ensembles $f(\delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}E)$ seront tous non dénombrables et disjoints (pour les systèmes d'indices différents), et nous aurons toujours la formule (2).

Posons

$$P=\sum\delta_{\alpha}\,\delta_{\alpha_1\alpha_2}\,\delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\ldots, \tag{3}$$

la sommation s'étendant à toutes les suites infinies $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots,$ formées des nombres 0 et 1. Les intervalles $\delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ étant fermés, il résulte tout de suite de (2) et (1) que l'ensemble P est fermé et borné et contenu dans E. La fonction $f(x)$ étant continue dans E, l'ensemble $f(P)$ est donc aussi fermé.

Or, de (3) résulte que

$$f(P)=\sum f(\delta_{\alpha_1}\,\delta_{\alpha_1\alpha_2}\,\delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\ldots). \tag{4}$$

Je dis que l'ensemble $f(P)$ est non dénombrable. Pour le prouver, il suffira évidemment de démontrer que les termes de la série (4) sont tout non vides et sans éléments communs deux à deux.

Soit donc $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots,$ une suite infinie formée d'indices 0 et 1: d'après (2), $\delta_{\alpha_1}, \delta_{\alpha_1\alpha_2}, \delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \ldots$ est une suite infinie d'intervalles fermés contenus chacun dans le précédant, et parsuite le produit $\delta_{\alpha_1}\delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\ldots$ est non vide, donc aussi l'ensemble $f(\delta_{\alpha_1}\,\delta_{\alpha_1\alpha_2}\,\delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\ldots)$.

Or, soit $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ une suite infinie d'indices 0 et 1, distincte de la suite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ Soit k le plus petit indice, tel que $\beta_k \neq \alpha_k$, p. e. $\alpha_k = 0$, $\beta_k = 1$. D'après (2) et (1) on a

$$\delta_{\alpha_1}\,\delta_{\alpha_1\alpha_2}\,\delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\ldots \subset E\,\delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} = E\,\delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}0}$$

$$\delta_{\beta_1}\,\delta_{\beta_1\beta_2}\,\delta_{\beta_1\beta_2\beta_3}\ldots \subset E\,\delta_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k} = E\,\delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}1};$$

or, comme nous savons, $f(E\,\delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}0})\,f(E\,\delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{q-1}1})=0$: on a donc

$$f(\delta_{\alpha_1}\,\delta_{\alpha_1\alpha_2}\,\delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\ldots)\,.\,f(\delta_{\beta_1}\,\delta_{\beta_1\beta_2}\,\delta_{\beta_1\beta_2\beta_3}\ldots)=0,$$

c. q. f. d.

L'ensemble $f(P)$ est donc non dénombrable et, comme fermé, contient un sous-ensemble parfait.

L'ensemble de tous les nombres irrationnels étant un G_δ, le théorème de M. Souslin est démontré.

Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon.

Par

Otton Nikodym (Cracovie).

Le mémoire présent contient une partie de résultats que j'ai présenté dans une communication pendant le *I Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves* à Varsovie 1929 (septembre).

M. Fréchet [1]) a généralisé pour les ensembles abstraits la théorie de la mesure et de l'intégration de M. Radon [2]). Il envisage une famille additive $\mathcal{F}$ d'ensembles [3]) et, en considérant comme „mesure" une fonction (fixe mais arbitraire d'ailleurs) additive [4]) $\psi(E)$ d'ensembles de $\mathcal{F}$, il donne l'esquisse d'une théorie d'intégration analogue à celle de M. Lebesgue.

Je préfère de construire la même théorie d'intégration sur la notion du *corps d'ensembles*. J'entend par là toute famille non vide $\mathcal{K}$ de sous-ensembles d'une variété *1* (dont les éléments sont des objets quelconques) jouissant de deux propriétés suivantes [5]):

[1]) *Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait. Bull. de la Soc. Math. de France 1915.* t. XLIII.

[2]) J. Radon. *Theorie u. Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen. Sitzber, der Math.-Naturwiss. Klasse der Kais. Akademie der Wiss.* Wien 1913. 112 Bd. Abt II a/2.

[3]) C'est-à-dire: 1° si $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ appartiennent à $\mathcal{F}$, leur somme y appartient aussi, 2° si E_1, E_2 appartiennent à $\mathcal{F}$, il y en est de même pour $E_1 - E_2$. La famille $\mathcal{F}$ est donc „close" par rapport à l'addition dénombrable et par rapport à la soustraction d'ensembles.

[4]) Ça veut dire que, si E_n $(n=1, 2, \ldots)$ sont des ensembles disjoints de $\mathcal{F}$, on a $\psi(E_1+E_2+\ldots)=\psi(E_1)+\psi(E_2)+\ldots$ Je m'exprime: „parfaitement additive".

[5]) De telles familles se trouvent dans le travail de M. Sierpiński. *Un théorème général sur les familles d'ensembles. Fund. Math.* t. XII. 1928, p. 206. Elles se trouvent aussi chez M. Radon l. c.

Le mot „corps d'ensembles" est employé par M. H. Hahn dans sa „*Theorie der reellen Funktionen I Bd.*" p. 293 et p. 394, mais dans le sens différent.

1° si $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ est une suite infinie d'ensembles de $\mathcal{K}$, l'ensemble $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ appartient aussi à $\mathcal{K}$.

2° si $E \epsilon \mathcal{K}$, l'ensemble $co\, E$, c'est-à-dire le complémentaire de E par rapport à 1, appartient aussi à $\mathcal{K}$.

D'autre part je me borne aux „mesures“ $\psi(E)$ non négatives.

En effet, comme je vais le montrer tout de suite, les corps semblent être mieux accommodés à la théorie d'intégration que les familles $\mathcal{F}$ „closes“ par rapport à l'addition dénombrable et à la soustraction, quoique la théorie d'intégration reste la même.

On voit, que tout corps d'ensemble est aussi une famille additive au sens de M. Lebesgue[6]) et Fréchet[7]) mais pas réciproquement. En effet, la classe de tous les ensembles E qui sont de 1^e catégorie de Baire par rapport à l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$ est une famille „additive“ mais elle n'est pas un corps d'ensembles, puisque $co\, E$ est toujours de 2^e catégorie.

Néanmoins la théorie d'intégration fondée sur la notion du corps n'est pas moins générale. En effet, soit $\mathcal{F}$ une „famille“ additive et $\mu(E) \geqslant 0$ une fonction[8]) (parfaitement) additive servant de „mesure“ pour les ensembles de $\mathcal{F}$. On sait, que $\mu(E)$ est une fonction bornée dans $\mathcal{F}$. Soit M sa borne supérieure. Il existe une suite infinie d'ensembles de $\mathcal{F}$:

$$E_1,\ E_2, \ldots,\ E_n, \ldots$$

telle que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = M.$$

Il en résulte aisément que $\mu(\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n) = M$.

Posons

$$E_0 \underset{df}{=} \sum_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Si $E \,.\, E_0 = 0$, on a nécessairement $\mu(E) = 0$; par conséquent la „partie“ de la famille $\mathcal{F}$ se trouvant „en déhors“ de E_0 ne joue aucun rôle dans l'intégration. C'est seulement le corps composé de tous les sous-ensembles de E_0 et appartenant à $\mathcal{F}$ qui y intervient.

[6]) Ann. Ec. Norm. Sep. (3) 27. 1910).

[7]) l. c.

[8]) La remarque qui suit, peut être généralisée au cas de la „mesure“ quelconque.

Voilà maintenant les raisons pour lesquelles nous nous bornons à considérer des „mesures“ non négatives. Dans le cas général le théorème suivant ne subsiste pas:

Si $\text{mes}\, E_n \to 0$ pour $n \to \infty$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f = 0.$$

Ce théorème exprime une propriété qui combinée avec l'additivité parfaite pour les intégrales $\int_E f$ rend la théorie de M. Lebesgue si harmonieuse et importante.

Si l'on admet notre point de vue, la théorie se développe avec une grande facilité et simplicité, étant donné qu'on a plus de moyens pour les démonstrations. Le cas général, où la mesure est quelconque, se ramène aisément au cas, où la mesure est positive[9]).

Les intégrales $\int_E f\, d\mu$ que je vais étudier jouissent d'une propriété fondamentale (mentionnée plus haut) qui représente une généralisation de la propriété de la continuité absolue des intégrales de M. Lebesgue. La notion en question, qui fut introduit par M. Vitali pour les fonctions d une variable réelle, se traduit pour les intégrales lebesguiennes par le fait suivant:

$$\text{si}\quad \text{mes}\, E_n \to 0, \quad \text{on a} \quad \int_{E_n} f\, dx \to 0;$$

et une propriété analogue subsiste pour les intégrales de M. Radon[10]). Pour avoir une analogie avec la continuité ordinaire, nous allons introduire la notion de la „*μ-distance*“ de deux ensembles du corps considéré, en posant[11]):

$$\|E, F\|_\mu \underset{df}{=} \mu(E - F) + \mu(F - E).$$

Cette notion jouissant des propriétés usuelles de la distance, le corps $\mathcal{K}$ peut être considéré comme un espace métrique au sens de M. Hausdorff.

[9]) Voir le § 6 du travail présent (le théorème de M. Hahn et Franck).

[10]) et celles de M. Fréchet dans le cas, où la „mesure“ est non négative (ou non positive).

[11]) Dans le cas de la „mesure“ quelconque on peut poser:

$$\mu'(E) \underset{df}{=} \int_E |d\mu| \quad \text{et considérer} \quad \|E, F\|_{\mu'}. \qquad (\text{voir } ^1))$$

Il est complèt, si l'on définit le passage à la *μ-limite*: $E_n \to_\mu E$ par la relation

$$\|E_n, E\|_\mu \to 0 \quad \text{pour} \quad n \to \infty.$$

Or, la continuité („absolue") de la fonction d'ensembles

$$\mathcal{F}(E) \underset{df}{=} \int_E f\,d\mu$$

est équivalente à la condition que $E_n \to_\mu E$ entraîne

$$\mathcal{F}(E_n) \to \mathcal{F}(E).$$

La notion de la *μ-distance* de deux ensembles est aussi trouvée et étudiée par M. Aronschein[12]) d'une manière indépendante et représente une généralisation d'un cas particulier de la notion de distance de deux fonctions introduite par M. Fréchet[13]).

En partant de la notion du corps d'ensembles et de la fonction d'ensembles (parfaitement) additive, on peut développer toute la théorie de mesurabilité et celle de l'intégrale parfaitement additive et continue. Remarquons que la mesurabilité pour les ensembles et pour les fonctions n'a rien à faire avec la notion de la mesure. C'est pourquoi nous préférons d'employer le mot „appartenant au corps" au lieu de dire „mesurable". Ce n'est que la sommabilité qui dépend de la mesure.

En ce qui concerne l'architecture de la théorie que je vais présenter ici, on pourrait imiter le procédé de M. Lebesgue. Néanmoins, pour parvenir plus vite aux théorèmes plus intéressants, nous avons choisi des définitions différentes (quoique équivalentes) de celles de M. Lebesgue. La théorie commence par une dixaine de

[12]) Il va publier un travail correspondant.

[13]) *Bulletin of the Calcutta Mathem. Society* 1921. *Sur les diverses modes de convergence d'une suite de fonctions d'une variable.*

En ce qui concerne la notion de la distance de deux ensembles mesurables (*L*), j'ai la trouvée d'une manière indépendante de M. Fréchet et en même temps j'en ai aperçu (mais non publié) l'importance pour les intégrales lebesguiennes, en trouvant que l'additivité parfaite et la continuité respective sont caractéristiques pour les intégrales de M. Lebesgue considérées comme des fonctions d'ensembles. C'est pourquoi M. Ważewski m'a cité dans sa note insérée dans les *C. R. Paris 1923.* Voir aussi M. Fréchet *Sur la distance de deux ensembles. Calcutta Math. Soc. Bull.* 15. (1924), où M. Fréchet réclame sa priorité.

théorèmes auxiliaires A, B, C,... et lemmes faciles à obtenir. Ce qui est un peu plus intéressant, c'est le théorème suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\mathcal{F}(E)$ soit parfaitement additive et μ-continue est qu'il existe une fonction μ-sommable $f(x)$ telle que

$$\mathcal{F}(E) = \int_E f\,d\mu$$

pour tout $E \in \mathcal{K}$.

Ce théorème qui fut démontré par M. Lebesgue et généralisé par M. Radon au cas, où la variété $\mathit{1}$ est un sous-ensemble de l'espace Euclidien, est chez nous démontré dans toute sa généralité. (La démonstration de M. Radon s'appuie sur le résultat mentionné de M. Lebesgue et, par conséquent, elle est fondée sur le théorème „des couvertures" de M. Vitali).

Le théorème en question montre qu'il suffit d'envisager des mesures non négatives pour donner une représentation générale des fonctions parfaitement additives d'ensembles.

§ 1. ***Définition 1.*** Étant donné une variété abstraite $\mathit{1}$ (non vide) d'éléments quelconques, appelons *corps relative à 1*, ou plus brièvement *corps*, toutes classe non vide $\mathcal{K}$ de sousensembles de $\mathit{1}$, telle que:

1° *si* $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots \in \mathcal{K}$, *on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{K},$$

2° *si* $E \in \mathcal{K}$, *on a* $coE \in \mathcal{K}$.

L'ensemble $\mathit{1}$ s'appelle *la variété du corps* $\mathcal{K}$.

