RAMON PARÉS

DISTANCIAS PLANETARIAS

Y

LEY DE TITIUS-BODE

Ensayo histórico

B A R C E L O N A, 2 0 1 6

I N D I C E

Distancias planetarias y *Ley de Bode*

(Ensayo histórico)

Habiendo pasado más de medio siglo,
el autor escribió este ensayo a la memoria de sus antiguos profesores

1. Geometría de las secciones cónicas

De los antiguos griegos aprendimos que las proposiciones matemáticas correctas son abstractas e incuestionables. La ciencia utiliza el llamado *mundo platónico de las formas matemáticas* para hacer modelos que puedan ponerse a prueba frente a observaciones del mundo físico cuidadosamente diseñadas. Fuera del modelo, resulta difícil formular preguntas que tengan respuestas bien definidas y dos modelos que sean incompatibles en el mundo platónico nunca pueden ser igualmente válidos frente a los hechos[1]. Conviene recordarlo.

Pitágoras (VI a.C.) estaba convencido de que había una relación profunda entre el número y la naturaleza. Su mismo célebre teorema constituye un buen ejemplo para apoyarse en esta idea, puesto que define la estructura del espacio donde vivimos[2], pero dicha relación puede ser ficticia.

Los antiguos griegos a que nos referimos solían trabajar las cuestiones matemáticas como si fueran una especie de deporte o de diversión intelectual, parecido a lo que ahora está haciendo el autor al escribir estas líneas. Así Heraclides de Ponto (IV a.C.) y un poco más tarde Aristarco de Samos (III a.C.) establecieron el giro de la Tierra sobre su eje en 24 horas, anticipándose unos 2000 años a Copérnico. En la *Academia de Atenas* (387 a.C. a 529 d.C.), que aun hoy es la institución cultural que ha durado más años en el mundo occidental, casi 1000, tenemos a Menecmo (III a.C.), que desarrolló la *teoría de las secciones cónicas,* que completaría más tarde Apolonio de Perga (II a.C.) en el período alejandrino, pero se tardarían aun 2000 años más para que Johannes Kepler volviera a las secciones cónicas para desterrar los apriorismos de las órbitas circulares y de los movimientos uniformes.[1] [2]

Está claro que algún hombre sobre la Tierra distinguió pronto los astros fijos de los móviles. Entre estos últimos están la Luna, el Sol y los planetas.

En el geocentrismo tolomaico (II d.C.), anterior a Copérnico, la distancia de los planetas a la Tierra se estableció con carácter relativo partiendo de la movilidad. Los planetas más veloces serían los más próximos. La determinación directa de carácter trigonométrico de la distancia no empezó hasta Hiparco en el siglo I a.C., así como el uso del astrolabio, desarrollado por el mismo Hiparco y por Tolomeo (II d.C.). Así empezó la determinación de *la paralaje* y, con ello, tenemos las primeras sucesiones de distancias de los planetas al Sol y a la Tierra. De todas formas, el salto decisivo llegaría con la tercera ley de Kepler y las determinaciones precisas del tiempo periódico de revolución alrededor del Sol o de la Tierra. Actualmente distancia y tiempo periódico pueden obtenerse con una precisión de 10^{-7}, una de las mayores a que se puede llegar con las leyes físicas conocidas. En el tiempo de Kepler y Newton era sólo de 10^{-3}.

Kepler siempre vivió preocupado por el número, el tamaño y la relación entre las órbitas planetarias. Después de ensayar algunas hipótesis más sencillas, pronto descartadas, puso a prueba el modelo de los cinco poliedros regulares, el de los

[1] R. Parés. Pascalianas. Ed. Herder. Barcelona, 2009.
[2] R. Parés. Cartas a Nuria. Historia de la ciencia. Ed. Almuzara, 2005. (3ª ed.).

sólidos platónicos de caras y ángulos iguales (*Misterium cosmograficum*, 1596). Los sólidos platónicos en los cuales se inscriben y circunscriben las esferas planetarias correspondientes serían:

Esfera de Saturno circunscrita en un cubo
Esfera de Júpiter circunscrita en un tetraedro
Esfera de Marte circunscrita en un dodecaedro
Esfera de la Tierra circunscrita en un icosaedro
Esfera de Venus circunscrita en un octaedro y
Esfera de Mercurio circunscrita en el cuerpo central del Sol.

Este modelo se basa en un teorema bien establecido, el que dice que todo poliedro regular es inscribible en una esfera y circunscribible en otra concéntrica con la primera. De hecho, fue la primera vez que se intentaba introducir un sistema único para explicar la estructura del Universo pero, sabiendo las distancias de los planetas al Sol, no había forma de ordenar las esferas para que sus radios consecutivos correspondieran a la sucesión de las distancias. Por esto Kepler abandonó pronto la hipótesis de los sólidos platónicos, aunque otros astrónomos la siguieron utilizando a lo largo de todo un siglo para compararlas con otras. Por ejemplo, Ch. von Wolf en 1723 publicó la sucesión que más tarde se llamaría *ley de Bode* junto a la que se obtiene por el desarrollo geométrico de Kepler y, además, con la correspondiente a los resultados de determinaciones directas por observación.

Kepler fue el gran heredero de Tycho Brahe. Ambos llegaron a tener un número extraordinario de posiciones de los planetas con un grado de precisión al que nunca se había llegado. A la muerte de Tycho Brahe, Kepler todavía las amplió y en 1609 publicó un fabuloso estudio de las mismas (*Astronomia nova*, 1609).

Siguiendo el *sistema de las excéntricas* y de los *epiciclos* adoptado por Copérnico, Kepler trató de trazar la órbita de Marte a partir exclusivamente de datos reales de observación, pero no consiguió cuadrar el balance del tiempo. También habían fracasado en lo mismo Rethicus, discípulo de Copérnico, y Ramus, profesor del *Colegio de Francia*. Este último murió la *noche de San Bartolomé*, después de dejar escrito que daba su cátedra a quien fuera capaz de resolver el problema de la órbita de Marte, que es justamente lo que hizo Kepler, si bien renunció a la cátedra prometida porque Ramus ya había muerto. Lo extraordinario es que Kepler se diera cuenta de que la única manera de cerrar el cálculo de la órbita con datos reales era considerando que se trataba de una elipse y no de una circunferencia, lo cual sería aplicable a todos los demás planetas. Fue también extraordinario darse cuenta además de que en todos los casos los radiovectores de esta elipse recorrieran áreas iguales en tiempos iguales. Serían las dos primeras leyes de Kepler, que resolverían el cálculo de la *anomalía* corrigiendo la velocidad variable con un movimiento circular y uniforme ficticio equivalente.

Kepler fue también un gran matemático que desarrolló la teoría de las secciones cónicas, no solo partiendo de los antiguos griegos sino también de la obra de Witelo del siglo XIII. Su mayor aportación fue la tercera ley, la que relaciona los tiempos periódicos con las distancias al Sol. Después, a lo largo de cuatro siglos, se han dado muchos otros progresos consecuentes indiscutibles, pero siempre quedarían cosas que vale la pena revisar. Quizás haya sido este nuestro objetivo, el de la reconsideración histórica de la ley de Bode, cuyo resultado se expone en este ensayo.

Sin obligación ni provecho, el tema me ha interesado desde hace más de sesenta años, hasta que decidí estudiarlo. Ha sido como una diversión intelectual extraordinaria que el lector podrá compartir ahora si se atreve a seguir este texto desde el principio hasta el final.

2. Haciendo memoria de la llamada "*Ley de Bode*"

Conocí la *Ley de Bode* de estudiante, hacia la mitad del siglo pasado. Según decía uno de mis antiguos profesores[3], se trata de una especie de juego malabar que nos permite recordar fácilmente las distancias relativas de los planetas al Sol, las de los planetas históricos visibles a simple vista.

Sea así la sucesión numérica que llamaremos **α**:

0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768,

que, a partir del segundo término 3, es una progresión geométrica de razón 2.

Añadiendo un 4 a cada término de la sucesión **α**, obtendremos la segunda sucesión **β**:

4, 7, 10, 16, 28, 52, 100, 196, 388, 772,

Finalmente, dividiendo por 10 cada término de **β**, llegaremos a la tercera sucesión **γ**:

0,4 0,7 1,0 1,6 2,8 5,2 10,0 19,6 38,8 77,2

Es realmente chocante que la tercera sucesión **γ** se corresponda término a término, con regularidad y notable aproximación, a las distancias sucesivas al Sol de Mercurio, Venus, Tierra, Marte, conjunto de asteroides, Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno y Plutón (con error importante), tomando como unidad la distancia de la Tierra al Sol (UA).

No hay que olvidar que las distancias calculadas con la tercera ley de Kepler y los períodos de revolución, o tiempos periódicos obtenidos por observación, tienen que redondearse hasta 10^{-1} para compararlos con los de la sucesión **γ**.

Teniendo en cuenta las operaciones que nos han llevado desde **α**, sucesión geométrica de partida puramente formal, hasta **γ**, sucesión exponencial con

[3] J. Febrer y E. Cabal. Lecciones de Cosmología y de Geología. Ed. Bosch. Barcelona, 1947.

significado físico, podemos llegar fácilmente a la fórmula (1), la cual da las distancias planetarias D_n en función del orden creciente de la sucesión $\boldsymbol{\gamma}$:

$$D_n \times 10 \approx 4 + (3 \times 2^{n-2}) \qquad (1)$$

(1) no puede aplicarse a Mercurio que nos daría D_1= 5,5 en lugar de 4. Para n = 5, no hay planeta. Para n = 9 y n = 10, la discrepancia con los valores reales crece desmesuradamente.

n	D_n (1)	$D_K = (P_n / P_3)^{2/3}$
9	38,8	30,071
10	77,2	39,520

Por lo tanto, (1) es una fórmula que nos dará la distancia aproximada al Sol solamente para n = 2, n = 4, n = 6, n = 7 y n = 8, puesto que no es válida ni para n = 1, ni para n = 5, siendo 1 la (UA) para n = 3, y quedan descartados n = 9 y n = 10 por su notable discrepancia.

La sucesión $\boldsymbol{\gamma}$ pone de manifiesto la existencia de dos grupos de planetas separados por n = 5, uno de planetas grandes o *exteriores* (n = 6, 7, 8) y otro de planetas pequeños o *interiores* (n = 2, 3, 4). Este último grupo es el más cercano al Sol y su mayor velocidad de giro aumenta progresivamente a medida que disminuye la distancia al Sol. Mercurio es el más rápido y queda fuera de los dos grupos mencionados pero, como veremos, *n = 1* y *n = 2* determinan las distancias al Sol de los demás planetas. Por encima de *n = 8*, pueden haber otros planetas más, pero no habrá ninguno que pueda seguir la fórmula (1).

J. Reguero Argüelles en su libro "Astronomía física" [4], en tres volúmenes de más de quinientas páginas cada uno, publicados sucesivamente en 1850 y 1851, nos dice que *no hay ninguna razón que sostenga la ley de Bode ni que la explique, y que no puede sujetarse al cálculo como el grandioso hecho de la gravitación universal y con el cual no tiene nada que ver*. Por lo demás, este libro es uno de los mejores sobre astronomía escrito y publicado en lengua castellana a lo largo del siglo XIX..

La exposición de la ley de Bode de J. Reguero es muy parecida a la que se ha expuesto aquí un poco más arriba, pero fue publicaida ciento cincuenta años antes de que se escribiera nuestro ensayo. El libro de Reguero era de cien años después de la fecha de origen de la ley de Bode. Curiosamente, en el Tomo III del mismo libro hay una relación de los astrónomos más importantes a partir de principios del siglo XVI. Por supuesto, entre ellos encontramos a Herschel, pero también a Galle y a Adams. En cambio, ni Bode ni Titius no están en la lista. Vale la pena tenerlo en cuenta, pues se trata de un libro muy divulgado y reconocido.

[4] J. Reguero Argüelles. Astronomía física. Tomo I. La Anticuaria Librería de Llordachs. Barcelona, 1850, Tomo II y III. Imprenta del Seminario e Instrucción. Madrid, 1850 y 1851.

3. Origen histórico de la *ley de Bod*e

La primera versión escrita de la que se derivaría la llamada ley de Bode no es anónima, pero se trata de dos pequeños fragmentos intercalados uno detrás de otro en la versión alemana de 1766 de una obra francesa muy apreciada en aquel tiempo en toda Europa. Esta obra se titula *Contemplation de la Nature* y su autor es Charles Bonnet's (1720-1793). La traducción de este libro al alemán fue llevada a cabo por Johann Daniel Titius (1729-1796), un profesor de Física de la antigua universidad de Wittenberg (Sajonia) y no de Astronomía, como se dice en algunos textos. En un retrato suyo de la Biblioteca de la Universidad de Halle hoy podemos leer debajo de . su nombre *Professor der Physik zu Wittenberg*. En el original francés no hay nada que se refiera a los dos fragmentos intercalados en la traducción al alemán,. ni tampoco en las traducciones a otras lenguas como el italiano o el inglés. La traducción del francés al alemán fue encargada al profesor J. D. Titius, pero no hay alusión alguna a un retoque o añadido al texto original. Dadas estas circunstancias, no hay más remedio que atribuir al traductor la intercalación de este texto nuevo, sea original suyo o no.

En el Capítulo 4, en la Parte 1 de la primera edición alemana de 1766 del libro referido, entre los parágrafos 7 y 8 del original francés, se intercalan los dos nuevo parágrafos, situados al final de la página 7 y principio de la 8 en la versión alemana. El texto intercalado empieza con una relación de *las distancias al Sol de los distintos planetas, desde Mercurio a Saturno, señalando que, si a la correspondiente a Saturno le damos 100 puntos y 4 puntos a Mercurio, a Venus corresponden 4+3=7 puntos, para la Tierra 4+6=10, para Marte 4+12=16, para el siguiente sería 4+24=28, pero no hay planeta y que para los consecutivos serían, 4+48=52 y 4+96=100 puntos, correspondiendo respectivamente a Júpiter y Saturno. El texto sigue afirmando que si al* ***radio*** *de la órbita de la Tierra le damos el valor de 10, los de las otras órbitas vendrán dados por la fórmula*

$$r_n = 4 + (3 \times 2^n) \qquad (1')$$

siendo n = -∞ para Mercurio y 0, 1, 2, 3, ... para los planetas sucesivos.

Las fórmulas (1) y (1') son equivalentes, pero la segunda es la expresión clásica que se atribuiría luego exclusivamente a Bode, por lo menos durante los cien años siguientes después de la primera edición alemana de 1766 de la obra de Bonnet. Propiamente, Bode nunca se atribuyó la autoría de (1') y Titius tampoco dijo nada al respecto. Este último es el autor obligado de la introducción de un fragmento nuevo, redactado por él y puesto igualmente dentro del texto original, pero nada más. O sea que Titius no dice nunca ser el autor de (1'). Lo que resulta inverosímil a mediados del siglo XVIII es que un astrónomo o un matemático nos hable de *radios* de órbitas planetarias cuando hacía tanto tiempo que se sabía que todas ellas eran elípticas. El texto parece redactado mas bien por un *cosista* o calculador del siglo XVI[1]. Su estilo me recuerda un manuscrito del siglo XVI de D. Juan de Area y Quiroga que dice:

Números, *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0; //*
ayudaros voy, //
porque ya sabeis //
que sin mi nada valeis[1].

Propiamente, ni Titius ni Bode se atribuirían la autoría de (1') y ni uno ni otro hablan del tema. Da la impresión de que tratan de una regla que ya era conocida en su tiempo. La obra reciente de Michael Martín Nieto[5] muestra que el asunto es un poco misterioso y que todavía nos falta más información histórica para entenderlo. Entre otras cuestiones, el silencio de Bonnet sigue siendo incomprensible.

No hay duda de que Bode conoció el texto intercalado por Titius en las dos ediciones alemanas del libro de Bonnet. Los dos fragmentos seguidos se transcriben letra por letra de cada edición de Titius a las dos ediciones de la *Astronomía* de Bode,. (*Deutsliche*) *Aleitung zur Kenntniss des gestirnten Himmels.* Curiosamente, acompaña a la primera de ellas (1771) un ligero comentario de duda sobre la fiabilidad de la regla que no está en la segunda (1772), lo que presupone que Bode había leído las dos ediciones.

Johann Ebert Bode (1740-1826) fue sin duda un destacado astrónomo alemán de los siglos XVII y XVIII, cuya fama se extendió pronto por todo el mundo. Director del Observatorio Astronómico de Berlín, fundador del *Berliner Astronomische Jarbuch* (1774) y con múltiples distinciones a lo largo de casi un siglo. No obstante, da la impresión de que a la hora de la traducción al alemán del libro de Bonnet (1766), Titius conocía de antemano la fórmula (1') y que, probablemente, Bode no. Como sugiere M. M. Nieto, uno piensa que de una antigualla con poco interés se pasó a lo que podría ser un faro útil para descubrir nuevos planetas, sobre todo si sólo se conoce lo que se halla en la *Astronomía* de Bode, que quizás es lo que ocurrió. Bode da una importancia que antes no tenía a una regla conocida de tiempo y de la cual. se han ido descubriendo citas y publicaciones cada vez más antiguas, tanto de la sucesión **γ** como de la fórmula (1') o equivalentes, incluso anteriores al siglo XVIII. Algunas podrían hallarse en formularios manuscritos prácticos de astrología. o bien en manuales *cosistas*. Téngase en cuenta que, por ello, se ha sospechado que el propio Kepler, que tenía a menudo dificultades para cobrar su sueldo, podría haber vendido secretamente algunos horóscopos de encargo para poder salir del paso.

La visión de Bode parece estar muy fijada en la posibilidad de que las distancias planetarias fueran un buen camino para descubrir nuevos planetas, como antes he señalado, y de modo parecido a lo que había ocurrido con la introducción del telescopio por Galileo. ¿Quién habría pensado antes en las montañas de la Luna, en los anillos de Saturno, en los satélites de Júpiter, en las nebulosas y cúmulos estelares? Kepler mismo nunca parece haber tenido en cuenta la posible existencia de otros planetas más allá de Saturno. Incluso el propio Newton es aun muy actualista: las cosas son como fueron creadas. Es en la época de Bode cuando se empiezan a destruir viejos paradigmas de la cultura occidental, pero probablemente nunca sabremos todo lo que fue creado, ni lo que ha cambiado de aquello que era algo diferente el primer día de la creación. De todos modos, a gran escala, uno y otro serán inaccesibles, todo lo creado y lo que ha estado cambiando. Lógicamente y también a gran escala, resultan admisibles un primer y un último día, pero ambos serían también completamente inaccesibles y fantásticos.

[5] Michael Martín Nieto. Titius-Bode Law of Planetary Distances, Its History and Theory. Pergamon Press. Printed in Germany. Leipzig, 1972. Probablemente es el mejor estudio histórico disponible.

4. Astronomía newtoniana y *ley de Bode*

Una de las citas más antiguas de la sucesión γ: 0,4 0,7 1,0 1,6 2,8, 5,2 10,0, de la obtención de la misma y de la fórmula exponencial (1), es la de James Gregory de 1702, setenta y cuatro años antes de la publicación en alemán del libro de Bonnet en el que Titius intercaló lo que habría de ser la ley de Bode. J. Gregory era un matemático escocés divulgador destacado de la astronomía newtoniana. Publicó un libro cuyo título es el de *Elementos de Astronomía*, que más tarde sería utilizado por Benjamín Martín para su *Philosophia británica* (1747), la cual fue la base del curso que Tomás Cerdá dio en Barcelona en 1760 en la Real Cátedra de Matemáticas del Colegio de San Jaime de Cordelles. El manuscrito, conservado en la Real Academia de Historia de Madrid, sería detenidamente estudiado mucho después por L. Gassiot, y publicado por la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona[6] en 1999 con el título de *Tratado de Astronomía* de T. Cerdá.

El manuscrito del *Tratado de Astronomía* de Cerdá es anterior a la traducción al alemán del libro de Bonnet y, naturalmente, no hace referencia a ninguna ley de Bode. No obstante, con su cita del libro de J. Gregory tenemos una buena conexión con el conocimiento relativo a las distancias planetarias inmediatamente anterior a Titius y a Bode. Se trata de poder hacer ahora un análisis basado exclusivamente en los conocimientos de la época.

Recordemos que del tiempo a que nos referimos hay también el escrito de Christian Wolf de 1724, quien fue profesor de J. B. Titius, razón por la cual se supone que éste conocía la futura ley de Bode, como antes hemos señalado. Sin embargo, el enfoque anterior de J. Gregory es diferente y debe incluirse entre el de los primeros newtonianos, dentro de los cuales podríamos poner igualmente a B. Martin y al propio T. Cerdá. Hay que tener en cuenta que Ch. Wolf era propiamente un filósofo, como su otro gran discípulo I. Kant.

Según Gassiot, el manuscrito de Cerdá es un borrador no demasiado elaborado en el que se introducen notas y observaciones originales y se suprimen diversos fragmentos del texto de B. Martín. Podría tratarse del guión para ser dictado en clase o bien de un esbozo para un futuro libro de astronomía que no se llegó a escribir, un primer paso para preparar un tratado complementario de las obras anteriores de Cerdá que, en su conjunto, constituiría su *Biblioteca Matemática*. Esto era muy propio de la época, como muestra entre otros Benet Baïls (1730-1797) con sus *Elementos de Matemática*, que consta de once volúmenes en diez tomos, de los cuales la astronomía se encuentra en el séptimo volumen y en parte del octavo.

La obra de Baïls y el *Estado de la Astronomía en Europa* de Jordi Juan (1713 1773), publicada el mismo año de su muerte, constituyen dos referencias clásicas de la entrada en España del sistema newtoniano. Guardando cierta distancia por respeto, ahora puede añadirse el manuscrito de Cerdá y el curso de astronomía qué dictó en el colegio de Cordelles, quizás ligeramente anteriores a la fecha de publicación de las

[6] Tomado de T. Cerdá. *Tratado de Astronomía* (1760). Versión de L. Gassiot. *Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona*, 1999. Tiempo periódico es la denominación del período de revolución utilizada por Newton y Halley, según esta misma fuente.

dos obras antes citadas. No obstante, el *Tratado* de Cerdá no se llegó a publicar en su día y la influencia de su curso fue modesta y circunscrita a Barcelona. Baïls puede considerarse discípulo de Jordi Juan y sustituyó a Josep Subirás como profesor de matemáticas en el *Colegio Imperial* de Madrid, cuando el último volvió a Barcelona como primer director de la *Rea*l *Conferencia*, precursora de la *Real Academia de Ciencias Naturales y Artes de Barcelona*. Unos años antes, Subirás había sido alumno de Cerdá en Corbelles y quizás sería el profesor de los cursos de astronomía que siguieron dándose en la nueva aula que más tarde formaría parte del edificio actual de la Real Academia de Ciencias de Barcelona[7]

Es bien sabido que Newton (1642-1727) representa la culminación de este gran capítulo de la Revolución científica, que comprende Copérnico (1473-1553), Tycho Brahe (1546-1601), Galileo (1564-1642) y Kepler (1571-1630). Es interesante darse cuenta de que en su tiempo la mecánica newtoniana convirtió nuestro sistema solar en una gran máquina automática, compleja, de toda confianza y que funcionaría *ad infinitum* desde el primer día de la creación, estableciendo una estricta relación causal en la sucesión de los acontecimientos, sin necesidad de ningún *plus.* Sólo dejaría fuera nuestro libre albedrío.

4. 1. Tiempo periódico y distancia al Sol

Las magnitudes básicas de nuestro sistema solar son los tiempos periódicos y las distancias al Sol. Según Benjamín Martín[6] (1743), Newton partió de los siguientes tiempos periódicos expresados en días medios y sus fracciones decimales:

87,9692 224,6176 365,2565 686,9725 4332,514 10759,275

Todos ellos provienen de determinaciones del intervalo entre dos oposiciones o conjunciones consecutivas con el Sol, o dos conjunciones, inferior y superior, si es un planeta interior (fig..adjunta 1ª, pág.17). Este intervalo se denomina revolución sinódica (P’) y corresponde al tiempo que invierte el planeta en dar aparentemente una vuelta completa en torno de la Tierra. La revolución sidérea o tiempo periódico (P) es el tiempo contado en días medios que tarda el planeta en describir su órbita verdadera alrededor del Sol. P puede calcularse a partir de P’ y del año sidéreo en días medios. De acuerdo con datos recientes, el año sidéreo tiene 365,25636 días medios transcurridos entre dos pasos consecutivos del Sol por el punto Aries o equinoccio de primavera, igual duración del día y de la noche, supuestamente fijo.

Con anterioridad a Newton, Kepler ya disponía del tiempo periódico de los planetas históricos con valores muy parecidos a los anteriores, y había hecho notar

[7] García Doncel, S.J. Los orígenes de nuestra Real Academia y los jesuitas, (RACAB, nº 947, Vol. LVII, 3, 1998).

que faltaba uno, puesto que al pasar de cualquiera de ellos al siguiente se doblaba el tiempo periódico, menos entre Marte y Júpiter, donde el salto es mucho mayor.

Venus / Mercurio	Tierra / Venus	Marte / Tierra	Júpiter / Marte	Saturno / Júpiter
225 / 88 = 2,6	365 / 225 = 1,6	687 / 365 = 1,9	4333 / 687 = 6,3	10759 / 4333 = 2,5

En su manuscrito, Cerdá señala que la determinación de los tiempos periódicos es más precisa si se mide el intervalo que media entre dos pasos del planeta por el mismo nodo, ascendente para pasar encima del plano de la eclíptica o descendente para pasar debajo, dado que los nodos, intersecciones de los planos de las órbitas y la eclíptica, permanecen fijos.

