**Commission Inter-IREM d'Histoire
et d'Épistémologie des Mathématiques,
IREM de Rennes**

4000 ans d'histoire des mathématiques :

les mathématiques dans la longue durée

**Actes du treizième colloque inter-IREM
d'Histoire et d'Épistémologie des Mathématiques,
IREM de Rennes,
6-7-8 mai 2000**

IREM de Rennes

Octobre 2002

DIOPHANTE D'ALEXANDRIE : UN TEXTE ET SON HISTOIRE

Norbert Schappacher

Technische Universität, Darmstadt

Traduit de l'anglais par Frédéric Métin (IREM de Bourgogne)

Résumé

Les Arithmétiques de Diophante est l'un des ouvrages qui ont eu le plus d'influence dans l'histoire des mathématiques. C'est par exemple dans la marge de son édition de Diophante que Pierre de Fermat, un jour entre 1621 et 1665, énonça son dernier théorème, qui ne fut démontré que bien plus tard. Mais Fermat n'était pas le premier à tirer son inspiration de la collection de problèmes algébriques/arithmétiques de Diophante : les Arabes avaient tiré profit de leur lecture des *Arithmétiques* de Diophante quand ils développèrent l'algèbre en tant que discipline mathématique. Il n'était pas non plus le dernier : à la fin de cet article, nous présentons l'exemple d'une thèse de mathématiques de 1998 directement inspirée d'un problème de Diophante.

Mais malgré toute l'influence qu'eut cet auteur sur divers mathématiciens à différentes époques, nous ne savons presque rien de lui, et même le texte des *Arithmétiques* ne révèle que peu de choses de ce que Diophante savait réellement, ou ce qu'il ignorait.

Nous présenterons d'abord les points de vue de divers historiens qui ont spéculé sur la personne de Diophante, puis décrirons quelques traits marquants des *Arithmétiques*, pour arriver à un survol des principales lectures différentes qui en ont été données au fil des siècles : d'abord dans le monde arabe des IX^{ème} et X^{ème} siècles, puis pendant la Renaissance byzantine (du XI^{ème} au XIII^{ème} siècle) ; ensuite pendant les XVI^{ème} et XVII^{ème} siècles en Europe (Viète, Fermat), jusqu'au regard du XX^{ème} siècle sur Diophante.

Avant-Propos

A la suite d'un petit cours de DEA à Strasbourg, j'ai donné le 29 mai 1998 une conférence dans le cadre de la Euler-Vorlesung annuelle, dans le vieux théâtre de Sans-souci à Postdam, intitulée *Wer war Diophant ? (Qui était Diophante ?).* Un article tiré de cette conférence est paru peu de temps après dans les *Mathematische Semesterberichte* 45/2 (1998), 141-156. La publication en était faite en allemand puisque la conférence avait été préparée en allemand pour un public allemand.

Pendant mon séjour en Inde, de décembre 1999 à janvier 2000, j'étais en résidence au *Tata Institute* de Mumbai, mais passai une semaine au *Chennai Mathematical Institute*, pendant laquelle le professeur Seshadri me demanda de parler également de Diophante à Madras. Cette conférence et une autre similaire que j'ai donnée plus tard à Bombay furent l'occasion de rédiger la présente version (anglaise [à l'origine, NdT]) de mon article. Ce n'est pas une traduction, mais une réécriture du texte original avec pas mal de modifications. Par exemple, j'ai évité certaines allusions (comme à Karl May) qui ne pouvaient être comprises de quiconque n'est pas empreint de culture germanique. D'autre part, j'ai tenu compte de quelques critiques que j'avais reçues après la publication ; je suis par exemple heureux d'avoir pu corriger ma méconnaissance initiale de la contribution d'Otto Neugebauer à la détermination de l'époque de la vie de Héron d'Alexandrie, qui m'a été obligeamment soulignée par plusieurs lecteurs. J'ai aussi développé le contenu çà et là.

1. La question de la datation

Deux ouvrages nous sont parvenus sous le nom d'auteur de *Diophante d'Alexandrie* : un ensemble très étendu de problèmes résolus, intitulé *Les Arithmétiques*, et un court traité, plus théorique, sur les nombres polygonaux, qui est d'un style plus euclidien[1]. *Les Arithmétiques* sont essentiellement autosuffisants : pour autant que nous les connaissions, ils ne contiennent aucune référence explicite à d'autres auteurs mathématiciens[2].

D'autre part, nous ne connaissons qu'un auteur de l'ère pré-arabique et pré-byzantine qui fasse référence aux *Arithmétiques* de Diophante : Théon d'Alexandrie[3], le père d'Hypatie, la plus célèbre femme scientifique de l'Antiquité (tardive), qui cependant doit une grande part de sa célébrité au fait qu'elle a été sauvagement assassinée par les bandes de l'Evêque Cyril, l'un des premiers Pères de l'Église, en 415 ap. J.C.[4] Théon est donc du milieu du quatrième siècle de notre ère, ce qui nous donne une borne supérieure pour la datation des *Arithmétiques* et de leur auteur présumé, Diophante.

Si nous admettons que le même Diophante est aussi l'auteur du traité sur les nombres polygonaux, nous obtenons une borne inférieure, car il y a dans cet ouvrage une référence à *Hypsicles*, qui vivait vers 150 av. J.C. (cf. [Tan93/95], vol. I, 470 (27)).

Les œuvres connues de Diophante nous donnent donc un intervalle de 500 ans en ce qui concerne leur composition, et c'est à peu près tout ce dont nous pouvons être certains lorsqu'il

[1] Pour le traité sur les nombres polygonaux, voyez l'édition gréco-latine [Tan93/95], vol. I, 450-481. Les nombres polygonaux sont : les nombres triangulaires, i.e. ceux qui peuvent être disposé selon une forme triangulaire, comme 1, 3, 6, 10, 15, 21..., les carrés parfaits, les nombres pentagonaux comme 1, 5, 12, 22, 35, ..., etc. Plus généralement, la série des nombres a-gonaux est donnée par $n/2\{2+(n-1)(a-2)\}$, pour n=1,2,3...

[2] A trois endroits, tous situés dans le livre "V" de la tradition byzantine (voir plus loin pour la numérotation des livres) le texte fait référence à des *porismes* (cf. [Tan93/95], vol. I, 316 (6), 320 (2), et 358 (5)). On ne sait pas si ces résultats faisaient partie d'un autre livre des Arithmétiques qui serait perdu, ou s'ils se réfèrent à un autre traité (de Diophante, ou seulement connu des lecteurs supposés de Diophante ?) dont aucune trace ne nous est parvenue. Cf. notre discussion sur les formulations générales dans les *Arithmétiques* au § 4. ci-dessous.

[3] Voyez [Tan 1893/95] vol. II, 35 (p. 9-11), cf. vol. I, 8 (p. 13-15).

[4] L'année 415 est incontestée. Les opinions divergent cependant à propos de l'âge auquel Hypatie connut sa mort tragique. Voyez par exemple [Dzi95].

s'agit d'estimer l'époque à laquelle vivait Diophante d'Alexandrie. Nous ne disposons d'aucune information sérieuse sur lui[5].

Le grand savant français Paul Tannery (1843-1904), auquel nous devons, parmi d'autres ouvrages de référence de l'époque (voyez par exemple son édition de Fermat [Fer91]), la monumentale édition critique des six livres des *Arithmétiques* qui nous viennent de la tradition byzantine, a découvert à la bibliothèque de l'Escurial une lettre de l'intellectuel byzantin Michael Psellos[6], qu'il a utilisée pour situer Diophante plus précisément ([Tan93/95], vol. II, 37-42). Dans cette lettre, Psellos mentionne un travail sur l'arithmétique (la *méthode égyptienne des nombres*, ainsi qu'il l'appelle) dédié à Diophante par un certain Anatolios ([Tan93/95], vol. II, 38 (22) - 39 (1)). Pour Tannery, cet auteur est le philosophe attesté Anatolius d'Alexandrie, évêque de Laodicée (ancienne ville de l'actuelle côte syrienne) vers 270/280 de notre ère, également auteur d'un traité sur l'arithmétique dont il nous reste des fragments. En supposant qu'un traité ne peut être dédié à une personne que de son vivant, cela situerait Diophante au troisième siècle ap. J.C.

Mais si l'on considère cette dernière date et la nature de la source de Psellos (la phrase qui mentionne la dédicace est légèrement abîmée dans le texte) on pourrait rester sceptique face à ces conclusions. Il semble réellement que Tannery se soit quelque peu emporté à propos de cette lettre qu'il avait découverte ; sur cette seule base, il corrigea la plus importante spécification méthodologique des *Arithmétiques*, par laquelle Diophante introduit son symbole pour la seule et unique inconnue qu'il manipule dans sa notation[7].

Finalement, indépendamment de la lettre de Psellos, le fait qu'avant Théon personne, autant que nous le sachions, n'ait mentionné Diophante, mais également que les problèmes des *Arithmétiques* soient assez inhabituels dans les mathématiques grecques classiques rendent probable que Diophante a écrit son ouvrage à la fin de l'intervalle des 500 ans. De nos jours, on dit en général qu'il a vécu vers 250, comme ça l'est suggéré par l'argument de Tannery. Il y a aussi un papyrus mathématique du troisième siècle en grec, non écrit par Diophante, mais qui utilise le même symbole pour l'inconnue que celui que l'on trouve dans les manuscrits byzantins des *Arithmétiques*[8].

Mais il ne faudrait pas oublier l'incertitude qui réside dans toutes ces conjectures. En fait, on peut dire (et on a dit) beaucoup de choses en faveur d'un rapprochement entre Diophante et *Héron d'Alexandrie*, auteur de textes encyclopédiques sur des questions de mathématiques,

---

[5] Notez que si une telle incertitude sur les dates paraît énorme pour les cultures méditerranéennes anciennes, des intervalles encore plus grands sont la règle plutôt que l'exception dans l'histoire de la culture et de la science indiennes par exemple. Pour une illustration, voyez [Gup95] p. 263f.

[6] Psellos (1018-1081 ?) fut de nombreuses années philosophe à la cour de Byzance ; il écrivit un grand nombre d'ouvrages sur des sujets très variés, depuis la philosophie et la théologie jusqu'aux sciences et à l'alchimie. Outre son importante correspondance, ce qui le rendit peut-être encore plus célèbre est la série de ses écrits sur la vie de différents Empereurs et personnalités politiques, qui contient une approche psychologique des personnes décrites. Il aimait à se présenter comme influent, bien que lui-même et ses proches aient perdu leur position dominante sous le règne de Constantin IX en 1054. A certains moments, il vécut comme moine.

[7] [Tan93/95] vol. I, 6 (3-5). Au lieu de laisser cette phrase comme on la lit dans tous les manuscrits, i.e. définissant le αλογος αριθμος le *nombre non dit*, le nombre qui est jusqu'à présent inconnu, comme « ce qui n'a aucune de ces propriétés particulières [en question dans les lignes précédentes, comme la propriété d'être un carré, un cube, etc.] mais contient simplement une multitude d'unités », Tannery veut que nous lisions : « le nombre qui n'a aucune de ces caractéristiques, mais possède une multitude indéterminée d'unités, est appelé *arithmos* ». Mais le dernier mot non traduit de la phrase grecque que Tannery a créée signifie simplement *nombre*, rendant l'énoncé au mieux très maladroit. Cette critique de la *correction* par Tannery de la phrase cruciale est donnée de manière très convaincante par Rashed et Allard (voir la note sur le mot arabe "šay" pour l'inconnue dans [Ras84], tome III, 120-123).

