$

Trajektorie des Teilchens:

$$\begin{array}{llll} & \mathrm{IS}': & z'^0(s) = s\ , \quad \vec{z}'(s) = 0 & \\ \longrightarrow & \mathrm{IS}: & z^0(s) = \gamma\, s\ , \quad z^1(s) = \gamma\, v\, s/c\ , \quad z^2 = z^3 = 0 & \\ & & z^0(s) = c\, t \qquad \longrightarrow \qquad t = \gamma\, s/c \quad \longrightarrow \quad z^1 = v\, t & \end{array}$$

Berechnung von $\vec{E}(x), \vec{B}(x)$ aus $\vec{E}'(x'), \vec{B}'(x') = 0 \qquad \longrightarrow$
in früheren Transformationsgleichungen $v \ \longrightarrow\ -v$, mit $d^2 = y^2 + z^2$

$$\begin{aligned} E_x(x) &= E'_x(x') = \frac{q\, x'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{\gamma\, q(x - vt)}{[\gamma^2(x - vt)^2 + d^2]^{3/2}} \\ E_y(x) &= \gamma E'_y(x') = \frac{\gamma\, q\, y}{[\qquad]^{3/2}}\ , \quad E_z(x) = \gamma E'_z(x') = \frac{\gamma\, q\, z}{[\qquad]^{3/2}} \\ B_x(x) &= B'_x(x') = 0\ , \quad B_y(x) = -\gamma \frac{v}{c} E'_z(x') = -\frac{\gamma\, q\, zv/c}{[\qquad]^{3/2}} \\ B_z(x) &= \gamma \frac{v}{c} E'_y(x') = \frac{\gamma\, q\, yv/c}{[\qquad]^{3/2}} \end{aligned}$$

betrachten jetzt Momentaufnahme von $\vec{E}$ zur Zeit $t = 0$, wo Ladung gerade im Ursprung von IS ist ($\vec{z} = 0$)

$$\vec{E}(t = 0, \vec{r}) = \gamma\, q \frac{\vec{r}}{[\gamma^2 x^2 + d^2]^{3/2}} = q\, \gamma^{-2} \frac{\vec{r}}{[x^2 + \gamma^{-2} d^2]^{3/2}} = q \frac{(1 - v^2/c^2)\vec{r}}{(r^2 - v^2 d^2/c^2)^{3/2}}$$

$$\begin{array}{ll} d = 0: & \vec{E} = \dfrac{q\, \vec{r}}{r^3}(1 - \dfrac{v^2}{c^2}) \\ & |\vec{E}| < |\vec{E}|_{v=0} \\ x = 0: & \vec{E} = q \dfrac{(1 - v^2/c^2)\vec{r}}{[d^2(1 - v^2/c^2]^{3/2}} \\ & = \dfrac{q\, \vec{r}}{\sqrt{1 - v^2/c^2} r^3} \\ & |\vec{E}| > |\vec{E}|_{v=0} \end{array}$$

Konsequenz:
Ionisationsdichte eines geladenen
Teilchens in Materie
$v \ll c$: Abnahme mit v, da
weniger Zeit zum Ionisieren
$v \lesssim c$: Feld um Ladung breiter $\longrightarrow$
mehr Atome im Umgebung ionisiert

Bremsstrahlung

sehr schnelles Teilchen nur in dünner Scheibe um augenblicklichen Ort $\vec{E} \neq 0, \vec{B} \neq 0$; wenn Teilchen plötzlich abgebremst oder gestoppt $\longrightarrow$ Feld kann nicht instantan folgen, sondern fliegt in Vorwärtsrichtung gebündelt weiter (s. VI.5: Synchrotronstrahlung)

Dopplereffekt und Aberration

Sternenlicht fällt auf Erde: als ebene Welle mit Wellenvektor $\vec{k}$ genähert

IS: Stern ruht — IS$'$: Ruhsystem Erde (L.T. in x-Richtung)

$\vec{E}, \vec{B}$ aus Viererpotenzial berechnen: $A^\mu(x) = A^\mu(k)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega\, t)}$

Def.: Vierervektor k mit $k^\mu = (\omega/c, \vec{k}) \longrightarrow k \cdot x = \eta_{\mu\nu} k^\mu x^\nu = k^\mu x_\mu = \omega\, t - \vec{k}\cdot\vec{r}$

$$A'^{\,\mu}(x') = L^\mu{}_\nu A^\nu(x) \;=\; L^\mu{}_\nu A^\nu(k)\, e^{-i\, k\cdot x} = A'^{\,\mu}(k')\, e^{-i\, k'\cdot x'}$$

$$k\cdot x = k'\cdot x' \;\leftrightarrow\; k'^{\,\mu} = L^\mu{}_\nu k^\nu$$

nicht überraschend: <u>k ist ein lichtartiger Vektor</u> $\longleftarrow$ $k^2 = \omega^2/c^2 - \vec{k}^{\,2} = 0$

$$k^\mu = \frac{\omega}{c}\,(1, \cos\theta, \sin\theta, 0)\;, \qquad k'^{\,\mu} = \frac{\omega'}{c}\,\big(1, \cos\theta', \sin\theta', 0\big)$$

$$\frac{\omega'}{c}\begin{pmatrix}1\\ \cos\theta'\\ \sin\theta'\\ 0\end{pmatrix} = \frac{\omega}{c}\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma\, v/c & 0 & 0\\ -\gamma\, v/c & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \qquad \omega' = \omega\,\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)\,, \quad \omega'\cos\theta' = \omega\,\gamma\left(-\frac{v}{c} + \cos\theta\right)\,, \quad \omega'\sin\theta' = \omega\,\sin\theta$$

$$\boxed{\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma\left(\cos\theta - \frac{v}{c}\right)}\;, \qquad \omega' = \frac{\omega\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\omega\,\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta'}}$$

Dopplereffekt

$\theta' = 0,\ v > 0$: $\omega' = \dfrac{\omega\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+\dfrac{v}{c}} = \omega\sqrt{\dfrac{1-v/c}{1+v/c}} < \omega$ Rotverschiebung (Stern entfernt sich)

$\theta' = \pi,\ v > 0$: $\omega' = \omega\sqrt{\dfrac{1+v/c}{1-v/c}} > \omega$ Blauverschiebung (Stern nähert sich)