Con respecto a las distancias al Sol de cada planeta, dicho manuscrito dice que para Venus y Mercurio podemos proceder determinando la elongación máxima, occidental u oriental, donde la tangente a su órbita desde la Tierra forma ángulo recto con la línea Sol-planeta.Por observación se mide el ángulo que entonces forman el planeta, la Tierra y el Sol, que para el caso de Venus sería de unos 47º. De este modo, la distancia de Venus al Sol, dando a la correspondiente de la Tierra el valor de 100.000, sería:

sen 90º (radio) : sen 47º :: 100.000 : distancia de Venus al Sol

No es muy prolijo con respecto a la determinación de las distancias al Sol de los planetas exteriores, pero T. Cerdá indica que, conociendo la correspondiente a la de la Tierra, y determinando por observación el ángulo Sol-Tierra-planeta, o esperando la cuadratura, sólo falta conocer el ángulo Sol-planeta-Tierra para resolver el triángulo formado, lo cual los astrónomos consiguieron de distintas maneras. En cambio, en el capítulo 6 del *Tratado* se detalla la utilización de los satélites de Júpiter para determinar la distancia al Sol de este planeta. Naturalmente, este método es posterior al uso del telescopio y de la época de Halley (1656-1732).

Cerdà pasa luego a la determinación de la distancia de la Tierra al Sol y, como era de esperar, nos dice que el problema se halla en la pequeñez de la paralaje solar, y que Halley había revisado cuidadosamente esta cuestión, concluyendo que su valor no podía exceder los 12" de arco, ni ser inferior a 9", por lo que adoptó el valor medio de 10,5". También siguiendo lo señalado por Halley, afirma que el paso de Venus por delante del disco solar, que se esperaba para el 26 de mayo de 1761 (o sea, para el 5 de junio del calendario gregoriano), permitiría determinar la paralaje solar con mucha mayor precisión. Cuando llegó esta fecha, Halley ya había muerto, pero la determinación correspondiente fue llevada a cabo por otros varios observadores. Reguero[4] ya nos da el valor obtenido de 8,5776", que corresponde a la medida del paso siguiente de 1769, que fue utilizado durante todo el siglo XIX y que posteriormente se afinaría a 8,866" [8]

El método de Halley se basa en dos puntos: 1º La paralaje horizontal de Venus α es mucho mayor que la del Sol β (fig. adjunta 2ª). 2º Prescindiendo de los detalles de realización, que son muchos, si A y B son dos observadores del paso de Venus (fig. adjunta 2), P_A para el primero y P_B para el segundo, la distancia CD, que es la medida delicada que hay que realizar, es al diámetro de la Tierra AB como la distancia VS es a la distancia VT (fig..adjunta 2). Además por la tercera ley de Kepler tendremos que los arcos AB y CD cumplirán la relación $(T_T^{2/3} - T_V^{2/3}) / T_V^{2/3} = 0,37$. Entonces, si el arco CD medido es de 48”, el correspondiente a AB será de 48” x 0,37 = 17”,76 y la paralaje solar 8”,88.

La determinación de la distancia a que los astros se encuentran de nosotros se resolvió, con anterioridad a Newton, aplicando el método trigonométrico usado para medir la de objetos inaccesibles sobre la Tierra . Si ésta es AB (fig. adjunta 3, pag. 17) y podemos medir la longitud comparable AC y los ángulos α y β, tendremos el caso más sencillo de resolución de triángulos. Las visuales dirigidas a las estrellas son prácticamente paralelas, aun tomando como distancia AC el propio eje mayor de la órbita de la Tierra. En este caso, el ángulo en B, llamado *paralaje anual*, para las estrellas más próximas es del orden de ¾ de segundo, el correspondiente a α del Centauro, que es una de las más próximas al Sol. En cambio, para los planetas, AC suele ser el diámetro de la Tierra y la mitad del ángulo en B es *la paralaje* del astro correspondiente.

Sean O_1 y O_2 dos observadores situados en el mismo meridiano en latitudes φ_1 y φ_2 y, por lo tanto, $\varphi_1 - \varphi_2 = O_1CO_2$ (figura adjunta 3, pag. 17).En la culminación superior del astro L (Sol, Luna, planetas y cometas), ambos observadores miden simultáneamente las distancias cenitales $Z_1O_1L = z_1$ y $Z_2O_2L = z_2$. Desde el centro de la Tierra C, la primera distancia cenital sería Z_1CL y la segunda Z_2CL.Como $z_1 = O_1CL + O_1LC$ y $z_2 = O_2CL + O_2LC$, $z_1 + z_2 = O_1CO_2 + p_1 + p_2$. Entonces ($p_1 + p_2 + O_1CO_2) - (\varphi_1- \varphi_2) = p_1 + p_2$. En consecuencia, la distancia CL = Δ podrá determinarse dado que los ángulos LO_1C y LO_2C son suplementarios respectivamente de los ángulos z_1 y z_2. Además, según el teorema de los senos en el triángulo, O_1C / sen p_1 :: Δ / x_1 e igualmente O_2C / sen p_2 :: Δ / z_2. De este modo, siendo $O_1C = O_2C = r$, tendremos que: $r / \Delta = \text{sen } p_1 / \text{sen } z_1$ y $r / \Delta = \text{sen } p_2 / \text{sen } z_2$. Por lo tanto, también $r / \Delta = \text{sen } p_1 + \text{sen } p_2 / \text{sen } z_1 + \text{sen } z_2$, Los sen de p_1 y p_2 puede sustituirse por los arcos, porque son ángulos pequeños, con lo cual $r / \Delta = p_1 + p_2 / \text{sen } z_1 + \text{sen } z_2 = z_1 + z_2 - (\varphi_1- \varphi_2) / (\text{sen } z_1 + \text{sen } z_2)$, o sea que, en definitiva: $\Delta = r \text{ x sen } z_1 + \text{sen } z_2 /z_1 + z_2 - (\varphi_1 - \varphi_2)$. También podrá determinarse la paralaje horizontal $\pi = OLC = r / \Delta$ en radianes, o segundos de arco multiplicando por 206265. Los ángulos p_1 y p_2 son denominados paralajes diurnos, variando con la altura y cuyo máximo es el paralaje horizontal.

.

En cuanto al método referido para determinar la distancia de Júpiter (fig. adjunta 4, pag. 17), hay que tener en cuenta que la órbita de la Tierra alrededor del Sol y la de los satélites de Júpiter a su alrededor están en el mismo plano. Si t_1 es el tiempo medio de ocultación de un satélite para R_1 y t_2 es el correspondiente a R_2, $t_2 - t_1$ será el tiempo de recorrido del arco CS (fig. adjunta 4). Entonces, Si T es el período P de revolución del satélite, $P / (t_2 - t_1) = 360 / \alpha$, donde α es el ángulo $FIC = R_1IS$. Determinando por observación el ángulo β y conocido el lado SR_1, el triángulo está resuelto.

De hecho, antes de la época de Newton, los matemáticos ya habían resuelto de muchas maneras los problemas de las distancias planetarias. Así, entre otros, Kepler ya pudo establecer las siguientes distancias medias al Sol con relación a la distancia de la Tierra, considerada dividida en 100.000 partes iguales[8]:

Mercurio	Venus	Tierra	Marte	Júpiter	Saturno
38.806	72.400	100.000	152.350	519.650	951.000

Otra serie de distancias relativas obtenidas en la misma época por Bolialdo[6] es:

38.585	72.398	100.000	152.350	522.520	954.198

Puede observarse que la discrepancia mayor entre los términos correspondientes de cada serie sólo alcanza unas tres milésimas partes del valor de la distancia al Sol. Igual sucede con los tiempos periódicos entre las diferentes medidas de la época.

Por otra parte, aplicando la tercera ley de Kepler a los tiempos periódicos antes señalados, las distancias de los planetas al Sol con relación a la de la Tierra surgen con toda fluidez y, tomada la de la Tierra como dividida en 100.000 partes iguales, se obtiene la siguiente serie:

38.710	72.333	100.000	152.369	520.096	954.006

Obsérvese que cada término no difiere de los correspondientes a las distancias obtenidas por observación hasta llegar al orden de las milésimas, sean de una o de otra de las series transcritas.

.Las medidas actuales de los tiempos periódicos alcanzan una precisión superior a 10^{-7}, y las correspondientes determinaciones directas de las distancias al Sol son también de una precisión del mismo orden. Las distancias calculadas con la tercera ley de Kepler a partir de los tiempos periódicos actuales son iguales a las obtenidas por observación hasta una 10^{-7} parte de las mismas. Como señala Penrose[9], hay que darse cuenta de que esta es una garantía de la fiabilidad de la gravitación universal, sin parangón con ninguna otra ley. Una certeza basada en una causalidad estricta (consultar precisión de las distancias astronómicas en www.iau.org).

[8] . R. M. Aller. *Introducción a la Astronomía*. C.S.I.C. Madrid, 1945.

[9] .Roger Penrose. *El camino a la realidad*. Debate. Random House Mondatori, S.A. Barcelona, 2006.

4. 2. El *juego malabar*

Tomando valores de hace medio siglo[8], los tiempos periódicos P en días medios consecutivos de los distintos planetas, incluidos Urano, Neptuno y Plutón, son los siguientes:

87,97 224,70 365,26 686,98 - 4.332,59 10.759,24 30.688,39 60.181,11 90.749,00 (0)

Con estos tiempos periódicos podemos calcular las distancias medias al Sol D_K de los planetas aplicando la tercera ley de Kepler. Esto es, $D_K = (P_n / P_3)^{2/3}$ donde P_n es el tiempo periódico del planeta y P_3 el de la Tierra, en días medios. Resultan así las siguientes distancias relativas a las de la Tierra tomada como unidad

0,387 0,723 1,000 1,524 – 5,203 9,539 19,191 30,071 39,520 (1)

Dando a la distancia de la Tierra al Sol el valor 10 y redondeando a enteros las de los demás planetas hasta Urano, se obtiene la sucesión

4, 7, 10, 15, -, 52, 95, 192, (1')

Puestos los ocho términos de esta sucesión como ordenadas y en abscisas el orden natural de los números, puede trazarse la curva de línea continua de la fig. 1. Restando 4 a las ordenadas, resulta que $(D_K \times 10) - 4 = 0$ para $n = 1$. Entonces, podemos trazar también la curva discontinua de la misma figura. Es fácil darse cuenta de que en esta última la ordenada es 3 para $n = 2$, y que los valores siguientes son cada uno el doble del anterior. Por lo tanto, descontando Mercurio ($n = 1$), las distancias al Sol de los demás planetas con respecto a la de la Tierra, tomada aproximadamente como 10, vendría expresada por la igualdad

$$D_K \times 10 = 4 + (3 \times 2^{n-2}), \qquad (2)$$

donde D_K es la distancia al Sol en unidades astronómicas (para la Tierra, $D_K = 1$), de acuerdo con los valores redondeados de (1').

Para Mercurio ($n=1$), la ecuación (2) no se cumple porque el primer miembro de la misma da 5,5 en lugar de 4, como indica la sucesión (1'). Para $n = 5$, $D_K \times 10 = 28$, pero no hay planeta o sería el que Kepler había echado en falta entre Marte y Júpiter.

Es obvio que, empezando con 4 y siguiendo con los valores dados por la fórmula (2), para n = 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8, puede obtenerse la sucesión (3):

4 7, 10, 16, 28, 52, 100, 196, (3)

que ya sabemos que se conoce con el nombre de *ley de Bode*. Las sucesiones (1') y (3) son casi coincidentes, como se aprecia en la representación gráfica de la fig. 1. Sin embargo, la introducción del 4 como primer término es arbitraria y, aun tratándose de valores aproximados con respecto a (1), entre 1' y 3 discrepan el cuarto término (15 y 16), el séptimo (95 y 100) y el octavo (192 y 196).

La representación gráfica de la fig. 1 permite darse cuenta de que las ordenadas sucesivas muestran una progresión geométrica de razón 2

$$[(D_K \times 10)_n - 4] \div [(D_K \times 10)_{n-1} - 4] = 2 \qquad \text{(Tabla 1)}$$

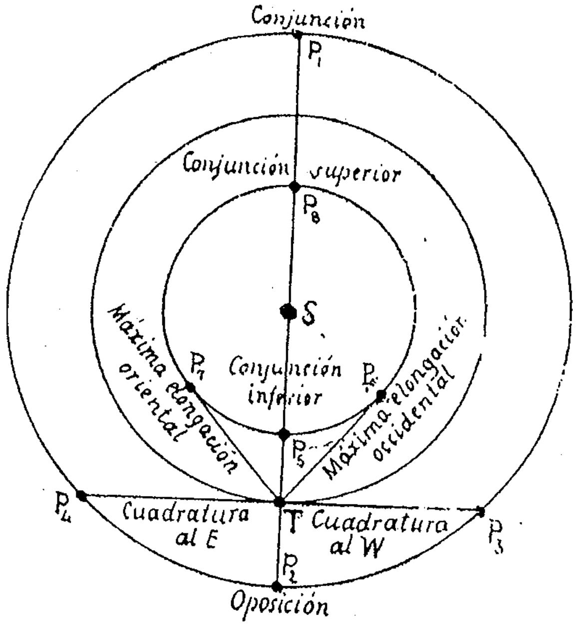
desde n = 2 a n = 7. Sin embargo, ello puede ser consecuencia de la sucesión arbitraria α de partida y del redondeo de los términos de (1'). En cambio, como veremos en (**4**.**5**.), esta razón geométrica no es constante y crece linealmente con n (Tabla 4), al igual que el radio del movimiento circular. (Tabla 3). como se muestra en la fig. 4. Entonces,

$$R_n - R_1 \div R_{n-1} - R_1 = 1{,}82,\ 1{,}84,\ 1{,}86,\ 1{,}88,\ 1{,}90, \text{ para } n = 3, 4, 5, 6, 7 \qquad (\mathbf{4}.\mathbf{5}.)$$

Por lo tanto, la ley de Bode resultaría ser una simple aproximación aritmética sin base física alguna, que no tiene en cuenta el crecimiento progresivo de la razón en lugar de una razón constante de 2, entre las distancias planetarias consecutivas.

Ya hemos dicho que no es seguro que Johan Daniel Titius fuera realmente el primer autor de la sucesión (3), porque luego se han encontrado otras iguales más antiguas, como la de Christian Wolf de 1724 y la todavía anterior de James Gregory de 1702. A pesar de ello, es probable que, sin la extraordinaria difusión llevada a cabo por J. E. Bode desde 1772 y la coincidencia con el descubrimiento de Urano en 1781, la ley de Titius-Bode sólo hubiera llegado a nosotros como *una especie de juego malabar que permite recordar fácilmente la distancia de los planetas al Sol*. Quizás sería más propia de la corriente *cosista* de dos siglos antes que de la astronomía newtoniana, que entonces se extendía vigorosamente por toda Europa para constituir una nueva época hasta nuestros días. No obstante, en algunos aspectos representaría también el inicio de una nueva visión del Universo en el espacio invisible a simple vista y de su evolución a lo largo del tiempo, a que nos referiremos más adelante en este ensayo.

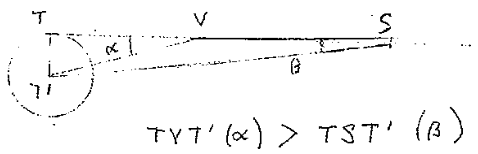
Figuras adjuntas



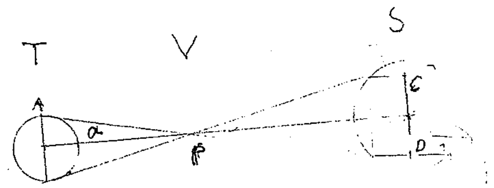
1ª

Pag. 11

1



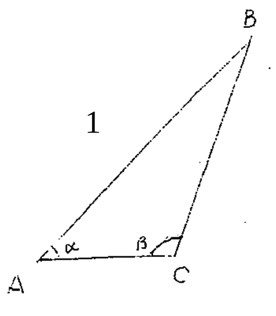
2



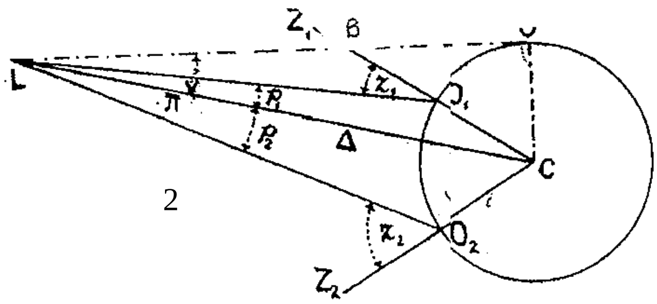
2ª

Pag. 12-13

1

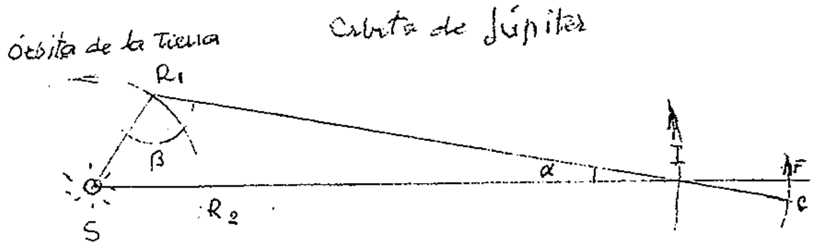


2



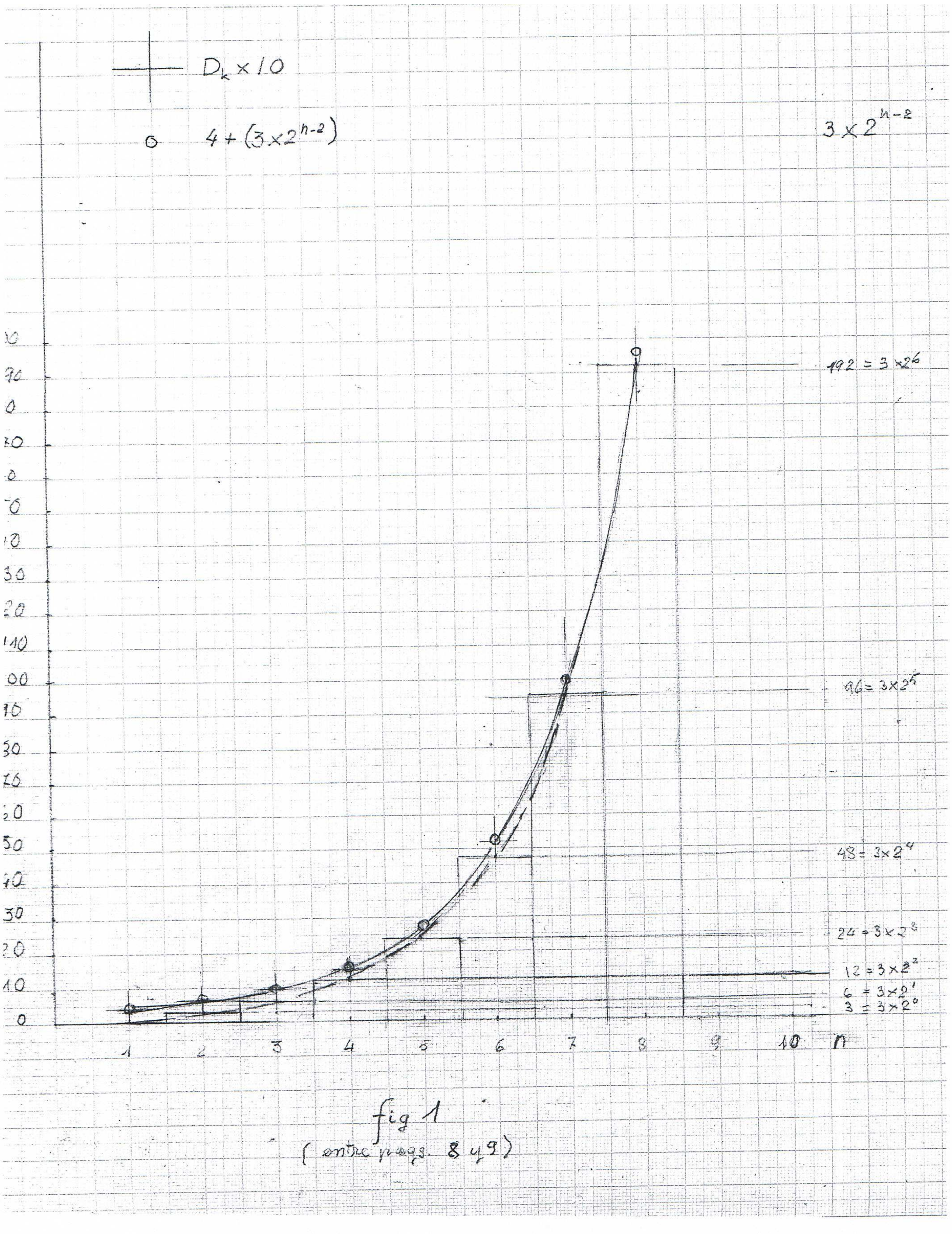
3ª

3



4ª

Pag. 13



$D_k \times 10$
$4+(3\times2^{n-2})$
$3\times2^{n-2}$
$192 = 3\times2^6$
$96 = 3\times2^5$
$48 = 3\times2^4$
$12 = 3\times2^2$
$3 = 3\times2^0$
n
fig 1
(entre pags. 8 y 9)

Fig. 1

4.3. Significado físico

En el cálculo de la órbita de Neptuno que presentó Leverrier en 1846, la distancia al Sol fue establecida admitiendo de antemano que se correspondería con la prevista por el término noveno de la regla de Titius (38,8). A pesar de la desviación con respecto al valor real determinado después por observación (30,97), resultó eficaz para descubrir el planeta. Más tarde, el propio Leverrier y otros astrónomos hicieron diversos cálculos de la órbita de un posible planeta intramercurial llamado Vulcano. Se basaban en la posición y movimiento de pequeños círculos negros que pasaban por delante del disco solar. Fue un estrepitoso fracaso porque nunca pudieron prever un nuevo paso del supuesto planeta. Hoy su existencia está desestimada. Para el cálculo de su órbita no podía utilizarse la regla de Titius que termina con n = 1 (en realidad, la fórmula (2) puede seguirse para n = 0, -1, -2, ...). La D_K puesta por Leverrier a partir de los datos de observación fue 0,143, próxima a la mitad de la distancia entre Venus y Mercurio $(D_K)_2 + (D_K)_1$ / 2 = 0,168, y más cerca todavía a la $(D_T)_0$ = 1,5, siguiendo la fórmula (2).

Es difícil suponer que el fracaso señalado se debiera a que los círculos negros delante del Sol no existieran, dado el gran número de observadores independientes que los vieron y sería más fácil creer que hubieran caído en el Sol, o perdido en el espacio sin regreso. Aun así, fueron cuerpos que no estaban en las órbitas previstas por la ley de Bode, y hasta da la impresión de que esta distingue dos tipos de planetas en el sistema solar, lo cual apuntaría a considerar que el juego malabar podría esconder una ley natural que puede afectar solamente a una parte de los sistemas de planetas y satélites, los que siguen la ley de Bode y los que discrepan de ella.

A medida que iba pasando el tiempo plausible de utilidad de la ley de Bode para descubrir nuevos planetas, aparte de su interés histórico, seguiría siendo una cuestión intrigante la restricción regular de las órbitas planetarias que presupone el peculiar aumento de su semieje mayor en función del orden natural de los números a partir de n = 2 y hasta n = 8. Más adelante volveremos a tratar de este tema (**4.5.**)

Según la fórmula (2), D_K x 10 sería igual a D_T, la distancia prevista por la sucesión de Titius. Esto significaría que $10 \times (P_n / P_3)^{2/3} \cong 4 + (3 \times 2^{n-2})$, para n = 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. Como había supuesto Kepler (**4.1**.), el tiempo periódico P sería función exponencial del número de orden de los planetas y, por esto, encontraba a faltar uno, el correspondiente a n = 5, donde D_K x 10 = 28. Pero esto es una aproximación, porque ya hemos señalado que la razón constante de 2 no se cumple..

Hemos dicho también (**4.2.**), que la fórmula (2) excluye a Mercurio y que, a partir de n = 8, da valores que discrepan cada vez más de las distancias reales keplerianas (1).

Tomando logaritmos base 10, $D_K = (P_n / P_3)^{2/3}$ pasará a $\log D_K = 2/3 (\log P_n - \log P_3)$. Con los valores de los tiempos periódicos dados (**4.1.**), podemos obtener la curva (o), correspondiente a log D_K de la fig. 2 con relación a la serie natural (n). Igualmente, la curva (x) de log $D_T/10$. Es evidente que las ecuaciones de una y otra curva son diferentes, aunque tengan un segmento común entre n = 2 y n = 8. A medida que disminuye P_n, por debajo de P_3, el log D_K se hace negativo y tiende asintóticamente a -∞. En cambio, log D_T / 10 tiene por límite –0,32. La curva (x) es exponencial y la (o) es semilogarítmica, de lo que se derivan las diferencias a partir de n = 8 y por debajo de n = 2.