On voit aisément que la variété $\mathit{1}$ ainsi que l'ensemble vide $\mathit{0}$ appartiennent nécessairement au corps $\mathcal{K}$.

On voit aussi que la différence, le produit fini ou infini dénombrable et la somme finie d'ensembles appartenant au corps $\mathcal{K}$, lui appartiennent aussi. Il y en est de même pour l'ensemble limite restreint $\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n$ et pour l'ensemble limite complet[14]) $\overline{\lim} E_n$, dès que les E_n appartiennent à $\mathcal{K}$.

[14]) Par $\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n$ on entend l'ensemble

$$(E_1.E_2.E_3\ldots)+(E_2.E_3\ldots)+\ldots;$$

Pour avoir des exemples des corps il suffit mentionner 1) la classe de tous les ensembles mesurables **(B)** de points d'un espace euclidien, 2) la classe de tous les ensembles mesurables **(L)** 3) la classe M_Ω de tous les ensembles qu'on peut obtenir des ensembles **(A)** (de Souslin et M. Lusin) en leur appliquant successivement l'opération de la sommation dénombrable et celle du complémentaire [15]), 4) la classe composée seulement de deux ensembles: *1* et *0*, 5) la classe de tous les sous-ensembles d'un ensemble donné p. ex. de l'ensemble de tous les nombres naturels.

Définition 2. Par une *fonction parfaitement additive dans le corps* $\mathcal{K}$ nous allons entendre toute fonction d'ensembles $f(E)$, déterminée pour tout $E \epsilon \mathcal{K}$, dont les valeurs sont des nombres réels et telle que, si $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ est une suite d'ensembles disjoints du corps $\mathcal{K}$, on a toujours:

$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f(E_n). \tag{1}$$

De la *définition 2* il résulte immédiatement que, si $E = 0$, on a $f(E) = 0$. Il s'ensuit que la relation (1) subsiste pour un nombre fini d'ensembles disjoints.

En ce qui concerne les fonctions parfaitement additives, mentionnons la propriété connue suivante [16]): Si $E_n \epsilon \mathcal{K}$ $(n = 1, 2 \dots)$ et $\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} E_n = E$, on a

$$\lim_{n\to\infty} f(E_n) = f(E_n).$$

Il en résulte que, si $E_n \epsilon \mathcal{K}$, $(n = 1, 2, \dots)$, $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_n \supset \dots$, $E_n = \prod_{n\to\infty}^{\infty} E_n$, on a

$$\lim_{n\to\infty} f(E_n) = f(E).$$

---

par $\overline{\lim}_{n\to\infty} E_n$ l'ensemble

$$(E_1 + E_2 + E_3 + \dots) \, . \, (E_2 + E_3 + \dots) \dots$$

Si $\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} E_n$, on écrit $\lim_{n\to\infty} E_n$.

[15]) Voir O. Nikodym. *Sur les diverses classes d'ensembles. Fund. Math. t. XIV.* p. 192. Def. V. (La classe de tous les ensembles **(A)** ne constitue pas un corps).

[16]) M. Fréchet. *Des familles et fonctions additives d'ensembles abstraits. Fund. Math. IV.* 1923. p. 345.

D'une manière analogue, si $E_n \epsilon \mathcal{K}$, $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \subset \dots$, $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$, on a $\lim_{n\to\infty} f(E_n) = f(E)$.

§ 2. ***Définition 3.*** Soit donné un corps. Choisissons une fonction fixe $\mu(E)$, parfaitement additive du corps et non négative partout. Nous l'appellerons fonction mesurante ou brièvement mesure (de E).

Théor. a. Il est remarquable que les ensembles E du corps peuvent être considérés comme les éléments d'un espace métrique au sens de M. Hausdorff.

Définition 4. En effet, appelons la μ-distance de deux ensembles E, F du corps $\mathcal{K}$ le nombre:

$$\| E, F \|_\mu \underset{df}{=} \mu(E - F) + \mu(F - E).$$

Définition 5. Dans le cas, où $\| E, F \|_\mu = 0$, nous appelons E et F *μ-égales* et écrirons $E =_\mu F$.

Voilà les propriétés de la distance introduite.

1) Évidemment $\| E, F \|_\mu \geqslant 0$, la fonction μ étant non négative.

2) On a $\| E, F \|_\mu = \| F, E \|_\mu$.

3) La condition nécessaire et suffisante pour que $E =_\mu F$ est que $\| E, F \|_\mu = 0$, ce qui résulte immédiatement de la définition de la μ-égalité.

4) $\| E, F \|_\mu \leqslant \| E, G \|_\mu + \| G, F \|_\mu$.

En effet, on a toujours [17])

$$E - F \subset (E - G) + (G - F). \tag{2}$$

Comme $(E - G) . (G - F) = 0$, la relation (2) entraîne

$$\begin{aligned} \mu(E - F) &\leqslant \mu[(E - G) + (G - F)] \\ &\leqslant \mu(E - G) + \mu(G - F). \end{aligned}$$

[17]) Si $x \epsilon E$, $x \epsilon \mathrm{co} F$, on a, ou $x \epsilon E - G$, ou bien $x \epsilon E . G$, puisque $E = E . G + (E - G)$. Dans le cas premier: $x \epsilon (E - G) + (G - F)$. Dans le cas restant: $x \epsilon G$ et $x \epsilon \mathrm{co} F$, donc $x \epsilon G - F$, donc à fortiori $x \epsilon (E - G) + (G - F)$.

D'une manière analogue on obtient:

$$\mu(F-E) \leqslant \mu(F-G) + \mu(G-F).$$

Les relations démontrées impliquent la proposition.

Théor. b. La notion de la μ-distance est invariante par rapport à la notion de la μ-égalité de deux ensembles.

Démonstration. En effet, soit $E =_\mu E'$. On a, d'après la *déf.* 5:

$$\mu(E-E') = \mu(E'-E) = 0.$$

Comme

$$E'-F \subset (E'-E) + (E-F)$$

et

$$(E'-E)(E-F) = 0,$$

on a:

$$\mu(E'-F) \leqslant \mu(E'-E) + \mu(E-F),$$

donc

$$\mu(E'-F) \leqslant \mu(E-F).$$

D'autre part

$$F-E' \subset (F-E) + (E-E'),$$

ce que donne

$$\mu(F-E') \leqslant \mu(F-E).$$

Par conséquent:

$$\|E', F\|_\mu \leqslant \|E, F\|_\mu$$

Mais, d'une manière analogue on démontre que

$$\|E, F\|_\mu \leqslant \|E', F\|_\mu.$$

Il en résulte l'équation

(3) $$\|E, F\|_\mu = \|E', F\|_\mu.$$

Nous avons ainsi démontré que la relation $E =_\mu E'$ implique (3). On en déduit aisément que les relations $E =_\mu E'$, $F =_\mu F'$ impliquent

$$\|E, F\|_\mu = \|E', F'\|_\mu.$$

Étant donné la notion de distance, introduisons la notion correspondante de la *μ-limite* d'une suite infinie d'ensembles du corps $\mathscr{K}$.

Définition 6. Définissons $E_n \rightarrow_\mu E$[18]) comme exprimant le même que $\|E_n, E\|_\mu \rightarrow 0$.

Théor. c. La variété $\mathscr{K}$ metrisée ainsi est complète. Ça veut dire ce qui suit: la condition nécessaire et suffisante pour que E_n tend en μ-mesure vers F est que, quel que soit le nombre positif σ, on peut trouver un nombre ν tel que les relations $n \geqslant \nu$, $m \geqslant \nu$ entraînent

$$\|E_n, E_m\|_\mu < \sigma.$$

Démonstration. Le nécessité est évidente, puisque elle résulte immédiatement de la propriété „du triangle" de la distance. Montrons qu'elle est suffisante. Supposons donc qu'elle soit remplie.

Soient $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ des nombres positifs tels que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ converge. Déterminons les nombres naturels $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \ldots$ de sorte que l'inégalité

(1) $$\|E_n, E_m\|_\mu > \sigma_k$$

subsiste dès que les indices n et m sont $\geqslant \nu_k$, $(k = 1, 2, \ldots)$. Considérons l'ensemble

(2) $$E \underset{df}{=} (E_{\nu_1} + E_{\nu_2} + \ldots) . (E_{\nu_2} + E_{\nu_3} + \ldots) \ldots$$

E est un ensemble du corps $\mathscr{K}$.

Or, on a

$$E_{\nu_k} + E_{\nu_{k+1}} + \ldots = E_{\nu_k} + (E_{\nu_{k+1}} - E_{\nu_k}) + (E_{\nu_{k+2}} - E_{\nu_{k+1}}) + \ldots$$

Donc

$$(E_{\nu_k} + E_{\nu_{k+1}} + \ldots) - E_{\nu_k} \subset (E_{\nu_{k+1}} - E_{\nu_k}) + (E_{\nu_{k+2}} - E_{\nu_{k+1}}) + \ldots,$$

puisque le membre gauche est identique à

$$(E_{\nu_k} - E_{\nu_k}) + (E_{\nu_{k+1}} - E_{\nu_k}) . co\, E_{\nu_k} + (E_{\nu_{k+2}} - E_{\nu_{k+1}}) . co\, E_{\nu_k} + \ldots$$

On a donc:

$$\mu[(E_{\nu_k} + E_{\nu_{k+1}} + \ldots) - E_{\nu_k}] \leqslant \mu(E_{\nu_{k+1}} - E_{\nu_k}) + \mu(E_{\nu_{k+2}} - E_{\nu_{k+1}}) + \ldots$$
$$\leqslant \sigma_k + \sigma_{k+1} + \ldots$$

[18]) Nous disons *E_n tend en μ-mesure vers E.*

Par conséquent:

(3) $\mu[(E_{\nu_k}+E_{\nu_{k+1}}+\ldots)-E_{\nu_k}]\to 0$ pour $k\to\infty$.

Comme

$$E_{\nu_k}-(E_{\nu_k}+E_{\nu_{k+1}}+..)=0,$$

on a

$$\mu[E_{\nu_k}-(E_{\nu_k}+E_{\nu_{k+1}}+\ldots)]=0,$$

ce qui donne avec (3):

(4) $\|E_{\nu_k}+E_{\nu_{k+1}}+\ldots,\ \ E_{\nu_k}\|_\mu\to 0,$ si $k\to\infty$.

D'autre part on a (puisque $E\subset E_{\nu_k}+E_{\nu_{k+1}}+\ldots$):

$$\mu[E-(E_{\nu_k}+E_{\nu_{k+1}}+\ldots)]=0$$

$$\mu[(E_{\nu_k}+E_{\nu_{k+1}}+\ldots)-E]=\mu(E_{\nu_k}+E_{\nu_{k+1}}+\ldots)-\mu(E),$$

ce qui implique:

(5) $\|E_{\nu_k}+E_{\nu_{k+1}}+\ldots,\ E\|_\mu\to 0,$ si $k\to\infty,$

étant donné, d'après (2), que

$$\mu(E)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_{\nu_k}+E_{\nu_{k+1}}+\ldots).$$

Par conséquent (vu (4) et (5)):

(6) $\|E_{\nu_k},E\|_\mu\to 0,$ si $k\to\infty$.

Soit maintenant $\sigma>0$.

Choissons k de sorte qu'on ait $\sigma_k<\frac{\sigma}{2}$ et que $\|E_{\nu_k},\ E\|_\mu<\frac{\sigma}{2}$. Soit $n\geqslant\nu_k$. On a (voir (1)):

$$\|E_{\nu_k},E_n\|_\mu<\sigma_k<\frac{\sigma}{2}.$$

Donc

$$\|E,E_n\|_\mu\leqslant\|E,\ E_{\nu_k}\|_\mu+\|E_{\nu_k},\ E_n\|_\mu<\sigma.$$

Cela prouve que

$$\|E_n,E\|_\mu\to 0 \quad\text{pour}\quad n\to\infty,$$

donc $E_n\to_\mu E$. La proposition est ainsi démontrée.

Remarquons que la variété n'est pas nécessairement compacte.

§ 3. ***Definition 7.*** Soit $f(x)$ une fonction réelle définie dans *1*. Appelons la fonction $f(x)$ *simple*, si elle n'admet qu'un nombre au plus dénombrable de valeurs, chaque valeur étant prise dans un ensemble de x formant un ensemble du corps $\mathcal{K}$.

La fonction constante est simple. La somme, le produit de deux fonctions simples f, g ainsi que $max[f(x),g(x)]$ et $min[f(x),g(x)]$ sont aussi des fonctions simples.

Definition 8. Une fonction est appelée *appartenant au corps* $\mathcal{K}$ si elle est la limite d'une suite infinie de fonctions simples uniformément convergente.

Théor. A. Toute fonction $f(x)$ appartenant au corps est la limite d'une suite infine uniformément convergente de fonctions simples $\varphi_n(x)$ telles que $\varphi_n(x)<f(x)$, $(n=1,2,\ldots)$.

Démonstration. En effet, soit $\{f_n(x)\}$ une suite uniformément convergente de fonctions simples, telle que

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x).$$

Soit $\{\varepsilon_n\}$ une suite infinie de nombres positifs tendant vers 0. Soit k_n tel que $k_n>n$ et

$$|f(x)-f_{k_n}(x)|<\varepsilon_n.$$

Il en résulte

$$0<f(x)-[f_{k_n}(x)-\varepsilon_n]<2\varepsilon_n.$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty}[f_{k_n}(x)-\varepsilon_n]=f(x),$$

la convergence étant uniforme.

