



institut für  
theoretische physik

**ELEKTRODYNAMIK**  
&  
**RELATIVITÄTSTHEORIE**

Peter Eckelt

Vorlesungen

SS 2002, WS 2002/03, SS 2003

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

*Die Welt ist meine Vorstellung.*

(A. Schopenhauer 1820)

# Inhaltsverzeichnis

<b>A</b>	<b>Klassische Elektrodynamik</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Vakuumelektrodynamik:</b> <b>Feldgleichungen, Energie-Impuls-Bilanz</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Elektro(Magneto-)statik:</b> <b>Randwertprobleme, Green-Funktionen, Multipole</b>	<b>21</b>
<b>3</b>	<b>Elektromagnetische Wellen:</b> <b>Wellengleichungen, Wellenausbreitung und -erzeugung</b>	<b>56</b>
<b>4</b>	<b>Phänomenologische Elektrodynamik:</b> <b>Polarisation und Magnetisierung, Leitfähigkeit der Materie</b>	<b>100</b>
<b>B</b>	<b>Spezielle Relativitätstheorie</b>	<b>109</b>
<b>5</b>	<b>Grundlagen der Speziellen Relativitätstheorie</b>	<b>109</b>
5.1	Das Spezielle Relativitätsprinzip . . . . .	109
5.2	Die Lorentz-Transformation . . . . .	116
5.3	Kinematische Konsequenzen . . . . .	121
5.4	Die Struktur der Raumzeit . . . . .	126
5.5	Tensoren in der Minkowski-Raumzeit . . . . .	136
<b>6</b>	<b>Speziell-relativistische Mechanik</b>	<b>144</b>
6.1	Impuls, Masse, Geschwindigkeit . . . . .	144
6.2	Äquivalenz von Masse und Energie . . . . .	149
6.3	Der kinetische Energie-Impuls-Tensor . . . . .	156
<b>7</b>	<b>Speziell-relativistische Elektrodynamik</b>	<b>162</b>
7.1	Die Maxwell-Gleichungen . . . . .	162
7.2	Der elektromagnetische Energie-Impuls-Tensor . . . . .	169
7.3	Wellenausbreitung . . . . .	174
<b>C</b>	<b>Allgemeine Relativitätstheorie</b>	<b>181</b>
<b>8</b>	<b>Tensorrechnung in Punkträumen</b>	<b>181</b>
8.1	Kontra- und kovariante Tensoren im $\mathcal{S}_N$ . . . . .	185
8.2	Affine Verknüpfung und kovariante Ableitung . . . . .	192

8.3	Metrische Verknüpfung: Übergang zum $\mathcal{R}_N$ . . . . .	207
<b>9</b>	<b>Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie</b>	<b>217</b>
9.1	Das Allgemeine Relativitätsprinzip . . . . .	219
9.2	Das Äquivalenzprinzip und die Einsteinschen Feldgleichungen . . . . .	235
9.3	Experimentelle Tests der Allgemeinen Relativitätstheorie . . . . .	252
9.4	Kosmologie . . . . .	267
<b>D</b>	<b>Quantenelektrodynamik</b>	<b>285</b>
<b>1</b>	<b>Klassische Feldtheorie</b>	<b>285</b>
<b>2</b>	<b>Quantenfeldtheorie</b>	<b>302</b>
<b>3</b>	<b>Photonen- und Elektronenfelder</b>	<b>325</b>
<b>4</b>	<b>Der Streuoperator</b>	<b>355</b>
<b>5</b>	<b>Wirkungsquerschnitte und Lebensdauern</b>	<b>376</b>
<b>6</b>	<b>Regularisierung und Renormierung</b>	<b>400</b>
<b>E</b>	<b>Literatur</b>	<b>421</b>



## A Klassische Elektrodynamik

### 1 Vakuumelektrodynamik: Feldgleichungen, Energie-Impuls-Bilanz

Die Elektrodynamik handelt von der Wechselwirkung zwischen *Ladungen* und *Strömen*. Diese Wechselwirkung wird durch das *elektromagnetische Feld* vermittelt.

Beschreibung der Ladungsverteilung im betrachteten physikalischen System durch das skalare Feld

$$\rho = \rho(\vec{r}, t), \quad (1.1 \text{ a})$$

d. i. die *Ladungsdichte*  $\rho$  als Funktion der Raumzeit-Koordinaten  $\vec{r}$  und  $t$ ; der Stromverteilung durch das Vektorfeld

$$\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t), \quad (1.1 \text{ b})$$

wo  $\vec{j}$  die *Stromdichte* ist. Beschreibung des elektromagnetischen Feldes durch die beiden Vektorfelder

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t). \quad (1.2)$$

d. i. die *elektrische Feldstärke* bzw. die *magnetische Induktion* als vektorwertige Funktionen auf der Raumzeit. Bezeichnung von  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  als *elektrisches Feld* und von  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  als *Magnetfeld*.

Wenn man die Ladungs- und Stromverteilung auf einem Materiebereich von makroskopischen Abmessungen betrachtet (also nicht Systeme aus nur einigen wenigen Punktladungen), so hat man Folgendes zu bedenken: Wegen der atomaren Struktur der Ladungsträger weist die Ladungsdichte auf mikroskopischer Skala starke raumzeitliche Schwankungen auf. Die in (1.1 a) gemeinte makroskopische Verteilung  $\rho(\vec{r}, t)$  geht aus der ursprünglich vorliegenden mikroskopischen Verteilung  $\rho_m(\vec{r}, t)$  durch „Glättung“ hervor:

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{1}{VT} \int_V \int_T \rho_m(\vec{r} + \vec{\xi}, t + \tau) d^3\xi d\tau. \quad (1.3)$$

$V$  ist dabei ein makroskopisch kleiner, mikroskopisch großer (so dass viele atomare Ladungsträger erfasst werden) Raumbereich,  $T$  ein makroskopisch kurzes, mikroskopisch langes (so dass viele atomare Bewegungszyklen erfasst werden) Zeitintervall. Analoges gilt für den Zusammenhang zwischen der geglätteten makroskopischen Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  in (1.1 b) und der zu Grunde liegenden mikroskopischen Stromdichte  $\vec{j}_m(\vec{r}, t)$ .

Entsprechende Überlegungen gelten für das resultierende elektromagnetische Feld. Wegen der Linearität der Maxwell-Gleichungen ( $\Rightarrow$  Superpositionsprinzip) hat man für das elektrische Feld:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{VT} \int_V \int_T \vec{E}_m(\vec{r} + \vec{\xi}, t + \tau) d^3\xi d\tau, \quad (1.4)$$

wobei das mikroskopische Feld  $\vec{E}_m$  zu den mikroskopischen „Quellen“  $\rho_m, \vec{j}_m$  gehört. Analoges gilt für das Magnetfeld.

$\vec{E}, \vec{B}$ -Feld als *Zustand der Raumzeit*. Im Folgenden geht es darum

- zu analysieren, wie dieser Zustand durch die *Quellen*  $\rho$  und  $\vec{j}$  erzeugt, verursacht, ... wird; dabei spielt (im zeitabhängigen Fall) die gegenseitige Beeinflussung des  $\vec{E}$ - und des  $\vec{B}$ -Anteils des Feldes eine zentrale Rolle: *Maxwell-Gleichungen, Vakuumelektrodynamik*;
- zu untersuchen, wie das  $\vec{E}, \vec{B}$ -Feld auf seine eigenen Quellen zurückwirkt (Leitfähigkeit, Polarisation, Magnetisierung) und/oder wie es auf andere  $\rho, \vec{j}$ -Verteilungen einwirkt: *Phänomenologische Elektrodynamik, Lorentz-Kraft*;
- zu zeigen, dass die Elektrodynamik eine im Sinne der *Speziellen Relativitätstheorie* kovariante, d. h. gegenüber einem Wechsel des inertialen Bezugssystems forminvariante Theorie ist.

Die induktive „Herleitung“ der Maxwell-Gleichungen beruht im wesentlichen auf *vier experimentellen Fundamentalgesetzen*:

**1. Coulomb-Gesetz.** Eine bei  $\vec{r}_2$  ruhende Punktladung  $q_2$  übt auf eine bei  $\vec{r}_1$  ruhende Punktladung  $q_1$  die Kraft

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{4 \pi \epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (1.5)$$

aus; dabei ist

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4 \pi c^2} \frac{A^2}{N} = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{A s}{V m} \quad (1.6)$$

die *elektrische Feldkonstante*. Hier und im Folgenden wird das praktische Maßsystem (MKSA-System, SI-System) benutzt. Die von 1 auf 2 ausgeübte Kraft ist

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}. \quad (1.7)$$

Damit erfüllt das Coulombsche Gesetz das 3. Newtonsche Axiom (actio = reactio).

Wegen der ebenfalls experimentell verifizierten *Superponierbarkeit* der Coulomb-Kräfte gilt für die Wechselwirkung zwischen zwei ausgedehnten statischen Ladungsverteilungen  $\rho_1(\vec{r})$  und  $\rho_2(\vec{r})$ :

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \frac{\rho_1(\vec{r}_1) \rho_2(\vec{r}_2) (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} d^3 r_1 d^3 r_2 . \quad (1.8)$$

In diese Superposition wurden die in  $\rho_1$  und  $\rho_2$  herrschenden „Selbstkräfte“ nicht einbezogen. Bei Einführung des von  $\rho_2$  erzeugten **elektrischen Feldes**

$$\vec{E}_2(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_2(\vec{r}_2) (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} d^3 r_2 \quad (1.9)$$

schreibt man (1.8) wie folgt:

$$\vec{F}_{12} = \int \rho_1(\vec{r}_1) \vec{E}_2(\vec{r}_1) d^3 r_1 . \quad (1.10)$$

Der Übergang von der Formulierung (1.8) zur Formulierung (1.9, 10) des Kraftgesetzes entspricht dem Übergang von einer **Fernwirkungstheorie** zu einer **Nahwirkungstheorie**. Gl. (1.8) beschreibt ein Fernwirkungsgesetz: Die „Probeladung“  $\rho_1$  „spürt“ in beliebiger Position  $\vec{r}_1$  die Ladung  $\rho_2$  – auch in (beliebig) großer Entfernung von  $\vec{r}_2$ . Durch das Konzept des elektrischen Feldes wird diese Wechselwirkung in zwei Teilaspekte zerlegt:  $\rho_2$  erzeugt zunächst gemäß (1.9) das Feld  $\vec{E}_2(\vec{r}_1)$ ; dieses erfüllt den ganzen Raum; es existiert unabhängig vom Vorhandensein einer Probeladung. Bringt man sodann  $\rho_1(\vec{r}_1)$  ein, so ereignet sich die Wechselwirkung mit dem dort bereits vorhandenen Feld (also nicht mehr direkt mit  $\rho_2(\vec{r}_2)$ ) gemäß (1.10). Somit beschreiben Gln. (1.9, 10) ein Nahwirkungsgesetz.

Aus (1.10) abstrahiert man: Ein elektrisches Feld  $\vec{E}(\vec{r})$  übt auf eine „Ladungswolke“  $\rho(\vec{r})$  eine *Kraft der Dichte*

$$\vec{f}_E(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.11)$$

aus. Das ist der elektrische Anteil der **Lorentz-Kraft**. Gl. (1.10) bleibt auch im zeitu-nabhängigen Fall gültig.

**2. Ampère-Gesetz.** Ein stationärer Strom der Stärke  $I_2$  in einem ruhenden Leiterkreis  $C_2$  übt auf einen stationären Strom der Stärke  $I_1$  in einem ruhenden Leiterkreis  $C_1$  die Kraft

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{r}_1 \times (d\vec{r}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (1.12)$$

aus; dabei ist

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2} = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{V \cdot s}{A \cdot m} \quad (1.13)$$

die *magnetische Feldkonstante*.  $\varepsilon_0$  und  $\mu_0$  sind gemäß

$$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \quad (1.14)$$

miteinander verknüpft.  $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Hinweis darauf, dass die Elektrodynamik eine „relativistische Theorie“ ist.

Dass auch das Ampère-Gesetz die *actio = reactio*-Forderung erfüllt, erkennt man nach der Umformulierung

$$\begin{aligned} d\vec{r}_1 \times (d\vec{r}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)) &= (d\vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)) d\vec{r}_2 - (d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) (\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \\ \oint_{C_1} \frac{d\vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} &= - \oint_{C_1} d\vec{r}_1 \cdot \vec{\nabla}_1 \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = 0 \\ \Rightarrow \vec{F}_{12} &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

mit nun offensichtlichem

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}. \quad (1.7)$$

Es sei bereits an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass das 3. Newton-Axiom in der zeitabhängigen Elektrodynamik (wie überhaupt in der Speziellen Relativitätstheorie) wegen Retardierungseffekten seine Gültigkeit verliert.

Auch die *Superponierbarkeit* der Ampère-Kräfte ist experimentell verifiziert. Für die Wechselwirkung zwischen zwei ausgedehnten Stromverteilungen (stationär)  $\vec{j}_1(\vec{r})$  und  $\vec{j}_2(\vec{r})$  gilt

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \frac{\vec{j}_1(\vec{r}_1) \times (\vec{j}_2(\vec{r}_2) \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} d^3 r_1 d^3 r_2. \quad (1.16)$$

Wiederum wurden die in  $\vec{j}_1$  und in  $\vec{j}_2$  herrschenden „Selbstkräfte“ nicht einbezogen. Bei Einführung des von  $\vec{j}_2$  erzeugten **Magnetfeldes**

$$\vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_2(\vec{r}_2) \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} d^3 r_2 \quad (1.17)$$

wird aus (1.16):

$$\vec{F}_{12} = \int \vec{j}_1(\vec{r}_1) \times \vec{B}_2(\vec{r}_1) d^3 r_1. \quad (1.18)$$

Analog zum Übergang (1.8)  $\rightarrow$  (1.9, 10) ist auch der Übergang (1.16)  $\rightarrow$  (1.17, 18) ein Übergang von einer Fernwirkungs- zu einer Nahwirkungstheorie. Sinngemäße Übertragung der entsprechenden Ausführungen nach Gl. (1.10).

Aus (1.18) abstrahiert man: Ein Magnetfeld  $\vec{B}(\vec{r})$  übt auf eine Stromverteilung  $\vec{j}(\vec{r})$  eine *Kraft der Dichte*

$$\vec{f}_B(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (1.19)$$

aus. Das ist der magnetische Anteil der **Lorentz-Kraft**. Die Zusammenfassung von (1.11, 19) ergibt als Kraftdichte im  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ -Feld:

$$f(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) + \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (1.20)$$

– gültig auch im zeitabhängigen Fall.

Im Folgenden benötigen wir den **Gaußschen Integralsatz**: Gegeben seien ein Vektorfeld  $\vec{a}(\vec{r})$  und ein skalares Feld  $\alpha(\vec{r})$ . Es gilt:

$$\int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{a}(\vec{r}) = \oint_S d\vec{S} \cdot \vec{a}(\vec{r}) \quad (1.21 \text{ a})$$

$$\int_V dV \vec{\nabla} \alpha(\vec{r}) = \oint_S d\vec{S} \alpha(\vec{r}) \quad (1.21 \text{ b})$$

$$\int_V dV \vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{r}) = \oint_S d\vec{S} \times \vec{a}(\vec{r}) . \quad (1.21 \text{ c})$$

Dabei ist  $V$  ein beliebiges Volumen und  $S$  seine Oberfläche. Zusammenfassend schreibt man die Gln. (1.21) in der Form

$$\int_V dV \vec{\nabla} \circ = \oint_S d\vec{S} \circ , \quad (1.22)$$

wo  $\circ$  für  $\cdot \vec{a}(\vec{r})$  oder für  $\alpha(\vec{r})$  oder für  $\times \vec{a}(\vec{r})$  steht. Herleitung aus der koordinatenfreien Integraldarstellung des Nabla-Operators

$$\vec{\nabla} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S d\vec{S} . \quad (1.23)$$

**3. Ladungserhaltung.** Im Allgemeinen sind die Ladungs- und Stromverteilungen nicht statisch bzw. nicht stationär, sondern hängen von der Zeit ab (s. o.). Daraus resultiert die Möglichkeit der lokalen Zu- oder Abnahme der Ladungsdichte. Diese Veränderung

wird nach aller experimentellen Erfahrung *nicht* durch Erzeugung bzw. Vernichtung von Ladung verursacht, sondern ausschließlich durch Hin- und Wegströmen von Ladung. Dem trägt die **Kontinuitätsgleichung** Rechnung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0 . \quad (1.24)$$

In integraler Form nimmt dieses differentielle Gesetz der Ladungserhaltung – mit Hilfe des Gaußschen Satzes a) – die Gestalt an:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}, t) dV + \oint_S \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = 0 , \quad (1.25 \text{ a})$$

abgekürzt:

$$\dot{Q}_V + I_S = 0 . \quad (1.25 \text{ b})$$

Die zeitliche Zu(Ab)nahme der Ladung  $Q_V$  im Volumen  $V$  erfolgt nach Maßgabe des negativen (positiven) Stromes  $I_S$  durch die Oberfläche  $S$ .

Im Folgenden wird auch der **Stokessche Integralsatz** benötigt: Gegeben seien ein Vektorfeld  $\vec{a}(\vec{r})$  und ein skalares Feld  $\alpha(\vec{r})$ . Es gilt:

$$\int_S (d\vec{S} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{a}(\vec{r}) = \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{a}(\vec{r}) \quad (1.26 \text{ a})$$

$$\int_S (d\vec{S} \times \vec{\nabla}) \alpha(\vec{r}) = \oint_C d\vec{r} \alpha(\vec{r}) \quad (1.26 \text{ b})$$

$$\int_S (d\vec{S} \times \vec{\nabla}) \times \vec{a}(\vec{r}) = \oint_C d\vec{r} \times \vec{a}(\vec{r}) . \quad (1.26 \text{ c})$$

Dabei ist  $S$  eine beliebige Fläche und  $C$  ihr Rand. Zusammenfassend schreibt man die Gln. (1.26) in der Form

$$\int_S (d\vec{S} \times \vec{\nabla}) \circ = \oint_C d\vec{r} \circ , \quad (1.27)$$

wo wiederum  $\circ$  für  $\cdot \vec{a}(\vec{r})$ ,  $\alpha(\vec{r})$  oder  $\times \vec{a}(\vec{r})$  steht. Herleitung aus der koordinatenfreien Integraldarstellung

$$\hat{n} \times \vec{\nabla} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C d\vec{r} , \quad (1.28)$$

wo  $\hat{n}$  der Einheitsnormalenvektor auf dem Flächenelement  $S$  ist. Die Version a) des Stokesschen Satzes schreibt man wegen  $d\vec{S} \times \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = d\vec{S} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{a}$  zumeist wie folgt:

$$\int_S d\vec{S} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{r}) = \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{a}(\vec{r}) . \quad (1.29)$$

**4. Faraday-Gesetz**, auch **Induktionsgesetz**. Zeitabhängigkeit der Quellen impliziert Zeitabhängigkeit des elektromagnetischen Feldes. Experimentell stellt man fest: Die  $t$ -Abhängigkeit des  $\vec{B}$ -Feldes induziert Wirbel im  $\vec{E}$ -Feld, die  $t$ -Abhängigkeit des  $\vec{E}$ -Feldes induziert Wirbel im  $\vec{B}$ -Feld. Quantitativ findet man zum ersten Phänomen den integralen Zusammenhang:

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} , \quad (1.30 \text{ a})$$

abgekürzt:

$$U_I = -\dot{\Phi}_B . \quad (1.30 \text{ b})$$

Die Induktionsspannung  $U_I$  im Leiterkreis  $C$  ist gleich der (negativen) zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses  $\Phi_B$  durch  $C$ .  $S$  ist eine *beliebige* von  $C$  berandete Fläche. Mit Hilfe des Stokesschen Satzes (1.29) geht man zur differentiellen Formulierung über:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) . \quad (1.31)$$

Lokal gilt: Die Wirbelstärke (die Rotation) des elektrischen Feldes ist durch die zeitliche Abnahme des Magnetfeldes gegeben.

Aus den vier experimentellen Fundamentalgesetzen „errät“ man – das ist das didaktische Konzept der meisten einschlägigen Darstellungen – die **Maxwell-Gleichungen**:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r}, t) \quad (1.32)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) \quad (1.33)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (1.34)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 . \quad (1.35)$$

Bezeichnung der Gln. (1.32, 33) als *inhomogene*, der Gln. (1.34, 35) als *homogene* Maxwell-Gleichungen. Nach Vorgabe der Quellen  $\rho(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  berechnet man daraus

das elektromagnetische Feld  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ . Insgesamt handelt es sich um *acht* (Gln. (1.33, 34) vektorwertig) gekoppelte, lineare, inhomogene partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung zur Bestimmung der *sechs* Feldfunktionen  $E_x(\vec{r}, t), \dots, \vec{B}_z(\vec{r}, t)$ .

*Acht* Differentialgleichungen zur Bestimmung von *sechs* Funktionen sieht nach Überbestimmung des Problems aus! Später – im Rahmen der Lösungstheorie der Maxwell-Gleichungen – wird gezeigt, dass die sechs Feldfunktionen nicht unabhängig voneinander sind: Sie sind aus nur *vier* anderen Feldfunktionen (den Potenzialen) herleitbar. Die Potenzialfunktionen berechnet man aus *vier* entkoppelten, linearen, inhomogenen, partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung (Wellengleichungen).

Aus der **Linearität** der Maxwell-Gleichungen folgt das **Superpositionsprinzip**: Sei  $\vec{E}_1, \vec{B}_1(\vec{r}, t)$  Lösung zu  $\rho_1, \vec{j}_1(\vec{r}, t)$  und  $\vec{E}_2, \vec{B}_2(\vec{r}, t)$  Lösung zu  $\rho_2, \vec{j}_2(\vec{r}, t)$ , dann ist  $(a\vec{E}_1 + b\vec{E}_2, a\vec{B}_1 + b\vec{B}_2)(\vec{r}, t)$  Lösung zu  $(a\rho_1 + b\rho_2, a\vec{j}_1 + b\vec{j}_2)(\vec{r}, t)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  beliebig. Das bedeutet speziell für das Vakuum  $(\rho, \vec{j}) = (0, \vec{0})$ : Zu je zwei Vakuumlösungen ist jede beliebige Linearkombination auch Vakuumlösung.

In den Maxwell-Gleichungen (1.32 - 35) sind die Ladungen und Ströme  $\rho, \vec{j}(\vec{r}, t)$  als Quellen des elektromagnetischen Feldes  $\vec{E}, \vec{B}(\vec{r}, t)$  *beliebig*, aber *fest* vorgegeben. Die Beliebigkeit ist nur durch die Ladungserhaltung, d. h. durch die Verknüpfung von  $\rho(\vec{r}, t)$  und  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  in der Kontinuitätsgleichung, eingeschränkt. Es werden keine Modellvorstellungen darüber entwickelt, wie in einem bestimmten materiellen Medium  $\rho(\vec{r}, t)$  und  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  anzusetzen sind; insbesondere wird nicht erörtert, wie das  $\vec{E}, \vec{B}$ -Feld auf die  $\rho, \vec{j}$ -Verteilung zurückwirkt. Bezeichnung dieser Theorie als **Vakuumelektrodynamik** (auch: mikroskopische Elektrodynamik). Achtung: Der Fall  $(\rho, \vec{j}) = (0, \vec{0})$ , in dem das  $\vec{E}, \vec{B}$ -Feld „im Vakuum“ betrachtet wird, ist ein Spezialfall der Vakuumelektrodynamik, in der im Allgemeinen  $(\rho, \vec{j}) \neq (0, \vec{0})$  vorausgesetzt wird.

Einfaches Modell für die Wechselwirkung von Feld und Materie: **Maxwell-Lorentz-Theorie**. Annahmen:

- Die Ladungsträger bewegen sich als Massenpunkte nach den Gesetzen der klassischen Mechanik.
- Die zugehörigen Ladungsverteilungen (nicht notwendig Punktladungen) werden starr mit den mechanischen Massenpunkten mitbewegt. Für den  $k$ . Ladungsträger gelte

$$\rho_k(\vec{r}, t) = g_k(\vec{r} - \vec{r}_k(t)), \quad (1.36 \text{ a})$$

somit

$$\vec{j}_k(\vec{r}, t) = \dot{\vec{r}}_k(t) g_k(\vec{r} - \vec{r}_k(t)), \quad (1.36 \text{ b})$$



$k = 1, 2, \dots, N$ ; z. B. gilt für Punktladungen  $g_k(\vec{r}) = q_k \delta(\vec{r})$ .

In diesem Modell sind die Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \rho_0(\vec{r}, t) + \sum_{k=1}^N \rho_k(\vec{r}, t) \right) \quad (1.37 \text{ a})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu_0 \left( \vec{j}_0(\vec{r}, t) + \sum_{k=1}^N \vec{j}_k(\vec{r}, t) \right) \quad (1.37 \text{ b})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (1.37 \text{ c})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad (1.37 \text{ d})$$

wo  $\rho_0, \vec{j}_0(\vec{r}, t)$  zusätzliche „Vakuumpquellen“ bedeuten, zu ergänzen durch die Newtonschen Bewegungsgleichungen für die  $N$  Ladungsträger:

$$m_k \ddot{\vec{r}}_k(t) = \int \left( \rho_k(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{j}_k(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right) d^3 r, \quad (1.38)$$

$k = 1, 2, \dots, N$ . Die Rückwirkung des Feldes auf die Quellen erfolgt über die Lorentzkraft (1.20). Das System der gekoppelten Integro-Differentialgleichungen (1.37, 38) (zusammen mit den Definitionen (1.36)) dient der simultanen Berechnung von  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)$ .

Das Modell (1.36 - 38) ist – insbesondere für  $N > 1$  – mathematisch außerordentlich schwierig; dynamisch ist es nur von eingeschränkter Gültigkeit: Bei hohen Teilchengeschwindigkeiten ist die Newton-Mechanik durch die Einstein-Mechanik zu ersetzen, im atomaren Bereich gilt die Quantenmechanik. Wir werden das Maxwell-Lorentz-Modell nicht weiter betrachten. Seine Erwähnung verfolgte den Zweck, den Blick für die Rückkopplung der Quellen an das Feld – hier in Gl. (1.38) – zu schärfen. Die Vakuumelektrodynamik besteht darin, die Terme  $\rho, \vec{j}$  irgendwie (natürlich in plausibler Orientierung an der zu beschreibenden experimentellen Situation; für große  $N$  als gemäß (1.3) raumzeitgemittelte makroskopische Verteilungen) vorzuschreiben und ihre Beeinflussung durch das  $\vec{E}, \vec{B}$ -Feld außer Acht zu lassen.

Statt der mikroskopischen Analyse der Rückkopplung beschreitet man – insbesondere bei hoher Teilchenzahl (z. B.  $N \simeq 10^{23}$ ) – einen makroskopischen Weg. Auf der Basis phänomenologischer Konzepte, wie Leitfähigkeit, Polarisation und Magnetisierung, versucht man, die Quellen als *Funktionale* des Feldes darzustellen:

$$\rho, \vec{j}(\vec{r}, t) = \rho, \vec{j} \left( \vec{r}, t; [\vec{E}(\vec{r}, t)]; [\vec{B}(\vec{r}, t)] \right). \quad (1.39)$$

Dabei sind natürlich auch gewisse Vorstellungen über die Struktur der Materie einzubringen. Diese sog. **phänomenologische Elektrodynamik** (auch: makroskopische Elektrodynamik) wird vorerst zurückgestellt (s. u.). Wir wenden uns zunächst wieder der Vakuumelektrodynamik (1.32 - 35) zu. Vor allem deshalb, weil man im Rahmen der Vakuumelektrodynamik das „genuin Elektrodynamische“ unverfälscht studieren kann und weil man zur Begründung der phänomenologischen Elektrodynamik Begriffe und Konzepte benötigt, die zuvor in der Vakuumelektrodynamik bereitzustellen sind.

Die Maxwell-Gleichungen wurden auf der Grundlage von vier experimentellen Grundgesetzen „erraten“. Umgekehrt sind diese vier Gesetze aus den Maxwell-Gleichungen deduzierbar – zusammen mit dem Ausdruck für die *Lorentz-Kraft*. Das *Faraday-Gesetz* ist in seiner differentiellen Formulierung (1.31) identisch mit der homogenen Maxwell-Gleichung (1.34). Die *Ladungserhaltung* folgt unmittelbar aus den beiden inhomogenen Maxwell-Gleichungen: Anwendung der Operation  $\partial / \partial t$  auf (1.32) sowie der Operation  $\vec{\nabla} \cdot$  auf (1.33) führt wegen  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$  auf

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \rho \\ -\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} &= \mu_0 c^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} . \end{aligned} \tag{1.40}$$

Addition dieser beiden Gleichungen liefert wegen  $\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot = \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial}{\partial t}$  und (1.14) die Kontinuitätsgleichung (1.24).

Zum Nachweis des *Coulomb-Gesetzes* und des *Ampère-Gesetzes*, in denen es um statische Ladungen bzw. um stationäre Ströme geht, sind die Maxwell-Gleichungen zunächst auf den **statisch-stationären Fall** zu spezialisieren: Quellen  $\rho, \vec{j}$  unabhängig von  $t \Rightarrow \vec{E}, \vec{B}$ -Feld unabhängig von  $t \Rightarrow \partial / \partial t$ -Terme verschwinden. Man erhält zwei Sätze von je zwei Maxwell-Gleichungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r}) \tag{1.41}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \tag{1.42}$$

und

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \tag{1.43}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 . \tag{1.44}$$

Die beiden Sätze von Differentialgleichungen sind völlig entkoppelt – bis auf die Verknüpfung der beiden Feldkonstanten  $\varepsilon_0, \mu_0$  durch die Beziehung (1.14). Die Gln. (1.41, 42)

beschreiben das statische  $\vec{E}$ -Feld: **Elektrostatik**; die Gln. (1.43, 44) beschreiben das stationäre  $\vec{B}$ -Feld: **Magnetostatik**. Aus (1.43) folgt für  $\vec{j}(\vec{r})$  die Einschränkung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = 0 . \quad (1.45)$$

Das ist die Kontinuitätsgleichung im stationären Fall. Ansonsten sind  $\rho, \vec{j}(\vec{r})$  beliebig. Zur Vereinfachung der nachfolgenden Betrachtungen wird jedoch noch gefordert, dass die Quellen  $\rho, \vec{j}(\vec{r})$  im Unendlichen hinreichend stark verschwinden. (Das ist insbesondere dann der Fall, wenn die Ladungen und Ströme sich im Endlichen befinden.) Konsequenz: Auch die Felder  $\vec{E}, \vec{B}(\vec{r})$  verschwinden im Unendlichen.

Das Problem der Berechnung des  $\vec{E}$ -Feldes aus (1.41, 42) sowie des  $\vec{B}$ -Feldes aus (1.43, 44) sind zwei Spezialfälle eines allgemeineren Problems: der Berechnung eines Vektorfeldes  $\vec{a}(\vec{r})$  aus seinem Quellenfeld  $\vec{\nabla} \cdot \vec{a}(\vec{r})$  und seinem Wirbelfeld  $\vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{r})$  – unter einer Randbedingung.

**Helmholtz-Theorem:** Sei

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a}(\vec{r}) = q(\vec{r}) \quad (1.46)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{r}) = \vec{w}(\vec{r}) , \quad (1.47)$$

und es werde die Randbedingung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{a}(\vec{r}) = \vec{0} \quad (1.48)$$

gefordert; dann gilt eindeutig

$$\vec{a}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}) + \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \quad (1.49)$$

mit

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{q(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (1.50)$$

und

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{w}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' . \quad (1.51)$$

Das gesuchte Vektorfeld ist eindeutig; es ist nach (1.49) darstellbar als Überlagerung eines Gradientenfeldes (d. i. eines wirbelfreien Feldes) und eines Wirbelfeldes (d. i. eines quellfreien Feldes). Ersteres ist aus einem „skalaren Potenzial“ herleitbar, welches

nach (1.50) von den Quellen des  $\vec{a}$ -Feldes bestimmt wird; letzteres ist aus einem „Vektorpotenzial“ herleitbar, welches nach (1.51) von den Wirbeln des  $\vec{a}$ -Feldes bestimmt wird. Damit die Integrale (1.50, 51) konvergieren, ist zu verlangen, dass  $q, w(\vec{r})$  im Unendlichen hinreichend stark verschwinden.

Zum *Beweis* des Helmholtz-Theorems benötigt man die folgenden beiden Gln. (1.52, 52):

- Wegen  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{a} = 0$  ist das Wirbelfeld divergenzfrei:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{w}(\vec{r}) = 0$ ; folglich ist auch das Vektorpotenzial divergenzfrei:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \int \frac{\vec{w}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \vec{w}(\vec{r}') d^3 r' \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \int \left( \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \vec{w}(\vec{r}') + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{w}(\vec{r}') \right) d^3 r' \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \int \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{w}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \oint \frac{\vec{w}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot d\vec{S}' = 0
 \end{aligned} \tag{1.52}$$

wegen des vorausgesetzten Abfalls von  $\vec{w}(\vec{r})$  im Unendlichen.

- Ferner gilt (ohne Beweis):

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') ; \tag{1.53}$$

diese Gleichung bleibt auch für  $\Delta'$  gültig.

Der Beweis des Helmholtz-Theorems erfolgt nun in zwei Schritten:

1. Die Gln. (1.49 - 51) stellen eine Lösung der Gln. (1.46 - 48) dar.
2. Diese Lösung ist eindeutig.

Zu 1: Wegen  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$  und mit (1.53) folgt aus (1.49, 50):

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{a}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \Delta \int \frac{q(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \int \left( \underbrace{\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{= -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')} \right) q(\vec{r}') d^3 r' \\
 &= q(\vec{r}) ; \tag{1.54 a}
 \end{aligned}$$

wegen  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = \vec{0}$  und mit (1.52, 53) folgt aus (1.49, 51):

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{r}) &= -\nabla \times \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) + \nabla \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})) \\
 &= \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{A}(\vec{r}) \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \Delta \int \frac{\vec{w}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \int \left( \underbrace{\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{= -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')} \right) \vec{w}(\vec{r}') d^3 r' \\
 &= \vec{w}(\vec{r}) . \tag{1.54 b}
 \end{aligned}$$

Damit sind die Gln. (1.46, 47) erfüllt. Zu Gl. (1.48):  $\phi, \vec{A}(\vec{r})$  verschwinden im Unendlichen wie  $r^{-1}$ ; damit verschwindet  $\vec{a}(\vec{r})$  im Unendlichen wie  $r^{-2}$ .

Zu 2: Annahme: Es gibt zwei verschiedene Lösungen  $\vec{a}_1(\vec{r})$  und  $\vec{a}_2(\vec{r})$  von (1.46 - 48); dann befriedigt die Differenz

$$\vec{d}(\vec{r}) = \vec{a}_1(\vec{r}) - \vec{a}_2(\vec{r})$$

die beiden Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{d}(\vec{r}) = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{d}(\vec{r}) = \vec{0}.$$

Wegen der zweiten Gleichung ist

$$\vec{d}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \psi(\vec{r})$$

mit – wegen der ersten Gleichung –

$$\Delta \psi(\vec{r}) = 0 ;$$

wegen

$$\vec{\nabla} \cdot (\psi(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi(\vec{r})) = (\vec{\nabla} \psi(\vec{r}))^2 + \psi(\vec{r}) \underbrace{\Delta \psi(\vec{r})}_{= 0} = (\vec{\nabla} \psi(\vec{r}))^2$$

folgt – mit dem Gaußschen Satz (1.21 a) –

$$\int (\vec{\nabla} \psi(\vec{r}))^2 d^3 r = \oint \psi(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0 ,$$

da der Integrand im Unendlichen wie  $r^{-3}$  verschwindet, die „unendlich ferne Oberfläche“ aber nur wie  $r^2$  divergiert. Also ist

$$\vec{\nabla} \psi(\vec{r}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{d}(\vec{r}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_1(\vec{r}) = \vec{a}_2(\vec{r})$$

– im Widerspruch zur Annahme. Also ist die Lösung eindeutig, und das Helmholtz-Theorem ist bewiesen •

*Anmerkung:* Falls  $\vec{a}(\vec{r})$  nicht gesucht, sondern gegeben ist, so dass man daraus  $q(\vec{r})$  und  $\vec{w}(\vec{r})$  gemäß (1.46, 47) und weiter  $\phi(\vec{r})$  und  $\vec{A}(\vec{r})$  gemäß (1.50, 51) berechnen kann, dann liefert (1.49) eine (nicht eindeutige) Zerlegung dieses Vektorfeldes in ein wirbelfreies und ein quellenfreies Feld.

**Spezialfälle** des Helmholtz-Theorems:

1. Das Vektorfeld sei wirbelfrei:  $\vec{w}(\vec{r}) = \vec{0}$ . Dann ist  $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{0}$  und  $\vec{a}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r})$ , d. h.  $\vec{a}(\vec{r})$  ist ein reines Gradientenfeld. Das ist die Situation der *Elektrostatik* mit  $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})$  und  $q(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) / \varepsilon_0$ ; folglich

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \tag{1.55}$$

mit

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' . \tag{1.56}$$

Aus (1.55, 56) folgt

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' . \tag{1.57}$$

Das  $\vec{E}$ -Feld verschwindet im Unendlichen.

2. Das Vektorfeld sei quellenfrei:  $q(\vec{r}) = 0$ . Dann ist  $\phi(\vec{r}) = 0$  und  $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$ , d. h.  $\vec{a}(\vec{r})$  ist ein reines Wirbelfeld. Das ist die Situation der *Magnetostatik* mit  $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})$  und  $\vec{w}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$ ; folglich

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \quad (1.58)$$

mit

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' . \quad (1.59)$$

Aus (1.58, 59) folgt

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' . \quad (1.60)$$

Das  $\vec{B}$ -Feld verschwindet im Unendlichen.

Gl. (1.57) beschreibt das von einer Ladungswolke erzeugte elektrische Feld und entspricht genau dem Ausdruck (1.9). Wenn man es gemäß (1.10) mit einer anderen Ladungswolke multipliziert und darüber integriert, erhält man das verallgemeinerte *Coulomb-Gesetz* (1.8). Gl. (1.60) beschreibt das von einer Stromverteilung erzeugte Magnetfeld und entspricht genau dem Ausdruck (1.17). Wenn man es gemäß (1.18) (von links vektoriell) mit einer anderen Stromverteilung multipliziert und darüber integriert, erhält man das verallgemeinerte *Ampère-Gesetz* (1.16).

Damit ist gezeigt, dass alle vier experimentellen Fundamentalgesetze in den Maxwell-Gleichungen enthalten sind (sofern man den Ausdruck für die Lorentz-Kraft hinzunimmt)!

Wir kehren zur allgemeinen zeitabhängigen Theorie zurück. Wie schon das Faraday'sche Induktionsgesetz (1.30) gezeigt hat, ist die **integrale Formulierung** der Maxwell-Gleichungen von besonderer Bedeutung für die Beschreibung des elektromagnetischen Feldes und einschlägiger Experimente. Dabei interessiert vor allem der *Fluss* des  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ -Feldes durch geschlossene Flächen und die *Zirkulation* des  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ -Feldes längs geschlossener Linien. Mit Gauß/Stokes folgt aus (1.32 - 35):

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV \quad (1.61)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.62)$$

bzw.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (1.63)$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_S \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}. \quad (1.64)$$

Bezeichnung von (1.61) als *Gaußsches Gesetz*: Der Fluss des  $\vec{E}$ -Feldes durch eine geschlossene Fläche ist proportional (Faktor  $\varepsilon_0^{-1}$ ) der von der Fläche umschlossenen Ladung. Nützlich zur  $\vec{E}$ -Feldberechnung im Falle symmetrischer Ladungsverteilungen. Dagegen ist nach (1.62) der Fluss des  $\vec{B}$ -Feldes durch eine geschlossene Fläche gleich null: Es gibt keine magnetischen Ladungen.

Gl. (1.63) ist das *Faradaysche Gesetz* (1.30) der Induktion: Die Zirkulation des  $\vec{E}$ -Feldes längs einer geschlossenen Linie ist gleich der negativen Zeitableitung des von der Linie umfassten magnetischen Flusses. Im statisch-stationären Fall verschwindet die Zirkulation des  $\vec{E}$ -Feldes.

Nach (1.64) ist die Zirkulation des  $\vec{B}$ -Feldes längs einer geschlossenen Linie proportional (Faktor  $\mu_0$ ) dem von der Linie umfassten Ladungs- und Verschiebungsstrom. Im statisch-stationären Fall verschwindet der Verschiebungsstrom, und nur der Ladungsstrom trägt zur Zirkulation bei: *Ampèresches Durchflutungsgesetz*. Nützlich zur  $\vec{B}$ -Feldberechnung im Falle symmetrischer Stromverteilungen.

Wir betrachten zum Abschluss des 1. Kapitels

- die Energiebilanz
- die Impulsbilanz

des aus dem elektromagnetischen Feld und seinen Quellen zusammengesetzten Gesamtsystems. Die Wechselwirkung zwischen  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  einerseits und  $\rho$ ,  $\vec{j}$  andererseits ist durch die Lorentz-Kraftdichte (1.20) gegeben. Die Betrachtung des Austausches von Energie und Impuls zwischen den beiden Teilsystemen unter der Lorentz-Wechselwirkung widerspricht nicht der Beschränkung auf die Vakuumelektrodynamik: In dieser wird die funktionale Abhängigkeit der Quellen  $\rho$ ,  $\vec{j}$  von den Feldern  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  außer Acht gelassen, nicht jedoch die obige Wechselwirkung in Frage gestellt.

**Energiebilanz.** Skalare Multiplikation von (1.34) mit  $\vec{B}$ , von (1.33) mit  $\vec{E}$  und Subtraktion der beiden resultierenden Gleichungen voneinander führt auf

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \varepsilon_0 \mu_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E}$$



$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (1.65)$$

*Interpretation.* Deutung von

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \quad (1.66)$$

als elektromagnetische *Feldenergiedichte*, additiv zusammengesetzt aus einem elektrischen und einem magnetischen Anteil. Deutung von

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}, \quad (1.67)$$

des sog. *Poynting-Vektors*, als elektromagnetische *Feldenergiestromdichte*. Damit nimmt (1.65) die Gestalt

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (1.68)$$

an. Diese Gleichung wird als **Poyntingscher Satz** bezeichnet und ist wie folgt *lokal* interpretierbar: Die Abnahme der Feldenergie an einer Stelle ( $-\partial w / \partial t$ ) beruht darauf, dass Feldenergie wegströmt ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{S}$ ) und/oder auf die Quellen übertragen wird ( $\vec{j} \cdot \vec{E}$ ); denn wegen

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (1.69)$$

ist

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{v} \cdot (\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}) = \vec{v} \cdot \vec{f} \quad (1.70)$$

die Leistungsdichte der Lorentz-Kraft; siehe (1.20). Die Energie des elektromagnetischen Feldes bleibt also i. a. *nicht* erhalten, unter Einbeziehung der Quellen hat man jedoch *Energieerhaltung*.

Selbstverständlich kann, wenn  $-\partial w / \partial t$  negativ ist (weil  $\partial w / \partial t$  positiv ist), die Feldenergie an der betreffenden Stelle auch zunehmen. Dieser Effekt wird verursacht durch Hinströmen von Feldenergie ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{S} < 0$ ) und/oder Energieübertragung von den Quellen auf das Feld ( $\vec{j} \cdot \vec{E} < 0$ ).

In (1.68) ist der Poyntingsche Satz in *differentieller* Form gegeben; zur *integralen* Formulierung des Satzes gelangt man durch Integration von (1.68) über ein Volumen  $V$  mit der Oberfläche  $A$  und Anwendung des Gaußschen Integralsatzes:

$$-\frac{d}{dt} \int_V w dV = \oint_A \vec{S} \cdot d\vec{A} + \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV. \quad (1.71)$$

*Globale* Interpretation: Die Abnahme von Feldenergie in  $V$  resultiert aus Wegströmen (z. B. Abstrahlung) und/oder Übertragung auf die Quellen (z. B. Joulesche Wärme) in  $V$ . Entsprechend die Zunahme von Feldenergie in  $V$ , siehe oben.

Betrachtet man als  $V$  den *ganzen Raum* und als  $A$  die *unendlich ferne Oberfläche*, so verschwindet das Flächenintegral (sofern alle Quellen im Endlichen):

$$-\frac{d}{dt} \int w dV = \int \vec{j} \cdot \vec{E} dV . \quad (1.72)$$

Die elektromagnetische Feldenergie wird global vernichtet/erzeugt nach Maßgabe ihrer Übertragung auf die/von den Quellen. Mit

$$\int w dV = \varepsilon_F \quad (1.73 \text{ a})$$

$$\int \vec{j} \cdot \vec{E} dV = \frac{d}{dt} \varepsilon_Q , \quad (1.73 \text{ b})$$

wobei  $\varepsilon_F$  und  $\varepsilon_Q$  die Energie des Feldes bzw. der Quellen bedeuten, erhält man aus (1.72):

$$\frac{d}{dt} (\varepsilon_F + \varepsilon_Q) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_F + \varepsilon_Q = \text{konstant} . \quad (1.74)$$

Die Gesamtenergie des Systems „Feld & Quellen“ bleibt also erhalten.

**Impulsbilanz.** In dem Ausdruck (1.20) für die Lorentz-Kraftdichte werden mit Hilfe der inhomogenen Maxwell-Gleichungen (1.32, 33) die Quellen  $\rho$  und  $\vec{j}$  eliminiert:

$$\vec{f} = \varepsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} . \quad (1.75)$$

Addiert man hierzu die aus den homogenen Maxwell-Gleichungen (1.34, 35) herleitbare Identität

$$\vec{0} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B} - \varepsilon_0 \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \varepsilon_0 \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \quad (1.76)$$

so folgt

$$\begin{aligned}
& \vec{f} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) \\
&= \varepsilon_0 \left( (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right) \\
&+ \frac{1}{\mu_0} \left( (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B} - \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right) \\
&= \varepsilon_0 \left( (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} E^2 \right) \\
&+ \frac{1}{\mu_0} \left( (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} B^2 \right) . \tag{1.77}
\end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist die negative Divergenz des Tensors

$$\vec{T} = -\varepsilon_0 \left( \vec{E} \vec{E} - \frac{1}{2} E^2 \mathbb{1} \right) - \frac{1}{\mu_0} \left( \vec{B} \vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \mathbb{1} \right) ; \tag{1.78}$$

bis auf das Vorzeichen ist das der sog. *Maxwellsche Spannungstensor*. Also hat man

$$\vec{f} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{T} . \tag{1.79}$$

*Interpretation.* Deutung von

$$\vec{g} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \tag{1.80}$$

als elektromagnetische *Feldimpulsdichte*. Begründung: Auf Grund von (1.14, 67) hat man alternativ

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{S} , \tag{1.81}$$

d. i. wegen des relativistischen Zusammenhanges „Energie = Masse  $\cdot c^2$ “ die Massendichte = Massendichte  $\cdot$  Geschwindigkeit = Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes. Ferner wird  $\vec{T}$  als elektromagnetische *Feldimpulsstromdichte* gedeutet: Die Zeile gibt die Stromdichtekomponente, die Spalte die Impulskomponente an. Begründung: die nachfolgende Impulsbilanz und ihre experimentelle Bestätigung. Mit (1.80) ist (1.79) in der Gestalt

$$-\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \vec{T} \tag{1.82}$$

wie folgt *lokal* interpretierbar: Die Abnahme (Zunahme analog) des Feldimpulses an einer Stelle  $(-\partial \vec{g} / \partial t)$  beruht darauf, dass Feldimpuls auf die Quellen übertragen wird ( $\vec{f}$ ) und/oder dass Feldimpuls wegströmt  $(\vec{\nabla} \cdot \vec{T})$ . Der Impuls des elektromagnetischen Feldes bleibt also i. a. *nicht* erhalten, unter Einbeziehung der Quellen hat man jedoch *Impulserhaltung*.

Zur *integralen Form* der Impulsbilanz gelangt man erneut durch Integration von (1.82) über ein Volumen  $V$  mit der Oberfläche  $A$ :

$$-\frac{d}{dt} \int_V \vec{g} dV = \int_V \vec{f} dV + \oint_A d\vec{A} \cdot \vec{T} \quad (1.83)$$

mit einer *globalen* Interpretation, die wörtlich derjenigen nach der Energiebilanz (1.71) entspricht.

Betrachtet man den *ganzen Raum*, so verschwindet wieder das Flächenintegral. Mit

$$\int \vec{g} dV = \vec{p}_F \quad (1.84 \text{ a})$$

$$\int \vec{f} dV = \frac{d}{dt} \vec{p}_Q, \quad (1.84 \text{ b})$$

wobei  $\vec{p}_F$  und  $\vec{p}_Q$  den Impuls des Feldes bzw. der Quellen bedeuten, erhält man

$$\frac{d}{dt} (\vec{p}_F + \vec{p}_Q) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p}_F + \vec{p}_Q = \text{konstant} . \quad (1.85)$$

Der Gesamtimpuls des Systems „Feld & Quellen“ ist demnach erhalten.

In gleicher Weise kann man auch die *Drehimpulsbilanz* des Systems „Feld & Quellen“ betrachten. Die Analyse wird durch die Zerlegung des Drehimpulses in Bahn- und Spinanteil verkompliziert. Wir gehen hier nicht näher darauf ein.

## 2 Elektro(Magneto-)statik: Randwertprobleme, Green-Funktionen, Multipole

Bevor wir uns im nachfolgenden 3. Kapitel der allgemeinen Lösungstheorie der zeitabhängigen Maxwell-Gleichungen zuwenden, werden im vorliegenden 2. Kapitel einige Grundprobleme der Elektro(Magneto-)statik angesprochen.

Sowohl das elektrische Feld als auch das Magnetfeld sind im statisch-stationären Fall aus einem Potenzial ableitbar: das  $\vec{E}$ -Feld durch Bildung des negativen Gradienten aus dem skalaren Potenzial  $\phi$  gemäß (1.55), das  $\vec{B}$ -Feld durch Bildung der Rotation aus dem Vektorpotenzial  $\vec{A}$  gemäß (1.58). Für beide Potenziale kann man eine partielle Differentialgleichung aufstellen. Einsetzen von (1.55) in (1.41) führt auf

$$\Delta \phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r}) ; \quad (2.1)$$

das ist die **Poisson-Gleichung**.

Einsetzen von (1.58) in (1.43) führt zunächst auf

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) . \quad (2.2)$$

Wegen  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \chi = \vec{0}$  gilt: Ist  $\vec{A}(\vec{r})$  Lösung von (2.2), so ist auch  $\vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla} \chi(\vec{r})$ , wo  $\chi(\vec{r})$  ein beliebiges skalares Feld ist, Lösung von (2.2). Den Übergang  $\vec{A}(\vec{r}) \rightarrow \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla} \chi(\vec{r})$  bezeichnet man als *Eichtransformation*; er (sie) bleibt ohne Folgen für das resultierende Magnetfeld:  $\vec{A}(\vec{r})$  und  $\vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla} \chi(\vec{r})$  führen auf ein und dasselbe  $\vec{B}(\vec{r})$ .

Den durch die Eichtransformation gegebenen Spielraum kann man dazu benutzen, sich auf divergenzfreie Vektorpotenziale zu beschränken:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0 ; \quad (2.3)$$

vgl. (1.52). Ist nämlich zunächst  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \neq 0$ , so führt man eine Eichtransformation durch, bei der  $\chi(\vec{r})$  Lösung der „Poisson-Gleichung“

$$\Delta \chi(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \quad (2.4)$$

ist; dann hat man

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla} \chi(\vec{r})) = 0 . \quad (2.5)$$

Die Wahl des „Eichpotenzials“  $\chi(\vec{r})$  ist nicht eindeutig, weil man zu jeder Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (2.4) weitere Lösungen findet, indem man beliebige Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$\Delta \chi(\vec{r}) = 0 , \quad (2.6)$$

d. i. der „Laplace-Gleichung“, addiert. Bezeichnung der Konvention (2.3) als *Coulomb-Eichung*.

Mit  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$  und (2.3) geht (2.2) über in

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}) . \quad (2.7)$$

Damit erfüllt auch jede der drei kartesischen Komponenten des Vektorpotenzials eine „Poisson-Gleichung“.

Die Potentiale  $\phi$  und  $\vec{A}$  sind aus den Gln. (2.1) bzw. (2.7) (mit (2.3)) zu berechnen. Wir wollen uns im Folgenden mit der *Lösungstheorie* dieser vier(!) Gleichungen befassen. Da sie alle dieselbe mathematische Gestalt haben, beschränken wir die Analyse auf den elektrostatischen Fall, d. i. die *Poisson-Gleichung* (2.1). Dabei handelt es sich um eine inhomogene lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung vom „elliptischen Typ“ zur Bestimmung der Funktion  $\phi(\vec{r})$ . Die zugehörige homogene Gleichung

$$\Delta \phi(\vec{r}) = 0 , \quad (2.8)$$

die im ladungsfreien Raum gilt, heißt **Laplace-Gleichung**.

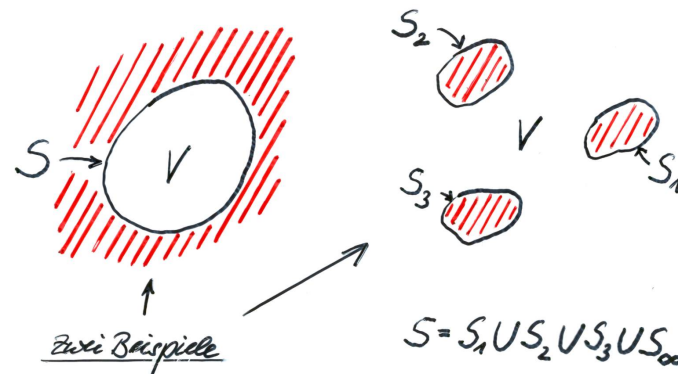
Die *allgemeine Lösung*  $\phi(\vec{r})$  der Poisson-Gleichung (der inhomogenen Gleichung) ist darstellbar als Summe einer beliebigen speziellen Lösung  $\phi_0(\vec{r})$  dieser Differentialgleichung und der allgemeinen Lösung  $\tilde{\phi}(\vec{r})$  der Laplace-Gleichung (der homogenen Gleichung):

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0(\vec{r}) + \tilde{\phi}(\vec{r}) . \quad (2.9)$$

Denn einerseits: Die Überlagerung (2.9) löst die Poisson-Gleichung. Andererseits: Jede Lösung  $\phi$  der Poisson-Gleichung lässt sich in der Gestalt (2.9) darstellen mit  $\tilde{\phi} = \phi - \phi_0$ , Lösung der Laplace-Gleichung. – Eine spezielle Lösung der Poisson-Gleichung ist durch (1.56) gegeben.

Von der allgemeinen Lösung der Poisson-Gleichung gelangt man zur *speziellen Lösung* eines konkreten Potenzialproblems der Elektrostatik durch die Vorgabe von **Randbedingungen**.

Gegeben sei ein zusammenhängender Raumbereich  $V$ , der von geschlossenen Flächen  $S$  begrenzt werde ( $S$  evtl. unendlich fern); letztere werden als „Rand“ des Bereichs bezeichnet; z. B.:



• Abbildung 2.1 •

Vorgabe von Randbedingungen (RB) a la

- **Dirichlet:**

$$\phi(\vec{r}) \stackrel{!}{=} f(\vec{r}), \quad \vec{r} \in S, \quad (2.10)$$

d. h. Vorgabe des elektrischen Potentials auf dem Rand von  $V$ ;

- **von Neumann:**

$$\vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r}) \stackrel{!}{=} g(\vec{r}), \quad \vec{r} \in S, \quad (2.11)$$

d. h. Vorgabe der Normalkomponente des elektrischen Feldes auf  $S$  (u. U. proportional der Flächenladungsdichte).

**Randwertproblem:** Die Aufgabe besteht darin, die Poisson-Gleichung unter Dirichlet-schen und/oder von Neumannschen Randbedingungen zu lösen. Man erhält eine *eindeutige Lösung*, falls man *entweder* (2.10) *oder* (2.11) fordert. Dabei darf man die Randbedingungen auch „mischen“. Zerlegung von  $S$  in zwei disjunkte Teilmengen  $S_1$  und  $S_2$ :

$$S = S_1 \cup S_2, \quad S_1 \cap S_2 = \emptyset; \quad (2.12)$$

auf  $S_1$  soll (2.10) gelten, auf  $S_2$  soll (2.11) gelten. Durch die Forderung (2.10) *und* (2.11) auf ganz  $S$  oder auf Teilen von  $S$  (Cauchysche RB) ist das Problem im Allgemeinen überbestimmt, d. h. es existiert *keine Lösung*.

Wir unterstellen im Folgenden die Existenz einer Lösung im reinen Dirichlet-Fall und im reinen von Neumann-Fall und im gemischten Dirichlet-von Neumann-Fall. Der *Existenzbeweis* wird hier nicht in allgemeiner Form erbracht (siehe Spezialliteratur über partielle

Differentialgleichungen, Randwertprobleme, Potenzialtheorie, ...), sondern nur für den reinen Dirichlet-Fall – siehe unten.

Der *Eindeutigkeitsbeweis* orientiert sich am zweiten Teil des Beweises des Helmholtz-Theorems in Kap. 1. Seien  $\phi_1(\vec{r})$  und  $\phi_2(\vec{r})$  zwei Lösungen des Randwertproblems; dann befriedigt die Differenz

$$\psi(\vec{r}) = \phi_1(\vec{r}) - \phi_2(\vec{r}) \quad (2.13)$$

in  $V$  die Laplace-Gleichung, und auf  $S$  gilt  $\psi(\vec{r}) = 0$  im Dirichlet-Fall,  $\vec{\nabla} \psi(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r}) = 0$  im von Neumann-Fall, was

$$\int_V (\vec{\nabla} \psi(\vec{r}))^2 dV = \oint_S \psi(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.14)$$

impliziert, woraus  $\vec{\nabla} \psi(\vec{r}) = \vec{0} \Rightarrow \psi(\vec{r}) = \text{konstant}$  folgt. Falls die RB Dirichlet-Anteile enthält, ist  $\psi(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \phi_1(\vec{r}) = \phi_2(\vec{r})$ , d. i. Eindeutigkeit. Bei reiner von Neumann-RB kann man die Konstante nicht festlegen; man hat dann nur Eindeutigkeit bis auf eine additive Konstante. Diese ist für das  $\vec{E}$ -Feld ohne Bedeutung.

Wie löst man das gestellte Problem? Prinzipiell möglich ist gemäß (2.9) der Ansatz

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' + \tilde{\phi}(\vec{r}). \quad (2.15)$$

Der erste Term löst nach (1.56) die Poisson-Gleichung für die spezielle Dirichlet-RB und für die spezielle von Neumann-RB asymptotischen Verschwindens auf der unendlich fernen Oberfläche. Der zweite Term, die Lösung  $\tilde{\phi}(\vec{r})$  der Laplace-Gleichung, hat die RB „in Ordnung“ zu bringen; dabei muss  $\tilde{\phi}(\vec{r})$  sowohl die tatsächlich geforderte RB als auch  $\rho(\vec{r}')$  berücksichtigen. Ungeschickt! Nachfolgend wird eine Methode skizziert, bei der man mit einer Funktion arbeitet, die nur von der Geometrie des Randes, nicht aber von den Randwerten  $f(\vec{r})$ ,  $g(\vec{r})$  abhängt und auch nicht von  $\rho(\vec{r}')$ .

Definition der **Green-Funktion des Laplace-Operators** als Lösung der speziellen Poisson-Gleichung

$$\Delta' G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}'); \quad (2.16)$$

die Inhomogenität entspricht der Einheitspunktladung bei  $\vec{r}' = \vec{r} \in V$ . Eine spezielle Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung ist nach (1.53) durch die „freie“ Green-Funktion

$$G_0(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.17)$$



gegeben. Zur allgemeinen Lösung gelangt man durch Addition der allgemeinen Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Delta' \tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}') = 0, \quad (2.18)$$

also

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = G_0(\vec{r} - \vec{r}') + \tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (2.19)$$

wobei  $\tilde{G}$  zunächst beliebig von  $\vec{r}$  abhängen darf. Insbesondere muss nicht  $\tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}') = \tilde{G}(\vec{r}' - \vec{r})$ , auch nicht  $\tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}') = \tilde{G}(\vec{r}', \vec{r})$  gelten – weswegen auch  $G$  diese Eigenschaften nicht haben muss.

**Greensche Identitäten.** Gegeben seien ein skalares Feld  $\alpha(\vec{r})$  und ein Vektorfeld  $\vec{a}(\vec{r})$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \int_V \alpha \vec{\nabla} \cdot \vec{a} dV &= \int_V \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{a}) dV - \int_V \vec{\nabla} \alpha \cdot \vec{a} dV \\ &= \oint_S \alpha \vec{a} \cdot d\vec{S} - \int_V \vec{\nabla} \alpha \cdot \vec{a} dV \end{aligned} \quad (2.20)$$

mit dem Gaußschen Satz (1.21 a). Dabei ist  $V$  ein beliebiges Volumen und  $S$  seine Oberfläche. Sei speziell

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \beta(\vec{r}),$$

wo  $\beta(\vec{r})$  ein weiteres skalares Feld ist. Damit erhält man aus (2.20) die *erste Greensche Identität*:

$$\int_V \alpha \Delta \beta dV = \oint_S \alpha \vec{\nabla} \beta \cdot d\vec{S} - \int_V \vec{\nabla} \alpha \cdot \vec{\nabla} \beta dV. \quad (2.21 \text{ a})$$

Vertauschung von  $\alpha$  und  $\beta$ :

$$\int_V \beta \Delta \alpha dV = \oint_S \beta \vec{\nabla} \alpha \cdot d\vec{S} - \int_V \vec{\nabla} \beta \cdot \vec{\nabla} \alpha dV. \quad (2.21 \text{ b})$$

Subtraktion der beiden vorstehenden Gleichungen voneinander führt auf die *zweite Greensche Identität* – den **Greenschen Satz**:

$$\int_V (\alpha \Delta \beta - \beta \Delta \alpha) dV = \oint_S (\alpha \vec{\nabla} \beta - \beta \vec{\nabla} \alpha) \cdot d\vec{S}. \quad (2.22)$$

Im Hinblick auf spätere Anwendungen erwähnen wir die zu (2.20) analogen Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_V \alpha \vec{\nabla} \beta dV &= \int_V \vec{\nabla} (\alpha \beta) dV - \int_V \beta \vec{\nabla} \alpha dV \\ &= \oint_S \alpha \beta d\vec{S} - \int_V \beta \vec{\nabla} \alpha dV \end{aligned} \quad (2.23)$$

mit dem Gaußschen Satz (1.21 b) und

$$\begin{aligned} \int_V \alpha \vec{\nabla} \times \vec{a} dV &= \int_V \vec{\nabla} \times (\alpha \vec{a}) dV - \int_V \vec{\nabla} \alpha \times \vec{a} dV \\ &= \oint_S d\vec{S} \times \alpha \vec{a} - \int_V \vec{\nabla} \alpha \times \vec{a} dV \end{aligned} \quad (2.24)$$

mit dem Gaußschen Satz (1.21 c). Die Gln. (2.20, 23, 24) lassen sich zusammenfassen zu der Formel

$$\int_V dV \alpha \vec{\nabla} \circ = \oint_S d\vec{S} \alpha \circ - \int_V dV \vec{\nabla} \alpha \circ, \quad (2.25)$$

wo  $\circ$  für  $\cdot \vec{a}$  oder für  $\beta$  oder für  $\times \vec{a}$  steht. Vgl. *partielle Integration*.

Falls  $\vec{a}$  oder  $\beta$  auf  $S$  verschwinden, was in Anwendungen häufig vorkommt, verschwindet das Flächenintegral (der „Randterm“), somit

$$\int_V dV \alpha \vec{\nabla} \circ = - \int_V dV \vec{\nabla} \alpha \circ. \quad (2.26)$$

Der  $\vec{\nabla}$ -Operator wird hierbei unter Vorzeichenwechsel von einem auf den anderen Faktor „übergewälzt“ •

**Integralgleichung** für das elektrostatische Potenzial. Mit dem Greenschen Satz (2.22) gewinnt man die Identität

$$\begin{aligned} &\int_V \left( G(\vec{r}, \vec{r}') \Delta' \phi(\vec{r}') - \phi(\vec{r}') \Delta' G(\vec{r}, \vec{r}') \right) dV' \\ &= \oint_S \left( G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{\nabla}' \phi(\vec{r}') - \phi(\vec{r}') \vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}') \right) \cdot d\vec{S}'. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Die linke Seite (das Volumenintegral) vereinfacht sich mit (2.1, 16) zu

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \left( G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') - \phi(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') \right) dV' \\ & = \frac{1}{\varepsilon_0} \phi(\vec{r}) - \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' ; \end{aligned} \quad (2.28)$$

damit folgt

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) & = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' \\ & + \varepsilon_0 \oint_S \left( G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{\nabla}' \phi(\vec{r}') - \phi(\vec{r}') \vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}') \right) \cdot d\vec{S}' . \end{aligned} \quad (2.29)$$

In dieser Beziehung ist  $\phi(\vec{r})$  eine *beliebige* Lösung von (2.1) und  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  eine *beliebige* Lösung von (2.16). Die Integralgleichung (2.29) bildet gleichwohl die Grundlage für die Lösung des Randwertproblems der Elektrostatik (siehe unten).

**Spezialfall.** Sei  $V = \mathbb{R}^3$  und  $S$  die unendlich ferne Oberfläche mit  $\phi(\vec{r}) = 0$  und  $\vec{\nabla} \phi(\vec{r}) = \vec{0}$  daselbst; beides erfüllbar, sofern – was hier immer vorausgesetzt wird – die Ladungsverteilung im Unendlichen hinreichend stark abfällt. Die eindeutige Lösung dieses speziellen Dirichlet- bzw. von Neumann-Randwertproblems ist durch (1.56) gegeben. Die entsprechende Green-Funktion ist  $G = G_0$ ; diese bringt in (2.29) das Randintegral zum Verschwinden, und man erhält

$$\phi(\vec{r}) = \int G_0(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}') d^3 r' . \quad (2.30)$$

Ist hingegen  $V \neq \mathbb{R}^3$ , so wird  $\phi(\vec{r})$  nicht allein durch die Quellen  $\rho$ , sondern auch durch die Randwerte  $f$  bzw.  $g$  (nicht beide zugleich) auf  $S$  bestimmt. Die Freiheit in der Wahl von  $G$  wird dazu benutzt, um auch in diesem Fall aus (2.29) eine (formale) Lösung des Randwertproblems zu gewinnen.

Zuvor betrachten wir noch eine **wichtige Eigenschaft** der Lösungen der Laplace-Gleichung, d. h. des elektrischen Potentials in ladungsfreien Gebieten:  $\phi(\vec{r})$  besitzt dort *weder (relative) Minima, noch (relative) Maxima!* Das ist eine Konsequenz von (2.29). Setzt man dort  $\rho = 0$  und erneut  $G = G_0$ , so erhält man die Beziehung

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left( \frac{\vec{\nabla}' \phi(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\phi(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \cdot d\vec{S}' . \quad (2.31)$$

Wählt man für  $S$  eine (kleine) um  $\vec{r}$  zentrierte Kugel  $K$  vom Radius  $a$ , so vereinfacht sich (2.31) zu

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi a} \oint_K \vec{\nabla}' \phi(\vec{r}') \cdot d\vec{S}' + \frac{1}{4\pi a^2} \oint_K \phi(\vec{r}') dS' . \quad (2.32)$$

Das erste Integral verschwindet nach Voraussetzung ( $\rho = 0$ ) wegen des Gaußschen Gesetzes (1.61); das zweite Integral (inkl. Vorfaktor) ist gleich dem Mittelwert von  $\phi$  auf  $K$ :

$$\phi(\vec{r}) = \langle \phi \rangle_K . \quad (2.33)$$

Das schließt – da  $a$  beliebig klein sein kann – bei  $\vec{r}$  sowohl ein (relatives) Maximum, als auch ein (relatives) Minimum aus. Demnach gibt es im elektrostatischen Feld im Vakuum für ein geladenes Probeteilchen keine stabile Gleichgewichtslage. Wichtig für die Konstruktion sog. „Ionenfallen“.

Wir wenden uns jetzt dem Dirichletschen bzw. dem von Neumannschen Randwertproblem zu.

**Dirichlet-Problem.** Bestimme die Green-Funktion so, dass sie selbst der speziellen RB

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0 , \quad \vec{r}' \in S \quad (2.34)$$

genügt. Damit sowie mit (2.10) folgt aus (2.29):

$$\phi(\vec{r}) = \int_V G_D(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' - \varepsilon_0 \oint_S f(\vec{r}') \vec{\nabla}' G_D(\vec{r}, \vec{r}') \cdot d\vec{S}' . \quad (2.35)$$

Damit ist das ursprüngliche Randwertproblem (2.1, 10) durch das viel einfachere Randwertproblem (2.16, 34) ersetzt worden.

Die Dirichletsche Green-Funktion ist *symmetrisch*:

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = G_D(\vec{r}', \vec{r}) . \quad (2.36)$$

*Beweis.* Der Greensche Satz liefert die Identität

$$\begin{aligned} & \int_V \left( G_D(\vec{r}'', \vec{r}) \Delta G_D(\vec{r}', \vec{r}) - G_D(\vec{r}', \vec{r}) \Delta G_D(\vec{r}'', \vec{r}) \right) dV \\ &= \oint_S \left( G_D(\vec{r}'', \vec{r}) \vec{\nabla} G_D(\vec{r}', \vec{r}) - G_D(\vec{r}', \vec{r}) \vec{\nabla} G_D(\vec{r}'', \vec{r}) \right) \cdot d\vec{S} . \end{aligned} \quad (2.37)$$

Wegen (2.16, 34) wird daraus

$$-\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \left( G_D(\vec{r}'', \vec{r}) \delta(\vec{r}' - \vec{r}) - G_D(\vec{r}', \vec{r}) \delta(\vec{r}'' - \vec{r}) \right) dV = 0, \quad (2.38)$$

woraus unmittelbar die *Behauptung*  $G_D(\vec{r}'', \vec{r}') = G_D(\vec{r}', \vec{r}'')$  folgt.

*Konsequenz* der Symmetrie: Neben (2.16, 34) befriedigt  $G_D$  gleichermaßen

$$\Delta G_D(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.39)$$

und

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0, \quad \vec{r} \in S. \quad (2.40)$$

Bisher wurde gezeigt: Sofern das Dirichlet-Problem überhaupt lösbar ist, ist es eindeutig lösbar. Die hypothetische (!) Lösung berechnet man gemäß (2.35). Man kann verifizieren, dass (2.35) tatsächlich das Dirichlet-Problem löst.

Dazu denke man sich  $f(\vec{r})$  vom Rand von  $S$  aus beliebig, jedoch hinreichend glatt auf den ganzen Bereich  $V$  fortgesetzt. Umformung von (2.35) mit Hilfe der Greenschen Identität (2.21 a) und mit (2.16):

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \int_V G_D(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' \\ &\quad - \varepsilon_0 \int_V \left( f(\vec{r}') \Delta' G_D(\vec{r}, \vec{r}') + \vec{\nabla}' f(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' G_D(\vec{r}, \vec{r}') \right) dV' \\ &= \int_V G_D(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' + f(\vec{r}) - \varepsilon_0 \int_V \vec{\nabla}' f(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' G_D(\vec{r}, \vec{r}') dV' \\ &= \int_V G_D(\vec{r}, \vec{r}') \left( \rho(\vec{r}') + \varepsilon_0 \Delta' f(\vec{r}') \right) dV' + f(\vec{r}). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Im letzten Schritt wurde – in Analogie zu (2.26) – partiell integriert; dabei verschwand wegen (2.34) der Randterm. (2.41) ist äquivalent zu (2.35).

Man erkennt nun leicht: Der Ausdruck (2.41)

- befriedigt wegen (2.39) die Poisson-Gleichung,

- nimmt wegen (2.40) auf  $S$  den Randwert  $f(\vec{r})$  an.

Damit ist für den Fall des reinen Dirichlet-Problems der oben angesprochene Existenzbeweis erbracht.

**von Neumann-Problem.** In diesem Fall vermutet man in Analogie zu (2.34) für die Greensche Funktion die RB

$$\vec{\nabla}' G_N(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \hat{n}(\vec{r}') = 0, \quad \vec{r}' \in S. \quad (2.42)$$

Diese Bedingung ist aber nicht erfüllbar. Denn einerseits folgt durch Integration von (2.16) über  $V$ :

$$\int_V \Delta' G(\vec{r}, \vec{r}') dV' = -\frac{1}{\varepsilon_0}; \quad (2.43)$$

andererseits ergibt die Greensche Identität (2.21 a) (mit  $\alpha = 1$ ):

$$\int_V \Delta' G(\vec{r}, \vec{r}') dV' = \oint_S \vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot d\vec{S}'. \quad (2.44)$$

Folglich:

$$\oint_S \vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot d\vec{S}' = -\frac{1}{\varepsilon_0}, \quad (2.45)$$

was mit der Forderung (2.42) unverträglich ist. Daher statt(2.42) die *Forderung*:

$$\vec{\nabla}' G_N(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \hat{n}(\vec{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0 S}, \quad \vec{r}' \in S, \quad (2.46)$$

wo  $S$  der Flächeninhalt des Randes (kein Extrasymbol) ist. Die Forderung (2.46) ist mit (2.45) verträglich. Für  $S \rightarrow \infty$  geht (2.46) in (2.42) über.

Mit (2.46) sowie (2.11) folgt aus (2.29):

$$\phi(\vec{r}) = \langle \phi \rangle + \int_V G_N(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' + \varepsilon_0 \oint_S G_N(\vec{r}, \vec{r}') g(\vec{r}') dS'; \quad (2.47)$$

dabei ist

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{S} \oint_S \phi(\vec{r}') dS' \quad (2.48)$$

das mittlere elektrische Potenzial auf dem Rand – eine unbekannte additive Konstante, die durch die von Neumann-RB nicht festgelegt wird (vgl. den Eindeutigkeitsbeweis).

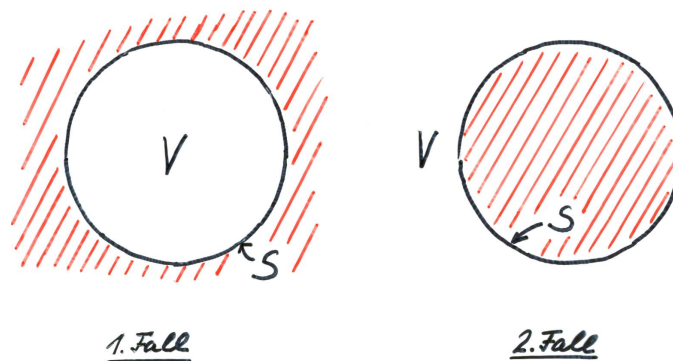
Mit (2.47) ist das ursprüngliche Randwertproblem (2.1, 11) durch das viel einfachere Randwertproblem (2.16, 46) ersetzt worden.

Auch für den Fall des von Neumann-Problems kann bewiesen werden, dass (2.47) nicht nur hypothetisch, sondern tatsächlich die gesuchte Lösung darstellt. Hier nicht! Es sei noch angemerkt, dass  $G_N(\vec{r}, \vec{r}')$  nicht automatisch symmetrisch ist (wie  $G_D(\vec{r}, \vec{r}')$ ), jedoch so gewählt werden kann.

Durch die vorstehenden Überlegungen ist das **Randwertproblem der Elektrostatik** natürlich noch nicht endgültig gelöst. Es ist jedoch erheblich vereinfacht worden:

Statt (2.1) mit den RB (2.10, 11) hat man „nur noch“ (2.16) mit den RB (2.34, 46) zu lösen und dann die Integration (2.35) bzw. (2.47) auszuführen. Statt direkt  $\phi(\vec{r})$  zu berechnen, sucht man zunächst eine passende Green-Funktion auf; diese genügt einer besonders einfachen Poisson-Gleichung (Punktladung als Quelle) und besonders einfachen Randbedingungen (rein geometrieabhängig); mit Hilfe von  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  reduziert sich die Berechnung des elektrischen Potentials auf ein Integrationsproblem. Die verbleibende Problematik der  $G$ -Bestimmung und der abschließenden Integration ist aber im allgemeinen keinesweg simpel.

**Beispiel: Kugel mit Dirichlet-RB:**



• Abbildung 2.2 •

d. h.  $V$  als Inneres bzw. als Äußeres der Kugel (Radius  $a$ ). Im 1. Falle besteht  $S$  nur aus der Kugelfläche, im 2. Falle zusätzlich aus der unendlich fernen Oberfläche. Nach (2.17 - 19) ist in beiden Fällen

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|} + \tilde{G}_D(\vec{r}, \vec{r}') \quad (2.49)$$

mit  $\tilde{G}_D$  Lösung der Laplace-Gleichung für  $\vec{r}' \in V$ :

$$\Delta' \tilde{G}_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad (2.50)$$

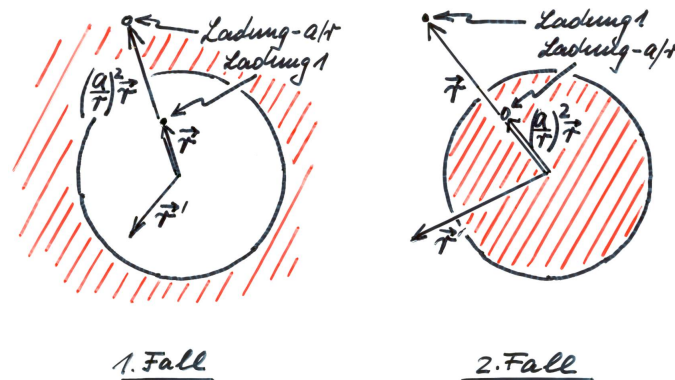
dergestalt, dass für  $\vec{r}' \in S$  gilt:

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0. \quad (2.51)$$

Lösung durch *Methode der Bilder* suggeriert: Der  $G_0$ -Term entspricht dem Potenzial der Ladung 1 bei  $\vec{r} \in V$ ; dieses wird auf  $S$  durch das Potenzial  $\tilde{G}_D$  der Bildladung  $-a/r$  bei  $(a/r)^2 \vec{r} \notin V$ , d. h.

$$\tilde{G}_D(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{r|(a/r)^2 \vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (2.52)$$

zu null kompensiert:



• Abbildung 2.3 •

Da die Bildladung in jedem Fall außerhalb von  $V$  liegt, ist (2.52) Lösung von (2.50). Somit gilt in beiden Fällen gleichermaßen

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{a/r}{|(a/r)^2 \vec{r} - \vec{r}'|} \right). \quad (2.53)$$

Dieser Ausdruck verschwindet – wie in (2.51) gefordert – für  $\vec{r}' \in S$ :

- auf der Kugel  $\vec{r}' = a \hat{r}'$
- asymptotisch für  $r' \rightarrow \infty$  (im 2. Fall).



Wegen der Kugelsymmetrie des Randes empfiehlt es sich, (2.53) in *Kugelkoordinaten* anzugeben:

$$G_D(r, \vartheta, \varphi, r', \vartheta', \varphi') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 r'^2 / a^2 + a^2 - 2rr' \cos \gamma}} \right), \quad (2.54)$$

wo  $\gamma$  der Winkel zwischen  $\vec{r}$  und  $\vec{r}'$  ist:

$$\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi'). \quad (2.55)$$

An (2.54, 55) erkennt man unmittelbar die Symmetrie von  $G_D$  in den Variablen  $\vec{r}$  und  $\vec{r}'$  (2.36) und das Verschwinden von  $G_D$  für  $\vec{r}, \vec{r}'$  auf der Kugel gemäß (2.34, 40).

Für die Berechnung des elektrischen Potentials gemäß (2.35) benötigt man außer der Green-Funktion  $G_D$  selbst deren Normalkomponente auf dem Rand, d. h. in unserem Fall die Radialkomponente auf der Kugel:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}' G_D(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \hat{n}(\vec{r}') \Big|_{\vec{r}' \in S} &= \pm \frac{\partial}{\partial r'} G_D(r, \vartheta, \varphi, r', \vartheta', \varphi') \Big|_{r'=a} \\ &= \pm \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2 - a^2}{a \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma}^3}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

wobei  $\pm$  für das innere / das äußere Dirichlet-Problem stehen.  $G_D$  gemäß (2.54, 55) und  $(\partial G_D / \partial r') \Big|_a$  gemäß (2.56) sind – zusammen mit  $\rho(r', \vartheta', \varphi')$  und  $f(a, \vartheta', \varphi')$  – in (2.35) einzusetzen:

$$\begin{aligned} \phi(r, \vartheta, \varphi) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{0,a}^{a,\infty} dr' r'^2 \int_{-1}^{+1} d \cos \vartheta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \times \\ &\times \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 r'^2 / a^2 + a^2 - 2rr' \cos \gamma}} \right) \rho(r', \vartheta', \varphi') \quad (2.57) \\ &\mp \frac{a(r^2 - a^2)}{4\pi} \int_{-1}^{+1} d \cos \vartheta' \int_0^{2\pi} d\varphi' f(a, \vartheta', \varphi') \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma}^3}. \end{aligned}$$

Kein Beitrag der unendlich fernen Oberfläche (im 2. Fall), sofern  $f$  dort verschwindet. Damit ist – bis auf die Integration – das gestellte Randwertproblem vollständig gelöst.

Im Allgemeinen ist es nicht möglich, die Greensche Funktion in Anlehnung an die Methode der Bilder zu erraten. Dann hat man sich anderweitig um die Lösung der speziellen Poisson-Gleichung (2.16) unter den RB (2.34, 46) zu bemühen. Eine sehr wichtige Methode ist die Entwicklung von  $G$  nach einem geeigneten *vollständigen Satz orthonormierter Funktionen* (bekanntes Beispiel: Fourier-Reihe). Dieser Ansatz ist dann besonders wirksam, wenn das betrachtete Randwertproblem Symmetrien aufweist und die Basisfunktionen diese Symmetrien widerspiegeln. Wir erläutern das Verfahren am Spezialfall der *Kugelsymmetrie*.

Zur Einführung befassen wir uns zunächst mit der Lösung der Laplace-Gleichung (2.8); d. h. wir fragen nach dem elektrischen Potenzial  $\phi(\vec{r})$  im Vakuum  $\rho(\vec{r}) = 0$  – bei kugelförmigen Randflächen. Es wird sich zeigen, dass man dafür  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  gar nicht benötigt. Wir betrachten sodann die Situation mit Raumladung  $\rho(\vec{r}) \neq 0$ , d. h. es geht um die Lösung der Poisson-Gleichung (2.1). Dafür ist, wie vorstehend beschrieben, die Green-Funktion ein sehr wichtiges Hilfsmittel. Wir zeigen, wie man  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  bei kugelförmigen Randflächen mit der zuvor an der Gleichung  $\Delta\phi = 0$  studierten Methode berechnet, nämlich der Entwicklung nach *Kugelfunktionen*.

#### Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten:

$$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right) \right) \phi(r, \vartheta, \varphi) = 0. \quad (2.58)$$

Lösungsversuch mit *Produktansatz*

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r} U(r) Y(\vartheta, \varphi) \quad (2.59)$$

führt nach Multiplikation der Laplace-Gleichung mit  $r^3 / UY$  auf

$$r^2 \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{Y} \left( \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right) Y = 0. \quad (2.60)$$

Da der erste Term nur von  $r$ , der zweite nur von  $\vartheta, \varphi$  abhängt, die *Separation*:

$$r^2 \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} = l(l+1) \quad (2.61)$$

$$\frac{1}{Y} \left( \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right) Y = -l(l+1), \quad (2.62)$$

$l(l+1)$  eine Konstante.

Der weitere *Produktansatz*

$$Y(\vartheta, \varphi) = P(\vartheta) Q(\varphi) \quad (2.63)$$

bringt (2.62) – nach Multiplikation mit  $\sin^2 \vartheta$  – auf die Gestalt

$$\frac{\sin^2 \vartheta}{P} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} + l(l+1) \right) P + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = 0. \quad (2.64)$$

Erneute *Separation* – erster Term nur von  $\vartheta$ , zweiter nur von  $\varphi$  abhängig:

$$\frac{\sin^2 \vartheta}{P} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} + l(l+1) \right) P = m^2 \quad (2.65)$$

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -m^2, \quad (2.66)$$

$m^2$  eine Konstante.

Damit ist die partielle Differentialgleichung  $\Delta \phi = 0$  in drei gewöhnliche Differentialgleichungen für die drei  $\phi$ -Faktoren  $U(r)$ ,  $P(\vartheta)$ ,  $Q(\varphi)$  separiert:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) U(r) = 0 \quad (2.67)$$

$$\left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} + l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right) P(\vartheta) = 0 \quad (2.68)$$

$$\left( \frac{d^2}{d\varphi^2} + m^2 \right) Q(\varphi) = 0. \quad (2.69)$$

**Gleichung (2.69)** hat die Lösungen

$$Q(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad (2.70)$$

mit ganzzahligem  $m = \dots -2, -1, +1, +2 \dots$ , durch die Forderung nach Eindeutigkeit erzwungen ( $Q(0) = Q(2\pi)$ ). Bezeichnung der zu  $m$  gehörigen Lösung mit  $Q_m(\varphi)$ .  $Q_m(\varphi)$ ,  $Q_{-m}(\varphi)$  bilden für  $m \neq 0$  eine Basis im Lösungsraum der Differentialgleichung (2.69).

Die Funktionen  $Q_m(\varphi)$  sind auf dem Einheitskreis (Intervall  $(0, 2\pi)$ ) *orthonormiert*:

$$\int_0^{2\pi} Q_{m'}^*(\varphi) Q_m(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(m'-m)\varphi} d\varphi = \delta_{m'm} \quad (2.71)$$

und *vollständig*, d. h. jede  $2\pi$ -periodische Funktion  $f(\varphi)$  kann danach entwickelt werden:

$$f(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m Q_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{im\varphi}, \quad (2.72)$$

*Fourier-Reihe*, mit den Entwicklungskoeffizienten

$$a_m = \int_0^{2\pi} Q_m^*(\varphi) f(\varphi) d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-im\varphi} f(\varphi) d\varphi. \quad (2.73)$$

Einsetzen von (2.73) in (2.72) ergibt

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= \int_0^{2\pi} \sum_m Q_m(\varphi) Q_m^*(\varphi') f(\varphi') d\varphi' \\ \Rightarrow \sum_m Q_m(\varphi) Q_m^*(\varphi') &= \frac{1}{2\pi} \sum_m e^{im(\varphi-\varphi')} = \delta(\varphi - \varphi'). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Bezeichnung dieser Gleichung als *Vollständigkeitsrelation*.

**Gleichung (2.68)** geht durch die Transformation

$$x = \cos \vartheta \quad (2.75)$$

über in

$$\left( \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{d}{dx} + l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P(x) = 0. \quad (2.76)$$

Diese Differentialgleichung wird in zwei Etappen besprochen: erst  $m = 0$ , dann  $m \neq 0$ .

**$m = 0$ :** In diesem Spezialfall hat man es mit der **Legendreschen Differentialgleichung** zu tun:

$$\left( \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{d}{dx} + l(l+1) \right) P(x) = 0. \quad (2.77)$$

Lösungsansatz in Form einer *Potenzreihe*:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad -1 \leq x \leq +1; \quad (2.78)$$

die Koeffizienten  $a_n$  sind zu bestimmen. Einsetzen von (2.78) in (2.77) liefert die *Rekursionsformel*

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - l(l+1)}{(n+1)(n+2)} a_n . \quad (2.79)$$

Berechnung der  $a_n$  mit Hilfe von (2.79) und unter den „Anfangsbedingungen“

$$P(0) = a_0 , \quad P'_0(0) = a_1 , \quad (2.80)$$

d. h. Vorgabe der Koeffizienten  $a_0$  und  $a_1$ .

*Zwei Spezialfälle:*

- $a_0 \neq 0, a_1 = 0 \Rightarrow P(-x) = P(x)$  gerade Funktion;
- $a_0 = 0, a_1 \neq 0 \Rightarrow P(-x) = -P(x)$  ungerade Funktion.

$x \rightarrow -x$  bedeutet  $\vartheta \rightarrow \pi - \vartheta$ , also hat man in den beiden Fällen Symmetrie bzw. Antisymmetrie von  $P(\vartheta)$  bzgl. der  $xy$ -Ebene. Durch Superposition gewinnt man die allgemeine Lösung.

Aus (2.79) folgt

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} ; \quad (2.81)$$

das bedeutet *singuläres* Verhalten von  $P(x)$  bei  $x = \pm 1$  – sofern die Potenzreihe nicht abbricht. Zu *regulärem* Verhalten von  $P(x)$  im ganzen Intervall  $[-1, +1]$  gelangt man, wenn die Potenzreihe abbricht, so dass  $P(x)$  zu einem Polynom wird. Das ist nach (2.79) der Fall für

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots , \quad (2.82)$$

und zwar für gerades  $l$  bei der geraden Potenzreihe ( $a_0 \neq 0, a_1 = 0$ ) und für ungerades  $l$  bei der ungeraden Potenzreihe ( $a_0 = 0, a_1 \neq 0$ ). (Für gerades/ungerades  $l$  bricht die ungerade/gerade Potenzreihe nicht ab: singuläre Lösung).

Bezeichnung der resultierenden, abwechselnd symmetrischen und antisymmetrischen Polynome vom Grade  $l$  als **Legendre-Polynome**:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= a_0 , & P_1(x) &= a_1 x , \\ P_2(x) &= a_0 (1 - 3x^2) , & P_3(x) &= a_1 \left( x - \frac{5}{3} x^3 \right) , \quad \dots \end{aligned} \quad (2.83)$$

Man verfügt über  $a_0, a_1$  üblicherweise so, dass gilt:

$$P_l(1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P_l(-1) = (-1)^l; \quad (2.84)$$

dann erhält man

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad \dots \end{aligned} \quad (2.85)$$

Darstellung der Legendre-Polynome durch die *Rodriguez-Formel*:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l. \quad (2.86)$$

*Beweis:* (2.86) befriedigt die Differentialgleichung (2.77), ist regulär und erfüllt die Normierung (2.84).

*Orthogonalität und Normierung:*

$$\int_{-1}^{+1} P_{l'}(x) P_l(x) dx = \frac{2 \delta_{l'l}}{2l + 1}. \quad (2.87)$$

*Beweis* mit der Differentialgleichung (2.77) und der Rodriguez-Formel (2.86) sowie mit partieller Integration. Die Festlegung  $P_l(1) = 1$  und Normierung auf 1, d. h.  $\int_{-1}^{+1} P_l^2(x) dx = 1$ , sind unvereinbar.

*Vollständigkeit.* Jede reguläre Funktion  $g(x)$  lässt sich im Intervall  $[-1, +1]$  nach den  $P_l(x)$  entwickeln:

$$g(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(x). \quad (2.88)$$

*Beweis:*  $1, x, x^2, x^3, \dots$  vollständig,  $P_l(x)$  durch Orthogonalisierung nach Schmidt.

Für die Entwicklungskoeffizienten folgt aus (2.88) mit (2.87):

$$a_l = \frac{2l + 1}{2} \int_{-1}^{+1} P_l(x) g(x) dx. \quad (2.89)$$

Einsetzen von (2.89) in (2.88) liefert die *Vollständigkeitsrelation*

$$\sum_l \frac{2l+1}{2} P_l(x) P_l(x') = \delta(x-x'). \quad (2.90)$$

Ein wichtiges *Beispiel* für (2.88) ist die Entwicklung (ohne Beweis)

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xy+y^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} y^l P_l(x) \quad (2.91)$$

für  $|y| < 1$ . Bezeichnung der linken Seite als *erzeugende Funktion* der Legendre-Polynome. Mit

$$x = \cos \gamma, \quad y = r'/r \quad (r' < r) \quad (2.92)$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \gamma + r'^2}} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \\ \Rightarrow \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\hat{r} \cdot \hat{r}'), \end{aligned} \quad (2.93)$$

wobei  $r_{<}/r_{>}$  der kleinere/größere der beiden Beträge  $r$  und  $r'$  ist und  $\gamma$  der Winkel zwischen  $\hat{r}$  und  $\hat{r}'$  ist; siehe (2.55). Nach (2.17) handelt es sich in (2.93) – bis auf den Faktor  $1/4\pi\epsilon_0$  – um die *Entwicklung der Green-Funktion  $G_0$  nach Legendre-Polynomen*. Diese ist von größter Bedeutung für Anwendungen in der Potenzialtheorie.

$m \neq 0$ . Anwendung des Operators

$$D_m = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} \quad (2.94)$$

auf die Legendresche Differentialgleichung (2.77) führt nach einiger Rechnung (hier nicht) auf die allgemeine Differentialgleichung (2.76):

$$\left( \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{d}{dx} + l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) D_m P_l(x) = 0, \quad (2.95)$$

Bezeichnung der Funktionen

$$\begin{aligned} P_l^m(x) &= D_m P_l(x) \\ &= \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \end{aligned} \quad (2.96)$$

als **zugeordnete Legendre-Funktionen**; durch (2.96) definiert für

$$m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l ; \quad (2.97)$$

dabei ist  $P_l^0(x) = P_l(x)$ . Die  $P_l^m(x)$  sind die im Intervall  $[-1, +1]$  regulären Lösungen der Differentialgleichung (2.76); homogene Polynome vom Integral  $l$  in  $\cos \vartheta$  und  $\sin \vartheta$ .

*Symmetrien:*

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \quad (2.98 \text{ a})$$

$$P_l^m(-x) = (-1)^{l+m} P_l^m(x) . \quad (2.98 \text{ b})$$

*Beweis* dieser Eigenschaften mit Hilfe der Definition (2.96).

*Orthogonalität und Normierung:*

$$\int_{-1}^{+1} P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2 \delta_{ll'}}{2l+1} . \quad (2.99)$$

*Beweis* analog zum Beweis von (2.87) (Spezialfall von (2.99)): Benutze die allgemeine Differentialgleichung (2.76) und die verallgemeinerte Rodriguez-Formel (2.96).

Damit besitzt Gleichung (2.68) die regulären Lösungen

$$P(\vartheta) = P_l^m(\cos \vartheta) , \quad \begin{array}{l} l = 0, 1, 2, 3, \dots \\ m = -l \dots, +l . \end{array} \quad (2.100)$$

**Gleichung (2.67)** hat die allgemeine Lösung

$$U(r) = A r^{l+1} + B r^{-l} , \quad (2.101)$$

wo  $A, B$  zwei beliebige Integrationskonstanten sind.

Aufgrund der vorstehenden Überlegungen besitzt die *Laplace-Gleichung* (2.58) die folgenden *speziellen Lösungen*

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = (A r^l + B r^{-l-1}) P_l^m(\cos \vartheta) Q_m(\varphi) . \quad (2.102)$$

Die *allgemeine Lösung* erhält man durch Überlagerung dieser Funktionen.



Es ist üblich und sinnvoll, die beiden Winkelfunktionen in (2.102) gemäß (2.63) zu einer einzigen Funktion zusammenzufassen. **Kugelfunktionen:**

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}; \quad (2.103)$$

auf der Einheitskugel *orthonormiert*:

$$\int Y_{l'm'}^*(\vartheta, \varphi) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) d\Omega = \delta_{l'l} \delta_{m'm}, \quad (2.104)$$

was unmittelbar aus (2.71, 99) folgt; ferner *vollständig* auf der Einheitskugel: Jede auf der Einheitskugel reguläre Funktion  $h(\vartheta, \varphi)$  lässt sich nach Kugelfunktionen entwickeln (ohne Beweis):

$$h(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (2.105 \text{ a})$$

mit

$$a_{lm} = \int Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) h(\vartheta, \varphi) d\Omega \quad (2.105 \text{ b})$$

und der *Vollständigkeitsrelation*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') = \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta') \delta(\varphi - \varphi'). \quad (2.106)$$

Kugelfunktionen mit den *niedrigsten Indizes*:

$$Y_{00}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \quad (2.107 \text{ a})$$

$$Y_{10}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta$$

$$Y_{1,\pm 1}(\vartheta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi} \quad (2.107 \text{ b})$$

$$Y_{20}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \vartheta - 1)$$

$$Y_{2,\pm 1}(\vartheta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{\pm i\varphi} \quad (2.107 \text{ c})$$

$$Y_{2,\pm 2}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \vartheta e^{\pm 2i\varphi}.$$

Weitere Eigenschaften:

$$Y_{l0}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \vartheta), \quad (2.108)$$

folgt aus den vorstehenden Definitionen;

$$Y_{l,-m}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi), \quad (2.109)$$

folgt aus (2.98 a) und wegen  $e^{-im\varphi} = (e^{im\varphi})^*$ ;

$$Y_{lm}(\pi - \vartheta, \varphi + \pi) = (-1)^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (2.110)$$

folgt mit (2.98 b) und wegen  $e^{im\pi} = (-1)^m$ : Vorzeichenwechsel bei Inversion am Koordinatenursprung, d. h. ungerade (negative) *Parität*, für  $l = 1, 3, 5, \dots$ ; kein Vorzeichenwechsel bei dieser Operation, d. h. gerade (positive) *Parität*, für  $l = 0, 2, 4, \dots$

**Additionstheorem:**

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi'), \quad (2.111)$$

wobei  $\gamma$  gemäß (2.55) der Winkel zwischen der „gestrichenen“ und der „ungestrichenen“ Richtung ist.

*Beweis:* Entwicklung von  $P_l(\cos \gamma)$  nach den  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ . Als Entwicklungskoeffizienten erhält man  $(4\pi/2l+1) Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi')$ , wobei nur diejenigen  $l$  beitragen, die dem Index von  $P_l(\cos \gamma)$  entsprechen.

Für den Spezialfall  $\gamma = 0$  folgt aus (2.111) die Beziehung

$$\sum_m |Y_{lm}(\vartheta, \varphi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}. \quad (2.112)$$

Eine wichtige Anwendung des Additionstheorems ist die *Entwicklung der Green-Funktion  $G_0$  nach Kugelfunktionen*. Mit (2.111) folgt nämlich aus (2.93):

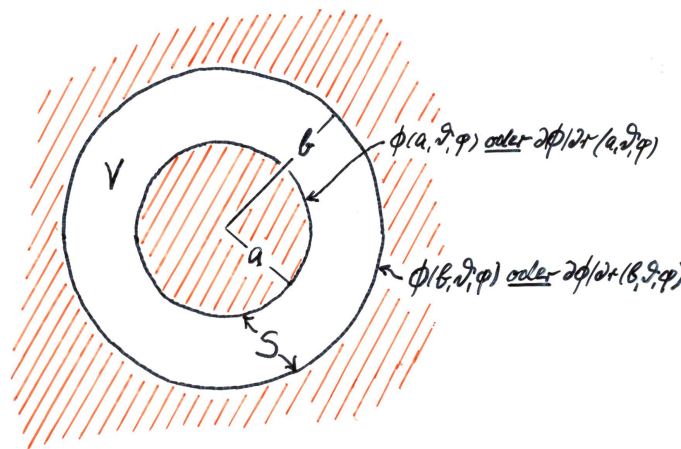
$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi'). \quad (2.113)$$

Jeder Term in dieser Summe ist in den Koordinaten  $\vec{r}$ ,  $\vec{r}'$  vollständig faktorisiert.

Mit (2.102, 103) kann man schließlich die **allgemeine Lösung** der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten folgendermaßen darstellen:

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1}) Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (2.114)$$

Die Festlegung der Koeffizienten  $A_{lm}, B_{lm}$ , d. h. einer **speziellen Lösung**, erfolgt durch die Vorgabe von Randbedingungen. Die  $\phi$ -Entwicklung (2.114) ist besonders geeignet für kugelförmige Randflächen, auf denen Dirichlet- oder von Neumann-RB gegeben sind; z. B.:



• Abbildung 2.4 •

Das obige **Beispiel** der Kugel mit Dirichlet-RB ist ein Spezialfall und ist mit der Methode der Entwicklung von  $\phi$  nach Kugelfunktionen wie folgt zu lösen (andere Probleme analog lösbar):

1. Fall ( $r < a$ ): Sofern man Regularität von  $\phi$  im Inneren der Kugel verlangt, gilt

$$B_{lm} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l,m} A'_{lm} \left(\frac{r}{a}\right)^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (2.115)$$

mit

$$A'_{lm} = a^l A_{lm} = \int Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') f(a, \vartheta', \varphi') d\Omega' . \quad (2.116)$$

2. Fall ( $r > a$ ): Sofern man außerhalb der Kugel asymptotischen Abfall von  $\phi$  fordert, ist

$$A_{lm} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l,m} B'_{lm} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (2.117)$$

mit

$$B'_{lm} = a^{-l-1} B_{lm} = \int Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') f(a, \vartheta', \varphi') d\Omega' ; \quad (2.118)$$

d. h. es ist  $A'_{lm} = B'_{lm}$ . Die vorstehende Lösung ist äquivalent zum Flächenintegral in (2.57) (ohne Beweis). Für ein Flächenintegral dort hat man sich in (2.116, 118) theoretisch zwar *unendlich viele* Flächenintegrale eingehandelt. Doch sind letztere in der Praxis wesentlich einfacher zu berechnen als ersteres, und man benötigt in der Regel für eine befriedigende approximative Lösung nur einige wenige von ihnen (hängt vom Randpotenzial  $f(a, \vartheta', \varphi')$  ab).

Außerdem vereinfachen weitere Symmetrien u. U. das Resultat erheblich. Sei z. B. das Randpotenzial *zylindersymmetrisch* bezüglich der  $z$ -Achse, d. h. unabhängig von  $\varphi$ :

$$f = f(a, \vartheta) ; \quad (2.119)$$

dann tragen nur Terme mit  $m = 0$  bei, weil nur die  $Y_{l0}$  unabhängig vom Azimutalwinkel sind. Mit (2.108, 119) wird aus (2.115 - 118):

$$\phi(r, \vartheta) = \sum_l A_l \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{r}{a}\right)^l \\ \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \end{array} \right\} P_l(\cos \vartheta) \quad (2.120)$$

mit – wegen (2.89) –

$$A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} P_l(\cos \vartheta') f(a, \vartheta') d \cos \vartheta' . \quad (2.121)$$

Die Zylindersymmetrie ist im Randintegral von (2.57) viel schwieriger ausnutzbar.

**Poisson-Gleichung.** Im Falle  $\rho \neq 0$  wird die *Green-Funktion* benötigt (nicht zwingend, aber sehr vorteilhaft). Da im Falle kugelsymmetrischer Ränder  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  nur von  $r, r'$  und  $\gamma$  abhängt, hat man die Entwicklung:

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_l (2l+1) g_l(r, r') P_l(\cos \gamma) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l,m} g_l(r, r') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') . \end{aligned} \quad (2.122)$$

Diese hat die spezielle Poisson-Gleichung (2.16) zu befriedigen. Für die dortige  $\delta$ -Inhomogenität gilt die Entwicklung:

$$\begin{aligned}\delta(\vec{r} - \vec{r}') &= \left| \det \frac{\partial(r, \cos \vartheta, \varphi)}{\partial(x, y, z)} \right| \delta(r - r') \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta') \delta(\varphi - \varphi') \\ &= \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \sum_{l, m} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi')\end{aligned}\quad (2.123)$$

mit (2.106). Einsetzen von (2.122, 123) in (2.16):

$$\Delta' \sum_{l, m} g_l(r, r') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') = -\frac{1}{r^2} \delta(r - r') \sum_{l, m} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi'). \quad (2.124)$$

Mit (2.58, 62) und wegen der Eindeutigkeit der Entwicklung nach Kugelfunktionen erhält man aus (2.124) für  $g_l(r, r')$  die Differentialgleichung

$$\left( \frac{1}{r'} \frac{d^2}{dr'^2} r' - \frac{l(l+1)}{r'^2} \right) g_l(r, r') = -\frac{1}{r^2} \delta(r - r'). \quad (2.125)$$

Statt mit der partiellen Differentialgleichung (2.16) hat man sich also mit der gewöhnlichen Differentialgleichung (2.125) auseinanderzusetzen – für  $l = 0, 1, 2, \dots$  Gl. (2.125) ist so zu lösen, dass  $G$  die geforderten Randbedingungen vom Dirichlet- oder von Neumann-Typ erfüllt.

Für das **Beispiel** erhält man (ohne Beweis)

$$g_l(r, r') = \frac{1}{2l+1} \begin{cases} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} - \frac{1}{a} \left( \frac{r r'}{a^2} \right)^l \\ \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} - \frac{1}{a} \left( \frac{a^2}{r r'} \right)^{l+1} \end{cases} \quad (2.126)$$

im 1. bzw. 2. Falle. In beiden Fällen ist  $g_l$  symmetrisch:

$$g_l(r, r') = g_l(r', r) \quad (2.127)$$

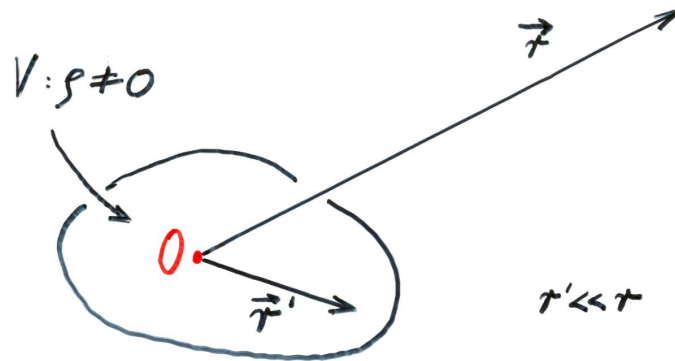
und verschwindet für  $r = a$  oder  $r' = a$ ; im 2. Falle außerdem asymptotisch für  $r, r' \rightarrow \infty$ . Das Resultat (2.126) erhält man natürlich auch, wenn man die bekannte (!) Green-Funktion (2.53) gemäß (2.113) nach Kugelfunktionen entwickelt.

Bei Problemen mit anderer Symmetrie (zylindrisch, elliptisch, ...) hat man mit anderen, entsprechend angepassten VON-Funktionensystemen zu arbeiten.

### Multipolentwicklung

- der Elektrostatik
- der Magnetostatik

**Elektrostatik.** Gegeben sei eine *statische Ladungsverteilung*  $\rho(\vec{r}')$ , die ganz auf einen endlichen Raumbereich  $V$  beschränkt sei:



• Abbildung 2.5 •

Das von dieser Ladungsverteilung erzeugte elektrische Potenzial  $\phi(\vec{r})$  ist im Prinzip gemäß (1.56) berechenbar. Die Auswertung dieses Integrals ist jedoch i. a. sehr schwierig. Außerdem interessiert in vielen Fällen (meistens)  $\phi(\vec{r})$  gar nicht im ganzen Raum, sondern nur in der *Fernzone* ( $r \gg r'$ ). Darum im Folgenden Analyse des asymptotischen Verhaltens von  $\phi(\vec{r})$  (im Limes  $r \rightarrow \infty$ ) durch Entwicklung nach  $1/r$ -Potenzen – statt kompletter  $\phi(\vec{r})$ -Berechnung inkl. *Nahzone*  $r \simeq r'$ . Das ist rechnerisch einfacher und physikalisch (in vieler Hinsicht) aufschlussreicher.

Falls  $Q = \int \rho(\vec{r}') dV \neq 0$  ist, erwartet man  $\phi(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} Q / 4\pi\epsilon_0 r$ , weil die Ladungsverteilung „von weitem“ wie eine Punktladung „aussieht“. Trifft diese Erwartung zu? Was gilt asymptotisch, falls  $Q = 0$  ist?

Nach (2.93, 85) hat man die Reihenentwicklung ( $r_< = r', r_> = r$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{r} \sum_l \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\hat{r} \cdot \hat{r}') \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r^2 r'^2}{2r^5} + \dots \end{aligned} \tag{2.128}$$

Einsetzen in (1.56) führt auf die  $\phi$ -Zerlegung

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} & \left( \frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}') dV' + \frac{1}{r^3} \vec{r} \cdot \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' \right. \\ & \left. + \frac{1}{2r^5} \vec{r} \cdot \int (3\vec{r}'\vec{r}' - r'^2 \mathbb{1}) \rho(\vec{r}') dV' \cdot \vec{r} + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.129)$$

Bei Einführung des *Monopolmoments* (Skalar) = *Ladung*

$$Q = \int \rho(\vec{r}') dV' , \quad (2.130)$$

des *Dipolmoments* (Vektor)

$$\vec{p} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' , \quad (2.131)$$

des *Quadrupolmoments* (Tensor)

$$\overleftrightarrow{Q} = \int (3\vec{r}'\vec{r}' - r'^2 \mathbb{1}) \rho(\vec{r}') dV' \quad (2.132)$$

usw. hat man

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \left( \frac{Q}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} + \frac{\vec{r} \cdot \overleftrightarrow{Q} \cdot \vec{r}}{2r^5} + \dots \right) \\ &= \phi_0(\vec{r}) + \phi_1(\vec{r}) + \phi_2(\vec{r}) + \dots \end{aligned} \quad (2.133)$$

mit dem *Monopolpotenzial*

$$\phi_0(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} , \quad (2.134)$$

dem *Dipolpotenzial*

$$\phi_1(\vec{r}) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} , \quad (2.135)$$

dem *Quadrupolpotenzial*

$$\phi_2(\vec{r}) = \frac{\vec{r} \cdot \overleftrightarrow{Q} \cdot \vec{r}}{8\pi\epsilon_0 r^5} \quad (2.136)$$

usw. Bezeichnung der  $\phi$ -Zerlegung (2.133) als *Multipolentwicklung* des (statischen) elektrischen Potenzials.

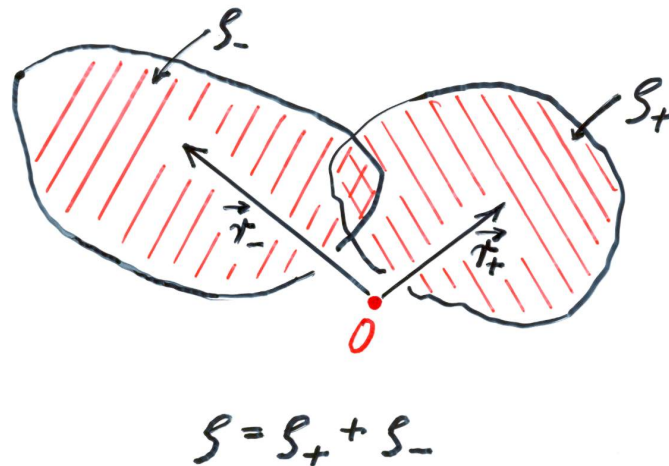
Falls  $Q \neq 0$  ist, bezeichnet man die Ladungsverteilung als **elektrischen Monopol** mit dem Moment (der Ladung)  $Q$ . Das Potenzial wird in der Fernzone  $r \gg r'$  durch den Monopolterm dominiert:

$$\phi(\vec{r}) \simeq \phi_0(\vec{r}) , \quad (2.137)$$

d. h.  $\phi(\vec{r})$  verhält sich asymptotisch wie bei einer Punktladung  $Q$ . In der Nahzone  $r \simeq r'$  sind erhebliche Abweichungen von  $\phi_0(\vec{r})$  möglich; die anderen Multipolanteile sind dort i. A. nicht zu vernachlässigen. *Asymptotisches  $\vec{E}$ -Feld:*

$$\vec{E}(\vec{r}) \simeq \vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (2.138)$$

Falls  $Q = 0$ , aber  $\vec{p} \neq \vec{0}$  ist, nennt man die Ladungsverteilung einen **elektrischen Dipol** vom Moment  $\vec{p}$ . Das System ist zwar als Ganzes elektrisch neutral, aber positiver und negativer „Ladungsschwerpunkt“ fallen nicht zusammen:



• Abbildung 2.6 •

$$Q = \int \rho_+(\vec{r}) dV + \int \rho_-(\vec{r}) dV = Q_+ + Q_- = 0, \quad (2.139)$$

jedoch

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \int \vec{r} \rho_+(\vec{r}) dV + \int \vec{r} \rho_-(\vec{r}) dV \\ &= Q_+ \left( \frac{1}{Q_+} \int \vec{r} \rho_+(\vec{r}) dV - \frac{1}{Q_-} \int \vec{r} \rho_-(\vec{r}) dV \right) \\ &= Q_+ (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \neq \vec{0}. \end{aligned} \quad (2.140)$$

Das Potenzial des Dipols wird in der Fernzone vom Dipolanteil dominiert:

$$\phi(\vec{r}) \simeq \phi_1(\vec{r}). \quad (2.141)$$



Wieder ist zu betonen, dass diese Darstellung nur asymptotisch gilt und dass  $\phi(\vec{r})$  in der Nahzone unter dem Einfluss höherer Multipole i. A. ganz verschieden von  $\phi_1(\vec{r})$  ist.

Das Dipolmoment  $\vec{p}$  hängt nach (2.131) i. A. von der Wahl des Koordinatenursprungs ab. Genau dann, wenn die Ladungsverteilung ein Dipol ist ( $Q = 0$ ), ist  $\vec{p}$  jedoch unabhängig von  $O$ :

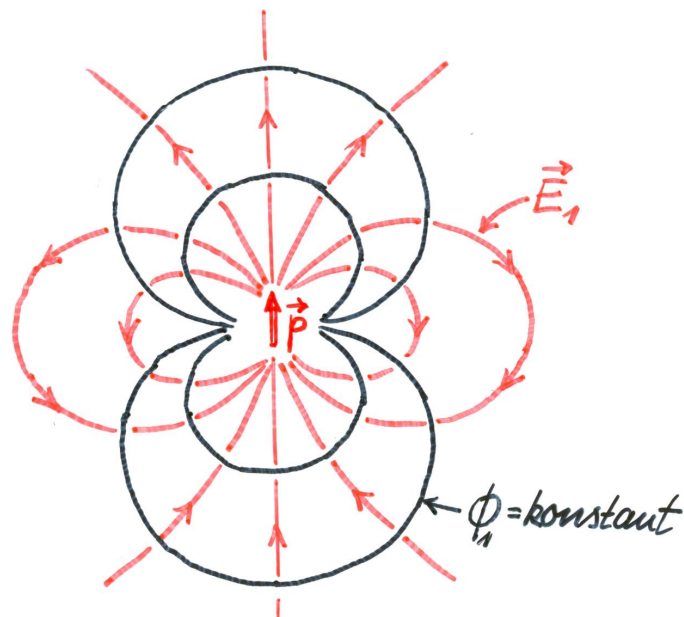
$$\begin{aligned}\vec{p} &= \int \vec{r} \rho(\vec{r}) dV = \int (\vec{r}' + \vec{a}) \rho(\vec{r}' + \vec{a}) dV' \\ &= \int \vec{r}' \rho'(\vec{r}') dV' + \underbrace{\vec{a} \int \rho'(\vec{r}') dV'}_{= 0} = \vec{p}' ,\end{aligned}\quad (2.142)$$

wobei  $\vec{a}$  eine beliebige Translation von  $O$  kennzeichnet. Damit erweist sich der Vektor  $\vec{p}$  als eine eindeutige Dipoleigenschaft.

Asymptotisches  $\vec{E}$ -Feld aus (2.135) zu berechnen:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &\simeq \vec{E}_1(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi_1(\vec{r}) \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \right) (\vec{r} \cdot \vec{p}) + \frac{1}{r^3} \vec{\nabla} (\vec{r} \cdot \vec{p}) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{p})}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{p}) - \vec{p}}{r^3} .\end{aligned}\quad (2.143)$$

Sei einfachheitshalber  $\vec{p} = p \hat{z}$ :



• Abbildung 2.7 •

In Kugelkoordinaten erhält man

$$\vec{E}_1 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\hat{r} \cos\vartheta - \hat{z}),$$

folglich

$$E_{1,r} = \hat{r} \cdot \vec{E}_1 = \frac{2p \cos\vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_{1,\vartheta} = \hat{\vartheta} \cdot \vec{E}_1 = \frac{p \sin\vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (2.144)$$

$$E_{1,\varphi} = \hat{\varphi} \cdot \vec{E}_1 = 0.$$

Vergleiche mit dem  $\vec{E}$ -Feld eines aus zwei entgegengesetzt gleichen Punktladungen gebildeten Dipols: in der Fernzone ein Dipolfeld, in der Nahzone ganz anders!

Im Falle  $Q = 0$ ,  $\vec{p} = \vec{0}$ , aber  $\vec{Q} \neq \vec{0}$ , ist die Ladungsverteilung ein **elektrischer Quadrupol** vom Moment  $\vec{Q}$ . Das Potenzial wird hierbei asymptotisch vom Quadrupolbeitrag bestimmt:

$$\phi(\vec{r}) \simeq \phi_2(\vec{r}). \quad (2.145)$$

Die höheren Multipole sorgen wiederum nur in der Nahzone für Abweichungen. Asymptotisches  $\vec{E}$ -Feld durch  $\vec{E}_2 = -\vec{\nabla} \phi_2$  gegeben.

Man kann zeigen: Genau dann ist der Tensor  $\vec{Q}$  unabhängig von  $O$  und damit eine eindeutige Quadrupoleigenschaft, wenn  $Q = 0$  und  $\vec{p} = \vec{0}$  gilt. Ohne Beweis.

Ferner gilt – wie man leicht der Definition (2.132) entnimmt: Der Quadrupoltensor ist *symmetrisch* und *spurfrei*, somit hängt er von *fünf* unabhängigen Komponenten ab. Es sei daran erinnert, dass der Dipolvektor  $\vec{p}$  *drei* und der Monopolskalar  $Q$  *eine* unabhängige Komponente enthalten.

Die *systematische Fortsetzung* der Multipolentwicklung über Monopol, Dipol, Quadrupol hinaus, also Oktupol usw. (generell  $2^l$ -Pol,  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) ist auf der Grundlage der Reihenentwicklung (2.128) prinzipiell möglich – jedoch in der Praxis sehr mühsam. Das Problem liegt in der Extraktion des  $2^l$ -Pol-Tensors, eines kartesischen Tensors  $l$ . Stufe, aus dem entsprechenden vom Legendre-Polynom  $P_l$  bestimmten Term. Dieser Weg soll hier nicht weiter besprochen werden. Ohne Beweis werden jedoch die zuvor für  $l = 0, 1, 2$  teils bewiesenen, teils nur behaupteten Aussagen für beliebiges  $l$  generalisiert:

- Der  $2^l$ -Pol-Tensor enthält  $2l + 1$  unabhängige Komponenten: Multipolmomente.
- Eine Ladungsverteilung, deren sämtliche  $2^l$ -Pol-Tensoren für  $l < L$  verschwinden, wird als  $2^L$ -Pol bezeichnet. Der entsprechende  $2^L$ -Pol-Tensor ist unabhängig von der Wahl des Koordinatenursprungs, also eine eindeutige Eigenschaft dieses Multipols (gilt i. A. nicht für die höheren  $2^l$ -Pol-Tensoren).

Zu einer systematischen, wenn auch weniger anschaulichen Darstellung der Multipolmomente beliebig hoher Ordnung gelangt man, wenn man statt (2.93) die Reihenentwicklung (2.113) benutzt:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 4\pi \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi'), \quad (2.146)$$

d. h. Faktorisierung in  $\hat{r}$  und  $\hat{r}'$ . Einsetzen in (1.56) führt auf die  $\phi$ -Zerlegung (Multipolentwicklung)

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{l,m} \frac{q_{lm}}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (2.147)$$

mit dem **sphärischen Multipolkomponenten**

$$q_{lm} = \int r'^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') \rho(\vec{r}') dV'. \quad (2.148)$$

Für festes  $l$  sind diese  $2l + 1$  komplexen Größen durch die Beziehungen

$$q_{l, -m} = (-1)^m q_{lm}^* , \quad (2.149)$$

$m = 1, 2, \dots, l$  miteinander verknüpft. Dadurch verbleibt man mit  $2l + 1$  unabhängigen reellen Größen zur Kennzeichnung des  $2^l$ -Pol-Anteils (siehe oben).

Um den Zusammenhang mit den **kartesischen Multipolmomenten** herzustellen, muss man in (2.148) die Kugelfunktionen zu  $l = 0, 1, 2, \dots$  gemäß (2.107) einsetzen und das Resultat mit den Definitionen (2.130, 131, 132, ...) vergleichen:

$$q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} Q \quad (2.150 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} q_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int r' \sin \vartheta' e^{-i\varphi'} \rho(\vec{r}') dV' \\ &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int (x' - iy') \rho(\vec{r}') dV' \\ &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - ip_y) \end{aligned} \quad (2.150 \text{ b})$$

$$\begin{aligned} q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int r' \cos \vartheta' \rho(\vec{r}') dV' \\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int z' \rho(\vec{r}') dV' \\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z \end{aligned} \quad (2.150 \text{ c})$$

usw.

**Magnetostatik.** Gegeben sei eine *stationäre Stromverteilung*  $\vec{j}(\vec{r}')$ , auf endlichem Raumbereich  $V$  beschränkt. Es geht um das *asymptotische Verhalten* des Vektorpotenzials  $A(\vec{r})$ , damit des Magnetfeldes  $\vec{B}(\vec{r})$  in der Fernzone  $r \gg r'$  der Stromverteilung. Entwicklung nach  $1/r$ -Potenzen.

Einsetzen der Entwicklung (2.128) in das Integral (1.59):

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left( \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \dots \right) \vec{j}(\vec{r}') dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{1}{r} \int \vec{j}(\vec{r}') dV' + \frac{1}{r^3} \vec{r} \cdot \int \vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') dV' + \dots \right) . \end{aligned} \quad (2.151)$$

Bezeichnung des ersten, zweiten, ... Summanden als *magnetisches Monopol-, Dipol-, ... Potenzial*.

*Der Monopolterm verschwindet!* Denn wegen – siehe (1.45) –

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}) \vec{r} = \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r})) \vec{r}}_{= 0} + (\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} = \vec{j}(\vec{r}) \quad (2.152)$$

folgt mit dem Gaußschen Satz (wende (1.22) auf  $\vec{j}(\vec{r}) \vec{r}$  an):

$$\int \vec{j}(\vec{r}) dV = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}) \vec{r} dV = \oint d\vec{S} \cdot \vec{j}(\vec{r}) \vec{r} = \vec{0}, \quad (2.153)$$

da die Stromverteilung ganz im Endlichen liegt. Interpretation: *Es gibt keine magnetischen Ladungen!*

Damit wird der Dipolterm zum führenden Term der magnetischen Multipolentwicklung:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \int \vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') dV' + \dots \quad (2.154)$$

– sofern er nicht verschwindet. In diesem Fall käme der Quadrupolterm zum Tragen usw.

