

Über die Krümmung des Raumes.

Von A. Friedman in Petersburg.

Mit einer Abbildung. (Eingegangen am 29. Juni 1922.)

§ 1. 1. In ihren bekannten Arbeiten über allgemeine kosmologische Fragen kommen Einstein¹⁾ und de Sitter²⁾ zu zwei möglichen Typen des Weltalls; Einstein erhält die sogenannte Zylinderwelt, in der der Raum³⁾ konstante, von der Zeit unabhängige Krümmung besitzt, wobei der Krümmungsradius verbunden ist mit der Gesamtmasse der im Raume vorhandenen Materie; de Sitter erhält eine Kugelwelt, in welcher nicht nur der Raum, sondern auch die Welt in gewissem Sinne als Welt konstanter Krümmung angesprochen werden kann⁴⁾. Dabei werden wie von Einstein so auch von de Sitter gewisse Voraussetzungen über den Materietensor gemacht, die der Inkohärenz der Materie und ihrer relativen Ruhe entsprechen, d. h. die Geschwindigkeit der Materie wird als genügend klein vorausgesetzt im Vergleich zu der Grundgeschwindigkeit⁵⁾ — der Lichtgeschwindigkeit.

Das Ziel dieser Notiz ist, erstens die Ableitung der Zylinder- und Kugelwelt (als spezielle Fälle) aus einigen allgemeinen Annahmen, und zweitens der Beweis der Möglichkeit einer Welt, deren Raumkrümmung konstant ist in bezug auf drei Koordinaten, die als Raumkoordinaten gelten, und abhängig von der Zeit, d. h. von der vierten — der Zeitkoordinate; dieser neue Typus ist, was seine übrigen Eigenschaften anbetrifft, ein Analogon der Einsteinschen Zylinderwelt.

2. Die Annahmen, die wir unseren Betrachtungen zugrunde legen, zerfallen in zwei Klassen. Zu der ersten Klasse gehören Annahmen, welche mit den Annahmen Einsteins und de Sitters zusammen-

1) Einstein, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie, Sitzungsberichte Berl. Akad. 1917.

2) de Sitter, On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. Monthly Notices of the R. Astronom. Soc. 1916—1917.

3) Unter „Raum“ verstehen wir hier einen Raum, der durch eine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen beschrieben wird; der „Welt“ entspricht eine Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen.

4) Klein, Über die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlich-geschlossenen Welt. Götting. Nachr. 1918.

5) Siehe diesen Namen bei Eddington in seinem Buche: Espace, Temps et Gravitation, 2 Partie, S. 10. Paris 1921.

fallen; sie beziehen sich auf die Gleichungen, denen die Gravitationspotentiale genügen, und auf den Zustand und die Bewegung der Materie. Zur zweiten Klasse gehören Annahmen über den allgemeinen, sozusagen geometrischen Charakter der Welt; aus unserer Hypothese folgt als Spezialfall die Zylinderwelt Einsteins und auch die Kugelwelt de Sitters.

Die Annahmen der ersten Klasse sind die folgenden:

1. Die Gravitationspotentiale genügen dem Einsteinschen Gleichungssystem mit dem kosmologischen Gliede, das man auch gleich Null setzen darf:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \overline{R} + \lambda g_{ik} = -\kappa T_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \quad (A)$$

hier sind g_{ik} die Gravitationspotentiale, T_{ik} der Materietensor, κ — eine Konstante, $\overline{R} = g^{ik} R_{ik}$; R_{ik} ist bestimmt durch die Gleichungen

$$R_{ik} = \frac{\partial^2 \lg \sqrt{g}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x_\sigma} \left\{ \begin{matrix} i & k \\ \sigma \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left\{ \begin{matrix} i & k \\ \sigma \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i & \alpha \\ \sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k & \sigma \\ \alpha \end{matrix} \right\}, \quad (B)$$

dabei sind die x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) die Weltkoordinaten, und $\left\{ \begin{matrix} i & k \\ l \end{matrix} \right\}$ die Christoffelschen Symbole zweiter Art¹⁾.

