Sur l'opération $\overline{A}$ de l'Analysis Situs [1]).

Par

Casimir Kuratowski (Varsovie).

1 désigne l'espace euclidien à n dimensions. A étant un ensemble quelconque de points de cet espace, $1-A$ ou A^1 désignent l'ensemble complémentaire de A.

$\overline{A}$ se compose des points de A et de leurs points limites. Nous emploierons souvent — pour des raisons typographiques — le symbole A^- au lieu de $\overline{A}$.

On montre aisément que les énoncés suivants subsistent:

I. $$\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$$

II. $$A\subset\overline{A}$$

III. $$\overline{0}=0$$

IV. $$\overline{\overline{A}}=\overline{A}.$$

Cette Note est consacrée à l'analyse de ces propositions et de leurs conséquences. Nous procédons par voie axiomatique: nous supposons donnés un ensemble arbitraire 1 et une fonction $\overline{A}$ telle que, pour tout A contenu dans 1, $\overline{A}$ y est contenu également et remplit les axiomes I—IV. D'ailleurs, quant à l'ensemble 1, nous n'aurons récours qu'aux propriétés d'ensembles énoncées dans les axiomes de l'Algèbre de la Logique [2]).

Ainsi, les axiomes I—IV ajoutés à ceux de l'Algèbre de la Logique forment la base de tous les raisonnements du texte (sauf ceux qui sont imprimés en minuscules).

[1]) Ce Mémoire constitue la première partie — modifiée légèrement — de ma Thèse présentée le 12 mai 1920 à l'Université de Varsovie pour obtenir le grade de docteur en philosophie.

[2]) Cf. L. Couturat: *L'Algèbre de la Logique*, Paris 1914.

Si l'on compare le système d'axiomes I—III à celui qui sert de définition des classes **abstraites** ($\mathfrak{L}$) de M. **Fréchet**, on reconnait sans peine que le premier est plus général que le second: toute classe ($\mathfrak{L}$) satisfait aux axiomes I—III, mais il existe des „espaces" qui remplissent les axiomes I—IV sans être des classes ($\mathfrak{L}$).

§ 1. Propriétés générales de $\overline{A}$.

Nous établirons à présent les 6 propriétés fondamentales de $\overline{A}$:

Théorème 1. $A \subset B$ *implique* $\overline{A} \subset \overline{B}$.

„ 2. $\overline{A \times B} \subset \overline{A} \times \overline{B}$.

„ 3 [1]. $\overline{A} - \overline{B} \subset \overline{A - B}$.

„ 4. $\overline{1} = 1$.

„ 5. $A^{-1} \subset A^{1-}$.

„ 6. $A^{-1-1-1-} = A^{-1-}$.

Les trois premiers théorèmes résultent de l'axiome I. En effet, l'inclusion $A \subset B$ veut dire que $B = A + B$, d'où $\overline{B} = \overline{A + B}$ et d'après I: $\overline{B} = \overline{A} + \overline{B}$; donc $\overline{A} \subset \overline{B}$. Pour établir le théorème 2, remarquons que

$$A \times B \subset A \quad \text{et} \quad A \times B \subset B,$$

ce qui entraîne, selon le th. 1:

$$\overline{A \times B} \subset \overline{A} \quad \text{et} \quad \overline{A \times B} \subset \overline{B},$$

donc

$$\overline{A \times B} \subset \overline{A} \times \overline{B}.$$

Enfin, la formule évidente

$$A \subset A + B = (A - B) + B$$

entraîne

$$\overline{A} \subset \overline{(A - B) + B} = \overline{A - B} + \overline{B},$$

d'où le théorème 3.

Le théorème 4 résulte de l'axiome II. En effet, par définition de la fonction $\overline{A}$, on a: $\overline{1} \subset 1$, et d'après II: $1 \subset \overline{1}$, donc $1 = \overline{1}$.

En s'appuyant sur cette identité, on déduit le th. 5 du th. 3. Car,

$$A^{-1} = 1 - \overline{A} = \overline{1} - \overline{A} \subset \overline{1 - A} = A^{1-}.$$

[1] Voir: **Janiszewski** et **Kuratowski**, *Sur les continus indécomposables*, *Fund. Math. I*, p. 222.

Pour établir le th. 6, nous aurons à invoquer les axiomes I, II, IV.

Suivant IV et le principe de la „double négation“ ($X'' = X$), on a

$$A^{-'-} = A^{-'--} = A^{-'--''}.$$

D'après le th. 5:

$$A^{-'--'} \subset A^{-'-'-},$$

d'où

$$A^{-'-'-'} \subset A^{-'--''} = A^{-'-}$$

et selon le th. 1 et l'axiome IV:

(1) $$A^{-'-'-'-} \subset A^{-'-}.$$

D'autre part,

$$A^{-'-'} \subset A^{-''-} = A^{--} = A^{-},$$

donc

$$(A^{-'-'})^{-'-} \supset (A^{-})^{-'-} = A^{-'-},$$

c'est-à-dire, que

(2) $$A^{-'-'-'-} \supset A^{-'-}.$$

Les formules (1) et (2) donnent le théorème 6.

Nous reviendrons à ce théorème dans le § 4.

