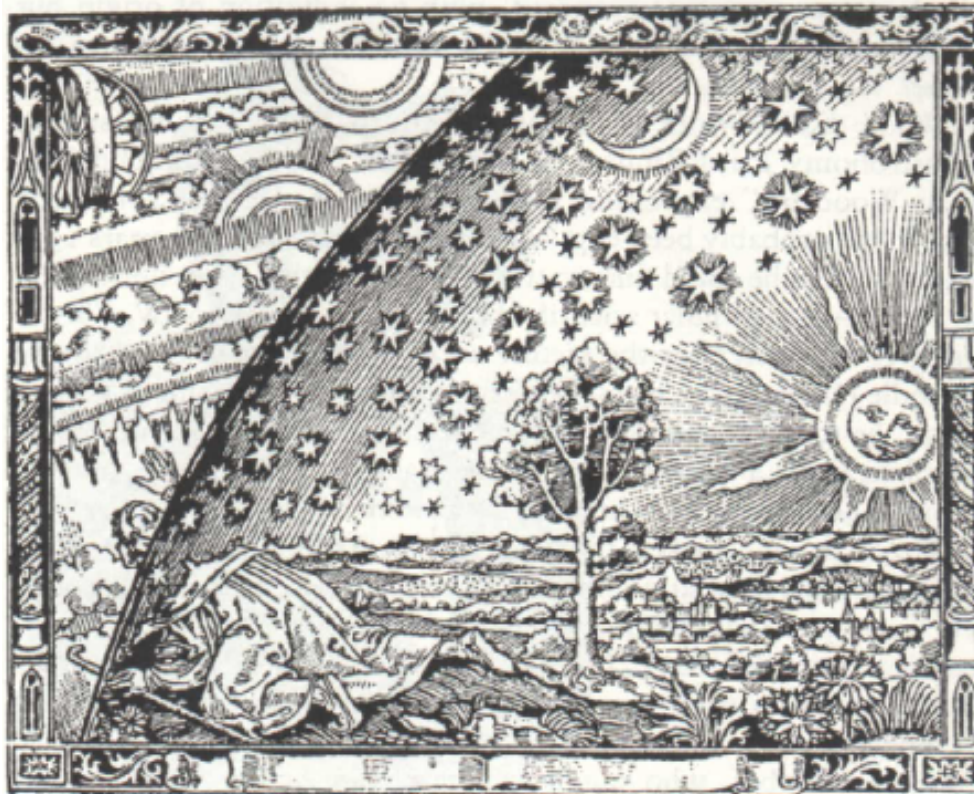


# Raumfahrtsysteme

## Skriptum zur Vorlesung



Wintersemester 2002/2003

FACHGEBIET RAUMFAHRTTECHNIK  
TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

## Gebrauchshinweis

Dieses vorlesungsbegleitende Skript soll den Studenten bei seinem Studium der Raumfahrttechnik unterstützen.

**Das Skript kann nicht den Besuch von Vorlesung/Übung und schon gar nicht das eigenständige Durchdenken der Thematiken ersetzen.**

Das Skript basiert im Wesentlichen auf dem freiwilligen Engagement von Studenten und wiss. Mitarbeitern. **Für Richtigkeit wird ausdrücklich keine Gewähr übernommen. Für Anregungen und Korrekturen sind wir jederzeit dankbar** (z.B. Email an [pauly@lrt.mw.tum.de](mailto:pauly@lrt.mw.tum.de))!

## Danksagung

Die folgenden Herren haben zur Erstellung dieses Werkes beigetragen: Prof. Eduard Igenbergs, Michael Wieser, Michael Schiffner, Wilfried Hofstetter, Sebastian Höfner sowie – last but not least - Dr.-Ing. Peter Eckart und Thomas Bürgener (? Erstellung des Vorgängerskripts im Jahre 1998). Für ihre Unterstützung möchte ich mich an dieser Stelle bedanken.

Dr.-Ing. Kristian Pauly

Garching, März 2003

*„[Vom Weltraum aus sah ich] die Erde ganz außerordentlich klein - ich will sagen, noch kleiner als den Mond - sodass ich mir, wie ich zum erstenmal hinunter guckte, gar nicht vorstellen konnte, wo all die hohen Berge und das so große Weltmeer geblieben wären [...].*

*[Aber] der Sonnenglanz, der mir aus dem Ozean entgegenspiegelte, ließ mich schließen, dass das, was ich da sah, die Erde sei.“*

Lukian, "Ikaromenippus", ca. 160 n. Chr.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>GESCHICHTE DER RAUMFAHRT IM ÜBERBLICK .....</b>	<b>1-1</b>
1.1	Interessante Ereignisse aus der Vorgeschichte der Raumfahrt.....	1-1
1.2	Die Zeit der Pioniere .....	1-2
1.3	Höhepunkte der unbemannte Raumfahrt.....	1-3
1.4	Höhepunkte der bemannten Raumfahrt .....	1-5
<b>2</b>	<b>GRUNDLAGEN DES RAKETENANTRIEBES .....</b>	<b>2-1</b>
2.1	Grundgesetze der Mechanik .....	2-1
2.2	Energiequellen und Impulsträger.....	2-2
2.3	Schub.....	2-3
2.4	Effektive Ausströmgeschwindigkeit und spezifischer Impuls .....	2-5
2.5	Angepasste Düsen .....	2-5
2.6	Startschub.....	2-7
2.7	Thermodynamische Grundlagen des Raketenmotors .....	2-8
2.8	Massendurchsatz .....	2-13
2.9	Flächenverhältnis .....	2-14
2.10	Bemerkungen zur Physik und Chemie der Ausströmung.....	2-14
<b>3</b>	<b>RAKETENGRUNDGLEICHUNG UND STUFENPRINZIP .....</b>	<b>3-1</b>
3.1	Raketengrundgleichung (Ziolkowsky-Gleichung).....	3-1
3.2	Raketenstufung.....	3-4
3.3	Stufenoptimierung.....	3-7
3.4	Zündfolge.....	3-12
<b>4</b>	<b>CHEMISCHE RAKETENANTRIEBE .....</b>	<b>4-1</b>
4.1	Flüssigkeitsantriebe.....	4-2
4.2	Feststoffantriebe .....	4-13
4.3	Hybridantriebe .....	4-18
4.4	Trägersysteme.....	4-20
<b>5</b>	<b>ELEKTRISCHE RAKETENANTRIEBE .....</b>	<b>5-1</b>
5.1	Elektrothermische Plasmaantriebe .....	5-3
5.2	Elektrostatische Ionenantriebe.....	5-5
5.3	Elektromagnetische Plasmaantriebe.....	5-8
5.4	Exotische Raketenantriebe .....	5-11
<b>6</b>	<b>AUFSTIEGSBAHNEN.....</b>	<b>6-1</b>
6.1	Einleitung.....	6-1

<b>6.2</b>	<b>Bewegungsgleichungen angetriebener Aufstiegsbahnen .....</b>	<b>6-2</b>
<b>6.3</b>	<b>Kräfte am Raumfahrzeug.....</b>	<b>6-3</b>
<b>6.4</b>	<b>Integration der Differentialgleichungen.....</b>	<b>6-6</b>
<b>6.5</b>	<b>Verluste und Gewinne .....</b>	<b>6-10</b>
<b>7</b>	<b>GRUNDLAGEN DER BAHNMECHANIK / KEPLERGESETZE .....</b>	<b>7-1</b>
<b>7.1</b>	<b>Koordinatensysteme .....</b>	<b>7-1</b>
<b>7.2</b>	<b>Bahnelemente .....</b>	<b>7-4</b>
<b>7.3</b>	<b>Astronomische und bahnmechanische Begriffe.....</b>	<b>7-5</b>
<b>7.4</b>	<b>Die bahnmechanischen Gesetze nach Kepler .....</b>	<b>7-9</b>
<b>8</b>	<b>KEPLERBAHNEN .....</b>	<b>8-1</b>
<b>8.1</b>	<b>Kreisbahnen .....</b>	<b>8-1</b>
<b>8.2</b>	<b>Fluchtgeschwindigkeit .....</b>	<b>8-2</b>
<b>8.3</b>	<b>Freiflugbahnen.....</b>	<b>8-3</b>
<b>8.4</b>	<b>Bahnübergänge .....</b>	<b>8-6</b>
<b>9</b>	<b>UMWELTFAKTOREN DES WELTRAUMS.....</b>	<b>9-1</b>
<b>9.1</b>	<b>Strahlung .....</b>	<b>9-1</b>
<b>9.2</b>	<b>Mikrogravitation .....</b>	<b>9-7</b>
<b>9.3</b>	<b>Erdmagnetfeld .....</b>	<b>9-9</b>
<b>9.4</b>	<b>Vakuum.....</b>	<b>9-10</b>
<b>10</b>	<b>DATENÜBERTRAGUNG .....</b>	<b>10-1</b>
<b>10.1</b>	<b>Grundlegendes.....</b>	<b>10-1</b>
<b>10.2</b>	<b>Kriterium Orbit und Bodenstation.....</b>	<b>10-2</b>
<b>10.3</b>	<b>Fortpflanzung von Radiowellen.....</b>	<b>10-4</b>
<b>10.4</b>	<b>Beeinträchtigungen der Datenübermittlung: Atmosphäre &amp; Rauschen.....</b>	<b>10-6</b>
<b>10.5</b>	<b>Frequenzauswahl.....</b>	<b>10-8</b>
<b>10.6</b>	<b>Modulation und Codierung .....</b>	<b>10-9</b>
<b>11</b>	<b>BAHN- UND LAGEREGELUNG.....</b>	<b>11-1</b>
<b>11.1</b>	<b>Bahnbestimmung.....</b>	<b>11-1</b>
<b>11.2</b>	<b>Lagebestimmung und -Regelung .....</b>	<b>11-3</b>
<b>12</b>	<b>LANDUNG AUF HIMMELSKÖRPERN .....</b>	<b>12-1</b>
<b>12.1</b>	<b>Landung auf atmosphärelosen Himmelskörpern .....</b>	<b>12-1</b>
<b>12.2</b>	<b>Atmosphärischer Wiedereintritt.....</b>	<b>12-5</b>
<b>12.3</b>	<b>Hitzeschutzsysteme für Eintrittskörper.....</b>	<b>12-11</b>
<b>13</b>	<b>LITERATUR.....</b>	<b>13-1</b>

# 1 Geschichte der Raumfahrt im Überblick

## 1.1 Interessante Ereignisse aus der Vorgeschichte der Raumfahrt

- 360 v. Chr. Taube des *Archytas* (Dampfrakete)
- 300 v.Chr. *Aristarch von Samos*: Sonne ist zentraler Himmelskörper
- 100 n. Chr. *Ptolemäisches* Weltbild [4]
- 1200 In China wird das Schießpulver erfunden und zum Antrieb der *Pfeile fliegenden Feuers* bei der Besetzung von *Pien-King* durch die *Mongolen* benutzt
- 1241 Die *Tataren* setzen in der Schlacht von *Lignica* erstmals Raketen in Europa ein
- 1420 *De Fontana* schlägt Raketen als Antriebsmittel für Wagen und Boote vor
- 1543 *Nikolaus Kopernikus* begründet das heliozentrische Weltbild
- 1600 *Tychonisches* Weltbild: die Erde befindet sich im Zentrum
- 1602 *Galileo Galilei* verteidigt das kopernikanische Weltbild, entdeckt die Jupitermonde und das Gesetz der Wurfparabel
- 1609 *Johannes Kepler* errechnet aus den Beobachtungen des dänischen Astronomen *Tycho Brahe* die Planetenbahnen (elliptisch) und stützt das kopernikanische Weltbild
- 1649 *Cyrano de Bergerac* beschreibt in seinem Buch „*Voyage dans la lune*“ Wasserdampftraketen, die durch Sonneneinstrahlung aufgeheizt werden
- 1650 *Casimir Simienowicz* erwähnt in seinem Buch „*Rogetten für Luft und Wasser*“ eine dreistufige Rakete
- 1687 *Isaac Newton* veröffentlicht die „*Principia mathematica*“ mit dem Gesetz von *actio gleich reactio*
- 1781 *William Herschel* entdeckt den Planeten Uranus
- 1786 *Bergstädter* führt in Hamburg Versuche mit Raketen durch
- 1823 *Sir William Congreve* entwickelt eine Rakete mit einer Reichweite von 2800 m
- 1824 *James Perkins* lässt sich die Heißwasserrakete patentieren

- 1841 *Charles Golightly* schlägt einen Flugzeugantrieb mit Raketen vor
- 1845 *Johann Galle* entdeckt den Planeten Neptun
- 1860 *Jules Verne* beschreibt in seinem Buch „*De la terre a la Lune*“ die Mondlandung
- 1886 *Eugen Goldstein* entdeckt die Kanalstrahlen (schnelle Ionen, Grundlage elektrischer Raumantriebe)
- 1891 *Hermann Ganswindt* fertigt erste Zeichnungen eines prinzipiell richtigen Raumfahrzeuges und stellt Überlegungen zur Flugstabilität an
- 1895 *Kurd Lasswitz* beschreibt in seinem Buch „*Auf zwei Planeten*“ erstmals eine Raumstation

## 1.2 Die Zeit der Pioniere

- 1900 *Konstantin Eduardovitsch Ziolkowsky* (1857-1935) stellt die erste fundierte Theorie über Raketenantriebe (Raketengrundgleichung, Raketenstufung) auf. In seinem 1924 erschienenen Buch „*Eine Rakete in den kosmischen Raum*“ sind bereits grundlegende mathematische Beziehungen enthalten, die heute noch für die Raumfahrt von Bedeutung sind. Die Raketengrundgleichung von *Ziolkowsky* gab erstmals den Zusammenhang zwischen Fluggeschwindigkeit, Strahlggeschwindigkeit, Startmasse und Treibstoffmasse an.
- 1919 *Robert Goddard* (1882-1945) beschreibt in „*A Method of Reaching Extreme Altitudes*“ seine Raketenversuche. 1926 gelingt ihm der erste erfolgreiche Start einer Flüssigkeitsrakete.
- 1923 *Hermann Oberth* (1894-1989) schafft in seinem Buch „*Die Rakete zu den Planetenräumen*“ für die Raumfahrt wesentliche wissenschaftliche Grundlagen. Unabhängig von *Ziolkowsky* leitet er die Raketengrundgleichung und Stufentheorie her, untersucht die Bahnoptimierung und stellt einige experimentelle Raketenversuche an. Seine Veröffentlichung „*Wege zur Raumschiffahrt*“ (1924) enthält Raketenkonstruktionen und Untersuchungen über die physische und psychologische Wirkung hoher Beschleunigungen auf den Menschen.
- 1925 *Walter Hohmann* (1880-1945) veröffentlicht grundlegende Untersuchungen zur Bahnmechanik des Raketenfluges in der Schrift „*Die Erreichbarkeit der Himmelskörper*“.
- 1930 *Wernher von Braun* beginnt mit seinen grundlegenden Arbeiten über Großraketen. 1942 startet erstmals die von ihm in Peenemünde entwickelte Flüssigkeitsrakete *A4*, die als *Vergeltungswaffe 2* (V2) bezeichnet und militärisch verwendet wurde. Nach dem Krieg entstanden unter seiner Leitung

als Direktor des Marshall Space Flight Center (Huntsville, Alabama) die großen Trägerraketen der USA (u.a. Saturn V).

- 1951 Gründung der *Internationalen Astronautischen Föderation* (IAF).
- 1957 Am 4.Oktober startet die UdSSR den ersten Erdsatelliten *Sputnik 1*. Mit *Sputnik 2* gelangt am 3.November die Polarhündin *Laika* als erstes Säugetier in die Erdumlaufbahn.
- 1958 31.Januar: Durch den ersten US-Satelliten *Explorer 1* wird der Strahlungsgürtel der Erde (*van Allen*) entdeckt [13].
- 1959 Die sowjetische Sonde *Luna 3* sendet erstmals Bilder der Mondrückseite.
- 1961 12.April: Erste bemannte Erdumrundung des sowjetischen Raumschiffs *Vostok* mit dem Kosmonauten *Yuri Gagarin*. Die kugelförmigen Raumkapseln boten Platz für eine Person. Mit ihnen wurden insgesamt sechs bemannte Flüge durchgeführt, darunter eine Mission mit der ersten Kosmonautin *Valentina Tereschkowa*. *Alan Shepard* ist der Astronaut des ersten amerikanischen ballistischen Raumfluges in der *Merkur-Redstone 3* am 5. Mai [2].
- 1962 21.Februar: *John Glenn* gelangt als erster Amerikaner mit der *Merkur-Atlas 6* in eine Erdumlaufbahn.

### 1.3 Höhepunkte der unbemannte Raumfahrt

Satellit	Startdatum	Mission, Bemerkungen
SPUTNIK 1	04.10.57	Erster Erdsatellit
EXPLORER 1	31.01.58	Entdeckung des Van Allen Strahlungsgürtels
LUNA 2	12.09.59	Erster Mondflug
DISCOVERER 13	10.08.60	Erste Satellitenbergung
MARINER 2	27.08.62	Erste Venus-Daten
MARINER 4	28.11.64	Erste Mars-Daten
EARLY BIRD	06.04.65	Erster kommerzieller Nachrichtensatellit
LUNA 9	31.01.66	Erste Mondlandung
COSMOS 186/188	30.10.67	Erstes Dockingmanöver im Orbit
VENERA 7	17.08.70	Erste Venuslandung
MARINER 9	30.05.71	Marsorbit am 13.11.71 erreicht, Übertragung von Bildern der Marsoberfläche
PIONEER 10	03.03.72	Erster interstellarer Satellit; Vorbeiflug am Jupiter am 4.12.73
PIONEER 11	05.04.73	Vorbeiflug am Jupiter am 3.12.74, Vorbeiflug am Saturn am 1.9.79
MARINER 10	03.11.73	Erster Vorbeiflug am Merkur
HELIOS 1	10.12.74	Naherkundung (48 Mio. km) der Sonnenoberfläche
VIKING 1	20.08.75	Erste erfolgreiche Marslandung



Satellit	Startdatum	Mission, Bemerkungen
VOYAGER 2	20.08.77	Vorbeiflug am Jupiter am 9.7.79, Vorbeiflug am Saturn am 26.8.81, Vorbeiflug am Uranus am 24.1.86, Vorbeiflug am Neptun am 25.8.89; die Beobachtungen erstreckten sich auch auf Monde der passierten Planeten und den interplanetaren Raum
VOYAGER 1	05.09.77	Vorbeiflug am Jupiter am 5.3.79, Vorbeiflug am Saturn am 12.11.80; die Beobachtungen erstreckten sich auch auf Monde der passierten Planeten und den interplanetaren Raum
GIOTTO	02.07.85	Untersuchung des Halley'schen Kometen
MAGELLAN	04.05.89	Kartographierung der Venus
HIPPARCOS	08.08.89	Astronomiesatellit zur Positionsbestimmung und Beobachtung von Sternen; wegen Versagens des Apogäumsmotors können die Missionsanforderungen nur teilweise erfüllt werden
GALILEO	18.10.89	Nach mehreren Swing-by-Manövern Ankunft am Jupiter zum 7.12.95; eine mitgeführte Messsonde soll in die Jupiteratmosphäre eindringen, während die orbitale Relaisstation zusätzlich das Jupitersystem untersucht; derzeitige Probleme mit der Hauptantenne
HUBBLE	24.04.90	Weltraumteleskop zur Beobachtung lichtschwacher Objekte; ein Fehler im Spiegelschliff, der zu Verzerrungen führt, wird evtl. 1995 bei einem Shuttle-Flug behoben werden
ROSAT	01.06.90	Astronomiesatellit für die Suche nach Röntgenquellen; außerordentlich erfolgreich
ULYSSES	06.10.90	Untersuchung der Sonnenpole geplant
GRO	07.04.91	Gammastrahlungsobservatorium (fast 16 t schwer!) von Shuttle in Erdumlaufbahn gebracht
CLEMENTINE	25.01.94	Testen neuer Technologie für das Department of Defense. Die vom Satelliten gesammelten Daten ermöglichten die Erstellung der ersten topographischen Karte des Mondes
WIND	01.11.94	Untersuchung des Sonnenwinds
SOHO	12.02.95	Untersuchung der Sonne und des Sonnenwindes
NEAR EARTH ASTEROID RENDEZVOUS (NEAR)	18.02.96	Erste Umläufe eines Satelliten um einen Asteroiden, gefolgt von der ersten (harten) Landung am 12.02.01.
MARS GLOBAL SURVEYOR	07.11.96	Untersuchung des Wetters, Magnetfeldes und der Oberfläche von Mars
MARS PATHFINDER	04.12.96	Landung eines Rovers auf dem Mars am 04.07.97 und Erforschung der Oberfläche des Planeten
ADVANCED COMPOSITION EXPLORER (ACE)	25.08.97	Untersuchung von niederenergetischen Sonnenpartikeln und hochenergetischen galaktischen Partikeln; ACE liefert auch Echtzeit-Wetterberichte.
CASSINI UND HUYGENS PROBE	15.10.97	Untersuchung von Saturn und seinen Monden angefangen mit 2004. Die Huygens Probe wird in die Atmosphäre des Mondes Titan herabsteigen und Daten sammeln.
LUNAR PROSPECTOR	15.01.98	Untersuchung der Zusammensetzung des Mondbodens
DEEP SPACE-1	24.10.98	Technologiedemonstration, Vorbeiflug an einem Asteroiden und einem Kometen.
STARDUST	07.02.99	Untersuchung kleiner Staubpartikeln im Weltraum
SNAP-1	28.06.00	Erster kommerzieller dreiaachsenstabilisierter Nanosatellit
MARS ODYSSEY	07.04.01	Untersuchung der Marsoberfläche



## 1.4 Höhepunkte der bemannten Raumfahrt

Gerät	Startdatum	Mission, Bemerkungen
WOSTOK	12.04.61	Erster Mensch im Weltraum
APOLLO 8	21.12.68	Erster bemannter Mondflug (Umkreisung)
APOLLO 11	16.07.69	Erste bemannte Mondlandung
SALYUT 1	19.04.71	Erste bemannbare Raumstation
SKYLAB	14.05.73	Erste großvolumige Raumstation
APOLLO/SOYUS	15.07.75	Erstes internationales Rendezvous-Manöver
SALYUT 6	29.09.77	Sowjetische Raumstation, 2. Generation
STS-1 COLUMBIA	12.04.81	Erster Shuttle-Start
51-L CHALLENGER	28.01.86	Erster Shuttle-Unfall
MIR	20.02.86	Sowjetische Raumstation, 3. Generation
STS-26 DISCOVERY	29.09.88	Wiederaufnahme der Shuttle-Flüge
BURAN/ENERGIA	15.11.88	Unbemannter Testflug des sowjetischen Shuttle
STS-61 ENDEAVOUR	02.12.93	Reparatur des Hubble-Teleskops
STS-71 ATLANTIS	27.06.95	Erstes Andocken des Shuttle an die MIR-Station
STS-88 ENDEAVOUR	04.12.98	Erster Shuttle-Flug für den Zusammenbau der ISS
STS-99 ENDEAVOUR	11.02.00	Shuttle Radar Topography Mission – Erstellen der topographischen Radarkarte der Erde
SOYUS TM-31	31.10.00	Erster Weltraumtourist auf der ISS
MIR	23.03.01	Wiedereintritt der MIR-Raumstation in die Erdatmosphäre

Eine vollständige Liste bemannter und unbemannter Missionen befindet sich auf der Webseite: <http://leonardo.jpl.nasa.gov/msl/search/launchFacts.html>

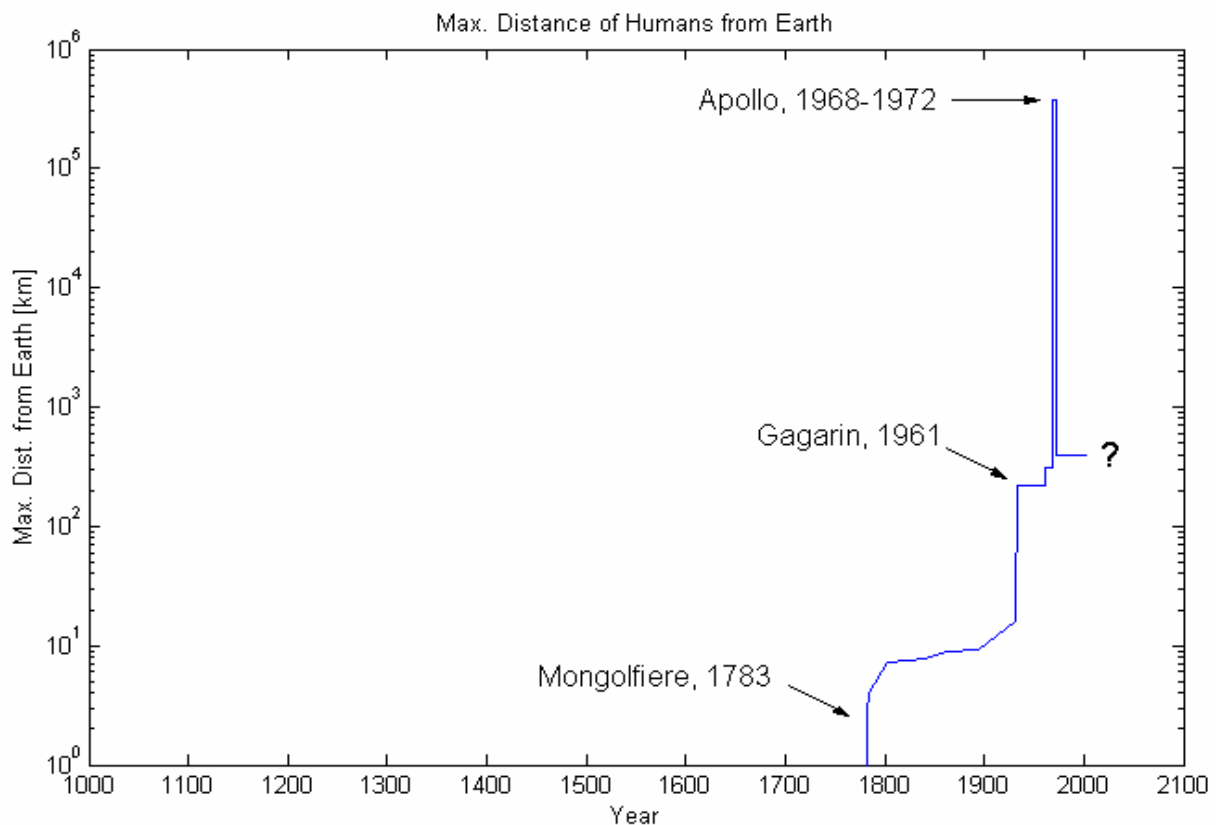


Abb.1.1: Meilensteine der Exploration

## 2 Grundlagen des Raketenantriebes

In diesem Kapitel werden die thermodynamischen und strömungsmechanischen Zustände des Raketenantriebes beschrieben [14].