2. Die Materie ist inkohärent und in relativer Ruhe; oder, weniger streng ausgedrückt, die relativen Geschwindigkeiten der Materie sind verschwindend klein im Vergleich zu der Lichtgeschwindigkeit. Infolge dieser Annahmen ist der Materietensor durch die Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} T_{ik} &= 0 \text{ für } i \text{ und } k \text{ nicht } = 4, \\ T_{44} &= c^2 \varrho g_{44}, \end{aligned} \quad (C)$$

hier ist ϱ die Dichte der Materie und c die Grundgeschwindigkeit; außerdem sind die Weltkoordinaten eingeteilt in drei Raumkoordinaten x_1, x_2, x_3 und die Zeitkoordinate x_4 .

3. Die Annahmen der zweiten Klasse sind die folgenden:

I. Nach Austeilung der drei Raumkoordinaten x_1, x_2, x_3 haben wir einen Raum konstanter Krümmung, die aber abhängen darf von x_4 — der Zeitkoordinate. Das Intervall²⁾ ds , bestimmt durch $ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k$, kann durch Einführung geeigneter Raumkoordinaten in folgende Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2 (dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2) \\ &+ 2g_{14} dx_1 dx_4 + 2g_{24} dx_2 dx_4 + 2g_{34} dx_3 dx_4 + g_{44} dx_4^2. \end{aligned}$$

1) Das Vorzeichen von R_{ik} und von \overline{R} ist bei uns von dem üblichen verschieden.

2) Siehe z. B. Eddington, *Espace, Temps et Gravitation*, 2 Partie. Paris 1921.

Hier ist R nur abhängig von x_4 ; R ist proportional dem Krümmungsradius des Raumes, der also mit der Zeit veränderlich sein darf.

2. In dem Ausdrucke für ds^2 können durch entsprechende Wahl der Zeitkoordinate g_{14} , g_{24} , g_{34} zum Verschwinden gebracht werden oder, kurz gesprochen, die Zeit ist orthogonal zum Raum. Für diese zweite Annahme können, wie mir scheint, keine physikalischen oder philosophischen Gründe angegeben werden; sie dient ausschließlich zur Vereinfachung der Rechnungen. Man muß noch bemerken, daß die Welt Einsteins und de Sitters in unseren Annahmen als Spezialfall enthalten ist.

Zufolge der Annahmen 1 und 2 kann ds^2 in die Form

$$ds^2 = R^2(dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2) + M^2 dx_4^2 \quad (D)$$

gebracht werden, wobei R eine Funktion von x_4 ist und M im allgemeinen Falle von allen vier Weltkoordinaten abhängt. Das Einsteinsche Weltall wird erhalten, wenn man in (D) R^2 durch $-\frac{R^2}{c^2}$ ersetzt und außerdem M gleich 1 setzt, wobei R den konstanten (von x_4 unabhängigen) Krümmungsradius des Raumes bedeutet. Das Weltall de Sitters wird erhalten, wenn man in (D) R^2 durch $-\frac{R^2}{c^2}$ und M durch $\cos x_1$ ersetzt:

$$d\tau^2 = -\frac{R^2}{c^2}(dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2) + dx_4^2, \quad (D_1)$$

$$d\tau^2 = -\frac{R^2}{c^2}(dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2) + \cos^2 x_1 dx_4^2. \quad (D_2)$$

4. Nun müssen wir noch eine Verabredung treffen über die Grenzen, in denen die Weltkoordinaten eingeschlossen sind, d. h. darüber, welche Punkte der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit wir als verschieden ansprechen werden; ohne uns in eine nähere Begründung einzulassen, wollen wir voraussetzen, daß die Raumkoordinaten in den folgenden Intervallen eingeschlossen sind: x_1 im Intervall $(0, \pi)$; x_2 im Intervall $(0, \pi)$ und x_3 im Intervall $(0, 2\pi)$; in bezug auf die Zeitkoordinate machen wir vorläufig keine beschränkende Annahme, sondern wollen diese Frage weiter unten betrachten.