Todas las órbitas planetarias reales cumplen la ley de Kepler con gran aproximación y, por lo tanto, se hallan sobre la curva (o) de log D_K = f (n), según sea su distancia media al Sol (semieje mayor). Igualmente lo estarán todas las órbitas de los satélites con respecto a su distancia al planeta correspondiente. Sin embargo, no todos los puntos de la curva log D_K representan órbitas igualmente posibles en el sistema solar, dado que las distancias reales consecutivas se hallan regularmente separadas proporcionalmente según una razón próxima a 2 (**2**.**1**.). El juego malabar no existe si uno se da cuenta de que (fig. 1), si restamos 4 a todos los valores de D_K x 10 (1'), para n = 1, (D_K x 10) – 4 = 0 y que para n = 2, (D_K x 10) – 4 = 3. Entonces, para n > 1, podemos obtener la sucesión 3 x 2^0, 3 x 2^1, 3 x 2^2, 3 x 2^3, 3 x 2^4, 3 x 2^5 y 3 x 2^6, cuyos términos dan valores de (D_K x 10) – 4 de las distancias al Sol (D_K), y a las de la sucesión (1') con carácter aproximado, desde Venus a Urano, lo cual puede igualmente deducirse de la fórmula (2). Fuera de los siete términos de (D_K x 10) - 4, ni la curva exponencial ni la sucesión armónica anterior tienen ningún sentido, son ficticias. Como veremos (**4.4.** y **4.5.**), el movimiento circular uniforme ficticio y equivalente nos da la deducción de la ley de Bode según las igualdades siguientes:

$(R_n – R_1) \div (R_{n-1} – R_1) = [[(D_K \text{ x } 10)_n - 4] \div [(D_K \text{ x } 10)_{n-1} - 4]] – 0,02 (12 - n) =$

$= 2 – 0,02 (12 - n)$

La constancia de la razón $[(D_K \text{ x } 10)_n – 4] \div [(D_K \text{ x } 10)_{n-1} - 4] = 2$ resulta ser un artefacto, dado que excluye el aumento progresivo real de la relación entre las distancias sucesivas (fig. 1).

Por supuesto que también se ha buscado largamente la equivalencia de las órbitas planetarias con otras que pudieran ser coincidentes, circulares y elípticas, pero en el contexto de un campo de fuerzas central newtoniano siempre se ha llegado a una contradicción dinámica /cinemática.

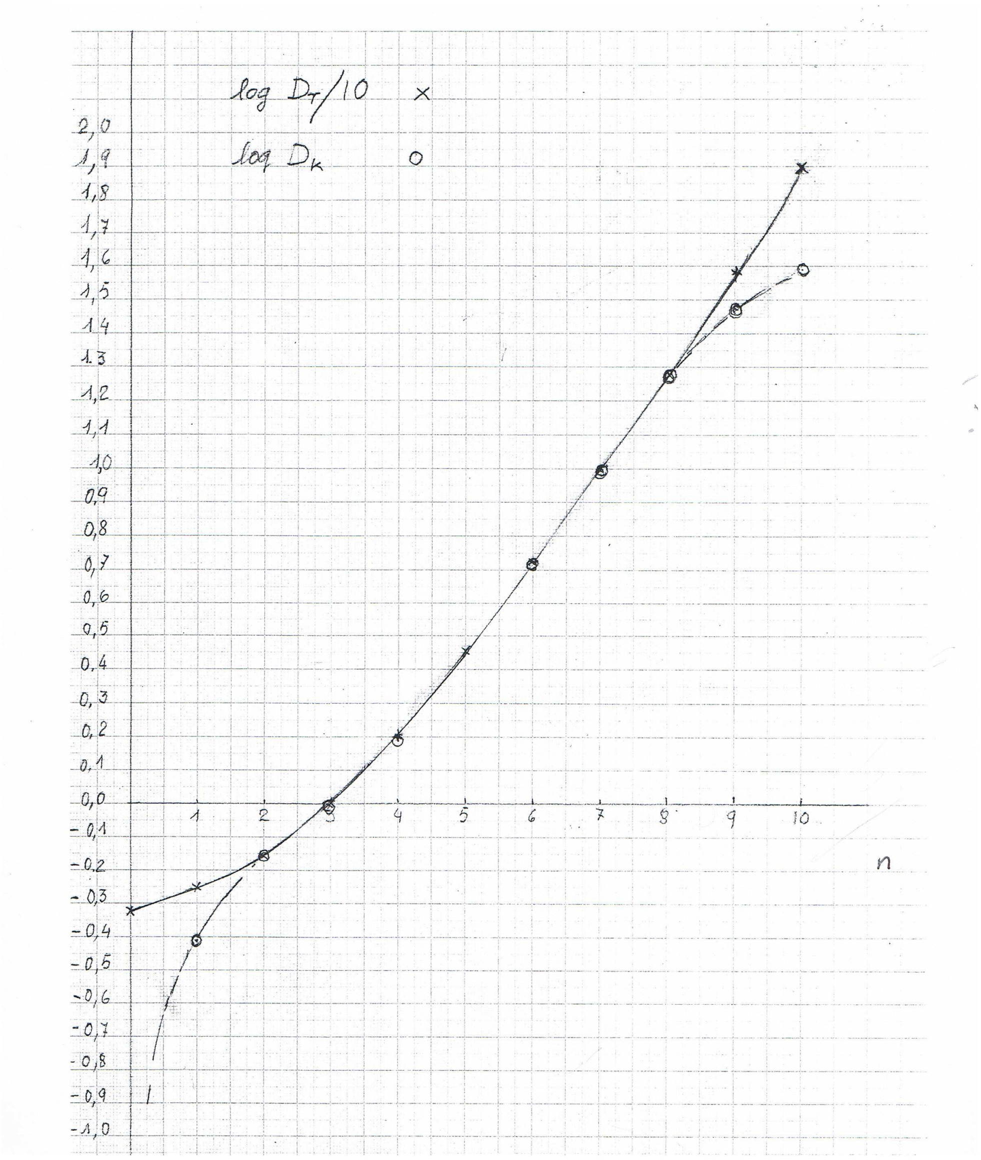


Fig. 2

Naturalmente, los planetas están sometidos no sólo a la atracción solar sino también a la de los demás planetas, por lo cual sus órbitas sufren perturbaciones. Unas son seculares o de largo período y otras periódicas. Los tiempos periódicos (P) y los ejes mayores de las órbitas no parecen afectados por las seculares, pero sí por las segundas, que son más débiles aunque acumulativas. Unas y otras han sido muy estudiadas desde el siglo XIX. Lagrange y Laplace llegaron independientemente a una ley general que puede expresarse por la igualdad $\Sigma x_n = k$ (constante), en la que cada valor de x_n corresponde a cada uno de los ocho planetas del sistema solar y es el resultado del producto (masa) x $(D_K)^{1/2}$ x $(\text{excentricidad})^2$. Esto indicaría que el conjunto de planetas de n = 2 a n = 8 está estabilizado, por lo menos en la situación actual.

4. 4. Movimiento circular uniforme ficticio y equivalente

Si partimos de los términos $(D_T)n$ de 1', podremos verificar que la razón $(D_T\text{-}4)_n$ / $(D_T\text{-}4)_{n\text{-}1}$ = 2 para los siete consecutivos comprendidos en el segmento común de log D_T /10 y de log D_K (fig. 2), como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1

n	$(D_T)_n$	$(D_T – 4)_n$	log $(D_T – 4)_n$	log $(D_T – 4)_n$ – log $(D_T – 4)_{n-1}$	$(D_T – 4)_n$ / $(D_T – 4)_{n-1}$
1	5,5	1,5	0,18	-----	-----
2	7	3	0,48	0,30	2
3	10	6	0,78	0,30	2
4	16	12	1,08	0,30	2
5	28	24	1,38	0,30	2
6	52	48	1,68	0,30	2
7	100	96	1,98	0,30	2
8	196	192	2,28	0,30	2

Siendo $(D_T – 4)_8$ = 192, las distancias consecutivas $(D_T – 4)_n$ desde n = 2, serían pues 3, 6, 12, 24, 48, 96 y 192. Como se aprecia en la figura 1, son las únicas distancias posibles, no caben más que puedan cumplir la ley de Titius-Bode. Sorprende un poco que esto no se hubiera tenido más en cuenta en la utilización posterior de la misma ley, quizás incluso por parte del propio Bode. La previsión de otros planetas sólo podría alcanzar a Urano y a la ausencia de planeta correspondiente a n = 5, aquel que Kepler ya había encontrado a faltar. Sin duda, la sucesión (3) podría ayudar a encontrar un posible nuevo planeta telescópico, del cual luego podríamos determinar su D_K por observación.

En la Tabla 2 tenemos las distancias medias al Sol (semieje mayor) de los planetas (1), calculadas a partir de los tiempos periódicos (revolución sidérea) (0), desde n=2 a n=8, aplicando la tercera ley de Kepler y multiplicando por 10. Salta a la vista la misma sucesión armónica de la Tabla 1, con una razón proporcional próxima a 2. Naturalmente, faltando n = 5, no pueden obtenerse las razones respectivas a n = 4, ni a n = 6, pero, vista la Tabla 1, los términos armónicos podrían darse por supuestos. Quizás sea oportuno recordar que Kepler llamaba a la tercera ley la de la armonía (*Harmonices Mundi Libri Quinque, Geometricus, Architectonicus, Harmonicus, Psychologicus, Astronomicus, cum Appéndice Continens Mysterium Cosmographicum*. Linz, 1619. Edición castellana de Crítica S.A. Barcelona, 2003).

Tabla 2

n	$(10D_K)_n$	$(10D_K - 4)_n$	$\log(10D_K - 4)_n$	$\log(10D_K - 4)_n - \log(10D_K - 4)_{n-1}$	$(10D_K - 4)_n / (10D_K - 4)_{n-1}$
1	---	---	---	---	---
2	7,2	3,2	0,51	---	---
3	10,0	6,	0,78	0,27	1,90
4	15,2	11,2	1,06	0,28	1,95
5	---	---	---	---	---
6	52	48,	1,68	---	---
7	95,4	91,4	1,96	0,28	1,95
8	192	188	2,27	0,31	2,04

Con la curva continua de la fig. 1 obtuvimos la ley empírica (2), que es ficticia, pero que podría estar justificada por la tercera ley de Kepler según nos sugiere la Tabla 2. La fórmula (2) podría ser una simple aproximación aritmética a la sucesión $(10D_K - 4)_n$ entre n=2 y n=8. Por otra parte, hemos visto que las curvas de la fig. 2, log D_T / 10 y log $D_{K,}$ son distintas y sólo tienen un segmento común desde n = 2 a n = 8, a lo largo del cual los tiempos periódicos y las distancias al Sol serían función exponencial de n. En ambos casos $(10D_K - 4) \cong 3 \times 2^{n-2} \cong 10(P_n / P_3)^{2/3} - 4$. Como sea que de la gravitación universal pueden deducirse las tres leyes de Kepler y viceversa, uno piensa que la ley de Titius-Bode tendría sólo de singular el haber descubierto la *existencia de una sucesión armónica entre las distancias al Sol de los planetas desde Venus a Urano, con una razón proporcional próxima a 2* (Tabla 1).

El origen de la Ley de Bode es oscuro. No sabemos de donde James Gregory sacó la sucesión (3) en 1702, setenta años antes que Titius (**4.2**.). Quizás fuera por la simple coincidencia aritmética de las distancias de los planetas al Sol (1) con los términos de la sucesión (3). Tengamos en cuenta que esta coincidencia se descubriría unos quince años después de la publicación de los *Philosophiae Naturalis Principia Mathemática* de Isaach Newton, de la cual las tres leyes de Kepler son pilares indiscutibles. De ellas se deduce la gravitación universal y viceversa, como ya hemos dicho. Sin embargo, en sentido estricto, ni en Kepler ni en Newton podemos encontrar ninguna referencia expresa equivalente a la ley de Bode.

Además de la obra citada de Kepler, en la que se halla la tercera ley, es en otra anterior donde están la primera y la segunda (*Astronomiae Nova Aipologettes Siva Physica Coelestis, Tradita Comentariis De Motibus Stella Martis, Ex Observationibus Tychonis- Brahe*. Praga, 1609). En ambas hay una cantidad de datos de observación fabulosa y una elaboración matemática extraordinaria sobre los tiempos periódicos, las distancias al Sol, la posición y el movimiento de los planetas. Es fácil encontrar repetidamente las sucesiones (0) y (1) y, además, el movimiento circular uniforme ficticio con el cual Kepler resolvió el problema de la *Anomalía* o irregularidad del movimiento de los planetas y pudo cerrar la órbita de Marte a partir exclusivamente de datos reales de observación.

4. 5. Secuencias armónicas de las distancias al Sol

Para no salirnos de la época de J. Gregory, podemos transcribir lo que nos expuso al respecto Tomás Cerdá S.J. en 1760, aquí en Barcelona, según el *Tratado de Astronomía* anteriormente referido (**4**.**1**.)

"Sea la elipse AEBF (fig. 3), la órbita de un planeta cuyo foco es S, su eje mayor AB y el menor OQ. Tomando por centro S y con la distancia SE (media proporcional entre AK y OK, los dos semiejes), podemos describir el círculo CEGF. El área de este círculo será igual al área de la elipse, según las propiedades de las cónicas (ver *Elements of Geometry* de B. Martin (**2**.**1**.)). Supongamos que un punto M recorre la periferia CEGF con movimiento uniforme en el mismo tiempo que el planeta P describe la elipse y que, cuando se halle en A, el punto M que gira en el círculo esté en C. Su movimiento representará el movimiento medio del planeta, e irá describiendo alrededor de S áreas proporcionales a los tiempos e iguales a las áreas elípticas que barre en el mismo tiempo el radiovector del planeta (2ª ley). El área ASP será igual a la del sector circular CSM y el ángulo DSM será la diferencia entre el movimiento medio de M y el movimiento verdadero de P, la cual deberá quitarse para obtener el ángulo ASP. Si el área ASP es igual a la del sector CSM, el área ACDP será igual a la del sector DSM. Cuando el planeta llegue a E, el área ASP se hará máxima, donde la elipse y el círculo se cortarán mutuamente. Cuando el planeta P haya llegado más abajo, por ejemplo al punto R, la ecuación viene a ser proporcional a la diferencia de las áreas ACE y mER, igual a la GBRm, porque, cuando el planeta estará en R, el punto en el círculo se encontrará en V y el sector CSV será igual al área elíptica ASR, esto es, ACE + CERS = CERS + mER + mSV, por consiguiente ACE – mER = mSV = mRBG. Cuando el planeta está en el perihelio B, el movimiento uniforme y el verdadero coinciden, por ser iguales las áreas del semicírculo CEG y de la semielipse AEB, descritos ambos en el mismo tiempo. Desde el afelio al perihelio tenemos la *Prosthapharesis* substractiva, movimiento de P menor que el de M, y aditiva del perihelio al afelio. La velocidad de P es mínima en A y máxima en B".

De ahí, T. Cerdá pasa a describir el cálculo de las *Anomalias* verdadera y media siguiendo a Kepler.

El movimiento circular uniforme referido es ficticio, pero equivalente al elíptico del planeta en virtud de la igualdad de las áreas descritas en el mismo tiempo por el semieje mayor y por el radio del círculo (ambos con el mismo tiempo de revolución P). Entonces podemos considerar el movimiento circular ficticio de los siete planetas, de Venus a Urano, y obtener la sucesión correspondiente de los radios respectivos R_n (Tablas 3 y 4). El cálculo se basa en la media de los semiejes, la excentricidad y la inclinación sobre la eclíptica para situar las órbitas en el mismo plano. En la Tabla 4 se encuentran las razones $(R_n - R_1) / (R_{n-1} - R_1)$, que podemos comparar con las correspondientes de las Tablas 1 y 2.

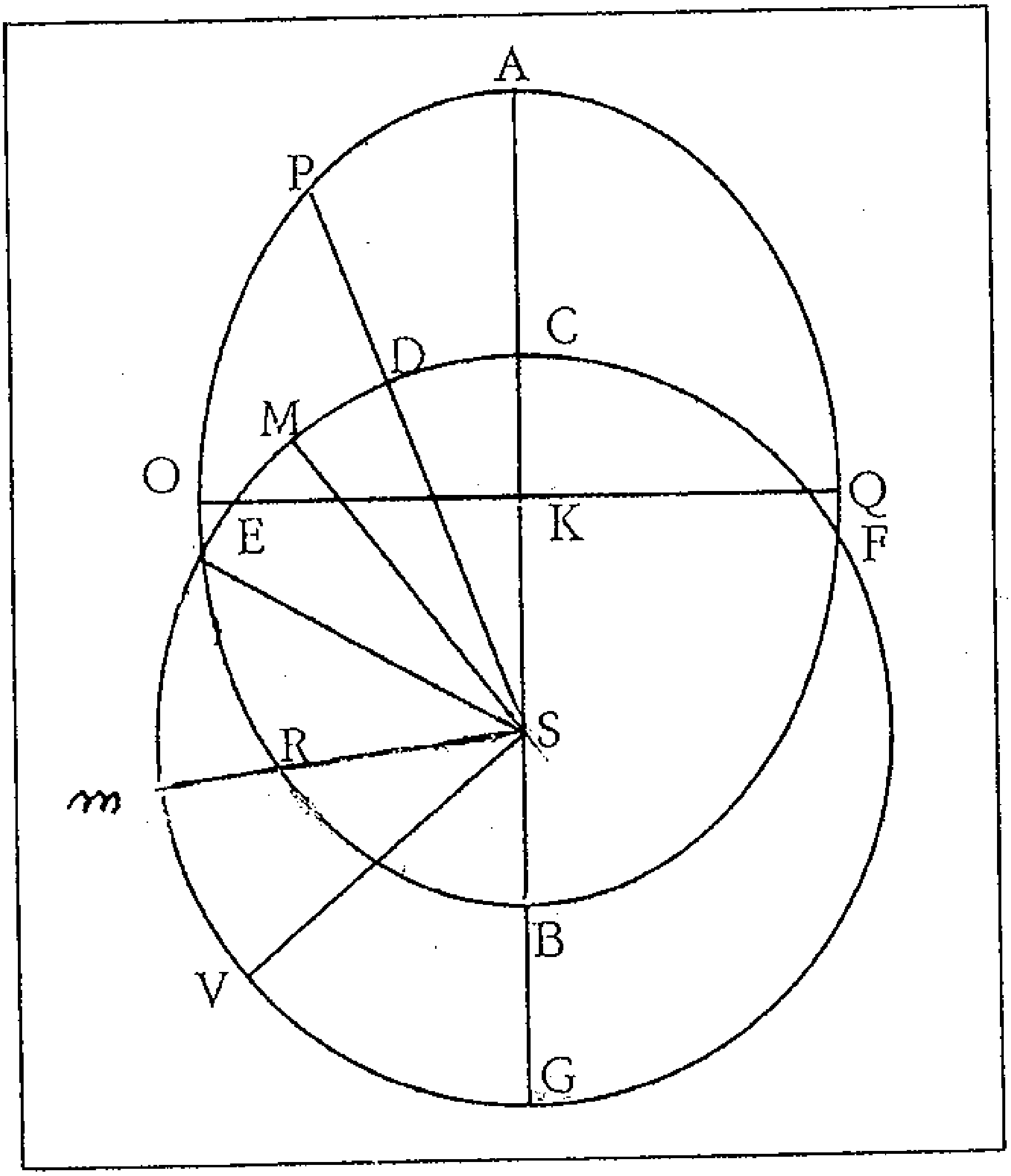


Fig. 3

En la fig. 4 se representan dichas razones en el orden consecutivo de los planetas y también el equivalente de la sucesión de Titius (Tabla 1). Parece evidente que la sucesión armónica es una simple aproximación aritmética, dado que los valores correspondientes de la Tabla 4 muestran una razón que crece gradualmente desde 1,82 a 1,90 entre los planetas consecutivos desde n = 3 a n = 7.

B. Martín y T. Cerdá determinan ES como media aritmética. Es más correcta la media geométrica ES = √ (a x b). Como la **e** es pequeña, dan el mismo resultado. Por esto aquí se sigue a los autores referidoos.

Tabla 3

Radio del movimiento circular ficticio de los planetas históricos y Urano

n	a	e	b	ES	i	R
	semieje mayor	excentri-cidad	semieje menor	radio (a + b)/ 2	inclinación	radio movimiento circular
1	0,387	0,2056	0,379	0,383	7º	0,380
2	0,723	0,0068	0,7225	0,7225	3º24’	0,721
3	1,000	0,0167	0,9999	0,999	0º	0,999
4	1,524	0,0933	1,517	1,520	1º51’	1,518
5	----	----	----	----	----	----
6	5,203	0,0484	5,194	5,1985	1º18’	5,197
7	9,539	0,00558	9,515	9,5225	2º29’	9,514
8	19,191	0,0471	19,170	19,178	0º46’	19,178
	$\mathbf{a^2=b^2+c^2}$	$\mathbf{e=c/a}$ $\mathbf{c=a.e}$	$\mathbf{b^2=a^2-(a.e)^2}$	**R=ES.cos i**		

Tabla 4

Razones armónicas $r_n = (R_n – R_1) / (R_{n-1} – R_1)$

n	R_n	R_n - R_1	$(R_n – R_1) / (R_{n-1} – R_1)$
1	0,380	-----	----
2	0,721	0,341	----
3	0,999	0,619	1,82
4	1,518	1,138	1,84
5	----	----	(1,86)
6	5,197	4,817	(1,88)
7	9,514	9,134	1,90
8	19,178	18,798	2,058

Recuerdo que J. Comas Solá en el *Vocabulario* de su *Astronomía* (Manuales Gallach. Barcelona, 1932) calificó a la ley de Bode de fórmula aritmética, *dada a conocer antes por Kepler*, que expresa aproximadamente la distancia de los planetas al Sol. Supongo que se refería simplemente a la sucesión (1') con relación a la (3) (**4**.**2**.), pero la primera no es igual a la que se obtiene a partir de los radios R_n del movimiento circular uniforme ficticio (Tabla 3)-

De acuerdo con (2) (pág. 15) y lo expuesto en la Tabla 1, entre n = 2 y n = 8:

$$(D_T - 4)_n / (D_T - 4)_{n-1} = 3 \times 2^{n-2} / 3 \times 2^{n-3} = 2$$

En cambio, desde n = 3 a n = 7 (Tabla 4), $(R_n - R_1) / (R_{n-1} - R_1) = r_n$ nos da 1,82, 1,84, -, -, 1,90, respectivamente para n = 3, 4, 5, 6 y 7. Por lo tanto, tendremos las diferencias $2 - r_n$ = 0,18, 0,16, (0,14), (0,12) y 0,10.

Siendo r_3 = 1,82, r_4 = 1,84 y r_7 = 1,90, podemos admitir que r_5 y r_6 serán iguales o muy próximas a (1,86) y (1,88), o sea, que los cinco términos consecutivos estarán sobre una recta, la cual, para n = 12, cortará a la paralela al eje de las X que tiene 2 de ordenada. Según muestra la figura 4, A / B = tg α, siendo A = 1,90 – r_3 = 1,90 – 1,82 = 0,08 y B = 7- n = 7 – 3 = 4, con lo cual tg α = 0,08 / 4 = 0,02. En la intersección en X = 12 e Y = 2, la tangente del ángulo formado también será 0,02. Por lo tanto, en general, $2 - r_n = (12 - n)$ tg. α, o $\mathbf{r_n = 2 - 0,02\ (12 - n)}$ (5), que es la relación entre la ley de Bode y la sucesión kepleriana relativa a las distancias R_n de los planetas al Sol (Tablas 3 y 4). La sucesión armónica de razón simple 2 es un artefacto, pero también una curiosa aproximación aritmética a la sucesión de las razones armónicas reales (r_n) entre n=3 y n=7 del movimiento ficticio equivalente. Téngase en cuenta que α es un ángulo de 7′ de arco.

El área de la órbita circular ficticia es proporcional al cuadrado del radio (Tabla 5). Cada planeta tiene un período de revolución igual al del movimiento circular uniforme correspondiente. Las áreas que se barren en el mismo tiempo en la órbita circular y la elíptica correspondiente son iguales, pero no lo son entre las órbitas de distinto planeta. Al pasar de uno a otro, la velocidad del movimiento circular cambia, pero los tiempos periódicos correspondientes mantienen la relación R_n^3 / P_n^2 (3ª ley). La velocidad disminuye con la distancia al Sol pero, como se ve en la Tabla 5, la fracción del área circular total que se barre por día medio va aumentando exponencialmente con n. Los valores de R_n y los de D_T / 10 dan áreas barridas A_n / P_n y A'_n / P_n, que son muy próximas (Tabla 5), pero sólo las primeras cumplen la tercera ley de Kepler. Los valores de A'_n / P_n son ligeramente mayores, pero su separación aumenta para n=7 y n=8.

Como ya vimos en la fig 2, la curva log D_K cambia el coeficiente angular a partir de Urano, separándose de la curva exponencial log D_T/10, pero en la fig. 4 apreciamos una diferencia enorme entre la ordenación de las distancias al Sol por lo que se refiere a los transuranianos (n > 8). Esto sugiere que el grupo de planetas históricos puede haberse generado independientemente de los demás planetas del sistema solar, quizás incluyendo Urano. Recordemos que Urano tiene otras singularidades, como la de ser el único planeta con movimiento retrógrado de rotación. Para Kepler sólo había seis planetas, de Mercurio a Saturno, y faltaba uno entre Marte y Júpiter. Esperaba encontrar una ley general de la armonía celeste aplicable al sistema solar, totalmente ajustada a los datos de observación, de la cual la sucesión armónica ($R_n - R_1$) / ($R_{n-1} - R_1$) sería una consecuencia. De ahí salió la tercera ley, después de las dos primeras. Las tres allanaron el camino para llegar a la gravitación universal, pero todavía hacía falta pasar por Galileo y Newton.