En ce qui concerne les sommes et produits d'une infinité d'ensembles, on a le théorème suivant:

Théorème 2 a. *$\{A_i\}$ désignant une famille quelconque d'ensembles et i un indice variable, on a*

$$\overline{\prod_i A_i} \subset \prod_i \overline{A_i} \quad \text{et} \quad \sum_i \overline{A_i} \subset \overline{\sum_i A_i}.$$

Démonstration. Pour tout indice k on a

$$\prod_i A_i \subset A_k \quad \text{d'où} \quad \overline{\prod_i A_i} \subset \overline{A_k}$$

donc

$$\overline{\prod_i A_i} \subset \prod_k \overline{A_k} = \prod_i \overline{A_i}.$$

Tout pareillement, l'inclusion $A_k \subset \sum_i A_i$ implique

$$\sum_i \overline{A_i} = \sum_k \overline{A_k} \subset \overline{\sum_i A_i} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Nous allons généraliser maintenant les théorèmes 1—3. Convenons de désigner par σ une suite finie quelconque formée des symboles „—" et „1". Nous dirons que σ est pair s'il contient un nombre pair ($\geqslant 0$) d'unités.

Or, en s'appuyant sur le théorème 1 et sur le „principe de contraposition" (d'après lequel: $A \subset B$ entraîne $B^1 \subset A^1$), on établit aisément les formules suivantes:

1°) Lorsque σ est pair, on a:

$$A \subset B \quad \textit{implique} \quad A^\sigma \subset B^\sigma, \tag{3}$$

$$(A \times B)^\sigma \subset A^\sigma \times B^\sigma \subset A^\sigma + B^\sigma \subset (A+B)^\sigma, \tag{4}$$

$$(\prod_i A_i)^\sigma \subset \prod_i A_i^\sigma \subset \sum_i A_i^\sigma \subset (\sum_i A_i)^\sigma; \tag{5}$$

2°) lorsque σ est impair, on a

$$A \subset B \quad \textit{implique} \quad B^\sigma \subset A^\sigma, \tag{6}$$

$$(A+B)^\sigma \subset A^\sigma \times B^\sigma \subset A^\sigma + B^\sigma \subset (A \times B)^\sigma, \tag{7}$$

$$(\sum_i A_i)^\sigma \subset \prod_i A_i^\sigma \subset \sum_i A_i^\sigma \subset (\prod_i A_i)^\sigma. \tag{8}$$

Quant au théorème 3 on montre que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \textit{lorsque } \sigma \textit{ est pair:} & A^\sigma - B^\sigma \subset \overline{A - B} \\ \textit{lorsque } \sigma \textit{ est impair:} & A^\sigma - B^\sigma \subset \overline{B - A}. \end{array} \right. \tag{9}$$

En effet, d'après le th. 3: $\overline{A} - \overline{B} \subset \overline{A - B}$; en même temps, en vertu de l'identité évidente $A^1 - B^1 = B - A$, on a $A^1 - B^1 \subset \overline{B - A}$. D'autre part, si le théorème est vrai pour une suite τ et $A^\tau - B^\tau \subset \overline{A - B}$, alors $A^{\tau-} - B^{\tau-} \subset \overline{\overline{A - B}} = \overline{A - B}$ et $A^{\tau 1} - B^{\tau 1} = B^\tau - A^\tau \subset \overline{B - A}$; tout pareillement, si $A^\tau - B^\tau \subset \overline{B - A}$, on en conclut que $A^{\tau-} - B^{\tau-} \subset \overline{B - A}$ et $A^{\tau 1} - B^{\tau 1} \subset \overline{A - B}$. Notre assertion est donc vraie pour tout σ.

En s'appuyant sur les théorèmes démontrés jusqu'ici, on peut construire la suivante table (T) de relations, qui nous sera fort utile dans la suite:

$$\begin{tikzcd}
 & & A^{-1-1} \arrow[dr] & & \\
A^{1-1} \arrow[r] \arrow[ddrr] & A^{1-1-1-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & A^{-1-1-} \arrow[r] & A^{-} \\
 & & A^{1-1-} \arrow[ur] & & \\
 & & A \arrow[uurr] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & A^{1} \arrow[ddrr] & & \\
 & & A^{-1-} \arrow[dr] & & \\
A^{-1} \arrow[uurr] \arrow[r] & A^{-1-1-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & A^{1-1-1-} \arrow[r] & A^{1-} \\
 & & A^{1-1-1} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$A^{\sigma} \to A^{\tau}$ désigne qu'il est vrai de tout A que $A^{\sigma} \subset A^{\tau}$.

§ 2. Notions fondamentales de l'Analysis Situs.

Nous allons définir dans ce § quelques notions de l'Analysis Situs, en nous appuyant sur l'opération A.

L'ensemble A est dit *fermé*, lorsque $A = A$.

D'après I, la somme de deux ensembles fermés est fermée; d'après II et 2a, le produit d'ensembles fermés est fermé.

On voit aisément, qu'en supposant l'ensemble A fermé, on peut réduire la table (T) de relations de la façon suivante:

$$A^{1-1} \to A^{1-1-} \to A$$

$$A^{1} \to A^{1-1-1} \to A^{1-}.$$

Un ensemble est dit *continu au sens plus large*, lorsqu'il n'est pas somme de deux ensembles fermés non vides dont le produit serait vide [1]).

[1]) Nous dirons qu'un ensemble est un continu *au sens strict*, s'il contient plus d'un point.

On montre à l'aide des axiomes I et II que

1°: la somme de deux continus (au sens plus large) dont le produit n'est pas vide est un continu (au sens plus large)[1];

2°: si la somme et le produit de deux ensembles fermés sont des continus (au sens plus large), ces ensembles sont également des continus (au sens plus large)[2].