Les fonctions $f_{k_n}(x)-\varepsilon_n$ étant des fonctions simples et puisque $f_{k_n}(x)-\varepsilon_n<f(x)$, la proposition est établie.

Théor. A'. D'une manière analogue on démontre qu'une fonction $f(x)$ appartenant au corps peut être considérée comme limite d'une suite infinie uniformément convergente de fonctions simples supérieures à $f(x)$.

Théor. A''. Remarquons que les suites en question peuvent être choisies monotones: non décroissantes dans le cas premier et non croissantes dans le cas deuxième.

Démonstration. En effet, soit $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$, où $\varphi_n(x)$ sont des fonctions simples, telles que $\varphi_n(x) < f(x)$. Posons

$$\psi_1(x) \underset{df}{=\!=} \varphi_1(x) \quad \text{et} \quad \psi_{n+1}(x) \underset{df}{=\!=} max[\psi_n(x), \varphi_{n+1}(x)], \quad (n=1, 2, \ldots).$$

On a $\psi_1(x) \leqslant \psi_2(x) \leqslant \ldots$ et toutes les $\psi_n(x)$ sont des fonctions simples.

Comme

$$\varphi_n(x) \leqslant \psi_n(x) < f(x),$$

on trouve $\lim \psi_n(x) = f(x)$, la convergence étant uniforme. La proposition est ainsi démontrée. Une démonstration analogue s'applique pour établir l'existence d'une suite uniformément convergente et non croissante de fonctions simples supérieures à $f(x)$ et tendant vers $f(x)$.

Théor. B. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x)$ appartient au corps $\mathscr{K}$ est que, quels que soient les nombres réels $a<b$, l'ensemble

$$\hat{x}\{a < f(x) < b\}$$

appartient à $\mathscr{K}$.

Démonstration de la *nécessité*.

Soit α un nombre réel, et $\{\varphi_n(x)\}$ (d'après le *Théor. A''*) une suite infinie de fonctions simples telle que:

$$\varphi_1(x) \geqslant \varphi_2(x) \geqslant \ldots > f(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x).$$

L'ensemble

$$E_n \underset{df}{=\!=} \hat{x}\{\varphi_n(x) < \alpha\}$$

appartient à $\mathscr{K}$, comme la somme d'un nombre au plus dénombrable d'ensembles $\epsilon\,\mathscr{K}$.

Posons

$$E \underset{df}{=\!=} \hat{x}\{f(x) < \alpha\}.$$

On a évidemment $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots \subset E$, ce qui implique

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n \subset E. \tag{1}$$

Pour démontrer l'inclusion inverse, envisageons un point quelconque x_0 le E. Il existe un indice n tel que

$$\varphi_n(x_0) - f(x_0) < \alpha - f(x_0) > 0.$$

Donc $\varphi_n(x_0) < \alpha$, d'où $x_0 \epsilon E_n$.

Cela donne: $E \subset \sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, donc, d'après (1):

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Puisque $E_n \epsilon \mathscr{K}$, il en résulte que $E \epsilon \mathscr{K}$. D'une manière analogue on démontre que l'ensemble $\hat{x}\{f(x) > a\}$ appartient à $\mathscr{K}$, quel que soit le nombre réel α.

En vertu de la relation

$$\hat{x}\{a < f(x) < b\} = \hat{x}\{f(x) > a\} . \hat{x}\{f(x) < b\}$$

on obtient que l'ensemble figurant dans le membre gauche de cette équation, appartient à $\mathscr{K}$.

La nécessité de la condition est ainsi démontrée. Pour en démontrer la *suffisance*, choisissons un nombre positif arbitraire σ.

Posons

$$F_n \underset{df}{=\!=} \hat{x}\left\{n . \frac{\sigma}{2} \leqslant f(x) < (n+1)\frac{\sigma}{2}\right\},$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Les ensembles F_n sont disjoints deux-à-deux et

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n = 1.$$

Posons

$$f_\sigma(x) \underset{df}{=\!=} n . \frac{\sigma}{2} \quad \text{pour} \quad x \epsilon F_n$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

La fonction $f_\sigma(x)$ n'admet qu'un nombre au plus dénombrable de valeurs et on a

$$0 \leqslant f(x) - f_\sigma(x) < \sigma.$$

En posant successivement $\sigma = \frac{1}{k}$, $(k = 1, 2, \ldots)$, on obtient une suite infinie de fonctions tendant uniformément vers $f(x)$. Pour démontrer que ce sont des fonctions simples il suffit de prouver que

$F_n \in \mathscr{K}$. Mais cela est évident, puisque

$$F_n = \prod_{m=1}^{\infty} \hat{x}\left\{n\cdot\frac{\sigma}{2}-\frac{1}{m}<f(x)<(n+1)\frac{\sigma}{2}\right\}$$

et tous les termes du produit appartiennent à $\mathscr{K}$.

Les fonctions $f_\sigma(x)$ sont donc des fonctions simples.

Le théorème est démontré.

Théor. C. Si $f(x)$ appartient au corps $\mathscr{K}$, la fonction $|f(x)|$ y appartient aussi.

En effet, si $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, où $f_n(x)$ sont simples, on a

$$|f(x)| = \lim |f_n(x)|.$$

Les $|f_n(x)|$ sont simples et leur suite tend uniformément vers $|f(x)|$ ce qui se démontre aisément à part pour les ensembles $\hat{x}\{f(x)>0\}$, $\hat{x}\{f(x)<0\}$ et $\hat{x}\{f(x)=0\}$.

Théor. D. Si $f(x)$ et $g(x)$ appartiennent à $\mathscr{K}$, il y en est de même pour $f(x)+g(x)$ et $f(x).g(x)$.

En effet, les relations

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$
$$|g(x)-g_n(x)|<\varepsilon$$

entraînent $|[f(x)+g(x)]-[f_n(x)+g_n(x)]|<2\varepsilon$ et, si les $f_n(x)$ et $g_n(x)$ sont des fonctions simples, il y en est de même pour $f_n(x)+g_n(x)$.

Passons au produit $f(x).g(x)$.

Posons

$$E_n \underset{df}{=} \hat{x}\{|f(x)|+|g(x)|<n\},$$
$$(n=1, 2, \ldots).$$

En vertu du *Théor. C* et de ce que nous avons déjà établi: $E_n \in \mathscr{K}$. On a aussi $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$

Soient $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(x)$ des fonctions simples telles que

$$|f(x)-\varphi_n(x)|<\frac{\sigma}{n},$$

(où $\sigma>0$ est choisi arbitrairement), et

$$|g(x)-\psi_n(x)|<\frac{\sigma}{n}.$$

On a

$$|\varphi_n(x).\psi_n(x)-f(x).g(x)|\leqslant$$
$$\leqslant|\varphi_n(x)|.|\psi_n(x)-g(x)|+|g(x)|.|\varphi_n(x)-f(x)|.$$

Donc, pour $x \in E_n - E_{n-1}$ (en posant $E_0 \underset{df}{=} 0$):

$$|\varphi_n(x).\psi_n(x)-f(x).g(x)|\leqslant\frac{\sigma}{n}\cdot\left[|f(x)|+|g(x)|+\frac{\sigma}{n}\right]\leqslant\sigma+\frac{\sigma^2}{n^2}.$$

En définissant

$$\chi(x) \underset{df}{=} \varphi_n(x).\psi_n(x) \quad \text{pour} \quad x \in E_n - E_{n-1},$$
$$(n=1, 2, \ldots)$$

on obtient une fonction simple, telle que

$$|\chi(x)-f(x).g(x)|<\sigma+\sigma^2<2\sigma,$$

partout, si l'on choisie $\sigma<1$.

Le théorème est ainsi démontré.

On peut démontrer le théorème suivant:

Théor. E. Si $f_n(x)$, $(n=1, 2, \ldots)$ sont des fonctions appartenant au corps $\mathscr{K}$ et si $f(x)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)$, la fonction $f(x)$ appartient aussi au corps.

(Il y en est de même pour $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)$).

Nous laissons la démonstration au lecteur, en remarquant que dans le cas, où la suite $f_n(x)$ est convergente et monotone, on peut s'appuyer sur le *théorème B*. Le cas général s'établie par l'approximation des $f_n(x)$ par des fonctions simples $\varphi_n(x)$ au moyen desquelles on forme les suites

$$\psi_{l,k}(x) \underset{df}{=} \max[\varphi_l(x), \varphi_{l+1}(x), \ldots, \varphi_{l+k}(x)].$$

On a

$$\psi_{l,1}(x)\leqslant\psi_{l,2}(x)\leqslant\ldots,$$

où la suite $\{\lim\limits_{k\to\infty}\psi_{l,k}(x)\}$ qui est non croissante, tend vers $f(x)$.

§ 4. Fixons une fonction $\mu(E)$ mesurante du corps $\mathscr{K}$.

Si $\varphi(x)$ est une fonction simple et si

(1) $$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

en sont toutes les valeurs, rangées dans une suite finie ou infinie (sans répétitions), il peut se passer que la somme

$$\sum_n y_n \mu(E_n), \tag{2}$$

où $E_n \underset{df}{=} \hat{x}\{\varphi(x) = y_n\}$, est finie ou absolument convergente.

Définition 9. Dans ce cas disons que la fonction $\varphi(x)$ est μ-sommable et appelons la valeur de (2) son μ-intégrale:

$$\int \varphi(x)\, d\mu.$$

On peut justifier la définition par la remarque que la valeur de (2) ne dépend pas de la manière de ranger les valeurs de $\varphi(x)$ dans une suite (1).

1. Lemme. $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ étant deux fonctions simples et μ-sommables, la relation $\varphi'(x) \leqslant \varphi''(x)$ entraîne:

$$\int \varphi'(x)\, d\mu \leqslant \int \varphi''(x)\, d\mu.$$

Démonstration. Rangeons toutes les valeurs φ' et φ'' dans des suites finies ou infinies respectives, en évitant des répétitions:

$$y_1', y_2', \ldots; \quad y_1'', y_2'', \ldots$$

et posons

$$E_n' \underset{df}{=} \hat{x}\{\varphi'(x) = y_n'\}, \quad E_m'' \underset{df}{=} \hat{x}\{\varphi''(x) = y_m''\}.$$
$$(n = 1, 2, \ldots; \quad m = 1, 2, \ldots).$$

On a:

$$\int \varphi''\, d\mu = \sum_m y_m'' \mu(E_m'') = \sum_m y_m'' \mu\Big(\sum_n E_n' E_m''\Big).$$

Les ensembles E_n' étant disjoints et puisque $\sum\limits_n E_n' = 1$, on a

$$\int \varphi''\, d\mu = \sum_m y_m'' \Big[\sum_n \mu(E_n' . E_m'')\Big] = \sum_{n,m} y_m'' \mu(E_n' . E_m''). \tag{3}$$

D'une manière analogue

$$\int \varphi'\, d\mu = \sum_{n,m} y_n' \mu(E_n' . E_m''). \tag{4}$$

Considérons la différence

$$y_m'' \mu(E_n' . E_m'') - y_n' \mu(E_n' . E_m''). \tag{5}$$

Si $E_n' . E_m'' = 0$, la différence est nulle. Dans le cas, où $E_n' . E_m'' \neq 0$, on a, quel que soit $x \in E_n' . E_m''$:

$$\varphi'(x) = y_n', \quad \varphi''(x) = y_m''.$$

Donc, comme $\varphi'(x) \leqslant \varphi''(x)$:

$$y_n' \leqslant y_m'',$$

donc (5) n'est jamais négative.

En tenant compte de ce que les sommes infinies sont absolument convergentes, on obtient

$$\int \varphi'\, d\mu \leqslant \int \varphi''\, d\mu.$$

2. Lemme. $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ étant des fonctions simples et μ-sommables, la relation

$$|\varphi'(x) - \varphi''(x)| \leqslant \varepsilon$$

entraîne

$$\left|\int \varphi'(x)\, d\mu - \int \varphi''(x)\, d\mu\right| \leqslant \varepsilon . \mu(1).$$

Démonstration. Écrivons

$$\int \varphi'(x)\, d\mu = \sum_n y_n' \mu(E_n')$$
$$\int \varphi''(x)\, d\mu = \sum_m y_m'' \mu(E_m''),$$

comme d'habitude.

Il en résulte:

$$\left|\int \varphi'(x)\, d\mu - \int \varphi''(x)\, d\mu\right| \leqslant \sum_{n,m} |y_n' - y_m''|\, \mu(E_n' . E_m'').$$

Si $E'_n . E''_m = 0$, le terme correspondant est $= 0$, donc il peut être remplacé par $E . \mu(E'_n . E''_m)$.

Si $E'_n . E''_m = 0$, on a pour tout $x \epsilon E'_n . E''_m$:

$$\varphi'(x) = y'_n, \quad \varphi'' = y''_m,$$

et par conséquent:

$$|y'_n - y''_m| \leqslant \varepsilon.$$

Il s'ensuit:

$$\left| \int \varphi'(x)\, d\mu - \int \varphi''(x)\, d\mu \right| \leqslant \varepsilon . \sum_{n,m} \mu(E'_n . E''_m)$$

donc $\leqslant \varepsilon . \mu(1)$.

Donc, d'après (2):

$$\int \varphi'\, d\mu \leqslant \int \varphi''\, d\mu.$$

3. **Lemme.** Si $\varphi(x)$ est simple et μ-sommable, l'intégrale $\int \varphi d\mu$ est la borne inférieure (supérieure) de tous les $\int \varphi' d\mu$, où $\varphi(x) \leqslant \varphi'(x)$, $[\varphi(x) \geqslant \varphi'(x)]$ et où $\varphi'(x)$ est simple et μ-sommable.