La velocidad media V_1 de los planetas disminuye a medida que aumenta n (Tabla 5). Tomando V_1 como radio, podemos trazar la circunferencia mayor de la fig. 5, la cual corresponde a la órbita ficticia circular de Mercurio (n=1). Con los valores sucesivos de Vn se trazan luego las demás desde n=2 a n=8. Si dividimos estas circunferencias en ocho sectores iguales con ocho radios comunes, las intersecciones sucesivas de los mismos con las respectivas circunferencias nos darán una sencilla voluta sobre el mismo plano, cuyo giro en sentido opuesto al de las agujas del reloj nos lleva a una espiral parecida a la de la fotografía de la fig. 6. J. Gregory, B. Martyn y T. Cerdá ya conocían las velocidades de los planetas de la Tabla 5, pero aun no sabían nada de las nebulosas en espiral. Lo digo porque recibí la foto en 1977 con el libro de Ivan R. King *The Universe Unfolding*, en el que señalaba que la velocidad de giro de la nebulosa desciende uniformemente del centro a la periferia (Nebulosa espiral de la Osa Mayor, Monte Wilson, 1975). Entonces ya se me ocurrió trazar la misma espiral de Arquímedes de la velocidad en ambos casos, empezando con n=1 y el mismo valor (48 Km/s), para los planetas y para el descenso regular de la espiral hasta 7 y 6 Km/s para n = 8 (48 / 8 = 6) (Fig. 5).

En n = 2 la espiral de las velocidades planetarias se separa de la correspondiente al descenso regular de la nebulosa, pero se vuelve a unir con la misma a partir de n = 7. Desde n = 2 a n = 7, la relación proporcional a R_n /P_n determina la espiral planetaria menos rápida, lo que hace pensar que la sucesión armónica (**4.5.**) sólo puede estar entre Venus y Saturno, muy de acuerdo con lo que podemos ver en la fig. 4**.** $\mathbf{r_n = 2\text{-}0{,}02(12\text{-}n)}$ sólo se cumple desde n=3 a n=7 y la regla de Titius-Bode sólo es una aproximación numérica en este intervalo

Aparte de sus reminiscencias pitagóricas y platónicas, Kepler estaba convencido de que las formas matemáticas son el único camino incuestionable e intemporal para comprender el mundo físico. El movimiento circular que le sirvió para resolver el problema de la *Anomalía* es ficticio, pero con una relación clara y exacta con el movimiento verdadero elíptico, esto es, su conexión con las tres leyes. Debemos reconocer que esto no ocurre con la ley exponencial (2) de la cual se deriva la sucesión de Titius (3). Se trataría de una regla *cosista.*

Como la astronomía newtoniana, la de Kepler es actualista y está sólidamente anclada en el contexto de una sola creación antropocéntrica. Pensar, por ejemplo, en otros sistemas solares hubiera sido para él una incosistencia lógica. En su día, Kepler abandonó la relación de las distancias al Sol con los sólidos platónicos. Quizás ahora pensaría que sólo la Redención es antropocéntrica, sin olvidar que *Dios no deja nunca de poner a prueba los hijos del hombre* (Ecl. 3, 16-18).

La ley de Bode se puso de moda más tarde en un ambiente intelectual muy distinto, en el cual el Universo se iría haciendo cada vez mayor y se hallaría en el curso de una evolución a gran escala. La etapa actual se haría muy pequeña en relación a la totalidad y, en su contexto, la historia del hombre, la del planeta Tierra e incluso la del mismo sistema solar pasarían a ser fenómenos minúsculos y pasajeros.

Según lo que hemos expuesto en este apartado y como decía alguno de mis antiguos profesores, la regla de Titius-Bode no dejaría de ser una *especie de juego malabar*, para recordar las distancias al Sol de los planetas desde Venus a Urano y una pequeña ayuda para buscar nuevos planetas telescópicos (**6**). No obstante, aun se volvería a hablar de ella en el siglo XX, generalizándose a satélites (**5**.) e incluyéndola en las nuevas hipótesis cosmogónicas (**7**) y en los sistemas exosolares (**8**).

Un poco más tarde de la época a que me he referido de cuando era estudiante (**2**), apareció la, en su día célebre, *Mc Graw-Hill Enciclopedia of Science and Technology,* que recuerdo muy bien porque me hice cargo de la traducción de algunos temas extensos para la edición en castellano, lo cual resultó muy útil para mi. Junto al estado actual de entonces con respecto a diferentes temas, pude establecer nuevas relaciones personales de gran valía. Las cuestiones que me correspondieron no estaban relacionadas precisamente con la astronomía, pero no importa, porque sí que podrían permitirme una actualización temática general. Con respecto a la ley de Bode, quedaba claro que era una ley empírica descubierta por Ch. von Wolf en 1741. Nos sirve todavía para confirmar que en 1766, Titius conocía la regla por ser discípulo de Wolf, y la intercalación que hizo en la edición alemana del libro de Bonnet (**2** y **3**) no tenía por objeto revelar una autoría falsa, sino el interés por difundir la regla, lo cual consiguió mejor Bode hasta el punto de ser designada como ley de Bode durante siglos.

Veinte años después saldría la *Gran Enciclopedia Catalana* (1992), y en su volumen nº 22 encontramos la *Llei de Titius-Bode*, donde se concluye: *Hom ha intentat demostrar que aquesta relació empírica podia ésser deduïda teòricament, però tots els intents van fracassar.* Cuesta creer que desde el curso dado en Barcelona por T. Cerdá en 1760 (**4**), donde explicó la *anomalía* (**4**.**5**.) según Kepler y el movimiento ficticio que nos da las distancias medias al Sol y la sucesión armónica $(R_n - R_1) / (R_{n-1} - R_1)$, nadie viera que la sucesión armónica de razón simple 2 de la ley de Titius-Bode era una simple aproximación aritmética a la sucesión real entre n = 3 y n = 7 (Fig. 4). En cambio es muy posible que J. Gregory en 1702, no sólo conociera la correspondencia aritmética de las sucesiones (3) y (1), sino también el movimiento ficticio utilizado por Kepler para determinar las anomalías verdadera y media (**4**.**5**.), como se encuentra en el *Tratado de Astronomía* de Cerdá y que seguramente se expusieron en Barcelona en el curso de 1760. Quizás también conociera la deducción de la ley de Bode a partir de los radios ficticios de las órbitas circulares..

Actualmente, de *Viquipedia* podemos leer lo siguiente: *No hay ninguna explicación teórica sólida de la Ley de Titius-Bode y no está reconocido si es simplemente una coincidencia numérica o una regla más fundamental de la mecánica celeste (2016).*

J. Bode fue un astrónomo singular de fines del siglo XVIII y principios del XIX, especialmente conocido por su divulgación de la sucesión de Titius, pero entre otras obras tiene también un catálogo de 17.240 estrellas, un Almanaque astronómico y el descubrimiento de dos nebulosas (NGC 5024 y NGC 104). Describió nuevas constelaciones (*Cetro de Brandenburgo, Globo aerostático, Máquina de imprenta*,...) que han pasado al olvido, y no así la célebre ley que lleva su nombre.

Tabla 5

n	R_n	R_n^2	$A_n=R_n^2 \times \pi$	A_n / P_n	Vel.media (Km/s)
1	0,380	0,144	0,454	0,005	47,90
2	0,721	0,520	1,633	0,007	35,05
3	0,999	0,998	3,135	0,009	29,80
4	1,518	2,304	7,239	0,011	24,14
5	----	----	----	----	----
6	5,197	27,009	84,851	0,0196	13,06
7	9,514	90,516	284,365	0,0264	9,65
8	19,178	367,796	1155,467	0,0376	6,80

n	$D_T/10$	$(D_T/10)^2$	$A'_n= (D_T/10)^2 \times \pi$	A'_n / P_n
1	0,4	0,16	0,522	0,006
2	0,7	0,49	1,539	0,007
3	1,0	1,00	3,142	0,009
4	1,6	2,56	8,038	0,012
5	2,8	7,84	24,618	----
6	5,2	27,04	84,907	0,020
7	10,0	100,00	314,160	0,029
8	19,6	384,16	1206,262	0,039

$$-o-\ T\text{-}B = \left(3\times 2^{n-2}\right)_n \div \left(3\times 2^{n-2}\right)_{n-1} = 2$$

$$-x-\ K = \left(R_n - R_1\right) \div \left(R_{n-1} - R_1\right) = r_n$$

$$2 - r_n = (12-n)\, tg\,\alpha \quad [\alpha \simeq 7']$$

$$2 - r_3 = 0.18 = 9 \times 0{,}02$$
$$2 - r_4 = 0.16 = 8 \times 0{,}02$$
$$2 - r_5 = 0.14 = 7 \times 0{,}02$$
$$2 - r_6 = 0{,}12 = 6 \times 0{,}02$$
$$2 - r_7 = 0{,}10 = 5 \times 0{,}02$$

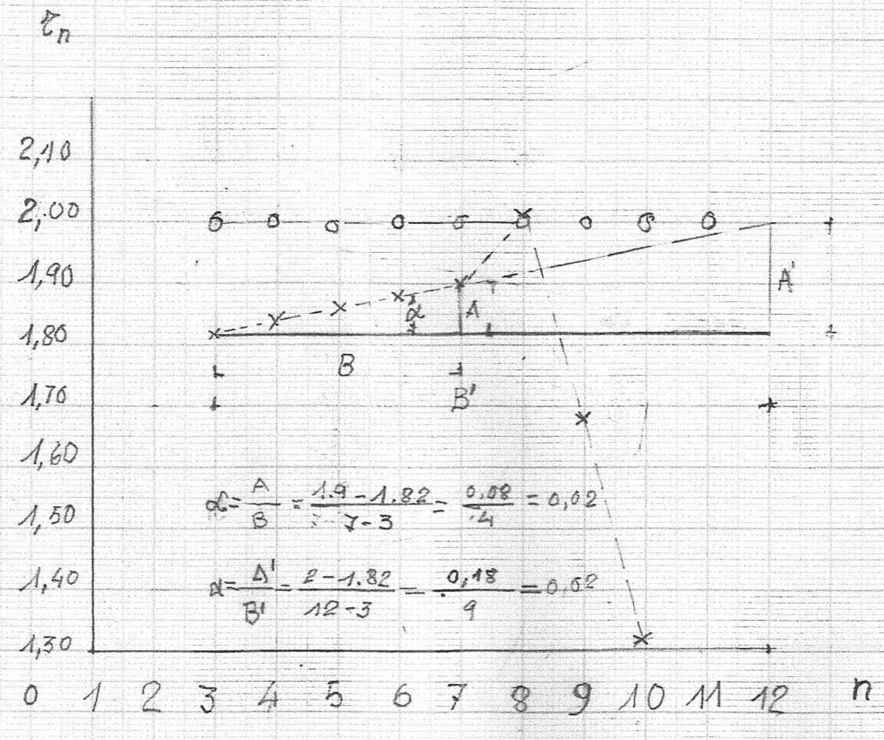
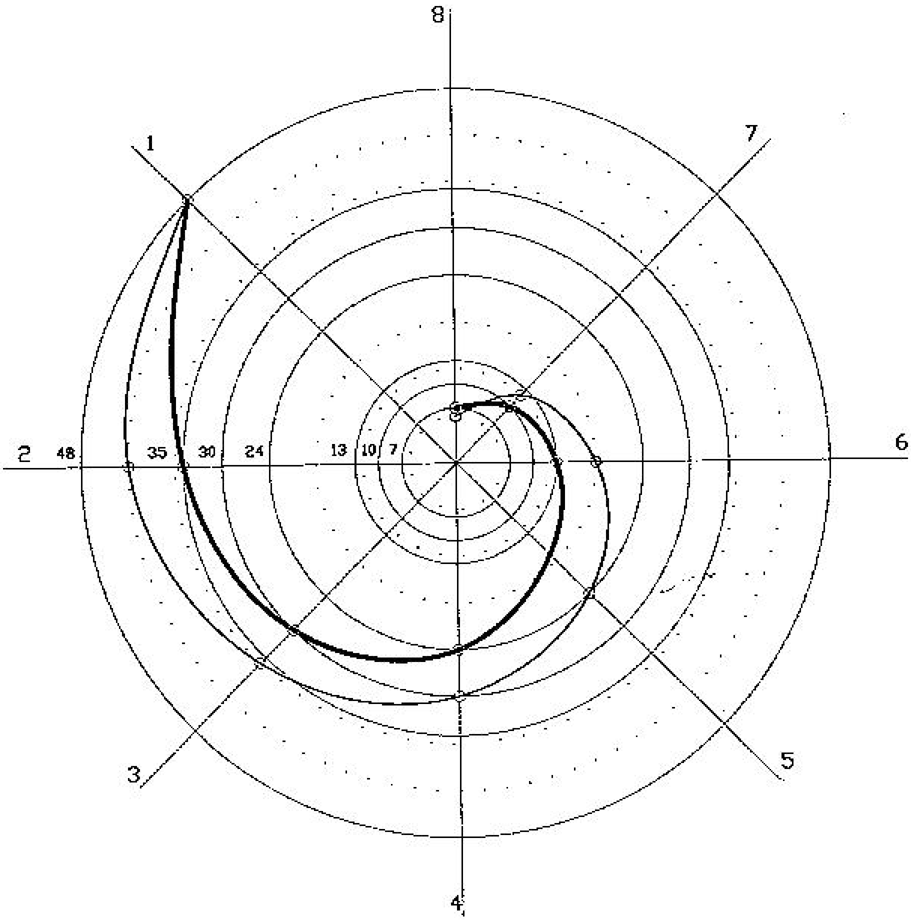
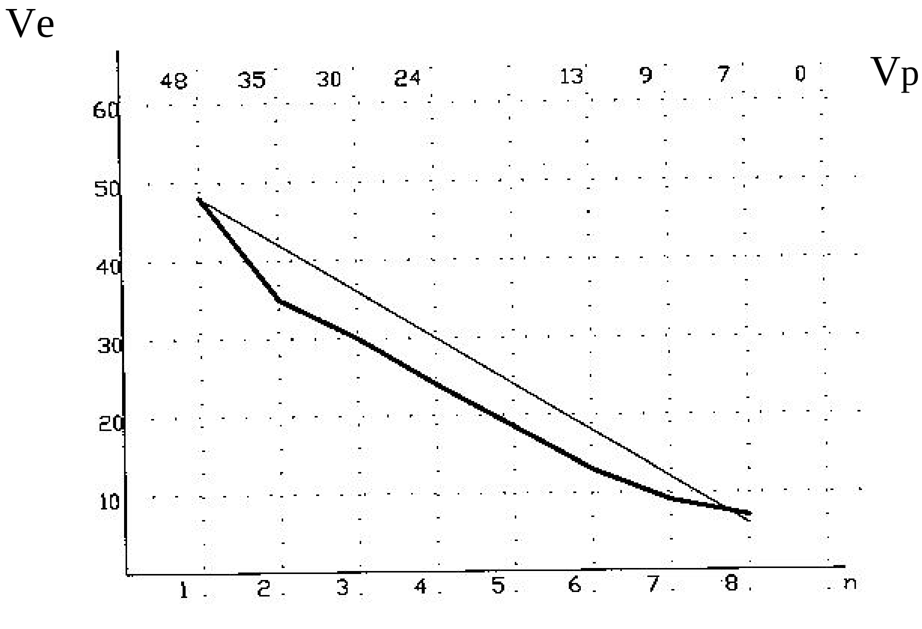


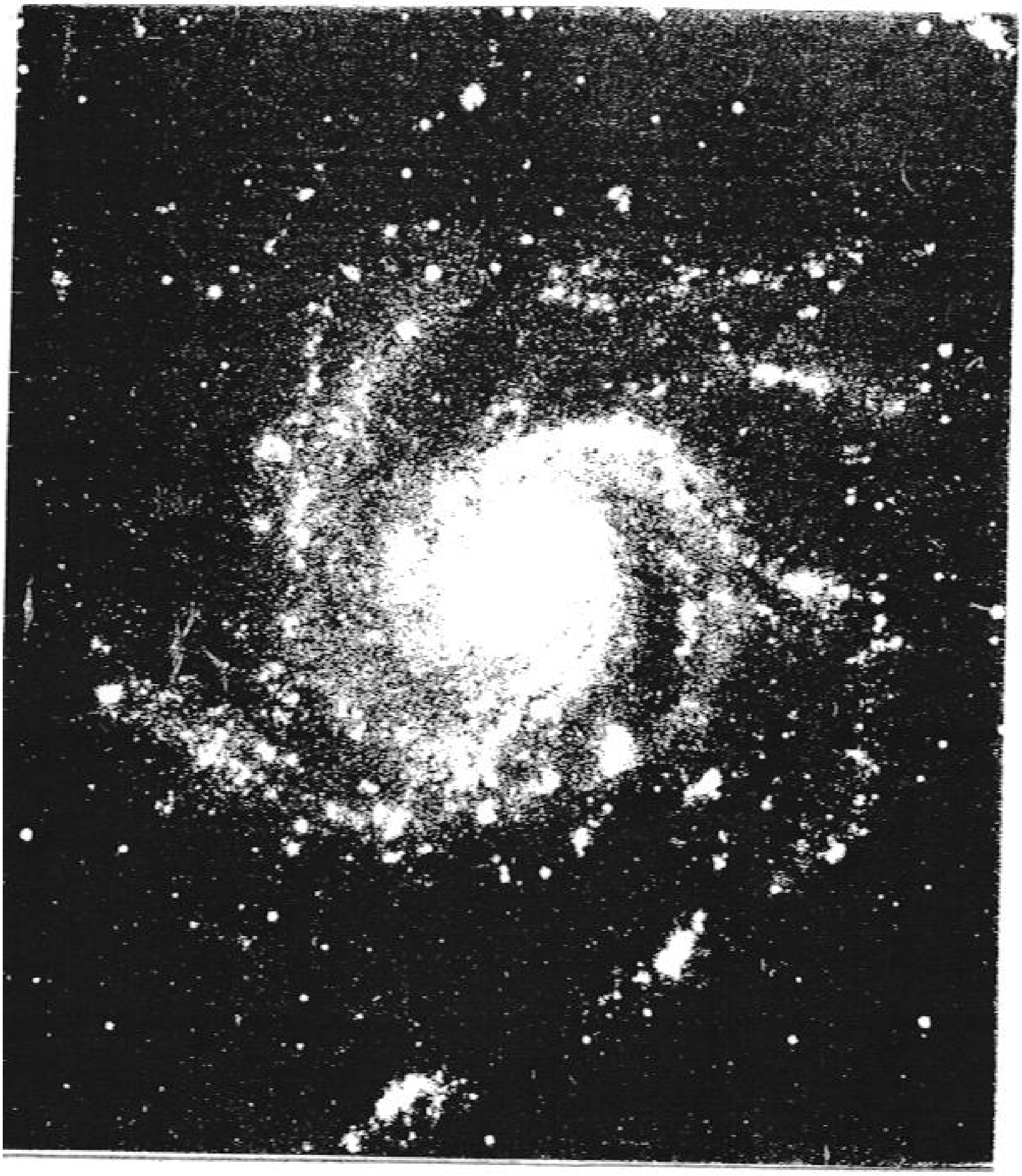
Fig. 4


8
1
7
2
48
35
30
24
13
10
7
6
3
5
4


Ve
48 35 30 24 13 9 7 0
Vp
60
50
40
30
20
10
1 2 3 4 5 6 7 8 n

TAULA 5

Fig. 5



Hale Observatories 1975

Fig. 6

5. Los satélites de los grandes planetas

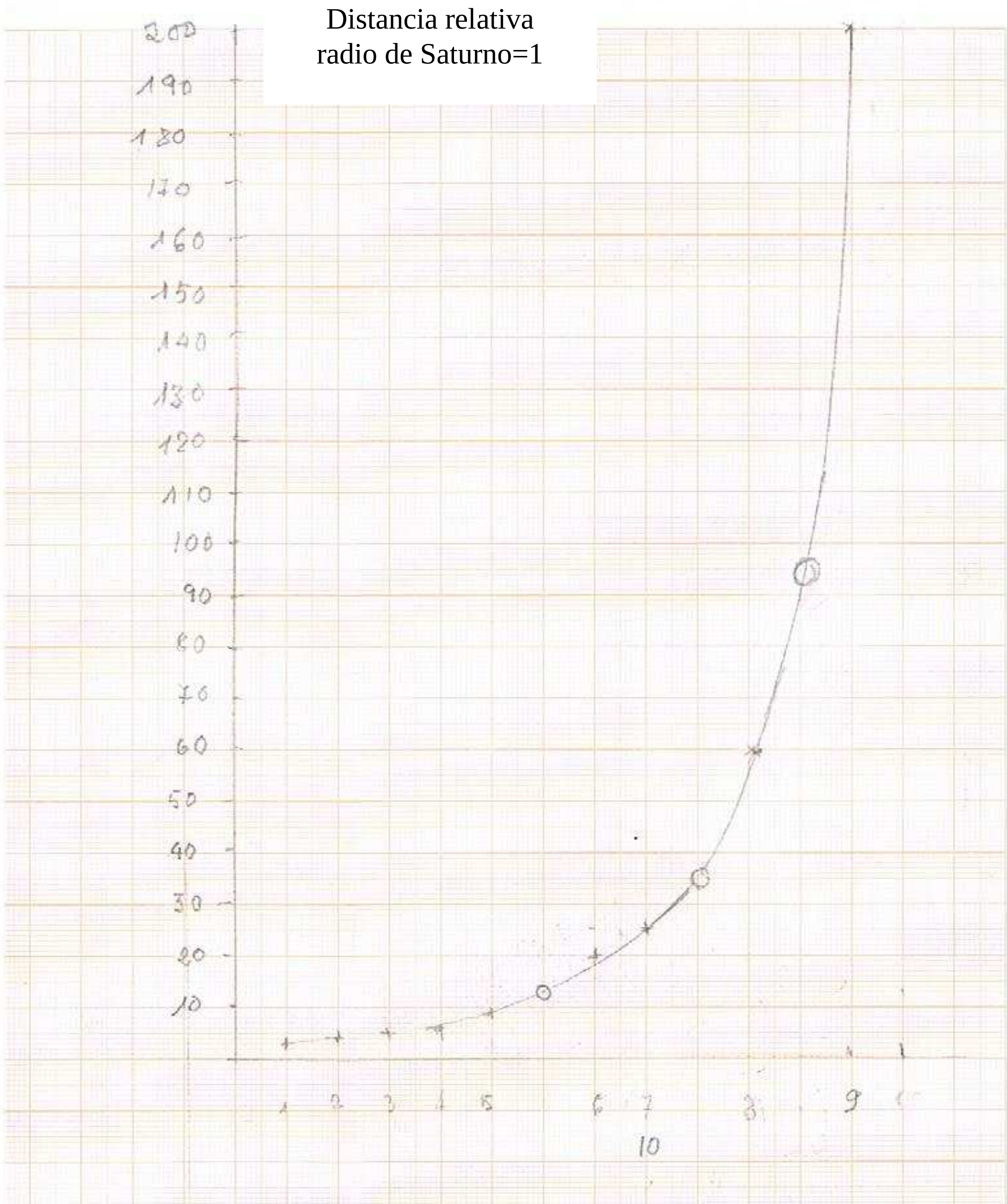
El carácter natural de la ley de Bode se ha evocado especialmente al comprobar que los sistemas de satélites de los grandes planetas siguen también la misma ley. En la Tabla 6 se consignan las distancias a Saturno de sus satélites en función del radio del planeta y la razón del aumento de las distancias consecutivas. A pesar de las desviaciones, con estas distancias puede obtenerse una curva exponencial del mismo tipo que la representada en la fig. 1. Ni la ley de Bode, ni la ordenación del mismo tipo de las distancias de los satélites de Saturno representan un cumplimiento preciso de una ley como la tercera de Kepler,. pero la tendencia a una distribución regular es indudable. En la fig. 7 se traza la curva exponencial correspondiente a los satélites de Saturno bajo el supuesto de que no se habrían formado tres de los posibles (o), al igual que el término cinco de la sucesión de Titius.

Tabla 6

n	Satélite	Distancia /radio Saturno	Proporción n / n-1
1	Mimas	3,11	
2	Enceladus	3,99	1,28
3	Tethys	4,94	1,24
4	Dione	6,33	1,28
5	Rhea	8,84	1,39
6	Titán	20,48	2,31
7	Hyperion	24,82	1,21
10	Themis	24,2	- --
8	Japhetus	59,68	2,40
9	Phoebe	216,8	3,63

El sistema de satélites de Saturno puede comprender cuerpos como Phoebe (9) posiblemente captados del espacio sideral. Es el más lejano y tiene movimiento retrógrado. La inclinación de su órbita es muy grande. Aunque no tanto, también lo es la de la órbita de Themis, que además tiene una extraordinaria excentricidad. De otro lado, Titán tiene un diámetro 1,5 veces el de la Luna, mientras la mayor parte de los demás son mucho más pequeños. Las perturbaciones de las órbitas desde el I hasta el VI son muy importantes. A pesar de todo, la tendencia a la distribución exponencial de sus distancias al planeta es indudable. La distancia media entre 7 y 10 es muy reducida, pero la órbita de excentricidad e inclinación muy diferentes.