[8] Pap. Michigan 620. Je dois cette référence à [Ger84], p. 143.

en particulier sur les applications des mathématiques. Les problèmes que traite Héron sont semblables à ceux que traite Diophante, et tous deux se servent des mêmes notations pour le signe moins. Si l'on suppose une proximité entre eux, on peut même se demander, comme le fit Sir Thomas Heath, si le *Dionysius* auquel sont dédiées les *Arithmétiques* n'est pas identique au dédicataire du livre de Héron sur les Définitions géométriques et de ses Éléments d'Arithmétique. Après un chaud et long débat, il semble que ce soit Neugebauer qui a établi les dates de Héron en datant précisément une éclipse de lune survenue à Rome, et mentionnée par Héron dans son traité de dioptrique ; selon lui, Héron était vivant en 62[9]. Cela devrait-il nous conduire à situer Diophante plus de deux siècles avant ce qui est généralement admis de nos jours ?

Un petit poème mathématique qui prétend être l'inscription sur la tombe de Diophante me paraît presque une parodie de notre ignorance ; il donne la longueur de la vie de Diophante, 84 ans, comme solution d'une équation linéaire[10]. Il y a bien des notices nécrologiques pour Bourbaki, ce petit poème ne devrait donc même pas nous empêcher de penser que Diophante était en fait le nom d'un auteur collectif. Mais il n'y a aucune raison positive de nous laisser aller à de telles spéculations, et plus que tout : je ne vois pas comment cela rendrait plus facile la réponse à ces difficiles questions liées à Diophante.

2. Spéculations sur l'origine de Diophante

De même que les dates précises de sa vie, l'origine ethnique ou religieuse de Diophante n'est affaire que de spéculations. Cette possibilité de spéculer a été librement utilisée par certains auteurs. Donnons quelques exemples :

Hermann Hankel, dans son ouvrage sur les mathématiques antiques et médiévales[11], adopte un ton presque poétique quand il en vient à Diophante :

> *Là, dans le désert triste et stérile des recherches grecques sur l'arithmétique, apparaît soudain un homme à l'énergie juvénile : Diophante. D'où vient-il, où va-t-il ? Qui étaient ses prédécesseurs, qui seront ses successeurs ? Nous ne le savons pas. Tout cela est une grande énigme. Il vivait à Alexandrie. Si l'on voulait me permettre une conjecture, je dirais qu'il n'était pas grec ; ... si ses écrits n'étaient pas en grec, personne n'aurait jamais pensé qu'ils sont issus de la culture grecque.*

A peu près à la même époque, l'historien des mathématiques allemand Moritz Cantor[12] avouait que, pour lui,

---

[9] Pour la question des relations entre Héron et Diophante, voyez [Hea21], p. 306, note 1, ainsi que la longue note 149 dans [Kle92], 244-248. L'argument de Neugebauer a été publié en 1938, après Heath et après l'original allemand du livre de Klein. Cf. [Neu75] p. 846.

[10] [Tan98/95], vol. II, p. 60. *L'enfance de Diophante dura le sixième de sa vie ; la barbe lui crût après un douzième en plus. Il se maria après un septième en plus ; un fils lui naquit cinq ans plus tard ; ce fils vécut la moitié de l'âge de son père et le père mourut quatre ans après son fils.* [N.d.T. : d'après l'édition française de Ver Eecke] Ce poème provient de l'*Anthologie Palatine* de problèmes mathématiques sous forme poétique. L'interprétation donnée par Harder ([Har95], p. 267), qui aboutit à une valeur de 65+1/3 plutôt que 84, est compatible avec la traduction allemande du texte qu'il utilise, mais pas avec l'original grec.

[11] [Han74], p. 157. En ce qui concerne les commentaires originaux en allemand, voyez aussi la version publiée de sa conférence dans *Mathematische Semesterberichte*, 45/2. Hankel est, bien entendu, connu comme mathématicien, par exemple pour son intégrale de la fonction gamma (Habilitationsschrift, Leipzig 1863), et ses Untersuchungen über unendlich oft oscillierende und unstetige Funktionen, *Math. Annalen* 20, 1882.

[12] [Can07], p. 396. La première édition de l'ouvrage de Cantor est de 1880.

Diophante, dont le nom est fréquent en Grèce, était un authentique Grec, disciple de la science grecque, même s'il s'éleva bien au-dessus de ses contemporains. Il fut Grec dans ce qu'il réalisa, aussi bien que dans ce qu'il fut incapable d'accomplir. Mais il ne faut pas oublier que la science grecque, en conquérant l'Est d'Alexandrie..., ramena de nouvelles idées de ces campagnes, que les mathématiques grecques en tant que telles n'ont jamais cessé de ramasser çà et là tout ce qu'elles jugeaient digne d'être pris.

Paul Tannery lui-même ne spéculait pas sur l'origine ethnique de Diophante. Cependant, il pensait qu'il était possible d'identifier Dionysius, le dédicataire des *Arithmétiques*, avec Dionysius, Évêque d'Alexandrie, et en déduisit que Diophante était chrétien[13].

Pour Oswald Spengler, l'auteur de *Der Untergang des Abendlandes* (le Déclin de l'Occident, un best-seller allemand des années 20 dont l'influence politique a été terrifiante), Diophante est un indicateur crucial du changement de culture qui, selon lui, est survenue dans l'Antiquité tardive. Tout comme Toynbee après lui, Spengler entreprit une description cyclique et en parallèle des grandes civilisations de l'histoire mondiale, dans chacune desquelles il prétendait reconnaître les mêmes développements morphologiques. Spengler combattait l'idée d'une mathématique universelle. Pour lui, les mathématiques créées par une certaine civilisation sont un indicateur très parlant de ce type de civilisation. L'Antiquité tardive ne faisait pour lui plus partie de la culture classique, mais appartenait déjà à la culture arabe, laquelle, selon lui, fut caractérisée par le *magisches Weltgefühl*, l'appréhension magique du monde. Cette culture trouverait dans l'Islam sa future religion. Spengler a par exemple taxé le Panthéon de Rome de *plus ancienne de toutes les mosquées*.

Les *Arithmétiques* de Diophante sont remarquables par leur traitement algébrique plutôt que géométrique des quantités, ce qui amène Spengler à commenter[14] :

Ce n'est évidemment pas un enrichissement, mais une négation complète du Weltgefühl *de l'Antiquité. Ce simple fait aurait suffi à prouver que Diophante ne fait plus partie de la culture classique. Un nouveau* Zahlengefühl, *une nouvelle notion du nombre... est à l'ouvrage avec lui. Ce que sont un nombre* indéterminé *comme* a, *un nombre* non nommé *comme* 3, *tous deux ni quantité, ni mesure, ni segment, un Grec n'aurait pas été capable de le dire... Diophante vécut vers 250 AD, c'est-à-dire au troisième siècle de la civilisation arabe.*

Spengler, qui devait avoir sa propre façon de reconnaître les authentiques grands ouvrages sans être dérangé par un examen mathématique minutieux, avait sa vision personnelle des qualités mathématiques de Diophante ; il ne se serait pas laissé impressionner par une série de petits problèmes qui n'ont fait qu'inspirer des écrivains ultérieurs[15].

Il est sûr que Diophante n'était pas un grand mathématicien. La plupart des choses pour lesquelles son nom est resté célèbre ne sont pas de lui, et ce qui l'est n'est sûrement pas totalement de sa propre invention. Son importance accidentelle tient au fait que, autant que nous le sachions, c'est dans ses œuvres que l'on reconnaît de manière claire pour la première fois le nouveau Zahlengefühl.

Diophante étant donc un représentant de cette nouvelle *culture magique*, Spengler va jusqu'à le faire coïncider racialement avec ce rôle. Alors qu'il qualifiait le philosophe Spinoza

[13] Voir [Tan12], pp. 527-539.
[14] [Spe23], pp. 96-97.
[15] [Spe23], p. 98-99.

de « dernier représentant du *Weltgefühl* magique, en fait un retardataire » pour la simple raison qu'il « venait du ghetto », i.e. puisqu'il était juif[16], il retourne cet argument dans le cas de Diophante, qu'il avait déjà présenté comme premier représentant du *Zahlgefühl* magique, oubliant même qu'il avait affirmé auparavant que Diophante n'était pas un grand mathématicien[17] :

> *Combien parmi les grands Alexandrins peuvent avoir été des Grecs seulement au* sens magique *? Peut-être Plotin et Diophante étaient-ils d'origine juive ou chaldéenne ?*

David M. Burton. L'affirmation la plus absurde que j'ai trouvée au sujet de l'origine de Diophante confond des époques historiques différentes et transpose à des catégories ethniques l'influence souvent conjecturée des problèmes babyloniens sur ceux que l'on trouve dans les *Arithmétiques*. Dans l'*Histoire des Mathématiques* de Burton (1991), on peut lire[18] :

> *Diophante était certainement un Babylonien hellénisé.*

3. Et le texte ?

Tous ces commentateurs profitent de l'absence de renseignement biographique pour filer des métaphores catégoriques sur les *Arithmétiques* en spéculant sur l'origine de leur auteur. Je prétends que le même phénomène que celui que l'on voit ici à propos de la biographie de Diophante se retrouve au sujet de ses mathématiques. Les *Arithmétiques* sont presque aussi insaisissables que leur auteur. La façon dont, pendant des siècles, les mathématiciens ont lu et utilisé les *Arithmétiques* est toujours une expression très sûre de leurs propres idées ; mais nous ne pouvons jamais être sûrs de ce que ces lectures nous disent sur le texte lui-même. Les *Arithmétiques* sont probablement l'exemple le plus frappant de texte mathématique qui, d'une part, a inspiré et continue d'inspirer des générations de mathématiciens à différents moments de l'histoire de l'algèbre et de la théorie des nombres, mais qui, d'autre part et pour ce que nous en savons, n'a jamais été développé en tant que tel.

Les mathématiciens ont au minimum une tendance à difficilement admettre cela. Nous sommes convaincus, que si nous étudions le texte suffisamment attentivement, nous pouvons pratiquement le lire en regardant par-dessus l'épaule de Diophante, n'est-ce pas ? Mais ce texte, avec l'histoire unique de ses différentes lectures au long des siècles, nous donne une bonne illustration des problèmes causés par cette attitude mathématique d'un optimisme naïf.

Je parcourrai donc succinctement quatre moments historiques majeures au cours desquels un groupe de mathématiciens ou d'érudits a redécouvert les *Arithmétiques*. En fait, puisque nous n'avons aucun fragment original du texte, pas plus qu'une quelconque connaissance directe de ce qui lui est arrivé entre sa première rédaction et le neuvième siècle, tout ce dont nous pourrons parler sont les *re*découvertes d'un texte tombé dans l'oubli. Une telle redécouverte peut être appelée *renaissance de Diophante* pour l'époque et le lieu où elle survient. Je suggère qu'il y a eu quatre telles renaissances majeures de Diophante jusqu'à présent, ou, plus précisément, deux fois deux. Tous les fragments des *Arithmétiques* en notre

[16] Cf. [Spe23], p. 391. Voyez le magnifique commentaire ironique de Leonard Nelson sur tout cela, dans [Nel21], p. 115-117.

[17] [Spe23], p. 770. La dynastie Chaldéenne, dernière des dynasties babyloniennes (626 av. J.C.), était composée de familles araméennes, généralement respectées en tant que personnes érudites.