1) Das ds , von dem vorausgesetzt wird, daß es die Dimension der Zeit hat, bezeichnen wir durch $d\tau$; dann hat die Konstante κ die Dimension $\frac{\text{Länge}}{\text{Masse}}$ und ist in CGS-Einheiten gleich $1,87 \cdot 10^{-27}$. Siehe Laue, Die Relativitätstheorie, Bd. II, S. 185. Braunschweig 1921.

§ 2. 1. Aus den Annahmen (C) und (D) folgt, wenn man in den Gleichungen (A) $i = 1, 2, 3$ und $k = 4$ setzt:

$$R'(x_4) \frac{\partial M}{\partial x_1} = R'(x_4) \frac{\partial M}{\partial x_2} = R'(x_4) \frac{\partial M}{\partial x_3} = 0;$$

darans ergeben sich die zwei Fälle: (1.) $R'(x_4) = 0$, R ist unabhängig von x_4 , wir wollen diese Welt als stationäre Welt bezeichnen; (2.) $R'(x_4)$ nicht $= 0$, M hängt nur von x_4 ab; dies soll die nichtstationäre Welt heißen.

Wir betrachten zuerst die stationäre Welt und schreiben die Gleichungen (A) für $i, k = 1, 2, 3$ und außerdem i nicht $= k$ hin, dann erhalten wir folgendes Formelsystem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial x_1 \partial x_2} - \cotg x_1 \frac{\partial M}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 M}{\partial x_1 \partial x_3} - \cotg x_1 \frac{\partial M}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial^2 M}{\partial x_2 \partial x_3} - \cotg x_2 \frac{\partial M}{\partial x_3} &= 0. \end{aligned}$$

Die Integration dieser Gleichungen liefert folgenden Ausdruck für M :

$$M = A(x_3, x_4) \sin x_1 \sin x_2 + B(x_2, x_4) \sin x_1 + C(x_1, x_4), \quad (1)$$

wo A, B, C willkürliche Funktionen ihrer Argumente sind. Lösen wir die Gleichungen (A) nach R_{ik} auf und eliminieren aus den noch nicht gebrauchten Gleichungen die unbekannte Dichte ϱ ¹⁾, so erhalten wir, wenn wir für M den Ausdruck (1) einsetzen, nach etwas langen, aber ganz elementaren Rechnungen folgende zwei Möglichkeiten für M :

$$M = M_0 = \text{const}, \quad (2)$$

$$M = (A_0 x_4 + B_0) \cos x_1, \quad (3)$$

wo M_0, A_0, B_0 Konstanten bedeuten.

Ist M gleich einer Konstanten, so ist die stationäre Welt die Zylinderwelt. Hier ist es vorteilhaft, mit den Gravitationspotentialen der Formel (D₁) zu operieren; bestimmen wir die Dichte und die Größe λ , so wird das bekannte Resultat Einsteins erhalten:

$$\lambda = \frac{c^2}{R^2}, \quad \varrho = \frac{2}{\kappa R^2}, \quad \overline{M} = \frac{4\pi^2}{\kappa} R,$$

wobei \overline{M} die Gesamtmasse des Raumes bedeutet.

¹⁾ Die Dichte ϱ ist bei uns eine unbekannte Funktion der Weltkoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 .

In dem zweiten möglichen Fall, wenn \overline{M} durch (3) gegeben ist, kommen wir mittels einer vernünftigen Transformation von x_4 ¹⁾ zu der Kugelwelt de Sitters, in der $M = \cos x_1$ ist; mit Hilfe von (D₂) erhalten wir die Beziehungen de Sitters:

$$\lambda = \frac{3c^2}{R^2}, \quad \varrho = 0, \quad \overline{M} = 0.$$

Wir haben also folgendes Ergebnis: die stationäre Welt ist entweder die Einsteinsche Zylinderwelt oder die de Sittersche Kugelwelt.