Júpiter tiene también un numeroso grupo de satélites (Tabla 7), pero su análisis es aun más difícil que en el caso de Saturno. En la fig. 8 se representa la distribución exponencial de las distancias al planeta con relación a su radio ecuatorial.



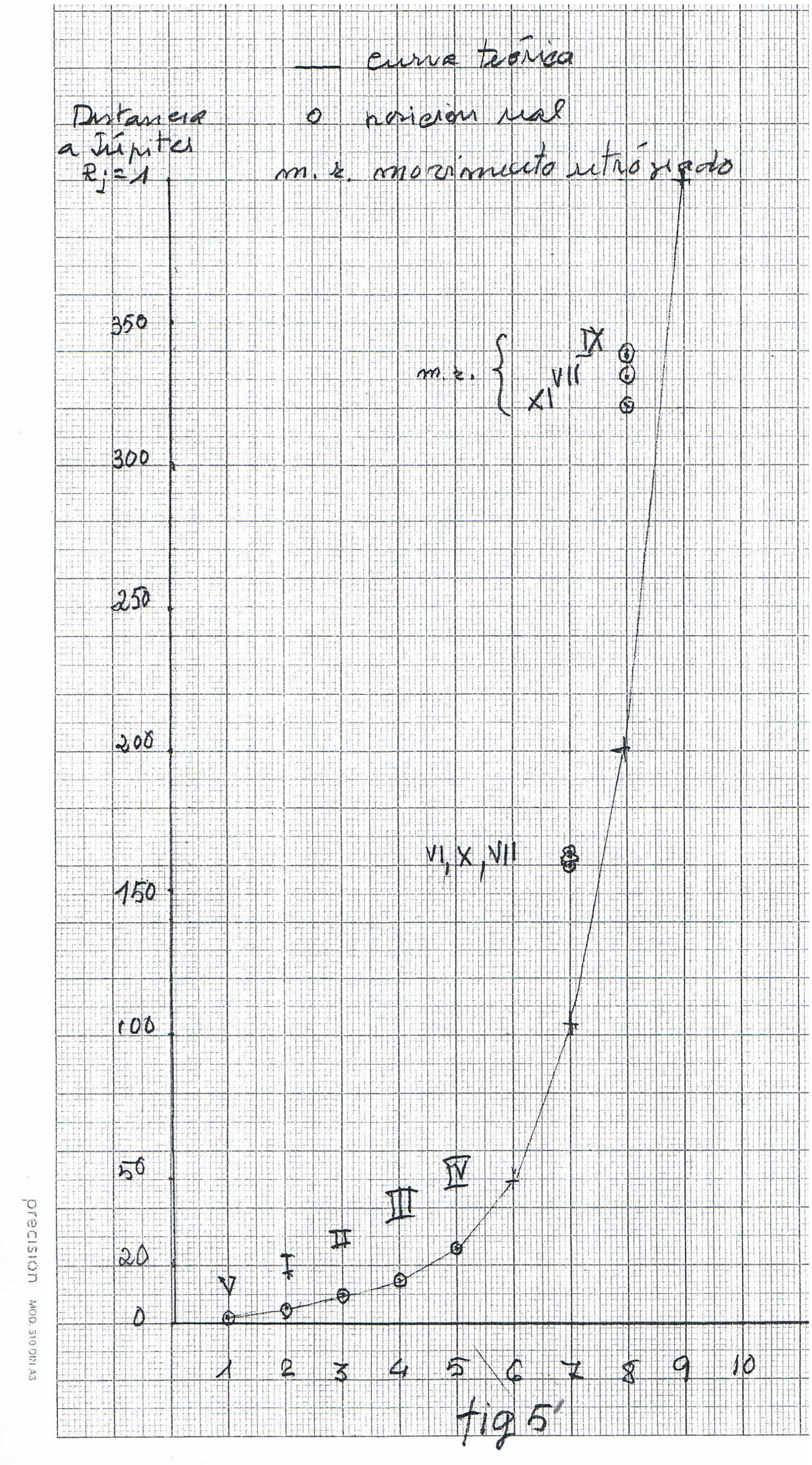
Satélites de Saturno

Fig. 7

Tabla 7

Satélite	nº	Distancia a Júpiter/ /radio ecuatorial	Relación entre las distancias sucesivas
V	1	2,53	---
I (Io)	2	5,906	2,3
II (Europa)	3	9,397	1,6
III (Ganimedes)	4	14,989	2,5
IV (Calixto)	5	26,364	1,75
---	(6)	(50)	(2)
---	(7)	(100)	(2)
VI	---	160	
X	---	164	
VII	---	164	
	(8)	(200)	(2)
XI	10	320	
VIII	11	330	
IX	12	338	
	(9)	(400)	(2)

Es posible que entre el IV y el VI falten dos satélites, que serían el (6) y el (7) y otro, el (8), entre el (VII) y el (XI). En un lugar intermedio se presentan dos grupitos, el VI, X y VII, y el XI, VIII y IX. No se sabe de dónde han salido, pero conviene tener en cuenta: 1) Se trata de astros muy pequeños en relación a los demás satélites. 2) Sus órbitas presentan una excentricidad exagerada. Frente a la de 0,005 para el I, el II y el V, a la de 0,015 para el III y 0,0075 para el IV, tenemos para los dos grupitos más alejados una excentricidad de 0,155, 0,140 y 0,207 para uno y 0,267, --- y 0,368 para el otro. 3) El XI, el VIII y el IX tienen movimiento retrógrado de revolución. 4) Dado el gran tamaño de Júpiter y su distancia al Sol, su atracción relativa sobre los dos grupos de satélites es alta y la ley de Bode podría indicar que el sistema primario de satélites de Júpiter estuviera constituido sólo por los cinco primeros, los que van desde el anillo proximal hasta los grupitos periféricos.



— curva teórica
o posición real
Distancia a Júpiter $R_j = 1$
m. r. movimiento retrógrado
m. r.
IX
VII
XI
VI, X, VII
IV
III
II
I
V
350
300
250
200
150
100
50
20
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
fig 5'
precision

Fig. 8

En todo caso, la ordenación de los satélites de Júpiter tampoco excluye la ley exponencial, simplemente pone de manifiesto otros factores determinantes de la distancia a Júpiter por lo que se refiere a los satélites más alejados. Descontados los dos grupitos referidos, no se conoce otro caso de planeta o satélite intercalado entre dos términos consecutivos del orden exponencial. Cabe considerar especialmente la captación de cuerpos extraños que se añadirían al conjunto de los satélites propios del planeta, formados previamente. Este puede ser también el caso de Neptuno y el de Plutón con respecto a la formación de planetas en el sistema solar y quizás incluso el de Urano (fig. 6).

Si expresamos las distancias de los planetas al Sol en función del diámetro solar podremos ver que los sistemas de satélites son más compactos y giran alrededor del planeta más lentamente que los planetas alrededor del Sol. El momento angular de los planetas con respecto al Sol es mayor que el de los satélites con relación a los respectivos planetas. La sucesión de distancias consecutivas es una progresión geométrica, pero la razón d_n - d_1 / d_{n-1} - d_1 no es constante sino que va aumentando.. Tanto en el caso de Saturno como en el de Júpiter se trata de sistemas más heterogéneos que el de los planetas del sistema solar desde n = 2 a n = 8.

Desde los antiguos astrónomos alejandrinos (III a.C.a II d.C.), quizás haya sido siempre inevitable que la observación atenta del firmamento lleve a presuponer la existencia de un diseño formidable. Aun así, resulta admirable que, en el siglo XVII, Kepler se diera cuenta de que el sistema solar tiene una gran unidad regulada por leyes generales estrictas, de las cuales dependería la ordenación conjunta tanto de los planetas como de los satélites (**4.**)

Confío en que mis antiguos profesores estarían de acuerdo.

6. *Ley de Bode* en el descubrimiento de los planetas telescópicos

6.1. Posición y movimiento de los astros

Es realmente sorprendente y admirable que las astrometría actual tenga como base indiscutible la obra de los astrónomos alejandrinos y especialmente la de Hiparco de Nicea (fecha de nacimiento entre 190-120 a.C.), el descubridor de la trigonometría. Fue el primero que determinó de forma fiable la distancia de la Tierra a la Luna, midiendo la paralaje lunar, también calculó la duración exacta de la revolución del satélite, así como la excentricidad e inclinación de su órbita. Además, hizo el primer catálogo astrométrico preciso con la ascensión recta y declinación de 1080 estrellas (fig. 9)[10] Comparando sus datos con otros más antiguos, descubrió la precesión de los equinoccios y la excentricidad de la órbita terrestre. La exactitud de sus medidas angulares no podía sobrepasar los 30 minutos de arco debido a que sus instrumentos eran rudimentarios pero, gracias a la repetición sistemática y meticulosa de las observaciones, su catálogo puede considerarse una obra maestra, no superada hasta Tycho Brahe en la segunda mitad del siglo XVI, el cual todavía sólo podía hacer medidas visuales, pero ya utilizaba el cuadrante azimutal y otros nuevos instrumentos más precisos que los de Hiparco. No obstante, fue este último quien ya había atribuido, dieciocho siglos antes, el desplazamiento de las estrellas al retroceso del equinoccio de primavera, punto de partida para contar la ascensión recta, cuyo movimiento es de alrededor de 50 segundos de arco por año. El punto Aries tardará 26000 años en recorrer toda la eclíptica. ¡Es una proposición del siglo II antes de Jesucristo! Casi inverosímil.

Recuerdo que Esteve Terradas, en sus últimos años en Madrid, trabajó intensamente sobre las fuentes de Hiparco con la ayuda de especialistas calificados. Me lo contó como extrañeza uno de sus discípulos amigo mío, que más tarde sería catedrático de Mecánica racional. Entonces no, pero ahora creo entenderlo.

La astronomía newtoniana es la que tiene como punto de partida la ley general de la atracción de los cuerpos del sistema solar, generalizada a todos los astros, y que se expresa según la conocida fórmula $F = k (M \times m / d^2)$, en la que M y m son la masa de dos cuerpos cualesquiera, d la distancia que los separa y k la constante de gravitación o fuerza ejercida por la unidad de masa sobre una masa igual colocada a la unidad de distancia. De esta ley pueden deducirse con todo rigor las tres leyes de Kepler, halladas empíricamente y que sirvieron a Newton para establecerla.

Las consecuencias deducidas de la ley de la gravitación universal con relación al movimiento de los astros han sido ampliamente confirmadas. Las masas del Sol, de planetas y de satélites pueden calcularse directamente y también a partir de las perturbaciones orbitales mutuas. El descubrimiento de Neptuno constituyó el éxito

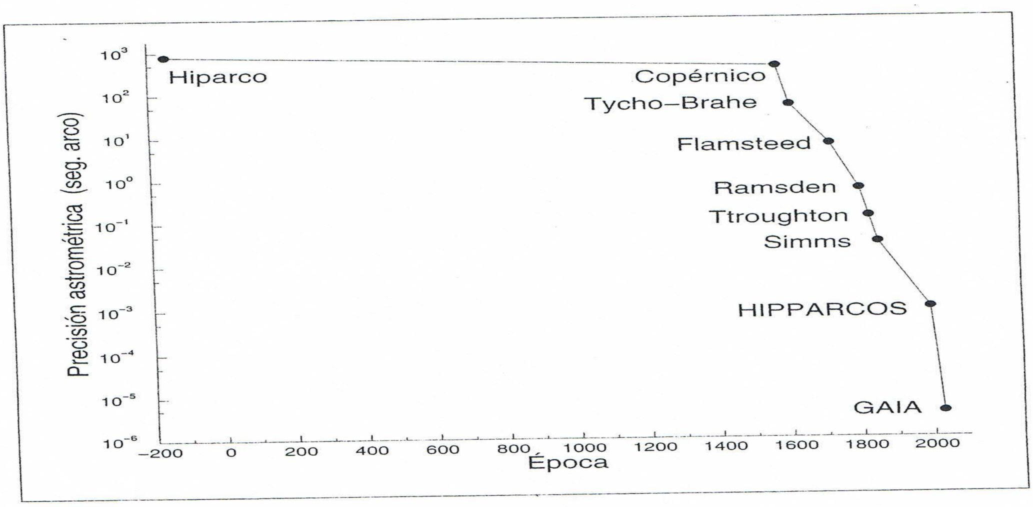
[10] Figura tomada de J. Núñez. Memorias RACAB, nº 975, V. LIX, nº 10, 2002.

más espectacular de la mecánica newtoniana. Sin embargo, Mercurio y Plutón no tardarían mucho en dar nuevos problemas.

Sorprendentemente, durante los tres últimos siglos la ley de Bode se ha considerado una ley natural, sin ninguna relación con la mecánica newtoniana. Según ella, las distancias al Sol desde Venus a Saturno formarían una progresión geométrica de razón 2, $(D_n – 4) / (D_{n-1} – 4) = 2$, faltando el planeta para n = 5. No obstante, como se ha mostrado en **4.4.** y **4.5.** para el cálculo de la *anomalía,* Kepler ya había establecido un movimiento circular uniforme ficticio equivalente al elíptico e irregular para cada planeta. Las áreas son iguales, las descritas en el mismo tiempo por el radio del primero y por el semieje mayor del segundo. Entonces pueden obtenerse las razones $(R_n – R_1) / (R_{N-1} – R_1) = r_n$. Desde n = 3 a n = 7, resultan ser 1,82, 1,84, 1,86, 1,88 y 1,90, que están sobre una línea recta. También que $(D_n – 4) / (D_{n-1} – 4) = 2$ es un artefacto derivado de la relación $r_n = 2 – 0{,}02\ (12 – n)$. La sucesión armónica de las distancias planetarias desde n = 3 a n = 7 se halla en un contexto puramente newtoniano (**4.5.**).

6.2. Fórmula fundamental de la Astronomía. Orbitas y efemérides

Hay que tener en cuenta que este escrito es un ensayo y no un libro de texto, ni un artículo de una revista especializada. Por ello he creído oportuno ayudar al lector, con cierta base de astronomía, añadiendo una pequeña sinopsis para facilitar la comprensión precisa o simplificar la posible consulta de un manual, en relación a lo que se referirá en los apartados **6**.**2**. a **6**.**5**.



Mejora en precisión angular de las medidas astrométricas a lo largo del tiempo

Fig. 9

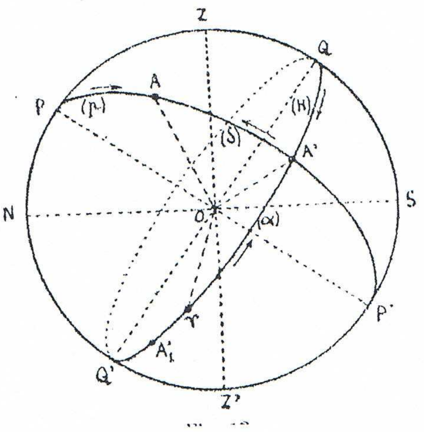
La posición de un astro en la bóveda celeste es un dato básico para formalizar nuestra visión cosmológica. Como es sabido, se determina mediante un sistema de coordenadas que pueden tener como origen al observador (coordenadas geocéntricas) o bien al Sol (heliocéntricas). Pueden ser las que toman el plano del horizonte y la vertical, las que parten del plano del ecuador y el eje de los polos o bien las que toman el plano de la eclíptica y el correspondiente eje perpendicular. Las coordenadas celestes tienen como base el ecuador y el eje del mundo. El origen de las que se cuentan sobre el ecuador puede ser la intersección con el meridiano local (coordenadas horarias) o con el punto vernal (coordenadas absolutas), llamado también punto Aries o equinoccio de primavera (fig. 10). La ascensión recta es el arco de ecuador desde el punto Aries hasta la intersección del círculo horario del astro con el ecuador, contado en sentido directo de 0º a 360º, o de 0 h a 24 h. La declinación es el arco sobre el círculo horario del astro contado desde el ecuador hasta el astro de 0º a 90º para el hemisferio boreal, y de 0º a –90º para el austral. Para cada astro hay un determinado ángulo horario H con respecto a su posición, que depende de la hora sidérea. Si ésta es T, vendrá expresado por $H = T - \alpha$, o bien $H = T - \alpha + 24$ h, siendo α la ascensión recta correspondiente. En todo caso, sea cual sea el sistema de coordenadas utilizado para definir la posición de un astro, puede pasarse de unas a otras teniendo en cuenta el tiempo T. La expresión anterior relativa a la hora sidérea T constituye la llamada *fórmula fundamental de la Astronomía*, según solía decir el Prof. J. Febrer[11] en sus cursos de astronomía en la Universidad de Barcelona.

En los observatorios astronómicos se emplea el círculo meridiano para medir con precisión las coordenadas horarias y absolutas, naturalmente acompañado del reloj sideral. Eligiendo un cierto número de estrellas repartidas por todas las regiones de la esfera celeste, se han establecido sus coordenadas por medio de numerosas observaciones meridianas efectuadas cuidadosamente. A estas estrellas fundamentales se refieren las coordenadas de los demás astros por medio de observaciones diferenciales, que pueden hacerse con gran precisión y de forma mucho más sencilla. De todos modos, con los catálogos de estrellas, muy completos, de que se dispone actualmente, pueden utilizarse fotografías a gran aumento de una parte concreta del cielo en las que siempre se encontrarán estrellas de referencia, las cuales permitirán determinar la posición de cualquier astro de la misma imagen. Hoy existen catálogos de gran precisión (10^{-3} segundos de arco) de centenares de miles de estrellas y de instrumentos adecuados para facilitar el cálculo de la posición de cualquier astro que aparezca en sus proximidades, bien sea en el propio campo telescópico, con el micrómetro apropiado, o en una fotografía del mismo.

En todos los tratados de Astronomía se describen en primer lugar los distintos sistemas de coordenadas astronómicas, junto a los efectos de refracción, aberración y variación de los planos fundamentales (precesión y nutación). Todos estos conceptos tienen un origen antiguo, pero un desarrollo extraordinario en los siglos XVIII y XIX, subsiguientes a la astronomía newtoniana. Constituyen la base objetiva y precisa para establecer con todo rigor la posición y el movimiento de todos los astros que pueden ser observados desde la superficie de nuestro planeta directamente o bien con la ayuda de recursos instrumentales.

[11] Director del Observatorio Fabra desde 1957 a 1970.

Los elementos de una órbita elíptica son: 1) La longitud del nodo ascendente ☊, ángulo γ - Sol - ☊ sobre la eclíptica, y la inclinación **i**. Ambos sitúan el plano de la órbita con respecto al plano de la eclíptica. 2) La distancia angular ω del perihelio al nodo, la cual sitúa la posición de la órbita en su plano. 3) La excentricidad **e** y el semieje mayor D, que dan la forma y dimensión de la órbita. 4) El período de revolución P y la época del paso por el perihelio que suele designarse por T, y que sirve de punto de partida para el cálculo de las anomalías. El movimiento medio $\mu = 2\pi / P = 360^{o} / P$ expresa la velocidad de un astro ficticio para recorrer una circunferencia con movimiento uniforme en el tiempo P. Ya conocemos la relación entre P y D establecida por la tercera ley de Kepler.



Coordenadas horarias: QQ' ecuador. PZP' plano meridiano. PAP' círculo horario del astro. QOA' ángulo horario H (0-360º o 0-24 h. en sentido retrógrado).

Coordenadas absolutas: ♈ punto Aries o vernal. ♈A' ascensión recta α (0-360º o 0-24 h. en sentido directo). QO♈ hora sidérea T. Para A', T = α+H; para A_1, T = α+H-24h. A'OA, declinación δ (0-90º).

Fig. 10

El problema de la determinación de los elementos ☊ , i , ω , e , D, T y P de una órbita planetaria consiste en ligar estas incógnitas con las observaciones de la posición del astro en la bóveda celeste. Se necesitan, como mínimo, seis observaciones que dan tres posiciones aparentes, pues cada una comprende una ascensión recta y una declinación. De todos modos, el problema es difícil y de él se han ocupado una gran número de matemáticos después de Newton. La información básica es la establecida de un lado por Laplace y de otro por Gauss en el siglo XIX. Lagrange trató también el problema en la misma época de una forma intermedia entre la de los otros dos autores. Son todavía célebres al respecto la obra de Luc Picart, *Calcul des Orbites et des éphémérides*, y la de G. Stracke, *Bahnbestimmung der Planeten und Kometen*. Según algunos autores relativamente recientes, como Ramón M. Aller (1945), para comprender bien el problema del cálculo de los elementos de una órbita, es recomendable empezar estudiando a fondo la obra de Gauss: *Teoría motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium.* En la práctica, actualmente se dispone de programas informáticos con los que se puede resolver el problema fácilmente. Sin embargo, conviene recordar, en relación al descubrimiento de los planetas telescópicos y al conocimiento de las órbitas de los históricos, que en ningún caso se emplearon los métodos aludidos de las obras que acabamos de referir. Esto es debido a que, con un gran número de observaciones disponible, se puede trazar una primera aproximación de la órbita de un planeta con todos sus elementos. Luego, se van haciendo sucesivos ajustes a través de las desviaciones de las efemérides calculadas a lo largo del tiempo durante años. Así es como Kepler y otros astrónomos de su época llegaron al conocimiento bastante correcto de las órbitas de los planetas históricos. A medida que se aumentó la precisión de las posiciones y las determinaciones del tiempo sidéreo, se mejoraron progresivamente los modelos de cada órbita. Recordemos que, a partir de los catálogos de estrellas, ahora se puede seguir la posición de un planeta con gran precisión y verificar las efemérides calculadas mucho más fácilmente.

6. 3. Urano y los pequeños planetas

Hacia 1781, F. W. Herschel tenía el telescopio mayor del mundo y se había propuesto hacer con su ayuda un catastro completo del cielo. En la noche del 13 de junio de aquel año observó un astro no catalogado que mostraba un disco aparente, por lo que no podía ser una estrella, lo que le hizo suponer que se trataba de una nebulosa. Sin embargo, gracias a las observaciones sucesivas del mismo, pudo ver que tenía movimiento propio, y por ello pasó a creer que se trataba de un cometa. Comunicó su descubrimiento a la *Royal Society* y varios astrónomos intentaron calcular su órbita. Coincidieron en mostrar que no podía ser parabólica porque, en su posición perihélica, el astro en cuestión tenía una distancia al Sol mucho mayor que la de todos los cometas conocidos. Concluyó que su órbita era prácticamente circular, con un radio diecinueve veces mayor que el radio medio de la órbita terrestre. Por lo tanto, se trataba de un nuevo planeta más allá de Saturno, veinte veces la distancia al Sol de la Tierra.

Hasta 1850, en la Gran Bretaña el nuevo planeta se llamó Georgino en honor al rey de Inglaterra y a petición del propio Herschel, pero en el continente nunca se aplicó esta denominación. Lalande había propuesto que se le diera el nombre de su descubridor, pero no tuvo buena acogida. Prosperin sugirió el de Neptuno, porque así Saturno se encontraría entre sus dos hijos, Júpiter y Neptuno. Lichtemberg propuso el de Astrea, la diosa de la justicia, para que presidiera desde los confines de nuestro sistema. Poinsinet propuso Cibeles, madre de los dioses. Finalmente, fue Bode quien abogó por el nombre de Urano, el más antiguo de los dioses, y éste se consolidó. Influyó seguramente el hecho de que Bode hubiera hablado tanto de este planeta después de su descubrimiento, a propósito de que ya estaba previsto como término 8º de la sucesión de Titius (3) (**4**.**2**.).

Urano es una astro de sexta magnitud, visible a simple vista en condiciones favorables. Después de su descubrimiento, pudo comprobarse que muchos astrónomos ya lo tenían registrado, con su paso por el meridiano y la declinación; Flamsteet, cinco veces desde 1690; Bradley, dos desde 1750; Le Monnier nada menos que doce veces desde el mismo año, y también muchos otros. Esto permitió calcular los elementos de la órbita de Urano, con mucha más precisión de la que habría sido posible alcanzar sólo con los datos inmediatos a la fecha de su descubrimiento.

Como ya hemos referido más arriba, Bode impulsó también la búsqueda del planeta que Kepler echaba en falta, convencido de que se trataba del término 5º de la sucesión (3), entre Marte y Júpiter. Probablemente influido por él, Piazzi descubrió el pequeño planeta Ceres el 1 de enero de 1801 en Palermo. Después se constituyó una comisión internacional de buscadores y calculadores de órbitas de pequeños planetas. Olbert confirmó el descubrimiento de Piazzi y, a su vez, descubrió en 1802 otro pequeño planeta que denominó Pallas. Ambos giraban alrededor del Sol muy próximos a la plaza reservada del 2,8. Siguieron los descubrimientos de Juno (Harding, 1804), Vesta (Olbert, 1807), Astrea (Henske, 1847) y así hasta nuestro días, cuando ya se cuentan por millares. Su distancia media al Sol, tomando una muestra de 1500, es de 26,5, próxima al 28 de la serie de Titius. Finalmente, aunque sea hecho a añicos, se encontró el planeta que Kepler echaba de menos, lo cual debió contribuir a que Bode ya pudiera dormir tranquilo. Como veremos más adelante (**7. 2.**), hoy se considera más probable que los pequeños planetas resultaran de la interrupción del proceso de formación de un planeta mayor.