[18] [Bur91], p. 223.

possession aujourd'hui ne remontent pas plus tard qu'à la première double renaissance, dont les deux épisodes eurent lieu à Bagdad et à Byzance, entre le neuvième et le treizième siècles. La seconde double renaissance comprend l'appropriation des *Arithmétiques* par l'Europe et le monde occidental depuis le seizième siècle.

4. Quelques remarques sur le texte des *Arithmétiques*

Avant de nous tourner vers la première renaissance et ses deux chapitres, essayons de jeter un bref coup d'œil au *texte lui-même*. Bien sûr, à proprement parler, c'est impossible. Il n'y a aucun texte original de Diophante qui ne soit passé à travers la première double renaissance. Et selon la thèse principale que je défends ici, il est clair que je n'ai pas la moindre illusion sur la faisabilité d'une *simple lecture du texte*[19].

Ceci étant dit, il faut bien sûr aller regarder le texte. Et le lecteur de Diophante se retrouve un peu dans la situation de Hardy et Littlewood quand ils examinaient les manuscrits de Ramanujan qu'on leur avait envoyés d'Inde[20]. Les textes montrent clairement deux auteurs virtuoses, capables de résoudre des problèmes dont certains, dans le cas de Diophante, sont difficiles à résoudre aujourd'hui pour, par exemple, un étudiant en mathématiques de première année d'université. En ce qui concerne Ramanujan, le niveau est bien sûr encore plus haut. Mais les deux textes sont écrits d'une manière très différente de celle à laquelle nous sommes habitués, et, par-dessus tout, on sait bien qu'ils contiennent très peu d'indications sur les méthodes générales sous-jacentes que l'auteur a employées pour trouver ses solutions. Cela rend extrêmement difficile la détermination explicite de ce qu'il savait.

Mais mettons brièvement en évidence quelques propriétés des *Arithmétiques* qu'il est bon d'avoir à l'esprit lorsque l'on regarde le périple de ce texte à travers l'histoire.

Prenons un exemple très facile.

Problème I.28. Trouver deux nombres dont la somme et la somme des carrés sont donnés.

Le contexte révèle que par *nombre* Diophante entend toujours : nombre rationnel positif. Avant de résoudre ce problème, Diophante établit une condition nécessaire : *deux fois la somme des carrés moins le carré de la somme des deux nombres doit être un carré* (celui d'un nombre rationnel positif.)

De nos jours, avec les notations algébriques et des connaissances qui remontent au moins au seizième siècle, notre reconstruction de ce problème ressemblerait probablement à ceci : On cherche X et Y tels que $X+Y=a$ et $X^2+Y^2=b$. Ceci implique évidemment que $2b-a^2=(X-Y)^2$ soit un carré. Et de nos jours, un moment de réflexion nous montre que cette condition est aussi suffisante. Car $Y=a-X$ transforme, en divisant par 2, l'équation $X^2+Y^2=b$ en l'équation quadratique :

[19] Notez la façon subtile dont André Weil semble implicitement reconnaître ce problème dans son livre [Wei83] : le bref chapitre sur Diophante est le chapitre I, "Protohistoire" (§X, pp. 24-29.) Ce qui lui permet de traiter Diophante essentiellement à travers les divers regards sur les *Arithmétiques* portés à partir des développements ultérieurs de la théorie des nombres.

[20] Je suis redevable de cette belle comparaison à Don Zagier.

$$X^2 - aX + \frac{a^2 - b}{2} = 0$$

de discriminant $\frac{2b - a^2}{4}$.

Si l'on veut, on peut alors trouver les deux solutions rationnelles de cette équation exprimée en fonction de a et b à partir de la formule apprise à l'école.

Diophante n'avait pas de telle notation, il n'y avait pas non plus de notion générale ou de théorie des équations du second degré qu'il aurait pu apprendre à l'école. En fait, on ne sait pas non plus clairement s'il entendait sa condition nécessaire (clairement explicitée comme telle) comme nécessaire et suffisante pour la résolubilité du problème[21]. Tout ce qu'il fait, c'est *résoudre le problème*, et voilà ce que signifie *résoudre le problème* pour lui : il choisit d'abord la valeur 20 pour ce que nous avons nommé a, puis la valeur 208 pour ce que nous avons appelé b. (Notez au passage que $2\times208-20^2=4^2$ est un carré parfait, de sorte que la condition nécessaire est respectée.)

Ensuite, Diophante travaille en utilisant son unique notation pour l'inconnue[22] (une seule inconnue à la fois). A la manière de Tannery, notons x cette unique inconnue que Diophante peut manipuler sous sa forme notationnelle. Il écrit la différence entre les deux nombres (le plus grand moins le plus petit) sous la forme $2x$. En d'autres termes, $x+10$ sera le plus grand, et $10-x$ le plus petit des deux nombres que nous cherchons. Ensuite, en écrivant explicitement que 10 est la moitié de la première des sommes données, il obtient l'équation suivante[23] :

$$208=(x+10)^2+(10-x)^2=2x^2+200.$$

Notez que d'une manière tout à fait appropriée, l'équation ne contient pas de terme linéaire, et par conséquent mène directement à la solution $x^2= 4$, i.e. $x=2$, puisque seules les solutions positives sont permises par Diophante. Les nombres recherchés sont donc 12 et 8.

Une lecture de cette solution, à la façon d'un mathématicien généreux, serait de dire que Diophante y montre une méthode générale de traitement des équations du second degré, et que c'est seulement sa notation restreinte qui ne lui permet pas d'exprimer les choses dans leur généralité. Il est ainsi conduit à choisir des valeurs plus ou moins génériques pour les constantes, et aussi pour les inconnues qui ne sont pas désignées par la lettre x.

Il est vrai que Diophante mène la technique de choix des valeurs numériques à sa perfection, ne perdant jamais de vue, même dans les problèmes les plus compliqués, quels choix ont été faits à quelle étape de l'argumentation, et n'hésitant pas à revenir en arrière pour corriger un tel choix s'il devient clair qu'il le mènerait à une solution négative ou irrationnelle pour le problème principal, ou l'un des problèmes auxiliaires rencontrés en chemin.

Pourtant, on ne sait pas clairement si Diophante était conscient, par exemple, de la notion générale d'*équation du second degré*. Il indique de temps à autre, dans les derniers livres, des

[21] Les conditions nécessaires posées pour d'autres problèmes des *Arithmétiques* tendent à être nécessaires et suffisantes pour assurer la résolubilité générale du problème en nombres rationnels positifs. Mais parfois, la divergence entre généralité de l'énoncé et particularité de la solution donnée rendent la situation plus compliquée. Un tel exemple apparaît pour la première fois au problème I.21, elle a déjà été remarquée en tant que telle par Bachet. Voyez également la note 34, ci-après.

[22] D'après l'hypothèse généralement admise de Heath, son signe pour l'inconnue était probablement à l'origine la contraction de $\alpha\rho$, les deux premières lettres du mot grec signifiant *nombre* : $\alpha\rho\iota\theta\mu o\varsigma$.

[23] Pour être plus précis, pour Diophante, ce que nous écrivons + et – ne repose pas sur les mêmes bases : il traite les additions de termes par simple juxtaposition et, dans chaque expression, tous les termes précédés d'un signe – sont rassemblés à la fin.

recettes plus ou moins générales pour traiter différents types d'équations quadratiques[24]. Mais le seul principe fondamental qu'il semble avoir à cœur est le classement des expressions suivant les *espèces*, i.e. essentiellement selon les puissances de x qu'ils contiennent, avec un regard particulier sur la transformation des équations à portée de main de sorte que l'on obtienne finalement une équation entre deux multiples de la même puissance de x (voyez les explications dans l'introduction des livres I et IV[25]).

Mais on commence à soupçonner plus sérieusement qu'il peut y avoir plus dans ces *choix génériques* de valeurs numériques que ce que notre compréhension, avec sa généralité anticipée, nous faisait deviner à première vue, lorsque l'on en vient à ce que nous appelons problèmes indéterminés, i.e. problèmes qui, contrairement aux premiers, n'ont pas de solution unique en nombre rationnel positif. En fait, dans la plupart des cas, il n'y a rien dans les procédés habituels que Diophante utilise pour les problèmes indéterminés qui montre une quelconque différence par rapport au cas déterminé. Dès qu'une simple solution en nombre rationnel positif est trouvée, Diophante considère le problème résolu et passe au suivant.

Prenons comme exemple le fameux problème II.8, dans la marge trop étroite duquel Fermat écrivit l'énoncé (mais pas sa prétendue merveilleuse preuve) de ce que l'on appellera plus tard dernier théorème de Fermat[26]. Le problème s'énonce :

Problème II.8. Partitionner un carré donné en deux carrés.

Diophante prend la valeur 16 pour le carré donné, et écrit x^2 pour le premier carré cherché. Il a donc à transformer $16-x^2$ en carré, que nous pourrions écrire y^2 en notation moderne. Pour cela, Diophante utilise l'*Ansatz* : $y=2x-4$. Cela fonctionne bien, car ainsi $x^2+y^2=16$ devient $5x^2=16x$, i.e., $x=16/5$, et nous avons écrit 16 comme somme des deux carrés 256/25 et 144/25.

C'est une assez bonne description de la manière dont Diophante traite *habituellement* les problèmes indéterminés, en donnant une solution particulière qui dépend de choix numériques et de spécialisations effectués en chemin. Le fait que d'autres substitutions linéaires $y=kx-4$ auraient mené à d'autres solutions du problème original n'est pas mentionné. Rien ne montre non plus qu'il ait été conscient de l'interprétation géométrique de ce problème ou de problèmes similaires, comme recherche de points rationnels sur un cercle de rayon rationnel, ainsi que de ses opérations comme intersection du cercle avec la droite $y=2x-4$[27].

Cependant, il y a dans le cas particulier exceptionnel du problème II.8 une phrase qui, pour une fois, exprime une plus grande généralité : avant la substitution de $2x-4$ à la place de la racine du second carré, on lit : *Prenons le carré de quelque multiple de x moins le nombre dont le carré donne 16.* En d'autres termes, il est suggéré que toute substitution de la forme

[24] Voyez en premier lieu "IV".39 [Tan93/95], vol. I, 304, (5)–(10), pour un exemple de $bx+c=ax^2$. De même "VI".6, en particulier [Tan93/95], vol. I, 402, (14)–(16), pour un exemple de $ax^2+bx=c$. Cf. également la remarque dans "VI".22 [Tan93/95], vol. I, 444, (23)–(24), sur une équation du type $bx= ax^2+c$.

[25] La fin de l'introduction du livre I, [Tan93/95], vol. I, 14, (11 sqq.), qui est reprise dans l'introduction du livre IV, [Ras84], t. III, pp. 2-3 ; voyez le commentaire sur le terme "espèces" dans [Ras84], t. III, pp. 104-105.

[26] Voici la célèbre note de Fermat : *Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum induos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.* C'est-à-dire : « Diviser un cube en deux cubes, ou un bicarré en deux bicarrés, ou en général, jusqu'à l'infini, toute puissance supérieure au carré en deux puissances du même ordre est impossible. De ceci, j'ai trouvé une preuve tout à fait extraordinaire. La marge est trop exiguë pour la contenir ». Dans l'un des manuscrits, qui date du treizième siècle, il y a aussi, dans la marge du même problème II.8, une note d'un lecteur malheureux qui maudit Diophante pour la difficulté de son texte (Cf. [Tan93/95], vol. I, 84, et vol. II, 260).