$\theta' = \pi/2$: $\omega' = \omega\sqrt{1-v^2/c^2}$ transversaler Dopplereffekt

charakteristisch für L.T. (Zeitdilatation), erstmals 1938 expt. bestätigt

für kleine Geschwindigkeiten Frequenzänderung $O(v^2/c^2)$

für $\theta' \neq \pi/2$ dominieren für kleine v i.a. Terme der $O(v/c)$

Bem.: systematische Rotverschiebung durch Expansion des Weltalls ($v = H\,d$, Hubble-Konstante H , $H^{-1} \simeq 1.4 \cdot 10^{10}$ Jahre), relativ dazu auch Blauverschiebung möglich (z.B. in Doppelsternen)

außerdem Gravitationsrotverschiebung: Photonen verlieren Energie, wenn sie sich aus Gravitationsfeld des Sterns entfernen (Arbeit notwendig, um Gravitationsanziehung zu überwinden)

Schallwellen: elastisches Medium ausgezeichnetes System $\longrightarrow$ Dopplerverschiebung abhängig davon, ob Quelle oder Empfänger sich bewegt; außerdem natürlich keine Zeitdilatation

Aberration

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma\left(\cos\theta - \dfrac{v}{c}\right)} \quad\longrightarrow\quad \tan\frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}\,\tan\frac{\theta}{2}$$

Folgerung: für $v > 0,\ 0 < \theta < \pi \quad\longrightarrow\quad \theta' > \theta$

Interpretation: zur $O(v/c)$ Regenschirmeffekt (endliche Laufzeit des Lichts im Fernrohr)

Galilei-Transformation: $\vec{c} \to \vec{c} + \vec{v}$

$$\sin\theta = \frac{h}{cT}$$

$$\tan\theta' = \frac{h}{a}\ ,\quad \cos\theta = \frac{a + v\,T}{c\,T}$$

$$\tan\theta' = \frac{c\,T\,\sin\theta}{c\,T\,\cos\theta - v\,T} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta - \dfrac{v}{c}}$$

Bradley 1728

Einfluss von γ für Sternenlicht gering $\longrightarrow$
Effekt der $O(v^2/c^2)$ meist vernachlässigbar

Konsequenz: scheinbare Änderung von Sternpositionen durch Erdbewegung

IS: Ruhsystem der Sonne

IS$'$: mit Erde mitbewegtes System ($v_{\mathrm{Erde}} \simeq 30$ km/s $\longrightarrow$ $v/c \simeq 10^{-4}$)

z.B. für Stern orthogonal auf Umlaufbahn ($\theta = \pi/2$):

$$\tan\theta' = -\frac{c}{v\,\gamma} \qquad \longrightarrow \qquad \theta' - \pi/2 \simeq \frac{v}{c} \simeq 10^{-4}$$

$\longrightarrow$ Stern beschreibt in einem Jahr Kreis mit Öffnungswinkel $10^{-4}\,\dfrac{180}{\pi}\,3600'' \simeq 20''$

VI.4 Relativistische Mechanik

Newton:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{K}$$

offensichtlich nicht lorentzinvariant, da galileiinvariant (für entsprechendes $\vec{K}$)

Hauptgrund: $\dfrac{dx}{dt}$ kein Vierervektor

naheliegende Modifikation: $t \longrightarrow$ Eigenzeit τ $\qquad \left(d\tau = \dfrac{ds}{c} = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}\right)$

Vierergeschwindigkeit des Teilchens (zeitartiger Vektor)

$$\frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} = c\frac{dx^\mu(s)}{ds} = u^\mu(s)\ , \qquad\qquad u^\mu = \gamma\,(c, \vec{v})$$

zur Erinnerung: $\quad u^\mu u_\mu = c^2\dfrac{dx^\mu}{ds}\dfrac{dx_\mu}{ds} = c^2$

$\longrightarrow$ <u>Viererimpuls</u> (relativistische Verallgemeinerung des Newtonschen Impulses)

$$p = m\,u$$

$$p^\mu = m\,\gamma\,(c, \vec{v}) = m\left(\frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \qquad\qquad \beta^2 := v^2/c^2$$

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \ \underset{v \ll c}{\longrightarrow}\ \vec{p}_{\text{Newton}} = m\,\vec{v}\ , \qquad\qquad \text{Bedeutung von } p^0\,?$$

<u>Wirkung des freien Teilchens in der relativistischen Mechanik</u>

freies Teilchen: Gerade

Extremum der Wirkung sollte

als Lösung Gerade ergeben

Forderung: Wirkung S soll

lorentzinvariant sein

$$S = -a\int_1^2 ds = -a\,c\int_1^2 d\tau \qquad\qquad a > 0 \quad \text{Konstante}$$

Wirkung S minimal, da $\int_1^2 ds$ maximal für Gerade (Geodäte in $\mathbb{M}^4$)
daher in beliebigem IS:

$$S = -a\,c \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2(t)}{c^2}} \qquad \longrightarrow \qquad L = -a\,c \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2(t)}{c^2}}$$

N.B.: Lagrangefunktion L keine lorentzinvariante Größe!
nichtrelativistischer Limes:

$$L = -a\,c \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{2c^2} + O(\frac{v^4}{c^4}) \right) = -a\,c + \frac{a\,\vec{v}^2}{2c} + \dots \qquad \longrightarrow \qquad a = m\,c$$

$$S = -m\,c \int_1^2 ds\ , \qquad L = -m\,c^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2(t)}{c^2}}$$

<u>kanonischer Formalismus</u> (immer noch für freies Teilchen)
Impuls (im gewählten IS):

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = -m\,c^2 \frac{-v_i/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \longrightarrow \qquad \vec{p} = \frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \ \underset{v \ll c}{\longrightarrow}\ m\,\vec{v}$$

Energie:

$$E = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{m\,v^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{m\,c^2(1 - v^2/c^2)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = p^0\,c$$

Folgerung:

$$(E/c, \vec{p}) = m\gamma\,(c, \vec{v}) = m\,u^\mu = p^\mu \qquad \underline{\text{Vierervektor des Impulses } p}$$

$$v \ll c: \qquad E = \underbrace{m\,c^2}_{\text{Ruhenergie}} + \underbrace{\frac{m}{2} v^2}_{\text{kinetische Energie}} + O(\frac{m\,v^4}{c^2})$$

$$p^\mu = m\,u^\mu \quad \longrightarrow \quad p^2 = p^\mu p_\mu = m^2 u^2 = m^2 c^2 \qquad \longrightarrow$$

Energie-Impuls-Relation: $\dfrac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \quad \longrightarrow \quad E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2 = c^2(\vec{p}^2 + m^2 c^2)$