2. Wir wollen nun die nichtstationäre Welt betrachten. M ist jetzt eine Funktion von x_4 ; durch entsprechende Wahl von x_4 kann man erreichen (ohne der Allgemeinheit der Betrachtung zu schaden), daß $M = 1$ wird; um an unsere gewöhnlichen Vorstellungen anzuknüpfen, geben wir ds^2 eine Form, die (D₁) und (D₂) analog ist:

$$d\tau^2 = -\frac{R^2(x_4)}{c^2} (dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2) + dx_4^2. \quad (D_3)$$

Unsere Aufgabe ist nun die Bestimmung R und ϱ aus den Gleichungen (A). Es ist klar, daß die Gleichungen (A) mit verschiedenen Indizes nichts liefern; die Gleichungen (A) für $i = k = 1, 2, 3$ geben eine Beziehung:

$$\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2RR''}{R^2} + \frac{c^2}{R^2} - \lambda = 0, \quad (4)$$

die Gleichung (A) mit $i = k = 4$ liefert die Beziehung:

$$\frac{3R'^2}{R^2} + \frac{3c^2}{R^2} - \lambda = \kappa c^2 \varrho, \quad (5)$$

mit

$$R' = \frac{dR}{dx_4} \quad \text{und} \quad R'' = \frac{d^2R}{dx_4^2}.$$

Da R' nicht = 0 ist, so gibt die Integration der Gleichung (4), wenn wir noch t für x_4 schreiben, folgende Gleichung:

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{A - R + \frac{\lambda}{3c^2} R^3}{R}, \quad (6)$$

wo A eine willkürliche Konstante ist. Aus dieser Gleichung erhalten wir R durch Umkehrung eines elliptischen Integrals, d. h. durch Auflösung nach R der Gleichung

$$t = \frac{1}{c} \int_a^R \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^2} x^3}} dx + B, \quad (7)$$

¹⁾ Diese Transformation wird durch die Formel $d\bar{x}_4 = \sqrt{A_0 x_4 + B_0} dx_4$ gegeben.

in der B und a Konstanten sind, wobei noch Rücksicht genommen werden muß auf die gewöhnlichen Bedingungen des Vorzeichenwechsels der Quadratwurzel. Aus der Gleichung (5) läßt sich ϱ bestimmen zu

$$\varrho = \frac{3A}{\kappa R^3}; \quad (8)$$

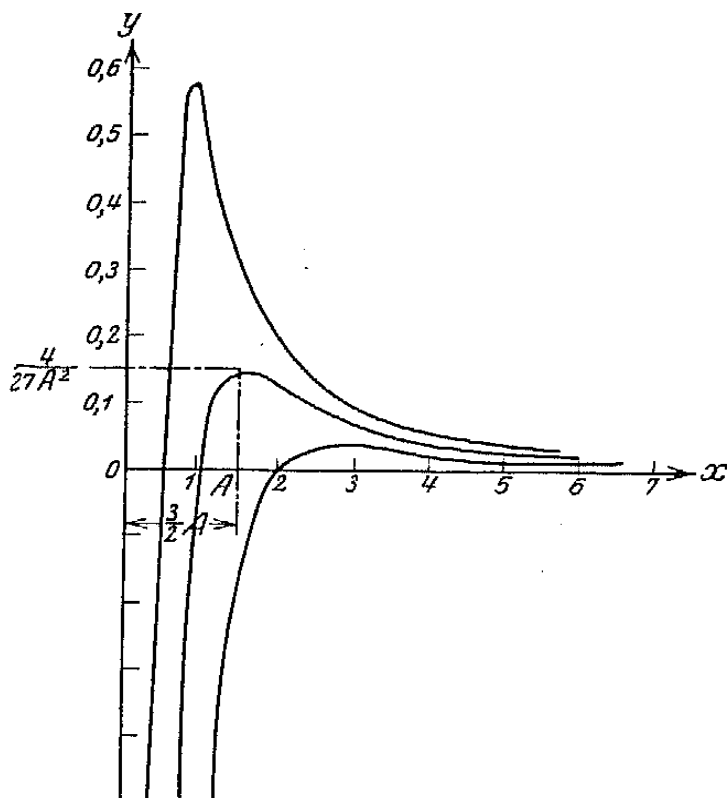
durch die Gesamtmasse des Raumes \overline{M} drückt sich die Konstante A folgendermaßen aus:

$$A = \frac{\kappa \overline{M}}{6 \pi^2}. \quad (9)$$

Ist \overline{M} positiv, so wird A auch positiv.

3. Der Betrachtung der nichtstationären Welt müssen wir die Gleichungen (6) und (7) zugrunde legen; dabei ist die Größe λ nicht bestimmt; wir werden annehmen, daß sie beliebige Werte haben

kann. Wir bestimmen nun diejenigen Werte der Veränderlichen x , bei denen die Quadratwurzel der Formel (7) ihr Vorzeichen wechseln kann. Beschränken wir unsere Betrachtung auf positive Krümmungsradien, so genügt es, für x das Intervall $(0, \infty)$ zu betrachten und in diesem Intervall die Werte von x , die den Radikanden gleich 0 oder ∞ machen. Ein Wert von x , für den die Quadratwurzel in (7) gleich Null wird, ist $x = 0$; die übrigen Werte von x , bei denen die Quadratwurzel in (7) ihr Vorzeichen wechselt, sind durch



die positiven Wurzeln der Gleichung $A - x + \frac{\lambda}{3c^2} x^3 = 0$ gegeben. Wir bezeichnen $\frac{\lambda}{3c^2}$ durch y und betrachten in der (x, y) -Ebene die Kurvenschar dritten Grades:

$$y x^3 - x + A = 0. \quad (10)$$

A ist hier der Parameter der Schar, der im Intervall $(0, \infty)$ variiert. Die Kurven der Schar (s. Fig.) schneiden die x -Achse im Punkte $x = A$, $y = 0$ und haben ein Maximum im Punkte

$$x = \frac{3A}{2}, \quad y = \frac{4}{27A^2}.$$

Aus der Figur ist ersichtlich, daß für negative λ die Gleichung $A - x + \frac{\lambda}{3c^2}x^3 = 0$ eine positive Wurzel x_0 im Intervall $(0, A)$ besitzt. Betrachtet man x_0 als Funktion von λ und A :

$$x_0 = \Theta(\lambda, A),$$

so findet man, daß Θ eine zunehmende Funktion von λ und eine zunehmende Funktion von A ist. Ist λ im Intervall $\left(0, \frac{4}{9} \frac{c^2}{A^2}\right)$ gelegen, so hat die Gleichung zwei positive Wurzeln $x_0 = \Theta(\lambda, A)$ und $x'_0 = \vartheta(\lambda, A)$, wobei x_0 in das Intervall $\left(A, \frac{3A}{2}\right)$ und x'_0 in das Intervall $\left(\frac{3A}{2}, \infty\right)$ fällt; $\Theta(\lambda, A)$ ist eine zunehmende Funktion wie von λ , so auch von A , $\vartheta(\lambda, A)$ eine abnehmende Funktion von λ und A . Ist endlich λ größer als $\frac{4}{9} \frac{c^2}{A^2}$, so hat die Gleichung keine positiven Wurzeln.