[27] Des exemples de problèmes indéterminés des *Arithmétiques* que Diophante traite de manière à les rendre déterminés se trouvent dans le groupe de problème II. 21, 22, 23 et 25.

$kx - \sqrt{16}$ pour y donnera une solution. Et il semble que nous soyons renvoyés à cette observation quand nous lisons plus loin, dans le problème III.19 :

Nous avons appris comment décomposer le carré donné en deux carrés d'une infinité de façons[28].

Il vaut la peine de s'arrêter un peu sur ce problème III.19. En fait, dans tout le texte des *Arithmétiques*, pour autant que nous le possédions aujourd'hui, III.19 est le passage le plus explicite en allusions aux faits mathématiques généraux concernant la décomposition de carrés en deux carrés. Mais il n'est pas théorique au sens d'un traité général systématique. Il nous frappe plutôt en tant que solution particulière virtuose, surprenante et dense, qui est parsemée d'allusions à des idées générales, une vraie apothéose parmi les problèmes des *Arithmétiques*. Nous pourrions supposer avec Tannery que III.19 marquait la fin, et bien sûr le summum des trois premiers livres des *Arithmétiques*, qui fait parvenir l'art de Diophante jusqu'aux équations contenant le carré de l'inconnue[29].

Le problème III.19 en lui-même demande la satisfaction simultanée de huit conditions :

Problème III.19. Trouver quatre nombres tels que le carré de tous les quatre, plus ou moins l'un quelconque d'entre eux, soit un carré.

Le début de la solution que donne Diophante à ce problème est une observation générale qui, pour une fois, n'est pas une condition nécessaire mais présente un problème préliminaire auquel le problème donné sera ramené :

Puisque le carré de l'hypoténuse de tout triangle rectangle, augmenté ou diminué de deux fois le produit des deux côtés de l'angle droit, est un carré, je cherche d'abord quatre triangles rectangles ayant la même hypoténuse.

Dans la terminologie moderne, Diophante propose de chercher quatre solutions différentes (positives et rationnelles) de l'équation :

$$(\Delta) \qquad a_i^2 + b_i^2 = c^2 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Car il aura alors, pour $i = 1, 2, 3, 4$ la propriété que $c^2 \pm 2a_ib_i = (a_i \pm b_i)^2$ est un carré.

Ayant établi ce problème auxiliaire en termes de triangles rectangles, Diophante poursuit en remarquant immédiatement que c'est exactement la même chose que ce que le lecteur est censé savoir, par exemple par le II.8 :

[28] [Tan93/95], vol. I, 184 (3-4). A cet endroit et dans la discussion qui suit au sujet de III.19, je (N.d.T. : c'est pas moi, c'est lui) traduis ou paraphrase directement de l'édition Tannery. Notez que Diophante ne donne ici aucune référence explicite à un problème antérieur, pas plus qu'il ne prend le temps de réellement prouver que des choix infiniment différents de ce que nous avons appelé k dans notre discussion du problème II.8 mènent à une infinité de partitions différentes du carré donné.

[29] Voir [Tan93/95] vol. I, p. 187, note de bas de page, où il suggère que les deux problèmes suivants, II.20 à III.21, qui marquent la fin du livre III dans les manuscrits, sont des additions ultérieures. Si nous discutons III.19 en détail, nous le faisons en supposant, au moins pour la sauvegarde de l'argument, que ce problème et sa solution font partie du texte original des *Arithmétiques*.

C'est la même chose que de décomposer un carré donné en deux carrés [de quatre façons], et nous avons appris à décomposer le carré donné en deux carrés d'une infinité de façons[30].

Cette phrase, et la façon dont elle est insérée ici dans la solution de III.19, sont un peu à part ; nous verrons comment Diophante arrive réellement à trouver une solution concrète au problème auxiliaire sans invoquer directement la méthode du II.8. Cela veut-il dire que Diophante ne parvient pas si facilement à rendre explicite les solutions infiniment nombreuses dont nous sommes assurés de l'existence, ou au moins qu'il trouve trop difficile d'un point de vue pédagogique de suivre cette approche ? Ou est-ce plutôt la surabondance d'idées du virtuose qui l'oblige à résoudre le problème auxiliaire d'une autre façon ?

Quoi qu'il en soit, après avoir fait ses observations générales, Diophante résout son problème auxiliaire de la manière suivante :

Soient maintenant deux triangles rectangles sur de très petits nombres, c'est-à-dire (3,4,5), (5,12,13), et multiplions tous les côtés de chaque triangle par l'hypoténuse de l'autre ; le premier triangle devient alors (39,52,65), et le second (25,60,65). Ce sont des [triangles] rectangles ayant la même hypoténuse. Mais 65 est naturellement divisé en carrés de deux façons ; comme 16 plus 49, et comme 64 plus 1. Il en est ainsi parce que 65 est le produit de 13 par 5, et que chacun de ceux-ci peut être décomposé en deux carrés. Je prends alors les racines des deux nombres susdits 49 et 16, i.e. 7 et 4, et forme le triangle rectangle à partir des nombres 7 et 4 : (33,56,65). De même, 64 et 1 ont pour racines 8 et 1 ; je forme donc de nouveau à partir de ces nombres un triangle rectangle, dont les côtés sont (16,63,65)

Diophante utilise ou fait allusion à plusieurs faits généraux dans ce passage. Tout d'abord, il sait fabriquer systématiquement des triangles rectangles dont les côtés sont entiers. Plus précisément, des entiers positifs étant donnés (avec nos notations, $p>q$), il sait, selon son expression, *former les triangles rectangles à partir de ces nombres*, c'est-à-dire, avec nos notations, qu'il sait écrire le triangle rectangle $(p^2-q^2, 2pq, p^2+q^2)$ (ou avec les deux premiers côtés intervertis), et également les multiples $((p^2-q^2)\lambda, 2pq\lambda, (p^2+q^2)\lambda)$. Une telle *formation* de triangles rectangles à partir de deux nombres est ce qui est traité de nos jours sous le nom de *triplets pythagoriciens*, apparemment comme un écho lointain d'une remarque historique faite au cinquième siècle par Proclus. Cette technique de base est utilisée par Diophante à de nombreux endroits, en particulier dans les problèmes du livre VI. Il n'est pas du tout surprenant de trouver chez Diophante un tel savoir, étant donné que la célèbre tablette Plimpton 322, que l'on pense certainement antérieure à 1600 av. J.C., contient déjà une liste de quinze triplets pythagoriciens[31]. Mais il faut noter que le texte des *Arithmétiques* ne permet pas de savoir de manière évidente si Diophante savait que *tous* les triangles rectangles dont les côtés sont rationnels peuvent être obtenus de cette façon (chose que nous aimons voir *simplement* de nos jours comme paramétrisation des points rationnels du cercle unité via la projection stéréographique depuis un point rationnel choisi P : les points rationnels du cercle unité sont les seconds points d'intersection du cercle avec les lignes de pente rationnelle passant par P). Ce type d'assertion, tendant vers l'explicitation de toutes les solutions d'un problème, semble en fait étranger au véritable style des problèmes de Diophante.

---

[30] [Tan93/95] vol. I, 184 (1-4). Notre parenthèse *[de quatre façons]* indique que le texte n'est pas très sûr, ce qui, cependant, ne cause aucun problème pour comprendre la phrase.

[31] Voyez par exemple [Wei83], p. 8 sqq.

L'autre observation frappante du texte dont nous disposons est la remarque sur 65 comme somme de deux carrés de deux manières différentes, en tant qu'il est le produit des deux entiers 5 et 13, chacun étant la somme de deux carrés. Cela indique une connaissance sur la multiplicativité de la propriété de décomposabilité en deux carrés, c'est-à-dire quelque chose que nous indiquerions par cette formule[32] :

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(bc-ad)^2+(bd+ac)^2$$

Une telle connaissance chez Diophante paraît plus remarquable que celle de la construction des triangles rectangles.

Dans tous les cas, continuant son jeu ingénieux avec différents triangles rectangles, Diophante dispose maintenant, comme il le dit, de *quatre triangles rectangles ayant la même hypoténuse*. Ou, dans les mêmes termes que ce que nous avons appelé (Δ) :

$$65^2= 33^2+56^2=16^2+63^2=39^2+52^2=25^2+60^2.$$

Ainsi, il peut continuer :

Retournons donc au problème de départ. Je fais la somme des quatre nombres égale à 65x, et chacun individuellement égal à x^2 fois quatre fois l'aire des triangles.

Traduisons ceci dans nos termes généraux : supposons que nous ayons trouvé c et les quatre couples (a_i, b_i) satisfaisant à (Δ). Notons au passage que l'expression diophantienne *quatre fois l'aire du triangle rectangle* (a_i, b_i, c) est précisément la quantité $2a_ib_i$ laquelle, lorsqu'on l'additionne ou la soustrait de c^2, donne à chaque fois un carré. Mais il n'y a aucune raison de supposer que nous aurons aussi $c=2a_1b_1+2a_2b_2+2a_3b_3+2a_4b_4$, comme nous pourrions le souhaiter de façon à résoudre le problème de départ. Non, Diophante demande que nous adaptions la taille des quatre triangles, en multipliant a_i, b_i, et c par le même facteur x et nous aurons encore quatre solutions de l'équation homogène (Δ). Ensuite, tout ce qui nous reste à faire est de choisir x en sorte que $(2a_1b_1+2a_2b_2+2a_3b_3+2a_4b_4)x^2=cx$. On termine en prenant la valeur rationnelle $x=c/2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)$, qui donne une solution au problème de départ.

C'est ce que Diophante fait avec ses valeurs numériques[33]. La solution qu'il fournit ainsi finalement au problème original est donnée par les quatre nombres $\frac{17136600}{163021824}$, $\frac{12675000}{163021824}$, $\frac{15615600}{163021824}$ et $\frac{8517600}{163021824}$.

Pour résumer : la disparité entre la formulation générale des problèmes et certaines conditions restrictives, aussi bien que quelques très rares commentaires généraux d'une part, et la particularité des solutions présentées d'autre part, rendent difficile si ce n'est impossible d'apprécier avec quelque précision que ce soit la connaissance algébrique *théorique* que Diophante pouvait avoir à disposition. Il n'y a également jamais d'affirmation menant au fait que *toutes* les solutions d'un problème ont été trouvées[34].

---

32 Voyez également [Wei83], p. 24 sqq.

33 Voyez la fin de cette solution au problème III.19 [Tan93/95], vol. I, 186 (1) – (9). Notez que les corrections par l'éditeur de quelques-uns uns des nombres de ce passage final de III.19 semblent évidentes.

34 Bašmakova, qui est toujours prête à attribuer à Diophante le savoir avancé dont il n'y a pas trace dans le texte, dresse une liste de solutions plus générales des problèmes des *Arithmétiques* [Baš74], 40– 42. Mis à part le III.19, juste cité, elle mentionne quatre problèmes du livre "IV", qui sont à résoudre *in indeterminato* (εν τω αοριστω) : "IV".19, "IV".33, lemme, "IV".34, lemme, "IV".35, lemme. Nous trouvons ici bien sûr que le texte donne des familles de solutions à un paramètre, mais une analyse attentive du texte devrait tenter de

Si l'on recherche juste les affirmations ou les méthodes générales décrites en tant que telles dans les *Arithmétiques*, on peut en trouver quelques-unes dans les introductions des livres I et IV. Par exemple, Diophante donne la règle abstraite pour l'opération *moins* (λειψις) : dans notre notation, (–).(–)=+[35]. En outre, à l'intérieur des problèmes, il donne des noms particuliers à des approches plus ou moins générales ; par exemple, la double équation (διπλοισοτης), avec notre notation[36] :

$$x+a=u^2$$
$$x+b=v^2$$

où Diophante tente d'écrire $a-b=u^2-v^2=pq=\left(\frac{p+q}{2}\right)^2-\left(\frac{p-q}{2}\right)^2$.