### 2.1 Grundgesetze der Mechanik

#### Impuls

Unter dem Impuls  $I$  eines Körpers versteht man das Produkt aus seiner Masse und seiner Geschwindigkeit. Der Impuls ist eine vektorielle Größe und hat die Richtung der Geschwindigkeit.

$$\vec{I} = m \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{\dot{r}} \quad \left[ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} = \text{N} \cdot \text{s} \right] \quad (2.1)$$

#### Impulserhaltung

Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der geradlinigen Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit, solange er nicht durch äußere Kräfte gezwungen wird diesen Zustand zu ändern. Dieses erste Gesetz von *Newton (1643-1727)* lautet für ein abgeschlossenes System von  $i$  Massenpunkten  $m_i$ :

$$\sum_{\text{System}} m_i \cdot \vec{\dot{r}} = \text{konst.} \quad (2.2)$$

#### Bewegungsgleichung

Die zeitliche Änderung des Impulses eines Körpers ist proportional der Größe der auf ihn einwirkenden Kraft und erfolgt in Richtung der Kraft. Die Summe der Impulsänderungen in einem abgeschlossenen System, d.h. es wirken keine äußeren Kräfte, ist Null.

$$\sum_{\text{System}} m_i \cdot \vec{\ddot{r}} = 0 \quad (2.3)$$

#### Aktio gleich Reaktio

Die Kräfte, welche zwei Körper aufeinander ausüben, sind ihrer Größe nach gleich und entgegengesetzt gerichtet. Wenn  $\vec{F}_{ik}$  die Kraft ist, welche der Körper  $i$  auf den Körper  $k$  ausübt, dann gilt:

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki} \quad (2.4)$$

## 2.2 Energiequellen und Impulsträger

Zur Unterscheidung von Antrieben kann eine systematische Einteilung nach Impuls- und Energieträgern getroffen werden.

### Einteilung von Antriebssystemen nach der Lokalität des Impulsträgers

1. Der Impulsgeber im Fahrzeug steht in Kontakt mit dem außerhalb liegenden Impulsträger.

Beispiele: - Reifen und Straße  
- Schiffsschraube und Wasser  
- Flugzeugtriebwerk und Luft

2. Der Impulsgeber befindet sich außerhalb und bewegt den Impulsträger am Fahrzeug.

Beispiele: - Segelboot und Wind  
- Raumfahrzeug mit Sonnensegel

3. Der Impulsgeber und der Impulsträger haben keinen Kontakt.

Beispiel: - Magnete

4. Der Impulsträger und der Impulsgeber befindet sich im Fahrzeug.

Beispiel: - Raketenantrieb

### Einteilung von Raketenantrieben nach Energiequellen

1. Der Impulsträger entspricht dem Energieträger.

Beispiel: - chemischer Raketenantrieb

2. Impuls- und Energieträger sind getrennt, befinden sich jedoch beide in der Rakete.

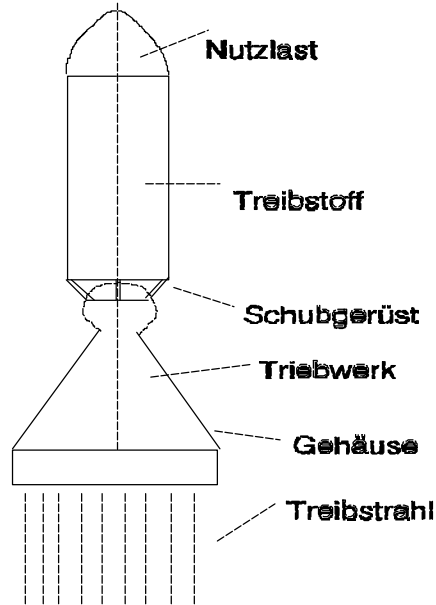
Beispiel: - nukleare und elektrische Antriebe

3. Der Impulsträger ist im Fahrzeug, die benötigte Energie wird von außen zugeführt.

Beispiel: - solarelektrische Antriebe

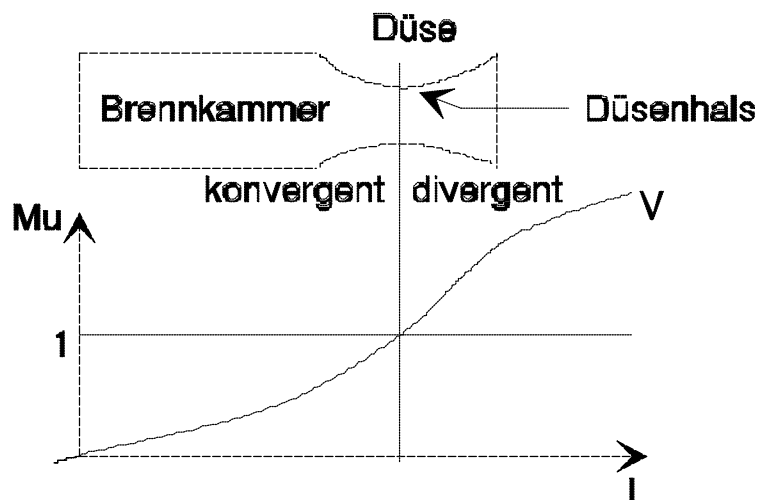
## 2.3 Schub

### Schematischer Aufbau einer Rakete:



### Der Raketenmotor:

Dieser besteht im Wesentlichen aus einer Brennkammer und einer Düse, zum Beispiel einer Laval-Düse. Diese hat einen konvergenten Teil, den engsten Querschnitt nennt man Düsenhals und einen divergenten Teil, die Expansionsdüse.



Bei der Laval-Düse herrscht im Düsenhals gerade Schallgeschwindigkeit. Störungen können sich also nicht ins Düseninnere oder in die Brennkammer fortpflanzen, weil sie sich nur mit Schallgeschwindigkeit ausbreiten.

## Die Schubkraft eines thermodynamischen Triebwerks besteht aus zwei Anteilen:

1. dem impulsiven Schubanteil
2. dem Druckschubanteil

Im Folgenden sollen beide Anteile näher erläutert werden.

### Impulsschub

Der erste und wesentliche Anteil ergibt sich aus dem Massenstrom, der aus der Düse tritt, und dessen Ausströmgeschwindigkeit.

$$\text{Impulsschub:} \quad F_i = \frac{dm}{dt} \cdot c = \dot{m} \cdot c \quad \left[ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \text{N} \right] \quad (2.5)$$

### Druckschub

Der zweite Anteil resultiert aus einer möglichen Druckdifferenz zwischen dem Umgebungsdruck  $p_a$  und dem Düsendruck  $p_e$ . Da der atmosphärische Luftdruck in der Höhe abnimmt, der Düsendruck jedoch beim Aufstieg der Rakete konstant bleibt, verändert sich der Druckschubanteil ständig.

$$\text{Druckschub:} \quad F_p = (p_e - p_a) \cdot A_e \quad [\text{N}] \quad (2.6)$$

Der Gesamtschub ist die Summe beider Anteile.

$$\text{Gesamtschub:} \quad F_{ges} = \dot{m} \cdot c + (p_e - p_a) \cdot A_e \quad [\text{N}] \quad (2.7)$$

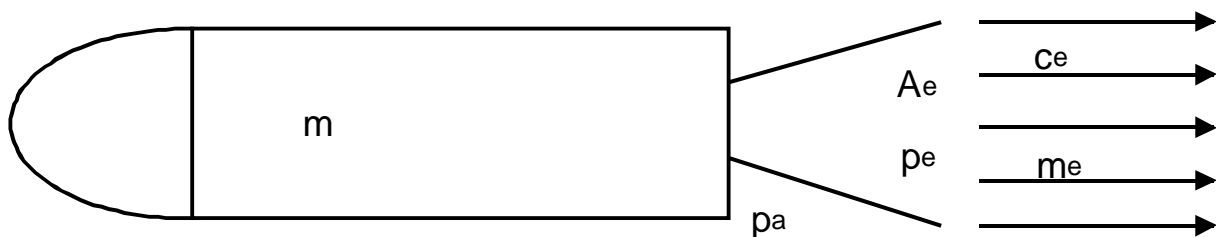


Abb.2.1: Erläuterung der Schubgleichung

## 2.4 Effektive Ausströmgeschwindigkeit und spezifischer Impuls

Es ist oftmals günstiger den Schub durch die effektive Ausströmgeschwindigkeit  $c_{eff}$ , die im Experiment leicht zu ermitteln und in dieser der Druckschubanteil enthalten ist, zu berechnen.

$$c_{eff} = c + \frac{A_e}{\dot{m}}(p_e - p_a) \quad \left[ \frac{m}{s} \right] \quad (2.9)$$

Da der Umgebungsdruck  $p_a$  mit zunehmender Höhe abnimmt, wird die effektive Ausströmgeschwindigkeit größer und erreicht im Vakuum ihr Maximum [12]. Der Schub  $F$  eines Raketenantriebes ist dann:

$$F = \dot{m} \cdot c_{eff} \quad [N] \quad (2.10)$$

Die Ausströmgeschwindigkeit  $c_{eff}$  ist eine wichtige Kenngröße für die Leistung eines Triebwerks und aus ihr wird der spezifische Impuls  $I_{sp}$  wie folgt definiert:

$$I_{sp} = \frac{c_{eff}}{g_0} \quad [s] \quad (2.11)$$

$$g_0 = \text{Erdbeschleunigung in Meereshöhe } 9,81 \text{ m/s}^2$$

Der spezifische Impuls ist ein Maß für die Güte eines Triebwerks. Bei gegebenem Durchsatz kann mit ihm der Schub berechnet werden. Da er die Dimension Sekunden hat, lassen sich damit verschiedene Treibstoffkombinationen trotz verschiedener Maßsysteme miteinander vergleichen.

## 2.5 Angepasste Düsen

In der Praxis wird die Düse nach Möglichkeit so ausgelegt, dass der Düsendruck über einen möglichst großen Aufstiegsbereich dem Umgebungsdruck annähernd entspricht. Man nennt dies eine angepasste Düse. Bei diesem Druckverhältnis wird die innere Energie der Gase im bestmöglichen Maße in Bewegungsenergie umgesetzt. Erreicht die Rakete den Weltraum, und damit das Vakuum, ist eine Anpassung nicht mehr möglich, weil eine unendlich lange Düse erforderlich wäre, um einen so geringen Düsenenddruck zu erzielen.

Wenn jedoch der Düsenaustrittsdruck dem Umgebungsdruck ( $p_e = p_a$ ) entspricht, so wird der Druckschubanteil  $F_p = (p_e - p_a) \cdot A_e$  gleich Null. Der Druckschubanteil geht bei der angepassten Düse weitgehend verloren. Dies wird praktiziert, um eine möglichst ideale Expansion des Düsenstrahls zu erreichen [4].

## Start

Beim Start einer Rakete auf der Erdoberfläche ist

$$p_e < p_a$$

dadurch entsteht ein eingeschnürter Strahl. Der Düsenenddruck der Gase ist geringer als der Umgebungsdruck und eine *Überexpansion* liegt vor.

Diese ist möglich bis zu einem Verhältnis von:

$$p_e \approx 0,27 \cdot p_a$$

(*Summerfield-Kriterium*)

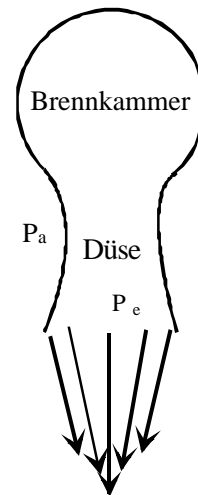


Abb.2.2: Eingeschnürter Strahl

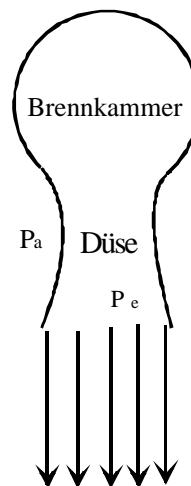
## Aufstieg

Während des Aufstiegs sinkt der atmosphärische Druck. Stellt sich das Verhältnis

$$p_e \approx p_a$$

ein, expandiert der Strahl ideal und der Schub wird optimiert.

Bei der angepassten Düse wird darauf geachtet, dass die ideale Expansion möglichst lange stattfindet.



## Große Höhen

In großen Höhen wird der Umgebungsdruck  $p_a$  sehr klein.

$$\Rightarrow p_e > p_a$$

Die Gase in der Schubdüse werden nicht bis auf Umgebungsdruck expandiert und es liegt eine *Unterexpansion* vor. Der Strahl platzt auf und der Schub kann nicht mehr optimal genutzt werden.

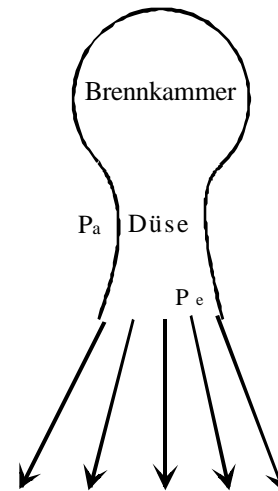


Abb.2.4: Aufgeplatzter Strahl

## 2.6 Startschub

Damit eine Rakete abhebt, muss beim Start der Schub größer sein als das Gewicht der Rakete.

$$F > G \quad \text{wobei} \quad G = m_{\text{Start}} \cdot g$$

Man kann nur soviel Treibstoff einfüllen, bis ihr Gewicht fast gleich dem Schub ist. In diesem Fall benötigt man ein sehr gutes Steuersystem, das den langsamen Start beherrscht. Das Verhältnis  $F/G$  muss zwischen 1,1 und 1,3 liegen, damit die Rakete abhebt, aber keine zu hohen Beschleunigungen auftreten (Tab. 2.1).

Tabelle 2.1:

Rakete	Startschub [kg]	Startmasse kg	Verhältnis
Saturn 5	3 400 000	2 832 000	1.2
Vostok	460 000	360 000	1.28
Ariane 4	248 700	207 000	1.2



## 2.7 Thermodynamische Grundlagen des Raketenmotors

### Annahmen

1. Die Feuergase in der Brennkammer sind homogen und ihre Zusammensetzung konstant.
2. Die Zustände werden durch die Gleichung des idealen Gases beschrieben.
3. Die spezifische Wärme der Gase  $c_p$  ist unabhängig von Temperatur und Druck.
4. Die Düsenströmung ist eindimensional, stationär und isentrop.
5. Die chemische Zusammensetzung der Gase ändert sich während der Expansion nicht.
6. Es erfolgt keinerlei Wärmeaustausch des Gases mit der Brennkammer- oder Düsenwand.
7. Es treten keine Verluste durch Reibung und Grenzschicht auf.

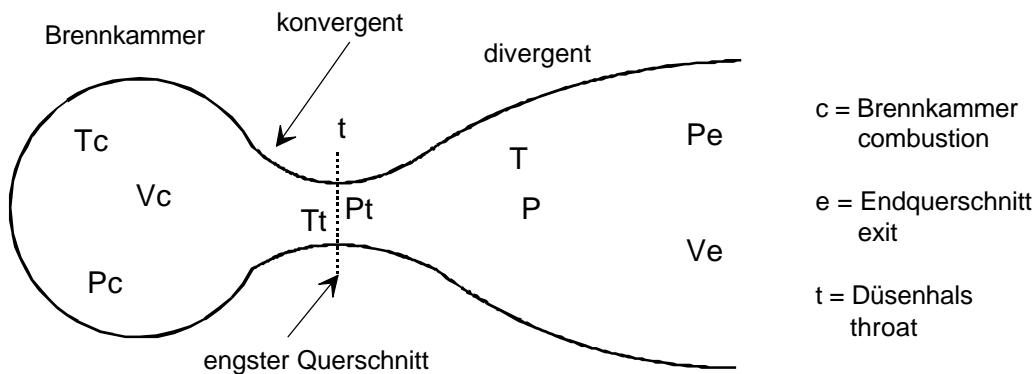


Abb.2.5: Schematische Darstellung eines Raketenmotors

Der Brennkammerdruck  $p_c$  entspricht unter den oben getroffenen Annahme einer isentropen Strömung dem Totaldruck  $p_o$ , der über den gesamten Düsenverlauf konstant bleibt:

$$p_c = p_o = \text{const.}$$

Mit den oben genannten Annahmen können folgende Grundgleichungen abgeleitet werden.

### Energieerhaltung

Laut Energieerhaltungssatz gilt, dass die Gesamtsumme der Energien gleich bleibt:

$$\frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v^2 + \Delta m \cdot c_p T = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v_0^2 + \Delta m \cdot c_p T_0$$

Für den Fall einer adiabaten Strömung ist die Abnahme der Enthalpie gleich der Zunahme der kinetischen Energie. Damit gilt zwischen Brennkammer und einem beliebigen Punkt in der Düse:

$$c_p(T_o - T) = \frac{1}{2}(v^2 - v_o^2) \quad (2.12)$$

Die Geschwindigkeit der Brennkammerngase kann im Vergleich zur Geschwindigkeit in der Düse vernachlässigt werden. Man erhält dann die theoretisch erreichbare Ausströmgeschwindigkeit:

$$v_e = \sqrt{2 \cdot c_p (T_o - T_e)} \quad (2.13)$$

$$c_p = \frac{k}{k-1} \cdot R \quad (2.14)$$

### Kontinuitätsgleichung

Bei einer stationären Strömung muss durch jeden Querschnitt  $A$  der Düse pro Zeit die gleiche Masse strömen.

$$\dot{m} = A \cdot v \cdot \rho = \text{konst.} \quad (2.15)$$

### Ideales Gasgesetz

$$\frac{p}{\rho} = R \cdot T \quad (2.16)$$

$R = \text{spezifische Gaskonstante}$

### Machzahl

$$Ma = \frac{v}{a} = \frac{v}{\sqrt{k \cdot R \cdot T}} \quad (2.17)$$

$$k = \frac{c_p}{c_v} \quad (2.18)$$

Die Machzahl gibt das Verhältnis von Strömungsgeschwindigkeit und örtlicher Schallgeschwindigkeit an. Die thermodynamischen Eigenschaften des Gases charakterisiert der Isentropenkoeffizient  $k$ .

### Isentropengleichung

Bei idealem Gas wird die isentrope Zustandsänderung beschrieben durch:

$$\frac{p}{\rho^k} = konst. \quad (2.19)$$

Mit der idealen Gasgleichung erhält man damit folgenden Zusammenhang zwischen Temperatur und Druck bzw. Dichte:

$$\frac{T}{T_o} = \left( \frac{p}{p_o} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \left( \frac{\rho}{\rho_o} \right)^{k-1} \quad (2.20)$$

Das Temperaturverhältnis bzw. das Druckverhältnis kann in Abhängigkeit der Machzahl ausgedrückt werden:

$$\frac{T_o}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} \cdot Ma^2 \quad (2.21)$$

$$\frac{p_o}{p} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} \cdot Ma^2 \right)^{\left( \frac{k}{k-1} \right)} \quad (2.22)$$

Setzt man die Gleichung (2.20) in die Formel der theoretisch erreichbaren Ausströmgeschwindigkeit (2.13) ein, dann folgt für den Druck  $p_o$  und die Temperatur  $T_o$ :

$$c_e = \sqrt{\frac{2 \cdot k}{k-1} \cdot \frac{R \cdot T_o}{M} \cdot \left( 1 - \frac{p_e}{p_o} \right)^{\frac{k-1}{k}}} \quad (2.23)$$

*(Zeuner-Wantzel-Gleichung)*

Die mit Gleichung (2.23) berechneten Näherungswerte für die Ausströmgeschwindigkeit am Düsenende weichen selten um mehr als 6% von den experimentellen Ergebnissen ab.

Die theoretisch maximal erreichbare Düsenaustrittsgeschwindigkeit  $v_{e,vac}$  (oft auch  $c_{theor.,vac}$  genannt) erhält man für  $p_e = 0$  (Entspannung ins Vakuum):

$$v_{e,vac} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \cdot R \cdot T_o} \quad (2.24)$$

Hierbei gilt:

$$R = \frac{R_\infty}{M} \quad (2.25)$$

$R_\infty =$  allgemeine Gaskonstante 8,314 J/(mol·K)

Man erkennt, dass durch Steigerung der Brennkammertemperatur  $T_o$  und des Druckes  $p_o$  die Austrittsgeschwindigkeit des Gases erhöht wird. Außerdem werden zum Erreichen hoher  $v_e$  Treibstoffe mit niedrigem Molekulargewicht  $M$  gefordert. Dies ist jedoch nur eingeschränkt günstig, denn desto leichter das ausströmende Medium ist, desto geringer wird der Massendurchsatz  $\dot{m}$ . Da bei chemischen Antrieben außer der Ausströmgeschwindigkeit noch der Massendurchsatz und die Energieausbeute wichtig sind, ist die Optimierung aller drei genannten Größen nötig.

In der Düse soll die durch Verbrennung der Treibstoffe in der Brennkammer entstehende thermische Energie der Feuergase möglichst verlustfrei in gerichtete kinetische Energie im Abgasstrahl umgewandelt werden. Aus Kontinuitäts-, Energie- und Isentropengleichung ergibt sich der Massendurchsatz pro Düsenquerschnittsfläche:

$$\frac{\dot{m}}{A} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} p_o r_o \left[ \frac{p}{p_o} \right]^{\frac{2}{k}} - \frac{p}{p_o} \left[ \frac{p}{p_o} \right]^{\frac{k+1}{k}}} \quad (2.26)$$

Durch Differenzieren nach  $\frac{p}{p_o}$  und anschließendem Nullsetzen ergibt sich das kritische Druckverhältnis im Düsenhals (Index t für *throat* = engster Querschnitt):

$$\frac{p_t}{p_o} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (2.27)$$

Daraus lässt sich mit der Isentropengleichung das kritische Temperaturverhältnis errechnen:

$$\frac{T_t}{T_o} = \frac{2}{k+1} \quad (2.28)$$

Das kritische Dichteverhältnis lautet:

$$\frac{r_t}{r_o} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (2.29)$$

## Herleitung der kritischen Machzahl

Wie bereits beschrieben, basiert die Zeuner-Wantzel-Gleichung auf der Annahme, dass in der Düse bei der Entspannung des Treibgases nur eine Umwandlung von Enthalpie in kinetische Energie stattfindet.

$$\text{Es gilt: } \frac{1}{2}v_1^2 + c_p \cdot T_1 = \frac{1}{2}v_2^2 + c_p \cdot T_2 \quad \text{wobei } c_p = \frac{k}{k-1} \cdot R \text{ ist.} \quad (2.30)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^2 \quad \text{mit } a = \sqrt{k \cdot R \cdot T} \quad (2.31)$$

Damit wird es möglich an jeder Stelle in der Düse die Machzahl anzugeben:

$$\frac{p_1}{p_2} = \left( \frac{2 + (k-1)Ma_1^2}{2 + (k-1)Ma_2^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (2.32)$$

Geht man vom Brennkammerzustand aus erhält man:

$$Ma = \sqrt{\frac{2}{k-1} \cdot \left[ \left( \frac{p_o}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]} \quad (2.33)$$

Für die beiden interessanten Punkte  $p_1 = p_t$  und  $p_2 = p_o (Ma_o = 0)$  gilt am kritischen Querschnitt  $A_t$ :

$$\frac{p_t}{p_o} = \frac{p_{krit}}{p_o} = \left( \frac{2}{2 + (k-1)Ma_{krit}^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (2.34)$$

Mit dem bereits bekannten kritischen Druckverhältnis ergibt sich:

$$\frac{p_{krit}}{p_o} = \left( \frac{2}{2 + (k-1)Ma_{krit}^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \Rightarrow Ma_{krit}^2 = \frac{k-1}{k-1} = 1 \quad (2.35)$$

Im Düsenhals herrscht somit maximal Schallgeschwindigkeit. Für die konstruktive Auslegung einer Düse ist das kritische Druckverhältnis ausschlaggebend. Ist der Druck am Düsenendquerschnitt  $A_e$  größer als der kritische Druck  $p_t$  und kleiner als der Brennkammerdruck  $p_o$  also  $p_t < p_e < p_o$ , dann ist nur eine konvergente Düse sinnvoll, denn die Schallgeschwindigkeit wird nicht erreicht. Eine konvergent-divergente Lavaldüse wird bei  $p_e < p_t < p_o$  sinnvoll. Hierbei verengt sich der Düsenquerschnitt (konvergenter Teil) bis der kritische Druck erreicht wird. Danach weitet sich der Querschnitt wieder entlang eines divergenten Profils auf und die Strömungsgeschwindigkeit steigt weiter an (Abbildung 2.6).

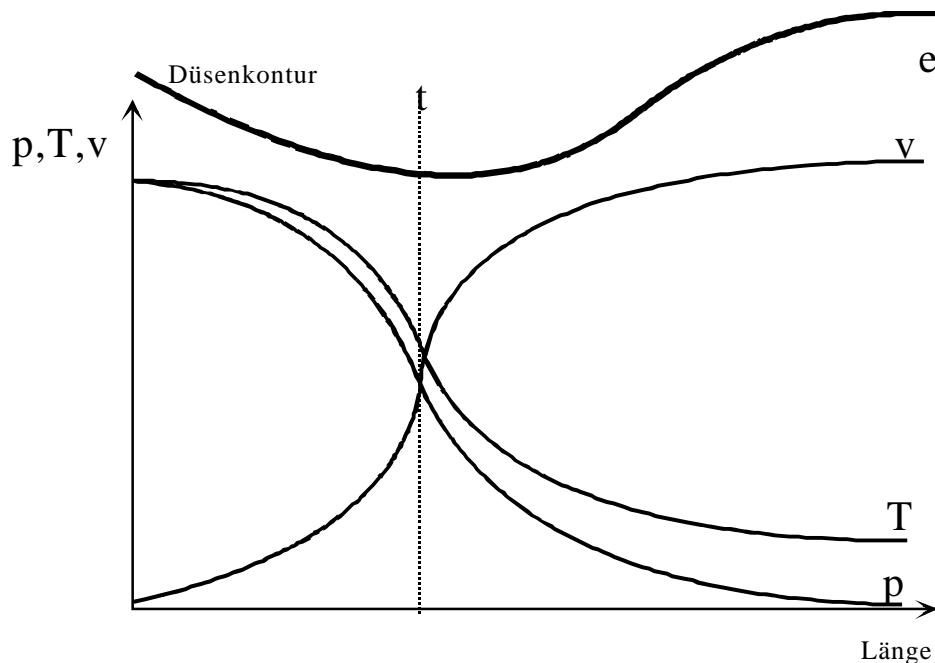


Abb.2.6: Druck-, Temperatur- und Geschwindigkeitsverlauf in einer Lavaldüse

Diese konvergent-divergente Düse wird nach ihrem Erfinder *de Laval* benannt. In der Raketentechnik gibt es vielerlei Ausführungen dieses Düsentyps. Bei kleinen Motoren mit geringen Druckverhältnissen wird oft ein kegelig erweiterter Teil verwendet. Für große Öffnungsverhältnisse werden diese Kegel zu lang und zu schwer. Man bildet in diesen Fällen die Düse aus einer parabelähnlichen Kontur (Glockendüse). Glockendüsen sind um ca. 30% kürzer als Kegeldüsen gleicher Leistung und vermindern die Gefahr einer Strömungsablösung im Düsenendbereich. Wie bereits erwähnt, wird angestrebt die Düse bei jedem anliegenden Umgebungsdruck angepasst arbeiten zu lassen. Im Vakuum wäre dann eine unendlich lange Düse notwendig. Da dies nicht möglich ist, muss eine Einschnürung des Düsenstrahls am Boden in Kauf genommen werden.