A étant un ensemble arbitraire, la décomposition suivante subsiste:

$$A = A \times A^{1-} + A \times A^{1-1} = A \times A^{1-} + A^{1-1}.$$

Nous appellerons $A \times A^{1-}$ le *bord*[3] de A. L'ensemble A^{1-1} sera dit *l'intérieur* de A (ou: l'ensemble de points intérieurs de A).

Nous allons envisager deux cas, suivant que c'est l'intérieur ou le bord qui s'annule.

1. Soit $A^{1-1} = 0$, donc $A = A \times A^{1-}$. On appelle A *ensemble frontière.*

Il résulte de la formule (3) que tout sous-ensemble d'un ensemble frontière est aussi frontière.

Théorème 7. *Le bord de tout ensemble est un ensemble frontière.*

Démonstration. D'après (4):

$$(A \times A^{1-})^{1-1} \subset A^{1-1} \times A^{1-1-}$$

et suivant la table (T):

$$A^{1-1-1} \subset A^{1-};$$

donc

$$(A \times A^{1-})^{1-1} \subset A^{1-1} \times A^{1-} = 0 \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Un ensemble A est dit *non dense*, lorsque $\overline{A}$ est un ensemble frontière; c'est à dire: lorsque $A^{-1-1} = 0$.

Il s'en suit que tout sous-ensemble d'un ensemble non dense est aussi non dense. Tout ensemble non dense est, à plus forte raison, frontière. D'autre part, un ensemble frontière fermé est toujours non dense.

Le bord d'un ensemble fermé étant un produit de deux ensembles fermés, on déduit du théorème 7 le

[1] Cf. Knaster et Kuratowski: *Sur les ensembles connexes*, Fund. Math. II, p. 212, théorème IV'. Dans la même Note plusieurs propriétés générales d'ensembles connexes sont démontrées à l'aide des axiomes I et II.

[2] Janiszewski et Kuratowski, l. c. p. 211, théorème 1.

[3] M. Hausdorff emploie le terme „Rand" dans le sens de „bord" (*Grundzüge der Mengenlehre*, p. 214, Leipzig 1914).

Corollaire. *Le bord d'un ensemble fermé est non dense.*

Théorème 8. *La somme de deux ensembles non denses est non dense.*

Démonstration. Soit A et B deux ensembles non denses. Par suite $A^{-1-}=1$ et $B^{-1-}=1$. Il s'agit de démontrer que $(A+B)^{-1-}=1$.

Or.

$$(A+B)^{-1-}=(\overline{A}+\overline{B})^{1-}=(A^{-1}-B^{-})^{-}$$

et d'après le th. 3:

$$(A^{-1}-B^{-})^{-}\supset A^{-1-}-B^{--}=1-B^{-}=B^{-1}.$$

Donc,

$$(A+B)^{-1-}\supset B^{-1}$$

et selon IV et le th. 1:

$$(A+B)^{-1-}=(A+B)^{-1--}\supset B^{-1-}=1, \quad \text{c. q. f. d.}$$

2. Envisageons maintenant le cas, où le bord de A s'annule: $A\times A^{1-}=0$, donc $A=A^{1-1}$.

On appelle dans ce cas A un *domaine ouvert.*

Il résulte immédiatement de cette définition que pour qu'un ensemble A soit un domaine ouvert il faut et il suffit que son complémentaire A^1 soit fermé. On en conclut que la somme de domaines ouverts est un domaine ouvert et que le produit de deux domaines ouverts est aussi un domaine ouvert.

On remarquera enfin que l'intérieur de tout ensemble est un domaine ouvert, car $(A^{1-1})^{1-1}=A^{1--1}=A^{1-1}$. L'intérieur de A est, en outre, le p l u s g r a n d domaine ouvert contenu dans A. En effet, si $X\subset A$, on a d'après (3): $X^{1-1}\subset A^{1-1}$; or, si X est un domaine ouvert, on en conclut que $X=X^{1-1}\subset A^{1-1}$.

A l'aide de l'opération $\overline{A}$ on peut aussi définir la notion de *frontière.* On appelle frontière de A le produit $\overline{A}\times A^{1-}$.

Envisageons la décomposition évidente:

$$\overline{A}\times A^{1-}=\overline{A}\times A^{1-}\times A+\overline{A}\times A^{1-}\times A^{1}.$$

Or, comme $A\subset\overline{A}$ et $A^1\subset A^{1-}$, on en conclut que

$$\overline{A}\times A^{1-}=A\times A^{1-}+\overline{A}\times A^{1},$$

c'est à dire: la frontière de A est la somme du bord de A et du bord de $1-A$.

Lorsque A est fermé, sa frontière se réduit à $A\times A^{1-}$; lorsque A est un domaine ouvert, elle coïncide avec $\overline{A}\times A^1$.

Plusieurs autres propriétés de la frontière furent établies à l'aide des axiomes I—IV par Janiszewski dans son article: „*Sur les coupures du plan*" [1]).

La notion du bord conduit d'une façon naturelle à celle du ***résidu***.

L'ensemble $\overline{A}-A$ est le bord de l'ensemble complémentaire de A. Envisageons le bord de l'ensemble complémentaire de $\overline{A}-A$: c'est l'ensemble:

$$\overline{\overline{A}-A}-(\overline{A}-A)=A\times\overline{\overline{A}-A}+(\overline{\overline{A}-A}-\overline{A})=A\times\overline{\overline{A}-A},\ \text{car}\ \overline{\overline{A}-A}-\overline{A}=0.$$

L'ensemble $A\times\overline{\overline{A}-A}$ est, selon M. Hausdorff [2]), le résidu de A. Nous le désignerons par A_r.