$\longrightarrow$ Hamiltonfunktion des freien Teilchens: $H = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}$

$$|\vec{p}| \ll m\,c: \qquad H = mc^2 \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}} = m\,c^2 \left(1 + \frac{\vec{p}^2}{2m^2 c^2} + \dots \right) = m\,c^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} + \dots$$

$m \neq 0$: Impuls und Energie divergieren für $v \to c$ $\longrightarrow$
massives Teilchen kann sich nicht mit Lichtgeschwindigkeit bewegen

$m = 0$: Photonen, Gluonen, etc. haben $E = c|\vec{p}|$ (entspricht $\omega = c\,k$)
da allgemein gilt (freies Teilchen): $\vec{p} = \dfrac{E\vec{v}}{c^2} \quad \longrightarrow \quad v = c$

<u>Teilchen mit Wechselwirkung</u>

p Vierervektor $\longrightarrow$ auch $\dfrac{dp}{d\tau} = m\dfrac{du}{d\tau} = m\dfrac{d^2x}{d\tau^2}$ Vierervektor
$\longrightarrow$ relativistische Verallgemeinerung des Newtonschen Gesetzes

$$\boxed{m\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{dp}{d\tau} = K \quad \text{Viererkraft}}$$

Einschränkungen an die Komponenten K^μ:

$$u^\mu u_\mu = c^2 \qquad \longrightarrow \qquad \frac{d}{d\tau}u^2 = 0 = 2u_\mu \frac{du^\mu}{d\tau}$$

$$\longrightarrow \qquad m\,u_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} = u_\mu K^\mu = 0$$

Beh.: K^μ sind die kontravarianten Komponenten eines <u>raumartigen</u> Vierervektors

Bew.: u zeitartig $\longrightarrow$ $\exists$ IS, in dem zu einem gegebenen Zeitpunkt $u^\mu = (c, \vec{0})$ (momentanes Ruhsystem des Teilchens)

$u_\mu K^\mu = 0 \quad \longrightarrow \quad c\,K^0 = 0 \quad \longrightarrow \quad K^0 = 0$ in diesem IS

$\longrightarrow \quad K^\mu = (0, \vec{K}) \quad \longrightarrow \quad K^2 = -\vec{K}^{\,2} < 0$ raumartig (invariante Aussage)

$\longrightarrow$ im momentanen Ruhsystem des Teilchens ($\vec{v} = 0$):

$$m\frac{d^2x^0}{d\tau^2} = 0\ , \qquad m\frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{K}_{\mathrm{N}} \qquad \text{Newtonsche Kraft}$$

$\longrightarrow$ in beliebigem IS (wo Teilchen Geschwindigkeit $\vec{v}$)

$$K^\mu = L^\mu{}_\nu K^\nu_{\mathrm{R}}\ , \qquad K^\nu_{\mathrm{R}} = (0, \vec{K}_{\mathrm{N}})$$

$\longrightarrow$ $\vec{K}$ transformiert wie $\vec{r}$, allerdings ist $K^0_{\mathrm{R}} = 0 \quad \longrightarrow$

$$K^\mu = \left(\gamma\frac{\vec{v}\cdot\vec{K}_{\mathrm{N}}}{c}, \vec{K}_{\mathrm{N}} + \frac{\gamma - 1}{v^2}\,\vec{v}\,(\vec{v}\cdot\vec{K}_{\mathrm{N}})\right)$$

$\longrightarrow$ $K^0 = \dfrac{\gamma}{c}\,\vec{v}\cdot\vec{K}_{\mathrm{N}} = \dfrac{\gamma}{c}\dfrac{dA}{dt}\ ,$ wobei $\dfrac{dA}{dt} =$ Leistung der Kraft am Teilchen

$$\frac{dp^0}{d\tau} = K^0 = \gamma\frac{dp^0}{dt} = \frac{\gamma}{c}\frac{dA}{dt} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{d(p^0\,c)}{dt} = \frac{dA}{dt}$$

$\longrightarrow$ Änderung der Energie $E = p^0 c$ durch die von der Kraft am Teilchen geleistete Arbeit

<u>Folgerung:</u> relativistischen Erhaltungsgrößen entsprechen die Komponenten p^μ (folgt vor allem auch aus Invarianz gegenüber zeitlichen und räumlichen Translationen)

$\longrightarrow$ $E = p^0 c$ und nicht etwa $T = \dfrac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$ ist erhalten (modulo potenzieller Energie)

$\longrightarrow$ Umwandlung von Ruhenergie $m\,c^2$ in kinetische Energie möglich
tägliches Brot der Kern- und Teilchenphysik (Zerfälle, Streuprozesse)

<u>Zerfall eines massiven Teilchens in 2 andere Teilchen</u>

Beispiele: $\pi^0 \to 2\,\gamma\ , \quad \pi^+ \to \mu^+\nu_\mu\ , \quad Z^0 \to e^+e^-$, etc.

Energie-Impuls-Erhaltung

$$P = p_1 + p_2$$

Gleichung für Vierervektoren

$$(E/c, \vec{P}) \quad = \quad (E_1/c, \vec{p}_1) + (E_2/c, \vec{p}_2)$$
$$E = \sqrt{M^2c^4 + P^2c^2} \quad , \quad E_a = \sqrt{m_a^2c^4 + p_a^2c^2} \qquad (a = 1, 2)$$

gilt in jedem IS, insbesondere im Ruhsystem des zerfallenden Teilchens:

$$\vec{P} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 =: \vec{p}$$

einzige verbleibende Gleichung:

$$E/c = M\,c = (E_1 + E_2)/c = \sqrt{m_1^2c^2 + p^2} + \sqrt{m_2^2c^2 + p^2} \geq c\,(m_1 + m_2)$$

$\longrightarrow$ Zerfall nur für $M \geq m_1 + m_2$ möglich, Massendifferenz $\rightarrow$ kinetische Energie

Ruhsystem: $p_a \cdot P = E_a\,M \qquad \longrightarrow$

$$E_1 = \frac{c^2}{2M}\left(M^2 + m_1^2 - m_2^2\right) \ , \qquad E_2 = \frac{c^2}{2M}\left(M^2 + m_2^2 - m_1^2\right)$$

$\underline{\pi^0 \rightarrow 2\,\gamma:}$ Zerstrahlung neutraler π-Mesonen

$M_{\pi^0} \simeq 135$ MeV/c^2, $m_1 = m_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad E_1 = E_2 = \frac{1}{2}\,M\,c^2 \simeq 67.5$ MeV $\quad \gamma$-Strahlung

sichtbares Licht zum Vergleich: z.B. $\lambda_{\text{violett}} \simeq 400$ nm

$E = \hbar\omega = h\,\nu = \hbar c\dfrac{2\pi}{\lambda} \simeq 2 \cdot 10^{-7}$ eV m $\dfrac{2\pi}{\lambda} \qquad \longrightarrow \qquad E_{\text{violett}} \simeq 3.1$ eV