## 2.8 Massendurchsatz

Erreichen die Gase im Düsenhals die Schallgeschwindigkeit, dann wird der Massendurchsatz nur von den Bedingungen im Düsenhals bestimmt und ist unabhängig von den Verhältnissen am Düsenende. In diesem Fall erhält man durch Einsetzen des idealen Gasgesetzes (2.16) und des kritischen Druckverhältnisses (2.34) in Gleichung (2.26) als Formel für den Massendurchsatz:

$$\dot{m} = \frac{A_t \cdot p_o}{\sqrt{R \cdot T_o}} \left[ \sqrt{k} \cdot \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2 \cdot (k-1)}} \right] \quad (2.36)$$

## 2.9 Flächenverhältnis

Den Zusammenhang zwischen dem engsten Querschnitt (Düsenhals) und dem Endquerschnitt der Düse gibt das Flächenverhältnis an. Wendet man die Kontinuitätsgleichung auf beide Querschnitte an, so dass:

$$\frac{A_e}{A_t} = \frac{r_{krit} \cdot a_{krit}}{r_e \cdot c_e} = \frac{r_{krit}}{r_o} \cdot \frac{a_{krit}}{a_o} \cdot \frac{r_o \cdot a_o}{r_e \cdot c_e} \quad \text{mit} \quad a_{krit} = c_t = \sqrt{k \cdot R \cdot T_{krit}} \quad (2.37)$$

Berücksichtigt man nun die Formeln (2.16), (2.19) und (2.23), dann folgt daraus das Flächenverhältnis:

$$\frac{A_e}{A_t} = \left( \frac{p_o}{p_e} \right)^{\frac{1}{k}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{k-1}{2} \cdot \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}}{1 - \left( \frac{p_e}{p_o} \right)^{\frac{k-1}{k}}}} \quad (2.38)$$

## 2.10 Bemerkungen zur Physik und Chemie der Ausströmung

### Eingefrorene Strömung:

Trifft man die schon erwähnte Annahme, dass die Zusammensetzung der Feuergase bei der Expansion konstant bleibt, das Massenwirkungsgesetz also außer Kraft ist, dann lässt man im Rechenmodell keinerlei chemische Reaktionen in der Düse zu. Tatsächlich wird aber auch dort noch chemische Energie in kinetische Energie umgesetzt. Die Energiebilanz liefert somit eine Ausströmgeschwindigkeit einer (idealen) Rakete.

### Gleichgewichtsströmung

In diesem Modell gilt das Massenwirkungsgesetz an jeder Stelle der Düse. Die Gaszusammensetzung stellt sich ohne Zeitaufwand auf die am jeweiligen Ort herrschenden Druck- und Temperaturzustände ein. Damit kann z.B. durch Rekombinationsreaktionen im Modell dargestellt werden, dass Energie zurückgewonnen wird, z.B. die als Dissoziationswärme vorher aufgewendet werden musste. Eine Berechnung nach dieser Methode liefert eine Obergrenze der Ausströmgeschwindigkeit.

In der Realität geben die Reaktionsgeschwindigkeit und die Triebwerksdimensionen den Ausschlag, wie sich die Strömung tatsächlich verhält.

### Charakteristische Länge

Mit der Kennzahl  $L^*$  definiert man eine charakteristische Länge. Diese variiert zwischen ein und zwei Metern. Je länger die Reaktionsdauer der Treibstoffkomponenten ist, desto länger muss die Verweildauer und damit die charakteristische Länge der Brennkammer sein. Damit steigt allerdings auch das Gewicht des Triebwerks. Mit der Beherrschung höherer Brennkammerdrücke wurde  $L^*$  in der Praxis zunehmend kürzer.

Typisch sind      LO<sub>2</sub>/LH<sub>2</sub>              L\* < 1 m  
                         LO<sub>2</sub>/Kerosin          L\* ~ 2 m

Aus der Gleichung für den Schub       $F \approx p_o A_t$   
und dem Brennkammervolumen       $V \approx L^* A_t$

ergibt sich eine Abhängigkeit zwischen Brennkammermasse und Schub:

$$V p_o \approx F \cdot L^*$$

ein höheres  $p_o$  führt zu schwereren Pumpen, aber auch zu einem höheren Schub. Folglich lässt sich die charakteristische Länge und damit auch das Brennkammervolumen nicht beliebig verkleinern.

Will man einen möglichst hohen Schub erreichen, ist es unerlässlich, sich mit den Prozessen zu beschäftigen, welche Masse und Impuls bereitstellen können. Dies wird in einem der folgenden Kapitel geschehen. Zunächst jedoch ein paar Worte zur Raketengrundgleichung.



## 3 Raketengrundgleichung und Stufenprinzip

### 3.1 Raketengrundgleichung (Ziolkowsky-Gleichung)

Ein russischer Lehrer namens Konstantin Ziolkowskij (und unabhängig davon auch der deutsche Wissenschaftler *Hermann Oberth*) haben aus den Gesetzen über die Erhaltung von Masse und Impuls eine Gleichung formuliert, die die Bewegung einer Rakete als Punktmasse im kräftefreien Raum beschreibt, die *Raketengrundgleichung*.

Diese Gleichung soll im Folgenden hergeleitet werden. Dazu werden folgende Annahmen getroffen:

- kräftefreier Raum
- konstante Ausströmgeschwindigkeit der Abgase
- keine (Lenk-, Schwere-, Widerstands-, etc.) Verluste

Für die Rakete ohne äußere Kräfte gilt der Impulserhaltungssatz:  $\frac{dI}{dt} = 0$

Genauer gesagt bleibt die Summe aus den Impulsen von Rakete und Treibgasen über die Zeit konstant:

$$(I_R + I_G)_{t=t} = (I_R + I_G)_{t+dt} \quad (3.1)$$

Die Masse der Rakete sei gegeben durch  $m_R$ , bzw. durch folgende Gleichung:

$$m_R(t + dt) = m_R(t) + \frac{dm_R}{dt} \cdot dt = m_R(t) - \dot{m} \cdot dt \quad (3.2)$$

Der Impulsträger wird an Bord mitgeführt. Die Rakete verändert (verringert) ihre Masse  $m_R$  genau um den Betrag, den sie als Massenstrom  $\dot{m}$  des Treibgases mit der Geschwindigkeit  $c$  ausstößt (Vorzeichen!!! Die Rakete wird leichter!).

$$-\frac{dm_R}{dt} = \dot{m} > 0 \text{ bzw. } \dot{m} = \left| \frac{dm_R}{dt} \right| \quad (3.3)$$

Die ausgestoßene Gasmasse bewegt sich im raumfesten Koordinatensystem mit der Geschwindigkeit  $v - c$ . Für den obigen Impulssatz (3.1) kann man daher schreiben:

$$\underbrace{m_R \cdot v}_{I(t)} = \underbrace{\left( m_R + \frac{dm_R}{dt} \cdot dt \right) \cdot (v + dv)}_{I_R(t+dt)} - \underbrace{\frac{dm_R}{dt} \cdot dt \cdot (v - c)}_{I_G(t+dt)} \quad (3.4)$$

oder

$$m_R \cdot v = m_R \cdot v + \frac{dm_R}{dt} \cdot v \cdot dt + m_R \cdot dv + \frac{dm_R}{dt} \cdot dv \cdot dt - \frac{dm_R}{dt} \cdot v \cdot dt + \frac{dm_R}{dt} \cdot c \cdot dt \quad (3.5)$$

Durch Kürzen ergibt sich:

$$0 = m_R \cdot dv + dm_R \cdot c \quad (+ dv \cdot dm_R) \quad (3.6)$$

Der letzte Term ist ein Ausdruck höherer Ordnung und kann daher vernachlässigt werden. Damit ergibt sich eine separierbare Differenzialgleichung 1. Ordnung:

$$dv = -c \cdot \frac{dm_R}{m_R} \quad (3.7)$$

Die Integration dieser Gleichung mit den Anfangswerten  $v = v_0$  und  $m = m_0$  ergibt die Raketengrundgleichung. Sie stellt den Geschwindigkeitszuwachs  $\Delta v$  der Rakete als Funktion der Ausströmgeschwindigkeit  $c$  und dem Massenverhältnis  $m_0/m$  dar. Genau genommen ist für diese Rechnung der Wert der *effektiven Ausströmgeschwindigkeit*  $c_{eff}$  einzusetzen (siehe Kapitel 2.4!):

$$\Delta v = v - v_0 = c_{eff} \cdot \ln \frac{m_0}{m} \quad (3.8)$$

Nach dem Verbrauch des gesamten Treibstoffes hat die Rakete die Brennschlussmasse  $m_{bs}$ . Verwendet man diese im Massenverhältnis so erhält man den *idealen Geschwindigkeitszuwachs*  $v_{id}$ . Dieser stellt unter idealen Bedingungen das erreichbare Maximum dar.

$$v_{id} = c_{eff} \cdot \ln \frac{m_0}{m_{bs}} \quad (3.9)$$

Der Ausdruck  $\frac{m_0}{m_{bs}}$  ist das Verhältnis von Anfangsmasse zu Brennschlussmasse. Man definiert:

$$r = \frac{m_0}{m_{bs}} \quad (3.10)$$

Die Differenz  $m_0 - m_b$  ist nichts anderes als die Masse des verbrauchten Treibstoffs. Für eine leistungsstarke Rakete mit hohem  $v_{id}$  ist eine große Ausströmgeschwindigkeit anzustreben, da diese linear in die Gleichung (3.9) eingeht. Der natürliche Logarithmus steigt mit zunehmenden  $r$  nur noch geringfügig an, so dass auch höhere Werte  $r$  nur noch eine geringe Erhöhung von  $v_{id}$  ergeben. Die folgende Grafik gibt einen Überblick über den Einfluss von effektiver Ausströmgeschwindigkeit  $c_{eff}$  und dem Massenverhältnis  $r^{-1} = \frac{m_{bs}}{m_0}$  auf den erzielbaren Geschwindigkeitszuwachs  $v_{id}$ .

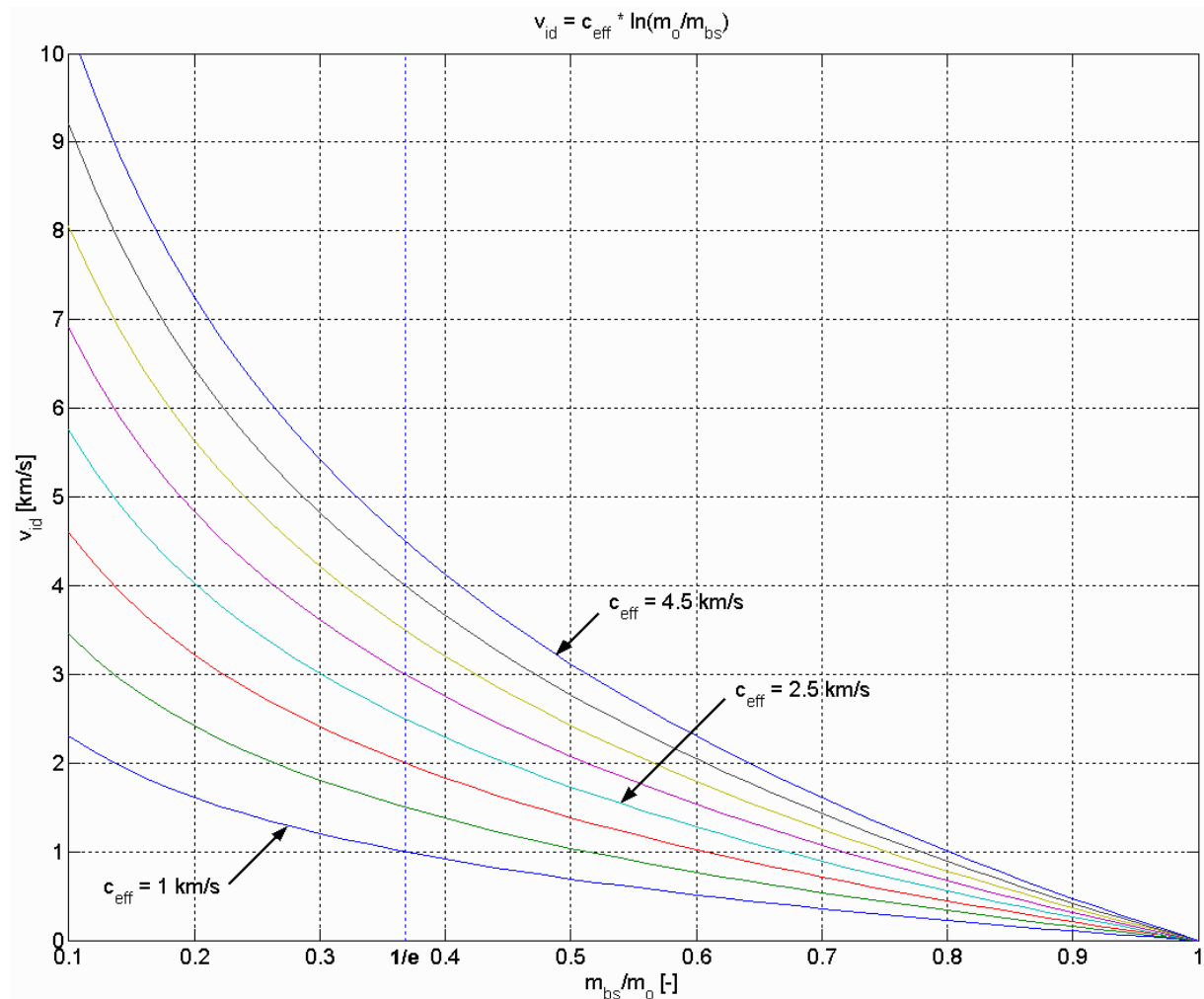


Abb. 3.1:  $v_{id}$  als Funktion von  $c_{eff}$  und  $\frac{m_{bs}}{m_0}$

Aus dieser Grafik lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

1. Für  $\frac{m_{bs}}{m_0} = 1$  wird  $v_{id} = 0$ , denn  $m_0 - m_{bs} = 0$  bedeutet nichts anderes als das kein Treibstoff verbraucht wurde.
2. Für  $m_{bs} < \frac{m_0}{e} \approx 0.368 m_0$  wird  $v_{id}$  größer als die Ausströmgeschwindigkeit  $c_{eff}$ . Dies zeigt, dass eine Rakete schneller fliegen kann, als die Gase aus ihrer Düse strömen.
3. Verdoppelt sich  $c_{eff}$ , dann verdoppelt sich auch  $v_{id}$ . Für den Geschwindigkeitszuwachs einer Rakete ist damit primär eine hohe Ausströmgeschwindigkeit entscheidend.

## 3.2 Raketenstufung

In Abschnitt 3.1 wurde gezeigt, dass die theoretisch erreichbare Endgeschwindigkeit einer Rakete nur von der Ausströmgeschwindigkeit  $c_{eff}$  und vom Massenverhältnis  $r$  abhängt. Um eine hohe  $v_{id}$  zu erreichen, müssen beide Werte groß sein. Beide Werte lassen sich jedoch nicht beliebig steigern. Dem Massenverhältnis sind technische Grenzen gesetzt, da die Strukturmasse nicht weniger als 5% der Treibstoffmasse betragen kann. Die Ausströmgeschwindigkeit mit der ein Start von der Erde physikalisch und umweltgerecht möglich ist, liegt zwischen 2000 und 5000m/s. Damit ist eine einstufige Rakete nicht in der Lage eine wesentliche Nutzlast in den Orbit zu tragen. Das Stufenprinzip dient der Lösung dieses Problems. Der Vorteil liegt dabei darin, dass nach dem Abbrennen einer Stufe deren unnötige Strukturmasse abgeworfen wird, um nicht unnötiges Gewicht in große Höhen zu transportieren [8]. Die Endgeschwindigkeit erhält man durch Summieren über die einzelnen Stufen.

$$v_{id} = \sum_{i=1}^n c_{eff_i} \cdot \ln \frac{m_{0_i}}{m_{b_i}} \quad (3.11)$$

Die physikalische Ursache des Geschwindigkeitsgewinns bei der Stufung liegt darin, dass die Masse der ausgebrannten Stufen nicht beschleunigt werden muss. Für den Fall, dass die Ausströmgeschwindigkeit bei allen Stufen gleich ist, erhält man:

$$v_{id} = c_{eff} \cdot \ln \prod_{i=1}^n r_i \quad (3.12)$$

Das Produkt der einzelnen Massenverhältnisse ist als Gesamtmassenverhältnis  $R$  definiert.

$$R = \prod_{i=1}^n r_i \quad (3.13)$$

Es ist nicht sinnvoll eine Rakete in beliebig viele Stufen zu unterteilen, denn die Strukturmasse würde zum Großteil aus Ventilen und Anschlüssen bestehen und die vielen kleinen Tanks könnten nur noch sehr wenig Treibstoff aufnehmen. Der durch Stufung erzielte Gewinn wird daher nach Erreichen einer optimalen Stufenzahl wieder kleiner. Die optimale Stufenzahl ist von der Missionsaufgabe einer Rakete abhängig und variiert derzeit zwischen 2-5 Stufen.

## Einteilung des Systems Rakete:

Eine Rakete besteht aus den drei folgenden Elementen:

- Struktur
- Treibstoff
- Nutzlast (z.B.: Satellit oder Menschen und deren Lebenserhaltungssystem)

Die Struktur wird wiederum unterteilt in:

- Triebwerk
- Treibstoffzufuhr (z.B.: Treibstoffpumpen und deren Turbinen)
- Treibstofftanks
- Steuerungs- und Regelungssysteme
- Tragende und verbindende Strukturelemente, sowie Verkleidung

Die Elemente haben bei der Stufung folgende Eigenschaften:

- Struktur     ⇒ beim Start vorhanden, bei Brennschluss abgeworfen
- Treibstoff    ⇒ beim Start vorhanden, bei Brennschluss verbraucht
- Nutzlast      ⇒ beim Start vorhanden, bei Brennschluss vorhanden

Es ist zu beachten, dass die Nutzlast wiederum eine Rakete sein kann.

Im Folgenden sollen nun die verschiedenen Arten von Stufungsprinzipien näher beleuchtet werden.

### Tandemstufung

Bei der Tandemstufung werden einzelne Stufen übereinander angeordnet. Bei Brennschluss einer Stufe wird diese, aus leeren Treibstofftanks, Triebwerken und Lageregelung bestehend, abgeworfen. Jetzt erst zünden die Triebwerke der folgenden Stufe. Diese Stufungsart fand z.B. bei der *Saturn V* Verwendung.

### Parallelstufung:

Hier werden zusätzliche Stufen, Booster genannt, seitlich an einer Rakete angebracht. Ab dem Start brennen die Triebwerke aller Stufen. Die ausgebrannten Booster werden bei

Brennschluss seitlich abgetrennt und die zentrale Stufe brennt weiter. Dieses Prinzip wird z.B. beim *Shuttle* und bei der *Ariane 5* angewendet.

### Triebwerksstufung:

Beim Start schieben alle Triebwerke, A1, A2 und I. Während des Fluges werden zum optimalen Zeitpunkt die nicht mehr benötigten Triebwerke A1 und A2 abgetrennt. Dieses Verfahren wurde bei der *Atlas* realisiert.

### Tankstufung:

Diese Stufe besteht aus einem großen Tank. Der Treibstoff wird aus diesem Tank in eine andere Stufe gepumpt und dort von den Triebwerken verbrannt. Die Tanks A sind ebenfalls seitlich an Raketen befestigt und werden nach Entleerung abgeworfen. Dies geschieht in diesem Fall natürlich nicht bei Brennschluss, da die Triebwerke in der anderen Stufe weiterhin brennen. Das *Space Shuttle* wendet dieses System zur Treibstoffversorgung der Haupttriebwerke.

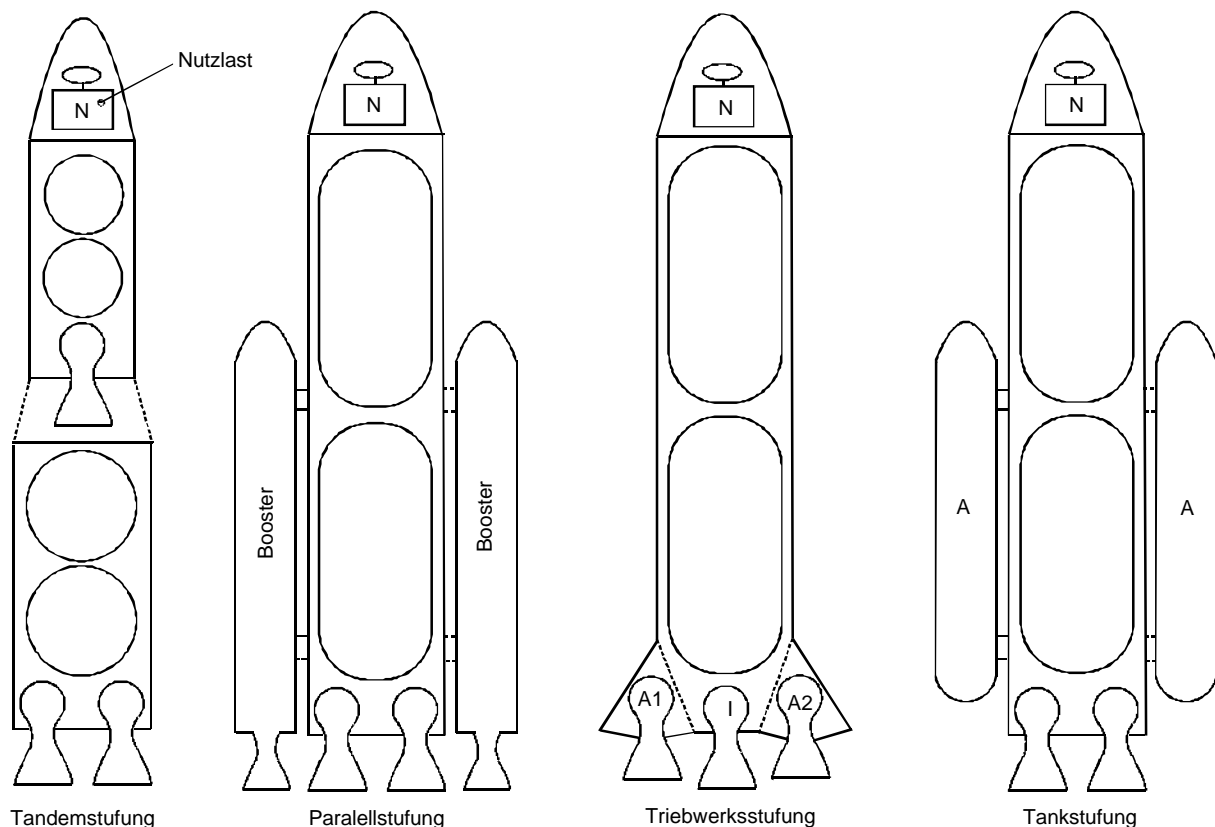


Abb.3.1: Stufenarten

Wie aus dem Beispiel des *Space Shuttle* ersichtlich ist eine Kombination verschiedene Stufenarten möglich.

### 3.3 Stufenoptimierung

In diesem Abschnitt wird die Optimierung der Tandemstufung behandelt. Für die optimale Stufenaufteilung sind eine Reihe von Definitionen notwendig, welche die Rechenarbeit wesentlich erleichtern.

Massenverhältnis der i-ten Stufe:

$$r_i = \frac{m_{0i}}{m_{bi}} = \frac{\text{Masse bei Zündung der Stufe } i}{\text{Masse bei Brennschluß der Stufe } i} \quad (3.14)$$

Nutzlastverhältnis der i-ten Stufe:

$$l_i = \frac{m_{Ni}}{m_{0i}} = \frac{\text{Masse der Nutzlast der Stufe } i}{\text{Masse bei Zündung der Stufe } i} \quad (3.15)$$

oder:

$$l_i = \frac{m_{0i+1}}{m_{0i}} = \frac{\text{Masse bei Zündung der Stufe } i+1}{\text{Masse bei Zündung der Stufe } i} \quad (3.16)$$

Strukturverhältnis der i-ten Stufe:

$$e_i = \frac{m_{Str.i}}{m_{0i}} = \frac{m_{bi} - m_{0i+1}}{m_{0i}} = \frac{\text{Masse der Struktur der Stufe } i}{\text{Masse bei Zündung der Stufe } i} \quad (3.17)$$

Der Zusammenhang der einzelnen Stufen ist in Abb.3.2 dargestellt. Die Nutzlast der i-ten Stufe ist demnach die Startmasse der i+1-ten Stufe.

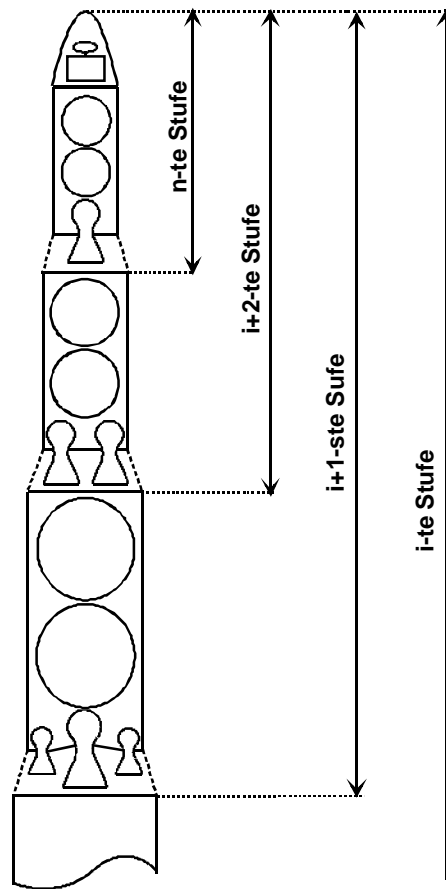


Abb.3.2: Stufenaufteilung

Da sich die Brennschlussmasse aus der Struktur- und Nutzlastmasse zusammensetzt,

$$m_{bi} = m_{Str.i} + m_{Ni} \quad (3.18)$$

folgt der wichtige Zusammenhang zwischen den drei Verhältnissen:

$$\frac{1}{r_i} = e_i + l_i \quad (3.19)$$

Die wahre Nutzlast der gesamten Rakete ist die Nutzlast der letzten Stufe n.  
 Nach der Definition ist

$$m_{0i+1} = m_{Ni} = l_i \cdot m_{0i} \quad (3.20)$$

Für die Masse der wahren Nutzlast gilt:

$$m_{Nn} = l_n \cdot m_{0n} = l_n \cdot l_{n-1} \cdot l_{n-2} \cdot \dots \cdot l_1 \cdot m_{01} = m_{01} \cdot \prod_{i=1}^n l_i \quad (3.21)$$



Der Wachstumsfaktor (Growth Factor) leitet sich folgendermaßen ab:

$$G = \frac{m_{01}}{m_{Nn}} = \frac{\text{Startmasse am Boden}}{\text{wahre Nutzlast}} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n I_i} \quad (3.22)$$

G sollte möglichst klein sein, damit die Startmasse bei gegebener Nutzlast gering wird. Die Forderung nach einem minimalen Startgewicht bei gegebener Flugaufgabe hat technologische und wirtschaftliche Gründe, da dadurch der Aufwand und die Kosten einer Mission beeinflusst werden.

$$G = \frac{m_0}{m_N} = \min$$

Als Nebenbedingung muss die Raketengrundgleichung erfüllt werden.

$$v_{id} = c \cdot \ln R \Rightarrow \frac{1}{R} = \prod_{i=1}^n (\mathbf{e}_i + I_i) = \exp\left(\frac{-v_{id}}{c}\right)^{\frac{c_i}{\bar{c}}} \quad \text{mit } R = r^n \quad (3.23)$$

In dieser Gleichung sind  $v_{id}$ ,  $c_i$  und  $\mathbf{e}_i$  gegeben, wobei  $\bar{c}$  eine über Stufen normierte Ausströmgeschwindigkeit ist. Die Berechnung dieser Aufgabe erfolgt mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatormethode (Bronstein 1991) und man erhält durch Differenzieren nach  $I_i$ :

$$I_i = \frac{I_n \cdot \mathbf{e}_i}{\frac{c_i}{\bar{c}} (\mathbf{e}_n + I_n) - I_n} \quad (3.24)$$

In diesem Kapitel wird nur der Sonderfall  $c_i = \bar{c}$  behandelt, für den gilt:

$$\frac{\mathbf{e}_i}{I_i} = konst = \frac{\mathbf{e}_n}{I_n}$$

Dies bezeichnet man als die Gewichtsähnlichkeit einer optimierten Stufenrakete mit gleicher Strahlgeschwindigkeit in allen Stufen.