Zur physikalischen Interpretation empfiehlt sich eine Umformung des Dipolterms mit Hilfe der *Identität*:

$$\vec{r} \cdot \int \vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') dV' = -\vec{r} \times \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') dV'. \quad (2.155)$$

*Beweis:* Der Entwicklungssatz für doppeltes Kreuzprodukt liefert die Vektoridentität

$$(\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j} = \frac{1}{2} \left( (\vec{r} \cdot \vec{j}) \vec{r}' + (\vec{r}' \cdot \vec{r}) \vec{j} \right) - \vec{r} \times \frac{1}{2} (\vec{r}' \times \vec{j}). \quad (2.156)$$

Der Beweis von (2.155) ist erbracht, wenn man zeigen kann, dass das Volumenintegral über den ersten Summanden der rechten Seite von (2.156) verschwindet. Das ist aber der Fall:

$$\begin{aligned} & \int \left( (\vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}')) \vec{r}' + (\vec{r}' \cdot \vec{r}) \vec{j}(\vec{r}') \right) dV' \\ &= \vec{r} \cdot \int \left( \vec{j}(\vec{r}') \vec{r}' + \vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') \right) dV' \\ &= \vec{r} \cdot \int \left( (\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') \vec{r}') \vec{r}' + \vec{r}' (\vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \vec{r}') \right) dV' \\ &= \vec{r} \cdot \int \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') \vec{r}' \vec{r}' dV' \\ &= \vec{r} \cdot \oint d\vec{S}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') \vec{r}' \vec{r}' = \vec{0}, \end{aligned} \quad (2.157)$$

da  $\vec{j}$  ganz im Endlichen. Im 2. Schritt wurde (2.152), im 4. Schritt der Gaußsche Satz (wende (1.22) auf  $\vec{j}(\vec{r}) \vec{r} \vec{r}$  an) benutzt. Damit ist (2.155) bewiesen.

Definiert man als *magnetisches Dipolmoment* den Vektor

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') dV' , \quad (2.158)$$

so gewinnt man mit (2.155) aus (2.154) für das *magnetische Dipolpotenzial* die Darstellung

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} . \quad (2.159)$$

Fall  $\vec{m} \neq \vec{0}$  ist, bezeichnet man die Stromverteilung als **magnetischen Dipol**.

Das Dipolmoment hängt *nicht* von der Wahl des Koordinatenursprungs ab:

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \frac{1}{2} \int \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int (\vec{r}' + \vec{a}) \times \vec{j}(\vec{r}' + \vec{a}) dV' \\ &= \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') dV' + \frac{1}{2} \vec{a} \times \underbrace{\int \vec{j}(\vec{r}') dV'}_{= \vec{0}} = \vec{m}' , \end{aligned} \quad (2.160)$$

wobei im vorletzten Schritt von (2.153) Gebrauch gemacht wurde. Damit erweist sich der Vektor  $\vec{m}$  als eine eindeutige Dipoleigenschaft.

*Asymptotisches  $\vec{B}$ -Feld* aus (2.159) zu berechnen:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &\simeq \vec{B}_1(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}_1(\vec{r}) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \right) \times (\vec{m} \times \vec{r}) + \frac{1}{r^3} \vec{\nabla} \times (\vec{m} \times \vec{r}) \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( -\frac{3}{r^5} (r^2 \vec{m} - (\vec{r} \cdot \vec{m}) \vec{r}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^3} \left( \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{r})}_{= 3} \vec{m} + \underbrace{\vec{r} \cdot \vec{\nabla}}_{= \vec{0}} \vec{m} - \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{m})}_{= 0} \vec{r} - \underbrace{\vec{m} \cdot \vec{\nabla}}_{= \vec{m}} \vec{r} \right) \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3 \vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{m})}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3 \hat{r} (\hat{r} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{r^3} . \end{aligned} \quad (2.161)$$

Das magnetische Dipolfeld hat damit dieselbe mathematische Gestalt wie das elektrische Dipolfeld (2.143), d. h. insbesondere dasselbe Feldlinienbild. Vergleiche mit dem  $\vec{B}$ -Feld einer stromdurchflossenen Leiterschleife: in der Fernzone ein Dipolfeld, in der Nahzone ganz anders – wegen höherer magnetischer Multipole.

### 3 Elektromagnetische Wellen: Wellengleichungen, Wellenausbreitung und -erzeugung

Wir kehren zur allgemeinen zeitabhängigen Theorie zurück. In der Elektrostatik ist  $\vec{E}(\vec{r})$  gemäß (1.55) als negativer Gradient des skalaren Potentials  $\phi(\vec{r})$ , in der Magnetostatik ist  $\vec{B}(\vec{r})$  gemäß (1.58) als Rotation des Vektorpotentials  $\vec{A}(\vec{r})$  darstellbar. Auch in der zeitabhängigen Theorie kann man das elektromagnetische Feld aus Potentialen bestimmen – in modifizierter Form.

Da das Magnetfeld gemäß (1.35) auch im zeitabhängigen Fall divergenzfrei ist, bleibt es ein Rotationsfeld:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) . \quad (3.1)$$

Andererseits ist das elektrische Feld gemäß (1.34) im zeitabhängigen Fall *nicht* rotationsfrei, also *kein* Gradientenfeld. Setzt man jedoch (3.1) in (1.34) ein, so folgt

$$\vec{\nabla} \times \left( \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) \right) = \vec{0} . \quad (3.2)$$

Also ist das Feld in (...) rotationsfrei und demnach ein Gradientenfeld:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) . \quad (3.3)$$

Man bezeichnet weiterhin  $\phi(\vec{r}, t)$  als **skalares Potential** und  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  als **Vektorpotential**. Das elektromagnetische Feld  $\vec{E}, \vec{B}(\vec{r}, t)$  ist gemäß (3.1, 3) durch die Potentiale darstellbar, d. h. aus diesen Potentialen berechenbar. Die Darstellung (3.1, 3) des  $\vec{E}, \vec{B}$ -Feldes ist eine zwangsläufige Konsequenz der homogenen Maxwell-Gleichungen.

Die Potentiale  $\phi, \vec{A}$  sind durch das Feld  $\vec{E}, \vec{B}$  nicht eindeutig festgelegt. Gegenüber der **Eichtransformation**

$$\begin{aligned} \phi &\longrightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ \vec{A} &\longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi \end{aligned} \quad (3.4)$$

mit beliebigem skalarem Feld  $\chi(\vec{r}, t)$  erweist sich das elektromagnetische Feld als *invariant*:

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= -\vec{\nabla} \phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \\ &= -\vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla} \frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{\nabla} \chi}{\partial t} = \vec{E} \\ \vec{B}' &= \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \chi = \vec{B} . \end{aligned} \quad (3.5)$$



Für welches  $\vec{A}$ ,  $\phi$ -Feld entscheidet man sich? Welche „Konvention“ trifft man? Man wählt  $\vec{A}$ ,  $\phi$  so, dass die Differentialgleichungen zur Bestimmung von  $\vec{A}$ ,  $\phi$  möglichst einfach werden.

Zur Herleitung von Differentialgleichungen für  $\vec{A}$ ,  $\phi$  setzt man (3.1, 3) in die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (1.32, 33) ein:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{\nabla} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow \Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (3.6)$$

bzw.

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{\nabla} \phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= -\mu_0 \vec{j} \\ \Rightarrow \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) &= -\mu_0 \vec{j}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Das ist ein System *gekoppelter* partieller Differentialgleichungen zur Bestimmung von  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  und  $\phi(\vec{r}, t)$ .

Auch die Differentialgleichungen (3.6, 7) sind *invariant* unter Eichtransformationen:  $\vec{A}$ ,  $\phi$  Lösung  $\Rightarrow \vec{A}'$ ,  $\phi'$  Lösung ( $\Rightarrow$  ein und dasselbe  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ -Feld). Diesen Spielraum nutzt man zur Vereinfachung der Differentialgleichungen (3.6, 7). **Lorentz-Konvention:**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) = 0, \quad (3.8)$$

durch Eichtransformation immer erfüllbar: Falls  $\vec{A}$ ,  $\phi$  die Lorentz-Konvention nicht erfüllen ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + c^{-2} \partial \phi / \partial t \neq 0$ ), kann man doch immer ein  $\chi$  so finden, dass  $\vec{A}'$ ,  $\phi'$  dies tun ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + c^{-2} \partial \phi' / \partial t = 0$ ); und zwar leistet dies wegen (3.4) jedes  $\chi$ , das die Gleichung

$$\Delta \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = - \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (3.9)$$

befriedigt. Die Lösung dieser Gleichung ist nicht eindeutig, folglich auch nicht die gesuchte Eichtransformation.

Mit (3.8) vereinfachen wir die Gleichungen (3.6, 7) zu

$$\begin{aligned} \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r}, t) \\ \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A}(\vec{r}, t) &= -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Das sind *vier* entkoppelte (in der Vakuumelektrodynamik!) partielle Differentialgleichungen für das skalare Potenzial  $\phi(\vec{r}, t)$  und für die drei Komponenten des Vektorpotenzials  $A_x, A_y, A_z(\vec{r}, t)$ , die alle dieselbe mathematische Gestalt der **inhomogenen Wellengleichung** besitzen:

$$\square f(\vec{r}, t) = g(\vec{r}, t) \quad (3.11)$$

mit dem *d'Alembert-Operator* oder *Wellenoperator*

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} . \quad (3.12)$$

Lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung vom „hyperbolischen Typ“; inhomogen. Die Wellengleichungen (3.10) sind unter der Nebenbedingung (3.8) zu lösen.

Hat man – unter gewissen Anfangs- und/oder Randbedingungen – aus (3.10, 8) die Potenziale  $\vec{A}, \phi(\vec{r}, t)$  berechnet, so gewinnt man daraus mit Hilfe von (3.1, 3) das elektromagnetische Feld  $\vec{E}, \vec{B}(\vec{r}, t)$ .

Unter der **homogenen Wellengleichung** versteht man den Spezialfall  $g = 0$ :

$$\square f(\vec{r}, t) = 0 . \quad (3.13)$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung setzt sich – wie üblich – additiv aus einer beliebigen speziellen Lösung  $f_0(\vec{r}, t)$  von (3.11) und der allgemeinen Lösung  $\tilde{f}(\vec{r}, t)$  der homogenen Wellengleichung (3.13) zusammen:

$$f(\vec{r}, t) = f_0(\vec{r}, t) + \tilde{f}(\vec{r}, t) . \quad (3.14)$$

Wir beschäftigen uns im Folgenden zunächst mit dem homogenen Problem, anschließend mit dem inhomogenen Problem.

Die homogenen Wellengleichungen

$$\square \phi(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.15 \text{ a})$$

$$\square \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (3.15 \text{ b})$$

beschreiben das elektromagnetische Feld im „Vakuum“:  $\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$ . Spezielle Lösungen sind die **ebenen harmonischen Wellen** :

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \phi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

mit

$$\omega = ck \quad \text{bzw.} \quad \omega' = ck' \quad (3.17)$$

und  $\phi_0 \in \mathbf{C}$ ,  $\vec{A}_0 \in \mathbf{C}^3$  beliebig\*. Die Lorentz-Konvention erzwingt die Kopplung

$$\vec{k}' = \vec{k} \quad \Rightarrow \quad \omega' = \omega, \quad \phi_0 = c \hat{k} \cdot \vec{A}_0, \quad (3.18)$$

also hat man zu beliebigem, aber festem  $\vec{k}$  die ebene  $\phi$ ,  $\vec{A}$ -Welle

$$\left. \begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= c \hat{k} \cdot \vec{A}_0 \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \vec{A}_0 \end{aligned} \right\} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (3.19)$$

Die Wellenflächen, d. h. die Flächen konstanter Phase:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \text{konstant}, \quad (3.20)$$

sind Ebenen (daher die Bezeichnung „ebene“ Welle) senkrecht zu  $\vec{k}$ . Sie bewegen sich mit der *Phasengeschwindigkeit*  $c$  in  $k$ -Richtung.

Zur Berechnung des mit (3.19) verknüpften *elektromagnetischen Feldes* wendet man (3.1, 3) an; man erhält ebenfalls eine harmonische ebene Welle:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= -i\omega \hat{k} \times (\hat{k} \times \vec{A}_0) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{i\omega}{c} \hat{k} \times \vec{A}_0 \end{aligned} \right\} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (3.21)$$

Aus (3.21) folgen die für alle  $\vec{r}, t$  gültigen Beziehungen

$$\hat{k} \cdot \vec{E} = 0, \quad \hat{k} \times \vec{E} = c\vec{B}, \quad (3.22 \text{ a})$$

$$\hat{k} \cdot \vec{B} = 0, \quad \hat{k} \times \vec{B} = -\frac{1}{c}\vec{E}. \quad (3.22 \text{ b})$$

---

\* Von den komplexen Lösungen gelangt man zu reellen Lösungen durch Übergang zum Real- oder zum Imaginärteil:

$$\begin{aligned} \text{Re } \phi &= \text{Re } \phi_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) - \text{Im } \phi_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\ &= a \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \text{Im } \phi &= \text{Im } \phi_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + \text{Re } \phi_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\ &= b \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \beta); \end{aligned}$$

ebenfalls Lösungen, da (3.15) linear homogen;  $a - b = 0$  und  $\alpha - \beta = \pi/2$ .

Also gilt unabhängig von der Frequenz:  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  stehen überall und ständig senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $\hat{k}$ : *Transversalität* der elektromagnetischen Wellen.  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  sind auch zueinander überall und ständig orthogonal und in Phase.

Sei  $\hat{k} = \hat{z}$ , dann folgt aus (3.22 a):

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= (\vec{E}_{0x} \hat{x} + E_{0y} \hat{y}) \\ \vec{B} &= \frac{1}{c} (-E_{0y} \hat{x} + E_{0x} \hat{y}) \end{aligned} \right\} e^{i(kz - \omega t)}, \quad (3.23)$$

$E_{0x}, E_{0y} \in \mathbf{C}$ ; (3.22 b) ist hiermit verträglich. Das elektromagnetische Feld der Welle ist also *allein* durch das  $\vec{E}$ -Feld (oder das  $\vec{B}$ -Feld, sofern man von (3.22 b) ausgeht) bestimmt.

Die genauere Gestalt der Welle hängt vom Betrag und vom Argument der komplexen Amplituden  $E_{0x}, E_{0y}$  ab. Aus (3.23) folgt für das reelle  $\vec{E}$ -Feld:

$$\begin{aligned} \text{Re } \vec{E} &= |E_{0x}| \cos(kz - \omega t + \arg E_{0x}) \hat{x} \\ &+ |E_{0y}| \cos(kz - \omega t + \arg E_{0y}) \hat{y}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Diese Welle ist im Allgemeinen *elliptisch polarisiert*:

- Die Spitze des Vektors  $\text{Re } \vec{E}$  läuft in der  $xy$ -Projektion auf einer Ellipse um; deren Gestalt hängt von den drei Parametern  $|E_{0x}|, |E_{0y}|$  und  $\delta = \arg E_{0x} - \arg E_{0y}$  ab.
- Der Umlaufsinn, die *Helizität*, hängt vom Vorzeichen der Phasendifferenz  $\delta$  ab.

In den Spezialfällen  $\delta = \pm \pi / 2$  und  $|E_{0x}| = |E_{0y}|$  wird die Ellipse zum Kreis, die Welle ist dann *zirkular polarisiert*; in den Spezialfällen  $\delta = 0, \pi$  und  $|E_{0x}|, |E_{0y}|$  beliebig entartet die Ellipse zu einer Linie, die Welle ist dann *linear polarisiert* •

*Anmerkungen:*

1. Die für die Geometrie der ebenen Welle wesentlichen Beziehungen (3.22) bekommt man auch ohne Rückgriff auf das  $\phi, \vec{A}$ -Feld; denn im *homogenen Fall* entkoppeln

die Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\
 \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{0} \\
 \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{0} \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

auch ohne Zuhilfenahme der Potentiale. Anwendung von  $\vec{\nabla} \times$  auf die beiden rot-Gleichungen. Mit  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$  und wegen der beiden div-Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned}
 \Delta \vec{E} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{0} \\
 \Delta \vec{B} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{0},
 \end{aligned}$$

somit

$$\square \vec{E} = \vec{0}, \quad \square \vec{B} = \vec{0}, \tag{3.26}$$

d. h. sowohl  $\vec{E}$  als auch  $\vec{B}$  befriedigen im Vakuum die homogene Wellengleichung. Folglich gibt es als spezielle Lösungen ebene harmonische Wellen:

$$\left. \begin{aligned}
 \vec{E} &= \vec{E}_0 \\
 \vec{B} &= \vec{B}_0
 \end{aligned} \right\} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \tag{3.27}$$

mit  $\omega = ck$ ;  $\vec{E}_0, \vec{B}_0 \in \mathbf{C}^3$ . Vgl. (3.21). Die Verknüpfung (3.22) der Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  erhält man durch Rückgriff auf die Maxwell-Gleichungen (3.25): Aus den beiden div-Gleichungen folgen die beiden  $\hat{k}$ -Beziehungen; aus den beiden rot-Gleichungen ergeben sich die beiden  $\hat{k} \times$ -Verknüpfungen.

2. Zum Wellenvektor  $\vec{k}$  gibt es nicht nur die ebene Welle

$$\phi_+ = \phi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \tag{3.28 a}$$

mit Wellenfronten, die mit  $c$  in positive  $k$ -Richtung laufen, sondern auch die ebene Welle

$$\phi_- = \phi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)} \tag{3.28 b}$$

mit Wellenfronten, die in negative  $k$ -Richtung laufen. Durch passende Überlagerungen von (3.28 a, b) gelangt man zu *stehenden Wellen*, z. B.

$$\frac{1}{2}(\phi_+ + \phi_-) = \phi_0 e^{\vec{k} \cdot \vec{r}} \cos \omega t, \quad (3.29)$$

als Lösungen der homogenen Wellengleichung. Entsprechendes gilt für die Felder  $\vec{A}, \vec{E}, \vec{B}(\vec{r}, t)$ .

Allgemeinere Lösungen der homogenen Wellengleichung (z. B. für  $\phi(\vec{r}, t)$ , analog für  $\vec{A}, \vec{E}, \vec{B}(\vec{r}, t)$ ), gewinnt man durch **Superposition** der zu verschiedenen  $\vec{k}$ -Vektoren gehörigen ebenen Wellen:

$$\phi(\vec{r}, t) = \sum_{\mu} \alpha_{\mu} e^{i(\vec{k}_{\mu} \cdot \vec{r} - \omega_{\mu} t)} \quad (3.30)$$

mit  $\omega_{\mu} = ck_{\mu}$ ,  $\alpha_{\mu} \in \mathbf{C}$ .

Beschränkt man sich auf *eine Ausbreitungsrichtung*, etwa

$$\vec{k}_{\mu} = k_{\mu} \hat{z}, \quad (3.31)$$

so bleibt die Welle *eben*:

$$\phi(z, t) = \sum_{\mu} \alpha_{\mu} e^{ik_{\mu}(z - ct)}, \quad (3.32)$$

sie ist aber im Allgemeinen nicht mehr *periodisch*. Periodizität (räumlich) bleibt gewahrt, falls die  $\alpha_{\mu}$  ganzzahlige Vielfache einer (minimalen) Wellenzahl  $k$  sind:

$$k_{\mu} = \mu k, \quad \mu \in \mathbf{Z}, \quad (3.33)$$

dann hat man

$$\phi(z, t) = \sum_{\mu \in \mathbf{Z}} \alpha_{\mu} e^{i\mu k(z - ct)}. \quad (3.34)$$

Das ist die *Fourier-Reihe* des periodischen Wellenzuges, der sich – unter Wahrung seiner Gestalt – mit der Geschwindigkeit  $c$  in  $z$ -Richtung bewegt.

Die Periodizitätsbedingung (3.33) ist erfüllbar, falls alle  $k_{\mu}$  (endlich viele) rational sind. Wenn gewisse  $k_{\mu}$  irrational sind, ist die Überlegung (3.32) *aperiodisch*. Das gilt insbesondere für **Wellenpakete**, d. h. Überlagerungen des Kontinuums der Wellenzahlen:

$$\phi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(k) e^{ik(z - ct)} dk \quad (3.35)$$

mit der Amplitudenfunktion

$$\alpha(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikz} \phi(z, 0) dz, \quad (3.36)$$

die sich durch Fourier-Transformation aus dem „anfänglichen Feld“  $\phi(z, 0)$  berechnet. ( $\phi(z, 0)$  so, dass das Integral (3.36) konvergiert, somit  $\alpha(k)$  existiert; dann konvergiert auch das Integral (3.35).)

Das Wellenpaket (3.35) bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $c$  in  $z$ -Richtung. Dabei bleibt seine Gestalt erhalten. Setzt man nämlich (3.36) in (3.35) ein, so folgt

$$\phi(z, t) = \phi(z - ct, 0). \quad (3.37)$$

*Keine Dispersion!* Die Ursache liegt darin, dass  $c$  nicht von  $k$  abhängt. Gilt nur für das Vakuum. Bedeutsam für die Informationsübermittlung.

*Anmerkungen:*

1. In Materie hat man im Allgemeinen  $c = c(k)$ , d. h. Dispersion: Das Wellenpaket zerfließt. Folglich Informationsverlust bei Übertragung.
2. Bei den Termen mit negativen  $k$ -Werten in (3.34, 35) handelt es sich um das Konjugiert-Komplexe der Terme mit positiven  $k$ -Werten. Alle Terme beschreiben ebene harmonische Wellen in positiver  $z$ -Richtung. Siehe jedoch (3.28 b).

Für die folgenden Überlegungen betrachten wir einfachheitshalber eine „auf 1 normierte“ Amplitudenfunktion:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha(k)|^2 dk = 1. \quad (3.38)$$

Dann ist auch das damit konstruierte Wellenpaket für alle Zeiten „auf 1 normiert“; denn

wegen (3.37, 35, 38) gilt

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(z, t)|^2 dz &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(z, 0)|^2 dz \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k' - k)z} dz \alpha(k') \alpha^*(k) dk' dk \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(k' - k) \alpha(k') \alpha^*(k) dk' dk \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha(k)|^2 dk = 1, \tag{3.39}
 \end{aligned}$$

d. h. Erhaltung der *Norm* bei Fourier-Transformation.

Als *mittleren Ort* des Wellenpaketes zur Zeit  $t$  definiert man

$$\begin{aligned}
 \langle z \rangle_t &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(z, t)|^2 z dz \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(z - ct, 0)|^2 z dz \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(z', 0)|^2 z' dz' + ct \\
 &= \langle z \rangle_0 + ct. \tag{3.40}
 \end{aligned}$$

Er geht aus dem mittleren Ort zur Zeit  $t = 0$  durch Verschiebung um  $ct$  hervor, d. h. er bewegt sich – wie das ganze Wellenpaket – mit der Geschwindigkeit  $c$  in positive  $z$ -Richtung. In (3.40) wurde im 2. Schritt (3.37) und im 3. Schritt (3.39) benutzt.

Entsprechend berechnet man

$$\langle z^2 \rangle_t = \langle z^2 \rangle_0 + 2 \langle z \rangle_0 ct + (ct)^2. \tag{3.41}$$



Als *Ortsunschärfe* des Wellenpaketes definieren wir die *Varianz*:

$$\begin{aligned}
 (\Delta z)_t &= \sqrt{\langle (z - \langle z \rangle_t)^2 \rangle} \\
 &= \sqrt{\langle z^2 \rangle_t - \langle z \rangle_t^2} \\
 &= \sqrt{\langle z^2 \rangle_0 - \langle z \rangle_0^2} \\
 &= \sqrt{\langle (z - \langle z \rangle_0)^2 \rangle} \\
 &= (\Delta z)_0 \\
 &= \Delta z .
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Sie hängt, da das Wellenpaket seine Gestalt nicht ändert, nicht von der Zeit ab; daher kann man den Index weglassen. Im 3. Schritt von (3.42) wurde (3.40, 41) benutzt.

Analog definiert man die *mittlere Wellenzahl*

$$\langle k \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha(k)|^2 k dk \tag{3.43}$$

und die *Wellenzahlunschärfe*

$$\Delta k = \sqrt{\langle (k - \langle k \rangle)^2 \rangle} \tag{3.44}$$

des Wellenpaketes. Beide Größen hängen nicht von  $t$  ab.

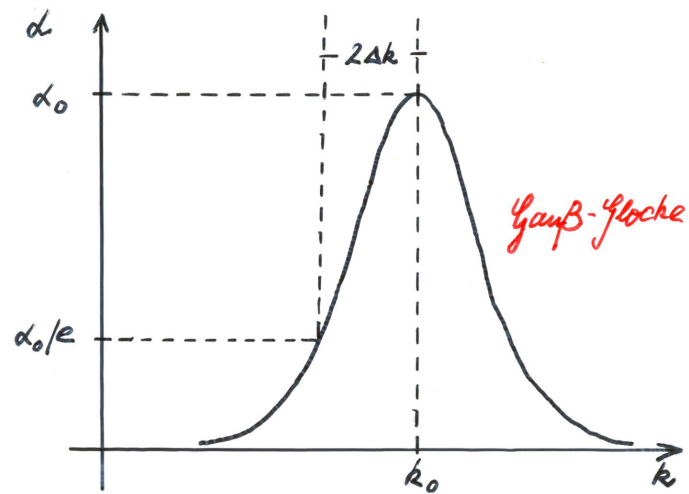
Es gilt die wichtige **Unschärfebeziehung**

$$\Delta k \cdot \Delta z \geq 1/2 . \tag{3.45}$$

Das heißt: Man kann kein Wellenpaket konstruieren, für das Orts- und Wellenzahlunschärfe *beide* beliebig klein sind. Für ein Wellenpaket der Ortsunschärfe  $\Delta z$  muss man genügend viele Wellenzahlen superponieren:  $\Delta k$  darf den Wert  $1/2 \Delta z$  nicht unterschreiten. Dieser minimale  $k$ -Bereich ist umso größer, je schärfer das Wellenpaket auf der  $z$ -Achse lokalisiert sein soll. Umgekehrt: Nach Vorgabe von  $\Delta k$  kann  $\Delta z$  den Wert  $1/2 \Delta k$  nicht unterschreiten. Extremes *Beispiel*:  $\alpha(k) = \delta(k - k_0)$  (nicht normierbar) mit der  $k$ -Unschärfe 0  $\Rightarrow \phi(z, t) = (2\pi)^{-1/2} e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}$  (nicht normierbar) mit der  $z$ -Unschärfe  $\infty$ .

*Beweis* der Ungleichung (3.45): Jedes Lehrbuch, jede Vorlesung über elementare Quantenmechanik im Zusammenhang mit der Heisenbergschen Unschärferelation.

**Beispiel: Gaußsches Wellenpaket.** Amplitudenfunktion „gaußförmig“:



• Abbildung 3.1 •

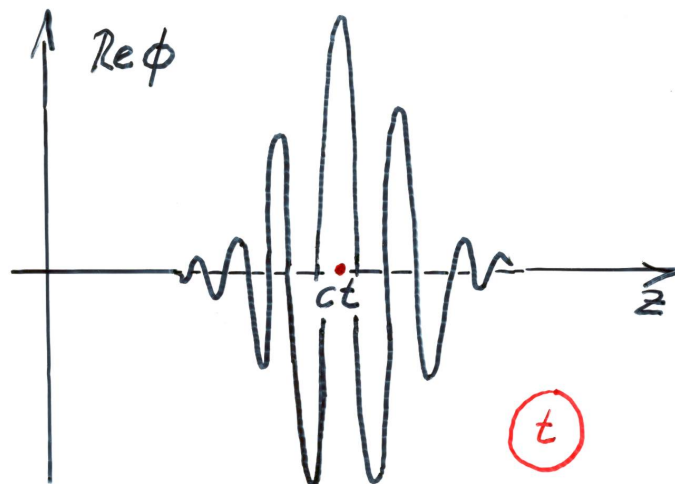
$$\alpha(k) = \sqrt{\frac{a}{\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{a^2(k-k_0)^2}{2}}, \quad (3.46)$$

gemäß (3.38) auf 1 normiert. Wellenzahlunscharfe:

$$\Delta k = \frac{1}{\sqrt{2}a}. \quad (3.47)$$

Mit (3.46) berechnet man gemäß (3.35) das Wellenpaket

$$\phi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}a}} e^{-\frac{(z-ct)^2}{2a^2}} e^{ik_0(z-ct)}, \quad (3.48)$$



• Abbildung 3.2 •

wegen (3.39) ebenfalls auf 1 normiert. Ortsunschärfe:

$$\Delta z = \frac{a}{\sqrt{2}} . \tag{3.49}$$

Gl. (3.48) repräsentiert eine harmonische Welle der Wellenzahl  $k_0$  (mittlere Wellenzahl), deren Amplitude ebenfalls gaußförmig von  $z$  abhängt (unter Fourier-Transformation gehen Gauß-Glocken in Gauß-Glocken über), also insgesamt ein aperiodischer Wellenzug. Der mittlere Ort ist  $ct$ . Das Unschärfeprodukt ergibt sich nach (3.47, 49) zu

$$\Delta k \cdot \Delta z = 1/2 . \tag{3.50}$$

Das ist nach (3.45) gerade noch erlaubt. Bezeichnung derartiger Wellenpakete als „minimal“. In diesem Spezialfall sind  $\Delta k$  und  $\Delta z$  streng *reziprok* zueinander. Je größer  $\Delta k$ , desto kleiner  $\Delta z$  – und umgekehrt. Es wird davor gewarnt, den Spezialfall (3.50) zu verallgemeinern; im Allgemeinen gilt nur die schwächere Aussage(3.45)!

Das Wellenpaket (3.35) ist Lösung der **eindimensionalen homogenen Wellengleichung**

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(z, t) = 0 , \tag{3.51}$$

natürlich auch Lösung der dreidimensionalen homogenen Wellengleichung (3.15 a). Die allgemeine Lösung von (3.51) ist von der Gestalt

$$\phi(z, t) = \chi_+(z - ct) + \chi_-(z + ct) , \tag{3.52}$$

d. i. die Überlagerung eines beliebigen mit  $c$  in positive  $z$ -Richtung laufenden Wellenpaketes  $\chi_+$  und eines beliebigen (anderen) mit  $c$  in negative  $z$ -Richtung laufenden Wellenpaketes  $\chi_-$ . Vorstehend wurde nur der  $\chi_+$ -Anteil diskutiert, der sich als Überlagerung von Wellen  $e^{ik(z-ct)}$  ergab. Der  $\chi_-$ -Anteil ist entsprechend aus Wellen  $e^{ik(z+ct)}$  aufgebaut. Vgl. (3.28 a, b).

Die allgemeine Lösung der **dreidimensionalen homogenen Wellengleichung** (3.15 a) ist darstellbar als Fourier-Integral:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int \alpha(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d^3 k . \tag{3.53}$$

d. h. als Superposition aller möglichen ebenen harmonischen Wellen mit beliebiger (normierbarer) Amplitudenfunktion  $\alpha(\vec{k})$ . Da beliebige Ausbreitungsrichtungen zugelassen

sind, ist  $\phi(\vec{r}, t)$  im Allgemeinen keine ebene Welle. Berechnung von  $\alpha(\vec{k})$  durch Fourier-Transformation – wie in (3.36):

$$\begin{aligned}\alpha(\vec{k}) e^{-i\omega t} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \phi(\vec{r}, t) d^3 r \\ \Rightarrow \alpha(\vec{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \phi(\vec{r}, 0) d^3 r .\end{aligned}\quad (3.54)$$

Wie im Eindimensionalen – vgl. (3.39) – bleibt auch im Dreidimensionalen die Norm erhalten, und zwar sowohl unter Fourier-Transformation als auch unter der Dynamik der homogenen Wellengleichung:

$$\int |\phi(\vec{r}, t)|^2 d^3 r = \int |\alpha(\vec{k})|^2 d^3 k = \int |\phi(\vec{r}, 0)|^2 d^3 r .\quad (3.55)$$

In den nachfolgenden Mittelwertdefinitionen wird die Norm 1 unterstellt.

Wie bewegt sich das Wellenpaket  $\phi(\vec{r}, t)$  durch den Raum?

Auch bei konstantem ( $\vec{k}$ -unabhängigen)  $c$  tritt – im Unterschied zum eindimensionalen  $\chi_+$ - oder  $\chi_-$ -Paket – im Dreidimensionalen **Dispersion** auf: Die Gestalt des Wellenpaketes bleibt nicht erhalten, weil seine Komponenten in verschiedene Richtungen auseinanderstreben.

Für die Bewegung des Wellenpaketes als Ganzes gilt

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{r} \rangle = c \langle \hat{k} \rangle .\quad (3.56)$$

Dabei bedeutet  $\langle \vec{r} \rangle$  den *mittleren Ort* des Wellenpaketes:

$$\langle \vec{r} \rangle = \int \phi^*(\vec{r}, t) \vec{r} \phi(\vec{r}, t) d^3 r\quad (3.57)$$

und  $\langle \hat{k} \rangle$  die *mittlere Ausbreitungsrichtung* im Wellenpaket:

$$\langle \hat{k} \rangle = \int \alpha^*(\vec{k}) \hat{k} \alpha(\vec{k}) d^3 k .\quad (3.58)$$

Also: Der „Mittelpunkt“ des Wellenpaketes bewegt sich geradlinig-gleichförmig mit Vakuumlichtgeschwindigkeit in die durch (3.58) definierte Richtung.

*Beweis* von (3.56). Aus (3.57) folgt durch Differenzieren:

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{r} \rangle = \int \phi^*(\vec{r}, t) \vec{r} \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t) d^3 r + \int \frac{\partial \phi^*}{\partial t}(\vec{r}, t) \vec{r} \phi(\vec{r}, t) d^3 r ;\quad (3.59)$$

mit (3.53) berechnet man:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t) &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi^3}} \int \alpha(\vec{k}) \omega(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(\vec{k})t)} d^3 k \\
 \Rightarrow \vec{r} \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int \alpha(\vec{k}) \omega(\vec{k}) \left( \vec{\nabla}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) e^{-i\omega(\vec{k})t} d^3 k \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int \left( \vec{\nabla}_{\vec{k}} \alpha(\vec{k}) \omega(\vec{k}) e^{-i\omega(\vec{k})t} \right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3 k \quad (3.60)
 \end{aligned}$$

durch partielle Integration. Einsetzen von (3.53, 60) in (3.59) ergibt

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \langle \vec{r} \rangle &= \int \int \alpha^*(\vec{k}') e^{i\omega(\vec{k}')t} \left( \vec{\nabla}_{\vec{k}} \omega(\vec{k}) \alpha(\vec{k}) e^{-i\omega(\vec{k})t} \right) \times \\
 &\times \underbrace{\left( \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i(\vec{k}' - \vec{k})\cdot\vec{r}} d^3 r \right)}_{= \delta(\vec{k}' - \vec{k})} d^3 k' d^3 k + \text{konj. komplex} \\
 &= \int \alpha^*(\vec{k}) e^{i\omega(\vec{k})t} \left( \vec{\nabla}_{\vec{k}} \omega(\vec{k}) \alpha(\vec{k}) e^{-i\omega(\vec{k})t} \right) d^3 k + \text{k. k.} \\
 &= \int \alpha^*(\vec{k}) \left( \vec{\nabla}_{\vec{k}} \omega(\vec{k}) \right) \alpha(\vec{k}) d^3 k \\
 &+ \int \alpha^*(\vec{k}) e^{i\omega(\vec{k})t} \omega(\vec{k}) \left( \vec{\nabla}_{\vec{k}} \alpha(\vec{k}) e^{-i\omega(\vec{k})t} \right) d^3 k + \text{k. k.} \\
 &= \int \alpha^*(\vec{k}) \left( \vec{\nabla}_{\vec{k}} \omega(\vec{k}) \right) \alpha(\vec{k}) d^3 k + \underbrace{\int \vec{\nabla}_{\vec{k}} \left( \alpha^*(\vec{k}) \omega(\vec{k}) \alpha(\vec{k}) \right) d^3 k}_{= 0}; \quad (3.61)
 \end{aligned}$$

das zweite Integral verschwindet wegen des Gaußschen Satzes (1.21 b). Aus  $\omega = ck$  folgt

$$\vec{\nabla}_{\vec{k}} \omega = c \hat{k}. \quad (3.62)$$

Setzt man (3.62) in (3.61) ein, so folgt mit (3.58) die *Behauptung* •

Der Beweis zeigt, dass für beliebige  $\omega(\vec{k})$ -Abhängigkeit der allgemeine Zusammenhang

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{r} \rangle = \langle \vec{\nabla}_{\vec{k}} \omega \rangle \quad (3.63)$$

gilt. Bezeichnung der vektoriellen Größe  $\vec{\nabla}_{\vec{k}} \omega$  als *Gruppengeschwindigkeit*. Also: Die zeitliche Änderung des mittleren Ortes ist gleich der mittleren Gruppengeschwindigkeit des Wellenpaketes.

**Energietransport** in elektromagnetischen Wellen. Betrachte – einfachheitshalber – Wellen(pakete), die nur eine Frequenz enthalten:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) e^{-i\omega t}. \quad (3.64)$$

Hierin ist der Spezialfall (3.27) ebener harmonischer Wellen enthalten. Gemäß (1.67) gilt für die *Energiestromdichte*

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{Re} \vec{E} \times \operatorname{Re} \vec{B}. \quad (3.65)$$

Mit

$$\operatorname{Re} \vec{E} = \operatorname{Re} \vec{\mathcal{E}} \cos \omega t + \operatorname{Im} \vec{\mathcal{E}} \sin \omega t \quad (3.66)$$

$$\operatorname{Re} \vec{B} = \operatorname{Re} \vec{\mathcal{B}} \cos \omega t + \operatorname{Im} \vec{\mathcal{B}} \sin \omega t$$

folgt

$$\begin{aligned} \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} & \left( \operatorname{Re} \vec{\mathcal{E}} \times \operatorname{Re} \vec{\mathcal{B}} \cos^2 \omega t + \operatorname{Im} \vec{\mathcal{E}} \times \operatorname{Im} \vec{\mathcal{B}} \sin^2 \omega t \right. \\ & \left. + \left( \operatorname{Re} \vec{\mathcal{E}} \times \operatorname{Im} \vec{\mathcal{B}} + \operatorname{Im} \vec{\mathcal{E}} \times \operatorname{Re} \vec{\mathcal{B}} \right) \sin \omega t \cos \omega t \right). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Im *zeitlichen Mittel* ergibt sich hieraus

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \left( \operatorname{Re} \vec{\mathcal{E}} \times \operatorname{Re} \vec{\mathcal{B}} + \operatorname{Im} \vec{\mathcal{E}} \times \operatorname{Im} \vec{\mathcal{B}} \right), \quad (3.68)$$

was sich auch direkt durch das komplexe  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ -Feld ausdrücken lässt:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} (\vec{E} \times \vec{B}^*). \quad (3.69)$$

Eine ähnliche Rechnung liefert für den elektrischen und magnetischen Anteil der *Energiedichte* gemäß (1.66) im zeitlichen Mittel die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \langle w_e \rangle &= \frac{\varepsilon_0}{2} \langle (\operatorname{Re} \vec{E})^2 \rangle \\ &= \frac{\varepsilon_0}{4} \left( (\operatorname{Re} \vec{\mathcal{E}})^2 + (\operatorname{Im} \vec{\mathcal{E}})^2 \right) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{4} \vec{E} \cdot \vec{E}^* \end{aligned} \quad (3.70 \text{ a})$$

$$\begin{aligned}
 \langle w_m \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \langle (\operatorname{Re} \vec{B})^2 \rangle \\
 &= \frac{1}{4\mu_0} \left( (\operatorname{Re} \vec{B})^2 + (\operatorname{Im} \vec{B})^2 \right) \\
 &= \frac{1}{4\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{B}^* .
 \end{aligned} \tag{3.70 b}$$

Speziell für die *ebene harmonische Welle* (3.27) folgt mit Hilfe der Beziehungen (3.22) aus (3.69, 70):

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{S} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0 c} \operatorname{Re} \left( \vec{E} \times (\hat{k} \times \vec{E}^*) \right) \\
 &= \frac{\varepsilon_0 c}{2} (\vec{E} \cdot \vec{E}^*) \hat{k} \\
 &= 2 \langle w_e \rangle c \hat{k}
 \end{aligned} \tag{3.71 a}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{S} \rangle &= -\frac{c}{2\mu_0} \operatorname{Re} \left( (\hat{k} \times \vec{B}) \times \vec{B}^* \right) \\
 &= \frac{c}{2\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{B}^*) \hat{k} \\
 &= 2 \langle w_m \rangle c \hat{k} .
 \end{aligned} \tag{3.71 b}$$

Aus den Formeln (3.71) folgt zweierlei:

1.

$$\langle w_e \rangle = \langle w_m \rangle . \tag{3.72}$$

In der ebenen harmonischen Welle ist (im zeitlichen Mittel) die elektrische gleich der magnetischen Energiedichte.

2.

$$\langle \vec{S} \rangle = (\langle w_e \rangle + \langle w_m \rangle) c \hat{k} = \langle w \rangle \vec{c} . \tag{3.73}$$

Für den elektromagnetischen Energietransport gilt (im zeitlichen Mittel) die hydrodynamische Beziehung. Stromdichte = Dichte  $\times$  Geschwindigkeit •

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung (3.11) setzt sich nach (3.14) additiv zusammen aus einer speziellen Lösung dieser Differentialgleichung und aus der allgemeinen Lösung der homogenen Wellengleichung (3.13). Entsprechend

- haben wir uns vorstehend ausführlich mit dem *homogenen Problem* befasst: Basislösungen sind die ebenen harmonischen Wellen, zur allgemeinen Lösung gelangt man durch deren Superposition. Physikalisch ging es dabei um die *Gestalt* und die *Ausbreitung* elektromagnetischer Wellen (im Vakuum) – ohne nach dem „Woher“ zu fragen;
- wenden wir uns nun dem *inhomogenen Problem* zu. Dahinter steht die Frage nach der *Erzeugung* elektromagnetischer Wellen, nach ihrer *Abstrahlung* von den (zeitabhängigen) Quellen  $\rho, \vec{j}(\vec{r}, t)$ .

Es geht also um die **Lösung der inhomogenen Wellengleichungen**

$$\square \phi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t) \quad (3.74 \text{ a})$$

$$\square \vec{A}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) \quad (3.74 \text{ b})$$

unter der Lorentz-Konvention (3.08). Wir betrachten einen „heuristischen“ und einen „exakten“ Lösungsweg.

**Heuristischer Lösungsweg.** Wir betrachten das skalare Potenzial für den folgenden Spezialfall: Die felderzeugende Ladungsverteilung bestehe aus einer zeitabhängigen Punktladung  $q_{\vec{r}'}(t) = q_{\vec{r}'(t)}$  an der Stelle  $\vec{r}' = \vec{r}'(t)$ . Das hiervon erzeugte  $\phi(\vec{r}, t)$  genügt für  $\vec{r} \neq \vec{r}'$  der homogenen Wellengleichung:

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = 0. \quad (3.75)$$

Aus Symmetriegründen (Kugelsymmetrie) hängt  $\phi$  nur vom Abstand  $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$  des Feldpunktes vom Quellpunkt ab:  $\phi = \phi(R, t)$ , und (3.75) nimmt mit (2.58) ( $\Delta$  in Kugelkoordinaten) die Gestalt an:

$$\left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} R - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = 0. \quad (3.76)$$

Der Lösungsansatz

$$\phi(R, t) = \frac{1}{R} \chi(R, t) \quad (3.77)$$



führt auf die eindimensionale Wellengleichung

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi = 0, \quad (3.78)$$

vgl. (3.51), deren allgemeine Lösung nach (3.52) durch

$$\chi(R, t) = \chi_+(R - ct) + \chi_-(R + ct) \quad (3.79)$$

gegeben ist. Also ist das elektrische Potenzial von der Gestalt

$$\phi(R, t) = \frac{\chi_+(R - ct)}{R} + \frac{\chi_-(R + ct)}{R}, \quad (3.80)$$

d. i. die Überlagerung einer von  $q_{\vec{r}'}$  weglafenden und einer zu  $q_{\vec{r}'}$  hinlaufenden Kugelwelle. Letztere ist aus Gründen der *Kausalität* –  $q_{\vec{r}'}(t)$  verursacht  $\phi(R, t)$  – zu streichen:

$$\phi(R, t) = \frac{\chi_+(t - R/c)}{R}. \quad (3.81)$$

Im statischen Fall ist

$$\phi(R) = \frac{q_{\vec{r}'}}{4\pi\epsilon_0 R}; \quad (3.82)$$

also *errät* man für den zeitabhängigen Fall:

$$\phi(R, t) = \frac{q_{\vec{r}'}(t - R/c)}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (3.83)$$

Letzterer geht demnach aus ersterem durch *Retardierung* der Zeit hervor: Für das Potenzial im Abstand  $R$  von der Quelle ist zur Zeit  $t$  die Ladung zur früheren (retardierten) Zeit  $t - R/c$  maßgeblich – wegen der endlichen Signalgeschwindigkeit  $c$ .

Die Lösung für eine kontinuierliche Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r}', t)$  gewinnt man aus (3.83) durch *Superposition*:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'. \quad (3.84)$$

Das ist (1.56) mit retardierter  $t$ -Abhängigkeit. Für  $c \rightarrow \infty$  verschwindet die Retardierung; dann sind zeitliche  $\rho$ -Änderungen in beliebig großer Entfernung für das  $\phi$ -Feld *sofort* wirksam.

**Exakter Lösungsweg.** Darstellung von  $\phi(\vec{r}, t)$  als vierdimensionales Fourier-Integral:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{\phi}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d^3 k d\omega. \quad (3.85)$$

Vollständigkeit der ebenen Wellen  $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$  – ohne die Einschränkung  $\omega = ck$  – im Raum der Funktionen  $\phi(\vec{r}, t)$ . Für  $\rho(\vec{r}, t)$  hat man entsprechend

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{\rho}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} d^3k d\omega . \quad (3.86)$$

Einsetzen von (3.85, 86) in die inhomogene Wellengleichung (3.74 a) führt mit

$$\square e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = (-k^2 + \omega^2/c^2) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad (3.87)$$

auf

$$\int \left( (k^2 - \omega^2/c^2) \tilde{\phi}(\vec{k}, \omega) - \tilde{\rho}(\vec{k}, \omega) / \varepsilon_0 \right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} d^3k d\omega = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{\phi}(k, \omega) = \frac{\tilde{\rho}(\vec{k}, \omega)}{\varepsilon_0(k^2 - \omega^2/c^2)} . \quad (3.88)$$

Das ist die Fourier-Transformierte des gesuchten Potentials.

Einsetzen von (3.88) in (3.85) ergibt

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2 \varepsilon_0} \int \frac{\tilde{\rho}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}}{k^2 - \omega^2/c^2} d^3k d\omega . \quad (3.89)$$

Die Fourier-Transformierte der Ladungsdichte ist

$$\tilde{\rho}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \rho(\vec{r}', t') e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}' - \omega t')} d^3r' dt' . \quad (3.90)$$

Einsetzen in (3.89) ergibt

$$\phi(\vec{r}, t) = \int G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \rho(\vec{r}', t') d^3r' dt' \quad (3.91)$$

mit der **Green-Funktion des Wellenoperators**:

$$G(\vec{r}, -\vec{r}', t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4 \varepsilon_0} \int \frac{e^{i(\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}') - \omega(t-t'))}}{k^2 - \omega^2/c^2} d^3k d\omega \quad (3.92)$$

Invarianz dieser Funktion gegenüber räumlichen und zeitlichen Translationen.

*Interpretation.* Die Green-Funktion (3.92) befriedigt – bei Anwendung von (3.87) – die spezielle inhomogene Wellengleichung:

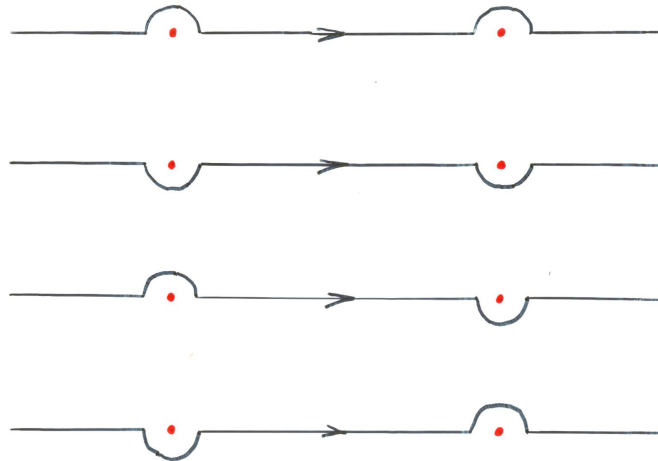
$$\begin{aligned} & \square G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} d^3k \frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega(t-t')} d\omega \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') . \end{aligned} \quad (3.93)$$

Das heißt:  $G(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$  ist das zur „Ladungsverteilung“  $\delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t')$  gehörige „Potential“. Das zur Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r}, t)$  gehörige Potential  $\phi(\vec{r}, t)$  gewinnt man nach (3.91) durch Überlagerung der zu den verschiedenen  $\vec{r}', t'$  gehörigen Potentiale  $G(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$  mit dem Gewicht  $\rho(\vec{r}', t')$ . Vgl. den statischen Fall in Kap. 2.

Berechnung des Integrals (3.92):

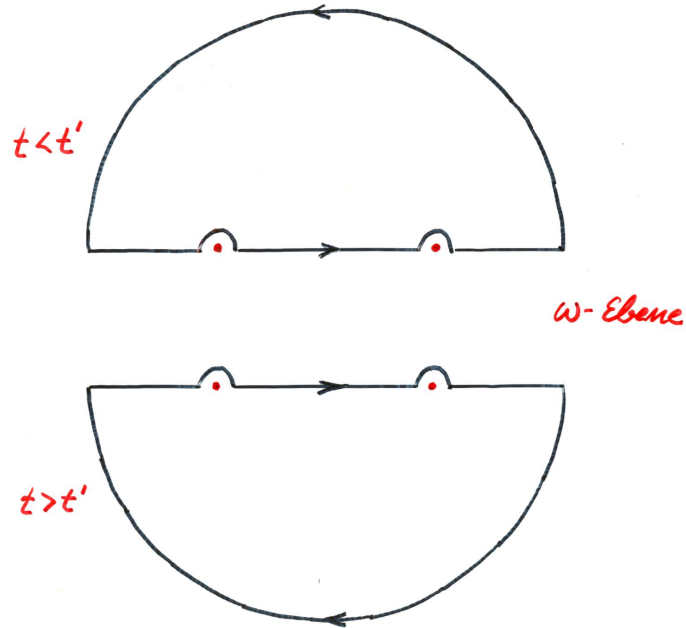
$$G = -\frac{c^2}{(2\pi)^4 \epsilon_0} \int \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{(\omega - ck)(\omega + ck)} d\omega}_{= I(k)} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} d^3k. \quad (3.94)$$

$\omega$ -Integration:



• Abbildung 3.3 •

Der Integrand  $I$  ist singulär bei  $\omega = \pm ck$ . Vier verschiedene Integrationswege zur Umgehung der Singularitäten sind möglich; daraus resultieren vier verschiedene  $G$ -Funktionen. Wir wählen den obersten Integrationsweg und schließen ihn durch einen „unendlich fernen“ Halbkreis in der komplexen  $\omega$ -Ebene mit exponentiell kleinem, d. h. verschwindendem Beitrag zum Integral. Zwei Fälle sind zu unterscheiden:



• Abbildung 3.4 •

$t - t' < 0$ :

$$I(k) = 0, \quad (3.95)$$

da keine Pole im Innern des geschlossenen Weges liegen. Die Zukunft leistet keinen Beitrag.

$t - t' > 0$ : In diesem Fall umschließt der Weg die beiden Pole. Auswertung von  $I$  mit dem *Residuensatz*. Bezeichnet man den Integranden von  $I$  mit  $f(\omega)$ , so ist

$$\begin{aligned} I(k) &= \oint f(\omega) d\omega \\ &= -2\pi i \left( \text{Res } f(\omega)|_{\omega=ck} + \text{Res } f(\omega)|_{\omega=-ck} \right) \\ &= -2\pi i \left( \frac{e^{-ick(t-t')}}{2ck} + \frac{e^{ick(t-t')}}{-2ck} \right) \\ &= -\frac{2\pi}{ck} \sin ck(t-t'). \end{aligned} \quad (3.96)$$

$\vec{k}$ -Integration. Für  $t < t'$  verschwindet  $G$  wegen  $I = 0$ ; für  $t > t'$  hat man mit (3.96):

$$G = \frac{c}{(2\pi)^3 \varepsilon_0} \int \frac{\sin ck(t-t')}{k} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} d^3 k. \quad (3.97)$$

Auswertung dieses Volumenintegrals in Kugelkoordinaten:

$$G = \frac{c}{(2\pi)^2 \varepsilon_0} \int_0^\infty dk k \sin(c k \tau) \int_{-1}^{+1} dx e^{i k R x}, \quad (3.98)$$

$$\tau = t - t', \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'|;$$

dabei wurde  $x = \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') / k R$  substituiert. Mit

$$\int_{-1}^{+1} dx e^{i k R x} = \frac{2}{k R} \sin k R \quad (3.99)$$

und der Substitution  $y = c k$  erhält man schließlich:

$$\begin{aligned} G &= -\frac{1}{2(2\pi)^2 \varepsilon_0 R} \left( \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{i y (\tau + R/c)}}_{= 2\pi \delta(\tau + R/c)} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{i y (\tau - R/c)}}_{= 2\pi \delta(\tau - R/c)} \right) \\ &= \frac{\delta(\tau - R/c)}{4\pi \varepsilon_0 R} \quad (\tau > 0); \end{aligned} \quad (3.100)$$

also insgesamt

$$G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \begin{cases} \frac{\delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{4\pi \varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}, & t > t' \\ 0, & t < t'. \end{cases} \quad (3.101)$$

Für die anderen Integrationswege ergeben sich andere Green-Funktionen. Die hier getroffene Wahl entspricht dem *Kausalitätsprinzip*.  $G \neq 0$  für  $t > t'$  und  $G = 0$  für  $t < t'$  bedeutet nämlich, dass nur die Vergangenheit, nicht aber die Zukunft die Gegenwart beeinflusst. Die anderen Green-Funktionen verletzen das Kausalitätsprinzip; sie werden hier nicht betrachtet.

Mit (3.101) folgt aus (3.91) der Ausdruck (3.84) für das *skalare Potenzial*. Für das *Vektorpotenzial* leitet man analog her:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c^2} \int G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{j}(\vec{r}', t') d^3 r' dt' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Das ist Gl. (1.59) mit retardierter  $t$ -Abhängigkeit. Die Vernachlässigung dieser Retardierung führt auf die sog. „quasistationäre Näherung“.

Die Lösungen (3.84, 91; 102) der inhomogenen Wellengleichungen (3.74) erfüllen die Lorentz-Konvention (3.08): Die räumliche Translationsinvarianz von  $G$  sowie partielle Integration führen zunächst auf

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c^2} \int \vec{\nabla} G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') d^3 r' dt' \\ &= -\frac{1}{c^2} \int \vec{\nabla}' G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') d^3 r' dt' \\ &= \frac{1}{c^2} \int G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') d^3 r' dt';\end{aligned}\quad (3.103 \text{ a})$$

wegen der Ladungserhaltung (Kontinuitätsgleichung) erhält man

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c^2} \int G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \frac{\partial}{\partial t'} \rho(\vec{r}', t') d^3 r' dt'; \quad (3.103 \text{ b})$$

erneute partielle Integration sowie die zeitliche Translationsinvarianz von  $G$  ergeben schließlich

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c^2} \int \frac{\partial}{\partial t'} G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \rho(\vec{r}', t') d^3 r' dt' \\ &= -\frac{1}{c^2} \int \frac{\partial}{\partial t} G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \rho(\vec{r}', t') d^3 r' dt' \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t),\end{aligned}\quad (3.103 \text{ c})$$

was zu beweisen war.

Damit ist das Problem der Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Wellengleichungen (3.74) in Lorentz-Eichung durch die Integrale (3.84, 91; 102) gelöst. Zur allgemeinen Lösung gelangt man nach (3.14) durch Addition der allgemeinen (Lorentz-geeichten) Lösung der homogenen Wellengleichungen (3.15).

Wie im stationären Fall der Poisson-(Laplace-)Gleichung in Kap. 2 werden auch im zeitabhängigen Fall der inhomogenen (homogenen) Wellengleichung spezielle Lösungen durch die Vorgabe von *Randbedingungen* festgelegt. Wegen der höheren Dimension (Anzahl unabhängiger Variablen: vier statt drei) ist der zeitabhängige Fall komplizierter als der statische. Der „Rand“ eines vierdimensionalen Gebietes  $V$  der Raumzeit ist durch eine funktionale Verknüpfung

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad (3.104)$$

der Raumzeitkoordinaten gegeben und ist seinerseits ein dreidimensionales Gebiet  $S$ . Durch die Vorgabe von *Cauchy-Bedingungen*, d. h. die Vorgabe des Feld *und* seiner Normalableitung auf  $S$ , erhält man eine eindeutige Lösung (sofern  $S$  offen).

*Beispiel:*

$$V = \mathbb{R}^3 \times T, \quad T = \{t \mid t_0 \leq t < \infty\} \Rightarrow S = \mathbb{R}^3 \times \{t_0\}, \quad (3.105)$$

d. h.  $f = t - t_0$ . Auf  $S$  Vorgabe von  $\phi(\vec{r}, t_0)$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{r}, t_0) \Rightarrow$  eindeutige Festlegung von  $\phi(\vec{r}, t)$  für  $t > t_0$ . *Anfangswertproblem.*

Die speziellen Lösungen (3.84, 91; 102) genügen – sofern  $\rho, \vec{j}$  im Endlichen – der Randbedingung  $(\phi, \vec{A}) \rightarrow (0, \vec{0})$  für  $r \rightarrow \infty$ . Das weitere „Randverhalten“ hängt von den Quellen  $\rho, \vec{j}(\vec{r}, t)$  ab. Wir gehen auf das Randwertproblem der Wellengleichung in dieser Vorlesung nicht näher ein. (Siehe Beugungstheorie, ...).

Wir wenden uns dem Problem der Abstrahlung elektromagnetischer Wellen von lokalisierten, zeitabhängigen Ladungs-/Stromverteilungen zu.

**Fourier-Analyse** der  $t$ -Abhängigkeit der Quellen:

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \rho_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.106)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \vec{j}_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega$$

sowie der resultierenden  $t$ -Abhängigkeit der Potenziale:

$$\vec{\phi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \phi_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.107)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \vec{A}_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega .$$

Einsetzen in die inhomogenen Wellengleichungen (3.10, 74) führt auf die inhomogenen **Helmholtz-Gleichungen**

$$(\Delta + k^2) \phi_\omega(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_\omega(\vec{r}) \quad (3.108 \text{ a})$$

$$(\Delta + k^2) \vec{A}_\omega(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{j}_\omega(\vec{r}) \quad (3.108 \text{ b})$$

zur Bestimmung der Fourier-Komponenten der Potentiale aus den Fourier-Komponenten der Quellen. Dabei wurde

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (3.109)$$

gesetzt; vgl. (3.17). Wir sind interessiert an denjenigen speziellen Lösungen von (3.108), die den speziellen Lösungen (3.84, 91; 102) entsprechen.

Die Fourier-Transformierte von (3.91) berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \phi_\omega(\vec{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \phi(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left( \int \int G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \rho(\vec{r}', t') d^3 r' dt' \right) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \left( \int \int G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \int \rho_{\omega'}(\vec{r}') e^{-i\omega' t'} d\omega' \right) d^3 r' dt' e^{i\omega t} dt; \end{aligned}$$

mit den Substitutionen  $t, t' \rightarrow \tau = t - t', \tau' = t'$  erhält man:

$$\begin{aligned} \phi_\omega(\vec{r}) &= \int \int \underbrace{G(\vec{r} - \vec{r}', \tau) e^{i\omega\tau} d\tau}_{G_\omega(\vec{r} - \vec{r}')} \int \underbrace{\rho_{\omega'}(\vec{r}') \frac{1}{2\pi} \int e^{i(\omega - \omega')\tau'} d\tau' d\omega' d^3 r'}_{= \delta(\omega - \omega')} \\ &= \int G_\omega(\vec{r} - \vec{r}') \rho_\omega(\vec{r}') d^3 r' \end{aligned} \quad (3.110)$$

mit der **Green-Funktion des Helmholtz-Operators**  $\Delta + k^2$ :

$$\begin{aligned} G_\omega(\vec{r} - \vec{r}') &= \int G(\vec{r} - \vec{r}', \tau) e^{i\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \int_0^\infty \delta(\tau - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) e^{i\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}, \end{aligned} \quad (3.111)$$

wobei im 2. Schritt (3.101) benutzt wurde. Also hat man die *spezielle Lösung*

$$\phi_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho_\omega(\vec{r}') d^3 r'. \quad (3.112)$$

Das ist eine Superposition auslaufender Kugelwellen der Frequenz  $\omega$ , ausgehend von den Quellpunkten  $\vec{r}'$ , gewichtet mit  $\rho_\omega$ .



Wegen

$$(\Delta + k^2) G_\omega(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3.113)$$

verifiziert man leicht, dass (3.112) tatsächlich (3.108 a) löst. Beweis von (3.113) mit (3.93); vgl. (1.54).

Entsprechend findet man zu (3.102):

$$\begin{aligned} \vec{A}_\omega(\vec{r}) &= \frac{1}{c^2} \int G_\omega(\vec{r} - \vec{r}') \vec{j}_\omega(\vec{r}') d^3 r' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{j}_\omega(\vec{r}') d^3 r' \end{aligned} \quad (3.114)$$

als spezielle Lösung von (3.108 b). Wegen der *Lorentz-Konvention* sind  $\phi_\omega(\vec{r})$  und  $\vec{A}_\omega(\vec{r})$  nicht unabhängig voneinander. Setzt man (3.107) in (3.08) ein, so findet man den Zusammenhang

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_\omega(\vec{r}) - i \frac{k}{c} \phi_\omega(\vec{r}) = 0. \quad (3.115)$$

Es genügt also,  $\vec{A}_\omega(\vec{r})$  zu berechnen;  $\phi_\omega(\vec{r})$  folgt daraus mit (3.115).

Man verifiziert die Beziehung (3.115) auch direkt für die Lösungen (3.110, 112; 114), indem man die Fourier-Transformierte

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\omega(\vec{r}) - i\omega \rho_\omega(\vec{r}) = 0 \quad (3.116)$$

der *Kontinuitätsgleichung* benutzt. Vgl. (3.103).

Auch das elektromagnetische Feld wird der Fourier-Analyse unterworfen:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \vec{E}_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.117)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \vec{B}_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Die Fourier-Transformierten  $\vec{E}_\omega, \vec{B}_\omega(\vec{r})$  berechnen sich aus den Fourier-Transformierten  $\phi_\omega, \vec{A}_\omega(\vec{r})$  der Potentiale. Setzt man (3.107, 117) in (3.1, 3) ein, so erhält man

$$\vec{B}_\omega(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}_\omega(\vec{r}) \quad (3.118)$$

bzw. – mit (3.115) –

$$\begin{aligned} \vec{E}_\omega(\vec{r}) &= -\vec{\nabla} \phi_\omega(\vec{r}) + i\omega \vec{A}_\omega(\vec{r}) \\ &= \frac{ic}{k} \left( \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_\omega(\vec{r}) + k^2 \vec{A}_\omega(\vec{r}) \right). \end{aligned} \quad (3.119)$$

Das elektromagnetische Feld ist also – als Konsequenz der Lorentz-Konvention – allein durch das Vektorpotenzial bestimmt.

In *quellfreien Regionen* benötigt man – wie im zeitabhängigen Fall – nicht den Rückgriff auf die Potentiale. Die Maxwell-Gleichungen (3.25) des Vakuums gehen durch Fourier-Transformation über in

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\omega(\vec{r}) &= 0 \\
 \vec{\nabla} \times \vec{B}_\omega(\vec{r}) + i \frac{k}{c} \vec{E}_\omega(\vec{r}) &= \vec{0} \\
 \vec{\nabla} \times \vec{E}_\omega(\vec{r}) - i c k \vec{B}_\omega(\vec{r}) &= \vec{0} \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_\omega(\vec{r}) &= 0 .
 \end{aligned} \tag{3.120}$$

Entkopplung der beiden rot-Gleichungen führt mit Hilfe der beiden div-Gleichungen auf zwei separate homogene Helmholtz-Gleichungen für  $\vec{E}_\omega, \vec{B}_\omega(\vec{r})$ :

$$(\Delta + k^2) \vec{E}_\omega(\vec{r}) = \vec{0} \tag{3.121}$$

$$(\Delta + k^2) \vec{B}_\omega(\vec{r}) = \vec{0} .$$

Es genügt, entweder nur  $\vec{E}_\omega(\vec{r})$  oder nur  $\vec{B}_\omega(\vec{r})$  zu berechnen, weil man mit Hilfe der rot-Gleichungen in (3.120) das jeweils andere Feld berechnen kann:

$$\vec{B}_\omega(\vec{r}) = -\frac{i}{c k} \vec{\nabla} \times \vec{E}_\omega(\vec{r}) \tag{3.122 a}$$

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = \frac{i c}{k} \vec{\nabla} \times \vec{B}_\omega(\vec{r}) . \tag{3.122 b}$$

Diese beiden Beziehungen folgen auch direkt aus (3.118, 119), und zwar genau dann, wenn  $\vec{A}_\omega(\vec{r})$  der freien Helmholtz-Gleichung genügt – also im Vakuum.

Wir wenden uns der **approximativen Auswertung** des zentralen Ausdrucks (3.114) für das Vektorpotenzial zu.

*Annahmen:*

$$r' / r \ll 1 , \tag{3.123}$$

d. h. die Stromverteilung (die Quellpunkte) seien in einer Umgebung des Ursprungs lokalisiert ( $r'$  klein), der Feldpunkt liege in der Fernzone ( $r$  groß);

$$k r' \ll 1 , \tag{3.124}$$

d. h. langsame Oszillation ( $\omega \ll c/r'$ ) der Quelle.

Aus (3.123) folgt zunächst

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq r \left( 1 - \left( \frac{r'}{r} \right) (\hat{r} \cdot \hat{r}') \right); \quad (3.125)$$

damit vereinfacht sich der Integrkern (die Green-Funktion) in (3.114) zu

$$\begin{aligned} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &\simeq \frac{e^{ikr}}{r} \frac{e^{-i(kr')(\hat{r}\cdot\hat{r}')}}{1 - (r'/r)(\hat{r}\cdot\hat{r}')} \\ &= \frac{e^{ikr}}{r} \left( 1 - i(kr')(\hat{r}\cdot\hat{r}') - \frac{1}{2}(kr')^2(\hat{r}\cdot\hat{r}')^2 + \dots \right) \times \\ &\times \left( 1 + \left( \frac{r'}{r} \right) (\hat{r} \cdot \hat{r}') + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 (\hat{r} \cdot \hat{r}')^2 + \dots \right) \\ &= \frac{e^{ikr}}{r} \left( 1 + \left( \frac{r'}{r} - ikr' \right) (\hat{r} \cdot \hat{r}') \right. \\ &\left. + \left( \left( \frac{r'}{r} \right)^2 - i(kr') \left( \frac{r'}{r} \right) - \frac{1}{2}(kr')^2 \right) (\hat{r} \cdot \hat{r}')^2 + \dots \right). \end{aligned} \quad (3.126)$$

Wegen (3.123, 124) Beschränkung auf die in  $r'/r$  und  $kr'$  linearen Terme (1. Ordnung):

$$\frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} \simeq \frac{e^{ikr}}{r} \left( 1 + \frac{1-ikr}{r} \hat{r} \cdot \vec{r}' \right). \quad (3.127)$$

Einsetzen der Approximation (3.127) in (3.114) ergibt die für die *Fernzone* und den *Niederfrequenzbereich* gültige Formel

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) \simeq \vec{A}_1(\vec{r}) + \vec{A}_2(\vec{r}) \quad (3.128)$$

mit

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \int \vec{j}_\omega(\vec{r}') dV' \quad (3.129)$$

$$\vec{A}_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0 (1 - ikr) e^{ikr}}{4\pi r^2} \int \hat{r} \cdot \vec{r}' \vec{j}_\omega(\vec{r}') dV'. \quad (3.130)$$

Vgl. (2.151). Jeder Term (auch die Terme höherer Ordnung in  $(r'/r)$ ) enthält die auslaufende Kugelwelle  $e^{ikr}/r$  als Faktor: *Abstrahlung*.  $\vec{A}_1(\vec{r})$  entspricht elektrischer Dipolstrahlung,  $\vec{A}_2(\vec{r})$  magnetischer Dipol- und elektrischer Quadrupolstrahlung, ...

$\vec{A}_1(\vec{r})$ . Im Unterschied zum stationären Fall (2.153) verschwindet das Volumenintegral über die Stromdichte hier nicht, vielmehr gilt wegen (2.153) und (3.116):

$$\begin{aligned} \int \vec{j}_\omega(\vec{r}) dV &= \int \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\omega(\vec{r}) \vec{r} dV - \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\omega(\vec{r})) \vec{r} dV \\ &= \oint d\vec{S} \cdot \vec{j}_\omega(\vec{r}) \vec{r} - i\omega \int \vec{r} \rho_\omega(\vec{r}) dV \\ &= -i\omega \vec{p}_\omega ; \end{aligned} \quad (3.131 \text{ a})$$

dabei ist – vgl. (2.131) –

$$\vec{p}_\omega = \int \vec{r} \rho(\vec{r}) dV \quad (3.131 \text{ b})$$

das elektrische Dipolmoment der Fourier-Komponente  $\rho_\omega$  der Ladungsverteilung. Mit (3.131 a) folgt aus (3.129):

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi} \vec{p}_\omega \frac{e^{ikr}}{r} = \vec{A}_{ED}(\vec{r}), \quad (3.132)$$

wodurch die in der Fourier-Komponente  $\vec{A}_\omega$  des Vektorpotenzials enthaltene **elektrische Dipolstrahlung** beschrieben wird.

$\vec{A}_2(\vec{r})$ . Wegen der Vektoridentität (2.156) ist

$$\int \hat{r} \cdot \vec{r}' \vec{j}_\omega(\vec{r}') dV' = \vec{m}_\omega \times \hat{r} + \frac{1}{2} \hat{r} \cdot \int (\vec{j}_\omega(\vec{r}') \vec{r}' + \vec{r}' \vec{j}_\omega(\vec{r}')) dV' \quad (3.133 \text{ a})$$

mit – vgl. (2.158) –

$$\vec{m}_\omega = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times \vec{j}_\omega(\vec{r}) dV ; \quad (3.133 \text{ b})$$

das ist das magnetische Dipolmoment der Fourier-Komponente  $\vec{j}_\omega$  der Stromverteilung.

Im Unterschied zum stationären Fall (2.157) verschwindet das Integral der rechten Seite von (3.133 a) nicht; vielmehr gilt wegen (3.116):

$$\begin{aligned} \int (\vec{j}_\omega(\vec{r}') \vec{r}' + \vec{r}' \vec{j}_\omega(\vec{r}')) &= \int \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}_\omega(\vec{r}') \vec{r}' \vec{r}' dV' - \int (\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}_\omega(\vec{r}')) \vec{r}' \vec{r}' dV' \\ &= \oint d\vec{S}' \cdot \vec{j}_\omega(\vec{r}') \vec{r}' \vec{r}' - i\omega \int \vec{r}' \vec{r}' \rho_\omega(\vec{r}') dV' \\ &= -\frac{i\omega}{3} \left( \vec{Q}_\omega + \int r'^2 \rho_\omega(\vec{r}') dV' \mathbb{1} \right) ; \end{aligned} \quad (3.134 \text{ a})$$

dabei bedeutet – vgl. (2.132) –

$$\vec{Q}_\omega = \int (3\vec{r}\vec{r} - r^2 \mathbb{1}) \rho_\omega(\vec{r}) dV \quad (3.134 \text{ b})$$

das elektrische Quadrupolmoment von  $\rho_\omega$ .

Einsetzen von (3.134 a) in (3.133 a) ergibt

$$\int \hat{r} \cdot \vec{r}' \vec{j}_\omega(\vec{r}') dV' = \vec{m}_\omega \times \hat{r} - \frac{i\omega}{6} \left( \hat{r} \cdot \vec{Q}_\omega + \int r'^2 \rho_\omega(\vec{r}') dV' \hat{r} \right); \quad (3.135)$$

Einsetzen von (3.135) in (3.130) führt schließlich auf

$$\vec{A}_2(\vec{r}) = \vec{A}_{MD}(\vec{r}) + \vec{A}_{EQ}(\vec{r}) \quad (3.136)$$

mit

$$\vec{A}_{MD}(\vec{r}) = \frac{\mu_0(1 - ikr)}{4\pi r} \vec{m}_\omega \times \hat{r} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (3.137)$$

wodurch die in  $\vec{A}_\omega$  enthaltene **magnetische Dipolstrahlung** beschrieben wird, und

$$\vec{A}_{EQ}(\vec{r}) = -\frac{i\mu_0\omega(1 - ikr)}{24\pi r} \hat{r} \cdot \vec{Q}_\omega \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (3.138)$$

wodurch die **elektrische Quadrupolstrahlung** in  $\vec{A}_\omega$  erfasst wird. Der  $\hat{r}$ -Term wurde weggelassen, weil er bei der Berechnung von  $\vec{B}_\omega(\vec{r})$  gemäß (3.118) und folglich auch zu  $\vec{E}_\omega(\vec{r})$  keinen Beitrag leistet.

Insgesamt erhält man aus (3.128, 132, 136) für das Vektorpotenzial  $\vec{A}_\omega$  der von der oszillierenden  $\rho_\omega, \vec{j}_\omega$ -Verteilung emittierten elektromagnetischen Strahlung die **Multi-polentwicklung**

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \vec{A}_{ED}(\vec{r}) + \vec{A}_{MD}(\vec{r}) + \vec{A}_{EQ}(\vec{r}) + \dots \quad (3.139)$$

In nächsthöherer Ordnung käme die **magnetische Quadrupol-** und die **elektrische Oktupolstrahlung** hinzu usw.

Für das Folgende benötigt man die *Rotation* eines Vektorfeldes in *Kugelkoordinaten*. Sei

$$\vec{a}(r, \vartheta, \varphi) = a_r(r, \vartheta, \varphi) \hat{r} + a_\vartheta(r, \vartheta, \varphi) \hat{\vartheta} + a_\varphi(r, \vartheta, \varphi) \hat{\varphi}; \quad (3.140)$$

dafür gilt:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{a} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left( \frac{\partial \sin \vartheta a_\varphi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right) \hat{r} \\ &+ \left( \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} \right) \hat{\vartheta} \\ &+ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r a_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} \right) \hat{\varphi}. \end{aligned} \quad (3.141)$$

**Elektrische Dipolstrahlung.** Das Dipolmoment weise in in  $z$ -Richtung:

$$\vec{p}_\omega = p_\omega \hat{z} = p_\omega (\cos \vartheta \hat{r} - \sin \vartheta \hat{\vartheta}) ; \quad (3.142)$$

mit (3.132) folgt

$$\vec{A}_{ED}(\vec{r}) = -\frac{i \mu_0 \omega p_\omega}{4 \pi} (\cos \vartheta \hat{r} - \sin \vartheta \hat{\vartheta}) \frac{e^{i k r}}{r} . \quad (3.143)$$

Berechnung des  $\vec{B}_\omega$ -Feldes gemäß (3.118); mit (3.141) erhält man:

$$\begin{aligned} \vec{B}_{ED}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}_{ED}(\vec{r}) \\ &= -\frac{\mu_0 k^2 \omega p_\omega}{4 \pi} \left( \frac{1}{k r} + \frac{i}{(k r)^2} \right) \sin \vartheta \hat{\varphi} e^{i k r} . \end{aligned} \quad (3.144)$$

Berechnung des  $\vec{E}_\omega$ -Feldes gemäß (3.122 b) sowie erneut (3.141):

$$\begin{aligned} \vec{E}_{ED}(\vec{r}) &= -\frac{k^3 p_\omega}{4 \pi \varepsilon_0} \left( \left( \frac{2 i}{(k r)^2} - \frac{2}{(k r)^3} \right) \cos \vartheta \hat{r} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{k r} + \frac{i}{(k r)^2} - \frac{1}{(k r)^3} \right) \sin \vartheta \hat{\vartheta} \right) e^{i k r} . \end{aligned} \quad (3.145)$$

Beide Felder haben – zusammen mit dem Faktor  $e^{-i \omega t}$ , siehe (3.117) – die Gestalt von Wellen, die sich in radialer Richtung mit der Geschwindigkeit  $c$  ausbreiten. Zylindersymmetrie bezüglich der  $z$ -Achse.  $\vec{B}_{ED}$ -Feldlinien: konzentrische Kreise um die  $z$ -Achse.  $\vec{E}_{ED}$ -Feldlinien: in den  $r z$ -Ebenen.  $\vec{E}_{ED}$  und  $\vec{B}_{ED}$  stehen überall senkrecht aufeinander.

Innerhalb der *Fernzone*  $r' \ll r$  (3.123) unterscheidet man:

- die *statische Zone*:

$$k r \ll 1 , \quad (3.146)$$

- die *Strahlungszone*:

$$1 \ll k r . \quad (3.147)$$

In der *statischen Zone* ist  $e^{i k r} \simeq 1$ , und in (3.144, 145) dominieren die Terme mit den höchsten  $1 / k r$ -Potenzen:

$$\vec{E}_{ED}(\vec{r}) \simeq \frac{p_\omega}{4 \pi \varepsilon_0 r^3} (2 \cos \vartheta \hat{r} + \sin \vartheta \hat{\vartheta}) \quad (3.148)$$

$$\vec{B}_{ED}(\vec{r}) \simeq -\frac{i \mu_0 \omega p_\omega}{4 \pi r^2} \sin \vartheta \hat{\varphi} . \quad (3.149)$$

(3.148) ist genau das statische Dipolfeld (2.143) – hier allerdings oszillierend mit  $e^{-i\omega t}$ . Wegen der Nähe zur Quelle keine Retardierung. (3.149) lässt sich mit  $\sin \vartheta \hat{\varphi} = \hat{z} \times \hat{r}$  wie folgt umschreiben (etwas symbolisch):

$$\begin{aligned}\vec{B}_{ED}(\vec{r}) &\simeq -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi r^2} \vec{p}_\omega \times \hat{r} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I_\omega \vec{d} \times \hat{r} .\end{aligned}\quad (3.150)$$

Das ist der Beitrag eines vom Wechselstrom  $I_\omega$  durchflossenen Linienelementes  $\vec{d}$  zum Magnetfeld in quasistationärer Näherung, d. h. ohne Retardierung (Biot-Savart-Gesetz).

In der *Strahlungzone* dominieren in (3.144, 145) die  $i/k r$ -Terme:

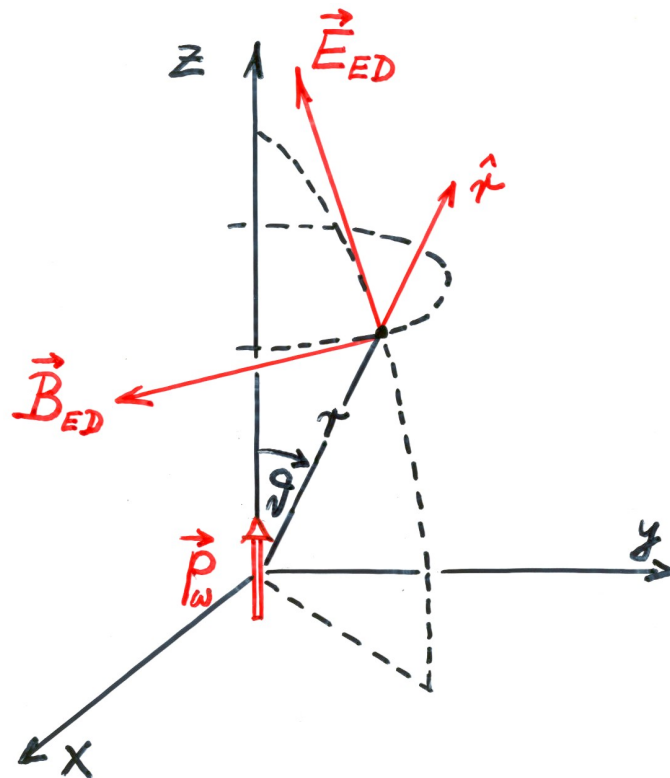
$$\vec{E}_{ED}(\vec{r}) \simeq -\frac{k^2 p_\omega}{4\pi \varepsilon_0} \sin \vartheta \hat{\vartheta} \frac{e^{i k r}}{r} \quad (3.151)$$

$$\vec{B}_{ED}(\vec{r}) \simeq -\frac{\mu_0 k \omega p_\omega}{4\pi} \sin \vartheta \hat{\varphi} \frac{e^{i k r}}{r} , \quad (3.152)$$

d. h.  $\vec{E}_{ED}$ ,  $\vec{B}_{ED}$  sind zueinander und zu  $\hat{r}$  orthogonal. Es gilt der Zusammenhang:

$$\vec{B}_{ED}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \left( \hat{r} \times \vec{E}_{ED}(\vec{r}) \right) . \quad (3.153)$$

vgl. (3.22 a). Also verhält sich das Feld lokal wie eine ebene elektromagnetische Welle in  $r$ -Richtung:



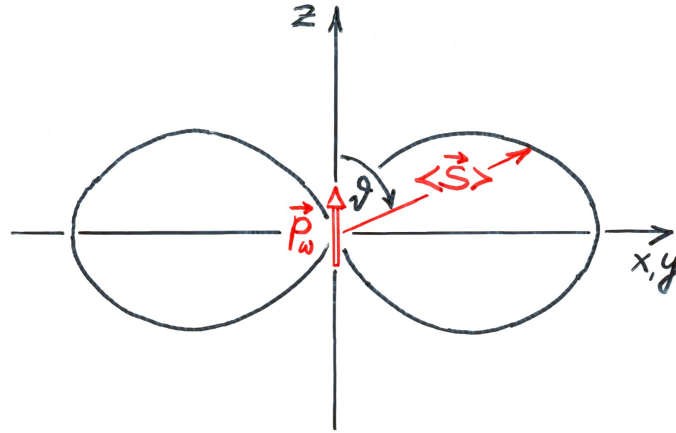
• Abbildung 3.5 •

Die zeitgemittelte Feldenergiestromdichte dieser Welle beträgt nach (3.69):

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} (\vec{E}_{ED} \times \vec{B}_{ED}^*) \\ &= \frac{\mu_0 \omega^4 |p_\omega|^2}{32\pi^2 c r^2} \sin^2 \vartheta \hat{r}. \end{aligned} \quad (3.154)$$

Die Abstrahlung erfolgt in radialer Richtung; maximal: quer zum Dipol; minimal (verschwindend): in Dipolrichtung. Rotationssymmetrie bezüglich der Dipolrichtung:





• Abbildung 3.6 •

**Magnetische Dipolstrahlung.** Das Dipolmoment weise in  $z$ -Richtung:

$$\vec{m}_\omega = m_\omega \hat{z}; \quad (3.155)$$

mit (3.137) folgt

$$\vec{A}_{MD}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m_\omega (1 - i k r)}{4 \pi r} \sin \vartheta \hat{\varphi} \frac{e^{i k r}}{r}. \quad (3.156)$$

Die Berechnung des  $\vec{B}_\omega$ ,  $\vec{E}_\omega$ -Feldes erfolgt gemäß (3.118, 122 b) mit (3.141); man erhält

$$\begin{aligned} \vec{B}_{MD}(\vec{r}) = & -\frac{k^3 m_\omega}{4 \pi \varepsilon_0 c^2} \left( \left( \frac{2i}{(kr)^2} - \frac{2}{(kr)^3} \right) \cos \vartheta \hat{r} \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{kr} + \frac{i}{(kr)^2} - \frac{1}{(kr)^3} \right) \sin \vartheta \hat{\vartheta} \right) e^{i k r} \end{aligned} \quad (3.157)$$

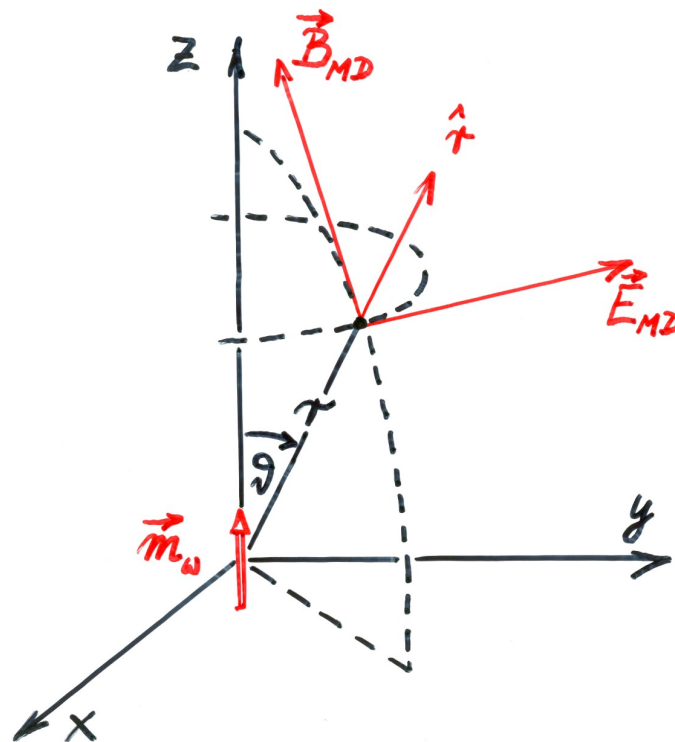
bzw.

$$\vec{E}_{MD}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 k^2 \omega m_\omega}{4 \pi} \left( \frac{1}{kr} + \frac{i}{(kr)^2} \right) \sin \vartheta \hat{\varphi} e^{i k r}. \quad (3.158)$$

Der Vergleich von (3.157, 158) mit (3.144, 145) ergibt zwischen den magnetischen und elektrischen Dipolfeldern den folgenden *Zusammenhang*:

$$\vec{B}_{MD} = \frac{m_\omega}{c^2 p_\omega} \vec{E}_{ED}, \quad \vec{E}_{MD} = -\frac{m_\omega}{p_\omega} \vec{B}_{ED}. \quad (3.159)$$

Also sind die  $\vec{E}_{MD}$ -Feldlinien konzentrische Kreise um die  $z$ -Achse, und die  $\vec{B}_{MD}$ -Feldlinien liegen in den  $rz$ -Ebenen;  $\vec{E}_{MD}$  und  $\vec{B}_{MD}$  stehen wieder überall senkrecht aufeinander:



• Abbildung 3.7 •

Gl. (3.159) ist ein Beispiel für die folgende Invarianzeigenschaft der Maxwell-Gleichungen (3.122). Ist  $\vec{E}_\omega$ ,  $\vec{B}_\omega$  Lösung dieser Gleichungen, so ist auch

$$\vec{E}'_\omega = \alpha c \vec{B}_\omega, \quad \vec{B}'_\omega = -\alpha \vec{E}_\omega / c \quad (3.160)$$

Lösung dieser Gleichungen. Hierbei ist  $\alpha$  eine beliebige (dimensionslose) Konstante, die im obigen Beispiel den Wert  $-m_\omega / c p_\omega$  hat. Man spricht von *Dualität* der Felder  $\vec{E}_\omega$  und  $\vec{B}_\omega$ .

Im magnetischen Dipolstrahlungsfeld sind also die Rollen von  $\vec{E}_\omega$ ,  $\vec{B}_\omega$  gegenüber dem elektrischen Dipolstrahlungsfeld gemäß (3.159) miteinander vertauscht. Daher keine eigene Diskussion.

**Elektrische Quadrupolstrahlung.** Nicht in dieser Vorlesung!

Eine *systematische Fortsetzung* der Multipolentwicklung (3.139) über die dort angegebenen Terme hinaus ist auf der Grundlage der Entwicklungen im Gefolge der Annahmen (3.123, 124) prinzipiell möglich, in der Praxis jedoch kompliziert und zunehmend

unübersichtlich. Wie im statischen Fall empfiehlt sich eine Entwicklung des Vektorpotenzials  $\vec{A}_\omega$  bzw. – im Vakuum – direkt des  $\vec{E}_\omega, \vec{B}_\omega$ -Feldes nach (*Vektor-*) *Kugelfunktionen*. Statt der Laplace-Gleichung hat man die Helmholtz-Gleichung in Kugelkoordinaten zu lösen; dabei ist die Radialabhängigkeit durch *sphärische Zylinderfunktionen* gegeben. Bei diesem systematischen Vorgehen vermeidet man auch die zuvor gemachten Approximationen.

Die vorstehend umrissene Methode ist von größter Wichtigkeit für eine systematische, beliebig detaillierte Analyse der elektromagnetischen Strahlung, die von makroskopischen (Antennen, ...) und mikroskopischen (angeregten Atomen, Kernen, ...) oszillierenden Quellen emittiert wird. Wir können jedoch (leider) in dieser Vorlesung nicht näher darauf eingehen.

Die vorstehend behandelte Methode der Fourier-Analyse ist dann besonders effektiv, wenn  $\rho_\omega, \vec{j}_\omega$  bei einer Frequenz  $\omega$  scharf gepeakt sind. Dann kann man sich auf diese eine Fourier-Komponente beschränken und auf eine abschließende Superposition verschiedener Fourier-Komponenten verzichten. Das ist nicht möglich, wenn die Quellen ein sehr breites Frequenzspektrum besitzen – wie im Falle nicht oszillierender, translatorisch bewegter Quellen. Dann hat man anders vorzugehen.

#### Elektromagnetisches Feld einer bewegten Punktladung:

$$\rho(\vec{r}, t) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}(t)) \quad (3.161)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = q \vec{v}(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}(t)) ,$$

wo  $\vec{r}(t)$  die Bahn des Teilchens und  $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$  die Geschwindigkeit ist. Der Ansatz (3.161) erfüllt wegen  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{v}(t) \cdot \vec{\nabla} \rho(\vec{r}, t) = -\partial \rho(\vec{r}, t) / \partial t$  die Kontinuitätsgleichung. Die zu (3.161) gehörigen Potenziale ergeben sich nach (3.91, 102) mit (3.101) zu

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \int dV' \frac{\delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(\vec{r}' - \vec{r}(t')) \quad (3.162)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int dt' \int dV' \frac{\delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{v}(t') \delta(\vec{r}' - \vec{r}(t')) .$$

Auswertung der *Volumenintegration* führt auf

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{\delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}(t')|/c}{|\vec{r} - \vec{r}(t')|} \quad (3.163)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int dt' \frac{\delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}(t')|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}(t')|} \vec{v}(t') ;$$

zur Auswertung der *Zeitintegration* schreibt man

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{\delta(f(t'))}{|\vec{r} - \vec{r}(t')|} \quad (3.164)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int dt' \frac{\delta(f(t'))}{|\vec{r} - \vec{r}(t')|} \vec{v}(t')$$

mit

$$f(t') = t - t' - |\vec{r} - \vec{r}(t')|/c . \quad (3.165)$$

Sei

$$f(t') = 0 \quad (3.166)$$

für  $t' = t'_1, t'_2, \dots, t'_\nu(\vec{r}, t), \dots$  ; dann ist

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_\nu \frac{1}{|\dot{f}(t'_\nu)| |\vec{r} - \vec{r}(t'_\nu)|} \quad (3.167)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \sum_\nu \frac{\vec{v}(t'_\nu)}{|\dot{f}(t'_\nu)| |\vec{r} - \vec{r}(t'_\nu)|}$$

mit

$$\dot{f}(t') = -1 + \frac{1}{c} \frac{(\vec{r} - \vec{r}(t')) \cdot \vec{v}(t')}{|\vec{r} - \vec{r}(t')|} . \quad (3.168)$$

Aus (3.168) folgt aber:

$$-1 - \frac{v(t')}{c} \leq \dot{f}(t') \leq -1 + \frac{v(t')}{c} . \quad (3.169)$$

woraus wegen  $v(t') < c$  die Ungleichung

$$\dot{f}(t') < 0 \quad (3.170)$$

resultiert. Also ist die Funktion  $f(t')$  monoton fallend und besitzt maximal eine einfache Nullstelle. Annahme: *eine* Nullstelle  $t'$ ; ansonsten hat man den physikalische uninteressanten Fall  $\phi = 0, \vec{A} = 0$ . Damit und wegen  $|\dot{f}(t')| = -\dot{f}(t')$  ergeben sich aus (3.167, 168) die Formeln:

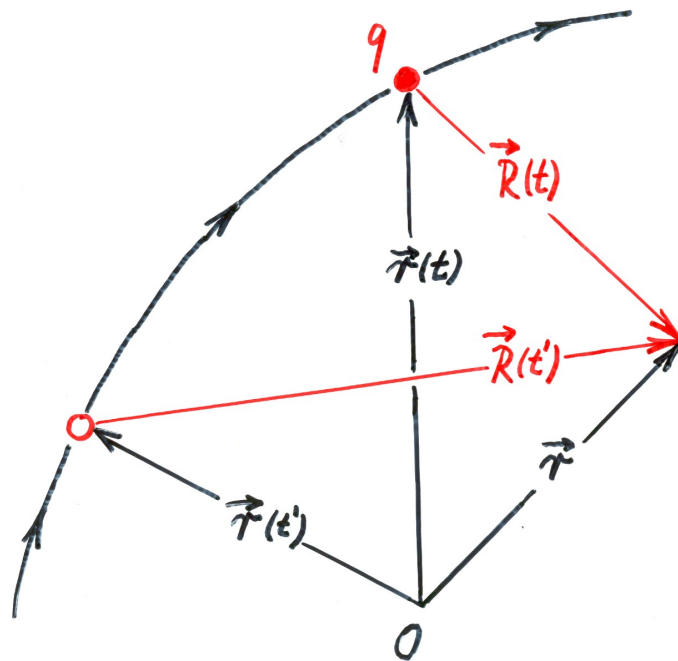
$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}(t')| - (\vec{r} - \vec{r}(t')) \cdot \vec{v}(t')/c} \tag{3.171}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\vec{v}(t')}{|\vec{r} - \vec{r}(t')| - (\vec{r} - \vec{r}(t')) \cdot \vec{v}(t')/c}$$

wo  $t' = t'(\vec{r}, t)$  aus (3.165, 166) zu bestimmen ist (Retardierung). Bezeichnung der Potenziale (3.171) als **Li'nard-Wiechert-Potenziale**.

Maßgeblich für  $\vec{A}(\vec{r}, t), \phi(\vec{r}, t)$  ist der *retardierte* Abstandsvektor:

$$\vec{R}(\vec{r}, t) = \vec{r} - \vec{r}(t') \tag{3.172 a}$$



• Abbildung 3.8 •

– nicht der *momentane* Abstandsvektor:

$$\vec{R}(\vec{r}, t) = \vec{r} - \vec{r}(t) . \tag{3.172 b}$$

Mit

$$\kappa(\vec{r}, t') = 1 - \hat{R}(\vec{r}, t') \cdot \vec{v}(t') / c \quad (3.173)$$

lassen sich die Li'nard-Wiechert-Potenziale abgekürzt wie folgt schreiben:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\kappa(\vec{r}, t') R(\vec{r}, t')} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\kappa R} \right] \quad (3.174)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\vec{v}(t')}{\kappa(\vec{r}, t') R(\vec{r}, t')} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[ \frac{\vec{v}}{\kappa R} \right].$$

Die eckige Klammer bedeutet *Retardierung*: als Zeitargument ist überall  $t'(\vec{r}, t)$  einzusetzen.

*Bedeutung von  $\kappa$* : Differenziert man (3.165, 166) bei festem  $\vec{r}$  nach  $t$ , so erhält man

$$\kappa = \frac{dt}{dt'}, \quad (3.175)$$

d. i. der Quotient aus dem Zeitelement  $dt$  bei  $\vec{r}$  und dem dazugehörigen Zeitelement  $dt'$  auf der Teilchenbahn.  $v/c \rightarrow 0 \Rightarrow dt/dt' \rightarrow 1$ .

Für eine **ruhende Punkladung** bei  $\vec{r}(t) = \vec{r}_0$  erhält man die aus der Elektromagnetostatik bekannten Resultate:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|}, \quad \vec{A}(\vec{r}) = \vec{0}, \quad (3.176)$$

d. i. das Coulomb-Potenzial bzw. verschwindendes Vektorpotenzial.

Die Li'nard-Wiechert-Potenziale sind trotz ihrer äußerlich einfachen Gestalt ziemlich kompliziert. Das liegt an der für nicht ganz einfache Teilchenbahnen schwer auswertbaren Retardierungsbedingung (3.165, 166).

Bei **gleichförmiger Teilchenbewegung**

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t \quad (3.177)$$

lässt sich die Retardierungsbedingung exakt auflösen. Sie nimmt für (3.177) die folgende Gestalt an:

$$c(t - t') = \vec{R}(\vec{r}, t') = |\vec{R}(\vec{r}, t) + \vec{v}(t - t')|. \quad (3.178)$$

Diese Gleichung ist nach  $t'$  aufzulösen, dann in (3.174) einzusetzen.

Durch Quadrieren folgt aus (3.178) die quadratische Gleichung

$$(c^2 - v^2)(t - t')^2 - 2\vec{R}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v}(t - t') - R^2(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.179)$$

mit der Lösung

$$t - t' = \frac{R \left( v \cos \alpha \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \sqrt{c^2 - v^2 \sin^2 \alpha} \right)}{c^2 - v^2}, \quad (3.180)$$

wobei das Minuszeichen wegen  $t - t' > 0$  und  $v < c$  ausscheidet.  $\alpha$  ist der Winkel zwischen  $\vec{R} = \vec{R}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{v}$ .

Für die Potenzialnenner in (3.174) erhält man mit (3.178, 180):

$$\begin{aligned} [\kappa R] &= |\vec{R} + \vec{v}(t - t')| - (\vec{R} + \vec{v}(t - t')) \cdot \vec{v} / c \\ &= \frac{1}{c} ((c^2 - v^2)(t - t') - \vec{R} \cdot \vec{v}) \\ &= R \sqrt{1 - (v/c)^2 \sin^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (3.181)$$

Damit ergeben sich die *Li'nard-Wiechert-Potenziale* (3.174) zu

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(\vec{r}, t) \sqrt{1 - (v/c)^2 \sin^2 \alpha(\vec{r}, t)}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(1 - v^2/c^2) R^2(\vec{r}, t) + (\vec{R}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v})^2 / c^2}} \\ &= \frac{q\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R_{\perp}^2(\vec{r}, t) + \gamma^2 R_{\parallel}^2(\vec{r}, t)}} \end{aligned} \quad (3.182 \text{ a})$$

sowie

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \phi(\vec{r}, t) \vec{v}. \quad (3.182 \text{ b})$$

Dabei ist

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \geq 1 \quad (v < c), \quad (3.183)$$

und  $R_{\perp}$ ,  $R_{\parallel}$  sind die zu  $\vec{v}$  senkrechte bzw. parallele Komponente von  $\vec{R}$ . Die im statischen Fall ( $v = 0$ ) kugelförmigen Äquipotenzialflächen sind im Falle der Bewegung ( $v \neq 0$ ) quer zu  $\vec{v}$  um den Faktor  $\gamma$  gedehnt. Dieser *relativistische (!) Effekt* macht sich natürlich nur bemerkbar, wenn  $v/c$  nicht zu klein ist, d. h. bei sehr hoher Teilchengeschwindigkeit.

Die Potenziale (3.182) genügen wegen der leicht nachzurechnenden Beziehung

$$\vec{\nabla} \phi(\vec{r}, t) \cdot \vec{v} + \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.184)$$

der *Lorentz-Konvention* (3.8). Berechnung des zu (3.182) gehörigen  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ -Feldes mit Hilfe der Gln. (3.1, 3):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = - \left( \vec{\nabla} + \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi(\vec{r}, t) \quad (3.185)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \phi(\vec{r}, t) \times \vec{v} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}(\vec{r}, t) . \quad (3.186)$$

Es genügt also, das  $\vec{E}$ -Feld zu berechnen.

**$\vec{E}$ -Feld :**

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(1 - v^2/c^2) R^2(\vec{r}, t) + (\vec{R}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v})^2/c^2}^3} \times \\ &\times \underbrace{\frac{1}{2} \left( \vec{\nabla} + \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) R^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} (\vec{R}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v})^2 \right)}_{= \vec{a}(\vec{r}, t)} . \end{aligned} \quad (3.187)$$

Mit

$$\vec{R}(\vec{r}, t) = \vec{r} - \vec{r}_0 - \vec{v}t \quad (3.188)$$

folgt nach kurzer Rechnung:

$$\vec{a}(\vec{r}, t) = (1 - v^2/c^2) \vec{R}(\vec{r}, t) , \quad (3.189)$$

somit

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - v^2/c^2) \vec{R}(\vec{r}, t)}{\sqrt{(1 - v^2/c^2) R^2(\vec{r}, t) + (\vec{R}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v})^2/c^2}^3} \\ &= \frac{q\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}(\vec{r}, t)}{\sqrt{R_{\perp}^2(\vec{r}, t) + \gamma^2 R_{\parallel}^2(\vec{r}, t)}^3} . \end{aligned} \quad (3.190)$$

Das  $\vec{E}$ -Feld der bewegten Ladung ist zwar noch radial, aber nicht mehr kugelsymmetrisch. Im Vergleich zum  $\vec{E}$ -Feld der ruhenden Ladung ist es quer zur Bewegungsrichtung um den Faktor  $\gamma$  verstärkt, in Bewegungsrichtung um den Faktor  $\gamma^{-2}$  geschwächt.

**$\vec{B}$ -Feld:**

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 q \gamma}{4\pi} \frac{\vec{v} \times \vec{R}(\vec{r}, t)}{\sqrt{R_{\perp}^2(\vec{r}, t) + \gamma^2 R_{\parallel}^2(\vec{r}, t)}^3} . \quad (3.191)$$



Die Feldlinien sind konzentrische Kreise um die Bewegungsrichtung.

Der *Poynting-Vektor* ist nach (1.67):

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{q^2 \gamma^2}{16 \pi^2 \epsilon_0} \frac{\vec{R}(\vec{r}, t) \times (\vec{v} \times \vec{R}(\vec{r}, t))}{(R_{\perp}^2(\vec{r}, t) + (\gamma R_{\parallel}(\vec{r}, t))^2)^{3/2}} \quad (3.192)$$

Es erfolgt *keine Abstrahlung*, da überall  $\vec{S} \cdot \vec{R} = 0$  ist. Außerdem verschwindet  $S$  im Unendlichen wie  $R^{-4}$ .

Bei **beliebiger Teilchenbewegung** ist die Berechnung des  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ -Feldes langwierig. Sie wird hier nicht vorgeführt. Das Resultat ist:

$$\vec{E} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \left[ \frac{1}{\kappa^3} \left( \frac{\hat{R} - \vec{v}/c}{\gamma^2 R^2} + \frac{\hat{R} \times ((\hat{R} - \vec{v}/c) \times \vec{a}/c)}{c R} \right) \right], \quad (3.193)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} [\hat{R}] \times \vec{E}. \quad (3.194)$$

Es genügt also auch im allgemeinen Fall, das  $\vec{E}$ -Feld gemäß (3.193) auszurechnen; das  $\vec{B}$ -Feld folgt daraus gemäß (3.194).  $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$  ist die Beschleunigung des Teilchens. Das Problem der  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ -Feldberechnung ist durch (3.193, 194) nur bis auf die Retardierung [...] gelöst ( $t \rightarrow t'(\vec{r}, t)$ ). Diese hängt von der Teilchenbahn  $\vec{r}(t)$  ab. Wir verfolgen hier das Problem der Retardierung nicht weiter; es ist abgesehen von einfachsten Bewegungen  $\vec{r}(t)$ , wie z. B. der gleichförmigen Bewegung (3.177) – im Allgemeinen sehr kompliziert.

Zur Analyse der **Abstrahlung** von elektromagnetischer Feldenergie durch die Punktladung wird der *Poynting-Vektor* in der *Fernzone* (großes  $R$ ) berechnet. Aus (3.194, 193) folgt:

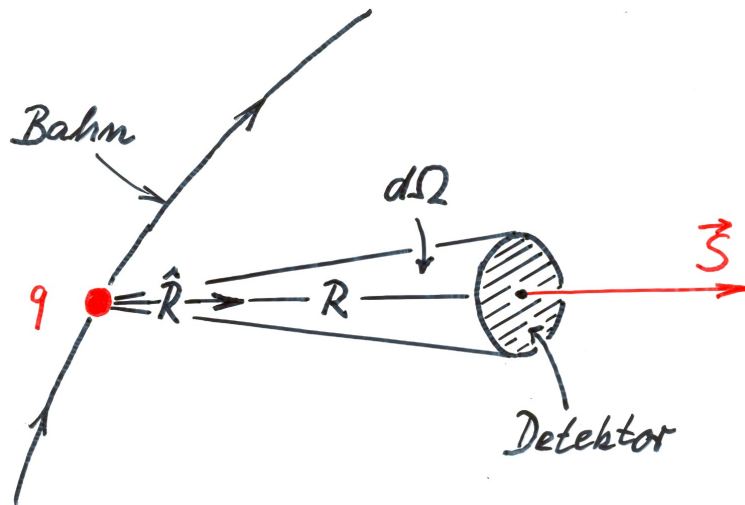
$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E} \times ([\hat{R}] \times \vec{E}) \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} (E^2 [\hat{R}] - (\vec{E} \cdot [\hat{R}]) \vec{E}) \\ &= \frac{q^2}{16 \pi^2 \epsilon_0 c} \left[ \frac{(\hat{R} \times ((\hat{R} - \vec{v}/c) \times \vec{a}/c)^2 \hat{R}}{\kappa^6 R^2} \right] \end{aligned} \quad (3.195)$$

plus Terme der Ordnung  $R^{-3}$ , die zur Abstrahlung nicht beitragen:  $\oint \vec{S} \cdot d\vec{A} \sim \oint R^{-3} R^2 d\Omega \sim R^{-1} \rightarrow 0$  für  $R \rightarrow \infty$ .

Aus (3.195) ersieht man: Nur ein *beschleunigtes Teilchen*:  $\dot{\vec{v}} \neq \vec{0}$  strahlt Energie ab. Ein unbeschleunigtes, d. h. gleichförmig bewegtes Teilchen:  $\vec{v} = \vec{0}$ , erzeugt zwar ein  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ -Feld gemäß (3.190, 191) und folglich ein  $\vec{S}$ -Feld (3.132), aber der für die Abstrahlung allein maßgebliche  $\vec{R}^{-2}$ -Term (3.195) verschwindet.

Für die Abstrahlung des Teilchens charakteristisch ist die Größe

$$\frac{dP}{d\Omega} = (\vec{S} \cdot \hat{R}) R^2 \frac{dt}{dt'} , \quad (3.196)$$



• Abbildung 3.9 •

d. i. die pro Raumwinkelement  $d\Omega$  und pro Zeitelement  $dt'$  (auf der Bahn) emittierte Energie – während  $(\vec{S} \cdot \hat{R}) \hat{R}$  die pro  $d\Omega$  und  $dt$  (beim Detektor) emittierte Energie ist. Mit (3.175, 195) folgt aus (3.196) für die (raumwinkel-) *differentielle Strahlungsleistung*:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{(\hat{R} \times ((\hat{R} - \vec{v}/c) \times \vec{a}/c))^2}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{v}/c)^5} . \quad (3.197)$$

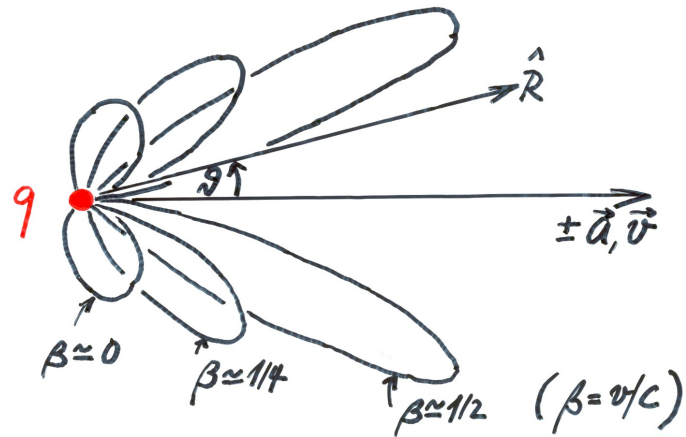
**Bremsstrahlung.** Das Teilchen sei in Bewegungsrichtung beschleunigt (oder abgebremst), d. h.  $\vec{a}$  sei parallel (antiparallel) zu  $\vec{v}$ . Dafür folgt aus (3.197):

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{(a/c)^2 \sin^2 \alpha}{(1 - (v/c) \cos \alpha)^5} . \quad (3.198)$$

Winkel maximaler Emission:

$$\cos \alpha_{max} = \frac{1}{3(v/c)} \left( \sqrt{1 + 15 \left(\frac{v}{c}\right)^2} - 1 \right) . \quad (3.199)$$

Strahlungscharakteristik:



• Abbildung 3.10 •

Rotationssymmetrisch um die Bewegungsrichtung.  $\alpha_{max}$  nimmt mit wachsendem  $v$  monoton ab.  $v/c \ll 1 \Rightarrow \alpha_{max} \simeq 90^\circ$ : Abstrahlung quer zur Bewegungsrichtung (vorwiegend);  $v/c \lesssim 1 \Rightarrow \alpha_{max} \simeq 0^\circ$ : Abstrahlung in Bewegungs- (Vorwärts-) richtung (vorwiegend).

*Synchrotronstrahlung.* Teilchen auf Kreisbahn; also Beschleunigung senkrecht zur Geschwindigkeit. Hier nicht!

## 4 Phänomenologische Elektrodynamik: Polarisation und Magnetisierung, Leitfähigkeit der Materie

Grundlage der folgenden Überlegungen ist ein einfaches *klassisches Materiemodell*: Aufbau der Materie aus Elektronen und Atomkernen. Diese treten sowohl als separate Teilchen auf, als

1. (quasi) freie Elektronen, z. B. als Leitungselektronen in einem Metall,
2. (quasi) freie Kerne, z. B. in wässriger Lösung,

als auch als Cluster dieser elementaren Materiebausteine, als

3. Atome und deren Ionen (ein Kern, mehrere Elektronen),
4. Moleküle und deren Ionen (mehrere Kerne, mehrere Elektronen).

Im Folgenden nehmen wir an, die Materie setze sich aus Bausteinen der Typen 1. bis 4. zusammen; Bezeichnung aller dieser Strukturelemente einfachheitshalber als „Atome“.

Jedes Atom sei durch eine mikroskopische Ladungs- und Stromverteilung gekennzeichnet, das  $k$ . Atom durch  $\rho_k(\vec{r}, t)$  bzw.  $\vec{j}_k(\vec{r}, t)$ . Der zu  $\rho_k$  gehörige Ladungsschwerpunkt sei  $\vec{R}_k$ . Durch  $\vec{j}_k$  wird die auf  $\vec{R}_k$  bezogene *innere* Ladungsbewegung beschrieben. ( $\rho_k, \vec{j}_k$  als Funktionen von  $\vec{r} - \vec{R}_k$  darstellbar.) Aus diesen Überlegungen resultiert die folgende mikroskopische Zerlegung der Quellen des elektromagnetischen Feldes, d. i. der gesamten Ladungs- und Stromdichte:

$$\begin{aligned}\rho_m(\vec{r}, t) &= \sum_k \rho_k(\vec{r}, t) \\ \vec{j}_m(\vec{r}, t) &= \vec{j}_{0,m}(\vec{r}, t) + \sum_k \vec{j}_k(\vec{r}, t).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Dabei bedeutet  $\vec{j}_{0,m}(\vec{r}, t)$  die zum *äußeren* Ladungstransport gehörige Stromdichte. Dazu tragen die Atome mit nichtverschwindender Gesamtladung bei: die (quasi) freien Elektronen und Kerne sowie die Ionen. Es wird vorausgesetzt, dass  $\rho_m(\vec{r}, t)$  und  $\vec{j}_m(\vec{r}, t)$  der Kontinuitätsgleichung genügen.

Mit den Quellen (4.1) gehen wir in die inhomogenen Wellengleichungen (3.10, 74) ein und berechnen daraus die mikroskopischen Potenziale  $\phi_m(\vec{r}, t), \vec{A}_m(\vec{r}, t)$ . Diese sind

wegen der Linearität des Wellenoperators in Anteile zerlegbar, die der Zerlegung in (4.1) entsprechen:

$$\phi_m(\vec{r}, t) = \sum_k \phi_k(\vec{r}, t) \quad (4.2)$$

$$\vec{A}_m(\vec{r}, t) = \vec{A}_{0,m}(\vec{r}, t) + \sum_k \vec{A}_k(\vec{r}, t)$$

mit

$$\vec{A}_{0,m}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_{0,m}(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (4.3)$$

und

$$\phi_k(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_k(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{R}_k - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (4.4)$$

$$\vec{A}_k(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_k(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{R}_k - \vec{r}'|} d^3 r'$$

sowie der Retardierung

$$t' = t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{R}_k - \vec{r}'|. \quad (4.5)$$

Die Ladungsschwerpunkte  $\vec{R}_k$  hängen wegen der Bewegung der Atome im Allgemeinen von der Zeit ab.

**Multipolentwicklung** der Potentiale (4.4):

$$\phi_k(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_k(t_k)}{|\vec{r} - \vec{R}_k|} + \vec{p}_k(t_k) \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{R}_k)}{|\vec{r} - \vec{R}_k|^3} + \dots \right) \quad (4.6)$$

$$\vec{A}_k(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\vec{i}_k(t_k)}{|\vec{r} - \vec{R}_k|} + \vec{m}_k(t_k) \times \frac{(\vec{r} - \vec{R}_k)}{|\vec{r} - \vec{R}_k|^3} + \dots \right),$$

wobei in guter Näherung

$$t' \simeq t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{R}_k| =: t_k \quad (4.7)$$

gesetzt wurde, mit den *elektrischen Monopol-* und *Dipolmomenten*

$$q_k(t) = \int \rho_k(\vec{r}, t) d^3 r \quad (4.8 \text{ a})$$

$$\vec{p}_k(t) = \int \vec{r} \rho_k(\vec{r}, t) d^3 r$$

bzw. den *magnetischen Monopol- und Dipolmomenten*

$$\begin{aligned}\vec{i}_k(t) &= \int \vec{j}_k(\vec{r}, t) d^3 r \\ \vec{m}_k(t) &= \frac{1}{2} \int \vec{r} \times \vec{j}_k(\vec{r}, t) d^3 r .\end{aligned}\tag{4.8 b}$$

Die elektrischen Monopolelemente  $q_k$  verschwinden für die neutralen Atome; sofern sie nicht verschwinden, hängen sie nicht von der Zeit ab. *Achtung:* Die magnetischen Monopolmomente  $i_k$  verschwinden nur im stationären Fall; im zeitabhängigen Fall gilt:

$$\vec{i}_k(t) = \dot{\vec{I}}_k(t) .\tag{4.9}$$

Das magnetische Monopolmoment der Wechselstromverteilung  $\vec{j}_k$  ist also gleich der zeitlichen Ableitung des korrespondierenden zeitabhängigen elektrischen Dipolmoments  $\vec{p}_k$ . Vgl. (3.131).

Umformulierung der Gln. (4.6):

$$\begin{aligned}\phi_k(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \int q_k(\tilde{t}) \delta(\vec{r}' - \vec{R}_k) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \right. \\ &\quad \left. + \int \vec{p}_k(\tilde{t}) \delta(\vec{r}' - \vec{R}_k) \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' + \dots \right) \\ \vec{A}_k(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \int \dot{\vec{I}}_k(\tilde{t}) \delta(\vec{r}' - \vec{R}_k) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \right. \\ &\quad \left. + \int \vec{m}_k(\tilde{t}) \delta(\vec{r}' - \vec{R}_k) \times \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' + \dots \right)\end{aligned}\tag{4.10}$$

mit dem retardierten Zeitargument

$$\tilde{t} = t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}'| .\tag{4.11}$$

Mit Hilfe der *mikroskopischen* (elektrischen) *Monopoldichte*

$$\rho_{0,m}(\vec{r}, t) = \sum_k q_k(t) \delta(\vec{r} - \vec{R}_k)\tag{4.12}$$

und der *mikroskopischen Dipoldichten*

$$\vec{P}_m(\vec{r}, t) = \sum_k \vec{p}_k(t) \delta(\vec{r} - \vec{R}_k) \quad (4.13)$$

$$\vec{M}_m(\vec{r}, t) = \sum_k \vec{m}_k(t) \delta(\vec{r} - \vec{R}_k)$$

erhält man aus (4.2-4, 10) für die *mikroskopischen Potenziale*:

$$\begin{aligned} \phi_m(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left( \rho_{0,m}(\vec{r}', \tilde{t}) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{P}_m(\vec{r}', \tilde{t}) \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \dots \right) d^3 r' \\ \vec{A}_m(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left( \vec{j}_{0,m}(\vec{r}', \tilde{t}) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \vec{P}_m(\vec{r}', \tilde{t}) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{M}_m(\vec{r}', \tilde{t}) \times \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \dots \right) d^3 r'. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Durch partielle Integration der jeweils letzten Terme gemäß (2.26) folgt:

$$\phi_m(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left( \rho_{0,m}(\vec{r}', \tilde{t}) - \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}_m(\vec{r}', \tilde{t}) \right) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' + \dots \quad (4.15)$$

$$\vec{A}_m(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left( \vec{j}_{0,m}(\vec{r}', \tilde{t}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \vec{P}_m(\vec{r}', \tilde{t}) + \vec{\nabla}' \times \vec{M}_m(\vec{r}', \tilde{t}) \right) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' + \dots$$

Andererseits gilt:

$$\phi_m(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho_m(\vec{r}', \tilde{t}) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (4.16)$$

$$\vec{A}_m(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}_m(\vec{r}', \tilde{t}) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'.$$

Bei Vernachlässigung höherer Multipolanteile liefert der Vergleich von (4.15) mit (4.16) die zu (4.1) *alternative Zerlegung* der mikroskopischen Quellenverteilungen:

$$\rho_m(\vec{r}, t) = \rho_{0,m}(\vec{r}, t) - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}_m(\vec{r}, t) \quad (4.17)$$

$$\vec{j}_m(\vec{r}, t) = \vec{j}_{0,m}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{P}_m(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \times \vec{M}_m(\vec{r}, t).$$

Die Summe der (i. a. sehr vielen:  $N \simeq 10^{23}$ ) atomaren Einzelbeiträge  $\sum_k \rho_k$  bzw.  $\sum_k \vec{j}_k$  zu den Quellen des elektromagnetischen Feldes ist damit auf drei Dichtefunktionen reduziert: auf die elektrische Monopoldichte sowie die elektrische und die magnetische Dipoldichte. Dazu kommt die „äußere“ Stromdichte

$$\vec{j}_{0,m}(\vec{r}, t) = \sum_k q_k \dot{\vec{R}}_k(t) \delta(\vec{r} - \vec{R}_k(t)) , \quad (4.18)$$

die von der Bewegung der Monopole herrührt.

Unterwirft man die mikroskopischen Dichten der Glättungsprozedur (1.3), so gelangt man zu den entsprechenden *makroskopischen Verteilungen*. Für diese gilt nach (4.17) – wenn man einfach den Index  $m$  weglässt:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}, t) - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}, t) \quad (4.19)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}_0(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{P}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r}, t) .$$

Die gesamte Ladungsdichte  $\rho$  ist somit zerlegt in einen *freien* Anteil  $\rho_0$  und in einen *gebundenen* Anteil  $-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ . Bezeichnung von  $\vec{P}$  als **Polarisation**. Die gesamte Stromdichte setzt sich zusammen aus einem *freien* Anteil  $\vec{j}_0$  und einem *gebundenen* Anteil  $\frac{\partial}{\partial t} \vec{P} + \vec{\nabla} \times \vec{M}$ . Bezeichnung von  $\vec{M}$  als **Magnetisierung**.

Die Glättung der Quellen impliziert die Glättung der Potentiale; vgl. (1.4). Aus der Linearität der Wellengleichungen folgt (Superpositionsprinzip): Sind  $\phi_m, \vec{A}_m(\vec{r}, t)$  Lösungen zu  $\rho_m, \vec{j}_m(\vec{r}, t)$ , so sind die geglätteten Potentiale  $\phi, \vec{A}(\vec{r}, t)$  Lösungen zu den geglätteten Quellen  $\rho, \vec{j}(\vec{r}, t)$ .

Für das skalare Potenzial gilt:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{VT} \int \int \phi_m(\vec{r} + \vec{\xi}, t + \tau) d^3 \xi d\tau \\ &= \frac{1}{VT} \int \int \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int \frac{\rho_m(\vec{r}', \tilde{t} + \tau)}{|\vec{r} + \vec{\xi} - \vec{r}'|} d^3 r' d^3 \xi d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int \frac{1}{VT} \int \int \rho_m(\vec{r}' + \vec{\xi}, \tilde{t} + \tau) d^3 \xi d\tau \frac{d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', \tilde{t})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' . \end{aligned} \quad (4.20)$$

Entsprechend läuft der Beweis für das Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ . Folglich resultieren die makroskopischen Potentiale aus den makroskopischen Quellen (4.19).



Wegen der Äquivalenz der inhomogenen Wellengleichungen zu den Maxwell-Gleichungen ist somit gezeigt: Das makroskopische elektromagnetische Feld hat die makroskopischen Quellen (4.19), d. h. für die inhomogenen Maxwell-Gleichungen folgt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \vec{\rho}_0(\vec{r}, t) - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}, t) \right) \quad (4.21)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu_0 \left( \vec{j}_0(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{P}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r}, t) \right) .$$

Die homogenen Maxwell-Gleichungen bleiben unberührt.

Einführung der **dielektrischen Verschiebung** durch die Definition

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t) \quad (4.22)$$

und der **magnetischen Feldstärke** durch die Definition

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r}, t) - \vec{M}(\vec{r}, t) . \quad (4.23)$$

Damit nehmen die *inhomogenen Maxwell-Gleichungen* die folgende Gestalt an:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}, t) \quad (4.24 \text{ a})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{j}_0(\vec{r}, t) , \quad (4.24 \text{ b})$$

während die *homogenen Maxwell-Gleichungen* in unveränderter Form gelten:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (4.25 \text{ a})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 . \quad (4.25 \text{ b})$$

Die Maxwell-Gleichungen (4.24, 25) bilden die Grundlage der **phänomenologischen Elektrodynamik** (auch: makroskopischen Elektrodynamik).