6.4. La hazaña de Neptuno[12]

En 1820, un astrónomo francés llamado Bouvard trató de elaborar unas tablas de los movimientos de Júpiter, Saturno y Urano. Quizás hoy las consideraríamos imprecisas, pero en su tiempo ya mostraron que los dos primeros planetas seguían satisfactoriamente la órbita teórica y que, en cambio, Urano presentaba discrepancias considerables, que hacían imposible asignarle una órbita que estuviera de acuerdo con las observaciones de entonces y con las más antiguas, como las de Flamsted y Le Monnier, que habían consignado este astro sin sospechar aun su carácter planetario.

[12] Diversos detalles de la historia del descubrimiento de Neptuno se encuentran en muchos libros. Sin embargo, en este apartado se relacionan los hechos recopilados por T. Arcimis consignados en el capítulo XI del Tomo I de “*El telescopio moderno*”, publicado en Barcelona en 1878 por Montaner y Simón Eds., que constituyen una referencia coetánea y de primera mano.

Bouvard desechó estas observaciones, considerando que posiblemente eran inexactas, y presentó sus tablas en 1821, basadas sólo en observaciones recientes. Al principio parecieron fiables pero, a partir de 1830, se empezaron a encontrar discrepancias que iban en aumento con el paso del tiempo, y que, al cabo de diez años, ya alcanzaban los 2'. Por supuesto que se trata de una diferencia importante, claramente perceptible en la imagen telescópica y perfectamente mensurable. A la vista de ello, el propio Bouvard, que murió en 1840, ya había llegado a suponer que estas perturbaciones podían atribuirse a un planeta exterior a Urano, al igual que otros muchos astrónomos notables de la época, como Valz, Somerville, Maedler y Bessel. Este último, que gozaba de gran prestigio, se propuso estudiar a fondo este problema, pero falleció antes sin poderlo llevar a cabo.

El problema de las discrepancias entre las efemérides de Urano, calculadas a partir de la órbita teórica y las posiciones observadas del planeta, fue abordado en 1841 por J. C. Adams, un alumno de la Universidad de Cambridge, quien seguiría trabajando en el tema hasta 1845, año en el cual presentó al profesor Airy los elementos calculados de la órbita de un planeta exterior hipotético que justificarían las perturbaciones de Urano. Al parecer, sus resultados habrían sido suficientes para encontrar dicho planeta telescópicamente, pero Airy, que además de profesor era el astrónomo real, se mostró algo incrédulo, y decidió aplazar la búsqueda telescópica, recomendando a Adams que rehiciera sus cálculos con toda atención y obtuviera más efemérides. De hecho, esto suponía esperar casi un año para tener las condiciones favorables para la exploración pertinente. No se sabe si Adams siguió el consejo de Airy y tampoco que éste recibiera de Adams algún otro documento al respecto.

Por otra parte, en el verano de 1845, el célebre astrónomo F. Arago, entonces director del Observatorio de París, que también era partidario de la existencia del planeta transuraniano, recomendó al joven U. Leverrier (1811-1877), que se había distinguido por algunos trabajos matemáticos notables, que investigara las perturbaciones del movimiento de Urano. Leverrier puso manos a la obra y empezó revisando las tablas de Bouvard para saber si las discrepancias procedían de algún error en los cálculos de las efemérides. Después procedió a computar las perturbaciones que las masas de Saturno y de Júpiter podían causar en el movimiento de Urano. Al revisar todos los cálculos, encontró pequeños errores en ambos casos, pero que no podían producir las discrepancias observadas. Calculó de nuevo la órbita de Urano, teniendo en cuenta las acciones combinadas de Júpiter y Saturno. Las mejores órbitas que pudo obtener mostraban todavía inflexiones respecto a las posiciones registradas en sentidos opuestos, que no podían ser debidas a errores de observación. Demostró también que las perturbaciones no podían proceder de ningún cuerpo situado entre Saturno y Urano, porque también tendrían efecto sobre el primero. Sin duda, debía buscarse la causa en un planeta exterior, y entonces estableció el supuesto de que éste se hallaría a una distancia del Sol igual a la prevista por el noveno término de la ley de Titius-Bode, casi el doble de la distancia de Urano al Sol. A partir de aquí calculó los elementos de la órbita que, en primera aproximación, supuso circular y la situó en el plano de la eclíptica. En junio de 1846, Leverrier presentó a la *Académie des Sciences* de París una memoria en la que daba todos los elementos de la órbita del planeta hipotético y sus efemérides para 1847.

Lo chocante del caso es que M. Airy recibió un ejemplar de la memoria referida el mismo mes de junio y que, comparando los datos de Leverrier con los del trabajo que le había dejado Adams, se dio cuenta de que concordaban en todo. Entonces corrió a ponerse en contacto con el profesor Challis del Observatorio de Cambridge, para que inmediatamente procediera a la búsqueda del ignoto planeta. Challis empezó su trabajo el 11 de julio, pero eligió un método muy laborioso. En lugar de fijarse en la magnitud de un disco planetario entre las estrellas de la región, trató de localizar el planeta por el desplazamiento de cualquier astro con respecto a los demás de la misma imagen telescópica. Por lo tanto, tuvo que hacer el catastro completo de toda la región donde podía hallarse el supuesto planeta, y observar minuciosamente el registro a lo largo del tiempo para hallar un astro con movimiento propio. Esto no podía hacerse como coser y cantar pero, cuando el 29 de septiembre se fijó en un cuerpo con disco aparente, pudo comprobar que se había desplazado de sus posiciones registradas el 4 y el 12 de agosto, sin que con anterioridad hubiera tenido tiempo de reducir todos los datos de su cuaderno de notas. De hecho, se trataba efectivamente del nuevo planeta.

Entretanto, Leverrier había escrito a Encke, director del Observatorio de Berlín, solicitando su cooperación para la búsqueda del supuesto planeta si el trabajo que había publicado en las memorias de la *Académie de Sciences*, que Encke conocía, le había parecido suficiente para determinarse. Los astrónomos de Berlín justamente acababan de recibir una nueva carta celeste del Dr. Breniker, que comprendía la parte del cielo en la que se asignaba la posición del supuesto planeta según los cálculos de Leverrier. Con ello se apresuraron a iniciar la búsqueda, de la cual se ocupó el Dr. Galle, ayudante de Encke. Al parecer, a Galle no le costó mucho percibir una estrella de octava magnitud que no se encontraba en el mapa. Esto ocurrió el 23 de septiembre, pero al día siguiente ya determinó su posición con el mayor cuidado, la magnitud de su pequeño disco y el movimiento que claramente correspondían al astro previsto por Leverrier. Cuando estos resultados llegaron al conocimiento del Dr. Challis, éste pudo darse cuenta de que se trataba del mismo cuerpo que él había registrado, como mostraban las notas de sus cuadernos en las fechas que antes hemos señalado, esto es, casi un mes antes que Galle.

La prioridad efectiva de Leverrier nunca ha sido puesta en duda , pero también es cierto que el trabajo inédito de Adams le llevaba un año de ventaja, aparentemente olvidado en algún cajón hasta la publicación del trabajo de Leverrier. Se sabe que Adams, no sólo había entregado su trabajo a Airy, sino también a otros astrónomos británicos que, al parecer, no se preocuparon más de él hasta que la fama de Leverrier ya había recorrido el mundo entero. Por supuesto que este último no sabía nada de todo esto, lo que no es óbice para quitar ningún mérito a Adams. Lo que es curioso son las muchas referencias de que Galle conoció a tiempo el trabajo de Adams, y además que más o menos tarde revisaron conjuntamente los cálculos de Leverrier y los del propio Adams. Honora a ambos el hecho de que ni uno ni otro levantaran arena alguna. Más tarde, ellos mismos reconocieron que el trabajo de Leverrier era más exacto. Las posiciones heliocéntricas eran: 326º 52’, la determinada directamente por Galle; 326º, la prevista por el cálculo de Leverrier y 329º la igualmente prevista por Adams. El descubrimiento de Neptuno se ha considerado uno de los más grandes triunfos de la ciencia del siglo XIX, y hay que destacar la honorable y severa actitud de todos los que intervinieron. Un resultado singular fue que incluso el mismo Adams recibiera rápidamente el mayor respeto y admiración de todos. Recuérdese lo que he referido con anterioridad (**2**): que J. Reguero, al citar a los astrónomos más importantes a partir del siglo XVI, incluye a Galle y a Adams, pero no a Bode.

A juicio del autor, está claro que fue Herschel el verdadero y único descubridor de Urano. En realidad, su método es el mismo que seguiría Challis en la búsqueda de Neptuno. En cambio, Galle no lo hizo así porque conocía las previsiones de Adams y de Leverrier. La rapidez con que localizó el nuevo planeta fue consecuencia de la coincidencia de los dos cálculos y constituiría una confirmación extraordinaria de la mecánica newtoniana: partir de las perturbaciones de la órbita de Urano, obtenidas independientemente por diferentes autores y a lo largo de más de dos años. Calcular las efemérides correspondientes para un tiempo posterior a cargo de terceros, darlo por supuesto y encontrar el nuevo planeta en 24 horas. Además, el trabajo de Challis constituyó un apoyo independiente siguiendo el método de Herschel.

Ya hemos señalado varias veces que en los cálculos de Leverrier se utilizó como distancia de Neptuno al Sol la que corresponde al noveno término de la sucesión de Titius-Bode, siendo el valor real bastante más pequeño; 30,97 veces el de la Tierra en lugar de 38,8 veces. Ninguno de los demás planetas presenta una diferencia comparable. ¿Es que Neptuno representa el fin de la ley de Bode? Pues probablemente sí, porque cuando llegamos a Plutón la discrepancia es aun mucho mayor. Como ya sabemos, en este caso la distancia real es de 39,84 veces la de la Tierra en lugar de 77,2 de la sucesión (3) de Titius. También hemos señalado que la ley de Bode, propiamente, sería una regla que sólo puede aplicarse desde Venus a Urano.

Tal como ocurrió después del descubrimiento de Urano, el de Neptuno también dio origen a una serie de investigaciones encaminadas a averiguar si el planeta ya había sido visto con anterioridad. Este asunto fue trabajado por varios astrónomos norteamericanos de la época, destacando especialmente Walker, que pudo argumentar de forma convincente el supuesto de que Lalande ya había observado el planeta en 1795. Los astrónomos del Observatorio de París tenían un archivo suficientemente bueno para poderlo confirmar, y efectivamente encontraron cuadernos del propio Lalande que mostraban que en las noches del 8 y del 10 de mayo de aquel año, Lalande había registrado la posición de una estrella donde Walker había calculado que debía estar Neptuno. Dado que había anotado un movimiento propio a lo largo de dos días de observación, Lalande puso un interrogante para indicar que tenía que revisar su posición, sin darse cuenta de que era un nuevo planeta que tardaría un siglo en descubrirse. Walker basaba su tesis en que la posición de esta estrella no se revisó porque un tiempo después ya no estaba, se había perdido. Es quizás el caso más probable de una observación antigua de Neptuno, y otras suposiciones basadas en diferentes registros de observaciones astronómicas no parecen suficientemente justificadas. Por supuesto, ella sola añade algo importante con relación a lo que buscaban tanto Leverrier como Adams y como Galle.

6. 5. Desviación del perihelio de Mercurio: Vulcano o las ecuaciones de Einstein

En sentido estricto, Mercurio tampoco seguiría la ley de Bode, aunque se incluyera como primer término de la sucesión (3). Es fácil introducirlo antes de sumar 4 a todos los miembros de la serie $3x2^{n-2}$, colocándolo primero en el cero, como ordenada en el origen, y luego en la 4, pero esto supone simplemente recuperar la distancia kepleriana De hecho, su distancia al Sol no tiene relación con la regla del triple de las sucesivas potencias de 2, desde Venus hasta Urano (**4. 2.** y **4. 3.**). Además, la órbita de Mercurio difiere de la de los demás planetas en la inclinación sobre la eclíptica de 7º frente a los 0,46′, 1º 19′, 1º 51′, 1º 47′ y 2º 29′ de los restantes. Sólo es superada por Plutón con 17º 9′, que tampoco sigue la ley de Bode. La excentricidad de 0,205 de la órbita de Mercurio es también muy grande y sólo comparable a la de Plutón de 0,254. En los demás tenemos ordenadamente 0,007, 0,017, 0,091, 0,048, 0,056, 0,047 y 0,009. El período de rotación de Mercurio es aproximadamente 2/3 del de revolución alrededor del Sol (P) y siempre tiene el mismo hemisferio de cara al Sol

¡Mercurio es un planeta travieso! No en vano los griegos lo llamaron también Apolo, el dios del día, cuando se encuentra al oeste de Sol y anuncia la aurora, y Mercurio, el dios de los ladrones, cuando es visible por la tarde, después de la puesta del Sol, pues la noche protege a los desalmados de sus fechorías

En 1859, Leverrier pudo mostrar que las efemérides del paso del planeta por delante del disco solar no correspondían a las observadas, aun teniendo en cuenta la influencia de los demás planetas. Encontró también que, entre otras hipótesis posibles, la anomalía del perihelio de Mercurio podía ser debida a la existencia de otro planeta de masa igual situado más cerca del Sol. El desarrollo matemático de este supuesto fue presentado por Leverrier a la *Académie des Sciences* de París en el año referido. Dado el prestigio de Leverrier, este trabajo llamó la atención de muchos astrónomos y tuvo consecuencias importantes.

En el mismo año 1859, pocos meses después de presentada la memoria de Leverrier, se leyó en la misma institución una comunicación de un médico de Orgières llamado Lescarbault, anunciando que el 26 de marzo había visto pasar por delante del disco solar un cuerpo muy negro semejante a Mercurio, igual al que había observado con anterioridad el 8 de marzo de 1845. El trabajo de Leverrier y esta comunicación fueron el inicio de una historia de triste final, relativa a otro nuevo planeta al que se llamó Vulcano. Su existencia está desestimada desde hace muchos años. Para Leverrier el problema estaba en que, sin otro planeta, la mecánica newtoniana no era capaz de explicar el movimiento del perihelio de Mercurio.

Leverrier, que entonces era director del Observatorio de París, visitó de golpe y por sorpresa al médico de Orgières para poder darse cuenta de lo que realmente había hecho. Sin ni siquiera presentarse, pidió con dureza a Lescarbault todos los datos que tenía, y también que le explicara con detalle cómo los había obtenido y le mostrara el instrumental utilizado. Lescarbault condescendió a todo con la mejor voluntad y, a pesar de lo rudimentario de sus medios materiales y del nivel relativamente limitado de sus conocimientos, Leverrier terminó felicitándole porque debía reconocer que su trabajo era honesto y suficientemente correcto para aceptar que sus conclusiones eran perfectamente plausibles. Tanto fue así que, tomando los datos del médico de Orgières, Leverrier determinó todos los elementos de la órbita del posible planeta intra-mercurial. El período de revolución sería de 29 días y 17 horas, una inclinación respecto a la eclíptica de 12º 10′ y un semieje mayor 0,143 con relación al de la Tierra.

En 1862, Lummis, de Manchester, observaría otro paso de un pequeño círculo negro por delante del Sol, del cual también se calculó su posible órbita, que resultó muy parecida a la calculada por Leverrier con los datos de Lescarbault. En los años siguientes se sucedieron otras observaciones semejantes, hasta el punto que Leverrier decidió recogerlas todas para estudiarlas detenidamente. Sacando las que consideró erróneas, se quedó con cinco pasos que le parecieron correctos, y que podían explicarse con un solo planeta. De ser así, habría un nuevo paso del mismo por delante del disco del Sol el 22 de marzo de 1877. El trabajo de Leverrier se divulgó y, como consecuencia, se estableció un acuerdo entre distintos observatorios de todo el planeta para poder verificar este paso sin que se pudiera escapar, dada su brevedad y la inevitable imprecisión del tiempo previsto para la entrada y salida del disco solar desde cada estación. Es curioso que en esta campaña volvemos a encontrar al profesor Airy como organizador de todos los observatorios británicos. Naturalmente, en todas las estaciones se hicieron observaciones meticulosas, no tan sólo en la fecha esperada, sino también unos días antes y unos días después. Llegó el tiempo y el esperado planeta Vulcano faltó a la cita. De acuerdo con todas las previsiones, se repitió una operación semejante en 1882, también con el mismo resultado. Es de suponer que esto disgustaría a Airy y, en esta ocasión, más todavía al propio Leverrier después de la hazaña de Neptuno. ¿No se dice que nunca segundas partes fueron buenas?

La desviación del perihelio de Mercurio sería debida al giro de su órbita alrededor del centro de atracción y sobre el propio plano La rotación del perihelio se efectúa en todos los planetas. Pero sólo es detectable en Mercurio por ser más rápido y el de mayor proximidad al Sol. Al parecer, esta desviación ya fue observada por primera vez a fines del siglo XVI y estudiada de nuevo por Lalande en 1753. Leverrier siempre creyó que su explicación debería hallarse en la influencia de un planeta intramercurial desconocido. No obstante, después de los estudios de Newcomb (1833), esta explicación no parecía posible. Llegó con la teoría de la Relatividad general en 1916. La explicación de Einstein era una corrección del movimiento del perihelio aplicable a todos los planetas aunque sólo detectable en Mercurio. Resultó una aproximación convincente, pero se dio el caso de que Karl Schwarzchild, joven director del Observatorio de Postdam, enviara a Einstein en 1916 una formulación a partir de la relatividad general en la que la corrección era exacta. Einstein le contestó entusiasmado diciéndole que jamás había esperado poder hacer una corrección tan sencilla y exacta del perihelio de Mercurio. Schwarzchild era un joven que se había presentado voluntario en la primera guerra mundial, como era normal siendo funcionario en edad militar, y que fue destinado por los alemanes al frente ruso, Desde allí siguió escribiéndose con Einstein para discutir otros aspectos, con alguno de los cuales Einstein no estaba totalmente de acuerdo. Después de la muerte de Einstein (1955) se dio unánimemente la razón a Schwarzchild, pero éste hacía años que había muerto de gangrena de una grave herida de guerra, antes de que terminara el conflicto internacional (1914-1918).

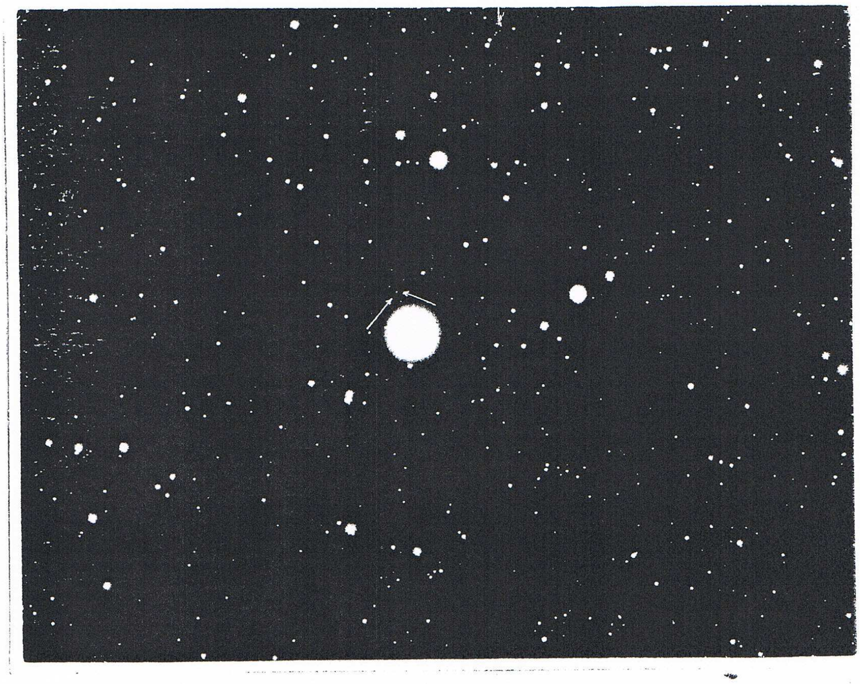
La ciencia no trata propiamente de la realidad del mundo físico que sólo es un postulado necesario, sino de la lógica de lo que pensamos de la misma. Nadie ha demostrado que exista una realidad única independiente de nuestra percepción. La formalización de la ciencia se basa en epistemas, tipos de orden causal inteligibles y expresados de forma precisa. No pueden estar en contradicción con los hechos ni entre si, y su conexión con los hechos es imprescindible y deberá ser expresa, bien definida y precisa. Tendremos siempre incertidumbres, el posible contraejemplo y las nuevas preguntas que puedan derivarse. El avance depende de una mejor percepción de los hechos, de un aumento de la capacidad de manejar los datos obtenidos y de la "fe científica" para buscar las razones de la desviación de una regla antes de rechazarla en bloque. Sin duda, la historia que acabamos de exponer sobre las distancias planetarias nos invita a reflexionar sobre ello, incluyendo la propia historia de la ley de Bode.

6.6. Adopción casual de Plutón. Nube de Oort, órbitas atípicas del cinturón de Kuiper y el planeta que falta

Vulcano es una oveja perdida sin remedio, pero la historia de nuevos planetas del sistema solar no termina aquí, dejando aparte los asteroides o pequeños planetas. Ya en el siglo XX, diversas discusiones de carácter matemático hicieron suponer a Percival Lowell que el movimiento de Urano presentaba perturbaciones inexplicables por la sola acción de Neptuno. De ahí que volviera a plantearse la existencia de otro planeta más allá de Neptuno, otra oveja perdida además de Vulcano. Lowell falleció en 1916, pero sus cálculos se complementaron con los de sus sucesores en su Observatorio de Flagstaff en Arizona. Al mismo tiempo se procedió a un largo y meticuloso examen fotográfico de la región zodiacal hacia los Gemelos, que era la zona asignada por el cálculo. Finalmente, en marzo de 1930, C. W. Tombaugh, un antiguo colaborador de Lowell, pudo encontrar un astro minúsculo de 15ª magnitud, cuya posición y movimiento correspondían aproximadamente a los cálculos de Lowell y de sus continuadores. Este nuevo planeta recibió el nombre de Plutón, dios de los infiernos. En este caso, la oveja perdida pudo volver al redil (ver foto fig. 8, obtenida el 24 de abril de 1930).

El cálculo definitivo de los elementos de la órbita de Plutón fue posible gracias a haberse encontrado su imagen en una serie de fotografías de hasta 10 años antes de su descubrimiento. Las posiciones antiguas fueron combinadas con otras nuevas de muchos observatorios de todo el mundo. En realidad, resultaron posibles varias órbitas, las cuales diferían muy poco. La que se consideró mejor presenta una inclinación sobre la eclíptica de 17º 9′, una excentricidad de 0,254 y un semieje mayor de 39,00 veces la distancia de la Tierra al Sol. Esta órbita es totalmente distinta de la de los demás planetas del sistema solar, si bien, como ya hemos señalado, recuerda a la de Mercurio en varios aspectos, excepto la distancia al Sol, que para uno es la máxima y para otro la mínima. El diámetro aparente de Plutón es de 0,2″, lo que equivale a un diámetro real de 5000 Km, bastante inferior al de la Tierra. Es cierto que, para suponer que este astro diera lugar a las perturbaciones de la órbita de Urano estudiadas por Lowell, su densidad debería ser superior a la del platino. Como sea, lo más razonable es calificar a Plutón como el primer asteroide descubierto más allá de la órbita de Neptuno, quizás captado por éste y procedente de los espacios siderales.

Es un pequeño hermano adoptivo de los demás miembros del sistema solar, que forma parte de la historia de los planetas telescópicos, bien distinta de la del descubrimiento de Neptuno, aunque puede considerarse el resultado de una misma filosofía. Probablemente, en el tiempo de Leverrier no se hubiera llegado a localizar y nos encontraríamos en un caso parecido al de Vulcano. Al lado del descubrimiento de Neptuno, el de Plutón es un poco tristón y el de Vulcano un fiasco.



PLUTÓN

Ampliación de una fotografía de los alrededores de *Cástor*, la estrella más brillante de los Gemelos. El planeta Plutón aparece como una diminuta estrella de quinceava magnitud, cuya situación está indicada por las flechas.

Fotografía obtenida en el Observatorio Fabra el 24 de abril de 1930, entre las 19 h. 50 m. y las 21 h. 50 m. del día solar verdadero.

(entre págs. 25 y 26)

56

(fotografía cedida por el Dr. J. M. Codina, director del Observatorio Fabra)
Fig. 11

Podemos preguntarnos si más allá de Plutón hay todavía otros planetas del sistema solar. Los estudios de J. H. Oort sobre la Vía Láctea, de hace ya más de medio siglo, llevaron a pensar que probablemente el sistema solar se encontraría dentro de una nube de pequeños planetas semejantes a Plutón. De hecho, se han descubierto varios: el Eris a 97 UA de distancia al Sol y recientemente el V774104 a 103 UA, con un diámetro de 500 a 1000 km. Sus órbitas son muy poco conocidas y se supone que todo el sistema solar histórico estaría dentro de una nube de estos cuerpos de hasta unas 1000 UA de diámetro. Para Kuiper, más que una nube sería un cinturón de dicho diámetro. Las órbitas de estos asteroides lejanos son totalmente atípicas, quizás debido a la influencia de *un planeta gigante desconocido* o a otra causa de perturbación gravitatoria. En realidad sabemos todavía muy poco de todos estos planetas lejanos, pero lo suficiente para darnos mayor cuenta de lo lejos que nos queda la célebre ley de Titius-Bode.