Zur weiteren Vereinfachung wird die Annahme getroffen, dass alle Stufen gleich seien, d.h.:

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = \dots = \mathbf{e}_n$$

$$I_1 = I_2 = \dots = I_n$$

Damit erhält man:

$$R = r^n = \exp\left(\frac{v_{id}}{c}\right) = (I + e)^{-n} \quad (3.25)$$

und

$$G = I^{-n} \quad (3.26)$$

Jetzt logarithmiert man die Gleichung und löst nach der Stufenzahl auf.

$$-n = \frac{\ln R}{\ln(I + e)} \quad (3.27)$$

Durch Einsetzen in Gleichung (69) folgt:

$$G = I^{\frac{\ln R}{\ln(I + e)}} = \exp\left(\frac{\ln R \cdot \ln I}{\ln(I + e)}\right) \quad (3.28)$$

Man logarithmiert wieder, differenziert und setzt gleich Null.

$$\frac{1}{I} \cdot \frac{\ln I}{\ln(I + e)} = \frac{\frac{1}{I} \cdot \ln(I + e) - \frac{1}{(I + e)} \cdot \ln I}{[\ln(I + e)]^2} = 0 \quad (3.29)$$

Die Lösung des Extremwertproblems lautet:

$$I^I = (I + e)^{I+e} \quad (3.30)$$

oder:

$$I_{opt}^{I_{opt}} = (I_{opt} + e)^{(I_{opt} + e)} \quad (3.31)$$

Dieses Ergebnis wurde bereits 1942 von *Hermann Oberth* abgeleitet. Mit Hilfe der Funktion  $f(x) = x^x$ , die in der Abbildung 3.3 dargestellt ist, lässt sich die Gleichung (3.31) für gegebene  $e$ -Werte lösen. Statt des Ausdrucks (3.31) kann man im Bereich  $0 < e < 0,4$  näherungsweise schreiben:

$$I_{opt} = 0,368 - 0,486 \cdot e \quad (3.32)$$

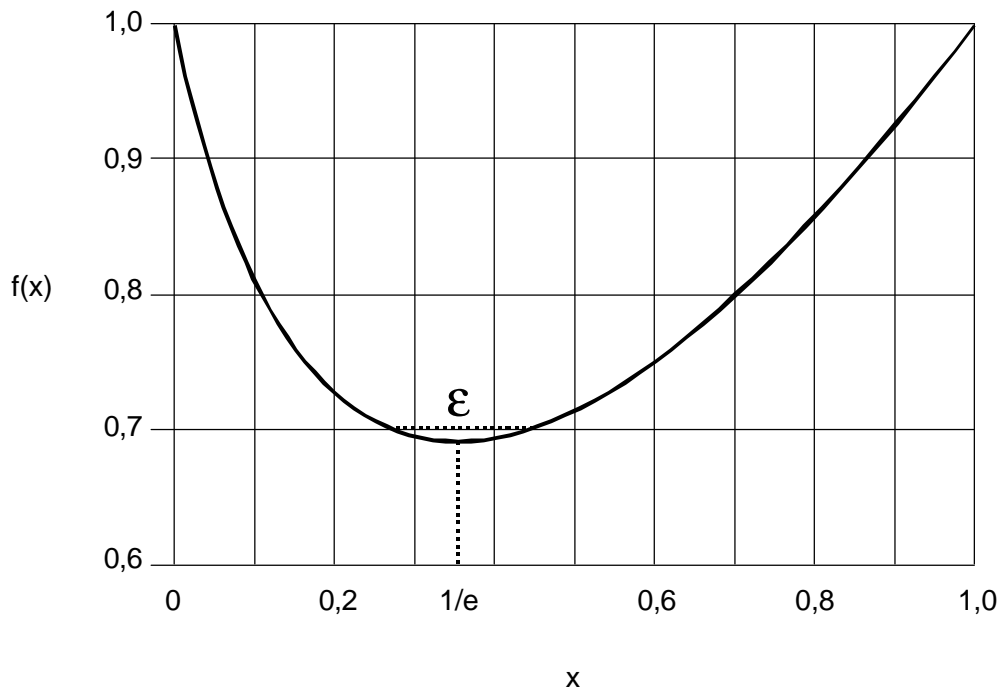


Abb.3.3: Stufenoptimierung

Da  $f(x) = x^x$  ein Minimum bei  $x = \frac{1}{e} = 0,368$  hat, bleibt  $I_{opt}$  immer kleiner 0,368.

Die Formel für die optimale Stufenzahl lautet aus Gleichung (3.25):

$$n_{opt} = \frac{-v_{id}}{\ln(I_{opt} + e)} \quad (3.33)$$

Diese Beziehung gilt nur bei gleichen Stufen. Sind jedoch Ausströmgeschwindigkeit und Strukturfaktor der einzelnen Stufen unterschiedlich, so können zur Berechnung von  $n_{opt}$  Mittelwerte (Index  $m$ ) gebildet und mit diesen die optimale Stufung berechnet werden.

$$c_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i \quad (3.34)$$

$$e_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i \quad (3.35)$$

Für eine gegebenen Strukturfaktor von  $e \approx 0,11$  lässt sich folgende Näherungsformel angeben:

$$n_{opt} = 1,15 \cdot \frac{v_{id}}{c} \quad (3.36)$$

In der Praxis lässt sich die Frage nach einer optimalen Stufenzahl oft nur schwer beantworten. Ausgangsgrößen wie Missionsaufgabe, Zuverlässigkeit und Wirtschaftlichkeit beeinflussen die Stufenzahl in erheblichem Maße. Daher versucht man immer, mit einer möglichst geringen Stufenzahl auszukommen. Die Werte nach Gleichung (3.33), die in der Regel nicht ganzzahlig sind, werden deshalb eher abgerundet.

### 3.4 Zündfolge

Beim Aufstieg einer mehrstufigen Rakete in einem Gravitationsfeld stellt sich die Frage nach der optimalen Zündfolge der einzelnen Stufen. Zwei Grenzfälle, am Beispiel einer zweistufigen Rakete dargestellt, sind zu unterscheiden:

- I. Bei Brennschluss der ersten Stufe und nach deren Abtrennung wird ein antriebsloser Flug fortgesetzt bis die kin. Energie, bzw. die Geschwindigkeit der Rakete Null ist. Erst jetzt erfolgt die Zündung der zweiten Stufe. Unter der Annahme, dass die Brennzeit gegenüber der Freiflugphase vernachlässigbar kurz ist, kann für beide Stufen die kinetische Energie  $E$  bezogen auf die Masseneinheit  $m$  bei Brennschluss beschrieben werden als:

$$e_1 = \frac{1}{2} \cdot v_1^2 \quad \text{und} \quad e_2 = \frac{1}{2} \cdot v_2^2 \quad (3.37)$$

Setzt man die kin. Energie gleich der Lageenergie der jeweiligen Stufen, so erhält man:

$$g \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot v_1^2 \quad \text{und} \quad g \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot v_2^2 \quad (3.38)$$

Die erreichbare Flughöhe ergibt sich somit zu:

$$h_I = h_1 + h_2 = \frac{1}{2g} \cdot (v_1^2 + v_2^2) \quad (3.39)$$

- II. Nach Brennschluss der ersten Stufe und deren Trennung erfolgt die sofortige Zündung der zweiten Stufe. Hierbei ist die Energie pro Masseneinheit:

$$e = \frac{1}{2} \cdot (v_1 + v_2)^2 \quad (3.40)$$

In diesem Fall ist die maximale Flughöhe:

$$h_{II} = \frac{1}{2g} \cdot (v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2) \quad (3.41)$$

Die Gesamtenergie ist im Fall II um den Betrag  $(v_1 v_2)/g$  größer. Der Höhengewinn, der sich daraus ergibt, liegt darin begründet, dass die Treibstoffmasse im ersten Fall in eine größere Höhe getragen wird, ehe sie verbraucht wird. Für eine optimale Zündfolge gilt allgemein, dass Flugphasen ohne Antrieb (sogenannte Freiflugphasen) zu vermeiden sind.

## 4 Chemische Raketenantriebe

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der auf einer chemischen Reaktion der Treibstoffe basierenden Antriebssysteme besprochen. Wir unterscheiden drei verschiedene Triebwerke (vgl. Abb.4.1) nach dem Aggregatzustand von Oxydator und Brennstoff.

- Flüssigkeitsantriebe
- Feststoffantriebe
- Hybridantriebe (Kombination aus festen und flüssigen Treibstoffen)

Für den Verbrennungsprozess im Raketentriebwerk sind Brennstoff und Oxydator notwendig. Bei Flüssigkeitstriebwerken liegen beide Komponenten in flüssigem Zustand vor.

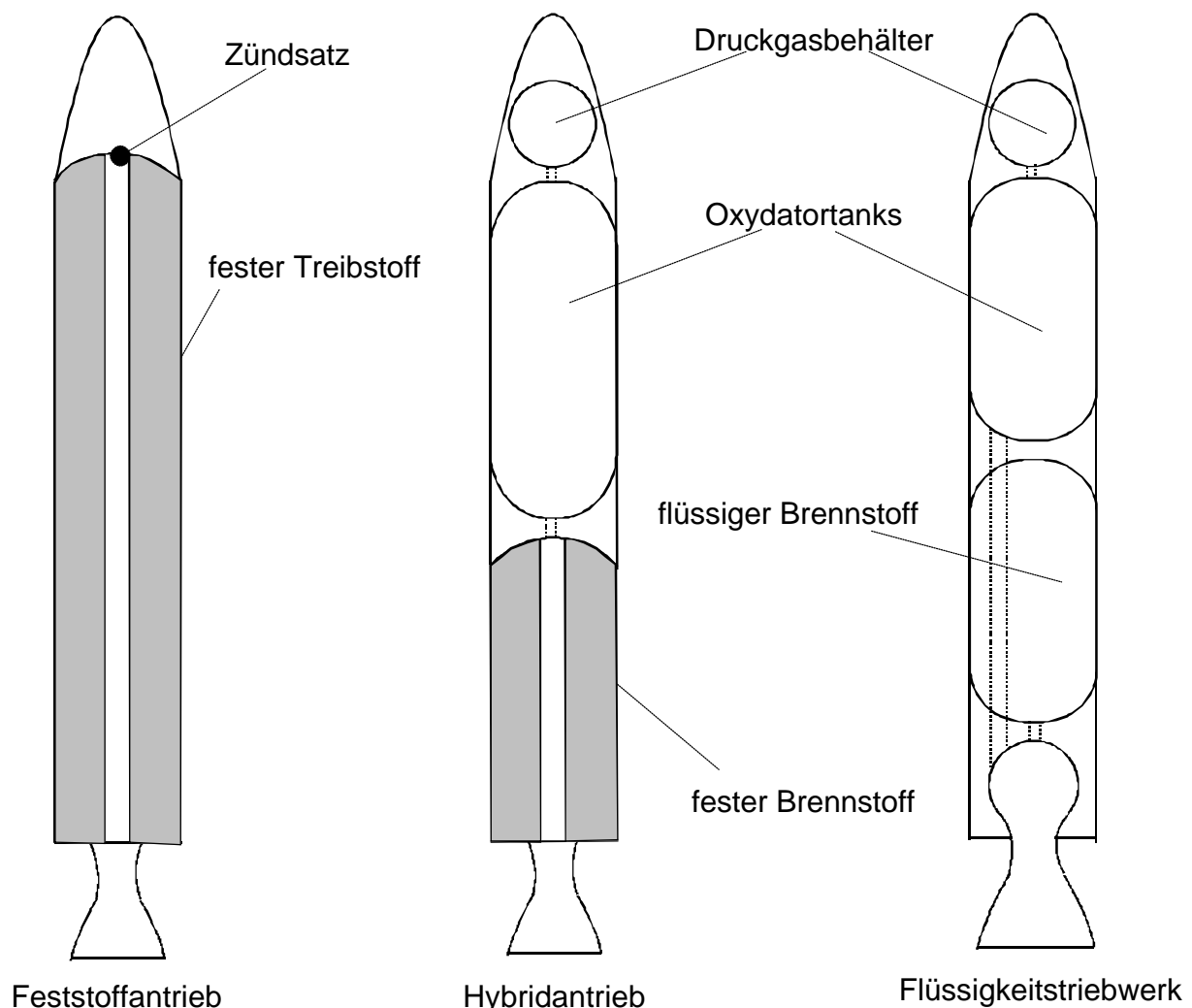


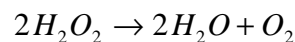
Abb.4.1: Aufbau chemischer Raketenantriebe

## 4.1 Flüssigkeitsantriebe

### Flüssige Treibstoffe

Nach Anzahl der Treibstoffkomponenten wird unterschieden:

- **Einstoffsysteme (Monergole):**  
Der Treibstoff erzeugt die erforderliche Antriebsenergie durch chemische Zersetzung oder Molekülumwandlung (z.B.: Nitrocellulose). Geschieht diese Umwandlung in Anwesenheit eines Katalysators, dann bezeichnet man die Substanzen (z.B.:  $N_2H_4$  oder  $H_2O_2$ ) als Katergole. Mit Hilfe eines metallische Silber- oder Platin-Katalysators zersetzt sich z.B. *Wasserstoffsuperoxid* ( $H_2O_2$ ) zu Wasserdampf und gasförmigen Sauerstoff:



- **Zweistoffsysteme (Diergole; Tab.4.2):**  
Zweistoffsysteme sind bis heute die gebräuchlichsten flüssigen Raketentreibstoffe. Brennstoff und Oxydator werden mittels Druckgas oder Turbopumpen in die Brennkammer eingespritzt und verbrannt [4].
- **Dreistoffsysteme (Triergole; Tab.4.3):**  
Substanzen (Fluor) oder Metalle (Beryllium) werden in den Verbrennungsprozess einbezogen, um eine höhere Brennkammertemperatur zu erzielen. Das Beryllium liegt in Form von kleinen Festkörpern vor und hat zwei positive Effekte: zum einen erhöht es die Reaktionstemperatur, zum anderen steigert es den Massendurchsatz. Da die zugesetzten Stoffe gefährliche Atemgifte sind, werden Triergole nur zu Versuchszwecken in der Forschung verwendet. Die Kombination aus flüssigem Sauerstoff (LOX), flüssigem Fluor und Kerosin, *Floxen* genannt, erbringt z.B. eine Steigerung des spezifischen Impulses bis zu 18 sec gegenüber dem Zweistoffsystem. Die Realisierung eines solche Antriebs ist jedoch sehr aufwendig.

### Eigenschaften

Flüssige Treibstoffe werden nach folgenden Eigenschaften gruppiert:

- **Kryogene Treibstoffe:**  
Ursprünglich gasförmige Stoffe werden bei sehr kalten Temperaturen (bis zu 20K im Falle von Flüssigwasserstoff!) verflüssigt und gelagert, um eine höhere Treibstoffdichte zu erhalten.
- **Hypergole Treibstoffe:**  
Die Brennstoffkomponente zündet spontan bei Berührung mit dem Sauerstoffträger.

## Auswahlkriterien

- Treibstoffe mit geringer Dichte erfordern voluminöse und schwere Tanks.
- Je weniger Treibstoffkomponenten benötigt werden, desto einfacher ist die Antriebsauslegung.
- In der Praxis werden gasförmige Treibstoffe tiefgekühlt und flüssig verwendet. Die kryogenen Systeme können so vorteilhaft sein, dass man die aufwendige Lagerung und Betankung in Kauf nimmt. Die Dichte von Wasserstoff lässt sich durch Verflüssigung auf  $70 \text{ kg/m}^3$  erhöhen.
- Hypergole, bei Vermischung selbstzündende Treibstoffkombinationen, gestatten es auf einen zuverlässigen und damit aufwendigen Zündmechanismus zu verzichten [6].

*Tabelle 4.1: Treibstoffkategorien*

Treibstoffkombination	Energiegehalt
niederenergetisch	< 1,5 kWh/kg
mittelenergetisch	1,5-3 kWh/kg
hochenergetisch	> 3 kWh/kg

*Tabelle 4.2: Zweistoffsysteme*

Treibstoff	Symbol	Massenverhältnis $\Phi$	Energie [kWh/kg]	Energie [kWh/m <sup>3</sup> ]	Dichte [kg/m <sup>3</sup> ]	$I_{spvac}$ [s]	Eigenschaft
Ozon/Wasserstoff	O <sub>3</sub> /H <sub>2</sub>	3,7/1	3,96	1,15	290	473	kryogen
Fluor/Wasserstoff	F <sub>2</sub> /H <sub>2</sub>	7,60/1	3,65	1,68	460	470	kryogen, giftig
Sauerstoff/Wasserstoff	O <sub>2</sub> /H <sub>2</sub>	4,02/1	3,35	0,94	280	451	kryogen
Fluor/Hydrazin	F <sub>2</sub> /N <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	2,18/1	2,89	3,79	1310	423	kryogen, giftig
Sauerstoff/Hydrazin	O <sub>2</sub> /N <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	0,95/1	2,15	2,30	1070	365	mild kryogen
Sauerstoff/Kerosin	O <sub>2</sub> /CH <sub>n</sub>	2,56/1	1,97	2,00	1020	353	kryogen
Stickstofftetroxid/Hydrazin	N <sub>2</sub> O <sub>4</sub> /N <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	1,34/1	1,87	2,28	1220	339	lagerfähig, giftig

*Tabelle 4.3: Dreistoffsysteme*

Treibstoff	Symbol	Massenverhältnis	Energie [kWh/kg]	Energie [kWh/m <sup>3</sup> ]	Dichte [kg/m <sup>3</sup> ]	$I_{spvac}$ [s]	Eigenschaft
Ozon/Beryllium/Wasserstoff	O <sub>3</sub> /Be/H <sub>2</sub>	47% 26% 27%	4,54	1,02	225	535	kryogen, giftig
Sauerstoff/Beryllium/Wasserstoff	O <sub>2</sub> /Be/H <sub>2</sub>	47% 26% 27%	4,25	0,94	220	518	kryogen, giftig

Allgemein kann man die Ausströmgeschwindigkeit als das wichtigste Kriterium der Treibstoffkombination ansehen. Die Gasgeschwindigkeit ist hauptsächlich von der Verbrennungstemperatur und dem Molmasse der Verbrennungsprodukte abhängig und sollte entsprechend der Raketengrundgleichung möglichst groß sein. Der Brennstoff und der Oxydator sind in den meisten Fällen getrennt und werden erst in der Brennkammer zusammengeführt. Zur Feststellung der Oxydator-Brennstoff-Relation wird das Mischungsverhältnis  $\Phi$  verwendet.

$$\Phi = \frac{\text{Oxydatormasse}}{\text{Brennstoffmasse}}$$

### Vor- und Nachteile von Flüssigkeitsantrieben

- hoher spezifischer Impuls
- lange Brenndauer
- hohe Lebensdauer (wiederverwendbar)
- kontrollierbarer Schub (Richtung, Drosselung, Wiederstart)
- Treibstoffe sind meist kryogen und nicht lagerfähig
- oft toxische Treibstoffkombination
- komplexer als Feststoffraketen und daher teurer

### Der Flüssigkeitsraketenmotor

In der Abbildung 4.2 ist die Funktionsweise eines regenerativ gekühlten Nebenstromtriebwerks mit Turbopumpenförderung schematisch dargestellt. Der Brennstoff wird vor der Verbrennung zur Kühlung der Düse und der Brennkammer verwendet. Die Förderung der Treibstoffe erfolgt durch turbinengetriebene Pumpen. Die Turbinen können ihre Antriebsenergie auf verschiedene Arten erhalten. In der Abbildung 4.2 werden sie durch einen Gasgenerator betrieben. Der Generator wird beim Anlassen des Triebwerks zunächst von einer Festpulverpatrone gezündet und mit einem Teil des Treibstoffs betrieben.

Allgemein besteht der Raketenmotor aus:

- Düse
- Brennkammer
- Fördersystem



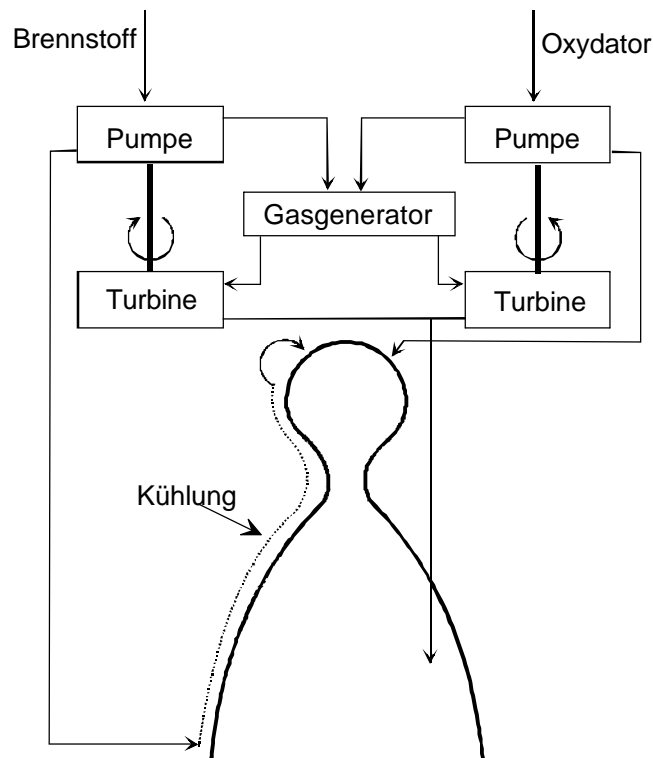


Abb.4.2: Schematische Darstellung eines Flüssigkeitsraketenmotors

## Fördersysteme

Die zur Verbrennung notwendige Treibstoffmenge wird dem Triebwerk durch das Fördersystem zugeführt. Es bestehen verschiedene Möglichkeiten der Treibstoffförderung, die sich in zwei Gruppen zusammenfassen lassen. Im ersten Fall werden die Tanks mit Druckgas beaufschlagt, im zweiten Fall wird der Treibstoff durch Pumpen gefördert.

## Druckgasförderung

Es werden ausschließlich chemisch neutrale Gase verwendet (z.B.: Stickstoff oder Helium). Druckgasfördersysteme unterscheiden sich hinsichtlich der Quellen, aus denen das Druckgas bezogen wird. Ein Gasbehälter, die Brennkammer, die Zerlegung von Monergolen oder ein Gasgenerator stellen mögliche Quellen dar. Das Druckgas kann auch in der Gasphase eines Tanks enthalten sein und mit dem zu fördernden Flüssigkeiten in Kontakt stehen. Bei Verwendung eines Druckgasbehälters, gelangt das Gas über einen Druckregler in die Treibstofftanks und drückt die Treibstoffe in die Brennkammer. Der erforderliche Tankdruck berechnet sich aus Brennkammerdruck und den Druckverlusten in Leitungen, Reglern und Ventilen. Die Druckgasmenge muss ausreichend sein, um die Brennkammer während der gesamten Betriebszeit mit Treibstoff zu versorgen. Dieses Fördersystem eignet sich besonders für mehrfach abschaltbare und wiederzündbare Antriebe. Die hohen Tankdrücke fordern eine entsprechend starke Struktur, wodurch die Leermasse der Rakete erhöht wird. Das Druckgasfördersystem eignet sich daher nur für kleine Raketen oder Stufen mit geringen Brennzeiten.

## Pumpenförderung

Pumpenfördersysteme verlangen einen hohen technischen Aufwand. Die Vorteile gegenüber der Druckgasförderung sind:

- die Regelung der Pumpendrehzahl ermöglicht eine Optimierung der Betriebszustände
- geringere Erhöhung der Strukturmasse
- geringerer Volumenbedarf

Der Hauptbestandteil der Förderanlage (vgl. Abb.4.3) ist das Turbopumpenaggregat, das meist unmittelbar an der Brennkammer angebracht ist. Es werden Zentrifugalpumpen mit großen Förderleistungen bei sehr hohen Drehzahlen verwendet. Die Konstruktion solcher Pumpen ist aufwendig, da bei hohem Durchsatz das Eigengewicht minimiert wird. Die Treibstoffpumpen werden von einer Gasturbine über ein Getriebe oder direkt über eine Welle angetrieben. Der direkte Antrieb erzielt einen Massengewinn, während durch ein Getriebe eine Anpassung der Drehzahl möglich wird. Pumpenfördersysteme eignen sich nicht bei wiederzündbaren Antrieben, da ein einmal in Rotation gesetztes Turbopumpenaggregat langsam heruntergebremst und nach Bedarf durch einen Anlasser wieder angefahren werden müsste. Sie werden bei Triebwerken mit großem Schub und langen Brennzeiten verwendet.

## Antriebsarten der Turbine

- Gasgeneratoren, die mit Zersetzung eines Monergols oder einem Feststofftreibsatz arbeiten.
- Generatoren, die mit dem gleichen Treibstoff wie die Brennkammer gespeist werden. Für den Anlassvorgang ist ein Feststoffzündsatz notwendig.
- Durch Verwendung des bei der Kühlung des Triebwerks verdampfenden Brennstoffes, der anschließend zur Verbrennung in die Brennkammer geleitet wird.
- Direkt durch Ableitung eines Feuergasanteils aus der Brennkammer.

Die Abgase des Generators können entweder in die Düse des Raketenmotors geleitet werden, wo sie zur Kühlung beitragen, oder sie werden in Steuertriebwerken zur Lageregelung benutzt.

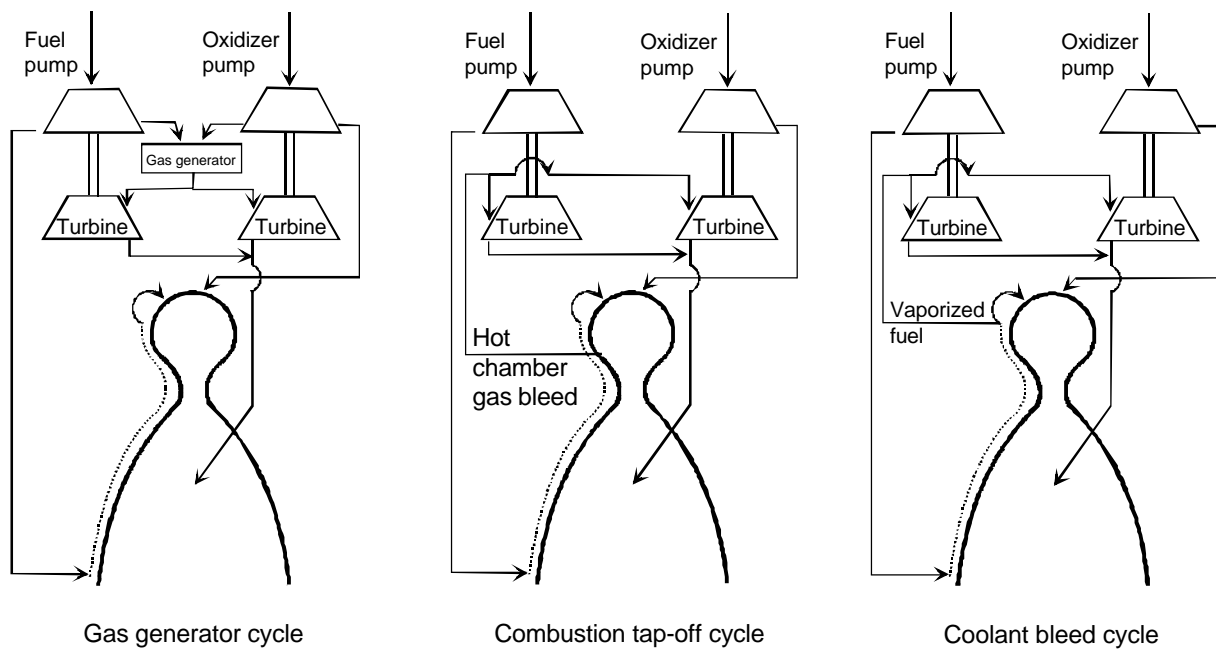
Die Leistung solcher Turbopumpen ist sehr beachtlich. In Tabelle 4.4 sind die technischen Daten des F1-Raketenmotors aufgeführt. Fünf dieser Triebwerke wurden in der ersten Stufe der Saturn V verwendet.