Beim Übergang von der Vakuumelektrodynamik zur phänomenologischen Elektrodynamik erhöht sich die Zahl der zu berechnenden Felder von zwei auf vier:

$$\vec{E}, \vec{B}(\vec{r}, t) \longrightarrow \vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}(\vec{r}, t) . \quad (4.26)$$

Was ist damit gewonnen? Die makroskopische Formulierung erleichtert die bei der Diskussion der mikroskopischen Formulierung zuvor gestellte Frage nach der Rückwirkung

des elektromagnetischen Feldes auf seine Quellen. Statt – wie z. B. im Maxwell-Lorentz-Modell – die Trajektorien aller Atome im  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ -Feld zu studieren, braucht man hier nur die Auswirkungen des  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ -Feldes auf die neuen Felder  $\vec{P}$ ,  $\vec{M}$  (somit  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ ), d. h. auf die Polarisation und die Magnetisierung des Mediums zu untersuchen; ferner den Einfluss des  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ -Feldes auf die verbleibenden freien, experimentell leichter als  $\rho$ ,  $\vec{j}$  zu handhabenden Quellterme  $\rho_0$ ,  $\vec{j}_0$ .

Insbesondere geht es um die funktionalen Zusammenhänge

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}) \Rightarrow \vec{D} = \vec{D}(\vec{E}) \quad (4.27)$$

$$\vec{M} = \vec{M}(\vec{B}) \Rightarrow \vec{H} = \vec{H}(\vec{B}) .$$

Bezeichnung dieser Beziehungen als *Materialgleichungen*; sie hängen empfindlich von der Materialstruktur ab. Durch (4.27) reduziert sich die Anzahl der gesuchten Felder wieder von vier auf zwei. Ferner hat man die Rückkopplung

$$\vec{j}_0 = \vec{j}_0(\vec{E}) , \quad (4.28)$$

d. i. die Leitfähigkeit des Materials, zu erörtern, während  $\rho_0$  als von  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  unabhängig erachtet wird.

**Spezialfall: lineare, isotrope, homogene Materialien** ohne permanente Polarisation bzw. Magnetisierung:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (4.29)$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

Bezeichnung von  $\chi_e$ ,  $\chi_m$  als *elektrische* bzw. *magnetische Suszeptibilität*. Mit (4.22, 23) folgt

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \quad (4.30 \text{ a})$$

bzw.

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H} . \quad (4.30 \text{ b})$$

Bezeichnung von  $\varepsilon$  als **Dielektrizitätskonstante**, von  $\mu$  als **Permeabilität** des Materials.

In diesem Fall kann man die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (4.24) wie folgt schreiben:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon} \rho_0(\vec{r}, t) \quad (4.31)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) - \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu \vec{j}_0(\vec{r}, t) .$$

Der Vergleich mit der Vakuum-Formulierung (1.32, 33) zeigt: Die Polarisations- und Magnetisierungseigenschaften des Systems werden beim Übergang zur Darstellung (4.31) von den Ladungen und Strömen auf die Materialkonstanten übergewälzt:

$$\rho, \vec{j} \longrightarrow \rho_0, \vec{j}_0, \quad \varepsilon_0, \mu_0 \longrightarrow \varepsilon, \mu . \quad (4.32)$$

Das ist jedoch nur möglich, wenn die einfachen Proportionalitätsbeziehungen (4.29) gelten. Im Allgemeinen sind die Materialgleichungen viel komplizierter und nur näherungsweise bekannt.

Für (4.28) gilt im vorliegenden Spezialfall ohne permanenten Strom:

$$\vec{j}_0 = \sigma \vec{E} , \quad (4.33)$$

wo  $\sigma$  die **Leitfähigkeit** des Materials bezeichnet.

**Poyntingscher Satz.** Skalare Multiplikation von (4.25 a) mit  $\vec{H}$ , von (4.24 b) mit  $\vec{E}$  und Subtraktion der beiden resultierenden Gleichungen voneinander führt auf

$$\vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{j}_0 \cdot \vec{E} . \quad (4.34)$$

Elimination von  $\vec{D}$  und  $\vec{B}$  mit (4.22, 23) ergibt

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{\mu_0}{2} \vec{H}^2 \right) = -\vec{j}_0 \cdot \vec{E} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \mu_0 \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} . \quad (4.35)$$

Vergleiche mit (1.65).

*Interpretation.* Elektromagnetische Feldenergie der Dichte

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{\mu_0}{2} \vec{H}^2 \quad (4.36)$$

und der Stromdichte

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (4.37)$$

wird sowohl durch Übertragung auf die freien Quellen ( $\vec{j}_0 \cdot \vec{E}$ ), als auch durch Polarisation ( $\vec{E} \cdot \partial \vec{P} / \partial t$ ) und Magnetisierung ( $\mu_0 \vec{H} \cdot \partial \vec{M} / \partial t$ ) vernichtet/erzeugt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = - \left( \vec{j}_0 \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0 \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right). \quad (4.38)$$

Setzt man in den vorstehenden Gleichungen  $\vec{P} = \vec{M} = \vec{0}$ , so erhält man die entsprechenden Gleichungen der Vakuumelektrodynamik zurück; siehe Gln. (1.65) ff.

## B Spezielle Relativitätstheorie

Die Relativitätstheorie ist nicht *irgendeine* physikalische Theorie neben den anderen physikalischen Theorien – wie Mechanik, Elektrodynamik, ... Quantentheorie, .... ; sie hat vielmehr Aussagen über die gesamte Theoretische Physik zum Thema. Daher von großer Bedeutung für die allgemeine Theoriebildung. Konkrete Anwendung in dieser Vorlesung jedoch nur auf Mechanik und Elektrodynamik inkl. Astronomie und Kosmologie.

## 5 Grundlagen der Speziellen Relativitätstheorie

Die zentrale Aussage der Relativitätstheorie ist das Relativitätsprinzip: das Spezielle Relativitätsprinzip für die Spezielle Relativitätstheorie, das Allgemeine Relativitätsprinzip für die Allgemeine Relativitätstheorie, wobei die erste Aussage ein Spezialfall der zweiten Aussage ist.

### 5.1 Das Spezielle Relativitätsprinzip

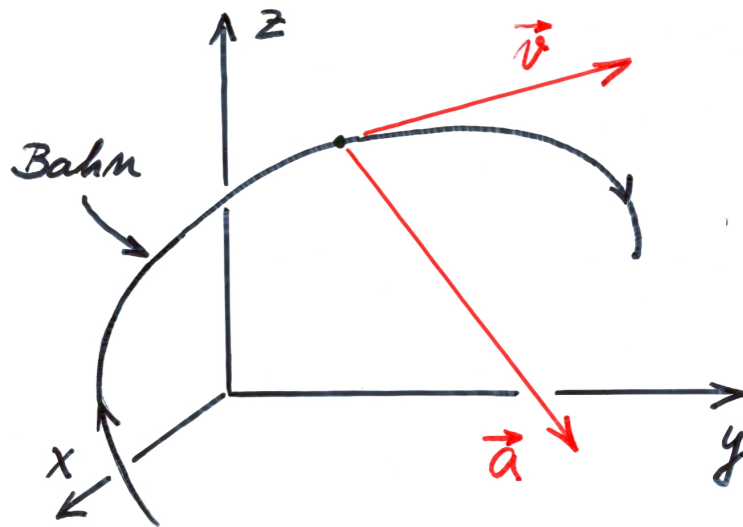
Betrachte *Galileis Trägheitsgesetz*, d. i. das *1. Newton-Axiom*: Ein Körper, auf den keine (resultierende) Kraft einwirkt, bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit – und umgekehrt:

$$\vec{f} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = \text{konstant} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \vec{0}. \quad (5.1)$$

$\vec{v}$  und  $\vec{a}$  (die Beschleunigung) sind nur in einem *Bezugssystem* angebbbar:

$$\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (5.2)$$

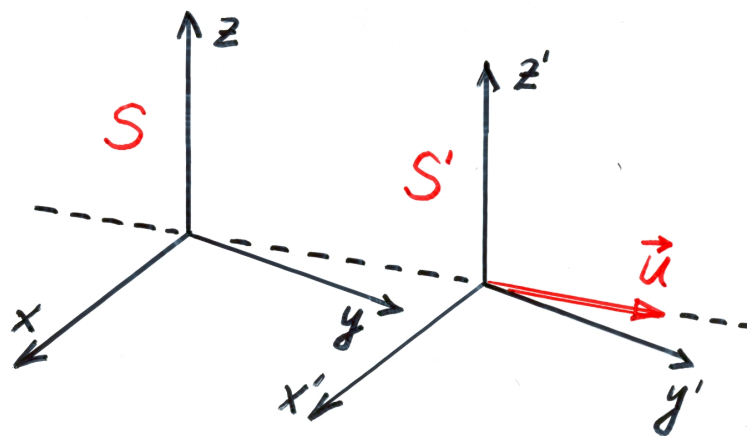
$$\vec{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}).$$



• Abbildung 5.1 •

Annahme: Das Trägheitsgesetz gelte in einem Bezugssystem  $S$ . Gilt es dann auch in einem relativ dazu bewegten Bezugssystem  $S'$ ?

**Gleichförmige Relativbewegung:**  $\vec{u} = \text{konstant}$ :



• Abbildung 5.2 •

Zur Vereinfachung gemeinsamer Ursprung zu einem Zeitpunkt, parallele Achsen. Aufgabe dieser Voraussetzungen – z. B. gegeneinander verdrehte Achsen – bringt physikalisch nichts Neues. **Galilei-Transformation:**

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t, \tag{5.3}$$

in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned}x' &= x - u_x t \\y' &= y - u_y t \\z' &= z - u_z t ;\end{aligned}\tag{5.4}$$

dazu

$$t' = t\tag{5.5}$$

als Ausdruck des 2. Newtonschen Postulates: „Es gibt eine absolute Zeit, die unbeeinflusst und unbeeinflussbar durch die Geschehnisse der Welt, gleichförmig und unveränderlich dahinfließt.“

Aus (5.3) folgt: Das Trägheitsgesetz gilt auch in  $S'$ :

$$\begin{aligned}\vec{v}' &= \vec{v} - \vec{u} = \text{konstant} \\ \vec{a}' &= \vec{a} = \vec{0} .\end{aligned}\tag{5.6}$$

### Beschleunigte Relativbewegung:

- gleichförmige Linearbeschleunigung:  $\vec{g} = \text{konstant}$ :

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{v}' &= \vec{v} - \vec{g}t \\ \vec{a}' &= \vec{a} - \vec{g} ;\end{aligned}\tag{5.7}$$

- gleichförmige Drehbewegung:  $\vec{\omega} = \text{konstant}$ :

Die zeitliche Änderung der Position, der Geschwindigkeit, ... bezüglich  $S$  setzt sich additiv zusammen aus der zeitlichen Änderung bezüglich  $S'$  und der Änderung von  $S'$  bezüglich  $S$  infolge der Drehbewegung:

$$\frac{d'}{dt} = \frac{d}{dt} - \vec{\omega} \times .\tag{5.8}$$

Damit erhält man für die Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned}\vec{v}' &= \frac{d'}{dt} \vec{r} \\ &= \left( \frac{d}{dt} - \vec{\omega} \times \right) \vec{r} \\ &= \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r},\end{aligned}\tag{5.9}$$

und für die Beschleunigung:

$$\begin{aligned}\vec{a}' &= \left( \frac{d'}{dt} \right)^2 \vec{r} \\ &= \left( \frac{d}{dt} - \vec{\omega} \times \right) \left( \frac{d}{dt} - \vec{\omega} \times \right) \vec{r} \\ &= \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).\end{aligned}\tag{5.10}$$

Aus (5.7, 9, 10) folgt: Das Trägheitsgesetz gilt *nicht* in  $S$ !

*Anmerkung:* Mit (5.9) lässt sich (5.10) auch wie folgt schreiben ( $\vec{r} = \vec{r}'$ ):

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}').\tag{5.11}$$

Bezeichnung des Terms  $-2\vec{\omega} \times \vec{v}'$  als *Coriolisbeschleunigung* und des Terms  $-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$  als *Zentrifugalbeschleunigung*. Die Newtonsche Bewegungsgleichung im rotierenden System  $S'$  ist folglich:

$$m \vec{a}' = \vec{f}'\tag{5.12}$$

mit

$$\vec{f}' = \vec{f} + \vec{f}_c + \vec{f}_z.\tag{5.13}$$

Dabei bedeutet

$$\vec{f} = m \vec{a}\tag{5.14}$$

die Kraft im System  $S$ , die auf der Wechselwirkung des Körpers mit der Umgebung beruht; die *Corioliskraft*

$$\vec{f}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'\tag{5.15}$$

und die *Zentrifugalkraft*

$$\vec{f}_z = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')\tag{5.16}$$

beruhen auf der Drehbewegung des Bezugssystems  $S'$ , sie werden als *Schein-* oder *Trägheitskräfte* bezeichnet. *Beispiel:* *Schein-* oder *Trägheitskräfte* bezeichnet. *Beispiel:*



Erde als rotierendes Bezugssystem; Foucault-Pendel, Erdrotation und Schwerefeldstärke usw.

Das Trägheitsgesetz gilt also nur in einer bestimmten Klasse von Bezugssystemen, die sich alle gleichförmig gegeneinander bewegen: **Inertialsysteme**. Gilt das Trägheitsgesetz in einem Inertialsystem, so gilt es in allen (unendlich vielen) Inertialsystemen. Gibt es wenigstens *ein* Inertialsystem? Ja, auf Grund des *1. Newtonschen Postulates*: „Es gibt ein ausgezeichnetes räumliches Bezugssystem, genannt der *absolute Raum*. Jede Bewegung ist letztlich Bewegung in Bezug auf den absoluten Raum.“ Alle Bezugssysteme, die sich gegenüber dem absoluten Raum gleichförmig bewegen, bilden die Klasse der Inertialsysteme; in ihnen gilt das Trägheitsgesetz.

*Relativitätsprinzip*: Gültigkeit eines Naturgesetzes in einer Klasse von Bezugssystemen.

Gibt es noch weitere Naturgesetze, die – wie das Trägheitsgesetz – gleichermaßen in allen Inertialsystemen gelten? „Gleichermaßen in allen Inertialsystemen“ meint: *Forminvarianz*, auch *Kovarianz*, der Gleichungen, welche die Naturgesetze formulieren, gegen Galilei-Transformationen. Antwort: Ja, die gesamte Newtonsche Mechanik ist kovariant gegen Galilei-Transformationen: **Galileis Relativitätsprinzip**. Das Galilei-Relativitätsprinzip ist ein „Unmöglichkeitsprinzip“: Man kann mit Hilfe der Newton-Mechanik kein Inertialsystem vor dem anderen auszeichnen; alle sind gleichberechtigt.

Erläuterung an zwei **Beispielen**, die in engem Zusammenhang mit dem *2. Newton-Axiom* stehen (vom 1. Newton-Axiom war ja schon umfassend die Rede):

- *Bewegung eines Mehrkörpersystems* unter dem Einfluss von inneren Zentralkräften:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_j \vec{F}_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) ; \quad (5.17)$$

die Galilei-Transformation impliziert

$$\frac{d^2 \vec{r}'_i}{dt'^2} = \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} , \quad (5.18)$$

$$\vec{r}'_i - \vec{r}'_j = \vec{r}_i - \vec{r}_j ;$$

somit gilt

$$m'_i \frac{d^2 \vec{r}'_i}{dt'^2} = \sum_j \vec{F}_{ij} (\vec{r}'_i - \vec{r}'_j) , \quad (5.19)$$

von derselben Gestalt wie (5.17), d. i. Kovarianz!

- *Impulserhaltung* beim *Zweikörperstoß*:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konstant} ; \quad (5.20)$$

mit Hilfe der Galilei-Transformation folgt

$$\begin{aligned} \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 &= m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \\ &= m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 - (m_1 + m_2) \vec{u} \\ &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \text{konstant} \\ &= \text{konstant} , \end{aligned} \quad (5.21)$$

von derselben Gestalt wie (5.20), d. i. Kovarianz!

*Achtung:* Nicht die Werte der physikalischen Größen bleiben beim Wechsel des Inertialsystemes erhalten, sondern ihre Verknüpfungen in physikalischen Gleichungen.

Lässt sich Galileis Relativitätsprinzip auf die Elektrodynamik ausdehnen? *Einerseits* zeichnen die elektromagnetischen Vorgänge kein Inertialsystem vor dem anderen aus:

- Licht breitet sich im Vakuum mit der Geschwindigkeit

$$c = 2.998... \times 10^8 \text{ m/s} \quad (5.22)$$

aus, und zwar unabhängig vom Bewegungszustand des emittierenden Körpers und des Beobachters. Siehe Negativresultat des Michelson-Morley-Experimentes.

- Induktionsvorgänge hängen nur von der Relativgeschwindigkeit von Magnet und Leiter ab; diese ändert sich nicht beim Übergang von einem Inertialsystem auf ein anderes.

*Andererseits* sind die Maxwell-Gleichungen nicht kovariant gegen Galilei-Transformationen. Unterwirft man z. B. die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (5.23)$$

der Galilei-Transformation

$$x' = x - ut , \quad t' = t , \quad (5.24)$$

so erhält man wegen

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = -u \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'},$$

folglich

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2}$$

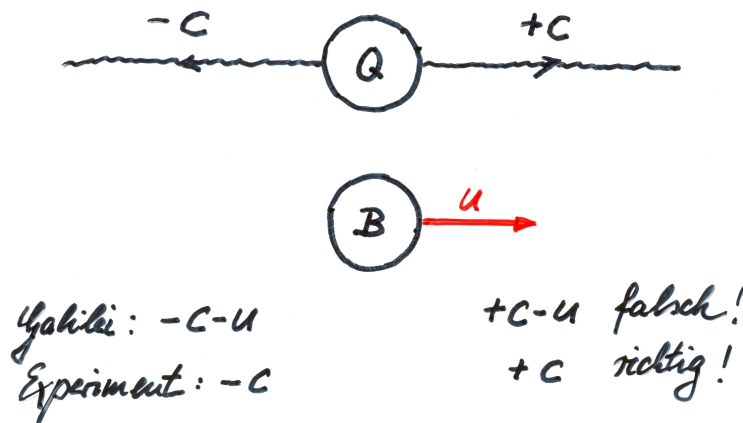
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2u \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2},$$
(5.25)

im ungestrichenen System die Wellengleichung

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{2u}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} = 0,$$
(5.26)

die ersichtlich von (5.23) verschieden ist.

Die Nichtkovarianz der Wellengleichung überrascht nicht:  $Q$  (Quelle) emittiere Licht, das sich im Ruhssystem von  $Q$  mit  $\pm c$  ausbreitet:



• Abbildung 5.3 •

$B$  (Beobachter) bewege sich mit  $u$  relativ zu  $Q$ ; für  $B$  breitet sich – nach der „anschaulichen“ Galilei-Transformation – das Licht mit  $+c - u$  bzw.  $-c - u$  aus; experimentell stellt  $B$  jedoch auch  $\pm c$  fest.

Um die Maxwell-Gleichungen und das Relativitätsprinzip der Elektrodynamik zu retten (die Experimente fordern dies!), ist die Galilei-Transformation zu verwerfen und durch die Lorentz-Transformation zu ersetzen (Voigt 1887, Lorentz 1904):

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - u t}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} \\ t' &= \frac{t - u x / c^2}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Damit folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} \left( \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{u}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \tag{5.28}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} \left( -u \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \right) \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2}, \end{aligned} \tag{5.29}$$

d.h. Kovarianz der eindimensionalen Wellengleichung. Gilt auch für die gesamte Maxwell-Theorie (siehe Kap. 7).

Die Ersetzung der Galilei-Transformation durch die Lorentz-Transformation hat weitreichende Konsequenzen, die im Widerspruch zur intuitiven Vorstellung über Raum und Zeit stehen. Ferner ist die Mechanik kovariant gegen Lorentz-Transformationen zu formulieren: *Einstein-Mechanik*. Erweiterung auf *alle* Bereiche der Physik führt auf das **Spezielle Relativitätsprinzip**:

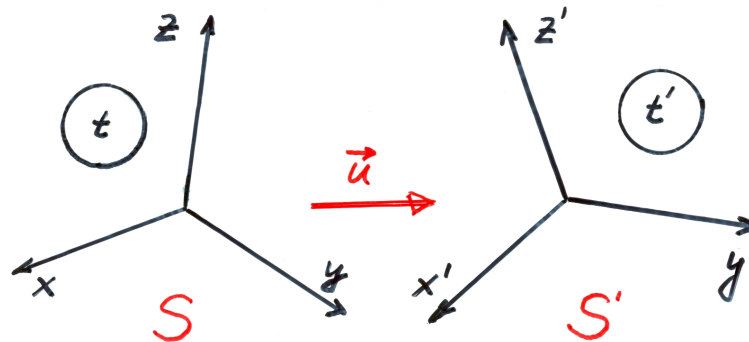
*Die Grundgleichungen der Physik sind kovariant, d.h. forminvariant unter Lorentz-Transformationen. Sie haben in allen Inertialsystemen dieselbe Gestalt.*

A. Einstein: Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Annalen der Physik 17 (1905) 26.

## 5.2 Die Lorentz-Transformation

Transformation der Raum-Zeit-Koordinaten beim Übergang von einem Inertialsystem  $S$  zu einem Inertialsystem  $S'$ .  $S$  durch vier Koordinatenachsen  $x, y, z$  und  $t$  aufgespannt; entsprechend  $S'$ . Jedem *Punkt* in  $S$  entspricht ein *Ereignis*, z.B. der Zerfall eines Elementarteilchens, und umgekehrt; Kennzeichnung durch die Koordinaten  $(x, y, z)$  (wo?)

und  $t$  (wann?). Durch welche Koordinaten  $x', y', z'$  und  $t'$  wird das Ereignis in  $S'$  gekennzeichnet? Passive Sicht der (gesuchten!) Transformation:



• Abbildung 5.4 •

*Ortsmessung:* Stationäre Maßstäbe in  $S$  bzw.  $S'$ . Bewegte Maßstäbe anders; s. u. „Längenkontraktion“. *Zeitmessung:* Stationäre Uhren bei  $x, y, z$  bzw.  $x', y', z'$ . Bewegte Uhren anders; s. u. „Zeitdilatation“. *Synchronisation* von Uhren in  $S$  (bzw. in  $S'$ ): Uhr in  $O$ , Emission eines Lichtsignals zur Zeit  $t_0$ ; Uhr in  $P$ , Absorption des Lichtsignals zur Zeit  $t_0 + \overline{OP} / c$  (Konstanz der Lichtgeschwindigkeit). Synchronisation durch „Herumtragen“ der Uhren nicht möglich.

*Voraussetzungen:*

1. Gültigkeit des Relativitätsprinzips für das Trägheitsgesetz: Geradlinig-gleichförmige Bewegung in  $S$  impliziert geradlinig-gleichförmige Bewegung in  $S'$  (und umgekehrt); d. h. Beschränkung auf *inertiale* Bezugssysteme.
2. Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit vom Bezugssystem und von der Ausbreitungsrichtung

Aus 1. folgt die *Linearität* der gesuchten Transformationsgleichungen:

$$S: \begin{aligned} x &= x_0 + v_x t \\ y &= y_0 + v_y t \\ z &= z_0 + v_z t \end{aligned} \Leftrightarrow S': \begin{aligned} x' &= x'_0 + v'_x t' \\ y' &= y'_0 + v'_y t' \\ z' &= z'_0 + v'_z t' \end{aligned} \quad (5.30)$$

Nur eine lineare Transformation gewährleistet die Überführung einer freien Teilchenbahn in eine freie Teilchenbahn.

Aus 2. folgt die *Orthogonalität* der gesuchten Transformationsgleichungen – im folgenden Sinne: Lichtquelle bei  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  in  $S$  emittiere zur Zeit  $t_0$  ein Lichtsignal. Gleichung der Wellenfront zur Zeit  $t > t_0$  (Kugel um  $P_0$  mit Radius  $c(t - t_0)$ ):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = c^2(t - t_0)^2; \quad (5.31)$$

in  $S'$  soll aber auch gelten:

$$(x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 + (z' - z'_0)^2 = c^2(t' - t'_0)^2. \quad (5.32)$$

In den Koordinaten

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict \quad (5.33)$$

nehmen die Gleichungen (5.31, 32) die folgende Gestalt an:

$$\sum_{i=1}^4 (x_i - x_{i0})^2 = 0 \quad (5.34)$$

bzw.

$$\sum_{i=1}^4 (x'_i - x'_{i0})^2 = 0. \quad (5.35)$$

Das sind Hyperkugeln vom Radius 0 im vierdimensionalen quasi- (da  $x_4$  imaginär) euclidischen Raum  $\mathcal{E}_4$  mit den Koordinaten  $x_1, x_2, x_3, x_4$ : **Minkowski-Raumzeit**. (Nur) eine orthogonale Transformation dieses Raumes vermag eine Kugel in eine Kugel desselben Radius (hier: 0) zu überführen.

Also hat die gesuchte Transformation auf Grund der Voraussetzungen 1. und 2. die folgende Gestalt:

$$x'_i = \sum_{j=1}^4 a_{ij} x_j + b_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (5.36)$$

mit

$$\sum_{i=1}^4 a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3, 4. \quad (5.37)$$

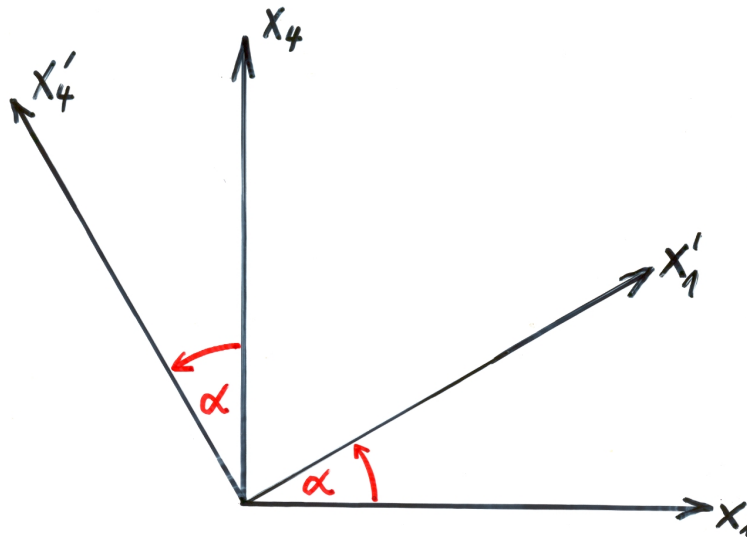
Das sind *zehn* Verknüpfungsgleichungen zwischen den Koeffizienten  $a_{ij}$  der Transformationsmatrix: Orthonormiertheit der Spaltenvektoren.

Die **allgemeine Lorentz-Transformation** (5.36, 37) stellt eine *Drehung*, falls  $\det(a_{ij}) = +1$ , oder eine *Drehspiegelung*, falls  $\det(a_{ij}) = -1$ , der Minkowski-Raumzeit dar, zusätzlich eine *Translation* entsprechend den  $b_i$ . Sie enthält *zehn* unabhängige Parameter:

- $b_i = x'_i(x_j = 0)$ : Koordinaten des Ursprungs von  $S$  (inkl.  $t = 0$ ) bezüglich  $S'$  (inkl.  $t'$ ). Fordert man  $x'_i(x_j = 0) = 0$ , d. h. Koinzidenz der Ursprünge von  $S$  und  $S'$  zur Zeit  $t = t' = 0$ , so ist  $b_i = 0, i = 1, 2, 3, 4$ .
- Von den 16 Koeffizienten  $a_{ij}$  sind wegen (5.37) nur sechs unabhängig, welche die relative Orientierung, z. B. drei Winkel, und die relative Bewegung, z. B. die Geschwindigkeitskomponenten  $u_x, u_y, u_z$ , von  $S$  und  $S'$  beschreiben.

Die Menge der Lorentz-Transformationen bildet algebraisch eine zehnparametrische Lie-Gruppe, die *Poincaré-Gruppe*. Die zu  $b_i = 0$  gehörige sechsparametrische Untergruppe wird als *Lorentz-Gruppe* bezeichnet.

**Spezialfall:** Drehung der  $x_1, x_4$ -Ebene;  $x_2, x_3$  fest; d. h. einparametrische Untergruppe der Lorentz-Gruppe:

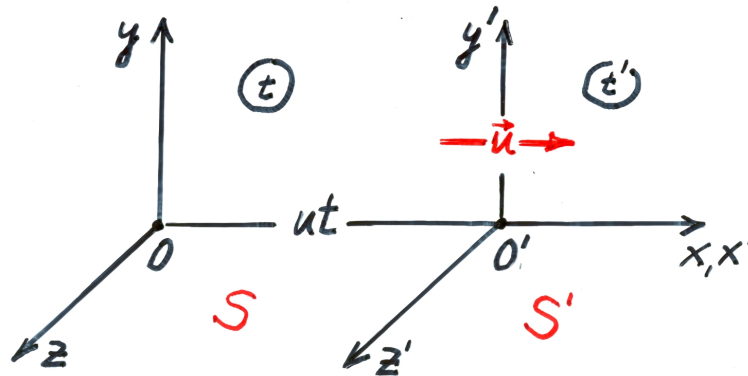


• Abbildung 5.5 •

$$\begin{aligned}
 x'_1 &= x_1 \cos \alpha + x_4 \sin \alpha \\
 x'_2 &= x_2 \\
 x'_3 &= x_3 \\
 x'_4 &= -x_1 \sin \alpha + x_4 \cos \alpha .
 \end{aligned}
 \tag{5.38}$$

$t$  imaginär  $\Rightarrow x_4$  reell,  $\alpha$  reell;  $t$  reell  $\Rightarrow x_4$  imaginär,  $\alpha$  imaginär; die analytische Gestalt der Transformation bleibt erhalten.

Bedeutung von (5.38) für  $S$  und  $S'$ :  $x$ - und  $x'$ -Achse fallen zusammen;  $y$ - und  $y'$ -Achse so wie  $z$ - und  $z'$ -Achse parallel zueinander. Relativbewegung mit der Geschwindigkeit  $u$ . Wie hängen  $\alpha$  und  $u$  zusammen?



• Abbildung 5.6 •

Der Ursprung  $O'$  hat die Koordinaten  $x'_1 = 0$  bzw.  $x_1 = ut$ ; dafür und mit  $x_4 = ict$  folgt aus der ersten der Gleichungen (5.38):

$$\tan \alpha = \frac{iu}{c} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (5.39)$$

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{iu/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Einsetzen dieser Ausdrücke in (5.38) liefert die **spezielle Lorentz-Transformation** (5.27)

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(u)(x - ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$t' = \gamma(u)(t - ux/c^2)$$



mit

$$\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} . \quad (5.41)$$

Im *Grenzfall*  $u \ll c$  erhält man aus (5.40, 41) die *Galilei-Transformation*, vgl. (5.4, 5):

$$\begin{aligned} x' &= x - ut \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t . \end{aligned} \quad (5.42)$$

$c$  als *Grenzgeschwindigkeit*:  $u > c \Rightarrow x', t'$  imaginär. Negativresultat aller experimentellen Bemühungen zum Nachweis sog. *Tachyonen*; das sind Teilchen, die sich mit Geschwindigkeiten  $v > c$  bewegen.

Die zu (5.40) *inverse Transformation* erhält man durch Vertauschen von gestrichenen und ungestrichenen Koordinaten und durch die Ersetzung  $u \rightarrow -u$ :

$$\begin{aligned} x &= \gamma(u) (x' + ut') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma(u) (t' + ux' / cc^2) . \end{aligned} \quad (5.43)$$

Invarianz des relativistischen Faktors (5.41):

$$\gamma(u) = \gamma(-u) . \quad (5.44)$$

### 5.3 Kinematische Konsequenzen

**Längenkontraktion:** Zwei Ereigniss seien bei  $x'_2, x'_1$  stationär in  $S'$ , z.B. die Enden eines auf der  $x'$ -Achse ruhenden Stabes der Länge

$$l' = x'_2 - x'_1 = l_0 , \quad (5.45)$$

d. i. die *Eigenlänge* oder *Ruhelänge* des Stabes. Abstandsmessung in  $S$ : Die Differenz der  $x$ -Koordinaten zu einem und demselben Zeitpunkt  $t$  ist durch

$$l = x_2 - x_1 \quad \text{mit} \quad t_2 = t_1 \quad (5.46)$$

gegeben. Aus (5.40) folgt zunächst:

$$\begin{aligned} x_2' &= \gamma(x_2 - u t_2) \\ x_1' &= \gamma(x_1 - u t_1); \end{aligned}$$

wegen  $t_2 = t_1$  resultiert

$$x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - x_1),$$

und mit (5.45, 46) erhält man schließlich:

$$l = l_0 / \gamma, \quad (5.47)$$

d. h.  $l \leq l_0$  wegen  $\gamma \geq 1$ . Die Längenmessung ergibt also für den bewegten Stab eine geringere Länge als für den ruhenden Stab.

*Anmerkungen:*

1. Eine *andere Definition* der Längenmessung führt auf dasselbe Resultat: Beobachtung des vorbeifliegenden Stabes an einer festen Stelle  $x_0$  in  $S$ . Messung der Zeitdifferenz  $\Delta t$  zwischen dem Vorbeiflug des vorderen und des hinteren Stabendes.  
Definition:

$$l = u \Delta t, \quad \Delta t = t_1 - t_2. \quad (5.48)$$

Mit (5.40) folgt für *vorn*:

$$x_2' = \gamma(x_2 - u t_2),$$

für *hinten*:

$$x_1' = \gamma(x_1 - u t_1);$$

wegen  $x_1 = x_2 = x_0$  ist

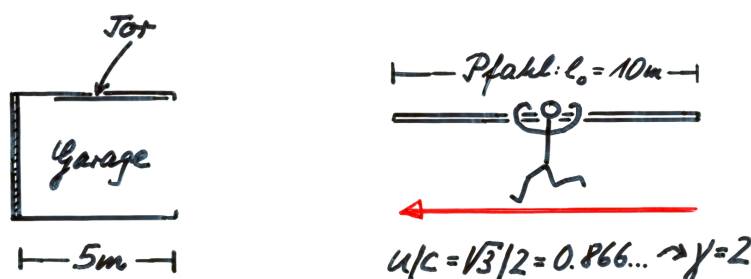
$$x_2' - x_1' = \gamma u (t_1 - t_2)$$

und somit im Hinblick auf (5.45, 48):

$$l = l_0 / \gamma, \quad \text{q. e. d.}$$

2. Dass uns die Erscheinungen der Längenkontraktion aus dem täglichen Leben nicht vertraut sind, liegt an dem großen Wert der Lichtgeschwindigkeit. *G. Gamow* hat in seinem Büchlein *Mr. Tompkins in Wonderland* das Leben in einer Welt ausgemalt, in der die Grenzgeschwindigkeit 50 km/h beträgt und die Längenkontraktion eines vorbeifahrenden Radfahrers drastische Werte annimmt. Gamow unterstellt dabei, dass die *messbare* Längenkontraktion auch *sichtbar* ist. Das aber sind verschiedene Probleme. *Messen* bedeutet, die im Beobachtungssystem gleichzeitige Position verschiedener Objektpunkte zu bestimmen. *Sehen* aber bedeutet, dass die Lichtsignale vom Objekt gleichzeitig auf die Netzhaut (oder auf eine photographische Platte) fallen, die zu verschiedenen Zeiten vom Objekt emittiert werden: i. a. Verzerrungen (Terrell-Effekt).
3. Die Längenkontraktion ist *nicht direkt* experimentell verifizierbar. Die Konsequenzen der Längenkontraktion haben sich aber in vielen Fällen bestätigt, z. B.  $\vec{E}$ -Feld einer bewegten Ladung (siehe unten).
4. Die Längenkontraktion ist in Bezug auf zwei Inertialsysteme  $S$  und  $S'$  insofern *symmetrisch*, als umgekehrt ein in  $S$  ruhender Stab der Länge  $l_0$  in  $S'$  die Länge  $l_0 / \gamma$  hat; genauer:
 
$$x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1) / \gamma , \tag{5.49}$$
 falls  $t'_2 = t'_1$  ist.
5. Die Längenkontraktion ist nicht als physikalische Reaktion des betrachteten Körpers auf die Bewegung zu verstehen – vergleichbar etwa der Kontraktion bei Abkühlung. Die Lorentz-Kontraktion (alternative Bezeichnung) ist eine rein *kinematische Konsequenz* der Lorentz-Transformation.

**Paradoxa**, d. h. scheinbare Widersprüche. **Beispiel:**



• Abbildung 5.7 •

d. h. der Pfahl passt in die Garage. In dem Moment, da das vordere Pfahlende die Garagenrückwand berührt, schließt ein Freund das Garagentor. Dann passiert Fürchterliches: Die Garage wird für den Pfahl zum Ruhssystem; dieser zerbricht oder sprengt das Garagentor.

Beobachtung desselben Vorganges vom Ruhssystem des Pfahles aus, d. h. die Garage bewegt sich mit  $-u$  auf den Pfahl zu: Pfahllänge 10 m, Garagenlänge 2.5 m infolge Längenkontraktion. Wie soll ein 10 m langer Pfahl in eine 2.5 m lange Garage passen? Widerspruch? Nein! Die Konsistenz der Garagenenden mit den Pfahlenden, die im Garagensystem gleichzeitig erfolgt, ist im Pfahlsystem *nicht* gleichzeitig. Wenn das Vorderende des Pfahles die Rückwand berührt, ragt das Hinterende noch um 7.5 m heraus. Die Garagenrückwand nimmt das vordere Pfahlende mit sich, während das hintere Pfahlende wegen der endlichen Signalgeschwindigkeit (Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schockwelle)  $v < c$  im Pfahl noch für die Zeit

$$\tau = \frac{10 \text{ m}}{v} > \frac{10 \text{ m}}{c} \quad (5.50)$$

in Ruhe bleibt. Diese Zeit reicht aber aus, damit das vordere Ende der Garage die verbleibenden 7.5 m bis zum hinteren Ende des Pfahles „schafft“:

$$\Delta t = \frac{7.5 \text{ m}}{u} = \frac{7.5 \text{ m}}{0.866 \dots c} = \frac{0.866 \dots \text{ m}}{c} < \tau, \quad (5.51)$$

d. h. auch in diesem System passt der Pfahl in die Garage. Eine eventuelle Zerstörung des Pfahles beginnt bereits mit dem Zusammentreffen von Garagenrückwand und vorderem Pfahlende. Davon merkt jedoch das hintere Pfahlende erst etwas, wenn es das Garagentor passiert hat.

*Anmerkungen:*

1. In der Relativitätstheorie gibt es – wegen der damit verbundenen unendlichen Signalgeschwindigkeit – *keine starren Körper*.
2. Die Argumentation in den Gln. (5.50, 51) gilt für jeden *beliebigen*  $\gamma$ -Faktor:

$$\begin{aligned} l_p &= \gamma l_g, & \tau &> l_p / c \\ \Rightarrow \Delta t &= \frac{l_p - l_g / \gamma}{u} = \frac{l_p u}{c^2} < \frac{u}{c} \tau < \tau, \end{aligned} \quad (5.52)$$

wobei  $l_{p,g}$  für die Eigenlängen des Pfahls bzw. der Garage stehen.

**Relativität der Gleichzeitigkeit.** Betrachte zwei in  $S$  gleichzeitige Ereignisse mit den Raumzeitkoordinaten  $x_1, y_1, z_1, t_1 = t_2$  bzw.  $x_2, y_2, z_2, t_2 = t_1$ . Diese sind in  $S'$  im Allgemeinen *nicht* gleichzeitig. Aus (5.40) folgt nämlich für  $t_1 = t_2$ :

$$t'_2 - t'_1 = -\gamma \frac{u}{c^2} (x_2 - x_1) \neq 0, \quad (5.53)$$

sofern  $x_2 \neq x_1$  und  $u \neq 0$  ist.

**Zeitdilatation.** Betrachte zwei Ereignisse in  $S'$  an derselben Stelle  $x'_1 = x'_2, y'_1 = y'_2, z'_1 = z'_2$  zu Zeiten  $t'_1$  bzw.  $t'_2$ , z. B. zwei Zeigerstellungen einer an dieser Stelle stationierten Uhr. Die Zeitdifferenz – das *Eigenzeitintervall* – ist

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \tau. \quad (5.54)$$

Zeitmessung in  $S$ :

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad \text{mit} \quad x'_2 = x'_1, y'_2 = y'_1, z'_2 = z'_1; \quad (5.55)$$

mit (5.43) folgt

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= \gamma (t'_2 - t'_1) \\ \Rightarrow \quad \Delta t &= \gamma \tau, \end{aligned} \quad (5.56)$$

d. h. das Zeitintervall ist in  $S$  um den Faktor  $\gamma$  größer als in  $S'$ : *Bewegte Uhren gehen langsamer als ruhende Uhren!* Mit Lichtgeschwindigkeit bewegte Uhren gehen „unendlich langsam“: Für  $u = c$  ist  $\gamma = \infty$ , folglich ist  $\Delta t = \infty$  für jedes  $\tau > 0$  oder  $\tau = 0$  für jedes  $\Delta t < \infty$ .

Die Zeitdehnung ist in Bezug auf zwei Inertialsysteme ebenfalls ein *symmetrischer* Effekt, da umgekehrt die Zeitdifferenz eines in  $S$  stationären Ereignispaars in  $S'$  um den Faktor  $\gamma$  gedehnt erscheint.

**Experiment.** Abhängigkeit der mittleren Lebensdauer von Elementarteilchen von der Geschwindigkeit:

$$\tau(u) = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (5.57)$$

z. B.  $\mu$ -Mesonen in der kosmischen Höhenstrahlung ( $\tau_0 = \tau(0)$ ).

## 5.4 Die Struktur der Raumzeit

Nach Minkowski hat das *Raumzeit-Kontinuum* die mathematische Struktur eines *vier-dimensionalen quasi-euklidischen Punktraumes*  $\mathcal{E}_4$  mit der eindeutigen Zuordnung:

$$\text{Physikalisches Ereignis} \longleftrightarrow \text{Punkt in } \mathcal{E}_4 .$$

Koordinaten in  $\mathcal{E}_4$  (bezüglich Inertialsystem  $S$ ) gemäß (5.33):

$$x_1 = x , \quad x_2 = y , \quad x_3 = z , \quad x_4 = i c t . \quad (5.58)$$

*Abstand* zweier Ereignisse  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  und  $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3, x_4 + dx_4)$ :

$$ds^2 = \sum_{i=1}^4 dx_i^2 ; \quad (5.59)$$

invariant gegen orthogonale Transformationen in  $\mathcal{E}_4$ , d.h. invariant gegen Lorentz-Transformationen. Physikalische Bedeutung von  $ds$ ?

**Interpretation von  $ds$**  . Zur Vereinfachung der Diskussion Beschränkung auf die  $x_1, x_4$ -Ebene:

$$ds^2 = dx^2 - c^2 dt^2 . \quad (5.60)$$

Drei Fälle sind zu unterscheiden:

**$ds^2 < 0$ : zeitartiges Ereignispaar**, weil ein Inertialsystem  $S'$  existiert, in dem die beiden Ereignisse durch ein reines Zeitintervall getrennt sind, d.h. am selben Ort stattfinden:

$$dx' = \gamma(dx - u dt) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{dx}{dt} . \quad (5.61)$$

Diese Wahl von  $u$  ist möglich, da nach Voraussetzung ( $ds^2 < 0$ ) gilt:

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| < c . \quad (5.62)$$

In  $S'$  ist

$$ds^2 = -c^2 dt'^2 \quad \Rightarrow \quad ds = i c dt' , \quad (5.63)$$

d.h.  $ds$  hat hier (bis auf den konstanten Faktor  $ic$ ) die Bedeutung des Eigenzeitintervalles. Die beiden Ereignisse können wegen (5.62) *in kausalem Zusammenhang* miteinander stehen.

Ein zeitartiges Ereignispaar ist in keinem Inertialsystem gleichzeitig:

$$\begin{aligned} dt' &= \gamma(dt - u dx/c^2) \\ &= \gamma \left( 1 - \frac{u}{c} \frac{1}{c} \frac{dx}{dt} \right) dt \neq 0 \end{aligned} \quad (5.64)$$

wegen  $|u/c| \leq 1$  und wegen (5.62).

**$ds^2 > 0$ : raumartiges Ereignispaar**, weil ein Inertialsystem  $S'$  existiert, in dem die beiden Ereignisse rein räumlich getrennt sind, d. h. gleichzeitig stattfinden:

$$dt' = \gamma(dt - u dx/c^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = c^2 \frac{dt}{dx} . \quad (5.65)$$

Diese Wahl von  $u$  ist möglich, da nach Voraussetzung ( $ds^2 > 0$ ) gilt:

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| > c . \quad (5.66)$$

In  $S'$  ist

$$ds = dx' , \quad (5.67)$$

d. h.  $ds$  hat hier die Bedeutung des räumlichen Abstandes. Wegen (5.66) ist ein kausaler Zusammenhang zwischen den beiden Ereignispaaren *nicht* möglich.

Ein raumartiges Ereignispaar ist in keinem Inertialsystem stationär:

$$\begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - u dt) \\ &= \gamma \left( 1 - u \frac{dt}{dx} \right) dx \neq 0 \end{aligned} \quad (5.68)$$

wegen (5.66) und  $|u/c| \leq 1$ .

**$ds^2 = 0$ : lichtartiges Ereignispaar**, da durch Lichtsignal verknüpfbar:

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| = c . \quad (5.69)$$

Es gibt ein Inertialsystem  $S'$ , nämlich das mit dem Lichtsignal mitbewegte ( $u = \pm c$  für  $dx/dt \gtrless 0$ ), in dem  $dx' = 0$  und  $dt' = 0$  ist. Die beiden Ereignisse fallen dort räumlich und zeitlich zusammen. Kein „Ruhsystem“ für das Lichtsignal!

Zeitartigkeit, Raumartigkeit und Lichtartigkeit eines Ereignispaares bleiben bei beliebigem Wechsel des Inertialsystems erhalten – wegen  $ds^2$  invariant gegen Lorentz-Transformationen.

Ein Ereignis  $A$  habe bezüglich eines Inertialsystems die Koordinaten

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 . \quad (5.70)$$

Alle anderen Ereignisse liegen dazu entweder zeitartig oder raumartig oder lichtartig. (Die vorstehenden Betrachtungen gelten auch für Ereignispaare mit beliebig großem Abstand:  $s^2 = (\Delta x)^2 - c^2 (\Delta t)^2$ .) Die zu  $A$  lichtartigen Ereignisse liegen auf dem **Lichtkegel**:

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 . \quad (5.71)$$

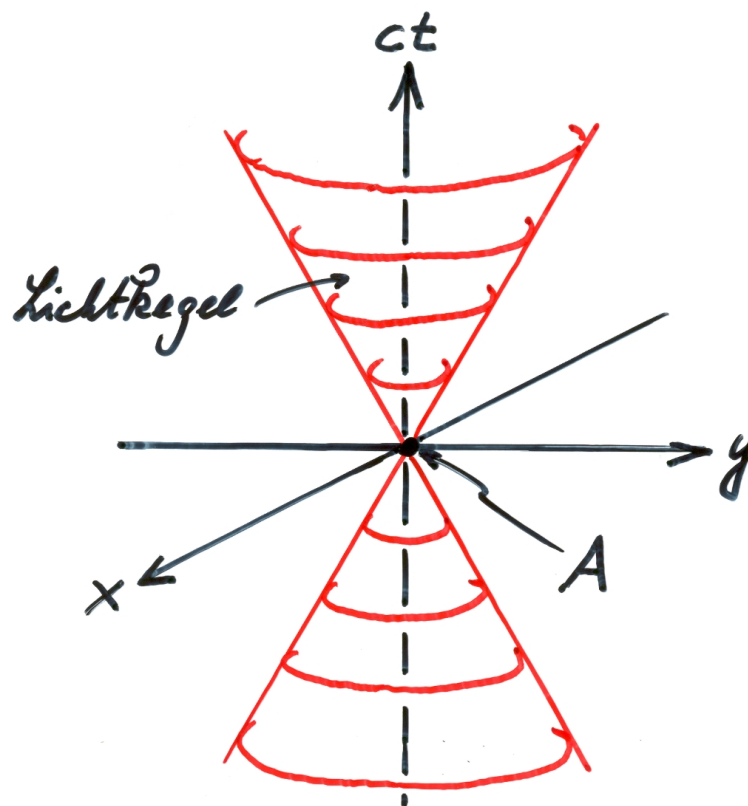
Die nachfolgenden Betrachtungen gelten für jeden beliebigen Referenzpunkt gleichermaßen: Jedes Ereignis besitzt seinen eigenen Lichtkegel.

Dass es sich bei (5.71) um einen Kegel handelt, macht man sich am einfachsten für den Spezialfall  $z = 0$  klar:

$$x^2 + y^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (5.72)$$

stellt in der dreidimensionalen nicht-euklidischen (!)  $(x, y, ct)$ -Raumzeit einen bezüglich der  $ct$ -Achse rotationssymmetrischen Doppelkegel mit Vertex im Ursprung ( $A$ ) dar:



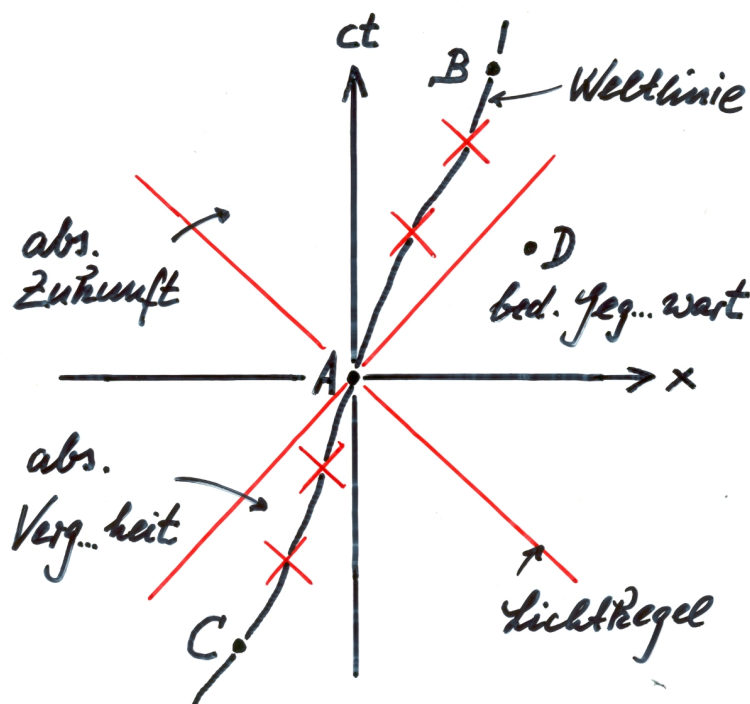


• Abbildung 5.8 •

Für die folgende Diskussion wird noch weiter auf  $y = z = 0$  spezialisiert:

$$\begin{aligned}
 x^2 - c^2 t^2 &= 0 \\
 \Rightarrow x &= \pm ct .
 \end{aligned}
 \tag{5.73}$$

Das sind zwei Geraden in der zweidimensionalen nicht-euklidischen (!)  $(x, ct)$ -Raumzeit:



• Abbildung 5.9 •

Betrachte zunächst Ereignisse „innerhalb“ des Lichtkegels, d. h.  $x^2 - c^2 t^2 < 0$ :

- **Absolute Zukunft.**  $B$  liegt zu  $A$  zeitartig mit  $t' > 0$ :

$$t' = \gamma t \left( 1 - \frac{u}{c} \frac{x}{ct} \right) > 0; \tag{5.74}$$

denn  $t > 0$  und  $(\dots) > 0$  wegen  $|u/c| \leq 1$  und  $|x/ct| < 1$ ; „absolute“ Zukunft, da die Ungleichung (5.74) für *alle* Inertialsysteme gilt.  $B$  kann kausal von  $A$  abhängen; aber *nur* die Ereignisse der absoluten Zukunft sind von  $A$  aus kausal erreichbar.

- **Absolute Vergangenheit.**  $C$  liegt zu  $A$  zeitartig mit  $t' < 0$ ; „absolute“ Vergangenheit, da diese Ungleichung für *alle* Inertialsysteme gilt.  $C$  kann Ursache für  $A$  sein; aber *nur* Ereignisse der absoluten Vergangenheit kommen als Ursache für  $A$  in Frage.

Zukunft bleibt beim Wechsel des Inertialsystems Zukunft, Vergangenheit bleibt Vergangenheit. Also kein Vertauschen von Zukunft und Vergangenheit. Das gilt jedoch nur für den „absoluten“ Bereich, nicht für den „bedingten“ Bereich (siehe unten).

**Weltlinie:** kausale Ereignisfolge durch  $A$ . Bezeichnung von Ereignissen als *Weltpunkte*. Für die Steigung gilt überall:

$$\left| \frac{dct}{dx} \right| = \left| \frac{c}{dx/dt} \right| \geq 1. \quad (5.75)$$

Die Weltlinie entwickelt sich überall innerhalb des jeweils lokalen Lichtkegels; siehe Abbildung 5.9.

*Beispiel:* Teilchen längs der  $x$ -Achse, das zur Zeit  $t = 0$  den Ursprung passiert. Für Photonen liegt die Weltlinie auf dem Lichtkegel.

Betrachte sodann Ereignisse „außerhalb“ des Lichtkegels, d. h.  $x^2 - c^2 t^2 > 0$ :

- **Bedingte Gegenwart.**  $D$  liegt zu  $A$  raumartig; kann durch Wahl eines geeigneten Inertialsystems  $S'$  mit  $A$  gleichzeitig erfolgen. Kein kausaler Zusammenhang mit  $A$ . „Bedingte“ Gegenwart, weil die Gegenwart vom Inertialsystem  $S'$  abhängt. Für  $c \rightarrow \infty$  verschwindet (Reduktion auf die  $x$ -Achse im  $x, t$ -Diagramm) die bedingte Gegenwart; d. h. ohne endliche Grenzgeschwindigkeit können – prinzipiell – beliebige Ereignispaare kausal miteinander zusammenhängen.

*Übergang* vom Inertialsystem  $S$  zum Inertialsystem  $S'$ . Wie stellen sich im zu  $S$  gehörigen  $x, ct$ -Diagramm die zu  $S'$  gehörigen  $x', ct'$ -Achsen dar?

$ct'$ -Achse:

$$\begin{aligned} x' &= 0 = \gamma(x - ut) \\ \Rightarrow x &= \frac{u}{c} ct = \tan \beta ct. \end{aligned} \quad (5.76)$$

d. i. die Weltlinie des Koordinatenursprungs von  $S'$ ; innerhalb des Lichtkegels (absoluter Bereich).

$x'$ -Achse:

$$\begin{aligned} ct' &= 0 = \gamma \left( ct - \frac{u}{c} x \right) \\ \Rightarrow ct &= \frac{u}{c} x = \tan \beta x, \end{aligned} \quad (5.77)$$

das sind alle zu  $A$  in  $S'$  gleichzeitigen ( $t' = 0$ ) Ereignisse; außerhalb des Lichtkegels (bedingter Bereich).

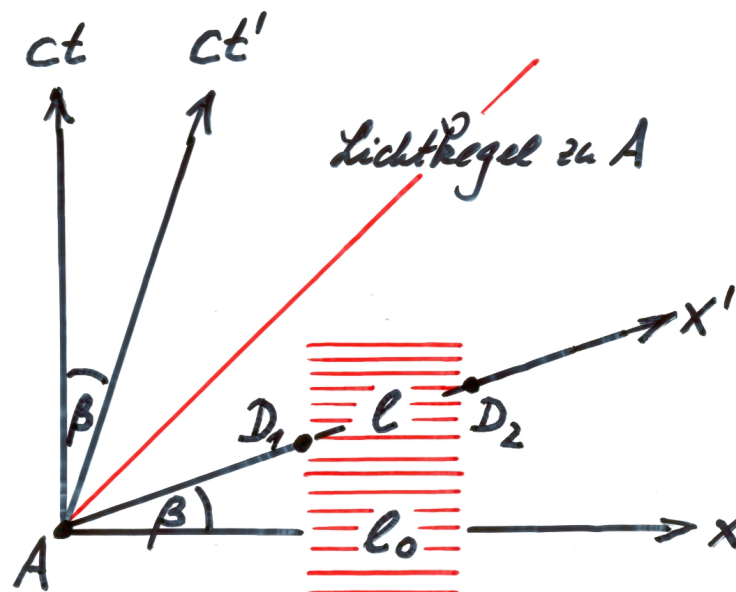
Aus  $-c \leq u \leq +c$  folgt für den Winkel  $\beta = \arctan u/c$ :

$$-\frac{\pi}{4} \leq \beta \leq +\frac{\pi}{4}. \quad (5.78)$$

*Achtung:* Die Lorentz-Transformation ist in der nicht-euklidischen  $(x, ct)$ -Raumzeit mit der Metrik (5.60) keine Drehung! Dagegen Drehung in der (quasi-) euklidischen  $(x, ict)$ -Raumzeit mit der Metrik  $ds^2 = dx^2 + (dicit)^2$ , vgl. (5.59).

Wir betrachten erneut die

- **Längenkontraktion.** Stab der Länge  $l_0$  ruht in  $S \Rightarrow$  „Ereignisband“ parallel zur  $ct$ -Achse:



• Abbildung 5.10 •

Längenmessung zur Zeit  $t' = 0$  in  $S'$  ergibt Intervall  $l$  auf der  $x'$ -Achse. Der optische Eindruck suggeriert  $l > l_0$  – im Widerspruch zur Aussage der Längenkontraktion. Der Widerspruch löst sich auf bei Beachtung der nicht-euklidischen Metrik. Raumzeitlicher Abstand der Ereignisse  $D_1$  und  $D_2$  in  $S$  und  $S'$  gleich (Invarianz):

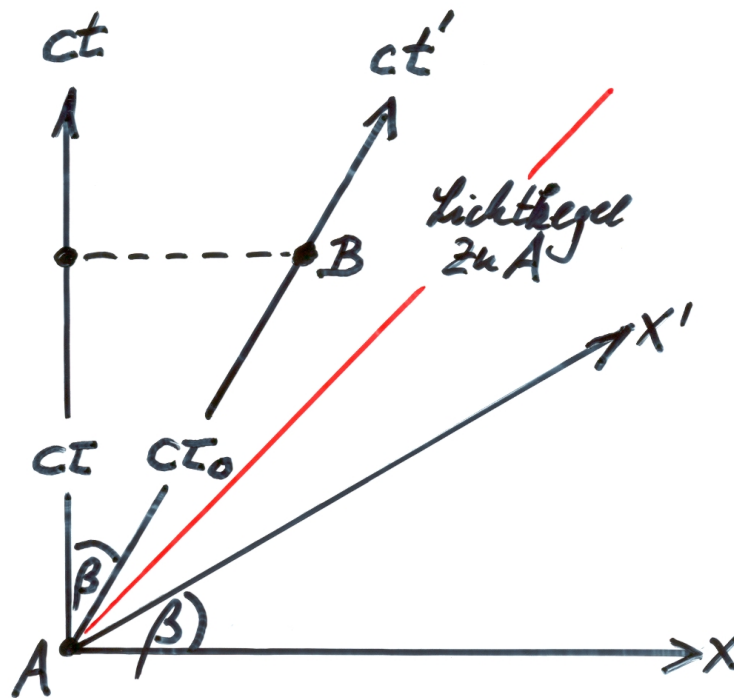
$$\begin{aligned} \sqrt{l_0^2 - (c \Delta t)^2} &= l \\ \Rightarrow l_0 \sqrt{1 - \tan^2 \beta} &= l ; \end{aligned}$$

mit (5.41) folgt

$$\frac{l_0}{\gamma} = l ; \quad (5.79 \text{ a})$$

siehe oben.

- **Zeitdilatation.** Raumzeitlicher Abstand der Ereignisse  $A$  und  $B$  ( $x' = 0$ , stationär in  $S'$ ) in  $S'$  und  $S$  gleich:



• Abbildung 5.11 •

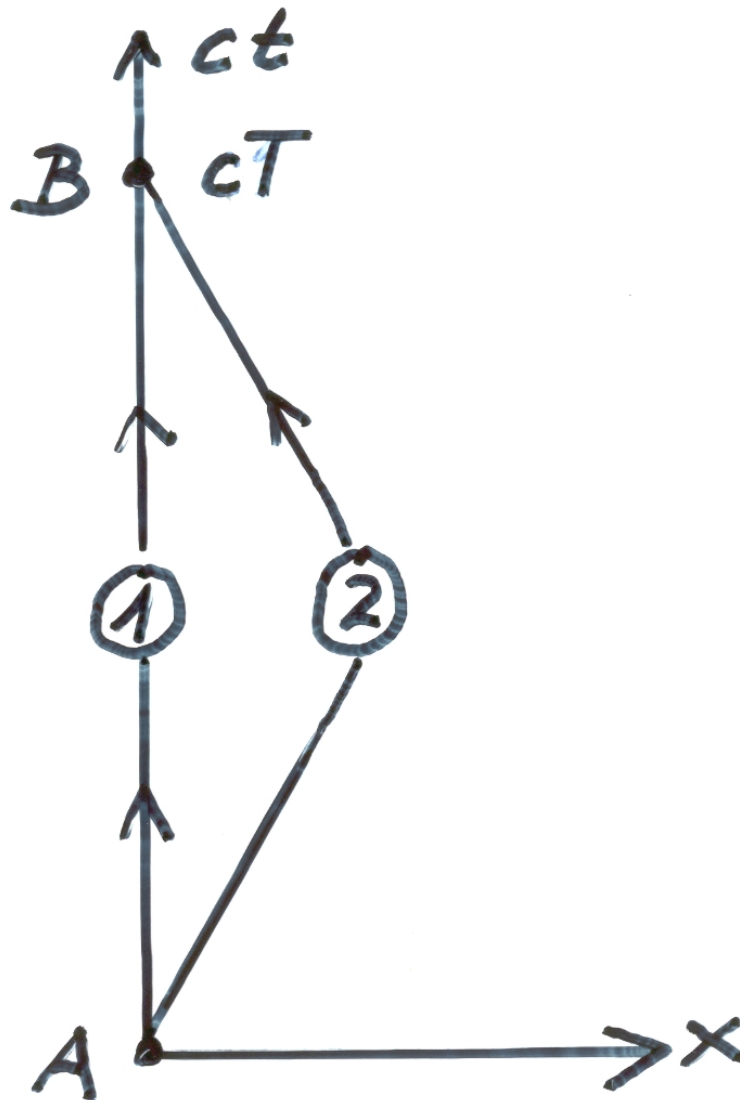
$$\begin{aligned} -c^2 \tau_0^2 &= (\Delta x)^2 - c^2 \tau^2 \\ \Rightarrow \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^2 &= 1 - \tan^2 \beta ; \end{aligned}$$

erneut mit (5.41) erhält man

$$\tau_0 = \frac{\tau}{\gamma} , \quad (5.79 \text{ b})$$

siehe oben – entgegen dem optischen Eindruck auf Grund der nicht-euklidischen Metrik.

**Zwillingsparadoxon.** Beobachter 1 ruht im Ursprung von  $S$  bei  $x = 0$ . Beobachter 2 entfernt sich zur Zeit  $t = 0$  aus dieser Position (Ereignis  $A$ ) und kehrt zur Zeit  $t = T$  dorthin zurück (Ereignis  $B$ ):



• Abbildung 5.12 •

Die zwischen  $A$  und  $B$  verstrichene Eigenzeit

$$\tau = \frac{1}{ic} \int_A^B ds \quad (5.80)$$

ist (bis auf den Faktor  $1/ic$ ) gleich der Länge der Weltlinie zwischen  $A$  und  $B$ . Diese ist für die beiden Beobachter verschieden:

$$\begin{aligned} d\tau_1 &= \frac{1}{ic} ds_1 \\ &= \frac{1}{ic} \sqrt{-c^2 dt^2} \\ &= dt \\ \Rightarrow \tau_1 &= \int_0^T dt = T \end{aligned} \quad (5.81 \text{ a})$$

bzw.

$$\begin{aligned} d\tau_2 &= \frac{1}{ic} ds_2 \\ &= \frac{1}{ic} \sqrt{dx^2 - c^2 dt^2} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{c dt}\right)^2} dt \\ \Rightarrow \tau_2 &= \int_0^T dt / \gamma(u/t) < T ; \end{aligned} \quad (5.81 \text{ b})$$

also ist

$$\tau_1 > \tau_2 , \quad (5.81 \text{ c})$$

d. h. für 2 verstreicht eine geringere Zeit als für 1 – obwohl wegen der nicht-euklidischen Geometrie die Weltlinie von 2 länger „aussieht“ als die Weltlinie von 1: *Der daheimgebliebene Zwilling ist stärker gealtert als der auf Reisen gegangene.*

Paradox daran ist der folgende scheinbare (!) Widerspruch: In einem System, in dem 2 ruht und 1 sich bewegt, sollte wegen der Symmetrie des Zeitdehnungseffektes  $\tau_1 < \tau_2$  sein. Diese Schlussfolgerung ist jedoch nicht richtig, da das Ruhssystem von 2 kein Inertialsystem ist und die Symmetrie des Zeitdehnungseffektes nur für Paare von Inertialsystemen gilt. *Richtig ist:* Der Übergang vom Inertialsystem  $S$  auf ein nichtinertiales

(beschleunigtes) Bezugssystem, in dem 2 ständig ruht und 1 sich entfernt und wieder zurückkehrt, entspricht dem Übergang von kartesischen Koordinaten  $x_i$  zu krummlinigen Koordinaten  $x'_i$  in  $\mathcal{E}_4$ . Dabei ändert sich der Wert des Linienelementes

$$ds = \sqrt{\sum_i dx_i^2} \quad (5.82)$$

in  $\mathcal{E}_4$  nicht und somit nicht der Wert von  $\tau_1$  und  $\tau_2$ , nur die Metrik ist von anderer Gestalt:

$$\begin{aligned} x_i(x'_j) : \quad dx_i &= \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} dx'_j \\ \Rightarrow \quad ds &= \sqrt{\sum_j \sum_k \left( \sum_l \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} \frac{\partial x_l}{\partial x'_k} \right) dx'_j dx'_k} . \end{aligned} \quad (5.83)$$

Die Ungleichung (5.81 c) bleibt hingegen bestehen.

**Experiment:** West- und Ostflug von Cs-Atomkern um die Erde (Hafele & Keating 1971):

$$\tau_{west} > \tau_{ost} . \quad (5.84)$$

Außer dem hier besprochenen kinematischen Zeitdehnungseffekt ist bei der Deutung der Messresultate auch der Einfluss des Gravitationspotenzials der Erde zu berücksichtigen.

## 5.5 Tensoren in der Minkowski-Raumzeit

Das physikalische Ereignis mit den Minkowski-Koordinaten  $x_1, x_2, x_3, x_4$  bzgl. des Inertialsystems  $S$  hat bzgl. des Inertialsystems  $S'$  die Minkowski-Koordinaten  $x'_1, x'_2, x'_3, x'_4$ . Der Zusammenhang ist durch die Lorentz-Transformation

$$x'_i = \sum_{j=1}^4 a_{ij} x_j , \quad i = 1, 2, 3, 4 , \quad (5.85)$$

gegeben – homogener Fall:  $b_i = 0$  vorausgesetzt, vgl. (5.36). Die Lorentz-Transformation ist eine orthogonale Transformation des (quasi-) euklidischen  $\mathcal{E}_4$ ; nach (5.37) gilt

$$\sum_{i=1}^4 a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} , \quad j, k = 1, 2, 3, 4 ; \quad (5.86)$$



die inverse ist gleich der transponierten Matrix. Die nachfolgenden Betrachtungen sind ohne weiteres auf euklidische Räume  $\mathcal{E}_N$  beliebiger Dimension  $N$  übertragbar; in diesem (mathematischen) Zusammenhang spricht man auch von *kartesischen Tensoren*.

Das Quadrupel  $(A_1, A_2, A_3, A_4)$  heißt (Vierer-) **Vektor** oder **Tensor 1. Stufe**, falls es sich beim Wechsel des Bezugssystems wie der „Ereignisvektor“  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  transformiert:

$$A'_i = \sum_j a_{ij} A_j . \tag{5.87}$$

Bezeichnung als „Vektor mit den Komponenten  $A_i$ “, kürzer als „Vektor  $A_i$ “. Nicht jedes beliebige Quadrupel  $A_i$  ist also ein Vektor.

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{14} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{41} & \cdots & A_{44} \end{pmatrix}$$

heißt (Vierer-) **Tensor** oder **Tensor 2. Stufe**, falls sie sich beim Übergang von  $S$  nach  $S'$  wie folgt transformiert:

$$A'_{ij} = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} A_{kl} . \tag{5.88}$$

Man spricht einfach vom „Tensor  $A_{ij}$ “. *Beispiel:*  $A_{ij} = B_i C_j$ , wo  $B_i, C_j$  zwei Vektoren sind. Nicht jeder Tensor ist in dieser Weise darstellbar.

**Verallgemeinerung.** Die  $n$ -fach indizierte Größe  $A_{ijkl} \dots$  heißt **Tensor  $n$ . Stufe**, falls gilt:

$$A'_{ijkl\dots} = \sum_{p,q,r,s\dots} a_{ip} a_{jq} a_{kr} a_{ls} \dots A_{pqrs\dots} . \tag{5.89}$$

Jeder Index wird auf die gleiche Weise „Lorentz-transformiert“.

Eine Größe  $A$  mit dem trivialen Transformationsverhalten

$$A' = A \tag{5.90}$$

heißt **Skalar** (auch *skalare Invariante*) oder **Tensor 0. Stufe**. Ein wichtiges *Beispiel* ist die Ladung eines Teilchens, nicht hingegen die Masse.

*Wichtig!* Bestimmung der  $A$  und  $A'$ -Komponenten auf zwei verschiedene Weisen:

- Unabhängige Festlegung der  $A$ - und  $A'$ -Komponenten, z. B. durch physikalisches Messverfahren; erst wenn diese Komponenten durch Transformationsgleichungen der vorstehenden Art verknüpft sind, nennt man  $A$  bzw.  $A'$  einen Tensor.

- Vorgabe von  $A$ , Definition von  $A'$  durch die Transformation (5.89). Mathematischer Standpunkt: Definition eines Tensors durch sein Transformationsverhalten.

**Rechenregeln:**

- $A_{ij\dots}, B_{ij\dots}$  Tensoren gleicher Stufe  $\Rightarrow a A_{ij\dots} + b B_{ij\dots}$  Tensor derselben Stufe;  $a, b$  beliebige Koeffizienten.
- $A_{ij\dots}, B_{lm\dots}$  Tensoren der Stufen  $n$  bzw.  $n'$   $\Rightarrow A_{ij\dots} B_{lm\dots}$  Tensor der Stufe  $n + n'$ : *äußeres Tensorprodukt*. Siehe Beispiel nach (5.88) mit  $n = n' = 1$ .
- $A_{ijlm\dots}$  Tensor  $n$ . Stufe  $\Rightarrow \sum_i A_{iilm\dots}$  Tensor der Stufe  $n - 2$ : *Verjüngung* oder *Kontraktion*.

*Beweis:*

$$\begin{aligned} \sum_i A_{iilm\dots} &= B_{lm\dots} \\ \Rightarrow B'_{lm\dots} &= \sum_i A'_{iilm\dots} \\ &= \sum_{p,q,r,s\dots} \underbrace{\sum_i a_{ip} a_{iq}}_{= \delta_{pq}} a_{lr} a_{ms} \dots A_{pqrs\dots} \\ &= \sum_{r,s\dots} a_{lr} a_{ms} \dots \sum_q A_{qqrs\dots} \\ &= \sum_{r,s\dots} a_{lr} a_{ms} \dots B_{rs\dots} \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

*Beispiel:* Spur eines Tensors 2. Stufe:  $\sum_i A_{ii}$  skalare Invariante.

Die Operation der Verjüngung ist bezüglich jedes Indexpaares möglich; d. h. es gibt  $n(n - 1) / 2$  verschiedene Möglichkeiten.

- Kombination der beiden vorstehenden Regeln:  $A_{ij\dots}, B_{lm\dots}$  Tensoren der Stufen  $n$  bzw.  $n'$   $\Rightarrow \sum_i A_{ij\dots} B_{im\dots}$  Tensor der Stufe  $n + n' - 2$ : *inneres*, auch *verjüngendes Tensorprodukt*.

*Beispiel:* Das innere Produkt  $\sum_i A_i B_i$  zweier Vektoren ist ein Skalar.

Die Operation gilt wieder bezüglich beliebiger Indexpaare – einer von  $A$ , der andere von  $B$ ; d. h. es gibt  $n n'$  verschiedene Möglichkeiten.

**Fundamentaltensor**  $\delta_{ij}$  (2. Stufe):

$$\delta'_{ij} = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \delta_{kl} = \sum_k a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} . \quad (5.91)$$

Zwei Standpunkte entsprechend der obigen Alternative sind möglich:  $\delta_{ij}$  invariant per definitionem  $\Rightarrow \delta'_{ij}$  Tensor. Oder:  $\delta'_{ij}$  Tensor per definitionem  $\Rightarrow \delta_{ij}$  invariant.

Ein Tensor mit der Eigenschaft

$$A_{ijk\dots} = \pm A_{jik\dots} \quad (5.92)$$

heißt *symmetrisch* bzw. *antisymmetrisch* bzgl. der Indizes  $i$  und  $j$ . Diese Eigenschaft ist Lorentz-invariant:

$$\begin{aligned} A'_{jik\dots} &= \sum_{l,m,n\dots} a_{jl} a_{im} a_{kn} \dots A_{lmn\dots} \\ &= \pm \sum_{m,l,n\dots} a_{im} a_{jl} a_{kn} \dots A_{mln\dots} \\ &= \pm A'_{ijk\dots} . \end{aligned}$$

Diese Invarianzeigenschaft gilt bezüglich beliebiger Indexpaare.

**Tensorgleichungen:**

- $A_{ij\dots}$  Tensor mit  $A_{ij\dots} = 0$  in einem Inertialsystem  $S \Rightarrow A'_{ij\dots} = 0$  in jedem anderen Inertialsystem  $S'$ .
- Daraus folgt:  $A_{ij\dots}, B_{ij\dots}$  Tensoren mit  $A_{ij\dots} = B_{ij\dots}$  in  $S \Rightarrow A'_{ij\dots} = B'_{ij\dots}$  in allen anderen  $S'$ .
- Linearkombinationen, äußere und innere Tensorprodukte bleiben beim Übergang von  $S$  nach  $S'$  erhalten (ohne Beweise).

Folglich: Tensorgleichungen sind **forminvariant!** Diese Erkenntnis ist von fundamentaler Bedeutung für die Erfüllung des Relativitätsprinzips. Demnach sind die physikalischen Gesetze als Tensorgleichungen zu formulieren.

**Tensorfelder.** Jedem Punkt aus  $\mathcal{E}_4$  wird ein Tensor zugeordnet:  $A_{ij\dots}(x_1, x_2, x_3, x_4)$  so, dass gilt:

$$A'_{ij\dots}(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = \sum_l \sum_m \dots a_{il} a_{jm} \dots A_{lm\dots}(x_1, x_2, x_3, x_4) . \quad (5.93)$$

Achtung:  $A'(x')$  im Allgemeinen nicht dieselbe Funktion wie  $A(x)$ .

- *Gradient* eines Tensorfeldes  $A_{ij\dots}(x_1, x_2, x_3, x_4)$  der Stufe  $n$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_r} A_{ij\dots}(x_1, x_2, x_3, x_4) = A_{ij\dots,r}(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (5.94)$$

ergibt Tensorfeld der Stufe  $n + 1$ . *Beispiel:* Gradient eines skalaren Feldes ergibt Vektorfeld.

*Beweis:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial A'_{ij\dots}}{\partial x'_r} &= \frac{\partial}{\partial x'_r} \sum_{l,m\dots} a_{il} a_{jm\dots} A_{lm\dots} \\ &= \sum_s \frac{\partial}{\partial x_s} \left( \sum_{l,m\dots} a_{il} a_{jm\dots} A_{lm\dots} \right) \frac{\partial x_s}{\partial x'_r} \\ &= \sum_{l,m\dots s} a_{il} a_{jm\dots} a_{rs} \frac{\partial A_{lm\dots}}{\partial x_s} \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

Beachte: Der Vierer-Nabla-Operator  $\partial / \partial x_r$  transformiert sich wie ein Vierervektor.

- *Divergenz* eines Tensorfeldes  $A_{ij\dots}(x_1, x_2, x_3, x_4)$  der Stufe  $n$ :

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij\dots} = \sum_i A_{ij\dots,i}, \quad (5.95)$$

d. h. Gradientenbildung und Verjüngung, ergibt Tensorfeld der Stufe  $k - 1$ .  $k$  verschiedener Möglichkeiten entsprechend den verschiedenen Indizes. *Beispiel:* Divergenz eines Vektorfeldes ergibt skalares Feld (eindeutig).

**Pseudotensoren:**

$$A_{ij\dots} = \alpha \sum_{l,m\dots} a_{il} a_{jm\dots} A_{lm\dots}$$

mit

$$(5.96)$$

$$\alpha = \det(a_{ij}).$$

Bei eigentlichen orthogonalen Transformationen ( $\alpha = +1$ ) gibt es keinen Unterschied zwischen Tensoren und Pseudotensoren; bei uneigentlichen orthogonalen Transformationen ( $\alpha = -1$ ) ändert sich bei Pseudotensoren zusätzlich das Vorzeichen.

*Beispiel:* Das Volumenelement

$$dV' = \det \left( \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right) dV = \det(a_{ij}) dV = \alpha dV \quad (5.97)$$

ist ein Pseudoskalar.

Ein weiteres Beispiel ist der *Levi-Civita...-Pseudotensor*. Vollständig antisymmetrischer (antisymmetrisch hinsichtlich jedes Indexpaares) Pseudotensor  $n$ . Stufe:

$$e_{ij\dots n} = \begin{cases} +1 & , \text{ falls } ij\dots n \text{ gerade Permutation} \\ 0 & , \text{ sonst} \\ -1 & , \text{ falls } ij\dots n \text{ ungerade Permutation} \end{cases} . \quad (5.98)$$

Aus der Forderung(!), dass sich  $e_{ij\dots n}$  wie ein Pseudotensor transformiert, folgt die *Invarianz*:

$$e'_{ij\dots n} = \alpha \sum_{i',j',\dots,n'} a_{i'i'} a_{j'j'} \dots a_{nn'} e_{i'j'\dots n'}$$

und

$$e_{i'j'\dots n'} = \sigma e_{ij\dots n} ,$$

$\sigma = \pm 1$ , falls  $i' \dots n' \rightarrow i \dots n$  gerade/ungerade Permutation, impliziert

$$\begin{aligned} e'_{ij\dots n} &= \alpha \left( \underbrace{\sum_P \sigma a_{i'i'} \dots a_{nn'}}_{= \det(a_{ij})} \right) e_{ij\dots n} \\ \Rightarrow e'_{ij\dots n} &= \alpha^2 e_{ij\dots n} = e_{ij\dots n} \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

Umgekehrt: Aus der Forderung(!) der Invarianz folgt, dass  $e_{ij\dots n}$  ein Pseudotensor ist. Vgl. die obige Alternative.

**Rechenregeln** wie bei den Tensoren. Bei der äußeren Tensormultiplikationen ist zu beachten:

- Tensor  $\otimes$  Pseudotensor = Pseudotensor;
- Pseudotensor  $\otimes$  Pseudotensor = Tensor.

Anwendungen. Sei  $T_{ij}$  ein antisymmetrischer Tensor 2. Stufe, dann ist

$$S_{kl\dots n} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} e_{ijkl\dots n} T_{ij} \quad (5.99)$$

ein vollständig antisymmetrischer Pseudotensor der Stufe  $n - 2$ ;  $S$  zu  $T$  „adjungiert“.

- $A_i, B_j$  Vektoren. *Kreuzprodukt*:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= A_i B_j - A_j B_i \\ \Rightarrow S_{kl\dots} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} e_{ijkl\dots n} (A_i B_j - A_j B_i); \end{aligned} \quad (5.100)$$

für  $n = 3$  gilt zum Beispiel:

$$S_k = \frac{1}{2} \sum_{i,j} e_{ijk} (A_i B_j - A_j B_i) = \sum_{i,j} e_{ijk} A_i B_j,$$

d. i. in Komponenten der Pseudovektor (axialer Vektor)

$$\vec{S} = \vec{A} \times \vec{B}. \quad (5.101)$$

- $A_i$  Vektorfeld. *Rotation*:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= A_{j,i} - A_{i,j} \\ \Rightarrow S_{kl\dots} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} e_{ijkl\dots n} (A_{j,i} - A_{i,j}); \end{aligned} \quad (5.102)$$

für  $n = 3$  folgt:

$$S_k = \frac{1}{2} \sum_{i,j} e_{ijk} (A_{j,i} - A_{i,j}) = \sum_{i,j} e_{ijk} A_{j,i},$$

d. i. in Komponenten das Pseudovektorfeld (axiales Vektorfeld)

$$\vec{S} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (5.103)$$

Gl. (5.102) ist insofern ein Spezialfall von Gl. (5.100) als  $\vec{\nabla}$  sich wie ein Vektor transformiert (ohne Beweis).

**Quotientenregel:** Sei  $B_j$  ein (vom gewählten Inertialsystem abhängiges) 4-Tupel; für beliebige Tensoren  $A_{ij}$  sei

$$\sum_i A_{ij} B_j = C_i \quad (5.104)$$

ein Vektor. Dann gilt:  $B_j$  ist ein Vektor.

*Beweis:*

$$\begin{aligned} \sum_j A'_{ij} B'_j &= C'_i \\ &= \sum_j a_{ij} C_j \\ &= \sum_{j,k} a_{ij} A_{jk} B_k \\ &= \sum_{j,k} a_{ij} \left( \sum_{l,m} a_{lj} a_{mk} A'_{lm} \right) B_k \\ &= \sum_{k,l,m} \underbrace{\sum_j a_{ij} a_{lj} a_{mk} A'_{lm}}_{= \delta_{il}} B_k \\ &= \sum_{j,k} a_{jk} A'_{ij} B_k \quad (m \rightarrow j) \\ \Rightarrow \sum_j A'_{ij} \left( B'_j - \sum_k a_{jk} B_k \right) &= 0 ; \end{aligned}$$

wegen der Beliebigkeit der  $A'_{ij}$  folgt schließlich:

$$B'_j - \sum_k a_{jk} B_k = 0 ;$$

das ist die *Behauptung*.

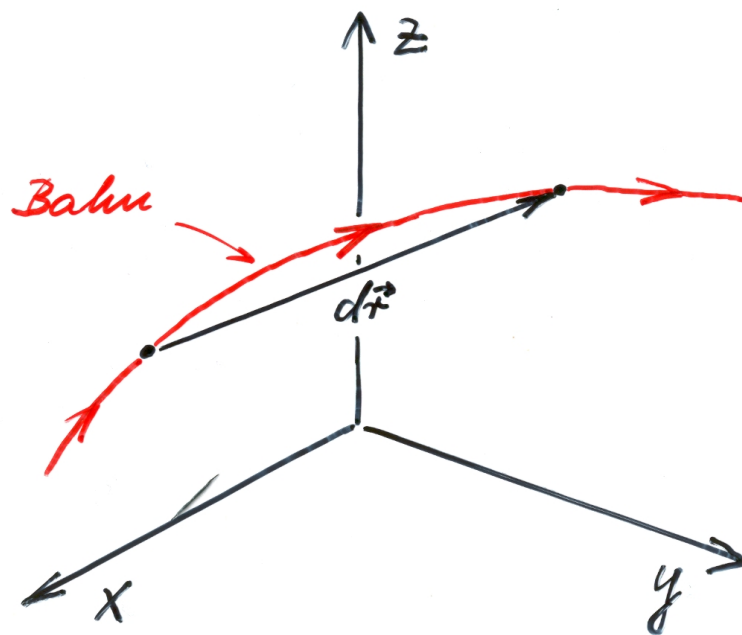
Die Quotientenregel lässt sich auf Tensoren beliebiger Stufe verallgemeinern. Sie gilt gleichermaßen für das äußere und das innere Tensorprodukt.

## 6 Speziell-relativistische Mechanik

### 6.1 Impuls, Masse, Geschwindigkeit

Die kovariante Formulierung der Naturgesetze (Relativitätsprinzip) erfordert: Darstellung der physikalischen Größen als Vierertensoren (0., 1., 2., ... Stufe) in der Minkowski-Raumzeit; Verknüpfung dieser Größen durch Tensorgleichungen.

**Geschwindigkeitsvektor (Vierergeschwindigkeit):**



• Abbildung 6.1 •

Im  $\mathcal{E}_3$  ist

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (6.1)$$

$$v_i = \frac{dx_i}{dt}, \quad i = 1, 2, 3;$$

folgt daraus für den  $\mathcal{E}_4$ :

$$V_i = \frac{dx_i}{dt}, \quad i = 1, 2, 3, 4? \quad (6.2)$$



Nein, (6.2) definiert keinen Vierervektor! Zwar bilden die  $dx_i$  einen Vierervektor, aber  $dt$  ist keine skalare Invariante. Dafür ist aber das Eigenzeitintervall

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma(v)}, \quad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (6.3)$$

eine skalare Invariante; siehe Zeitdehnung gemäß Abschnitt 5.3. Somit ergibt sich der Vierervektor

$$V_i = \frac{dx_i}{d\tau} = \gamma(v) \frac{dx_i}{dt}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (6.4)$$

$$\vec{V} = \gamma(v) (v_x, v_y, v_z, ic) = \gamma(v) (\vec{v}, ic).$$

Aus (6.4) folgt

$$\sum_i V_i V_i = \frac{v^2 - c^2}{1 - v^2/c^2} = -c^2, \quad (6.5)$$

d. h. die Norm der Vierergeschwindigkeit ist eine skalare Invariante – wie es sich für einen Vierervektor gehört (Norm = Viererskalar; hier negativ infolge Quasi-Euklidizität).

Aus dem Transformationsverhalten von  $\vec{V}$  folgt das Transformationsverhalten von  $\vec{v}$  unter Lorentz-Transformationen. In den Minkowski-Koordinaten  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ ,  $x_4 = ict$  hat man nach (5.38, 39):

$$\begin{aligned} x'_1 &= \gamma(u) \left( x_1 - \frac{u}{ic} x_4 \right) \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \\ x'_4 &= \gamma(u) \left( \frac{u}{ic} x_1 + x_4 \right). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Die Geschwindigkeitskomponenten  $V_1 = \gamma(v) v_x$ ,  $V_2 = \gamma(v) v_y$ ,  $V_3 = \gamma(v) v_z$ ,  $V_4 = i\gamma(v) c$  aus (6.4) transformieren sich – weil  $V_i$  ein Vierervektor ist – wie die  $x_i$ ; siehe (5.87):

$$\begin{aligned} \gamma(v') v'_x &= \gamma(u) \gamma(v) (v_x - u) \\ \gamma(v') v'_y &= \gamma(v) v_y \\ \gamma(v') v'_z &= \gamma(v) v_z \\ \gamma(v') ic &= \gamma(u) \gamma(v) \left( \frac{u}{ic} v_x + ic \right) = \gamma(u) \gamma(v) \left( 1 - \frac{uv_x}{c^2} \right) ic. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Aus den vorstehenden Gleichungen ergibt sich das relativistische **Additionstheorem der Geschwindigkeiten**:

$$\begin{aligned} v_x' &= \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} \\ v_y' &= \frac{v_y}{\gamma(u)(1 - uv_x/c^2)} \\ v_z' &= \frac{v_z}{\gamma(u)(1 - uv_x/c^2)}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

*Folgerungen:*

1. Im Grenzfall  $u, v \ll c$  reduziert sich (6.8) auf den nichtrelativischen Zusammenhang – vgl. (5.6) –

$$v_x' = v_x - u, \quad v_y' = v_y, \quad v_z' = v_z. \quad (6.9)$$

2. Aus (6.8) folgt:  $v' = c \Leftrightarrow v = c$ , d. i. die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.
3. Die zu (6.8) inverse Transformation gewinnt man durch die Vertauschung von  $v_{x,y,z}$  mit  $v'_{x,y,z}$  und durch die Ersetzung von  $u$  durch  $-u$ .

Die Grundgesetze der relativistischen Mechanik sind nicht aus den Grundgesetzen der nichtrelativistischen Mechanik ableitbar. Trotzdem ist es sinnvoll, möglichst viele Aussagen der Newton-Mechanik zu übernehmen (in entsprechend modifizierter Form), da die Newton-Mechanik ein Grenzfall ( $v \ll c$ ) der Einstein-Mechanik ist. Das Trägheitsprinzip und der Begriff des Inertialsystems (1. Newtonsches Axiom) wurden für die Herleitung der Lorentz-Transformation benutzt. Der Zusammenhang zwischen Kraft und zeitlicher Ableitung des Impulses (2. Newtonsches Axiom) wird in Abschnitt 6.2 aufgegriffen. Das 3. Newtonsche Axiom kann nicht in die relativistische Mechanik (Einstein-Mechanik) übernommen werden, da zwei in  $S$  entgegengesetzt gleiche Kräfte diese Eigenschaft in  $S'$  im Allgemeinen verlieren. Jedoch wird die aus dem 2. und 3. Newtonschen Axiom folgende Impulserhaltung

$$\sum_i m_i \vec{v}_i = \text{konstant} \quad (6.10)$$

für abgeschlossene Teilchensysteme übernommen. Diese Gleichung ist jedoch nicht Lorentz-invariant:  $\vec{v}$  transformiert sich nicht wie der Raumanteil eines Vierervektors. Transformation von  $m$ ?

Für die Impulserhaltung wird die kovariante Tensorgleichung

$$\sum_i M_i \vec{V}_i = \text{konstant} \quad (6.11)$$

statt (6.10) angesetzt. Die  $M_i$  sind skalare Invarianten, die formal den Massen  $m_i$  entsprechen, ihre genaue Bedeutung ist noch zu klären; die  $\vec{V}_i$  sind die Vierergeschwindigkeiten der Teilchen. Mit (6.4) nimmt (6.11) die folgende Gestalt an (ohne Indizes  $i$ ):

$$\sum M \gamma(v) (\vec{v}, i c) = \text{konstant} . \quad (6.12)$$

*Relativistische Masse:*

$$m(v) = M \gamma(v) , \quad (6.13)$$

$v$ -abhängig, keine skalare Invariante. *Relativistischer Impuls* wie in der nichtrelativistischen Mechanik:

$$\vec{p} = m(v) \vec{v} . \quad (6.14)$$

Damit ergeben sich aus (6.12) zwei Erhaltungssätze, und zwar liefert der „Raumanteil“

$$\sum \vec{p} = \text{konstant} , \quad (6.15)$$

d. i. die **Impulserhaltung**; der „Zeitanteil“ liefert

$$\sum m = \text{konstant} , \quad (6.16)$$

d. i. die **Massenerhaltung**.

*Bedeutung von  $M$ .* Aus (6.13) folgt mit (6.3):

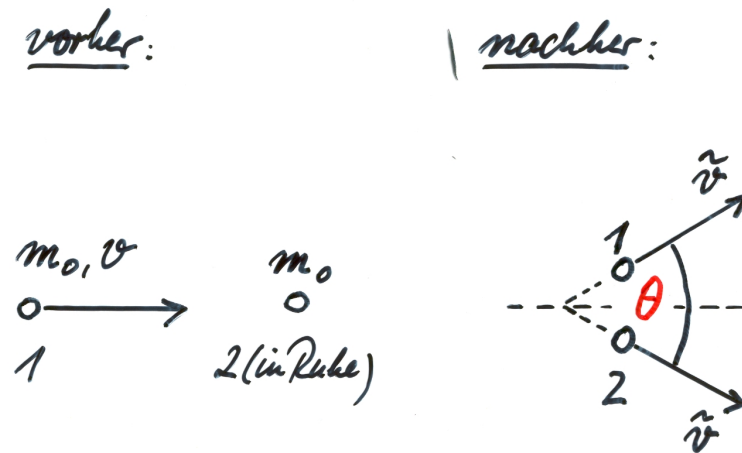
$$m(v) = \frac{M}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ; \quad (6.17)$$

also ist

$$M = m(0) = m_0 \quad (6.18)$$

die *Ruhmasse* des Körpers (Teilchens). Zu (6.17): Für  $v \rightarrow c$  folgt  $m \rightarrow \infty$ . Die Trägheit wächst in diesem Limes unbegrenzt an und hindert den Körper (das Teilchen) daran,  $c$  zu erreichen oder gar zu überschreiten.

Die Erhaltungssätze (6.15, 16) für den Gesamtimpuls und die Gesamtmasse eines Teilchensystems sind in zahlreichen Streuexperimenten verifiziert worden, z. B. in der **elastischen Streuung zweier gleicher Teilchen**:



• Abbildung 6.2 •

Einfachheitshalber beschränken wir die Betrachtung auf den *symmetrischen Spezialfall* gleicher Streuwinkel  $\theta/2$  und gleicher Endgeschwindigkeit  $\tilde{v}$  der beiden Teilchen; durch passenden Stoßparameter (Relativdrehimpuls) realisierbar. Die Impulserhaltung erfordert:

$$m(v)v = 2m(\tilde{v})\tilde{v} \cos \theta/2, \quad (6.19)$$

und die Massenerhaltung impliziert:

$$m(v) + m_0 = 2m(\tilde{v}). \quad (6.20)$$

Aus (6.19) folgt:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\gamma^2(v)v^2}{\gamma^2(\tilde{v})\tilde{v}^2} - 1 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\gamma^2(v) - 1}{\gamma^2(\tilde{v}) - 1} - 1 \end{aligned} \quad (6.21)$$

wegen  $\gamma^2 v^2 = c^2(\gamma^2 - 1)$ ; aus (6.20) folgt:

$$\gamma(\tilde{v}) = \frac{1}{2}(\gamma(v) + 1). \quad (6.22)$$

Einsetzen von (6.22) in (6.21) führt nach einfacher Rechnung auf

$$\cos \theta = \frac{\gamma(v) - 1}{\gamma(v) + 3}. \quad (6.23)$$

*Diskussion* von (6.23). Im nichtrelativistischen Grenzfall  $v \ll c$  ist  $\gamma \simeq 1$ , folglich  $\cos \theta \simeq 0$  und somit  $\theta \simeq \pi/2$ ; das ist das aus der Newtonschen Mechanik bekannte Resultat. Für  $\gamma > 1$  ist  $\cos \theta > 0$  und  $\theta < \pi/2$ , was z. B. bei hochenergetischer Proton-Proton-Streuung beobachtet wird. Das gilt auch für den – rechnerisch etwas komplizierteren – asymmetrischen Fall •

**Impulsvektor (Viererimpuls):**

$$\vec{P} = m_0 \vec{V}. \quad (6.24)$$

Vierervektor, da  $m_0$  skalare Invariante und  $V$  Vierervektor. Mit (6.4, 13, 14, 18) folgt:

$$\vec{P} = (\vec{p}, i m c). \quad (6.25)$$

Der „Raumanteil“ des Viererimpulses ist der (eigentliche) Impuls, der „Zeitanteil“ ist – bis auf den Faktor  $i c$  – die Masse des Teilchens; vgl. die beiden Erhaltungssätze (6.15, 16). Die Erhaltung des Viererimpulses umfasst also die Erhaltung des (eigentlichen) Impulses und der Masse.

Die Transformation des Viererimpulses liefert die *Transformation von Impuls und Masse* bei Lorentz-Transformationen ( $P_i$  wie  $x_i$ ):

$$\begin{aligned} p'_x &= \gamma(u) (p_x - m u) \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \\ m' &= \gamma(u) \left( m - \frac{u p_x}{c^2} \right) = \gamma(u) \left( 1 - \frac{u v_x}{c^2} \right) m. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Die Masse ist nicht unabhängig von dem gewählten Inertialsystem; das gilt nur für die Ruhmasse. Im nichtrelativistischen Grenzfall  $u, v_x \ll c$  ist jedoch  $m' \simeq m$ .

## 6.2 Äquivalenz von Masse und Energie

Übernahme des 2. *Axioms* aus der Newton-Mechanik:

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{f}. \quad (6.27)$$

$\vec{p}$  ist der Impuls,  $\vec{f}$  die Kraft im engeren Sinne – im Unterschied zu den entsprechenden Vierervektoren  $\vec{P}$  bzw.  $\vec{F}$  (siehe unten). Mit (6.14) erhält man aus (6.27) die **Bewegungsgleichung** der **Einstein-Mechanik**:

$$\frac{d}{dt} (m(v) \vec{v}) = \vec{f}. \quad (6.28)$$

Eine kovariante „Viererbewegungsgleichung“ ist gegeben durch

$$\frac{d}{d\tau} \vec{P} = \vec{F}; \quad (6.29)$$

$\vec{P}$  = Viererimpuls,  $\vec{F}$  = Viererkraft,  $d\tau$  = Eigenzeitintervall. Wie ist  $\vec{F}$  zu wählen, damit der „Raumanteil“ dieser Vierervektorgleichung die vorstehende Bewegungsgleichung (6.27, 28) liefert? Welche Bedeutung hat dann der „Zeitanteil“?

Für die nachfolgende *Bestimmung von  $\vec{F}$*  ist die Orthogonalität zu  $\vec{V}$  bedeutsam:

$$\begin{aligned} \sum_i V_i F_i &= \sum_i V_i \frac{d}{d\tau} P_i \\ &= m_0 \sum_i V_i \frac{d}{d\tau} V_i \\ &= \frac{m_0}{2} \frac{d}{d\tau} \sum_i V_i^2 \\ &= 0; \end{aligned} \quad (6.30)$$

dabei wurden die Gln. (6.29, 24, 5) benutzt. Mit dem *Ansatz*

$$\vec{F} = \gamma(\vec{f}, i f_4) \quad (6.31)$$

folgt aus (6.30) zusammen mit (6.4):

$$\begin{aligned} \sum_i V_i F_i &= \gamma^2 (\vec{v} \cdot \vec{f} - c f_4) = 0 \\ \Rightarrow f_4 &= \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{f}, \end{aligned} \quad (6.32)$$

d. i.  $1/c$  mal die *Leistung* der Kraft. Damit ergibt sich die **Viererkraft** zu

$$\vec{F} = \gamma(v) \left( \vec{f}, \frac{i}{c} \vec{v} \cdot \vec{f} \right). \quad (6.33)$$

Dass  $\vec{F}$  ein Vierervektor ist, folgt aus  $\sum_i V_i F_i = 0$  mit Hilfe der (passend modifizierten) Quotientenregel.

Geht man mit (6.33) in die Bewegungsgleichung (6.29) ein, so liefern wegen (6.25) die ersten drei Komponenten die Bewegungsgleichung (6.27); die vierte der Komponente ergibt

$$\frac{dm}{dt} c^2 = \vec{v} \cdot \vec{f}. \quad (6.34)$$

*Interpretation:* Die dem Teilchen vom Kraftfeld zugeführte kinetische Energie führt zu einer proportionalen Erhöhung seiner Masse: Integration von (6.34) über ein Zeitintervall  $[t_1, t_2]$  ergibt

$$(m_2 - m_1) c^2 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} \cdot \vec{f} dt = T_2 - T_1 ;$$

da  $t_{1,2}$  beliebig, folgt für die kinetische Energie:

$$T(v) = (m(v) - m_0) c^2 . \quad (6.35)$$

Im *nichtrelativistischen Grenzfall*  $v \ll c$  erhält man

$$\begin{aligned} T &= \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) m_0 c^2 \\ &= \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots - 1 \right) m_0 c^2 \\ &\simeq \frac{1}{2} m_0 v^2 , \end{aligned} \quad (6.36)$$

d. i. das aus der Newtonschen Mechanik bekannte Resultat.

Andererseits: Ein Körper bewege sich kräftefrei mit der Geschwindigkeit  $v$ . Seine Energie ist

$$E(v) = T(v) + E_0 , \quad (6.37)$$

wo  $E_0$  seine innere oder *Ruhenergie* ist; somit ist die kinetische Energie durch

$$T(v) = E(v) - E_0 \quad (6.38)$$

gegeben.

Der Vergleich von (6.38) mit (6.35) hat Einstein (1905) zu dem **Postulat** bewogen, dass die Energie eines abgeschlossenen Systems seiner Masse  $m$  proportional ist:

$$E = m c^2 . \quad (6.39)$$

Falls das System nicht abgeschlossen ist, treten zu dem Energieausdruck (6.39) Wechselwirkungsterme hinzu. Die „Einstein-Gleichung“ (6.39) beinhaltet die **Äquivalenz von Masse und Energie**.

*Experimentelle Verifizierung* von (6.39) in Kernreaktionen, Paarerzeugung und -vernichtung, ... Die Massendifferenz zwischen linker und rechter Seite einer Reaktionsgleichung entspricht der frei werdenden kinetischen, elektromagnetischen, ... Energie.

Der Satz von der Erhaltung der Masse (6.16) ist wegen (6.39) äquivalent dem Satz von der **Erhaltung der Energie**:

$$\sum E = \text{konstant} . \quad (6.40)$$

Für *Streuprozesse* folgt: Energie *vor* dem Streuprozess = Energie *nach* dem Streuprozess. Keine Wechselwirkungsterme in der Energiebilanz (6.40).

Für den *Viererimpuls* (6.25) erhält man mit der Einstein-Gleichung die Darstellung

$$\vec{P} = \left( \vec{p}, \frac{i}{c} E \right) . \quad (6.41)$$

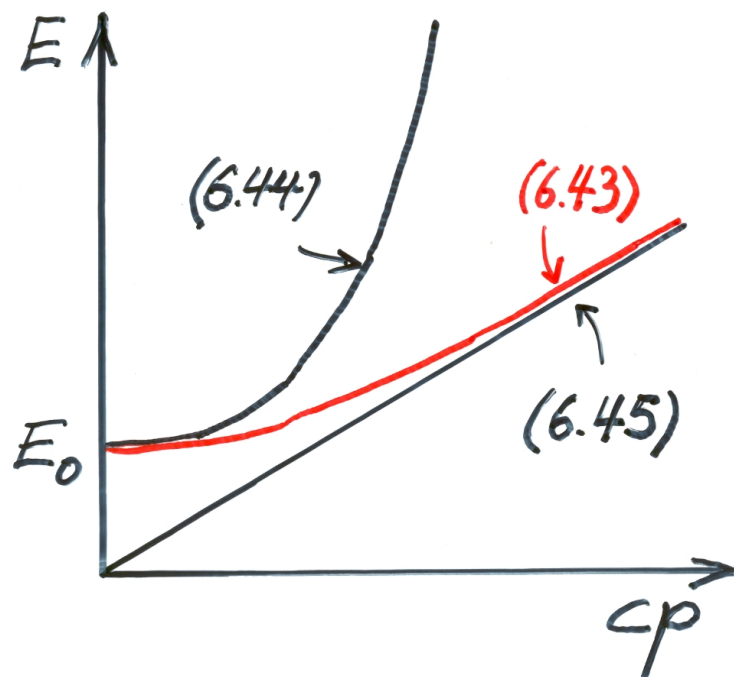
Die Norm dieses Vierervektors ist eine skalare Invariante:

$$\sum_i P_i P_i = p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -\frac{E_0^2}{c^2} ; \quad (6.42)$$

insbesondere hat man Invarianz bezüglich des Überganges vom Inertialsystem  $S$ , in dem sich das Teilchen mit dem Impuls  $\vec{p}$  bewegt, zu demjenigen Inertialsystem  $S_0$ , in dem der Körper ruht ( $\vec{p} = 0$ ). Aus (6.42) ergibt sich *der relativistische Zusammenhang von Energie und Impuls* zu

$$E = \sqrt{(c p)^2 + E_0^2} . \quad (6.43)$$





• Abbildung 6.3 •

- Im *nichtrelativistischen Grenzfall*  $v \ll c$  ist

$$E \simeq E_0 + \frac{p^2}{2m_0} ; \quad (6.44)$$

- im *ultrarelativistischen Limes*  $v \lesssim c$  hat man

$$E \simeq cp . \quad (6.45)$$

Für  $m_0 = 0 \Leftrightarrow E_0 = 0$  ist  $v = c \Leftrightarrow E = cp$ , z. B. ein Photon.

Die **Paarerzeugung** ist der bemerkenswerteste Beleg für die Masse-Energie-Äquivalenz.

*Beispiele:*

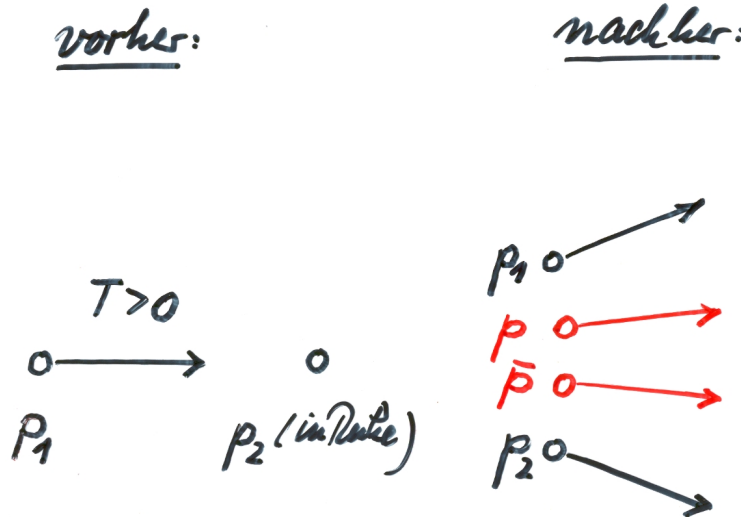
1.

$$\gamma \rightarrow e + \bar{e}, \quad E_\gamma \geq 2m_e c^2 = 1.02 \dots \text{MeV} .$$

$\gamma$  bedeutet ein Photon,  $e$  ein Elektron,  $\bar{e}$  ein Positron (Antielektron). Zum Ausgleich der Impulsbilanz ist die Beteiligung eines weiteren Teilchens – z. B. eines Atomkerns – erforderlich.

2.

$$p_1 + p_2 \rightarrow p_1 + p_2 + p + \bar{p}$$



• Abbildung 6.4 •

$p$  (mit oder ohne Index) steht für ein Proton,  $\bar{p}$  für ein Antiproton.  $T \geq 2 m_p c^2 = 1.88 \dots GeV$  ist notwendig, aber nicht hinreichend, da außer dem Energiesatz auch der Impulssatz erfüllt sein muss.

- Im Laborsystem  $S$  gilt für den Gesamtimpuls bzw. für die Gesamtenergie:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1 \tag{6.46}$$

$$E = E_1 + E_2 = 2 m_p c^2 + T \geq 4 m_p c^2 ;$$

die letzte Ungleichung ist nur notwendig, nicht hinreichend.

- Für das  $SP$ -System  $S'$  gilt: Definition des Schwerpunktes nicht möglich, da die Massen von der Geschwindigkeit abhängen; daher Definition eines „SP-Systems“ durch die Forderung verschwindenden Gesamtimpulses:

$$\vec{p}' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \vec{0} . \tag{6.47}$$

Für die Gesamtenergie gilt in diesem System:

$$E' = E'_1 + E'_2 \geq 4 m_p c^2 ; \tag{6.48}$$

die letzte Ungleichung ist hier notwendig *und* hinreichend. Skalare Invariante (6.42) mit (6.47):

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = p'^2 - \frac{E'^2}{c^2} = -\frac{E'^2}{c^2}; \quad (6.49)$$

wegen (6.46) folgt aus (6.49):

$$\begin{aligned} E'^2 &= E^2 - (cp)^2 \\ &= E_1^2 - (cp_1)^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \\ &= 2(m_p c^2)^2 + 2(m_p c^2 + T)m_p c^2 \\ &= 4(m_p c^2)^2 + 2m_p c^2 T \\ &\geq (4m_p c^2)^2, \end{aligned} \quad (6.50)$$

wobei zuletzt (6.48) benutzt wurde. Aus (6.50) folgt schließlich

$$T \geq 6m_p c^2 = 5.64 \text{ GeV}. \quad (6.51)$$

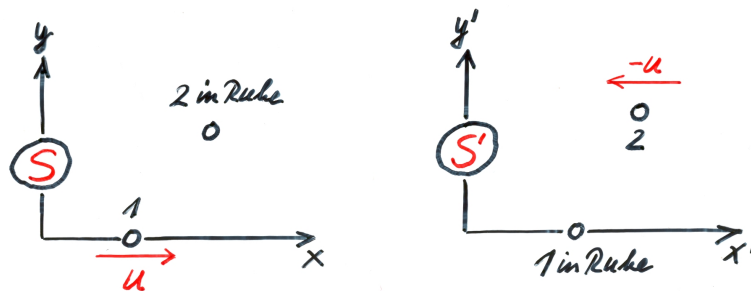
University of California (1955): Proton-Antiproton-Erzeugung am 6 GeV-Bevatron •

Aus dem Transformationsverhalten von  $\vec{F}$  ergibt sich die *Transformation der Kraft*  $\vec{f}$  bei Lorentz-Transformationen (vgl. die Transformation der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  gemäß (6.8)):

$$\begin{aligned} f'_x &= \frac{f_x - u \vec{v} \cdot \vec{f} / c^2}{1 - u v_x / c^2} \\ f'_y &= \frac{f_y}{\gamma(u) (1 - u v_x / c^2)} \\ f'_z &= \frac{f_z}{\gamma(u) (1 - u v_x / c^2)}. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Im *Newton-Grenzfall*  $u, v \ll c$  hat man  $\vec{f}' = \vec{f}$ .

**Actio  $\neq$  Reactio:**



• Abbildung 6.5 •

Mit (6.52) folgt:

$$\begin{aligned}
 f'_{1x} &= \frac{f_{1x} - u u f_{1x} / c^2}{1 - u u / c^2} = f_{1x} \\
 f'_{1y} &= \frac{f_{1y}}{\gamma(u) (1 - u u / c^2)} = \gamma(u) f_{1y} \\
 f'_{2x} &= \frac{f_{2x} - u 0 / c^2}{1 - u 0 / c^2} = f_{2x} \\
 f'_{2y} &= \frac{f_{2y}}{\gamma(u) (1 - u 0 / c^2)} = \frac{f_{2y}}{\gamma(u)}.
 \end{aligned} \tag{6.53}$$

Folglich: Falls  $\vec{f}_1 = \vec{f}_2$ , ist  $\vec{f}'_1 \neq \vec{f}'_2$  (im Allgemeinen) und umgekehrt! Ersetzung des 3. Newtonschen Axioms in der Einstein-Mechanik durch den Impulserhaltungssatz.

Im Allgemeinen gilt für ein *abgeschlossenes Zweikörpersystem* mit innerer Wechselwirkung:

$$\begin{aligned}
 &\vec{f}_1 + \vec{f}_2 \neq \vec{0} \\
 \Rightarrow &\frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \neq \vec{0} \\
 \Rightarrow &\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \neq \text{konstant} .
 \end{aligned} \tag{6.54}$$

Berücksichtigung des *Wechselwirkungsfeldes* (endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit, keine Fernwirkung) in der Impulsbilanz:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_{Feld} = \text{konstant} ; \tag{6.55}$$

bei *Stoßprozessen* ist:

$$(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)_{\text{vorher}} = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)_{\text{nachher}} . \tag{6.56}$$

### 6.3 Der kinetische Energie-Impuls-Tensor

Gegeben sei eine kontinuierliche *Massenverteilung* der Dichte

$$\mu = \frac{dm}{d\omega} \tag{6.57}$$

(Massenelement  $dm$  im Volumenelement  $d\omega$ ), die sich unter dem Einfluss eines *Kraftfeldes* der Dichte

$$\vec{d} = \frac{d\vec{f}}{d\omega} \quad (6.58)$$

mit der lokalen Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt. Gesucht ist die Bewegungsgleichung dieses Kontinuums in kovarianter Formulierung.

Zunächst die Frage: Welcher Vierervektor enthält  $\vec{d}$  als Raumanteil? Definition der **Viererkraftdichte**  $\vec{D}$  durch die Gleichung

$$d\vec{F} = \vec{D} d\omega_0, \quad (6.59)$$

wobei  $d\vec{F}$  das Element der Viererkraft und

$$d\omega_0 = \gamma(v) d\omega \quad (6.60)$$

das *Eigenvolumenelement* von  $d\omega$  ist – bezogen auf das Ruhsystem des Volumenelementes. ( $d\omega$  bzw.  $d\omega_0$  meint hier das dreidimensionale Volumenelement und darf nicht mit dem vierdimensionalen Volumenelement der Minkowski-Raumzeit verwechselt werden, das sich nach (5.97) wie ein Pseudoskalar transformiert.) Mit (6.33) folgt aus (6.59, 60):

$$\gamma(v) \left( d\vec{f}, \frac{i}{c} \vec{v} \cdot d\vec{f} \right) = \vec{D} \gamma(v) d\omega ;$$

daraus erhält man mit (6.58):

$$\vec{D} = \left( \vec{d}, \frac{i}{c} \vec{v} \cdot \vec{d} \right). \quad (6.61)$$

Dass  $\vec{D}$  ein Vierervektor ist, folgt aus der Quotientenregel; denn  $d\vec{F}$  ist ein Vierervektor und  $d\omega_0$  eine skalare Invariante.

Für die Massenverteilung wird die **Erhaltung der Ruhmasse** gefordert; d. h. die Ruhmassendichte

$$\mu_0 = \frac{dm_0}{d\omega} \quad (6.62)$$

( $dm_0$  ist das Ruhmassenelement) genügt der *Kontinuitätsgleichung*:

$$\operatorname{div}(\mu_0 \vec{v}) + \frac{\partial \mu_0}{\partial t} = 0. \quad (6.63)$$

Keine Erzeugung oder Vernichtung von Teilchen, keine innere Anregung der Teilchen.

Wegen  $dm = \gamma dm_0$  gilt zwischen den Dichten (6.57) und (6.62) der Zusammenhang

$$\mu = \gamma \mu_0 . \quad (6.64)$$

$\mu_0$  ist nicht invariant, da zwar  $dm_0$ , nicht aber  $d\omega$  ein Skalar ist. Eine invariante Größe ist die *Eigendichte der Ruhmasse*:

$$\mu_{00} = \frac{dm_0}{d\omega_0} , \quad (6.65)$$

welche das Ruhmassenelement auf das Eigenvolumenelement bezieht. Wegen (6.60) ergibt sich zwischen den Dichten (6.62) und (6.65) der Zusammenhang

$$\mu_0 = \gamma \mu_{00} ; \quad (6.66)$$

aus (6.64, 66) folgt schließlich

$$\mu = \gamma^2 \mu_{00} . \quad (6.67)$$

Mit (6.66) lässt sich (6.63) in kovarianter Form schreiben:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\mu_{00} \gamma \vec{v}) + \frac{\partial (\mu_{00} \gamma i c)}{\partial (i c t)} &= 0 \\ \Rightarrow \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu_{00} V_i) &= 0 ; \end{aligned} \quad (6.68)$$

d. h. die Divergenz des Vierervektors  $\mu_{00} V_i$  verschwindet.

Die **Bewegungsgleichung** für die Massenverteilung orientiert sich an (6.29) mit (6.24) und (6.59). Für das Ruhmassenelement  $dm_0$  gilt

$$dm_0 = \frac{dV_i}{d\tau} = dF_i = D_i d\omega_0 ;$$

mit (6.65) folgt

$$\mu_{00} \frac{dV_i}{d\tau} = D_i . \quad (6.69)$$

Das ist die gesuchte Bewegungsgleichung in kovarianter Formulierung.

Die linke Seite von (6.69) lässt sich umformen. Mit – beachte (6.4, 68) –

$$\frac{dV_i}{d\tau} = \sum_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{d\tau} = \sum_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} V_j ,$$

folglich

$$\begin{aligned} \mu_{00} \frac{dV_i}{d\tau} &= \sum_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} (\mu_{00} V_j) + \underbrace{\sum_j V_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu_{00} V_j)}_{= 0} \\ &= \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu_{00} V_i V_j) , \end{aligned} \quad (6.70)$$

erhält man aus der Bewegungsgleichung den Zusammenhang

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu_{00} V_i V_j) = D_i . \quad (6.71)$$

Bei Einführung des **kinetischen Energie-Impuls-Tensors**

$$\Theta_{ij} = \mu_{00} V_i V_j \quad (6.72)$$

schreibt man (6.71) abgekürzt wie folgt:

$$\sum_j \Theta_{ij,j} = D_i . \quad (6.73)$$

Die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors (symmetrischer Tensor 2. Stufe) ist demnach gleich der Kraftdichte.

Welche Bedeutung haben die  $\Theta$ -Komponenten? Welche Bedeutung haben die Komponenten von Gl. (6.73)?

- *Bedeutung der  $\Theta$ -Komponenten.* Sei  $i, j = 1, 2, 3$ ; beachte (6.4, 67):

$$\begin{aligned} \Theta_{ij} &= \gamma^2 \mu_{00} v_i v_j \\ &= \mu v_i v_j \\ &= g_i v_j = v_i g_j \end{aligned} \quad (6.74)$$

mit der *Impulsdichte*

$$\vec{g} = \mu \vec{v} ; \quad (6.75)$$

(6.74) sind also die Komponenten der *Impulsstromdichte*. Sei  $i = 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} \Theta_{i4} &= \Theta_{4i} = \gamma^2 \mu_{00} i c v_i \\ &= \mu i c v_i \\ &= i c g_i ; \end{aligned} \quad (6.76)$$

sei schließlich  $i = j = 4$ :

$$\begin{aligned}\Theta_{44} &= \gamma^2 \mu_{00} (ic)^2 \\ &= -\mu c^2 \\ &= -w\end{aligned}\tag{6.77}$$

mit der *Energiedichte*

$$w = \mu c^2 .\tag{6.78}$$

Also hat man

$$\begin{aligned}\Theta_{ij} &= \begin{pmatrix} \mu v_1^2 & \mu v_1 v_2 & \mu v_1 v_3 & ic g_1 \\ \mu v_2 v_1 & \mu v_2^2 & \mu v_2 v_3 & ic g_2 \\ \mu v_3 v_1 & \mu v_3 v_2 & \mu v_3^2 & ic g_3 \\ ic g_1 & ic g_2 & ic g_3 & -w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g_1 v_1 & g_1 v_2 & g_1 v_3 & ic g_1 \\ g_2 v_1 & g_2 v_2 & g_2 v_3 & ic g_2 \\ g_3 v_1 & g_3 v_2 & g_3 v_3 & ic g_3 \\ iw v_1/c & iw v_2/c & iw v_3/c & -w \end{pmatrix} .\end{aligned}\tag{6.79}$$

• *Bedeutung der (6.73)-Komponenten.* Sei  $i = 1, 2, 3$ :

$$\operatorname{div} (g_i \vec{v}) + \frac{\partial g_i}{\partial t} = d_i .\tag{6.80}$$

Das ist die **Impulsbilanz**: Lokal ändert sich der Impuls durch Krafteinwirkung und durch Transport. In integraler Form (Integration über ein festes Volumen  $\Omega$  mit der Oberfläche  $\Sigma$ , Anwendung des Gaußschen Integralsatzes) ist

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \vec{g} d\omega = \int_{\Omega} \vec{d} d\omega - \oint_{\Sigma} \vec{g} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} .\tag{6.81}$$

Die zeitliche Änderung des Impulses in  $\Omega$  ist gleich der Summe aller an den Volumenelementen von  $\Omega$  angreifenden Kräften plus dem durch  $\Sigma$  hereinströmenden Impuls.

Bei Einführung der *Energiestromdichte*

$$c^2 \vec{g} = \mu c^2 \vec{v} = w \vec{v}\tag{6.82}$$

erhält man für  $i = 4$ :

$$\operatorname{div} (w \vec{v}) + \frac{\partial w}{\partial t} = \vec{v} \cdot \vec{d} .\tag{6.83}$$



Das ist die **Energiebilanz**: Lokal ändert sich auch die Energie durch Krafteinwirkung und durch Transport. In integraler Form ist

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} w d\omega = \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \vec{d} d\omega - \oint_{\Sigma} w \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} . \quad (6.84)$$

Die zeitliche Änderung der Energie in  $\Omega$  ist gleich der Leistung aller an den Volumenelementen von  $\Omega$  angreifenden Kräfte plus der durch  $\Sigma$  hineinströmenden Energie.

## 7 Speziell-relativistische Elektrodynamik

### 7.1 Die Maxwell-Gleichungen

Die Grundgleichungen der Mechanik (Bewegungsgleichungen, Erhaltungssätze, ...) mussten relativistisch modifiziert werden; die **Maxwell-Gleichungen**:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0 \quad (7.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \quad (7.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad (7.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (7.4)$$

sind hingegen bereits kovariant gegen Lorentz-Transformationen. Die Lorentz-Transformation wurde geradezu entdeckt als diejenige Raumzeit-Transformation, welche die Maxwell-Gleichungen forminvariant lässt. Trotzdem bleibt die Aufgabe, die elektromagnetischen Größen  $\vec{j}$ ,  $\rho$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ , ... als Vierertensoren darzustellen und die Maxwell-Gleichungen als Tensorgleichungen zu formulieren, um so ihre Lorentz-Invarianz evident zu machen. Zu den Grundlagen der Elektrodynamik siehe Kap. 1.

Wir beginnen mit der aus den inhomogenen Maxwell-Gleichungen (7.1, 2) folgenden **Kontinuitätsgleichung**:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (7.5)$$

welche die Ladungserhaltung ausdrückt. Diese Gleichung muss in allen Inertialsystemen gelten; sie muss daher in einer Weise formulierbar sein, die kovariant gegen orthogonale Transformationen der Minkowski-Raumzeit ist:

$$\frac{\partial}{\partial x} j_x + \frac{\partial}{\partial y} j_y + \frac{\partial}{\partial z} j_z + \frac{\partial}{\partial (i c t)} (i c \rho) = 0, \quad (7.6)$$

d. h. die Divergenz der **Viererstromdichte**

$$\vec{J} = (j_x, j_y, j_z, i c \rho) = (\vec{j}, i c \rho) \quad (7.7)$$

verschwindet; als Tensorgleichung geschrieben:

$$\sum_i J_{i,i} = 0. \quad (7.8)$$

Dass  $\vec{J}$  tatsächlich ein Vierervektor ist, folgt aus dem Zusammenhang mit dem Vierervektor  $\vec{V}$ . Wegen

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

sowie (6.4, 7.7) gilt nämlich

$$\vec{J} = \rho(\vec{v}, ic) = \frac{\rho}{\gamma(v)} \vec{V} = \rho_0 \vec{V}. \quad (7.9)$$

Die skalare Invariante – beachte (6.60) –

$$\rho_0 = \frac{\rho}{\gamma} = \frac{dq}{\gamma d\omega} = \frac{dq}{d\omega_0}, \quad (7.10)$$

d. i. Ladung/Eigenvolumen, hat die Bedeutung einer *Eigendichte der Ladung*. Im Unterschied zur Masse ist die Ladung ein Skalar.