Teilchenerzeugung

Beispiel: $e^+ + e^- \rightarrow Z^0$ Speicherring L(arge)E(lectron)P(ositron)/CERN

warum Speicherring statt Positronen auf Materie (jede Menge Elektronen)?

$$P_Z = p_{\text{E}} + p_{\text{P}} \qquad \longrightarrow \qquad M_Z^2c^2 = 2m_e^2c^2 + 2p_{\text{E}} \cdot p_{\text{P}}$$

Labor-System (LS): ruhende Elektronen

$$p_{\text{E}} = (m_e\,c, \vec{0}) \ , \quad p_{\text{P}} = \left(E_{\text{P}}^{\text{LS}}/c, \vec{p}_{\text{P}}\right) \qquad \longrightarrow \qquad 2p_{\text{E}} \cdot p_{\text{P}} = 2m_eE_{\text{P}}^{\text{LS}} = c^2\left(M_Z^2 - 2m_e^2\right)$$

daher

$$E_{\text{P}}^{\text{LS}} = \frac{c^4\left(M_Z^2 - 2m_e^2\right)}{2m_ec^2} \simeq \frac{M_Z^2c^4}{2m_ec^2} \simeq \frac{(91\text{ GeV})^2}{1\text{ MeV}} \simeq 8 \cdot 10^6\text{ GeV} = 8 \cdot 10^3\text{ TeV}$$

so hohe Energien werden noch lange nicht in Beschleunigern erzeugt werden können

Schwerpunkt-System (SS): LEP

$$\left(M_Zc, \vec{0}\right) = \left(E_{\text{E}}^{\text{SS}}/c, \vec{p}\right) + \left(E_{\text{P}}^{\text{SS}}/c, -\vec{p}\right)$$

$$\longrightarrow \qquad E_{\text{E}}^{\text{SS}} = E_{\text{P}}^{\text{SS}} = \sqrt{m_e^2c^4 + p^2c^2} = \frac{1}{2}M_Zc^2 = 45.6\text{ GeV}$$

Vergleich LS mit SS $\qquad \longrightarrow \qquad$ gewaltiger Vorteil der Speicherringe:

$$\frac{E_{\text{P}}^{\text{SS}}}{E_{\text{P}}^{\text{LS}}} = \frac{M_Zc^2}{2}\frac{2m_ec^2}{M_Z^2c^4} = \frac{m_e}{M_Z} = 5.6 \cdot 10^{-6}$$

Streuprozesse

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 &\longrightarrow X_1 + X_2 + \dots X_n \\ p_1 + p_2 &= q_1 + q_2 + \dots + q_n \end{aligned}$$

i.a. nur mit Quantenfeldtheorie zu behandeln (insbesondere für $n > 2$)

Schwellenbedingung (wie vorher): $(p_1 + p_2)^2 \geq (m_1 + m_2 + \dots + m_n)^2 c^2$

immer erfüllt für elastische Streuung $T_1 + T_2 \longrightarrow T_1 + T_2$

Beispiel: Compton-Streuung $\gamma(q) + e^-(p_1) \to \gamma(q') + e^-(p_2)$

Labor-System: ruhendes Elektron-Target $\longrightarrow$ $p_1 = (m_e\, c, \vec{0})$

$$(E_\gamma/c, \vec{q}) + \left(m_e\, c, \vec{0}\right) = \left(E'_\gamma/c, \vec{q}\,'\right) + \left(\sqrt{m_e^2 c^2 + p_2^2}, \vec{p}_2\right)$$

$$E_\gamma = \hbar\omega \ , \quad E'_\gamma = \hbar\omega'$$

$$E_\gamma^2 = c^2\, \vec{q}^{\,2} \ , \quad E'^{\,2}_\gamma = c^2\, \vec{q}\,'^{\,2}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{E'_\gamma}{E_\gamma} = \frac{1}{1 + \dfrac{2\, E_\gamma}{m_e c^2} \sin^2 \dfrac{\theta}{2}}$$

geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

nichtrelativistisch: $\displaystyle \frac{d\vec{p}_{\rm N}}{dt} = \vec{K}_{\rm L} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)$

muss in kovariante Form gebracht werden: $\displaystyle \frac{dp}{d\tau} = K$

Standardüberlegung (Kovarianz): K muss Vierervektor sein, der

- linear in $\vec{E}, \vec{B}$, d.h. in F ist;
- Vierergeschwindigkeit u enthält;
- im nichtrel. Limes $(\vec{v} \to \vec{0})$ $K^\mu = (0, q\,\vec{E})$ ergibt

Ansatz: $K^\mu = b\, F^{\mu\nu} u_\nu$ mit Konstante b

NR-Limes $(\vec{v} \to \vec{0})$: $u_\nu = \gamma\,(c, -\vec{v}) \longrightarrow (c, \vec{0})$

$$K^\mu \ \to \ b\, F^{\mu\, 0} c \implies K^i = -b\, c\, E_i \qquad \longrightarrow \qquad b = -q/c$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{relativistische Verallgemeinerung der Lorentz-Kraft} \\ \dfrac{dp^\mu}{d\tau} = -\dfrac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu\end{array}}$$

daher in beliebigem IS:

$$\begin{aligned}
\frac{dp^0}{d\tau} &= \gamma \frac{d}{dt}\frac{m\,c}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{q}{c}F^{0\,i}u_i = -\frac{q}{c}\vec{E}\cdot(-\vec{v})\gamma \\
\longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} &= \frac{dE}{dt} = q\,\vec{E}\cdot\vec{v} \qquad \text{Leistung des Feldes an Ladung } q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dp^i}{d\tau} &= \gamma \frac{d}{dt}\frac{m\,v_i}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{q}{c}F^{i\nu}u_\nu = \frac{q}{c}\left[E_i\,\gamma\,c - F^{ij}u_j\right] \\
&= \gamma\,q\left[E_i - \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}B_k(-v_j)\right] = \gamma\,q\left[\vec{E}+\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right]_i
\end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Lorentz-Kraft ist räumlicher Anteil von K/γ

$$\frac{d}{dt}\frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = q\left(\vec{E}+\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right) = \vec{K}_L$$

einziger Unterschied zum nichtrelativistischen Fall:

$$\vec{p}_{\mathrm{N}} = m\,\vec{v} \qquad \longrightarrow \qquad \vec{p} = \frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

für Punktteilchen im elektromagnetischen Feld (ohne Beweis):

$$\text{Wirkung} \qquad S = -\int ds\left[m\,c + \frac{q}{c^2}A^\mu(x(s))\,u_\mu(s)\right]$$

$$\text{Hamiltonfunktion} \qquad H = c\sqrt{m^2c^2+\left(\vec{P}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)^2} + q\,\Phi$$