## Hauptstrom versus Nebenstromverfahren

- **Hauptstrom** –Verfahren (engl. „closed cycle“):  
Die Antriebsgase für die Turbine werden nach ihrer Arbeitsleistung in das Triebwerk geleitet, wo sie an der Schuberzeugung teilnehmen.

- Nebenstrom** –Verfahren (engl. „open cycle“):  
 Die Antriebsgase für die Turbine werden nach ihrer Arbeitsleistung *nicht* in die Brennkammer geleitet, sondern für verschiedene andere Zwecke weiterverwendet (z.B. Tankbedruckung, Rollkontrolle), oder einfach ins Freie entlassen.

### Nebenstromtriebwerke



### Hauptstromtriebwerke

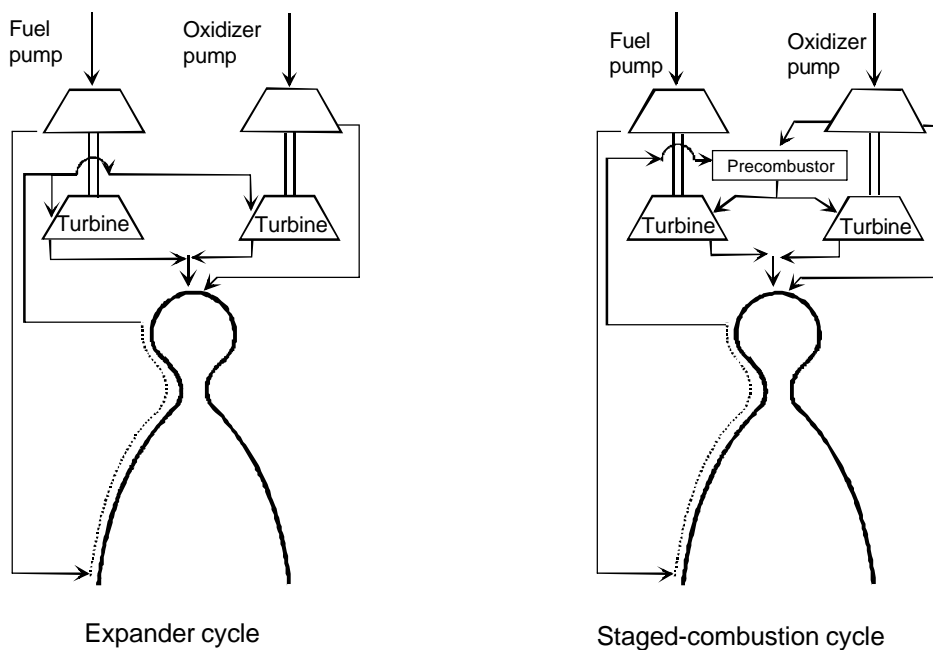


Abb.4.3: Turbopumpenfördersysteme von Flüssigkeitstriebwerken

Tabelle 4.4: Technische Daten des F1-Motors

Gesamtlänge	[m]	5,79
Gesamtdurchmesser	[m]	3,76
Bodenschub	[kg]	680 000
Vakuumschub	[kg]	810 000
Spez. Impuls am Boden	[s]	264
Spez Impuls im Vakuum	[s]	301
Brenndauer	[s]	150
Massenstrom Oxydator	[kg/s]	1 585
Massenstrom Brennstoff	[kg/s]	790
Mischungsverhältnis $\Phi$	[ ]	2,35
Anlasser		hypergolger Vorlauf
Oxydator	LOX	flüssiger Sauerstoff
Brennstoff	RP-1	Kerosin
Brennkammerdruck	[bar]	69
Gewicht	[kg]	8 390
Schub/Gewicht-Verhältnis	[ ]	83
Flächenverhältnis	[ ]	16:1
Brennkammertemperatur	[°C]	3 280
Temperatur im Gasgenerator	[°C]	794
Düsenenddurchmesser	[m]	3,53
Turbinenleistung	[PS]	56 000
Turbinendrehzahl	[U/min]	5 600

### Brennkammer

Die nach Zerstäubung der Treibstoffe folgenden physikalischen und chemischen Prozesse in der Brennkammer (Verdampfung, Gemischbildung, Verbrennung), sind theoretisch schwer zu erfassen. Bei Auslegung einer Brennkammer muss man daher größtenteils auf experimentelle Erfahrungen zurückgreifen. Die wesentliche Abmessung ist das Brennraumvolumen  $V_c$ . Bei zu kleinem Volumen findet eine unvollständige Verbrennung statt. Die Mindestabmessung der Brennkammer ist eine Funktion der Reaktionsgeschwindigkeit der Treibstoffkomponenten und wird mit der charakteristischen Länge  $L$  bestimmt:

$$L = \frac{V_c}{A_t} = \frac{\text{Volumen der Brennkammer}}{\text{engster Düsenquerschnitt}} \quad (4.1)$$

Diese Länge (vgl.Tab.4.5) ist nur von der Reaktionsgeschwindigkeit der Treibstoffe, der erzielten Verbrennung und dem Einspritzsystem abhängig. Die Bestimmung ist nur durch Versuche möglich.

*Tabelle 4.5: Charakteristische Länge einiger Treibstoffkombinationen*

Salpetersäure - UDMH	$1,5 < L < 2$ [m]
LOX - Kerosin	$1,5 < L < 2,5$ [m]
LH <sub>2</sub> -LOX	$L < 1$ [m]

### Einspritzsystem

Das Einspritzsystem dient zur Aufbereitung und Vermischung der Treibstoffe. Die Güte und die Stabilität der Verbrennung sind von dessen Ausführung abhängig. Das Verteilersystem muss eine gleichmäßige, nach Oxydator und Brennstoff getrennte Treibstoffzufuhr auf alle Einspritzöffnungen garantieren. Eine ungleichmäßige Förderung würde zu Schwingungen führen, die das Triebwerk zerstören können. Der Einspritzkopf besteht aus vielen Öffnungen, deren Durchmesser, abhängig von der Triebwerksgröße und den Treibstoffeigenschaften zwischen 0,5 und 2,5 mm liegt. Die Flüssigkeiten werden durch hohen Druck und die Einspritzgeschwindigkeit aufbereitet. Dabei müssen möglichst kleine Tröpfchen entstehen. Um einen möglichst geringen Tropfendurchmesser zu erzielen, ist ein hoher Einspritzdruck bei kleiner Einspritzbohrung notwendig. Es existieren verschiedene Arten der Zerstäubung die eine gute Vermischung gewährleisten:

- **Prallzerstäubung**  
Es treffen sich zwei oder mehrere Treibstoffstrahlen und zerplatzen. Eine gleichmäßige Verteilung der Flüssigkeitstropfen im Brennraum wird durch eine Vielzahl dieser Anordnungen erreicht.
- **Prallplattenzerstäubung**  
Die Strahlen treffen auf Platten und zerstäuben.
- **Drallzerstäubung**  
Die Flüssigkeit wird vor dem Einspritzen in einer Kammer oder durch einen spiralenförmigen Kanal in Rotation versetzt und platzt nach Verlassen der Einspritzöffnung auf. Es entsteht ein Kegelmantel aus Tröpfchen.

Bei der Einspritzung muss berücksichtigt werden, dass beim Anlassvorgang nicht zu viel Treibstoff in die Brennkammer gelangt. Verzögert sich die Zündung kann es zur Explosion kommen. Daher sind in dieser Phase reduzierte Förderraten notwendig und man versucht die Zündverzugszeiten zu minimieren.

## Kühlverfahren

Für die bei einem Flug auftretenden Betriebszeiten ist eine aktive Kühlung der Brennkammer und der Düse notwendig. Zwischen den Verbrennungsgasen und den Wänden herrscht ein konvektiver Wärmeübergang. Der Düsenhals ist durch Überhitzung am stärksten gefährdet. Für den Triebwerksentwurf spielt die Wahl des Kühlsystems eine wichtige Rolle.

## Kapazitivkühlung

Der Motor wird unter Verwendung von Materialien mit hoher Wärmeleitfähigkeit massiv gestaltet. Die dicken Wände wirken als Wärmesenke. Die Brenndauer muss entsprechend kurz gewählt werden, um Temperaturschäden zu vermeiden. Als Materialien eignen sich Legierungen mit Graphit, Molybdän oder Beryllium. Doch selbst diese hochwarmfesten Verbindungen können Temperaturen über 1100 K nicht lange standhalten.

## Ablationskühlung

Durch die Wärmebelastung wird der Werkstoff aufgeheizt, geschmolzen und verdampft. Eine niedrige Wärmeleitfähigkeit, eine zähe Schmelzschicht und eine hohe Verdampfungswärme werden von den verwendeten Materialien gefordert. Durch die Abtragung des Materials wird die Geometrie der Düse ungünstig verändert. Diese Kühlungsart wird auch bei Hitzeschildern an Wiedereintrittskörpern verwendet.

## Strahlungskühlung

Die Wärmemenge wird durch Abstrahlung in die Umgebung abgeführt. Der Werkstoff muss über eine hohe Warmfestigkeit und ein gutes Abstrahlungsvermögen verfügen. Die Strahlungskühlung läßt sich nur in den Fällen nutzen, in denen die Temperaturbelastung nicht zu hoch ist und große Abstrahlflächen vorhanden sind, wie z.B. am Düsenende. Als Material wird Titan verwendet.

## Filmkühlung

Ein Teil des Brennstoffs wird zwischen die Triebwerkswand und den heißen Gasen gebracht, wo er durch Verdampfung die Kühlung erzielt.

## Regenerativkühlung

Bei längeren Betriebszeiten sind die oben geschilderten Kühlsysteme unzureichend. Daher wird die Regenerativkühlung verwendet. Die Wärmeableitung aus der Innenwandung der Brennkammer und der Düse erfolgt durch den Flüssigkeitsstrom des kryogenen Brennstoffs, der vor dem Einspritzen durch Kühlkanäle geleitet wird. Der Oxydatorstrom wird nur in

Ausnahmefällen verwendet, da dieser wegen seiner chemischen Aggressivität das Triebwerk zerstören würde.

### Treibstoffbehälter

Die theoretisch günstigste Tankform, insbesondere bei höheren Tankdrücken, ist ein Kugelbehälter. Die Probleme der Aufhängung, der technische Aufwand bei der Herstellung und die beim Aufstieg notwendige Verkleidung heben den Gewichtsvorteil oft wieder auf. Normalerweise besteht der Tank aus einer Zylinderschale mit halbkugelförmigen oder elliptischen Deckeln. Der zylindrische Teil bildet zugleich die Außenhaut der Rakete. Der Innendruck liegt über dem Außendruck und versteift dadurch die Struktur. Die Wandstärke  $d$  (Abb.4.4) eines Kugeltanks errechnet sich näherungsweise aus der Formel:

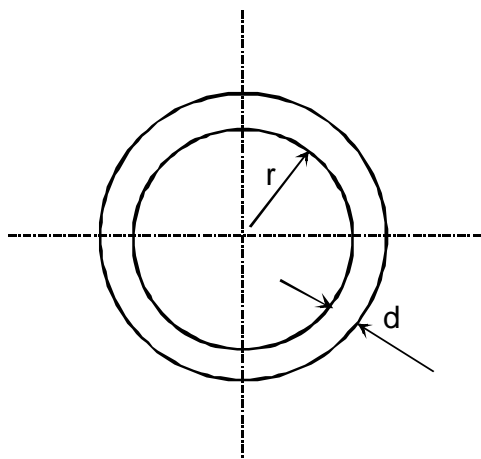
$$d = k \cdot \frac{r}{2s} \cdot \Delta p \quad (4.2)$$

Bei einem Zylindertank mit halbkugelförmigem Abschluss ergibt sich die Wandstärke  $d$  für eine Belastung in radialer Richtung zu:

$$d = k \cdot \frac{r}{s} \cdot \Delta p \quad (4.3)$$

$s$  = ist die Zugfestigkeit des verwendeten Materials

$$\Delta p = p_i - p_a$$



$d$  = Wandstärke

$r$  = Tankradius

$k$  = Sicherheitsfaktor

Abb. 4.4: Behälterwandstärke

Der Sicherheitsfaktor  $k$  liegt zwischen 1.5 und 2. Die Anordnung und die Form der Tanks innerhalb der Rakete werden im Wesentlichen von der Treibstoffbeschaffenheit, dem Tankdruck und der Lagerzeit beeinflusst. Bei kryogenen Treibstoffen ist eine Isolation der Tankwände unvermeidbar, da die Verdampfungsverluste andernfalls zu groß werden. Die Oberflächen der Tanks sollen ein möglichst hohes Reflexionsvermögen haben, um die Erwärmung durch Strahlung zu minimieren.

*Tabelle 4.6: Werkstoffe für Treibstoffbehälter*

Werkstoff	Zugfestigkeit (N/mm <sup>2</sup> )	Dichte (g/cm <sup>3</sup> )	ReiBlänge (km)
Al-Legierung	500	2.8	18
Titan	1000	4.4	22
Stahl	1500	7.8	19
GFK	800	2.0	40

Viele Treibstoffe sind korrosiv und kryogen. Die Tankwerkstoffe müssen diesen chemischen Eigenschaften standhalten. Insbesondere Zugfestigkeit und Kerbschlagzähigkeit dürfen sich durch den Kontakt mit dem Treibstoff nur in einem vorgesehenen Bereich ändern. Werkstoffe, die eine hohe Festigkeit und eine geringe Dichte aufweisen, führen zu einem niedrigen Strukturgewicht. Geringe Beschaffungskosten und einfache Verarbeitung sollten bei der Auswahl der Tankwerkstoffe berücksichtigt werden. Die Eigenschaften einiger Werkstoffe sind in Tabelle 4.6 aufgeführt.

*Tabelle 4.7: Zündungsarten wichtiger Zweistoffsysteme*

Zündung	Brennstoff/Oxydator Kombination	Triebwerk
selbstzündend (hypergol)	UDMH/N <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	Viking 4
pyrotechnisch (Zündladung)	H <sub>2</sub> /O <sub>2</sub>	Vulcain
elektrisch (Zündkerze)	H <sub>2</sub> /O <sub>2</sub>	SSME
chemisch (hypergoler Vorlauf)	RP1/O <sub>2</sub>	F1

*Tabelle 4.8: Triebwerksdaten*

Triebwerk	Treibstoff	I <sub>sp</sub> Boden	I <sub>sp</sub> Vakuum	Schub [kN] Boden	Schub [kN] Vakuum
HM 7B	H <sub>2</sub> /O <sub>2</sub>	-	444,6	-	62
Vulcain	H <sub>2</sub> /O <sub>2</sub>	335	431	815	1075
SSME	H <sub>2</sub> /O <sub>2</sub>	361	453	1700	2280
Viking 5	UDMH/N <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	265	-	678	-
Viking 4	UDMH/N <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	-	295,5	-	805
F1	RP1/O <sub>2</sub>	264	301	6770	8055

*UDMH steht für unsymmetric dimethyl hydrazin  
 LOX bedeutet liquid oxydgen (flüssiger Sauerstoff)  
 RP1 ist ein Treibstoff für Jets und entspricht dem Kerosin  
 SSME ist die Abkürzung von Space Shuttle Main Engine*



## 4.2 Feststoffantriebe

### Allgemeiner Aufbau

Der Aufbau von chemischen Feststoffantrieben ist einfacher als der von Flüssigkeitstriebwerken. Es entfallen sowohl die Treibstoffförderanlagen mit deren Turbinen, Pumpen und Gasgeneratoren, als auch das Einspritzsystem. Ein weiterer Vorteil ist, dass die getrennte Lagerung von Brennstoff und Oxydator entfällt. Die wesentlichen Bestandteile sind:

- Düse
- Treibstoffbehälter (zugleich Brennkammer)
- Zündsatz

Die Treibstoffdichte ist größer als die flüssiger Treibstoffe. Die Entwicklung von Feststofftriebwerken ist kostengünstig, da Probleme durch Korrosion, Verdampfung und Zersetzung des Treibstoffs nicht anfallen [4].

### Vor- und Nachteile der Feststoffraketen

- hohe Zuverlässigkeit und einfache Konstruktion
- gute Lagerfähigkeit und schnelle Einsatzbereitschaft
- Tank und Brennkammer sind identisch
- hohe Treibstoffdichte (1.5-2 g/cm<sup>3</sup>)
- ungiftige Handhabung
- schwere Struktur (Hochdrucktank/Brennkammer)
- kurze Brennzeit
- geringer spezifischer Impuls
- Schubregelung und Wiederzündung nicht möglich
- Schubvektorregelung schwierig
- Treibstoffe sind verhältnismäßig teuer

Der Festtreibstoff (Treibsatz) kann verschieden geformt sein und je nach Größe der Rakete aus einem oder mehreren Elementen bestehen. Er wird normalerweise direkt in das Brennkammergehäuse gegossen und ist dadurch mit der Innenwand verbunden. An die Hitzebeständigkeit der Brennkammer werden keine hohen Anforderungen gestellt, da der noch nicht verbrannte Treibstoff als Wärmeisolator wirkt. Als Werkstoffe werden Stahl, Titan oder glasfaserverstärkte Epoxid- oder Phenolharze (GFK) verwendet. Die Brennkammerdrücke liegen zwischen 500 und 2000 N/cm<sup>2</sup>. Dieses erfordert stärkere Behälterwände als bei Flüssigkeitsantrieben. Wegen der hohen Betriebsdrücke sind Feststoffantriebe besonders für hohe Schübe und kurze Brennzeiten geeignet [14].

Der Massendurchsatz des Feststoffantriebes wird durch die Treibstoffzusammensetzung, den Brennkammerdruck und die Geometrie des Treibsatzes bestimmt. Aus Gewichtsgründen kommt in der Regel nur Ablations- und Kapazitivkühlung in Betracht. Als Düsenmaterial finden hochwarmfeste Materialien wie Graphit Wolfram, Molybdän, oder schlecht

wärmeleitende Kunststoffe auf Glas-, Asbest- oder Keramikbasis Verwendung. Die Vorteile des Feststoffantriebs bestehen in der Einfachheit der Ausführung, der Lagerung und Handhabung des Treibstoffs, sowie in der sofortigen Einsatzbereitschaft. Nachteile ergeben sich aus den Schwierigkeiten die Schubrichtung zu variieren. Außerdem sind die erreichbaren spezifischen Impulse (200-300 sec) geringer als bei Flüssigkeitstriebwerken. Dieser Leistungsverlust kann auch durch die höhere Dichte der Treibsätze nicht ausgeglichen werden [16].

### Festtreibstoffe

Festtreibstoffe können in zwei Gruppen eingeteilt werden:

- **Doppelbasis-Treibstoffe** (homogen) sind Verbindungen von Zellulosenitrat und Glycerin-trinitrat, die genügend chemisch gebundenen Sauerstoff enthalten, um die Verbrennung zu unterhalten. Oxydator und Brennstoff sind im selben Molekül enthalten. Um der spontanen Zerfallsneigung (Explosion) der Nitrate entgegenzuwirken, werden Zusätze beigemischt. Diese als Stabilisatoren bezeichneten Stoffe (z.B. Diphenylamin) binden die Zerfallsprodukte und verlangsamen die Reaktion (vgl.Tabb.4.9).
- **Komposit-Treibstoffe** (heterogen; Tab.4.9) bestehen aus einer innigen Mischung von Brennstoff und Oxydator, die in getrennten Molekülen vorliegen. Der älteste Vertreter dieser Gruppe ist das Schwarzpulver. Der Brennstoff, dem auch Metallpulver zur Leistungssteigerung beigemischt sein kann, dient gleichzeitig als Binder der Pulvermischung und verleiht dem Treibsatz die notwendige Festigkeit. Risse und Hohlräume sind in den Treibsätzen unbedingt zu vermeiden, da sie während des Abbrandes zur Vergrößerung der brennenden Oberfläche führen und einen Druckanstieg hervorrufen, der das Triebwerk zerstören kann.

*Tabelle 4.9: Treibsätze*

Treibsatz	$I_{sp}$ [s]	Dichte [g/cm <sup>3</sup> ]	$T_c$ [K]	$r$ ( bei 20°C) [cm/s]
Doppelbasis 50-60% NC 30-45% NG 1-10% Zusätze	205-230	1,6	2400-3200	1,5-2,3
Komposit 85% NH <sub>4</sub> CLO <sub>4</sub> 15% (CH <sub>2</sub> ) <sub>n</sub>	240	1,68	2638	-

*Nitroglyzerin (NG): ölig, flüssiger Sprengstoff mit hohem Sauerstoffüberschuss*  
*Nitrozellulose (NC): fester Sprengstoff mit Sauerstoffmangel*  
*Ammoniumperchlorat (NH<sub>4</sub>CLO<sub>4</sub>)*

## Abbrandgesetz

Die Abbrandrate ist als Wanderungsgeschwindigkeit der brennenden Fläche senkrecht zur Oberfläche des Treibsatzes definiert. Diese wichtige Größe ist abhängig von dem Brennkammerdruck, der brennenden Oberfläche und den chemischen Eigenschaften der Feststoffe. *Saint Robert* und *Vielle* stellten die folgende Beziehung auf.

$$r = a \cdot p_c^n \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} r &= \text{Abbrandrate in [cm/s]} \\ p_c &= \text{Brennkammerdruck} \\ a, n &= \text{treibstoffspezifische Konstanten} \end{aligned}$$

Mit Gleichung (2.36) gilt für den Massendurchsatz:

$$\dot{m} = a \cdot p_c^n \cdot A_p \cdot r_{tr} = A_t \cdot p_c \cdot \sqrt{\frac{k}{R \cdot T_c} \cdot \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} A_p &= \text{brennende Oberfläche} \\ r_{tr} &= \text{Treibsatzdichte} \end{aligned}$$

Damit ist der Brennkammerdruck:

$$p_c = \left[ \frac{A_p}{A_t} \cdot \frac{r_{tr} \cdot a}{\sqrt{\frac{k}{R \cdot T_c} \cdot \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}} \right]^{\frac{1}{1-n}} \quad (4.6)$$

Das Verhältnis von Abbrandoberfläche zum engsten Düsenquerschnitt bezeichnet man als Klemmung  $K$ . Diese beeinflusst direkt den Druck  $p_c$ . Soll der Brennkammerdruck während des Abbrandes konstant bleiben, muss der Treibsatz so ausgebildet sein, dass die Klemmung konstant bleibt.

$$K = \frac{A_p}{A_t} \quad (4.7)$$

Die Abbrandrate und der Massendurchsatz variieren je nach Umgebungstemperatur, da kalte Treibsätze langsamer brennen als warme (vgl. Abb.4.5). Dieser Faktor fließt in die Konstante  $a$  ein.

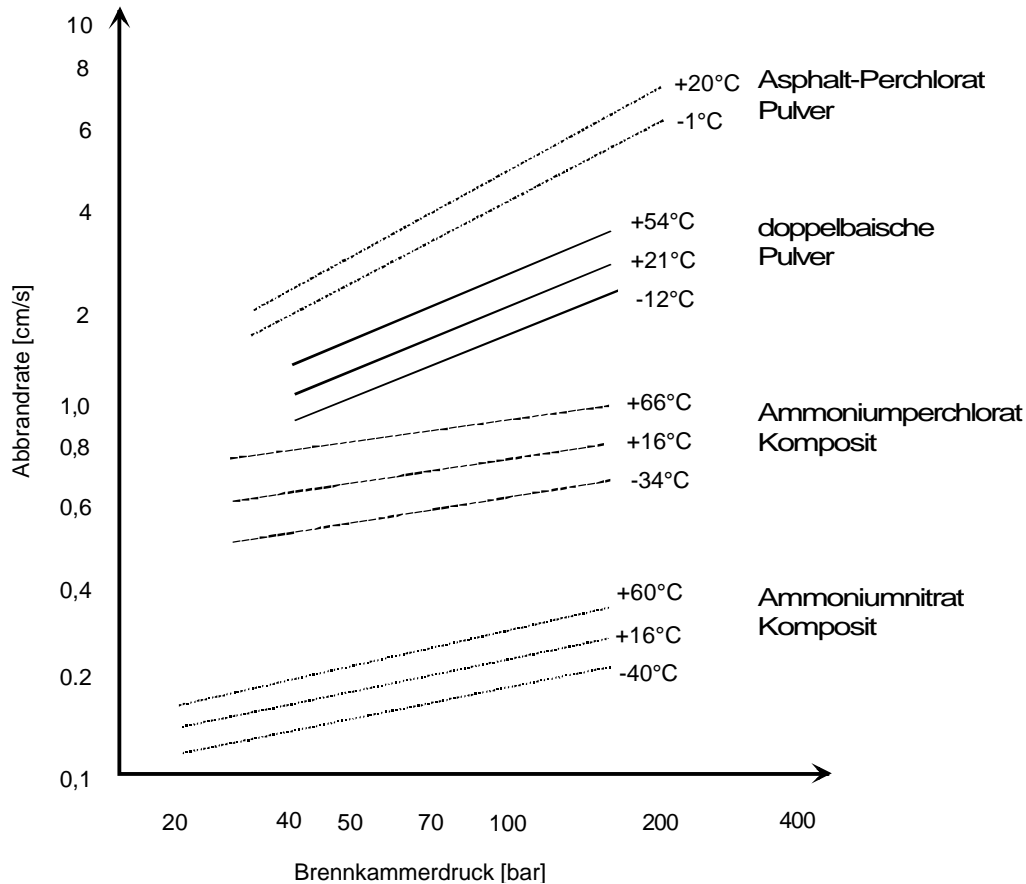


Abb.4.5: Abhängigkeit der Abbrandrate von Druck und Umgebungstemperatur

### Treibsatzgeometrien

Es sind eine Vielfalt von Geometrien möglich, die einen unterschiedlichen Schubverlauf erzeugen. Es können Treibsätze hergestellt werden, deren Schub mit der Zeit zunimmt (progressiver Abbrand), konstant bleibt (neutraler Abbrand), abnimmt (regressiver Abbrand), oder in Grenzen eine beliebige andere Funktion der Zeit ist. Stirnbrenner, Innenbrenner und Allseitsbrenner sind die wichtigsten Arten.

### Stirnbrenner

Der Treibsatz ist direkt mit dem Gehäuse verbunden und gegen die Wand hin isoliert, um einen seitlichen Ausbrand zu vermeiden. Die Abbrandoberfläche bleibt während des Abbrandes konstant. Bei einer optimalen Ladedichte ist der erzielbare Schub gering. Außerdem erfordert die starke Erwärmung der Brennkammerwand hochwarmfeste Materialien. Stirnbrenner werden meist für kleine Raketen verwendet. (Abb. 4.6: A).

## Innenbrenner

Diese Art des Abbrandes wird bei großen Feststoffboostern verwendet. Die Ladungsdichte liegt zwischen 60 und 90%. Die Verbrennung erfolgt an einem durch die seitlichen Oberflächen des Treibsatzes gebildeten geraden Brennkanal. Die Stirnflächen sind durch Hemmstoffe gegen Abbrand geschützt. Die große Oberfläche und eine Vielzahl von möglichen Treibsatzquerschnitten (Abb. 4.6: B,C,D,E) ermöglichen hohe Schübe und verschiedene Schubprogramme. Die Brennkammerwand ist bis zum Brennschluss gegen die heißen Gase geschützt. Dadurch ist die Verwendung kaltfester Werkstoffe möglich, was die Herstellungskosten und das Gewicht der Brennkammer verringert. Es können auch zweierlei Treibstoffe mit verschiedenen Abbrandgeschwindigkeiten verwendet werden (Abb. 4.6: F).