Die Vorgabe von  $\vec{J}$  in der Raumzeit legt die gesamte Orts- und Zeitabhängigkeit der Quellen des elektromagnetischen Feldes fest und bestimmt somit das gesamte  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ -Feld.

Herleitung des  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ -Feldes aus den Potenzialen  $\vec{A}$  und  $\phi$  gemäß

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (7.11)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Setzt man die **Lorentz-Konvention**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (7.12)$$

voraus, so befriedigen  $\vec{A}$  und  $\phi$  die **Wellengleichungen**:

$$\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (7.13)$$

$$\square \phi = -\rho / \varepsilon_0$$

mit

$$\square = \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \quad (7.14)$$

Der Wellenoperator transformiert sich wie ein Skalar, d. h. er ist invariant unter Lorentz-Transformationen:  $\square' = \square$ .

Bei Einführung des **Viererpotenzials**

$$\vec{\Omega} = \left( \vec{A}, \frac{i}{c} \phi \right) \quad (7.15)$$

sowie mit Hilfe der Viererstromdichte (7.7) und mit  $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$  lassen sich die Wellengleichungen zu *einer* Tensorgleichung zusammenfassen:

$$\square \vec{\Omega} = -\mu_0 \vec{J};$$

in Komponentenschreibweise:

$$\sum_j \Omega_{i,jj} = -\mu_0 J_i. \quad (7.16)$$

Die Lorentz-Konvention lässt sich ebenfalls als Tensorgleichung darstellen:

$$\sum_i \Omega_{i,i} = 0. \quad (7.17)$$

Aus der Forderung nach Gültigkeit der Konvention (7.17) in allen Inertialsystemen folgt mit der Quotientenregel, dass  $\Omega$  tatsächlich ein Vierervektor ist.

Kovarianz der Gleichungen (7.11) – beachte (7.15) –

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_3} \\ B_y &= \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1} \\ B_z &= \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \\ -\frac{i}{c} E_x &= \frac{\partial \Omega_4}{\partial x_1} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_4} \\ -\frac{i}{c} E_y &= \frac{\partial \Omega_4}{\partial x_2} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_4} \\ -\frac{i}{c} E_z &= \frac{\partial \Omega_4}{\partial x_3} - \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_4}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Die sechs Komponenten von  $\vec{B}$  und  $-\frac{i}{c}\vec{E}$  bilden die sechs unabhängigen Komponenten des antisymmetrischen **elektromagnetischen Feldtensors**:

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z/c \\ iE_x/c & iE_y/c & iE_z/c & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.19)$$

Dieser ist gleich der Rotation des Viererpotenzials:

$$F_{ij} = \Omega_{j,i} - \Omega_{i,j}; \quad (7.20)$$

z. B.  $F_{12} = \partial\Omega_2/\partial x_1 - \partial\Omega_1/\partial x_2 = B_z$  usw. Der Tensorcharakter von  $F_{ij}$  folgt aus der Konstruktionsvorschrift (7.20): Differenz zweier Gradienten.

**Inhomogene Maxwell-Gleichungen.** Für die  $x$ -Komponente von (7.2) gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \mu_0 j_x \\ \Rightarrow \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} &= \mu_0 J_1; \end{aligned} \quad (7.21 \text{ a})$$

entsprechend erhält man für die  $y$ - und die  $z$ -Komponente:

$$\frac{\partial F_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_4} = \mu_0 J_2 \quad (7.21 \text{ b})$$

bzw.

$$\frac{\partial F_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_4} = \mu_0 J_3. \quad (7.21 \text{ c})$$

Gl. (7.1) schreibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \\ \Rightarrow \frac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{43}}{\partial x_3} &= \mu_0 J_4. \end{aligned} \quad (7.21 \text{ d})$$

Zusammenfassung der vier Gln. (7.21) in der Tensorgleichung

$$\sum_j F_{ij,j} = \mu_0 J_i. \quad (7.22)$$

Die Divergenz des elektromagnetischen Feldtensors ist demnach der Stromdichte proportional.

**Homogene Maxwell-Gleichungen.** Für die  $x$ -Komponente von (7.3) gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} &= 0; \end{aligned} \quad (7.23 \text{ a})$$

entsprechend erhält man für die  $y$ - und die  $z$ -Komponente:

$$\frac{\partial F_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_1} = 0 \quad (7.23 \text{ b})$$

bzw.

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} = 0. \quad (7.23 \text{ c})$$

Gl. (7.4) schreibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} &= 0. \end{aligned} \quad (7.23 \text{ d})$$

Zusammenfassung der vier Gln. (7.23) in der Tensorgleichung

$$F_{ij,k} + F_{jk,i} + F_{ki,j} = 0. \quad (7.24)$$

Die Indizes  $i, j$  und  $k$  laufen alle von 1 bis 4. Es gibt jedoch nur vier nichttriviale Fälle, wobei drei Indizes verschieden sind:  $i, j, k = 342, 413, 124, 231$ . Zu jeder solchen Indexfolge gibt es sechs Permutationen, die aber alle auf dieselbe Gleichung führen.

*Wichtige Konsequenz:* Die Forminvarianz der Maxwell-Gleichungen gegen Lorentz-Transformationen folgt aus ihrem Tensorcharakter!

**Transformation des elektromagnetischen Feldes.** Der Feldtensor  $F_{ij}$  transformiert sich unter der Lorentz-Transformation (5.85) gemäß (5.88):

$$F'_{ij} = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} F_{kl}. \quad (7.25)$$

Für die spezielle Transformation (5.38) ist

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (7.26)$$

mit

$$\cos \alpha = \gamma(u) , \quad \sin \alpha = \frac{i u}{c} \gamma(u) \quad (7.27)$$

gemäß (5.39). Daraus resultiert im gestrichenen System der (ebenfalls antisymmetrische) Feldtensor

$$F'_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cos \alpha F_{12} + \sin \alpha F_{42} & \cos \alpha F_{13} + \sin \alpha F_{43} & F_{14} \\ \cdot & 0 & F_{23} & -\sin \alpha F_{21} + \cos \alpha F_{24} \\ \cdot & \cdot & 0 & -\sin \alpha F_{31} + \cos \alpha F_{34} \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \quad (7.28)$$

Die Punkte stehen für die entsprechenden antisymmetrischen Matrixelemente.

Es folgt z. B.:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{c} E'_x &= F'_{14} = -\frac{i}{c} E_x \\ \Rightarrow E'_x &= E_x ; \end{aligned} \quad (7.29 \text{ a})$$

ferner:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{c} E'_y &= F'_{24} = -\frac{i u}{c} \gamma(-B_z) + \gamma\left(-\frac{i}{c} E_y\right) \\ \Rightarrow E'_y &= \gamma(E_y - u B_z) \end{aligned} \quad (7.29 \text{ b})$$

sowie

$$E'_z = \gamma(E_z + u B_y) ; \quad (7.29 \text{ c})$$

entsprechend:

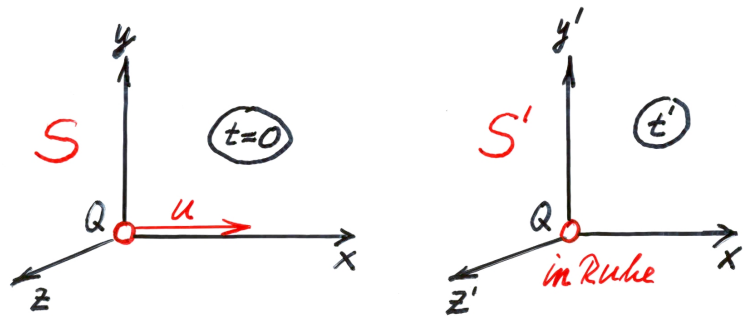
$$B'_x = B_x \quad (7.29 \text{ d})$$

$$B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{u}{c^2} E_z\right) \quad (7.29 \text{ e})$$

$$B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{u}{c^2} E_y\right) . \quad (7.29 \text{ f})$$

Aus den Transformationsgleichungen (7.29) für das  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ -Feld folgt: Das Auftreten eines  $\vec{E}$ - oder  $\vec{B}$ -Feldes kann als ein Effekt interpretiert werden, der durch einen Wechsel des Inertialsystems hervorgerufen wird.

**$\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ -Feld einer bewegten Punktladung.** Gesucht ist das  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ -Feld im System  $S$  zur Zeit  $t = 0$ , wo die Ladung  $Q$  den Koordinatenursprung mit der Geschwindigkeit  $u$  passiert:  $\vec{E}(\vec{r}, 0) = ?$   $\vec{B}(\vec{r}, 0) = ?$  Das System  $S'$  ist das Ruhssystem der Ladung  $Q' = Q$  (skalare Invariante):



• Abbildung 7.1 •

In  $S'$  ist das  $\vec{E}$ -Feld aus der Elektrostatik bekannt:

$$\vec{E}'(\vec{r}', t') = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{r'^3}, \quad (7.30)$$

unabhängig von  $t'$ , und das  $\vec{B}$ -Feld verschwindet dort:

$$\vec{B}'(\vec{r}', t') = \vec{0}. \quad (7.31)$$

Zusammenhang zwischen gestrichenen und ungestrichenen Koordinaten gemäß (5.40) für  $t = 0$ :

$$x' = \gamma x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = -\gamma u x / c^2. \quad (7.32)$$

Damit und mit Hilfe der zu (7.29) inversen Transformation folgt aus (7.30) für das  $\vec{E}$ -Feld:

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{r'^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma x}{\tilde{r}^3} \\ E_y &= \gamma(E'_y + u B'_z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma y'}{r'^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma y}{\tilde{r}^3} \\ E_z &= \gamma(E'_z - u B'_y) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma z'}{r'^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma z}{\tilde{r}^3} \end{aligned} \quad (7.33)$$

mit

$$\tilde{r} = \sqrt{(\gamma x)^2 + y^2 + z^2}; \quad (7.34)$$

also ist

$$\vec{E}(\vec{r}, 0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma \vec{r}}{\sqrt{(\gamma x)^2 + y^2 + z^2}^3} \quad (7.35)$$



radial, aber nicht kugelsymmetrisch. Entsprechend folgt aus (7.31) für das  $\vec{B}$ -Feld:

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}, 0) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(0, -\gamma u z' / c^2, \gamma u y' / c^2)}{r'^3} \\ &= \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{\gamma u (0, -z, y)}{\tilde{r}^3} \\ &= \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{\gamma \vec{u} \times \vec{r}}{\sqrt{(\gamma x)^2 + y^2 + z^2}^3}.\end{aligned}\quad (7.36)$$

Konventionelle Herleitung der Formeln (7.35, 36) mit Hilfe der *Li'nard-Wiechert-Potenziale* (siehe Kap. 3).

*Nichtrelativistischer Limes:*  $u \ll c \Rightarrow \gamma \simeq 1$ , folglich

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \\ \vec{B} &= \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{\vec{u} \times \vec{r}}{r^3}.\end{aligned}\quad (7.37)$$

Der Ausdruck für  $\vec{E}$  ist das *statische*, der Ausdruck für das  $\vec{B}$  das *quasi-stationäre* Resultat: Vernachlässigung der auf der Endlichkeit von  $c$  basierenden Retardierung.

## 7.2 Der elektromagnetische Energie-Impuls-Tensor

**Lorentz-Kraft.** Die Kraft auf eine Punktladung  $Q$ , die sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  durch ein elektromagnetisches Feld  $\vec{E}, \vec{B}$  bewegt, ist

$$\vec{f} = Q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (7.38)$$

Diese Gleichung ist der Raumanteil der Tensorgleichung

$$F_i = Q \sum_j F_{ij} V_j, \quad (7.39)$$

wobei  $F_i$  die Viererkraft,  $V_j$  die Vierergeschwindigkeit und  $F_{ij}$  der elektromagnetische Feldtensor ist; denn

$$\begin{aligned}\gamma(v) f_x &= Q \gamma(v) \left( 0 + B_z v_y - B_y v_z - \frac{i}{c} E_x (i c) \right) \\ \Rightarrow f_x &= Q (E_x + v_y B_z - v_z B_y); \end{aligned}\quad (7.40 \text{ a})$$

analog:

$$f_y = Q(E_y + v_z B_x - v_x B_z) \quad (7.40 \text{ b})$$

$$f_z = Q(E_z + v_x B_y - v_y B_x) . \quad (7.40 \text{ c})$$

Der Zeitanteil von (7.39) liefert die *Leistung* der Lorentz-Kraft:

$$\begin{aligned} \gamma(v) \frac{i}{c} \vec{v} \cdot \vec{f} &= Q \gamma(v) \left( \frac{i}{c} E_x v_x + \frac{i}{c} E_y v_y + \frac{i}{c} E_z v_z + 0 \right) \\ \Rightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{f} &= Q \vec{E} \cdot \vec{v} . \end{aligned} \quad (7.41)$$

Diese Gleichung folgt auch direkt aus (7.38) durch skalare Multiplikation mit  $\vec{v}$ ; sie ist also nicht unabhängig von (7.38).

*Begründung von (7.39):* Im Ruhssystem von  $Q$  (es handele sich um ein Inertialsystem) ist

$$\begin{aligned} \gamma(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_0 &= Q(\vec{E}, 0)_0 \\ \vec{V}_0 &= (\vec{0}, i c) , \end{aligned} \quad (7.42)$$

folglich

$$\left( \sum_j F_{ij} V_j \right)_0 = (E_x, E_y, E_z, 0)_0 = \frac{1}{Q} (F_i)_0 . \quad (7.43)$$

Das ist eine Tensorgleichung, die sich forminvariant auf jedes andere Inertialsystem übertragen lässt; somit gilt (7.39).

Übergang zu einer **kontinuierlichen Ladungsverteilung** der Eigendichte  $\rho_0$ , die sich mit der lokalen Geschwindigkeit  $\vec{v}$  durch das  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ -Feld bewegt. Die Viererkraft auf das Ladungselement im Eigenvolumenelement  $d\omega_0$  ist nach (7.39) und (7.9):

$$\begin{aligned} dF_i &= \rho_0 \sum_j F_{ij} V_j d\omega_0 \\ &= \sum_j F_{ij} J_j d\omega_0 . \end{aligned} \quad (7.44)$$

Mit (6.59) folgt für die Viererkraftdichte des Feldes  $F_{ij}$  auf seine Quellen  $J_j$ :

$$D_i = \sum_j F_{ij} J_j . \quad (7.45)$$

Ersetzung der Viererstromdichte durch die Divergenz des elektromagnetischen Feldtensors mit Hilfe der inhomogenen Maxwell-Gleichungen (7.22):

$$D_i = \frac{1}{\mu_0} \sum_{j,k} F_{ij} F_{jk,k} . \quad (7.46)$$

Damit ist die Viererkraftdichte des  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ -Feldes allein durch den elektromagnetischen Feldtensor ausgedrückt.

Es lässt sich zeigen: Die rechte Seite der vorstehenden Gleichung ist (bis auf das Vorzeichen) gleich der Divergenz eines symmetrischen Tensors 2. Stufe, des **elektromagnetischen Energie-Impuls-Tensors**

$$S_{ij} = \frac{1}{\mu_0} \left( \sum_k F_{ik} F_{jk} - \frac{1}{4} \delta_{ij} \sum_{k,l} F_{kl} F_{kl} \right) . \quad (7.47)$$

Damit gilt nämlich:

$$D_i = - \sum_j S_{ij,j} . \quad (7.48)$$

$D_i$  beschreibt die Kraft auf die felderzeugenden Ladungsträger, d. h. die Kraft des Feldes auf die eigenen Quellen.

*Beweis von (7.48):* Divergenzbildung von (7.47) ergibt

$$\sum_j S_{ij,j} = \frac{1}{\mu_0} \sum_{j,k} \left( F_{ik,j} F_{jk} + F_{ik} F_{jk,j} - \frac{1}{2} F_{jk} F_{jk,i} \right) .$$

Mit

$$\sum_{j,k} F_{ik,j} F_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{j,k} (F_{ik,j} + F_{ji,k}) F_{jk}$$

sowie mit (7.24) folgt

$$\begin{aligned} \sum_j S_{ij,j} &= \frac{1}{\mu_0} \sum_{j,k} \left( F_{ik} F_{jk,j} + \frac{1}{2} \underbrace{(F_{ik,j} + F_{ji,k} + F_{kj,i})}_{=0} F_{jk} \right) \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \sum_{j,k} F_{ik} F_{kj,j} \\ &= -D_i \qquad \qquad \qquad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

Beim Beweis wurde ausgiebig von der Antisymmetrie von  $F_{ij}$  Gebrauch gemacht.

Welche Bedeutung haben die  $S$ -Komponenten? Welche Bedeutung haben die Komponenten von Gl. (7.48)?

- *Bedeutung der  $S$ -Komponenten.* Aus (7.19) folgt

$$\sum_k F_{ik} F_{jk} = \quad (7.49)$$

$$\begin{pmatrix} B_y^2 + B_z^2 - E_x^2/c^2 & -(B_x B_y + E_x E_y/c^2) & -(B_z B_x + E_z E_x/c^2) & i(E_y B_z - E_z B_y)/c \\ \cdot & B_z^2 + B_x^2 - E_y^2/c^2 & -(B_y B_z + E_y E_z/c^2) & i(E_z B_x - E_x B_z)/c \\ \cdot & \cdot & B_x^2 + B_y^2 - E_z^2/c^2 & i(E_x B_y - E_y B_x)/c \\ \cdot & \cdot & \cdot & -(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)/c^2 \end{pmatrix}$$

– die Punkte stehen für die entsprechenden symmetrischen Matrixelemente – und

$$\sum_{k,l} F_{kl} F_{kl} = 2 (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 - (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) / c^2) . \quad (7.50)$$

Damit erhält man aus (7.47) für  $i, j = 1, 2, 3$ :

$$S_{ij} = -\varepsilon_0 E_i E_j - B_i B_j / \mu_0 + \delta_{ij} (\varepsilon_0 \vec{E}^2 / 2 + \vec{B}^2 / 2 \mu_0) = t_{ij} . \quad (7.51)$$

Bezeichnung von  $t_{ij}$  als *Maxwellscher Spannungstensor* (Tensor in  $\mathcal{E}_3$ ); Deutung als *Feldimpulsstromdichte*, siehe unten. Vgl. (1.78).

Für  $i = 1, 2, 3$  ist

$$S_{i4} = S_{4i} = \frac{i}{\mu_0 c} (\vec{E} \times \vec{B})_i = \frac{i}{c} (\vec{s})_i = \frac{i}{c} s_i , \quad (7.52)$$

wo

$$\vec{s} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (7.53)$$

der *Poynting-Vektor* ist, welcher die Bedeutung der *Feldenergiestromdichte* hat. Wegen des Zusammenhanges (vgl. (6.82))

$$\vec{s} = c^2 \vec{h} , \quad (7.54)$$

wo  $\vec{h}$  die *Feldimpulsdichte* ist, hat man auch

$$S_{i4} = S_{4i} = i c h_i . \quad (7.55)$$

Schließlich gilt für  $i = j = 4$ :

$$S_{44} = -\frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 - \frac{1}{2 \mu_0} \vec{B}^2 = -u , \quad (7.56)$$

wo  $u$  die *Feldenergiedichte* ist.

Also erhält man insgesamt die Darstellung:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & i c h_1 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & i c h_2 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & i c h_3 \\ i s_1 / c & i s_2 / c & i s_3 / c & -u \end{pmatrix}. \quad (7.57)$$

• *Bedeutung der (7.48)-Komponenten.* Sei  $i = 1, 2, 3$ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{t} + \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = -\vec{d}. \quad (7.58)$$

Das ist die **Impulsbilanz**: Die Zunahme (Abnahme analog) des Feldimpulses an einer Stelle beruht darauf, dass die Quellen auf das Feld einwirken ( $-\vec{d}$ ) und dass Feldimpuls dorthin strömt. Der Impuls des elektromagnetischen Feldes bleibt also im Allgemeinen *nicht* erhalten; unter Einbeziehung der Quellen hat man jedoch Impulserhaltung, siehe unten. Neben dieser lokalen Deutung ist – nach Integration – auch eine globale Interpretation analog zu (6.81) möglich.

Sei nun  $i = 4$ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{s} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \vec{d}. \quad (7.59)$$

Das ist die **Energiebilanz**: Die Zunahme (Abnahme analog) der Feldenergie an einer Stelle beruht darauf, dass die Quellen auf das Feld einwirken ( $-\vec{v} \cdot \vec{d}$ ) und dass Feldenergie dorthin strömt. Die Energie des elektromagnetischen Feldes bleibt also im Allgemeinen *nicht* erhalten; unter Einbeziehung der Quellen hat man jedoch Energieerhaltung, siehe unten. Neben dieser lokalen Deutung ist – nach Integration – auch eine globale Interpretation analog zu (6.84) möglich.

Gl. (7.48) beschreibt also die Energie-Impuls-Bilanz der Bewegung des Feldes unter dem Einfluss der Kraftdichte  $-D_i$ ; d. i. die Reaktion auf die Lorentz-Kraftdichte  $D_i$ , welche das Feld auf die Quellen ausübt. Die Energie-Impuls-Bilanz der Bewegung der Quellen unter  $D_i$  wird durch (6.73) beschrieben. Addition von (6.73) und (7.48) führt auf (Elimination von  $D_i$ ):

$$\sum_j (\Theta_{ij,j} + S_{ij,j}) = 0. \quad (7.60)$$

Bei Einführung des Energie-Impuls-Tensors für das **kombinierte (Quellen + Feld)-System**:

$$T_{ij} = \Theta_{ij} + S_{ij}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{g}\vec{v} + \vec{t} & ic(\vec{g} + \vec{h}) \\ i(w\vec{v} + \vec{S})/c & -(w + u) \end{pmatrix}, \quad (7.61)$$

wobei (6.79) und (7.57) benutzt wurden, erhält man als Energie-Impuls-Bilanz des **Gesamtsystems**:

$$\sum_j T_{ij,j} = 0. \quad (7.62)$$

Die Divergenz des symmetrischen Tensors  $T_{ij}$  ( $\Theta_{ij}$  und  $S_{ij}$  beide symmetrisch) verschwindet.

*Interpretation.* Raum- bzw. Zeitanteil von (7.61, 62):

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{g}\vec{v} + \vec{t}) + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{g} + \vec{h}) = 0, \quad (7.63)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (w\vec{v} + \vec{S}) + \frac{\partial}{\partial t} (w + u) = 0.$$

Das sind – in lokaler Formulierung als Kontinuitätsgleichungen – *Erhaltungssätze* für den Impuls und die Energie des (abgeschlossenen) Gesamtsystem. Unter der Voraussetzung verschwindender Impuls- und Energieströme durch die „unendlich ferne Oberfläche“ liefert die Integration über den ganzen Raum:

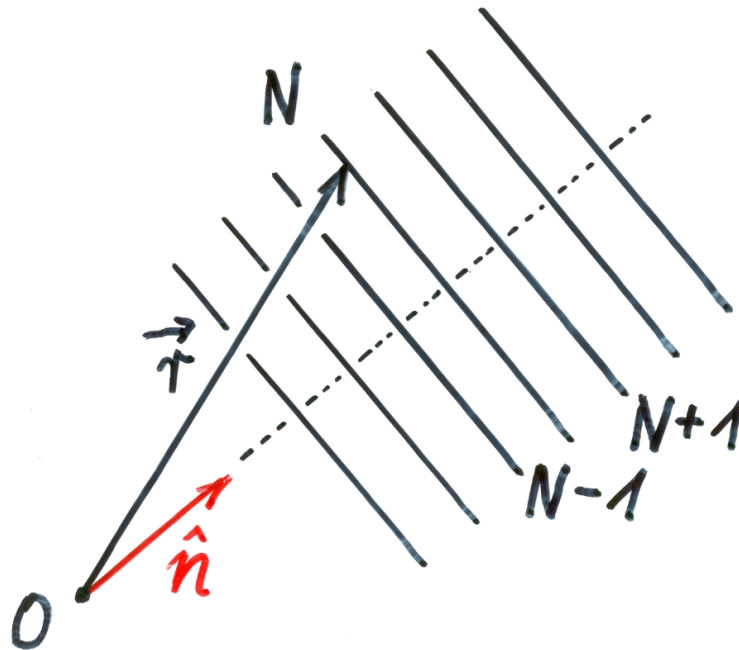
$$\frac{d}{dt} \int (\vec{g} + \vec{h}) d\omega = \vec{0}, \quad (7.64)$$

$$\frac{d}{dt} \int (w + u) dw = 0.$$

Der gesamte Impuls (Teilchen- und Feldimpuls) und die gesamte Energie (Teilchen- und Feldenergie) sind zeitlich konstant.

### 7.3 Wellenausbreitung

Eine Schar ebener Wellenfronten breite sich in  $n$ -Richtung mit der Phasengeschwindigkeit  $v$  aus:



• Abbildung 7.2 •

$$v = \nu \lambda = \omega / k ; \quad (7.65)$$

insbesondere kann  $v$  gleich  $c$  sein.

**Phase.** Falls die 0. Wellenfront zur Zeit  $t = 0$  durch  $O$  läuft, gilt für die  $N$ . Wellenfront zur beliebigen Zeit  $t$  die Gleichung

$$\hat{n} \cdot \vec{r} = vt + N\lambda ; \quad (7.66)$$

Multiplikation mit  $k$  ergibt für die Phase die skalare Invariante

$$\begin{aligned} \phi &= \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \\ &= \left( \vec{k}, \frac{i}{c} \omega \right) \cdot (\vec{r}, ict) \\ &= 2\pi N . \end{aligned} \quad (7.67)$$

**Viererwellenvektor:**

$$\vec{K} = \left( \vec{k}, \frac{i}{c} \omega \right) ; \quad (7.68)$$

dieser besitzt auf Grund der Quotientenregel das Transformationsverhalten eines Vierervektors, weil  $(\vec{r}, ict)$  ein Vierervektor und  $\phi$  ein Viererskalar ist.

**Übergang ins Teilchenbild.** Nach Einstein, ... , de Broglie (siehe Quantenmechanik) ist

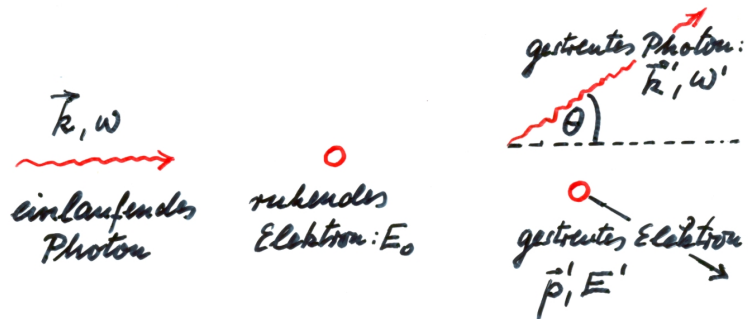
$$\vec{P} = \hbar \vec{K} ; \tag{7.69}$$

das ist wegen (6.41) und (7.68) äquivalent zu

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} , \quad E = \hbar \omega , \tag{7.70}$$

wo  $\hbar = 1.05 \dots \times 10^{-34} \text{ Js}$  die Plancksche Konstante ist.

**Compton-Effekt.**  $\gamma$ -Streuung an Elektronen, Erniedrigung der Frequenz der gestreuten Photonen, abhängig vom Streuwinkel:



• Abbildung 7.3 •

' bedeutet hier nicht ein anderes Inertialsystem, sondern bezeichnet die Größen *nach* dem Streuprozess.

Zur Analyse wird Gebrauch gemacht von der *Erhaltung des Viererimpulses* gemäß Abschnitt 6.1:

$$\hbar \vec{K} + \vec{P} = \hbar \vec{K}' + \vec{P}' , \tag{7.71}$$

d. i. die Impulserhaltung:

$$\hbar \vec{k} = \hbar \vec{k}' + \vec{p}' , \tag{7.72}$$

und die Energieerhaltung:

$$\hbar \omega + E_0 = \hbar \omega' + E' . \tag{7.73}$$

Gl. (7.72) quadrieren:

$$\hbar^2 (k^2 + k'^2 - 2 k k' \cos \theta) = p'^2 ,$$



führt mit  $k = \omega / c$  auf

$$\hbar^2 (\omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega' \cos\theta) = c^2 p'^2 = E'^2 - E_0^2. \quad (7.74)$$

$E'^2$  aus (7.73):

$$\begin{aligned} E'^2 &= (\hbar\omega - \hbar\omega' + E_0)^2 \\ &= \hbar^2 (\omega^2 + \omega'^2) + E_0^2 - 2\hbar^2\omega\omega' + 2E_0\hbar(\omega - \omega'). \end{aligned} \quad (7.75)$$

Aus (7.74, 75) folgt:

$$\begin{aligned} \hbar\omega\omega' (1 - \cos\theta) &= E_0(\omega - \omega') \\ \Rightarrow \frac{1}{\hbar\omega'} - \frac{1}{\hbar\omega} &= \frac{1}{E_0} (1 - \cos\theta). \end{aligned} \quad (7.76 \text{ a})$$

Multiplikation dieser Gleichung mit  $hc$  ergibt

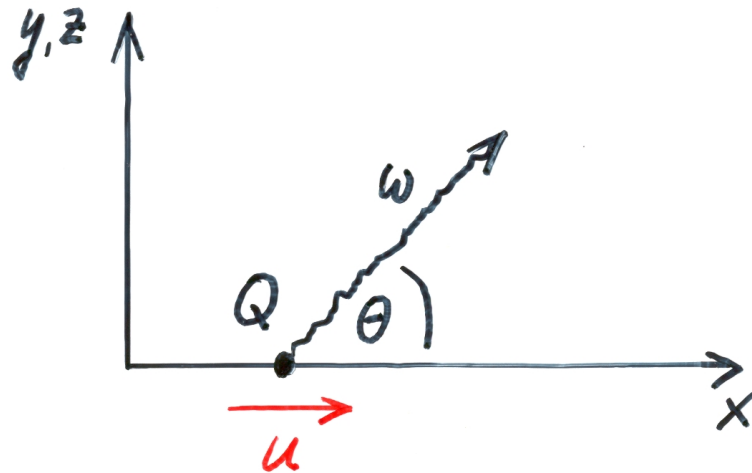
$$\lambda' - \lambda = \lambda_0 (1 - \cos\theta), \quad (7.76 \text{ b})$$

wo  $\lambda_0 = h / m_0 c = 2.42... \times 10^{-12} \text{ m}$  die *Compton-Wellenlänge* ist •

*Transformation von  $\vec{K}$*  unter der speziellen Lorentz-Transformation (5.40). Ersetzung von  $\vec{r}$  durch  $\vec{k}$  und  $ct$  durch  $\omega / c$  führt auf

$$\begin{aligned} k'_x &= \gamma(u) \left( k_x - \frac{u\omega}{c^2} \right) \\ k'_y &= k_y \\ k'_z &= k_z \\ \omega' &= \gamma(u) (\omega - uk_x). \end{aligned} \quad (7.77)$$

**Doppler-Effekt** für Lichtwellen, also  $v = c$ ; Lichtquelle  $Q$  ruhe in  $S'$  und emittiere Licht der Frequenz  $\omega' = \omega_0$ ; dieses wird in  $S$  unter dem Winkel  $\theta$  beobachtet (mit der Frequenz  $\omega$ ):



• Abbildung 7.4 •

Auf Grund der vierten Gleichung in (7.77) hat man

$$\omega_0 = \gamma(u) (\omega - u k_x) ; \quad (7.78)$$

mit

$$k_x = \frac{\omega}{c} \cos \theta \quad (7.79)$$

folgt daraus:

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(u) (1 - u \cos \theta / c)} . \quad (7.80)$$

- *Transversaler* Doppler-Effekt bewirkt Frequenzerniedrigung:

$$\theta = \pi/2 \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0 / \gamma(u) . \quad (7.81)$$

- *Longitudinaler* Doppler-Effekt bewirkt Frequenzerniedrigung oder Frequenzerhöhung je nachdem, ob sich die Quelle dem Beobachter nähert oder ob sie sich von ihm entfernt:

$$\begin{aligned} \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 1 \Rightarrow \omega &= \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - u/c} \omega_0 \\ &= \sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}} \omega_0 , \end{aligned} \quad (7.82)$$

d.h.  $\omega > \omega_0$ , falls  $u > 0$ , und  $\omega < \omega_0$ , falls  $u < 0$ . Zum Vergleich mit dem nichtrelativistischen Doppler-Effekt Entwicklung von (7.82) nach Potenzen von  $u/c$ :

$$\omega = \left( 1 + \frac{u}{c} + \frac{1}{2} \left( \frac{u}{c} \right)^2 + \dots \right) \omega_0 . \quad (7.83)$$

*Nichtrelativistischer* Doppler-Effekt – longitudinal, bewegte Quelle, stationärer Beobachter (setze in (7.82)  $\gamma(u) = 1$ ):

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\omega_0}{1 - u/c} \\ &= \left( 1 + \frac{u}{c} + \left( \frac{u}{c} \right)^2 + \dots \right) \omega_0 . \end{aligned} \quad (7.84)$$

Unterschied zur relativistischen Formel erst in der 2. Ordnung. Durch Ives & Stilwell wurde 1938 der relativistische (longitudinale) Doppler-Effekt 2. Ordnung experimentell verifiziert: Mittelung über  $u \gtrless 0$  in (7.83) ergibt

$$\frac{\bar{\omega} - \omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} \quad (7.85)$$

statt  $u^2/c^2$ , was man entsprechend aus (7.84) erhält •

**Aberration.** Darunter versteht man den Effekt, dass die Richtung des emittierten Lichtes für Beobachter in  $S'$  und  $S$  verschieden ausfällt. Winkel  $\theta$  mit der  $x$ -Achse bzw. Winkel  $\theta'$  mit der  $x'$ -Achse:

$$k'_x = \frac{\omega'}{c} \cos \theta' , \quad k_x = \frac{\omega}{c} \cos \theta ; \quad (7.86)$$

mit Hilfe der ersten Gleichung in (7.77) erhält man

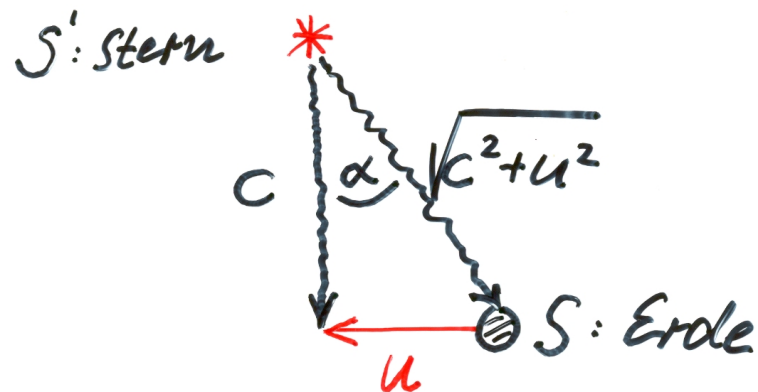
$$\cos \theta' = \gamma \left( \cos \theta - \frac{u}{c} \right) \frac{\omega}{\omega'} ;$$

daraus folgt mit (7.80):

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - u/c}{1 - (u/c) \cos \theta} . \quad (7.87)$$

**Beispiel: Sternenlicht.** Nichtrelativistische Betrachtung in Anlehnung an die Galilei-Transformation ergibt

$$\tan \alpha = \frac{u}{c} . \quad (7.88)$$



• Abbildung 7.5 •

Relativistische Betrachtung: Für  $\theta' = \pi/2$  liefert (7.87)

$$\cos \theta = \frac{u}{c}. \quad (7.89)$$

Andererseits ist  $\theta = \pi/2 - \alpha$ , folglich wegen (7.89):

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{u}{c} \\ \Rightarrow \tan \alpha &= \frac{u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ &= \frac{u}{c} + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{c}\right)^3 + \dots \end{aligned} \quad (7.90)$$

Es treten also erst in der 3. Ordnung in  $u/c$  Abweichungen der relativistischen Formel (7.90) von der nichtrelativistischen Formel (7.88) auf; diese konnten experimentell noch nicht verifiziert werden.

## C Allgemeine Relativitätstheorie

### 8 Tensorrechnung in Punkträumen

Im Folgenden *Einsteinsche Summenkonvention*, z. B.

$$\sum_i A_i B_i = A_i B_i ,$$

$$\sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} F_{kl} = a_{ik} a_{jl} F_{kl}$$

usw., d. h. Summation über doppelt auftretende Indizes.

**Vorbemerkungen** über die  $N$ -dimensionalen Punkträume  $\mathcal{E}_N$ ,  $\mathcal{R}_N$  und  $\mathcal{S}_N$ : Jeder Punkt ist eindeutig durch ein Koordinaten- $N$ -Tupel  $x_1, x_2, \dots, x_N$  gekennzeichnet. Zu unterscheiden sind:

#### Euklidischer Punktraum $\mathcal{E}_N$

1. *Kartesische Koordinaten*. Abstand zweier Punkte mit den Koordinaten  $x_i$  und  $x_i + dx_i$  gegeben durch

$$ds^2 = dx_i dx_i .$$

Bei Übergang zu einem anderen kartesischen Koordinatensystem (orthogonale Transformation) haben die beiden Punkte die Koordinaten  $\bar{x}_i$  und  $\bar{x}_i + d\bar{x}_i$ , und es ist

$$ds^2 = d\bar{x}_i d\bar{x}_i ,$$

d. h.  $ds^2$  ist forminvariant bei Koordinatenwechsel.

2. *Krummlinige Koordinaten*, z. B. Kugelkoordinaten im  $\mathcal{E}_3$ :

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta ,$$

folglich

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \\ &\neq dr^2 + d\vartheta^2 + d\varphi^2 ; \end{aligned}$$

Forminvarianz ist hierbei nicht gegeben.

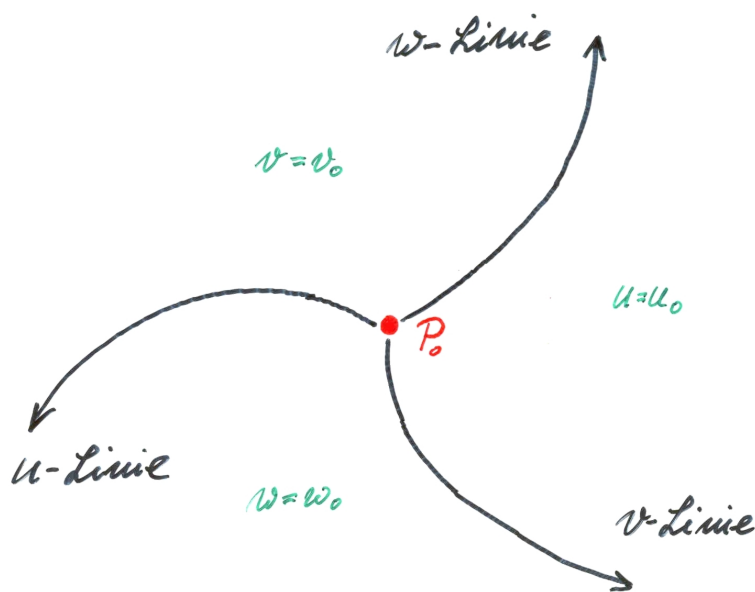
Allgemein im  $\mathcal{E}_3$ :

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z) & x &= x(u, v, w) \\ v &= v(x, y, z) & \text{mit} & \quad y = y(u, v, w) \\ w &= w(x, y, z) & z &= z(u, v, w) . \end{aligned}$$

Koordinatenflächen:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0 \\ v(x, y, z) &= v_0 \\ w(x, y, z) &= w_0 . \end{aligned}$$

Diese drei (im Allgemeinen nicht ebenen) Flächen schneiden sich im Punkt  $P_0$  mit den Koordinaten  $u_0, v_0, w_0$ :



• Abbildung 8.1 •

Je zwei Koordinatenflächen schneiden sich in einer (im Allgemeinen nicht geraden) *Koordinatenlinie*, z. B.

$$u = u_0 , \quad v = v_0 : w\text{-Linie} .$$

Die  $u$ -,  $v$ -,  $w$ -Linien schneiden sich nicht notwendig orthogonal. Krummlinige *Orthogonalkoordinaten*: lokal wie kartesische Koordinaten.

Abstand:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw \\ \Rightarrow ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= A du^2 + B dv^2 + C dw^2 + 2D dv dw + \dots \end{aligned}$$

mit

$$A = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2$$

usw.;  $A, B, \dots$  Funktionen von  $u, v, w$ .

**Riemannscher Punktraum**  $\mathcal{R}_N$ . Koordinaten  $x^1, x^2, \dots, x^N$  (Indizes oben, siehe unten) mit der *Metrik*

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j,$$

wobei die  $g_{ij}$  beliebige Funktionen (hinreichend glatt) der  $x^i$  sind. *Falls* es eine Koordinatentransformation  $y^i(x^j)$  gibt so, dass

$$ds^2 = dy^i dy^i$$

gilt, so handelt es sich um den Euklidischen Punktraum  $\mathcal{E}_N$ . Im Allgemeinen ist eine derartige Transformation auf kartesische Koordinaten jedoch *nicht* möglich. Der Riemannsche Punktraum ist also eine Verallgemeinerung des Euklidischen Punktraumes, d. h. der  $\mathcal{E}_N$  ist ein spezieller  $\mathcal{R}_N$ .

*Beispiel* für einen  $\mathcal{R}_2$ : *Kugel* vom Radius  $R$  mit den Koordinaten (auf der Oberfläche)

$$x^1 = \vartheta, \quad x^2 = \varphi$$

sowie

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \\ g_{11} &= R^2, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = R^2 \sin^2 \vartheta. \end{aligned}$$

Es gibt keine (globalen) Koordinaten  $x(\vartheta, \varphi)$ ,  $y(\vartheta, \varphi)$  mit  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ , d. h. dieser  $\mathcal{R}_2$  ist *nicht* euklidisch; dagegen ist z. B. die Oberfläche eines *Zylinders* euklidisch (anschaulich: auf Ebene abrollbar).

Bedeutung Riemannscher Räume für die **Relativitätstheorie**:

1. *Spezielle Relativitätstheorie*. Die Raumzeit mit den Koordinaten

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct$$

ist ein  $\mathcal{R}_4$ :

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2.$$

Es kann jedoch ein komplexes(!) kartesisches Koordinatensystem gefunden werden (Minkowski):

$$y^1 = x, \quad y^2 = y, \quad y^3 = z, \quad y^4 = ict,$$

so dass

$$ds^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 + (dy^4)^2,$$

d. h. dieser  $\mathcal{R}_4$  ist ein quasi- $\mathcal{E}_4$  (siehe oben).

2. *Allgemeine Relativitätstheorie*. Der Übergang von einem Inertialsystem zu einem *beschleunigten Bezugssystem* entspricht der Einführung krummliniger Koordinaten in der Raumzeit. Dabei ändert sich nicht der Charakter der Raumzeit als  $\mathcal{E}_4$  im Sinne von Minkowski: Man kann ja jederzeit auf quasikartesische Koordinaten zurücktransformieren, d. h. ein Inertialsystem aufsuchen. Nach dem *Äquivalenzprinzip* (siehe Kap. 9) kann die Wirkung eines beschleunigten Bezugssystems nicht vom Einfluss eines Gravitationsfeldes unterschieden werden – und umgekehrt. Bei Anwesenheit von Gravitationsfeldern ist die Raumzeit jedoch *nicht* euklidisch (im Sinne von Minkowski), sondern ein echter  $\mathcal{R}_4$ . Kein globales Inertialsystem.

*Anmerkung*: Lokal ist jeder  $\mathcal{R}_N$  ein (quasi-)  $\mathcal{E}_N$ , denn in jedem hinreichend kleinen Raumgebiet lassen sich in guter Näherung (quasi-) kartesische Koordinaten einführen, z. B.

- Approximation eines Kugelflächelementes durch einen hinreichend kleinen Teil einer Tangentialebene;
- hinreichend kleine Raumzeitbereiche durch Inertialsystem approximierbar.



**Allgemeiner Punktraum**  $\mathcal{S}_N$  mit Koordinaten  $x^1, x^2, \dots, x^N$ , aber *ohne* Metrik. Jeder  $\mathcal{R}_N$  ist demnach ein spezieller  $\mathcal{S}_N$ , für den eine Metrik definiert ist. Im  $\mathcal{S}_N$  sind *Koordinatentransformationen* möglich:

$$x^i \rightarrow \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^N),$$

hinreichend glatte Funktionen mit nichtverschwindender Jacobi-Determinante:

$$\left\| \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right\| \neq 0 \Rightarrow x^i = x^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^N),$$

d. h. Auflösbarkeit nach den alten Koordinaten.

### 8.1 Kontra- und kovariante Tensoren im $\mathcal{S}_N$

Punkt  $P \in \mathcal{S}_N$  mit den Koordinaten  $x^1, x^2, \dots, x^N$  bzw.  $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^N$ , wobei

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^N), \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (8.1)$$

Punkt  $P' \in \mathcal{S}_N$  mit den Koordinaten  $x^i + dx^i$  bzw.  $\bar{x}^i + d\bar{x}^i$ . Der Verschiebungsvektor  $\overrightarrow{PP'}$  mit den Komponenten  $dx^i$  bzw.  $d\bar{x}^i$  transformiert sich gemäß

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} dx^j. \quad (8.2)$$

$N$  Größen  $A^i$  heißen **kontravarianter Vektor** (kontravariante Komponenten eines Vektors), falls sie sich gemäß

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j \quad (8.3)$$

transformieren. Summenkonvention beachten! Die Verschiebung  $dx^i$  ist also ein kontravarianter Vektor.

*Anmerkung:* Die Koeffizienten  $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$  sind Funktionen der Koordinaten; daher ist ein Vektor immer nur in Bezug auf eine bestimmte Stelle im  $\mathcal{S}_N$  definiert. Im Unterschied zum  $\mathcal{E}_N$  gibt es im  $\mathcal{S}_N$  keine „freien“ Vektoren.

Falls die  $A^i$  Funktionen der  $x^i$  sind, spricht man von einem *kontravarianten Vektorfeld*.

Eine Größe  $A$  wird als **Skalar** (auch *skalare Invariante*) bezeichnet, falls gilt:

$$\bar{A} = A. \quad (8.4)$$

$A(x^1, \dots, x^N)$  heißt *skalares Feld*, wenn

$$\bar{A}(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^N) = A(x^1, \dots, x^N), \quad \bar{x}^i(x^j). \quad (8.5)$$

gilt.

*Anmerkung:*  $\bar{A}(\bar{x})$  und  $A(x)$  sind im Allgemeinen verschiedene Funktionen ihrer Argumente.

Unter dem *Gradienten* eines skalaren Feldes versteht man das  $N$ -Tupel  $\frac{\partial A}{\partial x^i}$ ; Transformationsverhalten:

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial A}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial A}{\partial x^j}. \quad (8.6)$$

$N$  Größen  $B_i$  heißen **kovarianter Vektor** (kovariante Komponenten eines Vektors), falls sie sich gemäß

$$\bar{B}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} B_j \quad (8.7)$$

transformieren. Summenkonvention beachten! Bei  $x$ -Abhängigkeit hat man ein *kovariantes Vektorfeld*. Der Gradient eines skalaren Feldes ist nach (8.6) ein Beispiel hierfür.

Erläuterung der Begriffe **kovariant** und **kontravariant**. Im euklidischen Vektorraum  $E_N \{x, y, \dots\}$  sei eine *Basis* gegeben (nicht notwendig orthonormiert):

$$e_1, e_2, \dots, e_N \Rightarrow x = x^i e_i; \quad (8.8)$$

dazu die *reziproke Basis* (ebenfalls im Allgemeinen nicht orthonormiert):

$$e^1, e^2, \dots, e^N \Rightarrow x = x_i e^i. \quad (8.9)$$

Wegen der Relation

$$e_i \cdot e^j = \delta_i^j \quad (8.10)$$

folgt

$$x^i = x \cdot e^i \quad \text{bzw.} \quad x_i = x \cdot e_i. \quad (8.11)$$

Betrachte eine *lineare Transformation* der Basis:

$$\bar{e}_i = a_i^j e_j; \quad (8.12)$$

damit sowie mit der zweiten der Gln. (8.11) folgt:

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_i &= x \cdot \bar{e}_i \\
 &= x \cdot \alpha_i^j e_j \\
 &= \alpha_i^j x \cdot e_j \\
 &= \alpha_i^j x_j .
 \end{aligned} \tag{8.13}$$

Die Entwicklungskoeffizienten  $x_i$  transformieren sich also wie die Basisvektoren  $e_i$ : *kogredientes* Verhalten. Vgl. (8.12). Wie transformieren sich die Entwicklungskoeffizienten  $x^i$ ?

Mit der zu (8.12) *inversen Transformation*:

$$e_i = b_i^j \bar{e}_j , \tag{8.14}$$

folgt aus (8.8):

$$x = x^i b_i^j \bar{e}_j$$

und daraus mit der ersten der Gln. (8.11) sowie mit (8.10):

$$\begin{aligned}
 \bar{x}^i &= x \cdot \bar{e}^i \\
 &= x^j b_j^k \bar{e}_k \cdot \bar{e}^i \\
 &= b_j^i x^j .
 \end{aligned} \tag{8.15}$$

Die  $x^i$  transformieren sich demnach *kontragredient* zu den Basisvektoren  $e_i$ .

In Umkehrung zu (8.13, 15) gilt (ohne Beweis):

$$x_i = b_i^j \bar{x}_j , \tag{8.16}$$

das ist *Kogredienz*, und

$$x^i = a_j^i \bar{x}^j , \tag{8.17}$$

das ist *Kontragredienz* – verglichen mit der Basistransformation (8.14). Daher nennt man die  $x_i$  *kovariante* und die  $x^i$  *kontravariante* Komponenten von  $x$ . (Umgekehrt transformieren sich im Vergleich zur reziproken Basis die  $x_i$  kontragredient und die  $x^i$  kogredient, müssten also kontravariante bzw. kovariante Komponenten genannt werden, falls man die  $e^i$  zur Ausgangsbasis macht.)

Mit (8.17) folgt aus (8.13) für die kovarianten Komponenten:

$$\bar{x}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} x_j ; \tag{8.18}$$

aus (8.15) folgt für die kontravarianten Komponenten:

$$\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} x^j . \quad (8.19)$$

Daher bezeichnet man  $N$ -Tupel von Größen  $C_i$  mit dem kogredienten Transformationsverhalten (8.18) als *kovarianten Vektor*:

$$\bar{C}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} C_j , \quad (8.20)$$

und  $N$ -Tupel von Größen  $C^i$  mit dem kontragredienten Transformationsverhalten (8.19) als *kontravarianter Vektor*

$$\bar{C}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} C^j . \quad (8.21)$$

Verallgemeinerung auf nichtlineare Koordinatentransformation führt auf die Definitionen (8.7) bzw. (8.3) •

Bei den besprochenen Vektoren handelt es sich um *Tensoren 1. Stufe*; der Skalar (8.4) ist ein *Tensor 0. Stufe*. Nachfolgend ist von *Tensoren 2. Stufe* die Rede.

In Verallgemeinerung von (8.3) definiert man:  $N^2$  Größen  $C^{ij}$  mit dem Transformationsverhalten

$$\bar{C}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} C^{kl} \quad (8.22)$$

heißen **kontravarianter Tensor 2. Stufe**. Das Tensorprodukt (siehe unten) zweier kontravarianter Vektoren 1. Stufe (Vektoren) ist ein Beispiel:

$$\bar{A}^i \bar{B}^j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} A^k B^l , \quad (8.23)$$

was eine zwingende Konsequenz von (8.3) ist.

Entsprechend definiert man einen **kovarianten** und einen **gemischten Tensor 2. Stufe** durch (siehe (8.7)):

$$\bar{C}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} C_{kl} \quad (8.24)$$

bzw.

$$\bar{C}_j^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} C_l^k . \quad (8.25)$$

Die Tensorprodukte  $A_i B_j$  (zwei kovariante Vektoren) bzw.  $A^i B_j$  (ein kontravarianter und ein kovarianter Vektor) sind hierfür Beispiele.

Ein weiteres Beispiel für einen gemischten Tensor 2. Stufe ist der **Fundamentaltensor**

$$\delta_j^i = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq j \\ 1, & \text{falls } i = j. \end{cases} \quad (8.26)$$

Die Eigenschaft (8.25) – zusammen mit (8.26) – impliziert Invarianz:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_j^i &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \delta_l^k \\ &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \\ &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^j} \\ &= \delta_j^i. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Umgekehrt folgt aus der Invarianz das Transformationsverhalten (8.25). Der kontravariante Tensor  $\delta^{ij}$  und der kovariante Tensor  $\delta_{ij}$  (beide auch als Kronecker-Delta definiert) sind *nicht* invariant.

**Verallgemeinerung.**  $N^k$  Größen  $A_{lm\dots}^{ij\dots}$  ( $k_1$  kontravariante,  $k_2$  kovariante Indizes mit  $k_1 + k_2 = k$ ) heißen *Tensor  $k$ . Stufe*, falls gilt:

$$\bar{A}_{lm\dots}^{ij\dots} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q} \dots \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^m} \dots A_{st\dots}^{pq\dots}. \quad (8.28)$$

Die in Abschnitt 5.5 behandelten **kartesischen Tensoren** bilden einen Spezialfall der hier betrachteten Tensoren. Dort galt (5.1, 2):

$$\bar{x}_i = a_{ij} x_j \quad \text{mit} \quad a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}; \quad (8.29)$$

folglich:

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} = a_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i}. \quad (8.30)$$

Für den kontravarianten Vektor  $A^i$  und den kovarianten Vektor  $B_i$  gilt also:

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} A^j = a_{ij} A^j \quad (8.31)$$

bzw.

$$\bar{B}_i = \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i} B_j = a_{ij} B_j, \quad (8.32)$$

d. i. gleiches Transformationsverhalten; daher keine Unterscheidung von „kontravariant“ und „kovariant“. Im  $E_N$  ist nämlich die reziproke Basis mit der ursprünglichen Basis ( $ON$ -Basis) identisch, somit gibt es keinen Unterschied zwischen den Entwicklungskoeffizienten nach diesen beiden Basen.

**Rechenregeln** weitgehend wie bei kartesischen Tensoren:

- *Addition.* Beispiel:

$$A_{jk}^i + B_{jk}^i = C_{jk}^i . \quad (8.33)$$

Verallgemeinerung: gleiche Stufe und Indexstellung der Summanden.

- *Tensorprodukt.* Beispiel:

$$A_j^i B_{lm}^k = C_{jlm}^{ik} \quad (8.34)$$

mit offensichtlicher Verallgemeinerung.

- *Symmetrie, Antisymmetrie:*

$$A^{ij} = \pm A^{ji} \quad \Rightarrow \quad \bar{A}^{ij} = \pm \bar{A}^{ji} \quad (8.35)$$

$$B_{ij} = \pm B_{ji} \quad \Rightarrow \quad \bar{B}_{ij} = \pm \bar{B}_{ji} ,$$

aber

$$C_j^i = \pm C_i^j \quad \not\Rightarrow \quad \bar{C}_j^i = \pm \bar{C}_i^j .$$

- *Verjüngung* eines Tensors  $k$ . Stufe bezüglich eines kontravarianten und eines kovarianten Index ergibt einen Tensor  $(k - 2)$ . Stufe, z. B.

$$A_{lm}^i \quad \Rightarrow \quad B_l = A_{li}^i , \quad \bar{B}_l = \bar{A}_{li}^i \quad (8.36)$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{B}_l &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^i} A_{st}^p \\ &= \underbrace{\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}}_{= \delta_p^t} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^l} A_{st}^p \\ &= \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^l} A_{sp}^p \\ &= \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^l} B_s , \end{aligned} \quad (8.37)$$

d. i. nach (8.7) ein kovarianter Vektor. Achtung:  $A_{li}^i$  ist im Allgemeinen kein Tensor!

- *Verjüngendes Produkt.* Beispiel:

$$A_{jk}^i, B_s^r \Rightarrow A_{jk}^i B_i^r = C_{jk}^r \quad (8.38)$$

mit offensichtlicher Verallgemeinerung.

- **Quotientenregel.** Wenn das Ergebnis einer Produktbildung (tensoriell oder verjüngend) einer Menge von Größen mit einem Tensor (beliebige Komponenten in einem Koordinatensystem) ein Tensor ist, so bilden diese Größen einen Tensor:

$$\text{Tensor (bel. Komp.)} \cdot X = \text{Tensor} \quad (8.39)$$

$$\Rightarrow X \text{ ist Tensor .}$$

Der *Beweis* verläuft im Prinzip wie am Ende von Kap. 5.

*Anwendungen* der Quotientenregel:

1. Sei  $A^i$  ein beliebiger kontravarianter Vektor. In allen Koordinatensystemen gelte

$$\delta_j^i A^j = A^i, \quad (8.40)$$

d. i. Invarianz von  $\delta_j^i$ . Daraus folgt mit der Quotientenregel, dass  $\delta_j^i$  ein Tensor ist. Umkehrung von (8.27).

2. Sei  $g_{ij}$  ein symmetrischer kovarianter Tensor mit  $g = \|g_{ij}\| \neq 0$ . Folglich existiert die inverse  $N \times N$ -Matrix; sie werde mit  $g^{ij}$  bezeichnet.  $g^{ij}$  ist ein symmetrischer kontravarianter Tensor.

*Beweis:*

$$g^{ij} = G^{ji} / g, \quad (8.41)$$

wo  $G^{ji}$  der Kofaktor von  $g_{ji}$  ist; dieser ist symmetrisch, folglich ist  $g^{ij}$  symmetrisch. Es gilt also

$$g^{ij} g_{ik} = \delta_k^j. \quad (8.42)$$

Sei  $A^i$  ein beliebiger kontravarianter Vektor; dann ist

$$B_i = g_{ik} A^k \quad (8.43)$$

ein beliebiger kovarianter Vektor ( $g \neq 0$ ). Wegen (8.43, 42) gilt

$$g^{ij} B_i = g^{ij} g_{ik} A^k = A^j; \quad (8.44)$$

daraus folgt mit der Quotientenregel die *Behauptung*.

- *Pseudotensoren.* Verallgemeinerung des Konzeptes aus Abschnitt 5.5.

## 8.2 Affine Verknüpfung und kovariante Ableitung

Übergang von der Tensoralgebra zur Tensoranalysis. Erforderlich: kovariante Definition der Operation „Ableitung eines Tensorfeldes nach den Koordinaten“, d. h. die Ableitung eines Tensors soll wieder einen Tensor ergeben. Das ist im Allgemeinen nicht der Fall; zwar gilt:

$$A(x) \text{ skalares Feld} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^r} A(x) \text{ kovariantes Vektorfeld ,}$$

jedoch:

$$A_{lm\dots}^{ij\dots}(x) \text{ Tensorfeld} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^r} A_{lm\dots}^{ij\dots}(x) \text{ i. A. kein Tensorfeld .}$$

Betrachte z. B. den kontravarianten Vektor  $A^i$  (genauer: Vektorfeld; „feld“ im Folgenden weggelassen):

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j \tag{8.45}$$

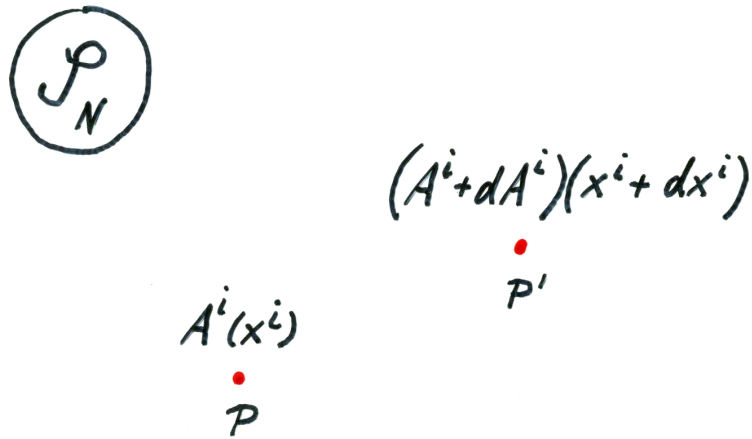
impliziert

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{A}^i}{\partial \bar{x}^k} &= \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^k \partial x^j} A^j + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial A^j}{\partial \bar{x}^k} \\ &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial A^j}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^k \partial x^j} A^j , \end{aligned} \tag{8.46}$$

d. h.  $A^i_{,k}$  ist *kein* Tensor vom Typ  $C^i_k$  (auch nicht vom Typ  $C^{ik}$  oder  $C_{ik}$ ). Bei Beschränkung auf lineare Transformationen hingegen (z. B. Lorentz-Transformationen in der Minkowski-Raumzeit) ist  $A^i_{,k}$  ein Tensor, weil dann alle zweiten Ableitungen  $\partial^2 \bar{x}^i / \partial \bar{x}^k \partial x^j$  verschwinden.

Dass  $A^i_{,k}$  kein Tensor ist, liegt wesentlich daran, dass sich das Differential  $dA^i$  nicht wie ein Tensor (hier: wie ein kontravarianter Vektor) transformiert:





• Abbildung 8.2 •

Aus dem (kontravarianten) Vektorcharakter von  $A^i$  (damit von  $A^i + dA^i$ ) folgt nämlich:

$$\begin{aligned} \bar{A}^i + d\bar{A}^i &= \left. \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right|_{P'} (A^j + dA^j) \\ \bar{A}^i &= \left. \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right|_P A^j, \end{aligned} \tag{8.47}$$

somit:

$$\begin{aligned} d\bar{A}^i &= \left( \left. \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right|_{P'} - \left. \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right|_P \right) A^j + \left. \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right|_{P'} dA^j \\ &= \left. \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right|_P dA^j + \left. \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial x^j} \right|_P A^j dx^k. \end{aligned} \tag{8.48}$$

Demnach ist, da der zweite Term im Allgemeinen nicht verschwindet,  $dA^i$  kein (kontravarianter) Vektor. Wegen

$$dA^i = A^i_{,k} dx^k \tag{8.49}$$

und da  $dx^k$  (kontravarianter) Vektor ist, folgt, dass  $A^i_{,k}$  kein Tensor ist.

Die *geometrische Ursache* dafür, dass  $dA^i$  kein Vektor ist, liegt darin begründet, dass

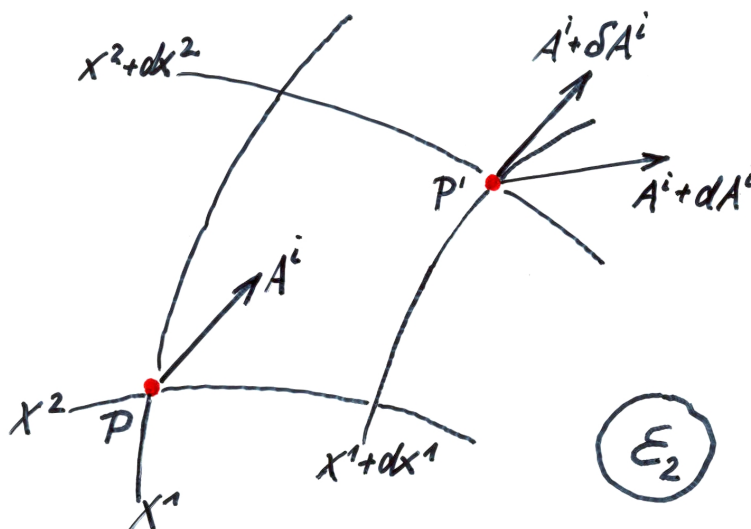
$$dA^i = (A^i + dA^i)_{P'} - (A^i)_P \tag{8.50}$$

die Differenz zweier Vektoren ist, die *verschiedenen* Punkten  $P'$  und  $P$  zugeordnet sind.

Definition eines **kovarianten Differentials**, d. h. eines Differentials mit Vektorcharakter:

$$DA^i = (A^i + dA^i) - (A^i + \delta A^i). \tag{8.51}$$

Dabei bedeutet  $A^i + \delta A^i$  den von  $P$  nach  $P'$  „parallel verschobenen“ Vektor  $A^i$ ;  
 Erläuterung im  $\mathcal{E}_2$ :



• Abbildung 8.3 •

Da die (krummlinigen) Koordinatenlinien in  $P$  und  $P'$  im Allgemeinen verschiedene Richtungen haben, besitzen die Vektoren  $A^i$  und  $A^i + \delta A^i$  im Allgemeinen trotz Parallelität verschiedene Komponenten. Wie ist *Parallelität* im  $\mathcal{S}_N$  zu definieren?

Zuvor zwei *Anmerkungen*:

1. Im  $\mathcal{E}_N$  ist der Vektorcharakter von  $DA^i$  evident:  $A^i + dA^i$  Vektor,  $A^i + \delta A^i$  Vektor  $\Rightarrow DA^i$  Vektor. Für  $\mathcal{S}_N$  wird der Vektorcharakter von  $DA^i$  gefordert!
2. Achtung! *Kovariant* in zweifacher Bedeutung:
  - a) Kovarianter Index eines Tensors, kovarianter Vektor; gemeint ist das Transformationsverhalten (8.7):  $\bar{A}_i = (\partial x^j / \partial \bar{x}^i) A_j$ .
  - b) Kovariante Formulierung = forminvariante Formulierung; in diesem Sinne bedeutet kovariantes Differential oder kovariante Ableitung allgemein den Tensorcharakter dieser Größen. Das kovariante Differential braucht kein kovarianter Vektor zu sein:  $DA^i$  kontravariant (siehe unten; hingegen  $DA_i$  kovariant).

$\mathcal{S}_N$  bisher ohne Struktur, ohne Zusammenhang, ... Definition der **Parallelverschiebung** von  $A^i$  und damit Definition von  $\delta A^i$  weitgehend beliebig, jedoch derart, dass im

euklidischen Punktraum die dort gültige Definition resultiert. Sei also zunächst *speziell*  $\mathcal{S}_N$  ein  $\mathcal{E}_N$ , dann sind kartesische Koordinaten  $y^i$  einführbar.  $B^i$  sei der Vektor  $A^i$  in diesen Koordinaten:

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} B^j ; \quad (8.52)$$

daraus folgt

$$dA^i = d\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) B^j + \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) dB^j , \quad (8.53)$$

d. h.  $A^i$  ändert sich wegen der Krümmigkeit der Koordinaten (1. Term) und wegen der vom Koordinatensystem unabhängigen  $P$ -Abhängigkeit des Vektorfeldes (2. Term). Daher die *Definition*:

$$\delta A^i = dA^i \Big|_{dB^j=0} ; \quad (8.54)$$

denn Parallelverschiebung in kartesischen Koordinaten bedeutet, dass sich die Komponenten des Vektors nicht ändern.

Mit der zu (8.52) inversen Beziehung

$$B^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} A^j \quad (8.55)$$

folgt aus (8.54, 53):

$$\begin{aligned} \delta A^i &= \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^k \partial y^j} B^j dx^k \\ &= \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^k \partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^l} A^l dx^k \\ &= -\Gamma_{kl}^i A^k dx^l , \end{aligned} \quad (8.56)$$

d. h.  $\delta A^i$  ist bilinear in  $A^k$  und  $dx^l$  mit den Koeffizienten  $-\Gamma_{kl}^i$ , wobei

$$\begin{aligned} \Gamma_{kl}^i &= -\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^l \partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^k} \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^k \partial x^l} . \end{aligned} \quad (8.57)$$

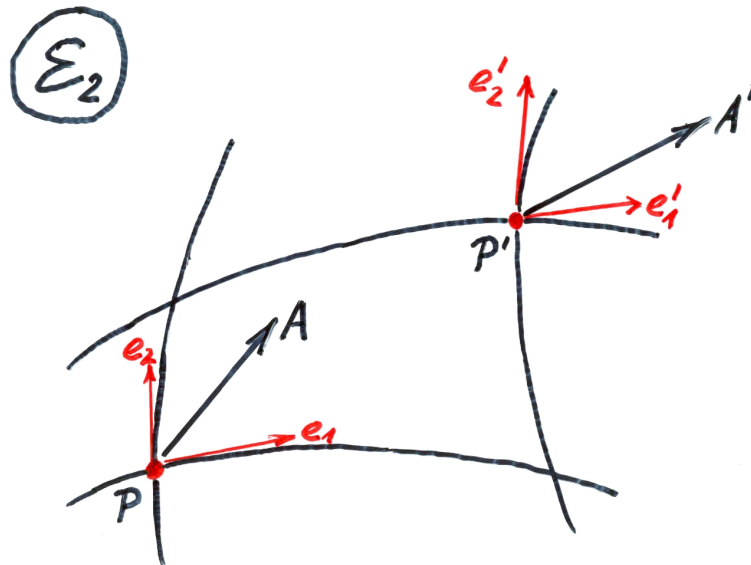
Die  $\Gamma_{kl}^i$  sind Funktionen der  $x$ -Koordinaten; sie hängen nicht von der Wahl der kartesischen  $y$ -Koordinaten ab. Wenn die  $x$ -Koordinaten ihrerseits kartesisch sind, dann verschwinden alle  $\Gamma_{kl}^i$ .

*Verallgemeinerung* auf beliebigen  $\mathcal{S}_N$ :

$$\delta A^i = -\Gamma_{kl}^i A^k dx^l \quad (8.58)$$

mit  $N^3$  beliebigen Funktionen  $\Gamma_{kl}^i$  der Koordinaten (nicht alle unabhängig voneinander; hinreichend oft stetig differenzierbar). Die  $\Gamma_{kl}^i$  heißen **Affinitäten**; sie definieren eine **affine Verknüpfung** im  $\mathcal{S}_N$ .

Erläuterung im  $\mathcal{E}_2$ :



• Abbildung 8.4 •

Beachte  $A' = A + dA$ ,  $e'_i = e_i + de_i$ ,  $i = 1, 2$ . Aus

$$A = A^i e_i \tag{8.59}$$

folgt

$$dA = dA^i e_i + A^i de_i, \quad i = 1, 2. \tag{8.60}$$

$A'$  gehe aus  $A$  durch *Parallelverschiebung* hervor, d. h. es sei

$$dA = 0, \quad dA^i = \delta A^i. \tag{8.61}$$

Einsetzen in (8.60) ergibt mit (8.56):

$$\begin{aligned} A^i de_i &= -\delta A^i e_i \\ &= \Gamma_{kl}^i A^k dx^l e_i \\ &= A^i \Gamma_{ij}^k dx^j e_k. \end{aligned} \tag{8.62}$$

Da  $A$  und damit  $A^i$  beliebig ist, folgt

$$d e_i = \Gamma_{ij}^k d x^j e_k , \quad (8.63)$$

d. h. beim Übergang von  $P$  nach  $P'$  ändert sich die lokale Basis nach Maßgabe der Affinitäten  $\Gamma_{ij}^k$ . •

Mit (8.49) und (8.58) erhält man für das kovariante Differential (8.51) den Ausdruck

$$D A^i = d A^i - \delta A^i = (A^i_{,l} + \Gamma_{kl}^i A^k) d x^l . \quad (8.64)$$

Daher definiert man die **kovariante Ableitung** von  $A^i$  nach  $x^l$  wie folgt:

$$A^i_{;l} = A^i_{,l} + \Gamma_{kl}^i A^k . \quad (8.65)$$

Diese ist – im Unterschied zur partiellen Ableitung  $A^i_{,l}$  – nach der Quotientenregel ein (gemischter) Tensor 2. Stufe, da  $d x^l$  ein beliebiger (kontravarianter) Vektor ist und für  $D A^i$  der (kontravariante) Vektorcharakter gefordert wird.  $A^i_{;l}$  transformiert sich gemäß (8.25).

Bei Beschränkung auf kartesische Koordinatensysteme im  $\mathcal{E}_N$  verschwinden nach (8.57) alle  $\Gamma_{kl}^i$ , und zwischen partieller und kovarianter Ableitung gibt es keinen Unterschied.

**Transformation der Affinitäten.** Beliebigkeit der Wahl der  $\Gamma_{kl}^i$  bedeutet: beliebige Wahl in Bezug auf *ein* Koordinatensystem. Bei Koordinatenwechsel ergeben sich die  $\Gamma_{kl}^i$ -Werte aus einem Transformationsgesetz, das aus dem Tensorcharakter von  $A^i_{;l}$  resultiert. Die für das  $x$ -System gültige Gleichung (8.65) lautet im  $\bar{x}$ -System:

$$\bar{A}^i_{;l} = \bar{A}^i_{,l} + \bar{\Gamma}_{kl}^i \bar{A}^k . \quad (8.66)$$

Beachte, dass hier  $_{,l}$  Ableitung nach  $\bar{x}_l$  bedeutet! Für die Tensoren  $\bar{A}^i_{;l}$  und  $\bar{A}^i$  gelten die Transformationen

$$\begin{aligned} \bar{A}^i_{;l} &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^l} A^m_{;n} \\ &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^l} (A^m_{,n} + \Gamma_{pn}^m A^p) \end{aligned} \quad (8.67)$$

– zuletzt mit (8.65) – bzw.

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} A^m . \quad (8.68)$$

Einsetzen von (8.67, 68) in (8.66) führt auf

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^l} (A^m_{,n} + \Gamma_{pn}^m A^p) = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^l} \left( \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} A^m \right) + \bar{\Gamma}_{kl}^i \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m} A^m , \quad (8.69)$$

woraus

$$\left( \bar{\Gamma}_{kl}^i \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m} - \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^l} \Gamma_{mn}^k + \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^l \partial x^m} \right) A^m = 0 \quad (8.70)$$

folgt. Da  $A^m$  beliebig ist, verschwindet die runde Klammer:

$$\bar{\Gamma}_{kl}^i \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m} - \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^l} \Gamma_{mn}^k + \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^l \partial x^m} = 0. \quad (8.71)$$

Multiplikation mit  $\partial x^m / \partial \bar{x}^p$  ergibt

$$\bar{\Gamma}_{kl}^i \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^l} \Gamma_{mn}^k - \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^l \partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p}. \quad (8.72)$$

Mit

$$\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial \bar{x}^p} = \delta_p^k \quad (8.73)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^l \partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}^l} \left( \underbrace{\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p}}_{= \delta_p^i} \right) - \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^p} \\ &= \underbrace{\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^p}}_{= 0} \\ &= - \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^p} \end{aligned} \quad (8.74)$$

folgt schließlich aus (8.72):

$$\bar{\Gamma}_{pl}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^l} \Gamma_{mn}^k + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^l}. \quad (8.75)$$

Ohne den zweiten Term auf der rechten Seite ist das die Transformationsgleichung eines Tensors 3. Stufe:  $i$  kontravarianter Index,  $p$  und  $l$  kovariante Indizes. Die Inhomogenität verschwindet jedoch im Allgemeinen nicht, und daher transformieren sich die  $\Gamma_{pl}^i$  *nicht* wie ein Tensor. Insbesondere:  $\Gamma_{mn}^k = 0$  hat nicht  $\bar{\Gamma}_{pl}^i = 0$  zur Folge.

**Folgerungen.** Seien  $\Gamma_{jk}^i, \tilde{\Gamma}_{jk}^i$  Affinitäten,  $A_{jk}^i$  ein Tensor (d. h. diese Größen transformieren sich gemäß (8.75) bzw. wie ein Tensor mit einem kontravarianten und zwei kovarianten Indizes); dann gilt (ohne Beweise):

- $\Gamma_{jk}^i - \tilde{\Gamma}_{jk}^i$  ist ein Tensor;
- $\Gamma_{jk}^i + \tilde{\Gamma}_{jk}^i$  ist weder Tensor noch Affinität;

- $\Gamma_{jk}^i + A_{jk}^i$ ,  $\tilde{\Gamma}_{ji}^i + A_{jk}^i$  sind Affinitäten.

Ferner folgt aus (8.75):

$$\Gamma_{mn}^k = \Gamma_{nm}^k \quad \Rightarrow \quad \bar{\Gamma}_{pl}^i = \bar{\Gamma}_{lp}^i, \quad (8.76)$$

d. h. eine evtl. Symmetrie einer Affinität bezüglich der beiden unteren Indizes bleibt bei Transformation auf ein anderes Koordinatensystem erhalten. Hieraus ergeben sich wichtige *Konsequenzen*. Der zu Grunde liegende Punktraum sei ein

- $\mathcal{E}_N$ :  $\Gamma_{jk}^i = 0$  in kartesischen Koordinaten, folglich

$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i \quad (8.77 \text{ a})$$

in diesen und – wegen (8.76) – in allen anderen Koordinaten.

- $\mathcal{R}_N$ : lokal durch (quasi-) kartesische Koordinaten approximierbar (Beweis im Abschnitt 8.3), folglich lokal  $\Gamma_{jk}^i = 0$  in diesen Koordinaten; somit lokal  $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$  in beliebigen Koordinaten, folglich global

$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i \quad (8.77 \text{ b})$$

in allen Koordinatensystemen.

- $\mathcal{S}_N$ : Symmetrie

$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i \quad (8.77 \text{ c})$$

in den unteren Indizes kann gefordert werden.

### Kovariante Ableitung beliebiger Tensoren:

- *Kontravarianter Vektor*  $A^i$ . Die Vorschrift zur kovarianten Ableitung ist durch (8.65) gegeben.
- *Skalar*  $A$ . Analog zu (8.51) wird definiert:

$$D A = d A - \delta A. \quad (8.78)$$

Bei „Parallelverschiebung“ ändert sich  $A$  nicht:

$$\delta A = 0. \quad (8.79)$$

Aus (8.78, 79) folgt

$$D A = d A,$$

somit

$$A_{;k} dx^k = A_{,k} dx^k$$

und wegen der Beliebigkeit von  $dx^k$ :

$$A_{;k} = A_{,k} . \quad (8.80)$$

Die kovariante Ableitung eines skalaren Feldes ist identisch mit der partiellen Ableitung, d. h. mit dem Gradienten. Das Resultat ist ein kovariantes Vektorfeld; vgl. (8.6).

- *Kovarianter Vektor  $A_i$ .* Sei  $B^i$  ein beliebiger kontravarianter Vektor; dann ist  $A_i B^i$  ein beliebiger Skalar. Folglich gilt wegen (8.79):

$$\begin{aligned} \delta(A_i B^i) &= 0 \\ \Rightarrow (\delta A_i) B^i + A_i (\delta B^i) &= 0 \end{aligned}$$

und wegen (8.58):

$$\begin{aligned} (\delta A_i) B^i - A_i \Gamma_{kl}^i B^k dx^l &= 0 \\ \Rightarrow (\delta A_k - \Gamma_{kl}^i A_i dx^l) B^k &= 0 . \end{aligned} \quad (8.81)$$

Wegen der Beliebigkeit von  $B^k$  verschwindet die runde Klammer:

$$\delta A_k = \Gamma_{kl}^i A_i dx^l . \quad (8.82)$$

Analog zu (8.64) erhält man damit das kovariante Differential

$$D A_k = d A_k - \delta A_k = (A_{k,l} - \Gamma_{kl}^i A_i) dx^l , \quad (8.83)$$

folglich die kovariante Ableitung

$$A_{k;l} = A_{k,l} - \Gamma_{kl}^i A_i . \quad (8.84)$$

Das ist ein rein kovarianter Tensor 2. Stufe mit dem Transformationsverhalten (8.24).

- *Gemischter Tensor 2. Stufe  $A_k^i$ .* Seien  $B_i, C^k$  beliebige Vektoren (ko- bzw. kontravariant); dann ist  $A_k^i B_i C^k$  ein beliebiger Skalar, somit

$$\delta(A_k^i B_i C^k) = 0$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad -(\delta A_k^i) B_i C^k &= A_k^i (\delta B_i) C^k + A_k^i B_i (\delta C^k) \\ &= A_k^i (\Gamma_{im}^l B_l dx^m) C^k + A_k^i B_i (-\Gamma_{lm}^k C^l dx^m) \end{aligned} \quad (8.85)$$

mit (8.81, 58). Wegen der Beliebigkeit von  $B_i C^k$  folgt analog zum Übergang von (8.81) nach (8.82):

$$-\delta A_k^i = (\Gamma_{lm}^i A_k^l - \Gamma_{km}^l A_l^i) dx^m . \quad (8.86)$$

Mit

$$D A_k^i = d A_k^i - \delta A_k^i \quad (8.87)$$

erhält man schließlich

$$A_{k;m}^i = A_{k,m}^i + \Gamma_{lm}^i A_k^l - \Gamma_{km}^l A_l^i . \quad (8.88)$$

*Anwendung.* Kovariante Ableitung des gemischten Fundamentaltensors:

$$\begin{aligned} \delta_{k;m}^i &= \delta_{k,m}^i + \Gamma_{lm}^i \delta_k^l - \Gamma_{km}^l \delta_l^i \\ &= 0 + \Gamma_{km}^i - \Gamma_{km}^i \\ &= 0 . \end{aligned} \quad (8.89)$$

- *Verallgemeinerung:* kovariante Ableitung = partielle Ableitung + positiver  $\Gamma_{jk}^i$ -Term für jeden kontravarianten Index + negativer  $\Gamma_{jk}^i$ -Term für jeden kovarianten Index.

### Rechenregeln. Kovariante Ableitung

- einer *Summe:* Sei z. B.

$$C_k^i = A_k^i + B_k^i ; \quad (8.90)$$

dann gilt

$$C_{k;m}^i = A_{k;m}^i + B_{k;m}^i \quad (8.91)$$

d. h. die Differentiation erfolgt gliedweise; Verallgemeinerung;

- eines *Produktes:* Sei z. B.

$$C^i = A_k^i B^k ; \quad (8.92)$$

dann gilt nach (8.65):

$$\begin{aligned} C_{;l}^i &= (A_k^i B^k)_{;l} + \Gamma_{kl}^i A_m^k B^m \\ &= (A_{k;l}^i + \Gamma_{ml}^i A_k^m - \Gamma_{kl}^m A_m^i) B^k + A_k^i (B_{;l}^k + \Gamma_{ml}^k B^m) \\ &= A_{k;l}^i B^k + A_k^i B_{;l}^k \end{aligned} \quad (8.93)$$

wegen (8.88), d. h. es gilt eine Produktregel. Verallgemeinerung.

**Riemann-Christoffelscher Krümmungstensor.** Die zweiten kovarianten Ableitungen sind – im Unterschied zu den zweiten partiellen Ableitungen – im Allgemeinen *nicht* vertauschbar. Betrachte z. B. den kovarianten Vektor  $A_i$ . Mit (8.84) und mit Hilfe der obigen Verallgemeinerung erhält man:

$$\begin{aligned} A_{i;kl} &= (A_{i,k} - \Gamma_{ik}^m A_m);_l \\ &= A_{i,kl} - (\Gamma_{ik}^m A_m)_{,l} \\ &\quad - \Gamma_{il}^p (A_{p,k} - \Gamma_{pk}^m A_m) - \Gamma_{kl}^q (A_{i,q} - \Gamma_{iq}^m A_m) \end{aligned}$$

sowie einem entsprechenden Ausdruck für  $A_{i;lk}$ , bei dem die Indizes  $k$  und  $l$  vertauscht sind; folglich

$$\begin{aligned} A_{i;kl} - A_{i;lk} &= A_{i,kl} - A_{i,lk} - (\Gamma_{kl}^q - \Gamma_{lk}^q) A_{i,q} \\ &\quad - \Gamma_{ik,l}^m A_m + \Gamma_{il}^p \Gamma_{pk}^m A_m \\ &\quad + \Gamma_{il,k}^m A_m - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{pl}^m A_m . \end{aligned} \tag{8.94}$$

Wegen  $A_{i,kl} = A_{i,lk}$  und  $\Gamma_{kl}^q = \Gamma_{lk}^q$ , d. i. die Symmetrieforderung (8.77 c), folgt

$$A_{i;kl} - A_{i;lk} = R_{ikl}^m A_m \tag{8.95}$$

mit

$$R_{ikl}^m = \Gamma_{il,k}^m - \Gamma_{ik,l}^m + \Gamma_{il}^p \Gamma_{pk}^m - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{pl}^m . \tag{8.96}$$

$R_{ikl}^m$  ist nach der Quotientenregel ein Tensor (4. Stufe), da  $A_{i;kl} - A_{i;lk}$  als Differenz zweier Tensoren ein Tensor (3. Stufe) und  $A_m$  ein beliebiger Tensor (1. Stufe) ist. An diesem Beispiel kann die Bedeutung der Quotientenregel erlesen werden.

**Folgerungen:**

•

$$R_{jkl}^i = -R_{jlk}^i , \tag{8.97}$$

folgt direkt aus der Definition (8.96). Diese *Antisymmetrie* gilt in allen Koordinatensystemen; vgl. (8.35).

- Sei  $\mathcal{S}_N$  ein (quasi-) *Euklidischer Raum*  $\mathcal{E}_N$ ; dann gibt es dort ein (quasi-) kartesisches Koordinatensystem, in dem gemäß (8.57) die  $\Gamma_{jk}^i$  verschwinden. Dann gilt wegen (8.96):

$$R_{jkl}^i = 0 \tag{8.98}$$

in diesem und folglich in allen anderen Koordinatensystemen. Die Umkehrung gilt auch (ohne Beweis): Falls der Riemann-Christoffel-Krümmungstensor verschwindet, dann ist der zu Grunde liegende Punktraum euklidisch (evtl. nur quasi-euklidisch).

- Unter der Voraussetzung  $\Gamma_{kl}^q = \Gamma_{lk}^q$  erhält man analog zu (8.95):

$$A^i_{;kl} - A^i_{;lk} = -R^i_{mkl} A^m . \quad (8.99)$$

- Ferner gilt unter der Voraussetzung symmetrischer Affinitäten:

$$R^i_{jkl} + R^i_{klj} + R^i_{ljk} = 0 . \quad (8.100)$$

*Beweis:* Aus (8.96) folgt

$$R^m_{ikl} = \Gamma^m_{il,k} - \Gamma^m_{ik,l} + \Gamma^p_{il} \Gamma^m_{pk} - \Gamma^p_{ik} \Gamma^m_{pl}$$

$$R^m_{kli} = \Gamma^m_{ki,l} - \Gamma^m_{kl,i} + \Gamma^p_{ki} \Gamma^m_{pl} - \Gamma^p_{kl} \Gamma^m_{pi}$$

$$\Gamma^m_{lik} = \Gamma^m_{lk,i} - \Gamma^m_{li,k} + \Gamma^p_{lk} \Gamma^m_{pi} - \Gamma^p_{li} \Gamma^m_{pk} ;$$

Addition dieser drei Gleichungen liefert wegen der vorausgesetzten Symmetrie der Affinitäten die *Behauptung*.

Auf Grund der Symmetriebeziehungen (8.97, 100) verringert sich die Anzahl der unabhängigen Komponenten von  $R^i_{jkl}$  beträchtlich: von  $N^4$  auf  $N^2(N^2 - 1) / 3$ , d. h. z. B. für  $N = 4$ : von 256 auf 80. Weitere Verringerung (für  $N = 4$  auf nur noch 20 unabhängige Komponenten) durch zusätzliche Relationen (siehe unten).

**Bianchi-Identität** ( $\Gamma_{kl}^q = \Gamma_{lk}^q$ ):

$$R^i_{jkl;m} + R^i_{jlm;k} + R^i_{jmk;l} = 0 . \quad (8.101)$$

*Beweis 1* durch direktes Ausrechnen. Mühsam.

*Beweis 2* mit dem *Lemma*: Koordinatensystem  $x$ , Punkt  $P \in \mathcal{S}_N$  mit Koordinaten  $x_0$ .  
 $\Rightarrow$  Es ergibt ein Koordinatensystem  $\bar{x}$  mit  $\bar{x}_0 = \bar{x}(x_0)$  und

$$\bar{\Gamma}^i_{jk}(\bar{x}_0) = 0 \quad \forall i, j, k , \quad (8.102)$$

d. h. alle Affinitäten verschwinden im  $\bar{x}$ -System an der Stelle  $P$ .

*Beweis für Lemma.* Übergang zu „geodätischen“ Koordinaten:

$$x^i - x_0^i = \bar{x}^i + \frac{1}{2} a_{jk}^i \bar{x}^j \bar{x}^k \quad (8.103)$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten  $a_{jk}^i$ , die symmetrisch in den Indizes  $j$  und  $k$  sind. Ableitung nach  $\bar{x}$ :

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} = \delta_j^i + a_{jk}^i \bar{x}^k, \quad (8.104)$$

folglich

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} = a_{jk}^i. \quad (8.105)$$

Im Punkt  $P$  ist  $x^i = x_0^i$ , folglich nach (8.103)  $\bar{x}_0^i = \bar{x}^i = 0$ ; somit geht dort (8.104) über in

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} = \delta_j^i; \quad (8.106)$$

damit folgt

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} = \delta_j^i \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} = \delta_k^i. \quad (8.107)$$

Mit den Gln. (8.105, 106, 107) erhält man aus (8.75) für die Stelle  $P$  die Transformation

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{pl}^i &= \delta_k^i \delta_p^m \delta_l^n \Gamma_{mn}^k + \delta_m^i a_{pl}^m \\ &= \Gamma_{pl}^i + a_{pl}^i. \end{aligned} \quad (8.108)$$

Die Wahl

$$a_{pl}^i = -\Gamma_{pl}^i \quad (8.109)$$

( $\Gamma_{pl}^i$  symmetrisch in  $p, l \Rightarrow a_{pl}^i$  symmetrisch in  $p, l$ ) impliziert demnach

$$\bar{\Gamma}_{pl}^i = 0; \quad (8.110)$$

damit ist das Lemma *bewiesen*.

Wenn die Affinitäten verschwinden, dann ist die kovariante Ableitung gleich der partiellen Ableitung. Folglich gilt mit (8.96) im  $\bar{x}$ -System an der Stelle  $P$ :

$$\begin{aligned} \bar{R}_{jkl;m}^i &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}^m} \left( \frac{\partial \bar{\Gamma}_{jl}^i}{\partial \bar{x}^k} - \frac{\partial \bar{\Gamma}_{jk}^i}{\partial \bar{x}^l} \right) \\ \bar{R}_{jlm;k}^i &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}^k} \left( \frac{\partial \bar{\Gamma}_{jm}^i}{\partial \bar{x}^l} - \frac{\partial \bar{\Gamma}_{jl}^i}{\partial \bar{x}^m} \right) \\ \bar{R}_{jmk;l}^i &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}^l} \left( \frac{\partial \bar{\Gamma}_{jk}^i}{\partial \bar{x}^m} - \frac{\partial \bar{\Gamma}_{jm}^i}{\partial \bar{x}^k} \right), \end{aligned} \quad (8.111)$$

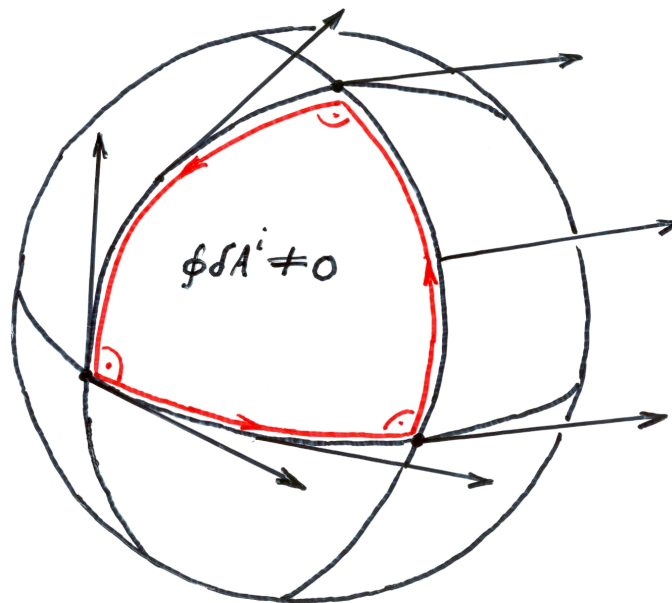
woraus für diesen Punkt folgt:

$$\bar{R}^i_{jkl;m} + \bar{R}^i_{jlm;k} + \bar{R}^i_{jmk;l} = 0 \tag{8.112}$$

wegen der Vertauschbarkeit der zweiten partiellen Ableitungen. Da (8.112) eine Tensorgleichung ist, gilt sie auch im  $x$ -System an der Stelle  $P$ ; da jedoch  $P$  beliebig ist, gilt die *Behauptung* (8.101) im ganzen  $\mathcal{S}_N$ . •

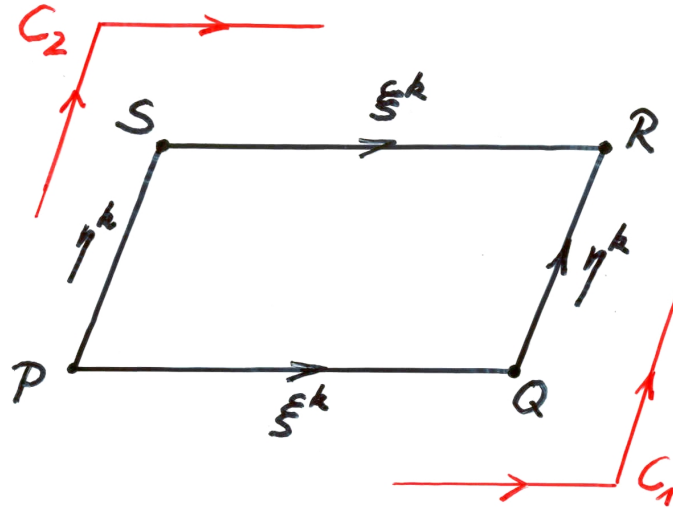
Was hat der Riemann-Christoffel-Tensor mit **Raumkrümmung** zu tun?

Parallelverschiebung eines Vektors  $A^i$  längs einer geschlossenen Kurve führt in nicht-euklidischen Räumen im Allgemeinen auf einen vom Anfangsvektor verschiedenen Endvektor; Erläuterung für speziellen  $\mathcal{R}_2$  (Kugel):



• Abbildung 8.5 •

Betrachte ein infinitesimales Parallelogramm im  $\mathcal{S}_2$ :



• Abbildung 8.6 •

$\xi^k, \eta^k$  infinitesimal klein. Parallelverschiebung  $\delta_1 A^i$  längs des Weges  $C_1$ , der von  $P$  über  $Q$  nach  $R$  führt, und  $\delta_2 A^i$  längs des Weges  $C_2$ , der von  $P$  über  $S$  nach  $R$  führt. Mit (8.58) erhält man für  $C_1$ :

$$A^i(Q) = A^i(P) - \Gamma_{jk}^i(P) A^j(P) \xi^k$$

und

$$A^i(R) = A^i(Q) - \Gamma_{jk}^i(Q) A^j(Q) \eta^k$$

mit

$$\Gamma_{jk}^i(Q) = \Gamma_{jk}^i(P) + \Gamma_{jk,l}^i(P) \xi^l,$$

woraus folgt:

$$\delta_1 A^i = (A^i(Q) - A^i(P)) + (A^i(R) - A^i(Q))$$

Argument  $P$  weglassen:

$$= -\Gamma_{jk}^i A^j \xi^k - (\Gamma_{jk}^i + \Gamma_{jk,l}^i \xi^l) (A^j - \Gamma_{mn}^j A^m \xi^n) \eta^k;$$

für  $C_2$  folgt durch Vertauschung von  $\xi$  und  $\eta$ :

$$\delta_2 A^i = -\Gamma_{jk}^i A^j \eta^k - (\Gamma_{jk}^i + \Gamma_{jk,l}^i \eta^l) (A^j - \Gamma_{mn}^j A^m \eta^n) \xi^k.$$

Die gesamte Parallelverschiebung längs des Parallelogramms beträgt

$$\begin{aligned}
 \oint \delta A^i &= \delta_1 A^i - \delta_2 A^i \\
 &= -\Gamma_{jk,l}^i A^j \xi^l \eta^k + \Gamma_{jk}^i \Gamma_{mn}^j A^m \xi^n \eta^k \\
 &\quad + \Gamma_{jk,l}^i A^j \xi^k \eta^l - \Gamma_{jk}^i \Gamma_{mn}^j A^m \xi^k \eta^n \\
 &= (\Gamma_{jl,k}^i - \Gamma_{jk,l}^i + \Gamma_{jl}^m \Gamma_{mk}^i - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{ml}^i) A^j \eta^k \xi^l \\
 &= R_{jkl}^i A^j \eta^k \xi^l,
 \end{aligned} \tag{8.113}$$

wobei zuletzt die Definition (8.96) benutzt wurde. Eine Verallgemeinerung dieser Analyse auf beliebig geformte infinitesimale geschlossene Wege ist möglich.  $R_{jkl}$  ist demnach ein Maß für die Abweichung der gesamten Parallelverschiebung von Vektoren längs derartiger Wege vom Wert null.

### 8.3 Metrische Verknüpfung: Übergang zum $\mathcal{R}_N$

Unter einem **Riemannschen Raum**  $\mathcal{R}_N$  versteht man einen allgemeinen Punktraum  $\mathcal{S}_N$ , in dem zusätzlich eine **Metrik** definiert ist: Der Abstand  $ds$  zweier infinitesimal benachbarter Punkte  $x^i$  und  $x^i + dx^i$  ist durch (siehe Einleitung zu Kap. 8)

$$ds^2 = g_{ij}(x^1, x^2, \dots, x^N) dx^i dx^j \tag{8.114}$$

gegeben. Eine derartige Beziehung zwischen allen Paaren von infinitesimal benachbarten Punkten nennt man **metrische Verknüpfung**. Aus der Forderung, dass  $ds^2$  skalare Invariante ist, und aus der Tatsache, dass  $dx^i dx^j$  ein beliebiger (symmetrischer) Tensor ist, folgt mit der Quotientenregel, dass  $g_{ij}$  (symmetrischer) Tensor ist: *metrischer Tensor*, auch *kovarianter Fundamentaltensor*. Zusätzlich wird gefordert:  $\|g_{ij}\| \neq 0$ .

„Herunterziehen“ eines kontravarianten Index: Sei  $A^i$  ein kontravarianter Vektor, dann ist

$$A_i = g_{ij} A^j \tag{8.115}$$

ein kovarianter Vektor.  $A^i$  und  $A_i$  sind die kontravarianten bzw. die kovarianten Komponenten *eines und desselben* Vektors!

*Erläuterung* im  $\mathcal{E}_N$ ; dort ist

$$ds^2 = (dx)^2 \tag{8.116}$$

mit dem infinitesimalen Verschiebungsvektor  $dx \in E_N$ . Bei Einführung der Basis  $e_1, e_2, \dots, e_N \in E_N$  hat man

$$dx = dx^i e_i,$$

folglich

$$ds^2 = e_i \cdot e_j dx^i dx^j ,$$

somit

$$g_{ij} = e_i \cdot e_j . \quad (8.117)$$

Entwicklung eines beliebigen Vektors  $A \in E_N$  nach der  $e_i$ -Basis:

$$A = A^i e_i . \quad (8.118)$$

Die Entwicklungskoeffizienten  $A^i$  sind die *kontravarianten* Komponenten von  $A$ .

Übergang zur reziproken Basis  $e^1, e^2, \dots, e^N \in E_N$  mit (siehe Abschnitt 8.1)

$$e_i \cdot e^j = \delta_i^j . \quad (8.119)$$

Entwicklung von  $A$  nach der  $e^i$ -Basis:

$$A = A_i e^i \quad (8.120)$$

liefert als Entwicklungskoeffizienten  $A_i$  die *kovarianten* Komponenten von  $A$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} A_i &= e_i \cdot A \\ &= e_i \cdot e_j A^j \\ &= g_{ij} A^j , \end{aligned} \quad (8.121)$$

d. h. Übergang von den kontra- zu den kovarianten Komponenten mit Hilfe des kovarianten Fundamentaltensors.

Unter dem *kontravarianten Fundamentaltensor* versteht man den in (8.41) eingeführten, ebenfalls symmetrischen, zu  $g_{ij}$  inversen Tensor  $g^{ij}$ :

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k . \quad (8.122)$$

„Heraufziehen“ eines kovarianten Index: Sei  $B_i$  ein kovarianter Vektor, dann ist

$$B^i = g^{ij} B_j \quad (8.123)$$

ein kontravarianter Vektor. Bei  $B_i$  und  $B^j$  handelt es sich wiederum um die kovarianten bzw. kontravarianten Komponenten *eines und desselben* Vektors!



Konsistenz:

$$g_{ij} g^{jk} B_k = B_i \tag{8.124}$$

$$g^{ij} g_{jk} A^k = A^i ,$$

d. h. sukzessives Herauf- und Herunter (Herunter- und Herauf) ziehen führt zu den ursprünglichen Komponenten zurück.

Fortsetzung der Erläuterung im  $\mathcal{E}_N$ :

$$g^{ij} = e^i \cdot e^j ; \tag{8.125}$$

denn

$$\begin{aligned} (e_i \cdot e_j) (e^j \cdot e^k) &= ((e_i \cdot e_j) e^j) \cdot e^k \\ &= e_i \cdot e^k \\ &= \delta_i^k . \end{aligned} \tag{8.126}$$

Analog zu (8.121) gilt:

$$\begin{aligned} B^i &= e^i \cdot B \\ &= e^i \cdot e^j B_j \\ &= g^{ij} B_j \end{aligned} \tag{8.127}$$

d. h. Übergang von den ko- zu den kontravarianten Komponenten mit Hilfe des kontravarianten Fundamentaltensors.

Herauf- und Herunterziehen von Indizes in beliebigen Tensoren. Sei  $A_{jk}^i$  ein Tensor, dann ist auch

$$A_k^{ij} = g^{jl} A_{lk}^i \tag{8.128}$$

ein Tensor; und zwar handelt es sich bei  $A_{jk}^i$  und  $A_k^{ij}$  um die durch die Indexstellung gekennzeichneten Komponenten eines und desselben Tensors. Im Beispiel (8.128) wurde der Index  $j$  heraufgezogen. Verallgemeinerung.

**Beispiel:**

$$g_j^i = g^{ik} g_{kj} = g_{jk} g^{ki} = \delta_j^i , \tag{8.129}$$

das ist der gemischte **Fundamentaltensor** (im  $\mathcal{E}_N$  ist  $g_i^j = e_i \cdot e^j$ ). Man erhält ihn durch Heraufziehen eines Index von  $g_{ij}$  oder durch Herunterziehen eines Index von  $g^{ij}$ . Zieht man in  $\delta_j^i$  den oberen Index herunter, so gelangt man zu  $g_{ij}$ ; zieht man hingegen den unteren Index nach oben, so gelangt man zu  $g^{ij}$ :

$$g_{ik} \delta_j^k = g_{ij} \tag{8.130 a}$$

bzw.

$$g^{ik} \delta_k^j = g^{ij} . \quad (8.130 \text{ b})$$

Also:  $g_{ij}$  sind die kovarianten,  $g_j^i = \delta_j^i$  die gemischten und  $g^{ij}$  die kontravarianten Komponenten des *einen* Fundamental tensors •

**Inneres Produkt** zweier Vektoren  $A_i, A^i$  und  $B_i, B^i$  auf vier verschiedene Weisen darstellbar:

$$A_i B^i = g_{ij} A^i B^j = g^{ij} A_i B_j = A^i B_i . \quad (8.131)$$

Beweis mit Hilfe der vorstehenden Formeln betreffend  $g_{ij}, g^{ij}, g_i^j$ .

Ein Spezialfall ist die *Norm* eines Vektors  $A_i, A^i$  (genauer: das Normquadrat):

$$\|A\|^2 = A_i A^i = g_{ij} A^i A^j = g^{ij} A_i A_j . \quad (8.132)$$

Ein wichtiges *Beispiel* ist das Abstandsquadrat  $ds^2$  zweier infinitesimal benachbarter Punkte als Norm des Verschiebungsvektors  $dx_i, dx^i$ :

$$ds^2 = dx_i dx^i = g_{ij} dx^i dx^j = g^{ij} dx_i dx_j ;$$

das ist Gl. (8.114) nebst zwei weiteren äquivalenten Darstellungen.

**Kartesische Koordinaten**  $y^i$  im  $\mathcal{E}_N$ :

$$ds^2 = dy^i dy^i ,$$

demnach ist dort

$$g_{ij} = g^{ij} = \delta_j^i \quad (8.133)$$

( $\{e^i\} = \{e_i\} = \text{ON-Basis im } E_N$ ). Folglich gilt  $A_i = A^i$  für alle Vektoren: kein Unterschied zwischen ko- und kontravariantem Index; gilt auch für alle anderen Tensoren: *kartesische Tensoren* (siehe oben).

**Lokale kartesische Koordinaten** im  $\mathcal{R}_N$ : Punkt  $P \in \mathcal{R}_N$  mit den Koordinaten  $x_0^i$ . Abstand von  $P$  gegeben durch

$$ds^2 = g_{ij}(P) dx^i dx^j . \quad (8.134)$$

Lineare Transformation:

$$x^i - x_0^i = a_k^i y^k , \quad y_0^k = y^k(x_0^i) \stackrel{!}{=} 0 , \quad (8.135)$$

impliziert

$$ds^2 = a_k^i a_l^j g_{ij}(P) dy^k dy^l ;$$

durch geeignete Wahl der  $a_k^i$  und  $y^k$  erreicht man

$$ds^2 = dy^k dy^k . \quad (8.136)$$

Beweis: Diagonalisierung der reell-symmetrischen Matrix  $g_{ij}$  durch geeignete Orthogonalmatrix  $a_k^i$ ; Normierung der  $y^k$  entsprechend den Absolutwerten der Eigenwerte; bei negativen Eigenwerten ist die zugehörige  $y$ -Koordinate imaginär zu wählen. Also hat man im Allgemeinen nur quasi-kartesische Koordinaten. – Die Beziehung (8.136) gilt exakt nur für die Stelle  $P$ , in der Umgebung ist sie nur näherungsweise erfüllt. •

Außer der Einschränkung durch die Symmetrie  $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$  gemäß (8.77 b) sind die Affinitäten im  $\mathcal{R}_N$  beliebig wählbar. Welche Wahl wird getroffen?

**Metrische Affinität.** Sei  $A_i$  ein beliebiger kovarianter Vektor. Wähle die affine Verknüpfung so, dass gilt:

$$A_{i;k} = (g_{ij} A^j)_{;k} = g_{ij} (A^j_{;k}) , \quad (8.137)$$

d. i. Vertauschbarkeit der Operationen „Übergang von kontra- zu kovarianten Komponenten (Herunterziehen des Index)“ und „Bildung der kovarianten Ableitung“.

Aus (8.137) folgt mit Hilfe der Produktregel:

$$g_{ij;k} A^j = 0 ,$$

daraus wegen der Beliebigkeit der  $A^j$ :

$$g_{ij;k} = 0 . \quad (8.138)$$

Nach der kovarianten Ableitungsregel im Anschluss an (8.88) bedeutet das (inkl. zyklischer Vertauschungen):

$$g_{ij,k} - \Gamma_{ik}^l g_{lj} - \Gamma_{jk}^l g_{il} = 0 \quad (8.139 \text{ a})$$

$$g_{jk,i} - \Gamma_{ji}^l g_{lk} - \Gamma_{ki}^l g_{jl} = 0 \quad (8.139 \text{ b})$$

$$g_{ki,j} - \Gamma_{kj}^l g_{li} - \Gamma_{ij}^l g_{kl} = 0 . \quad (8.139 \text{ c})$$

Bilde (8.139 b) + (8.139 c) – (8.139 a):

$$g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k} - 2\Gamma_{ij}^l g_{lk} = 0 ;$$

daraus folgt

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^l g_{lk} &= \frac{1}{2} (g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k}) \\ &=: [ij, k];\end{aligned}\tag{8.140}$$

das sind die **Christoffel-Symbole 1. Art**: symmetrisch in  $i$  und  $j$ , kein Tensor.

Multiplikation von (8.140) mit  $g^{mk}$  (sowie Summation über  $k$ ):

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^m &= \frac{1}{2} g^{mk} (g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k}) \\ &=: \left\{ \begin{matrix} m \\ ij \end{matrix} \right\};\end{aligned}\tag{8.141}$$

das sind die **Christoffel-Symbole 2. Art**: symmetrisch in  $i$  und  $j$ , kein Tensor.

*Zusammenhang* zwischen den Christoffel-Symbolen 1. und 2. Art:

$$[ij, k] = g_{kl} \left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\}\tag{8.142 a}$$

bzw.

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} = g^{kl} [ij, l].\tag{8.142 b}$$

Die Christoffel-Symbole 1. und 2. Art sind durch die (formalen) Operationen des Herunter- bzw. Heraufziehens eines Index mit Hilfe des Fundamentaltensors miteinander verknüpft, jedoch keine Tensoren!

Ausgehend von der Forderung  $g_{ij;k} = 0$  gelangten wir zu dem Resultat, dass die Affinitäten gemäß (8.140, 141) mit dem metrischen Tensor zu verknüpfen sind, d. h. gleich den Christoffel-Symbolen 2. Art sind. Die Umkehrung gilt auch (ohne Beweis): Aus der Forderung

$$\Gamma_{jk}^i = \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}\tag{8.143}$$

folgt

$$g_{ij;k} = g^{ij}_{;k} = g^i_{j;k} = 0\tag{8.144}$$

d. h. der Fundamentaltensor verhält sich in allen drei Darstellungen gegenüber kovarianter Differentiation wie eine Konstante.

Im Folgenden wird durchweg die *metrische Affinität* zu Grunde gelegt, d. h. die  $\Gamma_{jk}^i$  werden gemäß (8.140, 141) mit dem metrischen Tensor verknüpft.

Zum **kovarianten Krümmungstensor** gelangt man – ausgehend von (8.96) – durch Herunterziehen des oberen Index. Mit (8.141) erhält man

$$\begin{aligned}
 R_{ijkl} &= g_{im} R_{jkl}^m \\
 &= g_{im} \left( \left\{ \begin{matrix} m \\ jl \end{matrix} \right\}_{,k} - \left\{ \begin{matrix} m \\ jk \end{matrix} \right\}_{,l} + \left\{ \begin{matrix} n \\ jl \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ nk \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} n \\ jk \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ nl \end{matrix} \right\} \right) \\
 &= \left( g_{im} \left\{ \begin{matrix} m \\ jl \end{matrix} \right\} \right)_{,k} - g_{im,k} \left\{ \begin{matrix} m \\ jl \end{matrix} \right\} \\
 &\quad - \left( g_{im} \left\{ \begin{matrix} m \\ jk \end{matrix} \right\} \right)_{,l} + g_{im,l} \left\{ \begin{matrix} m \\ jk \end{matrix} \right\} \\
 &\quad + g_{im} \left\{ \begin{matrix} m \\ nk \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} n \\ jl \end{matrix} \right\} - g_{im} \left\{ \begin{matrix} m \\ nl \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} n \\ jk \end{matrix} \right\} ;
 \end{aligned}$$

daraus mit (8.142 a):

$$\begin{aligned}
 R_{ijkl} &= [jl, i]_{,k} - (g_{im,k} - [mk, i]) \left\{ \begin{matrix} m \\ jl \end{matrix} \right\} \\
 &\quad - [jk, i]_{,l} + (g_{im,l} - [ml, i]) \left\{ \begin{matrix} m \\ jk \end{matrix} \right\} .
 \end{aligned} \tag{8.145}$$

Aus (8.140) folgt

$$\begin{aligned}
 [jl, i]_{,k} &- [jk, i]_{,l} \\
 &= \frac{1}{2} (g_{li,j} + g_{ij,l} - g_{jl,i})_{,k} - \frac{1}{2} (g_{ki,j} + g_{ij,k} - g_{jk,i})_{,l} \\
 &= \frac{1}{2} (g_{li,jk} - g_{jl,ik} - g_{ki,jl} + g_{jk,il})
 \end{aligned} \tag{8.146}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 g_{im,k} - [mk, i] &= g_{im,k} - \frac{1}{2} (g_{ki,m} + g_{im,k} - g_{mk,i}) \\
 &= \frac{1}{2} (g_{km,i} + g_{mi,k} - g_{ik,m}) \\
 &= [ik, m] .
 \end{aligned} \tag{8.147}$$

Mit (8.146, 147) geht (8.145) über in

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}(g_{li,jk} - g_{jl,ik} - g_{ki,jl} + g_{jk,il}) - [ik, m] \begin{Bmatrix} m \\ jl \end{Bmatrix} + [il, m] \begin{Bmatrix} m \\ jk \end{Bmatrix} . \quad (8.148)$$

Ersetzt man die Christoffel-Symbole 1. und 2. Art gemäß (8.140, 141), so ist der kovariante Krümmungstensor vollständig durch den metrischen Tensor und seine ersten und zweiten partiellen Ableitungen ausgedrückt.

Aus (8.148) liest man die folgenden **Symmetrien** ab:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij} ; \quad (8.149)$$

ferner gilt

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0 ; \quad (8.150)$$

diese Beziehung folgt aus (8.100) durch Herunterziehen des kontravarianten Index.

Durch die Symmetriebeziehungen (8.149, 150) verringert sich die Anzahl unabhängiger Komponenten des Krümmungstensors von  $N^4$  auf  $N^2(N^2 - 1)/12$ , d. h. für  $N = 4$  von 256 auf 20. Aus den Symmetriebeziehungen (8.97, 100) hatte sich nur eine Reduktion auf 80 unabhängige Komponenten ergeben.

Auch die **Bianchi-Identität** gilt analog:

$$\begin{aligned} R_{ijkl;m} + R_{ijlm;k} + R_{ijmk;l} \\ &= (g_{in} R_{jkl}^n)_{;m} + (g_{in} R_{jlm}^n)_{;k} + (g_{in} R_{jmk}^n)_{;l} \\ &= g_{in} (R_{jkl;m}^n + R_{jlm;k}^n + R_{jmk;l}^n) \\ &= 0 , \end{aligned} \quad (8.151)$$

da wegen (8.101) die runde Klammer verschwindet; im vorletzten Schritt wurde von (8.138) Gebrauch gemacht.

Der **Ricci-Tensor** entsteht durch Verjüngung des Krümmungstensors  $R_{jkl}^i$ . Es gibt drei verschiedene Möglichkeiten, die jedoch insgesamt nur auf *einen* nichttrivialen Tensor 2. Stufe führen. Erste Möglichkeit:

$$R_{jki}^i =: R_{jk} . \quad (8.152)$$

Wegen (8.97) ergibt die zweite Möglichkeit nichts Neues:

$$R_{jil}^i = -R_{jl} . \quad (8.153)$$

Die dritte Möglichkeit führt auf den Nulltensor (trivial):

$$\begin{aligned}
 R_{ikl}^i &= \delta_i^m R_{mkl}^i \\
 &= g^{mn} g_{ni} R_{mkl}^i \\
 &= g^{mn} R_{nmkl} \\
 &= 0 ,
 \end{aligned} \tag{8.154}$$

da  $g^{mn}$  symmetrisch,  $R_{nmkl}$  aber antisymmetrisch (in den ersten beiden Indizes) ist.

Der Ricci-Tensor ist – wegen (8.149) – *symmetrisch*:

$$\begin{aligned}
 R_{jk} &= g^{il} R_{ljk}^i \\
 &= g^{il} R_{ikjl} \\
 &= R_{kjl}^l \\
 &= R_{kj} ,
 \end{aligned} \tag{8.155}$$

wobei zuletzt die Definition (8.152) benutzt wurde.

Schließlich erhält man durch Verjüngung des Ricci-Tensors den **Krümmungskalar** (auch: **Ricci-Skalar**). Man geht zunächst vom kovarianten zum gemischten Ricci-Tensor über:

$$R_k^i = g^{ij} R_{jk} \tag{8.156}$$

und bildet sodann die Verjüngung:

$$R = R_i^i ; \tag{8.157}$$

diese ist eine skalare Invariante (ein skalares Feld!).

Aus (8.156, 157) bildet man den **Einstein-Tensor**:

$$G_k^i := R_k^i - \frac{1}{2} \delta_k^i R . \tag{8.158}$$

Für diesen gilt die wichtige Aussage:

$$G_{k;i}^i = 0 , \tag{8.159}$$

d. h. die kovariante Divergenz des Einstein-Tensors verschwindet.

*Beweis:* Aus der Bianchi-Identität (8.151) folgt mit (8.149) die Beziehung

$$R_{ijkl;m} - R_{ijml;k} - R_{jimk;l} = 0 ; \tag{8.160}$$

Multiplikation mit  $g^{il} g^{jk}$  (sowie Summation über Paare gleicher Indizes) führt auf

$$g^{jk} R_{jkl;m}^l - g^{jk} R_{jml;k}^l - g^{il} R_{imk;l}^k = 0 ;$$

mit (8.152) erhält man

$$g^{jk} R_{jk;m} - g^{jk} R_{jm;k} - g^{il} R_{im;l} = 0 ;$$

daraus folgt mit (8.144, 157):

$$R_{;m} - 2 R_{m;k}^k = 0 ,$$

also

$$\left( R_m^k - \frac{1}{2} \delta_m^k R \right)_{;k} = 0 . \quad (8.161)$$

Das ist die *Behauptung* (8.158, 159).

*Anmerkungen:*

- Durch (8.158) ist der gemischte Einstein-Tensor gegeben. Daneben gibt es natürlich den kovarianten und den kontravarianten Einstein-Tensor:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \quad (8.162 \text{ a})$$

bzw.

$$G^{ik} = R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R . \quad (8.162 \text{ b})$$

- Das Verschwinden der Divergenz von  $G_k^i$  ist von grundlegender Bedeutung für die Allgemeine Relativitätstheorie (siehe unten).  $G_{ik}$  ist nämlich für  $N = 4$  neben  $g_{ik}$  selbst der einzige (symmetrische) Tensor 2. Stufe mit dieser Eigenschaft, der aus  $g_{ik}$  und dessen ersten und zweiten partiellen Ableitungen gebildet werden kann. Siehe D. Lovelock, J. Math. Phys. **13** (1972) 874. Die vorstehenden Aussagen gelten für die Tensoren  $G^{ik}$  und  $g^{ik}$  entsprechend.



## 9 Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

### Spezielle Relativitätstheorie:

1. Den physikalischen *Ereignissen* an den Stellen  $(x, y, z)$  zu den Zeiten  $t$  – bezogen auf ein Inertialsystem – werden in eindeutiger Weise die *Punkte* der Raumzeit zugeordnet. Zwei Möglichkeiten (unter vielen anderen):

- vierdimensionaler *Riemannscher Raum*  $\mathcal{R}_4$  mit Koordinaten

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct,$$

als *Galilei-Koordinaten* bezeichnet, und der Metrik

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2,$$

somit

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

- vierdimensionaler *quasi-Euklidischer Raum*  $\mathcal{E}_4$  mit quasi-kartesischen Koordinaten

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ict,$$

als *Minkowski-Koordinaten* bezeichnet, und der Metrik

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2,$$

somit

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}.$$

In jedem der beiden Fälle verschwinden die Affinitäten, folglich der Riemann-Christoffel-Krümmungstensor:

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ j \ k \end{matrix} \right\} = 0 \quad \Rightarrow \quad R^i_{jkl} = 0.$$

2. Der *Übergang* von einem Inertialsystem mit  $(x, y, z, t)$  zu einem anderen Inertialsystem mit  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$  wird durch die *Lorentz-Transformation* beschrieben. Diese ist sowohl im obigen  $\mathcal{R}_4$ , als auch im quasi- $\mathcal{E}_4$  linear:

$$\bar{x}^i = a_j^i x^j ,$$

was durch die Gültigkeit des Trägheitsgesetzes in beiden Systemen erzwungen wird, und sie erhält in beiden Fällen die Metrik:

$$\bar{g}_{ij} = g_{ij} ,$$

was eine Konsequenz der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit ist. Speziell im quasi- $\mathcal{E}_4$  folgt daraus die Orthogonalität der Lorentz-Transformation.

3. Nach dem *Speziellen Relativitätsprinzip* laufen die physikalischen Vorgänge in allen Inertialsystemen gleich ab; kein Inertialsystem ist vor dem anderen ausgezeichnet. Demnach sind die Grundgleichungen der Physik *kovariant*, d. h. forminvariant unter Lorentz-Transformationen zu formulieren; die physikalischen Größen müssen sich also unter Lorentz-Transformationen wie Tensoren transformieren – wie kartesische Tensoren im Spezialfalle des quasi- $\mathcal{E}_4$ .

### Verallgemeinerungen:

1. Die ausgezeichnete Stellung der Inertialsysteme und damit der Galilei- bzw. der Minkowski-Koordinaten wird aufgegeben. Es werden beliebig bewegte Bezugssysteme und – darüber hinaus – beliebige Koordinatensysteme zugelassen: *Allgemeines Relativitätsprinzip*; siehe Abschnitt 9.1. An der Struktur der Raumzeit ändert sich dadurch zunächst nichts; es gilt weiterhin

$$R_{jkl}^i = 0 ,$$

aber wegen der Krümmlichkeit der neuen Koordinaten ist im Allgemeinen

$$\left\{ \begin{array}{c} i \\ j \ k \end{array} \right\} \neq 0 .$$

2. Übergang von einer „flachen“ zu einer „gekrümmten“ Raumzeit mit

$$R_{jkl}^i \neq 0 ,$$

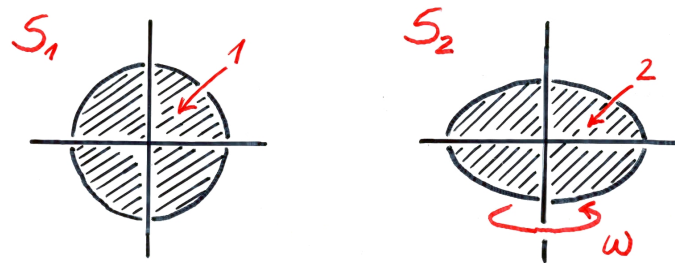
deren Krümmung durch die Verteilung der Masse bzw. der Energie gegeben ist: *Äquivalenzprinzip* und *Einsteinsche Feldgleichungen*; siehe Abschnitt 9.2.

In Abschnitt 9.3 werden *Experimentelle Tests* der Allgemeinen Relativitätstheorie beschrieben, und in Abschnitt 9.4 geht es um Fragen der *Kosmologie*.

## 9.1 Das Allgemeine Relativitätsprinzip

*Einstein (1916):* Kritik an der ausgezeichneten Stellung der Inertialsysteme und am Begriff des absoluten Raumes: „Man kann ... die Hypothese des absoluten Raumes durch nichts anderes belegen als durch die Tatsachen, zu deren Erklärung sie eingeführt worden ist.“ Fiktive Ursache! Gibt es eine konkretere Ursache?