Grosso modo, 15 % des quelque 300 problèmes des *Arithmétiques* que nous connaissons contiennent ce que l'on appelle des *diorismes*, c'est-à-dire des conditions nécessaires, comme celle que nous avons rencontrée dans notre premier exemple II.8 ci-dessus ($2b-a^2$ doit être un carré). Leur généralité tend à être proche de celle de l'énoncé du problème[37]. Parmi eux, il y a les six problèmes dans les conditions nécessaires desquels nous lisons que *Ceci est* πλασματικον (plasmatikon). En lisant ceci, le mathématicien moderne pense aux remarques du genre *ceci est trivial*, mais qui sait ce que ce mot voulait dire pour Diophante ? Beaucoup d'encre a coulé à propos de cette question. La réponse pourrait s'avérer impossible[38].

Finalement, il y a un fameux diorisme dans lequel Diophante pourrait avoir consigné qu'un nombre impair (non carré) ne peut être décomposé comme somme de deux carrés que s'il n'a

---

répondre à la question : pourquoi ici et pas ailleurs ? Enfin, Bašmakova cite le livre "VI", qui traite au départ de problèmes impliquant des triangles rectangles rationnels, un domaine dans lequel nous avons déjà vu que les *Arithmétiques* contiennent des affirmations qui vont au-delà des solutions particulières à des problèmes indéterminés. D'abord, elle s'intéresse au "VI".11, second lemme, qui est une proposition sur l'infinité, réduite à celles qui sont énumérées auparavant. Puis elle mentionne le *lemme* précédant le problème "VI".15, lequel, selon elle, présente un *caractère beaucoup plus général* que les autres mentionnés. Mais en fait, Diophante le traite comme d'habitude par spécialisation, concluant dès qu'une solution particulière a été trouvée.

[35] [Tan93/95], vol. I., 12 (19–21).

[36] Voyez par exemple le problème I.11 dans [Tan93/95], vol. I, 96 (8–14).

[37] Je pense aux 46 problèmes suivants, dont je mets entre crochets ceux que Sesiano, dans sa liste [Ses82], 461 – 483, ne reconnaît pas comme problèmes à diorismes : I.5, I.6, I.8, I.9, I.14, I.16, I.17, I.19, I.21, I.27, I.28, I.30 ; II.6, II.7, (III.16), (III.19) [voyez la discussion ci-dessus] ; IV.17, IV.18, IV.19, IV.20, IV.21, IV.22 ; V.7, V.8, V.9, V.10, V.11, V.12 ; (VI.21), VII.6, (VII.16), (VII.17), (VII.18) ; ("IV".7), ("IV".14), "IV".34, "IV".35 ; ("V".3 [porisme]), ("V".5 [porisme]), ("V".6, 2. lemme), ("V".7), ("V".8), "V".9, "V".11, "V".16 [porisme] ; "VI".11, 2. lemme.

[38] Les six problèmes sont I.27, I.28, I.30 ; IV.17, IV.19 ; V.7. Les diverses traductions qui ont été proposées au fil des siècles donnent déjà une idée des difficultés : de Xylander (1575) "effictum aliunde", et Nesselmann (1842) "das läßt sich aber bewerkstelligen", en passant par Tannery (1893) "hoc est formativum", Heath (1910) "This is of the nature of a formula (easily obtained)", Ver Eecke (1959) "chose qui est figurative", Sesiano (1972) "constructible", le spectre parcouru s'étend jusqu'à Wertheim (1890) "und man kann immer solche Zahlen als gegeben annehmen, daß diese Bedingung erfüllt ist", ou Rashed (1984) "Ceci est un problème convenablement déterminé." Le plus grand obstacle à la résolution du problème réside probablement dans le fait que ce mot, ou son équivalent arabe, n'apparaît que six fois dans les *Arithmétiques* (et le texte de la première occurrence arabe est également problématique), et qu'il n'apparaît pas avec beaucoup de diorismes là où nous l'aurions attendu, suivant les interprétations données par Rashed ([Ras84], tome III, 133–138) ou Sesiano ([Ses82], 192). Ver Eecke ([Ver59], p. 37, note de bas de page) pensait que ces mots sont des annotations de lecteurs postérieurs à Diophante (mais il ne pouvait avoir eu connaissance des trois occurrences des livres IV et V, contenues dans la traduction arabe découverte dans les années 70 ; et cette traduction est basée sur une tradition du texte des *Arithmétiques* différente de celle qui a conduit aux manuscrits grecs que nous connaissons.) Dans [Cav97], 389–393, l'expression grecque est utilisée d'autre part comme preuve d'un fondement géométrique de l'algèbre de Diophante. Mais de sérieux doutes subsistent pour savoir si le jargon d'un mathématicien au travail est accessible à la subtile philologie de Caveing.

aucun facteur de la forme $4n-1$. Mais il est évident que le texte des manuscrits est corrompu. Jacobi a essayé de le corriger (en admettant, bien évidemment, la proposition que nous voudrions bien porter au crédit de Diophante), et il est touchant de voir comment il tente de reconstruire la façon dont le texte original peut avoir été déformé par des copistes incapables de comprendre sa signification[39].

5. La première renaissance de Diophante

Elle prit place dans le monde islamique, commençant probablement dans les années 70 du neuvième siècle. Qusṭā Ibn Lūqā, un chrétien Grec que sa mère avait probablement appelé Kostas, travailla la meilleure partie de sa vie comme traducteur et commentateur à la cour de Bagdad, et traduisit ainsi Diophante du grec en arabe (il écrivit aussi un commentaire que nous n'avons pas), probablement les sept premiers livres des *Arithmétiques*. Les livres IV à VII de sa traduction réapparurent vers 1971 à la Bibliothèque Astan Quds de Meshed (Iran) dans une copie de 1198 ap. J.C.[40] Il n'était pas référencé sous le nom de Diophante, mais sous celui de Qusṭā Ibn Lūqā, car le conservateur n'avait apparemment pas été capable de lire la ligne principale de la page de couverture, où le nom de Diophante apparaît en calligraphie géométrique Kufi.

La découverte, et les éditions et traductions qui en ont résulté, œuvres de Roshdi Rashed et Jacques Sesiano, ont substantiellement changé notre vison des *Arithmétiques*. Auparavant, les six livres des *Arithmétiques* qui nous étaient parvenus par les copies byzantines (voir plus loin *La seconde renaissance de Diophante*) avaient été prises pour les six premiers livres de l'ouvrage.[41] Maintenant, il nous faut les compter ainsi : I, II, III, "IV", "V", "VI". Les sept premiers livres des *Arithmétiques* sont : les trois premiers livres I, II, III, des sources grecques, puis les livres IV à VII dont nous avons la traduction arabe. Les livres grecs restants "IV", "V" et "VI" viennent quelque part entre VIII et XIII, mais nous ne savons pas où.

La traduction de Qusṭā Ibn Lūqā a été faite environ un demi-siècle après la création, également à Bagdad, de l'algèbre comme discipline mathématique par Al-Khwarizmi dans son célèbre livre. Le livre d'Al-Khwārizmi est l'exact opposé des *Arithmétiques* de Diophante en ceci qu'il est d'un côté plus élémentaire, traitant seulement d'équations linéaires et quadratiques là où Diophante traite de nombreux problèmes contenant des cubes, et où apparaissent d'autres puissances jusqu'à x^9. Mais la nouveauté (et une autre différence avec Diophante)

---

[39] Problème "V".9 [Tan93/95], vol. I, 332 (17) – 334 (2). Voir [Jac47]. La version corrigée qu'il propose est la suivante :
δει δη τον διδομενον μητε περισσον ειναι, μητε ο δισλασιων αυτου και μ° α μεζων εχη μεροσ τετ ραχη μετ πεισθαι παρα τεν α μ°. C'est-à-dire : "Il est nécessaire que la quantité donnée ne soit pas impaire, et qu'une quelconque partie de deux fois la quantité donnée plus un ne puisse être mesurée comme quadruple et un" Selon Jacobi, cela est dit pour exprimer une condition nécessaire pour que "deux fois la quantité donnée plus un" soit une somme de deux carrés. Jacobi prouve également cette condition nécessaire à la fin, d'une façon dont il pense qu'elle était accessible à Diophante. Tannery reconstruit cette phrase difficile dans le sens de la condition (équivalente) qu'aucun diviseur *p premier* de "deux fois la quantité donnée plus un" ne doit être tel que 4 divise $p + 1$. Cela a l'avantage de laisser le mot "nombre premier", qui apparaît, intact, dans certains manuscrits. La même lecture, sans l'analyse philologique, avait déjà été avancée par Fermat sur des considérations mathématiques – voir [Fer91], tome II, p. 230 sqq.

[40] Voir [Ras84], et [Ses82].

[41] Voyez par exemple [Ver59], p. XII – XV, pour un panorama des opinions de divers auteurs concernant la part que les six livres grecs étaient supposés occuper dans la totalité des *Arithmétiques*, avant la découverte des livres en arabe. Ver Eecke essaie même de convaincre le lecteur qu'aucun livre autre que ceux connus en grec n'a existé dans une traduction arabe : p. XIV sqq.

d'Al-Khwārizmi réside dans son traitement extrêmement systématique, ayant pour but une classification générale des équations linéaires et quadratiques, et des méthodes générales de résolution qui sont établies par des démonstrations. Ainsi, en traduisant les *Arithmétiques*, Qusṭā Ibn Lūqā les greffa dans un contexte scientifique actif marqué par le développement systématique de cette jeune discipline qu'était l'algèbre.

Cela signifie que non seulement l'ouvrage de Diophante était de temps en temps appelé *Art de l'Algèbre*, et que Qusṭā Ibn Lūqā utilisa la nouvelle terminologie algébrique pour sa traduction, mais que la traduction était lue et utilisée comme source d'inspiration par des mathématiciens en activité qui avaient leurs propres notions mathématiques. Ainsi Abū-Kāmil au Caire, par exemple, écrivit, à peine dix ans après la traduction de Qusṭā Ibn Lūqā, un livre sur l'algèbre dans lequel il discute l'existence d'un nombre infini de solutions d'équations que nous reconnaissons comme définissant des sections coniques, à condition qu'elles admettent au moins une solution rationnelle[42].

Une autre ligne de recherche commença à être cultivée par les mathématiciens du monde de l'Islam pendant la seconde moitié du dixième siècle, ligne pour laquelle les problèmes de Diophante étaient intéressants, en tant qu'ils étaient *a priori* conçus différemment : je veux parler du *mouvement de la théorie des nombres dans l'algèbre arabe* sur lequel Rashed a en particulier attiré l'attention et qu'il a analysé. Il est décrit d'ordinaire comme la discipline qui demande des solutions entières (positives) plutôt que, comme chez Diophante, en nombres rationnels (positifs), d'équations polynomiales à deux ou plusieurs variables. Cette description est un peu maladroite, en ce sens que les solutions rationnelles d'une équation donnée à n variables (mettons $x^3+y^3=1$) correspondent aux solutions entières de l'équation homogène à $n+1$ variables ($x^3+y^3=z^3$). Il vaut donc mieux décrire autrement la différence entre les lignes de recherche algébrique et arithmétique. Ce qui nous frappe dans l'arithmétique du dixième siècle, contrairement aux *Arithmétiques* de Diophante, est la *nouvelle notion d'irrésolubilité* qui fait son apparition.