## Allseitsbrenner

Der Abbrand erfolgt wie bei Innenbrennern, mit dem Unterschied, dass die Verbrennung an fast allen Stirnflächen stattfindet [14]. Die Abbrandoberfläche wird dadurch zwar wesentlich vergrößert, die Anwendung dieser Treibsatzform führt aber zu starker Erwärmung der Brennkammerwand und zu möglichen Verlusten als Folge des Treibsatzzerfalls (Abb. 4.6: G, H).

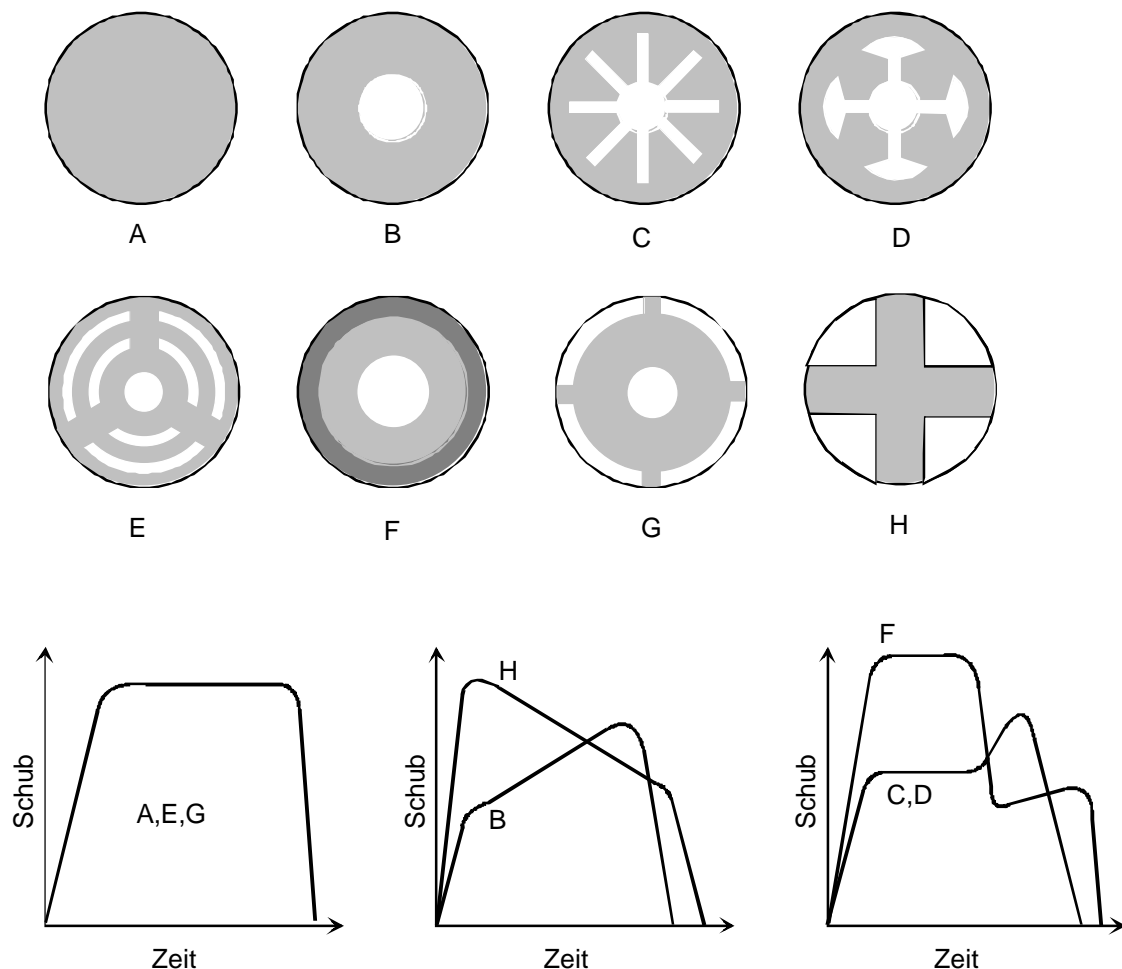


Abb. 4.6: Treibsatzgeometrien mit Schub-Zeit-Verlauf

### 4.3 Hybridantriebe

Das Hybridtriebwerk (auch Lithergolantrieb) ist eine Kombination von Feststoff- und Flüssigkeitsantrieb (vgl. Abb. 4.1). Das wesentliche Kennzeichen ist, dass eine Treibstoffkomponente in fester, die andere in flüssiger Form vorliegt. Im Allgemeinen ist der Brennstoff fest und wird als Lithergol bezeichnet (griech. lithos= Stein). Der feste Brennstoff ist, wie bei einem Feststoffantrieb mit innerem Abbrand, in einem Tank untergebracht, der zugleich Brennkammer ist. Der flüssige Oxydator wird mit Druckgas oder einem Turbopumpensystem gefördert und durch das Einspritzsystem in der Brennkammer zerstäubt. Brennstoff und Oxydator reagieren miteinander, dadurch wird der Brennstoff abgetragen. Der Oxydatorstrom kann durch ein Ventil unterbrochen und geregelt werden. Die Entwicklung von Hybridantrieben ist mit dem Ziel verbunden, die Vorteile des Feststoffantriebes (hohe Treibstoffdichte, Lagerfähigkeit) mit den positiven Eigenschaften des Flüssigkeitsantriebes (hohe Leistung, Schubregelung, Wiederzündbarkeit) zu vereinen. Diesen Vorteilen stehen Probleme gegenüber, die sich bei der Erhaltung optimaler Mischungsverhältnisse und konstanter Abbrandoberfläche ergeben.

#### Vor- und Nachteile der Hybridantriebe

- Der Schub kann mehrmals unterbrochen und geregelt werden
- Flüssig- und Feststoffkomponente ergeben eine mittlere Dichte
- spezifischer Impuls ist höher als bei Feststoffantrieben
- problematische Verteilung des Oxydators auf die Abbrandoberfläche
- Erhaltung des optimalen Mischungsverhältnisses über die gesamte Brenndauer ist sehr schwierig

#### Lithergole Treibstoffe

Lithergole Treibstoffkombinationen (vgl. Tab. 4.10) stellen eigentlich keine eigene Treibstoffgruppe dar. Im Wesentlichen werden für lithergole Antriebe die Oxydatoren und Brennstoffe der Fest- und Flüssigkeitsantriebe verwendet.

*Tabelle 4.10: Lithergole Treibstoffe*

Oxydator Brennstoff	HNO <sub>3</sub> aromat. Amin	FLOX Polyäthylen
I <sub>sp</sub> [s]	256	343
Φ	3,00	3,84
T <sub>c</sub> [k]	3050	4600
Dichte [g/cm <sup>3</sup> ]	1,43	1,20
v <sub>e</sub> [m/s]	1540	2080
Eigenschaft	lagerfähig	kryogen

Für lagerfähige Lithergolkombinationen liegen die theoretischen Werte für den spezifischen Impuls im Bereich der besten Festtreibstoffe und der lagerfähigen Flüssigkeitskombinationen. Bei den kryogenen Kombinationen sind die Flüssigtreibstoffe den Lithergolen überlegen [15].

### Abbrandgesetz

Das empirische Abbrandgesetz für Hybridantriebe lautet:

$$r = a \cdot p_c^n \cdot G^a \quad (4.8)$$

Die Werte für  $a, a, n$  müssen durch Versuche bestimmt werden.  $G$  ist der Oxydatormassenstrom (in g/s) dividiert durch den Brennstoffkanalquerschnitt (in cm<sup>2</sup>).

## 4.4 Trägersysteme

In den folgenden Tabellen sind die technischen Daten bekannter Raketen aufgeführt.

*Tabelle 4.11: Russische Trägerraketen*

Trägerrakete	Kosmos	Tsiklon	Molniya	Soyuz	Zenith	Proton-M	Energia
Startmasse [t]	106	188	306	310	460	700	2400
Nutzlastmasse LEO [t] (H=200 km, i=51°)	1,6	4	--	7,2	14	22	100
Nutzlastfaktor	0,0152	0,0213	--	0,0232	0,0304	0,0315	0,0417
Stufenanzahl	2	3	4	3	2	3	2
Treibstoffe	NTO+ UDMH	NTO+ UDMH	O <sub>2</sub> + Kerosin	O <sub>2</sub> + Kerosin	O <sub>2</sub> + Kerosin	NTO+ UDMH	O <sub>2</sub> +K O <sub>2</sub> +H <sub>2</sub>
Nutzlastabmessung D [m] L [m]	2,4 5,7	2,7 9,5	2,7 8,5	3 10,3	3,9 13,6	4,3 19,2	6,7 41,7
Erststart	1967	1969	1966	1973	1985	1967	1987
Zuverlässigkeit N-erfolgreich/N-total	0,95	0,97	0,95	0,975	(0,7)	0,905	--
Anzahl Starts N	397	199	245	687	20	209	2
Anzahl erfolgreiche Starts Stand 01.07.1993	377	193	232	670	14	189	2

*Tabelle 4.12: Träger der USA und die europäische Ariane*

Trägerrakete	Ariane 44LP	Delta 6925	Atlas E	Titan III	Saturn V
Startmasse [t]	420	218	121	680	2 910
Nutzlastmasse LEO [t]	8,3	3,9	0,82	14	119
Nutzlastfaktor	0,0197	0,0179	0,0068	0,0205	0,0409
Stufenanzahl	3	3	3	3	3
Treibstoffe	N <sub>2</sub> O <sub>4</sub> +UH <sub>2</sub> N <sub>2</sub> O <sub>4</sub> +UH <sub>2</sub> LOX+H <sub>2</sub>	LOX+RP1	LOX+RP1	LOX+RP1	LOX+RP1 LOX+H <sub>2</sub> LOX+H <sub>2</sub>
Nutzlastabmessung D [m] L [m]	4,0 11,12	3,05 7,92	2,1 7,4	4 16,3	-- --
Erststart	1988	1989	1974	1989	1967
Zuverlässigkeit Nerfolgreich/Ntotal	1	1	0,9	0,67	1
Anzahl Starts N	6	14	17	3	12
Anzahl erfolgreiche Starts Stand 1992	6	14	15	2	12



## 5 Elektrische Raketenantriebe

Das Prinzip elektrischer Antriebe besteht darin, mittels elektrischer Energie ein Arbeitsmedium auf hohe Geschwindigkeiten zu beschleunigen. Allerdings ermöglichen elektrische Antriebe nur kleine Schübe und somit ist es mit ihnen nicht möglich von Planeten oder größeren Himmelskörpern zu starten. Sie können als Marstriebwerke für interplanetare Missionen, sowie zur Lageregelung von Satelliten und Sonden verwendet [3/14]. Trotz der sehr hohen Strahlgeschwindigkeit liegt ihre Schubbeschleunigung, durch den außerordentlich geringen Massendurchsatz bedingt, im Bereich von  $10^{-7} g_0$  bis  $10^{-3} g_0$ .

### Gewinnung der elektrischen Energie

Elektrische Antriebe benötigen leistungsstarke Energieversorgungssysteme, in denen Primärenergie in elektrische Energie umgewandelt wird. Als Primärenergie eignen sich grundsätzlich Sonnenenergie, Kernenergie und chemische Energie. Die Umwandlung erfolgt entweder direkt oder indirekt über thermische Energie. Eine direkte Energieumwandlung erfolgt z.B. in Solarzellen. Eine indirekte Umwandlung über die Wärmeenergie ist statisch mittels Thermo- oder Thermionikelementen und dynamisch mittels magnetohydrodynamischen (MHD) oder turboelektrischen Wärmekraftmaschinen möglich. Abbildung 5.1 zeigt schematisch die möglichen Umwandlungsmethoden.

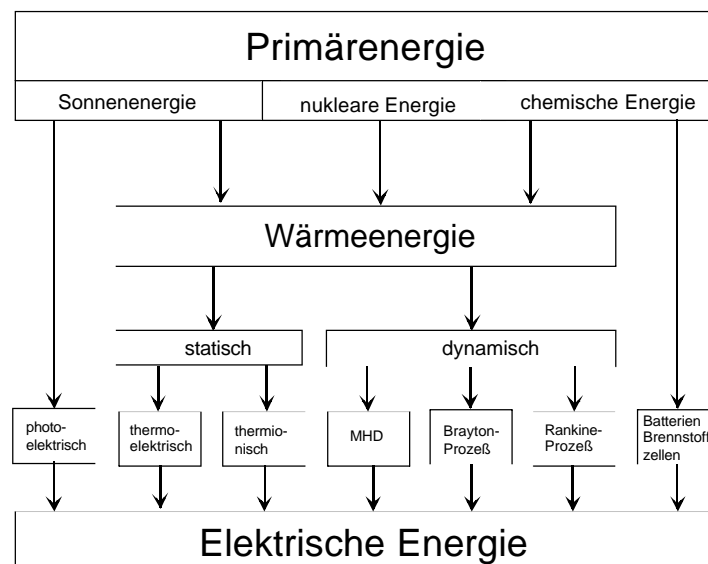


Abb. 5.1: Energieumwandlungsprozesse

Die bedeutendsten Energieversorgungssysteme sind:

- Solarzellengeneratoren (photoelektrische Energiewandlung)
- Brennstoffzellen (elektrochemische Energiewandlung)
- Radionuklidgeneratoren (thermoelektrische, thermionische, MHD Energiewandlung)
- Kernreaktoren (thermionischer incore, MHD Wandler)

## Elektrische Antriebsarten

Nach der Beschleunigungsart der Stützmasse werden drei Grundarten elektrischer Antriebe unterschieden:

- elektrothermische Plasmaantriebe
- elektrostatische Ionenantriebe
- elektromagnetische Plasmaantriebe

## Theorie der elektrischen Antriebe

Die Leistungsbilanz eines elektrischen Triebwerks mit konstanter Strahlgeschwindigkeit  $c$  und einem Triebwerkswirkungsgrad  $h$  ergibt sich aus der kinetischen Energie der pro Zeiteinheit ausströmenden Masse  $m$ . Es gilt für die elektrische Leistung  $P_{el}$ :

$$P_{el} = \frac{d}{dt} \cdot \left( \frac{m}{2 \cdot h} \cdot c^2 \right) = \frac{\dot{m}}{2 \cdot h} \cdot c^2 \quad (5.1)$$

Mit der Definition des Schubs  $F = \dot{m} \cdot c$  erhält man für die Strahlgeschwindigkeit  $c$ :

$$c = \frac{2 \cdot h \cdot P_{el}}{F} \quad (5.2)$$

und damit für den Schub  $F$ :

$$F = \frac{2 \cdot h \cdot P_{el}}{c} \quad (5.3)$$

Aus Gleichung (5.3) ist zu erkennen, dass bei konstantem Wirkungsgrad  $h$  und konstanter Leistung  $P_{el}$  eine Steigerung des Schubes  $F$  nur durch eine Verminderung der Strahlgeschwindigkeit  $c$  zu erreichen ist. Wird bei einem konstanten Massendurchsatz  $\dot{m}$  die Strahlgeschwindigkeit zur Schubsteigerung erhöht, dann steigt der Leistungsbedarf sehr stark an. Je nach Wirkungsweise der elektrischen Triebwerke können optimale Werte für  $c$  ermittelt werden.

## Optimale Strahlgeschwindigkeit hinsichtlich der Massen

Bei Steigerung der elektrischen Leistung  $P_{el}$  wächst die Masse des Energieversorgungssystems  $m_E$  proportional mit an, sodass:

$$m_E = a \cdot P_{el} = a \cdot \frac{F \cdot c}{2} \quad (5.4)$$

$a = \text{Proportionalitätskonstante}$

Bei konstantem Massendurchsatz gilt:

$$m = \frac{F}{c} \cdot t \quad (5.5)$$

$$t = \text{Betriebsdauer}$$

Um eine maximale Nutzlast zu transportieren muss  $(m+m_E)$  minimal sein, d.h.:

$$\frac{d}{dc} \cdot (m + m_E) = \frac{a \cdot F}{2} - \frac{F \cdot t}{c^2} = 0 \quad (5.6)$$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass der gesuchte Extremwert ein Minimum sein soll, folgt:

$$\frac{d^2}{d^2c} \cdot (m + m_E) = \frac{2F \cdot t}{c^3} > 0 \quad (5.7)$$

Damit erhält man als Lösung des Extremwertproblems die in Bezug auf die Massen optimale Strahlgeschwindigkeit  $c_{opt}$ :

$$c_{opt} = \sqrt{\frac{2 \cdot t}{a}} \quad (5.8)$$

## 5.1 Elektrothermische Plasmaantriebe

Elektrothermische Antriebe erhitzen mit Hilfe elektrische Energie ein Arbeitsmedium, das dann in einer Düse thermodynamisch entspannt wird. Als Arbeitsmedium (auch Stützmasse genannt) wird wegen des geringen Molekulargewichts meist Wasserstoff verwendet, der durch die hohe Energiezufuhr in Plasma verwandelt wird, d.h. in ein elektrisch neutrales Gemisch von Ionen, Elektronen und Lichtquanten zerfällt [4]. Das Erhitzen des Gases kann auf zwei verschiedene Arten erfolgen:

### Resistojet

Hierbei wird die Wärmefreisetzung eines Ohmschen Widerstandes genutzt. Der Wasserstoffstrom wird über ein elektrisch erhitztes Wolframrohr geleitet, dabei aufgeheizt und in einer Düse entspannt.

## Arcjet (Lichtbogenantrieb)

Bei dieser Antriebsart wird die durch eine Bogenentladung zwischen zwei Elektroden freiwerdende Wärme zum Aufheizen der Stützmasse verwendet. Der Gasstrom kann auf diese Weise mittlere Temperaturen von 22000 K erreichen und dementsprechend hohe spezifische Impulse bis zu 2500 sec ermöglichen.

Von diesen beiden Möglichkeiten liefert der Arcjet die höhere Leistung. Abbildung 5.2 zeigt schematischen Aufbau eines Arcjets. Dieser besteht aus einem Zylinder, in dessen Achse eine Kathode angebracht ist. Als Anode dient entweder die Zylinderwand oder die Expansionsdüse. Der Lichtbogen kann nach Anlegen der Spannung durch eine der folgende Methoden gezündet werden:

- Variation des Elektrodenabstandes ( Berühren und anschließendes Distanzieren)
- Hochspannungsstoß
- Erzeugung eines Gasstrahls zwischen Anode und Kathode

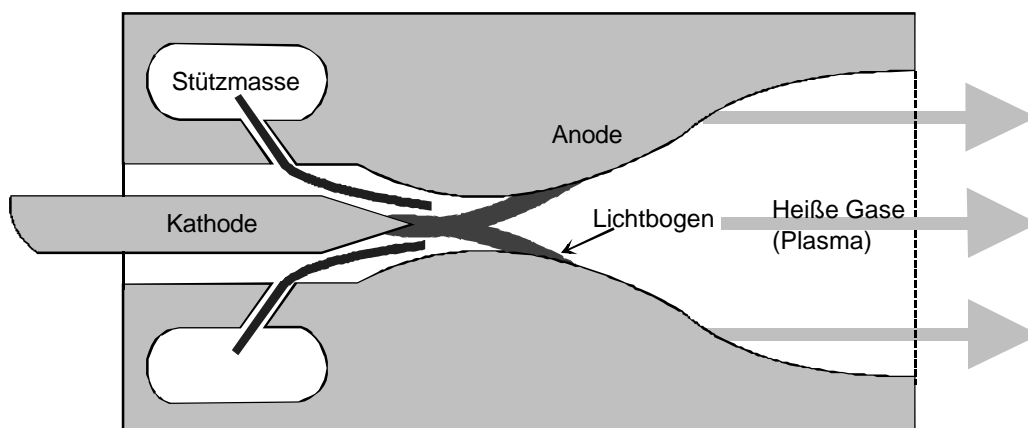


Abb. 5.2: Schema eines Lichtbogenantriebes

Die Energiedichte des Lichtbogens kann so groß sein, dass Temperaturspitzen bis zu 40000 K auftreten. Die Temperaturverteilung ist jedoch nicht konstant. Die Temperaturen sind in der Mitte der Kammer am größten und fallen zur Düsenwand hin sehr stark ab. Dadurch liegt die mittlere Gastemperatur weit unterhalb der Spitzenwerte. Diese hohen mittleren Gastemperaturen stellen den Vorteil des Lichtbogenantriebes gegenüber den chemischen oder nuklearen Antrieben dar. Insbesondere ist bei chemischen Antrieben die erreichbare Gastemperatur durch den Energiegehalt des Treibstoffes begrenzt. Die Leistung eines Lichtbogenantriebes ist dagegen im Wesentlichen vom Potential des Energieversorgungssystem abhängig. Ein weiterer einschränkender Faktor für die Leistungsaufnahme eines Lichtbogenantriebes, der mit zunehmender Energiedichte des Bogens an Bedeutung gewinnt, ist der innere Widerstand des Systems, denn bei hohen Temperaturen ist die elektrische Leitfähigkeit der Gase vergleichbar mit der von Metallen. Arbeitet der Lichtbogen unter diesen Bedingungen, treten entsprechende Verluste durch den Ohmschen Widerstand auf.

## 5.2 Elektrostatische Ionenantriebe

Bei dieser Antriebsart werden die Teilchen der Stützmasse, nachdem sie eine positive Ladung angenommen haben, in einem statischen elektrischen Feld beschleunigt. Diese Teilchen können atomare Ionen, molekulare Ionen oder Kolloidpartikel sein. Die nach Verlassen der Schubkammer erreichbaren Ausströmgeschwindigkeiten der Teilchen werden zum einen durch deren Ladung und Masse, zum anderen durch den Potentialunterschied des Feldes bestimmt. In Ionentriebwerken können sehr hohe Ausströmgeschwindigkeiten im Bereich von 30 bis 200 km/s erzielt werden, ohne dass die Wände der Schubkammer einer übermäßigen Hitzeeinwirkung ausgesetzt sind. Um eine elektrische Aufladung des Raumfahrzeuges zu vermeiden, wird der Ionenstrahl nach der Beschleunigung durch eine Elektronenzufuhr (Glühdraht oder Emissionsplatte) neutralisiert [17]. In Abbildung 5.3 ist die Funktionsweise eines Ionenantriebes dargestellt.

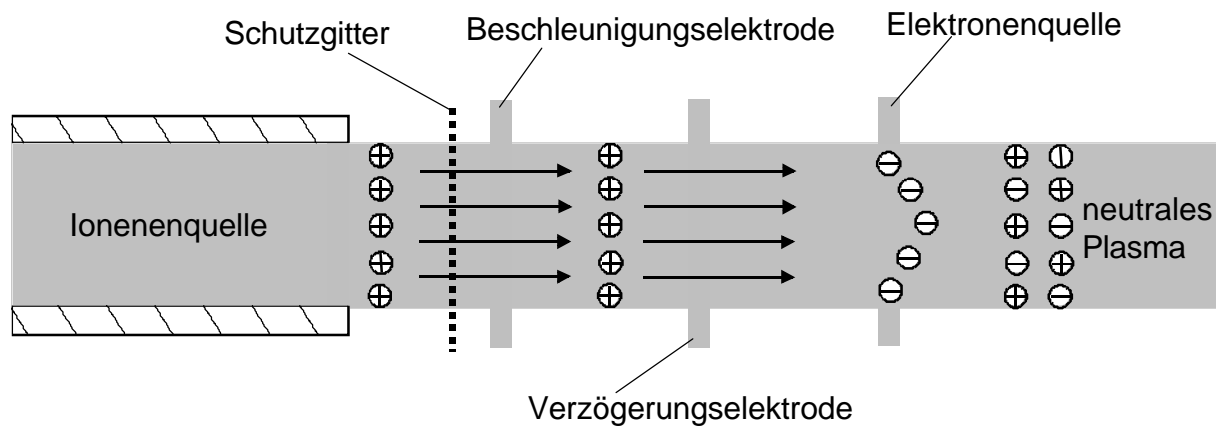


Abb. 5.3: Schema eines Ionenantriebes

### Beschleunigungssystem (Schubkammer)

Die Schubkammer eines elektrostatischen Triebwerks besteht aus folgendem System von Elektroden, die der Ionenquelle (vgl. Abb. 5.3) gegenüberstehen:

- Schutzgitter (Begrenzungselektrode)
- Beschleunigungselektrode
- Verzögerungselektrode
- Elektronenquelle

### Schutzgitter und Beschleunigungselektrode

An die Beschleunigungselektrode wird eine hohe negative Spannung von mehreren kV angelegt. Dadurch werden die positiv geladenen Ionen elektrostatisch beschleunigt. Zur Steigerung der Ionenstromdichte wird die angelegte Spannung möglichst hoch gewählt. Die Beschleunigungselektrode besteht im Allgemeinen aus einem Metallgitter. Die Ionen dürfen

nicht in Kontakt mit dem Metallgitter kommen, um eine Verzögerung des Stromes und eine Erosion der Beschleunigungselektrode (verminderte Lebensdauer) zu vermeiden. Ein Schutzgitter, an das eine positive Hochspannung angelegt wird, reduziert die Trefferrate der Ionen auf das Metallgitter. In einem elektrischen Feld erhalten Ionen mit der Ladung  $q$  eine Beschleunigung. Nach dem Durchlaufen einer vorgegebenen Beschleunigungsstrecke ist ihre kinetische Energie  $E_{kin}$ :

$$E_{kin} = q \cdot U = \frac{m \cdot c^2}{2} \quad (5.9)$$

Daraus ergibt sich die Strahlgeschwindigkeit  $c$  der Ionen:

$$c = \sqrt{2 \cdot U \cdot \frac{q}{m}} \quad (5.10)$$

$$U = \text{angelegte Spannung in [V]}$$

$$m = \text{Masse der Ionen in [g]}$$

$$q = \text{Ionenladung in [As]}$$

Unter Berücksichtigung der Elementarladung  $e$  und der Masse pro Einheitsatomgewicht  $m$ , kann man für Gleichung (5.10) schreiben:

$$c = 13840 \cdot \sqrt{U \cdot \frac{n}{m_A}} \quad (5.11)$$

$$n = \text{Ionisierungsgrad}$$

$$m_A = \text{Atomgewicht}$$

$$e = 1,6021 \times 10^{-19} \text{ C wobei } q = e \cdot n$$

$$m = 1,674 \times 10^{-24} \text{ g}$$

Die Ionenstromdichte  $j$  zwischen zwei Elektroden ist durch den Raumladungseffekt physikalisch begrenzt. Selbst bei unbegrenzter Ionenzufuhr aus der Ionenquelle kann der Ionenstrom nicht über eine bestimmte Dichte hinaus anwachsen. Die begrenzenden Faktoren der Ionenstromdichte sind:

- die beschleunigende Spannung
- den Abstand von Ionenquelle und Beschleunigungselektrode
- das Verhältnis von Masse zu Ladung der Ionen

Der physikalische Grund für die Begrenzung der Ionenstromdichte ist das elektrostatische Feld der Ionen, das dem äußeren Feld entgegenwirkt. Die Ansammlung der Ionen zwischen Ionenquelle und Elektrode ist dort am stärksten, wo die Ionengeschwindigkeit am geringsten ist, d.h. nahe der Ionenquelle. Wenn die Ionenemission anwächst, wird die Feldstärke nahe der Ionenquelle mit der Zeit gleich Null. Von da an nimmt der Ionenstrom bei weiterem Anwachsen der Emission nicht mehr zu. Dieser Effekt wird durch die *Child-Schottky-Langmuir*-Gleichung beschrieben:

$$j_{\max} = 5,45 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{U^{\frac{3}{2}}}{d^2} \sqrt{\frac{n}{m_A}} \quad \left[ \frac{A}{cm^2} \right] \quad (5.12)$$

$d = \text{Elektrodenabstand}$

Für den Massenstrom pro Quadratcentimeter gilt somit:

$$\dot{m} = j \cdot \frac{m_A \cdot \mathbf{m}}{n \cdot e} = 5,68 \cdot 10^{-13} \cdot \frac{U^{\frac{3}{2}}}{d^2} \cdot \sqrt{\frac{m_A}{n}} \quad \left[ \frac{g}{cm^2 \cdot s} \right] \quad (5.13)$$

Unter der Annahme eines parallelen Ionenstrahls ergibt sich der Schub pro Flächeneinheit des Strahlquerschnitts (Schubdichte  $f$ ) aus den Gleichungen (5.12) und (5.13) zu:

$$f = \frac{\dot{m} \cdot c}{g_0} = 8,01 \cdot 10^{-10} \cdot \sqrt{\frac{U^3}{d^4}} \quad \left[ \frac{g}{cm^2} \right] \quad (5.14)$$

Das Verhältnis  $U/d$  ist hierbei die elektrische Feldstärke. Um eine Lichtbogenentladung zwischen den Elektroden zu vermeiden, gilt die Regel  $U/d$  kleiner als 100 kV/cm<sup>2</sup> zu halten. Daraus resultiert eine maximal erreichbare Schubdichte:

$$f \leq 8 \quad \left[ \frac{g}{cm^2} \right] \quad (5.15)$$

Mit der Strahlenergie des Triebwerks über den Strahlquerschnitt  $D$  :

$$E = j \cdot D \cdot U = 5,45 \cdot 10^{-8} \cdot D \cdot \frac{U^{\frac{5}{2}}}{d^2} \sqrt{\frac{n}{m_A}} \quad [W] \quad (5.16)$$

folgt für das Verhältnis von Schub  $F$  zu Energie  $E$ :

$$\frac{F}{E} \approx \sqrt{\frac{m_A}{n \cdot U}} \quad (5.17)$$

### Verzögerungselektrode

Um eine möglichst hohe Ionenstromdichte zu erhalten, werden die Ionen in der Schubkammer stärker beschleunigt, als dies für eine optimale Ausströmgeschwindigkeit (vgl. Gl. 5.10) wünschenswert ist. Deshalb wird hinter dem Beschleunigungsfeld ein Verzögerungsfeld aufgebaut (s. Abb.5.2).