Pour faire mieux ressortir le sens topologique de cette notion, nous allons introduire le terme d'ensemble ***fermé localement***.

On dit que E est un entourage du point p, lorsque p est situé à l'intérieur de E. D'une façon analogue, un sous-ensemble E de A est dit ***entourage relatif*** de p par rapport à A, lorsque p est situé dans l'intérieur relatif de E: c'est à dire: lorsque $p\varepsilon(E-\overline{A-E})$.

Je dis que l'ensemble A est fermé localement au point p, s'il existe un entourage relatif de p dans A qui soit fermé et borné.

Nous allons montrer que A_r est constitué par tous les points de A où l'ensemble A n'est pas fermé localement.

Soit p *non*-εA_r. Par suite, $p\varepsilon(A-\overline{\overline{A}-A})$ et il existe une sphère S de centre p qui satisfait à l'égalité $S\times(\overline{A}-A)=0$. L'ensemble fermé et borné $S\times A$ est bien un entourage relatif de p dans A. L'ensemble A est donc fermé localement au point p.

Soit, d'autre part, E un entourage relatif fermé de p. On peut donc entourer le point p d'une sphère S telle que $S\times A\subset E$, ce qui entraine $S\times(\overline{A}-E)=0$. Il s'en suit que p n'est pas un point limite de $\overline{A}-E$ ni, à plus forte raison, de $\overline{A}-A$. Autrement dit: p *non*-ε $A\times\overline{\overline{A}-A}$, c. q. f. d.

Les notions d'entourage relatif et d'ensemble borné et fermé étant des invariants de l'Analysis Situs, il en est de même de la propriété de l'ensemble A d'être fermé localement au point p. Envisageons quelques conséquences de l'invariance de cette propriété.

Soit $A_r=0$. C'est à dire que A est partout fermé localement. L'égalité $A_r=0$ est donc invariante. Or, cette égalité équivaut à l'hypothèse que A est une différence de deux ensembles fermés [3]). Ainsi, la propriété d'être une différence de deux ensembles fermés est invariante [4]).

[1]) *Prace Matematyczno-Fizyczne* XXVI, Varsovie 1913 (en polonais).

[2]) L. c., p. 281. [3]) Ibid.

[4]) Cf. Kuratowski et Sierpiński: *Sur les différences de deux ensembles fermés*, pour paraître au Tôhoku Math. Journ.

L'égalité $A_r = A$ est aussi invariante. Comme l'a montré M. Hausdorff, elle n'a jamais lieu pour les ensembles (non vides) qui sont F_σ et G_δ à la fois. Or, soit A un ensemble homogène [1]). Cette dernière hypothèse implique que $A_r = 0$ ou bien $A_r = A$. D'après l'hypothèse antérieure on a donc $A_r = 0$, ce qui veut dire que A est une différence de deux ensembles fermés. Il est ainsi établi qu'un ensemble F_σ et G_δ homogène est une différence de deux ensembles fermés.

La notion d'ensemble fermé localement mérite l'attention aussi au point de vue des problèmes concernants les choix effectifs et l'application de l'axiome de Zermelo.

On sait faire correspondre à chaque ensemble fermé borné un de ses éléments. En effet, $x_1, x_2, \dots x_n$ désignant les coordonnées de l'espace considéré et A un ensemble fermé et borné, il existe des points de A de x_1 minimum. S'il n'en existe qu'un seul point, c'est lui que l'on fera correspondre à A. Dans le cas contraire, on envisagera parmi les points de x_1 minimum ceux de x_2 minimum etc. En tout cas on arrivera à définir un point bien déterminé $f(A)$ de A.

On pourrait aussi définir la fonction $f(A)$, en supposant que A admette des points intérieurs ou isolés. La notion d'ensemble fermé localement permet de généraliser ces résultats: nous définirons notamment un point $g(A)$ de A pour tout A tel que $A \neq A_r$.

Soit $S_1, S_2, S_3, \dots$ la suite des sphères à centre et rayon rationnels. A étant localement fermé dans un de ses points, il existe des sphères qui ont avec A un produit fermé et borné $(\neq 0)$: soit $n(A)$ le plus petit indice de ces sphères.

L'ensemble $S_{n(A)} \times A$ étant fermé et borné, posons

$$g(A) = f(S_{n(A)} \times A).$$

Ainsi, on peut faire correspondre sans l'aide de l'axiome du choix à tout ensemble A pour lequel $A \neq A_r$ un point bien déterminé de A.

§ 3. La relativisation.

Soit R un ensemble arbitraire de points. On déduit des axiomes I—IV les formules suivantes:

$$R \times \overline{A + B} = R \times \overline{A} + R \times \overline{B}$$

$$A \subset R \times \overline{A}$$

$$R \times \overline{R \times \overline{A}} = R \times \overline{A},$$

où A et B désignent des sous-ensembles arbitraires de R.

[1]) Un ensemble A est dit homogène, si p et q étant des points arbitraires de A, il existe une transformation biunivoque et bicontinue de A en lui-même qui transforme p en q.