Tous les problèmes des *Arithmétiques* sont non seulement résolubles mais réellement résolus. Diophante rencontre des difficultés dans la résolubilité en rationnels positifs, ce qui arrive naturellement au cours du travail, quand une équation mènerait soit à une solution non positive soit à une solution irrationnelle. Ces difficultés sont systématiquement évitées par des retours en arrière et des choix d'autres valeurs numériques pour les données du problème. De même qu'il ne discute jamais *toutes* les solutions d'un problème donné, il ne propose jamais de problème qui n'a pas de solution en nombres rationnels positifs.

Mais vers 940, Al-Khāzin réfuta un argument qu'avait proposé abū-M. Al-Khujandī pour montrer que l'équation (avec nos notations) $x^3+y^3=z^3$ n'a pas de solution en entiers positifs, et cette discussion se poursuivit, impliquant également Abdallāh ben Alī[43]. Ce fut Al-Khāzin, et non Diophante, qui formula le problème qui est devenu depuis 15 ans parmi les experts de géométrie algébrique arithmétique un des sujets préférés de conférence grand public :

Le problème des nombres congruents

Décider si un entier non carré donné est l'aire d'un triangle rectangle de côtés rationnels.

---

[42] Nous suivons ici les explications que donne Rashed dans le chapitre *Analyse combinatoire, analyse numérique, analyse diophantienne et théorie des nombres* dans [Ras97], et particulièrement les pp. 72–85. Voyez aussi la littérature mentionnée là.

[43] Voir [Anb79], p.136 sqq ; cf.[Ras79], [Ras97], 80–85.

Ce problème n'est toujours pas résolu, quoique nous ayons aujourd'hui une réponse conjecturale très simple qui découle de la célèbre conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer pour certaines courbes elliptiques sur **Q**. Pour être précis, si la conjecture de Birch-Swinnerton-Dyer est admise pour toutes les courbes elliptiques E_k : $ky^2=x^3-x$, pour k variant sur l'ensemble des entiers positifs sans facteur carré, il s'ensuit qu'un tel nombre k est un nombre congruent (i.e., est l'aire d'un triangle rectangle de côtés rationnels), si et seulement si $\Sigma(-1)^n=0$, où la somme est prise pour toutes les manières possibles d'écrire k sous la forme $l^2+2m^2+8n^2$ (si k est impair), resp. pour toutes les manières possibles d'écrire $k/2$ sous la forme $l^2+m^2+8n^2$ (si k est pair), avec des entiers non-négatifs l, m, n. La preuve de cette implication fait un usage sérieux de progrès très récents de la géométrie arithmétique algébrique[44].

A première vue, le problème des nombres congruents semble demander des solutions rationnelles pour des équations du même type exactement que celles que nous trouvons discutées dans les *Arithmétiques* : k est un nombre congruent si et seulement s'il existe des nombres rationnels (positifs) a, b, c, satisfaisant la relation $a^2+b^2=c^2$ et tels que $k=ab/2$. Mais cela requiert en réalité une sorte de technique assez différente, parce que le problème est précisément la *résolubilité* de ces équations. Cela apparaît clairement dans le premier cas particulier : le théorème qui dit que 1 *n'est pas un nombre congruent*. Ce qui équivaut à dire que l'aire d'un triangle rectangle de côtés rationnels ne peut jamais être un carré, ou que l'équation $x^4 + y^4 = z^4$ n'a pas de solution en entiers positifs, de telle sorte qu'il contient le cas particulier $n=4$ de ce qu'on appelle Dernier Théorème de Fermat. Ce dernier fut le premier à démontrer que 1 *n'est pas un nombre congruent*, avec sa célèbre méthode de *descente infinie*[45].

On trouve un lointain écho, dans la première moitié du XIII$^{\text{ème}}$ siècle, de cette recherche en théorie des nombres du monde de l'Islam, dans les travaux de Léonard de Pise, plus connu sous le nom de Fibonacci, qui profita des échanges directs avec le monde arabisant, comme le fit la cour sicilienne de Frédéric II où il travaillait. Ces échanges ne rendirent pas Diophante directement accessible à l'Occident. Mais ils contribuèrent à faire connaître dans l'Ouest le problème des nombres congruents.

6. La seconde renaissance de Diophante

La seconde renaissance, plus précisément le second chapitre de la première renaissance, eut lieu pendant le renouveau intellectuel de l'Empire byzantin entre le XI$^{\text{ème}}$ et le XIII$^{\text{ème}}$ siècle. Elle est liée au premier chapitre dans la mesure où c'est en grande partie l'intérêt du monde islamique pour les anciens manuscrits grecs qui a provoqué celui des Byzantins pour leur héritage intellectuel. C'est à cette conscience byzantine de l'héritage que nous devons les manuscrits (copies de copies) des six livres I, II, III, "IV", "V", "VI" des *Arithmétiques* qui nous sont parvenus en grec[46]. On pense que les plus anciens de ces manuscrits eux-mêmes

---

[44] Le résultat, sous une forme moins explicite, est dû à J. Tunnel (Inventiones Math. 72 (1983), 323–334). Son raffinement, utilisant un résultat de Waldspuger, a été proposé par D. Zagier. Voyez par exemple [Sch89], [Kob84].

[45] Cette preuve est esquissée, et constitue la seule esquisse explicite que nous ayons d'une preuve par descente chez Fermat ; elle est contenue dans une note de Fermat en marge de son édition de Diophante par Bachet, suivant quelques problèmes de théorie des nombres que Bachet avait ajoutés à la fin du livre VI des *Arithmétiques*. Voyez le livre [Gold95] qui a d'ailleurs inspiré la thèse de base de cet article. Pour la nature de l'édition de Bachet, cf. plus bas, la troisième renaissance.

[46] Voyez la table de [Tan93/95], vol. II, p. XXIII.

datent du XIII^{ème} siècle. L'intégralité de la tradition byzantine des textes remonte à une *édition* originale des *Arithmétiques* différente de celle traduite du grec par Qusṭā Ibn Lūqā. La seconde est plus riche en commentaires des solutions données, et place également à la fin de chaque problème résolu une phrase type qui résume la solution obtenue. On s'est demandé si la copie de Qusṭā Ibn Lūqā n'était pas le *Commentaire* d'Hypatie sur Diophante, mentionné dans l'encyclopédie byzantine Souda (Σουδα)[47].

Si l'intérêt byzantin pour Diophante et d'autres manuscrits anciens était essentiellement motivé par un sens de l'héritage culturel, et non par des intérêts mathématiques actifs comme ceux des savants du monde arabe, cela ne veut évidemment pas dire que les savants byzantins n'étudiaient pas leur Diophante. L'historien des mathématiques Christianidis a récemment proposé une lecture de Diophante à travers la théorie des proportions, qui est la généralisation directe d'un commentaire de Maxime Planude sur le problème II.8 (voyez au chapitre 4 ci-dessus notre brève discussion de ce problème[48]). Christianidis explique ainsi la manière de Planude de reconstruire Diophante : si nous étendons la notation que nous avons utilisée au chapitre 4 pour écrire le problème général II.8 sous la forme $x^2+y^2=a^2$, il est alors évident que la substitution $y=kx-a$ est équivalente à l'affirmation que k est égal à la proportion $(a+y) : x$. Et Christianidis montre comment on peut donner des reconstructions similaires en termes de proportions, cohérentes d'un point de vue mathématique, pour les solutions que donne Diophante à d'autres problèmes indéterminés.

Mais il n'y a aucune pénurie de reconstructions mathématiquement cohérentes des méthodes présumées de Diophante ! L'exposé de Bašmakova dans [Baš74] ou son écho dans la présentation de Zagier ([Zag91]), qui élaborent une classification moderne des problèmes selon le genre de courbes algébriques, sont d'autres exemples. Christianidis attire notre attention sur une vision byzantine de Diophante. Sauf à supposer une rencontre particulière entre les grands esprits de Diophante et Planude sur quelque sept siècles et plus, il n'y a aucune raison d'accorder plus d'autorité à cette lecture qu'à d'autres reconstructions. Mais en tant que lecture byzantine, elle pourrait bien convenir pour comprendre les particularités des manuscrits byzantins sur lesquels repose notre connaissance des livres grecs des *Arithmétiques*.

7. La troisième renaissance de Diophante

Ce premier chapitre de la seconde double renaissance a été initié par l'humaniste Johannes Müller, plus connu sous le nom de Regiomontanus, qui découvrit à la fin de 1463 un des manuscrits byzantins à Venise[49]. Giovanna Cifoletti[50] a montré que, dans les deux cents ans

[47] Cette entrée du Souda est contenue dans [Tan93/95], vol. II, 36 (20–25). Tannery propose une légère modification du texte du manuscrit. Le Souda est une compilation de compilations datant d'environ 1000 ap. J.C. Tannery reproduit l'ancienne interprétation erronée du nom de cette encyclopédie comme nom de personne "Suidas". — Pour la liste la plus complète des œuvres que l'on pourrait attribuer aujourd'hui à Hypatie, voyez [Cam93], p. 49, et les références qui y sont données. Plus spécialement, pour le commentaire sur Diophante, voyez [Ba_78], également [Ses82], 71–75. Ces hypothèses à propos d'un "commentaire majeur" qui aurait été à la base de la traduction de Qusta Ibn Luqa ont été violemment rejetées par Rashed et les siens — voir par exemple [Ras84], tome III, la fin de la longue note de bas de page n° 63, à la page LXII.

[48] [Chr98]. Le moine byzantin Maxime Planude (vers 1255– 1305) est le savant byzantin auquel remonte la plus importante classe de manuscrits grecs des *Arithmétiques* que nous ayons aujourd'hui.

[49] En ce qui concerne Regiomontanus, voyez [Zin68], cf. aussi [Met96] et [Bel85]. Regiomontanus raconte sa découverte d'un ouvrage grec sur l'algèbre dans une lettre à Bianchini datée du 11 février 1464. Il écrit en

qui ont suivi, les *Arithmétiques* de Diophante ont été pris par les créateurs de la nouvelle algèbre comme Gosselin, Stevin, Pelletier, Viète et d'autres, comme preuve ultime que l'algèbre n'était pas une invention arabe, mais avait existé comme science pure chez les Grecs, alors que les Arabes barbares l'avaient dégradée comme discipline appliquée[51]. D'autre part, nous voyons dans cette troisième renaissance presque une répétition de ce que nous trouvions dans le monde arabe lors de la première renaissance : un ensemble de mouvements de théorie des nombres dans lesquels l'approche algébrique commence à rivaliser avec les *Arithmétiques*.