Démonstration. En effet, d'après le *lemme 1*: si $\varphi(x) \leqslant \varphi'(x)$, on a $\int \varphi\, d\mu \leqslant \int \varphi'\, d\mu$.

Il en résulte le lemme, puisque $\varphi(x) \leqslant \varphi'(x)$. La démonstration est analogue pour la borne supérieure.

4. **Lemme.** Si $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ sont deux fonctions simples et μ-sommables, on a:

$$\int (\varphi' + \varphi'')\, d\mu = \int \varphi' d\mu + \int \varphi'' d\mu.$$

Démonstration. Écrivons, comme d'habitude

$$\int \varphi' d\mu = \sum_n y'_n \mu(E'_n)$$

$$\int \varphi'' d\mu = \sum_m y''_m \mu(E''_m),$$

les sommes étant finies ou absolument convergentes.

On a

$$(1) \qquad \int \varphi' d\mu + \int \varphi'' d\mu = \sum_{n,m} (y'_n + y''_m)\, \mu(E'_n . E''_m).$$

Si $E'_n . E''_m \neq 0$, on a pour tout $x \epsilon E'_n . E''_m$:

$$\varphi'(x) = y'_n, \quad \varphi''(x) = y''_m,$$

donc

$$y'_n + y''_m = \varphi'(x) + \varphi''(x).$$

Le nombre des $E'_n\ E''_m$ n'étant qu'au plus dénombrable et puisque $\sum_{n,m} E'_n . E''_m = 1$, la fonction $\varphi'(x) + \varphi''(x)$ est simple.

Les ensembles $E'_n . E''_m$ étant disjoints deux-à-deux, on peut écrire, en joignant tous les termes du membre droit de (1), pour lesquels $y'_n + y''_m$ ont la même valeur:

$$\int \varphi' d\mu + \int \varphi'' d\mu = \sum_p y_p \mu(E_p),$$

où la somme est finie ou absolument convergente et, où $y_1, y_2, \dots$ sont toutes les valeurs de la fonction $\varphi'(x) + \varphi''(x)$ et E_p est défini par l'équation

$$E_p \hat{x}\{\varphi'(x) + \varphi''(x) = y_p\}.$$

Il en résulte la formule

$$\int \varphi' d\mu + \int \varphi'' d\mu = \int (\varphi' + \varphi'')\, d\mu.$$

En tenant compte du *lemme 2*. généralisons la notion de la μ-sommabilité et celle de la μ-intégrale de la manière suivante

Définition 10. Disons qu'une fonction $f(x)$ est μ-sommable si 1° elle appartient au corps $\mathscr{K}$ et si 2° il existe deux fonctions simples $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ μ-sommables, telles que $\varphi'(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi''(x)$.

Théorème 1. Toute fonction $f(x)$ bornée et appartenant au corps est μ-sommable.

Théorème 2. Si $f(x)$ est μ-sommable. la borne supérieure de tous les nombres $\int \varphi d\mu$. où $\varphi'(x)$ sont des fonctions simples, μ-sommables et $\leqslant f(x)$, est égale à la borne inférieure de tous les nombres $\int \varphi'' d\mu$, où $\varphi''(x)$ sont des fonctions simples μ-sommables et $\geqslant f(x)$.

Démonstration. $f(x)$ étant μ-sommable, il existe deux fonctions simples, μ-sommables $\psi'(x)$, $\psi''(x)$ telles que

$$(1) \qquad \psi'(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi''(x).$$

Désignons par M'' et M' respectivement la borne supérieure et inférieure en question.

Ces bornes existent, en vertu du *lemme 1*, en vertu de (1) et en vertu de ce que ψ' et ψ'' sont μ-sommables. On a aussi:

$$\int \psi' d\mu \leqslant M' \leqslant M'' \leqslant \int \psi'' d\mu. \tag{2}$$

Le fonction $f(x)$ étant μ-sommable, elle appartient, en vertu de la définition de la μ-sommabilité, au corps $\mathscr{K}$. Par conséquent, d'après le *théor. A*, il existe une fonction simple $\varphi'(x)$ telle que

$$\varphi'(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi'(x) + \sigma. \tag{3}$$

Si l'on définit la fonction $\varphi_1'(x)$:

$$\varphi_1'(x) \underset{df}{=} max\,[\psi'(x), \quad \varphi'(x)],$$

on obtient

$$\psi'(x) \leqslant \varphi_1'(x) \leqslant f(x) \tag{4}$$

$$\varphi'(x) \leqslant \varphi_1'(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi''(x). \tag{5}$$

De (3) et (5) on déduit:

$$\varphi_1'(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi_1'(x) + \sigma \tag{6}$$

et de (4) on a

$$\int \varphi_1'(x) \leqslant M',$$

puisque $\varphi_1'(x)$ est une fonction simple et μ-sommable (d'après $\psi'(x) \leqslant \varphi_1'(x) \leqslant \psi''(x)$).

Mais $\varphi_1'(x) + \sigma$ comme somme de deux fonctions simples et μ-sommables est aussi μ-sommable et on a, d'après le *lemme 4*,

$$\int (\varphi_1'(x) + \sigma) d\mu = \int \varphi_1' d\mu + \sigma \,.\, \mu(1).$$

Par conséquent (vu (6)):

$$M'' \leqslant \int \varphi_1' d\mu + \sigma \,.\, \mu(1),$$

donc (vu (7)):

$$M'' \leqslant M' + \sigma \,.\, \mu(1).$$

En faisant tendre σ vers 0, on en obtient

$$M'' \leqslant M'.$$

Donc, d'après (2) on obtient $M' = M''$. En tenant compte du *théorème 2* et du *lemme 3*, nous pouvons généraliser la μ-intégrale pour des fonctions quelconques, que voici:

Definition 11. Si $f(x)$ est μ-sommable, désignons par

$$\int f(x) d\mu$$

la borne supérieure de tous les nombres $\int \varphi(x) d\mu$, où $\varphi(x) \leq f(x)$ sont des fonctions simples et μ-sommables.

On voit qu'on trouve une définition équivalente, en utilisant la borne inférieure des $\varphi(x) \geq f(x)$.

En appliquant des méthodes analogues à celles qui ont fourni la démonstration du *théorème 2*, on démontre le théorème suivant:

Théorème 3. Si $f(x)$ est μ-sommable et $\sigma > 0$, il existe deux fonctions simples et μ-sommables $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ telles que:

$$f(x) - \sigma \leq \varphi'(x) \leq f(x) \leq \varphi''(x) \leq f(x) + \sigma$$

$$\int f d\mu - \sigma \leq \int \varphi' d\mu \leq \int f d\mu \leq \int \varphi'' d\mu \leq \int f d\mu + \sigma.$$

Théorème 4. Si $f(x)$ et $g(x)$ sont μ-sommables et

$$|f(x) - g(x)| \leq \sigma,$$

on a

$$\left| \int f d\mu - \int g d\mu \right| \leq \sigma \,.\, \mu(1).$$

Démonstration. Soit $\sigma' > 0$. Il existe, en vertu du *théorème 3*, deux fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ simples et μ-sommables, telles que

$$|f - \varphi| \leqslant \sigma', \quad \left| \int f d\mu - \int \varphi d\mu \right| \leqslant \sigma'$$

$$|g - \psi| \leqslant \sigma', \quad \left| \int g d\mu - \int \psi d\mu \right| \leqslant \sigma'.$$

Comme

$$|f - g| \leqslant \sigma,$$

on en obtient:

$$|\varphi - \psi| \leqslant \sigma + 2\sigma'$$

donc, en vertu du *lemme 2*:

$$\left| \int \varphi d\mu - \int \psi d\mu \right| \leqslant (\sigma + 2\sigma') \mu(1).$$

Il s'ensuit:

$$\left|\int f\,d\mu-\int g\,d\mu\right|\leqslant(\sigma+2\sigma')\,\mu(1)+2\sigma'.$$

En faisant tendre σ' vers 0, on en obtient

$$\left|\int f\,d\mu-\int g\,d\mu\right|\leqslant\sigma\,.\,\mu(1).$$

Corollaire 4'. Si $f_n(x)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions μ-sommables et $f_n(x)\to\varphi(x)$ uniformément, alors

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu=\int f\,d\mu.$$

Théor. 5. Si $f(x)$ et $g(x)$ sont μ-sommables, il en est de même pour $f(x)+g(x)$ et on a:

$$\int(f+g)\,d\mu=\int f\,d\mu+\int g\,d\mu.$$

Démonstration. Les fonction f, g étant μ-sommables, il existe des fonctions simples et μ-sommables φ', φ'', ψ', ψ'', telles que

$$\varphi'\leqslant f\leqslant\varphi'',\quad \psi'\leqslant g\leqslant\psi''.$$

Donc

$$\varphi'+\psi'\leqslant f+g\leqslant\varphi''+\psi'',$$

ce qui prouve, en vertu du *lemme 4*, que $f+g$ est μ-sommable.

Soit $\sigma>0$. En vertu du *théor. 3*, il existe deux fonctions simples et μ-sommables $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, telles que

$$|f-\varphi_1|\leqslant\sigma,\quad \left|\int f\,d\mu-\int\varphi_1\,d\mu\right|\leqslant\sigma$$

et

$$|g-\psi_1|\leqslant\sigma,\quad \left|\int g\,d\mu-\int\psi_1\,d\mu\right|\leqslant\sigma.$$

Il en résulte

(1) $$|(f+g)-(\varphi_1+\psi_1)|\leqslant2\sigma$$

et, d'après le *lemme 4*:

(2) $$\left|\int f\,d\mu+\int g\,d\mu+\int(\varphi_1+\psi_1)\,d\mu\right|\leqslant2\sigma.$$

Si σ tend vers 0, la fonction simple et μ-sommable $\varphi_1+\psi_1$

tend uniformément vers $f+g$; donc, en vertu du *coroll. 4'* et en tenant compte de ce que $f+g$ est μ-sommabble:

$$\lim\int(\varphi_1+\psi_1)\,d\mu=\int(f+g)\,d\mu.$$

De (2) on obtient

$$\lim\int(\varphi_1+\psi_1)\,d\mu=\int f\,d\mu+\int g\,d\mu,$$

donc enfin

$$\int(f+g)\,d\mu=\int f\,d\mu+\int g\,d\mu.$$

Théor. 6. Si $f(x)$ est μ-sommable et a un nombre réel, on a

$$\int a\,f(x)\,d\mu=a\,.\int f(x)\,d\mu.$$

La démonstration s'appuie sur l'approximation de f par des fonctions simples.

Théorème 7. Si

$$f_1(x),\ f_2(x),\ldots,\ f_n(x),\ldots$$

est une suite uniformément convergente de fonctions μ-sommables, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu=\int f\,d\mu,$$

où

$$f(x)\underset{\mathrm{df}}{=}\lim_{n\to\infty}f_n(x).$$

Dém. Si l'on savait que $f(x)$ est μ-sommable, le théorème résulterait immédiatement du *coroll. 4'*. Par conséquent, il suffit de démontrer la μ-sommabilité de f. Il existe un indice n, tel que

$$|f-f_n|\leqslant1.$$

Donc

$$-1+f_n\leqslant f\leqslant1+f_n.$$

La fonction f_n étant μ-sommable, il existe deux fonctions simples et μ-sommables $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ telles que,

$$\varphi(x)\leqslant f_n(x)\leqslant\psi(x).$$

Donc
$$-1+\varphi(x)\leq f(x)\leq 1+\psi(x).$$

Les fonctions $-1+\varphi(x)$, $1+\psi(x)$ étant simples et μ-sommables, comme sommes de deux fonctions μ-sommables, il en résulte que f est μ-sommable. Le théorème démontré ainsi est un peu plus fort que le *corollaire 4'*.

Théorème 8. La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(x)$ appartenant au corps soit μ-sommable, est que $|f(x)|$ soit sommable.

On a dans ce cas
$$\left|\int f\,d\mu\right|\leq\int|f|\,d\mu.$$

Démonstration. Supposons que $f(x)$ soit μ-sommable. Il existe deux fonctions simples et μ-sommables $\varphi(x)$, $\psi(x)$, telles que
$$\varphi(x)\leq f(x)\leq\psi(x).$$

D'une manière générale, étant donnée une fonction $g(x)$, appelons sa *partie positive* la fonction
$$g^+(x)\underset{df}{=}\begin{cases} g(x) \text{ pour les } x \text{ tels que } g(x)\geq 0\\ 0 \text{ pour les } x \text{ restants}\end{cases}$$
et appelons sa *partie négative*:
$$g^-(x)\underset{df}{=}\begin{cases} -g(x) \text{ pour les } x \text{ tels que } g(x)\leq 0\\ 0 \text{ pour les } x \text{ restants.}\end{cases}$$

On a
$$g(x)=g^+(x)-g^-(x)$$
partout.

Si $g(x)$ appartient au corps $\mathcal{K}$, il en est de même pour g^+ et g^-.

Évidemment
$$(1)\qquad 0\leq f^+(x)\leq\psi^+(x),$$
$$(2)\qquad 0\leq f^-(x)\leq\varphi^-(x),$$

Les fonctions $\psi^+(x)$, $\varphi^-(x)$ sont simples.

Je dis que $\psi^+(x)$ est μ-sommable. En effet, écrivons comme d'habitude
$$\int\psi\,d\mu=\sum_n y_n\,\mu(E_n).$$

Or, la série du membre droit étant finie ou bien absolument convergente, il en résulte qu'elle ne perd pas sa convergence absolue, si l'on supprime tous les membres négatifs.