Ces formules montrent que la fonction $R\times\overline{A}$ satisfait par rapport à tout A contenu dans R aux axiomes I—IV. Par conséquent, si on pose $A^{R}=R-A$, on pourra dans tous les théorèmes déduits de I—IV remplacer A^{1} par A^{R} et $\overline{A}$ par $R\times\overline{A}$. Nous dirons que nous avons *relativisé* ces théorèmes. La même opération mène à des notions r e l a t i v e s[1]).

Si l'on suppose, en particulier, l'ensemble R fermé, o n n'a u r a p o u r r e l a t i v i s e r l e s t h é o r è m e s q u'à r e m p l a c e r l e s y m b o l e „1" p a r „R", puisque $R\times\overline{A}=\overline{A}$.

En relativisant la définition d'ensemble fermé, on parvient à la définition suivante: un sous-ensemble A de R est f e r m é d a n s R, lorsque $A=R\times\overline{A}$. Ainsi, un ensemble fermé dans R est le produit de R par un ensemble fermé. La réciproque est aussi vraie: le produit de R et d'un ensemble fermé est toujours fermé dans R.

D'une façon analogue, A est un d o m a i n e p a r r a p p o r t à R, lorsque $A^{R}=R\times A^{R-}$. Or, pour qu'un ensemble soit un domaine ralatif par rapport à R, il faut et il suffit qu'il soit le produit d'un domaine et de R.

On arrive à une notion importante, en relativisant la notion d'ensemble non dense par rapport aux continus. On dit notamment qu'un continu K est un continu de *condensation* du continu C s'il est n o n d e n s e p a r r a p p o r t à C[2]). En relativisant les théorèmes 8 et 1^{0} p. 187, on en conclut que la somme de deux continus de condensation dont le produit n'est pas vide est également un continu de condensation[3]).

Soit σ une suite finie composée de „—" et „1". Nous désignerons par σ_R la suite que l'on obtient de σ en y remplaçant „1" par „R". En supposant l'ensemble R fermé, nous établirons les formules suivantes:

$$(10)\qquad \begin{cases} \text{lorsque } \sigma \text{ est pair,} & A^{\sigma}\subset A^{\sigma_R} \\ \text{lorsque } \sigma \text{ est impair,} & A^{\sigma_R}\subset A^{\sigma}. \end{cases}$$

Remarquons d'abord que pour chaque σ on a $A^{\sigma_R}\subset R$, car $A^{-}\subset R$ et $A^{R}\subset R$.

[1]) Cf. H a u s d o r f f, l. c. p. 240 („Relativbegriffe").

[2]) J a n i s z e w s k i: *Sur les continus irréductibles entre deux points*, Journ. Ec. Polytechn. (2) 16, 1912.

[3]) Cf. ibid., Théorème VI.

La formule (10) étant vraie pour σ composé d'un seul élément, supposons la vraie encore pour $\sigma = \tau$. Deux cas sont à distinguer:

1°. τ est pair; on a $A^{\tau} \subset A^{\tau_R}$. Donc $A^{\tau-} \subset A^{\tau_R-}$ et $A^{\tau_R 1} \subset A^{\tau 1}$ ce qui implique, en vertu de $A^{\tau_R R} \subset A^{\tau_R 1}$, l'inclusion: $A^{\tau_R R} \subset A^{\tau 1}$.

2°. τ est impair; on a $A^{\tau_R} \subset A^{\tau}$. Donc $A^{\tau_R -} \subset A^{\tau -}$ et $A^{\tau 1} \subset A^{\tau_R 1}$. Mais $\tau 1$ étant pair, on a d'après la table (T): $A^{\tau 1} \subset \overline{A} \subset R$. Par conséquent
$$A^{\tau 1} \subset R \times A^{\tau_R 1} = A^{\tau_R R}.$$

Notre assertion est donc démontrée complètement.

§ 4. Les ensembles réguliers.

J'appelle l'ensemble A un *ensemble fermé régulier*, lorsque

(11) $$A^{1-1-} = A.$$

Pour qu'un ensemble A soit fermé régulier, il faut et il suffit qu'il existe un domaine ouvert D tel que $A = \overline{D}$ [1]).

En effet, si $A = A^{1-1-}$, on a $A = (A^{1-1})^{-}$ où l'ensemble A^{1-1} est un domaine ouvert. D'autre part si D est un domaine ouvert et $A = \overline{D}$, on a, par définition de domaine, $A = (D^{1-1})^{-}$, d'où $A^{1-1-} = D^{1-1-1-1-} = D^{1-1-}$, d'après le théorème 6. Donc $A^{1-1-} = A$.

J'appelle partie régulière d'un ensemble A le produit $A \times A^{1-1-}$. L'intérieur de A est évidemment contenu dans la partie régulière de A. Ainsi la différence entre A et sa partie régulière, faisant partie du bord de A, est un ensemble frontière (th. 7); de plus, lorsque A est fermé, elle est non dense. Dans ce cas $A \times A^{1-1-} = A^{1-1-}$.

Exemples: Dans le plan un cercle est un ensemble fermé régulier. Deux cercles sans points communs unis par un segment forment un ensemble non régulier: sa partie régulière se compose des deux cercles.

Soit R l'ensemble des points (x, y) assujettis aux conditions:
$$\left\{\begin{array}{llll} \text{lorsque} & -1 \leqslant x < 0, & & y = 0, \\ \text{"} & x = 0 & , & -1 \leqslant y \leqslant 1, \\ \text{"} & 0 < x \leqslant 1 & , & y = \sin \dfrac{1}{x}. \end{array}\right.$$

[1]) Dans l'hypothèse supplémentaire que D est borné, M. Lebesgue appelle $\overline{D}$ „domaine fermé". (*Sur les correspondances entre les points de deux espaces.* Fund. Math. II, p. 273).