Ainsi, la première édition européenne[52] des (six livres des) *Arithmétiques*, traduction latine réalisée en 1575 à Bâle par l'humaniste Wilhelm Holzmann (1532-1576), qui se faisait appeler *à la grecque* Xylander, fut bientôt suivie par une autre, en grec avec traduction latine, faite avec beaucoup de soin, de nombreuses remarques et additions de problèmes par Bachet de Méziriac, cet *amoureux de nombres* (Paris 1621)[53]. C'est cette édition de Diophante qu'étudia Fermat et dans laquelle il écrivit ses célèbres notes marginales. Comme nous l'avons mentionné plus haut, Fermat introduisit la technique de descente infinie comme nouveauté majeure en arithmétique. Mais pour qu'un argument de descente (c'est-à-dire la contradiction finale) fonctionne, il est essentiel que l'on ait affaire à des solutions (hypothétiques) mesurées par des nombres entiers positifs, et pas seulement par des rationnels ou autres quantités non-discrètes. C'est pourquoi Fermat ne fut pas heureux des tendances algébriques de son époque, en particulier les réussites de Viète, mais également de Diophante, et qu'il essaya de rallier les soutiens à des recherches numériques théoriques dans son style. En fait, il semble que le danger, tel qu'il le vit, de la nouvelle algèbre de son temps de quitter des variables entières pour des variables rationnelles, ou même pour des quantités continues sans avoir à changer de notation, conduisit Fermat à ne pas utiliser de notation algébrique mais la prose latine lorsqu'il faisait de la théorie des nombres, en particulier pour la descente (il n'est pas étonnant alors que les marges aient été souvent trop étroites). Mais il était bien sûr tout à fait conscient de l'importance de Diophante comme source d'inspiration pour sa théorie des nombres et c'est pourquoi il lui arriva de spéculer sur la possibilité qu'il y ait, sur les 7 livres des *Arithmétiques* qui lui étaient inconnus un ou plusieurs qui auraient traité les problèmes en recherchant des solutions entières plutôt que rationnelles. Ceci nous paraît vraiment très peu plausible de nos jours ; c'est un merveilleux exemple des nombreuses approches différentes que l'on a eues de Diophante au fil des siècles[54].

---

particulier, ce qui est assez caractéristique d'un humaniste de l'époque, qu'il aimerait traduire ce texte en latin et le publier, mais pas avant d'avoir trouvé les 7 livres qui manquent sur les 13...

[50] [Cif96], voir aussi [Mor81].

[51] Voyez la préface des Zététiques de Viète [Vau86], p. 271 : "L'art que je produis aujourd'hui est un art nouveau, ou du moins tellement dégradé par le temps, tellement sali et souillé par les barbares, que j'ai cru nécessaire de lui donner une forme entièrement neuve."

[52] Sans compter l'*Algèbre* de Bombelli de 1579, qui contient de nombreux problèmes pris chez Diophante.

[53] Pour ne citer qu'un des nombreux commentaires de Bachet, le fameux exemple sur la possibilité de décomposer des nombres en sommes de 2, 3, ou 4 carrés parfaits, à l'occasion du problème IV.29. Cette remarque a suscité l'assertion marginale générale de Fermat, que tout nombre est la somme d'au plus a nombres a-polygonaux, qui sera prouvée plus tard par Lagrange, Legendre, Gauss pour les carrés (a = 4), et pour a quelconque par Cauchy.

[54] Voyez [Fer91], n° LXXXI, *Second défi de Fermat aux mathématiciens*, février 1657, p. 334 sqq. (traduit du latin par N. Sch. N.d.T.) : « Les questions d'arithmétique pure, presque personne ne les propose, presque personne ne les comprend. Est-ce la raison pour laquelle l'Arithmétique a jusqu'ici été traité de manière géométrique plutôt qu'arithmétique ? C'est ce que montrent de nombreux ouvrages tant anciens que modernes ; et ce que montre Diophante lui-même. Il se tient un peu plus que les autres à l'écart de la géométrie, car il restreint l'Analyse aux seuls nombres rationnels, alors qu'elle n'est pas totalement indépendante de la Géométrie, comme le prouvent à satiété les *Zététiques* de Viète, dans lesquels la méthode de Diophante est étendue à la quantité continue et, par-là, à la Géométrie. Ainsi l'Arithmétique revendique la théorie [*doctrina*] des entiers

Pour donner encore un exemple de la lecture de Diophante dans un certain contexte historique, notons la notice de d'Alembert sur Diophante dans la grande *Encyclopédie* [Ale84]. Il y met en évidence l'utilité des méthodes de Diophante pour la transformation des intégrales de fonctions algébriques, et trouve ainsi l'occasion de citer un des articles qu'il avait publiés en 1746 dans les *Berliner Monatsberichte*.

8. Diophante au vingtième siècle

Et de nos jours ? La renaissance entamée par Regiomontanus, Viète et Fermat a été en quelque sorte menée à sa conclusion par le travail classique d'érudition sur Diophante (aussi bien que sur Fermat) entrepris au tournant du siècle par Heath et Tannery. Au vingtième siècle, j'entrevois une nouvelle renaissance de Diophante, qui a commencé avant même la découverte des quatre livres en arabe dans les années 70. S'il faut donner une date pour marquer la transition de la troisième à la quatrième renaissance de Diophante, je proposerais le programme de recherche de Poincaré ([Poin01]), dans lequel il indique comment l'arsenal de géométrie birationnelle algébrique, qui avait connu un formidable progrès au dix-neuvième siècle, devrait être systématiquement rapporté aux problèmes diophantiens. Le programme de Poincaré suggère de se tourner vers la théorie des courbes algébriques pour comprendre les *Arithmétiques* ; d'utiliser le genre comme invariant de classification pour les problèmes de Diophante ; de voir les cordes et les tangentes là où Diophante choisit des valeurs numériques. La géométrie algébrique a donné le langage moderne qui permet de commenter Diophante. L'impressionnante *success story* de la géométrie algébrique arithmétique au vingtième siècle lui a dressé un monument de plus.

Ce que je trouve le plus fascinant dans la situation actuelle est l'étrange convergence de deux tendances qui sont réellement opposées : à première vue, l'approche historico-philologique semble de nos jours nettement séparée de l'approche créative mathématique, comme ça devrait l'être naturellement. Par exemple, si l'on compare l'édition par Rashed des livres arabes [Ras84] avec l'édition classique par Tannery des livres grecs [Tan93/95], la plus grande différence est que Rashed et ses collaborateurs séparent clairement le commentaire mathématique de la traduction pure, littérale, là où Tannery mêle traduction et retranscription notationnelle dans son texte latin, évitant ainsi un commentaire mathématique séparé. On devrait voir cela comme un progrès naturel, sur les 100 dernières années, de soin philologique apporté aux textes scientifiques. Après tout, les archéologues n'imitent plus non plus le comportement d'Evans lorsqu'il mettait au jour le palais de Knossos en Crête, en jetant tout bonnement les nombreux fragments qui ne provenaient pas de la strate *classique* qu'il étudiait. Cela pourrait également indiquer que notre grille d'interprétation algébrico-géométrique actuelle pour Diophante est bien plus loin du texte que celle de Fermat, même si les éditions courantes n'ont pas encore adopté le langage des schémas de Grothendieck ; Lachaud, qui a préparé le commentaire pour l'édition de Rashed, avait fait un compromis avec le langage utilisé par Weil en 1946 dans son ouvrage *Foundations of Algebraic Geometry*.

Mais en dépit de cette nette séparation du texte historique et de l'interprétation moderne, certains historiens des mathématiques essaient de surpasser les mathématiciens en mêlant une inspiration moderne aux pensées supposées de Diophante. Le pire exemple de cette tendance

---

comme patrimoine propre ; celle-ci, déjà légèrement esquissée par Euclide dans ses *Éléments*, mais pas suffisamment travaillée par ceux qui ont suivi (s'il n'y en pas par hasard une quantité substantielle cachée dans les livres de Diophante que l'adversité du temps nous a retirés) devrait être développée ou rénovée par les Αριθμητικων παιδες qui l'étudient. »

dépourvue de réflexion est donné par l'historienne russe des mathématiques Bašmakova dans son livre sur Diophante [Baš74]. Pour ne donner qu'un exemple révélateur, elle prétend que Diophante utilise aussi les nombres négatifs, en dépit de l'évidence qu'il n'accepte que les solutions rationnelles positives. Pour donner du poids à son argument[55], elle analyse un problème (II.9) en termes de procédés sur les cordes et tangentes, selon lequel Diophante tire « une ligne passant par le point (2 ;–3) ». Le fait que ni la ligne ni le point ne soient mentionnés par Diophante ne semble pas distraire cet auteur de sa confusion systématique entre sa propre interprétation mathématique et le contenu du texte.

Contrairement à l'historien, on ne peut pas demander à un mathématicien de séparer ses idées créatives du texte. Après tout, sa tâche n'est pas de faire de l'histoire des mathématiques, mais de se servir de Diophante comme d'une sorte de collègue virtuel dans la recherche de nouveaux problèmes et théorèmes. Pour conclure, jetons un coup d'œil sur la thèse qu'a passée Joseph L. Wetherell à Berkeley en 1998 : *Bounding the number of rational points on certain curves of high rank*[56]. Ce travail démarre du problème VI.17 du troisième livre arabe :

> *Problème VI.17. Trouver trois nombres carrés tels que si on les additionne il en résulte un carré, et tels que le premier de ces nombres soit égal au côté du deuxième et que le deuxième soit égal au côté du troisième*[57].

Appelons le premier nombre, qui doit être un carré, x^2, le second est alors x^4 et le troisième x^8, et nous voulons que $x^2+x^4+x^8$ soit un carré, que nous pourrions écrire y^2 en notation moderne. Diophante résout ce problème en prenant pour y la quantité $x^4+\frac{1}{2}$. Cela donne l'équation

$$x^2+x^4+x^8 = x^8+x^4+\frac{1}{4}$$

dans laquelle nous pouvons, en accord avec les premiers principes des *Arithmétiques*, simplifier les termes d'ordre égal. Cela donne

$$x^2=\frac{1}{4}$$

et de là, (puisque seules sont acceptables les solutions en nombres rationnels positifs) la solution $x=\frac{1}{2}$. Ainsi le premier nombre cherché est $\frac{1}{4}$, le second (qui doit être le carré du premier) « la moitié d'un huitième » comme le dit Diophante, et le troisième est 1/256. Leur somme est 81/256, qui est évidemment un carré. Cela met fin à un des problèmes des *Arithmétiques* qui appartient clairement aux moins compliqués.

Son rôle particulier, lorsqu'on le regarde à travers nos lunettes modernes, vient de l'observation que, de nos jours, nous substituons instinctivement dans l'équation

$$y^2=x^8+x^4+x^2$$

la quantité xw à y et obtenons ainsi la courbe hyperelliptique

---

[55] [Baš74], p. 36.

[56] Je remercie Wetherell (jlwether@alum.mit.edu ou wetherel@math.usc.edu) de m'avoir envoyé rapidement les fichiers.