VI.5 Synchrotronstrahlung

Strahlungsfeld einer beschleunigten Ladung (Liénard-Wiechert)

$$\vec{E}_{\mathrm{Str}}(t,\vec{r}) = \frac{q\,\vec{n}\times\left[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right]}{cR(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^3}\Big|_{\mathrm{ret}}\;, \qquad \vec{B}_{\mathrm{Str}} = \vec{n}\times\vec{E}_{\mathrm{Str}}$$

mit $\vec{\beta} = \vec{v}/c$

$\vec{n} = \vec{R}/R\;,\quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_q(t_{\mathrm{ret}})$

$t_{\mathrm{ret}} = t - \dfrac{R(t_{\mathrm{ret}},\vec{r})}{c}$

implizite Gleichung für $t_{\mathrm{ret}}(t,\vec{r})$

pro Raumwinkel $d\Omega$ abgestrahlte Leistung

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c}\frac{|\vec{n}\times\left[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right]|^2}{(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^6}\Big|_{\mathrm{ret}}$$

Leistung $P = \text{Energie/Zeit} \quad \longrightarrow \quad$ im relativistischen Fall wichtig: welche Zeit?

bis jetzt Felder zur Zeit t des Beobachters betrachtet: $\quad P = \dfrac{dE}{dt_\mathrm{B}}$

zu unterscheiden von $\hat{P} = \dfrac{dE}{dt_\mathrm{Teilchen}} = \dfrac{dE}{dt_\mathrm{ret}}$

$$\frac{d\hat{P}}{d\Omega} = \frac{dP}{d\Omega}\frac{\partial t}{\partial t_\mathrm{ret}}$$

$$t = t_\mathrm{ret} + R(t_\mathrm{ret})/c \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial t}{\partial t_\mathrm{ret}} = 1 + \dot{R}(t_\mathrm{ret})/c = 1 - \vec{n}\cdot\vec{\beta} = \kappa$$

$$\frac{d\hat{P}}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c}\frac{|\vec{n}\times\left[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right]|^2}{(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^5}$$

differenzielle Strahlungsleistung = abgestrahlte Energie pro Zeit des Teilchens

im NR-Limes kein Unterschied: $\quad \beta \to 0\ ,\ \kappa \to 1$

relativistischer Fall: betrachten Spezialfall $\dot{\vec{v}} \,||\, \vec{v}$ (Beschleunigung in Richtung Geschw.)

$$|\vec{n}\times\left[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right]|^2 = \frac{\dot{\vec{v}}^2\sin^2\theta}{c^2} \qquad\qquad \theta = \text{Winkel } (\vec{n},\dot{\vec{v}})$$

$$\longrightarrow \qquad \frac{d\hat{P}}{d\Omega} = \frac{q^2\dot{\vec{v}}^2}{4\pi c^3}\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}$$

Nenner κ^5 modifiziert Winkelverteilung drastisch für $\beta \to 1 \quad \longrightarrow$
Strahlung ganz in Vorwärtsrichtung (kleine θ) gebündelt:

$$\kappa = 1-\beta\cos\theta \simeq 1-\beta(1-\theta^2/2) \simeq \frac{1}{2}(1-\beta^2+\theta^2) = \frac{1}{2}(1-\beta^2)(1+\gamma^2\theta^2) = \frac{1}{2}\gamma^{-2}(1+\gamma^2\theta^2)$$

$$\longrightarrow \qquad \frac{d\hat{P}}{d\Omega} \simeq \frac{q^2\dot{\vec{v}}^2}{4\pi c^3}\frac{32\gamma^{10}\theta^2}{(1+\gamma^2\theta^2)^5} = \frac{8q^2\dot{\vec{v}}^2\gamma^8}{\pi c^3}\frac{\gamma^2\theta^2}{(1+\gamma^2\theta^2)^5}$$

mit $x = \gamma\theta$:

Maximum von $\dfrac{x^2}{(1+x^2)^5}$ bei $x = \pm\dfrac{1}{2} \qquad \longrightarrow \qquad \theta_\mathrm{max} = \pm\dfrac{1}{2\gamma} = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{1-\beta^2}$

<u>Winkelverteilung</u>

starke Bündelung

in Vorwärtsrichtung

maximale Intensität $\propto \gamma^8$

z.B.: $\quad v = 0.9c \ \to\ \gamma^8 = 767$

Gesamtleistung durch Integration über Raumwinkel (mühsam)

stark vereinfachtes Argument:
(kovariante Form der Energie-Impuls-Erhaltung wesentlich $\to$ pp. 119):

$$\hat{P} = \frac{dE}{dt_{\mathrm{T}}}: \quad \text{Zähler und Nenner 0-te Komponente eines Vierervektors}$$

$\longrightarrow$ $\quad \hat{P}$ ist ein Lorentz-Skalar, quadratisch in $\dot{\vec{v}}$

NR Grenzfall (von früher)

$$\hat{P} = \frac{2q^2}{3c^3}\dot{\vec{v}}^2 = \frac{2q^2}{3m^2c^3}\left(\frac{d\vec{p}_{\mathrm{N}}}{dt}\right)^2$$

naheliegende allgemeine Form (N.B.: $\;dp/d\tau$ ist ein raumartiger Vierervektor)

$$\hat{P} = -\frac{2q^2}{3m^2c^3}\frac{dp^\mu}{d\tau}\frac{dp_\mu}{d\tau}$$

mit $p^\mu = m\,c\gamma\,(1,\vec{\beta})$ und $d\tau = \gamma^{-1}dt$ $\qquad\longrightarrow$

$$\hat{P} = \frac{2q^2\gamma^6}{3c}\left[\dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}})^2\right]$$

allgemeine <u>relativistische Strahlungsformel</u> für beliebige Orientierung von $\vec{\beta}$ und $\dot{\vec{\beta}}$