L'ensemble formé par les deux segments de droite n'est pas régulier **par rapport** à R. L'ensemble de points de R à abscisse $\geqslant 0$ est régulier par rapport à R.

Nous passons à la démonstration des propriétés d'ensembles réguliers.

Le sens topologique du théorème 6 peut s'exprimer de cette façon:

Théorème 9. *Si A est fermé, A^{1-} est régulier.*

Théorème 10. *La somme de deux ensembles réguliers fermés est un ensemble régulier fermé; généralement, si les ensembles A_i sont réguliers fermés, l'ensemble $\overline{\sum_i A_i}$ l'est également.*

Démonstration. On remarquera que lorsque A est fermé, l'inclusion $A \subset A^{1-1-}$ implique en vertu de la table T' réduite, que A est régulier.

Or, soit $A = A^{1-1-}$ et $B = B^{1-1-}$. D'après (4):

$$A + B = A^{1-1-} + B^{1-1-} \subset (A+B)^{1-1-},$$

ce qui prouve que $A+B$ est régulier fermé.

Pareillement, si $A_i = A_i^{1-1-}$, on a (formule 5):

$$\sum_i A_i = \sum_i A_i^{1-1-} \subset (\sum_i A_i)^{1-1-}$$

et comme d'après (3),

$$(\Sigma A_i)^{1-1-} \subset (\Sigma A_i)^{-1-1-},$$

on a

$$\overline{\Sigma A_i} \subset (\Sigma A_i)^{-1-1--} = (\Sigma A_i)^{-1-1-} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Théorème 11. *Si l'ensemble R est fermé régulier et A en est un sous-ensemble fermé, la partie régulière absolue de A est identique à sa partie régulière relative par rapport à R.*

Démonstration. D'après la formule (10): $A^{1-1-} \subset A^{R-R-}$ Il s'agit donc de démontrer que $A^{R-R-} \subset A^{1-1-}$.

Or; selon (9),

$$R^{1-1-} - A^{1-1-} \subset \overline{R - A},$$

ce qui donne, en vertu de $R = R^{1-1-}$.

$$R - A^{1-1-} \subset R^{s-},$$

d'où

$$R - A^{R-} \subset A^{1-1-}$$

(car les inclusions $X - Y \subset Z$ et $X - Z \subset Y$ sont équivalentes).

Donc

$$A^{R-R} \subset A^{1-1-}$$

et d'après IV et th. 1:

$$A^{R-R-} \subset A^{1-1-} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Corollaire 1. *Pour qu'un sous-ensemble A d'un ensemble fermé régulier R soit fermé régulier, il faut et il suffit qu'il soit fermé régulier par rapport à R.*

En relativisant ce corollaire par rapport à un ensemble fermé S, on voit que si A est fermé régulier par rapport à R et R est fermé régulier par rapport à S, alors A est fermé régulier par rapport à S. Ceci peut s'exprimer encore de cette façon:

Corollaire 2. *La propriété d'être un ensemble fermé régulier par rapport à un ensemble fermé est transitive.*

Corollaire 3. *Si R est fermé régulier et A est fermé, $\overline{R - A}$ est régulier.*

Démonstration. On a

$$R - A = R \dot{-} R \times A = (R \times A)^R,$$

d'où

$$\overline{R - A} = (R \times A)^{R-}.$$

Or, comme $R \times A$ est un sous-ensemble fermé de R, on en conclut, en relativisant le théorème 9 par rapport à R, que $(R \times A)^{R-}$ est fermé régulier par rapport à R et selon le cor. 1 — fermé régulier absolu, c. q. f. d.

Remarquons maintenant que, si la partie régulière d'un ensemble fermé A est vide ($A^{1-1-} = 0$), l'ensemble A est non dense. D'après l'axiome III, la réciproque est aussi vraie: la partie régulière d'un ensemble non dense est vide. On en déduit, en vertu du th. 11, le

Corollaire 4. *Pour qu'un sous-ensemble fermé d'un ensemble fermé régulier R soit non dense, il faut et il suffit qu'il soit non dense par rapport à R.*

Outre les ensembles réguliers fermés, nous allons considérer aussi les ensembles réguliers ouverts. Nous dirons que A est un ensemble régulier ouvert, lorsque

$$A = A^{-1-1}.$$

On reconnait aisément, en s'appuyant sur l'identité $X^{11}=X$, que le complémentaire d'un ensemble fermé régulier est un ensemble ouvert régulier et vice versa. Ainsi plusieurs propriétés d'ensembles réguliers ouverts résultent directement des théorèmes sur les ensembles réguliers fermés. On montre, en particulier, que A étant un domaine ouvert, A^{-1} est un ensemble régulier ouvert.

Voici une propriété importante d'ensembles réguliers ouverts qui est indépendante des axiomes I—IV.

On sait qu'un domaine ouvert est somme de domaines ouverts connexes qui n'empiètent pas les uns sur les autres. La frontière de chacun de ces domaines-constituants est contenue dans la frontière du domaine tout entier. Or, nous allons montrer que *C étant un domaine-constituant d'un ensemble régulier ouvert-D, C est aussi ouvert régulier.*

Pour établir l'égalité $C=C^{-1-1}$, il suffit de montrer, en vertu de la table (T), que $C^{-1-1}\subset C$. Or,

$$C^{-1-1}\times C^1 \subset C^- \times C^1 \subset D^- \times D^1$$

et d'autre part, selon (3):

$$C^{-1-1} \subset D^{-1-1} = D.$$

Donc,

$$C^{-1-1}\times C^1 \subset D^- \times D^1 \times D = 0,$$

ce qui prouve que $C^{-1-1}\subset C$ [1].