## Elektronenquelle

Nachdem die Ionen die letzte Elektrode passiert haben, muss die Ladungswolke in einen elektrisch neutralen Zustand versetzt werden. Die austretenden Ionen würden andernfalls ein Gegenfeld aufbauen und als Raumladung dem Ionenstrahl entgegenwirken. Die Neutralisation kann dadurch entstehen, dass man den Strahl durch geheizte, Elektronen emittierende Gitter, Ringe oder Rohre laufen lässt.

### 5.3 Elektromagnetische Plasmaantriebe

Damit das Arbeitsmedium (Stützmasse) durch ein magnetisches Feld beeinflusst werden kann, muss es in seiner Gesamtheit elektrisch leitfähig sein, d.h. in Form eines Plasmas vorliegen. Eine Trennung von positiv und negativ geladenen Teilchen ist dabei nicht notwendig. In einem Plasma bewegen sich die Ladungsträger beider Vorzeichen unter Wirkung eines elektrischen Feldes in entgegengesetzte Richtungen. Falls gleichzeitig ein magnetisches Feld existiert, das senkrecht zu dem elektrischen Feld verläuft, dann wirkt auf die Teilchen beider Vorzeichen eine Kraft, die senkrecht zu ihren bisherigen Bewegungen gerichtet ist (vgl. Abb.5.4). Dadurch erfährt das Plasma eine resultierende Beschleunigung in Richtung der Kraft (*Lorenz-Kraft*):

$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

$Q$  Ladung des Teilchens [C]  
 $v$  Geschwindigkeit des Ladungsträgers [m/s]  
 $B$  magnetische Flussdichte [T]

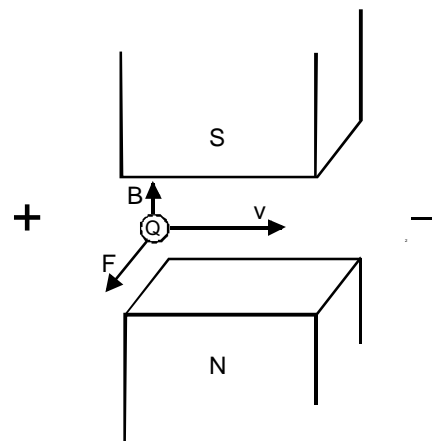


Abbildung 5.4: Elektrische Ladung im Magnetfeld

Falls elektrische oder magnetische Kräfte auf ein Plasma wirken, werden die Elektronen auf Grund ihrer geringen Masse auf weit höhere Geschwindigkeiten beschleunigt als die Ionen. Dieser Effekt würde zur Trennung der Ladung führen. Durch Kollisionen zwischen den Elektronen und Ionen, den Raumladungseffekt und die *Coulomb*-Streuung werden die unterschiedlichen Geschwindigkeiten jedoch angeglichen. Das Plasma bleibt somit neutral und eine Neutralisierung des Antriebsstrahls ist nicht notwendig. Durch die Tatsache, dass



elektromagnetische Kräfte ein neutrales Plasma beschleunigen können und auch keine nennenswerten Behinderungen durch Raumladungen auftreten, werden bei diesem Antriebssystem wesentlich höhere Schubdichten erreicht als bei elektrostatischen Ionenantrieben. Nach Art des Betriebs lassen sich zwei Antriebsmethoden unterscheiden:

- kontinuierliche elektromagnetische Antriebe
- diskontinuierliche elektromagnetische Antriebe

### Kontinuierliche elektromagnetische Antriebe

- Beschleunigung durch das **Eigenmagnetfeld**  
Da ein Plasma infolge der Ladungsträger elektrisch leitend ist, bewirkt ein in ihm fließender Strom ein Eigenmagnetfeld. Durch eine spezielle geometrische Anordnung von Anode und Kathode wird der Plasmastrom und das von ihm erzeugte Magnetfeld so gerichtet, dass die axiale *Lorentz*-Kraftkomponente das Plasma auf Ausströmgeschwindigkeit beschleunigt.
- Beschleunigung in gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldern (**Faraday-Beschleuniger**)  
Das in einer Lichtbogenbrennkammer erzeugte Plasma wird zunächst durch eine Düse expandiert (elektrothermisches Triebwerk). Anschließend durchläuft der Strahl ein System von Segmentelektroden und senkrecht dazu angeordneten Magnetspulen (Abb.5.5). Die Wechselwirkung der vorhandenen Felder bewirkt dann die beschleunigende *Lorentz*-Kraft. Der Gesamtschub setzt sich additiv aus dem elektrothermischen und elektromagnetischen Schub zusammen.

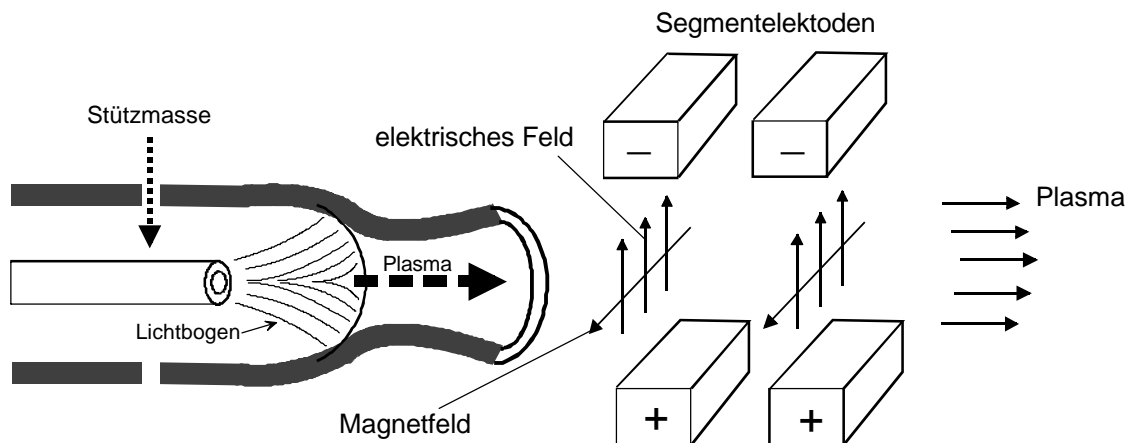


Abbildung 5.5: Faraday-Beschleuniger

- Beschleunigung in überlagerten elektrischen und magnetischen Feldern  
(**Hall-Strom-Beschleuniger**)

Diese Beschleuniger bestehen aus einer zylindrischen Anode, in deren Achse sich eine stabförmige Kathode befindet. Das zwischen Kathode und Anode angelegte elektrische Feld verläuft annähernd radial. Um den Anodenzyylinder sind Magnetspulen angeordnet. Die Axialkomponente des Magnetfeldes und das radiale elektrische Feld induzieren eine azimuthale Stromdichte, die durch Wechselwirkung mit der radialen Komponente des Magnetfeldes eine *Lorentz*-Kraft erzeugt, die das Plasma in axialer Richtung beschleunigt. Experimentell wurden spezifische Impulse von 5000 s nachgewiesen.

### Diskontinuierliche elektromagnetische Antriebe

Bei dieser Antriebsart werden Plasmapulse in sehr kurzen Zeitintervallen (1000-10000 Hz) erzeugt und beschleunigt. Die in einem Kondensator gespeicherte elektrische Energie wird einem Elektrodenpaar oder einer Spule zugeführt. Während der Entladung des Kondensators fließt kurzzeitig ein zeitlich stark veränderlicher Strom. Dieser wiederum ruft ein zeitlich veränderliches Magnetfeld hervor. Die Ströme im Plasma treten mit dem Magnetfeld in Wechselwirkung. Hieraus ergibt sich die *Lorentz*-Kraft, die das Plasma beschleunigt.

Eine sehr einfache Art des pulsierenden Plasmabeschleunigers stellt das Leitschienenantrieb dar. Zwischen den beiden Schienen wird ein Lichtbogen erzeugt (Abb.5.6). Bei der Entladung des Kondensators durch den Bogen fließt Strom durch die Leitschienen. Um die auf diese Weise entstandene Stromschleife entwickelt sich ein Magnetfeld, das in der Schleife wesentlich stärker ist als außerhalb. Hierdurch wirkt auf das Plasma eine Beschleunigungskraft in Richtung der freien Enden der Leitschienen. Auf diese Weise werden spezifische Impulse zwischen 1000 und 4000 s erzielt.

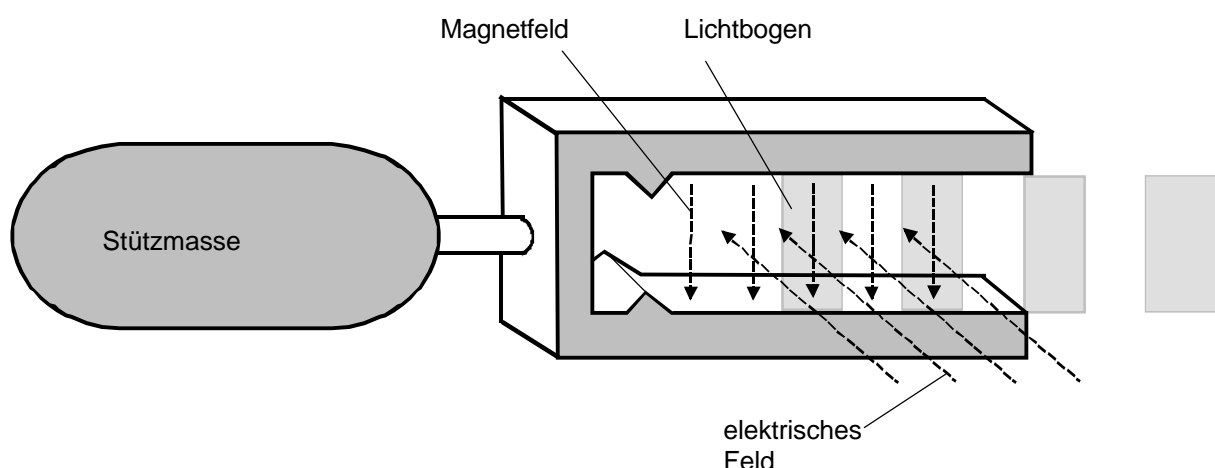


Abbildung 5.6: Leitschienen-Triebwerk

## 5.4 Exotische Raketenantriebe

Als exotische Raketenantriebe können all diejenigen Triebwerksentwürfe bezeichnet werden, deren praktische Anwendung in naher Zukunft nicht zu realisieren sein wird. Obwohl auch unter den bereits beschriebenen Triebwerksarten zweifellos ein großer Teil als „zukünftig“ bezeichnet werden kann, handelt es sich jedoch um Antriebe, deren theoretische Grundlagen bereits erarbeitet sind und deren praktische Realisierung nur eine Frage der Zeit sein wird. Die exotischen Antriebe hingegen beruhen zum Teil auf hypothetischen Überlegungen, deren praktische Anwendung außerhalb der heute absehbaren Entwicklung liegt. Nachstehend werden diejenigen Antriebsarten kurz geschildert, deren Verwirklichung zumindest physikalisch möglich erscheint.

### Sonnensegel

Neben der Verwendung der Strahlungsenergie der Sonne in Solarzellen wird die Möglichkeit diskutiert, den Strahlungsdruck der von der Sonne ausgesandten Photonen mit Hilfe von großflächigen Sonnensegeln zu nutzen. Auf Sonnensegel wirken in Erdnähe folgender Schub pro Segelfläche (verspiegelt):

$$\frac{F}{A} = \frac{2}{c} \cdot S = 0,9 \cdot 10^{-5} \quad \left[ \frac{N}{m^2} \right] \quad (5.18)$$

$$S = \text{Solarkonstante bei Abstand Erde-Sonne } 1,395 \text{ kW/m}^2 \\ c = \text{Lichtgeschwindigkeit}$$

### Kernfusionsantriebe

Die Kernfusion setzt im Vergleich zur Kernfission (Kernspaltung) mehr Energie frei, doch ist eine kontrollierbare Kernfusion heute noch nicht möglich. Die Anwendung einer regelbaren Kernfusion könnte die Vorteile elektrischer Antriebe (hohe Strahlgeschwindigkeit) und nuklearthermischer Antriebe (hoher Massendurchsatz) ideal verbinden. Bei der Kernfusion werden Wasserstoffatome bei sehr hohen Temperaturen zu einem schwereren Kern (Heliumatom) zusammengefügt. Der bei dieser Reaktion entstehende Massendefekt wird in thermische Energie umgesetzt. Am geeignetsten für diesen Vorgang erscheinen derzeit die Reaktionen von schweren Wasserstoffkernen (Deuterium oder Tritium). Die kontrollierbare Kernfusion setzt die Handhabung von Deuterium- und Tritiumgemischen bei einer Temperatur mehreren Millionen Kelvin voraus. Die Beherrschung solcher extremer Temperaturen ist jedoch in naher Zukunft nicht möglich.

## Nukleare Pulsantriebe

Die Spaltungsenergie von Reaktorbrennstoffen wird in nuklearthermischen Triebwerken aufgrund der unzureichenden Materialfestigkeit bei hohen Temperaturen nur zu einem Bruchteil genutzt. Deshalb wurden Vorschläge ausgearbeitet, die Energie, die bei atomaren Explosionen frei wird, zum Antrieb von Raumfahrzeugen zu nutzen. Nachdem es experimentell gelungen war, Atombomben mit nur 10t TNT-Wirkung zu zünden, besteht die Möglichkeit, einen pulsierenden Atomantrieb zu entwickeln. Grundsätzlich sind zwei Methoden denkbar:

- Zündung der Bomben in einer Explosionskammer und Aufheizung von Stützmasse (z.B. Wasser)
- Zündung der Bomben hinter dem Raumfahrzeug und Übertragung des Explosionsdrucks mittels gefederter Prallplatten auf das Fahrzeug.

In den USA wurden Untersuchungen auf dem Gebiet der pulsierenden Kernantriebe vorgenommen. Das am weitesten fortgeschrittene Projekt lief unter der Bezeichnung *Orion*. Das Problem der radioaktiven Verseuchung schien jedoch nicht lösbar, wodurch es höchst unwahrscheinlich ist, dass ein solcher Antrieb je realisiert wird.

## 6 Aufstiegsbahnen

### 6.1 Einleitung

Die Flugmechanik von Raumfahrzeugen ist verknüpft mit verschiedenen Aufstiegsmethoden, und einer Anzahl von Parametern, wie: Energieanforderung, Schubprogramm, Stufenzahl, Sichtbarkeit während des Aufstiegs und Flugzeit. Da in der Raketentechnik die Antriebsenergie begrenzt ist, besteht die Forderung der Minimierung des gesamten Energiebedarfs für die geplante Mission. Einen entscheidenden Einfluss auf den Energiebedarf hat die Wahl der Aufstiegsbahn. Im Allgemeinen lassen sich drei Arten des Aufstiegs (vgl. Abb.6.1) unterscheiden:

- Aufstieg mit Freiflugphase. Nach einer Anfangsbeschleunigung durch die Startstufe, erreicht die Rakete im Freiflug den Gipfelpunkt. Jetzt wird die Nutzlast durch einen zweiten Antriebsimpuls auf die geforderte Orbitalgeschwindigkeit beschleunigt, bevor sie auf die Erde zurückfällt. Die Stabilität des Raumfahrzeuges wird während der Freiflugphase durch Rotation um die Längsachse oder durch Steuerdüsen aufrechterhalten.
- Aufstieg ohne Freiflugphase. Große Raketen mit hohen Anforderungen an Präzision werden in der Regel ohne Schubunterbrechung in eine niedrigere Kreisbahn geschossen oder auf Fluchtgeschwindigkeit beschleunigt. Die Steuerung und Lagekontrolle erfolgt durch das Steuersystem vom Start bis zur Bahninjektion. Die Brennschlussdaten des Raumfahrzeuges sind dann identisch mit den Bahndaten des Zielorbits.
- Aufstieg über eine *Hohmann*-Übergangselipse. Das Raumfahrzeug wird zunächst ohne Schubunterbrechung in ein LEO oder GTO geschossen. Durch einen tangentialen Antriebsimpuls wird die Nutzlast zum berechneten Zeitpunkt auf die Perigäumsgeschwindigkeit der Übergangselipse beschleunigt. Nach dem Aufstieg entlang der *Hohmann*-Bahn erfolgt im Apogäum ein zweiter Impuls zur Beschleunigung auf die Kreisbahngeschwindigkeit des Zielorbits.

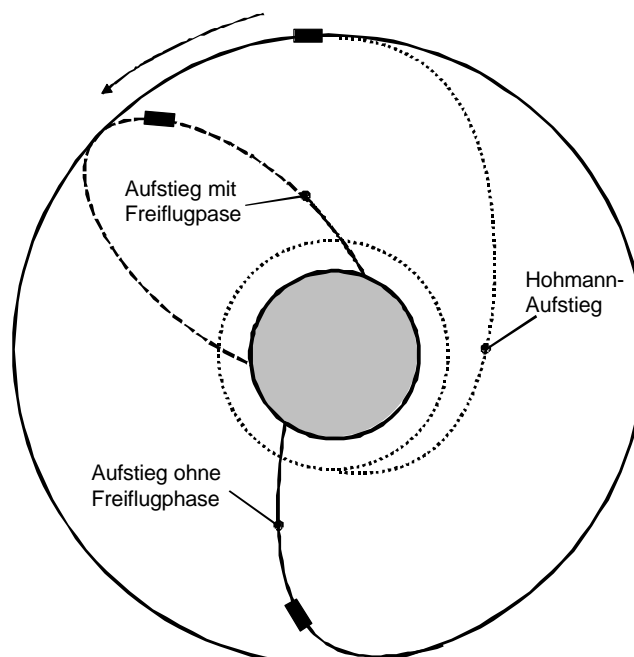


Abb.6.1: Aufstiegsbahnen

## 6.2 Bewegungsgleichungen angetriebener Aufstiegsbahnen

Die folgenden dargestellten Lösungsansätze dienen lediglich der Abschätzung und sind durch die getroffenen Vereinfachungen zur exakten Bahnbeschreibung von Raumflugkörpern nicht hinreichend.

### Bewegungsgleichungen

Zur vollständigen Beschreibung der Bewegung eines Raumfahrzeuges sind 6 skalare Gleichungen notwendig 3 Gleichungen zur Bestimmung der Bahn des Schwerpunktes (Bewegungsgleichungen) und weitere 3 Gleichungen zur Beschreibung der Rotation (Momentengleichungen). Die auf das Fahrzeug einwirkenden Kräfte sind der Schub  $F$ , die Gravitationskraft  $g$ , der Widerstandskraft  $D$  und die Auftriebskraft  $L$ . Kräfte die nicht am Schwerpunkt angreifen erzeugen Momente, darunter aerodynamische Kräfte und Steuermomente. Die Lösung der 6 Gleichungen erfolgt mit Hilfe numerischen Methoden. Nachfolgend wird ein vereinfachtes und idealisiertes Modell beschrieben, das für erste Abschätzungen geeignet ist [7]. Unter der Voraussetzung einer ebenen Aufstiegsbahn und das Fahrzeug als Massepunkt betrachtend, verringert sich die Anzahl der Gleichungen von 6 auf 2. In Polarkoordinaten beschrieben lauten diese:

$$\text{radial:} \quad \ddot{r} - r \cdot \dot{\mathbf{j}}^2 = -g + \frac{F_r}{m} + \frac{D_r}{m} + \frac{L_r}{m} \quad (6.1)$$

$$\text{azimutal:} \quad r \cdot \dot{\mathbf{j}} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \mathbf{j} = \frac{F_j}{m} + \frac{D_j}{m} + \frac{L_j}{m} \quad (6.2)$$

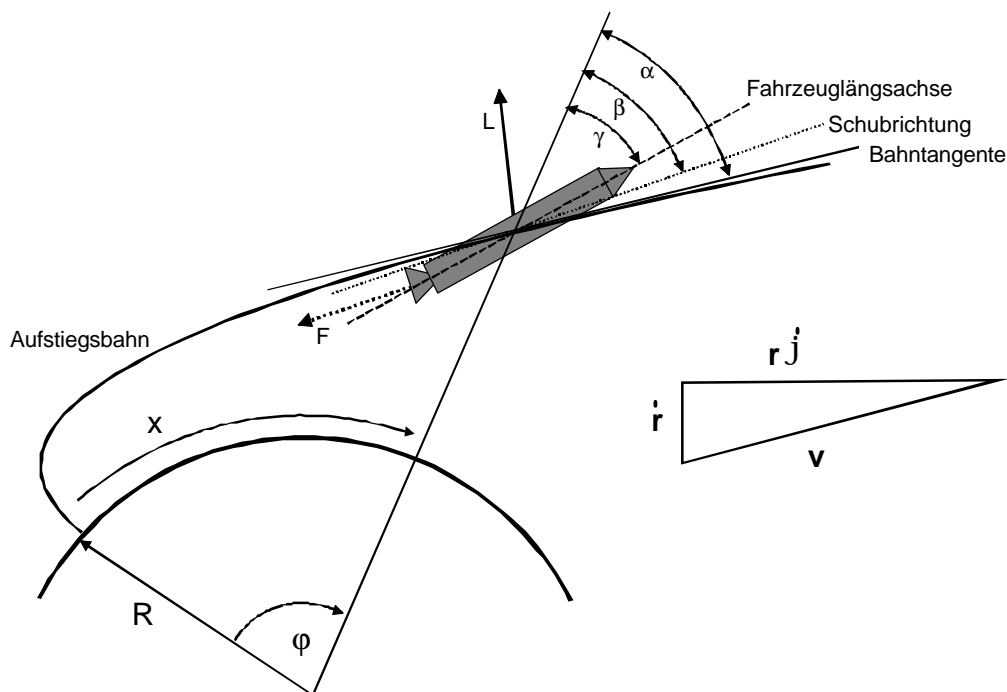


Abb.6.2: Parameter der Aufstiegsbahn

## Winkel, Bahnebene und Gravitation

Am Schwerpunkt des Fahrzeugs, treten folgende Winkel auf:

- $\alpha$  legt die Neigung der Tangente an die Flugbahn fest.
- $\beta$  definiert die Richtung, in der der Schub des Antriebs wirkt.
- $\gamma$  ist der Winkel zur Fahrzeuglängsachse.

Die Abnahme der Gravitation mit zunehmender Entfernung muss, insbesondere für größere Höhen, beachtet werden, wie folgende Vergleichsrechnung zeigt:

Näherung:  $g = g_0$ , weil  $h \ll R$

$$\text{Abnahme mit der Höhe: } g = g \frac{M}{r^2} = g \frac{M}{(R+h)^2} = g \frac{M}{R^2 \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} \approx g_0 \left(1 - 2 \frac{h}{R}\right)$$

Eingesetzt mit Gravitationskonstante  $g = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$

Erdmasse  $M = 5.97 \cdot 10^{24} kg$

Erdradius  $R = 6.37 \cdot 10^6 m$

Beispiele:  $200 \text{ km} \left(1 - \frac{2 \cdot 200}{6400}\right) = 1 - \frac{1}{16} \approx 6\%$   
 $400 \text{ km} \approx 11\%$

Da Aufstiegsstufen in aller Regel große Reichweiten erzielen erweist sich die Verwendung von Polarkoordinaten  $r, \varphi$  ist am günstigsten. In dieser Form werden Seitwärtsbewegungen während des Aufstiegs vernachlässigt, der Aufstieg findet also in einer Ebene statt, welche durch den Erdmittelpunkt und den Geschwindigkeitsvektor zu jedem Zeitpunkt nach dem Start definiert ist. Die Ebene bleibt dabei fest.

Für reale Aufstiege ist dreidimensional (also in Kugelkoordinaten) zu rechnen.

### 6.3 Kräfte am Raumfahrzeug

#### Schub

Aus Abbildung 6.2 ist ersichtlich, dass sich der Gesamtschub aus dem radialen und dem azimutalen Schubanteil zusammensetzt:

$$F_r = F \cdot \cos \mathbf{b} \quad (6.3)$$

$$F_j = F \cdot \sin \mathbf{b} \quad (6.4)$$

## Aerodynamische Kräfte

Die aerodynamischen Kräfte, die beim Aufstieg einer Rakete wirken, werden durch die Dichte der Luft, Windgeschwindigkeit, Fluggeschwindigkeit, Anstellwinkel und Größe des Fahrzeuges beeinflusst [12].

$$L = c_L \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot A_L \quad (6.5)$$

$$D = -c_D \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot A_D \quad (6.6)$$

$c_D$  = Widerstandsbeiwert  
 $c_L$  = Auftriebsbeiwert  
 $A_L, A_D$  = Bezugsflächen

Die Dichte  $\rho$  ist eine Funktion der Höhe und lässt sich näherungsweise mit der barometrischen Höhenformel beschreiben:

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{-h/H} \quad (6.7)$$

Skalenhöhe  $H = R \cdot \mathcal{A} / g_0$   
 Höhe über Erdoberfläche  $h$

Die aerodynamischen Kräfte lassen sich in ihre radialen und azimutalen Bestandteile zerlegen:

$$D_r = -D \cdot \cos \alpha \quad (6.8)$$

$$D_j = -D \cdot \sin \alpha \quad (6.9)$$

$$L_r = L \cdot \sin \alpha \quad (6.10)$$

$$L_j = -L \cdot \cos \alpha \quad (6.11)$$

## Erdbeschleunigung

Auf der Erdoberfläche beträgt der durchschnittliche Wert der Erdbeschleunigung:

$$g_0 = \frac{g \cdot M}{R_0^2} = 9.81 \left[ \frac{m}{s^2} \right] \quad (6.12)$$

$M$  = Erdmasse oder Zentralmasse  $5.97 \cdot 10^{24}$  kg  
 $R_0$  = mittlerer Erdradius 6371 km  
 $g$  =  $6.67 \cdot 10^{-11}$  m<sup>3</sup>/(kg s<sup>2</sup>)



In einer beliebigen Höhe  $h$  erhält man für die Erdbeschleunigung:

$$g = \mathbf{g} \cdot \frac{M}{r^2} = \mathbf{g} \cdot \frac{M}{(R_0 + h)^2} \quad (6.13)$$

Zur weiteren Berechnung sind folgende Annahmen erforderlich:

- $\alpha = \gamma$

Je größer der Anstellwinkel der Fahrzeuglängsachse gegenüber der Anströmung ist desto höher werden die Belastungen auf die Struktur. Daher wird angestrebt den Winkel  $\alpha$ - $\gamma$  möglichst klein zu halten [14]. Im Idealfall ist  $\alpha = \gamma$ .