La série restante est égale à $\int\psi^+d\mu$.

D'une manière analogue on démontre que $\int\varphi^-d\mu$ existe. Donc, les relations (1) et (2) disent que $f^+(x)$ et $f^-(x)$ sont μ-sommables.

Comme $|f|=f^++f^-$, il en résulte que $|f(x)|$ est μ-sommable.

Réciproquement, soit $|f(x)|$ μ-sommable, donc $-|f(x)|$ aussi.

On a
$$(3)\qquad -|f(x)|\leq f(x)\leq|f(x)|.$$

Il existe des fonctions simples et μ-sommables $\varphi_1(x)$ et $\psi_1(x)$ telles que
$$\varphi_1(x)\leq-|f(x)|\quad\text{et}\quad|f(x)|\leq\psi_1(x).$$
Cela donne
$$\varphi_1(x)\leq f(x)\leq\psi_1(x),$$
ce qui prouve la μ-sommabilité de f dans le cas, où $f(x)$ appartient au corps $\mathcal{K}$.

La relation (3) entraîne (comme on le voit aisément):
$$-\int|f|\,d\mu\leq\int f\,d\mu\leq\int|f|\,d\mu,$$
ce qui donne
$$\left|\int f\,d\mu\right|\leq\int|f|\,d\mu.$$

§. 5. Théor. d. Étant donné un ensemble non vide E du corps $\mathcal{K}$, les ensembles $E.F$, où F est un ensemble variable du corps, forment une classe $\mathcal{K}_1$ d'ensembles qui est aussi un corps.

En effet $E-E.F=E.\mathrm{co}\,F$ et
$$\sum_{n=1}^{\infty}E.F_n=E.\sum_{n=1}^{\infty}F_n.$$

Définition 12. Nous désignerons ce corps par $E\upharpoonright\mathcal{K}$.

Théor. F. $f(x)$ étant une fonction du corps $\mathcal{K}$, la fonction $f_1\underset{df}{=}(E\upharpoonright f)$[18], c'est-à-dire la fonction f ne considérée que dans E, appartient à $(E\upharpoonright\mathcal{K})$.

[18]) Le symbole $\upharpoonright$ est introduit par MM. Whitehead et Russel dans leurs *Principia Mathematicae*.

En effet,
$$\hat{x}\{a<f_1(x)<\beta\}=E\,.\,\hat{x}\{a<f(x)<\beta\},$$

donc, en vertu du *théor. B.*,
$$\hat{x}\{a<f_1(x)<\beta\}\,\epsilon\,(E\upharpoonleft\mathcal{H}).$$

Il y en est de même pour les fonctions simples: Si $\varphi(x)$ est une fonction simple appartenant à $\mathcal{H}$, la fonction $E\upharpoonleft\varphi$ est une fonction simple appartenant à $E\upharpoonleft\mathcal{H}$.

Étant donnée une fonction mesurante $\mu(A)$ du corps $\mathcal{H}$, elle donne naissance à une fonction $\mu_1(B)$ mesurante du corps $E\upharpoonleft\mathcal{H}$. En effet, il suffit de poser $\mu_1(B)\underset{df}{=}\mu(B)$ pour tout $B\,\epsilon\,(E\upharpoonleft\mathcal{H})$. La fonction $\mu_1(B)$ ne diffère de $\mu(B)$ que par le domaine, où elle est définie.

En ce qui concerne la théorie de la μ_1-sommabilité des fonctions et celle de la μ_1-intégrale, elles ne présentent qu'un cas particulier de la théorie générale que nous avons développée.

Lemme 5. Si $\varphi(x)$ est une fonction simple, μ-sommable et $E\,\epsilon\,\mathcal{H}$, la fonction simple $E\upharpoonleft\varphi$ est μ_1-sommable.

Si
$$\int\varphi\,d\mu=\sum_n y_n\,\mu(E_n),$$

où y_n et E_n ont la signification habituelle, on a

$$\int(E\upharpoonleft\varphi)\,d\mu_1=\sum_n y_n\,\mu(E_n\,.\,E)=$$
$$=\int\varphi'\,d\mu.\quad\text{où}\quad\varphi'(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{pour } x\,\epsilon\,E\\ 0 & \text{pour } x\,\bar{\epsilon}\,E.\end{cases}$$

Dém. En effet, $\sum\limits_n y_n\,\mu(E_n\,.\,E)$ est absolument convergente, puisque
$$0\leq\mu(E_n\,.\,E)\leq\mu(E_n).$$

D'autre part on voit que
$$E_n\,.\,E=\hat{x}\{(E\upharpoonleft\varphi(x))=y_n\},$$

et que, si $E_n\,.\,E=0$, la valeur y_n n'est pas admise par $(E\upharpoonleft\varphi)$ et réciproquement. L'ensemble de valeurs de $(E\upharpoonleft\varphi)$ est contenu dans l'ensemble de valeurs de φ.

La somme représentant $\int\varphi'\,d\mu$ ne diffère pas de $\sum\limits_n y_n\,\mu(E_n\,.\,E)$.

Théorème 9. Si $f(x)$ est μ-sommable et $E\,\epsilon\,\mathcal{H}$, la fonction $f_1(x)\underset{df}{=}E\upharpoonleft f(x)$ est aussi μ_1-sommable et on a
$$\int f_1(x)\,d\mu_1=\int f'(x)\,d\mu,$$
où
$$f'(x)\underset{df}{=}\begin{cases}f(x) & \text{pour } x\,\epsilon\,E\\ 0 & \text{pour } x\,\bar{\epsilon}\,E.\end{cases}$$

Démonstration. Quoique la démonstration peut être conduite d'une manière directe, nous préférons de nous appuyer sur le *théor. 3.*, pour parvenir plus vite au bout.

Soit $\{\varphi_n(x)\}$ une suite de fonctions simples μ-sommables, convergente uniformément vers $f(x)$.

Donc $\{E\upharpoonleft\varphi_n(x)\}$ converge uniformément vers $E\upharpoonleft f(x)$.

Comme les $E\upharpoonleft\varphi_n(x)$ sont, d'après le *lemme* précédent μ_1-sommables, il en est de même pour $E\upharpoonleft f(x)$. On a de plus (vu *coroll. 4'*)

$$\lim_{n\to\infty}\int(E\upharpoonleft\varphi_n)\,d\mu_1=\int(E\upharpoonleft f)\,d\mu_1. \tag{1}$$

En posant
$$\varphi'_n(x)\underset{df}{=}\begin{cases}\varphi(x) & \text{pour } x\,\epsilon\,E\\ 0 & \text{pour } x\,\bar{\epsilon}\,E,\end{cases}$$

on voit que $\{\varphi'_n(x)\}$ converge uniformément vers $f'(x)$.

Les $\varphi_n(x)$ étant μ-sommables, on a, d'après le lemme précédent, que $\varphi_n(x)$ et, par conséquent, $f'(x)$ sont μ-sommables.

On a aussi, en vertu du *coroll. 4'*,
$$\lim_{n=\infty}\int\varphi'_n\,d\mu=\int f'\,d\mu.$$

Comme
$$\int\varphi'_n\,d\mu=\int(E\upharpoonleft\varphi_n)\,d\mu_1,\quad(\textit{lemme } 5.),$$

il résulte de (1) que:
$$\int(E\upharpoonleft f)\,d\mu_1=\int f'\,d\mu.$$

Définition 13. Le théorème démontré nous permet d'employer la notation
$$\int_E f\,d\mu$$

au lieu de $\int(E\upharpoonleft f)\,d\mu_1$.

Considérons la fonction d'ensembles $\vartheta(E)$ définie par

$$\vartheta(E) \underset{df}{=} \int_E f\, d\mu,$$

la fonction f étant fixe et $E \in \mathscr{K}$ variable.

Dans le cas, où $E = 0$, posons

$$\vartheta(E) \underset{df}{=} 0 \underset{df}{=} \int_E f\, d\mu.$$

Théorème 10. La fonction d'ensembles

$$\vartheta(E) = \int_E f\, d\mu$$

jouit de la propriété suivante:

$$\text{si} \quad E_n \in \mathscr{K} \quad \text{et} \quad \lim_{n=\infty} \mu(E_n) = 0,$$

on a

$$\lim_{n\to\infty} \vartheta(E_n) = 0.$$

Démonstration. Soit $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, une suite infinie d'ensembles du corps, telle que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0.$$

Il suffit de supposer que $E_n \neq 0$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

Considérons d'abord le cas, où f est une fonction simple, soit $\varphi(x)$, n'admettant qu'un nombre fini de valeurs.

On a

$$\int \varphi\, du = y_1 \mu(F_1) + \ldots + y_s \mu(F_s),$$

où $y_1, \ldots, y_s$ sont les valeurs admises par φ et où

$$F_k \underset{df}{=} \hat{x}\{\varphi(x) = y_k\}, \quad (k = 1, \ldots, s).$$

On a

$$\int_{E_n} \varphi\, d\mu = y_1 \mu(F_1 E_n) + \ldots + y_s \mu(F_s E_n).$$

Comme $\mu(E_n) \to 0$, on a $\mu(F_k E_n) \to 0$ pour $n \to \infty$, $(k = 1, \ldots, s)$. Il en résulte que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \varphi\, d\mu = 0.$$

Passons maintenant au cas général.

On a

$$|\vartheta(E_n)| \leq \int_{E_n} |f|\, d\mu. \tag{1}$$

La fonction $|f|$ étant μ-sommable, il existe une fonction simple $\psi \geq f$ et μ-sommable. On a

$$0 \leq \int_{E_n} |f|\, d\mu \leq \int_{E_n} \psi\, d\mu. \tag{2}$$

Écrivons, comme d'habitude

$$\int \psi\, d\mu = \sum_k z_k \mu(G_k), \quad z_k \geq 0 \tag{3}$$

donc, d'après le *lemme* 5.,

$$\int_{E_n} \psi\, d\mu = \sum_k z_k \mu(E_n \cdot G_k).$$

Dans le cas, où la somme (3) contient un nombre fini de termes, on a, d'après ce que nous avons établi précédemment:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \psi\, d\mu = 0,$$

donc, d'après (2):

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} |f|\, d\mu = 0,$$

donc, d'après (1):

$$\lim_{n\to\infty} \vartheta(E_n) = 0.$$

Considérons maintenant le cas, où la somme (3) contient un nombre infini de termes.

Soit $\sigma > 0$. Il existe un indice m, tel que

$$0 \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} z_k \cdot \mu(G_k) \leq \frac{\sigma}{2},$$

donc, à fortiori

$$0 \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} z_k \cdot \mu(G_k \cdot E_n) \leq \frac{\sigma}{2}, \tag{4}$$

et cela, quel que soit n.

Comme

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} z_k \cdot \mu(G_k \cdot E_n) = 0,$$

on a, à partir d'un certain indice $n = \nu$:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{m} z_k \cdot \mu(G_k \cdot E_n) \leq \frac{\sigma}{2}.$$

Il s'ensuit pour $n \geq \nu$:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} z_k \cdot \mu(G_k \cdot E_n) \leq \sigma.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \psi \, d\mu = 0,$$

ce qui donne, vu (1) et (2):

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(E_n) = 0.$$

Le théorème est ainsi démontré.

Théorème 11. Si $f(x)$ est μ-sommable, la fonction d'ensembles

$$\mathcal{J}(E) = \int_E f \, d\mu$$

est parfaitement additive.

Démonstration. Soient $E_1, \dots, E_n$ des ensembles disjoints du corps $\mathcal{K}$. Posons

$$f_k(x) \underset{df}{=} \begin{cases} f(x) \text{ pour } x \in E_k \\ 0 \text{ pour } x \,\bar{\epsilon}\, E_k, \end{cases}$$
$$(k = 1, \dots, n).$$

Posons $E \underset{df}{=} E_1 + \dots + E_n$.

On a

$$\int_{E_n} f \, d\mu = \int f_k \, d\mu$$

et

$$(E \upharpoonleft f(x)) = f_1(x) + \dots + f_n(x).$$

Il en résulte

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int f_k \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f \, d\mu,$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{J}(E_1 + \dots + E_n) = \mathcal{J}(E_1) + \dots + \mathcal{J}(E_n).$$

Cela étant posé, soit maintenant une suite infinie d'ensembles disjoints

$$F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$$

et appartenant au corps $\mathcal{K}$.

Posons

$$F \underset{df}{=} \sum_{n=1}^{\infty} F_n.$$

On a

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \left(F - \sum_{n=1}^{m} F_n\right) = 0,$$

donc

$$\lim_{m\to\infty} \mu\left(F - \sum_{n=1}^{m} F_n\right) = 0.$$

Il en résulte, d'après le théorème précédent, que

$$\lim_{m\to\infty} \mathcal{J}\left(F - \sum_{n=1}^{m} F_n\right) = 0$$

Mais, comme $\sum_{n=1}^{m} F_n \subset F$, on a, d'après ce qui précède,

$$\mathcal{J}\left(F - \sum_{n=1}^{m} F_n\right) = \mathcal{J}(F) - \mathcal{J}\left(\sum_{n=1}^{m} F_n\right)$$
$$= \mathcal{J}(F) - \sum_{n=1}^{m} \mathcal{J}(F_n).$$

Par conséquent

$$\lim_{m\to\infty} \left[\mathcal{J}(F) - \sum_{n=1}^{m} \mathcal{J}(F_n)\right] = 0,$$

d'où

$$\mathcal{J}(F) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mathcal{J}(F_n),$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{J}\left(\sum_{m=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{J}(F_m).$$

Le théorème est ainsi établi.