§ 5. L'analyse logique des axiomes I—IV.

La table (T) (p. 186) renferme 14 ensembles que l'on peut obtenir d'un ensemble A donné en combinant les opérations A^- et A^1. En s'appuyant sur l'axiome IV, le théorème 6 et le principe de la double négation ($A^{11}=A$), on montre aisément que le nombre de 14 ensembles ne pourrait être augmenté. Nous allons montrer qu'il ne peut être diminué nonplus.

Pour préciser le problème nous dirons qu'une suite σ de symboles „$-$" et „1" est irréductible, lorsque pour toute suite τ extraite de σ il existe un ensemble A (de points d'un espace euclidien) tel que $A^{\tau}\neq A^{\sigma}$. Or, il s'agit de prouver que toutes les suites σ comprises par la table (T) sont irréductibles.

1) Les frontières d'ensembles réguliers ouverts jouissent de propriétés intéressantes. M. Lebesgue en a établi quelques-unes dans le volume précédent de ce Journal. Il emploie le terme „frontière à $n-1$ dimensions", lorsque l'ensemble régulier ouvert est borné et à un tenant, n étant le nombre de dimensions de l'espace considéré.

Nous déduirons la solution de ce problème de la proposition suivante:

chaque théorème de la forme: „$A^{\sigma_1} \subset A^{\sigma_2}$ (pour tout ensemble A de points)" est renfermé dans la table (T).

(Nous considérons aussi comme représentés par la table (T) les théorèmes qui en résultent par syllogisme; p. ex. $A^{-1-1} \to A^{-}$, car $A^{-1-1} \to A^{-1-1-} \to A^{-}$)

Pour établir cette proposition il faut démontrer que, si σ_1 et σ_2 sont deux suites irréductibles et l'inclusion $A^{\sigma_1} \to A^{\sigma_2}$ n'est pas représentée par la table (T), il existe un ensemble A tel que A^{σ_1} *non* $\subset A^{\sigma_2}$.

Or, envisageons l'ensemble composé: de tous les nombres du segment $(0, \frac{1}{2})$, de tous les nombres rationnels du segment $(\frac{1}{2}, 1)$ et du nombre 2.

En examinant cet ensemble, on reconnait aisément que les inclusions suivantes n e s u b s i s t e n t p a s:

$$(\varrho_1) \quad A \to A^{-1-1-}; \qquad (\varrho_2) \quad A^{1-1-} \to A^{-1-1};$$
$$(\varrho_3) \quad A^{-1-1} \to A^{1-1-}: \qquad (\varrho_4) \quad A^{-1} \to A^{-}.$$

Ceci établi, nous montrerons qu'aucune relation de la forme $A^{\sigma_1} \to A^{\sigma_2}$ n'a lieu outre celles qui sont renfermées dans la table.

Supposons d'abord la suite σ paire

D'après (ϱ_1) on n'a jamais $A \to A^{\sigma}$, lorsque σ est distinct de „—"; d'autant plus, $\overline{A} \to A^{\sigma}$ ne peut avoir lieu, car $A \subset \overline{A}$. D'autre part, si l'on avait pour un σ différent de „1—1": $A^{\sigma} \to A$, l'inclusion $A^{1-1-1-1} \to A$ serait remplie, d'où $A^{1} \to A^{1-1-1-}$ et, en posant $A^{1} = B$, on aurait $B \to B^{-1-1-}$, c'est-à-dire l'inclusion (ϱ_1). A plus forte raison, aucune nouvelle inclusion de la forme $A^{\sigma} \to A^{1-1}$ n'a lieu.

Les inclusions (ϱ_2) et (ϱ_3) n'étant pas réalisées, on ne peut ajouter aucune nouvelle inclusion à la moitié supérieure de la table (T). Comme, de plus, la moitié inférieure s'obtient de la supérieure suivant le principe de contraposition, la moitié inférieure est également complète.

Il reste donc à démontrer qu'il ne subsiste aucune inclusion entre deux ensembles des moitiés différentes de la table. Supposons que $A^{\sigma_1} \to A^{\sigma_2}$; par raison de symétrie on peut admettre σ_1 impaire et σ_2 paire. Il s'en suit immédiatement que l'on aurait $A^{-1} \to A^{-}$, c'est à-dire l'inclusion (ϱ_4), ce qui est impossible.

Notre proposition est donc établie complètement. Il en résulte en particulier, que toutes les suites σ de la table (T) sont irréductibles, car autrement il y aurait dans cette table des σ et τ pour lesquelles $A^\sigma \rightleftarrows A^\tau$.

Comme la table (T) était déduite des axiomes I—IV, nous pouvons donc affirmer qu'il ne subsiste dans l'espace euclidien aucun théorème de la forme $A^\sigma \to A^\tau$ qui soit indépendant de ces axiomes. Ainsi, si l'on voulait ajouter au système d'axiomes I—IV un nouvel axiome, il ne pourrait plus être obtenu à l'aide des seules opérations $\overline{A}$ et A^1.