6. 7. Visión cosmológica del sistema solar

Además de los planetas y de los asteroides, hay también los cometas que constituyen otro tipo de astros móviles conocidos desde la antigüedad. En el *Tratado de Astronomía* de Cerdá podemos encontrar la teoría newtoniana de los cometas, tomada de la obra de B. Martín (**4**). Allí se dice que en su *Cometographia*, Halley incluye el cálculo de la órbita de veinticuatro cometas, con los tiempos de retorno y paso por el perihelio. Incluye la órbita del célebre cometa que lleva su nombre. Se trata de órbitas elípticas de cometas periódicos y también de órbitas parabólicas.

Dentro de los astros fijos tenemos en primer lugar las estrellas, de las cuales pueden distinguirse a simple vista en todo el cielo unas 5.000. Sin embargo, con el telescopio este número pasa a centenares de millones. Además, hay cúmulos estelares formados por grupos de estrellas más o menos diseminadas, como las Pléyades, o bien apiñadas, como el cúmulo de Hércules. Hay nebulosas amorfas como la de Orión, con unas áreas luminosas y otras oscuras. Hay también las Nubes de Magallanes en el hemisferio austral y una nebulosa espiral como la de Andrómeda que, en buenas condiciones, puede percibirse a simple vista. Otras son telescópicas.

Por su conocimiento generalizado desde la más remota antigüedad, tenemos, claro está, la Vía Láctea, que cruza todo el cielo como una ancha y tenue banda nebulosa, que se bifurca hacia la región de Sagitario para luego volverse a unir en un solo brazo. Como sabemos, no fue hasta el siglo XVIII cuando Herschel pudo reconocer que se trataba de un acúmulo de multitud de estrellas, tan denso y tan lejano, que nuestro ojo no podía separar unas de otras. Mirar en la dirección de la Vía Láctea es como hacerlo a través de una selva profunda, donde el ramaje de los árboles se superpone y forma un fondo continuo. Fuera de esta dirección, vemos el espacio oscuro vacío.

El estudio detallado de la Vía Láctea, después de varias generaciones de astrónomos, ha llevado a la conclusión de que se trata de un enjambre gigantesco de aproximadamente 4×10^{10} estrellas individuales. El conjunto de las mismas forma una inmensa lenteja, con un diámetro mayor de 10^5 años-luz y un espesor máximo en el centro de 5×10^3 a 10^4 años-luz. El sistema solar se halla en un punto cerca del borde de esta fabulosa lenteja, perdido entre millones y millones de estrellas. La bifurcación obedece a que, mirando hacia el centro de la lenteja desde el borde de la misma, se encuentra una inmensa nube oscura de polvo interestelar, mientras que la oscuridad fuera de la Vía Láctea se debe al propio fondo vacío del espacio estelar. Algunas estrellas que se ven sobre la parte central oscura, en realidad es que están entre nosotros y la zona opaca.

El conjunto de la Vía Láctea forma lo que hoy día llamamos una *Galaxia*. Gracias al importante trabajo de J. H. Oort (1900-1992), hoy sabemos que todas las estrellas que contiene, incluyendo nuestro Sol, giran alrededor del centro de la misma siguiendo órbitas circulares. No hay ninguna gran masa central giratoria, como sucede en los sistemas planetarios, pero las estrellas periféricas giran más lentamente que las más cercanas al centro de rotación. De este modo, Oort llegó a la conclusión de que desde el Sol, o desde la Tierra, las estrellas más exteriores tienen un movimiento aparente parecido al de los planetas exteriores de nuestro sistema vistos desde la Tierra. Así, van hacia atrás durante un tiempo para más tarde volver hacia adelante. De acuerdo con ello, pudo mostrar un corrimiento de las rayas espectrales hacia el rojo en el primer caso y hacia el violeta en el segundo, siguiendo el efecto Doppler-Fizeau. Con ello también pudo llegar a calcular la velocidad de giro del Sol, cuya vuelta completa se realizaría en unos doscientos millones de años. Como el universo no parece tener más que unos 3×10^9 años de edad, nuestro sistema solar habría dado sólo unas veinte rotaciones completas, esto es, tendría alrededor de veinte años solares.

Ciertamente, nada puede permitirnos percibir mejor nuestra inmensa pequeñez y la brevedad, no digamos de nuestra vida sino de la de toda la humanidad desde su origen. Es inevitable darse cuenta de ello cuando se reflexiona un poco sobre las cifras que acabamos de referir; las correspondientes al número de soles que hay en nuestra *Galaxia*, las del tamaño de la misma, las de los veinte años solares desde el origen del universo, etc. Sin duda es la mayor bofetada que ha recibido el orgullo humano, muchísimo mayor que la que pudo representar que Copérnico nos sacara del centro del mundo. No es necesario ir más allá imaginando millones de *Galaxias* como la nuestra. No hace falta. Podemos limitarnos a lo que de algún modo está al alcance de nuestra percepción directa del mundo que nos rodea, de lo que podemos estar viendo con nuestros propios ojos y de lo que el hombre ha visto a lo largo de toda su mísera historia. Quizás nos ayude a prescindir de una vez del viejo y pertinaz antropocentrismo que nos acecha de continuo para hacernos sentir dueños de toda la creación. Sólo estamos en el centro en la Redención, cuya grandeza se vislumbra justamente al constatar nuestra insignificancia frente a la inmensidad de lo inalcanzable. No obstante, el flujo de racionalidad desde la invención de la escritura, hace unos cinco mil años, y el fabuloso *crescendo* del mismo en los últimos siglos, con sus intermitencias, sus rectificaciones, sus dudas y sus éxitos y fracasos, es ciertamente un hecho singular y realmente admirable que nos enaltece sin exigirnos nada a cambio.

Como hemos visto, la ley de Bode ha sido útil de alguna forma para localizar planetas telescópicos que, una vez descubiertos, no siguen las órbitas previstas para confirmar dicha ley.. La generalización de la misma, vista como consecuencia de la formación de planetas y satélites, nos muestra lugares vacíos como posibles ensayos frustrados. Si fuera así, su misma existencia, y por lo tanto la de la Tierra, sería fortuita. Esto presupondría que toda la historia de la vida sobre nuestro planeta hubiera sido el resultado de un juego de azar en el que salimos ganadores. Ya sabemos que con tantos millones de estrellas habrá otras Tierras paralelas, pero cada una de ellas sería otro número premiado de lotería. En este supuesto, aquello que la astronomía newtoniana lleva implícito de que Dios puede estar ahí solamente contemplando su obra y sin necesidad de intervenir para nada, habría pasado a ser una suposición demasiado arriesgada.

¿La suerte está echada? No lo sabemos, pero esto sería sólo en la eternidad, fuera del tiempo. En su curso podemos tener simplemente una probabilidad, incluyendo las infinitamente pequeñas, como la de que una esfera quede, al pararse de nuevo, exactamente en la misma posición en que estaba antes de hacerla correr.

.

Kepler (1571 - 1630) 1.00 ,1.02

Titius (1729 - 1796) 1.03

Bode (1747 -1826) 1.03;1.04

Herschel (1738 - 1822) 1.03;1.06

Le Verrier (1811-1877) 1.08;1.09

7. La *Ley de Bode* en cosmogonía y en los planetas extrasolares

7.1. Las viejas hipótesis

En su *Exposition du système du monde*, publicada en 1796, P. S. Laplace (1749-1827) adopta la teoría del origen del sistema solar expuesta por el filósofo Immanuel Kant (1724 -1804), unas dos décadas antes. Constituye el ejemplo clásico de las teorías monistas: el Sol formó los planetas por si mismo, sin la intervención de ningún otro elemento.

Un poco más antigua que la hipótesis de Kant-Laplace es la de J-Ll. L. Buffon (1707-1788), publicada en 1749 en su célebre *Histoire naturelle*. Es el prototipo de las teorías dualistas: para formar los planetas el Sol necesitó un colaborador, que en este caso sería un enorme cometa que chocaría con él.

Ya hemos dicho (**4**.**5**.) que, igual que J. Titius, M. Kant fue discípulo de Ch. von Wolf, quien era uno de estos profesores que a menudo son padres de las ideas de sus discípulos. En 1755 Kant publicó su *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels*, fuente de la teoría de Laplace. Insistió igualmente sobre la existencia de un planeta entre Marte y Júpiter, quizás más que sobre la falta del planeta y mucho antes que Bode, tanto como mucho después de Kepler. También señala que habrán otros planetas después de Saturno, con órbitas de excentricidad creciente hasta llegar a los cometas. Probablemente conocía también la fórmula de la futura ley de Bode, pero no he encontrado ninguna referencia.

Kant es el primero en proponer una nebulosa como origen del sistema solar y los partidarios de esta hipótesis continúan en la actualidad, aunque sus teorías sean mucho más complicadas. Es importante darse cuenta de que él representa el comienzo de la transición entre actualismo y evolucionismo o una creación que continua, lo cual ni Kepler ni el propio Newton hubieran aceptado.

Newton no emitió ninguna hipótesis sobre el origen del sistema solar: *Hipoteses non fingo*, escribe hacia el final de su célebre *Philosophiae Naturalis Principia Matemática* (1687). Opuesto a todas las hipótesis que por adelantado dejan asentada la razón de todo lo que pueda pasar o haber pasado.

La hipótesis más antigua sobre el origen del sistema solar es la de Descartes (1596-1650), que consideraba al universo infinito y sin espacios vacíos. La materia sería uniforme, hecha de un mismo material básico, pero dividida en innumerables corpúsculos primordiales en movimiento continuo. De este modo se formarían corrientes y remolinos en los que las partículas de distinto tamaño se moverían a velocidad y dirección distintas. Al chocar se desmenuzarían, pero también tenderían a juntarse por una fuerza centrípeta originada por el giro del vórtice. Sugirió que esto originaría cuerpos globosos que girarían sobre ellos mismos y darían lugar a una fuerza centrífuga. La primera fuerza formaría el cuerpo de los astros y la segunda una atmósfera exterior giratoria. A esta última acción de los vórtices habría que achacar la formación de las órbitas de los planetas. Establecido esto, intenta reducir todos los fenómenos naturales a una serie de leyes, entre las cuales nosotros sólo salvaríamos la que constituye el principio de inercia y la del movimiento rectilíneo uniforme.

Newton también conocía los *Principia philosophiae* de Descartes, publicados en 1644, en los que, con ciertas cautelas, expone la teoría de los vórtices, pero no parece haberle interesado demasiado. Newton también señaló que el giro de los vórtices es contradictorio con la tercera ley de Kepler, y que esta teoría no explica ningún fenómeno del sistema solar sin que tengan que añadirse en cada caso nuevas hipótesis complementarias. Poco más tarde, los vórtices fueron descalificados por muchos matemáticos que, como D'Alembert (1717-1783), los consideraban una suposición ridícula. A pesar de esto, la teoría de Descartes tuvo muchos partidarios en Francia, debido al prestigio indiscutible de su autor como matemático y filósofo. Muchos historiadores coinciden en señalar que retrasó casi cincuenta años la entrada de la astronomía newtoniana en toda Europa. Descartes manifestaba una tendencia excesiva a dar prelación al método deductivo frente al experimental. La ciencia actual exige a las nuevas teorías un grado de coherencia extraordinario en su propio planteamiento y con relación a las leyes establecidas en su área y, además, no admite ninguna teoría que no pueda establecer una conexión precisa con una percepción probada del mundo físico. Por supuesto que la teoría de los vórtices no cumplía ninguno de estos dos requisitos, si bien aun en la actualidad son difíciles de cumplir en cosmogonía. Sin embargo, todavía a principios del siglo XX podemos encontrar recalcitrantes como E. Belot, autor del *Essai de Cosmogonie Tourbillonnaire*, publicado en 1911[13]. En este ensayo, el autor afirma poner fin al duelo secular entre las dos doctrinas, la cartesiana y la newtoniana después del siglo XVII, y concluye: *Tout système sidéral a dans son existence deux périodes succédant insensiblement l'une à l'autre, la période tourbillonnaire ou cartésienne, et la période newtonienne régie par la gravitation universelle*.

Encontré casualmente el libro de Belot y me interesó en particular porque en él se trata extensamente de la ley de Bode como consecuencia del origen *tourbillonnaire* de los planetas del sistema solar. El análisis algebraico que hace de la misma no presupone necesariamente una relación con la teoría de los torbellinos y fue objeto de una comunicación presentada aparte por Henri Poincaré (1854-1912) a l'*Académie des Sciences* el 4 de diciembre de 1905. Belot concluye que la ley de Bode no es un caso particular sino una ley general de carácter natural, $D–A = B.C^n$, aplicable tanto a planetas como a satélites. Aparte de su interés para la teoría de los torbellinos, sobre la cual también había trabajado el propio Poincaré, su aplicación a la astronomía se halla muy lejos de la mecánica celeste de Laplace y se apoya excesivamente en conceptos que hoy consideraríamos anacrónicos.

Ya hemos señalado (**7.1.**) que hacia la mitad del siglo XVIII, Buffon anunció su hipótesis del choque de un cometa gigante con el Sol, como causa del origen de la Tierra y los demás planetas. También hemos dicho que pocos años después apareció la hipótesis de Kant-Laplace en la cual se establece que el Sol formaría por si mismo el sistema planetario. Según esta hipótesis, al principio habría una masa gaseosa gigante con un movimiento de rotación que ocuparía todo el espacio actual del sistema planetario. Por su propia contracción daría lugar a un movimiento rotatorio cada vez más rápido que produciría un aplastamiento de toda la nebulosa primitiva y luego daría lugar a la formación de una serie de anillos gaseosos. Se ponía como símil el experimento de Plateau, en el cual una cierta masa de aceite se hace girar en el seno de agua u otro líquido cada vez más rápidamente. Cuando la velocidad de rotación es

[13] E. Belot. *Essai de Cosmogonie Tourbillonnaire*. Gauthier-Villars, París, 1911.

suficientemente alta, se forman anillos alrededor del cuerpo central. Se suponía que en la nebulosa que se va acelerando por su contracción se forman anillos a su alrededor que más tarde se rompen para formar los planetas.

Hay que tener en cuenta que el descubrimiento de distintos tipos de nebulosas por G. Herschel avalaba la idea de una nebulosa primitiva frente a la hipótesis del choque de un cometa. Además jugaba en su favor el gran prestigio de Laplace, quien supo dar una sugestiva presentación de la hipótesis de la nebulosa primigenia en su *Exposition du sistème du Monde* (1796), aunque no diera ningún tratamiento matemático a su formulación, limitándose a una exposición cualitativa, pormenorizada de conformidad con todos los conocimientos astronómicos de la época. La hipótesis sería válida para la formación de los satélites, mientras que la de Buffon no podía serlo.

Unos sesenta años después de la obra citada de Laplace, el gran físico inglés Clerk Maxwell trató de dar una formulación matemática a la teoría de Kant-Laplace, pero tropezó con dos serias dificultades. Una de ellas era la escasa materia que representaban todos los planetas juntos, la cual, distribuida uniformemente en el espacio ocupado por ellos, quedaría tremendamente enrarecida, sin que la fuerza de la gravitación fuera capaz de reunirla formando planetas separados. Los anillos que pudieran formarse continuarían siendo anillos como los de Saturno, del que se sabe que están compuestos por innumerables partículas pequeñas que no presentan ninguna tendencia a formar un satélite. La segunda dificultad estaba en que no podía acudirse al supuesto de que una mayor parte de la materia sideral de la que se sustraería la de los planetas fuera a parar al Sol, porque esto hubiera aumentado unas cinco mil veces su velocidad de rotación para conservar el momento angular. El Sol tendría que dar siete vueltas sobre si mismo en una hora en lugar de una en cuatro semanas. Por ello la mayoría de los astrónomos pasó a considerar que la teoría de Laplace no era adecuada

A principios del siglo XX, dos astrónomos norteamericanos, T. C. Chamberlin y F. R. Multon, volvieron a la vieja hipótesis de Buffon, convencidos de que era más verosímil que la de Laplace. Poco más tarde se unió a ellos Sir James Jeans, un famoso hombre de ciencia inglés de la época. Su punto de vista se generalizó hasta imponerse durante toda la primera mitad del siglo XX, como algunos todavía podemos recordar de nuestra época de estudiantes. Naturalmente, la hipótesis de Buffon fue modificada en muchos aspectos: no se trataría del choque de un cometa con el Sol sino con otra estrella, y quizás aun sin necesidad de un choque propiamente dicho. Podría tratarse de un cruce con suficiente aproximación para levantar sendas macromareas que llegarían a desprenderse y fragmentarse para dar lugar a un sistema planetario para cada estrella. En el universo actual esto sería un fenómeno muy raro por la gran distancia que guardan entre si las estrellas, pero no en un pasado remoto en el contexto de un universo en rápida expansión en el que las estrellas se van alejando unas de otras. También se discutió la posibilidad de que el Sol fuera una estrella doble y que diera lugar a un fenómeno parecido con su acompañante

La hipótesis macromareógena podía relacionarse con la ley de Bode, dado que el término 2^{n-2} es el de una división binaria que, en tres generaciones ($n = 5$), daría los ocho primeros términos de la sucesión de Titius ($2^3 = 8$), que podrían haber quedado a distancias consecutivas al Sol proporcionales. Sin embargo, era muy difícil comprender la formación de órbitas reales casi circulares en lugar de elípticas y muy alargadas. Por ello se pensó en el efecto de una envoltura gaseosa girando alrededor de la masa estelar, la cual sería causante de la disminución de excentricidad. Esta envoltura se iría disipando más tarde en el espacio sideral, dejando como resto sólo la débil nebulosa que origina la luz zodiacal que se extiende desde el Sol en el plano de la eclíptica. En cierto modo, se había hecho una teoría mixta entre la hipótesis de Buffon y la de Laplace. Así estaba el panorama cuando en 1943 C. Weizsäcker[14], reuniendo los datos obtenidos en las investigaciones astrofísicas de las dos décadas anteriores, resucitó en cierto modo la vieja hipótesis de Kant-Laplace. El Sol daría lugar a la formación de los planetas sin la intervención de ningún otro astro.

7. 2. La teoría de Weizsäcker

La razón principal del trabajo de Weizsäcker fue el conocimiento de la composición química del Sol y de los planetas, que son totalmente distintas, en contra del supuesto general anterior de que eran iguales. Los planetas no pueden ser fragmentos de la masa solar. Como veremos, este supuesto duró poco.

El material de la Tierra está constituido principalmente por óxidos de silicio, hierro y otros metales, al igual que el de los demás planetas. En ellos los gases más ligeros, el hidrógeno y el helio, son muy escasos. En la Tierra, la mayor parte del hidrógeno se halla en forma de agua, muy abundante en la superficie, pero en una proporción muy pequeña con respecto a la masa total del planeta. En cambio, después de los trabajos de B. Strongren y especialmente, algo más tarde, con los de M. Schwartzschild, quedaría claro que los elementos comunes que forman el cuerpo de la Tierra constituyen solamente un 1 % de la masa solar y que el resto es hidrógeno y helio en partes casi iguales, como sucede con la mayoría de las otras estrellas.

Por otra parte, también se había llegado al conocimiento de que el espacio interestelar no está completamente vacío, sino lleno de una mezcla sumamente enrarecida de gas y un polvo finísimo. A pesar de su baja densidad produce una absorción selectiva perceptible de la luz que nos llega de las estrellas y nebulosas, debido al recorrido inmenso de miles y miles de años luz antes de que llegue a nuestros telescopios. Aparentemente, este material interestelar tiene la misma composición que el Sol: hidrógeno y helio a partes iguales, y un 1 % de polvo constituido por partículas pequeñísimas (0,001 mm de diámetro), de material de ”tipo terrestre”.

[14] Carl Friedrich von Weizsäcker (1912-2007), hermano del que fue presidente de la República federal de Alemania (1984-1994), fue discípulo de Heisenberg y de Bohr. Fue profesor en varias universidades alemanas y destacan sus trabajos sobre generación de energía nuclear en el interior de las estrellas (Bethe-Weizsäcker-Zyklus, 1937-1938). En 1946 presentó la teoría del origen del sistema planetario, después de unos trabajos previos de 1943. Se expuso en el curso 1959–1960, dado en la Universidad de Glasgow, del que han aparecido posteriormente varias ediciones fragmentarias. Este apartado se basa en la exposición relativamente detallada que da George Gamow en su libro “Uno, dos, tres,... infinito”, publicado en 1946. Los dos grandes físicos tuvieron una extensa relación personal en esta época, y por esto la descripción de Gamow es de primera mano sin aludir a ninguna fuente bibliográfica (Ed. Espasa Calpe, Argentina S.A., Buenos Aires, 1948).

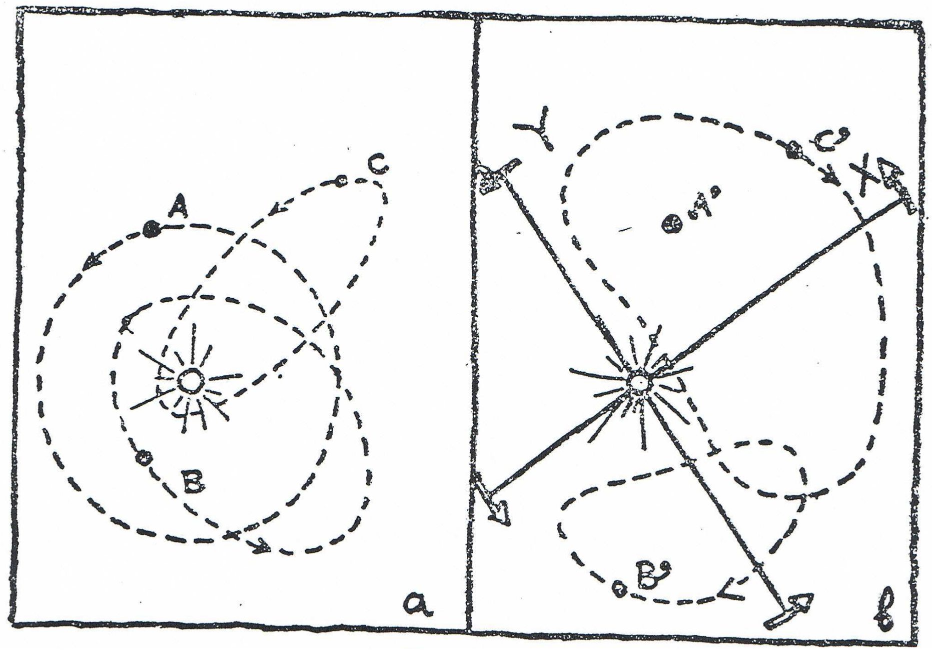
Si la envoltura primitiva del Sol estaba formada del mismo material interestelar actual, sólo una pequeña porción de ella, la que representa a los elementos pesados de tipo terrestre, podría haber sido usada para formar la Tierra y los demás planetas. El resto se habría diluido y uniformizado en el espacio interestelar, porque no se puede considerar la posibilidad de que hubiera pasado a formar parte de la masa solar, dado que con ello habría aumentado el momento angular, acelerándose su rotación de forma substancial.

La envoltura giratoria gigantesca retenida alrededor del Sol tendría un 1 % de material de tipo terrestre, constituido por unos 10^{45} partículas de 0,0001 cm de diámetro Estas partículas estarían sujetas a un movimiento caótico con múltiples choques entre si. Se generarían agregados de dichas partículas, muchos de los cuales volverían a pulverizarse, pero la formación de agregados cada vez mayores sería dominante. Con ello se llegarían a formar grandes cuerpos sujetos a un continuo bombardeo, como consecuencia del cual irían aumentando de tamaño y de temperatura hasta convertirse en una masa líquida. Al ir disminuyendo el número de colisiones, habría un lento enfriamiento que, con el tiempo, daría lugar a la formación de una corteza sólida, lo cual tardaría mucho más para los cuerpos grandes que para los más pequeños.

Según Weizsäcker, tanto las partículas como los planetas seguirían las leyes de Kepler además del giro circular de la envoltura primitiva del Sol. Las órbitas elípticas B y C, referidas a un sistema de ejes cartesianos giratorio, adoptarían la forma correspondiente a B' y C' (fig. 9), porque el cuerpo que gira, unas veces se adelanta y otras se atrasa con respecto a los ejes giratorios, manteniendo la distancia media al Sol. Una partícula A, que se moviera en una órbita circular, parecería estar siempre en reposo en el punto A' si su velocidad fuera igual a la del giro de los ejes de sentido contrario (fig. 9).

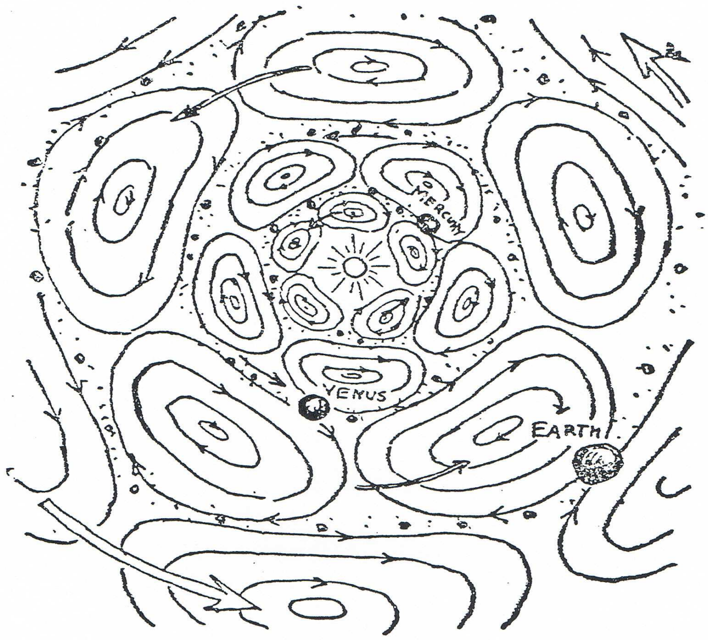
El sistema referido tendería a ordenarse para disminuir el cruce de diferentes órbitas. Esto daría lugar a la formación de collares de órbitas de la misma distancia media al Sol, de menor a mayor tamaño. Cada anillo sería en realidad un torbellino de órbitas, y los choques sólo tendrían lugar en las zonas periféricas (fig. 10).