*Beispiel:* Zwei Flüssigkeitstropfen 1 und 2 in rotierender Relativbewegung. Tropfen 1 ruhe im Inertialsystem  $S_1$ , Tropfen 2 ruhe im rotierenden System  $S_2$  („ruhe“ meint: nicht nur keine Translations-, sondern auch keine Rotationsbewegung). Man beobachtet: In  $S_1$  ist der Tropfen eine Kugel, in  $S_2$  ein abgeplattetes Rotationsellipsoid:



• Abbildung 9.1 •

*Erklärung:* Ursache für die Deformation ist die Zentrifugalkraft. Diese wird hervorgerufen durch die Relativbewegung von  $S_2$  gegen

- *Newton:* ... den absoluten Raum (Abschnitt 5.1);
- *Einstein:* ... die entfernten Massen des Universums (Abschnitt 9.2). Es gibt keinen vernünftigen Grund zu der Annahme, dass ohne das „restliche Universum“ sich die beiden Tropfen verschieden verhalten würden. Prinzipiell sind demnach die Ruhssysteme  $S_1$  und  $S_2$  der beiden Tropfen gleichberechtigt.

*Einwand und Gegenargument:* Der gesamte „materielle Kosmos“ als Ursache der Trägheitskräfte ist zwar konkreter als der „absolute Raum“, trotzdem bleibt der Tatbestand: Im beschleunigten System treten Trägheitskräfte auf, im Inertialsystem nicht. Das begründet jedoch keine Ausnahmestellung der Inertialsysteme, da man die Trägheitskräfte wie beliebige Kräfte behandeln kann:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{f} - m(\vec{g} + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}); \quad (9.1)$$

vgl. Abschnitt 5.1.

*Hinweis* auf die *Elektrodynamik*: Eine Ladungsverteilung sei stationär in Bezug auf ein Inertialsystem  $\Rightarrow$  kein  $\vec{B}$ -Feld. In einem anderen Inertialsystem ist dieselbe Ladungsverteilung im Allgemeinen nicht stationär  $\Rightarrow$  nichtverschwindendes  $\vec{B}$ -Feld. Daraus resultiert keine prinzipielle Auszeichnung des primären Inertialsystems, sondern höchstens eine praktische Bevorzugung.

*Folgerung*: Alle (beliebig bewegten) Bezugssysteme sind gleichberechtigt. Die Gesetze der Physik sind in allen (beliebig bewegten) Bezugssystemen von gleicher Gestalt. Vorläufige Formulierung des *Allgemeinen Relativitätsprinzips*.

*Anmerkung* zu Gl. (9.1): Die Trägheitskräfte wirken wegen ihrer Massenproportionalität wie ein Gravitationsfeld (siehe unten).

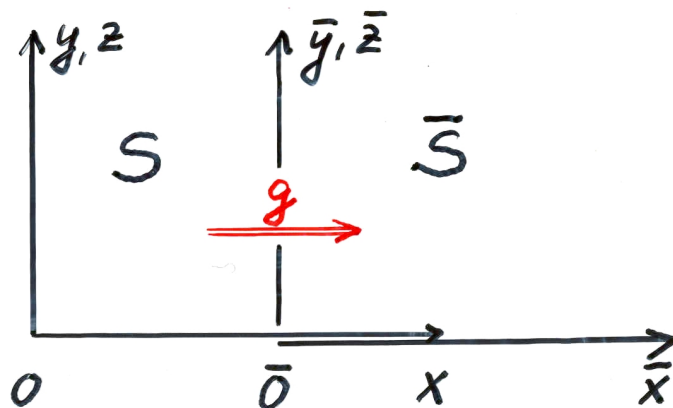
Die bisherige Motivation für die gleichberechtigte Einbeziehung beschleunigter Bezugssysteme in die Relativitätstheorie war *erkenntnistheoretischer Natur*: Es spricht nichts anderes, als nur die fiktive Ursache „absoluter Raum“, für eine Auszeichnung der Inertialsysteme; daher ist diese Auszeichnung (als prinzipielle Auszeichnung!) zu verwerfen, und beliebige andere Bezugssysteme sind gleichberechtigt zuzulassen. Es besteht aber auch ein *konkretes physikalisches Interesse* an der Möglichkeit, auf beschleunigte Bezugssysteme überzugehen. *Beispiele*: Zwillingsparadoxon; Hafele-Keating-Experiment (siehe Abschnitt 5.4).

Beim Übergang von einem Inertialsystem  $S$  auf ein beschleunigtes System  $\bar{S}$  ergeben sich die folgenden Fragen:

1. Welche Koordinaten wählt man in  $\bar{S}$ ?
2. Wie ist der Zusammenhang mit den Koordinaten in  $S$ ?

Erläuterung durch die nachfolgenden Beispiele:

1. **Gleichförmige Linearbeschleunigung**:  $\vec{g} = g \hat{x}$ .



• Abbildung 9.2 •

In  $S$  werden die Galilei-Koordinaten  $x, y, z$  und  $ct$  gewählt, in  $\bar{S}$  die Raumzeit-Koordinaten  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  und  $c\bar{t}$ . Die geometrisch-physikalische Bedeutung der gequerten Koordinaten ergibt sich aus ihrem Zusammenhang mit den ungequerten Koordinaten. Sei „anschaulich“

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + \frac{g}{2} \bar{t}^2 \\ y &= \bar{y} \\ z &= \bar{z} \\ t &= \bar{t}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Für das infinitesimale Abstandsquadrat folgt

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \\ &= d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 + 2g\bar{t}d\bar{x}d\bar{t} - (c^2 - (g\bar{t})^2)d\bar{t}^2. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Betrachte ein in  $\bar{S}$

- *stationäres Ereignispaar*, z. B. zwei infinitesimal benachbarte Zeigerstellungen einer in  $\bar{S}$  ruhenden Uhr:  $d\bar{x} = d\bar{y} = d\bar{z} = 0$ , dann ist

$$ds = ic \sqrt{1 - \left(\frac{g}{c}\bar{t}\right)^2} d\bar{t}. \quad (9.4)$$

Für dieses *zeitartige* Ereignispaar gilt andererseits

$$ds = ic d\tau, \quad (9.5)$$

wo  $d\tau$  das Eigenzeitintervall ist, d. h. die Differenz der beiden Zeigerstellungen. Der Vergleich von (9.4) und (9.5) ergibt

$$d\tau = \sqrt{1 - \left(\frac{g}{c}\bar{t}\right)^2} d\bar{t}, \quad (9.6)$$

d. h. es ist  $d\bar{t} \neq d\tau$ . Die Uhr zeigt die Zeit  $\tau$  und *nicht*  $\bar{t}$  an;  $\bar{t}$  ist ja gleich der Zeit in  $S$ . Gleichwohl ist  $\bar{t}$  genauso gut wie  $\tau$  dazu geeignet, die Zeigerstellung der in  $\bar{S}$  ruhenden Uhr zu parametrisieren (solange  $g\bar{t} < c$  gilt). Der Zusammenhang  $\tau(\bar{t})$  ist aus (9.6) zu berechnen.

Schreibt man (9.6) mit  $\bar{t} = t$  in der Gestalt

$$d\tau = \sqrt{1 - \left(\frac{g}{c}t\right)^2} dt,$$

d. h.

$$dt = \gamma(gt) d\tau, \quad (9.7)$$

so erkennt man daran den (hier zeitabhängigen) Effekt der Zeitdehnung beim Übergang von  $\bar{S}$  nach  $S$ . Der relativistische Faktor  $\gamma(\dots)$  ist in (5.41) definiert.

- *gleichzeitiges Ereignispaar*, z. B. die Enden eines in  $\bar{S}$  ruhenden infinitesimalen Maßstabes zu einer (bezüglich  $\bar{S}$ ) fixen Zeit; wegen (5.40) gilt im „momentanen“, mit  $u = gt$  relativ zu  $S$  bewegten Inertialsystem  $\tilde{S}$ :

$$d\tilde{t} = \gamma(gt) \left( dt - \frac{gt}{c^2} dx \right) = 0. \quad (9.8)$$

Um unter dieser Bedingung  $ds$  zu berechnen, wird (9.3) wie folgt umgeformt (durch quadratische Ergänzung und mit Hilfe von (9.2)):

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{d\bar{x}^2}{1 - (g\bar{t}/c)^2} - d\bar{y}^2 - d\bar{z}^2 \\ &= -\frac{c^2}{1 - (g\bar{t}/c)^2} \left( \left( 1 - \left(\frac{g}{c}\bar{t}\right)^2 \right) d\bar{t} - \frac{g}{c^2}\bar{t}d\bar{x} \right)^2 \\ &= -\frac{c^2}{1 - (gt/c)^2} \left( dt - \frac{gt}{c^2} dx \right)^2 \\ &= -c^2 d\tilde{t}^2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (9.9)$$

wegen (9.8). Der Abstand  $d\sigma = ds$  des betrachteten *raumartigen* Ereignispaars beträgt demnach

$$d\sigma = \sqrt{\frac{d\bar{x}^2}{1 - (g\bar{t}/c)^2} + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2}. \quad (9.10)$$

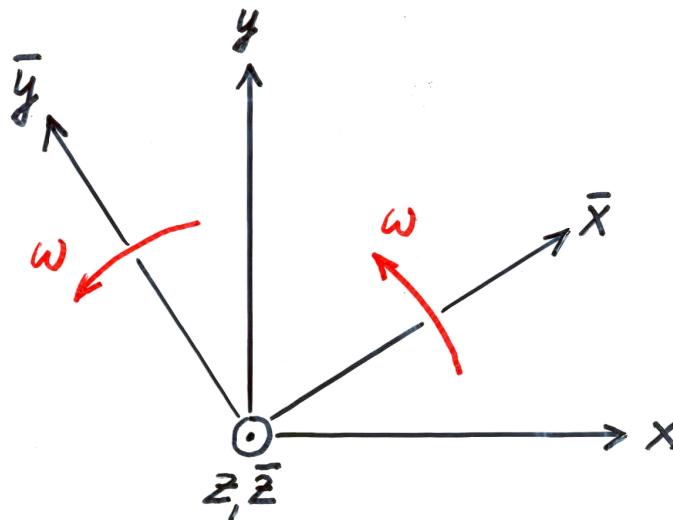
Er ist in den gequerten Ortskoordinaten nicht durch die Pythagoras-Formel gegeben; denn  $\bar{x}$  hat in  $\bar{S}$  *nicht* die Bedeutung der kartesischen Ortskoordinate in  $g$ -Richtung. Vielmehr gilt für das Ruhlängenintervall in dieser Richtung:

$$d\tilde{x} = \frac{d\bar{x}}{\sqrt{1 - (g\bar{t}/c)^2}}. \quad (9.11)$$

Die Position  $\tilde{x}$  in  $g$ -Richtung ist nach (9.11) durch  $\bar{x}$  und  $\bar{t}$  parametrisierbar.

## 2. Gleichförmige Drehbewegung: $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ .

In  $S$  werden die Koordinaten  $\rho, \varphi, z$  (Zylinderkoordinaten) und  $t$  (Zeit) gewählt, in  $\bar{S}$  die Raumzeitkoordinaten  $\bar{\rho}, \bar{\varphi}, \bar{z}$  und  $\bar{t}$ :



• Abbildung 9.3 •

Sei „anschaulich“

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\rho} \\ \varphi &= \bar{\varphi} + \omega \bar{t} \\ z &= \bar{z} \\ t &= \bar{t}. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Welche geometrisch-physikalische Bedeutung der gequerten Koordinaten resultiert aus dieser Verknüpfung mit den ungequerten Koordinaten? Infinitesimales Abstandsquadrat:

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \\ &= d\bar{\rho}^2 + \bar{\rho}^2 d\bar{\varphi}^2 + d\bar{z}^2 + 2\omega\bar{\rho}^2 d\bar{\varphi} d\bar{t} - (c^2 - \omega^2\bar{\rho}^2) d\bar{t}^2. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Betrachte wieder ein in  $\bar{S}$

- *stationäres Ereignispaar*:  $d\bar{\rho} = \bar{\rho} d\bar{\varphi} = d\bar{z} = 0$ , dann ist

$$ds = ic \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{c} \bar{\rho}\right)^2} d\bar{t}. \quad (9.14)$$

Daraus ergibt sich das Eigenzeitintervall in  $\bar{S}$  zu

$$d\tau = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{c} \bar{\rho}\right)^2} d\bar{t}. \quad (9.15)$$

Die Eigenzeit ist hier sogar ortsabhängig; vgl. (9.6). Die Transformation (9.12) ist nur sinnvoll für  $\omega\bar{\rho} < c$ , d. h. die lokale Relativgeschwindigkeit von  $\bar{S}$  und  $S$  ist kleiner als die Lichtgeschwindigkeit.

- *gleichzeitiges Ereignispaar*, z. B. zwei in  $\bar{S}$  räumlich fixe, infinitesimal benachbarte Positionen zu einem (bezüglich  $\bar{S}$ ) festen Zeitpunkt. Im lokal mit  $u = \rho\omega$  azimuthal gegen  $S$  bewegten Inertialsystem  $\tilde{S}$  gilt:

$$d\tilde{t} = \gamma(\omega\rho) \left( dt - \frac{\omega\rho}{c^2} \rho d\varphi \right) = 0. \quad (9.16)$$

Umformung von (9.13) mit (9.12):

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\bar{\rho}^2 - \frac{\bar{\rho}^2 d\bar{\varphi}^2}{1 - (\omega\bar{\rho}/c)^2} - d\bar{z}^2 \\ &= -\frac{c^2}{1 - (\omega\bar{\rho}/c)^2} \left( \left(1 - \left(\frac{\omega}{c} \bar{\rho}\right)^2\right) d\bar{t} - \frac{\omega}{c^2} \bar{\rho}^2 d\bar{\varphi} \right)^2 \\ &= -\frac{c^2}{1 - (\omega\rho/c)^2} \left( dt - \frac{\omega}{c^2} \rho^2 d\varphi \right)^2 \\ &= -c^2 d\tilde{t}^2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (9.17)$$



wegen (9.16). Folglich ist

$$d\sigma = \sqrt{d\bar{\rho}^2 + \frac{\bar{\rho}^2 d\bar{\varphi}^2}{1 - (\omega \bar{\rho}/c)^2} + d\bar{z}^2}, \quad (9.18)$$

d. h. wir erhalten erneut eine nicht-pythagoräische Metrik.

*Anwendung:* Ein Kreis vom Radius  $\rho = \bar{\rho} = R$  (in der  $xy$ -Ebene, um die  $z$ -Achse) hat in  $S$  den Umfang  $U = 2\pi R$ , in  $\bar{S}$  jedoch

$$\bar{U} = \frac{2\pi R}{\sqrt{1 - (\omega R/c)^2}} > U; \quad (9.19)$$

vgl. Längenkontraktion.  $\bar{\varphi}$  hat in  $\bar{S}$  *nicht* die Bedeutung des Azimutalwinkels, dieser ist aber durch  $\bar{\varphi}$  parametrisierbar (von  $\bar{\rho}$  abhängig). Vgl.  $\tilde{x}$  im vorstehenden Beispiel.

Die beiden Beispiele zeigen: Die räumlichen und zeitlichen Koordinaten verlieren in beschleunigten Bezugssystemen ihre anschauliche Bedeutung für die Längen- und Zeitmessung. Keine Galilei-Koordinaten bezüglich beschleunigter Bezugssysteme einführbar. Daher die

*Konsequenz:* Alle nur denkbaren Koordinatensysteme sind für die Naturbeschreibung prinzipiell gleichberechtigt. Von einem Koordinatensystem wird nur noch gefordert, dass es die Raumzeit-Punkte, d. h. die physikalischen Ereignisse, eindeutig kennzeichnet, und zwar stetig von Punkt zu Punkt, d. h. von Ereignis zu Ereignis. Im Allgemeinen keine Beziehung dieser Koordinaten zu einem irgendwie „beschleunigten“ Bezugssystem.

**Konstruktion eines Koordinatensystems.** Sofern es ein globales Inertialsystem gibt (was der Fall ist, solange man die Krümmung der Raumzeit vernachlässigt), geht man von den entsprechenden Galilei-Koordinaten aus:

$$\xi^1 = x, \quad \xi^2 = y, \quad \xi^3 = z, \quad \xi^4 = ct. \quad (9.20)$$

Der Übergang zu beliebigen anderen Koordinaten  $x^1, x^2, x^3$  und  $x^4$  erfolgt durch die Transformation

$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (9.21)$$

wo die  $x(\xi)$  beliebige stetig differenzierbare, invertierbare Funktionen sind. Berechnung des *metrischen Tensors*:

$$ds^2 = \eta_{ij} d\xi^i d\xi^j = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (9.22)$$

folglich – siehe (8.24) –

$$g_{ij} = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^j} \eta_{kl} ; \quad (9.23)$$

mit

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (9.24)$$

erhält man

$$g_{ij} = \frac{\partial \xi^1}{\partial x^i} \frac{\partial \xi^1}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^i} \frac{\partial \xi^2}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^3}{\partial x^i} \frac{\partial \xi^3}{\partial x^j} - \frac{\partial \xi^4}{\partial x^i} \frac{\partial \xi^4}{\partial x^j} . \quad (9.25)$$

Die Raumzeit ist ein  $\mathcal{R}_4$  mit der Metrik (9.22, 24) bzw. (9.22, 25).

*Einschränkung* der zugelassenen Koordinatensysteme. Der Charakter von  $x^1, x^2, x^3$  als „räumliche“ und von  $x^4$  als „zeitliche“ Koordinate(n) soll in dem nachfolgenden Sinne erhalten bleiben. Nach (9.22, 24) ist

$$ds^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2 - (d\xi^4)^2 . \quad (9.26)$$

Betrachte ein Ereignispaar mit

•

$$d\xi^1 = d\xi^2 = d\xi^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad ds^2 < 0 , \quad (9.27)$$

d. i. ein *zeitartiges* Ereignispaar. Das  $x$ -System sei so beschaffen, dass für

$$dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0 \quad (9.28)$$

analog gilt:

$$ds^2 = g_{44} dx^4 dx^4 < 0 , \quad (9.29)$$

d. h. es soll gelten (da  $dx^4$  beliebig):

$$g_{44} < 0 . \quad (9.30)$$

•

$$d\xi^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad ds^2 > 0 , \quad (9.31)$$

d. i. ein *raumartiges* Ereignispaar. Das  $x$ -System sei so beschaffen, dass für

$$dx^4 = 0 \quad (9.32)$$

analog gilt:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu > 0, \quad (9.33)$$

$\mu, \nu = 1, 2, 3$ , d. h. es soll gelten (da  $dx^\mu, dx^\nu$  beliebig):

$$g_{\mu\mu} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{\mu\mu} & g_{\mu\nu} \\ g_{\nu\mu} & g_{\nu\nu} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0. \quad (9.34)$$

Aus (9.30, 34) folgt für die Determinante des metrischen Tensors:

$$g = \det(g_{ij}) < 0. \quad (9.35)$$

Der metrische Tensor ist also durch die Eigenschaften (9.30, 34) mit der Konsequenz (9.35) gekennzeichnet. In diesem Rahmen sind die Funktionen  $x(\xi)$  frei wählbar. Die zu den Beispielen (9.2, 12) gehörigen Tensoren  $\bar{g}_{ij}$  erfüllen die genannten Bedingungen.

Die Variablen  $x^i$  haben alle möglichen physikalischen Bedeutungen, z. B. Laufzeiten von Radarsignalen, Energiewerte von Teilchen, ... Parameter für Längen- und Zeitvariablen (wie in den Beispielen), ...; sie dienen der eindeutigen Kennzeichnung von Raumzeitpunkten.

Falls es kein globales Inertialsystem gibt (was die Regel ist, da man die Krümmung der Raumzeit im Allgemeinen nicht vernachlässigen darf), geht man umgekehrt vor: Vorgabe (Berechnung aus Einsteinschen Feldgleichungen, s. u.) des metrischen Tensors  $g_{ij}$  mit den Eigenschaften (9.30, 34, 35); bei Bedarf lokale Approximation durch Galilei-Koordinaten (siehe lokale kartesische Koordinaten in Abschnitt 8.3).

**Längen- und Zeitmessung** in beliebigem Koordinatensystem  $x^1, x^2, x^3, x^4$ : Seien  $x^1, x^2, x^3$  Raumkoordinaten,  $x^4$  Zeitkoordinate im obigen Sinne. Betrachte einen Maßstab / eine Uhr im Punkte  $P_0 = (x_0^1, \dots, x_0^4)$  der Raumzeit; betrachte ferner das (evtl. nur lokal) begleitende Inertialsystem mit Galilei-Koordinaten  $\xi^1, \dots, \xi^4$ , in dem der Maßstab / die Uhr bei  $P_0$  ruhen. *Stationaritätsbedingung*:

$$\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^4}(x_0^1, \dots, x_0^4) = 0, \quad \lambda = 1, 2, 3; \quad (9.36)$$

Argument  $(x_0^1, \dots, x_0^4)$  im Folgenden weglassen. Mit (9.36) folgt aus (9.25):

$$g_{i4} = -\frac{\partial \xi^4}{\partial x^i} \frac{\partial \xi^4}{\partial x^4},$$

somit

$$\frac{\partial \xi^4}{\partial x^4} = \sqrt{-g_{44}}, \quad (9.37)$$

$$\frac{\partial \xi^4}{\partial x^\mu} = -\frac{g_{\mu 4}}{\sqrt{-g_{44}}}, \quad \mu = 1, 2, 3. \quad (9.38)$$

- *Längenmaß* bei  $P_0$  (Ruhlänge):

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sqrt{(d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu} \end{aligned}$$

wegen (9.36); beachte die  $\lambda$ -Summation. Mit (9.25, 38) folgt

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sqrt{\left(g_{\mu\nu} + \frac{\partial \xi^4}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^4}{\partial x^\nu}\right) dx^\mu dx^\nu} \\ &= \sqrt{\left(g_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu 4} g_{\nu 4}}{g_{44}}\right) dx^\mu dx^\nu}. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Auf Grund der Bedingungen (9.30, 34) ist der Radikand positiv, folglich ist  $d\sigma$  reell.

- *Zeitmaß* bei  $P_0$  (Eigenzeit):

$$\begin{aligned} d\tau &= d\xi^4 / c \\ &= \frac{\partial \xi^4}{\partial x^4} dx^4 / c \end{aligned}$$

wegen  $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ ; mit (9.37) folgt

$$d\tau = \sqrt{-g_{44}} dx^4 / c. \quad (9.40)$$

Auch hier ist wegen (9.30) der Radikand positiv, folglich  $d\sigma$  reell.

Anwendung von (9.39, 40) auf die beiden vorstehenden Beispiele verifiziert die dort (mit anderen Argumenten) hergeleiteten  $d\sigma$ ,  $d\tau$ -Ausdrücke. Für das *rotierende Bezugssystem* (mit  $\rho$ ,  $\varphi$  statt  $x$ ,  $y$ ) gilt z. B. wegen (9.13):

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 & \omega \rho^2 / c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \omega \rho^2 / c & 0 & -(1 - (\omega \rho / c)^2) \end{pmatrix}; \quad (9.41)$$

Querstriche weggelassen. Einsetzen in (9.39, 40) führt auf (9.18, 15).

**Allgemeines Relativitätsprinzip** (Einstein 1916): *Die allgemeinen Naturgesetze sind durch Gleichungen auszudrücken, die für alle Koordinatensysteme gelten, d. h. die beliebigen Substitutionen gegenüber kovariant (allgemein kovariant) sind.*

Zu dieser Verallgemeinerung des Speziellen Relativitätsprinzips gelangt man auch, wenn man die Forderung aufstellt (Heintzmann & Mittelstaedt 1968): Ist eine Observable in Inertialsystemen gegenüber Lorentz-Transformationen ein Tensor ( $k$ . Stufe), so ist sie auch ein Tensor ( $k$ . Stufe) gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen.

*Plausibilität* für die allgemeine Kovarianz: Alle raumzeitlichen Konstatierungen entsprechen raumzeitlichen Koinzidenzen, z. B. Ankunft eines Zuges, Streuprozess, ... Ein Koordinatensystem dient der leichteren Beschreibung solcher Koinzidenzen. Bei Koordinatenwechsel bleibt die Gleichheit der Variablenwerte zweier koinzidierender Punktereignisse erhalten. Demnach gibt es keinen prinzipiellen Grund zur Auszeichnung gewisser Koordinatensysteme.

Anwendungsbeispiele für das allgemeine Kovarianzprinzip:

**1. Bewegungsgleichung für Massenpunkt.** Betrachte eine Kurve  $C$  in der Raumzeit in Parameterdarstellung:  $x^i = x^i(\lambda)$ , wo  $\lambda$  ein invarianter Parameter ist, z. B.  $\lambda = s$ . Tangentialvektor  $dx^i/d\lambda$  ( $dx^i$  Vektor,  $1/d\lambda$  Skalar) vom Betrage  $ds/d\lambda$ .  $C$  heißt *Geodäte*, falls die  $dx^i/d\lambda$  längs  $C$  alle parallel zueinander sind:

$$d \left( \frac{dx^i}{d\lambda} \right) = \delta \left( \frac{dx^i}{d\lambda} \right). \quad (9.42)$$

In Anlehnung an (8.64) und mit (8.143) folgt

$$D \left( \frac{dx^i}{d\lambda} \right) = \left( \frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ j k \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} \right) d\lambda = 0. \quad (9.43)$$

Da  $d\lambda$  beliebig ist, erhält man schließlich die **Geodätengleichung**:

$$\frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ j k \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} = 0. \quad (9.44)$$

Das sind vier nichtlineare gekoppelte Differentialgleichungen 2. Ordnung zur Bestimmung der Funktionen  $x^i(\lambda)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Auf Grund der Quotientenregel ist (9.44) eine Tensorgleichung, denn  $D(dx^i/d\lambda)$  ist ein Vektor und  $d\lambda$  ein beliebige Skalar. Das Christoffel-Symbol hängt gemäß (8.141) vom metrischen Tensor der Raumzeit ab; dessen Kenntnis ist also Voraussetzung für die Lösung von (9.44).

*Beispiele* für geodätische Linien: Geraden in der Ebene, Großkreise auf der Kugel.

Die Geodätengleichung ist auch aus einem **Variationsprinzip** herleitbar. Demnach ist unter allen Linien, die zwei beliebige, aber feste Punkte  $A$  und  $B$  der Raumzeit miteinander verbinden, die Geodäte von (relativ) minimaler Länge; sei einfachheitshalber  $\lambda = s$ :

$$\int_A^B ds = \text{Minimum} . \quad (9.45)$$

*Beweis:* Wegen (8.114) ist (9.45) zu

$$\int_A^B \sqrt{g_{ij}(x^k) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}} ds = \text{Minimum} \quad (9.46)$$

äquivalent. Die Euler-Lagrange-Gleichungen dieses Variationsproblems sind

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial (dx^k/ds)} - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0 \quad (9.47)$$

mit der Lagrange-Funktion

$$L = L \left( x, \frac{dx}{ds} \right) = \sqrt{g_{ij}(x^k) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}} ; \quad (9.48)$$

demnach hat man die Gleichungen

$$\frac{d}{ds} \frac{g_{ij} \left( \delta_k^i \frac{dx^j}{ds} + \frac{dx_i}{ds} \delta_k^j \right)}{2 \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}}} - \frac{g_{ij,k} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}}{2 \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}}} = 0 . \quad (9.49)$$

Mit ( $L \equiv 1$  als Funktion von  $x, dx/ds$  gemäß (9.48))

$$g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \equiv 1 \quad (9.50)$$

erhält man

$$\frac{d}{ds} \left( g_{jk} \frac{dx^j}{ds} \right) - \frac{1}{2} g_{ij,k} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0 ,$$

folglich

$$g_{jk} \frac{d^2 x^j}{ds^2} + \frac{1}{2} (g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k}) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0 . \quad (9.51)$$

Multiplikation mit  $g^{kl}$  führt schließlich wegen (8.141) auf

$$\frac{d^2 x^l}{ds^2} + \left\{ \begin{array}{c} l \\ ij \end{array} \right\} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0 ; \quad (9.52)$$

das ist die *Behauptung* •

Die Bewegungsgleichung des **freien Teilchens** in Galilei-Koordinaten ist

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} = 0 . \quad (9.53)$$

Wegen

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2} \\ &= \sqrt{v^2 - c^2} dt \end{aligned} \quad (9.54)$$

folgt ( $ds \sim dt$  wegen  $v = \text{kontant}$ )

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{d^2 ct}{ds^2} = 0 . \quad (9.55)$$

Das ist die Geodätengleichung in Galilei-Koordinaten, denn in diesen Koordinaten verschwinden die Christoffel-Symbole. Da die Geodätengleichung eine Tensorgleichung ist, folgt aus dem Allgemeinen Relativitätsprinzip, dass in beliebigen Koordinaten die Bewegungsgleichung des freien Teilchens durch die Geodätengleichung

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{array}{c} i \\ jk \end{array} \right\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \quad (9.56)$$

gegeben ist, dass also die *Bewegung freier Teilchen längs geodätischer Linien* erfolgt.

Die Argumentation zur Herleitung von (9.56) macht von der Existenz globaler Galilei-Koordinaten Gebrauch; sie gilt also zunächst nur für eine Raumzeit mit verschwindender Krümmung: **schwaches Kovarianzprinzip**. Das Allgemeine Relativitätsprinzip postuliert darüber hinaus die Gültigkeit der Tensorgleichung (9.56) in Raumzeiten mit beliebiger Krümmung: **starkes Kovarianzprinzip**.

Für ein **Teilchen im Kraftfeld** gilt die Bewegungsgleichung (Kraft  $F^i$ , Ruhmasse  $m_0$ )

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{array}{c} i \\ jk \end{array} \right\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = \frac{F^i}{m_0} ; \quad (9.57)$$

z. B. ist im Falle der *Lorentz-Kraft*

$$F^i = Q g^{ij} F_{jk} \frac{dx^k}{ds}, \quad (9.58)$$

wo  $Q$  die Ladung und  $F_{jk}$  das elektromagnetische Feld ist; vgl. (7.39).

**Beispiel: Rotierendes Bezugssystem.** Aus dem metrischen Tensor (9.41) berechnet man mit (8.141) die nichtverschwindenden Christoffel-Symbole (2. Art) zu

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \varphi \varphi \end{array} \right\} &= -\rho, & \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \varphi ct \end{array} \right\} &= -\frac{\omega \rho}{c}, & \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ ct ct \end{array} \right\} &= -\frac{\omega^2 \rho}{c^2} \\ \left\{ \begin{array}{c} \varphi \\ \rho \varphi \end{array} \right\} &= \frac{1}{\rho}, & \left\{ \begin{array}{c} \varphi \\ \rho ct \end{array} \right\} &= \frac{\omega}{c\rho}. \end{aligned} \quad (9.59)$$

Damit nimmt die Bewegungsgleichung (9.56) die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \rho}{ds^2} - \rho \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - \frac{2\omega \rho}{c} \frac{d\varphi}{ds} \frac{dct}{ds} - \frac{\omega^2 \rho}{c^2} \left( \frac{dct}{ds} \right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + \frac{2\omega}{c\rho} \frac{d\rho}{ds} \frac{dct}{ds} &= 0 \\ \frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{d^2 ct}{ds^2} &= 0. \end{aligned} \quad (9.60)$$

Aus diesen vier Gleichungen ist die Parameterdarstellung  $\rho(s)$ ,  $\varphi(s)$ ,  $z(s)$ ,  $ct(s)$  der Trajektorie des (bis auf Trägheitskräfte) freien Teilchens zu berechnen. Beachte, dass  $\varphi$  nicht der Azimutalwinkel und  $t$  nicht die Eigenzeit im rotierenden System ist; siehe (9.18) bzw. (9.15).

In nichtrelativistischer Näherung

$$v \ll c \Rightarrow ds = icdt \quad (9.61)$$

– siehe (9.54) – erhält man aus (9.60) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} &= \rho(\dot{\varphi} + \omega)^2 \\ \rho \ddot{\varphi} &= -2\dot{\rho}(\dot{\varphi} + \omega) \\ \ddot{z} &= 0. \end{aligned} \quad (9.62)$$

Das ist die bekannte Bewegungsgleichung (vgl. (9.1))

$$\ddot{\vec{r}} = -2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (9.63)$$



für die freie Bewegung im rotierenden Bezugssystem in Zylinderkoordinaten (ohne Beweis).

**2. Maxwell-Gleichungen.** Diese lauten in Minkowski-Koordinaten – siehe Gln. (7.22, 24):

$$F_{ij,j} = \mu_0 J_i \quad (9.64)$$

$$F_{ij,k} + F_{jk,i} + F_{ki,j} = 0 ;$$

in allgemeinen Raumzeit-Koordinaten hat man

$$F^{ij}_{;j} = \mu_0 J^i \quad (9.65)$$

$$F_{ij;k} + F_{jk;i} + F_{ki;j} = 0 .$$

Denn diese Gleichungen sind Tensorgleichungen, und in Minkowski-Koordinaten reduzieren sie sich auf die vorstehenden Gleichungen: kovariante Ableitung  $\rightarrow$  partielle Ableitung sowie  $F^{ij} = F^i_j = F_{ij}$  und  $J^i = J_i$ . Nach dem allgemeinen Kovarianzprinzip sind daher (9.65) *die* allgemeingültigen Maxwell-Gleichungen. Beachte die obige Anmerkung betreffend das schwache und das starke Kovarianzprinzip.

Die Gln. (9.65) lassen sich wie folgt vereinfachen:

- Nach Abschnitt 8.2 ist

$$F^{ij}_{;j} = F^{ij}_{,j} + \left\{ \begin{matrix} i \\ k j \end{matrix} \right\} F^{kj} + \left\{ \begin{matrix} j \\ k j \end{matrix} \right\} F^{ik} . \quad (9.66)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite verschwindet:

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ k j \end{matrix} \right\} F^{kj} = 0 , \quad (9.67)$$

da  $\left\{ \begin{matrix} i \\ k j \end{matrix} \right\}$  symmetrisch,  $F^{kj}$  antisymmetrisch bzgl.  $j, k$  ist. Ferner gilt (beachte (9.35)):

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ i j \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \sqrt{-g} . \quad (9.68)$$

*Beweis:* Mit (8.147, 142 b) erhält man zunächst

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g}{\partial x^j} &= G^{ik} \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} \\
 &= g g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} \\
 &= g g^{ik} ([ij, k] + [kj, i]) \\
 &= g \left( \begin{Bmatrix} i \\ ij \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} k \\ kj \end{Bmatrix} \right) \\
 &= 2g \begin{Bmatrix} i \\ ij \end{Bmatrix} ;
 \end{aligned}$$

das führt sodann auf

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} i \\ ij \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial x^j} g \\
 &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \sqrt{-g}^2 \\
 &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \sqrt{-g} ,
 \end{aligned}$$

d. h. auf die *Behauptung*.

Mit (9.67, 68) folgt aus (9.66):

$$\begin{aligned}
 F^{ij}_{;j} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left( \sqrt{-g} \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} + \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^j} F^{ij} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{-g} F^{ij}) .
 \end{aligned} \tag{9.69}$$

- Erneut nach Abschnitt 8.2 hat man

$$\begin{aligned}
 F_{ij;k} &= F_{ij,k} - \begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix} F_{lj} - \begin{Bmatrix} l \\ jk \end{Bmatrix} F_{il} \\
 F_{jk;i} &= F_{jk,i} - \begin{Bmatrix} l \\ ji \end{Bmatrix} F_{lk} - \begin{Bmatrix} l \\ ki \end{Bmatrix} F_{jl} \\
 F_{ki;j} &= F_{ki,j} - \begin{Bmatrix} l \\ kj \end{Bmatrix} F_{li} - \begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix} F_{kl} .
 \end{aligned} \tag{9.70}$$

Durch Summation und wegen der Antisymmetrie von  $F_{ij}$  folgt

$$F_{ij;k} + F_{jk;i} + F_{ki;j} = F_{ij,k} + F_{jk,i} + F_{ki,j} . \tag{9.71}$$

Mit (9.69, 71) reduzieren sich die *allgemein kovarianten Maxwell-Gleichungen* zu

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{-g} F^{ij}) = \mu_0 J^i \quad (9.72)$$

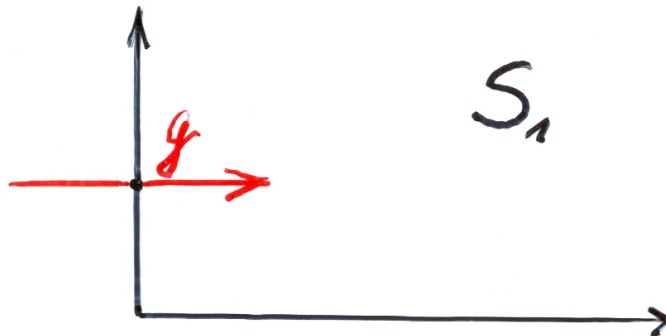
$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} = 0 .$$

Die metrische Struktur der Raumzeit geht über die (negative) Determinante des metrischen Tensors in diese Gleichungen ein. Infolge der vereinfachenden Manipulationen ist die allgemeine Kovarianz der Gln. (9.72) – im Unterschied zu den Gln. (9.65) – nicht mehr evident.

## 9.2 Das Äquivalenzprinzip und die Einsteinschen Feldgleichungen

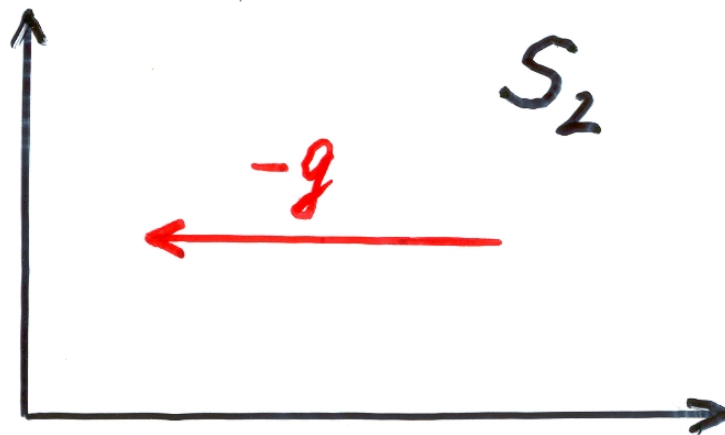
Betrachte zwei Bezugssysteme  $S_1$  und  $S_2$ :

- $S_1$  sei ein mit  $g$  beschleunigtes Bezugssystem (wie  $\bar{S}$  in Abb. 9.2):



• Abbildung 9.4 a •

- $S_2$  sei ein Inertialsystem mit einem Gravitationsfeld der Stärke  $-g$ :



• Abbildung 9.4 b •

*Physikalische Erfahrung:*  $S_1$  und  $S_2$  sind physikalisch nicht unterscheidbar, z. B. erfährt ein (freies) Teilchen in jedem der beiden Systeme die Beschleunigung

$$\ddot{x} = -g . \quad (9.73)$$

Die Ursache ist in der Gleichheit von schwerer und träger Masse zu sehen:

$$m_s = m_t . \quad (9.74)$$

Man hat im System  $S_1$ :

$$m_t \ddot{x} = -m_t g ; \quad (9.75)$$

siehe (9.1). Im System  $S_2$  gilt hingegen

$$m_t \ddot{x} = -m_s g , \quad (9.76)$$

d. i. die Newtonsche Bewegungsgleichung im Schwerfeld. In jedem Falle erhält man – mit (9.74) im zweiten Falle – die Gleichung (9.73).

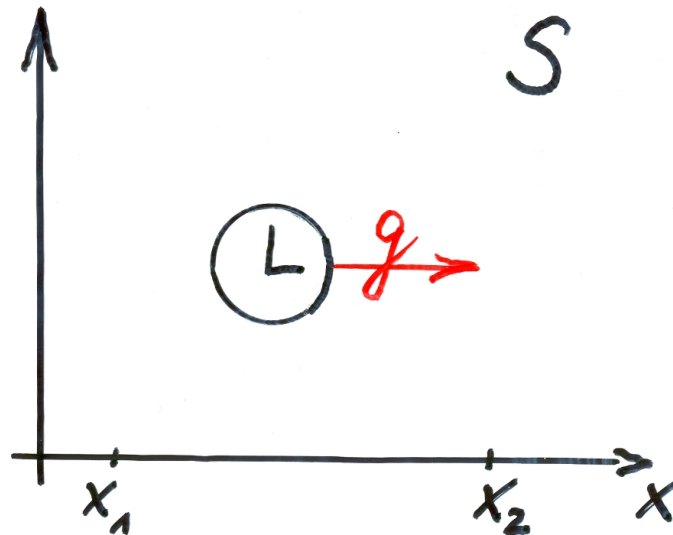
**Äquivalenzprinzip:** Ein Beschleunigungsfeld, das als Folge eines bewegten Bezugssystems auftritt, und ein lokal gleiches Gravitationsfeld lassen sich durch den Ablauf physikalischer Vorgänge nicht unterscheiden. In beiden Feldern resultiert bei gleichen Anfangsbedingungen, unabhängig vom betrachteten physikalischen Objekt, quantitativ immer derselbe Ablauf (Falk & Ruppel 1973).

*Anmerkungen:*

- Beide Felder mit realer Ursache: Gravitationsfelder durch „nahe“ Massen, Beschleunigungsfelder durch „ferne“ Massen verursacht.
- Bei Beschränkung auf die Auswirkungen sind die Begriffe „Gravitationsfeld“ und „Beschleunigungsfeld“ synonym verwendbar.

In den Beispielen in Abschnitt 9.1 wurde gezeigt, dass und wie ein Beschleunigungsfeld die Metrik der Raumzeit beeinflusst; siehe Gln. (9.3, 13). Wegen des Äquivalenzprinzips ist zu erwarten, dass sich auch ein Gravitationsfeld in der Metrik der Raumzeit auswirkt. Wie? Der Beantwortung dieser Frage sind die nachfolgenden Ausführungen gewidmet.

Betrachte eine bezüglich eines Inertialsystems  $S$  mit  $g$  in  $x$ -Richtung **beschleunigte Uhr**:



• Abbildung 9.5 •

d. i. nach dem Äquivalenzprinzip eine **Uhr im Gravitationsfeld** mit dem Potenzial

$$\phi(x) = g x . \quad (9.77)$$

Ein Eigenzeitintervall dieser Uhr  $d\tau$  erscheint bei  $x_2$  und  $x_1$  zeitgedehnt als  $dt_2$  bzw. als  $dt_1$  gemäß

$$dt_i = \gamma(v_i) d\tau , \quad i = 1, 2 ; \quad (9.78)$$

demnach ist

$$\begin{aligned} dt_2 &= \frac{\gamma(v_2)}{\gamma(v_1)} dt_1 \\ &= \sqrt{\frac{1 - v_1^2/c^2}{1 - v_2^2/c^2}} dt_1 . \end{aligned} \quad (9.79)$$

Unter der Voraussetzung  $v_1, v_2 \ll c$  erhält man die Relation

$$\begin{aligned} dt_2 &= \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{c^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_2^2}{c^2}\right) dt_1 \\ &= \left(1 + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2c^2}\right) dt_1 ; \end{aligned} \quad (9.80)$$

mit

$$v_2^2 - v_1^2 = 2g(x_2 - x_1) \quad (9.81)$$

folgt

$$dt_2 = \left(1 + \frac{g(x_2 - x_1)}{c^2}\right) dt_1 . \quad (9.82)$$

Mit (9.77) erhält man schließlich für die Eigenzeitintervalle  $d\tau_i$  von zwei bei  $x_i$  in  $S$  stationären Uhren die Beziehung

$$d\tau_2 = \left(1 + \frac{\phi(x_2) - \phi(x_1)}{c^2}\right) d\tau_1 . \quad (9.83)$$

Verallgemeinerung von (9.83) auf beliebige (schwache, stationäre) Gravitationsfelder. Also: *Am Ort höheren Gravitationspotenzials gehen die Uhren schneller!*

### Beispiele:

- *Gedankenexperiment.* Zwei Zwillingbrüder auf verschiedenen Etagen eines Hochhauses. Der obere altert schneller als der untere. Wenn der untere Bruder  $n_1$  Herzschläge macht, schlägt das Herz des oberen Bruders  $n_2$  mal:

$$n_2 = \left(1 + \frac{g(z_2 - z_1)}{c^2}\right) n_1 . \quad (9.84)$$

$z$  ist die Koordinate in vertikaler Richtung.

- *Experimentelle Tests.* Frequenzverschiebung von Spektrallinien im Gravitationsfeld. Sei einfachheitshalber

$$\phi(r) = -\frac{\gamma}{r} ; \quad (9.85)$$

dort gilt

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \left(1 - \frac{\phi(r_2) - \phi(r_1)}{c^2}\right) \omega_1 \\ &= \left(1 + \frac{\gamma}{c^2} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)\right) \omega_1 .\end{aligned}\quad (9.86)$$

$\omega_1$  ist die im Abstand  $r_1$  emittierte Frequenz,  $\omega_2$  ist die im Abstand  $r_2$  gemessene Frequenz. Für  $r_1 > r_2$  ist  $\omega_2 > \omega_1$ : *Violettverschiebung*, z. B. Erdsatellit  $\rightarrow$  Erdoberfläche. In diesem Experiment ist außerdem die Bewegung des Satelliten zu berücksichtigen; diese bewirkt einen gegenläufigen Effekt, nämlich einen frequenzerniedrigenden transversalen Doppler-Effekt. Für  $r_1 < r_2$  ist  $\omega_2 < \omega_1$ : *Rotverschiebung*, z. B. Galaxie  $\rightarrow$  Erde; hier ist  $r_2 = \infty$  •

Die dreidimensionale Verallgemeinerung der Relation (9.83), d. h. eine Beziehung zwischen den Eigenzeitintervallen  $d\tau_i$  an verschiedenen Stellen  $(x_i, y_i, z_i)$  eines schwachen, statischen Gravitationsfeldes, ist mit der folgenden Annahme über die *Metrik der Raumzeit* verträglich:

$$ds^2 = f(x, y, z)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - c^2 \left(1 + \frac{2\phi(x, y, z)}{c^2}\right) dt^2 \quad (9.87)$$

mit einer zunächst nicht näher bestimmten Funktion  $f(x, y, z)$ ; denn wegen (vgl. (9.40))

$$d\tau = \frac{1}{ic} ds \Big|_{dx=dy=dz=0} \quad (9.88)$$

für eine stationäre Uhr folgt mit  $\phi \ll c^2$ :

$$\begin{aligned}d\tau_i &= \sqrt{1 + \frac{2\phi(x_i, y_i, z_i)}{c^2}} dt \\ &= \left(1 + \frac{\phi(x_i, y_i, z_i)}{c^2}\right) dt ;\end{aligned}\quad (9.89)$$

demnach ist

$$\begin{aligned}d\tau_2 &= \frac{1 + \phi(x_2, y_2, z_2)/c^2}{1 + \phi(x_1, y_1, z_1)/c^2} d\tau_1 \\ &= \left(1 + \frac{\phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1)}{c^2}\right) d\tau_1 ,\end{aligned}\quad (9.90)$$

was zu beweisen war.

*Achtung:* Die „Koordinatenzeit“  $t$  an der Stelle  $x, y, z$  gibt nicht die „Eigenzeit“  $\tau$  einer dort befindlichen Uhr an. Wegen des Zusammenhanges (9.89) ist  $t$  jedoch genauso gut zur

zeitlichen Markierung eines Punktereignisses bei  $x, y, z$  geeignet wie  $\tau$ . Dort wo  $\phi = 0$  ist (z. B. asymptotisch), stimmen beide Zeitmarkierungen überein.

*Formale Begründung* für die Metrik (9.87) eines schwachen, statischen Gravitationsfeldes. Näherungsweise Einführung von Minkowski-Koordinaten möglich:  $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z, x^4 = i c t$  (0. Näherung) mit der Metrik (1. Näherung):

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \delta_{ij} + h_{ij} \\ g^{ij} &= \delta^{ij} + k^{ij} \end{aligned} \quad (9.91)$$

mit kleinen Störungen  $h_{ij}$  bzw.  $k^{ij}$ :  $|h_{ij}|, |k^{ij}| \ll 1$ . Christoffel-Symbole (8.141) in 1. Näherung:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} i \\ j k \end{array} \right\} &= \frac{1}{2} g^{il} (g_{kl,j} + g_{lj,k} - g_{jk,l}) \\ &= \frac{1}{2} (h_{ki,j} + h_{ij,k} - h_{jk,i}) ; \end{aligned} \quad (9.92)$$

hieraus folgt insbesondere (für späteren Gebrauch):

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu \\ 44 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{4\mu}}{\partial x^4} + \frac{\partial h_{\mu 4}}{\partial x^4} - \frac{\partial h_{44}}{\partial x^\mu} \right). \quad (9.93)$$

Im statischen Feld verschwinden die ersten beiden Terme auf der rechten Seite, somit gilt in diesem Falle

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu \\ 44 \end{array} \right\} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{44}}{\partial x^\mu}. \quad (9.94)$$

Unter der weiteren Voraussetzung

$$v \ll c \quad (9.95)$$

bewegt sich ein Teilchen in dem *Gravitationsfeld* gemäß

$$\ddot{x}^i = -(\vec{\nabla} \phi, 0) ; \quad (9.96)$$

im äquivalenten *Beschleunigungsfeld* hingegen gilt die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{array}{c} i \\ j k \end{array} \right\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (9.97)$$



In 0. Näherung ist

$$ds = \sqrt{v^2 - c^2} dt, \quad (9.98)$$

somit

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{(\vec{v}, ic)}{\sqrt{v^2 - c^2}}; \quad (9.99)$$

mit (9.95) folgt

$$\frac{dx^i}{ds} = (\vec{0}, 1). \quad (9.100)$$

Aus (9.99) berechnet man ferner mit (9.95):

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{1}{v^2 - c^2} \left( (\dot{\vec{v}}, 0) - \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} \frac{(\vec{v}, ic)}{v^2 - c^2} \right) = -\frac{1}{c^2} (\dot{\vec{v}}, 0). \quad (9.101)$$

Einsetzen von (9.100, 101) in (9.97) ergibt

$$-\frac{1}{c^2} \ddot{x}^\mu + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ 44 \end{matrix} \right\} = 0, \quad (9.102)$$

$\mu = 1, 2, 3$ . Mit (9.94, 96) folgt

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{44}}{\partial x^\mu} = 0,$$

somit

$$h_{44} = \frac{2}{c^2} \phi, \quad (9.103)$$

und nach (9.91) erhält man schließlich

$$g_{44} = 1 + \frac{2}{c^2} \phi. \quad (9.104)$$

Da alle anderen  $h_{ij}$  in dieser Näherung verschwinden (ohne Beweis), folgt

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 \left( 1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) dt^2; \quad (9.105)$$

das ist die Metrik (9.87) mit  $f \equiv 1$ .

Wenn man die Voraussetzung (9.95) fallen lässt, z. B. bei der Bewegung von Photonen, so gilt

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2\phi}{c^2} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) - c^2 \left( 1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) dt^2. \quad (9.106)$$

Dieses Resultat erhält man durch lineare Approximation der Einsteinschen Feldgleichungen (siehe unten). •

### Reduzible und irreduzible Gravitationsfelder:

- Der Übergang von einem Inertialsystem auf ein beschleunigtes Bezugssystem erzeugt ein Beschleunigungsfeld und verändert dadurch die Metrik. Ein solches Gravitationsfeld ist *reduzibel* insofern, als es durch Rücktransformation auf das ursprüngliche Inertialsystem gelöscht werden kann. Gravitationsfelder vom Typ der reduzierbaren Beschleunigungsfelder verändern nicht die Krümmungsstruktur der Raumzeit:

$$R_{jkl}^i = 0 . \quad (9.107)$$

Ein homogenes Gravitationsfeld ist z. B. *reduzibel*: durch Übergang in ein „frei fallendes Labor“.

Die Aussage (9.107) ist äquivalent zur Existenz von Transformationsgleichungen  $\xi(x)$ , welche den metrischen Tensor  $g_{ij}$  auf die Gestalt  $\eta_{ij}$  transformieren; d. h.  $R_{jkl}^i = 0$  ist notwendige und hinreichende Integrationsbedingung der Differentialgleichungen (9.23).

- Die in der Natur realisierten Gravitationsfelder sind im Allgemeinen *irreduzibel*, d. h. sie können durch einen Wechsel des Bezugs- (Koordinaten-) Systems nicht wegtransformiert werden. Das Gravitationsfeld z. B. der Erde kann in keinem irgendwie beschleunigten Bezugssystem *im Großen* aufgehoben werden; diese Möglichkeit besteht in guter Näherung *im Kleinen*, z. B. in einer antriebsfreien Raumstation, die auf einer Satellitenbahn frei um die Erde herumfliegt.

In Gravitationsfeldern vom irreduziblen Typ gibt es keine Inertialssysteme, d. h. keine Galilei-Koordinaten im Großen. Die „Flachheit“ der Minkowski-Raumzeit wird aufgehoben:

$$R_{jkl}^i \neq 0 . \quad (9.108)$$

Dagegen gibt es in hinreichend kleinen Bereichen der Raumzeit lokale Inertialsysteme (die frei fallenden Labors). Mathematisch entsprechen die lokalen Inertialsysteme den lokalen Galilei-Koordinaten, die in jedem Punkt des  $\mathcal{R}_4$  etabliert werden können mit der lokalen Metrik  $\eta_{ij}$  und lokal  $R_{jkl}^i = 0$ .

Die Metrik  $g_{ij}$  der Raumzeit hängt vom Gravitationsfeld ab. Dieses ist durch die Masse-Energie-Verteilung bestimmt. Also hängt  $g_{ij}$  von dieser Verteilung ab. Die *Einsteinschen*

*Feldgleichungen* dienen der Bestimmung des Tensors  $g_{ij}$ . Als Input in diese Gleichungen dient der *Energie-Impuls-Tensor*.

Der **Energie-Impuls-Tensor** wurde in Abschnitt 7.2 als kartesisches Tensorfeld 2. Stufe auf der Minkowski-Raumzeit eingeführt, hier mit  $\tilde{T}_{ij}(y)$  bezeichnet; symmetrisch und divergenzfrei:

$$\tilde{T}_{ij} = \tilde{T}_{ji} \quad (9.109)$$

bzw.

$$\tilde{T}_{ij;j} = 0 . \quad (9.110)$$

Konstruktion des Energie-Impuls-Tensors  $T_{ij}(x)$ ,  $T^{ij}(x)$ ,  $T_j^i(x)$  auf beliebiger Raumzeit  $\mathcal{R}_4$  in beliebigen Koordinaten  $x^1, x^2, x^3, x^4$  wie folgt: Betrachte  $P_0 \in \mathcal{R}_4$ ; dort lokale Minkowski-Koordinaten  $y^1, y^2, y^3, y^4 \Rightarrow$  lokaler Energie-Impuls-Tensor  $\tilde{T}_{ij}(y)$ ; Transformation  $x(y)$  bzw.  $y(x)$  mit  $x_0 = y(y_0)$  bzw.  $y_0 = y(x_0)$ ; nach (8.24, 22, 25) gilt

$$\begin{aligned} T_{ij}(x_0) &= \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \tilde{T}_{kl}(y_0) \\ T^{ij}(x_0) &= \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^l} \tilde{T}_{kl}(y_0) \\ T_j^i(x_0) &= \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \tilde{T}_{kl}(y_0) . \end{aligned} \quad (9.111)$$

Da  $P_0$  beliebig ist, gilt (9.111) für alle Punkte in  $\mathcal{R}_4$ ; man kann also in (9.111) den Index 0 weglassen.  $T_{ij}$  und  $T^{ij}$  sind symmetrisch,  $T^{ij}$  und  $T_j^i$  sind divergenzfrei; also ist  $T^{ij}$  beides:

$$T^{ij} = T^{ji} \quad (9.112)$$

bzw.

$$T_j^{ij} = 0 . \quad (9.113)$$

Gesucht ist eine Verknüpfung mit dem metrischen Tensor  $g^{ij}$ .

Nach Abschnitt 8.3 ist der *Einstein-Tensor*  $G^{ij}$  – neben  $g^{ij}$  selbst – der einzige symmetrische, divergenzfreie (kontravariante) Tensor 2. Stufe, der aus  $g^{ij}$  und dessen ersten und zweiten partiellen Ableitungen gebildet werden kann. Daher der *Ansatz*:

$$a g^{ij} + b G^{ij} = T^{ij} , \quad (9.114)$$

$a, b$  Konstanten. Hierzu gibt es *drei verschiedene Versionen*:

- Sei  $a \neq 0$  und  $b = 0$ :

$$\lambda g^{ij} = T^{ij} , \quad (9.115)$$

$\lambda = a$ . Diese Möglichkeit ist zu verwerfen; denn für diejenigen Bereiche der Raumzeit, in denen  $T^{ij} = 0$  ist, erhielte man  $g^{ij} = 0$ , was sicher inkorrekt ist.

- Sei  $a = 0$  und  $b \neq 0$ :

$$G^{ij} = -\kappa T^{ij} , \quad (9.116)$$

$\kappa = -1/b$ . Diese Version wurde von Einstein gewählt: **Einsteinsche Feldgleichungen**. Insbesondere geht (9.116) im Grenzfall schwacher, raumzeitlich schwach veränderlicher Gravitationsfelder in die Newtonsche Potenzialtheorie über (siehe unten). Mit (8.162 b) lautet (9.116) ausführlicher:

$$R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R = -\kappa T^{ij} ; \quad (9.117)$$

die physikalische Bedeutung von  $\kappa$  ist noch zu klären.

*Alternative Darstellungen:*

$$R^i_j - \frac{1}{2} \delta^i_j R = -\kappa T^i_j \quad (9.118)$$

und

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = -\kappa T_{ij} . \quad (9.119)$$

Durch Kontraktion von (9.118) erhält man

$$R = \kappa T , \quad T = T^i_i , \quad (9.120)$$

damit die weitere Darstellung:

$$R^{ij} = \kappa \left( \frac{1}{2} g^{ij} T - T^{ij} \right) ; \quad (9.121)$$

hierzu wieder zwei weitere Indexstellungen usw.

- Sei  $a \neq 0$  und  $b \neq 0$ :

$$\lambda g^{ij} + G^{ij} = -\kappa T^{ij} , \quad (9.122)$$

$\lambda = a/b$ ,  $\kappa = -1/b$ . Mit (8.162 b) hat man

$$R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R + \lambda g^{ij} = -\kappa T^{ij} . \quad (9.123)$$

Bezeichnung von  $\lambda$  als *kosmologische Konstante*; der „kosmologische Term“  $\lambda g^{ij}$  spielt nur für kosmologische Betrachtungen (sehr große raumzeitliche Abmessungen) eine Rolle. Im Folgenden befassen wir uns nur noch mit (9.117) – oder den entsprechenden alternativen Darstellungen.

*Mathematisch* handelt es sich bei den Einsteinschen Feldgleichungen um *zehn* gekoppelte, nichtlineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung in vier unabhängigen Variablen zur Bestimmung der *zehn* unabhängigen Komponenten  $g_{ij}(x^1, \dots, x^4)$  des (symmetrischen) metrischen Tensors. Die komplizierte Struktur der Einsteinschen Feldgleichungen lässt sich mit Hilfe von (8.96) (Krümmungstensor) und (8.141) (Christoffel-Symbole) z. B. für die Version (9.119) demonstrieren:

$$\begin{aligned}
& \left( \delta_i^k \delta_j^l - \frac{1}{2} g_{ij} g^{kl} \right) \times \\
& \times \left( 2 \frac{\partial}{\partial x^l} g^{mn} \left( \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{nk}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^n} \right) \right. \\
& - 2 \frac{\partial}{\partial x^m} g^{mn} \left( \frac{\partial g_{ln}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{nk}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^n} \right) \\
& + g^{np} \left( \frac{\partial g_{mp}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^p} \right) g^{mp} \left( \frac{\partial g_{lq}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{qn}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{nl}}{\partial x^q} \right) \\
& \left. - g^{np} \left( \frac{\partial g_{lp}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^p} \right) g^{mq} \left( \frac{\partial g_{mq}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{qn}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{nm}}{\partial x^p} \right) \right) = -\kappa T_{ij} .
\end{aligned} \tag{9.124}$$

Tatsächlich hat man nur *sechs* unabhängige Funktionen  $g_{ij}(x)$  zu berechnen. Grund: Die Einsteinschen Feldgleichungen bilden – in jeder Darstellung – eine Tensorgleichung; sie sind also unter beliebigen Transformationen  $x(\bar{x})$  forminvariant. Die  $\bar{g}_{ij}(\bar{x})$  genügen demselben Gleichungssystem. Darum kann man vier Funktionen  $g_{ij}(x)$  frei wählen (z. B. konstant) und hat nur sechs zu berechnen.

**Newtonscher Grenzfall.** Vorausgesetzt wird ein schwaches Gravitationsfeld:

$$|\phi| \ll c^2 ; \tag{9.125}$$

z. B. ist an der Erdoberfläche  $\Gamma m_E / r_E c^2 \simeq 10^{-9}$ . Ferner wird eine statische Masse-Energie-Verteilung  $\Rightarrow$  ein statisches Gravitationsfeld angenommen. Das sind dieselben Voraussetzungen, die zur Herleitung von Gl. (9.106) benutzt wurden.

Ansatz wie (9.91, 92):

$$g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij} ,$$

$$\left\{ \begin{array}{c} i \\ j k \end{array} \right\} = \frac{1}{2} (h_{ki,j} + h_{ij,k} - h_{jk,i}) .$$
(9.126)

Krümmungstensor bei Vernachlässigung von Termen 2. Ordnung in den  $h_{ij}$  gemäß (8.96) und (8.141):

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \begin{array}{c} i \\ j l \end{array} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ \begin{array}{c} i \\ j k \end{array} \right\} .$$
(9.127)

*Ricci-Tensor* durch Verjüngung in der Näherung (9.126)

$$R_{jk} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \begin{array}{c} i \\ j i \end{array} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \begin{array}{c} i \\ j k \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} (h_{ii,jk} - h_{ji,ik} - h_{ki,ij} + h_{jk,ii}) .$$
(9.128)

Wegen der vorausgesetzten Statizität des Feldes gilt

$$h_{ij,4} = 0 ;$$
(9.129)

folglich hat man *speziell* für  $j = k = 4$ :

$$R_{44} = \frac{1}{2} h_{44,ii} = \frac{1}{2} \Delta h_{44} .$$
(9.130)

Mit (9.103) folgt

$$R_{44} = \frac{1}{c^2} \Delta \phi .$$
(9.131)

Fall *kein* elektromagnetisches Feld mitspielt, ist der Energie-Impuls-Tensor nach Abschnitt 7.2 allein durch den kinetischen Anteil gegeben; siehe (6.72, 7.61):

$$T_{ij} = \Theta_{ij} = \mu_{00} V_i V_j .$$
(9.132)

Da die Masse-Energie statisch verteilt sein soll, ist  $\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow V = (\vec{0}, ic)$ , folglich

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu c^2 \end{pmatrix} ,$$
(9.133)

wo  $\mu = \mu_0 = \mu_{00}$  die Masse-Energie-Dichte ist. Aus (9.133) entnimmt man

$$T_{44} = -\mu c^2 = T. \quad (9.134)$$

Wir betrachten die zu (9.121) gehörige kovariante Darstellung der Einsteinschen Feldgleichungen:

$$R_{ij} = \kappa \left( \frac{1}{2} g_{ij} T - T_{ij} \right), \quad (9.135 \text{ a})$$

d. h.

$$R_{44} = \kappa \left( \frac{1}{2} g_{44} T - T_{44} \right). \quad (9.135 \text{ b})$$

Gemäß (9.104, 125) approximieren wir:

$$g_{44} = 1 + \frac{2}{c^2} \phi \simeq 1; \quad (9.136)$$

damit sowie mit (9.131, 134) folgt aus (9.135 b):

$$\Delta \phi = \frac{1}{2} \kappa c^4 \mu. \quad (9.137)$$

Diese Gleichung zur Bestimmung des Gravitationspotenzials  $\phi$  entspricht der Poisson-Gleichung der klassischen *Newtonschen Gravitationstheorie*:

$$\Delta \phi = 4 \pi \Gamma \mu, \quad (9.138)$$

falls

$$\kappa = \frac{8 \pi \Gamma}{c^4} \quad (9.139)$$

gesetzt wird. Dieser Wert von  $\kappa$  wird in die Einsteinschen Feldgleichungen übernommen. Die übrigen Gleichungen mit  $(ij) \neq (44)$  in (9.135 a) sind unter den hier gemachten Voraussetzungen von dem trivialen Typ  $0 \simeq 0$ .

### Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen:

• In **linearer Näherung**, d. h. im Falle eines schwachen (nicht notwendig statischen) Gravitationsfeldes, erhält man die Metrik (9.106):

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2}{c^2} \phi(x, y, z, t) \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) - c^2 \left( 1 + \frac{2}{c^2} \phi(x, y, z, t) \right) dt^2, \quad (9.140)$$

wobei  $\phi(x, y, z, t)$  das nach der klassischen Theorie (Newton) zu berechnende Gravitationspotenzial ist.

• Unter den wenigen exakten Lösungen ist vor allem (u. a. wegen astrophysikalischer Anwendungen) die **Schwarzschild-Lösung** bedeutsam: Kugelsymmetrische, statische Masse-Energie-Verteilung; Berechnung einer Lösung im Außenraum, wo

$$T_{ij} = T = 0 \quad (9.141)$$

ist, d. h. (im Hinblick auf (9.135 a)) eine Lösung  $g_{ij}$  der Gleichung

$$R_{ij} = 0 \quad (9.142)$$

mit dem nach (8.96, 143, 152) zu berechnenden Ricci-Tensor:

$$R_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ \begin{matrix} k \\ ik \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} l \\ ik \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k \\ lj \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k \\ lk \end{matrix} \right\}. \quad (9.143)$$

Abhängigkeit der Christoffel-Symbole von den  $g_{ij}$  gemäß (8.141).

Der Symmetrie angemessen sind *Kugelkoordinaten*:

$$x^1 = r, \quad x^2 = \vartheta, \quad x^3 = \varphi, \quad x^4 = t. \quad (9.144)$$

Asymptotisch, d. h. in großer Entfernung von der Masse-Energie-Verteilung, ist die Raumzeit ungekrümmt; dort gilt für die Metrik

$$ds^2 = dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) - c^2 dt^2. \quad (9.145)$$

In endlicher Entfernung verlieren die Koordinaten (9.144) ihre anschauliche Bedeutung für die Längen- und Zeitmessung (vgl.  $d\sigma$ - und  $d\tau$ -Berechnung in Abschnitt 9.1); gleichwohl werden sie dort als Raumzeitmarkierungen des gekrümmten  $\mathcal{R}_4$  übernommen. Die Metrik weicht dort von (9.145) ab und soll nachfolgend berechnet werden.

*Invarianz* der Metrik unter *räumlichen Drehungen* impliziert den Ansatz

$$ds^2 = A(r, t) dr^2 + B(r, t) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) + C(r, t) dr dt + D(r, t) dt^2. \quad (9.146)$$

Wegen der Statizität entfällt die  $t$ -Abhängigkeit der Funktionen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$ ; wegen der Invarianz von  $ds^2$  gegen *Zeitspiegelung* ist  $C = 0$  zu fordern, somit:

$$ds^2 = A(r) dr^2 + B(r) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) + D(r) dt^2. \quad (9.147)$$

Eine genauere Diskussion des vorliegenden hochsymmetrischen Problems zeigt, dass die Funktion  $B(r)$  frei wählbar ist; z. B. kann man festsetzen:

$$B(r) = r^2, \quad (9.148)$$



damit eine möglichst enge Anlehnung an die Metrik (9.145) der ungekrümmten Raumzeit erreicht wird. Mit den Bezeichnungen

$$a(r) = A(r), \quad -b(r)c^2 = D(r) \quad (9.149)$$

erhält man schließlich den *Ansatz*

$$ds^2 = a(r)dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) - b(r)c^2 dt^2, \quad (9.150)$$

d. h. für den metrischen Tensor gilt Diagonalität:

$$g_{11} = a(r), \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2\vartheta, \quad g_{44} = -b(r)c^2, \quad (9.151)$$

0 sonst, mit noch aus den Feldgleichungen zu bestimmenden Funktionen  $a(r)$  und  $b(r)$ . Asymptotisch ist wegen (9.145) zu fordern:

$$a(r) \rightarrow 1, \quad b(r) \rightarrow 1. \quad (9.152)$$

*Anmerkung:* Aus (9.150) folgt

- für den *räumlichen Abstand* nach (9.39):

$$d\sigma = \sqrt{a(r)dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)}; \quad (9.153)$$

speziell

$$\begin{aligned} d\sigma \Big|_{dr=0} &= r \sqrt{d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2} \\ d\sigma \Big|_{d\vartheta=d\varphi=0} &= \sqrt{a(r)} dr. \end{aligned} \quad (9.154)$$

somit Interpretation von  $\vartheta, \varphi$  als Polar- bzw. Azimutalwinkel; hingegen entspricht nicht  $r$ , sondern  $\int \sqrt{a(r)} dr$  dem Abstand vom Ursprung.

- für das *Eigenzeitintervall* nach (9.40):

$$d\tau = \sqrt{b(r)} dt. \quad (9.155)$$

Die Zeit ist also nicht durch  $t$ , sondern durch  $\sqrt{b(r)}t$  gegeben.

Zu (9.151) sind nun die für (9.143) benötigten Christoffel-Symbole zu berechnen. Zunächst hat man

$$g^{11} = \frac{1}{a(r)}, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta}, \quad g^{44} = -\frac{1}{b(r) c^2}, \quad (9.156)$$

0 sonst. Anwendung von (8.141) ergibt sodann für (9.151, 156):

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} r \\ r r \end{Bmatrix} &= \frac{a'(r)}{2a(r)}, & \begin{Bmatrix} r \\ \vartheta \vartheta \end{Bmatrix} &= -\frac{r}{a(r)}, \\ \begin{Bmatrix} r \\ \varphi \varphi \end{Bmatrix} &= -\frac{r}{a(r)} \sin^2 \vartheta, & \begin{Bmatrix} r \\ t t \end{Bmatrix} &= \frac{c^2 b'(r)}{2a(r)}, \\ \begin{Bmatrix} \vartheta \\ r \vartheta \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \vartheta \\ \vartheta r \end{Bmatrix} = \frac{1}{r}, & \begin{Bmatrix} \vartheta \\ \varphi \varphi \end{Bmatrix} &= -\sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \begin{Bmatrix} \varphi \\ r \varphi \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varphi \\ \varphi r \end{Bmatrix} = \frac{1}{r}, & \begin{Bmatrix} \varphi \\ \vartheta \varphi \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varphi \\ \varphi \vartheta \end{Bmatrix} = \cot \vartheta, \\ \begin{Bmatrix} t \\ r t \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} t \\ t r \end{Bmatrix} = \frac{b'(r)}{2b(r)}, \end{aligned} \quad (9.157)$$

0 sonst; damit lauten die nichtverschwindenden Komponenten des *Ricci-Tensors* (9.143):

$$\begin{aligned} R_{rr} &= \frac{b''}{2b} - \frac{b'^2}{4b^2} - \frac{a'b'}{4ab} - \frac{a'}{ar} \\ R_{\vartheta\vartheta} &= \frac{r b'}{2ab} - \frac{r a'}{2a^2} + \frac{1}{a} - 1 \\ R_{\varphi\varphi} &= R_{\vartheta\vartheta} \sin^2 \vartheta \\ R_{tt} &= -c^2 \left( \frac{b''}{2a} - \frac{b'^2}{4ab} - \frac{a'b'}{4a^2} + \frac{b'}{ar} \right), \end{aligned} \quad (9.158)$$

und die nichttrivialen *Feldgleichungen* (9.142) sind:

$$\begin{aligned} \frac{b''}{2b} - \frac{b'^2}{4b^2} - \frac{a'b'}{4ab} - \frac{a'}{ar} &= 0 \\ \frac{r b'}{2ab} - \frac{r a'}{2a^2} + \frac{1}{a} - 1 &= 0 \\ \frac{b''}{2a} - \frac{b'^2}{4ab} - \frac{a'b'}{4a^2} + \frac{b'}{ar} &= 0. \end{aligned} \quad (9.159)$$

Aus der ersten und dritten dieser Gleichungen (Multiplikation der ersten mit  $b$ , der dritten mit  $a$ , anschließend Subtraktion) folgt

$$a b' + a' b = 0$$

$$a b = \text{konstant} = 1 \quad (9.160)$$

wegen (9.152). Die zweite Gleichung (9.159) geht mit (9.160) über in

$$r a'(r) = a(r) (1 - a(r)) \quad (9.161)$$

mit der Lösung

$$a(r) = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1}, \quad (9.162)$$

wo  $r_0$  eine Integrationskonstante ist. Aus (9.160, 162) folgt außerdem

$$b(r) = 1 - \frac{r_0}{r}. \quad (9.163)$$

Man verifiziert leicht, dass (9.162, 163) alle drei Gleichungen (9.159) befriedigen.

Mit (9.162, 163) erhält man aus (9.150) die *Schwarzschild-Metrik*

$$d s^2 = \frac{d r^2}{1 - \frac{r_0}{r}} + r^2 (d \vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d \varphi^2) - c^2 \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) d t^2. \quad (9.164)$$

Diese Formel gilt auch exakt bei *nichtstatischer*, kugelsymmetrischer Masse-Energie-Verteilung; siehe Sexl & Urbantke, Kap. 3.3.

Bezeichnung der Konstanten  $r_0$  als *Schwarzschild-Radius*. Vergleich von (9.164) mit (9.106) für große  $r$ , wo  $\phi = -\Gamma M / r$  gilt ( $M =$  Gesamtmasse - Gesamtenergie), ergibt

$$r_0 = \frac{2 \Gamma M}{c^2}. \quad (9.165)$$

Bei  $r = r_0$  wird die Schwarzschild-Metrik *singulär*; bei den meisten Körpern ist  $r_0$  jedoch kleiner als der Radius der Masse-Energie-Verteilung, liegt also im Innenraum, wo die berechnete Metrik gar nicht mehr gilt; z. B. ist für die *Erde*  $r_0 = 9$  mm. Für Objekte, die völlig innerhalb von  $r_0$  liegen, z. B. *schwarze Löcher*, hat  $r_0$  die Bedeutung eines „Ereignishorizontes“. Siehe hierzu Falk & Ruppel, S. 407.

Falls  $M = 0$  ist, d. h. falls kein Gravitationsfeld vorhanden ist, verschwindet nach (9.165) der Schwarzschild-Radius:  $r_0 = 0$ . In diesem Falle geht die Schwarzschild-Metrik (9.164) in die Metrik (9.145) der ungekrümmten Raumzeit über (auch asymptotisch im Falle  $r_0 \neq 0$ ).

### 9.3 Experimentelle Tests der Allgemeinen Relativitätstheorie

Theoretische Grundlagen sind

- die Einsteinschen Feldgleichungen (9.117, 121) etc. zur Bestimmung der metrischen Struktur der Raumzeit,
- die Bewegungsgleichungen (9.56, 57) für ein freies Teilchen (Geodätengleichung) bzw. für ein Teilchen im Kraftfeld (außer Gravitation, die ja schon in den Christoffel-Symbolen berücksichtigt ist).

1. Die Planetenbewegung im Gravitationsfeld der Sonne ist durch Newtons Gravitationsgesetz hinreichend beschrieben. Eine Diskrepanz tritt jedoch auf bei der **Periheldrehung des Merkur** um

$$\delta \varphi_0 = 43'' \text{ pro Jahrhundert .} \quad (9.166)$$

Planetenbewegung als freie Bewegung in der Schwarzschild-Metrik. Zur Formulierung der entsprechenden Geodätengleichung sind die Christoffel-Symbole 2. Art anzugeben. Aus (9.157) folgt mit (9.162, 163):

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} r \\ r r \end{Bmatrix} &= -\frac{r_0}{2r(r-r_0)}, & \begin{Bmatrix} r \\ \vartheta \vartheta \end{Bmatrix} &= -(r-r_0), \\ \begin{Bmatrix} r \\ \varphi \varphi \end{Bmatrix} &= -(r-r_0) \sin^2 \vartheta, & \begin{Bmatrix} r \\ t t \end{Bmatrix} &= \frac{c^2 r_0}{2r^3} (r-r_0), \\ \begin{Bmatrix} \vartheta \\ r \vartheta \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \vartheta \\ \vartheta r \end{Bmatrix} = \frac{1}{r}, & \begin{Bmatrix} \vartheta \\ \varphi \varphi \end{Bmatrix} &= -\sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \begin{Bmatrix} \varphi \\ r \varphi \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varphi \\ \varphi r \end{Bmatrix} = \frac{1}{r}, & \begin{Bmatrix} \varphi \\ \vartheta \varphi \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varphi \\ \varphi \vartheta \end{Bmatrix} = \cot \vartheta, \\ \begin{Bmatrix} t \\ r t \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} t \\ t r \end{Bmatrix} = \frac{r_0}{2r(r-r_0)}. \end{aligned} \quad (9.167)$$

Einsetzen in die *Geodätengleichung* (9.56) ergibt

$$\frac{d^2 r}{ds^2} - \frac{r_0}{2r(r-r_0)} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 - (r-r_0) \left( \left( \frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 + \sin^2 \vartheta \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - \frac{c^2 r_0}{2r^3} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 \right) = 0 \quad (9.168)$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\vartheta}{ds} - \sin \vartheta \cos \vartheta \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0 \quad (9.169)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + 2 \cot \vartheta \frac{d\vartheta}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0 \quad (9.170)$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{r_0}{r(r-r_0)} \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0. \quad (9.171)$$

Die Geodätengleichung (9.56) besitzt die folgende *Konstante der Bewegung* (9.59):

$$g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 1; \quad (9.172)$$

diese ist für die Gln. (9.168 - 171) wegen (9.164) von der folgenden Gestalt:

$$\frac{r}{r-r_0} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left( \left( \frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 + \sin^2 \vartheta \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \right) - c^2 \frac{r-r_0}{r} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 = 1. \quad (9.173)$$

Im Folgenden wird Gl. (9.168) durch Gl. (9.173) ersetzt.

Beschränkung der Bewegung auf die *Äquatorialebene*  $\vartheta = \pi/2$ :  $d\vartheta/ds = 0$  zu Beginn  $\Rightarrow$  Planet verbleibt für alle Zeiten ( $s$ ) in der Ebene  $\vartheta = \pi/2$  mit  $d\vartheta/ds = 0$ ,  $d^2\vartheta/ds^2 = 0$ ; demnach entfällt (9.169) vollständig und in (9.170) der dritte Term; auch (9.173) ist entsprechend zu reduzieren.

Wir betrachten zunächst die Gleichungen (9.170, 171). Mit der *Substitution*

$$v = \frac{d\varphi}{ds}, \quad w = \frac{dt}{ds} \quad (9.174)$$

erhält man

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} v &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dv}{dr} + \frac{2}{r} v &= 0 \end{aligned} \quad (9.175 \text{ a})$$

und

$$\begin{aligned} \frac{dw}{ds} + \frac{r_0}{r(r-r_0)} \frac{dr}{ds} w &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dw}{dr} + \frac{r_0}{r(r-r_0)} w &= 0; \end{aligned} \quad (9.175 \text{ b})$$

Lösung:

$$v = \frac{\alpha}{r^2}, \quad w = \frac{\beta r}{r - r_0} \quad (9.176)$$

mit Integrationskonstanten  $\alpha$  und  $\beta$ .

Wir setzen sodann (9.174, 176) in (9.173) ein; das ergibt die  $r(s)$ -Gleichung

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{r^3}(r - r_0) = 1 + c^2 \beta^2 - \frac{r_0}{r}. \quad (9.177)$$

Diese wird mit

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\alpha}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \quad (9.178)$$

in die folgende  $r(\varphi)$ -Gleichung umgeschrieben:

$$\left(\frac{\alpha}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{r^2} = 1 + c^2 \beta^2 - \frac{r_0}{r} + \frac{\alpha^2 r_0}{r^3}. \quad (9.179)$$

Die weitere *Substitution*

$$u = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{du}{d\varphi} / \frac{du}{dr} = -r^2 \frac{du}{d\varphi} \quad (9.180)$$

macht daraus eine  $u(\varphi)$ -Gleichung:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{1 + c^2 \beta^2}{\alpha^2} - \frac{r_0}{\alpha^2} u + r_0 u^3. \quad (9.181)$$

Ableitung dieser Gleichung nach  $\varphi$  führt auf

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = -\frac{r_0}{2\alpha^2} + \frac{3}{2} r_0 u^2. \quad (9.182)$$

Bedeutung der *Konstanten*  $\alpha$ : Aus (9.174, 176) folgt

$$\alpha = r^2 \frac{d\varphi}{ds} =: \frac{h}{ic}. \quad (9.183)$$

In der Newtonschen Theorie, wo  $ds = ic dt$  gilt, hat die Konstante  $h$  die Bedeutung des Bahndrehimpulses / Masse bzw. der doppelten Flächengeschwindigkeit.

Mit (9.165) und (9.183) geht (9.182) schließlich über in

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{\Gamma M}{h^2} + \frac{3}{2} r_0 u^2. \quad (9.184)$$

Die linke Seite zusammen mit dem ersten Term der rechten Seite entspricht genau der *Newton-Theorie*. Der zweite Term der rechten Seite liefert deren allgemein-relativistische *Einstein-Korrektur*.

*Abschätzung.* Der Zusatzterm ist zwar klein:

$$\frac{3}{2} r_0 u^2 / \frac{\Gamma M}{h^2} = 3 \left( \frac{r \dot{\varphi}}{c} \right)^2 \simeq 10^{-7} \quad (9.185)$$

für den Merkur; sein Einfluss ist jedoch kummulativ und daher in längeren Zeiträumen beobachtbar.

*Störungstheoretische Behandlung* von Gleichung (9.184):

- In *0. Ordnung* ( $r_0 = 0$ ) hat man die klassische Gleichung

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{\Gamma M}{h^2} \quad (9.186)$$

mit der Lösung

$$u = u_0 = \frac{\Gamma M}{h^2} (1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)). \quad (9.187)$$

$e$  ist die Exzentrizität,  $\varphi_0$  die Perihelstellung des Orbits.

- In *1. Ordnung* erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u &= \frac{\Gamma M}{h^2} + \frac{3}{2} r_0 u_0^2 \\ &= \frac{\Gamma M}{h^2} + \frac{3}{2} r_0 \left( \frac{\Gamma M}{h^2} \right)^2 (1 + e \cos(\varphi - \varphi_0))^2; \end{aligned} \quad (9.188)$$

diese hat die Lösung

$$\begin{aligned} u &= u_1 = u_0 + \frac{3}{2} r_0 \left( \frac{\Gamma M}{h^2} \right)^2 \times \\ &\times \left( 1 + \frac{1}{3} e^2 (1 + \sin^2(\varphi - \varphi_0)) + e\varphi \sin(\varphi - \varphi_0) \right). \end{aligned} \quad (9.189)$$

Nur der letzte Term in (9.189) hat einen beobachtbaren Störeinfluss (gegenüber  $u_0$ ), da der im Laufe der Bewegung beliebig groß wird. Daher folgt aus (9.187, 189):

$$\begin{aligned} u &= \frac{\Gamma M}{h^2} \left( 1 + e \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{3}{2} r_0 \frac{\Gamma M}{h^2} e \varphi \sin(\varphi - \varphi_0) \right) \\ &= \frac{\Gamma M}{h^2} (1 + e \cos(\varphi - \varphi_0 - \delta \varphi_0)) + O(\delta \varphi_0^2) \end{aligned} \quad (9.190)$$

mit

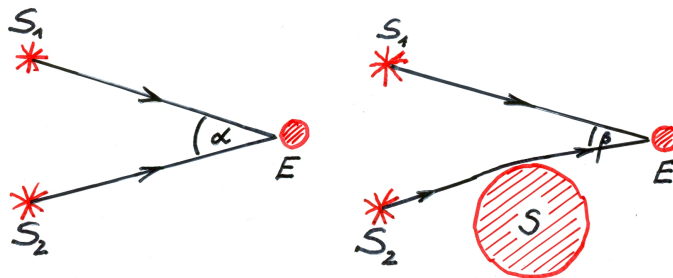
$$\delta \varphi_0 = \frac{3}{2} r_0 \frac{\Gamma M}{h^2} \varphi. \quad (9.191)$$

Das ist die *Periheldrehung*! Pro Umlauf, d. h. für  $\varphi = 2\pi$ , erhält man für die Merkurbahn

$$\delta \varphi_0 = 3\pi r_0 \frac{\Gamma M}{h^2} \simeq 0.104'' . \quad (9.192)$$

Da der Merkur im Jahrhundert 420 Umläufe macht, erhält man für diese Zeitspanne auch theoretisch den beobachteten Wert (9.166).

## 2. Lichtablenkung im Gravitationsfeld. $S_i$ = Sterne, $E$ = Erde, $S$ = Sonne:



• Abbildung 9.6 •

*Beobachtung* (bei Sonnenfinsternis):

$$\beta = \alpha - \frac{2r_0}{R}, \quad (9.193)$$

wo  $r_0$  der Schwarzschild-Radius und  $R$  der gewöhnliche Radius der Sonne sind; die Ablenkung beträgt  $1.8''$ .

Lichtstrahlen sind *Null-Geodäten*: Das sind geodätische Linien, auf denen überall

$$ds = 0 \quad (9.194)$$



ist; denn  $ds$  entspricht gemäß Abschnitt 5.4 lokal einem lichtartigen, d. h. durch ein Lichtsignal verknüpfbaren Ereignispaar. Parameterdarstellung  $x^i(\lambda)$ ;  $s$  wegen (9.194) nicht als Kurvenparameter geeignet. Statt (9.56) greift man auf die Geodätengleichung (9.44) zurück:

$$\frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} + \left\{ \begin{array}{c} i \\ j k \end{array} \right\} \frac{dx^j}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} = 0. \quad (9.195)$$

Wegen (9.194) hat diese Gleichung als Konstante der Bewegung nicht (9.172), sondern

$$g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = 0. \quad (9.196)$$

Die Photonen bewegen sich im Schwarzschild-Feld der Sonne. Daher Anlehnung an die Diskussion unter 1; wie dort Beschränkung auf die Ebene  $\vartheta = \pi/2$ . Analog zu (9.170, 171, 174) hat man die Gleichungen

$$\frac{d^2 \varphi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} = 0 \quad (9.197)$$

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{r_0}{r(r-r_0)} \frac{dr}{d\lambda} \frac{dt}{d\lambda} = 0 \quad (9.198)$$

$$\frac{r}{r-r_0} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 - c^2 \frac{r-r_0}{r} \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = 0 \quad (9.199)$$

Rechnung wie zuvor; so gelangt man zum Analogon von (9.184):

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{3}{2} r_0 u^2. \quad (9.200)$$

Der erste Term auf der rechten Seite fehlt hier wegen der Null (statt der Eins) auf der rechten Seite von (9.199).

Die zu (9.200) gehörige homogene Gleichung ( $r_0 = 0$ ) entspricht der klassischen geometrischen Optik: geradlinige Lichtausbreitung; die Inhomogenität ( $r_0 \neq 0$ ) liefert die allgemein-relativistische Korrektur: Ablenkung im Gravitationsfeld.

*Störungsrechnung* zur näherungsweisen Lösung von (9.200):

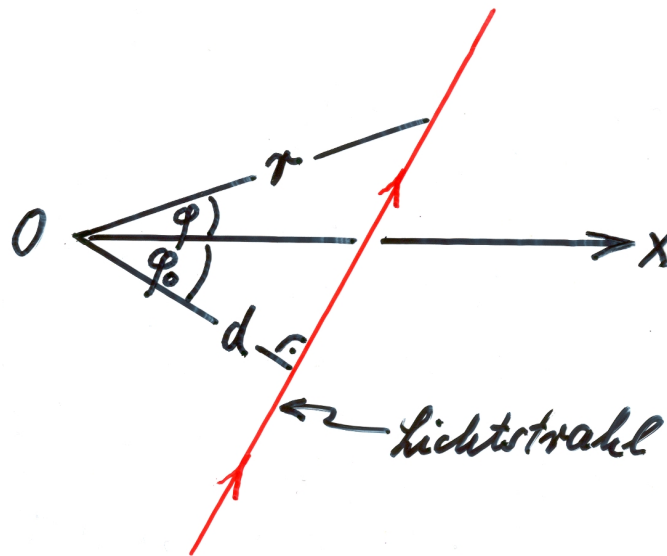
- 0. Ordnung: homogene Gleichung, klassischer Fall:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = 0 \quad (9.201)$$

mit der Lösung

$$u = u_0 = \frac{1}{d} \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (9.202)$$

d. i. wegen  $u = 1/r$  eine gerade Linie mit dem „Stoßparameter“  $d$ :



• Abbildung 9.7 •

Nachfolgend wird o. B. d. A.  $\varphi_0 = 0$  gesetzt:  $u_0 = \frac{1}{d} \cos \varphi$ .

- 1. Ordnung:  $u = u_0$  in der Inhomogenität:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{3r_0}{2d^2} \cos^2 \varphi \quad (9.202)$$

mit der Lösung

$$u = u_1 = u_0 + \frac{r_0}{2d^2} (2 - \cos^2 \varphi). \quad (9.203)$$

Die Asymptotenrichtungen des  $u_1$ -Strahls sind wegen  $r = \infty$  durch  $u_1 = 0$  gegeben:

$$\frac{1}{d} \cos \varphi + \frac{r_0}{2d^2} (2 - \cos^2 \varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 \varphi - 2 \frac{d}{r_0} \cos \varphi - 2 = 0 \quad (9.204)$$

mit der Lösung

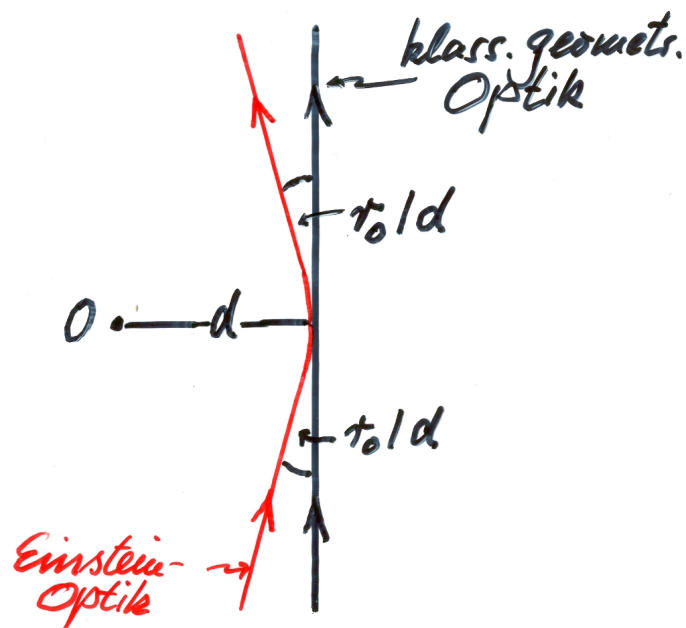
$$\cos \varphi = \frac{d}{r_0} \begin{matrix} (+) \\ (-) \end{matrix} \sqrt{\left(\frac{d}{r_0}\right)^2 + 2}. \quad (9.205)$$

Das Pluszeichen ist für  $d > r_0$  wegen  $|\cos \varphi| \leq 1$  auszuschließen. Für  $d \gg r_0$  folgt

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{d}{r_0} \left( 1 - \left( 1 + \left( \frac{r_0}{d} \right)^2 \right) \right) = -\frac{r_0}{d} \\ \Rightarrow \varphi &= \pm \left( \frac{\pi}{2} + \frac{r_0}{d} \right). \end{aligned} \quad (9.206)$$

Für den *Ablenkwinkel* folgt

$$\Delta \varphi = \varphi_{out} - \varphi_{in} = 2 \frac{r_0}{d} \quad (9.207)$$



• Abbildung 9.8 •

Mit  $d = R$  ist das gleich dem beobachteten Resultat (9.193).

**3. Spektrallinienverschiebung im Gravitationsfeld.** Auf der Basis der Metrik (9.106) im schwachen, statischen Gravitationsfeld erhält man gemäß (9.86) die Relation

$$\omega_E = \left(1 - \frac{\phi(E) - \phi(S)}{c^2}\right) \omega_S ; \quad (9.208)$$

$E$  steht für Empfänger,  $S$  für Sender. Für  $\phi(E) \lesssim \phi(S)$  hat man Violett- bzw. Rotverschiebung. *Relative Frequenzänderung:*

$$\frac{\omega_E - \omega_S}{\omega_S} = -\frac{\phi(E) - \phi(S)}{c^2} ,$$

abgekürzt

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = -\frac{\Delta \phi}{c^2} . \quad (9.209)$$

*Experiment* von Pound & Snider (1965):  $\Delta \omega / \omega$ -Messung für vertikalen Lichtstrahl im Labor auf der Erde (Schwerefeld):

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = \mp \frac{gh}{c^2} \simeq \mp 2 \times 10^{-15} \quad (9.210)$$

für  $h = 20$  m. Die beiden Vorzeichen stehen

- für eine Laufrichtung von unten nach oben  $\Rightarrow$  Rotverschiebung
- für eine Strahlrichtung von oben nach unten  $\Rightarrow$  Violettverschiebung.

Messung von (9.210) auf 1 % genau mit Hilfe des *Mößbauer-Effekts*.

*Anmerkung:* Die Frequenzverschiebung im Gravitationsfeld darf nicht mit der Frequenzverschiebung infolge Relativbewegung von Empfänger und Sender verwechselt werden (Doppler-Effekt).

**4. Gravitationswellen:** Zeitliche Änderung der Masse-Energie-Verteilung bewirkt zeitliche Änderung der Krümmungsstruktur der Raumzeit. Die Störungen breiten sich in 1. Ordnung im Vakuum als Wellen mit der Geschwindigkeit  $c$  aus.

*Lineare Näherung der Einsteinschen Feldgleichungen:* Wie in (9.91, 126) der Ansatz

$$g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij} \quad (9.211)$$

mit (gegen 1) kleinen Termen  $h_{ij}$ . Entsprechende Linearapproximation des Ricci-Tensors gemäß (9.128):

$$R_{ij} = \frac{1}{2} (h_{kk,ij} - h_{ik,kj} - h_{jk,ki} + h_{ij,kk}) . \quad (9.212)$$

Einsetzen in die Einsteinsche Feldgleichung (9.135 a) zusammen mit der Approximation  $g_{ij} = \delta_{ij}$  ergibt

$$\frac{1}{2} (h_{kk,ij} - h_{ik,kj} - h_{jk,ki} + h_{ij,kk}) = \kappa \left( \frac{1}{2} \delta_{ij} T - T_{ij} \right). \quad (9.213)$$

Dieses Gleichungssystem ist zwar *linear*, aber in komplizierter Weise *gekoppelt*.

*Entkopplung* durch (gewisse) Freiheit in der Wahl des metrischen Tensors. Betrachte die infinitesimale Koordinatentransformation

$$x^i = \bar{x}^i + \Lambda^i(x) \quad (9.214)$$

mit kleinen Termen  $\Lambda^i$ . Es folgt nach (8.24) zusammen mit der erneuten Approximation  $g_{kl} = \delta_{kl}$ :

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij} &= \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} g_{kl} \\ &= \left( \delta_i^k + \frac{\partial \Lambda^k}{\partial \bar{x}^i} \right) \left( \delta_j^l + \frac{\partial \Lambda^l}{\partial \bar{x}^j} \right) g_{kl} \\ &= \delta_i^k \delta_j^l g_{kl} + \delta_i^k \frac{\partial \Lambda_k}{\partial \bar{x}^j} + \delta_j^l \frac{\partial \Lambda_l}{\partial \bar{x}^i} \\ &= g_{ij} + \Lambda_{i,j} + \Lambda_{j,i}. \end{aligned} \quad (9.215)$$

Der letzte Schritt beruht darauf, dass in 1. Ordnung gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \bar{x}^j} &= \frac{\partial \Lambda_i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \\ &= \frac{\partial \Lambda_i}{\partial x^k} \left( \delta_j^k + \frac{\partial \Lambda^k}{\partial \bar{x}^j} \right) \\ &= \frac{\partial \Lambda_i}{\partial x^j}. \end{aligned} \quad (9.216)$$

Aus (9.215) folgt mit (9.211)

$$\bar{h}_{ij} = h_{ij} + \Lambda_{i,j} + \Lambda_{j,i}. \quad (9.217)$$

Aus der Kovarianz der Einsteinschen Feldgleichungen folgt:  $\bar{h}_{ij}$  ist genau dann Lösung von (9.213), wenn  $h_{ij}$  Lösung ist. Vgl. *Eichtransformation*, *Eichinvarianz* in der Elektrodynamik:  $\bar{\Omega}_i = \Omega_i + \chi_{,i} \Rightarrow \bar{F}_{ij} = F_{ij}$ .

Wahl der Funktionen  $\Lambda_i$  so, dass die Gleichungen (9.213) entkoppeln. Dazu die folgende Darstellung des Ricci-Tensors (9.212):

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \left( \underbrace{\left( \frac{1}{2} h_{kk,i} - h_{ik,k} \right)}_{*},_j + \underbrace{\left( \frac{1}{2} h_{kk,j} - h_{jk,k} \right)}_{*},_i + \square h_{ij} \right). \quad (9.218)$$

Durch geeignete Wahl der  $\Lambda_i$  können die \*-Terme zum Verschwinden gebracht werden. Mit (9.217) folgt nämlich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{h}_{kk,i} - \bar{h}_{ik,k} &= \frac{1}{2} (h_{kk,i} + 2\Lambda_{k,ki}) \\ &\quad - (h_{ik,k} + \Lambda_{i,kk} + \Lambda_{k,ik}) \\ &= \frac{1}{2} h_{kk,i} - h_{ik,k} - \square \Lambda_i \\ &= 0, \end{aligned} \tag{9.219}$$

falls

$$\square \Lambda_i = \frac{1}{2} h_{kk,i} - h_{ik,k}. \tag{9.220}$$

Die  $\Lambda_i$  sind also – als Lösungen von (9.220) – immer so wählbar, dass die \*-Terme verschwinden:

$$\frac{1}{2} h_{kk,i} - h_{ik,k} = 0. \tag{9.221}$$

Diese *Eichkonvention* (auch als „harmonische Eichung“ bezeichnet) ist der Lorentz-Konvention der Elektrodynamik vergleichbar:  $\Omega_{i,i} = 0$ .

Mit (9.221) vereinfacht sich der Ricci-Tensor (9.218) zu

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \square h_{ij}; \tag{9.222}$$

folglich entkoppeln die Gln. (9.213) zu

$$\square h_{ij} = \kappa (\delta_{ij} T - 2T_{ij}). \tag{9.223}$$

In linearer Näherung genügt somit jede Komponente des metrischen Tensors der **inhomogenen Wellengleichung**.

Im Falle einer *statischen* Masse-Energie-Verteilung ist  $T_{ij}$  durch (9.133) gegeben:

$$T_{ij} = -\mu c^2 \delta_{i4} \delta_{j4}, \tag{9.224}$$

folglich

$$T = -\mu c^2. \tag{9.225}$$

Für das resultierende *statische* Gravitationsfeld erhält man mit (9.224, 225) die Gleichung:

$$\Delta h_{ij} = -\kappa \mu c^2 (\delta_{ij} - 2\delta_{i4} \delta_{j4}). \tag{9.226}$$

Eine Lösung ist

$$h_{ij} = h_i \delta_{ij} \tag{9.227}$$

mit

$$\Delta h_\lambda = -\kappa \mu c^2, \quad \lambda = 1, 2, 3, \quad (9.228)$$

$$\Delta h_4 = \kappa \mu c^2. \quad (9.229)$$

Nach (9.137) gilt (sofern  $|\phi| \ll c^2$  ist)

$$h_4 = \frac{2}{c^2} \phi, \quad (9.230)$$

vgl. (9.103); somit ist

$$h_\lambda = -\frac{2}{c^2} \phi, \quad \lambda = 1, 2, 3. \quad (9.231)$$

Mit (9.211, 227, 230, 231) erhält man den *metrischen Tensor*

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\phi}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{2\phi}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{2\phi}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{2\phi}{c^2} \end{pmatrix}. \quad (9.232)$$

Dieser liegt den Formeln (9.106, 140) zu Grunde.

Im Allgemeinen ist die Masse-Energie-Verteilung weder statisch, noch stationär; dann ist  $T_{ij}$  *zeitabhängig*. In diesem Falle breiten sich von den Quellen *Gravitationswellen* aus. Im Vakuum

$$T_{ij} = 0 \quad (9.233)$$

geht (9.223) in die **homogene Wellengleichung** über:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) h_{ij} = 0. \quad (9.234)$$

Dort breiten sich die Gravitationswellen mit Lichtgeschwindigkeit aus.

Multipolentwicklung des *Gravitationsstrahlungsfeldes* wie in der Elektrodynamik. Jedoch keine Dipol-, keine Oktupol-, ... strahlung, da nur positive (keine negativen) Massen. Zu erwarten ist Quadrupolstrahlung ... In der Fernzone ebene transversale Wellen.

Welche Quellen emittieren experimentell nachweisbare Gravitationsstrahlung? In welchem Frequenzbereich hat man zu suchen?

**Rotierende Strahlungsquelle.** Nach Einstein ist die Energieabstrahlung eines mit der Frequenz  $\omega$  rotierenden Körpers vom Trägheitsmoment  $J$  gegeben durch

$$\frac{dE}{dt} = \frac{32\Gamma}{5c^5} J^2 \omega^6. \quad (9.235)$$

Diese Strahlungsleistung ist für Anordnungen, die in irdischen Labors realisierbar sind, unmessbar gering.

Anwendung von (9.235) auf das *astronomische Zweikörpersystem*. Einfachheitshalber sei

$$m_1 = m_2 = m \quad \Rightarrow \quad M = m_1 + m_2 = 2m, \quad \mu = m_1 m_2 / M = m/2. \quad (9.236)$$

Mit

$$J = \mu r^2 = \frac{m}{2} r^2 \quad (9.237)$$

und (3. Kepler-Gesetz)

$$\omega^2 = \frac{\Gamma M}{r^3} = \frac{2\Gamma m}{r^3} \quad (9.238)$$

folgt aus (9.235):

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{64\Gamma^4}{5c^5} \left(\frac{m}{r}\right)^5 \\ &= \frac{2c^5}{5\Gamma} \left(\frac{r_0}{r}\right)^5 \\ &= 1.45 \times 10^{52} \left(\frac{r_0}{r}\right)^5 \text{ Watt}. \end{aligned} \quad (9.239)$$

Die Strahlungsleistung hängt also wesentlich vom Verhältnis Schwarzschild-Radius / Abstand der beiden Himmelskörper ab.

*Beispiele:*

- Zwei *Sonnen* ( $r_0 = 3 \text{ km}$ ) im Abstand Erde-Sonne ( $r = 1.5 \times 10^8 \text{ km}$ ):

$$\frac{r_0}{r} = 2 \times 10^{-8} \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = 4.64 \times 10^{13} \text{ Watt}. \quad (9.240)$$

Das entspricht einem Massenverlust von ca.  $0.5 \text{ g s}^{-1}$  und ist ein vernachlässigbarer Effekt.

- Zwei *Neutronensterne* von je halber Sonnenmasse ( $r_0 = 1.5 \text{ km}$ ) im Abstand  $r = 100 \text{ km}$ :

$$\frac{r_0}{r} = 1.5 \times 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = 1.10 \times 10^{43} \text{ Watt}. \quad (9.241)$$

Das ist ein Massenverlust von ca.  $6 \times 10^{-5}$  Sonnenmassen  $\text{s}^{-1}$ , d. h. in ca. 4.5 Stunden wäre das System völlig zerstrahlt. Tatsächlich ereignet sich eine Abbremsung der Rotation, eine Abnahme des Abstandes, schließlich ein *Gravitationskollaps*. Nachweisbarer Effekt.



*Frequenzbereich.* Aus (9.238) folgt mit (9.165):

$$\nu = \frac{c}{2\pi r_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{3/2}. \quad (9.242)$$

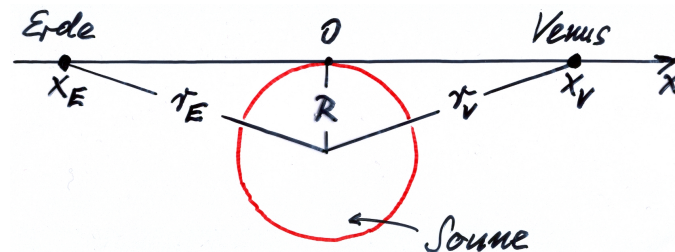
Für das vorstehende Beispiel bedeutet das  $\nu = 58$  Hz. Tatsächlich sucht man im Frequenzbereich  $\nu = 10^3 - 10^4$  Hz; das entspricht bei gleichem Schwarzschild-Radius einem geringeren Abstand der beiden Massen.

*Experimenteller Nachweis* von Gravitationswellen mit

- Zylinderantennen (Weber, seit 1969),
- Laser-Interferometer (Großprojekte, z. T. noch in der Aufbauphase).

Messung der Schwingungen von Alu-Zylindern bzw. der relativen Längenänderungen von Interferometerarmen infolge Anregung durch Gravitationsstrahlungssignale aus Richtung des Kerns der Milchstraße. Jährlich einige Hundert stoßartige Ereignisse von maximal 0.4 s Dauer und einer Leistungsdichte von ca. 1 Watt/cm<sup>2</sup> (Zehnfaches der Sonneneinstrahlung).

**5. Radarreflexion an der Venus** (Shapiro 1968): Laufzeitverlängerung eines Radarsignals für Hin- und Rückweg um ca.  $4 \times 10^{-4}$  s, wenn das Signal in Sonnennähe passiert:



• Abbildung 9.9 •

In linearer Näherung gilt nach (9.106, 140):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\phi(x)}{c^2}\right) dx^2 - c^2 \left(1 + \frac{2\phi(x)}{c^2}\right) dt^2. \quad (9.243)$$

Folgt in dieser Näherung auch aus der Schwarzschild-Metrik (9.164).

Für Photonen gilt nach (9.194):

$$ds^2 = 0. \quad (9.244)$$

Also erhält man aus (9.243, 244) für die Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= c \sqrt{\frac{1 + 2\phi/c^2}{1 - 2\phi/c^2}} \\ &= c(1 + 2\phi/c^2),\end{aligned}\quad (9.245)$$

da nach Voraussetzung  $|\phi| \ll c^2$  ist. Aus (9.245) folgt

$$\frac{dx}{dt} < c \quad \text{für} \quad \phi < 0, \quad (9.246)$$

woraus die Laufzeitverlängerung resultiert. Man berechnet für den Hinweg:

$$\begin{aligned}ct &= \int_{x_E}^{x_V} \frac{dx}{1 + 2\phi(x)/c^2} \\ &= x_V - x_E + \Delta x\end{aligned}\quad (9.247)$$

mit der Abstandsvergrößerung – beachte (9.165) –

$$\begin{aligned}\Delta x &= -\frac{2}{c^2} \int_{x_E}^{x_V} \phi(x) dx \\ &= r_0 \int_{x_E}^{x_V} \frac{dx}{\sqrt{R^2 + x^2}} \\ &= r_0 \ln \frac{x_V + \sqrt{R^2 + x_V^2}}{x_E + \sqrt{R^2 + x_E^2}} \\ &= r_0 \ln \frac{r_V + \sqrt{r_V^2 - R^2}}{r_E - \sqrt{r_E^2 - R^2}}.\end{aligned}\quad (9.248)$$

Für  $R \ll r_V, r_E$  folgt in guter Näherung:

$$\Delta x = r_0 \ln \frac{4r_V r_E}{R^2}; \quad (9.249)$$

in weiterer guter Näherung  $r_V = r_E = r$  erhält man schließlich

$$\Delta x = r_0 \ln \left(\frac{2r}{R}\right)^2 = 2r_0 \ln \frac{2r}{R} \simeq 60 \text{ km}. \quad (9.250)$$

Hierfür benötigt das Radarsignal die Laufzeitverlängerung

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{c} \simeq 2 \times 10^{-4} \text{ s} \quad (9.251)$$

– in Übereinstimmung mit der experimentellen Beobachtung.

## 9.4 Kosmologie

In der Kosmologie werden Modelle entwickelt und analysiert, die den Kosmos (das Universum, das Weltall) im Ganzen betreffen, sog. **Weltmodelle**. Einige grobe Angaben über den für uns sichtbaren Bereich des Kosmos:

- Der Radius beträgt in etwa  $10^{10}$  Lichtjahre.
- Es gibt darin ungefähr  $10^{10}$  Galaxien.
- Eine Galaxie hat typischerweise  $10^{10}$  Sterne, deren Masse im Mittel der Sonnenmasse vergleichbar ist.
- Gruppierung der Galaxien zu Haufen und Superhaufen.
- Unsere Milchstraße hat einen Durchmesser von  $10^5$  Lichtjahren; sie gehört zur sog. Lokalen Gruppe, die nur 20 Galaxien umfasst; eine davon ist der Andromeda-Nebel in einer Entfernung von  $2 \times 10^6$  Lichtjahren. (Sonst bestehen Haufen typischerweise aus etwa 200 Galaxien mit einem Durchmesser von ca.  $10^7$  Lichtjahren.)

Es wird angenommen (entspricht der astronomischen Beobachtung), dass die Galaxien(haufen) gleichmäßig über das Weltall verteilt sind. Universum als „Gas“ mit Galaxien(haufen) als „Atomen (Molekülen)“. Bei Mittelung über Distanzen, die dem (mittleren) Abstand zwischen den Galaxien(haufen) entsprechen, erhält man eine räumlich konstante Masse-Energie-Verteilung.

**Kosmologisches Prinzip:** Im Universum sind alle Positionen und Richtungen gleichwertig; *Homogenität* bzw. *Isotropie* des Kosmos werden unterstellt.

Was folgt daraus für die metrische Struktur der Raumzeit? Unter der Annahme einer *universalen (kosmischen) Zeit*  $t$  (vgl. Newton) macht man den Ansatz

$$ds^2 = d\sigma^2 - c^2 dt^2 ; \quad (9.252)$$

dabei ist  $d\sigma^2$  die Metrik des *dreidimensionalen* Unterraumes der Orte bei (beliebiger, aber) fester Zeit. Auf Grund des kosmologischen Prinzips verlangt man, dass dieser  $\mathcal{R}_3$  *maximale Symmetrie* besitzt: ein Riemann-Raum *konstanter Krümmung*, d. h. der Krümmungsskalar hängt nicht vom Ort ab (ist räumlich konstant). Ferner wird – nach Einstein – verlangt, dass der  $\mathcal{R}_3$  *unbegrenzt* mit endlichem oder unendlichem Volumen, d. h. „geschlossen“ oder „offen“ ist.

Eine Metrik, welche den genannten Anforderungen genügt, ist die folgende (sogar notwendig):

$$d\sigma^2 = \frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{(1 + (K/4)(x'^2 + y'^2 + z'^2))^2}; \quad (9.253)$$

dabei ist  $K$  die konstante *Gaußsche Krümmung*, die eng mit dem Krümmungsskalar zusammenhängt (siehe unten). Zu unterscheiden sind die Fälle

- $K > 0$ : Kugel,
- $K = 0$ : Ebene,
- $K < 0$ : Hyperboloid.

Es handelt sich in jedem Falle um eine *dreidimensionale* unbegrenzte Hyperfläche. Das Volumen (der Flächeninhalt) der Kugel ist endlich, das der Ebene und des Hyperboloids unendlich (siehe unten).

Durch die *Skalierung*

$$x' = ax, \quad y' = ay, \quad z' = az \quad (9.254)$$

mit

$$K = \frac{k}{a^2} \quad (9.255)$$

geht (9.253) über in

$$d\sigma^2 = a^2 \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(1 + (k/4)(x^2 + y^2 + z^2))^2}. \quad (9.256)$$

Die Konstante  $a$  hat die Dimension einer Länge; sie wird als *Weltradius* bezeichnet; im Falle der Kugel handelt es sich um den geometrischen Radius; siehe unten.  $x, y, z$  sind in der Skalierung (9.254) dimensionslos;  $x', y', z'$  bezeichnen Ortsvariablen in Einheiten von  $a$ .

Nach Vorgabe von  $K$  kann  $a$  gemäß (9.255) so gewählt werden, dass die drei vorstehenden Fälle durch

$$k = +1, 0, -1 \quad (9.257)$$

gekennzeichnet sind. Umgekehrt: Nach Vorgabe des Weltradius und des Krümmungstyps  $k$  folgt gemäß (9.255) die Krümmung. Diese ist betragsgemäß umso größer/kleiner je kleiner/größer der Radius ist.

*Begründung* für (9.256, 257):

- Für die *Dreikugel* setzt man an:

$$d\sigma^2 = a^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)) ; \quad (9.258)$$

das ist die Verallgemeinerung der Metrik der Einskugel (Kreis):

$$d\sigma^2 = a^2 d\varphi^2 , \quad (9.259)$$

und der Metrik der Zweikugel (Kugel):

$$d\sigma^2 = a^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) . \quad (9.260)$$

Die Transformation

$$\bar{r} = \sin \chi , \quad 0 \leq \chi \leq \pi , \quad (9.261)$$

führt auf

$$d\sigma^2 = a^2 \left( \frac{d\bar{r}^2}{1 - \bar{r}^2} + \bar{r}^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right) ; \quad (9.262)$$

mit der weiteren Transformation

$$\bar{r} = \frac{r}{1 + r^2/4} \quad (9.263)$$

erhält man

$$d\sigma^2 = a^2 \frac{dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)}{(1 + r^2/4)^2} ; \quad (9.264)$$

schließlich ergibt die dritte Transformation

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi , \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi , \quad z = r \cos \vartheta \quad (9.265)$$

die Metrik

$$d\sigma^2 = a^2 \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(1 + (x^2 + y^2 + z^2)/4)^2} . \quad (9.266)$$

Das ist (9.256) für  $k = +1$ .

- Für die *Dreiebene* und das *Dreihyperboloid* hat man

$$d\sigma^2 = a^2 (d\chi^2 + \chi^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)) \quad (9.267)$$

bzw.

$$d\sigma^2 = a^2 (d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)) . \quad (9.268)$$

Mit den Transformationen

$$\chi = r , \quad 0 \leq \chi < \infty , \quad (9.269)$$

bzw.

$$\sinh \chi = \frac{r}{1 - r^2/4}, \quad 0 \leq \chi < \infty, \quad (9.270)$$

sowie der abschließenden Transformation (9.265) folgt

$$d\sigma^2 = a^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (9.271)$$

bzw.

$$d\sigma^2 = a^2 \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(1 - (x^2 + y^2 + z^2)/4)^2}. \quad (9.272)$$

Das ist (9.256) für  $k = 0$  bzw.  $k = -1$  •

Das *Volumen* der Hyperflächen berechnet man nach der Formel

$$V = \int \sqrt{g} d\chi d\vartheta d\varphi \quad (9.273)$$

mit  $g = \det(g_{\mu\nu})$ . Im Falle der Kugel folgt

$$\begin{aligned} V &= a^3 \int_0^\pi d\chi \sin^2 \chi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi^2 a^3; \end{aligned} \quad (9.274)$$

im Falle von Ebene und Hyperboloid gilt

$$\begin{aligned} V &= a^3 \int_0^\infty d\chi ((\sinh) \chi)^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \infty; \end{aligned} \quad (9.275)$$

also endliches oder unendliches Volumen für Kugel bzw. Ebene und Hyperboloid.

Der zur Metrik (9.256) gehörige *dreidimensionale Krümmungsskalar* (8.157) ist gegeben durch

$$R^{(3)} = -\frac{6k}{a^2}; \quad (9.276)$$

er ist überall auf der Hyperfläche gleich groß. Eine detaillierte Begründung (Berechnung) von (9.276) findet man z. B. in bei Atwater (1974). Aus (9.255) folgt der Zusammenhang

$$R^{(3)} = -6K. \quad (9.277)$$

Fasst man (9.252) und (9.256) zusammen, so gelangt man zur **Robertson-Walker-Metrik** der vierdimensionalen Raumzeit:

$$ds^2 = a^2(t) \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(1 + (k/4)(x^2 + y^2 + z^2))^2} - c^2 dt^2 . \quad (9.278)$$

Hierbei wurde der Weltradius zeitabhängig angesetzt, um einer eventuellen Expansion oder Kontraktion des Universums Rechnung zu tragen. Eine Veränderung von  $a$  lässt  $x, y, z$  unverändert; hingegen ändern sich  $x', y', z'$  gemäß (9.254) (z. B. die Position einer Galaxie). Die Funktion  $a(t)$  ist zunächst unbekannt; ebenso der Parameter  $k$ , für den es die drei Möglichkeiten (9.257) gibt. Die Größen sind durch Einsetzen des Ansatzes (9.278) in die Einsteinschen Feldgleichungen zu bestimmen (siehe unten).

Bevor wir  $a(t)$  berechnen, wird eine *Konsequenz* der Robertson-Walker-Metrik besprochen, die für die astronomisch-experimentelle Verifikation der Theorie von zentraler Bedeutung ist: die *Rotverschiebung galaktischer Spektrallinien* unter der Voraussetzung  $\dot{a}(t) > 0$ , d. h. sofern das Weltall *expandiert*.

Wegen Homogenität und Isotropie des Kosmos betrachte o. B. d. A. die Lichttrajektorie

$$\chi = \chi(t) , \quad \vartheta = \text{konstant} , \quad \varphi = \text{konstant} , \quad (9.279)$$

die von  $\chi(t_0) = 0$  (Galaxie 0) nach  $\chi(t_1) = \chi$  (Galaxie 1; z. B. die Milchstraße, wo auf der Erde das Licht empfangen wird) führt. Für die Trajektorie (9.279) gilt nach (9.252, 258, 267, 268):

$$ds^2 = a^2(t) d\chi^2 - c^2 dt^2 ; \quad (9.280)$$

da es sich um Licht handelt, gilt nach (9.194):

$$ds = 0 . \quad (9.281)$$

Aus (9.280, 281) folgt

$$d\chi = \frac{c dt}{a(t)} . \quad (9.282)$$

Anwendung von (9.282) auf zwei aufeinander folgende Wellenberge, die beide von 0 nach  $\chi$  laufen:

$$\chi = \int_{t_0}^{t_1} \frac{c dt}{a(t)} = \int_{t_0 + T_0}^{t_1 + T_1} \frac{c dt}{a(t)}$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_1+T_1} \frac{c dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \frac{c dt}{a(t)}, \quad (9.283)$$

wo  $T_0$  und  $T_1$  die Schwingungsdauern der Lichtwelle bei 0 bzw.  $\chi$  bedeuten. Da sich während einer Schwingungsperiode ( $\sim 10^{-14}$  s für sichtbares Licht) der Weltradius nicht nennenswert ändert, folgt aus (9.283) in guter Näherung:

$$\frac{cT_1}{a(t_1)} = \frac{cT_0}{a(t_0)},$$

und damit wegen  $\lambda = cT$ :

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)}. \quad (9.284)$$

Somit hat man

- Wellenlängenvergrößerung, d. h. *Rotverschiebung*, falls  $a(t_1) > a(t_0)$  ist, d. h. bei *Expansion* des Universums; wird beobachtet.
- Wellenlängenverkleinerung, d. h. *Blauverschiebung*, falls  $a(t_1) < a(t_0)$  ist, d. h. bei Kontraktion des Universums; wird nicht beobachtet.

Die hier besprochene Frequenzverschiebung infolge  $\dot{a} \neq 0$  darf nicht mit früher besprochenen Frequenzverschiebungseffekten verwechselt werden:

- nicht mit der *Frequenzverschiebung im Gravitationsfeld* gemäß (9.86, 208);
- nicht mit dem *Doppler-Effekt*, der auf der gleichförmigen Relativbewegung zweier Inertialsysteme beruht; siehe Abschnitt 7.3.

Die Gravitationsverschiebung und die Doppler-Verschiebung überlagern im Allgemeinen die kosmologische Rotverschiebung.

Mit  $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0$  erhält man aus (9.284) für die *relative Wellenlängenänderung* (auch einfach: *Rotverschiebung*) den Ausdruck

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)} - 1. \quad (9.285)$$



Taylor-Entwicklung des Weltradius um  $t_1$  (d. i. heute):

$$\begin{aligned} a(t) &= a(t_1) + \dot{a}(t_1)(t - t_1) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_1)(t - t_1)^2 + \dots \\ &= a(t_1) \left( 1 + H(t - t_1) - \frac{1}{2}qH^2(t - t_1)^2 + \dots \right) \end{aligned} \quad (9.286)$$

mit der *Hubble-Konstanten*

$$H = \frac{\dot{a}(t_1)}{a(t_1)} \quad (9.287)$$

von der Dimension  $\text{Zeit}^{-1}$  und dem dimensionslosen *Verzögerungsparameter*

$$q = -\frac{\ddot{a}(t_1)a(t_1)}{\dot{a}(t_1)^2}. \quad (9.288)$$

Einsetzen von (9.286) in (9.285) führt für  $t = t_0$  einerseits auf

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{1 + H(t_0 - t_1) - \frac{1}{2}qH^2(t_0 - t_1)^2 + \dots} - 1 \\ &= H(t_1 - t_0) - \left(1 + \frac{q}{2}\right)H^2(t_1 - t_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (9.289)$$

Setzt man andererseits (9.286) in (9.283) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \chi &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{c dt}{a(t_1)(1 + H(t - t_1) - \dots)} \\ &= \frac{c}{a(t_1)} \int_{t_0}^{t_1} dt (1 - H(t - t_1) + \dots) \\ &= \frac{c}{a(t_1)} \left( t_1 - t_0 + \frac{H}{2}(t_1 - t_0)^2 + \dots \right); \end{aligned} \quad (9.290)$$

daraus folgt für den *Abstand* der Galaxie 1 (der Erde) von der Galaxie 0 zur Zeit  $t_1$  (heute):

$$\begin{aligned} d &= a(t_1)\chi \\ &= c(t_1 - t_0) + \frac{Hc}{2}(t_1 - t_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (9.291)$$

Aus (9.289, 291) lässt sich die Laufzeit  $t_1 - t_0$  eliminieren. Aus (9.291) erhält man

$$t_1 - t_0 = \frac{d}{c} - \frac{H}{2} \left( \frac{d}{c} \right)^2 - \dots ; \quad (9.292)$$

Einsetzen in (9.289) liefert die *Rotverschiebung- Abstand-Relation*:

$$z = \frac{H d}{c} + \frac{1 + q}{2} \left( \frac{H d}{c} \right)^2 + \dots \quad (9.293)$$

Die niedrigste Ordnung dieser Beziehung ist das **Hubblesche Gesetz**: Die Rotverschiebung des zur Zeit  $t_0$  von der Galaxie 0 emittierten Lichtes, das zur Zeit  $t_1$  in der Galaxie 1 (auf der Erde) empfangen wird, ist der Entfernung proportional. Je weiter die emittierende Galaxie entfernt ist, desto größer ist die Rotverschiebung. Bei sehr weit entfernten Galaxien hat man Terme höherer Ordnung in (9.293) zu berücksichtigen.