[57] Voir [Ras84], tome IV, 65. Cf. [Ses82], p. 149 sq. Ce problème est simplement omis dans le *Conspectus* de tous les problèmes dans l'édition de Rashed ([Ras84], tome IV, p. 129), apparemment parce qu'il ne correspond à aucun groupe de problèmes de manière évidente.

$$w^2=x^6+x^2+1$$

Un éclatement à l'infini transforme cette courbe en une courbe projective lisse de genre 2. Selon le théorème de Gerd Faltings de 1983 (l'ancienne conjecture de Mordell), une telle courbe ne peut avoir qu'un nombre fini de points rationnels. Ainsi Wetherell écrit dans son introduction :

« Ce travail est motivé par un problème des *Arithmétiques* de Diophante. Dans le problème 17 du livre 6 du manuscrit arabe, Diophante pose un problème qui revient à chercher les solutions rationnelles positives de $y^2=x^6+x^2+1$. Cette équation est celle d'une courbe de genre 2 que nous appellerons C. Diophante donne la solution (1/2, 9/8) et une question naturelle est de savoir s'il y a d'autres solutions rationnelles positives. Il est clair qu'il suffira de trouver tous les points rationnels sur C. En plus de la solution donnée par Diophante et des 3 variations évidentes obtenues en prenant les opposés des coordonnées x et y, nous avons les quatre solutions triviales $(0, 1)$, $(0, -1)$, ∞^+ et ∞^- ; ici, ∞^+ et ∞^- sont les points de la courbe non-singulière qui sont superposés au point à l'infini dans le modèle hyperelliptique de C.

C est fascinant à plus d'un titre. D'abord, il apparaît être la seule courbe de genre supérieur à un dans les dix livres connus des *Arithmétiques*[58]. Puisque le genre est plus grand que 1, nous savons par le théorème de Faltings que C n'a qu'un nombre fini de points rationnels. Cela a donc un sens de se demander si Diophante avait trouvé toutes les solutions rationnelles positives. En d'autres termes, les 8 solutions que nous avons décrites sont-elles les seuls points rationnels de C ?

Deuxièmement, si C a bon nombre de propriétés agréables, cette courbe est tout de même hors d'atteinte pour les méthodes ordinaires de détermination de l'ensemble des points rationnels d'une courbe de genre 2. En particulier, C est recouvrement de deux courbes elliptiques :

$$E_1 : y^2 = x^3+ x +1$$
$$E_2 : y^2 = x^3+ x^2 +1$$

Si l'une ou l'autre de ces courbes elliptiques n'avait de points rationnels qu'en nombre fini, un rapide calcul permettrait de trouver l'ensemble des points rationnels de C ; cependant, E_1 et E_2 sont toutes les deux de rang 1. Dans le même ordre d'idées, si $J = \mathrm{Jac}(C)$ était de rang 0, un calcul fini déterminera $C(\mathbf{Q})$. Si J était de rang 1, il serait possible de borner le nombre de points dans $C(\mathbf{Q})$ en utilisant la description explicite de Flynn des calculs de Chabauty sur les courbes de genre 2. Mais J est isogène au produit $E_1 \times E_2$, et donc J est de rang 2. »

En utilisant un raffinement et un renforcement de la méthode de Chabauty, Wetherell parvient finalement à montrer que l'équation $y^2 = x^6+ x^2 +1$ n'a que les six solutions (x, y) avec x et y rationnels qui se déduisent immédiatement de la solution de Diophante.

Il est passionnant de voir comment un problème vieux de plus de 1700 ans peut engendrer un sujet de recherche intéressant de nos jours. Il est clair que notre intérêt mathématique pour

[58] *Note de N. Sch.* : Ce n'est pas vrai. Il y a un autre exemple dans les livres grecs, situé après le livre VII des *Arithmétiques* : le problème "IV".18.

le travail de Wetherell ne vient pas de son résultat mais de la méthode subtile qu'il applique. Et si nous prenons quelque peu garde à la perspective historique, nous ne devrions pas oublier que le problème diophantien résolu ici, c'est-à-dire de déterminer *toutes* les solutions rationnelles de l'équation donnée, est de ceux que Diophante n'aurait pas été capable d'exprimer.

Bibliographie

[Ale84] Alembert J. (Le Rond d') (1784) Diophante, in *Encyclopédie méthodique. Mathématiques, tome premier*, Paris (Planckoucke) / Liège (Plomteux), p. 533-534.

[Anb79] Anbouba A. (1979) Un traité d'Abu Ja'far [al- Khazin] sur les triangles rectangles numériques, *Journal for the History of Arabic Science* (Alep, Syrie), 3, (1), p. 134-156.

[Baš74] Bašmakova I. G. (1974) *Diophant und Diophantische Gleichungen*, Berlin (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.)

[Baš78] Bašmakova I. G., Slavoutine E. I., Rosenfeld B. A. (1978) The Arabic version of the Arithmetics of Diophant (en russe), *Istor. Mat. Issledov.*, Moscou, 13.

[Bel85] Belyi Iu.A. (1985) *Regiomontan* (en russe), Moscou (NAUKA).

[Bur91] Burton D.M. (1991/95) *History of Mathematics*, Dubuque, IA, Wm.C. Brown Publishers.

[Cam93] Cameron A., Long J. (avec une contribution de L. Sherry) (1993), *Barbarians and Politics at the Court of Arcadius*, Berkeley CA, U. Cal. Press.

[Can07] Cantor M. (1907), *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, vol. I (von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr.), 3ème édition, Leipzig, Teubner.

[Cav97] Caveing M. (1997) *La figure et le nombre. Recherches sur les premières mathématiques des Grecs. La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*, Paris (Septentrion).

[Cif96] Cifoletti G. (1996) The creation of the history of algebra in the 16th century, *in* L'Europe Mathématique – Mathematical Europe (sous la dir. de Goldstein, Ritter, Gray), Paris (MSH), p. 123–142.

[Chr98] Christianidis J. (1998) Une interprétation byzantine de Diophante, *Historia Math.* 25, p. 22–28.

[Dzi95] Dzielska M. (1995) Hypatia of Alexandria, traduit par F. Lyra, *Revealing Antiquity*, 8, Cambridge, Mass., London, Harvard University Press.

[Fer91] Fermat Pierre de *Œuvres de Fermat, publiées par P. Tannery et Ch. Henry* ; Paris (Gauthier-Villars), tomes I – IV, 1891-1912.

[Ger84] Gericke H. (1984) *Mathematik in Antike und Orient*, Heidelberg, etc., Springer Verlag ; réédition Wiesbaden, Fourier Verlag, 1992, qui contient aussi : *Mathematik im Abendland von den römischen Feldmessern bis zu Descartes*, également de Gericke.

[Gold95] Goldstein C. (1995) *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, Saint-Denis, Presses Universitaires de Vincennes.

[Gup95] Gupta RC. (1995) Ancient Indian mathematics : some highlights, *Science in the West and India, Some Historical Aspects*, sous la dir. de B.V. Subbarayappa, N. Mukunda, Bombay, etc., Himalaya Publ. House.

[Han74] Hankel H. (1874) *Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Leipzig ; seconde édition, sous la dir. de J.E. Hofmann, Hildesheim, Olms, 1965.

[Har95] Harder G. (1995) Diophantische Gleichungen : ein zweitausend Jahre altes Thema der Mathematik, *Jahrbuch 1994 der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina,* 40, 267-278.

[Hea21] Heath T. (1921) *A History of Greek Mathematics, volume II : from Aristarchus to Diophante*, Oxford, Clarendon Press.

[Jac47] Jacobi C. G. J. (1847) Uber die Kenntnisse des Diophante von der Zusammensetzung der Zahlen aus zwei Quadraten nebst Emendation der Stelle Probl. Arith. V.12, *Monatsbericht Akad. Wiss. Berlin*, August 1847, p. 265-278 (Gesammelte Werke VII, p. 332–344).

[Kle92] Klein J. (1968) *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, traduit de l'allemand par Eva Brann, Cambridge, Mass., MIT Press. J'utilise le reprint Dover de 92.

[Kob84] Koblitz N. (1984) *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms*, Springer GTM, 97 : New York, etc.

[Met96] Mett R. (1996) *Regiomontanus, Wegbereiter des neuen Weltbildes, Einblicke in die Wissenschaft*, Stuttgart, Leipzig, Teubner.

[Mor81] Morse J. (1981) *The reception of Diophante* Arithmetic *in the Renaissance*, thèse de Doctorat (Ph. D.), Ann Arbor, Michigan.

[Nel21] Nelson L. (1921) *SPUK, Einweihung in das Geheimnis der Wahrsagerkunst Oswald Spenglers und sonnenklarer Beweis der Unwiderleglichkeit seiner Weissagungen nebst Beiträgen zur Physiognomik des Zeitgeistes. Eine Pfingstausgabe für alle Adepten des metaphysischen Schauens*, Leipzig, Verlag der Neue Geist, Dr. P. Reinhold.

[Neu75] Neugebauer O. (1975) *A history of ancient mathematical astronomy, Part Two*, Berlin-Heidelberg-etc. , Springer.

[Poin01] Poincaré H. (1901) Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques, *Journal de Mathématiques*, 5ème série, t. 7, fasc. III, 1901, p. 161-233 (Œuvres V, p. 483–550).

[Ras79] Rashed R. (1979) L'analyse diophantienne au Xème siècle, l'exemple de Al-Khazin, *Revue d'Histoire des Sciences* XXXII/3, p. 193-222.

[Ras84] Rashed R. (1984) *Diophante. Les Arithmétiques, tome III (livre IV) et tome IV (livres V, VI, VII)*. Texte établi et traduit par Roshdi Rashed, Paris, Les Belles Lettres.

[Ras97] Rashed R. (1997) *Histoire des Sciences Arabes, sous la direction de Roshdi Rashed avec la collaboration de Régis Morelon*, tome 2 : Mathématiques et physique, Paris, Seuil.

[Sch89] Schappacher N. (1989) Neuere Forschungsergebnisse in der Arithmetik elliptischer Kurven, *Didaktik der Mathematik*, 17, p. 149-158.

[Ses82] Sesiano J. (1982) *Books IV to VII of Diophante* Arithmetica *in the Arabic Translation Attributed to Qusta ibn Luqa*, New York-Heidelberg-Berlin, Springer.

[Spe23] Spengler O. (1923) *Der Untergang des Abendlandes* (2 Bände), nous utilisons les *Gesamtausgabe*, dtv, 1972.

[Tan93/95] Tannery P. (1893/95) *Diophante d'Alexandrie, opera omnia*, I & II, Leipzig, Teubner ; j'utilise le reprint de Stuttgart, Bibliotheca Teubneriana, 1974.

[Tan12] Tannery P. (1912) *Mémoires Scientifiques de Paul Tannery, publiés par J. L. Heiberg et H.G. Zeuthen*, cinq volumes ; tome II, Paris, Gauthier-Villars.

[Tho41] Thomas I. (1941) *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*, vol. II, Loeb Classical Library, Cambridge (Mass.) et London.

[Vau86] de Vaulézard J.-L. (1986) *Introduction en l'art analytic ou nouvelle algèbre, & Les cinq livres des zététiques de François Viète* ; traduction de Vaulézard, première édition, 1630. Nouvelle édition par Jean-Robert Armogathe *in* Corpus des œuvres de philosophie en langue française, Paris, Fayard.

[Ver59] Ver Eecke P. (1959) *Diophante d'Alexandrie, les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones, œuvres traduites pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes* ; nouveau tirage 1959, Paris (Blanchard).

[Wei83] Weil A. (1983) *Number Theory. An approach through history. From Hammurapi to Legendre* ; Boston, etc. (Birkhäuser).

[Zag91] Zagier D. (1991) Lösungen von Gleichungen in ganzen Zahlen, in *Miscellanea Mathematica* (eds. Hilton, Hirzebruch, Remmert), Berlin, Heidelberg. (Springer) ; p. 311–326.

[Zin68] Zinner E. (1968) *Leben und Wirken des Johannes Müller von Königsberg* (seconde édition), Osnabrück (Otto Zeller).