Anwendung: <u>kreisförmige Beschleuniger (Speicherring, Synchrotron)</u>

jetzt $\dot{\vec{v}} \perp \vec{v}$, $\quad \vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}} = 0$

$$\hat{P} = \frac{2q^2\gamma^6}{3c}\left[\dot{\vec{\beta}}^2 - \vec{\beta}^2\dot{\vec{\beta}}^2\right] = \frac{2q^2\gamma^4}{3c}\dot{\vec{\beta}}^2 = \frac{2q^2}{3m^2c^3}\gamma^2\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)^2$$

dabei benützt:

$$\frac{1}{m\,c}\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\gamma\vec{\beta})}{dt} = \gamma\dot{\vec{\beta}} + (\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})\gamma^3\vec{\beta} = \begin{cases} \gamma^3\dot{\vec{\beta}} & \dot{\vec{v}} \,||\, \vec{v} \\ \gamma\dot{\vec{\beta}} & \dot{\vec{v}} \perp \vec{v} \end{cases}$$

kreisförmige Bewegung (Radius R, $\;\vec{v}^{\,2} = \text{konstant} \simeq c^2$)

$$\left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right| = m\left|\frac{d\gamma\vec{v}}{dt}\right| = m\,\gamma\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = m\,\gamma\frac{v^2}{R} \simeq \frac{\gamma\,m\,c^2}{R} = \frac{E}{R}$$

$$\longrightarrow \qquad \hat{P} = \frac{2q^2\,c\,\gamma^4}{3\,R^2} = \frac{2q^2\,E^4}{3m^4c^7\,R^2}$$

Folgerung: Strahlungsverluste wachsen mit 4. Potenz der Energie $\longrightarrow$ Synchrotronstrahlung beschränkt Verwendung von Kreisbeschleunigern bei hohen Energien

Beispiel: LEP ($R \simeq 4.3$ km, zuletzt $E_{e^-} = E_{e^+} \simeq 100$ GeV)

Energieverlust eines Elektrons pro Umlauf

$$\Delta E = \hat{P}\frac{2\pi R}{v} \simeq \frac{4\pi e^2\gamma^4}{3R} \simeq 2\ \text{GeV !!}$$

gewaltige Verluste durch Synchrotronstrahlung: LEP hatte Energiebedarf einer Kleinstadt
Elektronbeschleuniger höherer Energie nur mehr als Linearbeschleuniger möglich:
wesentlich geringere Strahlungsverluste, da

$$\hat{P} = \frac{2q^2}{3m^2c^3}\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)^2 \text{ in diesem Fall} \qquad (\text{Faktor } \gamma^2 \text{ weniger})$$

Nachteil der Hochenergiephysik $\longrightarrow$ Vorteil der Festkörperphysik $\longrightarrow$ Synchrotronstrahlung für Strukturforschung verwendet

<u>Frequenzspektrum der Synchrotronstrahlung</u>

zum Unterschied zur Dipolstrahlung auch Vielfache der Grundfrequenz $\omega_0 = \dfrac{v}{R} \simeq \dfrac{c}{R}$

Fourierzerlegung führt auf modifizierte Besselfunktionen
Abschätzung mit Hilfe der klassischen Unschärferelation

scharfer Puls in der Zeit

des Beobachters (pro Teilchen):

$\Delta t = \kappa \Delta t_{\rm ret} \sim \dfrac{R}{c\,\gamma^3}$ (ohne Rechnung)

für relevanten Frequenzbereich

$$\Delta t\, \Delta\omega \sim 1$$

$$\longrightarrow \Delta\omega \sim \frac{1}{\Delta t} \sim \frac{c}{R}\gamma^3 = \omega_0\gamma^3$$

Fourieranalyse: Maximum des Frequenzspektrums tatsächlich bei $\omega_m \simeq \omega_0\gamma^3 \longrightarrow$ praktisch kontinuierliches Spektrum für $\gamma^3 \gg 1$

$$\begin{aligned} \omega_m &= \frac{c}{R}\left(\frac{E}{m_e c^2}\right)^3 \\ \hbar\omega_m &= \frac{\hbar c}{R}\left(\frac{E}{m_e c^2}\right)^3 = \frac{2\cdot 10^{-7}\ \mathrm{eV\,m}}{R}\left(\frac{E}{m_e c^2}\right)^3 = 1.6\ \mathrm{keV}\ \frac{E(\mathrm{GeV})^3}{R(\mathrm{m})} \end{aligned}$$

<u>ESFG:</u> European Synchrotron Facility in Grenoble (Speicherring mit 0.2 A Stromstärke)
$E_{e^-} = 6$ GeV, $R = 134$ m $\longrightarrow$ $\hbar\omega_m = 2.6$ keV ($\nu = 6\cdot 10^{17}$ Hz)
(stark gebündelte) Röntgenstrahlung

VI.6 Lagrange-Formulierung der Elektrodynamik

nicht die zentrale Rolle wie in der Mechanik, da MG bereits vorgegeben sind
Vorteile: kompakte Darstellung, Symmetrien manifest, Ausgangspunkt für Quantisierung

<u>4-dimensionale relativistische Feldtheorien</u>

Felder $\Phi_a(x)$ und 1. Ableitungen $\partial_\mu\Phi_a = \dfrac{\partial\Phi_a}{\partial x^\mu} = \Phi_{a,\mu}$ $\qquad (a = 1,\ldots,n)$

Elektrodynamik: $\Phi_a \equiv A_\mu$ Potenziale

Mechanik: Wirkung $S = \int dt\, L(q(t), \dot{q}(t), t)$

relativistische Feldtheorie: $t, \vec{r}$ „gleichberechtigt“ $\longrightarrow$ Wirkung muss lorentzinvariant sein

$$S = \frac{1}{c} \int d^4x\, \mathcal{L}\left(\Phi_a(x), \Phi_{a,\mu}(x), x\right)$$

mit $\underline{\text{Lagrangedichte } \mathcal{L}\left(\Phi_a(x), \Phi_{a,\mu}(x), x\right)}$

N.B.: für Ableitung der Feldgleichungen Indizes a unterdrückt

Integrationsmaß d^4x Skalar: lorentzinv. Lagrangedichte $\longrightarrow$ lorentzinv. Wirkung
Umkehrung nicht zwingend, trotzdem (fast) immer Lagrangedichte $\mathcal{L}$ lorentzinvariant

Analogie zur Mechanik (Hamiltonsches Prinzip):

Felder $\Phi(x_1^0, \vec{r})$ und $\Phi(x_2^0, \vec{r})$ vorgegeben, $\Phi(x)$ für $x_1^0 \leq x^0 \leq x_2^0$ so zu wählen, dass $\underline{\text{Wirkung(sfunktional) } S \text{ Extremum}}$ annimmt