Die Gültigkeit der Reihenentwicklung (9.293) ist wegen  $q \simeq 1$ ) auf etwa  $z < 1/2$  beschränkt. Bei den weitesten Objekten (z. B. Quasaren) hat man  $z \simeq 4$  gemessen. In solchen Fällen hat man zu dem ursprünglichen Gesetz (9.284) zurückzukehren. Licht mit großem kosmologischen  $z$  stammt aus der frühen Zeit des Universum. Siehe z. B. Fließbach (1990).

Zur **Bestimmung der Funktion  $a(t)$**  wird die Robertson-Walker-Metrik in die Einsteinschen Feldgleichungen eingesetzt, und zwar in (die kovariante Version der) Gl. (9.123):

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R + \lambda g_{ij} = -\kappa T_{ij} . \quad (9.294)$$

Der kosmologische Term  $\lambda g_{ij}$  wird berücksichtigt, weil nur dadurch eine statische Lösung möglich wird (siehe unten).

Zur Berechnung des in (9.294) benötigten *Ricci-Tensors* hat man sich zunächst die Christoffel-Symbole zu verschaffen. Dazu gehen wir nicht von der Definition (8.141) aus, sondern benutzen die zur Robertson-Walker-Metrik gehörige Geodätengleichung. Gl. (9.278) in abgekürzter Schreibweise:

$$d s^2 = f (d x^2 + d y^2 + d z^2) - c^2 d t^2 \quad (9.295)$$

mit

$$\begin{aligned} f &= f(x, y, z, t) \\ &= \frac{a^2(t)}{(1 + (k/4)(x^2 + y^2 + z^2))^2} \end{aligned} \quad (9.296)$$

führt auf

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = f(x, y, z, t)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - c^2 \dot{t}^2, \quad (9.297)$$

wo die Ableitung nach dem invarianten Parameter  $\lambda$  bezeichnet. Die Bewegung erfolgt nach dem Extremalprinzip (äquivalent zu (9.45), sofern  $\lambda \sim s$ )

$$\int_A^B \left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 d\lambda = \text{Extremum}, \quad (9.298)$$

d. h. nach der äquivalenten Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \left( \frac{ds}{d\lambda} \right)^2 \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{ds}{d\lambda} \right)^2 = 0, \quad (9.299)$$

wo  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ ,  $x^4 = t$  bedeutet. Mit (9.297) folgt aus (9.299):

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{f_x}{2f} \dot{x}^2 + \frac{f_y}{f} \dot{x} \dot{y} + \frac{f_z}{f} \dot{x} \dot{z} + \frac{f_t}{f} \dot{x} \dot{t} - \frac{f_x}{2f} \dot{y}^2 - \frac{f_x}{2f} \dot{z}^2 &= 0 \\ \ddot{y} + \frac{f_x}{f} \dot{y} \dot{x} + \frac{f_y}{2f} \dot{y}^2 + \frac{f_z}{f} \dot{y} \dot{z} + \frac{f_t}{f} \dot{y} \dot{t} - \frac{f_y}{2f} \dot{z}^2 - \frac{f_y}{2f} \dot{x}^2 &= 0 \\ \ddot{z} + \frac{f_x}{f} \dot{z} \dot{x} + \frac{f_y}{f} \dot{z} \dot{y} + \frac{f_z}{2f} \dot{z}^2 + \frac{f_t}{f} \dot{z} \dot{t} - \frac{f_z}{2f} \dot{x}^2 - \frac{f_z}{2f} \dot{y}^2 &= 0 \\ \ddot{t} + \frac{f_t}{2c^2} \dot{x}^2 + \frac{f_t}{2c^2} \dot{y}^2 + \frac{f_t}{2c^2} \dot{z}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (9.300)$$

Diese Gleichungen entsprechen der Geodätengleichung (9.44); man kann daraus die Christoffel-Symbole ablesen. Für  $\mu, \nu = 1, 2, 3$  ( $\mu \neq \nu$ ) ergibt der Vergleich:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \mu \mu \end{array} \right\} = \frac{f_\mu}{2f}, \quad \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \mu \nu \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \nu \mu \end{array} \right\} = \frac{f_\nu}{2f}, \quad \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \nu \nu \end{array} \right\} = -\frac{f_\mu}{2f} \quad (9.301)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \mu 4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ 4 \mu \end{array} \right\} = \frac{f_t}{2f}, \quad \left\{ \begin{array}{c} 4 \\ \mu \mu \end{array} \right\} = \frac{f_t}{2c^2};$$

alle anderen Christoffel-Symbole verschwinden. Die Christoffel-Symbole sind in den Ricci-Tensor (9.143) einzusetzen. Dieser erweist sich dabei als *diagonal*; mit (9.301) und

(9.296) erhält man

$$\begin{aligned}
 R_{\mu\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ \begin{matrix} k \\ \mu k \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} k \\ \mu\mu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} l \\ \mu k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k \\ l\mu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} l \\ \mu\mu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k \\ lk \end{matrix} \right\} \\
 &= \frac{f_{\mu\mu}}{2f} + \frac{\Delta f}{2f} - \frac{3}{4} \left( \frac{f_\mu}{f} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{\nabla f}{f} \right)^2 - \frac{f_{tt}}{2c^2} - \frac{f_t^2}{4c^2 f} \\
 &= -\frac{f}{c^2 a^2} (2k c^2 + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) \tag{9.302 a}
 \end{aligned}$$

unabhängig von  $\mu$  sowie analog

$$\begin{aligned}
 R_{44} &= \frac{\partial}{\partial x^4} \left\{ \begin{matrix} k \\ 4k \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} k \\ 44 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} l \\ 4k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k \\ l4 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} l \\ 44 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k \\ lk \end{matrix} \right\} \\
 &= \frac{3}{2} \frac{f_{tt}}{f} - \frac{3}{4} \left( \frac{f_t}{f} \right)^2 \\
 &= 3 \frac{\ddot{a}}{a} . \tag{9.302 b}
 \end{aligned}$$

Zur Berechnung des *Krümmungsskalars* in (9.294) benötigt man den Übergang vom kovarianten metrischen Tensor

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix} \tag{9.303}$$

zum kontravarianten metrischen Tensor

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1/f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/c^2 \end{pmatrix} . \tag{9.304}$$

Damit berechnet man aus (9.302):

$$\begin{aligned}
 R &= g^{ij} R_{ij} \\
 &= -\frac{6}{c^2 a^2} (k c^2 + \dot{a}^2 + a\ddot{a}) . \tag{9.305}
 \end{aligned}$$

Der erste Term entspricht (9.276).

Es wird nun der (diagonale) Ricci-Tensor (9.302), der Krümmungsskalar (9.304), zusammen mit dem (diagonalen) metrischen Tensor (9.303) in die Einsteinschen Feldgleichungen (9.294) eingesetzt. Man erhält für  $i = j$  (auch  $T_{ij}$  ist diagonal, siehe unten):

$$\frac{f}{c^2 a^2} (k c^2 + \dot{a}^2 + 2 a \ddot{a} + \lambda c^2 a^2) = -\kappa T_{\mu\mu} \quad (9.306)$$

$$\frac{1}{a^2} (3 k c^2 + 3 \dot{a}^2 + \lambda c^2 a^2) = \kappa T_{44} .$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit  $g^{\mu\mu} = 1/f$ , der zweiten Gleichung mit  $g^{44} = -1/c^2$  führt schließlich auf

$$\frac{1}{c^2 a^2} (k c^2 + \dot{a}^2 + 2 a \ddot{a} + \lambda c^2 a^2) = -\kappa T_{\mu}^{\mu} \quad (9.307)$$

$$\frac{1}{c^2 a^2} (3 k c^2 + 3 \dot{a}^2 + \lambda c^2 a^2) = -\kappa T_4^4 .$$

Die gesuchte Funktion  $a(t)$  hängt – außer vom Krümmungstyp  $k$  – wesentlich von der Masse-Energie-Verteilung im Weltall ab; diese ist quantifiziert durch den *Energie-Impuls-Tensor*. In Minkowski-Koordinaten  $x', y', z', ict$  gilt wegen der Homogenität und Isotropie des Kosmos:

$$T'_{ij} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix} ; \quad (9.308 \text{ a})$$

dabei ist  $\varepsilon$  die Energiedichte und  $p$  der Druck des kosmischen „Gases“; siehe Abschnitt 6.3 (beachte: Impulsstromdichte = Impuls / (Zeit  $\times$  Fläche) = Kraft / Fläche = Druck). Für die hier gewählten Koordinaten  $x, y, z, t$  folgt mit (9.295):

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} f p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 \varepsilon \end{pmatrix} ; \quad (9.308 \text{ b})$$

durch Multiplikation mit  $g^{ij}$  gemäß (9.304) erhält man daraus schließlich:

$$T_j^i = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix} \quad (9.308 \text{ c})$$

– formal identisch mit der ersten Version (9.308 a).

Einsetzen von (9.308 c) in die Inhomogenität von (9.307) ergibt

$$\frac{1}{a^2} \left( k + \frac{1}{c^2} (\dot{a}^2 + 2a\ddot{a}) \right) + \lambda = -\kappa p \quad (9.309)$$

$$\frac{3}{a^2} \left( k + \frac{1}{c^2} \dot{a}^2 \right) + \lambda = \kappa \varepsilon . \quad (9.310)$$

Diese beiden Gleichungen, zusammen mit einer thermodynamischen Zustandsgleichung:

$$p = p(\varepsilon) , \quad (9.311)$$

stellen ein geschlossenes System zur Bestimmung der Funktionen  $a(t)$ ,  $p(t)$  und  $\varepsilon(t)$  dar – abhängig vom Krümmungstyp  $k$ .

*Elimination von  $\ddot{a}$ :* Subtraktion von (9.310) vom 3-fachen der Gleichung (9.309) ergibt

$$\frac{6\dot{a}}{c^2 a} + 2\lambda = -\kappa(3p + \varepsilon) ; \quad (9.312)$$

Ableitung der mit  $a^2$  multiplizierten Gleichung (9.310) ergibt

$$\frac{6\ddot{a}\dot{a}}{c^2} + 2\lambda\dot{a}a = \kappa(\dot{\varepsilon}a + 2\varepsilon\dot{a})a . \quad (9.313)$$

Aus (9.312, 313) liest man ab:

$$\begin{aligned} -(3p + \varepsilon)\dot{a} &= \dot{\varepsilon}a + 2\varepsilon\dot{a} \\ \Rightarrow \quad -3\frac{\dot{a}}{a} &= \frac{\dot{\varepsilon}}{p + \varepsilon} ; \end{aligned} \quad (9.314)$$

damit ist  $\ddot{a}$  eliminiert.

Mit (9.311) folgt aus (9.314):

$$-3\frac{da}{a} = \frac{d\varepsilon}{p(\varepsilon) + \varepsilon} , \quad (9.315)$$

woraus

$$\varepsilon = \varepsilon(a) \quad (9.316)$$

berechnet wird. Dieses Resultat wird in (9.310) eingesetzt; man erhält

$$\dot{a}^2 = c^2 \left( \frac{1}{3} (\kappa \varepsilon(a) - \lambda) a^2 - k \right) . \quad (9.317)$$

Aus dieser Differentialgleichung 1. Ordnung ist

$$a = a(t) \quad (9.318)$$

zu berechnen, z. B. durch Trennung der Variablen. Mit (9.318) erhält man aus (9.316)  $\varepsilon(t)$ , damit aus (9.311)  $p(t)$ . Damit ist das *Problem der kosmischen Dynamik* – im Rahmen der Robertson-Walker-Metrik – *grundsätzlich gelöst* •

### Friedmann-Modelle:

- Universum *strahlungsdominiert*, früher Zustand:

$$p = \frac{\varepsilon}{3} . \quad (9.319)$$

Mit (9.315) folgt

$$\begin{aligned} -4 \frac{da}{a} &= \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \\ \Rightarrow \quad \varepsilon &= \frac{A}{a^4} , \end{aligned} \quad (9.320)$$

$A$  eine Konstante. Einsetzen in die dynamische Gleichung (9.317):

$$\dot{a}^2 = c^2 \left( \frac{1}{3} \left( \frac{\kappa A}{a^2} - \lambda a^2 \right) - k \right) . \quad (9.321)$$

- Universum *materiedominiert*, später Zustand:

$$p = 0 . \quad (9.322)$$

Mit (9.315) folgt

$$\begin{aligned} -3 \frac{da}{a} &= \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \\ \Rightarrow \quad \varepsilon &= \frac{B}{a^3} , \end{aligned} \quad (9.323)$$

$B$  eine Konstante. Einsetzen in die dynamische Gleichung (9.317):

$$\dot{a}^2 = c^2 \left( \frac{1}{3} \left( \frac{\kappa B}{a} - \lambda a^2 \right) - k \right) . \quad (9.324)$$

Wir befassen uns nachfolgend nur mit diesem zweiten Modell.

Zur Diskussion wird Gl. (9.234) wie folgt umgeschrieben:

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 + \phi(a) = -\frac{1}{2} k c^2 \quad (9.325)$$

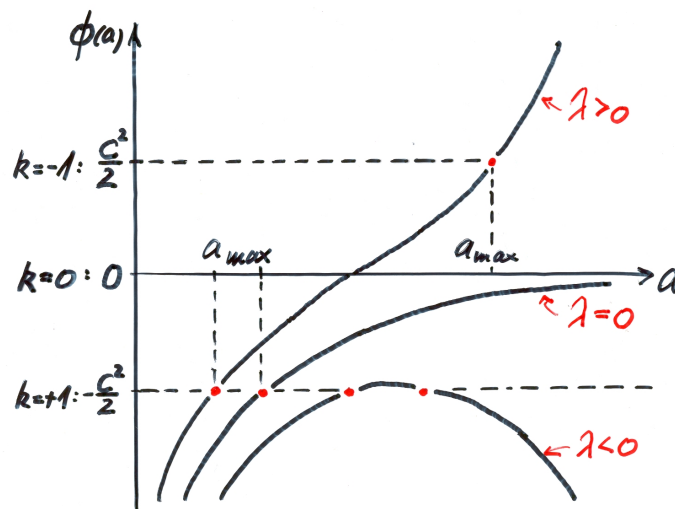
mit

$$\phi(a) = -\frac{c^2}{6} \left( \frac{\kappa B}{a} - \lambda a^2 \right) . \quad (9.326)$$

Gl. (9.325) kann gedeutet werden als „Energiesatz“ für die eindimensionale Bewegung einer fiktiven Einheitsmasse in radialer Richtung im „effektiven Potenzial“  $\phi(a)$ ; die Terme  $\dot{a}^2/2$  und  $-k c^2/2$  sind dabei als „radiale kinetische Energie“ bzw. als „Gesamtenergie“ zu deuten. Nur solche  $a$ -Werte sind wegen  $\dot{a}^2/2 \geq 0$  erlaubt, für die gilt:

$$\phi(a) \leq -\frac{1}{2} k c^2 . \quad (9.327)$$

Folgende **Fälle** sind zu unterscheiden:



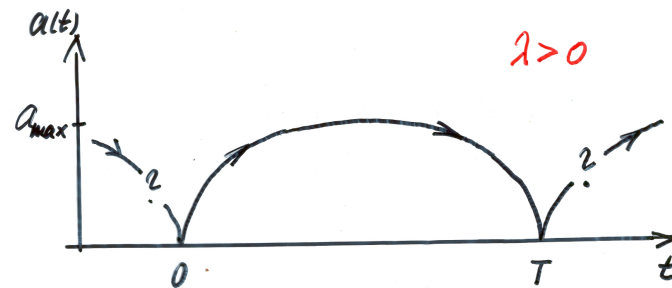
• Abbildung 9.10 •

•  $\lambda > 0$ . Die  $a$ -Bewegung ist für alle drei  $k$ -Werte beschränkt:

$$a(t) \leq a_{max} . \quad (9.328)$$

Von  $a = 0$  ausgehend, hat man Expansion bis  $a = a_{max}$ , dann Kontraktion bis  $a = 0$ :





• Abbildung 9.11 •

Periodizität dieses Vorganges?

- $\lambda = 0$ . Für  $k = +1$  ist die  $a$ -Bewegung wie vorstehend beschränkt; aus (9.324) folgt

$$\dot{a}^2 = c^2 \left( \frac{a_{max}}{a} - 1 \right) \quad (9.329)$$

mit

$$a_{max} = \frac{\kappa B}{3}; \quad (9.330)$$

daraus berechnet man die parametrisierte Lösung

$$a = \frac{a_{max}}{2} (1 - \cos \eta), \quad ct = \frac{a_{max}}{2} (\eta - \sin \eta). \quad (9.331)$$

Das ist die Gleichung einer *Zykloiden*;  $\eta$  ist der Drehwinkel.

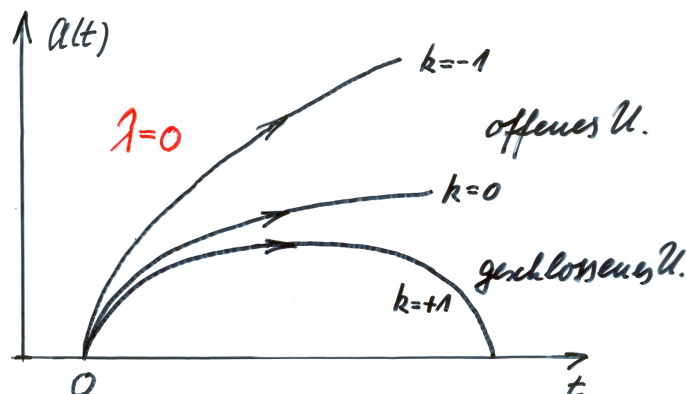
Für  $k = -1$  ist die  $a$ -Bewegung unbeschränkt; ausgehend von  $a = 0$ , hat man endlose Expansion. Aus (9.324) folgt

$$\dot{a}^2 = c^2 \left( \frac{a_{max}}{a} + 1 \right) \quad (9.332)$$

mit der parametrisierten Lösung

$$a = \frac{a_{max}}{2} (\cosh \eta - 1), \quad ct = \frac{a_{max}}{2} (\sinh \eta - \eta); \quad (9.333)$$

hier ist  $a_{max}$  ein Längenparameter, der *nicht* die Bedeutung eines maximalen Weltradius hat.



• Abbildung 9.12 •

Das gilt auch für  $k = 0$ . Dort erhält man aus

$$\dot{a}^2 = c^2 \frac{a_{max}}{a} \quad (9.334)$$

die Lösung

$$a = \left( \frac{9 a_{max}}{4} \right)^{1/3} (ct)^{2/3}. \quad (9.335)$$

Bezeichnung dieses Falles als *Einstein-de Sitter-Universum*.

•  $\lambda < 0$ . Für  $k = 0, -1$  ist die  $a$ -Bewegung wie vorstehend unbeschränkt (Abbremsung im Bereich des  $\phi$ -Maximums); für  $k = +1$  gibt es verschiedene Fälle beschränkter und unbeschränkter  $a$ -Bewegung je nachdem, ob  $\phi_{max}$  kleiner, gleich oder größer  $-c^2/2$  ist. Wählt man  $\lambda$  so, dass

$$\phi_{max} = -\frac{c^2}{2} \quad (9.336)$$

ist, dann gibt es die Möglichkeit eines *statischen*, jedoch *instabilen* Universums. Diese Möglichkeit gibt es ohne kosmologischen Term nicht!

Welches der diskutierten Modelle kommt der Realität am nächsten? Ist das Universum *geschlossen* ( $k = +1$ ) oder *offen* ( $k = 0, -1$ )? Wird die heute beobachtete Expansion später in eine Kontraktion übergehen? Oder wird sie sich ad infinitum fortsetzen? Die Antwort auf diese Fragen hängt nach den vorstehenden Ausführungen vom Wert der Parameter  $k$  und  $\lambda$  ab. Wir wollen die Größen durch experimentell zugängliche Parameter, wie  $H, q, \dots$  ausdrücken und berechnen (abschätzen).

Wir betrachten die Gln. (9.309, 310) für den Fall  $p = 0$  (2. Friedmann-Modell) zum Zeitpunkt  $t_1$ :  $a(t_1) = a_1$ . Mit den Definitionen (9.287, 288) folgt für die (gegenwärtige) Krümmung des Universums:

- aus (9.309):

$$K = \frac{k}{a_1^2} = \frac{H^2}{c^2} \left( 2q - 1 - \frac{\lambda c^2}{H^2} \right), \quad (9.337)$$

- aus (9.310):

$$K = \frac{k}{a_1^2} = \frac{H^2}{c^2} \left( \sigma - 1 - \frac{\lambda c^2}{3H^2} \right). \quad (9.338)$$

Dabei bedeutet

$$\sigma = \frac{\varepsilon(t_1)}{\varepsilon_c} \quad (9.339)$$

das Verhältnis der (gegenwärtigen) Energiedichte zu einer kritischen Energiedichte

$$\varepsilon_c = \frac{3H^2}{\kappa c^2}. \quad (9.340)$$

Aus (9.337, 338) gewinnt man für die *Krümmung* und die *kosmologische Konstante* in Abhängigkeit von den drei Parametern  $H$ ,  $q$  und  $\sigma$  die folgenden Ausdrücke:

$$K = \frac{H^2}{c^2} \left( \frac{3}{2}\sigma - q - 1 \right) \quad (9.341)$$

bzw.

$$\lambda = \frac{3H^2}{2c^2} (2q - \sigma). \quad (9.342)$$

Nach gegenwärtigem Erkenntnisstand ist

$$H \simeq (2 \times 10^{10} a)^{-1} \quad (9.343)$$

und

$$q \simeq 1.0 \pm 0.5; \quad (9.344)$$

das bedeutet Abbremsung ( $\ddot{a} < 0$ ) der Expansion ( $\dot{a} > 0$ ). Aus (9.340) folgt mit (9.139, 343):

$$\varepsilon_c \simeq 4.5 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3} c^2; \quad (9.345)$$

das sind zwei bis drei Nukleonen pro Kubikmeter. Man beobachtet

$$\sigma \simeq 1.0 \pm 0.5. \quad (9.346)$$

$\sigma$  ist im Laufe der Jahre wegen der zunehmenden Entdeckung „dunkler Materie“ immer größer geworden.

Die Messdaten (9.343, 344, 346) lassen keine genauen Schlüsse über das Vorzeichen von  $K$  und  $\lambda$  zu (zu schweigen von deren genauen Wert). Am einfachsten und mit den Daten verträglich ist die Annahme eines *Einstein-de Sitter-Universums*:

$$K = 0, \quad \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = 1, \quad q = \frac{1}{2}. \quad (9.347)$$

Dafür gilt das  $a(t)$ -Gesetz (9.335). Daraus und aus (9.334) berechnet man mit (9.287, 343) das *Weltalter*:

$$t_1 = \frac{2}{3H} \simeq 1.3 \times 10^{10} a. \quad (9.348)$$

### Kosmologisches Standardmodell: Wegen

$$a(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad (9.349)$$

wird angenommen, dass die Welt zur Zeit  $t_0 = 0$  aus der Singularität  $a = 0$  entstanden ist: *Urknall* (Big Bang). Expansion auf der Basis der vorstehenden Modelle (insbesondere des Einstein-de Sitter-Modells), auf der Robertson-Walker-Metrik beruhend, mit ungewisser Zukunft.

#### Anmerkungen:

- Es gibt astrophysikalische Hinweise darauf, dass sich der Weltradius in den ersten  $10^{-30}$  s (!) nach dem Urknall um mindestens einen Faktor  $10^{25}$  (!) stärker vergrößert hat als im Einstein-de Sitter-Modell. Die Implikationen dieses Phänomens werden im Rahmen der Theorie des *inflationären Universums* erörtert.
- In einem *verallgemeinerten kosmologischen Prinzip* werden Homogenität und Isotropie für die *vierdimensionale Raumzeit* gefordert; also nicht nur räumlich, sondern raumzeitlich. Daraus resultiert die *Steady-State-Theorie* des Kosmos (Biondi & Gold 1948), in der nicht nur keine räumliche Position, sondern auch kein Zeitpunkt vor der bzw. dem anderen ausgezeichnet ist.

## D Quantenelektrodynamik

### 1 Klassische Feldtheorie

**Relativitätsprinzip:** Naturgesetze unabhängig von der Wahl des (inertialen) Bezugssystems.  $\Rightarrow$  Forderung nach *Kovarianz* physikalischer Theorien; d. i. Forminvarianz unter *Lorentz-Transformationen*:

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu, \quad (1.1)$$

$\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ , gilt allgemein für griechische Indizes. Summation über  $\nu$ , allgemein über doppelte Indizes.  $x_1, x_2, x_3$  Raumkoordinaten,  $x_4 = i c t$  Zeitkoordinate,  $x_\mu$  Raum-Zeit-Koordinaten.

Lorentz-Transformation als *orthogonale Transformation* der Raum-Zeit:

$$a_{\mu\lambda} a_{\nu\lambda} = a_{\lambda\mu} a_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

$\Rightarrow$  Invarianz der Größe  $x_\mu^2$ . Es gibt

- eigentliche Lorentz-Transformationen (Drehungen) mit  $\det(a_{\mu\nu}) = +1$ ;
- uneigentliche Lorentz-Transformationen (Drehspiegelungen) mit  $\det(a_{\mu\nu}) = -1$ , z. B. Raumspiegelung:

$$x'_i = -x_i, \quad x'_4 = x_4, \quad (1.3)$$

oder Zeitspiegelung:

$$x'_i = x_i, \quad x'_4 = -x_4, \quad (1.4)$$

$i = 1, 2, 3$ , gilt allgemein für lateinische Indizes. Alle uneigentlichen Lorentz-Transformationen lassen sich als Produkt einer eigentlichen Lorentz-Transformation und einer Raum- oder Zeitspiegelung darstellen.

Aufbau beliebiger eigentlicher Lorentz-Transformationen aus *infinitesimalen* Drehungen:

$$x'_\mu = x_\mu + \omega_{\mu\nu} x_\nu \quad (1.5 \text{ a})$$

mit infinitesimalen Größen  $\omega_{\mu\nu}$ , d. h. – siehe (1.1) –

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}. \quad (1.5 \text{ b})$$

Anwendung von (1.2) ergibt Antisymmetrie der Koeffizientenmatrix:

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \quad (1.6)$$

mit der nützlichen Konsequenz (siehe unten)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{\mu\nu}}{\partial \omega_{\alpha\beta}} &= \frac{\partial \omega_{\mu\nu}}{\partial \omega_{\kappa\lambda}} \frac{\partial \omega_{\kappa\lambda}}{\partial \omega_{\alpha\beta}} \\ &= \frac{\partial \omega_{\mu\nu}}{\partial \omega_{\alpha\beta}} - \frac{\partial \omega_{\nu\mu}}{\partial \omega_{\alpha\beta}} \\ &= \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta} - \delta_{\nu\alpha} \delta_{\mu\beta} . \end{aligned} \quad (1.7)$$

Zur Realisierung der Kovarianz sind die physikalischen Größen als **Tensoren** darzustellen, auch „Vierertensoren“:

- 0. Stufe (Skalar):  $A$  mit  $A' = A$
- 1. Stufe (Vektor):  $A_\mu$  mit  $A'_\mu = a_{\mu\nu} A_\nu$
- 2. Stufe (Tensor):  $A_{\mu\nu}$  mit  $A'_{\mu\nu} = a_{\mu\rho} a_{\nu\sigma} A_{\rho\sigma}$  usw.

Beispiel für Tensor 1. Stufe, auch „Vierervektor“, ist  $x_\mu$ . Tensorgleichungen invariant unter Lorentz-Transformationen.

*Abkürzungen, Konventionen:*

- Vektor:

$$A_\mu = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ i A_0 \end{pmatrix}$$

mit den Raumkomponenten

$$A_i = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

und der Zeitkomponente  $A_4 = i A_0$ .

- Tensor:

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & i A_{10} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & i A_{20} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & i A_{30} \\ i A_{01} & i A_{02} & i A_{03} & -A_{00} \end{pmatrix}$$

- Inneres Produkt:

$$A_\mu B_\mu = A_i B_i - A_0 B_0 ,$$

$$A_\mu^2 = A_i^2 - A_0^2 .$$

- Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \partial_\mu , \quad \frac{\partial}{\partial x_0} = \partial_0 \quad \Rightarrow \quad \partial_4 = -i \partial_0 ,$$

$$\partial^2 = \partial_\mu^2 = \partial_i^2 - \partial_0^2 .$$

- Volumenelemente:

$$dx_1 dx_2 dx_3 = d\vec{x} , \quad dx_1 dx_2 dx_3 dx_0 = dx .$$

- Konjugiert-Komplexes:

$$A_\mu^* = \begin{pmatrix} A_1^* \\ A_2^* \\ A_3^* \\ i A_0^* \end{pmatrix} ,$$

$$A_{\mu\nu}^* = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{13}^* & i A_{10}^* \\ A_{21}^* & A_{22}^* & A_{23}^* & i A_{20}^* \\ A_{31}^* & A_{32}^* & A_{33}^* & i A_{30}^* \\ i A_{01}^* & i A_{02}^* & i A_{03}^* & -A_{00}^* \end{pmatrix} ;$$

Konsequenz:  $A_\mu, A_{\mu\nu}$  reell  $\iff A_\mu^* = A_\mu, A_{\mu\nu}^* = A_{\mu\nu}$ .

**Elektrodynamik:** Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes  $\vec{E}, \vec{B}$  mit geladenen Teilchen. Ladungsdichte  $\rho$ , Stromdichte  $\vec{j}$ . Abhängigkeit des Feldes von den Quellen durch *Maxwell-Gleichungen* gegeben. Im *Heaviside-Lorentz-System* ist ( $\varepsilon_0 = 1 \Rightarrow \mu_0 = 1/c^2$  sowie  $c\vec{B} \rightarrow \vec{B}$ ):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \vec{j} \quad (1.8)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad (1.9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad (1.10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 . \quad (1.11)$$

Rückwirkung des Feldes auf die Quellen durch *Lorentz-Kraft* der Dichte

$$\vec{K} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \quad (1.12)$$

gegeben.

**Kovariante Darstellung.** Einführung des *Strom(dichte)vektors*  $j_\mu$ :

$$(j_1, j_2, j_3) = \vec{j} , \quad j_4 = i c \rho , \quad (1.13)$$

und des antisymmetrischen *elektromagnetischen Feldtensors*  $F_{\mu\nu}$ :

$$(F_{23}, F_{31}, F_{12}) = \vec{B} , \quad (F_{41}, F_{42}, F_{43}) = i \vec{E} . \quad (1.14)$$

Damit ergibt sich für die *inhomogenen* Maxwell-Gleichungen (1.8, 9):

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = \frac{1}{c} j_\mu , \quad (1.15)$$

und für die *homogenen* Maxwell-Gleichungen (1.10, 11):

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0 . \quad (1.16)$$

Ferner führt man den *Kraft(dichte)vektor*

$$K_\mu = \frac{1}{c} F_{\mu\nu} j_\nu \quad (1.17)$$

ein mit  $(K_1, K_2, K_3) = \vec{K}$  gemäß (1.12). Was bedeutet die Zeitkomponente  $K_0$ ? Mit (1.17, 13, 14, 12) erhält man

$$K_0 = \frac{1}{c} F_{0i} j_i = \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{j} = \frac{1}{c} \vec{K} \cdot \vec{v} = \frac{w}{c} . \quad (1.18)$$



$w$  ist die *Leistungsdichte*, d. i. Arbeit / (Zeit  $\times$  Volumen) des Feldes an den Ladungen. Beachte, dass  $\vec{j} = \rho \vec{v}$  gilt.

Schließlich folgt die *Ladungserhaltung* durch Ableitung von (1.15) nach  $x_\mu$ :

$$\partial_\mu \partial_\nu F_{\mu\nu} = \frac{1}{c} \partial_\mu j_\mu .$$

Die linke Seite verschwindet wegen  $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ , also erhält man die *Kontinuitätsgleichung* für die Ladung:

$$\partial_\mu j_\mu = 0 , \quad (1.19)$$

d. i. Divergenzfreiheit des „Viererstromes“.

Darstellung des Kraftvektors  $K_\mu$  als Divergenz des **elektromagnetischen Energie-Impuls-Tensors**

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho} F_{\nu\rho} - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}^2 = T_{\nu\mu} . \quad (1.20)$$

Dieser ist symmetrisch, und es gilt

$$K_\mu = -\partial_\nu T_{\mu\nu} . \quad (1.21)$$

*Beweis* mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen (1.15, 16) sowie der Antisymmetrie von  $F_{\mu\nu}$ .

*Interpretation* von Gleichung (1.21):

$$K_\mu = -\partial_i T_{\mu i} - \frac{1}{c} \frac{\partial T_{\mu 0}}{\partial t}$$

Integration über ein Volumen  $V$  mit der Oberfläche  $S$ , Anwendung des Gaußschen Integralsatzes ( $dS_i = d\vec{S} \cdot \hat{e}_i$ ):

$$\int_V K_\mu d\vec{x} = -\oint_S T_{\mu i} dS_i - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_V T_{\mu 0} d\vec{x} . \quad (1.22)$$

- *Zeitkomponente*. Mit (1.18) folgt:

$$-\frac{d}{dt} \int_V T_{00} d\vec{x} = \oint_S c T_{0i} dS_i + \int_V w d\vec{x} . \quad (1.23)$$

Interpretation als **Energiesatz**, sofern

$$T_{00} = F_{0\rho} F_{0\rho} + \frac{1}{4} F_{\lambda\rho}^2 = H \quad (1.24)$$

mit der *Feldenergiedichte* und

$$cT_{0i} = cF_{0\rho}F_{i\rho} = N_i \quad (1.25)$$

mit der *Feldenergiestromdichte* identifiziert werden. Dann bedeutet (1.23): Der Verlust an Feldenergie pro Zeiteinheit im Volumen  $V$  setzt sich zusammen aus dem Feldenergiestrom durch  $S$  und der vom Feld an den Ladungen in  $V$  geleisteten Arbeit. Mit (1.14) folgt aus (1.24, 25):

$$H = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad (1.26)$$

bzw. der *Poynting-Vektor*

$$\vec{N} = c(\vec{E} \times \vec{B}) . \quad (1.27)$$

- *Raumkomponenten* von Gl. (1.22):

$$-\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{c} T_{i0} d\vec{x} = \oint_S T_{ik} dS_k + \int_V K_i d\vec{x} . \quad (1.28)$$

Interpretation als **Impulssatz**, sofern

$$\frac{1}{c} T_{i0} = \frac{1}{c^2} N_i = G_i \quad (1.29)$$

als Feldimpulsdichte und  $T_{ik}$  als Feldimpulsstromdichte identifiziert werden. Dann bedeutet (1.29): Der Verlust an Feldimpuls pro Zeiteinheit in  $V$  setzt sich zusammen aus dem Feldimpulsstrom durch  $S$  und der vom Feld auf die Ladungen in  $V$  ausgeübten Kraft.

Gl. (1.21) ist also die *lokale Energie-Impuls-Bilanz* des elektromagnetischen Feldes bei Wechselwirkung mit den geladenen Teilchen.

Zur Vereinfachung der Maxwell-Gleichungen Einführung des *elektromagnetischen Potentials*  $A_\mu = (\vec{A}, i\phi)$ :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (1.30)$$

Die homogenen Maxwell-Gleichungen (1.16) sind mit diesem Ansatz identisch erfüllt. Einsetzen in die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (1.15) führt auf die *Feldgleichung*

$$\partial_\mu \partial_\nu A_\nu - \partial^2 A_\mu = \frac{1}{c} j_\mu . \quad (1.31)$$

---

$i$ -te Komponente der Stromdichte der Feldenergie

$k$ -te Komponente der Stromdichte für  $i$ -te Komponente des Feldimpulses

Die *Eichtransformation*

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad (1.32)$$

wo  $\Lambda$  ein beliebiges skalares Feld ist, lässt  $F_{\mu\nu}$  nach (1.30) unverändert. Diese Willkür in der Wahl von  $A_\mu$  wird zur Vereinfachung von (1.31) ausgenutzt.

Wählt man  $A_\mu$  entsprechend der *Lorentz-Konvention*:

$$\partial_\mu A_\mu = 0, \quad (1.33)$$

so vereinfacht sich die Feldgleichung (1.31) zur *inhomogenen Wellengleichung*:

$$\partial^2 A_\mu = -\frac{1}{c} j_\mu. \quad (1.34)$$

Ist die Bedingung (1.33) stets erfüllbar? Ja! Sei  $A'_\mu$  ein zu  $F_{\mu\nu}$  gehöriges Potenzial, das (1.33) *nicht* erfüllt; dann *erfüllt* aber

$$A_\mu = A'_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad (1.35)$$

die Bedingung (1.33), sofern die Eichfunktion  $\Lambda$  als Lösung von

$$\partial^2 \Lambda = -\partial_\mu A'_\mu \quad (1.36)$$

gewählt wird.

Selbst bei Berücksichtigung der Lorentz-Konvention ist  $A_\mu$  nicht eindeutig durch  $F_{\mu\nu}$  festgelegt. Jede Eichtransformation (1.32) mit

$$\partial^2 \Lambda = 0, \quad (1.37)$$

sog. *eingeschränkte* Eichtransformation, lässt (1.30, 33) unverändert.

**Strahlungsfeld.** In ladungs- und stromfreien ( $j_\mu = 0$ ) Bereichen der Raum-Zeit reduziert sich die Feldgleichung (1.34) auf die *homogene Wellengleichung*:

$$\partial^2 A_\mu = 0. \quad (1.38)$$

Allgemeine Lösung durch Überlagerung ebener monochromatischer Wellen:

$$A_\mu = a_\mu \left( e^{i(k_\mu \cdot x_\mu + \delta)} + e^{-i(k_\mu \cdot x_\mu + \delta)} \right) \quad (1.39)$$

mit dem (*Vierer-*) *Wellenvektor*  $k_\mu = (\vec{k}, i\omega/c)$  und

$$k_\mu^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{k}| = k_0 = \omega/c. \quad (1.40)$$

Ausbreitung in  $\vec{k}$ -Richtung mit der (Phasen-)Geschwindigkeit  $c$ . Die Lorentz-Konvention bedingt

$$k_\mu a_\mu = k_i a_i - k_0 a_0 = 0 . \quad (1.41)$$

Die  $x_3$ -Achse werde in  $\vec{k}$ -Richtung gelegt:  $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{x}}_3$ ; dann ist

$$k_1 = k_2 = 0 , \quad k_3 = |\vec{k}| = k_0 , \quad (1.42)$$

folglich

$$A_\mu = a_\mu \left( e^{i k_0 (x_3 - ct) + i \delta} + e^{-i k_0 (x_3 - ct) - i \delta} \right) \quad (1.43)$$

sowie

$$a_3 = a_0 \quad (\text{Lorentz-Konvention}) . \quad (1.44)$$

Mit (1.30) und (1.14) berechnet man das elektromagnetische Feld zu

$$B_1 = -k_0 a_2 f , \quad B_2 = k_0 a_1 f , \quad B_3 = 0 , \quad (1.45)$$

$$E_1 = k_0 a_1 f , \quad E_2 = k_0 a_2 f , \quad E_3 = k_0 (a_3 - a_0) f = 0$$

mit

$$f = i \left( e^{i k_0 (x_3 - ct) + i \delta} - e^{-i k_0 (x_3 - ct) - i \delta} \right) . \quad (1.46)$$

*Diskussion:*

- $\vec{E}, \vec{B}$  ebene Transversalwellen in  $x_3$ -Richtung.
- Keine Phasenverschiebung zwischen  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ .
- $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ , d. h.  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  orthogonal zueinander.
- Energiedichte:

$$H = k_0^2 f^2 (a_1^2 + a_2^2) .$$

Energiestromdichte:

$$\vec{N} = (0, 0, c H) .$$

- $\vec{E}, \vec{B}$ -Feld hängt nur von *Transversalkomponenten*  $a_1, a_2$  des elektromagnetischen Potentials ab; *Longitudinalkomponente*  $a_3$  und *Temporalkomponente*  $a_0$  ohne physikalisch beobachtbaren Einfluss.

Die physikalische Bedeutungslosigkeit von Longitudinal- und Temporalkomponente der  $A$ -Welle erkennt man auch an der Möglichkeit,  $A_3$  und  $A_0$  durch eine geeignete Eichtransformation zu eliminieren: Unterwirft man  $A_\mu$  einer (eingeschränkten) Eichtransformation mit

$$\Lambda = \frac{a_0}{k_0} f, \quad (1.47)$$

so verschwinden die Komponenten  $A_3$  und  $A_0$ .

Sind Ladungen vorhanden, so sind neben  $A_1$  und  $A_2$  auch  $A_3$  und  $A_0$  bedeutsam!

**Klassisches Feld** gekennzeichnet durch Feldgrößen  $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)}$ ; diese sind Funktionen der Raum-Zeit-Koordinaten:  $u^{(r)} = u^{(r)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Herleitung von *Feldgleichungen*, das sind partielle Differentialgleichungen zur Bestimmung der  $u^{(r)}(x_\mu)$ , aus dem **Hamilton-Prinzip**:

Gegeben sei die *Lagrange-Dichte* des Feldes, d. i. eine Lorentz-invariante Funktion <sup>3</sup> der Feldgrößen  $u^{(r)}$  und ihrer ersten räumlichen und zeitlichen Ableitungen  $\partial_\mu u^{(r)}$ :

$$L = L(u^{(r)}, \partial_\mu u^{(r)}). \quad (1.48)$$

Betrachte das *Wirkungsintegral* (Funktional der  $u^{(r)}(x_\mu)$ )

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d\vec{x} L = I[u^{(r)}]. \quad (1.49)$$

Das Hamilton-Prinzip besagt: Bei Variation der Feldgrößen:

$$u^{(r)} \longrightarrow u^{(r)} + \delta u^{(r)}, \quad (1.50)$$

wobei

$$\begin{aligned} \delta u^{(r)} &= 0 \quad \text{auf der Oberfläche von } V \\ &= 0 \quad \text{für } t = t_1 \text{ und } t = t_2, \end{aligned} \quad (1.51)$$

verschwindet die resultierende Variation des Wirkungsintegrals:

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d\vec{x} \delta L = 0 \quad (1.52)$$

<sup>3</sup> $\delta L = 0$  unter  $\delta u^{(r)}$  und  $\delta \partial_\mu u^{(r)}$  infolge infinitesimaler Lorentz-Transformation.

– bei den physikalisch richtigen  $u^{(r)}(x_\mu)$ !

Aus (1.52) folgt mit (1.48):

$$\sum_{r=1}^n \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d\vec{x} \left\{ \frac{\partial L}{\partial u^{(r)}} \delta u^{(r)} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)})} \delta \partial_\mu u^{(r)}}_{=*} \right\} = 0 ;$$

wegen  $\delta \partial_\mu = \partial_\mu \delta$  ist

$$* = \partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)})} \delta u^{(r)} \right) - \left( \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)})} \right) \delta u^{(r)} ,$$

folglich hat man

$$\sum_{r=1}^n \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d\vec{x} \left\{ \left( \frac{\partial L}{\partial u^{(r)}} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)})} \right) \delta u^{(r)} + \partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)})} \delta u^{(r)} \right) \right\} = 0 .$$

Der dritte Term in  $\{ \dots \}$  liefert wegen (1.51) keinen Beitrag. Wegen der Beliebigkeit der Variationen und des Integrationsbereiches folgt schließlich:

$$\frac{\partial L}{\partial u^{(r)}} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)})} = 0 \quad (1.53)$$

für  $r = 1, 2, \dots, n$ . Das sind die **Lagrangeschen Feldgleichungen** zur Bestimmung der Feldfunktionen  $u^{(r)}(x_\mu)$ .

Die Gln. (1.53) sind *invariant* gegenüber der Ersetzung

$$L \longrightarrow L + \partial_\mu \Lambda_\mu , \quad (1.54)$$

wo  $\Lambda_\mu$  vier beliebige Funktionen der Feldgrößen  $u^{(r)}$  sind.

Die Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes ist – bis auf die Addition einer beliebigen Viererdivergenz gemäß (1.53) – durch

$$\begin{aligned} L &= L(A_\rho, \partial_\nu A_\rho) \\ &= -\frac{1}{2} (\partial_\nu A_\rho)^2 + \frac{1}{c} j_\rho A_\rho \end{aligned} \quad (1.55)$$

gegeben. Daraus erhält man mit (1.53) sofort die Feldgleichungen (1.34).

**Energie-Impuls-Tensor des freien klassischen Feldes:**  $T_{\mu\nu}$ . Allgemeine Eigenschaften:

$$1. \quad \partial_\nu T_{\mu\nu} = 0 \quad (1.56)$$

$$2. \quad T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} . \quad (1.57)$$

Diese beiden Eigenschaften wurden für das freie Maxwell-Feld explizit nachgewiesen: siehe (1.20, 21) mit  $K_\mu = 0$ . Sie werden als Forderungen für beliebige abgeschlossene Systeme klassischer Felder übernommen. Zur Frage der Existenz von  $T_{\mu\nu}$  siehe unten.

*Physikalische Bedeutung* von 1. und 2. Identifiziert man (wie beim Maxwell-Feld):

$$\begin{aligned} \text{Energiedichte} \quad H &= T_{00} \\ \text{Impulsdichte} \quad G_i &= \frac{1}{c} T_{i0} , \end{aligned} \quad (1.58)$$

so ergeben sich die *Erhaltungssätze* für *Energie*, *Impuls* und *Drehimpuls*.

Integration von (1.56) über den ganzen Raum:

$$\int \left( \partial_i T_{\mu i} + \frac{1}{c} \frac{\partial T_{\mu 0}}{\partial t} \right) d\vec{x} = 0 .$$

Umwandlung des ersten Terms in ein Integral über die „unendlich ferne Oberfläche“ (Gaußscher Integralsatz); dieses verschwindet, weil  $T_{\mu\nu}$  im Unendlichen null ist. Also hat man

$$\frac{d}{dt} \int T_{\mu 0} d\vec{x} = 0 , \quad (1.59)$$

das ist

$$\textbf{Energieerhaltung:} \quad \frac{d}{dt} \int H d\vec{x} = 0 , \quad (1.60 \text{ a})$$

bzw.

$$\textbf{Impulserhaltung:} \quad \frac{d}{dt} \int G_i d\vec{x} = 0 . \quad (1.60 \text{ b})$$

Man kann ferner zeigen:

$$\mathcal{G}_\mu = \frac{1}{c} \int T_{\mu 0} d\vec{x} = \begin{cases} \int G_i d\vec{x} & (\text{Impuls}) \\ \frac{i}{c} \int H d\vec{x} & \left( \frac{i}{c} \text{ Energie} \right) \end{cases} \quad (1.61)$$

ist ein Vierervektor (Viererimpuls).

*Beweis:*  $C_\mu$  sei ein beliebiger raumzeitlich konstanter Vierervektor. Zeige, dass  $C_\mu \mathcal{G}_\mu$  invariant unter der infinitesimalen Lorentz-Transformation  $x'_\mu = x_\mu + \omega_\mu x_\nu$  ( $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ ) ist. Benutze dabei Voraussetzung 1.

Der Nachweis der **Drehimpulserhaltung** macht zusätzlich Gebrauch von Voraussetzung 2. Betrachte den Tensor 3. Stufe:

$$M_{\rho, \mu\nu} = x_\mu T_{\nu\rho} - x_\nu T_{\mu\rho} ; \quad (1.62)$$

für diesen gilt wegen 1. und 2.:

$$\partial_\rho M_{\rho, \mu\nu} = T_{\nu\mu} - T_{\mu\nu} = 0 . \quad (1.63)$$

Analog zu (1.59) folgt

$$\frac{d}{dt} \int M_{0, \mu\nu} d\vec{x} = 0 ; \quad (1.64)$$

das bedeutet

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \int M_{0, ij} d\vec{x} &= \frac{1}{c} \int (x_i T_{j0} - x_j T_{i0}) d\vec{x} \\ &= \int (x_i G_j - x_j G_i) d\vec{x} \\ &= P_{ij} \\ &= \text{konstant} , \end{aligned} \quad (1.65)$$

wo  $P_{ij}$  der (dreidimensionale) antisymmetrische Drehimpulstensor ist.

Herleitung des Energie-Impuls-Tensors aus der Lagrange-Dichte. Multiplikation der Feldgleichungen (1.53) mit  $\partial_\nu u^{(r)}$ , Summation über  $r$ :

$$-\sum_r \left( \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)})} \right) \partial_\nu u^{(r)} + \sum_r \frac{\partial L}{\partial u^{(r)}} \partial_\nu u^{(r)} = 0 ,$$

folglich

$$-\sum_r \partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)})} \partial_\nu u^{(r)} \right) + \underbrace{\sum_r \left( \frac{\partial L}{\partial u^{(r)}} \partial_\nu u^{(r)} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)})} \partial_\nu \partial_\mu u^{(r)} \right)}_{= \partial_\nu L} = 0 ;$$

das heißt

$$\partial_\nu S_{\mu\nu} = 0 \quad (1.66)$$



mit

$$S_{\mu\nu} = - \sum_r \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu u^{(r)})} \partial_\mu u^{(r)} + \delta_{\mu\nu} L . \quad (1.67)$$

$S_{\mu\nu}$  wird als **kanonischer Energie-Impuls-Tensor** bezeichnet. Seine Divergenz verschwindet zwar; er ist aber im Allgemeinen nicht symmetrisch.

Der **symmetrische Energie-Impuls-Tensor** ist wie folgt definiert:

$$T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + \partial_\rho f_{\mu,\nu\rho} \quad (1.68)$$

mit

$$f_{\mu,\nu\rho} = -f_{\mu,\rho\nu} \quad (1.69)$$

und

$$\partial_\rho f_{\mu,\nu\rho} - \partial_\rho f_{\nu,\mu\rho} = S_{\nu\mu} - S_{\mu\nu} . \quad (1.70)$$

Dann folgt

$$\partial_\nu T_{\mu\nu} = 0 \quad \text{und} \quad T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} . \quad (1.71)$$

Wie findet man  $f_{\mu,\nu\rho}$  mit den Eigenschaften (1.69) und (1.70)?

Sei  $\delta u^{(r)}$  die Variation von  $u^{(r)}$  unter der infinitesimalen Lorentz-Transformation

$$\delta x_\mu = \omega_{\mu\nu} x_\nu , \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} ; \quad (1.72)$$

dann gilt

$$\begin{aligned} \delta (\partial_\mu u^{(r)}) &= \partial_\mu (\delta u^{(r)}) + (\delta \partial_\mu) u^{(r)} \\ &= \partial_\mu (\delta u^{(r)}) + \omega_{\mu\lambda} \partial_\lambda u^{(r)} . \end{aligned} \quad (1.73)$$

Multiplikation der Feldgleichungen (1.53) mit  $\delta u^{(r)}$ , Summation über  $r$ :

$$\sum_r \left( \partial_\rho \frac{\partial L}{\partial (\partial_\rho u^{(r)})} \right) \delta u^{(r)} = \sum_r \frac{\partial L}{\partial u^{(r)}} \delta u^{(r)} ,$$

folglich mit ((1.73):

$$\begin{aligned} \sum_r \partial_\rho \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_\rho u^{(r)})} \delta u^{(r)} \right) &= \sum_r \left( \frac{\partial L}{\partial u^{(r)}} \delta u^{(r)} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\rho u^{(r)})} \partial_\rho (\delta u^{(r)}) \right) \\ &= \underbrace{\sum_r \left( \frac{\partial L}{\partial u^{(r)}} \delta u^{(r)} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\rho u^{(r)})} \delta (\partial_\rho u^{(r)}) \right)}_{= \delta L} - \omega_{\rho\lambda} \frac{\partial L}{\partial (\partial_\rho u^{(r)})} \partial_\lambda u^{(r)} . \end{aligned}$$

Da die Lagrange-Dichte nach Voraussetzung Lorentz-invariant ist, verschwindet  $\delta L$ ; somit

$$\begin{aligned} \sum_r \partial_\rho \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_\rho u^{(r)})} \delta u^{(r)} \right) &= \omega_{\mu\nu} \sum_r \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu u^{(r)})} \partial_\mu u^{(r)} \\ &= -\omega_{\mu\nu} S_{\mu\nu} , \end{aligned} \quad (1.74)$$

wobei zuletzt (1.67) und die Antisymmetrie von  $\omega_{\mu\nu}$  benutzt wurden.

$\delta u^{(r)}$  linear in den  $\omega_{\mu\nu}$ :

$$\delta u^{(r)} = \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} u_{\mu\nu}^{(r)} , \quad u_{\mu\nu}^{(r)} = -u_{\nu\mu}^{(r)} . \quad (1.75)$$

$u_{\mu\nu}^{(r)}$  antisymmetrisch, da  $\omega_{\mu\nu}$  antisymmetrisch. Einsetzen in (1.74):

$$\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} \partial_\rho \underbrace{\sum_r \frac{\partial L}{\partial (\partial_\rho u^{(r)})} u_{\mu\nu}^{(r)}}_{= g_{\rho, \mu\nu}} = -\omega_{\mu\nu} S_{\mu\nu} ; \quad (1.76)$$

wegen  $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$  und mit (1.70) folgt

$$\partial_\rho g_{\rho, \mu\nu} = S_{\nu\mu} - S_{\mu\nu} = \partial_\rho (f_{\mu, \nu\rho} - f_{\nu, \mu\rho}) . \quad (1.77)$$

Eine mögliche – in  $\nu, \rho$  antisymmetrische – Lösung von (1.77) ist

$$f_{\mu, \nu\rho} = \frac{1}{2} (g_{\mu, \rho\nu} + g_{\nu, \rho\mu} + g_{\rho, \mu\nu}) . \quad (1.78)$$

Die einzelnen Schritte zur Berechnung des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors sind also:

1. Berechnung der  $u_{\mu\nu}^{(r)}$  gemäß (1.75);
2. Berechnung von  $g_{\rho, \mu\nu}$  nach (1.76);
3. Berechnung von  $f_{\mu, \nu\rho}$  nach (1.78);
4.  $T_{\mu\nu}$  gemäß (1.68);  $S_{\mu\nu}$  vorausgesetzt.

Bei der Berechnung von *Energie* und *Impuls* des Feldes liefern  $T_{\mu\nu}$  und  $S_{\mu\nu}$  identische Resultate:

$$\int T_{\mu 0} d\vec{x} = \int S_{\mu 0} d\vec{x} + \int \partial_i f_{\mu, 0i} d\vec{x}.$$

Umwandlung des 2. Terms auf der rechten Seite in ein verschwindendes Oberflächenintegral führt auf

$$\int T_{\mu 0} d\vec{x} = \int S_{\mu 0} d\vec{x}. \quad (1.79)$$

Statt mit  $T_{\mu\nu}$  kann man also mit (dem einfacheren)  $S_{\mu\nu}$  gemäß (1.67) arbeiten; entsprechend (1.58) interpretiert man daher

$$H = S_{00} = \sum_r \frac{\partial L}{\partial(\partial u^{(r)} / \partial t)} \frac{\partial u^{(r)}}{\partial t} - L \quad (1.80)$$

und

$$G_i = \frac{1}{c} S_{i0} = - \sum_r \frac{\partial L}{\partial(\partial u^{(r)} / \partial t)} \partial_i u^{(r)} \quad (1.81)$$

als Energiedichte bzw. Impulsdichte des Feldes.

Bei der Betrachtung des *Drehimpulses* des Feldes *muss* man  $T_{\mu\nu}$  benutzen. Nach (1.62) führt man ein:

$$\begin{aligned} M_{\lambda, \mu\nu} &= x_\mu S_{\nu\lambda} - x_\nu S_{\mu\lambda} + x_\mu \partial_\rho f_{\nu, \lambda\rho} - x_\nu \partial_\rho f_{\mu, \lambda\rho} \\ &= (x_\mu S_{\nu\lambda} - x_\nu S_{\mu\lambda}) - (f_{\nu, \lambda\mu} - f_{\mu, \lambda\nu}) + \partial_\rho (x_\mu f_{\nu, \lambda\rho} - x_\nu f_{\mu, \lambda\rho}); \end{aligned}$$

mit (1.65) folgt

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \frac{1}{c} \int M_{0, ij} d\vec{x} \\ &= \frac{1}{c} \int \left( (x_i S_{j0} - x_j S_{i0}) - (f_{j, 0i} - f_{i, 0j}) + \partial_k (x_i f_{j, 0k} - x_j f_{i, 0k}) \right) d\vec{x} \end{aligned}$$

Da der dritte Term keinen Beitrag liefert (verschwindender Randterm), erhält man mit (1.78):

$$P_{ij} = \frac{1}{c} \int (x_i S_{j0} - x_j S_{i0}) d\vec{x} - \frac{1}{c} \int g_{0, ij} d\vec{x}, \quad (1.82)$$

was einer Zerlegung in Bahn- und Spindrehimpuls entspricht; siehe unten.

**Fourier-Zerlegung** von Feldern. Feld  $u(x)$  (Index  $r$  weggelassen) in großem Kubus vom Volumen  $V = L^3$  ( $L =$  Kantenlänge). *Periodische Randbedingungen* ermöglichen eine Darstellung als *Fourier-Reihe*:

$$u(x) = \sum_{\vec{k}} C(\vec{k}^2) u(\vec{k}, x_0) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (1.83)$$

mit

$$k_1 = \frac{2\pi}{L} n_1, \quad k_2 = \frac{2\pi}{L} n_2, \quad k_3 = \frac{2\pi}{L} n_3, \quad (1.84)$$

$n_1, n_2, n_3$  ganzzahlig.  $C(\vec{k}^2)$  wird später passend festgelegt.

Die hier betrachteten Felder befriedigen durchweg die (verallgemeinerte) *Wellengleichung*:

$$(\partial^2 - \kappa^2) u = 0, \quad (1.85)$$

$\kappa$  eine Konstante. Einsetzen von (1.83) in (1.85) ergibt

$$(\partial_0^2 + \vec{k}^2 + \kappa^2) u(\vec{k}, x_0) = 0 \quad (1.86)$$

mit der Lösung

$$u(\vec{k}, x_0) = u^+(\vec{k}) e^{-i k_0 x_0} + u^-(\vec{k}) e^{i k_0 x_0} \quad (1.87)$$

und

$$k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + \kappa^2}; \quad (1.88)$$

$u^+(\vec{k})$  und  $u^-(\vec{k})$  raumzeitlich konstant. (1.87) in (1.83) führt auf

$$u(x) = \sum_{\vec{k}} C(\vec{k}^2) \left( u^+(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - k_0 x_0)} + u^-(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + k_0 x_0)} \right). \quad (1.89)$$

Durch (1.89) ist eine Zerlegung von  $u(x)$  in einen Anteil mit *positiven Frequenzen*  $\sim e^{-i\omega t}$  und in einen Anteil mit *negativen Frequenzen*  $\sim e^{-i(-\omega)t}$ ,  $\omega = c k_0 > 0$ , gegeben:

$$u(x) = u^+(x) + u^-(x) \quad (1.90)$$

mit

$$u^+(x) = \sum_{\vec{k}} C(\vec{k}^2) u^+(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - k_0 x_0)} \quad (1.91)$$

$$u^-(x) = \sum_{\vec{k}} C(\vec{k}^2) u^-(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + k_0 x_0)}.$$

Im *Limes*  $V \rightarrow \infty$  ( $L \rightarrow \infty$ ) geht man von der Fourier-Reihe zum *Fourier-Integral* über. Mit

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^3 \sum_{\vec{k}} f(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{k} f(\vec{k}), \quad (1.92)$$

ferner  $C(\vec{k}^2) = 1/(2k_0 L^3)$ , wird aus (1.91):

$$u^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\vec{k}}{2k_0} u^+(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - k_0 x_0)} \quad (1.93)$$

$$u^-(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\vec{k}}{2k_0} u^-(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + k_0 x_0)} .$$

$k_0$  als Variable aufgefasst (statt (1.88)) sowie Anwendung von

$$\delta(k^2 + \kappa^2) = \frac{\delta(k_0 - \sqrt{\vec{k}^2 + \kappa^2}) + \delta(k_0 + \sqrt{\vec{k}^2 + \kappa^2})}{2\sqrt{\vec{k}^2 + \kappa^2}} \quad (1.94)$$

führt auf

$$u^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dk_0 \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{k} \delta(k^2 + \kappa^2) u^+(k) e^{ik_\mu x_\mu} \quad (1.95)$$

$$u^-(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^0 dk_0 \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{k} \delta(k^2 + \kappa^2) u^-(k) e^{ik_\mu x_\mu}$$

mit  $u^\pm(k) = u^\pm(\vec{k})$  für  $k_0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + \kappa^2}$ . Lorentz-invariante Zerlegung.

Ist die Zerlegung von  $u$  in  $u^+$  und  $u^-$  Lorentz-invariant? Ja!  $k_\mu$  zeitartiger Vierervektor:  $k_\mu^2 = \vec{k}^2 - k_0^2 = -\kappa^2 \leq 0$ .  $k_0$  ändert bei eigentlicher Lorentz-Transformation oder Raumspiegelung *nicht* das Vorzeichen; *ändert* bei Zeitspiegelung das Vorzeichen. Also gilt nach (1.94) im ersten Fall:  $u^+ \rightarrow u^+$ ,  $u^- \rightarrow u^-$ ; im zweiten Fall:  $u^+ \rightarrow u^-$ ,  $u^- \rightarrow u^+$ .

## 2 Quantenfeldtheorie

Weiter unten wird gezeigt: Durch Fourier-Entwicklung können freie Felder in Systeme entkoppelter (harmonischer) Oszillatoren zerlegt werden. Für die Felder, wie auch für die einzelnen Oszillatoren gilt: Es gibt einen Zustand niedrigster Energie, *Vakuum* oder *Grundzustand* genannt. Dieser ist durch einen Zustandsvektor mit *positiver Norm* gekennzeichnet. Bei der Feldquantisierung treten vier verschiedene Typen von Oszillatoren auf:

- **Normaler Bose-Oszillator** mit dem Hamilton-Operator

$$\mathcal{H} = E a^* a , \quad (2.1)$$

$E > 0$ ;  $a^*$ ,  $a$  Operatoren,  $a^*$  zu  $a$  adjungiert, mit

$$a a^* - a^* a = 1 . \quad (2.2)$$

Der vorstehende *Kommutator* legt – zusammen mit der Existenz eines Grundzustandes  $\Psi_0$  – die Eigenwerte und Eigenzustände von  $\mathcal{H}$  fest:

Sei  $\lambda$  Eigenwert von  $\mathcal{H}$  zum Eigenzustand  $\Psi$ :

$$\mathcal{H} \Psi = \lambda \Psi ; \quad (2.3)$$

dann gilt wegen (2.1, 2)<sup>1</sup>:

$$\mathcal{H} a \Psi = a \mathcal{H} \Psi - E a \Psi = (\lambda - E) a \Psi \quad (2.4)$$

und

$$\mathcal{H} a^* \Psi = a^* \mathcal{H} \Psi + E a^* \Psi = (\lambda + E) a^* \Psi ; \quad (2.5)$$

also sind auch  $\lambda - E$  und  $\lambda + E$  Eigenwerte, sofern  $a \Psi \neq 0$  bzw.  $a^* \Psi \neq 0$ .

Für den Grundzustand folgt (wegen Beschränktheit der Energiewerte nach unten)

$$a \Psi_0 = 0 , \quad (2.6)$$

somit

$$\mathcal{H} \Psi_0 = E a^* a \Psi_0 = 0 , \quad (2.7)$$

<sup>1</sup>Beachte: Wegen (2.1, 2) ist  $a \mathcal{H} - \mathcal{H} a = E a$  bzw.  $a^* \mathcal{H} - \mathcal{H} a^* = -E a^*$ .

d. h. der zu  $\Psi_0$  gehörige Eigenwert ist 0. Die weiteren Eigenzustände samt Eigenwerten erhält man durch wiederholte Anwendung von (2.5), nämlich die

$$\begin{aligned} \text{Eigenwerte:} \quad & 0, E, 2E, \dots nE, \dots \\ \text{Eigenzustände:} \quad & \Psi_0, a^* \Psi_0, a^{*2} \Psi_0, \dots a^{*n} \Psi_0, \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ausgehend von dem auf 1 normierten Grundzustandsvektor:

$$\Psi_0^* \Psi_0 = 1, \quad (2.9)$$

erhält man die weiteren orthonormierten Zustandsvektoren:

$$\Psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^{*n} \Psi_0 \quad (2.10)$$

mit

$$\Psi_m^* \Psi_n = \delta_{mn}. \quad (2.11)$$

*Beweis* von (2.11) mit Hilfe der Gln. (2.1, 2, 8, 9).

Inneres Produkt von  $\Psi$  und  $\Phi$  mit  $\Psi^* \Phi$  bezeichnet.  $\Psi^*$  ist der zu  $\Psi$  adjungierte Vektor.

$\Psi_n$  repräsentiert <sup>2</sup> einen Zustand mit  $n$  *Bosonen* der Energie  $E$ . Wegen

$$a \Psi_n = \sqrt{n} \Psi_{n-1} \quad (2.12)$$

bzw.

$$a^* \Psi_n = \sqrt{n+1} \Psi_{n+1} \quad (2.13)$$

bezeichnet man  $a$  als *Vernichtungsoperator* und  $a^*$  als *Erzeugungsoperator*. Bei der Herleitung von (2.12, 13) macht man von (2.1, 2, 8, 10) Gebrauch.

• **Anormaler Bose-Oszillator:**

$$\mathcal{H} = -E a^* a \quad (2.14)$$

und

$$a a^* - a^* a = -1. \quad (2.15)$$

Man erhält dieselben Eigenwerte und Eigenzustände (2.8) wie im Falle des normalen Bose-Oszillators; jedoch:

$$\Psi_m^* \Psi_n = (-1)^n \delta_{mn}, \quad (2.16)$$

---

<sup>2</sup> $\Psi_n$  ist Eigenzustand des *Teilchenzahloperators*  $\mathcal{N} = a^* a$  zum Eigenwert  $n$ :  $\mathcal{N} \Psi_n = n \Psi_n$ .

d. h. neben Zuständen mit positiver Norm ( $n = 0, 2, 4, \dots$ ) treten auch Zustände mit *negativer Norm* ( $n = 1, 3, 5, \dots$ ) auf!

$\Psi_n$  wird weiterhin als  $n$ -Bosonenzustand interpretiert;  $a$  als Vernichtungsoperator,  $a^*$  als Erzeugungsoperator.

- **Normaler Fermi-Oszillator** mit dem Hamilton-Operator

$$\mathcal{H} = E a^* a , \quad (2.17)$$

$E > 0$ , wie beim Bose-Oszillator (2.1); im Unterschied zu (2.2) jedoch mit den *Antikommutator*-Relationen

$$a a^* + a^* a = 1 , \quad a^2 = 0 , \quad a^{*2} = 0 . \quad (2.18)$$

Aus (2.17, 18) leitet man her:

$$\mathcal{H}(\mathcal{H} - E) = 0 . \quad (2.19)$$

Daraus folgt:  $\mathcal{H}$  hat die *Eigenwerte* 0 und  $E$  – und nur diese – zu *Eigenzuständen*  $\Psi_0$  bzw.  $\Psi_1$ :

$$\mathcal{H} \Psi_0 = 0 , \quad \mathcal{H} \Psi_1 = E \Psi_1 . \quad (2.20)$$

$\Psi_0$ : *kein Fermion*, Vakuum.  $\Psi_1$ : *ein Fermion*. Mehr als ein Fermion pro Oszillator ist nicht möglich: **Pauli-Prinzip**.

Mit Hilfe von (2.17, 18, 20) zeigt man:

$$a \Psi_0 = 0 , \quad a^* \Psi_1 = 0 , \quad (2.21)$$

sowie

$$a^* \Psi_0 = \Psi_1 , \quad a \Psi_1 = \Psi_0 . \quad (2.22)$$

Interpretation von  $a$  als *Vernichtungs-* und von  $a^*$  als *Erzeugungsoperator* – wie beim Bose-Oszillator.

*Normierung*:

$$\Psi_m^* \Psi_n = \delta_{mn} , \quad m, n = 0, 1 . \quad (2.23)$$

- **Anormaler Fermi-Oszillator**

$$\mathcal{H} = -E a^* a \quad (2.24)$$

und

$$a a^* + a^* a = -1 , \quad a^2 = 0 , \quad a^{*2} = 0 . \quad (2.25)$$



Dieselben Eigenwerte 0 und  $E$  wie beim normalen Fermi-Oszillator. Für die Eigenzustände  $\Psi_0$  und  $\Psi_1$  gilt wie beim anormalen Bose-Oszillator die Normierung

$$\Psi_m^* \Psi_n = (-1)^n \delta_{mn}, \quad m, n = 0, 1. \quad (2.26)$$

Also auch hier: Zustand  $\Psi_1$  mit *negativer Norm* –  $\Psi_0$  mit positiver Norm vorausgesetzt.

Die physikalische Interpretation von  $\Psi_0, \Psi_1$  sowie von  $a, a^*$  ist wie beim normalen Fermi-Oszillator.

Anormale Bose- und Fermi-Oszillatoren führen auf Zustandsvektoren mit negativer Norm. Das ist in einem – üblicherweise der Quantentheorie zugrunde gelegten – **Hilbert-Raum**  $\mathcal{R}$  nicht möglich; denn für die Norm in  $\mathcal{R}$  gilt definitionsgemäß

$$\Psi^* \Psi \geq 0, \quad (2.27)$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann steht, wenn  $\Psi$  der Nullvektor ist. Anormale Oszillatoren sind also in  $\mathcal{R}$  nicht möglich. Da derartige Oszillatoren aber bei der Feldquantisierung auftreten, lässt man die Forderung (2.27) fallen. Der resultierende Zustandsraum  $\tilde{\mathcal{R}}$  ist dann kein Hilbert-Raum mehr, sondern ein **Raum indefiniter Norm**. Im Folgenden wird ein Zustandsraum  $\tilde{\mathcal{R}}$  zugrunde gelegt.

Die Quantentheorie in  $\tilde{\mathcal{R}}$  stimmt in den meisten Punkten mit der Quantentheorie in  $\mathcal{R}$  überein. *Unterschiede* (keine Beweise):

- Statt (2.27) gilt in  $\tilde{\mathcal{R}}$  nur noch

$$\Psi^* \Psi = \text{reelle Zahl} \quad (2.28)$$

mit – nach Normierung –

$$\Psi^* \Psi = +1 \quad \text{oder} \quad 0 \quad \text{oder} \quad -1. \quad (2.29)$$

- In  $\mathcal{R}$  haben selbstadjungierte Operatoren reelle Eigenwerte; in  $\tilde{\mathcal{R}}$  trifft das nur noch auf Eigenvektoren mit  $\Psi^* \Psi \neq 0$  zu, nicht notwendig auf Eigenvektoren mit  $\Psi^* \Psi = 0$ .
- In  $\mathcal{R}$  sind die Eigenvektoren eines selbstadjungierten Operators orthogonalisierbar, in  $\tilde{\mathcal{R}}$  trifft das nur noch auf die Teilmenge der Eigenvektoren mit nichtverschwindender Norm zu.

- $\mathcal{R}$ : Observable  $\alpha$  mit vollständigem, orthonormiertem System von Eigenvektoren:

$$\alpha \Psi_n = a_n \Psi_n \quad (2.30)$$

mit

$$\Psi_m^* \Psi_n = \delta_{mn} . \quad (2.31)$$

Beliebiger Zustand  $\Phi$  kann entwickelt werden:

$$\Phi = \sum_n c_n \Psi_n . \quad (2.32)$$

Erwartungswert der Observablen in diesem Zustand:

$$\langle \alpha \rangle = \sum_n c_n^* c_n a_n . \quad (2.33)$$

Interpretation von

$$P_n = c_n^* c_n \quad (2.34)$$

als *Wahrscheinlichkeit* dafür, bei  $\alpha$ -Messung im Zustand  $\Phi$  den Eigenwert  $a_n$  zu erzielen.

- $\tilde{\mathcal{R}}$ : Auch hier können die Eigenvektoren einer Observablen  $\alpha$  ein vollständiges orthonormiertes System bilden – jedoch nur, falls keine Eigenvektoren mit verschwindender Norm dabei sind:

$$\Psi_m^* \Psi_n = \pm \delta_{mn} . \quad (2.35)$$

Entwicklung eines beliebigen Zustands  $\Phi$  wie oben. Für den Erwartungswert von  $\alpha$  folgt

$$\langle \alpha \rangle = \sum_n \pm c_n^* c_n a_n . \quad (2.36)$$

Bei einer Interpretation in Analogie zu (2.34):

$$P_n = \pm c_n^* c_n , \quad (2.37)$$

sieht man sich mit dem Problem *negativer Wahrscheinlichkeiten* konfrontiert.

*Ausweg*: Ein Zustandsraum  $\tilde{\mathcal{R}}$  kann nur dann zugrunde gelegt werden, wenn Zustände mit negativer oder verschwindender Norm physikalisch nicht beobachtbar sind.

- Darstellung des Einheitsoperators in  $\mathcal{R}$ :

$$\sum_n \Psi_n \Psi_n^* = \mathbb{1} \quad (2.38)$$

bzw. in  $\tilde{\mathcal{R}}$ :

$$\sum_n \pm \Psi_n \Psi_n^* = \mathbb{1} . \quad (2.39)$$

Kennzeichnung des klassischen Feldes durch Feldfunktionen  $u^{(r)}(x_\mu)$ ; siehe Kap. 1. Entsprechende Beschreibung eines Quantenfeldes durch operatorwertige Funktionen  $U(x_\mu)$ ,  $V(x_\mu)$ ,  $W(x_\mu)$ , ... auf der Raum-Zeit: **Feldoperatoren**. Diese sind wie die klassischen Feldgrößen aus Feldgleichungen zu berechnen.

Zwei Sorten von Feldoperatoren sind im Folgenden zu unterscheiden:

- *Bose-Operatoren* mit dem *Kommutator*

$$[U, V] = UV - VU = c \mathbb{1} ; \quad (2.40)$$

- *Fermi-Operator* mit dem *Antikommutator*

$$\{U, V\} = UV + VU = c \mathbb{1} . \quad (2.41)$$

$c$  eine komplexe Zahl, z. B. auch  $c = 0$ . Einstweilen keine unterschiedliche Notation für Bose- und Fermi-Operatoren. Bose- und Fermi-Operatoren vertauschen ohne Einschränkung miteinander.

Beim Rechnen mit Feldoperatoren (Algebra und Analysis) ist die Reihenfolge der Faktoren bedeutsam. Daher Einführung eines **geordneten** oder **Normalproduktes** <sup>3</sup>

$$UV \dots Z \rightarrow :UV \dots Z: \quad (2.42)$$

mit den folgenden *Eigenschaften* und *Rechenregeln*:

- 

$$:UV \dots: = (-1)^f :P(UV \dots): \quad (2.43)$$

Hierbei bedeutet  $P$  eine Permutation der Feldoperatoren, und  $f$  ist die dabei auftretende Anzahl von Vertauschungen von Fermi-Operatoren.

<sup>3</sup> Dem *Produkt*  $UV \dots Z$  wird ein als „Normalprodukt“ bezeichneter *Operator*  $:UV \dots Z:$  zugeordnet. Dieser ist im Allgemeinen nicht als Produkt, sondern nur als Summe von Produkten darstellbar.

- Das Normalprodukt einer Summe von Produkten ist gleich der Summe der zu den Produkten gehörigen Normalprodukten:

$$:(U \dots V) + (W \dots X) := :U \dots V : + :W \dots X : \quad (2.44)$$

- Sei

$$:U \dots V := :W \dots X : ,$$

dann gilt für einen beliebigen Feldoperator  $A$ :

$$:AU \dots V := :AW \dots X : \quad (2.45)$$

$$:U \dots VA := :W \dots XA :$$

- Normalprodukt eines Produktes, das ein Normalprodukt als Faktor enthält:

$$:U \dots V (:W \dots X :) := :U \dots VW \dots X : \quad (2.46)$$

- Falls

$$:V \dots W \delta U := 0 \quad (2.47)$$

für beliebiges  $\delta U$ , dann folgt

$$:V \dots W := 0 . \quad (2.48)$$

- Multiplikation mit einer Zahl  $c$ :

$$c :U \dots V := :cU \dots V : \quad (2.49)$$

- Ableitung nach  $x_\mu$ :

$$\partial_\mu (:U \dots V :) = : \partial_\mu (U \dots V) : \quad (2.50)$$

- Geordnetes und nichtgeordnetes Produkt:

$$:U \dots V := U \dots V + \sum_i c_i f_i , \quad (2.51)$$

$c_i$  Koeffizienten;  $f_i$  Operatorprodukte, die durch Weglassen eines oder mehrerer Paare von Bose- oder Fermi-Operatoren aus  $U \dots V$  hervorgehen.

- Partielle Ableitung nach einem Feldoperator: Sei

$$f =: \dots U V W \dots :, \quad (2.52)$$

dann ist

$$\delta f = \dots + : \dots \delta U V W \dots : + : \dots U \delta V W \dots : + : \dots U V \delta W \dots : + \dots \quad (2.53)$$

$\delta U$ ,  $\delta V$ ,  $\delta W$ , ... Variationen, die den Bose- oder Fermi-Charakter des jeweiligen Operators bewahren; es folgt

$$\delta f = \dots + : \frac{\partial f}{\partial U} \delta U : + : \frac{\partial f}{\partial V} \delta V : + : \frac{\partial f}{\partial W} \delta W : + \dots \quad (2.54)$$

mit

$$\frac{\partial f}{\partial U} = \pm : \dots V W \dots :, \quad \frac{\partial f}{\partial V} = \pm : \dots U W \dots :, \dots \quad (2.55)$$

Minuszeichen:  $U$  Fermi-Operator, und im Produkt (2.52) steht rechts von  $U$  eine ungerade Anzahl von Fermi-Operatoren. Pluszeichen: Alle anderen Fälle. Entsprechend für  $V$  usw.

Einstweilen nur die formalen Regeln; eine explizite Definition des Normalproduktes wird später gegeben.

**Quantenfeldtheorie** in Analogie zur klassischen Feldtheorie: Feldoperatoren  $u^{(r)}(x)$  vom Bose- und/oder Fermi-Typ; raumzeitliche Ableitungen  $\partial_\mu u^{(r)}(x)$ . Lorentz-invariante *Lagrange-Dichte*

$$L = L : \left( u^{(r)}, \partial_\mu u^{(r)} \right) : \quad (2.56)$$

aus Normalprodukten der  $u^{(r)}$  und  $\partial_\mu u^{(r)}$ . Das *Hamilton-Prinzip* liefert wie im klassischen Fall die *Lagrangeschen Feldgleichungen*

$$\frac{\partial L}{\partial u^{(r)}} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)})} = 0. \quad (2.57)$$

Im Unterschied zu (1.53) handelt es sich hier um Operatorgleichungen.

*Kanonischer Energie-Impuls-Tensor:*

$$S_{\mu\nu} = - \sum_r : \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu u^{(r)})} \partial_\mu u^{(r)} : + \delta_{\mu\nu} L \quad (2.58)$$

befriedigt

$$\partial_\nu S_{\mu\nu} = 0 \quad (2.59)$$

wie in (1.67, 66). Energie- und Impulsdichte wie in (1.80, 81):

$$H = -S_{44} = \sum_r : \frac{\partial L}{\partial(\partial u^{(r)} / \partial t)} \frac{\partial u^{(r)}}{\partial t} : - L \quad (2.60)$$

bzw.

$$G_i = -\frac{i}{c} S_{i4} = - \sum_r : \frac{\partial L}{\partial(\partial u^{(r)} / \partial t)} \partial_i u^{(r)} : \quad (2.61)$$

Herleitung des *symmetrischen Energie-Impuls-Tensors*  $T_{\mu\nu}$  wie im klassischen Fall.

Zur Einführung von Kommutator- und Antikommutator-Relationen des Typs (2.40, 41) für Bose- bzw. Fermi-Feldoperatoren geht man zur **kanonischen Formulierung** der Quantenfeldtheorie über. Einführung der zu  $u^{(r)}$  *kanonisch-konjugierten* Feldvariablen  $\pi^{(r)}$  durch die Definition

$$\pi^{(r)} = \frac{\partial L}{\partial(\partial u^{(r)} / \partial t)}, \quad (2.62)$$

im Hinblick auf die klassische Lagrange-Mechanik auch als konjugierter „Impuls“ bezeichnet.

Für die Energiedichte erhält man nach (2.60, 62) den Ausdruck

$$H = \sum_r : \pi^{(r)} \frac{\partial u^{(r)}}{\partial t} : - L. \quad (2.63)$$

Infinitesimale *Variation* der Feldvariablen  $u^{(r)}$  in (2.63) führt auf

$$\delta H = \sum_r \left( \pm : \frac{\partial u^{(r)}}{\partial t} \delta \pi^{(r)} : + : \pi^{(r)} \delta \frac{\partial u^{(r)}}{\partial t} : \right) - \delta L, \quad (2.64)$$

wo + im Bose-Fall und – im Fermi-Fall steht. Wegen (2.56, 62) ist

$$\delta L = \sum_r \left( : \frac{\partial L}{\partial u^{(r)}} \delta u^{(r)} : + : \frac{\partial L}{\partial(\partial_i u^{(r)})} \delta \partial_i u^{(r)} : + : \pi^{(r)} \delta \frac{\partial u^{(r)}}{\partial t} : \right). \quad (2.65)$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt

$$\delta H = \sum_r \left( \pm : \frac{\partial u^{(r)}}{\partial t} \delta \pi^{(r)} : - : \frac{\partial L}{\partial u^{(r)}} \delta u^{(r)} : - : \frac{\partial L}{\partial(\partial_i u^{(r)})} \delta \partial_i u^{(r)} : \right). \quad (2.66)$$

Wegen der Feldgleichungen (2.57)<sup>4</sup> sowie auf Grund der Definition (2.62) hat man

$$\frac{\partial L}{\partial u^{(r)}} = \partial_i \frac{\partial L}{\partial (\partial_i u^{(r)})} + \frac{\partial \pi^{(r)}}{\partial t}. \quad (2.67)$$

Einsetzen von (2.67) in (2.66) führt schließlich auf

$$\delta H = \sum_r \left( \pm : \frac{\partial u^{(r)}}{\partial t} \delta \pi^{(r)} : - : \frac{\partial \pi^{(r)}}{\partial t} \delta u^{(r)} : - : \partial_i \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_i u^{(r)})} \delta u^{(r)} \right) : \right). \quad (2.68)$$

Bei Integration über den ganzen Raum verschwindet der letzte Term auf der rechten Seite:

$$\int \delta H d\vec{x} = \int \sum_r \left( \pm : \frac{\partial u^{(r)}}{\partial t} \delta \pi^{(r)} : - : \frac{\partial \pi^{(r)}}{\partial t} \delta u^{(r)} : \right) d\vec{x}. \quad (2.69)$$

Durch Elimination von  $\partial u^{(r)} / \partial t$  aus (2.62, 63) wird  $H$  zu einer Funktion von  $u^{(r)}$ ,  $\partial_i u^{(r)}$  und  $\pi^{(r)}$ . Aus Symmetriegründen bezüglich  $u^{(r)}$  und  $\pi^{(r)}$  lässt man im Allgemeinen auch noch eine Abhängigkeit von  $\partial_i \pi^{(r)}$  zu:

$$H = H : \left( u^{(r)}, \partial_i u^{(r)}, \pi^{(r)}, \partial_i \pi^{(r)} \right) : . \quad (2.70)$$

Diese Funktion der *kanonischen Variablen*  $u^{(r)}$ ,  $\pi^{(r)}$  und ihrer (ersten) räumlichen Ableitungen bezeichnet man auch als **Hamilton-Dichte** des Feldes.

Unabhängige infinitesimale *Variation* von  $u^{(r)}$  und  $\pi^{(r)}$  ergibt

$$\begin{aligned} \delta H &= \sum_r \left( : \frac{\partial H}{\partial u^{(r)}} \delta u^{(r)} : + : \frac{\partial H}{\partial (\partial_i u^{(r)})} \delta \partial_i u^{(r)} : + : \frac{\partial H}{\partial \pi^{(r)}} \delta \pi^{(r)} : + : \frac{\partial H}{\partial (\partial_i \pi^{(r)})} \delta \partial_i \pi^{(r)} : \right) \\ &= \sum_r \left( : \left( \frac{\partial H}{\partial u^{(r)}} - \partial_i \frac{\partial H}{\partial (\partial_i u^{(r)})} \right) \delta u^{(r)} : + : \left( \frac{\partial H}{\partial \pi^{(r)}} - \partial_i \frac{\partial H}{\partial (\partial_i \pi^{(r)})} \right) \delta \pi^{(r)} : \right. \\ &\quad \left. + : \partial_i \left( \frac{\partial H}{\partial (\partial_i u^{(r)})} \delta u^{(r)} + \frac{\partial H}{\partial (\partial_i \pi^{(r)})} \delta \pi^{(r)} \right) : \right), \end{aligned} \quad (2.71)$$

woraus bei Integration über den ganzen Raum folgt:

$$\begin{aligned} \int \delta H d\vec{x} &= \int \sum_r \left( : \left( \frac{\partial H}{\partial u^{(r)}} - \partial_i \frac{\partial H}{\partial (\partial_i u^{(r)})} \right) \delta u^{(r)} : \right. \\ &\quad \left. + : \left( \frac{\partial H}{\partial \pi^{(r)}} - \partial_i \frac{\partial H}{\partial (\partial_i \pi^{(r)})} \right) \delta \pi^{(r)} : d\vec{x} \right). \end{aligned} \quad (2.72)$$

<sup>4</sup>Über die Feldgleichungen wird das Hamiltonsche Prinzip berücksichtigt.

Vergleich von (2.72) mit (2.69) liefert – wegen der Unabhängigkeit der  $u^{(r)}$ - und  $\pi^{(r)}$ -Variationen – die **kanonischen Feldgleichungen**:

$$\begin{aligned}\pm \frac{\partial u^{(r)}}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial \pi^{(r)}} - \partial_i \frac{\partial H}{\partial (\partial_i \pi^{(r)})} \\ - \frac{\partial \pi^{(r)}}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial u^{(r)}} - \partial_i \frac{\partial H}{\partial (\partial_i u^{(r)})},\end{aligned}\tag{2.73}$$

wobei das Pluszeichen im Bose-Fall und das Minuszeichen im Fermi-Fall steht.

**Postulat:** Raumzeitliche Entwicklung eines beliebigen Feldoperators  $f(x)$  gegeben durch die Vertauschungsrelation

$$\partial_\mu f(x) = \frac{i}{\hbar} [f(x), \mathcal{G}_\mu],\tag{2.74}$$

wo  $\mathcal{G}_\mu$  der Viererimpuls des Feldes gemäß (1.61) ist:

$$\mathcal{G}_i = \int G_i d\vec{x}, \quad \mathcal{G}_4 = \frac{i}{c} \mathcal{H} = \frac{i}{c} \int H d\vec{x}.\tag{2.75}$$

$\mathcal{G}_i$  ist der Impulsoperator,  $\mathcal{H}$  der **Hamilton-Operator** des Feldes.

Für  $f = u^{(r)}$  bzw.  $f = \pi^{(r)}$  liefert die 4. Komponente von Gl. (2.74):

$$\frac{\partial u^{(r)}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [u^{(r)}, \mathcal{H}], \quad \frac{\partial \pi^{(r)}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\pi^{(r)}, \mathcal{H}];\tag{2.76}$$

vgl. Heisenberg-Bild. Einsetzen in die Feldgleichungen (2.73) ergibt

$$\begin{aligned}\pm [u^{(r)}, \mathcal{H}] &= i\hbar \frac{\partial H}{\partial \pi^{(r)}} - i\hbar \partial_k \frac{\partial H}{\partial (\partial_k \pi^{(r)})} \\ - [\pi^{(r)}, \mathcal{H}] &= i\hbar \frac{\partial H}{\partial u^{(r)}} - i\hbar \partial_k \frac{\partial H}{\partial (\partial_k u^{(r)})}.\end{aligned}\tag{2.77}$$



Ausgeschrieben (ohne  $t$ -Abhängigkeit) erhält man die *Integralgleichungen*

$$\begin{aligned}
& \pm \int \left[ u^{(r)}(\vec{x}), H : \left( u^{(s)}(\vec{x}'), \partial_i u^{(s)}(\vec{x}'), \pi^{(s)}(\vec{x}'), \partial_i \pi^{(s)}(\vec{x}') \right) : \right] d\vec{x}' \\
&= i \hbar \left( \frac{\partial}{\partial \pi^{(r)}} - \partial_k \frac{\partial}{\partial (\partial_k \pi^{(r)})} \right) H : \left( u^{(s)}(\vec{x}), \partial_i u^{(s)}(\vec{x}), \pi^{(s)}(\vec{x}), \partial_i \pi^{(s)}(\vec{x}) \right) : \\
&\quad - \int \left[ \pi^{(r)}(\vec{x}), H : \left( u^{(s)}(\vec{x}'), \partial_i u^{(s)}(\vec{x}'), \pi^{(s)}(\vec{x}'), \partial_i \pi^{(s)}(\vec{x}') \right) : \right] d\vec{x}' \\
&= i \hbar \left( \frac{\partial}{\partial u^{(r)}} - \partial_k \frac{\partial}{\partial (\partial_k u^{(r)})} \right) H : \left( u^{(s)}(\vec{x}), \partial_i u^{(s)}(\vec{x}), \pi^{(s)}(\vec{x}), \partial_i \pi^{(s)}(\vec{x}) \right) :
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Diese werden durch einfache (Anti-) Vertauschungsrelationen zwischen den kanonischen Variablen  $u^{(r)}$ ,  $\pi^{(r)}$  erfüllt, und zwar (mit  $t$ -Abhängigkeit) für

• **Bose-Variablen:**

$$\left[ u^{(r)}(\vec{x}, t), \pi^{(s)}(\vec{x}', t) \right] = i \hbar \delta_{rs} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \tag{2.79}$$

$$\left[ u^{(r)}(\vec{x}, t), u^{(s)}(\vec{x}', t) \right] = \left[ \pi^{(r)}(\vec{x}, t), \pi^{(s)}(\vec{x}', t) \right] = 0 ;$$

• **Fermi-Variablen:**

$$\left\{ u^{(r)}(\vec{x}, t), \pi^{(s)}(\vec{x}', t) \right\} = i \hbar \delta_{rs} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \tag{2.80}$$

$$\left\{ u^{(r)}(\vec{x}, t), u^{(s)}(\vec{x}', t) \right\} = \left\{ \pi^{(r)}(\vec{x}, t), \pi^{(s)}(\vec{x}', t) \right\} = 0 .$$

Beim Beweis (der hier nicht erbracht wird) sind die oben angegebenen Rechenregeln für Normalprodukte zu beachten. Bose- und Fermi-Variablen vertauschen untereinander uneingeschränkt.

Die zeitliche Entwicklung der Feldoperatoren  $u^{(r)}$  und  $\pi^{(s)}$  gemäß (2.76) entspricht dem **Heisenberg-Bild**. Für den Zustandsvektor  $\Psi$  des Systems (des Feldes) ist in diesem Bild zeitliche Konstanz zu fordern:

$$\frac{d}{dt} \Psi = 0 . \tag{2.81}$$

Im **Schrödinger-Bild** liegt umgekehrt die Zeitabhängigkeit vollständig beim Zustandsvektor (Schrödinger-Gleichung), während die Feldoperatoren zeitlich konstant sind. Die

beiden Bilder zeitlicher Entwicklung können durch eine unitäre Transformation ineinander übergeführt werden.

Für die Analyse der Wechselwirkung von Feldern (siehe unten: Maxwell-Feld und Dirac-Feld in Wechselwirkung) empfiehlt sich das „Wechselwirkungsbild“. Hierbei liegt die zeitliche Entwicklung *teils* bei den Feldoperatoren, *teils* beim Zustandsvektor.

**Spezialfall: zwei Felder in Wechselwirkung**, von denen jedes durch einen einzigen Feldoperator gekennzeichnet sei:  $u^{(1)}$  bzw.  $u^{(2)}$ . Die kanonisch-konjugierten Feldoperatoren seien  $\pi^{(1)}$  bzw.  $\pi^{(2)}$ . *Vertauschungsrelationen* im *Heisenberg-Bild* (2.79, 80):

$$\begin{aligned} u^{(r)}(\vec{x}, t) \pi^{(s)}(\vec{x}', t) \mp \pi^{(s)}(\vec{x}', t) u^{(r)}(\vec{x}, t) &= i \hbar \delta_{rs}(\vec{x} - \vec{x}') \\ u^{(r)}(\vec{x}, t) u^{(s)}(\vec{x}', t) \mp u^{(s)}(\vec{x}', t) u^{(r)}(\vec{x}, t) &= 0 \\ \pi^{(r)}(\vec{x}, t) \pi^{(s)}(\vec{x}', t) \mp \pi^{(s)}(\vec{x}', t) \pi^{(r)}(\vec{x}, t) &= 0, \quad r, s = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Minuszeichen: zwei Bose-Operatoren oder ein Bose- und ein Fermi-Operator; Pluszeichen: zwei Fermi-Operatoren.

*Hamilton-Operator* des Gesamtsystems im *Heisenberg-Bild*:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} + \mathcal{H}^{(2)} + \mathcal{H}' \quad (2.83)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(1)} &= \int H^{(1)} : \left( u^{(1)}, \pi^{(1)}, \partial_i u^{(1)}, \partial_i \pi^{(1)} \right) : d\vec{x} \quad (\text{erstes Feld}), \\ \mathcal{H}^{(2)} &= \int H^{(2)} : \left( u^{(2)}, \pi^{(2)}, \partial_i u^{(2)}, \partial_i \pi^{(2)} \right) : d\vec{x} \quad (\text{zweites Feld}), \\ \mathcal{H}' &= \int H' : \left( u^{(1)}, \pi^{(1)}, \partial_i u^{(1)}, \partial_i \pi^{(1)}; u^{(2)}, \pi^{(2)}, \partial_i u^{(2)}, \partial_i \pi^{(2)} \right) : d\vec{x} \end{aligned} \quad (2.84)$$

für die Wechselwirkung. Im Heisenberg-Bild bestimmt  $\mathcal{H}$  gemäß (2.76) die zeitliche Entwicklung von  $u^{(1)}$ ,  $u^{(2)}$ ,  $\pi^{(1)}$ ,  $\pi^{(2)}$ .  $\Psi$  ist in diesem Bild nach (2.81) zeitlich konstant.

Übergang ins **Wechselwirkungsbild** durch unitäre Transformation (Index  $I$  = interaction):

$$\Psi_I = U \Psi \quad (2.85)$$

bzw.

$$u_I^{(1)} = U u^{(1)} U^*, \quad \pi_I^{(1)} = U \pi^{(1)} U^* \quad (2.86)$$

mit

$$i \hbar \frac{d}{dt} U = U \mathcal{H}' , \quad U(0) = \mathbb{1} . \quad (2.87)$$

Anwendung von (2.86) lässt die algebraische Struktur der Vertauschungsrelationen (2.82) sowie des Hamilton-Operators (2.83, 84) unverändert:

$$\begin{aligned} u_I^{(r)}(\vec{x}, t) \pi_I^{(s)}(\vec{x}', t) \mp \pi_I^{(s)}(\vec{x}', t) u_I(\vec{x}, t) &= i \hbar \delta_{rs}(\vec{x} - \vec{x}') \\ u_I^{(r)}(\vec{x}, t) u_I^{(s)}(\vec{x}', t) \mp u_I^{(s)}(\vec{x}', t) u_I^{(r)}(\vec{x}, t) &= 0 \\ \pi_I^{(r)}(\vec{x}, t) \pi_I^{(s)}(\vec{x}', t) \mp \pi_I^{(s)}(\vec{x}', t) \pi_I^{(r)}(\vec{x}, t) &= 0 , \quad r, s = 1, 2 , \end{aligned} \quad (2.88)$$

bzw.

$$\mathcal{H}_I = U \mathcal{H} U^* = \mathcal{H}_I^{(1)} + \mathcal{H}_I^{(2)} + \mathcal{H}'_I \quad (2.89)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I^{(1)} &= \int H^{(1)} : \left( u_I^{(1)}, \pi_I^{(1)}, \partial_i u_I^{(1)}, \partial_i \pi_I^{(1)} \right) : d\vec{x} \\ \mathcal{H}_I^{(2)} &= \int H^{(2)} : \left( u_I^{(2)}, \pi_I^{(2)}, \partial_i \pi_I^{(2)}, \partial_i u_I^{(2)} \right) : d\vec{x} \\ \mathcal{H}'_I &= \int H' : \left( u_I^{(1)}, \pi_I^{(1)}, \partial_i u_I^{(1)}, \partial_i \pi_I^{(1)}; u_I^{(2)}, \pi_I^{(2)}, \partial_i u_I^{(2)}, \partial_i \pi_I^{(2)} \right) : d\vec{x} . \end{aligned} \quad (2.90)$$

Wie ändern sich die *Bewegungsgleichungen* (2.81) und (2.76)? Aus (2.81, 85, 87) folgt:

$$\begin{aligned} i \hbar \frac{d}{dt} \Psi_I &= i \hbar \left( \frac{d}{dt} U \right) \Psi \\ &= U \mathcal{H}' U^* \Psi_I \\ &= \mathcal{H}'_I \Psi_I . \end{aligned} \quad (2.91)$$

Die zeitliche Entwicklung des Zustandsvektors  $\Psi_I$  wird also allein durch den Wechselwirkungsanteil  $\mathcal{H}'_I$  des Hamilton-Operators bestimmt.

Andererseits folgt mit (2.76, 86, 87):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_I^{(1)}}{\partial t} &= U \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} U^* + \frac{dU}{dt} u^{(1)} U^* + U u^{(1)} \frac{dU^*}{dt} \\
&= -\frac{i}{\hbar} U \left[ u^{(1)}, \mathcal{H}^{(1)} + \mathcal{H}^{(2)} \right] U^* \\
&= -\frac{i}{\hbar} \left[ u_I^{(1)}, \mathcal{H}_I^{(1)} + \mathcal{H}_I^{(2)} \right] \\
&= -\frac{i}{\hbar} \left[ u_I^{(1)}, \mathcal{H}_I^{(1)} \right], \tag{2.92}
\end{aligned}$$

da  $u_I^{(1)}$  mit  $\mathcal{H}_I^{(2)}$  vertauscht (auch im Falle zweier Fermi-Felder). Entsprechend findet man

$$\frac{\partial \pi_I^{(1)}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \left[ \pi_I^{(1)}, \mathcal{H}_I^{(1)} \right]. \tag{2.93}$$

Mit Hilfe der Vertauschungsrelationen (2.88) gelangt man – in Umkehrung des Weges von (2.73) nach (2.79, 80) – zu den *kanonischen Feldgleichungen* für das *Feld 1*:

$$\begin{aligned}
\pm \frac{\partial u_I^{(1)}}{\partial t} &= \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \pi_I^{(1)}} - \partial_i \frac{\partial H^{(1)}}{\partial (\partial_i \pi_I^{(1)})} \\
-\frac{\partial \pi_I^{(1)}}{\partial t} &= \frac{\partial H^{(1)}}{\partial u_I^{(1)}} - \partial_i \frac{\partial H^{(1)}}{\partial (\partial_i u_I^{(1)})}. \tag{2.94}
\end{aligned}$$

Die zeitliche Entwicklung des Feldes 1 ist also allein durch den Hamilton-Operator  $\mathcal{H}_I^{(1)}$  (bzw.  $H^{(1)}$ ) dieses Feldes bestimmt.

Entsprechende Gleichungen ergeben sich für das *Feld 2*: Index 1 einfach durch Index 2 zu ersetzen.

Also: Im **Wechselwirkungsbild** sind – im Unterschied zum Heisenberg-Bild (2.73, 76) – die beiden Felder vollständig entkoppelt. Sie bewegen sich wie freie Felder. Dafür ist der Zustand des Gesamtsystems nicht mehr zeitlich konstant; er verändert sich unter dem Einfluss der Wechselwirkung •

Alle weiteren Betrachtungen erfolgen im Wechselwirkungsbild; daher wird im Folgenden der Index  $I$  weggelassen.

Verallgemeinerung des vorstehenden Spezialfalles auf beliebig viele Felder (hier jedoch nur zwei) in Wechselwirkung und beliebig viele Feldvariablen.

Im Wechselwirkungsbild befriedigen die kanonischen Variablen der hier betrachteten Felder (darüberhinaus aller physikalisch interessanten Felder) die Wellengleichung (1.85):

$$(\partial^2 - \kappa^2) u^{(r)} = 0, \quad (\partial^2 - \kappa^2) \pi^{(s)} = 0 \quad (2.95)$$

für alle  $r$  und  $s$ . Daher **Fourier-Entwicklung**, formal wie in Kap. 1; Lorentz-invariante Zerlegung in positiven und negativen Frequenzanteil:

$$u^{(r)} = u^{(r)+} + u^{(r)-}, \quad \pi^{(s)} = \pi^{(s)+} + \pi^{(s)-}, \quad (2.96)$$

allgemein

$$U = U^+ + U^- . \quad (2.97)$$

Einsetzen in die kanonischen (Anti-) Vertauschungsrelationen (2.88) ergibt: Die positiven und die negativen Frequenzanteile von Bose-Operatoren verhalten sich wie Bose-Operatoren, d. h. Kommutatoren (2.40). Die positiven und die negativen Frequenzanteile von Fermi-Operatoren verhalten sich wie Fermi-Operatoren, d. h. Antikommutatoren (2.41).

Betrachte ein beliebiges Produkt aus – zum Beispiel drei – Feldoperatoren:

$$\begin{aligned} UVW\dots &= (U^+ + U^-)(V^+ + V^-)(W^+ + W^-) \\ &= U^+ V^+ W^+ + U^- V^+ W^+ + U^+ V^- W^+ + U^- V^- W^+ \\ &\quad + U^+ V^+ W^- + U^- V^+ W^- + U^+ V^- W^- + U^- V^- W^- . \end{aligned} \quad (2.98)$$

Daraus ergibt sich die folgende **explizite Definition** des geordneten oder Normalprodukts:

$$\begin{aligned} :UVW : &:= U^+ V^+ W^+ + U^- V^+ W^+ \pm V^- U^+ W^+ + U^- V^- W^+ \\ &\quad \pm W^- U^+ V^+ \pm U^- W^- V^+ \pm V^- W^- U^+ .. + U^- V^- W^- . \end{aligned} \quad (2.99)$$

Alle negativen Frequenzanteile nach links (unter Erhaltung ihrer relativen Reihenfolge), alle positiven Frequenzanteile nach rechts (unter Erhaltung ihrer relativen Reihenfolge). Vorzeichen der Terme:  $(-1)^f$ , wo  $f$  die Anzahl der Transpositionen von Fermi-Operatoren ist. Die vorstehende Definition erfüllt alle Eigenschaften und Rechenregeln im Gefolge von (2.42). Verallgemeinerung auf Produkte aus beliebig vielen Feldoperatoren.

**Komplexes Feld** durch Lagrange-Dichte

$$L = L : \left( u^{(r)}, u^{(r)*}, \partial_\mu u^{(r)}, \partial_\mu u^{(r)*} \right) : \quad (2.100)$$

gekennzeichnet – statt (2.56) – mit linear unabhängigen Feldoperatoren  $u^{(r)}$  und  $u^{(r)*}$ . Formalismus wie oben, jedoch mit  $2n$  unabhängigen Variablen  $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}, u^{(1)*}, \dots, u^{(n)*}$ . Lagrangesche *Feldgleichungen* – vgl. (2.57):

$$\frac{\partial L}{\partial u^{(r)}} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)})} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial u^{(r)*}} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)*})} = 0. \quad (2.101)$$

Kanonischer *Energie-Impuls-Tensor* – vgl. (2.58):

$$S_{\mu\nu} = - \sum_r : \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu u^{(r)})} \partial_\mu u^{(r)} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu u^{(r)*})} \partial_\mu u^{(r)*} : + \delta_{\mu\nu} L, \quad (2.102)$$

wobei speziell für Energie- und Impulsdichte gilt – vgl. (2.60, 61):

$$H = \sum_r : \frac{\partial L}{\partial (\partial u^{(r)} / \partial t)} \frac{\partial u^{(r)}}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial (\partial u^{(r)*} / \partial t)} \frac{\partial u^{(r)*}}{\partial t} : - L \quad (2.103)$$

bzw.

$$G_i = - \sum_r : \frac{\partial L}{\partial (\partial u^{(r)} / \partial t)} \partial_i u^{(r)} + \frac{\partial L}{\partial (\partial u^{(r)*} / \partial t)} \partial_i u^{(r)*} : \quad (2.104)$$

Übergang zur *kanonischen Formulierung* durch Einführung der konjugierten Impulse

$$\pi^{(r)} = \frac{\partial L}{\partial (\partial u^{(r)} / \partial t)}, \quad \pi^{(r)*} = \frac{\partial L}{\partial (\partial u^{(r)*} / \partial t)}, \quad (2.105)$$

wo  $\pi^{(r)*}$  nicht notwendig adjungiert zu  $\pi^{(r)}$  ist. Kanonische Feldgleichungen und kanonische Vertauschungsrelationen für die Feldvariablen  $u^{(r)}, u^{(r)*}, \pi^{(r)}, \pi^{(r)*}$  wie oben.

**Forderung: Invarianz** von  $L$  bzgl. der **Phasentransformation**

$$u^{(r)} \rightarrow u^{(r)} e^{i\alpha}, \quad u^{(r)*} \rightarrow u^{(r)*} e^{-i\alpha}, \quad (2.106)$$

$\alpha$  reell. Speziell bei den infinitesimalen Variationen

$$\delta u^{(r)} = i\alpha u^{(r)}, \quad \delta u^{(r)*} = -i\alpha u^{(r)*} \quad (2.107)$$

soll  $\delta L$  verschwinden:

$$\begin{aligned} & \sum_r : \frac{\partial L}{\partial u^{(r)}} (i\alpha u^{(r)}) + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)})} (i\alpha \partial_\mu u^{(r)}) \\ & + \frac{\partial L}{\partial u^{(r)*}} (-i\alpha u^{(r)*}) + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)*})} (-i\alpha \partial_\mu u^{(r)*}) := 0; \end{aligned}$$

mit (2.101) folgt

$$\begin{aligned}
& i \sum_r : \left( \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)})} \right) u^{(r)} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)})} \partial_\mu u^{(r)} \\
& - \left( \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)*})} \right) u^{(r)*} - \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)*})} \partial_\mu u^{(r)*} := 0 \\
\Rightarrow & i \sum_r \partial_\mu : \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)})} u^{(r)} - \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)*})} u^{(r)*} := 0 . \quad (2.108)
\end{aligned}$$

Bei Einführung der *Viererstromdichte*

$$j_\mu = -\frac{ie}{\hbar} \sum_r : \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)})} u^{(r)} - \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)*})} u^{(r)*} : \quad (2.109)$$

– zur Begründung des Faktors  $-e/\hbar$  siehe unten – bringt (2.108) die **Ladungserhaltung**<sup>5</sup> zum Ausdruck:

$$\partial_\mu j_\mu = 0 , \quad (2.110)$$

vgl. die Kontinuitätsgleichung (1.19). Also: *komplexes Feld = geladenes Feld!* Die Ladung des Feldes ist

$$Q = \int \rho d\vec{x} \quad (2.111)$$

mit

$$\rho = -\frac{i}{c} j_4 = -\frac{ie}{\hbar} \sum_r : \frac{\partial L}{\partial (\partial u^{(r)} / \partial t)} u^{(r)} - \frac{\partial L}{\partial (\partial u^{(r)*} / \partial t)} u^{(r)*} : \quad (2.112)$$

Nachfolgend zwei **Beispiele**:

**Neutrales skalares Bose-Feld**, gekennzeichnet durch (einen) selbstadjungierten Feldoperator  $U$  mit der Feldgleichung

$$(\partial^2 - \kappa^2) U = 0 . \quad (2.113)$$

Herleitung aus der Lorentz-invarianten Lagrange-Dichte

$$L = -\frac{1}{2} : (\partial_\mu U)^2 + \kappa^2 U^2 : \quad (2.114)$$

<sup>5</sup> Die Invarianz von  $L$  impliziert ganz allgemein einen Erhaltungssatz. Hier: Invarianz gegen Phasentransformationen hat den Satz von der Erhaltung der Ladung zur Folge.

Dazu gehört nach (2.60, 61) die Energie- und Impulsdichte

$$H = \frac{1}{2} : (\partial_i U)^2 + (\partial_0 U)^2 + \kappa^2 U^2 : \quad (2.115 \text{ a})$$

bzw.

$$G_i = -\frac{1}{c} : (\partial_0 U) \partial_i U : \quad (2.115 \text{ b})$$

Die zu  $U$  kanonisch konjugierte Variable ist gemäß (2.62) durch

$$\pi = \frac{1}{c} \frac{\partial L}{\partial (\partial_0 U)} = \frac{1}{c} \partial_0 U \quad (2.116)$$

gegeben. Also hat man die kanonischen Vertauschungsrelationen (2.88):

$$\begin{aligned} [U(\vec{x}, t), \partial_0 U(\vec{x}', t)] &= i c \hbar \delta(\vec{x} - \vec{x}') \\ [U(\vec{x}, t), U(\vec{x}', t)] &= [\partial_0 U(\vec{x}, t), \partial_0 U(\vec{x}', t)] = 0. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Feld in großem kubischen Kasten vom Volumen  $V$ , periodische Randbedingungen, *Fourier-Reihe*:

$$U = \sum_{\vec{k}} \left( U^+(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - k_0 x_0)} + U^-(\vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - k_0 x_0)} \right) \quad (2.118)$$

mit

$$k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + \kappa^2}. \quad (2.119)$$

Setzt man <sup>6</sup>

$$U^+(\vec{k}) = \sqrt{\frac{c \hbar}{2 k_0 V}} a(\vec{k}) \quad (2.120)$$

$$U^-(\vec{k}) = \sqrt{\frac{c \hbar}{2 k_0 V}} a^*(\vec{k}),$$

so folgt

$$U = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{c \hbar}{2 k_0}} \left( a(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - k_0 x_0)} + a^*(\vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - k_0 x_0)} \right). \quad (2.121)$$

<sup>6</sup> $U = U^* \Rightarrow (U^+)^* = U^-, (U^-)^* = U^+$



Einsetzen der vorstehenden Reihe in die *erste* der Vertauschungsrelationen (2.117) ergibt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k'_0}{k_0}} \left( [a(\vec{k}), a^*(\vec{k}')] e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \vec{k}' \cdot \vec{x}')} e^{-i(k_0 - k'_0)x_0} \right. \\
& \quad - [a^*(\vec{k}), a(\vec{k}')] e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \vec{k}' \cdot \vec{x}')} e^{i(k_0 - k'_0)x_0} \\
& \quad - [a(\vec{k}), a(\vec{k}')] e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \vec{k}' \cdot \vec{x}')} e^{-i(k_0 + k'_0)x_0} \\
& \quad \left. + [a^*(\vec{k}), a^*(\vec{k}')] e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \vec{k}' \cdot \vec{x}')} e^{i(k_0 + k'_0)x_0} \right) = \delta(\vec{x} - \vec{x}') .
\end{aligned} \tag{2.122}$$

Nur erfüllbar, falls die linke Seite zeitunabhängig ist. Das macht das Verschwinden der Koeffizienten von  $e^{\mp i(k_0 + k'_0)x_0}$  erforderlich:

$$[a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = [a^*(\vec{k}), a^*(\vec{k}')] = 0 . \tag{2.123}$$

Ferner müssen die Koeffizienten von  $e^{\mp i(k_0 - k'_0)x_0}$  verschwinden, sofern nicht  $k_0 = k'_0$  ist; folglich reduziert sich (2.122) auf

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{1}{2} \left( [a(\vec{k}), a^*(\vec{k}')] e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \vec{k}' \cdot \vec{x}')} - [a^*(\vec{k}), a(\vec{k}')] e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \vec{k}' \cdot \vec{x}')} \right) = \delta(\vec{x} - \vec{x}') . \tag{2.124}$$

Multiplikation von (2.124) mit  $e^{-i(\vec{p} \cdot \vec{x} - \vec{p}' \cdot \vec{x}')}$  und zweifache Volumenintegration über  $\vec{x}$  und  $\vec{x}'$  führt zusammen mit der Beziehung

$$\frac{1}{V} \int d\vec{x} e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}} = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \tag{2.125}$$

auf

$$\frac{1}{2} \left( [a(\vec{p}), a^*(\vec{p}')] - [a^*(-\vec{p}), a(-\vec{p}')] \right) = \delta_{\vec{p}, \vec{p}'} \tag{2.126}$$

Eine entsprechende Rechnung auf der Grundlage der *zweiten* der Vertauschungsrelationen (2.117) führt auf

$$\frac{1}{2} \left( [a(\vec{p}), a^*(\vec{p}')] + [a^*(-\vec{p}), a(-\vec{p}')] \right) = 0 . \tag{2.127}$$

Aus (2.126, 127) folgt schließlich

$$[a(\vec{k}), a^*(\vec{k}')] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} . \tag{2.128}$$

Setzt man ferner die Entwicklung (2.121) in (2.115) ein, so erhält man nach Integration über das Volumen  $V$  – wobei wieder von (2.125) Gebrauch zu machen ist – für die *Energie* und den *Impuls* des Feldes die folgenden Ausdrücke:

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2} c \hbar k_0 : a^*(\vec{k}) a(\vec{k}) + a(\vec{k}) a^*(\vec{k}) : \quad (2.129 \text{ a})$$

bzw.

$$\mathcal{G}_i = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2} \hbar k_i : a^*(\vec{k}) a(\vec{k}) + a(\vec{k}) a^*(\vec{k}) : \quad (2.129 \text{ b})$$

Die Bose-Operatoren  $a(\vec{k})$ ,  $a^*(\vec{k})$  können in den vorstehenden Normalprodukten beliebig vertauscht werden. Normalprodukt gleich gewöhnlichem Produkt, falls die  $a^*(\vec{k})$  (negative Frequenzanteile) links, die  $a(\vec{k})$  (positive Frequenzanteile) rechts stehen. Folglich

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{k}} c \hbar k_0 a^*(\vec{k}) a(\vec{k}) \quad (2.130 \text{ a})$$

bzw.

$$\mathcal{G}_i = \sum_{\vec{k}} \hbar k_i a^*(\vec{k}) a(\vec{k}) . \quad (2.130 \text{ b})$$

*Interpretation:* Das betrachtete Feld setzt sich (additiv) aus normalen Bose-Oszillatoren zusammen.  $a^*(\vec{k})$ ,  $a(\vec{k})$  sind der Erzeugungs- bzw. der Vernichtungsoperator für Bosonen mit dem Wellenvektor  $\vec{k}$ . Jedes dieser Bosonen hat die Energie  $c \hbar k_0 = \hbar \omega$  und den Impuls  $\hbar k_i$ . Die Ruhmasse beträgt

$$m = \frac{\hbar}{c} \sqrt{k_0^2 - k_i^2} = \frac{\hbar \kappa}{c} , \quad (2.131)$$

– entsprechend der relativistischen Energie-Impuls-Relation

$$E^2 = c^2 \vec{p}^2 + (m c^2)^2 .$$

Anwendung zum Beispiel auf neutrale  $\pi$ -Mesonen ( $\pi^0$ ) •

**Geladenes skalares Bose-Feld**, gekennzeichnet durch die beiden Feldoperatoren  $U$  und  $U^*$  (nicht notwendig  $U = U^*$ ) mit den Feldgleichungen

$$(\partial^2 - \kappa^2)U = 0 , \quad (\partial^2 - \kappa^2)U^* = 0 . \quad (2.132)$$

Lagrange-Dichte:

$$L = - : (\partial_\mu U^*) \partial_\mu U + \kappa^2 U^* U : \quad (2.133)$$

Energie-, Impuls- und Ladungsdichte:

$$\begin{aligned} H &= : (\partial_0 U^*) \partial_0 U + (\partial_i U^*) \partial_i U + \kappa^2 U^* U : \\ G_i &= -\frac{1}{c} : (\partial_0 U^*) \partial_i U + (\partial_i U^*) \partial_0 U : \\ \rho &= -\frac{ie}{c\hbar} : (\partial_0 U^*) U - U^* \partial_0 U : \end{aligned} \quad (2.134)$$

Kanonisch konjugierte Variablen:

$$\pi = \frac{1}{c} \partial_0 U^* , \quad \pi^* = \frac{1}{c} \partial_0 U , \quad (2.135)$$

Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} [U(\vec{x}, t), \partial_0 U^*(\vec{x}', t)] &= ic\hbar \delta(\vec{x} - \vec{x}') \\ [U(\vec{x}, t), \partial_0 U(\vec{x}', t)] &= 0 \\ [U(\vec{x}, t), U(\vec{x}', t)] &= [\partial_0 U(\vec{x}, t), \partial_0 U(\vec{x}', t)] = 0 \\ [U(\vec{x}, t), U^*(\vec{x}', t)] &= [\partial_0 U(\vec{x}, t), \partial_0 U^*(\vec{x}', t)] = 0 . \end{aligned} \quad (2.136)$$

Fourier-Reihe:

$$U = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{c\hbar}{2k_0}} \left( a(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - k_0 x_0)} + b^*(\vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - k_0 x_0)} \right) . \quad (2.137)$$

Im Unterschied zu (2.121) ist  $b^*(\vec{k})$  nicht zu  $a(\vec{k})$  adjungiert, da  $U$  nicht selbstadjungiert ist.

Einsetzen von (2.137) in (2.136) liefert die *Kommutatoren*

$$[a(\vec{k}), a^*(\vec{k}')] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}, \quad [b(\vec{k}), b^*(\vec{k}')] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} . \quad (2.138)$$

Alle anderen Kommutatoren zwischen irgendzweien der Operatoren  $a(\vec{k})$ ,  $a^*(\vec{k})$ ,  $b(\vec{k})$ ,  $b^*(\vec{k})$  verschwinden.

Energie, Impuls, Ladung:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \sum_{\vec{k}} c\hbar k_0 : a^*(\vec{k}) a(\vec{k}) + b(\vec{k}) b^*(\vec{k}) := \sum_{\vec{k}} c\hbar k_0 \left( a^*(\vec{k}) a(\vec{k}) + b^*(\vec{k}) b(\vec{k}) \right) \\ \mathcal{G}_i &= \sum_{\vec{k}} \hbar k_i : a^*(\vec{k}) a(\vec{k}) + b(\vec{k}) b^*(\vec{k}) := \sum_{\vec{k}} \hbar k_i \left( a^*(\vec{k}) a(\vec{k}) + b^*(\vec{k}) b(\vec{k}) \right) \\ Q &= \sum_{\vec{k}} e : a^*(\vec{k}) a(\vec{k}) - b(\vec{k}) b^*(\vec{k}) := \sum_{\vec{k}} e \left( a^*(\vec{k}) a(\vec{k}) - b^*(\vec{k}) b(\vec{k}) \right) . \quad (2.139)\end{aligned}$$

*Interpretation:* Das Feld besteht auch hier aus normalen Bose-Oszillatoren.  $a^*(\vec{k}), a(\vec{k})$ : Bosonen mit Energie  $c\hbar k_0$ , Impuls  $\hbar k_i$ , Ladung  $e$ ;  $b^*(\vec{k}), b(\vec{k})$ : Bosonen mit denselben Werten für Energie und Impuls, jedoch Ladung  $-e$ .

Anwendung z. B. auf geladene  $\pi$ -Mesonen ( $\pi^\pm$ ): *Klein-Gordon-Feld* •

### Anormale skalare Felder:

- Ändert man das *Vorzeichen* der Lagrange-Dichte (2.114) für das neutrale skalare Bose-Feld, so folgt

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{k}} -c\hbar k_0 a^*(\vec{k}) a(\vec{k}) \quad (2.140)$$

mit

$$[a(\vec{k}), a^*(\vec{k}')] = -\delta_{\vec{k}, \vec{k}'} . \quad (2.141)$$

Das ist ein System von anormalen Bose-Oszillatoren. Ein entsprechendes Resultat erhält man im Falle des geladenen skalaren Feldes.

- Macht man den Feldoperator  $U$  des neutralen skalaren Feldes zu einem *Fermi-Operator*, so verschwindet wegen

$$:(\partial_\mu U) \partial_\mu U := - :(\partial_\mu U) \partial_\mu U := 0, \quad :UU := - :UU := 0$$

die Lagrange-Dichte (2.114). Für das geladene skalare Feld trifft das nicht zu; hierfür erhält man

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{k}} c\hbar k_0 \left( a^*(\vec{k}) a(\vec{k}) - b^*(\vec{k}) b(\vec{k}) \right) \quad (2.142)$$

mit

$$\{a(\vec{k}), a^*(\vec{k}')\} = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}, \quad \{b(\vec{k}), b^*(\vec{k}')\} = -\delta_{\vec{k}, \vec{k}'} . \quad (2.143)$$

Das ist ein System von teils normalen ( $a, a^*$ ), teils anormalen ( $b, b^*$ ) Fermi-Oszillatoren.

### 3 Photonen- und Elektronenfelder

Photonen und Elektronen als Anregungen von Bose- bzw. Fermi-Oszillatoren, die bei der Quantisierung des Maxwell- bzw. des Dirac-Feldes auftreten.

Das **Photonenfeld** ist ein neutrales Vektorfeld; es wird durch den selbstadjungierten <sup>1</sup> Feldoperator  $A_\mu$  des elektromagnetischen Potentials beschrieben. Feldgleichung (1.38):

$$\partial^2 A_\mu = 0, \quad (3.1)$$

herleitbar aus der Lagrange-Dichte

$$L = -\frac{1}{2} : (\partial_\nu A_\mu)^2 : \quad (3.2)$$

$A_\mu$  Bose-Operator; falls Fermi-Operator, würde  $L$  verschwinden. Photonen sind Bosonen! Gl. (3.1) ist von der Gestalt (2.95) mit  $\kappa \sim$  Ruhmasse = 0.