Lemme e. Si les ensembles $F_1, F_1, \dots F_n, \dots$, appartiennent au corps $\mathcal{K}$ et si

$$\mu(F_n) > \alpha > 0.$$

on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, F_n \neq 0.$$

Démonstration. Supposons que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, F_n = 0$. Aucun élément x ne peut pas appartenir à un nombre infini des F_n. Donc pour tout $x \epsilon F_n$ il existe un nombre $k = k(n)$, tel que $x \overline{\epsilon} F_k + F_{k+1} + \dots$ Évidemment $k > n$.

Donc, si l'on pose, d'une manière générale

$$F_n^{(n+s)} \underset{df}{=} F_n \cdot \left(F_{n+s-1} - \sum_{p=n+s}^{\infty} F_p\right), \qquad (s = 1, 2, \dots)$$

tout point $x \epsilon F_n$ appartient à au moins un des $F_n^{(n+s)}$. Donc

$$F_n = F_n^{(n+1)} + F_n^{(n+2)} + \dots$$

Il en résulte:

$$\lim_{q\to\infty} \mu\left(\sum_{p=1}^{q} F_n^{(n+p)}\right) = \mu(F_n).$$

En particulier

$$\lim_{q\to\infty} \mu\left(\sum_{p=1}^{q} F_1^{(1+p)}\right) = \mu(F_1).$$

Mais, on a, en vertu de l'hypothèse $\mu(F_1) > \alpha$.

Donc il existe un nombre naturel s_1 tel que:

$$(1) \qquad \mu(F_1^{(2)} + F_1^{(3)} + \dots + F_1^{(s_1)}) > \frac{\alpha}{2}.$$

D'une manière analogue on a:

$$\lim_{q\to\infty} \mu(F_{s_1+1}^{(s_1+1+q)}) = \mu(F_{s_1+1}) > \alpha.$$

Donc il existe un nombre naturel $s_2 > s_1 + 1$ tel que

$$(2) \qquad \mu(F_{s_1+1}^{(s_1+2)} + F_{s_1+1}^{(s_1+3)} + \dots F_{s_1+1}^{(s_2)}) > \frac{\alpha}{2}.$$

En procédant ainsi indéfiniement, on obtient des nombres naturels $s_1 < s_2 < s_3 < \dots$

Je dis que les ensembles

$$H_n \underset{df}{=} F_{s_n+1}^{(s_n+2)} + \dots + F_{s_n+1}^{(s_{n+1})}$$

sont disjoints deux-à-deux.

En effet, soit $1 \leqslant n \leqslant m$. On a:

$$H_n \cdot H_m = \left(F_{s_n+1}^{(s_n+2)} + \dots + F_{s_n+1}^{(s_{n+1})}\right) \cdot \left(F_{s_m+1}^{(s_m+2)} + \dots + F_{s_m+1}^{(s_{m+1})}\right).$$

Les ensembles spécifiés dans les premiers parenthèses n'ont pas de points commmuns respectivement avec

$$F_{s_n+2} + F_{s_n+3} + \dots$$

$$F_{s_n+3} + F_{s_n+4} + \dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$F_{s_{n+1}} + F_{s_{n+1}+1} + \dots,$$

donc ils n'ont pas, à fortiori, des points communs avec

$$F_{s_m+1}, \quad \text{puisque, comme} \quad m > n,$$

on a $s_m \geqslant s_{n+1}$, donc $s_m + 1 > s_{n+1}$.

Les ensembles $\{H_n\}$ étant disjoints et leur μ-mesure étant $> \frac{\alpha}{2}$, on en obtient

$$\mu(I) \geqslant \mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} H_n\right) \geqslant p \cdot \frac{\alpha}{2}$$

pour $p = 1, 2, \dots$, ce qui est contradictoire.

Le lemme est ainsi établi.

Théorème 12. 1° Si $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ appartiennent au corps $\mathscr{K}$,

2° $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$,

3° il existe un nombre $M > 0$ tel que $|f_n(x)| \leqslant M$ pour $n = 1, 2, \ldots$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\, d\mu = \int f(x)\, d\mu.$$

Démonstration. f appartient nécessairement au corps $\mathscr{K}$ et on a $|f| \leqslant M$, d'où il résulte que f est μ-sommable. Il en est de même pour la fonction

$$\varphi_n(x) \underset{df}{=} f(x) - f_n(x).$$

On a, de plus, $|\varphi_n(x)| \leqslant 2M$, $\lim_{n\to\infty} |\varphi_n(x)| = 0$.

Comme

$$\left| \int f\, d\mu - \int f_n\, d\mu \right| \leqslant \int |\varphi_n|\, d\mu,$$

il suffit de démontrer que $\int |\varphi_n|\, d\mu$ tend vers 0. Soit $\sigma > 0$; envisageons les ensembles

$$F_n \underset{df}{=} \hat{x}\{|\varphi_n(x)| \geqslant \sigma\}.$$

Je dis que $\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = 0$.

En effet, dans le cas contraire, on aurait une suite partielle d'indices $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$, telle que $\mu(F_{k_n}) > \alpha > 0$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

Par conséquent, on aurait, en vertu du lemme précédent:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} F_{k_n} \neq 0.$$

Il existe donc un élément x_0 et une suite infinie d'indices $\{l_n\}$ tirée de $\{k_n\}$, telle que

$$x_0 \in F_{l_1} . F_{l_2} \ldots F_{l_n} \ldots$$

Donc $|\varphi_{l_n}(x_0)| \leqslant \sigma$, contrairement au fait que $|\varphi_n| \to 0$ pour $n \to \infty$.

Nous avons

$$\int |\varphi_n|\, d\mu = \int_{F_n} |\varphi_n|\, d\mu + \int_{coF_n} |\varphi_n|\, d\mu.$$

L'intégrale $\int_{F_n} |\varphi_n|\, d\mu$ tend vers 0, puisque elle est $\leqslant \mu(F_n) . 2M$.

$$\int_{coF_n} |\varphi_n|\, d\mu \quad \text{est} \quad \leqslant \sigma . \mu(coF_n) \leqslant \sigma . \mu(1).$$

Par conséquent, à partir d'un certain indice, on a

$$\int |\varphi_n|\, d\mu \leqslant 2\sigma . \mu(1),$$

ce qui prouve le théorème.

Théorème 13. Si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions μ-sommables telles que

$$\int_E (f - g)\, d\mu = 0$$

pour tout $E \in \mathscr{K}$, l'ensemble

$$\hat{x}\{f(x) - g(x) \neq 0\}.$$

est de μ-mesure nulle.

Démonstration. Supposons que $\mu(G) > 0$, où

$$G \underset{df}{=} \hat{x}\{f(x) - g(x) \neq 0\}.$$

En faisant la décomposition $G = G' + G''$, où

$$G' \underset{df}{=} \hat{x}\{f(x) - g(x) > 0\},$$

et

$$G'' \underset{df}{=} \hat{x}\{f(x) - g(x) < 0\},$$

on a

$$\mu(G) = \mu(G') + \mu(G''),$$

donc l'un au moins des ensembles G' et G'' est de μ-mesure positive. Soit $\mu(G') > 0$. Il existe un nombre positif α tel que

$$\mu[\hat{x}\{f(x) - g(x) > \alpha\}] > 0.$$

La fonction constante, égale partout à α et définie dans G', est une fonction simple appartenant au corps $(G' \mid \mathscr{K})$. Donc

$$(1) \qquad \int_H (f - g)\, d\mu \geqslant \int_H \alpha\, d\mu = \alpha . \mu(H) > 0,$$

où

$$H \underset{df}{=} \hat{x}\{f(x) - g(x) > \alpha\}.$$

La relation (1) exprime une contradiction avec l'hypothèse:

$$\int_H (f-g)\, d\mu = 0.$$

Le cas, où $\mu(G'') > 0$, se traite d'une manière analogue.

§ 6. ***Definition 14.*** Soit $\mathscr{K}$ un corps d'ensembles et $\mathscr{F}(E)$ une fonction d'ensembles de $\mathscr{K}$, ses valeurs étant des nombres réels.

Soit $\mu(E)$ une fonction mesurante du corps. $\mathscr{F}(E)$ sera appelée *μ-continue*, si la relation

$$\|E_n, E\|_\mu \to 0$$

entraîne

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{F}(E_n) = \mathscr{F}(E).$$

Théorème I La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\mathscr{F}(E)$ parfaitement additive soit μ-continue est que la relation

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$$

entraîne

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{F}(E_n) = 0$$ [19].

Dém. La nécessité de la condition est évidente.

En effet,

$$\mu(E_n) = \|E_n, 0\|_\mu.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{F}(E_n) = \mathscr{F}(0).$$

Mais, comme en vertu de l'additivité,

$$\mathscr{F}(0) + \mathscr{F}(0) = \mathscr{F}(0),$$

il en résulte que $\mathscr{F}(0) = 0$.

Supposons donc que la relation

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$$

entraîne

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{F}(E_n) = 0.$$

[19]) Il en résulte tout-de-suite que $\mu(E)$ est μ-continue.

Soit

$$M,\ M_1,\ M_2, \ldots,\ M_n, \ldots$$

une suite d'ensembles de $\mathscr{K}$, telle que

$$\|M_n, M\|_\mu \to 0 \quad \text{pour} \quad n \to \infty.$$

On a

$$\mu(M - M_n) \to 0,$$

donc

(1) $$\lim_{n\to\infty} \mathscr{F}(M - M_n) = 0.$$

D'une manière analogue on obtient

(2) $$\lim_{n\to\infty} \mathscr{F}(M_n - M) = 0.$$

Mais

$$M = M_n + (M - M_n) - (M_n - M);$$

en outre

$$M_n - M \subset M_n + (M - M_n)$$

et

$$M_n \cdot (M - M_n) = 0.$$

Par conséquent

$$\mathscr{F}(M) = \mathscr{F}(M_n) + \mathscr{F}(M - M_n) - \mathscr{F}(M_n - M).$$

Il en résulte, à l'aide de (1) et (2), que

$$\mathscr{F}(M) = \lim_{n\to\infty} \mathscr{F}(M_n).$$

Nous prouverons tout de suite qu'une autre condition, (considérée par M. Radon), va se montrer comme nécessaire et suffisante pour la μ-continuité.

Nous démontrerons un peu plus loin que les fonctions (d'ensembles) parfaitement additives et μ-continues coïncident avec les intégrales $\int_E f\, d\mu$ des fonctions μ-sommables.

Théorème II. Si la fonction d'ensembles $\mathscr{F}(E)$, parfaitement additive dans un corps $\mathscr{K}$ est μ-continue, la relaton $\mathscr{F}(E) \neq 0$ entraîne $\mu(E) > 0$.

Démonstration. Supposons qu'on ait pour un ensemble E':

$$\mathscr{F}(E') \neq 0 \quad \text{et} \quad \mu(E') = 0.$$

Envisageons la suite infinie $E_n \underset{df}{=} E' \quad (n = 1, 2, \ldots)$.

On a $\mu(E_n)\to 0$ pour $n\to\infty$, donc, en vertu de la μ-continuité de $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}(E_n)\to 0$, c'est-à-dire $\mathcal{F}(E')=0$ contrairement à l'hypothèse.

Le théorème est établi.

Théorème III. Si $\mathcal{F}(E)$ est une fonction parfaitement additive d'ensembles du corps $\mathcal{K}$ et si 2° la relation $\mathcal{F}(E)\neq 0$ entraîne $\mu(E)>0$, il existe une fonction $f(x)$, telle que

$$\mathcal{F}(E)=\int\limits_E f\,d\mu$$

pour tout $E\epsilon\mathcal{K}$. Si

$$\int\limits_E f\,d\mu=\int\limits_E g\,d\mu$$

pour tout $E\epsilon\mathcal{K}$, l'ensemble

$$\hat{x}\{|f(x)-g(x)|=0\}$$

est de μ-mesure nulle.

Démonstration. Considérons d'abord le cas, où $\mathcal{F}(E)\geq 0$, pour tout $E\epsilon\mathcal{K}$.

Dans le cas, où $\mathcal{F}(E)$ est identiquement nulle, la fonction $f(x)=0$ satisfait évidemment aux exigences de la thèse.

Supposons donc que $\mathcal{F}(I)>0$.

Fixons un nombre $\alpha\geq 0$ et soit P un ensemble fixe du corps $\mathcal{K}$. Désignons par $\mathfrak{L}_\alpha^P$ la classe de tous les sous-ensembles E de P jouissant de la propriété suivante: quel que soit l'ensemble E', où $E'\subset E$, $E'\epsilon\mathcal{K}$, on a

$$\alpha.\mu(E')\leq\mathcal{F}(E').$$

Je dis que, si $E_1\epsilon\mathfrak{L}_\alpha^P$, $E_2\epsilon\mathfrak{L}_\alpha^P$, on a aussi

$$E_1+E_2\epsilon\mathfrak{L}_\alpha^P$$

et une chose pareille se présente pour la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles appartenant à $\mathfrak{L}_\alpha^P$.

En effet, soit $E_n\epsilon\mathfrak{L}_\alpha^P$ $(n=1,2,\ldots)$. Posons $E\underset{df}{=}\sum\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ et supposons que $E'\subset E$, $E'\epsilon\mathcal{K}$.