Según Gamow, la hipótesis de Weizsäcker comprende un modelo geométrico para la ordenación de las partículas del material interestelar hasta la formación de los planetas en las fronteras referidas, lo cual justificaría su ordenación siguiendo la ley de Bode. La verdad es que nos sorprendió esta reaparición de la ley de Bode en los años 40, pero Gamow no da más explicaciones y, como consecuencia, me quedé sin entender el modelo geométrico. Cuando más tarde fueron saliendo objeciones a otros aspectos de la teoría de Weizsäcker, dejé la cuestión, especialmente por las objeciones de Kuiper (1961).



Movimiento circular (A) y elíptico (B y C), como se observaría en un sistema de coordenadas fijo (a) o en otro giratorio (b).

Fig. 9 (Tomada de Gamow[9])



Sendas de tránsito del polvo en la envoltura solar primitiva.

Fig. 10 (Tomada de Gamow[9])

El proceso referido se puede coordinar con las observaciones geológicas. En primer lugar con el grado geotérmico (30º por km de profundidad), que nos lleva a 1500º para 50 km de profundidad, la cual no constituye más que un 1 % de la distancia al centro de la Tierra. Todo el material que está por debajo de 50 km debe hallarse en estado líquido. Con los datos disponibles se puede calcular, de forma bastante fiable, el enfriamiento progresivo a través del tiempo, el cual tendría que haber empezado hace unos tres mil millones de años. Pero además tenemos los resultados del reloj atómico, esto es, de la proporción de plomo en los minerales radiactivos de uranio y de torio, que se encuentran en pequeñas cantidades en muchas rocas. Conocida la vida media de estos metales radiactivos, es fácil calcular el tiempo en el que se solidificó la roca, pues en estado líquido no hay acumulación por dilución del plomo. Pues bien, las rocas más antiguas que se han encontrado tienen dos mil millones de años de antigüedad. En consecuencia, la Tierra, con anterioridad a estas magnitudes de tiempo, era una masa fluida formada por la condensación de las partículas de material de tipo terrestre que, según la teoría de Weizsäcker, habría tenido lugar en un período de unos doscientos millones de años, lo que nos parece relativamente corto con respecto al período de enfriamiento hasta consolidarse la corteza.

De acuerdo con la teoría de Weizsäcker, los huecos en la sucesión de Titius y en los de las distancias sucesivas de los satélites de Saturno y Júpiter, señalarían los posibles casos fallidos, en los que no habrían llegado a formarse ni el planeta ni los satélites correspondientes. En este supuesto, dejando aparte los satélites de Júpiter, tendríamos cuatro posibles fracasos en diecinueve ensayos. Esto sugiere que una repetición del planeta Tierra con el mismo éxito que en la génesis del sistema solar podría tener una probabilidad de 19 / 23 = 0,82. También podríamos considerar que si falta uno de los ocho planetas de la ley de Bode, la probabilidad de que se forme un planeta cualquiera podría ser 7/8 y, en *n* ensayos $(7/8)^n$, y la de que no se forme 1- $(7/8)^n$. Para que la formación de un planeta tuviese el 50% de probabilidades de realizarse con éxito, tendríamos ½ = 1- $(7/8)^n$, que da *n* = 6. Esto supondrían que, de promedio, en cada seis estrellas como el Sol, faltaría un planeta. Con ocho planetas, la probabilidad de que fallara la formación de uno concreto sería del 50% en 6 x 8 =48 casos.

Las consideraciones anteriores nos indican que, aunque la formación de planetas y satélites fuera un fenómeno general en la evolución de las estrellas y los planetas, la formación de un planeta o satélite en particular siempre sería un fenómeno fortuito. Claro está que, dado el gran número de estrellas parecidas al Sol, podrían haber muchos planetas Tierra paralelos, pero quizás es más importante pensar que nuestra Tierra, en la que estamos y en la que se ha desarrollado toda la historia de la vida que conocemos, podría no haberse formado.

Lo que se ha venido indicando como no formación de un planeta o de un satélite con relación a un hueco en la sucesión de Titius-Bode (3) o equivalente se refiere a tal cual están los que ahora podemos observar. Existe la posibilidad de que los planetas o satélites ausentes fueran consecuencia de la destrucción de un protoplaneta o un protosatélite, como en el caso de los anillos de Saturno, que podrían ser el resultado tanto de la destrucción de un satélite por las fuerzas de marea como que estas mismas fueran las que habían impedido su formación a partir de pequeños fragmentos.

Una de las mayores dificultades de la teoría de Weizsäcker se halla en el mismo supuesto inicial de que los planetas no puedan ser fragmentos del Sol por su distinta composición química. También es posible que unos protoplanetas de la misma composición que el Sol evolucionaran hasta el estado de planeta perdiendo los elementos más ligeros. G. P. Kuiper[14] ha podido calcular así las masas de los protoplanetas hipotéticos comparando la actual composición de los planetas, su masa y su densidad, con la del Sol. Resulta que la masa inicial de Júpiter hubiera sido 10 o 20 veces la actual, la de Saturno 50 veces y la de la Tierra 1000 veces. La mayor parte

[14] Kuiper, G.P. (1905-1973). (Ed.) De la serie *El sistema solar* en 4 volúmenes. El primero 1953) *El Sol*; el segundo, *La Tierra como planeta* (1954); el tercero, *Planetas y Satélites* (1961); y el cuarto *La Luna, meteoritos y cometas* (1973). Ed. de la Universidad de Chicago. Descubrió un satellite de Urano y uno de Neptuno, la existencia de atmósfera en Titán (anunciada con anterioridad por J. Comas Solá. Víctor Delfino, *Las rutas del infinito*, Ed. Feliu y Susana. Barcelona, (1911)) así como de la presencia de CO_2 en la atmósfera de Marte. Sus trabajos cosmológicos, con los que adquirió gran prestigio internacional, son todavía realmente interesantes. Kuiper tuvo una influencia notable sobre los programas planetarios de la NASA.

de la materia perdida se habría expulsado fuera del sistema solar y el resto giraría en espiral alrededor del Sol.

Ya hemos visto también que los sistemas de satélites de Saturno y Júpiter siguen la ley exponencial, pero hay que darse cuenta de que son sistemas más compactos que el solar: las distancias satélite-planeta en unidades de radio de este último son más pequeñas que las distancias al Sol de los planetas, medidas en unidades de radio solar. Además, los planetas giran más rápidamente y su momento angular es mayor con respecto al del Sol que el de los satélites con respecto al de los planetas. Hay que darse cuenta de que la relación entre distancias consecutivas se cumple igualmente en planetas y satélites con independencia de su mayor o menor valor real, pero tampoco es constante e igual a 2 como señala la ley de Bode (**5**)..

Es muy probable que las órbitas de los protoplanetas fueran distintas a las que se han estabilizado al pasar a planeta, guardando la sucesión armónica de las distancias relativas al Sol, como ocurriría con las de los satélites.

La teoría de Weizsäcker nos recuerda la antigua teoría de los vórtices de Descartes y de Belot, difíciles de asumir. Las propiedades geométricas de los torbellinos que llevan a la formación de planetas entre coronas circulares proporcionales según la ley de Bode y su repetición en la formación de satélites parece una hipótesis arriesgada, todavía más si consideramos la existencia de protoplanetas y protosatélites. De hecho, las órbitas actuales son las únicas que dentro del mismo proceso evolutivo podrían establecerse, siguiendo las leyes de Kepler como consecuencia de la gravitación universal (**4**.**4**.).

El orden regular de las distancias al cuerpo central de los planetas y de los satélites de Saturno y de Júpiter se hace aparente en las curvas de las figuras 1, 7 y 8. Primero unos y otros están más juntos, después se van separando progresivamente. En todas las curvas, las distancias $(D_K)_n$ corresponden al semieje mayor de las órbitas elípticas keplerianas. Según hemos visto en (**4**.**4**.), las distancias al Sol de los planetas históricos cumplen una razón armónica desde n=2 a n=7, la cual sería responsable de la aproximación a la sucesión 0, 3, 6, 12, ... (Ley de Bode). Hay términos en el orden regular que pueden estar vacíos pero, a excepción de los dos grupitos de pequeños satélites de Júpiter, no se encuentra ningún planeta ni satélite intercalado entre dos términos de la sucesión armónica (**4**.**5**.). En cambio, frecuentemente hay planetas y satélites más allá de los comprendidos en la serie armónica.

La teoría de Weyzsäcker con respecto a la formación de planetas y satélites mantiene muchos aspectos todavía vigentes, pero no todos. Así, los planetas pueden haberse formado a partir de una materia de la misma composición que la del Sol, pero perderían los elementos más ligeros que en el Sol se retienen por su masa enorme. El protoplaneta pasaría por un particular proceso de crecimiento de su masa y calentamiento, resultado del bombardeo continuado de muchos cuerpos y, a medida que se irá debilitando, empezará un enfriamiento regular dependiente de la masa del planeta que llevará a la formación de una corteza sólida, más pronto para los planetas pequeños y más tarde para los grandes.

Ahora me viene a la cabeza que hacia la mitad del siglo pasado, cuando estaba trabajando con el texto de Gamow sobre la hipótesis de Weizsäcker y empezaba a hacerlo también con la de Kuiper, me acordé de una nota mía sobre el efecto Oort publicada en 1945[15] en *Urania*. Naturalmente trata de la estructura de la Vía Láctea (**6.7.**.) con millones de estrellas girando alrededor de un centro de una inmensa nebulosa con una velocidad media que va disminuyendo uniformemente al alejarse de dicho centro. En cierto modo, me parecía algo semejante a lo que tendría lugar en la formación del sistema solar. En ambos casos coexisten varios movimientos, uno de velocidad radial y otro de rotación alrededor del centro de giro. Su combinación da lugar a un movimiento espiral semejante al de la fig. 5, como también a la de la fotografía de la nebulosa espiral de la fig. 6. En la formación de la estrella hay una concentración que aumenta la velocidad de giro y produce un aplanamiento lenticular. En la formación de protoplanetas puede tener lugar una captura por resonancia cuando coincide la velocidad radial con la velocidad de la órbita kepleriana correspondiente, que es lo que se representa en la fig. 5. Podría ser un modelo aplicable a la fotografía de la nebulosa con una velocidad media nula para n = 9. Con ocho planetas de la espiral tendríamos ocho distancias keplerianas.

En el libro de M. M. Nieto (**3**) se describe la teoría de Weizsäcker junto con otras teorías nebulares. A mi me pareció como la más aceptable la de Kuiper, que de hecho es una variante de la de Weizsäcker. Además de esas dos teorías, Nieto describe brevemente las teorías gravitacionales y las electromagnéticas, que con las nebulares constituyen los tres grupos de hipótesis sobre la formación del sistema solar. El libro de Nieto es de 1997 y desde entonces han surgido otras hipótesis, de tal modo que algunos autores ya lo han calificado de anticuado.

La ley de Bode no aparece en todas las hipótesis cosmogónicas modernas, pero sí en la de Weizsäcker (fig.10), y además se utiliza en otros casos para expresar la existencia de una progresión geométrica de las distancias planetarias o de una simple ordenación regular de las mismas. Debo reconocer que ese uso del nombre de ley de Bode, o ley o “leyes” de Titius-Bode, me pareció paradójico, habida cuenta de lo que he estado exponiendo en este ensayo. Sólo faltaba el uso frecuente de estas denominaciones en muchos títulos de trabajos relativos a los planetas extrasolares, pero sin más, la ley de Bode no está justificada para cualquier distanciamiento regular entre planetas o entre satélites. Las distancias sucesivas reales al Sol forman una sucesión armónica regular desde Venus a Urano. La razón geométrica 2 es un artefacto (fig. 4).

7.3. Planetas extrasolares

A mediados del siglo pasado, todos dábamos por supuesto que el sistema solar no podía ser único en todo el Universo. A través de la literatura astronómica de los siglos XIX y XX se aprecia con facilidad que se trataba de una opinión muy generalizada desde hacía tiempo. En cambio, en el siglo XVIII, esto ya sería una hipótesis arriesgada. Con anterioridad nadie hubiera aceptado otros planetas que los que giran alrededor del Sol y que podemos ver a simple vista. Lo demás sería una fantasía literaria. Por supuesto, lo que yo recordaba se refería exclusivamente al

[15] R. Parés. *Los efectos físicos de mayor importancia en astrofísica*. Urania. Num. 209, pàg. 22-26. 1945.

mundo físico. Entre millones y millones de estrellas no había razón alguna para no admitir que pueden haber muchas estrellas comparables con el Sol, como planetas con la Tierra. Sin embargo, lo cierto es que nadie lo había probado.

Hay estrellas que emiten periódicamente ondas de radio, como la luz de un faro. El período del pulso es regular y muy preciso. Si un planeta perturba el movimiento de la estrella, el período del pulso se altera. Es así como en 1992 Alexander Wolszczan y Dale Frail descubrieron los tres primeros exoplanetas.

Hasta nuestros días se han desarrollado muchos otros métodos, directos e indirectos, para detectar planetas extrasolares. El rastreo por velocidad radial ha resultado el de más éxito entre ellos. De hecho, es el que utilizaron Michael Mayor y Didier Queloz en 1995 para descubrir en el Observatorio Astronómico de Ginebra el exoplaneta *51 Pegasi b* de la estrella normal *51 Pegasi*.

Actualmente se llevan descubiertos unos quinientos exoplanetas y el tema se ha puesto de moda en todo el mundo, habiendo en marcha múltiples proyectos relativos a exoplanetas.

Entre otros, uno de los trabajos que más me ha llamado la atención es el de Mikko Tuomi, publicado en 2012 sobre el sistema *HD 10180* de la constelación *Hidra* del hemisferio austral. Su interés se deriva principalmente de que pueda estar constituido por una estrella con nueve exoplanetas (Mikko Tuomi. C. ESO. 2012).

Los exoplanetas conocidos mayormente son de tamaño superior a los del sistema solar. Por ejemplo, el antes citado 51 Pegasi b es como la mitad de Júpiter y está a una distancia de su estrella inferior a la de Mercurio al Sol. No obstante, es muy posible que esto, por lo menos en parte, sea debido a que los exoplanetas más grandes sean los más fáciles de detectar. Parece que los exoplanetas del mismo sistema se distancian regularmente unos de otros, lo cual se ha relacionado con que siguen la ley de Bode. Quizás lo que convendría es conocer la sucesión de distancias a la estrella y la razón geométrica de D_n - D_1 / D_{n-1} - D_1 para poder ver si es constante o, como en el sistema solar, es regularmente creciente. En todo caso no hay ninguna razón para esperar que sea 2 para toda la sucesión, como presupone la *ley de Bode*.

En el caso de *51 Pegasi b* sería importante conocer el giro del perihelio dada su corta distancia a su estrella, mucho más que la de Mercurio con respecto al Sol, siendo el tamaño de *51 Pegasi b* mucho mayor.


Descartes (1596 - 1650)   1.04 ;1.05


Buffon (1707 - 1778)   1.05;1.11


Laplace (1749 -1817)   1.05;1.11


Weiszäcker (1912 - 2007)   1.11

8. *Mucho ruido y pocas nueces. Conclusión*

El autor ha llegado al convencimiento de que tanto Titius como Bode querían simplemente divulgar la supuesta regla de las distancias planetarias porque podría servir para revelar la existencia de nuevos planetas. Era una antigualla conocida con la que uno se jugaba el prestigio si no llevaba a ninguna parte. Esperar con esta regla el mismo éxito de Galileo con el telescopio era mucho esperar. Kepler y Newton ni lo hubieran intentado, fieles a su actualismo. Titius y Bode no pusieron nunca en claro su posición y sólo en una memoria póstuma Bode hace referencia al mérito de Titius, pero queda sin resolver el misterio del traslado secreto de la autoría a Bonnet, que nadie llegaría a aclarar. Esto resulta paradójico para el origen de una ley a mitad del siglo XVIII, y de la cual se seguiría hablando durante tres siglos más sin conocer su significado físico.

Es cierto que, dentro de lo que aun hoy llamamos la *Revolución científica* y *Segunda edad de oro de las matemáticas*, ocurrieron muchas cosas casi inimaginables. En aquella época teníamos los *cosistas*, o calculadores profesionales, en número superior al de los matemáticos propiamente dichos. Estos, a su vez, estaban divididos en distintos grupos. Fermat, por ejemplo, anuncia un nuevo teorema del que afirma tener una bellísima demostración que no quiere dar a conocer a nadie, pero que después de trescientos años se demostraría de nuevo con rigor gracias a una matemática que Fermat no podía haber conocido[1]. En cambio, su contribución al desarrollo del cálculo de probabilidades junto con Pascal es memorable por su calidad y su trascendencia indudable para el progreso científico Además, había otros grandes matemáticos sólo interesados en la demostración absoluta, prescindiendo de sus posibles aplicaciones. Uno de ellos, por ejemplo, era el caso de Leonard Euler. Naturalmente, los había también que se movían entre dos aguas y otros aún que se hicieron famosos sabiendo poco. La ley de Bode o de Titius-Bode es algo originado en el mundo de los *cosistas* y que permaneció más o menos ignorada durante mucho tiempo, con anterioridad a Titius y a Bode. Sólo a través del descubrimiento de Urano y de los pequeños planetas pasaría a la ortodoxia científica de la época.

Como ejemplo sencillo de la matemática de los *calculadores profesionales* del siglo XVIII en el que podemos ver la diferencia con la *matemática pitagórica* o *platónica* coetánea, me permito poner aquí un problema de Juan Area y Quiroga que ya comenté con mayor extensión en otro lugar[2]. Es de 1717, cincuenta y cinco años después de la muerte de Pascal y medio siglo antes del nacimiento de la ley de Bode propiamente dicha, así como de la *Introductio in análisis infinitorum* de Euler. Vale la pena comparar dicho problema con el texto intercalado por Titius en el libro de Bonnet (**3**).

Pregunta 1: Pídense dos números que sumados hagan 30 y multiplicados 200.

Respuesta: *Supon que el uno es 1 Co* [Co = cosa] *y el otro 2 Co*, *multiplica 1 Co por 2 Co y el producto 2q* [q = producto) *yg* [yg = igual] *a 200. Parte y del cociente entra 100 saca la* √ [√ = raíz cuadrada] *que es 10, que hasta 30 faltan 20 y veras que los dos ng* [ng = números] *pedidos son 10 y 20.*

Ciertamente, dejando aparte la curiosa simbología hermética de los *cosistas*, 10 y 20 es la solución correcta, porque 10 + 20 = 30 y 10 x 20 = 200, sin embargo el método empleado sólo vale para este caso particular en el cual $\sqrt{(xy / 2)}$ es igual a $30 - (30 + \sqrt{100}) / 2$.

Doy por supuesto, y no puedo creer que me equivoque, que hoy en día algún chico espabilado de Bachillerato sabría resolver el problema de forma general:

Dos números x e y, que multiplicados dan un número c y sumados un número b, determinar cada uno de ellos para cualquier valor de c y de b.

Por otra parte, ya hemos visto (**6**) que la ayuda de la ley de Titius-Bode para el descubrimiento de nuevos planetas fue en realidad muy pequeña. Sin ella se hubieran descubierto igualmente. Quizás la aportación más positiva sería la de la propia ordenación regular de las distancias planetarias consecutivas y su incremento según una progresión geométrica. En todo caso, lo que sorprende es que, estando todo al alcance de la astronomía de la época (**4**. **5**. **6**.), pasara desapercibido el hecho de que esta razón no es constante ni igual a 2. Se trata de un artefacto aritmético, dado que las distancias armónicas sucesivas reales aumentan linealmente, término a término, desde n=2 a n=8. El autor de este ensayo no puede creer que J. Gregory, B. Martín, T. Cerdá y otros de la misma generación, que no conocían la ley de Bode como tal, no supieran todo esto y más.

Antes ya he señalado (**6**.**1**.), la sorpresa que me produjo saber que E.Terradas en los últimos años de su vida en Madrid dedicara los fines de semana a estudiar las fuentes de Hiparco de Nicea (siglo I a.C). Se trata de un caso bien distinto del de nuestro protagonista. A Hiparco sí que se le podría aplicar la misma y conocida afirmación de Echegaray a Terradas: *es imposible saber cómo Vd, aprendió todo lo que Vd. sabe.* En nuestro caso, quizás debería cambiarse por la de: *es imposible saber cómo Vd. ha podido sacar tanto mérito y fidelidad a una antigualla de regla aritmética aproximada, sin base física y casi innecesaria.*

De la época de estudiante a la que tantas veces me he referido, también recuerdo el respeto que nos infundía el problema de la determinación de los siete elementos de una órbita planetaria a partir de tres posiciones únicas, declinación y ascensión recta de cada una. Es el magnífico colofón de las órbitas aproximadas a partir de centenares de posiciones aparentes obtenidas a lo largo de años y años. La coincidencia de unas y otras es total. El respeto a que me refiero está tan lejos del que nos puede hacer la ley de Titius-Bode que es mejor ni hablar de ello. Sólo faltaba que un antiguo profesor añadiera que no era inútil estudiar, antes de abordar el problema de los siete elementos de una órbita, la *Teoría motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium* de Carl Friedrich Gauss. (Brunsvic 1777-Göttingen 1855) (**6**.), donde la ley de Titius-Bode ni se cita. Recomendación difícil de seguir porque no sabíamos si sólo estaría a nuestro alcance la versión latina de 1809.

Quizás en este ensayo se haya subestimado el efecto de los grandes y diversos cambios sociales habidos en el mismo período de la regla de Titius-Bode. En estos casos, una parte importante de la población humana que no sabe nada o bien poco de estos asuntos puede haber roto cristales y levantado la arena de la playa. Pero esto estaría fuera del propósito de este ensayo. En cambio, me parece oportuno volver al caso de Schwarzchild (**6.5.**). En 1916, desde el frente de Rusia envía a Einstein por correo ordinario sus resultados, que confirmaban con mayor rigor el éxito de las ecuaciones de Einstein para explicar la órbita de Mercurio. Einstein le contestó: *Jamás habría esperado que la solución exacta de este problema pudiera formularse de una manera tan simple*. Una semana más tarde, Schwarzchild le envió otro escrito sobre la curvatura del espacio-tiempo fuera de una estrella esférica y carente de rotación. Más tarde, le mandaría otro sobre lo que ocurriría dentro de dicha estrella. En el centro, el espacio-tiempo se curvaría infinitamente sobre si mismo. Si se tratara del Sol, esto ocurriría si toda su masa se comprimiera hasta un radio de algo menos de 3 quilómetros. Una semana más tarde Schwarzchild moriría de gangrena de herida de guerra. Al parecer, ni entonces ni después Einstein no creería que los resultados de Schwarzchild se correspondieran con algo real, pero sólo unos meses más tarde J.R. Oppenheimer y su discípulo Snyder afirmarían lo contrario y, tras la muerte de Einstein en 1956, la teoría de Schwarzchild era aceptada por todos los físicos de la época como una característica muy real derivada de la relatividad general de Einstein. Se trata de los llamados agujeros negros, que abundan en todo el Universo. Uno de ellos se halla en el centro de nuestra galaxia, con una masa varios millones de veces superior a la de nuestro Sol.

Más allá de unos cinco mil años atrás, unos pocos hombres percibieron que hay otros astros móviles, además de la Luna y del Sol, con movimiento propio añadido al de la vuelta diaria completa a la bóveda celeste. La Luna podía pasar por delante del Sol, luego estaba más cercana e iba más deprisa. Siguiendo el ejemplo de la Luna y del Sol, pasaron a creer que los más rápidos serían los más cercanos. Y ahí empezó la cuestión de las *distancias planetarias*. ¿Por qué llegaron a esta percepción del mundo físico? No lo sé, pero ello sería el punto de partida de la historia que venimos comentando en este ensayo. En el curso del tiempo hubo diversos extravíos que se corrigieron. Pero, visto desde ahora, resulta una historia irrevocable, que no sabemos hasta dónde nos puede llevar. ¿Qué hubiera dicho Leverrier de la solución de Schwarzchild a la desviación del perihelio de Mercurio, y el médico de Orgières, y Lummis de Manchester, y el desafortunado profesor Airy (**6.5.**)? De saberlo Titius, quizás éste no habría pedido permiso a Bonnet para intercalar la célebre regla de distancias de los planetas al Sol en su traducción al alemán de *Contemplation de la nature* (**3**), como doy por supuesto.

El autor desea puntualizar que este ensayo, que aquí termina, sólo pretende honrar la memoria de sus antiguos profesores después de más de medio siglo de no haberlos visto y recordar la extraordinaria alegría intelectual que sabían motivar.

Prof. Ramon Parés i Farràs