Physikalisch äquivalent zu (3.2) ist die Lagrange-Dichte

$$L' = - : \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\mu)^2 : \quad (3.3)$$

$L'$  unterscheidet sich von  $L$  nur um eine Viererdivergenz:

$$L' - L = \frac{1}{2} : \partial_\mu (A_\nu \partial_\nu A_\mu - A_\mu \partial_\nu A_\nu) : \quad (3.4)$$

$L'$  führt auf dieselbe Feldgleichung (3.1) wie  $L$ , vgl. (1.54). Der Vorteil von  $L'$  gegenüber  $L$  besteht darin, dass  $L'$  gegenüber der eingeschränkten Eichtransformation

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad \partial^2 \Lambda = 0, \quad (3.5)$$

invariant ist,  $L$  dagegen nicht; vgl. (1.47). Im Folgenden gehen wir von  $L'$  aus.

Zur Lorentz-Konvention  $\partial_\mu A_\mu = 0$ , die hier nicht erfüllbar ist, siehe unten.

**Kanonischer Energie-Impuls-Tensor** gemäß (2.58) aus (3.3):

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} &= - : \frac{\partial L'}{\partial (\partial_\nu A_\lambda)} \partial_\mu A_\lambda : + \delta_{\mu\nu} L' \\ &= : (\partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu) \partial_\mu A_\rho + (\partial_\mu A_\nu) \partial_\rho A_\rho \\ &\quad - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} ((\partial_\rho A_\lambda - \partial_\lambda A_\rho)^2 + 2(\partial_\rho A_\rho)^2) : \end{aligned} \quad (3.6)$$

<sup>1</sup> $A_\mu^* = A_\mu$  bedeutet  $A_i^* = A_i$  und  $A_4^* = i A_0^* = i A_0 = A_4$ , d. h.  $A_0^* = A_0$ .

Hieraus folgt nach (2.60, 61) für *Energie-* und *Impulsdichte*:

$$\begin{aligned}
 H = S_{00} &= \frac{1}{2} : (\partial_i A_\lambda) \partial_i A_\lambda + (\partial_0 A_\lambda) \partial_0 A_\lambda + \underbrace{\partial_i (A_i \partial_k A_k - A_k \partial_k A_i)}_{\text{Divergenz}} : \\
 G_i &= \frac{1}{c} S_{i0} = -\frac{1}{c} : (\partial_i A_\rho) \partial_0 A_\rho + \underbrace{\partial_i (A_k \partial_k A_0)}_{\text{Gradient}} - \underbrace{\partial_k (A_k \partial_i A_0)}_{\text{Divergenz (für jedes } i)} :
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Volumenintegration; Umwandlung der Gradienten- und Divergenzterme in verschwindende Oberflächenintegrale. Für *Energie* und *Impuls* des Photonensfeldes erhält man somit die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &= \frac{1}{2} \int d\vec{x} : (\partial_i A_\lambda) \partial_i A_\lambda + (\partial_0 A_\lambda) \partial_0 A_\lambda : \\
 \mathcal{G}_i &= -\frac{1}{c} \int d\vec{x} : (\partial_i A_\lambda) \partial_0 A_\lambda :
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Berechnung des **symmetrischen Energie-Impuls-Tensors** nach dem in Kap. 1 angegebenen Verfahren:

1. Variation des elektromagnetischen Feldes unter infinitesimaler Lorentz-Transformation, vgl. (1.75):

$$\delta A_\lambda = \omega_{\lambda\nu} A_\nu = \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} A_{\lambda, \mu\nu} \tag{3.9}$$

mit

$$A_{\lambda, \mu\nu} = \delta_{\lambda\mu} A_\nu - \delta_{\lambda\nu} A_\mu . \tag{3.10}$$

2. Nach (1.76) folgt mit (3.3, 10):

$$\begin{aligned}
 g_{\rho, \mu\nu} &= : \frac{\partial L'}{\partial (\partial_\rho A_\lambda)} A_{\lambda, \mu\nu} : \\
 &= : A_\mu (\partial_\rho A_\nu - \partial_\nu A_\rho) - A_\nu (\partial_\rho A_\mu - \partial_\mu A_\rho) + (\delta_{\nu\rho} A_\mu - \delta_{\mu\rho} A_\nu) \partial_\lambda A_\lambda : \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

3. Gemäß (1.78) erhält man aus (3.11):

$$\begin{aligned}
 f_{\mu, \nu\rho} &= \frac{1}{2} (g_{\mu, \rho\nu} + g_{\nu, \rho\mu} + g_{\rho, \mu\nu}) \\
 &= : A_\mu (\partial_\rho A_\nu - \partial_\nu A_\rho) + (\delta_{\mu\nu} A_\rho - \delta_{\mu\rho} A_\nu) \partial_\lambda A_\lambda : \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

4. Gl. (1.68) liefert schließlich zusammen mit (3.1, 6, 12):

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= S_{\mu\nu} + \partial_\rho f_{\mu,\nu\rho} \\ &= :(\partial_\mu A_\rho - \partial_\rho A_\mu)(\partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu) - (A_\mu \partial_\nu + A_\nu \partial_\mu) \partial_\rho A_\rho \\ &\quad + \delta_{\mu\nu} \left( A_\rho \partial_\rho \partial_\lambda A_\lambda + \frac{1}{2} (\partial_\lambda A_\lambda)^2 - \frac{1}{4} (\partial_\lambda A_\rho - \partial_\rho A_\lambda)^2 \right) : \end{aligned} \quad (3.13)$$

Denselben Ausdruck – ohne die Doppelpunkte – erhält man auch für das klassische elektromagnetische Feld. Berücksichtigt man dabei den Zusammenhang (1.30) sowie die Lorentz-Konvention (1.33), so erhält man die Darstellung (1.20). Im Falle des Quantenfeldes (3.13) kann man  $\partial_\mu A_\mu = 0$  nicht ohne Weiteres, sondern nur in modifizierter Form anwenden (siehe unten).

*Drehimpuls* des Photonfeldes. Nach (1.82) hat man

$$P_{ij} = \int (x_i G_j - x_j G_i) d\vec{x} - \frac{1}{c} \int g_{0,ij} d\vec{x}. \quad (3.14)$$

Die Impulsdichte  $G_i$  entnimmt man (3.7); Gl. (3.11) liefert

$$g_{0,ij} = - : A_i (\partial_0 A_j + \partial_j A_0) - A_j (\partial_0 A_i + \partial_i A_0) : \quad (3.15)$$

Einsetzen in (3.14) ergibt (mit partieller Integration)

$$\begin{aligned} P_{ij} &= -\frac{1}{c} \int d\vec{x} : x_i (\partial_j A_\rho) \partial_0 A_\rho - x_j (\partial_i A_\rho) \partial_0 A_\rho : \\ &\quad + \frac{1}{c} \int d\vec{x} : A_i \partial_0 A_j - A_j \partial_0 A_i : \end{aligned} \quad (3.16)$$

Der erste Term ist der Bahndrehimpuls, der zweite Term ist der Spin des Photonfeldes; siehe unten.

**Quantisierung** des Photonfeldes. Für die Feldoperatoren werden die kanonischen Vertauschungsrelationen (2.88) für *Bosonen* gefordert:

$$\left[ A_\mu(\vec{x}, t), \pi_\nu(\vec{x}', t) \right] = i \hbar \delta_{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (3.17)$$

$$\left[ A_\mu(\vec{x}, t), A_\nu(\vec{x}', t) \right] = \left[ \pi_\mu(\vec{x}, t), \pi_\nu(\vec{x}', t) \right] = 0$$

mit dem zu  $A_\mu$  konjugierten Vektorfeld

$$\pi_\rho = \frac{1}{c} \frac{\partial L'}{\partial (\partial_0 A_\rho)} = \frac{1}{c} (\partial_0 A_\rho + \partial_\rho A_0 - \delta_{0\rho} \partial_\mu A_\mu). \quad (3.18)$$

Mit Hilfe von (3.18) lassen sich die Vertauschungsrelationen (3.17) wie folgt umformulieren:

$$\begin{aligned} [A_\mu(\vec{x}, t), \partial_0 A_\nu(\vec{x}', t)] &= i c \hbar \delta_{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \\ [A_\mu(\vec{x}, t), A_\nu(\vec{x}', t)] &= [\partial_0 A_\mu(\vec{x}, t), \partial_0 A_\nu(\vec{x}', t)] = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

**Fourier-Zerlegung** des Photonenfeldes wie in Kap 2. Nach Gl. (2.121) hat man

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{c \hbar}{2 k_0}} \left( a_\mu(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - k_0 x_0)} + a_\mu^*(\vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - k_0 x_0)} \right) \quad (3.20)$$

mit – wegen  $\kappa = 0$  –

$$k_0 = |\vec{k}|. \quad (3.21)$$

Einsetzen in (3.19) führt für  $a, a^*$  auf die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [a_\mu(\vec{k}), a_\nu^*(\vec{k}')] &= \delta_{\mu\nu} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \\ [a_\mu(\vec{k}), a_\nu(\vec{k}')] &= [a_\mu^*(\vec{k}), a_\nu^*(\vec{k}')] = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

**Energie** und **Impuls** des Photonenfeldes. Durch Einsetzen der Fourier-Reihe (3.20) in (3.8) erhält man die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{\vec{k}} c \hbar k_0 a_\mu^*(\vec{k}) a_\mu(\vec{k}) \\ \mathcal{G}_i &= \sum_{\vec{k}} \hbar k_i a_\mu^*(\vec{k}) a_\mu(\vec{k}). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Speziell der *Hamilton-Operator* nimmt die Gestalt an:

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{k}} c \hbar k_0 \left( a_1^*(\vec{k}) a_1(\vec{k}) + a_2^*(\vec{k}) a_2(\vec{k}) + a_3^*(\vec{k}) a_3(\vec{k}) - a_0^*(\vec{k}) a_0(\vec{k}) \right) \quad (3.24)$$

mit

$$[a_1(\vec{k}), a_1^*(\vec{k})] = [a_2(\vec{k}), a_2^*(\vec{k})] = [a_3(\vec{k}), a_3^*(\vec{k})] = 1, \quad (3.25 \text{ a})$$



jedoch

$$[a_0(\vec{k}), a_0^*(\vec{k})] = -1. \quad (3.25 \text{ b})$$

Damit ist das Photonenfeld in ein System von *Bose-Oszillatoren* zerlegt. Zu jedem  $\vec{k}$  gibt es vier Bose-Oszillatoren: drei *normale* zu den Indizes 1, 2, 3, und einen *anormalen* zum Index 0.

*Anmerkung:*

$$a_4 = i a_0, \quad a_4^* = i a_0^* \Rightarrow a_4^* a_4 = -a_0^* a_0, \quad [a_4, a_4^*] = -[a_0, a_0^*].$$

Zur Vereinfachung der folgenden Formeln Beschränkung auf *ein*  $\vec{k}$ .  $a_1, a_2, a_3, a_0$  Vernichtungsoperatoren für Photonen der Energie  $c\hbar|\vec{k}|$  und vom Impuls  $\hbar\vec{k}$ ;  $a_1^*, a_2^*, a_3^*, a_0^*$  entsprechende Erzeugungsoperatoren.

**Spezieller Feldzustand** mit  $n_1, n_2, n_3, n_0$  Photonen der Typen 1, 2, 3, 0 (festes  $\vec{k}$ )<sup>2</sup>:

$$\Psi(n_1, n_2, n_3, n_0) = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! n_3! n_0!}} a_1^{*n_1} a_2^{*n_2} a_3^{*n_3} a_0^{*n_0} \Psi(0, 0, 0, 0) \quad (3.26)$$

mit der Orthonormierung

$$\Psi^*(m_1, m_2, m_3, m_0) \Psi(n_1, n_2, n_3, n_0) = (-1)^{n_0} \delta_{m_1 n_1} \delta_{m_2 n_2} \delta_{m_3 n_3} \delta_{m_0 n_0}. \quad (3.27)$$

Das sind Zustände mit indefiniter Metrik, d. h. aus dem Raum  $\tilde{\mathcal{R}}$  – siehe Kap. 2.

**Eichbedingung.** Für jeden physikalischen Feldzustand  $\Psi$  wird gefordert:

$$(\partial_\mu A_\mu)^+ \Psi = 0; \quad (3.28)$$

dabei bedeutet  $^+$  den positiven Frequenzanteil von  $\partial_\mu A_\mu$ . Aus (3.28) folgt

$$\Psi^* (\partial_\mu A_\mu)^- = 0, \quad (3.29)$$

wobei  $^-$  den negativen Frequenzanteil bedeutet. Für den Erwartungswert von  $\partial_\mu A_\mu$  im Zustand  $\Psi$  ergibt sich aus (3.28, 29):

$$\langle \partial_\mu A_\mu \rangle = \Psi^* (\partial_\mu A_\mu)^+ \Psi + \Psi^* (\partial_\mu A_\mu)^- \Psi = 0. \quad (3.30)$$

Das ist das Quantenanalogue der klassischen *Lorentz-Konvention* (1.33).

<sup>2</sup> $\mathcal{H}\Psi = \hbar c k_0 (n_1 + n_2 + n_3 - n_0) \Psi, \quad \mathcal{G}_i \Psi = \hbar k_i (n_1 + n_2 + n_3 - n_0) \Psi$

Wendet man die Bedingung (3.28) auf einen  $\vec{k}$ -Term der Fourier-Reihe (3.20) an, so erhält man in Analogie zur klassischen Bedingung (1.41):

$$(k_i a_i - k_0 a_0) \Psi = 0 . \quad (3.31)$$

Legt man die  $x_3$ -Achse in  $\vec{k}$ -Richtung, so liegt die folgende *Interpretation* nahe:  $a_1, a_2$  entsprechen *transversalen* Photonen,  $a_3$  *longitudinalen* Photonen,  $a_0$  *temporalen* Photonen;  $\Psi(n_1, n_2, n_3, n_0)$  bedeutet:  $n_1, n_2$  transversale,  $n_3$  longitudinale,  $n_0$  temporale Photonen. (3.31) reduziert sich – vgl. (1.44) – auf

$$(a_3 - a_0) \Psi = 0 . \quad (3.32)$$

Welche Einschränkungen für  $\Psi$  hat diese Bedingung zur Folge?

**Allgemeiner Photonenzustand** – für festes  $\vec{k}$  in  $x_3$ -Richtung – durch Überlagerung:

$$\Psi = \sum_{n_1, n_2, n_3, n_0} A_{n_1 n_2 n_3 n_0} \Psi(n_1, n_2, n_3, n_0) . \quad (3.33)$$

Anwendung von (3.32) impliziert Verknüpfung der Entwicklungskoeffizienten:

$$\sqrt{n_3} A_{n_1 n_2 n_3, n_0-1} + \sqrt{n_0} A_{n_1 n_2, n_3-1, n_0} = 0 . \quad (3.34)$$

*Konsequenz:* Koeffizienten von Zuständen mit gleicher Gesamtzahl (Summe) longitudinaler und temporaler Photonen in festem Verhältnis:

$$\begin{aligned} \Phi(n_1, n_2, 0) &= \Psi(n_1, n_2, 0, 0) \\ \Phi(n_1, n_2, 1) &= \Psi(n_1, n_2, 1, 0) - \Psi(n_1, n_2, 0, 1) \\ \Phi(n_1, n_2, 2) &= \Psi(n_1, n_2, 2, 0) - \sqrt{2} \Psi(n_1, n_2, 1, 1) + \Psi(n_1, n_2, 0, 2) \end{aligned} \quad (3.35)$$

usw.; allgemein

$$\Phi(n_1, n_2, m) = \sum_{l=0}^m (-1)^l \sqrt{\frac{m!}{(m-l)!l!}} \Psi(n_1, n_2, m-l, l) \quad (3.36)$$

mit der Normierung:

$$\begin{aligned} m = 0 : \quad & \Phi^*(n_1, n_2, 0) \Phi(n_1, n_2, 0) = 1 \\ m > 0 : \quad & \Phi^*(n_1, n_2, m) \Phi(n_1, n_2, m) \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$= \sum_{l=0}^m (-1)^l \frac{m!}{(m-l)!l!} = (1-1)^m = 0 ,$$

d. h. verschwindende Norm für Zustände mit longitudinalen und/oder temporalen Photonen.

Der allgemeine Photonenzustand (3.33) ist also durch (3.32) wie folgt eingeschränkt:

$$\Psi = \sum_m \Phi_m \quad (3.38)$$

mit

$$\Phi_m = \sum_{n_1, n_2} B_{n_1 n_2 m} \Phi(n_1, n_2, m) . \quad (3.39)$$

Wegen (3.37) – sowie (3.27) – folgt für die *Norm*:

$$\Psi^* \Psi = \Phi_0^* \Phi_0 . \quad (3.40)$$

Ferner gilt für den *Erwartungswert* der Observablen  $\alpha = \mathcal{H}, \mathcal{G}_i, \dots$  :

$$\Psi^* \alpha \Psi = \Phi_0^* \alpha \Phi_0 . \quad (3.41)$$

Also: Zustände  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots$  ohne physikalisch beobachtbaren Beitrag: *ghost states*.

Lässt man die ghost states in der Entwicklung (3.38) weg, so verbleibt man mit

$$\Psi = \Phi_0 = \sum_{n_1, n_2} B_{n_1 n_2} \Phi(n_1, n_2, 0) \quad (3.42)$$

als allgemeinem – mit (3.32) verträglichem – Photonenzustand. Die Eichbedingung (3.28) führt also letztlich zur *Abwesenheit longitudinaler und temporaler Photonen im freien(!) Photonenfeld*. Gilt nicht für Photonenfelder in Wechselwirkung mit anderen Feldern!

Setzt man die Fourier-Reihe (3.20) in den Ausdruck (3.16) für den **Drehimpuls** ein; so erhält man

$$P_{ij} = P_{ij}^o + P_{ij}^s \quad (3.43)$$

mit dem *Bahndrehimpuls* –  $o$  = orbital –

$$P_{ij}^o = \frac{1}{V} \int d\vec{x} \sum_{\vec{k}} \hbar (x_i k_j - x_j k_i) a_\rho^*(\vec{k}) a_\rho(\vec{k}) \quad (3.44)$$

und dem *Spindrehimpuls* –  $s$  = spin –

$$P_{ij}^s = \sum_{\vec{k}} i \hbar \left( a_j^*(\vec{k}) a_i(\vec{k}) - a_i^*(\vec{k}) a_j(\vec{k}) \right) . \quad (3.45)$$

**Spin** des Photonenfeldes. Beschränkung auf ein  $\vec{k}$  in  $x_3$ -Richtung. Ohne longitudinale Photonen folgt aus (3.45) – Argument  $\vec{k}$  weggelassen:

$$\begin{aligned} P_{12}^s &= i \hbar (a_2^* a_1 - a_1^* a_2) \\ P_{23}^s &= P_{31}^s = 0 . \end{aligned} \quad (3.46)$$

Der Spin hat also nur in Bewegungsrichtung ( $\vec{k}$ -Richtung) eine nichtverschwindende Komponente.

Entkopplung transversalen Komponenten  $a_1, a_2$  durch Übergang zu den Größen

$$\begin{aligned} a_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1 - i a_2) \\ a_- &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1 + i a_2) \end{aligned} \quad (3.47)$$

mit

$$[a_+, a_+^*] = [a_-, a_-^*] = 1 ; \quad (3.48)$$

alle anderen Kommutatoren zwischen  $a_+, a_-, a_-^*, a_+^*$  verschwinden. Interpretation dieser Operatoren als Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperatoren *rechts-* bzw. *linkszirkularer* Photonen.

Für den Spin des Photonenfeldes erhält man den Ausdruck (nur 3-Komponente):

$$P_{12}^s = \hbar (a_+^* a_+ - a_-^* a_-) . \quad (3.49)$$

Somit: Photonen mit dem *Spin 1*. Nur die Komponenten +1 und –1 bezüglich der Bewegungsrichtung tragen bei (sind beobachtbar) – nicht die Komponente 0, die nach der quantenmechanischen Drehimpulstheorie auch möglich ist.

Kennzeichnung des **Elektronenfeldes** durch einen vierkomponentigen (einspaltige Matrix) Feldoperator  $\psi$ , welcher die freie **Dirac-Gleichung** als Feldgleichung befriedigt:

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + \kappa) \psi = 0 \quad (3.50)$$

mit – vgl. (2.131) –

$$\kappa = \frac{m c}{\hbar} , \quad (3.51)$$

wo  $m$  die Ruhmasse des Elektrons ist. Die  $\gamma_n$  sind  $4 \times 4$ -Matrizen, die den (Anti)vertauschungsrelationen

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2 \delta_{\mu\nu} \quad (3.52)$$

genügen.

$\psi$  befriedigt auch die Wellengleichung:

$$(\partial^2 - \kappa^2) \psi = 0 ; \quad (3.53)$$

denn aus (3.50) folgt

$$\begin{aligned} & (\gamma_\nu \partial_\nu - \kappa) (\gamma_\mu \partial_\mu + \kappa) \psi = 0 \\ \Rightarrow & (\gamma_\nu \gamma_\mu \partial_\nu \partial_\mu - \kappa^2) \psi = 0 ; \end{aligned}$$

$\mu, \nu$  vertauschen:

$$(\gamma_\mu \gamma_\nu \partial_\nu \partial_\mu - \kappa^2) \psi = 0 ;$$

Addition:

$$\left( \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) \partial_\nu \partial_\mu - \kappa^2 \right) \psi = 0 ;$$

daraus folgt mit (3.52) die Behauptung.

Bezeichnung der  $\gamma_\mu$  als **Dirac-Matrizen**. Selbstdadjungierte Standarddarstellung:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (3.54)$$

Hierzu äquivalent sind alle Darstellungen, die aus (3.54) durch Ähnlichkeitstransformationen hervorgehen:

$$\gamma'_\mu = S \gamma_\mu S^{-1} , \quad (3.55)$$

wobei  $S$  eine beliebige invertierbare  $4 \times 4$ -Matrix ist.

**Clifford-Algebra** mit 16 linear unabhängigen Basiselementen:

$$\begin{aligned}
 & 1 ; \\
 & \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 ; \\
 & \gamma_1 \gamma_2, \gamma_1 \gamma_3, \gamma_1 \gamma_4, \gamma_2 \gamma_3, \gamma_2 \gamma_4, \gamma_3 \gamma_4 ; \\
 & \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4, \gamma_3 \gamma_4 \gamma_1, \gamma_4 \gamma_1 \gamma_2, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 ; \\
 & \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 .
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Beliebige Elemente der Clifford-Algebra – *Cliffordsche Zahlen* – als Linearkombinationen (mit komplexen Koeffizienten) der Basiselemente (3.56) darstellbar. Sowohl die Summe als auch das Produkt zweier Cliffordscher Zahlen ist wieder eine solche. Bei der Multiplikation ist (3.52) zu beachten:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = \begin{cases} -\gamma_\nu \gamma_\mu & , \quad \mu \neq \nu \\ 1 & , \quad \mu = \nu . \end{cases} \tag{3.57}$$

Einzig irreduzible Darstellung der Algebra ist die durch (3.54) gegebene vierdimensionale **Dirac-Pauli-Darstellung**:  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  werden durch die Dirac-Matrizen (3.54) dargestellt; die Darstellungsmatrizen für die anderen Basiselemente erhält man daraus durch Matrixmultiplikation, z. B.

$$\gamma_5 := \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.58}$$

Aus (3.52, 57) ergeben sich **Spurformeln** zur Berechnung der Spur von Produkten von Dirac-Matrizen:

$$Sp(\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \cdots \gamma_{\mu_{n-1}} \gamma_{\mu_n}) .$$

- *n ungerade*: Mit

$$\gamma_5 \gamma_\mu = -\gamma_\mu \gamma_5 , \quad \gamma_5^2 = 1 \tag{3.59}$$

folgt

$$\begin{aligned} Sp(\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n}) &= Sp(\gamma_5^2 \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n}) \\ &= Sp(\gamma_5 \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n} \gamma_5) \\ &= (-1)^n Sp(\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n}), \end{aligned} \quad (3.60)$$

somit

$$Sp(\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n}) = 0. \quad (3.61)$$

• *n gerade*: Dann ist

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \gamma_{\mu_1} (\gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_n}) + \frac{1}{2} (\gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_n}) \gamma_{\mu_1} \\ &= \delta_{\mu_1 \mu_2} (\gamma_{\mu_3} \dots \gamma_{\mu_n}) - \delta_{\mu_1 \mu_3} (\gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_4} \dots \gamma_{\mu_n}) + \dots + \delta_{\mu_1 \mu_n} (\gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_{n-1}}), \end{aligned} \quad (3.62)$$

folglich

$$\begin{aligned} Sp(\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n}) &= \delta_{\mu_1 \mu_2} Sp(\gamma_{\mu_3} \dots \gamma_{\mu_n}) \\ &- \delta_{\mu_1 \mu_3} Sp(\gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_4} \dots \gamma_{\mu_n}) + \dots + \delta_{\mu_1 \mu_n} Sp(\gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_{n-1}}) \end{aligned} \quad (3.63)$$

Weitere Auswertung von  $Sp(\gamma_{\mu_3} \dots \gamma_{\mu_n})$  usw. durch (wiederholte) Anwendung von (3.63). Speziell für  $n = 2, 4$  erhält man

$$Sp(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4 \delta_{\mu\nu} \quad (3.64 \text{ a})$$

bzw.

$$Sp(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\rho) = 4(\delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\rho} - \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\rho} + \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\lambda}). \quad (3.64 \text{ b})$$

Aus dem Vorstehenden – Gln. (3.61, 63) – folgt

$$Sp(\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_{n-1}} \gamma_{\mu_n}) = Sp(\gamma_{\mu_n} \gamma_{\mu_{n-1}} \dots \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_1}). \quad (3.65)$$

**Kovarianz** der Dirac-Gleichung. Im gestrichenen Inertialsystem soll (3.50) unverändert gelten:

$$(\gamma_\mu \partial'_\mu + \kappa) \psi' = 0. \quad (3.66)$$

Achtung: Der Index  $\mu$  ist hier kein Tensorindex; zwar ist  $\partial_\mu$  ein Vektor, aber  $\gamma_\mu$  ist kein Vektor, folglich ist  $\gamma_\mu \partial_\mu$  kein Skalar!

Der *Spinor*  $\psi$  transformiert sich gemäß

$$\psi' = \Lambda \psi , \quad (3.67)$$

wo  $\Lambda$  eine vierdimensionale Matrix ist. Ferner gilt bei Lorentz-Transformationen:

$$\partial'_\mu = a_{\mu\nu} \partial_\nu . \quad (3.68)$$

$a_{\mu\nu}$  ist die in Gl. (1.1, 2) eingeführte orthogonale Transformation der Raum-Zeit. Einsetzen von (3.67, 68) in (3.66) führt genau dann auf (3.50), wenn gilt

$$\Lambda^{-1} \gamma_\mu \Lambda = a_{\mu\nu} \gamma_\nu . \quad (3.69)$$

Nachweis der *Existenz von*  $\Lambda$ :

- Für eine *infinitesimale Drehung* der Raum-Zeit mit

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} , \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \quad (3.70)$$

ist

$$\Lambda = 1 + \frac{1}{8} \omega_{\mu\nu} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) . \quad (3.71)$$

Verifikation durch Einsetzen von (3.70, 71) in (3.69); dabei Beschränkung auf Terme 1. Ordnung in  $\omega_{\mu\nu}$ . Von infinitesimalen Drehungen kann man auf *endliche Drehungen* schließen.

- *Raumspiegelung*: Dafür reduziert sich (3.69) auf

$$\Lambda^{-1} \gamma_i \Lambda = -\gamma_i , \quad \Lambda^{-1} \gamma_4 \Lambda = \gamma_4 \quad (3.72)$$

mit der Lösung – bis auf einen Phasenfaktor –

$$\Lambda = \gamma_4 . \quad (3.73)$$

- *Zeitspiegelung*: Hierbei reduziert sich (3.69) auf

$$\Lambda^{-1} \gamma_i \Lambda = \gamma_i , \quad \Lambda^{-1} \gamma_4 \Lambda = -\gamma_4 \quad (3.74)$$

mit der Lösung – bis auf einen Phasenfaktor –

$$\Lambda = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 . \quad (3.75)$$



Die zu (3.50) *adjungierte Gleichung* ist (wegen  $\gamma_\mu$  selbstadjungiert)

$$\partial_i \psi^* \gamma_i - \partial_4 \psi^* \gamma_4 + \kappa \psi^* = 0 . \quad (3.76)$$

$\psi^*$  ist der zu  $\psi$  adjungierte Spinor – vierkomponentige einzeilige Matrix. Rechtsseitige Multiplikation von (3.76) mit  $\gamma_4$  ergibt mit (3.52):

$$\begin{aligned} -\partial_i (\psi^* \gamma_4) \gamma_i - \partial_4 (\psi^* \gamma_4) \gamma_4 + \kappa (\psi^* \gamma_4) &= 0 \\ \Rightarrow \quad \partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu - \kappa \bar{\psi} &= 0 \end{aligned} \quad (3.77)$$

mit dem zu  $\psi$  *Dirac-adjungierten* Spinor

$$\bar{\psi} = \psi^* \gamma_4 \quad (3.78)$$

– ebenfalls vierkomponentige einzeilige Matrix.

Wie verhält sich  $\bar{\psi}$  gegenüber Lorentz-Transformationen? Auf Grund von (3.67, 78) ist

$$\bar{\psi}' = \psi'^* \gamma_4 = \psi^* \Lambda^* \gamma_4 = \bar{\psi} (\gamma_4 \Lambda^* \gamma_4) . \quad (3.79)$$

Mit (3.71, 73, 75) zeigt man, dass gilt:

$$\gamma_4 \Lambda^* \gamma_4 = \Lambda^{-1} \quad (3.80)$$

für Drehungen und Raumspiegelung; für Zeitspiegelung dagegen gilt:

$$\gamma_4 \Lambda^* \gamma_4 = -\Lambda^{-1} . \quad (3.81)$$

Also hat man

$$\bar{\psi}' = \pm \bar{\psi} \Lambda^{-1} \quad (3.82)$$

für Drehungen/Raumspiegelung bzw. Zeitspiegelung.

Aus Produkten der zueinander Dirac-adjungierten Spinoren  $\bar{\psi}$  und  $\psi$  lassen sich **Tensoren** und **Pseudotensoren** bilden; dabei zunächst Beschränkung auf Drehungen / Raumspiegelung – Zeitspiegelung siehe weiter unten.

*Tensoren:* Transformationsverhalten gemäß Kap. 1 für – beachte auch (3.69) –

- Skalar:

$$:\bar{\psi}' \psi' :=: \bar{\psi} \Lambda^{-1} \Lambda \psi :=: \bar{\psi} \psi : \quad (3.83 \text{ a})$$

- Vektor:

$$:\bar{\psi}' \gamma_\mu \psi' :=: \bar{\psi} \Lambda^{-1} \gamma_\mu \Lambda \psi := a_{\mu\nu} : \bar{\psi} \gamma_\nu \psi : \quad (3.83 \text{ b})$$

- Tensor:

$$:\bar{\psi}' \gamma_\mu \gamma_\nu \psi' :=: \bar{\psi} (\Lambda^{-1} \gamma_\mu \Lambda) (\Lambda^{-1} \gamma_\nu \Lambda) \psi := a_{\mu\lambda} a_{\nu\rho} : \bar{\psi} \gamma_\lambda \gamma_\rho \psi : \quad (3.83 \text{ c})$$

*Pseudotensoren:* Wegen (3.71, 73) gilt

$$\Lambda^{-1} \gamma_5 \Lambda = \pm \gamma_5 , \quad (3.84)$$

wo + für Drehungen und – für Raumspiegelung steht.

- Pseudoskalar:

$$:\bar{\psi}' \gamma_5 \psi' :=: \bar{\psi} \Lambda^{-1} \gamma_5 \Lambda \psi := \pm : \bar{\psi} \gamma_5 \psi : \quad (3.85 \text{ a})$$

- Pseudovektor (axialer Vektor):

$$:\bar{\psi}' \gamma_5 \gamma_\mu \psi' :=: \bar{\psi} (\Lambda^{-1} \gamma_5 \Lambda) (\Lambda^{-1} \gamma_\mu \Lambda) \psi := \pm a_{\mu\nu} : \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\nu \psi : \quad (3.85 \text{ b})$$

Es gibt genau 16 linear unabhängige *bilineare Kovarianten* der Gestalt  $:\bar{\psi} O \psi :$ , wo  $O$  ein Produkt von Dirac-Matrizen ist – entsprechend den 16 linear unabhängigen Basiselementen (3.56) der Clifford-Algebra:

$$\begin{aligned} S &= : \bar{\psi} \psi : \\ V_\mu &= i : \bar{\psi} \gamma_\mu \psi : \\ T_{\mu\nu} &= i : \bar{\psi} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \psi : \\ P_\mu &= i : \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi : \\ P &= i : \bar{\psi} \gamma_5 \psi : \end{aligned} \quad (3.86)$$

Durch den Faktor  $i$  werden die vorstehenden Größen selbstadjungiert.

Das Elektronenfeld ist – wegen seiner Ladung – ein **komplexes Feld** im Sinne von Kap. 2; es wird durch die beiden zueinander Dirac-adjungierten Feldoperatoren (Spinoren)  $\psi$

und  $\bar{\psi}$  beschrieben. Die Feldgleichungen (3.50, 77) ergeben sich gemäß (2.100, 101) aus der Lorentz-invarianten(!) Lagrange-Dichte

$$L = -c\hbar : \frac{1}{2} (\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi) + \kappa \bar{\psi} \psi : , \quad (3.87)$$

nämlich

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_\mu \partial_\mu \psi + \kappa \psi = 0 \quad (3.88)$$

bzw.

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \psi)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu - \kappa \bar{\psi} = 0 . \quad (3.89)$$

Äquivalent zu (3.87) ist die Lagrange-Dichte (Addition einer Viererdivergenz)

$$\begin{aligned} L' &= L - \frac{1}{2} c\hbar \partial_\mu : \bar{\psi} \gamma_\mu \psi : \\ &= -c\hbar : \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi + \kappa \bar{\psi} \psi : \end{aligned} \quad (3.90)$$

– weniger symmetrisch, aber einfacher als  $L$ . Die folgenden Rechnungen mit  $L'$ .

**Kanonischer Energie-Impuls-Tensor** gemäß (2.102):

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} &= - : \frac{\partial L'}{\partial (\partial_\nu \psi)} \partial_\mu \psi + \frac{\partial L'}{\partial (\partial_\nu \bar{\psi})} \partial_\mu \bar{\psi} : + \delta_{\mu\nu} L' \\ &= c\hbar : \bar{\psi} \gamma_\nu \partial_\mu \psi - \delta_{\mu\nu} \bar{\psi} \underbrace{(\gamma_\lambda \partial_\lambda \psi + \kappa \psi)}_{= 0} : \\ &= c\hbar : \bar{\psi} \gamma_\nu \partial_\mu \psi : \quad \text{Tensor!} \end{aligned} \quad (3.91)$$

**Viererstromdichte** gemäß (2.109):

$$\begin{aligned} j_\mu &= -\frac{ie}{\hbar} : \frac{\partial L'}{\partial (\partial_\mu \psi)} \psi - \underbrace{\frac{\partial L'}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \bar{\psi}}_{= 0} : \\ &= iec : \bar{\psi} \gamma_\mu \psi : \quad \text{Vektor!} \end{aligned} \quad (3.92)$$

*Energie-, Impuls-, Ladungsdichte* des Elektronenfeldes – beachte (3.78):

$$\begin{aligned}
 H &= S_{00} = -S_{44} = -c\hbar : \bar{\psi} \gamma_4 \partial_4 \psi : = i c \hbar : \psi^* \partial_0 \psi : \\
 G_i &= \frac{1}{c} S_{i0} = -\frac{i}{c} S_{i4} = -i\hbar : \bar{\psi} \gamma_4 \partial_i \psi : = -i\hbar : \psi^* \partial_i \psi : \\
 \rho &= \frac{1}{c} j_0 = -\frac{i}{c} j_4 = e : \bar{\psi} \gamma_4 \psi : = e : \psi^* \psi :
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

Durch räumliche Integration  $\int d\vec{x} \dots$  gelangt man zur *Energie*, zum *Impuls* bzw. zur *Ladung* des Elektronenfeldes; siehe unten.

**Symmetrischer Energie-Impuls-Tensor** gemäß Kap. 1; vgl. Gln. (3.9) ff:

1. Variation des Elektronenfeldes unter infinitesimaler Lorentz-Transformation:

$$\delta \psi = \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} \psi_{\mu\nu} \tag{3.94}$$

mit – beachte (3.67, 71) –

$$\psi_{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \psi. \tag{3.95}$$

2.

$$\begin{aligned}
 g_{\rho, \mu\nu} &= : \frac{\partial L'}{\partial (\partial_\rho \psi)} \psi_{\mu\nu} + \underbrace{\frac{\partial L'}{\partial (\partial_\rho \bar{\psi})}}_{=0} \bar{\psi}_{\mu\nu} : \\
 &= \frac{1}{4} c \hbar : \bar{\psi} \gamma_\rho (\gamma_\nu \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu) \psi :
 \end{aligned} \tag{3.96}$$

3.

$$\begin{aligned}
 f_{\mu, \nu\rho} &= \frac{1}{2} (g_{\mu, \rho\nu} + g_{\nu, \rho\mu} + g_{\rho, \mu\nu}) \\
 &= \frac{1}{4} c \hbar : \bar{\psi} \left( \frac{1}{2} \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\mu - \frac{1}{2} \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\mu + \delta_{\mu\nu} \gamma_\rho - \delta_{\mu\rho} \gamma_\nu \right) \psi :
 \end{aligned} \tag{3.97}$$

4.

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu} &= S_{\mu\nu} + \partial_\rho f_{\mu, \nu\rho} \\
 &= \frac{1}{4} c \hbar : \bar{\psi} \gamma_\nu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\nu \psi + \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi - \partial_\nu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi :
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

*Drehimpuls* des Elektronenfeldes gemäß (1.82); vgl. Gln. (3.14) ff, benutze (3.93, 96):

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \int (x_i G_j - x_j G_i) d\vec{x} - \frac{1}{c} \int g_{0,ij} d\vec{x} \\ &= \frac{\hbar}{i} \int d\vec{x} : (x_i \psi^* \partial_j \psi - x_j \psi^* \partial_i \psi) : + \frac{\hbar}{2} \int d\vec{x} : \psi^* \sigma_{ij} \psi : \end{aligned} \quad (3.99)$$

mit – beachte (3.54) –

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2i} (\gamma_i \gamma_j - \gamma_j \gamma_i) = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}, \quad ijk = 123 \quad \text{zyklisch}, \quad (3.100)$$

wo  $\sigma_k$  die *Paulischen Spinmatrizen* sind:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.101)$$

Die bisherigen Resultate hängen nicht davon ab, ob  $\psi$  ein Bose- oder ein Fermi-Operator ist.

**Fourier-Zerlegung** des Elektronenfeldes. Feld in großem kubischen Kasten vom Volumen  $V$ ; befriedigt die Wellengleichung (3.53); periodische Randbedingungen  $\Rightarrow$  Fourier-Reihe wie in Kap. 2:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \left( \psi^+(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - k_0 x_0)} + \psi^-(\vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - k_0 x_0)} \right) \quad (3.102)$$

mit

$$k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + \kappa^2}. \quad (3.103)$$

Jeder Summand in (3.102) muss die Dirac-Gleichung (3.50) erfüllen; das führt für den *positiven Frequenzanteil* auf

$$(i k_i \gamma_i - k_0 \gamma_4 + \kappa) \psi^+(\vec{k}) = 0 \quad (3.104)$$

und für den *negativen Frequenzanteil* auf

$$(i k_i \gamma_i - k_0 \gamma_4 - \kappa) \psi^-(\vec{k}) = 0. \quad (3.105)$$

Wir befassen uns zunächst mit  $\psi^+(\vec{k})$ . *Ansatz*:

$$\psi^+(\vec{k}) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}. \quad (3.106)$$

Einsetzen in (3.104) liefert zusammen mit (3.54) vier lineare Gleichungen zur Bestimmung der Komponenten  $\varphi_1, \dots, \varphi_4$ :

$$\begin{aligned} (\kappa - k_0) \varphi_1 + k_3 \varphi_3 + (k_1 - i k_2) \varphi_4 &= 0 \\ (\kappa - k_0) \varphi_2 + (k_1 + i k_2) \varphi_3 - k_3 \varphi_4 &= 0 \\ k_3 \varphi_1 + (k_1 - i k_2) \varphi_2 - (\kappa + k_0) \varphi_3 &= 0 \\ (k_1 + i k_2) \varphi_1 - k_3 \varphi_2 - (\kappa + k_0) \varphi_4 &= 0. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Auflösung der 3. und 4. Gleichung in (3.107) nach  $\varphi_3$  und  $\varphi_4$  ergibt:

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \frac{k_3}{\kappa + k_0} \varphi_1 + \frac{k_1 - i k_2}{\kappa + k_0} \varphi_2 \\ \varphi_4 &= \frac{k_1 + i k_2}{\kappa + k_0} \varphi_1 - \frac{k_3}{\kappa + k_0} \varphi_2. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Einsetzen dieser Ausdrücke in die 1. und 2. Gleichung von (3.107) lässt – wegen (3.103) –  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  völlig unbestimmt.  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  sind daher frei wählbar, und mit Hilfe von (3.108) berechnet man daraus  $\varphi_3$  und  $\varphi_4$ . Also:

$$\psi^+(\vec{k}) = \varphi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k_3}{\kappa + k_0} \\ \frac{k_1 + i k_2}{\kappa + k_0} \end{pmatrix} + \varphi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{k_1 - i k_2}{\kappa + k_0} \\ \frac{-k_3}{\kappa + k_0} \end{pmatrix} \quad (3.109)$$

oder

$$\psi^+(\vec{k}) = a_1(\vec{k}) u_1(\vec{k}) + a_2(\vec{k}) u_2(\vec{k}) \quad (3.110)$$

mit

$$u_1(\vec{k}) = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k_3}{\kappa + k_0} \\ \frac{k_1 + i k_2}{\kappa + k_0} \end{pmatrix}, \quad u_2(\vec{k}) = C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{k_1 - i k_2}{\kappa + k_0} \\ \frac{-k_3}{\kappa + k_0} \end{pmatrix} \quad (3.111)$$

und der Normierungskonstanten

$$C = \sqrt{\frac{\kappa + k_0}{2 k_0}}. \quad (3.112)$$

Entsprechend für  $\psi^-(\vec{k})$ :

$$\psi^-(\vec{k}) = b_1^*(\vec{k}) v_1(\vec{k}) + b_2^*(\vec{k}) v_2(\vec{k}) \quad (3.113)$$

mit

$$v_1(\vec{k}) = C \begin{pmatrix} \frac{k_1 - i k_2}{\kappa + k_0} \\ \frac{-k_3}{\kappa + k_0} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2(\vec{k}) = C \begin{pmatrix} \frac{k_3}{\kappa + k_0} \\ \frac{k_1 + i k_2}{\kappa + k_0} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.114)$$

und derselben Normierungskonstanten (3.112) wie oben.

Die Fourier-Reihe für den Feldoperator  $\psi$  des Elektronenfeldes nimmt damit die folgende Gestalt an:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{r=1,2} \left( a_r(\vec{k}) u_r(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - k_0 x_0)} + b_r^*(\vec{k}) v_r(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - k_0 x_0)} \right). \quad (3.115)$$

Die *Basisspinoren*  $u_r(\vec{k})$ ,  $v_s(\vec{k})$  genügen den *Orthogonalitätsrelationen*

$$\begin{aligned} u_r^*(\vec{k}) u_s(\vec{k}) &= v_r^*(\vec{k}) v_s(\vec{k}) = \delta_{rs}, \\ u_r^*(\vec{k}) v_s(-\vec{k}) &= v_r^*(-\vec{k}) u_s(\vec{k}) = 0. \end{aligned} \quad (3.116)$$

$u_r(\vec{k})$  und  $v_s(-\vec{k})$  sind Eigenvektoren des selbstadjungierten(!) freien *Dirac-Hamiltonians*

$$h_D = c\hbar\gamma_4(i k_j \gamma_j + \kappa) \quad (3.117)$$

zu den Eigenwerten  $+c\hbar k_0 = +\hbar\omega$  bzw.  $-c\hbar k_0 = -\hbar\omega$ . Aus (3.104, 105) folgt nämlich mit (3.110, 113):

$$h_D u_r(\vec{k}) = +\hbar\omega u_r(\vec{k}) \quad (3.118)$$

$$h_D v_s(-\vec{k}) = -\hbar\omega v_s(-\vec{k}).$$

Bezeichnung der Gln. (3.118, 117) als freie *stationäre Dirac-Gleichung* in der  $\vec{k}$ -Darstellung. Interpretation der Zustände *positiver* Energie als *Elektronen-Zustände*, der Zustände *negativer* Energie als *Löcher-Zustände*; letztere entsprechen *Positronen-Zuständen positiver* Energie.  $u_r(\vec{k})$  beschreibt darüber hinaus ein Elektron, das sich mit dem Impuls  $+\hbar\vec{k}$  bewegt;  $v_s(-\vec{k})$  beschreibt ein Loch mit dem Impuls  $-\hbar\vec{k}$ , entsprechend einem Positron vom Impuls  $+\hbar\vec{k}$ .

**Quantisierung des Elektronenfeldes.** Das zu  $\psi$  kanonisch-konjugierte Feld ist wegen (2.62, 3.90, 78) durch

$$\pi = -\frac{i}{c} \frac{\partial L'}{\partial (\partial_4 \psi)} = i\hbar\bar{\psi}\gamma_4 = i\hbar\psi^* \quad (3.119)$$

gegeben; das zu  $\bar{\psi}$  kanonisch-konjugierte Feld verschwindet; man verbleibt also mit den kanonischen Variablen  $\psi$  und  $\pi$ . Diese werden als Fermi-Operatoren angesehen, d. h. für  $\psi$  und  $\pi$  werden die kanonischen Antikommutatoren (2.88) für *Fermionen* gefordert:

$$\left\{ \psi_\alpha(\vec{x}, t), \psi_\beta^*(\vec{x}', t) \right\} = \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (3.120)$$

$$\left\{ \psi_\alpha(\vec{x}, t), \psi_\beta(\vec{x}', t) \right\} = \left\{ \psi_\alpha^*(\vec{x}, t), \psi_\beta^*(\vec{x}', t) \right\} = 0.$$

$\psi_1, \dots, \psi_4$ , und  $\psi_1^*, \dots, \psi_4^*$  sind die *vier* Komponenten von  $\psi$  bzw. von  $\psi^*$ .

Mit Hilfe der Fourier-Entwicklung (3.115) gewinnt man aus (3.120) – analog zum Falle des Photonenfeldes – (*Anti*)*vertauschungsrelationen* für die Fourier-Komponenten  $a_r(\vec{k})$ ,



$a_r^*(\vec{k})$ ,  $b_s(\vec{k})$ ,  $b_s^*(\vec{k})$ . Nach (3.115) hat man

$$\begin{aligned}\psi_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{r=1,2} \left( a_r(\vec{k}) u_{r,\alpha}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-k_0 x_0)} + b_r^*(\vec{k}) v_{r,\alpha}(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-k_0 x_0)} \right) \\ \psi_\beta^* &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{s=1,2} \left( a_s^*(\vec{k}) u_{s,\beta}^*(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-k_0 x_0)} + b_s(\vec{k}) v_{s,\beta}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-k_0 x_0)} \right).\end{aligned}\quad (3.121)$$

Einsetzen in die *erste* Relation (3.120) führt zunächst auf

$$\{a_r(\vec{k}), b_s(\vec{k}')\} = \{b_r^*(\vec{k}), a_s^*(\vec{k}')\} = 0, \quad (3.122)$$

ferner – mit (2.125) – auf

$$\begin{aligned}\sum_{r,s} \left( \{a_r(\vec{k}), a_s^*(\vec{k}')\} u_{r,\alpha}(\vec{k}) u_{s,\beta}^*(\vec{k}') + \{b_r^*(\vec{k}), b_s(\vec{k}')\} v_{r,\alpha}(\vec{k}) v_{s,\beta}(\vec{k}') \right) \\ = \delta_{\alpha\beta} \delta_{\vec{k},\vec{k}'}.\end{aligned}\quad (3.123)$$

Multiplikation dieser Gleichung mit  $u_{m,\alpha}^*(\vec{k}) u_{n,\beta}^*(\vec{k}')$  und Ausnutzung der Orthogonalitätsrelationen (3.116) ergibt

$$\{a_m(\vec{k}), a_n^*(\vec{k}')\} = \delta_{mn} \delta_{\vec{k},\vec{k}'}. \quad (3.124)$$

In gleicher Weise erhält man aus (3.122):

$$\{b_m^*(\vec{k}), b_n(\vec{k}')\} = \delta_{mn} \delta_{\vec{k},\vec{k}'}. \quad (3.125)$$

Die *zweite* und die *dritte* Beziehung (3.119) führen auf

$$\{a_m(\vec{k}), a_n(\vec{k}')\} = \{b_m^*(\vec{k}), b_n^*(\vec{k}')\} = \{a_m(\vec{k}), b_n^*(\vec{k}')\} = 0 \quad (3.126)$$

bzw.

$$\{a_m^*(\vec{k}), a_n^*(\vec{k}')\} = \{b_m(\vec{k}), b_n(\vec{k}')\} = \{a_m^*(\vec{k}), b_n(\vec{k}')\} = 0. \quad (3.127)$$

**Energie, Impuls und Ladung** des Elektronenfeldes. Einsetzen der Fourier-Reihen (3.120) in (3.93), Volumenintegration, Ausnutzen der Orthogonalitätsbeziehung (2.125)

liefert die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \sum_{\vec{k}} \sum_{r=1,2} c \hbar k_0 : \left( a_r^*(\vec{k}) a_r(\vec{k}) - b_r(\vec{k}) b_r^*(\vec{k}) \right) : \\
&= \sum_{\vec{k}} \sum_{r=1,2} c \hbar k_0 \left( a_r^*(\vec{k}) a_r(\vec{k}) + b_r^*(\vec{k}) b_r(\vec{k}) \right) \\
\mathcal{G}_i &= \sum_{\vec{k}} \sum_{r=1,2} \hbar k_i : \left( a_r^*(\vec{k}) a_r(\vec{k}) - b_r(\vec{k}) b_r^*(\vec{k}) \right) : \\
&= \sum_{\vec{k}} \sum_{r=1,2} \hbar k_i \left( a_r^*(\vec{k}) a_r(\vec{k}) + b_r^*(\vec{k}) b_r(\vec{k}) \right) \\
Q &= \sum_{\vec{k}} \sum_{r=1,2} e : \left( a_r^*(\vec{k}) a_r(\vec{k}) + b_r(\vec{k}) b_r^*(\vec{k}) \right) : \\
&= \sum_{\vec{k}} \sum_{r=1,2} e \left( a_r^*(\vec{k}) a_r(\vec{k}) - b_r^*(\vec{k}) b_r(\vec{k}) \right) . \tag{3.128}
\end{aligned}$$

*Interpretation:* Elektronenfeld als System entkoppelter *Fermi-Oszillatoren*. Zu jedem  $\vec{k}$  gibt es vier normale Fermi-Oszillatoren.  $a_r(\vec{k})$ ,  $a_r^*(\vec{k})$  sind die Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperatoren für Teilchen der Energie  $c \hbar k_0$ , mit dem Impuls  $\hbar k_i$  und der Ladung  $e$ : *Elektronen*.  $b_r(\vec{k})$ ,  $b_r^*(\vec{k})$  sind die Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperatoren für Teilchen der Energie  $c \hbar k_0$ , mit dem Impuls  $\hbar k_i$  und der Ladung  $-e$ : *Positronen*.

*Achtung:* In dieser Vorlesung ist  $e = -$  Elementarladung  $< 0$ !

**Drehimpuls** des Elektronenfeldes. Einsetzen der Fourier-Reihen (3.121) in (3.99) führt auf – vgl. (3.43, 44, 45) –

$$P_{ij} = P_{ij}^0 + P_{ij}^s \tag{3.129}$$

mit dem *Bahndrehimpuls*

$$P_{ij}^0 = \frac{1}{V} \int d\vec{x} \sum_{\vec{k}} \sum_r \hbar (x_i k_j - x_j k_i) \left( a_r^*(\vec{k}) a_r(\vec{k}) + b_r^*(\vec{k}) b_r(\vec{k}) \right) \tag{3.130}$$

und dem *Spindrehimpuls*

$$P_{ij}^s = \sum_{\vec{k}} \sum_{r,s} \frac{\hbar}{2} \left( a_r^*(\vec{k}) a_s(\vec{k}) u_r^*(\vec{k}) \sigma_{ij} u_s(\vec{k}) - b_r^*(\vec{k}) b_s(\vec{k}) v_s^*(\vec{k}) \sigma_{ij} v_r(\vec{k}) \right) . \tag{3.131}$$

*Interpretation:* Betrachte einfachheitshalber den *Spin im Ruhesystem* der Teilchen, d. h. für  $\vec{k} = \vec{0}$ :

$$P_{12}^s(0) = \sum_{r,s} \frac{\hbar}{2} \left( a_r^*(0) a_s(0) u_r^*(0) \sigma_{12} u_s(0) - b_r^*(0) b_s(0) v_s^*(0) \sigma_{12} v_r(0) \right) \tag{3.132}$$

mit – siehe (3.111, 114) sowie  $C = 1$  wegen  $k_0 = \kappa$  –

$$u_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.133)$$

$$v_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das sind nach (3.100, 101) simultane Eigenspinoren von  $h_D$  und  $\sigma_{12}$  – beachte  $[\sigma_{12}, h_D] = 0$  – zu den Eigenwerten  $\pm c \hbar \kappa = \pm m c^2$  bzw.  $\pm 1$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{12} u_1(0) &= +u_1(0), & \sigma_{12} u_2(0) &= -u_2(0) \\ \sigma_{12} v_1(0) &= -v_1(0), & \sigma_{12} v_2(0) &= +v_2(0). \end{aligned} \quad (3.134)$$

$u_1(0)$  und  $u_2(0)$  sind demnach Zustände für *Elektronen* in *spin up*- bzw. *spin down*-Stellung bezüglich der  $x_3$ -Richtung mit der Energie  $+m c^2$ .  $v_1(0)$  und  $v_2(0)$  bedeuten *spin down*- bzw. *spin up*-Stellung für *Löcher* der Energie  $-m c^2$ , entsprechend *spin up*- bzw. *spin down*-Stellung für *Positronen* der Energie  $+m c^2$ . Bei beliebigem  $\vec{k} \neq 0$  gelten analoge Resultate bezüglich der durch  $\vec{k}$  definierten Bewegungsrichtung.

Mit (3.134) und (3.116) folgt

$$P_{12}^s(0) = \frac{\hbar}{2} (a_1^*(0) a_1(0) - a_2^*(0) a_2(0) + b_1^*(0) b_1(0) - b_2^*(0) b_2(0)), \quad (3.135)$$

d. h. sowohl Elektronen als auch Positronen tragen mit den Spinkomponenten  $\pm \hbar / 2$  bezüglich der  $x_3$ -Richtung pro Teilchen zum Gesamtspin des Feldes bei.

**Photonenfeld in Wechselwirkung mit geladenem Feld.** Ersteres wird durch die Lagrange-Dichte (3.3) beschrieben:

$$L_P = - : \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\mu)^2 : , \quad (3.136)$$

letzteres durch eine Lagrange-Dichte von der Gestalt (2.100):

$$L_C = L_C : \left( u^{(r)}, u^{(r)*}, \partial_\mu u^{(r)}, \partial_\mu u^{(r)*} \right) : , \quad (3.137)$$

$r = 1, 2, \dots, n$ . Für das *Gesamtsystem* setzt man an:

$$L = L_P + L'_C, \quad (3.138)$$

wobei

$$L'_C = L_C : \left( u^{(r)}, u^{(r)*}, D_\mu u^{(r)}, D_\mu^* u^{(r)*} \right) : \quad (3.139)$$

mit

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{ie}{c\hbar} A_\mu, \quad D_\mu^* = \partial_\mu + \frac{ie}{c\hbar} A_\mu \quad (3.140)$$

angesetzt wird.

*Begründung:* Aus (3.138) folgt für das Photonenfeld – statt (3.1) – die Feldgleichung

$$\partial^2 A_\mu + \frac{\partial L'_C}{\partial A_\mu} = 0 \quad (3.141)$$

mit

$$\frac{\partial L'_C}{\partial A_\mu} = \sum_r : \frac{\partial L_C}{\partial (\partial_\mu u^{(r)})} \left( -\frac{ie}{c\hbar} u^{(r)} \right) + \frac{\partial L_C}{\partial (\partial_\mu u^{(r)*})} \left( \frac{ie}{c\hbar} u^{(r)*} \right) := \frac{1}{c} j_\mu \quad (3.142)$$

gemäß (2.109); also hat man

$$\partial^2 A_\mu = -\frac{1}{c} j_\mu, \quad (3.143)$$

was der klassischen Feldgleichung des elektromagnetischen Feldes in Wechselwirkung mit Ladungen und Strömen entspricht.

*Eichinvarianz* der Lagrange-Dichte (3.138) unter der Transformation

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad u^{(r)} \rightarrow u^{(r)} e^{\frac{ie}{c\hbar} \Lambda}, \quad u^{(r)*} \rightarrow u^{(r)*} e^{-\frac{ie}{c\hbar} \Lambda} \quad (3.144)$$

mit

$$\partial^2 \Lambda = 0. \quad (3.145)$$

Das ist eine Kombination der Invarianztransformationen (3.5) und (2.106).

Falls es sich bei dem geladenen Feld um das **Elektronenfeld** handelt, ist  $L_C$  durch (3.90) gegeben. Die Lagrange-Dichte des aus Photonen- und Elektronenfeld gebildeten Gesamtsystems ist dann

$$\begin{aligned} L &= L_P + L'_E \\ &= - : \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\mu)^2 : - c\hbar : \bar{\psi} \gamma_\mu D_\mu \psi + \kappa \bar{\psi} \psi : \\ &= L_P + L_E + ie : A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi : \end{aligned} \quad (3.146)$$

Hieraus ergeben sich die **gekoppelten Feldgleichungen**:

$$\partial^2 A_\mu = -ie : \bar{\psi} \gamma_\mu \psi : \quad (3.147)$$

und

$$\gamma_\mu D_\mu \psi + \kappa \psi = 0, \quad D_\mu^* \bar{\psi} \gamma_\mu - \kappa \bar{\psi} = 0. \quad (3.148)$$

Gl. (3.147) geht aus der *freien* Photonengleichung (3.1) dadurch hervor, dass im Sinne von (3.143) die Viererstromdichte

$$j_\mu = iec : \bar{\psi} \gamma_\mu \psi : \quad (3.149)$$

des Elektronenfeldes – siehe (3.92) – berücksichtigt wird.

Gl. (3.148) geht aus den *freien* Elektronengleichungen (3.88, 89) dadurch hervor, dass das elektromagnetische Viererpotenzial durch die Ersetzungen

$$\partial_\mu \psi \rightarrow D_\mu \psi, \quad \partial_\mu \bar{\psi} \rightarrow D_\mu^* \bar{\psi} \quad (3.150)$$

gemäß (3.140) berücksichtigt wird.

**Kanonischer Energie-Impuls-Tensor.** Mit (3.6, 91) folgt nach (3.146) mit (3.148):

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} &= - : \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu A_\lambda)} \partial_\mu A_\lambda : - : \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu \psi)} \partial_\mu \psi + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu \bar{\psi})} \partial_\mu \bar{\psi} : + \delta_{\mu\nu} L \\ &= - : \frac{\partial L_P}{\partial (\partial_\nu A_\lambda)} \partial_\mu A_\lambda : + \delta_{\mu\nu} L_P \\ &\quad - : \frac{\partial L'_E}{\partial (\partial_\nu \psi)} \partial_\mu \psi + \frac{\partial L'_E}{\partial (\partial_\nu \bar{\psi})} \partial_\mu \bar{\psi} : + \delta_{\mu\nu} L'_E \\ &= (S_{\mu\nu})_P + c\hbar : \bar{\psi} \gamma_\nu \partial_\mu \psi - \delta_{\mu\nu} \bar{\psi} \underbrace{(\gamma_\lambda D_\lambda \psi + \kappa \psi)}_{=0} : \\ &= (S_{\mu\nu})_P + (S_{\mu\nu})_E \\ &= : (\partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu) \partial_\mu A_\rho + (\partial_\mu A_\nu) \partial_\rho A_\rho \\ &\quad - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \left( (\partial_\rho A_\lambda - \partial_\lambda A_\rho)^2 + 2 (\partial_\rho A_\rho)^2 \right) : + c\hbar : \bar{\psi} \gamma_\nu \partial_\mu \psi : \quad (3.151) \end{aligned}$$

Wo bleibt die Wechselwirkung zwischen Photonen- und Elektronenfeld?

*Energiedichte.* Mit (3.7, 93) erhält man

$$\begin{aligned} H = -S_{44} &= \frac{1}{2} : (\partial_i A_\lambda) \partial_i A_\lambda - (\partial_4 A_\lambda) \partial_4 A_\lambda + (\partial_i A_i) \partial_k A_k - (\partial_i A_k) \partial_k A_i : \\ &\quad - c\hbar : \bar{\psi} \gamma_4 \partial_4 \psi : \\ &= H'_P + H'_E. \quad (3.152) \end{aligned}$$

Auch hier fehlt ein Kopplungsterm für die Wechselwirkung. *Achtung:*  $A_\mu$  und  $\psi, \bar{\psi}$  sind über die Feldgleichungen gekoppelt!

Die Wechselwirkung wird erst in *kanonischen Variablen* ersichtlich. Elimination der „zeitlichen Ableitungen“  $\partial_4 A_\mu$  und  $\partial_4 \psi$  zu Gunsten der Kanonisch-Konjugierten

$$\pi_\mu = \frac{i}{c} (\partial_4 A_\mu - \partial_\mu A_4 + \delta_{4\mu} \partial_\rho A_\rho) \quad (3.153)$$

des Photonenfeldes gemäß (3.18) und

$$\tilde{\pi}_\nu = i \hbar \psi_\nu^* \quad (3.154)$$

des Elektronenfeldes gemäß (3.118) sowie deren „räumlichen Ableitungen“. Das Resultat ist

$$H = H_P + H_E + H_I \quad (3.155)$$

mit

$$H_P = \frac{1}{2} : c^2 \pi_\mu^2 + 2 i c (\pi_i \partial_i A_4 - \pi_4 \partial_i A_i) + \partial_i A_k (\partial_i A_k - \partial_k A_i) : \quad (3.156)$$

$$H_E = -i c : \tilde{\pi} \gamma_4 (\gamma_i \partial_i \psi + \kappa \psi) :$$

und der *Wechselwirkung* (Dichte)

$$H_I = -\frac{e}{\hbar} : A_\mu (\tilde{\pi} \gamma_4 \gamma_\mu \psi) := -i e : A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi : \quad (3.157)$$

**Eichbedingung** für das Photonenfeld im Falle der Wechselwirkung. Wie in (3.28) fordert man

$$\Omega^+ \Psi = 0 \quad (3.158)$$

mit

$$\Omega = \partial_\mu A_\mu . \quad (3.159)$$

Wegen – beachte (3.143) und (2.110) –

$$\partial^2 \Omega = \partial_\mu (\partial^2 A_\mu) = -\frac{1}{c} \partial_\mu j_\mu = 0 \quad (3.160)$$

ist  $\Omega$  nach Kap. 1 – auch bei vorhandener Wechselwirkung – kovariant in einen positiven und in einen negativen Frequenzanteil zerlegbar, woraus die *Kovarianz* der Bedingung (3.158) folgt.

*Aber:* Aus der Eichbedingung (3.158) folgt bei vorhandener Wechselwirkung *nicht* die Abwesenheit longitudinaler und temporaler Photonen gemäß (3.42); denn da  $A_\mu$  statt der homogenen Gleichung (3.1) die inhomogene Gleichung (3.143) befriedigt, ist die Fourier-Zerlegung (3.20) nicht möglich.

**Ladungskonjugation.** Die elektronischen Feldgleichungen (3.148):

$$\begin{aligned}\gamma_\mu \left( \partial_\mu - \frac{ie}{c\hbar} A_\mu \right) \psi + \kappa \psi &= 0 \\ \left( \partial_\mu + \frac{ie}{c\hbar} A_\mu \right) \bar{\psi} \gamma_\mu - \kappa \bar{\psi} &= 0 ,\end{aligned}\tag{3.161}$$

sind invariant unter der Transformation

$$A_\mu \rightarrow -A_\mu , \quad \psi \rightarrow \psi_C .\tag{3.162}$$

$\psi_C$  ist der zu  $\psi$  ladungskonjugierte Feldoperator. Es wird also behauptet, dass gilt:

$$\begin{aligned}\gamma_\mu \left( \partial_\mu + \frac{ie}{c\hbar} A_\mu \right) \psi_C + \kappa \psi_C &= 0 \\ \left( \partial_\mu - \frac{ie}{c\hbar} A_\mu \right) \bar{\psi}_C \gamma_\mu - \kappa \bar{\psi}_C &= 0 .\end{aligned}\tag{3.163}$$

Durch welche Operation geht  $\psi_C$  aus  $\psi$  hervor?

Transposition der *zweiten* Gleichung (3.161):

$$\gamma_\mu^T \left( \partial_\mu + \frac{ie}{c\hbar} A_\mu \right) \bar{\psi}^T - \kappa \bar{\psi}^T = 0 .\tag{3.164}$$

Multiplikation mit der konstanten Matrix  $C$  mit der Inversen  $C^{-1}$ :

$$(C \gamma_\mu^T C^{-1}) \left( \partial_\mu + \frac{ie}{c\hbar} A_\mu \right) (C \bar{\psi}^T) - \kappa (C \bar{\psi}^T) = 0 .\tag{3.165}$$

Diese Gleichung stimmt mit der *ersten* Gleichung (3.163) überein, falls gilt:

$$\gamma_\mu = -C \gamma_\mu^T C^{-1} ,\tag{3.166}$$

$$\psi_C = C \bar{\psi}^T .\tag{3.167}$$

Wegen (3.54), woraus

$$\gamma_1^T = -\gamma_1, \quad \gamma_2^T = \gamma_2, \quad \gamma_3^T = -\gamma_3, \quad \gamma_4^T = \gamma_4 \quad (3.168)$$

folgt, ist (3.166) erfüllt – bis auf einen Phasenfaktor – für

$$C = \gamma_2 \gamma_4. \quad (3.169)$$

Entsprechend führt die Transposition der *ersten* Gleichung (3.161) zusammen mit (3.166) und

$$\bar{\psi}_C = -\psi^T C^{-1} \quad (3.170)$$

auf die *zweite* Gleichung (3.163). Konsistenz von (3.167) und (3.170); mit (3.78, 168, 169) folgt nämlich

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_C &= \psi_C^* \gamma_4 = (C \bar{\psi}^T)^* \gamma_4 = (C (\psi^* \gamma_4)^T)^* \gamma_4 \\ &= \psi^T \gamma_4 C^* \gamma_4 = -\psi^T C^* = -\psi^T C^{-1}. \end{aligned} \quad (3.171)$$

Sei  $O$  eine  $4 \times 4$ -Matrix mit

$$C^{-1} O C = \varepsilon O^T \quad (3.172)$$

und  $\varepsilon = \text{konstant}$ ; dann gilt

$$\begin{aligned} : \bar{\psi}_C O \psi_C : &= - : \psi^T C^{-1} O C \bar{\psi}^T : \\ &= -\varepsilon : \psi^T O^T \bar{\psi}^T : \\ &= \varepsilon : \bar{\psi} O \psi : , \end{aligned} \quad (3.173)$$

da  $\psi, \bar{\psi}$  Fermi-Operatoren. Aufgrund von (3.166) hat man aber

$$C^{-1} C = 1$$

$$C^{-1} \gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T$$

$$C^{-1} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) C = \gamma_\mu^T \gamma_\nu^T - \gamma_\nu^T \gamma_\mu^T = -(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)^T \quad (3.174)$$

$$C^{-1} \gamma_5 C = \gamma_5^T$$

$$C^{-1} \gamma_5 \gamma_\mu C = -\gamma_5^T \gamma_\mu^T = (\gamma_5 \gamma_\mu)^T.$$



Für die Operatoren  $O = 1, \gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu, \gamma_5, \gamma_5 \gamma_\mu$  gilt also die Invarianz (3.173) mit

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{für } O = 1, \gamma_5, \gamma_5 \gamma_\mu \\ -1 & \text{für } O = \gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu . \end{cases} \quad (3.175)$$

Auch die photonische Feldgleichung (3.147) ist invariant unter Ladungskonjugation. Nimmt man nämlich in (3.147) die Ersetzung (3.162) vor, so erhält man

$$\partial^2 A_\mu = i e : \bar{\psi}_C \gamma_\mu \psi_C : , \quad (3.176)$$

was wegen (3.172) ff für  $O = \gamma_\mu$  zu (3.147) äquivalent ist.

Bei der Ladungskonjugation wird also effektiv  $e$  durch  $-e$  ersetzt (und  $\psi$  durch  $\psi_C$ ). Es sei erwähnt, dass auch die Lagrange-Dichte (3.146) gegenüber dieser Transformation invariant ist.

**Zeitspiegelung, Bewegungsumkehr.** Die gekoppelten Feldgleichungen (3.147, 148) sind auch invariant unter der Transformation

$$\begin{aligned} \partial'_i &= \partial_i \quad , \quad \partial'_4 = -\partial_4 \\ A'_i &= A_i \quad , \quad A'_4 = -A_4 . \end{aligned} \quad (3.177)$$

Die elektronischen Feldoperatoren  $\psi, \bar{\psi}$  transformieren sich dabei wie im wechselwirkungsfreien Fall (3.67, 82):

$$\psi' = \Lambda \psi \quad , \quad \bar{\psi}' = -\bar{\psi} \Lambda^{-1} \quad (3.178)$$

mit – siehe (3.75) –

$$\Lambda = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 . \quad (3.179)$$

Das negative Vorzeichen in (3.178) erzwingt – Ausdruck der Bewegungsumkehr – noch die *Zusatzregel*: Umkehr der Reihenfolge von Feldoperatoren in Produkten dieser Operatoren. Also:

$$\begin{aligned} : \bar{\psi}' \psi' : &\rightarrow : \psi' \bar{\psi}' : = - : \bar{\psi}' \psi' : = : \bar{\psi} \Lambda^{-1} \Lambda \psi : = : \bar{\psi} \psi : \\ : \bar{\psi}' \gamma_i \psi' : &\rightarrow - : \bar{\psi}' \gamma_i \psi' : = : \bar{\psi} \Lambda^{-1} \gamma_i \Lambda \psi : = : \bar{\psi} \gamma_i \psi : \\ : \bar{\psi}' \gamma_4 \psi' : &\rightarrow - : \bar{\psi}' \gamma_4 \psi' : = : \bar{\psi} \Lambda^{-1} \gamma_4 \Lambda \psi : = - : \bar{\psi} \gamma_4 \psi : ; \end{aligned} \quad (3.180)$$

zu beachten ist hierbei, dass  $\psi, \bar{\psi}$  Fermi-Operatoren sind, sowie (3.74).

Auch unter der vorstehend beschriebenen Transformation ist die Lagrange-Dichte (3.146) des Photon-Elektronen-Gesamtsystems invariant.

## 4 Der Streuoperator

Entwicklung einer *kovarianten Störungstheorie* für die Wechselwirkung des Maxwell-Feldes (Photonenfeld) und des Dirac-Feldes (Elektronen-Positronenfeld).

**Wechselwirkungsbild:**

- Die Feldoperatoren  $A_\mu$  bzw.  $\psi, \bar{\psi}$  entwickeln sich zeitlich wie *freie* Feldoperatoren: siehe Gln. (2.92, 93) oder (2.94). Für das  $A_\mu$ -Feld ist die Energiedichte  $H_P$ , für das  $\psi, \bar{\psi}$ -Feld die Energiedichte  $H_E$  – beide aus (3.156) – zuständig.
- Die zeitliche Entwicklung des Zustandsvektors  $\Psi(t)$  erfolgt gemäß (2.91) nach der Gleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(t) = \mathcal{H}(t) \Psi(t) , \quad (4.1)$$

wobei in  $\mathcal{H}(t)$  nur die *Wechselwirkung* zwischen den beiden Feldern eingeht:

$$\mathcal{H}(t) = \int H_I(x) d\vec{x} . \quad (4.2)$$

Für die Energiedichte der Wechselwirkung gilt nach (3.157):

$$H_I = -ie : A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi := H . \quad (4.3)$$

Das entspricht wegen (3.92) dem klassischen Ausdruck

$$H = -\frac{1}{c} A_\mu j_\mu . \quad (4.4)$$

Wir sind vor allem interessiert an **Streuprozessen** mit Photonen, Elektronen und Positronen. Nur solche  $\mathcal{H}(t)$  kommen dafür in Frage, für die gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mathcal{H}(t) = 0 , \quad (4.5)$$

d. h. die Wechselwirkung verschwindet lange vor dem Stoß und lange nach dem Stoß. Mit (4.1) folgt:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{d}{dt} \Psi(t) = 0 . \quad (4.6)$$

*S-Operator* definiert durch

$$\Psi(+\infty) = S \Psi(-\infty) . \quad (4.7)$$

Selbstadjungiertheit von  $\mathcal{H}$  impliziert *Unitarität* von  $S$ :

$$S^* S = 1 . \quad (4.8)$$

Definition eines *Übergangsoperators* oder *Zeitentwicklungsoperators*  $S(t, -\infty)$  durch die Beziehung

$$\Psi(t) = S(t, -\infty) \Psi(-\infty) \quad (4.9)$$

mit

$$S(-\infty, -\infty) = 1 \quad (4.10)$$

bzw.

$$S(+\infty, -\infty) = S . \quad (4.11)$$

Einsetzen von (4.9) in (4.1) ergibt zusammen mit (4.6):

$$i \hbar \frac{d}{dt} S(t, -\infty) = \mathcal{H}(t) S(t, -\infty) . \quad (4.12)$$

Umwandlung der *Differentialgleichung* (4.12) in eine *Integralgleichung*: Mit (4.10) erhält man

$$\begin{aligned} S(t, -\infty) &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \mathcal{H}(t') S(t', -\infty) \\ &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{x}' H(x') S(t', -\infty) \\ &= 1 - \frac{i}{c\hbar} \int dx' \Theta(t - t') H(x') S(t', -\infty) \end{aligned} \quad (4.13)$$

mit der *Sprungfunktion*

$$\Theta(t - t') = \begin{cases} 1 & \text{für } t > t' \\ 0 & \text{für } t < t' . \end{cases} \quad (4.14)$$

*Achtung*: Gemäß Kap. 1 ist  $dx = dx_1 dx_2 dx_3 dx_0 \neq dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ .

Lösung der Integralgleichung (4.13) durch *Iteration*:

$$\begin{aligned}
 S(t, -\infty) &= 1 + \left(\frac{-i}{c\hbar}\right) \int dx' \Theta(t-t') H(x') \\
 &+ \left(\frac{-i}{c\hbar}\right)^2 \int dx' \int dx'' \Theta(t-t') \Theta(t'-t'') H(x') H(x'') + \dots \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

Setzt man  $t = +\infty$ , so erhält man für den  $S$ -Operator den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 S &= 1 + \left(\frac{-i}{c\hbar}\right) \int dx' H(x') \\
 &+ \left(\frac{-i}{c\hbar}\right)^2 \int dx' \int dx'' \Theta(t'-t'') H(x') H(x'') + \dots \quad (4.16) \\
 &+ \left(\frac{-i}{c\hbar}\right)^n \int dx' \dots \int dx^{(n)} \Theta(t'-t'') \dots \Theta(t^{(n-1)} - t^{(n)}) H(x') \dots H(x^{(n)}) + \dots
 \end{aligned}$$

**Dyson's Zeitordnungsprodukt:**

$$\begin{aligned}
 &P\left(H(x') H(x'') \dots H(x^{(n)})\right) \\
 &= \sum_{\text{Perm.}} \Theta(t' - t'') \Theta(t'' - t''') \dots \Theta(t^{(n-1)} - t^{(n)}) H(x') H(x'') \dots H(x^{(n)}) . \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

Die Summe läuft über alle  $n!$  Permutationen der oberen Indizes:  $'$ ,  $''$ ,  $'''$ ,  $\dots, {}^{(n-1)}$ ,  ${}^{(n)}$ . Wegen der Stufenfunktionen bleibt nur dasjenige Produkt der Faktoren  $H(x')$ ,  $H(x'')$ ,  $\dots, H(x^{(n)})$  übrig, in dem die Zeitargumente – von rechts nach links gelesen – anwachsen (in chronologischer Reihenfolge auftreten), also

$$P\left(H(x') H(x'') \dots H(x^{(n)})\right) = \begin{cases} H(x') H(x'') \dots H(x^{(n)}) , \\ \text{falls } t' > t'' > \dots > t^{(n)} \\ \\ H(x'') H(x') \dots H(x^{(n)}) , \\ \text{falls } t'' > t' > \dots > t^{(n)} \quad \text{usw.} \end{cases} \quad (4.18)$$

Integration von (4.17) über  $x', x'', \dots, x^{(n)}$  ergibt

$$\begin{aligned}
 &\int dx' \int dx'' \dots \int dx^{(n)} P\left(H(x') H(x'') \dots H(x^{(n)})\right) \\
 &= n! \int dx' \int dx'' \dots \int dx^{(n)} \\
 &\times \Theta(t' - t'') \Theta(t'' - t''') \dots \Theta(t^{(n-1)} - t^{(n)}) H(x') H(x'') \dots H(x^{(n)}) , \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

da jeder Summand aus  $\sum_{Perm.}$  auf dasselbe Integral führt (Umbenennung der Integrationsvariablen). Mit (4.19) erhält man aus (4.16) für den  $S$ -Operator die Reihenentwicklung:

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{-i}{c\hbar} \right)^n \int dx' \int dx'' \dots \int dx^{(n)} P \left( H(x') H(x'') \dots H(x^{(n)}) \right). \quad (4.20)$$

Bei der Auswertung der Terme (4.20) treten gewisse **kovariante Funktionen** auf:

- Die Funktion  $\Delta(x)$  ist wie folgt definiert:

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{\sin k_0 x_0}{k_0}, \quad (4.21)$$

$$k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + \kappa^2}; \quad (4.22)$$

sie hat die Eigenschaften:

1.

$$(\partial^2 - \kappa^2) \Delta(x) = 0, \quad (4.23)$$

$$\Delta(x)_{t=0} = 0, \quad (4.24)$$

$$\partial_0 \Delta(x)_{t=0} = \delta(\vec{x}). \quad (4.25)$$

Die vorstehenden drei Gleichungen legen  $\Delta(x)$  eindeutig fest.

2. Symmetrie:

$$\Delta(\vec{x}, x_0) = \Delta(-\vec{x}, x_0) = -\Delta(\vec{x}, -x_0) = -\Delta(-\vec{x}, -x_0). \quad (4.26)$$

3. Zerlegung in positiven und negativen Frequenzanteil:

$$\Delta(x) = \Delta^+(x) + \Delta^-(x) \quad (4.27)$$

mit

$$\Delta^\pm(x) = \pm \frac{i}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \frac{1}{2k_0} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} \mp k_0 x_0)}. \quad (4.28)$$

4. Lorentz-invariante Darstellung:  $k_0$  als unabhängige Integrationsvariable; mit Hilfe der Stufenfunktion

$$\sigma(\xi) = \begin{cases} +1 & \text{für } \xi > 0 \\ -1 & \text{für } \xi < 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

schreibt man:

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \int dk_0 \frac{\delta(k_0 - \sqrt{\vec{k}^2 + \kappa^2})}{2k_0} \\ &\quad \times \left( \sigma(k_0) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - k_0 x_0)} + \sigma(-k_0) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + k_0 x_0)} \right) \\ &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \int dk_0 \frac{\delta(k_0 - \sqrt{\vec{k}^2 + \kappa^2}) + \delta(k_0 + \sqrt{\vec{k}^2 + \kappa^2})}{2\sqrt{\vec{k}^2 + \kappa^2}} \\ &\quad \times \sigma(k_0) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - k_0 x_0)} \\ &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int dk \delta(k^2 + \kappa^2) \sigma(k_0) e^{ik \cdot x} \end{aligned} \quad (4.30)$$

wegen (1.94). Invarianz bei eigentlichen Lorentz-Transformationen und Raumspiegelung, Vorzeichenwechsel – wegen  $\sigma(k_0)$  – bei Zeitspiegelung.

- Die Funktion  $\Delta_F(\mathbf{x})$  wurde von *Feynman* eingeführt:

$$\Delta_F(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk \frac{e^{ik \cdot x}}{k^2 + \kappa^2 - i\varepsilon}; \quad (4.31)$$

sie ist offensichtlich Lorentz-invariant. Zusammenhang mit  $\Delta(x)$ :

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} I(x_0) \quad (4.32)$$

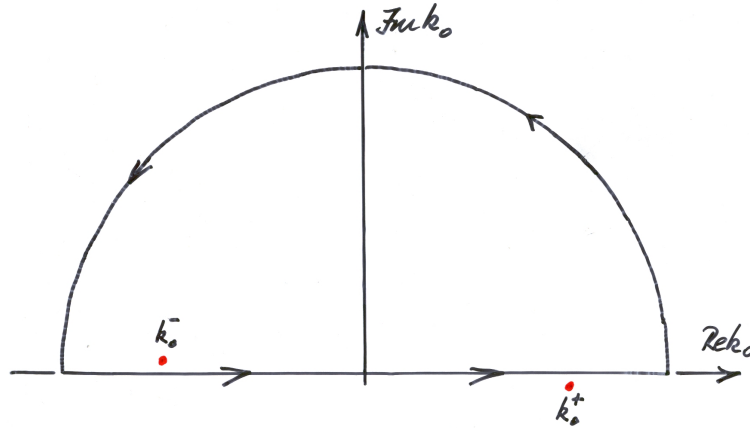
mit

$$\begin{aligned} I(x_0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0 x_0}}{k^2 - k_0^2 + \kappa^2 - i\varepsilon} \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0 x_0}}{(k_0 - k_0^+)(k_0 - k_0^-)} \end{aligned} \quad (4.33)$$

und

$$k_0^\pm = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + \kappa^2 - i\varepsilon}. \quad (4.34)$$

Für  $x_0 < 0$  lässt sich der Integrationsweg längs der reellen  $k_0$ -Achse durch einen Halbkreis über die obere komplexe  $k_0$ -Ebene schließen:



• Abbildung 4.1 •

Der Residuensatz liefert in diesem Falle:

$$\begin{aligned}
 I(x_0) &= -2\pi i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-i k_0^- x_0}}{k_0^- - k_0^+} \\
 &= 2\pi i \frac{e^{i k_0 x_0}}{2 k_0}
 \end{aligned} \tag{4.35 a}$$

mit der Dispersionsbeziehung (4.22).

Für  $x_0 > 0$  wird der Integrationsweg durch einen Halbkreis über die untere komplexe  $k_0$ -Ebene geschlossen, und man erhält:

$$I(x_0) = 2\pi i \frac{e^{-i k_0 x_0}}{2 k_0}, \tag{4.35 b}$$

wobei  $k_0$  ebenfalls durch (4.22) gegeben ist.

Einsetzen von (4.35) in (4.32) und Vergleich mit (4.28) ergibt

$$\Delta_F(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \frac{1}{2 k_0} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} \pm k_0 x_0)} = \mp \Delta^\mp(x) \tag{4.36}$$

für  $x_0 < 0$  bzw. für  $x_0 > 0$ ; oder mit (4.14):

$$\Delta_F(x) = \Theta(t) \Delta^+(x) - \Theta(-t) \Delta^-(x). \tag{4.37}$$

Die Feldoperatoren  $A_\mu$  befriedigen im Wechselwirkungsbild die Feldgleichung (3.1) und die Kommutatoren (3.19) des **freien Photonfeldes**:

$$\partial^2 A_\mu = 0 \tag{4.38}$$



bzw.

$$\left[ \partial_0 A_\mu(\vec{x}, t), A_\nu(\vec{x}', t) \right] = -i c \hbar \delta_{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (4.39)$$

$$\left[ A_\mu(\vec{x}, t), A_\nu(\vec{x}', t) \right] = \left[ \partial_0 A_\mu(\vec{x}, t), \partial_0 A_\nu(\vec{x}', t) \right] = 0 .$$

Die Feldgleichung (4.38) ist kovariant. Kovariante Formulierung der Vertauschungsrelationen (4.39):

$$\left[ A_\mu(x), A_\nu(x') \right] = -i c \hbar \delta_{\mu\nu} D(x - x') \quad (4.40)$$

mit – siehe (4.30) –

$$D(x) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \Delta(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int dk \delta(k^2) \sigma(k_0) e^{ik \cdot x} . \quad (4.41)$$

Zum *Beweis* zeigt man: Der Ansatz (4.40) mit zunächst unbestimmter Funktion  $D(x - x')$  führt mit (4.38, 39) auf

$$\partial^2 D(x - x') = 0 , \quad (4.42)$$

$$D(x - x')_{t=t'} = 0 , \quad (4.43)$$

$$\partial_0 D(x - x')_{t=t'} = \delta(\vec{x} - \vec{x}') , \quad (4.44)$$

woraus sich durch Vergleich mit (4.23, 24, 25) die Identifikation (4.41) ergibt. Umgekehrt folgen aus (4.40, 41) mit (4.23, 24, 25) die Vertauschungsrelationen (4.39).

Die Feldoperatoren  $\psi, \bar{\psi}$  befriedigen im Wechselwirkungsbild die Feldgleichungen (3.88, 89) und die Antikommutatoren (3.120) des **freien Elektronenfeldes**:

$$\gamma_\mu \partial_\mu \psi + \kappa \psi = 0 , \quad \partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu - \kappa \bar{\psi} = 0 \quad (4.45)$$

bzw.

$$\left\{ \psi_\alpha(\vec{x}, t), \psi_\beta^*(\vec{x}', t) \right\} = \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (4.46)$$

$$\left\{ \psi_\alpha(\vec{x}, t), \psi_\beta(\vec{x}', t) \right\} = \left\{ \psi_\alpha^*(\vec{x}, t), \psi_\beta^*(\vec{x}', t) \right\} = 0 .$$

Die Feldgleichungen (4.45) sind – bei Beachtung der Transformationen (3.67, 82) – kovariant. Kovariante Formulierung der Vertauschungsrelationen (4.46):

$$\left\{ \psi_\alpha(x), \psi_\beta(x') \right\} = \left\{ \bar{\psi}_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x') \right\} = 0 \quad (4.47)$$

$$\left\{ \psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x') \right\} = i S_{\alpha\beta}(x - x')$$

mit

$$S(x) = (\gamma_\mu \partial_\mu - \kappa) \Delta(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3k \delta(k^2 + \kappa^2) \sigma(k_0) (i k \cdot \gamma - \kappa) e^{i k \cdot x} . \quad (4.48)$$

Beachte, dass  $S(x)$  eine  $4 \times 4$ -Matrix ist.

Der Beweis – der hier nicht erbracht werden soll – macht Gebrauch von den Feldgleichungen (4.45) sowie von den Eigenschaften (4.23, 24, 25) der Funktion  $\Delta(x)$ .

Kovariante Vertauschungsrelationen für positive/negative Frequenzanteile:

• *Photonenfeld:*

$$\begin{aligned} [A_\mu^+(x), A_\nu^-(x)] &= -i c \hbar \delta_{\mu\nu} D^+(x - x') \\ [A_\mu^-(x), A_\nu^+(x')] &= -i c \hbar \delta_{\mu\nu} D^-(x - x') \\ [A_\mu^+(x), A_\nu^+(x')] &= [A_\mu^-(x), A_\nu^-(x')] = 0 ; \end{aligned} \quad (4.49)$$

• *Elektronenfeld:*

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha^+(x), \bar{\psi}_\beta^-(x')\} &= i S_{\alpha\beta}^+(x - x') \\ \{\psi_\alpha^-(x), \bar{\psi}_\beta^+(x')\} &= i S_{\alpha\beta}^-(x - x') \\ \{\psi_\alpha^+(x), \bar{\psi}_\beta^+(x')\} &= \{\psi_\alpha^-(x), \bar{\psi}_\beta^-(x')\} = 0 . \end{aligned} \quad (4.50)$$

*Beweis* für Photonenfeld: Zerlegung von (4.40) in positiven und negativen Frequenzanteil:

$$\begin{aligned} [A_\mu^+(x), A_\nu(x')] &= -i c \hbar \delta_{\mu\nu} D^+(x - x') \\ [A_\mu^-(x), A_\nu(x')] &= -i c \hbar \delta_{\mu\nu} D^-(x - x') . \end{aligned} \quad (4.51)$$

Wegen (3.20, 22) ist aber

$$[A_\mu^+(x), A_\nu^+(x')] = [A_\mu^-(x), A_\nu^-(x')] = 0 ; \quad (4.52)$$

somit reduziert sich (4.51) auf die *Behauptung* (4.49). Beweis für Elektronenfeld entsprechend.

**Wicks Zeitordnungsprodukt.** Betrachte ein Produkt von Feldoperatoren  $UV \dots W$ , wo  $U, V, \dots, W$  beliebige Bose- oder Fermi-Operatoren sind. Diesem Produkt wird nach Wick das zeitgeordnete Produkt  $T(UV \dots W)$  zugeordnet, in dem die Zeitargumente von rechts nach links anwachsen. Der Unterschied zu Dysons zeitgeordnetem Produkt  $P(UV \dots W)$  besteht im Vorzeichen  $(-1)^f$ , wo  $f$  die Anzahl der Transpositionen von Fermi-Operatoren beim Übergang vom Ausgangsprodukt zum zeitgeordneten Produkt ist:

$$T(UV \dots W) = (-1)^f P(UV \dots W) . \quad (4.53)$$

Da die Energiedichte  $H$  der Photon-Elektron-Wechselwirkung nach (4.3) zwei Fermi-Operatoren ( $\bar{\psi}$  und  $\psi$ ) enthält, kann man in (4.20) die  $P$ -Operation durch die  $T$ -Operation ersetzen:

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{-i}{c\hbar} \right)^n \int dx' \int dx'' \dots \int dx^{(n)} T \left( H(x') H(x'') \dots H(x^{(n)}) \right) . \quad (4.54)$$

**Kontraktion** zweier Feldoperatoren  $U, V$  definiert durch

$$U \cdot V = T(UV) - :UV: \quad (4.55)$$

$$\Rightarrow U \cdot V = \pm V \cdot U ; \quad (4.56)$$

Minuszeichen, falls  $U$  und  $V$  Fermi-Operatoren, Pluszeichen sonst.

• *Kontraktion von Photonen-Feldoperatoren.* Wegen

$$: A_{\mu}(x) A_{\nu}(x') : = A_{\mu}^{-}(x) A_{\nu}(x') + A_{\nu}(x') A_{\mu}^{+}(x) \quad (4.57)$$

erhält man mit (4.51):

$$\begin{aligned} A_{\mu}(x) \cdot A_{\nu}(x') &= \begin{cases} A_{\mu}(x) A_{\nu}(x') - : A_{\mu}(x) A_{\nu}(x') : \\ A_{\nu}(x') A_{\mu}(x) - : A_{\mu}(x) A_{\nu}(x') : \end{cases} \\ &= \begin{cases} [A_{\mu}^{+}(x), A_{\nu}(x')] & \text{für } t > t' \\ - [A_{\mu}^{-}(x), A_{\nu}(x')] & \text{für } t' > t \end{cases} \\ &= -i c \hbar \left( \Theta(t - t') D^{+}(x - x') - \Theta(t' - t) D^{-}(x - x') \right) \delta_{\mu\nu} \\ &= -i c \hbar D_F(x - x') \delta_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (4.58)$$

Mit (4.41, 37, 31) folgt

$$D_F(x) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \Delta_F(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk \frac{e^{ik \cdot x}}{k^2 - i\varepsilon}. \quad (4.59)$$

• *Kontraktion von Elektronen-Feldoperatoren.* Entsprechend zeigt man

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x') &= i \left( \Theta(t - t') S_{\alpha\beta}^+(x - x') - \Theta(t' - t) S_{\alpha\beta}^-(x - x') \right) \\ &= i S_{F,\alpha\beta}(x - x'); \end{aligned} \quad (4.60)$$

mit (4.48, 37, 31) folgt

$$\begin{aligned} S_F(x) &= (\gamma_\mu \partial_\mu - \kappa) \Delta_F(x) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk \frac{ik \cdot \gamma - \kappa}{k^2 + \kappa^2 - i\varepsilon} e^{ik \cdot x}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

• *Sonstige Kontraktionen* von Photonen- und/oder Elektronen-Feldoperatoren verschwinden:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) \psi_\alpha(x') &= A_\mu(x) \bar{\psi}_\alpha(x') \\ &= \psi_\alpha(x) \psi_\beta(x') = \bar{\psi}_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x') = 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

*Also:* Die Kontraktion zweier Feldoperatoren ist nicht operatorwertig, sondern eine zahlenwertige Funktion – evtl. null.

*Kontraktionen* von Paaren von Feldoperatoren *in einem geordneten Produkt:*

$$: U \cdot V W \dots X \cdot Y \cdot Z : = \pm U \cdot Y \cdot W \dots X \cdot : V \dots Z : \quad (4.63)$$

Minuszeichen, falls der Übergang von  $U V W \dots X Y Z$  nach  $U Y W X V \dots Z$  eine ungerade Anzahl von Fermi-Operatorvertauschungen erfordert; Pluszeichen sonst.

*Anmerkung:* Andere Bezeichnungen für die Kontraktion sind *Propagator* oder *Greensche Funktion*; alternative Darstellung:

$$U \cdot V = \Psi_0^* T(UV) \Psi_0, \quad (4.64)$$

d. i. der Vakuumerwartungswert von  $T(UV)$ ; eine andere Notation ist z. B.

$$U \cdot V = \widehat{UV}. \quad (4.65)$$

**Wicksches Reduktionstheorem.** Ein  $T$ -Produkt kann in eine Summe von Normalprodukten zerlegt werden:

$$\begin{aligned}
 T(UVW..XYZ) &= :UVW..XYZ: & (4.66) \\
 &+ :U\cdot V\cdot W..XYZ: + :UVW\cdot..XYZ: + .. \\
 &+ :U\cdot V\cdot\cdot W..X\cdot Y\cdot Z: + :U\cdot V\cdot\cdot W..X\cdot\cdot Y\cdot Z: + .. \\
 &+ :U\cdot V\cdot\cdot W\cdot\cdot\cdot X\cdot\cdot\cdot Y\cdot\cdot Z\cdot\cdot: + :U\cdot V\cdot\cdot W\cdot\cdot\cdot X\cdot\cdot\cdot Y\cdot\cdot Z\cdot\cdot\cdot: + ..
 \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite treten alle möglichen Kontraktionen von keinem, einem, zwei, drei, ... Operatorpaaren auf. (4.55) ist der Spezialfall von (4.66) für ein Produkt aus zwei Operatoren.

Der *Beweis* des Wickschen Theorems erfolgt durch *vollständige Induktion*:

- Das Theorem ist richtig für  $n = 2$  Faktoren (siehe oben).
- Für den Schritt von  $n$  nach  $n + 1$  benötigt man das

*Lemma:* Die zum Operator  $Z$  gehörige Zeit liege *vor* den zu den Operatoren  $U, V, \dots X, Y$  gehörigen Zeiten; dann gilt

$$\begin{aligned}
 :UV..XY:Z &= :UV..XYZ: \\
 &+ :UV..XY\cdot Z: + :UV..X\cdot Y\cdot Z: + .. + :U\cdot V..XYZ: \quad (4.67)
 \end{aligned}$$

Das Theorem gelte für  $n$  Faktoren  $U, V, \dots Z$ ; Multiplikation mit einem Operator  $\Omega$ , dessen Zeitargument *kleiner* sei als das aller anderen Operatoren:

$$\begin{aligned}
 T(UV\dots Z\Omega) &= T(UV\dots Z)\Omega \\
 &= :UV\dots Z:\Omega + :U\cdot V\cdot\dots Z:\Omega + \dots \quad (4.68)
 \end{aligned}$$

Anwendung von (4.67) auf die Terme der rechten Seite von (4.68) liefert das Theorem für die  $n + 1$  Faktoren  $U, V, \dots Z, \Omega$ .

Die Einschränkung bezüglich des Zeitargumentes von  $\Omega$  ist unerheblich: Wenn das Wick'sche Theorem für die Operatorreihenfolge  $U, V, \dots Z, \Omega$  gilt, dann gilt es auch für jede beliebige andere Reihenfolge dieser Operatoren; denn bei der entsprechenden Umordnung erleiden *alle* Terme des Theorems dieselben Vorzeichenwechsel.

*Beweis des Lemmas.* Wegen der Gültigkeit des Distributionsgesetzes für Normalprodukte genügt es, (4.67) für den Fall zu beweisen, dass es sich bei den Operatoren  $U, V, \dots, X, Y$  durchweg um positive oder negative Frequenzanteile handelt. Weiterhin kann man die Reihenfolge so wählen, dass  $UV \dots XY$  von vornherein normal geordnet ist; denn mit irgendeiner Reihenfolge hat man das Lemma für jede beliebige andere Reihenfolge bewiesen – wegen der Gleichheit der Vorzeichenwechsel aller Terme beim Übergang von der einen in die andere Reihenfolge. Also

$$:UV \dots XY: := UV \dots XY. \quad (4.69)$$

Sei  $W$  einer der Operatoren  $U, V, \dots, X, Y$ ; dann gilt nach Voraussetzung

$$T(WZ) = WZ, \quad (4.70)$$

also hat man nach (4.55, 70):

$$\begin{aligned} WZ &= WZ - :WZ: \\ &= (WZ^+ + WZ^-) - (WZ^+ + \sigma Z^- W) \\ \Rightarrow WZ^- &= \sigma Z^- W + WZ^-; \end{aligned} \quad (4.71)$$

$\sigma = -1$ , falls  $W$  und  $Z$  Fermi-Operatoren;  $\sigma = +1$  sonst. Mit (4.69, 71) folgt

$$\begin{aligned} :UV \dots XY: Z^- &= UV \dots XY Z^- \\ &= UV \dots X(\sigma Z^- Y + YZ^-) \\ &= \sigma UV \dots XZ^- Y + UV \dots XY Z^- \\ &= \sigma UV \dots (\sigma' Z^- X + XZ^-)Y + UV \dots XY Z^- \\ &= \sigma \sigma' UV \dots Z^- XY + \sigma UV \dots XZ^- Y + UV \dots XY Z^- \\ &= \sigma \sigma' UV \dots Z^- XY + UV \dots XZ^- Y + UV \dots XY Z^- \\ &= \dots \text{wiederholte Anwendung von (4.71)} \dots \\ &= \tau Z^- UV \dots XY + UV \dots XY Z^- + \dots + UV \dots XY Z^- \\ &= \tau Z^- :UV \dots XY: + :UV \dots XY Z^-: + \dots + :UV \dots XY Z^-:; \end{aligned} \quad (4.72)$$

$\tau = \sigma \sigma' \dots = -1$ , falls  $Z$  Fermi-Operator ist und  $UV \dots XY$  eine ungerade Anzahl von Fermi-Operatoren enthält;  $\tau = +1$  sonst. Substituiert man (4.72) in die Identität

$$:UV \dots XY: Z = :UV \dots XY: Z^+ + :UV \dots XY: Z^-, \quad (4.73)$$

so folgt bei Beachtung von

$$:UV \dots XY: Z^+ + \tau Z^- :UV \dots XY: = :UV \dots XY Z^-: \quad (4.74)$$

die *Behauptung* (4.67) •

**Anwendung des Wickschen Theorems** auf die Berechnung der  $T$ -Produkte in der Reihenentwicklung des  $S$ -Operators. Nach (4.54, 3) hat man

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \quad (4.75)$$

mit

$$S_n = \frac{1}{n!} \left( \frac{-i}{c\hbar} \right)^n \int dx' \int dx'' \dots \int dx^{(n)} T \left( H(x') H(x'') \dots H(x^{(n)}) \right) \quad (4.76)$$

und

$$H(x) = -ie : A_\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) : \quad (4.77)$$

Da es egal ist, ob man erst (partiell) normalordnet und dann zeitordnet oder ob man gleich zeitordnet, folgt <sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} & T \left( H(x') \dots H(x^{(n)}) \right) \\ &= (-ie)^n T \left( : A_\mu(x') \bar{\psi}(x') \gamma_\mu \psi(x') : \dots : A_\nu(x^{(n)}) \bar{\psi}(x^{(n)}) \gamma_\nu \psi(x^{(n)}) : \right) \\ &= (-ie)^n T \left( A_\mu(x') \bar{\psi}(x') \gamma_\mu \psi(x') \dots A_\nu(x^{(n)}) \bar{\psi}(x^{(n)}) \gamma_\nu \psi(x^{(n)}) \right). \end{aligned} \quad (4.78)$$

Das Wicksche Theorem (4.66) ergibt nun:

$$\begin{aligned} & T \left( H(x') \dots H(x^{(n)}) \right) \\ &= (-ie)^n \left( : A_\mu(x') \bar{\psi}(x') \gamma_\mu \psi(x') \dots A_\nu(x^{(n)}) \bar{\psi}(x^{(n)}) \gamma_\nu \psi(x^{(n)}) : \right. \\ &+ \left. : A_\mu(x') \bar{\psi}(x') \gamma_\mu \psi(x') \dots A_\nu(x^{(n)}) \bar{\psi}(x^{(n)}) \gamma_\nu \psi(x^{(n)}) : + \dots \right). \end{aligned} \quad (4.79)$$

Die *Kontraktionen mit gleichem  $x$ -Argument* bleiben ohne Beitrag. Für  $A_\mu \bar{\psi}$  und  $A_\mu \psi$  folgt das bereits aus (4.62); aber es gilt auch – mit (4.60) –

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x') \gamma_\mu \psi(x) &= -\psi_\beta(x) \bar{\psi}_\alpha(x') (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \\ &= -i S_{F,\beta\alpha}(x-x') (\gamma_\mu)_{\alpha\beta}; \end{aligned} \quad (4.80)$$

<sup>1</sup>Wegen der Gleichheit der Zeitargumente von je drei Feldoperatoren ist die  $T$ -Operation zunächst nicht eindeutig definiert. Eindeutigkeit erzielt man durch die künstliche Einführung infinitesimaler Abweichungen der Zeitargumente voneinander. Am Ende der Argumentationskette lässt man die Unterschiede in den betreffenden Zeitargumenten wieder gegen Null gehen.

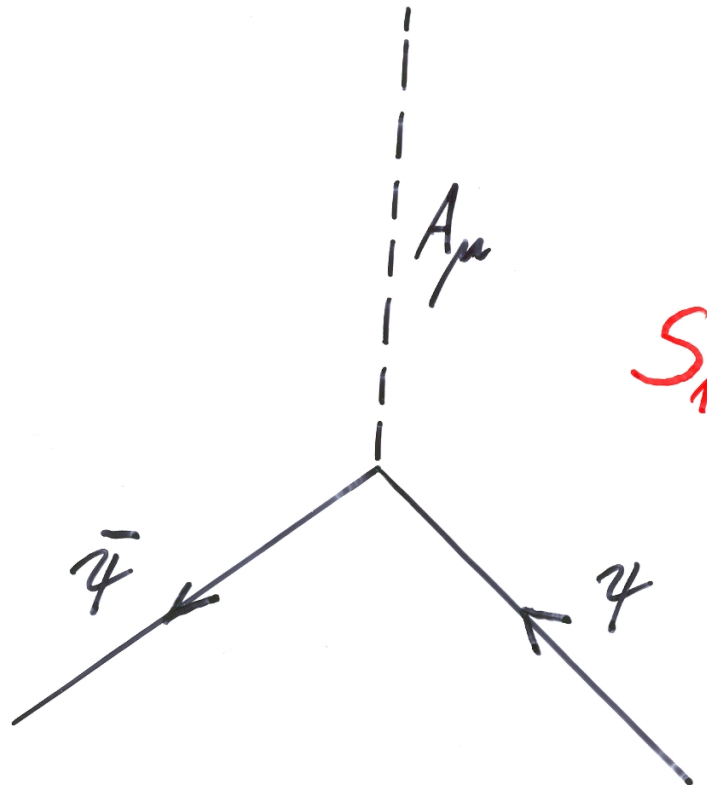
im Limes  $x' \rightarrow x$  resultiert – mit (4.61) –

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) &= -i \text{Sp}(S_F(0) \gamma_\mu) \\
 &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int dk \frac{\text{Sp}((i k \cdot \gamma - \kappa) \gamma_\mu)}{k^2 + \kappa^2 - i0} \\
 &= \frac{4}{(2\pi)^4} \int dk \frac{k_\mu}{k^2 + \kappa^2 - i0} = 0. \quad (4.81)
 \end{aligned}$$

**1. Ordnung:**

$$S_1 = -\frac{e}{c\hbar} \int dx : A_\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) : \quad (4.82)$$

ohne Beiträge aus Kontraktionen. Graphische Darstellung durch *Feynman-Diagramm*:



• Abbildung 4.2 •

Im Falle von  $S_1$  handelt es sich um einen *Vertex*, der dem Produkt  $A_\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)$  zugeordnet ist.



**2. Ordnung.** Aus (4.76, 79, 81) folgt

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{e^2}{2c^2\hbar^2} \int dx \int dx' T \left( A_\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A_\nu(x') \bar{\psi}(x') \gamma_\nu \psi(x') \right) \\ &= S_a + S_b + S_c + S_d + S_e + S_f \end{aligned} \quad (4.83)$$

mit

$$S_a = \frac{e^2}{2c^2\hbar^2} \int dx \int dx' : A_\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A_\nu(x') \bar{\psi}(x') \gamma_\nu \psi(x') : \quad (4.84 \text{ a})$$

$$S_b = \frac{e^2}{2c^2\hbar^2} \int dx \int dx' : A_\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A_\nu(x') \bar{\psi}(x') \gamma_\nu \psi(x') : \quad (4.84 \text{ b})$$

$$\begin{aligned} S_c &= \frac{e^2}{2c^2\hbar^2} \int dx \int dx' : A_\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A_\nu(x') \bar{\psi}(x') \gamma_\nu \psi(x') \\ &\quad + A_\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A_\nu(x') \bar{\psi}(x') \gamma_\nu \psi(x') : \\ &= \frac{e^2}{c^2\hbar^2} \int dx \int dx' : A_\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A_\nu(x') \bar{\psi}(x') \gamma_\nu \psi(x') : \end{aligned} \quad (4.84 \text{ c})$$

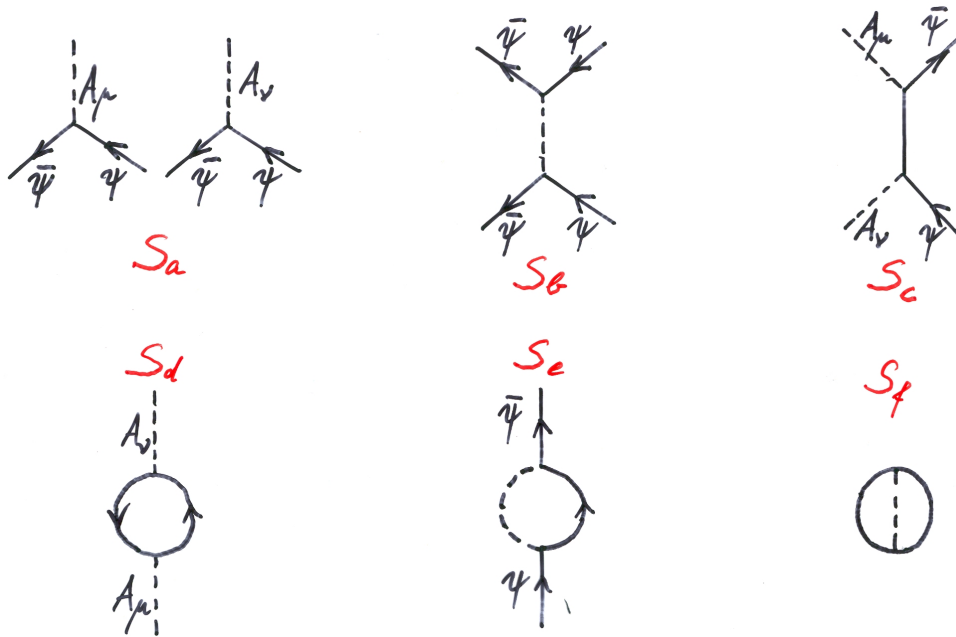
$$S_d = \frac{e^2}{2c^2\hbar^2} \int dx \int dx' : A_\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A_\nu(x') \bar{\psi}(x') \gamma_\nu \psi(x') : \quad (4.84 \text{ d})$$

$$\begin{aligned} S_e &= \frac{e^2}{2c^2\hbar^2} \int dx \int dx' : A_\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A_\nu(x') \bar{\psi}(x') \gamma_\nu \psi(x') \\ &\quad + A_\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A_\nu(x') \bar{\psi}(x') \gamma_\nu \psi(x') : \\ &= \frac{e^2}{c^2\hbar^2} \int dx \int dx' : A_\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A_\nu(x') \bar{\psi}(x') \gamma_\nu \psi(x') : \end{aligned} \quad (4.84 \text{ e})$$

$$S_f = \frac{e^2}{2c^2\hbar^2} \int dx \int dx' : A_\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A_\nu(x') \bar{\psi}(x') \gamma_\nu \psi(x') : \quad (4.84 \text{ f})$$

Für die nichtverschwindenden Kontraktionen  $A_\mu(x) A_\nu(x')$  und  $\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')$  in den vorstehenden Termen gelten die Gln. (4.58, 59) bzw. (4.60, 61).

Graphische Darstellung der Terme (4.84) wiederum durch *Feynman-Diagramme*:



• Abbildung 4.3 •

Jedem Feldoperator-Tripel  $A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$  von gleichem Argument ist ein *Vertex* zugeordnet. Kontraktionen werden durch Verbindung der Vertices durch die entsprechenden Linien beschrieben – *interne Linien*:  $A_\mu(x) \cdot A_\nu(x')$  führt zu einer internen Photonen-Linie,  $\psi_\alpha(x) \cdot \bar{\psi}_\beta(x')$  zu einer internen Fermionen-Linie. Interpretation als virtuelle Zwischenzustände der entsprechenden Teilchen. Die verbleibenden – nicht durch Kontraktionen verbrauchten – *externen Linien* entsprechen den am Streuprozess beteiligten realen Teilchen des Eingangs- und Ausgangskanals:

- $\psi$ : einlaufendes (Vernichtung) Elektron oder auslaufendes (Erzeugung) Positron;
- $\bar{\psi}$ : auslaufendes (Erzeugung) Elektron oder einlaufendes (Vernichtung) Positron;
- $A_\mu$ : einlaufendes (Vernichtung) oder auslaufendes (Erzeugung) Photon.

Die nichtkontrahierten Feldoperatoren in den Normalprodukten von (4.84) können als *freie* Feldoperatoren behandelt und folglich als *Fourier-Reihen* dargestellt werden. Nach (3.20, 21) hat man

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{c\hbar}{2k_0}} \left( a_\mu(\vec{k}) e^{ik \cdot x} + a_\mu^*(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} \right) \quad (4.85)$$

mit

$$k^2 = 0 ; \quad (4.86)$$

nach (3.115, 103) hat man

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \left( a(\vec{k}) u(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot x} + b^*(\vec{k}) v(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot x} \right) \quad (4.87)$$

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \left( a^*(\vec{k}) \bar{u}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot x} + b(\vec{k}) \bar{v}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot x} \right) .$$

mit

$$k^2 + \kappa^2 = 0 . \quad (4.88)$$

Zur Vereinfachung wurden die Spinindizes  $r = 1, 2$  samt  $\sum_r$  in (4.87) weggelassen.

Der *Wellenvektor*  $k = (\vec{k}, \frac{i}{c}\omega)$  ist mit dem *Impulsvektor*  $p = (\vec{p}, \frac{i}{c}E)$  durch die *Einstein-de Broglie-Beziehung*

$$p = \hbar k \quad (4.89)$$

verknüpft; das bedeutet für Energie und Impuls des Teilchens:

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} \quad \text{bzw.} \quad E = \hbar \omega . \quad (4.90)$$

**Beispiel: Photon-Elektron-Streuung.** Photon und Elektron seien *vor* dem Stoß durch die Ausbreitungsvektoren  $k$  bzw.  $p$  gekennzeichnet, *nach* dem Stoß durch die Ausbreitungsvektoren  $k'$  bzw.  $p'$ .

$S_1$  liefert keinen Beitrag: Weder für den Prozess „Photon + Elektron  $\rightarrow$  Elektron“ noch für den Prozess „Elektron  $\rightarrow$  Photon + Elektron“ ist die jeweilige Energie-Impuls-Bilanz erfüllbar:

$$k + p \neq p' \quad \text{bzw.} \quad p \neq k' + p' . \quad (4.91)$$

Beitrag aus  $S_2$ :

$$S_c = \frac{i e^2}{c^2 \hbar^2} \int dx \int dx' : A_\mu(x) A_\nu(x') \bar{\psi}(x) \gamma_\mu S_F(x - x') \gamma_\nu \psi(x') : \quad (4.92)$$

mit – vgl. (4.60, 61) –

$$S_F(x - x') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int dq \frac{i q \cdot \gamma - \kappa}{q^2 + \kappa^2 - i\varepsilon} e^{i q \cdot (x - x')}. \quad (4.93)$$

Es handelt sich also um einen *Prozess 2. Ordnung*.

Aus den Fourier-Reihen (4.85, 87) sind nur diejenigen Terme zu berücksichtigen, die zur Vernichtung eines Photons mit dem Wellenvektor  $\vec{k}$  und eines Elektrons mit dem Wellenvektor  $\vec{p}$  führen (Eingangskanal) sowie zur Erzeugung eines Photons mit dem Wellenvektor  $\vec{k}'$  und eines Elektrons mit dem Wellenvektor  $\vec{p}'$  (Ausgangskanal):

$$A_\mu(x) A_\nu(x') = \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{c\hbar}{2k_0}} \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{c\hbar}{2k_0}} \times \left( a_\mu^*(\vec{k}') e^{-i\vec{k}' \cdot x} a_\nu(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot x'} + a_\mu(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot x} a_\nu^*(\vec{k}') e^{-i\vec{k}' \cdot x'} \right) \quad (4.94)$$

bzw.

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} a^*(\vec{p}') \bar{u}(\vec{p}') e^{-i\vec{p}' \cdot x} \quad (4.95)$$

$$\psi(x') = \frac{1}{\sqrt{V}} a(\vec{p}) u(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot x'}.$$

Einsetzen von (4.93, 94, 95) in (4.92), Erledigung der  $x, x'$ -Integrationen mit Hilfe der Beziehung

$$\int dx e^{i\vec{k} \cdot x} = (2\pi)^4 \delta(\vec{k}) \quad (4.96)$$

und Beseitigung von einer der beiden resultierenden  $\delta$ -Funktionen durch  $q$ -Integration führt schließlich auf

$$\begin{aligned} S_c &= \frac{(2\pi)^4 i e^2}{2 c \hbar V^2 \sqrt{k_0' k_0}} \int dq \left( a_\mu^*(\vec{k}') \delta(q - p' - k') a_\nu(\vec{k}) \delta(q - p - k) \right. \\ &\quad \left. + a_\mu(\vec{k}) \delta(q - p' + k) a_\nu^*(\vec{k}') \delta(q - p + k') \right) \\ &\quad \times a^*(\vec{p}') \bar{u}(\vec{p}') \gamma_\mu \frac{i q \cdot \gamma - \kappa}{q^2 + \kappa^2} \gamma_\nu a(\vec{p}) u(\vec{p}) \\ &= \frac{(2\pi)^4 i e^2}{2 c \hbar V^2 \sqrt{k_0' k_0}} \delta(p + k - p' - k') a_\mu^*(\vec{k}') a^*(\vec{p}') a_\nu(\vec{k}) a(\vec{p}) \\ &\quad \times \bar{u}(\vec{p}') \left( \gamma_\mu \frac{i(p+k) \cdot \gamma - \kappa}{(p+k)^2 + \kappa^2} \gamma_\nu + \gamma_\nu \frac{i(p-k') \cdot \gamma - \kappa}{(p-k')^2 + \kappa^2} \gamma_\mu \right) u(\vec{p}). \quad (4.97) \end{aligned}$$

Die  $\delta$ -Funktion dokumentiert die *Energie-Impuls-Bilanz* des Prozesses:

$$p + k = p' + k' . \quad (4.98)$$

Wegen der Abwesenheit longitudinaler und temporaler Photonen im freien Photonenfeld laufen die  $\mu, \nu$ -Summen in (4.97) nur über die bezüglich der  $\vec{k}'$ ,  $\vec{k}$ -Richtung transversalen Komponenten. Seien  $\hat{e}'$ ,  $\hat{e}$  die (zu  $\vec{k}'$  bzw.  $\vec{k}$  orthogonalen) Polarisations(einheits)vektoren des finalen bzw. des initialen Photons; dann gilt

$$a_\mu^*(\vec{k}') \gamma_\mu = a_{e'}^*(\vec{k}') \hat{e}' \cdot \vec{\gamma} , \quad a_\nu(\vec{k}) \gamma_\nu = a_e(\vec{k}) \hat{e} \cdot \vec{\gamma} , \quad (4.99)$$

somit

$$\begin{aligned} S_c &= \frac{(2\pi)^4 i e^2}{2 c \hbar V^2 \sqrt{k'_0 k_0}} \delta(p + k - p' - k') a_{e'}^*(\vec{k}') a_e(\vec{k}) a^*(\vec{p}') a(\vec{p}) \\ &\times \bar{u}(\vec{p}') \left( \hat{e}' \cdot \vec{\gamma} \frac{i(p+k) \cdot \gamma - \kappa}{(p+k)^2 + \kappa^2} \hat{e} \cdot \vec{\gamma} + \hat{e} \cdot \vec{\gamma} \frac{i(p-k') \cdot \gamma - \kappa}{(p-k')^2 + \kappa^2} \hat{e}' \cdot \vec{\gamma} \right) u(\vec{p}) . \end{aligned} \quad (4.100)$$

$a_e(\vec{k})$  ist der Vernichtungsoperator für das mit der Polarisation  $\hat{e}$  einlaufende Photon,  $a_{e'}^*(\vec{k}')$  ist der Erzeugungsoperator für das mit der Polarisation  $\hat{e}'$  auslaufende Photon.

**S-Matrix** – Zusammenhang mit Wirkungsquerschnitten, Lebensdauern ... siehe unten – bis einschließlich 2. Ordnung:

$$S_{fi} = \Psi_f^* (1 + S_c) \Psi_i . \quad (4.101)$$

Eingangs- und Ausgangszustand durch Anwendung entsprechender Erzeugungsoperatoren auf den Vakuumzustand:

$$\Psi_i = a_e^*(\vec{k}) a^*(\vec{p}) \Psi_0 , \quad (4.102)$$

$$\Psi_f = a_{e'}^*(\vec{k}') a^*(\vec{p}') \Psi_0 .$$

Mit

$$\Psi_f^* \Psi_i = \delta_{fi} \quad (4.103)$$

und

$$\Psi_f^* a_{e'}^*(\vec{k}') a_e(\vec{k}) a^*(\vec{p}') a(\vec{p}) \Psi_i = \Psi_0^* \Psi_0 = 1 \quad (4.104)$$

folgt

$$S_{fi} = \delta_{fi} + \frac{(2\pi)^4 i e^2}{2c \hbar V^2 \sqrt{k'_0 k_0}} \delta(p+k-p'-k') \times \bar{u}(\vec{p}') \left( \hat{e}' \cdot \vec{\gamma} \frac{i(p+k) \cdot \gamma - \kappa}{(p+k)^2 + \kappa^2} \hat{e} \cdot \vec{\gamma} + \hat{e} \cdot \vec{\gamma} \frac{i(p-k') \cdot \gamma - \kappa}{(p-k')^2 + \kappa^2} \hat{e}' \cdot \vec{\gamma} \right) u(\vec{p}). \quad (4.105)$$

Der Term  $\delta_{fi}$  entspricht dem Anteil der „Nichtstreuung“ am Prozess.

Der Beitrag  $S_c$  zur Photon-Elektron-Streuung besteht gemäß (4.97, 100) aus zwei Termen. Nach (4.94, 95) hat man nämlich

$$A_\mu(x) A_\nu(x') = A_\mu^-(x) A_\nu^+(x') + A_\mu^+(x) A_\nu^-(x') \quad (4.106)$$

und

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^-(x), \quad \psi(x') = \psi^+(x'); \quad (4.107)$$

folglich gilt nach (4.92):

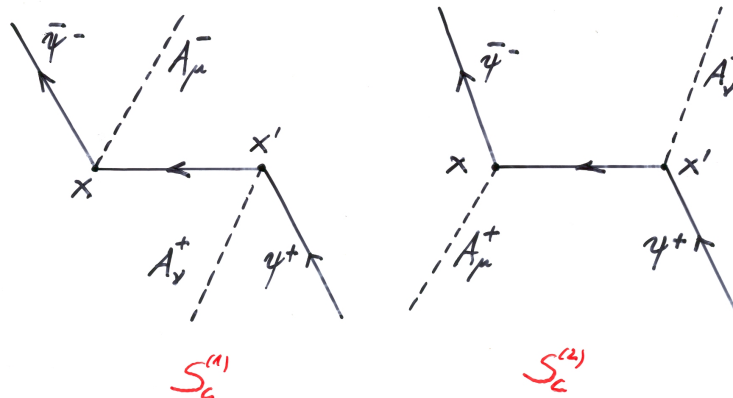
$$S_c = S_c^{(1)} + S_c^{(2)} \quad (4.108)$$

mit

$$S_c^{(1)} = \frac{i e^2}{c^2 \hbar^2} \int dx \int dx' : A_\mu^-(x) A_\nu^+(x') \bar{\psi}^-(x) \gamma_\mu S_F(x-x') \gamma_\nu \psi^+(x') : \quad (4.109)$$

$$S_c^{(2)} = \frac{i e^2}{c^2 \hbar^2} \int dx \int dx' : A_\mu^+(x) A_\nu^-(x') \bar{\psi}^-(x) \gamma_\mu S_F(x-x') \gamma_\nu \psi^+(x') :$$

Diese beiden Beiträge lassen sich wie folgt durch *Feynman-Diagramme* graphisch darstellen:



• Abbildung 4.4 •

1. Photon und Elektron bei  $x'$  absorbiert, Photon und Elektron bei  $x$  emittiert.
2. Photon emittiert und Elektron absorbiert bei  $x'$ , Photon absorbiert und Elektron emittiert bei  $x$ .