Wir gehen nun zur Betrachtung der Formel (7) über und schicken der Betrachtung folgende Bemerkung voraus: es sei für $t = t_0$ der Krümmungsradius gleich R_0 ; das Vorzeichen der Quadratwurzel in (7) ist für $t = t_0$ positiv oder negativ, je nachdem, ob für $t = t_0$ der Krümmungsradius wächst oder abnimmt; indem wir nötigenfalls t durch $-t$ ersetzen, können wir die Quadratwurzel immer positiv machen, d. h. durch Wahl der Zeit läßt sich immer erreichen, daß der Krümmungsradius für $t = t_0$ mit wachsender Zeit zunimmt.

4. Wir betrachten zuerst den Fall $\lambda > \frac{4}{9} \frac{c^2}{A^2}$, d. h. den Fall, daß die Gleichung $A - x + \frac{\lambda}{3c^2}x^3 = 0$ keine positiven Wurzeln besitzt. Die Gleichung (7) kann dann so geschrieben werden

$$t - t_0 = \frac{1}{c} \int_{R_0}^R \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^2}x^3}} dx, \quad (11)$$

wobei zufolge unserer Bemerkung, die Quadratwurzel immer positiv ist. Daraus folgt, daß R eine zunehmende Funktion von t ist; der positive Anfangswert R_0 ist von jeder Einschränkung frei.

Da der Krümmungsradius nicht kleiner als Null sein darf, so muß er mit abnehmender Zeit t von R_0 an abnehmend im Augenblick t' den Wert Null erreichen. Die Zeit des Anwachsens von R

von 0 bis R_0 wollen wir die Zeit seit der Erschaffung der Welt nennen¹⁾; diese Zeit t' ist gegeben durch:

$$t' = \frac{1}{c} \int_0^{R_0} \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^2} x^3}} dx. \quad (12)$$

Die betrachtete Welt bezeichnen wir als monotone Welt erster Art.

Die Zeit seit der Erschaffung der (monotonen) Welt (erster Art), betrachtet als Funktion von R_0 , A , λ , hat folgende Eigenschaften: 1. sie wächst mit wachsendem R_0 ; 2. sie nimmt ab, wenn A zunimmt, d. h. die Masse im Raume vergrößert sich; 3. sie nimmt ab, wenn λ zunimmt. Ist $A > \frac{2}{3} R_0$, so ist für ein beliebiges λ die seit der Erschaffung der Welt verflossene Zeit endlich; ist $A \leq \frac{2}{3} R_0$, so kann immer ein solcher Wert von $\lambda = \lambda_1 = \frac{4c^2}{9A^2}$ gefunden werden, daß bei Annäherung von λ an diesen Wert die Zeit seit der Erschaffung der Welt unbeschränkt zunimmt.

5. Jetzt soll λ im Intervall $(0, \frac{4c^2}{9A^2})$ liegen; dann kann der Anfangswert des Krümmungsradius in den Intervallen: $(0, x_0)$, (x_0, x'_0) , (x'_0, ∞) liegen. Fällt R_0 in das Intervall (x_0, x'_0) , so ist die Quadratwurzel in Formel (7) imaginär; ein Raum mit dieser Anfangskrümmung ist unmöglich.

Dem Falle, daß R_0 im Intervalle $(0, x_0)$ liegt, widmen wir den nächsten Abschnitt; hier betrachten wir noch den dritten Fall: $R_0 > x'_0$ oder $R_0 > \vartheta(\lambda, A)$. Durch Betrachtungen, die den vorhergehenden analog sind, läßt sich zeigen, daß R eine zunehmende Funktion der Zeit ist, wobei R mit dem Werte $x'_0 = \vartheta(\lambda, A)$ beginnen kann. Die Zeit, die von dem Augenblicke, wann $R = x'_0$ war, bis zum Augenblicke, dem $R = R_0$ entspricht, verflossen ist, nennen wir wieder die Zeit seit der Erschaffung der Welt. Sie sei t' , dann ist

$$t' = \frac{1}{c} \int_{x'_0}^{R_0} \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^2} x^3}} dx. \quad (13)$$

Diese Welt nennen wir monotone Welt zweiter Art.