Vor.: $\lim_{r\to\infty} \Phi(x^0, \vec{r}) = 0$

Variation: $\Phi(x) \to \Phi(x) + \eta(x)$

mit $\eta(x_1^0, \vec{r}) = \eta(x_2^0, \vec{r}) = 0$

S extremal:

$\delta S = 0$ für infinit. $\eta(x)$

$$\begin{aligned}
\delta S &= \frac{1}{c} \int_{x_1^0}^{x_2^0} dx^0 \int d^3r \left[\mathcal{L}\left(\Phi + \eta, \Phi_{,\mu} + \eta_{,\mu}, x\right) - \mathcal{L}\left(\Phi, \Phi_{,\mu}, x\right)\right] \\
&= \frac{1}{c} \int_{x_1^0}^{x_2^0} dx^0 \int d^3r \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}\eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{,\mu}}\eta_{,\mu} + O(\eta^2)\right] \\
&= \frac{1}{c} \int_{x_1^0}^{x_2^0} dx^0 \int d^3r \left[\eta \left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{,\mu}}\right\} + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{,\mu}}\eta\right)\right] + O(\eta^2)
\end{aligned}$$

mit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{,\mu}}\,\eta_{,\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{,\mu}}\,\eta\right) - \eta\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{,\mu}}$$

zur Erinnerung: Gaußscher Satz in 3 Dimensionen

$$\int_V d^3r\, \vec{\nabla}\vec{A} = \int_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{A}$$

2-dim. Fläche in 3 Dim.: $\vec{r}(u,v)$ $\longrightarrow$ orientiertes Flächenelement

$$d\vec{F} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\, du\, dv\ , \qquad dF_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial x_j}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v}\, du\, dv$$

Gaußscher Satz in 4 Dimensionen

$$\int_G d^4x\, \partial_\mu A^\mu = \int_{\partial G} d\sigma_\mu\, A^\mu$$

3-dim. Hyperfläche in 4 Dim.: $x(u,v,w) \longrightarrow$ orientiertes Flächenelement

$$d\sigma_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial u} \frac{\partial x^\rho}{\partial v} \frac{\partial x^\sigma}{\partial w}\, du\, dv\, dw$$

Rand ∂G in unserem Fall: $\{x^0 = x_1^0\} \cup \{x^0 = x_2^0\} \cup \{x_1^0 \leq x^0 \leq x_2^0, r \to \infty\}$

nach Vor.: $\eta|_{\partial G} = 0$, da η sonst beliebig in $G \longrightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{,\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = 0 \qquad \text{Euler-Lagrange Feldgleichungen}}$$

Maxwell-Gleichungen: $\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$, $\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$

1. Ableitungen in den Feldern entsprechen 2. Ableitungen der Potenziale

weitere Forderung: Wirkung muss eichinvariant sein $\longrightarrow$
lässt für $j = 0$ nur $\mathcal{L} \propto F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ zu

Bem.: $F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$ ist eine totale Divergenz (außerdem Pseudoskalar) $\longrightarrow$
kein Beitrag zu den Feldgleichungen

inhomogener Term $4\pi\, j/c$ nur durch $\mathcal{L} \propto A_\nu j^\nu$ zu erreichen

mit geeigneter Normierung (Gauß-System!)

$$\mathcal{L}_{\mathrm{M(axwell)}}(x) = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{c} j_\mu(x) A^\mu(x) = \mathcal{L}_{\mathrm{Feld}} + \mathcal{L}_{\mathrm{Wechselwirkung}}$$

scheinbares Problem: Potenzial A tritt explizit in $\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$ auf $\longrightarrow$ Eichinvarianz?

$$\begin{aligned} A^\mu &\longrightarrow A'^{\,\mu} = A^\mu - \partial^\mu \Lambda \\ \mathcal{L}_{\mathrm{M}} &\longrightarrow \mathcal{L}_{\mathrm{M}} + \frac{1}{c} j_\mu\, \partial^\mu \Lambda = \mathcal{L}_{\mathrm{M}} + \frac{1}{c} \partial^\mu (\Lambda\, j_\mu) - \frac{1}{c} \Lambda\, \partial^\mu j_\mu \end{aligned}$$

wegen Stromerhaltung $\partial^\mu j_\mu = 0$ ändert sich Lagrangedichte nur um eine totale Divergenz $\partial^\mu (\Lambda\, j_\mu) \longrightarrow$ Feldgleichungen ungeändert (analog Bewegungsgleichungen in Mechanik)

wichtige Erkenntnis: Eichinvarianz nur bei erhaltenem Strom

können jetzt auch Unabhängigkeit der Ladung vom IS zeigen

$$q_{\mathrm{IS}} = \int d^3r\, \rho(x^0, \vec{r})$$

$$q_{\mathrm{IS}'} = \int d^3r'\, \rho'(x'^{\,0}, \vec{r}\,')$$

$$\int_G d^4x\, \partial^\mu j_\mu = 0 = \int_{\partial G} d\sigma_\mu\, j^\mu$$

wobei $\partial G = \{x^0 = 0\} \cup \{x'^0 = 0\} \cup \{r \to \infty$ zwischen $x^0 = 0$ und $x'^0 = 0\}$

für lokalisierte Ströme kein Beitrag von $r \to \infty$

Hyperebene $x^0 = 0$: parametrisiert durch $u = x^1, v = x^2, w = x^3$ $\longrightarrow$

$$d\sigma_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial u} \frac{\partial x^\rho}{\partial v} \frac{\partial x^\sigma}{\partial w} \, du \, dv \, dw = \left(\varepsilon_{0123} \, dx^1 \, dx^2 \, dx^3, 0, 0, 0\right) = \left(d^3 r, \vec{0}\right)$$

orientierte Flächenelemente haben entgegengesetzte Richtung für $x^0 = 0$ und $x'^0 = 0$

Gaußscher Satz $\longrightarrow$ <u>Lorentzinvarianz der Ladung</u>

$$0 = \int_{x'^0=0} d\sigma'_\mu j'^\mu + \int_{x^0=0} d\sigma_\mu j^\mu = \int d^3 r' \, \rho'(x') - \int d^3 r \, \rho(x) = q_{\mathrm{IS}'} - q_{\mathrm{IS}}$$

<u>Feldgleichungen überprüfen:</u> $\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j_\mu A^\mu$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{8\pi} \partial^\nu A^\mu \left(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu\right) - \frac{1}{c} j_\nu A^\nu \\ &= -\frac{1}{8\pi} A^{\mu,\nu} \left(A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}\right) - \frac{1}{c} j_\nu A^\nu \end{aligned}$$