On a

$$E=E_1'+E_2'+\ldots,$$

où on a posé

$$E_1'\underset{df}{=}E_1,\quad E_2'\underset{df}{=}E_2-E_1,\quad E_3'\underset{df}{=}E_3-(E_1+E_2),\ldots$$

On obtient

$$E'=E'.E_1'+E'.E_2'+\ldots,$$

où tous les termes du second membre sont des ensembles du corps $P\rceil\mathcal{K}$ et disjoints deux-à-deux. Comme

$$\alpha.\mu(E'.E_n')\leq\mathcal{F}(E'.E_n'),\quad(n=1,2,\ldots),$$

il en résulte par l'addition

$$\alpha.\mu(E')\leq\mathcal{F}(E'),$$

ce qui démontre la proposition. Pour en déduire le cas de la somme fini, il suffit de remarquer que $O\,\epsilon\,\mathfrak{L}_\alpha^P$.

Appelons *ensemble maximum de* $\mathfrak{L}_\alpha^P$ tout ensemble $D\epsilon\mathfrak{L}_\alpha^P$, tel que $\mu(E-D)=0$ pour tout ensemble E appartenant à $\mathfrak{L}_\alpha^P$.

Montrons d'abord que deux ensembles maximums de $\mathfrak{L}_\alpha^P$ sont nécessairement μ-égaux.

En effet, si D_1 et D_2 sont maximum, on a

$$\mu(D_1-D_2)=0\quad\text{et}\quad\mu(D_2-D_1)=0,$$

d'où

$$\|D_1,\ D_2\|_\mu=0.$$

Réciproquement, si D_1 est un ensemble maximum pour $\mathfrak{L}_\alpha^P$ et si $D_1=_\mu D_2$, l'ensemble D_2 est aussi un ensemble maximum pour $\mathfrak{L}_\alpha^P$.

En effet, on a quel que soit $E\epsilon\mathfrak{L}_\alpha^P$:

$$\mu(E-D_1)=0.$$

D'autre part $\mu(D_1-D_2)=0$; donc, comme

$$E-D_2\subset(E-D_1)+(D_1-D_2),$$

on obtient

$$\mu(E-D_2)\leq\mu(E-D_1)+\mu(D_1-D_2)=0,$$

ce qui prouve que D_2 est maximum pour $\mathfrak{L}_\alpha^P$.

Démontrons maintenant l'existence d'un ensemble maximum de $\mathfrak{L}_\alpha^P$.

$\mathfrak{L}_\alpha^P$ n'est pas vide, parce que $O\,\epsilon\,\mathfrak{L}_\alpha^P$. Donc on peut parler de la borne supérieure m des nombres $\mu(A)$, où $A\epsilon\mathfrak{L}_\alpha^P$. Soit

$$m_1\leq m_2\leq\ldots,\ \lim_{s\to\infty}m_s=m$$

une suite de nombres et

$$E_1,\ E_2,\ldots;\quad E_s\epsilon\mathfrak{L}_\alpha^P,\quad(s=1,2,\ldots).$$

une suite d'ensembles telles que

$$\mu(E_s) = m_s, \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

D'après ce qui précède

$$E \underset{df}{=} \sum_{s=1}^{\infty} E_s \in \mathfrak{L}_\alpha^P.$$

Puisque

$$\mu(E) \geq \mu(E_s), \ (s = 1, 2, \ldots),$$

on a $\mu(E) \geq m$, donc

(1) $$\mu(E) = m,$$

le nombre m étant la borne supérieure des $\mu(A)$, où $A \in \mathfrak{L}_\alpha^P$.

Or, E est un ensemble maximum de $\mathfrak{L}_\alpha^P$.

En effet, soit $Q \in \mathfrak{L}_\alpha^P$. S'il était

$$\mu(Q - E) > 0,$$

on aurait:

$$\mu(Q + E) = \mu(Q - E) + \mu(E) > m.$$

ce qui est impossible puisque $Q + E \in \mathfrak{L}_\alpha$ et puisque m est la borne supérieure. On a donc $\mu(Q - E) = 0$, c'est-à-dire E est maximum.

Nous allons montrer maintenant que, si $\mathscr{F}(P) > 0$ et

(2) $$0 \leq \alpha < \frac{\mathscr{F}(P)}{\mu(P)}\ [20],$$

la classe $\mathfrak{L}_\alpha^P$ contient des ensembles E, pour lesquels $\mu(E) > 0$.

La proposition est vraie pour $\alpha = 0$, puisque l'ensemble P jouit de la propriété exigée.

Supposons que la proposition soit fausse pour un certain nombre $\alpha > 0$, satisfaisant à la condition (2).

L'ensemble P n'appartenant pas à $\mathfrak{L}_\alpha^P$ (puisque $\mu(P) > 0$), il existe un ensemble E_1, tel que

$$E_1 \in (P \upharpoonleft \mathscr{H}) \quad \text{et} \quad \alpha . \mu(E_1) > \mathscr{F}(E_1).$$

Donc $\mu(E_1) > 0$, puisque $\alpha > 0$.

Supposons qu'on ait choisi tous les ensembles E_β pour $\beta < \gamma$, où $\gamma \geq 2$ est un nombre transfini de 1re où de 2e classe de Cantor.

[20]) En vertu de l'hypothèse, l'inégalité $\mathscr{F}(P) > 0$ entraîne $\mu(P) > 0$.

L'ensemble

(3) $$P - \sum_{\beta < \gamma} E_\beta$$

appartient au corps $P \upharpoonleft \mathscr{H}$, si l'on suppose que tous les E_β en question y appartiennent. Dans le cas, où la μ-mesure de l'ensemble (3) est nulle, le procédé s'arrête. Dans le cas contraire, il existe un ensemble E_γ tel que

$$E_\gamma \in (P \upharpoonleft \mathscr{H}), \quad E_\gamma \subset P - \sum_{\beta<\gamma} E_\beta.$$

(4) $$\alpha . \mu(E_\gamma) > \mathscr{F}(E_\gamma).$$

Pour préciser le choix de E_γ il est commode de ranger auparavant tous les ensembles du corps $(P \upharpoonleft \mathscr{H})$ dans une suite bien ordonnée.

Remarquons que (4) implique $\mu(E_\gamma) > 0$.

Or, le procédé que nous venons de définir, s'arrête nécessairement pour un nombre ordinal $< \Omega$, soit δ. En effet, dans le cas contraire, on obtiendrait une infinité non dénombrable d'ensembles disjoints $E_1, E_2, \ldots, E_\omega, \ldots$, dont les μ-mesures soient positives.

On aurait

$$P =_\mu \sum_{\beta<\delta} E_\beta,$$

la somme ne contenant qu'un nombre au plus dénombrable de termes disjoints. Par conséquent

$$\mu(P) = \sum_{\beta<\delta} \mu(E_\beta).$$

Cette équation n'est pas d'accord avec l'inégalité

$$\alpha . \sum_{\beta<\delta} \mu(E_\beta) > \sum_{\beta<\delta} \mathscr{F}(E_\beta)$$

que l'on obtient de (4) par sommation. En effet, la dernière inégalité entraîne

$$\alpha . \mu(P) > \mathscr{F}(P)$$

contrairement à (2): $\alpha < \dfrac{\mathscr{F}(P)}{\mu(P)}$.

Notre proposition auxiliaire est ainsi établie. On peut en tirer la conséquence suivante:

Si $0 \leq \alpha < \frac{\mathcal{F}(P)}{\mu(P)}$, la classe $\mathfrak{L}_\alpha^P$ contient un ensemble maximum dont la μ-mesure est positive.

Remarquons que, si $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$, on a

$$\mathfrak{L}_{\alpha_2}^P \subset \mathfrak{L}_{\alpha_1}^P,$$

ce qui veut dire que tout ensemble appartenant à $\mathfrak{L}_{\alpha_2}^P$ appartient aussi à $\mathfrak{L}_{\alpha_1}^P$. Si E_1 et E_2 sont respectivement leurs ensembles maximums, l'inclusion $E_2 \subset E_1$ subsiste à un ensemble de μ-mesure nulle près, ce qui veut dire que $\mu(E_2 - E_1) = 0$.

En effet, on a $E_2 \in \mathfrak{L}_{\alpha_1}^P$ et, comme E_1 est maximum pour $\mathfrak{L}_{\alpha_1}^P$, il en résulte $\mu(E_2 - E_1) = 0$.

Montrons maintenant que, si E est un ensemble maximum de $\mathfrak{L}_\alpha^1$, l'ensemble $E.P$ est un ensemble maximum de $\mathfrak{L}_\alpha^P$.

Dans le cas contraire il existerait un ensemble $E' \in \mathfrak{L}_\alpha^P$ tel que $\mu(E' - E.P) > 0$. Mais on a $E = E.P + (E - P)$ et $E' \subset P$. Considérons l'ensemble

$$E'' \underset{df}{=} E + (E' - E.P).$$

Puisque $E' - E.P \subset E'$, on a $E' - E.P \in \mathfrak{L}_\alpha^P$, donc $E' - E.P \in \mathfrak{L}_\alpha^1$. Par conséquent $E'' \in \mathfrak{L}_\alpha^1$.

La relation

$$E.(E' - E.P) = E.E' - E.P = E(E' - P) = 0$$

dit que E et $E' - E.P$ sont disjoints.

Donc

$$\mu(E'') = \mu(E) + \mu(E' - E.P),$$

d'où

$$\mu(E'' - E) = \mu(E' - E.P) > 0,$$

ce qui est impossible, étant supposé que E est un ensemble maximum pour $\mathfrak{L}_\alpha^1$.

La proposition est donc établie.

Considérons maintenant tous les nombres rationnels non négatifs b', déterminons les classes y correspondantes $\mathfrak{L}_{b'}^1$ et leurs ensembles maximums. Choisissons, au moyen de l'axiôme de M. Zermelo, un ensemble maximum pour tout b' et désignons le par $G'(b')$.

Posons $G(0) \underset{df}{=} 1$, (qui est μ-égal à $G'(0)$). Si $b > 0$ est rationnel, posons

(5) $$G(b) \underset{df}{=} \prod_{b' \leq b} G'(b'),$$

le produit étant etendu à tout les b' rationnels ≥ 0 et $\leq b$ Je dis que $G(b) =_\mu G'(b)$. En effet, rangeons tous les nombres rationnels ≥ 0 et $\leq b$ dans une suite infinie $b_1, b_2, .., b_n, \dots$ On a

$$G(b) = \prod_{n=1}^{\infty} G'(b_n).$$

Donc $G(b) \subset G'(b)$, d'où

$$G(b) - G'(b) = 0, \quad \mu[G(b) - G'(b)] = 0.$$

D'autre part:

$$G'(b) - G(b) = \sum_{n=1}^{\infty} [G'(b) - G'(b_n)],$$

donc

$$\mu[G'(b) - G(b)] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu[G'(b) - G'(b_n)].$$

Mais, comme $b_n \leq b$ et $G'(b)$ et $G'(b_n)$ sont des ensembles maximums respectifs, on a

$$\mu[G'(b) - G'(b_n)] = 0,$$

donc

$$\mu[G'(b) - G(b)] = 0.$$

Il s'ensuit que $\|G(b), G'(b)\|_\mu = 0$.

Remarquons, ce qui sera important dans la suite, que, si $a' \leq a''$ sont rationnels, on a

(5') $$G(a'') \subset G(a').$$

Cela résulte immédiatement de (5). Remarquons, en outre, que $G(b)$ est un ensemble maximum pour $\mathfrak{L}_b^1$, parce que $G(b) =_\mu G'(b)$.

Les préliminaires étant posés, souvenons nous de ce que $\mathcal{F}(1) > 0$ et considérons un nombre rationnel $a > 0$ tel que

(5'') $$a < \frac{\mathcal{F}(1)}{\mu(1)}.$$

On a, d'après ce qui précède:

$$G(0) \supset G(a) \supset G(2a) \supset \dots \supset G(sa) \supset \dots$$

L'ensemble $G(s\,a)$ est maximum pour $\mathfrak{L}^1_{sa}$.

Considérons la fonction $\psi_a(x)$ définie que voici:

$$\psi_a(x)=0, \quad \text{si} \quad x\in G(0)-G(a)$$
$$\psi_a(x)=a, \quad \text{si} \quad x\in G(a)-G(2a)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi_a(x)=sa, \quad \text{si} \quad x\in G(sa)-G((s+1)a).$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

La fonction $\psi_a(x)\geq 0$ est bien déterminée dans 1. En effet, les ensembles

$$H_s \overline{\overline{df}}\, G(s\,a)-G((s+1)\,a), \quad (s=0,1,2,\ldots)$$

sont disjoints deux-à-deux. Comme ils appartiennent tous au corps $\mathcal{K}$, la fonction $\psi_a(a)$ est simple. Je dis qu'elle est μ-sommable et je vais calculer son intégrale $\int\limits_P \psi_a\,d\mu$.

On a

$$\hat{x}\{\psi_a(x)=s\,a\}=H_s, \quad \text{donc} \quad \hat{x}\{(P \upharpoonright \psi_a)=s\,a\}=H_s\,.\,P.$$

Puisque $G(sa)$ est un ensemble maximum de $\mathfrak{L}^1_{sa}$, $P\,.\,G(s\,a)$ est un ensemble maximum de $\mathfrak{L}^P_{sa}$.