Les problèmes traités dans ce § peuvent être envisagés d'un point de vue plus général, lorsqu'on considère, outre les opérations $\overline{A}$ et A^1, aussi l'addition et la multiplication. Désignons par $\varphi(A)$ une fonction de A obtenue à l'aide de ces 4 opérations. Le problème s'impose: existe-il un théorème de la forme $\varphi(A) = 0$ qui soit indépendant des axiomes I—IV? Pour le cas particulier, lorsque $\varphi(A) = A^{\sigma_1} \times A^{\sigma_2}$, la réponse est — comme nous venons de voir — négative. Le cas général ne va pas être traité ici.

Nous indiquerons seulement une propriété de la fonction $\varphi(A)$.

Nous avons démontré auparavant qu'à l'aide de l'opération A^σ on n'obtient que 14 fonctions différentes. Or, l'opération $\varphi(A)$ conduit à une *infinité* de fonctions.

Pour s'en convaincre, envisageons la suite des *résidus* A_r, A_{rr}, $A_{rrr}, \ldots$, où $A_r = A \times \overline{A} - A = \varphi(A)$. Soit B un ensemble linéaire bien ordonné du type d'ordre ω^ω. Supprimons y les éléments de la forme: $\alpha + \omega$, $\alpha + \omega^3$, $\alpha + \omega^5, \ldots$, et désignons par A l'ensemble ainsi obtenu.

Il est aisé de voir que A_r se compose des éléments de A qui sont de la forme $\alpha + \omega^n$ avec $n \geqslant 2$, ceux de A_{rr} sont de la forme $\alpha + \omega^n$ où $n \geqslant 4$, etc. L'opération A_r conduit donc à une infinité d'ensembles différents.

Les axiomes I—IV sont indépendants chacun des autres. Chacune des 4 interprétations suivantes prouve l'indépendance de l'axiome correspondant.

Soit 1 un ensemble composé de trois éléments: a, b, c. En outre:

1°: $\overline{0} = 0$, $\overline{(a)} = (a)$, $\overline{(b)} = (b)$, $\overline{(c)} = (c)$ et pour les autres A soit $\overline{A} = 1$;

2°: $\overline{A} = 0$;

3°: $\overline{A} = 1$;

4°: $\overline{0} = 0$, $(a) = (a, b)$, $\overline{(b)} = (b, c)$, $(c) = (a, c)$ et pour les autres A soit $A = 1$.

En terminant cette Note nous allons considérer un système d'axiomes qui pouvait aussi servir comme base de nos raisonnements.

Si l'on choisit comme point de départ la notion de dérivé (A'), les axiomes suivants subsistent:

$$\text{I}'. \qquad (A+B)' = A' + B',$$
$$\text{II}'. \qquad 1' = 1,$$
$$\text{III}'. \qquad 0' = 0,$$
$$\text{IV}'. \qquad A'' \subset A'$$ [1]).

Pour démontrer l'indépendance de ces axiomes, il suffit de remplacer le symbole „—" par „'" dans les exemples 1°—4°. En modifiant de la même façon les théorèmes 1—6, on obtient des théorèmes qui peuvent être déduits des axiomes I'—IV'.

D'une facon analogue, en désignant par σ une suite finie formée des symboles „'" et „1", on montre que tout théorème de la forme $A^{\sigma_1} \rightarrow A^{\sigma_2}$ résulte des axiomes I'—IV'. Quant au problème qui se rattache à la fonction φ, il sera, peut être, intéressant de voir qu'il subsiste pour l'espace à $n \geqslant 2$ dimensions un théorème indépendant des axiomes I'—IV' et énoncé à l'aide des 4 opérations: A', A^1, addition et multiplication.

C'est ce théorème:

$$(A \times A^{1\prime} + A^1 \times A')' = A' \times A^{1\prime};$$

ce qui veut dire que le dérivé de la frontière de A est formé par les points qui appartiennent au dérivé de A et au dérivé du complémentaire de A. (On pourrait, d'ailleurs, remplacer „=" par „$\supset$", car l'inclusion inverse peut être déduite des axiomes I'—IV').

L'indépendance de ce théorème est mise en évidence, lorsqu'on désigne par 1 l'espace linéaire et par A un segment quelconque.

Pour exprimer $\bar{A}$ en termes de A' on n'aura qu'à tenir compte de la formule $\bar{A} = A + A'$. Mais on ne peut passer par une voie aussi simple de A à A'. Plus précisément: il n'existe pas de fonction $\varphi(A)$, au sens établi auparavant, telle que $A' = \varphi(A)$.

En effet, supposons qu'une telle fonction existe. Soit $1 =$ l'espace linéaire; $A =$ l'ensemble composé du point 0 et des points de la

[1]) Quelques propriétés de ce genre ont été étudiées par M. F. Riesz (Congrès International des Math., Rome) et par M. Fréchet (*Bull. Sc. Math.* 1918).

suite $\left\{\frac{1}{n}\right\}$. On a évidemment: $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ et $A^{1-} = 1$. Par conséquent, il n'y a que 4 ensembles qui peuvent être obtenus de A à l'aide de la fonction φ, à savoir: A, A^1, 0 et 1; l'ensemble A' n'est pas de leur nombre.

A' ne peut donc être défini par une identité de la forme $A' = \varphi(A)$. Toutefois, on peut définir A' en termes de $\overline{A}$ comme suit: $A' =$ l'ensemble de points p tels que: $p \varepsilon \overline{A - (p)}$.