¹⁾ Die Zeit seit der Erschaffung der Welt ist die Zeit, die verflossen ist von dem Augenblicke, als der Raum ein Punkt war ($R = 0$) bis zum gegenwärtigen Zustande ($R = R_0$); diese Zeit darf auch unendlich sein.

6. Wir betrachten nun den Fall, daß λ zwischen die Grenzen $(-\infty, 0)$ fällt. Ist in diesem Falle $R_0 > x_0 = \Theta(\lambda, A)$, so wird die Quadratwurzel in (7) imaginär, der Raum mit diesem R_0 ist unmöglich. Ist $R_0 < x_0$, so ist der betrachtete Fall identisch mit dem, den wir im vorigen Abschnitt beiseite gelassen haben. Wir setzen also voraus, daß λ im Intervall $(-\infty, \frac{4c^2}{9A^2})$ liege und $R_0 < x_0$ sei. Durch bekannte Erwägungen¹⁾ kann man nun zeigen, daß R eine periodische Funktion von t wird, mit der Periode t_π , wir nennen sie die Weltperiode; t_π ist durch die Formel gegeben:

$$t_\pi = \frac{2}{c} \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{x}{A-x + \frac{\lambda}{3c^2}x^3}} dx. \quad (14)$$

Der Krümmungsradius variiert dabei zwischen 0 und x_0 . Wir wollen diese Welt die periodische Welt nennen. Die Periode der periodischen Welt nimmt zu, wenn wir λ vergrößern, und strebt gegen Unendlich, wenn λ dem Werte $\lambda_1 = \frac{4c^2}{9A^2}$ zustrebt.

Für kleine λ wird die Periode durch die Annäherungsformel

$$t_\pi = \frac{\pi A}{c} \quad (15)$$

dargestellt.

Bezüglich der periodischen Welt sind zwei Gesichtspunkte möglich: zählen wir zwei Ereignisse für zusammenfallend, wenn ihre Raumkoordinaten zusammenfallen und die Differenz der Zeitkoordinaten ein ganzes Vielfaches der Periode ist, so wächst der Krümmungsradius von 0 bis x_0 und nimmt dann bis zum Werte 0 ab; die Zeit der Weltexistenz ist endlich; andererseits, wenn die Zeit zwischen $-\infty$ und $+\infty$ variiert (d. h. wir betrachten zwei Ereignisse nur dann als zusammenfallend, wenn nicht nur ihre Raumkoordinaten, sondern auch ihre Weltkoordinaten zusammenfallen), so kommen wir zu einer wirklichen Periodizität der Raumkrümmung.

7. Unsere Kenntnisse sind vollständig ungenügend, um Zahlenrechnungen auszuführen und zu entscheiden, welche Welt unser Weltall

¹⁾ Siehe z. B. Weierstrass, Über eine Gattung reell periodischer Funktionen. Monatsber. d. Königl. Akad. d. Wissensch. 1866 und Horn, Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen. ZS. f. Math. und Physik 47, 400, 1902. In unserem Falle müssen die Betrachtungen dieser Autoren zweckentsprechend verändert werden; indessen wird die Periodizität in unserem Falle durch elementare Betrachtungen festgestellt.

ist; es ist möglich, daß das Kausalitätsproblem und das Problem der Zentrifugalkraft diese Fragen beleuchten werden. Es ist noch zu bemerken, daß die „kosmologische“ Größe λ in unseren Formeln unbestimmt bleibt, da sie eine überzählige Konstante in der Aufgabe ist; möglicherweise können elektrodynamische Betrachtungen zu ihrer Auswertung führen. Setzen wir $\lambda = 0$ und $M = 5 \cdot 10^{21}$ Sonnenmassen, so wird die Weltperiode von der Ordnung 10 Milliarden Jahren. Diese Ziffern können aber gewiß nur als eine Illustration für unsere Rechnungen gelten.

Petrograd, 29. Mai 1922.