Puisque $P\,.\,H_s \subset P\,.\,G(s\,a)$, on a

$$s\,a\,.\,\mu(P H_s)\leq \mathcal{F}(P\,.\,H_s)$$

ce qui donne

$$\sum_{s=0}^{\infty} s\,a\,.\,\mu(P.H_s)\leq \sum_{s=0}^{\infty}\mathcal{F}(P.H_s)=\mathcal{F}(P),$$

d'où résulte la μ-sommabilité de $\psi_a(x)$.

On a en même temps

(6) $$\int\limits_P \psi_a\,d\mu\leq\mathcal{F}(P).$$

Démontrons que

(7) $$(s+1)\,a\,.\,\mu(H_s P)\geq\mathcal{F}(H_s\,.\,P).$$

En effet, si $\mu(H_s P)=0$, on doit nécessairement avoir $\mathcal{F}(H_s P)=0$ et cela en vertu de l'hypothèse du théorème. Soit donc $\mu(H_s P)>0$ et supposons que (7) ne subsiste pas. On a donc

$$0<(s+1)\,a<\frac{\mathcal{F}(H_s\,P)}{\mu(H_s\,P)}.$$

En vertu de ce que nous avons démontré plus haut (dans les

préliminaires), l'ensemble maximum [21]) H' de $\mathfrak{L}^{H_s.P}_{(s+1)a}$ a la μ-mesure positive.

Comme $H'=_\mu G((s+1)\,a)\,.\,H_s P$ et comme

$$H'\subset H_s\,.\,P\subset[G(s\,a)-G((s+1)a)]\,.\,H_s\,P,$$

il en résulte que $\mu(H')=0$, ce qui est contradictoire.

Les relations (7) étant ainsi démontrées, sommons les de $s=0$ jusqu'à l'infini. On obtient:

$$a\,.\sum_{s=0}^{\infty}\mu(H_s\,.\,P)+\sum_{s=0}^{\infty}s\,a\,.\,\mu(H_s P)\geq\sum_{s=0}^{\infty}\mathcal{F}(H_s\,.\,P).$$

Les sommes y figurant existent, d'après ce que nous avons établi plus haut. L'inégalité obtenue peut s'écrire que voici:

(8) $$a\,\mu(P)+\int\limits_P\psi_a(x)\,d\mu\geq\mathcal{F}(P).$$

En faisant tendre a vers zéro et en tenant compte de (6), on obtient

(9) $$\lim_{a\to 0}\int\limits_P\psi_a(x)\,dx=\mathcal{F}(P).$$

Démontrons que $\psi_a(x)$ converge uniformément pour a tendant vers 0 et restant toujours rationnel.

En effet, soient a' et a'' deux nombres rationnels, positifs et satisfaisant à la condition analogue à (5''). Fixons un point $x\in 1$. Soit s' le plus grand nombre (naturel ou nul) tel que $x\in G(s'\,.\,a')$ [22]).

Si $x\in G(t\,a'')$, (où $t=0,1,2,\ldots$), on a

(10) $$t\,a''<(s'+1)\,a',$$

parce que, dans le cas contraire, on aurait, d'après la définition des $G(b)$

$$G(t\,a'')\subset G((s'+1)\,a'),$$

ce qui donnerait $x\in G((s'+1)\,a')$ contrairement à l'hypothèse que s' est maximum. Comme $\psi_{a''}(x)\leq t\,a''$ et $\psi_{a'}(x)=s'\,a'$, la relation (10)

[21]) nous le choisissons arbitrairement.

[22]) Un tel nombre s' existe puisque

$$1=\sum_{s=0}^{\infty}[G(s\,a')-G((s+1)\,a')],$$

et $G((s+1)\,a'\subset G(s\,a')$.

implique

$$\psi_{a''}(x) < \psi_{a'}(x) + a'.$$

En échangeant les rôles de a' et a'', on obtient

$$\psi_{a'}(x) < \psi_{a''}(x) + a''.$$

Par conséquent

$$|\psi_{a'}(x) - \psi_{a''}(x)| < a' + a'',$$

donc la convergence en question est uniforme. En choisissant une suite spéciale $\{a_n\}$ de nombres positifs et rationnels tendant vers 0, posons

$$f(x) \underset{df}{=} \lim_{n \to \infty} \psi_{a_n}(x).$$

On a $f(x) \geq 0$. En vertu du *théorème 7.* on peut dire, d'après (9), que f est μ-sommable et que:

$$\mathscr{F}(P) = \int_P f \, d\mu$$

En tenant compte du *théorème 13*, on voit que notre théorème est démontré pour $\mathscr{F}(E) \geq 0$.

Envisageons maintenant le cas général.

Soit donc $\mathscr{F}(E)$ une fonction arbitraire d'ensembles du corps $\mathscr{K}$, parfaitement additive et telle que la relation $\mathscr{F}(E) \neq 0$ entraîne toujours $\mu(E) > 0$. On sait qu'une fonction parfaitement additive est bornée [23]). Soit donc M la borne supérieure et m la borne inférieure de $\mathscr{F}$. Le cas, où $M \leq 0$, ainsi que le cas, où $m \geq 0$, s'établie immédiatement par le résultat que nous avons déjà obtenu. Supposons donc que $M > 0$ et $m < 0$.

Appelons *positif* tout ensemble E du corps, pour lequel $\mathscr{F}(E) > 0$ et, si $E' \subset E$ et $E' \in \mathscr{K}$, on a toujours $\mathscr{F}(E') \geq 0$. D'une manière analogue on définie les *ensembles négatifs*.

Je dis que, si $\mathscr{F}(E) > 0$, E contient un ensemble positif [24]).

Pour démontrer cela, supposons que la proposition n'est pas vraie

[23]) M. Fréchet l. c.

[24]) Ce resultat se trouve chez M. Hahn (*Theorie der reellen Funktionen* Berlin 1921. p. 404) et a été retrouvé par M. R. Franck. *Fund. Math. T. V. Sur une propriété des fonctions additives d'ensembles* p. 252. Voir aussi la note de M. M. Fréchet. *Fund Math.* T. V. p. 251 et une note de M. W. Sierpiński. *Fund. Math.* T. V. *Démonstration d'un théorème sur les fonctions additives d'ensembles*. p. 262.

Pour être complet nous en donnerons une courte démonstration.

pour un certain ensemble E, où $\mathscr{F}(E) > 0$. Il existe donc un sous-ensemble E_1 de E, tel que $\mathscr{F}(E_1) < 0$. Supposons qu'on ait choisi les ensembles E_β pour tous les nombres ordinaux $\beta < \alpha$, où $\alpha \geq 2$ est un nombre ordinal de 1^e ou de 2^e classe de Cantor. En supposant que $\mathscr{F}(E_\beta) < 0$, et que les E_β sont des sous-ensembles disjoints de E, on a

$$\mathscr{F}\Big(\sum_{\beta<\alpha} E_\beta\Big) = \sum_{\beta<\alpha} \mathscr{F}(E_\beta) < 0.$$

Par conséquent

$$\mathscr{F}\Big(E - \sum_{\beta<\alpha} E_\beta\Big) = \mathscr{F}(E) - \mathscr{F}\Big(\sum_{\beta<\alpha} E_\beta\Big) > 0.$$

Donc $E - \sum_{\beta<\alpha} E_\beta$ contient, en vertu de la supposition, un nouvel ensemble E_α, pour lequel

$$\mathscr{F}(E_\beta) < 0.$$

Le procédé peut être prolongé pour tous les nombres ordinaux de la deuxième classe de Cantor. Les ensembles E_α, pour $\alpha < \Omega$, étant disjoints et, comme $\mathscr{F}(E_\alpha) < 0$, il en résulte que $|\sum_{\alpha<\Omega} \mathscr{F}(E_\alpha)| \leq |m|$, ce qui est impossible parce que $\mathscr{F}(E_\alpha)$ est toujours négatif.

La proposition est ainsi établie.

On voit aisément que la somme d'un nombre fini ou infini dénombrable d'ensembles positifs est ausi positive.

On voit aussi qu'il existe au moins un ensemble positif. En effet, $M > 0$ étant la borne supérieure de $\mathscr{F}$, il existe un ensemble E, pour lequel $\mathscr{F}(E) > 0$; donc, en vertu de ce que nous avons démontré plus haut, il existe un sous-ensemble E' de E qui est positif.

Soit M' la borne supérieure de tous les nombres $\mathscr{F}(E)$, où E est positif. Évidemment M' existe, puisque $\mathscr{F}(E) < M$. Soit $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ une suite infinie d'ensembles positifs, telle que $\lim_{n\to\infty} \mathscr{F}(E_n) = M'$. Comme $H \underset{df}{=} \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ est aussi positif, on démontre aisément que $\mathscr{F}(H) = M'$ [25]).

Je dis que, si $H.A = 0$, on a $\mathscr{F}(A) \leq 0$. En effet, dans le cas contraire, on aurait $\mathscr{F}(A) > 0$ et, par conséquent, on pourrait trouver

[25]) Il est évident que $M' = M$.

un sous-ensemble positif A' de A. On aurait donc $\mathcal{F}(H+A)=$ $=\mathcal{F}(H)+\mathcal{F}(A)>M'$ ce qui est contradictoire.

D'une manière analogue on peut démontrer l'existence d'un ensemble G négatif et tel que, si $G.B=0$, on a nécessairement $\mathcal{F}(B)\geq 0$. On démontre aisément que, si $E\subset H.G$, on a $\mathcal{F}(F)=0$. De même, si $E\subset 1-(H+G)$, on a $\mathcal{F}(E)=0$.

Considérons le corps $H\rceil\mathcal{K}$ et la fonction $\mathcal{F}^{+}(E)$ définie comme égale à $\mathcal{F}(E)$, si $E\in(H\rceil\mathcal{K})$. La fonction $\mathcal{F}^{+}(E)$ étant non négative, parfaitement additive et satisfaisant à la condition que $\mathcal{F}^{+}(E)>0$ entraîne $\mu(E)>0$, il existe une fonction $f^{+}(x)$ définie dans la variété H du corps $H\rceil\mathcal{K}$ et telle que

$$\mathcal{F}^{+}(E)=\int_E f^{+}(x)\,d\mu, \tag{11}$$

pour tout E appartenant à $H\rceil\mathcal{K}$.

D'une manière analogue, en considérant le corps $G\rceil\mathcal{K}$ et en y définissant la fonction $\mathcal{F}^{-}(E)$ par la relation $\mathcal{F}^{-}(E)=-\mathcal{F}(E)$, on obtient une fonction d'ensembles parfaitement additive dans $G\rceil\mathcal{K}$ et jouissant de la propriété que $\mathcal{F}^{-}(E)>0$ entraîne $\mu(E)>0$. Par conséquent, il existe une fonction $f^{-}(x)$ définie dans G et telle que

$$\mathcal{F}^{-}(E)=\int_E f^{-}(x)\,d\mu, \tag{12}$$

si $E\in(G\rceil\mathcal{K})$.

Il est aisé de voir qu'on a presque μ-partout dans $H.G$:

$$f^{+}(x)=f^{-}(x)=0.$$

Cela résulte, au moyen du *Théor. 13*, du fait que la relation $E\subset H.G$ entraîne $\mathcal{F}^{+}(E)=\mathcal{F}^{-}(E)=0$.

Définissons la fonction $f(x)$ dans *1*, en posant:

$$\left\{\begin{array}{ll} f(x)\underset{df}{=}f^{+}(x) & \text{dans } H-G \\ f(x)\underset{df}{=}-f^{-}(x) & \text{dans } G-H \\ f(x)\underset{df}{=}0 & \text{dans tous les points restants de la variété } 1. \end{array}\right. \tag{13}$$

Soit E un ensemble quelconque. On a

$$\int_E f\,d\mu=\int_{E.(H-G)} f\,d\mu+\int_{E.(G-H)} f\,d\mu+\int_{E.G.H} f\,d\mu+\int_{1-(G+H)} f\,d\mu.$$

Les deux intégrales dernières disparaissent; donc

$$\int_E f\,d\mu=\int_{E.(H-G)} f\,d\mu+\int_{E.(G-H)} f\,d\mu.=\mathcal{F}^{+}[E.(H-G)]-\mathcal{F}^{-}[E.(G-H)]=$$
$$=\mathcal{F}[E.(H-G)]+\mathcal{F}(E.(G-H)].$$

Comme

$$\mathcal{F}(G.H)=0 \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(1-(G+H))=0,$$

on a

$$\int_E f\,d\mu=\mathcal{F}[E.(H-G)]+\mathcal{F}[E.(G-H)]+$$
$$+\mathcal{F}[E.G.H]+\mathcal{F}[E-(G+H)].$$

Les quatre ensembles étant disjoints, il en résulte que

$$\int_E f\,d\mu=\mathcal{F}(E).$$

Le théorème est démontré complètement.

Les *théorèmes I, II, III et 10* permettent d'énoncer le théorème fondamental suivant:

IV. Théorème: Étant donné un corps $\mathcal{K}$ d'ensembles, une de ses fonctions mesurantes $\mu(E)\geq 0$, et une fonction $\mathcal{F}(E)$ d'ensembles du corps $\mathcal{K}$, parfaitement additive, les quatres conditions suivantes sont équivalentes deux-à-deux:

1. $\mathcal{F}(E)$ est μ-continue
2. la relation $\mathcal{F}(E)\neq 0$ entraîne $\mu(E)>0$
3. si $\mu(E_n)\to 0$, on a $\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{F}(E_n)=0$
4. il existe une fonction μ-sommable $f(x)$ définie dans la variété du corps, telle que

$$\mathcal{F}(E)=\int_E f\,d\mu$$

pour tout $E\in\mathcal{K}$.