Euler-Lagrange: $\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu}$ $\longrightarrow$

$$-\frac{1}{4\pi} \partial_\nu \left(A^{\mu,\nu} - A^{\nu,\mu}\right) = -\frac{1}{c} j^\mu \quad \longrightarrow \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

homogene MG automatisch erfüllt: $F^{\mu\nu} = A^{\mu,\nu} - A^{\nu,\mu}$ $\longrightarrow$ $\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$

Wechselwirkungsterm für Punktteilchen:

$$\begin{aligned} j^\mu(x) &= q \int ds \, u^\mu(s) \, \delta^{(4)}(x - z(s)) \\ \longrightarrow \quad S_{\mathrm{WW}} &= \frac{1}{c} \int d^4 x \, \mathcal{L}_{\mathrm{WW}} = -\frac{1}{c^2} \int d^4 x \, j^\mu(x) A_\mu(x) \\ &= -\frac{q}{c^2} \int ds \, u^\mu(s) \, A_\mu(z(s)) = -\frac{q}{c} \int d\tau \, u^\mu(\tau) \, A_\mu(z(\tau)) \end{aligned}$$

mit den bekannten Relationen $d\tau = dt \sqrt{1 - v^2/c^2} = \gamma^{-1} dt$, $u^\mu = \gamma \, (c, \vec{v})$

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{WW}} &= -\frac{q}{c} \int \gamma^{-1} dt \, \gamma \, \left[c \, \Phi(t, \vec{r}(t)) - \vec{v}(t) \cdot \vec{A}(t, \vec{r}(t))\right] \\ \longrightarrow \quad L_{\mathrm{WW}} &= -q \, \Phi(t, \vec{r}(t)) + \frac{q}{c} \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{A}(t, \vec{r}(t)) \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ bekannte (Wechselwirkungs-)Lagrangefunktion für Punktteilchen

Struktur der elektromagnetischen Wechselwirkung

$$S = S_{\text{Materie}} + S_{\text{Feld}} + S_{\text{WW}}$$

allgemein gültig, in klassischer Elektrodynamik wie in QED (mit Feldoperatoren):

$$S_{\text{Feld}} = -\frac{1}{16\pi\, c}\int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\ , \qquad\qquad S_{\text{WW}} = -\frac{1}{c^2}\int d^4x\, j_\mu A^\mu$$

klassisches Punktteilchen:

$$S_{\text{Materie}} = -m\, c\int d\tau\sqrt{u^\mu(\tau)u_\mu(\tau)} = -m\, c^2\int dt\sqrt{1-\vec{v}^{\,2}(t)/c^2}$$

beschränkter Anwendungsbereich: im atomaren und erst recht im subatomaren Bereich kann
Materie nicht durch klassische Punktteilchen beschrieben werden
$\longrightarrow$ Quantentheorie, Quantenfeldtheorie

in allen Bereichen der Physik (Mechanik, klassische Feldtheorie, QM, QFT)

Invarianz der Wirkung $\longrightarrow$ Erhaltungsgröße

Noether-Theorem in der Feldtheorie $\longrightarrow$

Energie-Impuls-Tensor: $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} = \dfrac{1}{4\pi}\left(F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} + \dfrac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right)$

$$\begin{aligned}
T^{00} &= \frac{1}{4\pi}\left(F^0{}_\lambda F^{\lambda 0} + \frac{1}{4}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right)\\
&= \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}^{\,2} + \frac{1}{2}(\vec{B}^{\,2} - \vec{E}^{\,2})\right) = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^{\,2} + \vec{B}^{\,2}\right) = u_{\text{em}}
\end{aligned}$$

weiters: $T^{0i} = S_i/c$ und $T^{ij} = -T_{\mathrm{M}\,ij}$ mit Poynting-Vektor $\vec{S}$ und (3-dim.) Maxwellschem Spannungstensor $T_{\mathrm{M}\,ij}$

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} u_{\text{em}} & \vec{S}/c \\ & \\ \vec{S}/c & -T_{\mathrm{M}\,ij}\end{pmatrix}$$

berechnen 4-Divergenz von $T^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu T^{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi}\left[\partial^\mu F_{\mu\lambda}F^{\lambda\nu} + F_{\mu\lambda}\partial^\mu F^{\lambda\nu} + \frac{1}{2}F_{\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma}\right]\\
&= \frac{1}{c}F^{\nu\lambda}j_\lambda + \frac{1}{8\pi}F_{\rho\sigma}\left[\partial^\rho F^{\sigma\nu} - \partial^\sigma F^{\rho\nu} + \partial^\nu F^{\rho\sigma}\right]\\
&= \frac{1}{c}F^{\nu\lambda}j_\lambda
\end{aligned}$$

da der Ausdruck [ ] in 2. Gleichung identisch verschwindet (Bianchi-Identität)

Beh.: obiges Resultat ist die kovariante Formulierung der

<u>Energie-Impuls-Erhaltung</u>

betrachten hier den Fall $j = 0 \quad \longrightarrow \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$

(keine Ladungen oder Ströme im betrachteten Raum-Zeit-Gebiet)

Integration über 3-dimensionales Volumen V

$$0 = \int_V d^3r\, \partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_V d^3r\, T^{0\nu} + \int_V d^3r\, \partial_i T^{i\nu} = \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_V d^3r\, T^{0\nu} + \int_{\partial V} dF_i\, T^{i\nu}$$

<u>$\nu = 0$: Energieerhaltung</u>

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_V d^3r\, T^{00} + \int_{\partial V} dF_i\, T^{i0} &= 0 \\ \longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\int_V d^3r\, u_{\mathrm{em}} + \int_{\partial V} d\vec{F}\cdot\vec{S} &= 0 \end{aligned}$$

<u>$\nu = i$: Impulserhaltung</u>

für abgeschlossenes System (z.B. im gesamten 3-dim. Raum) und $j = 0$

$$\longrightarrow \qquad P^\mu_{\mathrm{em}} = \frac{1}{c}\int_V d^3r\, T^{0\mu} = \text{konstant} \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

$j \neq 0$: Materiebeitrag muss berücksichtigt werden (hängt von S_{Materie} ab)

<u>Mechanik</u>	<u>Feldtheorie</u>
Lagrangefunktion L	Lagrangedichte $\mathcal{L}$
Bewegungsgleichungen	Feldgleichungen
$p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ , \quad H = p\dot{q} - L$	$P^\mu = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_V d^3r\, T^{0\mu}$