## 5 Wirkungsquerschnitte und Lebensdauern

Betrachte die Streuung zweier Teilchen mit Wellenvektoren  $p, q$  im Eingangskanal und  $p', q'$  im Ausgangskanal. Der Prozess spiele sich in einem großen kubischen Volumen  $V$  ab. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude für den Übergang  $p, q \rightarrow p', q'$  ist durch das entsprechende  $S$ -Matrixelement gegeben. Dieses ist in 2. Ordnung (die 0. Ordnung bleibt unberücksichtigt, da sie die „Nichtstreuung“ beschreibt; die 1. Ordnung liefert keinen Beitrag, siehe oben) von der Gestalt – vgl. (4.105) –

$$S_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{V^2} \delta(p + q - p' - q') F(p', q'; p, q). \quad (5.1)$$

Jedes der vier Teilchen des Eingangs- und des Ausgangskanals steuert auf Grund der Fourier-Zerlegung des entsprechenden Feldoperators einen Faktor  $V^{-1/2}$  bei. Die  $\delta$ -Funktion bringt die Energie-Impuls-Bilanz beim Stoß zum Ausdruck.

*Totale Übergangswahrscheinlichkeit* in beliebige Endzustände  $\vec{p}', \vec{q}'$  ( $p'_0, q'_0$  durch  $\vec{p}', \vec{q}'$  festgelegt):

$$W = \frac{(2\pi)^8}{V^4} \sum_{\vec{p}'} \sum_{\vec{q}'} \left( \delta(p + q - p' - q') \right)^2 |F(p', q'; p, q)|^2. \quad (5.2)$$

Mit

$$\begin{aligned} \left( \delta(p + q - p' - q') \right)^2 &= \delta(p + q - p' - q') \frac{1}{(2\pi)^4} \int dx e^{i(p+q-p'-q') \cdot x} \\ &= \delta(p + q - p' - q') \frac{1}{(2\pi)^4} \int dx \\ &= \delta(p + q - p' - q') \frac{cVT}{(2\pi)^4}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

wo  $T$  ein sehr großes Zeitintervall bedeutet, innerhalb dessen sich der Stoß abspielt, folgt

$$W = \frac{(2\pi)^4 cT}{V^3} \sum_{\vec{p}'} \sum_{\vec{q}'} \delta(p + q - p' - q') |F(p', q'; p, q)|^2; \quad (5.4)$$

für die *Rate der Übergangswahrscheinlichkeit* resultiert mit (1.92):

$$\begin{aligned} w &= \frac{(2\pi)^4 c}{V^3} \sum_{\vec{p}'} \sum_{\vec{q}'} \delta(p + q - p' - q') |F(p', q'; p, q)|^2 \\ &= \frac{c}{(2\pi)^2 V} \int d\vec{p}' \int d\vec{q}' \delta(p + q - p' - q') |F(p', q'; p, q)|^2 \\ &= \frac{c}{(2\pi)^2 V} \int d\vec{p}' \delta(p_0 + q_0 - p'_0 - q'_0) |F(p', q'; p, q)|^2, \end{aligned} \quad (5.5)$$



wobei  $\vec{q}'$  der Bedingung – *Impulserhaltung* –

$$\vec{p}' + \vec{q}' = \vec{p} + \vec{q} \quad (5.6)$$

unterliegt. Mit – wegen  $\vec{p}'^2 + \kappa^2 = p_0'^2$  gilt  $|\vec{p}'| d|\vec{p}'| = p_0' dp_0' -$

$$d\vec{p}' = |\vec{p}'|^2 d|\vec{p}'| d\Omega = |\vec{p}'| p_0' dp_0' d\Omega, \quad (5.7)$$

wo  $d\Omega$  das Raumwinkelement in  $\vec{p}'$ -Richtung ist, folgt weiter:

$$w = \frac{c}{(2\pi)^2 V} \int d\Omega \int dp_0' |\vec{p}'| p_0' \delta(p_0 + q_0 - p_0' - q_0') |F(p', q'; p, q)|^2. \quad (5.8)$$

Übergang von der Integrationsvariablen  $p_0'$  zur Integrationsvariablen  $p_0' + q_0'$  ( $q_0'$  hängt über (5.6) von  $p_0'$  ab):

$$dp_0' = \frac{1}{\partial(p_0' + q_0') / \partial p_0'} d(p_0' + q_0'), \quad (5.9)$$

somit

$$w = \frac{c}{(2\pi)^2 V} \int d\Omega \frac{|\vec{p}'| p_0'}{\partial(p_0' + q_0') / \partial p_0'} |F(p', q'; p, q)|^2 \quad (5.10)$$

mit der zusätzlichen Bedingung – *Energieerhaltung* –

$$p_0' + q_0' = p_0 + q_0. \quad (5.11)$$

### Totaler Wirkungsquerschnitt:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\text{totale Übergangswahrscheinlichkeit / Zeit}}{\text{relative Wahrscheinlichkeitsstromdichte}} \\ &= \frac{w}{V^{-1} |\vec{p}'/p_0 - \vec{q}'/q_0| c} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 |\vec{p}'/p_0 - \vec{q}'/q_0|} \int d\Omega \frac{|\vec{p}'| p_0'}{\partial(p_0' + q_0') / \partial p_0'} |F(p', q'; p, q)|^2, \quad (5.12) \end{aligned}$$

wobei der Zusammenhang  $\vec{v} = c^2 \vec{p}' / E = c \vec{p}' / p_0$  benutzt wurde. Invarianz von (5.12) unter Lorentz-Transformationen in Richtung der Relativbewegung; Verallgemeinerung möglich. Definition des **differentiellen Wirkungsquerschnittes**  $d\sigma / d\Omega$  durch die Beziehung

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (5.13)$$

Falls der Spinzustand der am Stoß beteiligten Elektronen/Positronen und/oder der Polarisationszustand der beteiligten Photonen nicht interessieren (experimentell nicht zugänglich sind) geht man so vor: *Mittelung über die Spin- und/oder Polarisationszustände im Eingangskanal, Summation über diese Zustände im Ausgangskanal.*

**Elektronen - Positronen.** Die Orthonormiertheit (3.116) und Vollständigkeit der Basisspinoren  $u_r(\vec{p})$  und  $v_r(-\vec{p})$ ,  $r = 1, 2$ , gestattet die folgende Darstellung der Einheitsmatrix im vierdimensionalen Spinorraum:

$$\sum_{r=1,2} (u_r(\vec{p}) u_r^*(\vec{p}) + v_r(-\vec{p}) v_r^*(-\vec{p})) = 1. \quad (5.14)$$

Aus (3.118, 117) folgen ferner die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{(-i\vec{p} \cdot \gamma + \kappa) \gamma_4}{2p_0} u_r(\vec{p}) &= u_r(\vec{p}) \\ \frac{(-i\vec{p} \cdot \gamma + \kappa) \gamma_4}{2p_0} v_r(-\vec{p}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Multiplikation von (5.14) mit  $(-i\vec{p} \cdot \gamma + \kappa) \gamma_4 / 2p_0$  führt wegen (5.15) auf

$$\sum_{r=1,2} u_r(\vec{p}) u_r^*(\vec{p}) = \frac{(-i\vec{p} \cdot \gamma + \kappa) \gamma_4}{2p_0}, \quad (5.16)$$

d. h. wegen (3.78) auf

$$\sum_{r=1,2} u_r(\vec{p}) \bar{u}_r(\vec{p}) = -\frac{i\vec{p} \cdot \gamma - \kappa}{2p_0}. \quad (5.17)$$

In gleicher Weise zeigt man

$$\sum_{r=1,2} v_r(\vec{p}) \bar{v}_r(\vec{p}) = -\frac{i\vec{p} \cdot \gamma + \kappa}{2p_0}. \quad (5.18)$$

Die Beziehungen (5.17, 18) ermöglichen die Auswertung von Summationen über die Spinzustände eines Elektrons oder Positrons. *Beispiel:*

$$\frac{1}{2} \sum_r \sum_s |\bar{u}_s(\vec{p}') O u_r(\vec{p})|^2 = \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \left( \bar{u}_s(\vec{p}') O u_r(\vec{p}) \right) \left( \bar{u}_r(\vec{p}) \bar{O} u_s(\vec{p}') \right) \quad (5.19)$$

mit

$$\bar{O} = \gamma_4 O^* \gamma_4, \quad (5.20)$$

$O$  ein Operator im Spinorraum. Mit (5.17) folgt aus (5.19)

$$\begin{aligned} \overline{\sum_{spin} |\bar{u}(\vec{p}') O u(\vec{p})|^2} &= \frac{1}{2} \sum_r \sum_s |\bar{u}_s(\vec{p}') O u_r(\vec{p})|^2 \\ &= \frac{1}{8 p_0 p'_0} Sp \left( O (i p \cdot \gamma - \kappa) \bar{O} (i p' \cdot \gamma - \kappa) \right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

**Photonen.** Zwei unterschiedliche Prozeduren sind möglich:

- Falls die Polarisationsvektoren  $\hat{e}$  und  $\hat{e}'$  gegeben sind – wie z. B. in (4.100) – macht man zur Auswertung von  $\frac{1}{2} \sum_{\hat{e}'} \sum_{\hat{e}}$ -Summen von der Beziehung

$$\sum_{\hat{e}} (\hat{e} \cdot \vec{a}) (\hat{e} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{a})(\vec{k} \cdot \vec{b})}{k^2} \quad (5.22)$$

Gebrauch;  $\vec{a}, \vec{b}$  zwei beliebige Vektoren.

- In  $\mu, \nu$ -Summen – wie z. B. in (4.97) – wo man zunächst über alle *vier* Komponenten des elektromagnetischen Potenzial zu summieren hat, beschränkt man die Summation auf die transversalen Komponenten  $\mu, \nu = 1, 2$ . Man kann zeigen (hier nicht), dass sich die Beiträge der longitudinalen und temporalen Komponenten gegenseitig zu null kompensieren.

*Abkürzung:*

$$\left. \begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{\hat{e}'} \sum_{\hat{e}} \dots \\ &\frac{1}{2} \sum_{\mu} \sum_{\nu=1,2} \dots \end{aligned} \right\} = \overline{\sum_{pol}} \dots \quad (5.23)$$

Führt man sowohl Elektronenspinmittelung (-summation) als auch Photonenspinmittelung (-summation) durch, so folgt für den Wirkungsquerschnitt (5.12):

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2 |\vec{p}/p_0 - \vec{q}/q_0|} \int d\Omega \frac{|\vec{p}'| p'_0}{\partial(p'_0 + q'_0) / \partial p'_0} \overline{\sum} |F(p', q'; p, q)|^2 \quad (5.24)$$

mit

$$\overline{\sum} = \overline{\sum}_{spin} \overline{\sum}_{pol}. \quad (5.25)$$

**Beispiel: Photon-Elektron-Streuung.** Elektron vorher / nachher:  $p, p'$ . Photon vorher / nachher:  $k, k'$ . Nach (4.88, 86) gilt

$$p^2 = p'^2 = -\kappa^2, \quad k^2 = k'^2 = 0. \quad (5.26)$$

Das Elektron befinde sich anfangs in Ruhe <sup>1</sup>:

$$\vec{p} = \vec{0}, \quad p_0 = \kappa. \quad (5.27)$$

Nach (4.105) hat das  $S$ -Matrix-Element in niedrigster (zweiter) Ordnung die Gestalt (5.1) mit

$$F = \frac{ie^2}{2c\hbar\sqrt{k_0 k'_0}} \times \bar{u}(\vec{p}') \left( \hat{e}' \cdot \vec{\gamma} \frac{i(p+k) \cdot \gamma - \kappa}{(p+k)^2 + \kappa^2} \hat{e} \cdot \vec{\gamma} + \hat{e} \cdot \vec{\gamma} \frac{i(p-k') \cdot \gamma - \kappa}{(p-k')^2 + \kappa^2} \hat{e}' \cdot \vec{\gamma} \right) u(\vec{p}). \quad (5.28)$$

Vereinfachung von  $F$ : Aus (3.118, 117) folgt

$$(i p \cdot \gamma + \kappa) u(\vec{p}) = 0; \quad (5.29)$$

wegen (5.27) resultiert daraus:

$$(i p \cdot \gamma - \kappa) \hat{e} \cdot \vec{\gamma} u(\vec{p}) = (i p \cdot \gamma - \kappa) \hat{e}' \cdot \vec{\gamma} u(\vec{p}) = 0; \quad (5.30)$$

ferner folgt aus (5.26, 27):

$$\begin{aligned} (p+k)^2 + \kappa^2 &= -2\kappa k_0 \\ (p-k')^2 + \kappa^2 &= 2\kappa k'_0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

<sup>1</sup>Die kinetische Energie sei sehr niedrig im Vergleich zur Ruhenergie.

Wegen (5.30, 31) vereinfacht sich (5.28) zu

$$F = -\frac{i e^2}{4 c \hbar \kappa \sqrt{k_0 k'_0}} \bar{u}(\vec{p}') O u(\vec{p}) \quad (5.32)$$

mit

$$O = \frac{1}{k_0} \hat{e}' \cdot \vec{\gamma} (i k \cdot \gamma) \hat{e} \cdot \vec{\gamma} + \frac{1}{k'_0} \hat{e} \cdot \vec{\gamma} (i k' \cdot \gamma) \hat{e}' \cdot \vec{\gamma}. \quad (5.33)$$

*Elektronenspinmittelung(-summation)*. Anwendung von (5.21) führt mit (5.27, 32) auf

$$\overline{\sum_{spin}} |F|^2 = \left( \frac{e^2}{4 c \hbar \kappa} \right)^2 \frac{1}{8 k_0 k'_0 p'_0} Sp \left( O (-\gamma_4 - 1) \bar{O} (i p' \cdot \gamma - \kappa) \right), \quad (5.34)$$

wo  $O$  durch (5.33) gegeben ist;  $\bar{O}$  durch (5.20) definiert.

Die Auswertung von (5.34) erfolgt mit Hilfe der *Spurformeln* in Kap. 3. Die langwierige Rechnung wird hier nicht vorgeführt. Das Resultat ist

$$Sp \left( O (-\gamma_4 - 1) \bar{O} (i p' \cdot \gamma - \kappa) \right) = 8 \left( \frac{1}{k_0} - \frac{1}{k'_0} \right) k \cdot k' + 32 \kappa (\hat{e} \cdot \hat{e}')^2. \quad (5.35)$$

Weiterhin benutzt man die *Impuls-Energie-Erhaltung*:

$$p'_\mu + k'_\mu = i \kappa \delta_{\mu 4} + k_\mu; \quad (5.36)$$

daraus folgt mit (5.26):

$$k \cdot k' = \kappa (k'_0 - k_0), \quad (5.37)$$

womit (5.35) die folgende Gestalt annimmt:

$$Sp \left( O (-\gamma_4 - 1) \bar{O} (i p' \cdot \gamma - \kappa) \right) = 8 \kappa \left( \frac{k'_0}{k_0} + \frac{k_0}{k'_0} - 2 + 4 (\hat{e} \cdot \hat{e}')^2 \right). \quad (5.38)$$

Mit (5.38) folgt schließlich aus (5.34):

$$\overline{\sum_{Spin}} |F|^2 = \left( \frac{e^2}{4 c \hbar \kappa} \right)^2 \frac{\kappa}{k_0 k'_0 p'_0} \left( \frac{k_0}{k'_0} + \frac{k'_0}{k_0} - 2 + 4 (\hat{e} \cdot \hat{e}')^2 \right). \quad (5.39)$$

Photonenpolarisationsmittelung (-summation). Mit (5.22) folgt

$$\sum_{\hat{e}'} (\hat{e} \cdot \hat{e}')^2 = 1 - \frac{(\hat{e} \cdot \vec{k}')^2}{\vec{k}'^2} \quad (5.40)$$

und daraus – erneut mit (5.22) –

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\hat{e}} \sum_{\hat{e}'} (\hat{e} \cdot \hat{e}')^2 &= 1 - \frac{1}{2 \vec{k}'^2} \sum_{\hat{e}} (\hat{e} \cdot \vec{k}')^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2 \vec{k}'^2} \left( \vec{k}'^2 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{k}')^2}{\vec{k}^2} \right), \end{aligned} \quad (5.41)$$

d. h.

$$\overline{\sum_{pol}} (\hat{e} \cdot \hat{e}')^2 = \frac{1}{2} + \frac{(\vec{k} \cdot \vec{k}')^2}{2 \vec{k}^2 \vec{k}'^2} = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \vartheta), \quad (5.42)$$

wo  $\vartheta$  ist der *Streuwinkel* des Photons ist.

Bei der Operation  $\overline{\sum_{pol}}$  werden die nicht von  $\hat{e}, \hat{e}'$  abhängigen Terme mit 2 multipliziert.

Somit folgt aus (5.39, 42):

$$\overline{\sum} |F|^2 = \left( \frac{e^2}{4 c \hbar \kappa} \right)^2 \frac{2 \kappa}{k_0 k_0' p_0'} \left( \frac{k_0}{k_0'} + \frac{k_0'}{k_0} - \sin^2 \vartheta \right). \quad (5.43)$$

Der *Wirkungsquerschnitt* für die Streuung von unpolarisierten Photonen an ruhenden Elektronen ist nach (5.24) ( $|\vec{p}'/p_0| = 1$  für Photon,  $|\vec{q}'/q_0| = 0$  für Elektron vorher;  $|\vec{p}'/p_0| = k_0'^2$  für Photon,  $q_0' = p_0'$  für Elektron nachher):

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\Omega \frac{k_0'^2}{\partial(k_0' + p_0')/\partial k_0'} \overline{\sum} |F|^2. \quad (5.44)$$

Berechnung der partiellen Ableitung ( $\vartheta$  fest) im Nenner des Integranden von (5.44) mit Hilfe der Energie-Impuls-Bilanz. Aus der Impulserhaltung

$$\vec{p}' + \vec{k}' = \vec{k} \quad (5.45)$$

folgt mit (5.26):

$$\begin{aligned} p_0'^2 &= \kappa^2 + \vec{p}'^2 = \kappa^2 + (\vec{k}' - \vec{k})^2 \\ &= \kappa^2 + k_0'^2 + k_0^2 - 2k_0'k_0 \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (5.46)$$

somit ist

$$\frac{\partial(k_0' + p_0')}{\partial k_0'} = 1 + \frac{2k_0' - 2k_0 \cos \vartheta}{2p_0'} = \frac{(p_0' + k_0')^2 - k_0^2 - \kappa^2}{2k_0'p_0'}. \quad (5.47)$$

Mit der Energieerhaltung

$$p_0' + k_0' = \kappa + k_0 \quad (5.48)$$

folgt aus (5.47):

$$\frac{\partial(k_0' + p_0')}{\partial k_0'} = \frac{k_0 \kappa}{k_0' p_0'}. \quad (5.49)$$

Somit ergibt sich für den Wirkungsquerschnitt (5.44) der Ausdruck:

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\Omega \frac{p_0' k_0'^3}{\kappa k_0} \overline{\sum |F|^2}. \quad (5.50)$$

Mit (4.53) folgt schließlich

$$\sigma = \frac{1}{2} r_0^2 \int d\Omega \frac{k_0'^2}{k_0^2} \left( \frac{k_0}{k_0'} + \frac{k_0'}{k_0} - \sin^2 \vartheta \right), \quad (5.51)$$

wobei man

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi c \hbar \kappa} = \frac{e^2}{4\pi m c^2} \quad (5.52)$$

als *klassischen Elektronenradius* bezeichnet: Die elektrostatische Energie einer auf eine Kugel vom Radius  $r_0$  gleichmäßig verteilten Ladung ist  $\frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi r_0}$ . Setzt man dies gleich der Ruhenergie  $m c^2$ , so erhält man – bei Vernachlässigung des Geometriefaktors  $\frac{3}{5}$  – die Beziehung (5.52).

Elimination von  $k_0'$  aus (5.51) mit Hilfe der *Compton-Formel*:

$$k_0' = \frac{k_0}{1 + (k_0/\kappa)(1 - \cos \vartheta)}, \quad (5.53)$$

die sich aus (5.37) ergibt – oder aus (5.46, 48).

Im *niederenergetischen Grenzfall*  $k_0 \ll \kappa$  ist  $k_0' \simeq k_0$ . Dann reduziert sich (5.51) auf die *Thomson-Formel*:

$$\sigma = r_0^2 \int d\Omega \left( 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right) \quad (5.54)$$

Für die Streuung *polarisierter Photonen* an ruhenden Elektronen hat man statt (5.43) den Ausdruck (5.39) in (5.50) einzusetzen. Man erhält dann den *Klein-Nishina-Wirkungsquerschnitt*:

$$\sigma_{pol} = \frac{1}{4} r_0^2 \int d\Omega \frac{k_0'^2}{k_0^2} \left( \frac{k_0}{k_0'} + \frac{k_0'}{k_0} - 2 + 4(\hat{e} \cdot \hat{e}')^2 \right). \quad (5.55)$$

**Beispiel: Elektron-Positron-Vernichtung.** Elektron und Positron im Eingangskanal mit den Wellenvektoren  $p$  bzw.  $q$ ; Photon(en) im Ausgangskanal mit den Wellenvektoren  $k, k' \dots$  Die erste Ordnung mit der Produktion von *einem* Photon liefert keinen Beitrag, da die Energie-Impuls-Bilanz nicht erfüllbar ist:

$$p + q \neq k; \quad (5.56)$$

vgl. (4.91). Die zweite Ordnung mit der Produktion von *zwei* Photonen trägt wiederum (nur) über den Term  $S_c$  gemäß (4.92, 93) zum Prozess bei.

Statt (4.94, 95) hat man hier für die Feldoperatoren die Ausdrücke

$$\begin{aligned} A_\mu(x) A_\nu(x') &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{c\hbar}{2k_0}} \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{c\hbar}{2k_0}} \\ &\times \left( a_\mu^*(\vec{k}') e^{-ik' \cdot x} a_\nu^*(\vec{k}) e^{-ik \cdot x'} + a_\mu^*(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} a_\nu^*(\vec{k}') e^{-ik' \cdot x'} \right) \end{aligned} \quad (5.57)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} b(\vec{q}) \bar{v}(\vec{q}) e^{iq \cdot x} \\ \psi(x') &= \frac{1}{\sqrt{V}} a(\vec{p}) u(\vec{p}) e^{ip \cdot x'}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Diese führen an Stelle von (4.97) auf ( $k' \rightarrow k', k \rightarrow -k, p' \rightarrow -q, p \rightarrow p$ ):

$$S_c = \frac{(2\pi)^4}{V^2} \delta(p + q - k - k') a_\mu^*(\vec{k}') a_\nu^*(\vec{k}) b(\vec{q}) a(\vec{p}) F_{\mu\nu} \quad (5.59)$$

mit

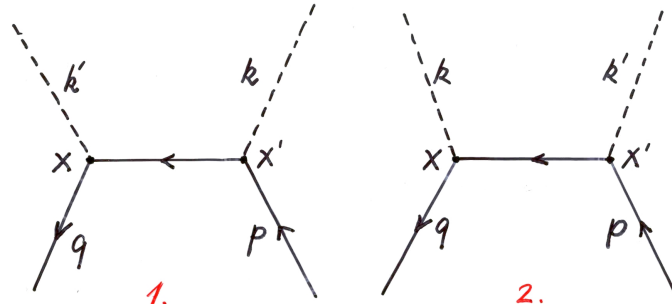
$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \frac{ie^2}{2c\hbar \sqrt{k_0 k_0'}} \\ &\times \bar{v}(\vec{q}) \left( \gamma_\mu \frac{i(p-k) \cdot \gamma - \kappa}{(p-k)^2 + \kappa^2} \gamma_\nu + \gamma_\nu \frac{i(p-k') \cdot \gamma - \kappa}{(p-k')^2 + \kappa^2} \gamma_\mu \right) u(\vec{p}). \end{aligned} \quad (5.60)$$



Die  $\delta$ -Funktion in (5.59) bringt die *Energie-Impuls-Erhaltung* zum Ausdruck:

$$p + q = k + k' . \quad (5.61)$$

Graphische Darstellung der beiden Terme in (5.60) durch *Feynman-Diagramme*:



• Abbildung 5.1 •

Elektron ( $p$ ) bei  $x'$ , Positron ( $q$ ) bei  $x$  absorbiert. Photonenemission: erster Term (1.) mit  $k$  bei  $x'$ ,  $k'$  bei  $x$ ; zweiter Term (2.) mit  $k'$  bei  $x'$ ,  $k$  bei  $x$ .

Vereinfachung von  $F_{\mu\nu}$ : Aus (5.29) leitet man mit (3.52) die Identitäten

$$\left( i(p - k) \cdot \gamma - \kappa \right) \gamma_\nu u(\vec{p}) = \left( 2i p_\nu - (i k \cdot \gamma) \gamma_\nu \right) u(\vec{p}) \quad (5.62)$$

$$\left( i(p - k') \cdot \gamma - \kappa \right) \gamma_\mu u(\vec{p}) = \left( 2i p_\mu - (i k' \cdot \gamma) \gamma_\mu \right) u(\vec{p})$$

her; ferner folgt aus (5.26):

$$(p - k)^2 + \kappa^2 = -2p \cdot k \quad (5.63)$$

$$(p - k')^2 + \kappa^2 = -2p \cdot k' .$$

Wegen (5.62, 63) vereinfacht sich (5.60) zu

$$F_{\mu\nu} = \frac{-i e^2}{4 c \hbar \sqrt{k_0 k'_0}} \bar{v}(\vec{q}) O_{\mu\nu} u(\vec{p}) \quad (5.64)$$

mit

$$O_{\mu\nu} = \frac{1}{p \cdot k} \gamma_\mu \left( 2i p_\nu - (i k \cdot \gamma) \gamma_\nu \right) + \frac{1}{p \cdot k'} \gamma_\nu \left( 2i p_\mu - (i k' \cdot \gamma) \gamma_\mu \right) ; \quad (5.65)$$

folglich ist – siehe (5.20) –

$$F_{\mu\nu}^* = \frac{i e^2}{4 c \hbar \sqrt{k_0 k_0'}} \bar{u}(\vec{p}) \bar{O}_{\mu\nu} v(\vec{q}) \quad (5.66)$$

mit

$$\bar{O}_{\mu\nu} = \frac{1}{p \cdot k} \left( 2 i p_\nu - \gamma_\nu (i k \cdot \gamma) \right) \gamma_\mu + \frac{1}{p \cdot k'} \left( 2 i p_\mu - \gamma_\mu (i k' \cdot \gamma) \right) \gamma_\nu . \quad (5.67)$$

*Wirkungsquerschnitt* – gemittelt über die Spinzustände von einlaufendem Elektron und Positron, aufsummiert über die Polarisationszustände der auslaufenden Photonen – gemäß (5.24) ( $|\vec{p}'| = p'_0 = k_0$ ,  $q'_0 = k'_0$ ):

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2 |\vec{p}'/p_0 - \vec{q}'/q_0|} \int d\Omega \frac{k_0^2}{\partial(k_0 + k'_0)/\partial k_0} \overline{\sum_{spin} F_{\mu\nu}^* F_{\mu\nu}} , \quad (5.68)$$

$d\Omega$  = Raumwinkelelement in Richtung  $\vec{k}$ . Anwendung von (5.17, 18) führt mit (5.64, 66) auf

$$\overline{\sum_{spin} F_{\mu\nu}^* F_{\mu\nu}} = \left( \frac{e^2}{4 c \hbar} \right)^2 \frac{1}{16 k_0 k'_0 p_0 q_0} Sp \left( O_{\mu\nu} (i p \cdot \gamma - \kappa) \bar{O}_{\mu\nu} (i q \cdot \gamma + \kappa) \right); \quad (5.69)$$

vgl. (5.21, 34). Die Auswertung der Spur in (5.69) erfolgt wiederum mit den Methoden aus Kap. 3. Die langwierige Rechnung wird – wie im Falle der Photon-Elektron-Streuung – hier ebenfalls nicht vorgeführt. Das Resultat ist

$$\begin{aligned} \overline{\sum_{spin} F_{\mu\nu}^* F_{\mu\nu}} &= \left( \frac{e^2}{4 c \hbar} \right)^2 \frac{2}{k_0 k'_0 p_0 q_0} \\ &\times \left( \frac{p \cdot k'}{p \cdot k} + \frac{p \cdot k}{p \cdot k'} - 2 \left( \frac{\kappa^2}{p \cdot k} + \frac{\kappa^2}{p \cdot k'} \right) - \left( \frac{\kappa^2}{p \cdot k} + \frac{\kappa^2}{p \cdot k'} \right)^2 \right) . \end{aligned} \quad (5.70)$$

Speziell im *Schwerpunktsystem* ist

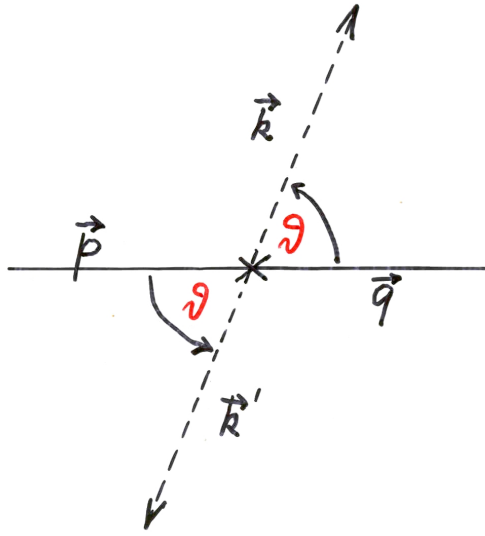
$$\vec{q} = -\vec{p}, \quad \vec{k}' = -\vec{k}, \quad (5.71)$$

woraus mit (5.61)

$$p_0 = q_0 = k_0 = k'_0 \quad (5.72)$$

resultiert. Ferner gilt dort wegen (5.72):

$$\begin{aligned} p \cdot k &= |\vec{p}| |\vec{k}| \cos \vartheta - p_0 k_0 \\ &= -p_0 (p_0 - |\vec{p}| \cos \vartheta) \\ p \cdot k' &= -p_0 (p_0 + |\vec{p}| \cos \vartheta) . \end{aligned} \quad (5.73)$$



• Abbildung 5.2 •

$\vartheta$  ist der Streuwinkel im Schwerpunktsystem. Mit (5.70 - 73) folgt aus (5.68):

$$\sigma = r_0^2 \frac{\kappa^2}{2|\vec{p}|p_0} \int d\Omega \left( \frac{p_0^2 + \kappa^2}{p_0^2 - \vec{p}^2 \cos^2 \vartheta} - \frac{\kappa^4}{(p_0^2 - \vec{p}^2 \cos^2 \vartheta)^2} - \frac{1}{2} \right), \quad (5.74)$$

wo  $r_0$  wiederum der klassische Elektronenradius (5.52) ist.

Die Auswertung des Integrals (5.74) ist in geschlossener Form möglich; die Rechnung wird hier nicht im Einzelnen ausgeführt; das Resultat ist

$$\sigma = \pi r_0^2 \frac{\kappa^2}{2p_0^2} \left( \frac{\beta^2 - 2}{\beta} + \frac{3 - \beta^4}{2\beta^2} \ln \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \right) \quad (5.75)$$

mit

$$\beta = |\vec{p}|/p_0. \quad (5.76)$$

Auch im *Laborsystem* – wo entweder das Elektron oder das Positron anfangs ruhen – kann  $\sigma$  in geschlossener Form angegeben werden (Dirac 1930).

Der Wirkungsquerschnitt für den inversen Prozess, die *Elektron-Positron-Erzeugung* (Paarerzeugung) durch Vernichtung zweier Photonen, ist mit gleichem formalen Aufwand berechenbar. Insbesondere sind die erforderlichen Spurberechnungen von gleicher Art wie bei der Auswertung von (5.69) (Breit & Wheeler 1934).

**Beispiel: Elektron-Elektron-Streuung.** Die Elektronen laufen mit  $p, q$  ein und mit  $p', q'$  aus. Die erste Ordnung liefert wieder keinen Beitrag; in zweiter Ordnung trägt (nur) der Term  $S_b$  bei. Nach (4.84 b, 58, 59) hat man

$$S_b = -i c \hbar \frac{e^2}{2 c^2 \hbar^2} \int d x \int d x' D_F(x - x') : \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) \bar{\psi}(x') \gamma_\nu \psi(x') : \delta_{\mu\nu} \quad (5.77)$$

mit

$$D_F(x - x') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d k \frac{e^{i k \cdot (x - x')}}{k^2 - i \varepsilon}. \quad (5.78)$$

Aus den Fourier-Reihen (4.87) für die Feldoperatoren  $\psi, \bar{\psi}$  tragen nur diejenigen Terme zum Stoßprozess bei, die einer zweifachen Elektronenvernichtung ( $a(\vec{p}), a(\vec{q})$ ) und einer zweifachen Elektronenerzeugung ( $a^*(\vec{p}'), a^*(\vec{q}')$ ) entsprechen:

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) \bar{\psi}(x') \gamma_\nu \psi(x') \\ &= \frac{1}{V^2} \left( a^*(\vec{q}') \bar{u}(\vec{q}') e^{-i \vec{q}' \cdot x} \gamma_\mu a(\vec{q}) u(\vec{q}) e^{i \vec{q} \cdot x} a^*(\vec{p}') \bar{u}(\vec{p}') e^{-i \vec{p}' \cdot x'} \gamma_\nu a(\vec{p}) u(\vec{p}) e^{i \vec{p} \cdot x'} \right. \\ & \quad \left. + a^*(\vec{p}') \bar{u}(\vec{p}') e^{-i \vec{p}' \cdot x} \gamma_\mu a(\vec{q}) u(\vec{q}) e^{i \vec{q} \cdot x} a^*(\vec{q}') \bar{u}(\vec{q}') e^{-i \vec{q}' \cdot x'} \gamma_\nu a(\vec{p}) u(\vec{p}) e^{i \vec{p} \cdot x'} \right) \quad (5.79) \end{aligned}$$

mit

$$p^2 = q^2 = p'^2 = q'^2 = -\kappa^2. \quad (5.80)$$

(5.78, 79) in (5.77) einsetzen. Die Integration mit Hilfe von (4.96) führt auf

$$S_b = \frac{(2\pi)^4}{V^2} \delta(p + q - p' - q') F a^*(\vec{p}') a^*(\vec{q}') a(\vec{q}) a(\vec{p}) \quad (5.81)$$

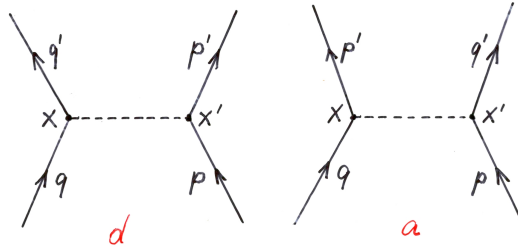
mit

$$\begin{aligned} F &= -\frac{i e^2}{c \hbar} \left( \frac{1}{(p' - p)^2} \bar{u}(\vec{q}') \gamma_\mu u(\vec{q}) \bar{u}(\vec{p}') \gamma_\mu u(\vec{p}) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{(q' - q)^2} \bar{u}(\vec{p}') \gamma_\mu u(\vec{q}) \bar{u}(\vec{q}') \gamma_\mu u(\vec{p}) \right). \quad (5.82) \end{aligned}$$

Die  $\delta$ -Funktion in (5.81) spiegelt die *Energie-Impuls-Erhaltung* wieder:

$$p + q = p' + q'. \quad (5.83)$$

Graphische Darstellung der beiden Terme in (5.82) durch *Feynman-Diagramme*:



• Abbildung 5.3 •

Direkter Term (d) und Austauschterm (a). Identische Teilchen.

*Wirkungsquerschnitt* – gemittelt über die Spinzustände der einlaufenden Elektronen, aufsummiert über die Spinzustände der auslaufenden Elektronen – entsprechend (5.24):

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2 |\vec{p}'/p_0 - \vec{q}'/q_0|} \int d\Omega \frac{|\vec{p}'| p_0'}{\partial(p_0' + q_0') / \partial p_0'} \overline{\sum}_{spin} |F|^2. \quad (5.84)$$

Nach länglicher Rechnung, die von der Summationsformel (5.17) Gebrauch macht sowie von den Methoden zur Berechnung der Spur von Produkten aus  $\gamma$ -Matrizen, erhält man aus (5.82):

$$\begin{aligned} \overline{\sum}_{spin} |F|^2 &= \left( \frac{e^2}{c\hbar} \right)^2 \frac{1}{2p_0 q_0 p_0' q_0'} \left( \frac{2(p \cdot q)^2}{(p' - p)^4} + \frac{2(p \cdot q)^2}{(q' - p)^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(p \cdot q)^2 + 4\kappa^2(p \cdot q)}{(p' - p)^2 (q' - p)^2} + \frac{p \cdot q - \kappa^2}{(p' - p)^2} + \frac{p \cdot q - \kappa^2}{(q' - p)^2} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (5.85)$$

Im *Schwerpunktsystem* mit

$$\begin{aligned} \vec{p} + \vec{q} &= \vec{p}' + \vec{q}' = \vec{0} \\ p_0 &= q_0 = p_0' = q_0' \end{aligned} \quad (5.86)$$

führen (5.84, 85) für den Wirkungsquerschnitt auf das Resultat (Møller 1932):

$$\sigma = r_0^2 \frac{\kappa^2}{2p_0^2} \int d\Omega \left( \frac{2(\vec{p}^2 + p_0^2)^2}{\vec{p}^4 \sin^4 \vartheta} - \frac{3(\vec{p}^2 + p_0^2)^2 - 4\vec{p}^4}{2\vec{p}^4 \sin^2 \vartheta} + \frac{1}{2} \right). \quad (5.87)$$

Im *nichtrelativistischen Grenzfall*  $\vec{p} \ll p_0 \simeq \kappa$  reduziert sich (5.87) mit (3.51, 5.52) auf

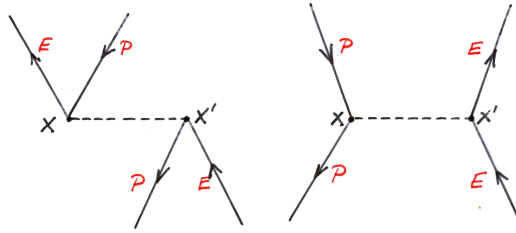
$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &\simeq \frac{r_0^2 \kappa^4}{4 \vec{p}^4} \left( \frac{4}{\sin^4 \vartheta} - \frac{3}{\sin^2 \vartheta} \right) \\ &= \left( \frac{e^2}{8\pi E} \right)^2 \left( \frac{1}{\sin^4 \vartheta / 2} + \frac{1}{\cos^4 \vartheta / 2} - \frac{1}{\sin^2(\vartheta/2) \cos^2(\vartheta/2)} \right) \end{aligned} \quad (5.88)$$

mit der kinetischen Relativenergie (reduzierte Masse  $m/2$ )

$$E = \hbar^2 \vec{p}^2 / m . \quad (5.89)$$

Gl. (5.88) ist im Wesentlichen – bis auf einen Faktor im 3. Term – die *Mottsche Streuformel*: Rutherford-Streuung plus Antisymmetrisierung für identische Elektronen inkl. Singulett-Triplett-Mittelung.

**Elektron-Positron-Streuung** mit zwei Beiträgen aus  $S_b$ :



• Abbildung 5.4 •

Beachte den Unterschied zur Elektron-Positron-Vernichtung mit zwei Beiträgen aus  $S_c$  – siehe Abbildung 5.1.

Falls sich das bisher betrachtete System aus Photonen- und Elektronen-Positronenfeld in einem **äußeren elektromagnetischen Feld**  $A_\mu^a(x)$  befindet, hat man in (4.76) zu setzen:

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) + A_\mu^a(x) \quad (5.90)$$

$$H(x) \longrightarrow H(x) + H^a(x)$$

mit

$$H(x) = -ie : A_\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) : \quad (5.91)$$

$$H^a(x) = -ie : A_\mu^a(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) :$$

Einsetzen in (4.75, 76) und Beschränkung auf die in  $A_\mu^a(x)$  *linearen* Terme – Grenzfall eines *schwachen* äußeren Feldes – führt auf

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \quad (5.92)$$

mit

$$S_n = \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{-i}{c\hbar} \right)^n \int dx \int dx' \dots \int dx^{(n-1)} T \left( H^a(x) H(x') \dots H(x^{(n-1)}) \right) . \quad (5.93)$$

Terme der Ordnung  $(H^a(x))^0$  bleiben hierbei unberücksichtigt.

**Beispiel:** Streuung eines Elektrons ( $p \rightarrow p'$ ) im äußeren Feld in niedrigster (erster) Ordnung; mit (4.87) erhält man

$$\begin{aligned}
 S_1 &= -\frac{e}{c\hbar} \int dx : A_\mu^a(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) : \\
 &= -\frac{e}{c\hbar V} \int dx A_\mu^a(x) e^{-i(p'-p)\cdot x} a^*(\vec{p}') a(\vec{p}) \bar{u}(\vec{p}') \gamma_\mu u(\vec{p}) \\
 &= -\frac{e}{c\hbar V} \tilde{A}_\mu^a(q) \bar{u}(\vec{p}') \gamma_\mu u(\vec{p}) a^*(\vec{p}') a(\vec{p})
 \end{aligned} \tag{5.94}$$

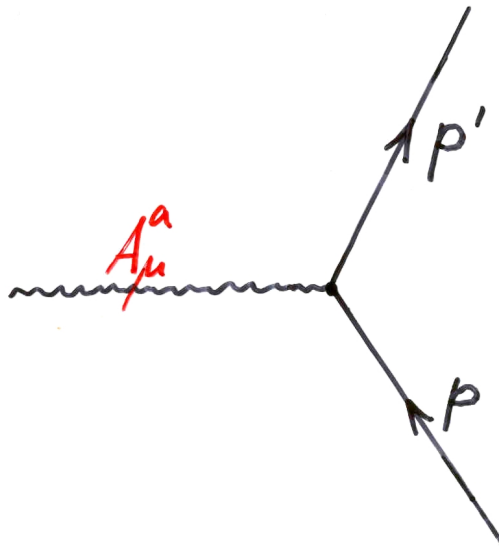
mit

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{A}_\mu^a(q) &= \int dx A_\mu^a(x) e^{-iq\cdot x} \\
 A_\mu^a(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int dq \tilde{A}_\mu^a(q) e^{iq\cdot x}
 \end{aligned} \right\} \text{Fourier-Transformation} \tag{5.95}$$

und

$$q = p' - p. \tag{5.96}$$

Das ist der Energie-Impuls-Übertrag beim Streuprozess. *Graphische Darstellung* durch das Diagramm:



• Abbildung 5.5 •

Im *statischen* äußeren Feld ist

$$A_\mu^a(x) = A_\mu^a(\vec{x}) ,$$

folglich

$$\tilde{A}_\mu^a(q) = 2\pi \delta(q_0) \tilde{A}_\mu^a(\vec{q})$$

mit

$$\tilde{A}_\mu^a(\vec{q}) \int d\vec{x} A_\mu^a(\vec{x}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} ; \quad (5.97)$$

damit folgt aus (5.94):

$$S_1 = \frac{2\pi}{V} \delta(p'_0 - p_0) F a^*(\vec{p}') a(\vec{p}) \quad (5.98)$$

mit

$$F = -\frac{e}{c\hbar} \tilde{A}_\mu^a(\vec{p}' - \vec{p}) \bar{u}(\vec{p}') \gamma_\mu u(\vec{p}) . \quad (5.99)$$

Die  $\delta$ -Funktion in (5.98) bringt die *Energieerhaltung* zum Ausdruck:

$$p'_0 = p_0 . \quad (5.100)$$

Der Impuls ist dagegen im Allgemeinen *nicht* erhalten:  $\vec{p}' \neq \vec{p}$ .

Der spingemittelte/-aufsummierte *Wirkungsquerschnitt* für den betrachteten Streuprozess berechnet sich nach (5.12, 24) – wegen  $|\vec{p}'| = |\vec{p}|$  und  $p'_0 = p_0$  – zu

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\Omega p_0^2 \overline{\sum_{spin} |F|^2} \quad (5.101)$$

mit – wegen (5.20, 21, 99) –

$$\overline{\sum_{spin} |F|^2} = \left(\frac{e}{c\hbar}\right)^2 \frac{1}{8p_0^2} \tilde{A}_\mu^a \tilde{A}_\nu^{a*} Sp \left( \gamma_\mu (i p \cdot \gamma - \kappa) \gamma_4 \gamma_\nu \gamma_4 (i p' \cdot \gamma - \kappa) \right) . \quad (5.102)$$

Statt die Spur in (5.102) für den allgemeinen Fall weiter auszuwerten, betrachten wir den wichtigen Spezialfall der **Coulomb-Streuung**, d. h. die Streuung des Elektrons im elektrischen Feld eines (schweren) Atomkerns der Ladung  $-Ze$ ; dafür gilt

$$A_\mu^a(\vec{x}) = -i \delta_{\mu 4} \frac{Ze}{4\pi |\vec{x}|} \quad (5.103 a)$$



und – berechne das Fourier-Integral gemäß (5.97) –

$$\tilde{A}_\mu^a(\vec{q}) = -i \delta_{\mu 4} \frac{Z e}{\vec{q}^2}. \quad (5.103 \text{ b})$$

Damit vereinfacht sich (5.102) zu

$$\begin{aligned} \overline{\sum_{spin} |F|^2} &= \frac{Z^2 e^4}{8 p_0^2 c^2 \hbar^2 (\vec{p}' - \vec{p})^4} Sp \left( \gamma_4 (i p \cdot \gamma - \kappa) \gamma_4 (i p' \cdot \gamma - \kappa) \right) \\ &= \frac{Z^2 e^4}{2 c^2 \hbar^2 (\vec{p}' - \vec{p})^4 p_0^2} (\vec{p}' \cdot \vec{p} + p_0^2 + \kappa^2), \end{aligned} \quad (5.104)$$

und für den Wirkungsquerschnitt folgt:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int d\Omega \frac{Z^2 e^4}{8 \pi^2 c^2 \hbar^2 (\vec{p}' - \vec{p})^4} \frac{1}{(\vec{p}' \cdot \vec{p} + p_0^2 + \kappa^2)} \\ &= \int d\Omega \frac{Z^2 r_0^2}{4 (\vec{p}^4 / \kappa^4) \sin^4 \vartheta / 2} \left( 1 + \frac{\vec{p}^2}{\kappa^2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right), \end{aligned} \quad (5.105)$$

wo  $\vartheta$  der von  $\vec{p}'$  und  $\vec{p}$  eingeschlossene Streuwinkel ist.

Für den *Niederenergiebereich*  $|\vec{p}| \ll \kappa$  reduziert sich (5.105) zur *Rutherford-Formel*

$$\sigma = \int d\Omega \left( \frac{Z e^2}{4 \pi} \right)^2 \frac{1}{4 m^2 v^4 \sin^4 \vartheta / 2}, \quad (5.106)$$

wo  $v$  die Geschwindigkeit des einlaufenden ( und auslaufenden) Elektrons ist.

**Magnetisches Moment**, dazu Umformung des  $S_1$ -Operators. Mit

$$\bar{u}(\vec{p}') \gamma_\mu u(\vec{p}) = -\frac{1}{2\kappa} \bar{u}(\vec{p}') (i p'_\mu + i p_\mu + q_\nu \sigma_{\mu\nu}) u(\vec{p}), \quad (5.107)$$

was man mit Hilfe von (5.29) und

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \quad (5.108)$$

– siehe (3.100) – herleitet, folgt aus (5.94):

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{V} \frac{e}{4 c \hbar \kappa} a^*(\vec{p}') a(\vec{p}) \\ &\times \bar{u}(\vec{p}') \left( 2 i (p'_\mu + p_\mu) \tilde{A}_\mu^a(q) - \sigma_{\mu\nu} (q_\mu \tilde{A}_\nu^a(q) - q_\nu \tilde{A}_\mu^a(q)) \right) u(\vec{p}). \end{aligned} \quad (5.109)$$

Weiterhin wird vorausgesetzt:

- niedrige Impulse  $\vec{p}'$ ,  $\vec{p}$ ;
- reines Magnetfeld:  $\tilde{A}_4^a(q) = 0$ . Damit reduziert sich (5.109) zu

$$S_1 = -\frac{1}{V} \frac{e}{4c\hbar\kappa} a^*(\vec{p}') a(\vec{p}) \bar{u}(\vec{p}') \sigma_{ij} \left( q_i \tilde{A}_j^a(q) - q_j \tilde{A}_i^a(q) \right) u(\vec{p}). \quad (5.110)$$

Dieser Beitrag erster Ordnung zum  $S$ -Operator ist auch herleitbar aus einer *effektiven Wechselwirkung* der Dichte

$$\begin{aligned} H_{eff}(x) &= -\frac{e}{4\kappa} : (\partial_i A_j^a(x) - \partial_j A_i^a(x)) \bar{\psi}(x) \sigma_{ij} \psi(x) : \\ &= -\frac{1}{2} F_{ij}^a(x) M_{ij}(x). \end{aligned} \quad (5.111)$$

Hierbei ist

$$F_{ij}^a(x) = \partial_i A_j^a(x) - \partial_j A_i^a(x) \quad (5.112 \text{ a})$$

das äußere elektromagnetische Feld (hier nur Magnetfeld, vgl. (1.30)) mit der Fourier-Transformierten

$$\tilde{F}_{ij}^a(q) = i \left( q_i \tilde{A}_j^a(q) - q_j \tilde{A}_i^a(q) \right), \quad (5.112 \text{ b})$$

und

$$M_{ij}(x) = \frac{e}{2\kappa} : \psi^*(x) \gamma_4 \sigma_{ij} \psi(x) : \quad (5.113)$$

ist die Dichte des magnetischen Moments des Elektron-Positronfeldes. Also ist das magnetische Moment selbst durch

$$\mathcal{M}_{ij} = \frac{e}{2\kappa} \int d\vec{x} : \psi^* \gamma_4 \sigma_{ij} \psi : \quad (5.114)$$

gegeben.

*Anmerkungen:*

(5.111):  $\frac{1}{2} F_{ij}^a(x) M_{ij}(x) = B_k(x) M_k(x) = \vec{B}(\vec{x}) \cdot \vec{M}(\vec{x})$  entspricht dem klassischen Ausdruck für die Wechselwirkung von magnetischem Moment und Magnetfeld;

(5.114): Der Faktor  $\gamma_4$ , der im Spinterm in (3.99) fehlt, trägt der Tatsache Rechnung, dass Elektronen und Positronen zwar gleichen Spin haben, aber mit unterschiedlichen Vorzeichen zum magnetischen Moment beitragen.

Auf die gleiche Weise, die vom Spinterm in (3.99) zum Ausdruck (3.135) für die 3-Komponente des Spins *ruhender* Elektronen-Positronen führte, gelangt man – ausgehend

von (5.114) – zu folgender Formel für die 3-Komponente des magnetischen Momentes *ruhender* Elektronen-Positronen:

$$\mathcal{M}_{12}(0) = \frac{e}{2\kappa} (a_1^*(0) a_1(0) - a_2^*(0) a_2(0) - b_1^*(0) b_1(0) + b_2^*(0) b_2(0)) . \quad (5.115)$$

*Interpretation:* Die Spineigenwerte  $\pm \hbar / 2$  entsprechen den Eigenwerten  $\pm e / 2\kappa$  des magnetischen Momentes des Elektrons und den Eigenwerten  $\mp e / 2\kappa$  des magnetischen Momentes des Positrons. Also: Elektronen - Positronen mit dem magnetischen Moment  $\mu_0$  bzw.  $-\mu_0$ , wo

$$\mu_0 = \frac{e}{2\kappa} = \frac{e\hbar}{2mc} \quad (5.116)$$

das *Bohrsche Magneton* ist.

**Bremsstrahlung:** Photonenemission bei der Streuung geladener Teilchen. Hier: Streuung eines Elektrons ( $p, p'$ ) im Coulomb-Feld eines Atomkerns der Ladung  $-Ze$  dabei Emission eines Photons ( $k$ ).

In niedrigster Ordnung ist dieser Streuprozess durch den Term  $S_2$  (zweite Ordnung) der Reihenentwicklung (5.92, 93) beschreibbar. Setzt man die passenden Fourier-Komponenten aus (4.85, 87) für das einlaufende Elektron ( $V^{-1/2} a(\vec{p}) u(\vec{p}) e^{ip \cdot x}$ ), für das auslaufende Elektron ( $V^{-1/2} a^*(\vec{p}') \bar{u}(\vec{p}') e^{-ip' \cdot x}$ ) und das emittierte Photon ( $V^{-1/2} (c\hbar/2k_0)^{1/2} a_\mu^*(\vec{k}) e^{-ik \cdot x}$ ) sowie das Coulomb-Feld (5.103 b) in das  $S_2$ -Integral gemäß (5.93) ein, so führt die Integration mit Hilfe von (4.95) auf

$$S_2 = \frac{2\pi}{V^{3/2}} \delta(p_0 - p'_0 - k_0) F_\mu a_\mu^*(\vec{k}) a^*(\vec{p}') a(\vec{p}) \quad (5.117)$$

mit

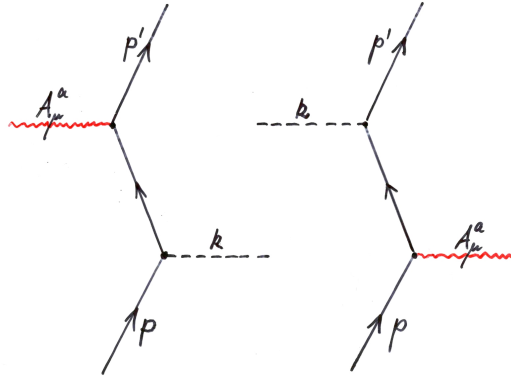
$$F_\mu = \frac{Ze^3}{(c\hbar)^{3/2} (2k_0)^{1/2}} \frac{1}{(\vec{p}' - \vec{p} + \vec{k})^2} \times \bar{u}(\vec{p}') \left( \gamma_4 \frac{i(p-k) \cdot \gamma - \kappa}{(p-k)^2 + \kappa^2} \gamma_\mu + \gamma_\mu \frac{i(p'+k) \cdot \gamma - \kappa}{(p'+k)^2 + \kappa^2} \gamma_4 \right) u(\vec{p}) . \quad (5.118)$$

Die  $\delta$ -Funktion in (5.117) bringt die *Energieerhaltung* zum Ausdruck:

$$p_0 = p'_0 + k_0 . \quad (5.119)$$

Der Impuls ist wegen des äußeren Feldes nicht erhalten.

*Graphische Darstellung* der beiden Terme in (5.118) durch die Diagramme:



• Abbildung 5.6 •

Erster Term: erst Photonenemission, dann Streuung des Elektrons. Zweiter Term: erst Streuung des Elektrons, dann Photonenemission – beim Übergang vom Vertex  $x$  zum Vertex  $x'$ .

*Totale Übergangswahrscheinlichkeit:* Aus (5.117) folgt

$$W = \frac{(2\pi)^2}{V^3} \sum_{\vec{p}'} \sum_{\vec{k}} F_\mu^* F_\mu \left( \delta(p_0 - p'_0 - k_0) \right)^2. \quad (5.120)$$

Summation über alle Impulse  $\vec{p}'$  des auslaufenden Elektrons sowie über alle Impulse  $\vec{k}$  und Polarisationszustände  $\mu$  des emittierten Photons. Mit

$$\left( \delta(p_0 - p'_0 - k_0) \right)^2 = \frac{cT}{2\pi} \delta(p_0 - p'_0 - k_0) \quad (5.121)$$

und (1.92) folgt für die *Rate der Übergangswahrscheinlichkeit:*

$$\begin{aligned} w &= \frac{c}{(2\pi)^2 V^2} \sum_{\vec{k}} \int d\Omega_{\vec{p}'} |\vec{p}'| p'_0 F_\mu^* F_\mu \\ &= \frac{c}{(2\pi)^5 V} \int d\Omega_{\vec{p}'} \int d\Omega_{\vec{k}} \int dk_0 k_0^2 |\vec{p}'| p'_0 F_\mu^* F_\mu. \end{aligned} \quad (5.122)$$

Dabei wurde auch von (5.7) Gebrauch gemacht. Im Integranden von (5.122) ist (5.119) zu beachten.

Der über die Spinzustände des Elektrons im Eingangskanal gemittelte, im Ausgangskanal

aufsummierte *Wirkungsquerschnitt* ist

$$\begin{aligned}\sigma &= \overline{\sum_{spin}} \frac{w}{V^{-1} |\vec{p}'/p_0| c} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^5} \int d\Omega_{\vec{p}'} \int d\Omega_{\vec{k}} \int dk_0 \frac{k_0^2 |\vec{p}'| p_0'}{|\vec{p}'|} \overline{\sum_{spin}} F_\mu^* F_\mu.\end{aligned}\quad (5.123)$$

Der Integrand ist ein *fünffach* differentieller Wirkungsquerschnitt: bezüglich der vier Winkel, welche die Richtungen der beiden Teilchen im Ausgangskanal kennzeichnen, und bzgl. der Energie eines der beiden Teilchen (hier des Photons).

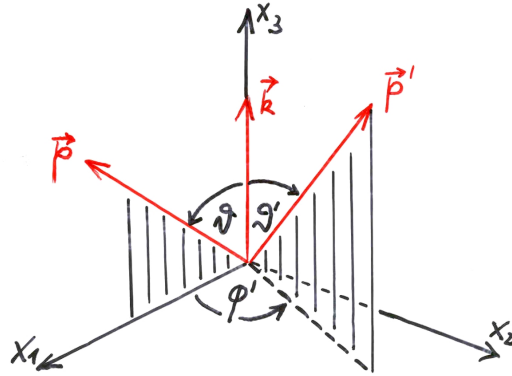
Nach langer Rechnung, die mit (5.29) zunächst eine Vereinfachung von  $F_\mu$  erzielt, die sodann Gebrauch macht von der Summationsformel (5.17) und von den Methoden zur Berechnung der Spur von Produkten aus  $\gamma$ -Matrizen erhält man:

$$\begin{aligned}\overline{\sum_{spin}} F_\mu^* F_\mu &= \frac{Z^2 e^6}{(c\hbar)^3} \frac{1}{16 k_0 p_0 p_0' \vec{q}^2} \\ &\times \left( 2 \frac{(\vec{p}^2 - (\vec{p} \cdot \vec{k})^2 / k_0^2) (4p_0'^2 - \vec{q}^2)}{(p \cdot k)^2} \right. \\ &+ 2 \frac{(\vec{p}'^2 - (\vec{p}' \cdot \vec{k})^2 / k_0^2) (4p_0^2 - \vec{q}^2)}{(p' \cdot k)^2} \\ &- 4 \frac{(\vec{p} \cdot \vec{p}' - (\vec{p} \cdot \vec{k})(\vec{p}' \cdot \vec{k}) / k_0^2) (2p_0'^2 + 2p_0^2 - \vec{q}^2)}{(p \cdot k)(p' \cdot k)} \\ &\left. + 4k_0^2 \frac{(\vec{p}^2 - (\vec{p} \cdot \vec{k})^2 / k_0^2) + (\vec{p}'^2 - (\vec{p}' \cdot \vec{k})^2 / k_0^2)}{(p \cdot k)(p' \cdot k)} \right)\end{aligned}\quad (5.124)$$

mit

$$\vec{q}^2 = (\vec{p}' - \vec{p} + \vec{k})^2.\quad (5.125)$$

In einem Koordinatensystem, in dem  $\vec{k}$  in 3-Richtung zeigt und  $\vec{p}$  in der 31-Ebene liegt:



• Abbildung 5.7 •

ist (Bethe & Heitler 1934):

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \frac{\alpha Z^2 r_0^2}{(2\pi)^2} \int d\Omega_{\vec{p}'} \int d\Omega_{\vec{k}} \int \frac{dk_0}{k_0} \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} \frac{\kappa^2}{\bar{q}^4} \\
 &\times \left( \frac{\bar{p}^2 \sin^2 \vartheta}{(p_0 - |\vec{p}| \cos \vartheta)^2} (4p_0'^2 - \bar{q}^2) + \frac{\bar{p}'^2 \sin^2 \vartheta'}{(p_0' - |\vec{p}'| \cos \vartheta')^2} (4p_0^2 - \bar{q}^2) \right. \\
 &- 2 \frac{|\vec{p}| |\vec{p}'| \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos \varphi'}{(p_0 - |\vec{p}| \cos \vartheta) (p_0' - |\vec{p}'| \cos \vartheta')} (2p_0'^2 + 2p_0 - \bar{q}^2) \\
 &\left. + 2k_0^2 \frac{\bar{p}^2 \sin^2 \vartheta + \bar{p}'^2 \sin^2 \vartheta'}{(p_0 - |\vec{p}| \cos \vartheta) (p_0' - |\vec{p}'| \cos \vartheta')} \right) \quad (5.126)
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \bar{q}^2 &= \bar{p}^2 + \bar{p}'^2 + k_0^2 - 2|\vec{p}| k_0 \cos \vartheta + 2|\vec{p}'| k_0 \cos \vartheta' \\
 &- 2|\vec{p}| |\vec{p}'| (\cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos \varphi') \quad (5.127)
 \end{aligned}$$

und der *Feinstrukturkonstanten*

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi c \hbar} . \quad (5.128)$$

**Zerfall instabiler Teilchen.** Das instabile Teilchen habe vor dem Zerfall den Wellenvektor  $q$ .

- Zerfall in *zwei* Teilchen mit den Wellenvektoren  $k, k'$ .  $S$ -Matrixelement (in 1. Ordnung) von der Gestalt (ohne 0. Ordnung)

$$S_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{V^{3/2}} \delta(q - k - k') F . \quad (5.129)$$

Berechnung der totalen Übergangswahrscheinlichkeit / Zeit nach den obigen Methoden:

$$w = \frac{c}{(2\pi)^2} \int d\Omega_{\vec{k}} \frac{|\vec{k}| k_0}{\partial(k_0 + k'_0) / \partial k_0} |F|^2 . \quad (5.130)$$

Auswertung des Integranden unter Beachtung der Energie-Impuls-Erhaltung

$$q = k + k' . \quad (5.131)$$

*Lebensdauer:*

$$\tau = \frac{1}{w} . \quad (5.132)$$

*Beispiel:* Zerfall eines neutralen Pions in zwei Photonen. Zusätzliche Annahmen über die Wechselwirkung zwischen Pionen- und Photonenfeld erforderlich.

- Zerfall in *drei* Teilchen mit den Wellenvektoren  $k, k', k''$ .  $S$ -Matrixelement (in 2. Ordnung) von der Gestalt

$$S'_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{V^2} \delta(q - k - k' - k'') F' . \quad (5.133)$$

Totale Übergangswahrscheinlichkeit / Zeit:

$$w' = \frac{c}{(2\pi)^5} \int d\vec{k}'' \int d\Omega_{\vec{k}} \frac{|\vec{k}| k_0}{\partial(k_0 + k'_0) / \partial k_0} |F'|^2 \quad (5.134)$$

mit der Energie-Impuls-Bilanz

$$q = k + k' + k'' . \quad (5.135)$$

*Lebensdauer:*

$$\tau' = \frac{1}{w'} . \quad (5.136)$$

*Beispiel:* Zerfall eines neutralen Pions in Positron, Elektron und Photon.

Mit Hilfe der vorstehenden Methoden kann auch die **Wechselwirkung von Photonen mit Atomen** beschrieben und diskutiert werden:

- Lebensdauer angeregter Atome; spontane Emission eines oder mehrerer Photonen.
- Wirkungsquerschnitt für die Anregung von Atomen durch Absorption von Photonen; Photoionisation usw.

Derartige Prozesse werden in dieser Vorlesung *nicht* näher behandelt.

## 6 Regularisierung und Renormierung

Bisher wurden Streuprozesse nur bis zur ersten oder zweiten Ordnung betrachtet. In den Beiträgen höherer Ordnung treten divergente Integrale auf. Diese werden mit den Methoden der *Regularisierung* und *Renormierung* behandelt.

- Regularisierung: *Eindeutigkeit* der Auswertung divergenter Integrale;
- Renormierung: *Beseitigung* der divergenten Integrale.

Bezeichnung der Beiträge höherer Ordnung als *Strahlungskorrekturen*.

Diskussion auf der Grundlage von Feynman-Diagrammen: Äußere und innere Photon- und Elektronen-Positronen-Linien. Vertizes. Siehe Kap. 4.

- *Äußere Linien* repräsentieren die realen Teilchen des Eingangs- und Ausgangskanals; sie stehen für die *Feldoperatoren* der freien ein- und auslaufenden *Photonen*:

$$A_\mu(x) = A_\mu(k) e^{ik \cdot x}, \quad (6.1)$$

bzw. *Elektronen-Positronen*:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi(p) e^{ip \cdot x} \\ \bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}(p) e^{-ip \cdot x}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Vgl. (4.85, 87).  $k$  ist der Wellenvektor des Photons im Eingangskanal (positiver Frequenzanteil  $\Rightarrow$  Vernichtung) oder negative Wellenvektor des Photons im Ausgangskanal (negativer Frequenzanteil  $\Rightarrow$  Erzeugung):  $k^2 = 0$ .  $p$  bezeichnet den Wellenvektor eines Elektrons im Eingangskanal ( $\psi$ ) oder im Ausgangskanal ( $\bar{\psi}$ ) bzw. den negativen Wellenvektor eines Positrons im Eingangskanal ( $\bar{\psi}$ ) oder im Ausgangskanal ( $\psi$ ):  $p^2 + \kappa^2 = 0$ .

- *Innere Linien* repräsentieren virtuelle Teilchen in Zwischenzuständen; diese resultieren aus *Kontraktionen* – siehe Wicksches Theorem – von Paaren von Feldoperatoren. *Photonen*:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) A_\nu(x') &= -i c \hbar \delta_{\mu\nu} D_F(x - x') \\ D_F(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk e^{ik \cdot x} D_F(k) \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$D_F(k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{k^2 + \lambda^2 - i\varepsilon};$$



vgl. (4.58, 59). Einführung des reellen Parameters  $\lambda > 0$  ( $\sim$  positive Photonenruhmase); in physikalischen Endresultaten hat man den Übergang  $\lambda \rightarrow 0$  zu vollziehen.  $k$  ist der (variable) Wellenvektor des virtuellen Photons. *Elektronen-Positronen*:

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(x) \cdot \bar{\psi}_\beta(x') &= i S_{F,\alpha\beta}(x - x') \\ S_F(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp e^{ip \cdot x} S_F(p) \\ S_F(p) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{ip \cdot \gamma - \kappa}{p^2 + \kappa^2 - i\varepsilon};\end{aligned}\tag{6.4}$$

vgl. (4.60, 61).  $p$  ist der (variable) Wellenvektor des virtuellen Fermions.

• *Vertizes*: Die Raumzeitintegrationen in den Beiträgen  $S_n$  zum  $S$ -Operator liefern wegen (4.96) an jedem Vertex eine  $\delta$ -Funktion für die Erhaltung der dort ein- und auslaufenden  $k, p$ -Vektoren. Die internen  $k, p$ -Integrationen über diese  $\delta$ -Funktionen resultieren in einer dem betrachteten  $S_n$ -Term proportionalen  $\delta$ -Funktion für die Erhaltung der  $k, p$ -Vektoren der externen Teilchen als Ausdruck der Energie-Impuls-Erhaltung beim Streuprozess.

Zur Erläuterung der oben erwähnten Divergenzen betrachten wir als Beispiel die *Elektronen-Selbstenergie* und die *Photonen-Selbstenergie* in zweiter Ordnung.

**Beispiel: Elektronen-Selbstenergie.** Wechselwirkung eines Elektrons mit dem virtuellen Photonenfeld (mit sich selbst). Beitrag 2. Ordnung zum  $S$ -Operator durch den Term  $S_e$  aus (4.84) gegeben:

$$\begin{aligned}S_{el} &= S_e \\ &= \frac{e^2}{c^2 \hbar^2} \int dx \int dx' : A_\mu(x) \cdot A_\nu(x') \cdot \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) \cdot \bar{\psi}(x') \cdot \gamma_\nu \psi(x') : \\ &= \frac{e^2}{c \hbar} \int dx \int dx' D_F(x - x') : \bar{\psi}(x) \gamma_\mu S_F(x - x') \gamma_\mu \psi(x') :\end{aligned}\tag{6.5}$$

Mit

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}(p') e^{-ip' \cdot x} \\ \psi(x') &= \psi(p) e^{ip \cdot x'}\end{aligned}\tag{6.6}$$

und

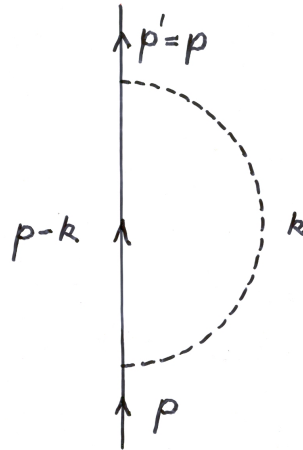
$$D_F(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk e^{ik \cdot (x - x')} D_F(k) \quad (6.7)$$

$$S_F(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk' e^{ik' \cdot (x - x')} S_F(k')$$

und nach Ausführung der  $x, x'$ -Integrationen mit Hilfe von (4.96) folgt

$$S_{el} = \delta(p - p') \frac{e^2}{c\hbar} \int dk D_F(k) : \bar{\psi}(p') \gamma_\mu S_F(p - k) \gamma_\mu \psi(p) : \quad (6.8)$$

Graphische Darstellung – vgl.  $S_e$ -Diagramm in Abbildung 4.3:



• Abbildung 6.1 •

Substituiert man für  $D_F(k)$  und  $S_F(p - k)$  gemäß (6.3, 4), so nimmt der Ausdruck (6.8) die folgende Gestalt an (ohne  $-i\varepsilon$ ):

$$S_{el} = \delta(p - p') \frac{e^2}{c\hbar} \int dk : \bar{\psi}(p') \gamma_\mu \frac{(i(p - k) \cdot \gamma - \kappa)}{(k^2 + \lambda^2)((p - k)^2 + \kappa^2)} \gamma_\mu \psi(p) : \quad (6.9)$$

Dieses Integral *divergiert* für große  $k$  *linear*:

$$\int dk_1 \int dk_2 \int dk_3 \int dk_0 \frac{k_\mu}{k^4} \quad (6.10)$$

**Beispiel: Photonen-Selbstenergie.** Wechselwirkung eines Photons mit dem virtuellen Elektronen-Positronenfeld (mit sich selbst). Beitrag 2. Ordnung zum  $S$ -Operator durch den Term  $S_d$  aus (4.84) gegeben:

$$\begin{aligned} S_{ph} &= S_d \\ &= \frac{e^2}{2c^2\hbar^2} \int dx \int dx' : A_\mu(x) A_\nu(x') \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) \bar{\psi}(x') \gamma_\nu \psi(x') : \end{aligned} \quad (6.11)$$

Auf Grund des Fermi-Feldoperatoren-Rearrangements

$$\begin{aligned} &: \bar{\psi}_\alpha(x) (\gamma_\mu \psi(x) \bar{\psi}(x') \gamma_\nu)_{\alpha\beta} \psi_\beta(x') : \\ &= - : \psi_\beta(x') \bar{\psi}_\alpha(x) (\gamma_\mu \psi(x) \bar{\psi}(x') \gamma_\nu)_{\alpha\beta} : \end{aligned} \quad (6.12)$$

und mit (6.4) folgt

$$S_{ph} = \frac{e^2}{2c^2\hbar^2} \int dx \int dx' : A_\mu(x) A_\nu(x') : Sp \left( S_F(x' - x) \gamma_\mu S_F(x - x') \gamma_\nu \right). \quad (6.13)$$

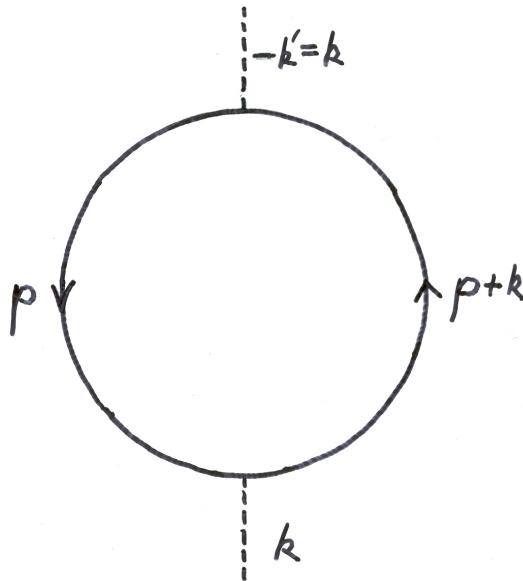
Mit

$$A_\mu(x) A_\nu(x') = A_\mu(k') A_\nu(k) e^{i(k' \cdot x + k \cdot x')} + A_\mu(k) A_\nu(k') e^{i(k \cdot x + k' \cdot x')} \quad (6.14)$$

und nach Ausführung der  $x, x'$ -Integrationen mit Hilfe von (4.96) erhält man

$$S_{ph} = \delta(k + k') : A_\mu(k') A_\nu(k) : \frac{e^2}{c^2\hbar^2} \int dp Sp \left( S_F(p) \gamma_\mu S_F(p + k) \gamma_\nu \right). \quad (6.15)$$

*Graphische Darstellung* – vgl.  $S_d$ -Diagramm in Abbildung 4.3:



• Abbildung 6.2 •

Substituiert man für  $S_F(p)$  und  $S_F(p+k)$  gemäß (6.4), so nimmt der Ausdruck (6.15) die folgende Gestalt an (ohne  $-i\varepsilon$ ):

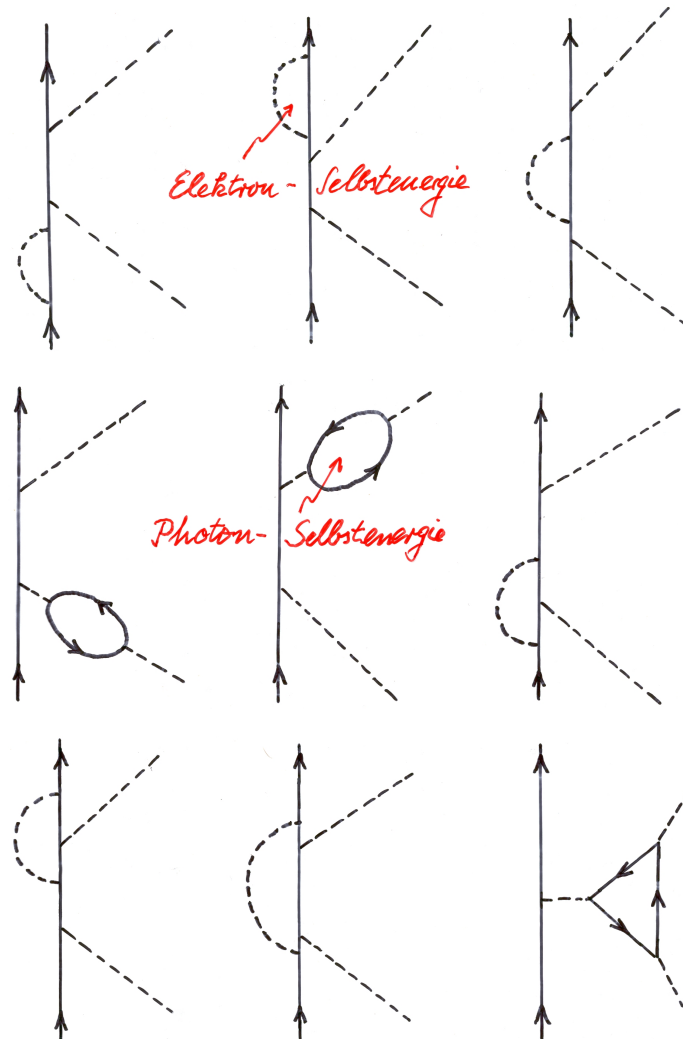
$$S_{ph} = \delta(k+k') : A_\mu(k') A_\nu(k) : \frac{e^2}{c^2 \hbar^2} \int d^4p \frac{S_p ((i p \cdot \gamma - \kappa) \gamma_\mu (i(p+k) \cdot \gamma - \kappa) \gamma_\nu)}{(p^2 + \kappa^2) ((p+k)^2 + \kappa^2)} . \quad (6.16)$$

Dieses Integral *divergiert* für große  $p$  *quadratisch*:

$$\int d^4p_1 \int d^4p_2 \int d^4p_3 \int d^4p_0 \frac{p_\mu p_\nu}{p^4} . \quad (6.17)$$

*Divergente Integrale* der vorstehenden Art (6.10, 17) treten nicht nur im Zusammenhang mit der Selbstenergie von Elektronen und Photonen auf, sondern *bei allen Beiträgen höherer Ordnung* zum  $S$ -Operator für die verschiedensten Streuprozesse.

**Beispiel: Photon-Elektron-Streuung.** Feynman-Diagramme für die Beiträge *4. Ordnung*:



• Abbildung 6.3 •

Zu jedem dieser Diagramme gibt es ein weiteres Diagramm, das durch Austausch der beiden externen Photonenlinien für das einlaufende und das auslaufende Photon entsteht. Vgl. die Beiträge *2. Ordnung* in Kap. 5; dort keine divergenten Integrale.

Zum Zwecke der **Regularisierung** werden *Hilfsfelder* für Photonen und Elektronen-Positronen mit jeweils *unendlich großer Masse* eingeführt. Es gibt derartige Felder vom *normalen* und vom *anormalen* Typ. Durch die Wahl geeigneter Anfangsbedingungen bleiben diese Felder physikalisch irrelevant, weil unbeobachtbar; ihre Einführung eröffnet aber die Möglichkeit zur eindeutigen Auswertung der obigen divergenten Integrale.

**Normale/anormale Photonenfelder** mit der Lagrange-Dichte

$$L = \mp \frac{1}{2} : (\partial_\nu A_\mu)^2 + \xi^2 A_\mu^2 : , \quad (6.18)$$

$\xi > 0$  reeller Massenparameter (Ruhmasse  $\hbar \xi / c$ ), der letztlich gegen unendlich geht; vgl. (3.2) für  $\xi = 0$ . Wellengleichung:

$$(\partial^2 - \xi^2) A_\mu = 0 , \quad (6.19)$$

siehe (3.1) für  $\xi = 0$ . Energiedichte:

$$H = \pm \frac{1}{2} : (\partial_i A_\mu)^2 + (\partial_0 A_\mu)^2 + \xi^2 A_\mu^2 : , \quad (6.20)$$

vgl. (3.7) für  $\xi = 0$ . Vertauschungsrelationen:

$$\left[ A_\mu(\vec{x}, t), \partial_0 A_\nu(\vec{x}', t) \right] = \pm i c \hbar \delta_{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (6.21)$$

$$\left[ A_\mu(\vec{x}, t), A_\nu(\vec{x}', t) \right] = \left[ \partial_0 A_\mu(\vec{x}, t), \partial_0 A_\nu(\vec{x}', t) \right] = 0 ,$$

siehe (3.19). Fourier-Zerlegung der Feldoperatoren  $A_\mu$  führt auf den Hamilton-Operator

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{k}} c \hbar k_0 \left( \pm a_i^*(\vec{k}) a_i(\vec{k}) \mp a_0^*(\vec{k}) a_0(\vec{k}) \right) \quad (6.22)$$

mit

$$\left[ a_i(\vec{k}), a_j^*(\vec{k}) \right] = \pm \delta_{ij} , \quad \left[ a_0(\vec{k}), a_0^*(\vec{k}) \right] = \mp 1 , \quad (6.23)$$

siehe (3.24, 25). Das sind pro  $\vec{k}$ -Vektor drei normale/anormale ( $i = 1, 2, 3$ ) Bose-Oszillatoren und ein anormal/normale (0) Bose-Oszillator, deren Anregung Hilfs-Photonen der Energie  $c \hbar k_0$  mit

$$k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + \xi^2} , \quad (6.24)$$

vgl. (3.21) für  $\xi = 0$ , liefert. Kopplung an das Elektronenfeld von der üblichen Gestalt  $-i e : A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi :$

Durch die *Anfangsbedingung*

$$A_\mu^+ \Psi_i = 0 \quad (6.25)$$

werden (Hilfs-) Photonen im Eingangskanal ausgeschlossen; aus Gründen der Energieerhaltung dann auch – wegen  $\xi \rightarrow \infty$  – keine (Hilfs-) Photonen im Ausgangskanal. Also kein Beitrag der (Hilfs-) Photonen zu externen Photonenlinien.

Beitrag zu internen Photonlinien durch die *Kontraktion*

$$A_\mu(x) \cdot A_\nu(x') = \mp i c \hbar \delta_{\mu\nu} \Delta_F(\xi; x - x')$$

$$\Delta_F(\xi; x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk e^{ik \cdot x} \Delta_F(\xi; k) \quad (6.26)$$

$$\Delta_F(\xi; k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{k^2 + \xi^2 - i\varepsilon},$$

vgl. (4.59) für  $\xi = 0$  und (6.3) für  $\xi = \lambda$ .

Durch die *Ankopplung von Hilfs-Photonenfeldern* geht der Beitrag  $D_F(k)$  einer inneren Photonlinie in einem divergenten  $k$ -Integral, z. B.  $S_{el}$  gemäß (6.8-10), über in

$$R(D_F(k)) = D_F(k) + \sum_i c_i \Delta_F(\xi_i; k) \quad (6.27)$$

mit  $c_i = \pm 1$  für normale/anormale Felder;  $\xi_i$  sind die entsprechenden Massenparameter, die am Ende sämtlich gegen unendlich gehen. Mit  $D_F(k) = f(\lambda^2; k)$  schreibt man – vgl. (6.3) mit (6.26) –

$$R(f(\lambda^2; k)) = f(\lambda^2; k) + \sum_i c_i f(\xi_i^2; k). \quad (6.28)$$

Anzahl, Typus (normal/anormal) und Massen der Hilfs-Photonen sind bislang beliebig. Wie sind diese zu wählen?

Die erste, zweite, ...  $n$ -te Ableitung von  $f(\lambda^2; k)$  bezüglich  $\lambda^2$  werde mit  $f'(\lambda^2; k)$ ,  $f''(\lambda^2; k)$ , ...  $f^{(n)}(\lambda^2; k)$  bezeichnet. Man zeigt leicht, dass gilt:

$$(-1) \int_0^{\xi^2} dz_1 f'(\lambda^2 + z_1; k) = f(\lambda^2; k) - f(\lambda^2 + \xi^2; k)$$

$$(-1)^2 \int_0^{\xi^2} dz_1 \int_0^{\xi^2} dz_2 f''(\lambda^2 + z_1 + z_2; k) \quad (6.29)$$

$$= f(\lambda^2; k) - f(\lambda^2 + \xi^2; k) - f(\lambda^2 + \xi^2; k) + f(\lambda^2 + 2\xi^2; k) \text{ usw.}$$

Durch geeignete Wahl der  $c_i$  und  $\xi_i$  in (6.28) ist es daher möglich,  $R(f(\lambda^2; k))$  durch das folgende Integral auszudrücken:

$$R(f(\lambda^2; k)) = (-1)^{(n)} \int_0^{\xi^2} dz_1 \int_0^{\xi^2} dz_2 \dots \int_0^{\xi^2} dz_n f^{(n)}(\lambda^2 + z_1 + z_2 + \dots + z_n; k). \quad (6.30)$$

Wählt man  $n$  hinreichend groß, so konvergiert das ursprünglich divergente Integral  $\int dk D_F(k) \dots$ ; denn aus (6.3) folgt: die Ordnung der  $k$ -Abhängigkeit von  $f^{(n)}(\lambda^2; k)$  für große  $k$  wird mit wachsendem  $n$  beliebig negativ.

Die Methode der *Regularisierung* besteht – was die *internen Photonlinien* betrifft – darin, den Beitrag  $D_F(k) = f(\lambda^2; k)$  durch das Integral  $R(f(\lambda^2; k))$  gemäß (6.30) zu ersetzen. Dabei ist prinzipiell jedes  $n$  geeignet, das  $\int dk D_F(k) \dots$  konvergent macht; praktisch wählt man  $n$  so klein wie möglich. Man kann zeigen (siehe unten), dass  $n = 1$  genügt.

**Normale/anormale Elektronenfelder** mit der Lagrange-Dichte

$$L = -c\hbar : \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi + \eta \bar{\psi} \psi : , \quad (6.31)$$

in beiden Fällen gleich – wie in (3.90) für  $\eta = \kappa$ . Der reelle Parameter  $\eta$  geht am Ende wieder gegen unendlich. Feldgleichung ist die Dirac-Gleichung, folglich die Wellengleichung ( $\eta$  statt  $\kappa$ ). Energiedichte wie in (3.93). Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} \left\{ \psi_\alpha(\vec{x}, t), \psi_\beta^*(\vec{x}', t) \right\} &= \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \\ \left\{ \psi_\alpha(\vec{x}, t), \psi_\beta(\vec{x}', t) \right\} &= \left\{ \psi_\alpha^*(\vec{x}, t), \psi_\beta^*(\vec{x}', t) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (6.32)$$

für normale Hilfsfelder – siehe (3.120) – bzw.

$$\begin{aligned} \left[ \psi_\alpha(\vec{x}, t), \psi_\beta^*(\vec{x}', t) \right] &= \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \\ \left[ \psi_\alpha(\vec{x}, t), \psi_\beta(\vec{x}', t) \right] &= \left[ \psi_\alpha^*(\vec{x}, t), \psi_\beta^*(\vec{x}', t) \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.33)$$

für anormale Hilfsfelder. Fourier-Zerlegung der Feldoperatoren  $\psi, \bar{\psi}$  führt auf den Hamilton-Operator

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{k}} \sum_r c\hbar k_0 \left( a_r^*(\vec{k}) a_r(\vec{k}) \pm b_r^*(\vec{k}) b_r(\vec{k}) \right) \quad (6.34)$$

mit

$$\left\{ a_r(\vec{k}), a_s^*(\vec{k}) \right\} = \left\{ b_r^*(\vec{k}), b_s(\vec{k}) \right\} = \delta_{rs} \quad (6.35)$$

bzw.

$$\left[ a_r(\vec{k}), a_s^*(\vec{k}) \right] = \left[ b_r^*(\vec{k}), b_s(\vec{k}) \right] = \delta_{rs} , \quad (6.36)$$



vgl. (3.124, 125). Das sind pro  $\vec{k}$ -Vektor vier normale Fermi-Oszillatoren bzw. zwei normale und zwei anormale Bose-Oszillatoren, deren Anregung (Hilfs-) Elektronen-Positronen der Energie  $c\hbar k_0$  mit

$$k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + \eta^2}, \quad (6.37)$$

vgl. (3.103) für  $\eta = \kappa$ , liefert. Kopplung an das Photonenfeld von der üblichen Gestalt  $-ie : A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi :$

Analog zum Falle der Photonen – Gl. (6.25) – werden (Hilfs-) Elektronen-Positronen im Eingangs- und im Ausgangskanal durch die *Anfangsbedingung*

$$\psi^+ \Psi_i = 0, \quad \bar{\psi}^+ \Psi_i = 0 \quad (6.38)$$

vermieden. Also kein Beitrag der (Hilfs-) Elektronen-Positronen zu externen Fermionenlinien.

Beitrag zu internen Fermionenlinien durch die *Kontraktion*

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x') &= i S_{F,\alpha\beta}(\eta; x - x') \\ S_F(\eta; x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp e^{ip \cdot x} S_F(\eta; p) \\ S_F(\eta; p) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{ip \cdot \gamma - \eta}{p^2 + \eta^2 - i\varepsilon}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

vgl. (6.4) für  $\eta = \kappa$ . Man kann zeigen: Nur bei *geschlossenen* internen Fermionenlinien – *loops*, siehe z. B. Photonen-Selbstenergie – ist die *Ankopplung von Hilfs-Elektronen-Positronenfeldern* erforderlich und wirksam. Der Beitrag zu einem derartigen loop:

$$\int g(\kappa^2; p) dp, \quad (6.40)$$

wo  $g(\kappa^2; p)$  ein Produkt von  $S_F(p)$ -Faktoren ist, geht dabei über in

$$\int R(g(\kappa^2; p)) dp \quad (6.41)$$

mit

$$R(g(\kappa^2; p)) = g(\kappa^2; p) + \sum_i c_i g(\eta_i^2; p), \quad (6.42)$$

$c_i = \pm 1$  für normale/anormale Felder;  $\eta_i$  sind die entsprechenden Massenparameter, die am Ende alle gegen unendlich gehen. Wie in (6.30) stellt man  $R(g(\kappa^2; p))$  durch das folgende Integral dar:

$$R(g(\kappa^2; p)) = (-1)^n \int_0^{\eta^2} dz_1 \int_0^{\eta^2} dz_2 \dots \int_0^{\eta^2} dz_n g^{(n)}(\kappa^2 + z_1 + z_2 + \dots + z_n; p) . \quad (6.43)$$

Die Methode der *Regularisierung* besteht – was die *internen Fermionenloops* betrifft – in der Ersetzung (6.40)  $\rightarrow$  (6.41), wo  $R$  durch (6.43) gegeben ist. Diese Ersetzung macht das  $p$ -Integral konvergent. Man kann zeigen (siehe unten), dass  $n = 2$  genügt.

Auswertung der divergenten Integrale (6.9, 16) mit Hilfe der Regularisierung. Dazu werden einige **Integrale** benötigt:

- Feynman (1949):

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{du}{(a + (b-a)u)^2} ; \quad (6.44)$$

vollständige Induktion liefert

$$\frac{1}{a_0 a_1 \dots a_n} = n! \int_0^1 du_1 \int_0^{u_1} du_2 \dots \int_0^{u_{n-1}} du_n \frac{1}{(a_0 + (a_1 - a_0)u_1 + \dots + (a_n - a_{n-1})u_n)^{n+1}} . \quad (6.45)$$

- Mit Hilfe des Residuensatzes zeigt man – siehe Kap. 4 –

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int dk \frac{1}{(k^2 + \Delta - i\varepsilon)^3} = \frac{i\pi^2}{2\Delta} ; \quad (6.46)$$

die Ableitung nach  $\Delta$  ergibt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int dk \frac{1}{(k^2 + \Delta - i\varepsilon)^4} = \frac{i\pi^2}{6\Delta^2} , \quad (6.47)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int dk \frac{k^2}{(k^2 + \Delta - i\varepsilon)^4} = \frac{i\pi^2}{3\Delta} . \quad (6.48)$$

- Symmetrie- und Kovarianzbetrachtungen führen auf

$$\int dk k_\mu f(k^2) = 0 , \quad \int dk k_\mu k_\nu k_\lambda f(k^2) = 0 , \quad (6.49)$$

$$\int dk k_\mu k_\nu f(k^2) = \int dk \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} k^2 f(k^2), \quad (6.50)$$

$$\int dk k_\mu k_\nu k_\lambda k_\rho f(k^2) = \int dk \frac{1}{24} (\delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\rho} + \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\rho} + \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\lambda}) k^4 f(k^2). \quad (6.51)$$

**Elektronen-Selbstenergie** nach (6.9) von der Gestalt

$$S_{el} = -i(2\pi)^4 \delta(p - p') : \bar{\psi}(p') \Sigma(p) \psi(p) : ; \quad (6.52)$$

mit (3.52) und (6.44) folgt zunächst

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= \frac{ie^2}{(2\pi)^4 c \hbar} \int dk \frac{\gamma_\mu (i(p-k) \cdot \gamma - \kappa) \gamma_\mu}{(k^2 + \lambda^2)((p-k)^2 + \kappa^2)} \\ &= -\frac{2ie^2}{(2\pi)^4 c \hbar} \int dk \frac{i(p-k) \cdot \gamma + 2\kappa}{(k^2 + \lambda^2)(k^2 - 2k \cdot p + p^2 + \kappa^2)} \\ &= -\frac{2ie^2}{(2\pi)^4 c \hbar} \int dk \int_0^1 du \frac{i(p-k) \cdot \gamma + 2\kappa}{(k^2 - 2uk \cdot p + u(p^2 + \kappa^2) + (1-u)\lambda^2)^2}; \end{aligned}$$

Regularisierung mit  $n = 1$  und die Substitution  $k \rightarrow k + up$  ergeben sodann

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= -\frac{4ie^2}{(2\pi)^4 c \hbar} \int dk \int_0^1 du \int_0^{\xi^2} dz \\ &\quad \times \frac{(1-u)(i(p-k) \cdot \gamma + 2\kappa)}{(k^2 - 2uk \cdot p + u(p^2 + \kappa^2) + (1-u)(\lambda^2 + z))^3} \\ &= -\frac{4ie^2}{(2\pi)^4 c \hbar} \int dk \int_0^1 du \int_0^{\xi^2} dz \\ &\quad \times \frac{(1-u)(i(p-up-k) \cdot \gamma + 2\kappa)}{(k^2 - u^2 p^2 + u(p^2 + \kappa^2) + (1-u)(\lambda^2 + z))^3}; \end{aligned}$$

$k$ -Integration mit Hilfe von (6.46, 49) sowie  $z$ -Integration für  $\xi \rightarrow \infty$  führen schließlich auf

$$\begin{aligned}\Sigma(p) &= \frac{2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4 c \hbar} \int_0^1 du \int_0^{\xi^2} dz \frac{(1-u)(i(1-u)p \cdot \gamma + 2\kappa)}{-u^2 p^2 + u(p^2 + \kappa^2) + (1-u)(\lambda^2 + z)} \\ &= \frac{e^2}{8\pi^2 c \hbar} \int_0^1 du (i(1-u)p \cdot \gamma + 2\kappa) \\ &\quad \times \lim_{\xi \rightarrow \infty} (\ln((1-u)\xi^2) - \ln(-u^2 p^2 + u(p^2 + \kappa^2) + (1-u)\lambda^2)).\end{aligned}\quad (6.53)$$

Wegen der Identität

$$p^2 + \kappa^2 = 2\kappa(ip \cdot \gamma + \kappa) - (ip \cdot \gamma + \kappa)^2 \quad (6.54)$$

kann (6.53) als Funktion von  $ip \cdot \gamma + \kappa$  aufgefasst und in die folgende Form gebracht werden:

$$\Sigma(p) = A + B(ip \cdot \gamma + \kappa) + \tilde{\Sigma}(p) \quad (6.55)$$

mit den Konstanten ( $\lambda \rightarrow 0$ , sofern keine Divergenzen)

$$\begin{aligned}A &= \frac{e^2 \kappa}{8\pi^2 c \hbar} \int_0^1 du (1+u) \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left( \ln((1-u)\xi^2) - \ln(u^2 \kappa^2 + (1-u)\lambda^2) \right) \\ &= \frac{3e^2 \kappa}{8\pi^2 c \hbar} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left( \ln \frac{\xi}{\kappa} + \frac{1}{4} \right),\end{aligned}\quad (6.56)$$

$$\begin{aligned}B &= \frac{e^2 \kappa}{8\pi^2 c \hbar} \int_0^1 du (1-u) \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left( \ln((1-u)\xi^2) - \ln(u^2 \kappa^2 + (1-u)\lambda^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2u(1+u)\kappa^2}{u^2 \kappa^2 + (1-u)\lambda^2} \right) = \frac{e^2}{8\pi^2 c \hbar} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left( \ln \frac{\xi}{\kappa} + \frac{9}{4} - 2 \ln \frac{\kappa}{\lambda} \right)\end{aligned}\quad (6.57)$$

sowie

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}(p) &= \frac{e^2}{8\pi^2 c \hbar} \int_0^1 du \left( \frac{2u(1-u^2)\kappa^2(ip \cdot \gamma + \kappa)}{u^2 \kappa^2 + (1-u)\lambda^2} \right. \\ &\quad \left. - ((1+u)\kappa + (1-u)(ip \cdot \gamma + \kappa)) \ln \left( 1 + \frac{u(1-u)(p^2 + \kappa^2)}{u^2 \kappa^2 + (1-u)\lambda^2} \right) \right),\end{aligned}\quad (6.58)$$

was als Potenzreihe in  $i p \cdot \gamma + \kappa$  (zweite und höhere Potenzen) darstellbar ist.

Vorstehende Rechnung gilt gleichermaßen für reelles und virtuelles Elektron. (Die nur für reelle Elektronen gültige Beziehung  $p^2 + \kappa^2 = 0$  wurde nicht benutzt.) Für ein *reelles Elektron* folgt aus der freien Dirac-Gleichung:

$$\bar{\psi}(p) (i p \cdot \gamma + \kappa) = 0 \quad (6.59)$$

$$(i p \cdot \gamma + \kappa) \psi(p) = 0$$

– vgl. (5.29). Damit reduziert sich die Elektronen-Selbstenergie zu

$$S_{el} = -i (2\pi)^4 \delta(p - p') A : \bar{\psi}(p') \psi(p) : ; \quad (6.60)$$

diese ist wegen (6.56) hinsichtlich des Massenparameters  $\xi$  *logarithmisch divergent*.

**Photonen-Selbstenergie** nach (6.16) gegeben durch

$$S_{ph} = \frac{i}{c\hbar} (2\pi)^4 \delta(k + k') : A_\mu(k') \Pi_{\mu\nu}(k) A_\nu(k) : ; \quad (6.61)$$

mit Hilfe der Spurformeln in Kap. 3 und mit (6.44) folgt zunächst

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(k) &= -\frac{i e^2}{(2\pi)^4 c \hbar} \int d p \frac{S p ((i p \cdot \gamma - \kappa) \gamma_\mu (i (p+k) \cdot \gamma - \kappa) \gamma_\nu)}{(p^2 + \kappa^2) ((p+k)^2 + \kappa^2)} \\ &= -\frac{4 i e^2}{(2\pi)^4 c \hbar} \int d p \frac{p^2 \delta_{\mu\nu} - 2 p_\mu p_\nu + p \cdot k \delta_{\mu\nu} - p_\mu k_\nu - p_\nu k_\mu + \kappa^2 \delta_{\mu\nu}}{(p^2 + \kappa^2)(p^2 + k^2 + 2p \cdot k + \kappa^2)} \\ &= -\frac{4 i e^2}{(2\pi)^4 c \hbar} \int d p \int_0^1 d u \frac{p^2 \delta_{\mu\nu} - 2 p_\mu p_\nu + p \cdot k \delta_{\mu\nu} - p_\mu k_\nu - p_\nu k_\mu + \kappa^2 \delta_{\mu\nu}}{(p^2 + 2u p \cdot k + u k^2 + \kappa^2)^2} ; \end{aligned}$$

Regularisierung mit  $n = 2$  gemäß (6.43) ergibt sodann

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(k) &= -\frac{4 i e^2}{(2\pi)^4 c \hbar} \int d p \int_0^1 d u \int_0^{\eta^2} d z_1 \int_0^{\eta^2} d z_2 \left( -\frac{4 \delta_{\mu\nu}}{(p^2 + 2u p \cdot k + u k^2 + \kappa^2 + z_1 + z_2)^3} \right. \\ &\quad \left. + 6 \frac{p^2 \delta_{\mu\nu} - 2 p_\mu p_\nu + p \cdot k \delta_{\mu\nu} - p_\mu k_\nu - p_\nu k_\mu + (\kappa^2 + z_1 + z_2) \delta_{\mu\nu}}{(p^2 + 2u p \cdot k + u k^2 + \kappa^2 + z_1 + z_2)^4} \right) ; \end{aligned}$$

$p$ -Integration (Substitution  $p \rightarrow p - u k$ ) mit Hilfe von (6.46-51) sowie  $z_1, z_2$ -Integration für  $\eta \rightarrow \infty$  führen schließlich auf

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\mu\nu}(k) &= -\frac{e^2}{2\pi^2 c \hbar} \int_0^1 du \int_0^{\eta^2} dz_1 \int_0^{\eta^2} dz_2 \frac{u(1-u)(k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)}{(u(1-u)k^2 + \kappa^2 + z_1 + z_2)^2} \\
 &= -\frac{e^2}{2\pi^2 c \hbar} \int_0^1 du u(1-u)(k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \\
 &\quad \times \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left( \ln \frac{\eta^2}{2\kappa^2} - \ln \left( 1 + \frac{u(1-u)k^2}{\kappa^2} \right) \right) \\
 &= F(k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) + \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(k), \tag{6.62}
 \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}
 F &= -\frac{e^2}{2\pi^2 c \hbar} \underbrace{\int_0^1 du u(1-u)}_{=1/6} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \ln \frac{\eta^2}{2\kappa} \\
 &= -\frac{e^2}{12\pi^2 c \hbar} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \ln \frac{\eta^2}{2\kappa} \tag{6.63}
 \end{aligned}$$

eine bezüglich des Massenparameters  $\eta$  *logarithmisch divergente* Konstante ist und

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(k) = \frac{e^2}{2\pi^2 c \hbar} (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \int_0^1 du u(1+u) \ln \left( 1 + \frac{u(1-u)k^2}{\kappa^2} \right). \tag{6.64}$$

Das vorstehende Resultat gilt sowohl für ein reelles als auch ein virtuelles Photon. (Von der nur für reelle Photonen gültigen Beziehung  $k^2 = 0$  wurde kein Gebrauch gemacht.) Für ein *reelles Photon* verschwindet  $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(k)$  wegen  $k^2 = 0$ . Die Photonen-Selbstenergie (6.61, 62) reduziert sich in diesem Fall auf

$$S_{ph} = \frac{i}{c \hbar} (2\pi)^4 \delta(k + k') F : A_\mu(k') k'_\mu k_\nu A_\nu(k) : \tag{6.65}$$

Ihr Erwartungswert verschwindet wegen der Eichbedingung (3.28, 29).

Die Elektronen-Selbstenergie (6.52, 55) und die Photonen-Selbstenergie (6.61, 62) enthalten die bezüglich der Massenparameter  $\xi$  bzw.  $\eta$  logarithmisch divergenten Konstanten

$A$ ,  $B$  und  $F$ . Diese Divergenzen können durch die Methode der **Renormierung** beseitigt werden.

In der Lagrange-Dichte

$$L = - : c \hbar (\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi) + m c^2 (\bar{\psi} \psi) : - : \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\mu)^2 : + i e : A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi : \quad (6.66)$$

des gekoppelten Photonen-Elektronen-Positronenfeldes (3.146) nimmt man die Ersetzung

$$m \rightarrow m - \delta m, \quad e \rightarrow e - \delta e \quad (6.67)$$

vor.  $\delta m$ ,  $\delta e$  sind geeignet zu wählende divergente Konstanten – als *Selbstmasse* bzw. *Selbstladung* bezeichnet –, die der Kompensation obiger Divergenzen dienen. Diese *Renormierung von Masse und Ladung* führt auf die Lagrange-Dichte (Schwinger 1948)

$$L = - : c \hbar (\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi) + m c^2 (\bar{\psi} \psi) : - : \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\mu)^2 : + i e : A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi : + \delta m c^2 : \bar{\psi} \psi : - i \delta e : A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi : \quad (6.68)$$

Physikalisch äquivalent, jedoch rechnerisch bequemer, ist die Lagrange-Dichte (Gupta 1951)

$$L = - : c \hbar \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi + m c^2 \bar{\psi} \psi : - : \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\mu)^2 : + i e : A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi : + \delta m c^2 : \bar{\psi} \psi : + \frac{1}{4} \delta f : (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 : \quad (6.69)$$

mit divergenten Konstanten  $\delta m$  und  $\delta f$ , wo

$$\frac{\delta e}{e} = 1 - (1 - \delta f)^{-1/2} \quad (6.70)$$

ist. Die Energiedichte der Wechselwirkung ist demnach gegeben durch

$$H = -i e : A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi : - \delta m c^2 : \bar{\psi} \psi : - \frac{1}{4} \delta f : (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 : \quad (6.71)$$

Die zu  $\delta m$  und  $\delta f$  proportionalen Zusatzterme in (6.71) liefern zur Elektronen- bzw. Photonen-Selbstenergie in niedrigster Ordnung die Beiträge

$$\begin{aligned} \delta S_{el} &= \frac{i}{c \hbar} (2\pi)^4 \delta(p - p') \delta m c^2 : \bar{\psi}(p') \psi(p) : \\ \delta S_{ph} &= \frac{i}{c \hbar} (2\pi)^4 \delta(k + k') \delta f : A_\mu(k') (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) A_\nu(k) : \end{aligned} \quad (6.72)$$

Diese kompensieren in (6.52, 55) den divergenten  $A$ -Term bzw. in (6.61, 62) den divergenten  $F$ -Term, sofern man setzt:

$$\delta m c / \hbar = A, \quad \delta f = -F. \quad (6.73)$$

Damit reduzieren sich die Selbstenergien durch Renormierung auf

$$\begin{aligned} \bar{S}_{el} &= S_{el} + \delta S_{el} = -i(2\pi)^4 \delta(p - p') : \bar{\psi}(p') (B(ip \cdot \gamma + \kappa) + \tilde{\Sigma}(p)) \psi(p) : \\ \bar{S}_{ph} &= S_{ph} + \delta S_{ph} = \frac{i}{c\hbar} (2\pi)^4 \delta(k + k') : A_\mu(k') \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(k) A_\nu(k) : \end{aligned} \quad (6.74)$$

Diese verschwinden für reale Elektronen und Photonen. Ihre Bedeutung für virtuelle Elektronen und Photonen wird in dem folgenden Beispiel besprochen (siehe unten).

Aus (6.73, 70) folgt für Selbstmasse und Selbstladung in 2. Ordnung:

$$\frac{\delta m}{m} = \frac{A\hbar}{mc} = \frac{A}{\kappa}, \quad \frac{\delta e}{e} = -\frac{1}{2}f = \frac{1}{2}F. \quad (6.75)$$

Mit (6.56, 63) ergeben sich die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \frac{\delta m}{m} &= \frac{3}{2\pi} \left( \frac{e^2}{4\pi c\hbar} \right) \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left( \ln \frac{\xi}{\kappa} + \frac{1}{4} \right) \\ \frac{\delta e}{e} &= -\frac{1}{6\pi} \left( \frac{e^2}{4\pi c\hbar} \right) \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left( \ln \frac{\eta^2}{2\kappa^2} \right). \end{aligned} \quad (6.76)$$

Beseitigung von Divergenzen in Streuprozessen beliebig hoher Ordnung durch Verallgemeinerung des vorstehenden Verfahrens ist möglich. Dazu sind  $\delta m$  und  $\delta f$  als unendliche Reihen aus geraden  $e$ -Potenzen anzusetzen. Nicht in dieser Vorlesung; gruppentheoretisches Renormierungsverfahren.

**Beispiel: Strahlungskorrekturen bei Elektronenstreuung.** Streuung eines Elektrons im äußeren elektromagnetischen Feld, wie in Kap. 5 zu behandeln. In niedrigster (erster) Ordnung hat man:

$$S_1 = -\frac{e}{c\hbar} \int dx : A_\mu^a(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) : \quad (6.77)$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}(p') e^{-ip' \cdot x}, \quad \psi(x) = \psi(p) e^{ip \cdot x} \\ A_\mu^a(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int dq A_\mu^a(q) e^{iq \cdot x}. \end{aligned} \quad (6.78)$$



Siehe das Feynman-Diagramm in Abbildung 5.5.

Es folgt – vgl. (5.94, 96) –

$$S_1 = -\frac{e}{c\hbar} : A_\mu^a(q) \bar{\psi}(p') \gamma_\mu \psi(p) : \quad (6.79)$$

mit

$$q = p' - p . \quad (6.80)$$

Die Beiträge nächsthöherer Ordnung – nämlich *Strahlungskorrekturen 3. Ordnung* – sind in  $S_3$  enthalten; siehe (5.93):

$$\begin{aligned} S_3 &= -\frac{1}{2} \left( \frac{e}{c\hbar} \right)^3 \int dx \int dx' \int dx'' \\ &\quad \times T \left( A_\mu^a(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A_\nu(x') \bar{\psi}(x') \gamma_\nu \psi(x') A_\lambda(x'') \bar{\psi}(x'') \gamma_\lambda \psi(x'') \right) \\ &= S_\Lambda + S'_\Sigma + S''_\Sigma + S_\Pi + \dots \end{aligned} \quad (6.81)$$

– gemäß Wick'schem Theorem zerlegt – mit

$$\begin{aligned} S_\Lambda &= -\frac{i e^3}{c^2 \hbar^2} \int dx \int dx' \int dx'' \\ &\quad \times : A_\mu^a(x) D_F(x' - x'') \bar{\psi}(x') \gamma_\nu S_F(x' - x) \gamma_\mu S_F(x - x'') \gamma_\nu \psi(x'') : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'_\Sigma &= -\frac{i e^3}{c^2 \hbar^2} \int dx \int dx' \int dx'' \\ &\quad \times : A_\mu^a(x) D_F(x' - x'') \bar{\psi}(x) \gamma_\mu S_F(x - x') \gamma_\nu S_F(x' - x'') \gamma_\nu \psi(x'') : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S''_\Sigma &= -\frac{i e^3}{c^2 \hbar^2} \int dx \int dx' \int dx'' \\ &\quad \times : A_\mu^a(x) D_F(x' - x'') \bar{\psi}(x'') \gamma_\nu S_F(x'' - x') \gamma_\nu S_F(x' - x) \gamma_\mu \psi(x) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_\Pi &= \frac{i e^3}{c^2 \hbar^2} \int dx \int dx' \int dx'' \\ &\quad \times : A_\mu^a(x) D_F(x' - x'') S_p \left( S_F(x' - x) \gamma_\mu S_F(x - x') \gamma_\nu \right) \bar{\psi}(x'') \gamma_\nu \psi(x'') : \end{aligned} \quad (6.82)$$

Substituiert man (6.78) und (6.3, 4), so folgt:

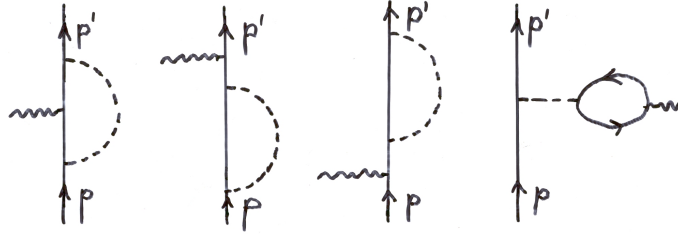
$$\begin{aligned}
 S_\Lambda &= -\frac{e}{c\hbar} : A_\mu^a(q) \bar{\psi}(p') \Lambda_\mu(p, p') \psi(p) : \\
 S'_\Sigma &= -\frac{e}{c\hbar} : A_\mu^a(q) \bar{\psi}(p') \gamma_\mu \frac{i p \cdot \gamma - \kappa}{p^2 + \kappa^2} \Sigma(p) \psi(p) : \\
 S''_\Sigma &= -\frac{e}{c\hbar} : A_\mu^a(q) \bar{\psi}(p') \Sigma(p') \frac{i p' \cdot \gamma - \kappa}{p'^2 + \kappa^2} \gamma_\mu \psi(p) : \\
 S_\Pi &= -\frac{e}{c\hbar} : A_\mu^a(q) \Pi_{\nu\mu}(q) \frac{1}{q^2} \bar{\psi}(p') \gamma_\nu \psi(p) :
 \end{aligned} \tag{6.83}$$

mit dem divergenten Integral

$$\Lambda_\mu(p, p') = \frac{i e^2}{(2\pi)^4 c \hbar} \int dk \frac{\gamma_\nu (i(p' - k) \cdot \gamma - \kappa) \gamma_\mu (i(p - k) \cdot \gamma - \kappa) \gamma_\nu}{(k^2 + \lambda^2) ((p' - k)^2 + \kappa^2) ((p - k)^2 + \kappa^2)} \tag{6.84}$$

$\Sigma(p)$  und  $\Pi_{\nu\mu}(q)$  sind durch (6.55) bzw. durch (6.62) gegeben.

*Graphische Darstellung* von (6.83) durch die Feynman-Diagramme:



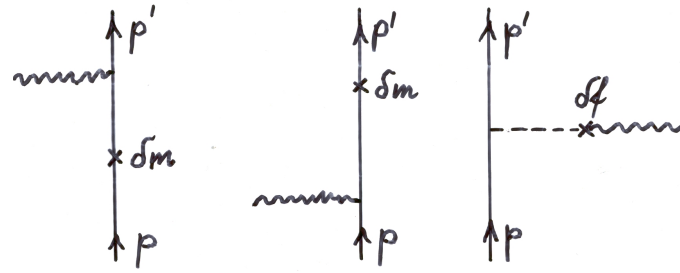
• Abbildung 6.4 •

Bezeichnung des ersten Terms ( $S_\Lambda$ ) als *Vertexkorrektur*, der weiteren Terme ( $S'_\Sigma$ ,  $S''_\Sigma$ ,  $S_\Pi$ ) als *Selbstenergiekorrekturen*.

Ersetzt man in (6.71)  $A_\mu \rightarrow A_\mu + A_\mu^a$ , so liefern die zu  $\delta m$  und  $\delta f$  gehörigen Renormierungsterme in niedrigster Ordnung die Beiträge

$$\begin{aligned}
 \delta S'_\Sigma &= -\frac{i e}{c^2 \hbar^2} \int dx \int dx' : \delta m c^2 \bar{\psi}(x) \psi(x) A_\mu^a(x') \bar{\psi}(x') \gamma_\mu \psi(x') : \\
 \delta S''_\Sigma &= -\frac{i e}{c^2 \hbar^2} \int dx \int dx' : \delta m c^2 \bar{\psi}(x) \psi(x) A_\mu^a(x') \bar{\psi}(x') \gamma_\mu \psi(x') : \\
 \delta S_\Pi &= -\frac{i e}{c^2 \hbar^2} \int dx \int dx' : \frac{1}{2} \delta f (\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x)) \\
 &\quad \times (\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)) A_\lambda(x') \bar{\psi}(x') \gamma_\lambda \psi(x') :
 \end{aligned} \tag{6.85}$$

mit der *graphischen Darstellung*:



• Abbildung 6.5 •

Diese Beiträge werden – mit (6.73) – dazu benutzt, Divergenzen in den Vertex- und Selbstenergiekorrekturen (6.83) zu kompensieren.

Umfangreiche Rechnungen auf der Grundlage der Integrale (6.46-51) sowie der Methode der Regularisierung ergeben für die

- *Vertexkorrektur:*

$$S_{\Lambda} = -\frac{e}{c\hbar} : A_{\mu}^a(q) \bar{\psi}(p') (B \gamma_{\mu} + \tilde{\Lambda}_{\mu}(p, p')) \psi(p) : \quad (6.86)$$

mit der divergenten Konstanten  $B$  gemäß (6.57) sowie

$$\tilde{\Lambda}_{\mu}(p, p') = -\frac{e^2}{12\pi^2 c\hbar} \frac{q^2}{\kappa^2} \left( \ln \frac{\kappa}{\lambda} - \frac{3}{8} \right) \gamma_{\mu} - \frac{e^2}{8\pi^2 c\hbar} \frac{1}{2\kappa} \sigma_{\mu\nu} q_{\nu} + \dots \quad (6.87)$$

plus Terme höherer Ordnung in  $q/\kappa$ ;

- *Selbstenergiekorrekturen:*

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\Sigma} &= S'_{\Sigma} + \delta S'_{\Sigma} + S''_{\Sigma} + \delta S''_{\Sigma} \\ &= -\frac{e}{c\hbar} : A_{\mu}^a(q) \bar{\psi}(p') (-B) \gamma_{\mu} \psi(p) : \end{aligned} \quad (6.88)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\Pi} &= S_{\Pi} + \delta S_{\Pi} \\ &= -\frac{e}{c\hbar} : A_{\mu}^a(q) \tilde{\Pi}_{\nu\mu}(q) \frac{1}{q^2} \bar{\psi}(p') \gamma_{\nu} \psi(p) : , \end{aligned} \quad (6.89)$$

wo  $\tilde{\Pi}_{\nu\mu}$  durch (6.64) definiert ist. Entwicklung nach Potenzen von  $q/\kappa$  führt auf

$$\tilde{\Pi}_{\nu\mu}(q) = \frac{e^2}{2\pi^2 c\hbar} (q^2 \delta_{\nu\mu} - q_{\nu} q_{\mu}) \frac{q^2}{30\kappa^2} + \dots \quad (6.90)$$

Beitrag 3. Ordnung zum Streuprozess durch Addition von (6.86, 88, 89). Dabei Kompensation der divergenten Terme ( $B$ ) von  $S_\Lambda$  und  $\bar{S}_\Sigma$ . (Kann für höhere Ordnungen verallgemeinert werden.) Das Resultat ist

$$\begin{aligned}\bar{S}_3 &= S_\Lambda + \bar{S}_\Sigma + \bar{S}_\Pi \\ &= -\frac{e}{c\hbar} : A_\mu^a(q) \bar{\psi}(p') \left( \tilde{\Lambda}_\mu(p, p') + \gamma_\nu \tilde{\Pi}_{\nu\mu}(q) / q^2 \right) \psi(p) : \quad (6.91)\end{aligned}$$

Addition von  $S_1$  gemäß (6.79) führt mit (6.87, 90) für den  $S$ -Operator in der vorliegenden Näherung – Potenzen von  $q/\kappa$  bis zur 2. Ordnung – auf

$$\begin{aligned}S &= S_1 + \bar{S}_3 \quad (6.92) \\ &= -\frac{e}{c\hbar} : A_\mu^a(q) \bar{\psi}(p') \left( \gamma_\mu - \frac{\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{\kappa^2} \left( \ln \frac{\kappa}{\lambda} - \frac{23}{40} \right) \gamma_\mu - \frac{\alpha}{2\pi} \frac{q_\nu}{2\kappa} \sigma_{\mu\nu} \right) \psi(p) : \quad (6.92)\end{aligned}$$

*Interpretation:* Das vorstehende Resultat entspricht dem Beitrag niedrigster Ordnung einer effektiven Wechselwirkung

$$H_{eff} = -ie : (A_\mu^a + \delta A_\mu^a) \bar{\psi} \gamma_\mu \psi : - \frac{1}{2} \delta \mu : F_{\mu\nu}^a \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi : \quad (6.93)$$

mit

$$\delta A_\mu^a = \frac{\alpha}{3\pi\kappa^2} \partial^2 A_\mu^a \left( \ln \frac{\kappa}{\lambda} - \frac{23}{40} \right), \quad (6.94)$$

$$\delta \mu = \frac{\alpha}{2\pi} \mu_0.$$

$\delta A_\mu^a$  beschreibt die Veränderung des äußeren Feldes durch die Strahlungskorrekturen. Für das Coulomb-Feld (5.103) erhält man

$$\delta A_\mu^a = i \delta_{\mu 4} \frac{Ze}{4\pi} \frac{4\alpha}{3\kappa^2} \left( \ln \frac{\kappa}{\lambda} - \frac{23}{40} \right) \delta(\vec{x}). \quad (6.95)$$

Diese Modifikation führt zur *Lamb-Shift der atomaren Energieniveaus*.  $\delta \mu$  beschreibt die Veränderung, damit die *Anomalie des magnetischen Momentes des Elektrons* unter dem Einfluss der Selbstwechselwirkung:

$$\mu = \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} + O(\alpha^2) \right) \mu_0. \quad (6.96)$$

*Infrarot-Divergenz* für  $\lambda \rightarrow 0$ . Harmlos!

## E Literatur

### zur **Klassischen Elektrodynamik:**

- J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, J. Wiley, New York (1962)
- H. Stumpf & W. Schuler, *Elektrodynamik*, Vieweg, Braunschweig (1973)
- R. J. Jelitto, *Theoretische Physik 3: Elektrodynamik*, Aula, Wiesbaden (1985)
- W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 3: Elektrodynamik*, Zimmermann-Neufang, Ulmen (1990)

### zur **Relativitätstheorie:**

- R. Adler, M. Bazin & M. Schiffer, *Introduction to General Relativity*, McGraw-Hill, New York (1965)
- H. A. Atwater, *Introduction to General Relativity*, Pergamon Press, Oxford (1974)
- P. A. M. Dirac, *General Theory of Relativity*, Wiley, New York (1975)
- G. Falk & W. Ruppel, *Mechanik, Relativität, Gravitation*, Springer, Berlin (1973)
- T. Fließbach, *Allgemeine Relativitätstheorie*, BI, Mannheim (1990)
- A. P. French, *Die Spezielle Relativitätstheorie* (MIT Einführungskurs), Vieweg, Braunschweig (1971)
- D. F. Lawden, *An Introduction to Tensor Calculus and Relativity*, Chapman & Hall, London (1967)
- L. Marder, *Reisen durch die Raum-Zeit*, Vieweg, Braunschweig (1979)
- C. W. Misner, K. S. Thorne & J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, San Francisco (1973)
- A. Papapetrou, *Lectures on General Relativity*, Reidel, Dordrecht (1974)
- R. K. Pathria, *The Theory of Relativity*, Pergamon Press, Oxford (1974)
- W. Rindler, *Essential Relativity. Special, General and Cosmological*, van Nostrand, New York (1969)
- R. U. Sexl & H. K. Schmidt, *Raum, Zeit, Relativität*, Vieweg, Braunschweig (1978)
- R. U. Sexl & H. K. Urbantke, *Gravitation und Kosmologie. Eine Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie*, BI, Mannheim (1975)

R. U. Sexl & H. K. Urbantke, *Relativität, Gruppen. Teilchen, Spezielle Relativitätstheorie als Grundlage der Feld- und Teilchenphysik*, Springer, Wien (1976)

U. E. Schröder, *Spezielle Relativitätstheorie*, Deutsch, Thun (1981)

H. Stephani, *Allgemeine Relativitätstheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1977)

E. F. Taylor & J. A. Wheeler, *Spacetime Physics*, Freeman, San Francisco (1963)

J. G. Taylor, *Special Relativity*, Clarendon Press, Oxford (1975)

R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press (1984)

S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology. Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Wiley, New York (1972)

zur **Quantenelektrodynamik**:

S. N. Gupta, *Quantum Electrodynamics*, Gordon & Breach, New York (1977)

G. Köpp & F. Krüger, *Einführung in die Quantenelektrodynamik*, Teubner, Stuttgart (1997)

## Danksagung

Ich danke Herrn Daniel Ebbeler für die sorgfältige und geduldige Erstellung der  $\text{\LaTeX}$ -Dateien nach meinen Wünschen sowie Herrn Dipl.-Phys. Achim Schulte für die engagierte Mitarbeit bei der Schlussredaktion dieses Buches.

P. Eckelt