- $\alpha = \beta$

Ein von  $\alpha$  verschiedener Winkel  $\beta$  fordert eine Auslenkung des Schubvektors aus der Flugbahn. Dies ist aus Gründen der Strukturbelastung jedoch nicht sinnvoll. Des Weiteren leistet die aus der Bahn weisende Schubkomponente keinen Vortrieb, was zu unnötigen Verlusten führt.

Aus den obigen Annahmen folgt, dass  $\alpha = \beta = \gamma$  ist. Diese Idealisierung ist aus den oben genannten Gründen sinnvoll.

Damit erhält man für die Gleichungen (6.1) und (6.2):

$$\ddot{r} - r \cdot \dot{\mathbf{j}}^2 = -g + \frac{F}{m} \cdot \cos \mathbf{a} - \frac{D}{m} \cdot \cos \mathbf{a} + \frac{L}{m} \cdot \sin \mathbf{a} \quad (6.14)$$

$$r \cdot \dot{\mathbf{j}} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\mathbf{j}} = \frac{F}{m} \cdot \sin \mathbf{a} - \frac{D}{m} \cdot \sin \mathbf{a} - \frac{L}{m} \cdot \cos \mathbf{a} \quad (6.15)$$

Aus Abbildung 6.2 und Hilfe grundlegender trigonometrischer Betrachtungen erhält man:

*Geschwindigkeitsgleichung:*  $v^2 = \dot{r}^2 + (r \cdot \dot{\mathbf{j}})^2 \quad (6.16)$

*Reichweitengleichung:*  $\dot{x} = r \cdot \dot{\mathbf{j}} = v \cdot \sin \mathbf{a} \quad (6.17)$

*Höhengleichung:*  $\dot{h} = \dot{r} = v \cdot \cos \mathbf{a} \quad (6.18)$

Durch Differentiation der Geschwindigkeitsgleichung (6.16) folgt:

$$v \cdot \dot{v} = \dot{r} \cdot \ddot{r} + r^2 \cdot \dot{\mathbf{j}} \cdot \dot{\mathbf{j}} + r \cdot \dot{r} \cdot \dot{\mathbf{j}}^2 \quad (6.19)$$

Die Beschleunigungsgleichung erhält man durch Einsetzen von (6.14), (6.15), (6.17) und (6.18) in (6.19):

$$\dot{v} = -g \cdot \cos \mathbf{a} + \frac{F}{m} - \frac{D}{m} \quad (6.20)$$

Das Differenzieren der Reichweitengleichung (6.17) führt zu:

$$r \cdot \dot{\mathbf{j}} + \dot{r} \cdot \mathbf{j} = \dot{v} \cdot \sin \mathbf{a} + v \cdot \dot{\mathbf{a}} \cdot \cos \mathbf{a} \quad (6.21)$$

Unter Verwendung der azimutalen Bewegungsgleichung (6.15), (6.16) und (6.20) gelangt man zur Winkelgleichung:

$$v \cdot \dot{\mathbf{a}} = \left( g - \frac{v^2}{r} \right) \cdot \sin \mathbf{a} - \frac{L}{m} \quad (6.22)$$

Die Gleichungen (6.20) und (6.22) stellen ein System von zwei gekoppelten, nicht linearen, gewöhnlichen Differentialgleichungen dar, deren analytische Lösung bislang nicht gelungen ist. Mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes kann jedoch eine Näherungslösung erzielt werden. Für die Erfüllung einer Mission bedeutet die Lösung des DGL-Systems gleichzeitig die Lösung eines Randwertproblems, da die Anfangs- und Endbedingungen von  $v$  und  $\alpha$  erfüllt werden müssen.

## 6.4 Integration der Differentialgleichungen

### Integration der Winkelgleichung

Potenzreihenansatz für  $\alpha$ :

$$\cos \mathbf{a} = \sum_{i=0}^{\infty} C_i^* \cdot \left( \frac{t}{T} \right)^i \quad (6.23)$$

$$\sin \mathbf{a} = \sum_{i=0}^{\infty} S_i^* \cdot \left( \frac{t}{T} \right)^i \quad (6.24)$$

mit  $t = 0$  beim Start und  $t = T$  bei Brennschluss.

Die Koeffizienten des Potenzreihenansatzes werden aus den vorgegebenen Randbedingungen bestimmt. Zur vollständigen Beschreibung der Aufstiegsbahn müssten zur Bestimmung der Konstanten  $C_i^*$  und  $S_i^*$  eine unendliche Anzahl von Randbedingungen gefunden werden. Zur Bestimmung von  $\mathbf{a}$ ,  $\dot{\mathbf{a}}$  und  $\ddot{\mathbf{a}}$  bei Start und Brennschluss genügen sechs Bedingungen:  $0 \leq i \leq 5$

Für den Start gilt:  $t = 0$ ,  $\alpha_0 = 0$ ,  $\dot{\mathbf{a}}_0 = 0$  und  $\ddot{\mathbf{a}}_0 = 0$

Für den Brennschluss gilt:  $T = 1$ ,  $\mathbf{d} = \mathbf{a}_E$ ,  $\dot{\mathbf{d}} = \dot{\mathbf{a}}_E$ , und  $\ddot{\mathbf{d}} = \ddot{\mathbf{a}}_E$

$\mathbf{d}$  steht für die geforderten Endgrößen, die durch die Missionsaufgabe bestimmt werden (z.B.  $\delta = 45^\circ$  für die maximale Reichweite von Kurzstreckenraketen oder  $\delta = 90^\circ$  für den Orbit).

Aus den Startbedingungen  $t = 0$  und  $\alpha_0 = 0$  folgt:  $C_0^* = 1$  und  $S_0^* = 0$ .

Aus den Bedingungen bei Brennschluss  $t = T$  und  $\alpha_E = \delta$  ergibt sich:

$$\cos \mathbf{d} = 1 + \sum_{i=1}^5 C_i \cdot \left(\frac{t}{T}\right)^i \quad (6.25)$$

Um den Rechengang zu vereinfachen, führt man neue  $C_i$ -Werte ein, sodass gilt:

$$\sum_{i=1}^5 C_i = 1$$

Dadurch kann man nun schreiben:

$$\cos \mathbf{a} = 1 - (1 - \cos \mathbf{d}) \cdot \sum_{i=1}^5 C_i \cdot \left(\frac{t}{T}\right)^i \quad (6.26)$$

Bei analoger Vorgehensweise erhält man für  $\sin \alpha$ :

$$\sin \mathbf{a} = \sin \mathbf{d} \cdot \sum_{i=1}^5 S_i \cdot \left(\frac{t}{T}\right)^i \quad (6.27)$$

Zur Bestimmung der Konstanten  $C_i$  und  $S_i$  werden die Gleichungen (6.26) und (6.27) zweimal differenziert. Zunächst folgt die Differenzierung von (6.26):

$$\dot{\mathbf{a}} \cdot \sin \mathbf{a} = (1 - \cos \mathbf{d}) \cdot \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^5 i \cdot C_i \cdot \left(\frac{t}{T}\right)^{i-1} \quad (6.28)$$

Zur Zeit  $t = 0$  ist  $\dot{\mathbf{a}}_0 = 0$  und somit  $C_1 = 0$

$$\dot{\mathbf{a}}^2 \cdot \cos \mathbf{a} + \ddot{\mathbf{a}} \cdot \sin \mathbf{a} = (1 - \cos \mathbf{d}) \cdot \frac{1}{T^2} \cdot \sum_{i=2}^5 i \cdot (i-1) \cdot C_i \cdot \left(\frac{t}{T}\right)^{i-2} \quad (6.29)$$

Zur Zeit  $t = 0$  ist  $\sin \mathbf{a} = 0$  und  $\dot{\mathbf{a}} = 0$ , daraus folgt  $C_2 = 0$

Damit kann man für Gleichung (6.26) schreiben:

$$\cos \alpha = 1 - (1 - \cos d) \cdot \left[ C_3 \cdot \left( \frac{t}{T} \right)^3 + C_4 \cdot \left( \frac{t}{T} \right)^4 + C_5 \cdot \left( \frac{t}{T} \right)^5 \right] \quad (6.30)$$

Mit  $\alpha = \delta$  folgt bei Brennschluss  $t = T$  aus der Gleichung (6.28) nach Umformung:

$$3 \cdot C_3 + 4 \cdot C_4 + 5 \cdot C_5 = \frac{\sin d}{1 - \cos d} \cdot T \cdot \dot{d} = K_2 \quad (6.31)$$

Aus  $\ddot{\alpha} = \ddot{d}$  folgt aus Gleichung (6.29):

$$3 \cdot C_3 + 6 \cdot C_4 + 10 \cdot C_5 = \frac{1}{2} \cdot T^2 \cdot \left[ \frac{\cos d}{1 - \cos d} \cdot \dot{d}^2 + \frac{\sin d}{1 - \cos d} \cdot \ddot{d} \right] = K_3 \quad (6.32)$$

Mit  $C_3 + C_4 + C_5 = 1$  erhält man aus den Gleichungen (6.28) und (6.29):

$$\begin{aligned} C_3 &= 10 - 4 \cdot K_2 + K_3 \\ C_4 &= -15 + 7 \cdot K_2 - 2 \cdot K_3 \\ C_5 &= 6 - 3 \cdot K_2 + K_3 \end{aligned} \quad (6.33)$$

Damit sind die Konstanten  $C_i$  bestimmt. Nach analoger Vorgehensweise für den Ansatz von  $\sin \alpha$  aus Gleichung (6.27) ergeben sich die Konstanten  $S_i$ :

$$3 \cdot S_3 + 4 \cdot S_4 + 5 \cdot S_5 = \frac{\cos d}{\sin d} \cdot T \cdot \dot{d} = K_4 \quad (6.34)$$

$$3 \cdot S_3 + 6 \cdot S_4 + 10 \cdot S_5 = \frac{1}{2} \cdot T^2 \cdot \left[ \frac{\cos d}{\sin d} \cdot \dot{d}^2 - \ddot{d} \right] = K_5 \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} S_3 &= 10 - 4 \cdot K_4 + K_5 \\ S_4 &= -15 + 7 \cdot K_4 - 2 \cdot K_5 \\ S_5 &= 6 - 3 \cdot K_4 + K_5 \end{aligned} \quad (6.36)$$

Damit erhält man ein lösbares Gleichungssystem und kann die einzelnen Konstanten bestimmen und die Potenzreihenansätze sind für die anfangs gestellten Bedingungen bekannt.

## Integration der Beschleunigungsgleichung

Unter Vernachlässigung der aerodynamischen Kräfte lautet die Beschleunigungsgleichung (6.20):

$$\dot{v} = -g \cdot \cos \mathbf{a} + \frac{F}{m} \quad (6.37)$$

Diese Vereinfachung darf für Großraketen in erster Näherung getroffen werden. Der Geschwindigkeits- und Widerstandsverlust beträgt etwa 200 m/s für den Aufstieg. Hingegen ist der Einfluss bei kleineren Geräten von Bedeutung. Aus der Gleichung (6.37) folgt unter Verwendung von (6.26):

$$\dot{v} = -g \cdot \left[ 1 - (1 - \cos \mathbf{d}) \cdot \sum_{i=3}^5 C_i \cdot \left( \frac{t}{T} \right)^i \right] - \frac{\dot{m} \cdot c}{m} \quad (6.38)$$

Mit:  $F = -\dot{m} \cdot c$

Integriert man zwischen den Grenzen  $t_0 = 0$  und  $T$ , dann gilt allgemein für eine Stufenrakete und unter der Annahme, dass während der Zeit  $t$  die Stufe  $k$  arbeitet und zudem  $v_0 = 0$  ist, folgende Gleichung:

$$v = \sum_{i=1}^k c_i \cdot \ln \left( \frac{m_{0i}}{m_{bi}} \right) - g_0 \cdot T \left[ \frac{t}{T} - (1 - \cos \mathbf{d}) \cdot \sum_{i=3}^5 \frac{1}{i+1} \cdot C_i \cdot \left( \frac{t}{T} \right)^{i+1} \right] \quad (6.39)$$

Der erste Term der Gleichung (6.39) ist der ideale Geschwindigkeitsgewinn der Rakete. Den zweiten Term bezeichnet man als Schwereverlust  $\Delta v_G$ . Bei Brennschluss  $t = T$  gilt:

$$\Delta v_G = g_0 \cdot T \left[ 1 - (1 - \cos \mathbf{d}) \cdot \sum_{i=3}^5 \frac{C_i}{i+1} \right] \quad (6.40)$$

Für den senkrechten Aufstieg  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_b = 0$  gilt:

$$\Delta v_G = g_0 \cdot T \quad (6.41)$$

Die Integration der Höhen- und Reichweitengleichung ist von *H.O.Ruppe* in „*Introduction to Astronautics*“ [12] ausführlich beschrieben.

## 6.5 Verluste und Gewinne

### Verluste durch Gravitation und Luftwiderstand

An folgendem Beispiel wird veranschaulicht, wie man mit Hilfe der Bewegungsgleichungen die beim Aufstieg entstehenden Verluste abschätzen kann. Aufgrund der getroffenen Vereinfachungen wird jedoch nur eine Näherungslösung behandelt.

Unter der Annahme, dass es sich um einen senkrechten Aufstieg handelt, entfallen sämtliche Anteile des Auftriebs und der Schub ist in Fahrzeuggängsachse gerichtet, die wiederum auf der Aufstiegsbahn liegt. Damit folgen,

$$L = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{a} = \mathbf{g}$$

sowie:

$$\alpha = \text{const.} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\alpha} = 0$$

Man erhält somit für die Winkelgleichung (6.22):

$$\left( g - \frac{v^2}{r} \right) \cdot \sin \alpha = 0 \quad (6.42)$$

Unter der Voraussetzung, dass der Aufstieg senkrecht in eine niedere Kreisbahn erfolgt, entfällt die Winkelgleichung, denn:

$$\sin \alpha = 0 \quad \text{für} \quad \alpha = 0$$

$$g - \frac{v^2}{r} = 0 \quad \text{mit} \quad v = \sqrt{g \cdot r}$$

Setzt man die verbleibenden Kräfte in die Beschleunigungsgleichung (6.20), so erhält man:

$$\dot{v} = -g \cdot \cos \alpha - \frac{\dot{m} \cdot c}{m} - c_D \cdot \frac{r}{2} \cdot v^2 \cdot \frac{A}{m} \quad (6.43)$$

Durch Integration über

$$v = \int_0^T \dot{v} \cdot dt$$

ergibt sich:

$$v = c \cdot \ln \frac{m_0}{m_b} - \int_0^T \left( g \cdot \cos \alpha + c_D \cdot \frac{r}{2} \cdot v^2 \cdot \frac{A}{m} \right) \cdot dt \quad (6.44)$$

Des Weiteren wird lediglich der zweite Term aus Gleichung (6.44) betrachtet und als Verlustintegral  $D$  bezeichnet.

$$\Delta = \int_0^s \frac{1}{v} \cdot \left( g \cdot \cos \alpha + c_D \cdot \frac{\mathbf{r}}{2} \cdot v^2 \cdot \frac{A}{m} \right) \cdot ds \quad \text{mit} \quad v = \frac{ds}{dt} \quad (6.45)$$

Mit dem trigonometrischen Zusammenhang von Strecke und Höhe folgt:

$$\Delta = \int_0^H \frac{1}{v} \cdot \left( g + c_D \cdot \frac{\mathbf{r}}{2} \cdot v^2 \cdot \frac{A}{m} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \right) \cdot dh \quad \text{mit} \quad ds = \frac{dh}{\cos \alpha} \quad (6.46)$$

Daraus wird ersichtlich, dass das Verlustintegral für den senkrechten Aufstieg  $\alpha = 0$  minimal ist. Jetzt wird nach der Geschwindigkeit  $v_{opt}$  gesucht für die das Verlustintegral minimal wird, d.h.:

$$\frac{d\Delta}{dh} \cdot \frac{d}{dh} = 0 \quad (6.47)$$

Daraus folgt:

$$-\frac{g}{v_{opt}^2} + c_D \cdot \frac{\mathbf{r}}{2} \cdot \frac{A}{m} = 0$$

bzw.:

$$m \cdot g = c_D \cdot \frac{\mathbf{r}}{2} \cdot v_{opt}^2 \cdot A \quad (6.48)$$

Das Verlustintegral ist damit wiederum minimal, wenn die Geschwindigkeit so groß gewählt wird, dass Luftwiderstand und Gravitationskraft gleich sind. Man erkennt, dass für einen Aufstieg mit minimalen Verlusten die optimale Geschwindigkeit möglichst schnell erreicht werden muss. Diese Bedingung ist in der Praxis nur bedingt erfüllbar, da durch die erforderliche hohe Beschleunigung Schaden an Mensch und Material auftreten würde.

## Gewinne durch Erdrotation und Anstieg des Druckschubs

- Einfluss der Erdrotation

Die Brennschlussgeschwindigkeit einer Rakete, die sich aus der Integration der Beschleunigungsgleichung (6.20) ergibt, ist auf ein terrestrisches Koordinatensystem bezogen. In diesem System ist die Erdrotation nicht berücksichtigt. Die Erde rotiert mit einer Winkelgeschwindigkeit von  $\omega = 7.2722 \cdot 10^{-5}$  rad/sec. Bei einem äquatorialen Erdradius von 6378 km beträgt dabei die Rotationsgeschwindigkeit:

$$v_{rot} = 465 \text{ m / sec}$$

Für eine Rakete, die in östlicher Richtung startet, ergibt sich somit ein Geschwindigkeitsgewinn. Dieser weicht allerdings je nach geographischer Breite des Startortes  $\Phi$  und Abweichung der Startrichtung von Osten  $\mathbf{j}$  von dem maximal erreichbaren Wert am Äquator ab. Der Näherungswert für den Geschwindigkeitsgewinn, bei dem die Coriolis-Kraft und die Zentrifugalkraft vernachlässigt sind, beträgt:

$$v_{rot} = 465 \cdot \cos \Phi \cdot \cos \mathbf{j} \quad (6.49)$$

- Einfluss der Erdatmosphäre

Mit zunehmender Höhe fällt der Umgebungsdruck  $p_a$ . Da die Ausströmgeschwindigkeit vom Druckverhältnis abhängt, steigt diese während des Aufstiegs kontinuierlich an und liefert einen Geschwindigkeitsgewinn (vgl. Kapitel 2.3).

$$c_{eff} = c + \frac{A}{\dot{m}} (p_e - p_a) \quad (2.9)$$

Man berücksichtige jedoch die in Kapitel 2 dargestellte Thematik der angepassten Düse, die im realen technischen Widerspruch zur obigen theoretisch physikalischen Lösung steht.



## 7 Grundlagen der Bahnmechanik / Keplergesetze

### 7.1 Koordinatensysteme

Um die Bewegung eines Raumfahrzeuges beschreiben zu können, ist die Festlegung der Position im Raum notwendig. Je nach Zweckmäßigkeit ist ein geeignetes Bezugssystem zu wählen. Die räumliche Orientierung der Koordinatensysteme kann durch Polarkoordinaten oder kartesische Koordinaten festgelegt werden. Die Beziehung zwischen beiden Koordinatensystemen ergibt sich aus Abbildung 7.1 wie folgt:

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos d \cdot \cos a \\ r \cdot \cos d \cdot \sin a \\ r \cdot \sin d \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

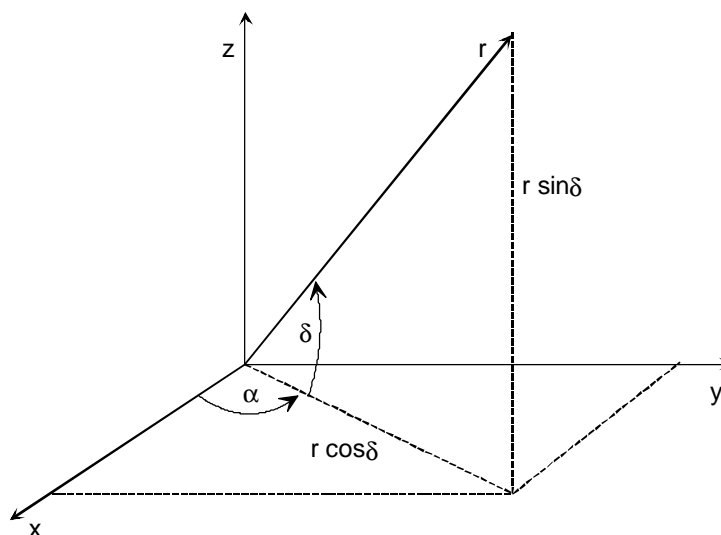


Abb.7.1: Polarkoordinaten

In Tabelle 7.1 sind die in der Raumfahrt relevanten Koordinatensysteme und deren Parameter aufgeführt.

#### Frühlingspunkt

Der Frühlingspunkt ist ein Fixpunkt an dem sich einige Systeme orientieren und liegt im Unendlichen. Er wird am 21.03. in Richtung der Sonne festgelegt (vgl. Abb.7.2).

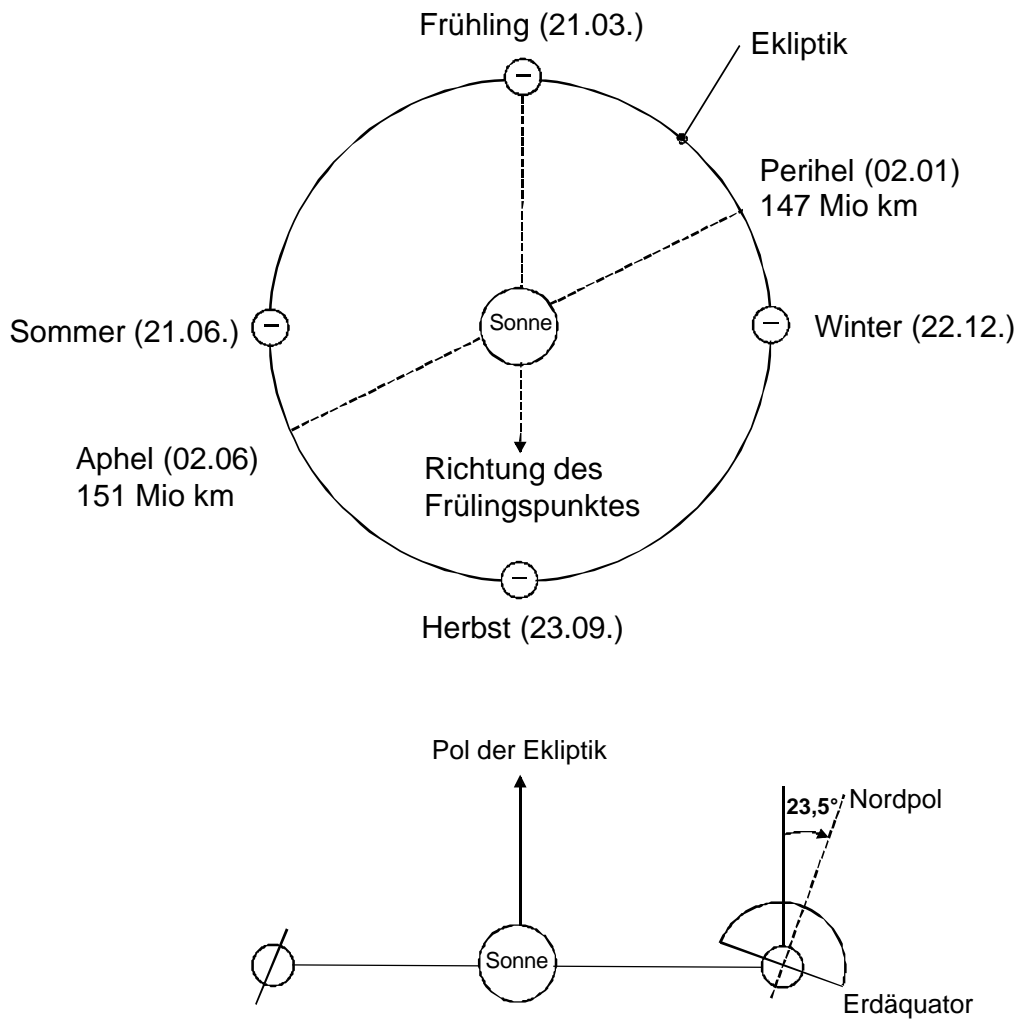
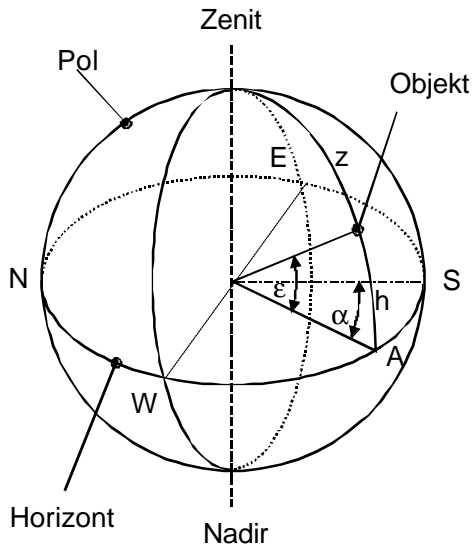


Abb.7.2: Frölingpunkt

Tabelle 7.1 Koordinatensysteme:

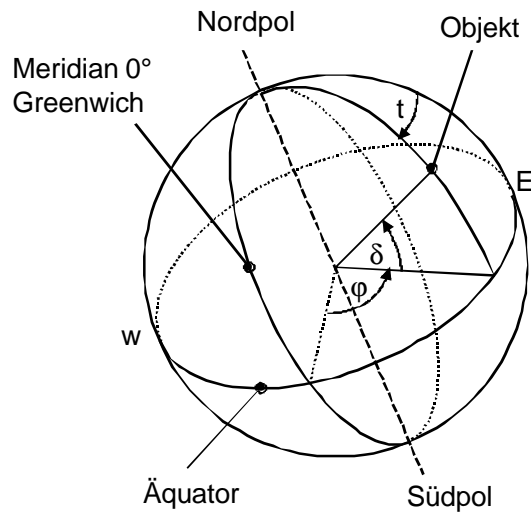
Bezugssystem	Grundebene und Pole	Zählung zwischen Grundebene und Pole	Ausgangspunkt und Richtung der Zählung	Koordinaten	Anwendung
Horizontsystem	Horizont Zenit, Nadir	Horizont zum Zenit $0^\circ+90^\circ$	Südpunkt über Westen im Bogenmaß	Höhe $h$ Azimut $A$ Zenitdistanz $z$ $z=90^\circ-h$	topozentrisch
Äquatorsystem inertial	Äquator Nord- und Südpol	Äquator zu den Polen $0^\circ+/-90^\circ$	Meridian über Westen im Zeitmaß	Stundenwinkel $t$ Deklination $\delta$	topozentrisch oder geozentrisch
Äquatorsystem rotierend	Äquator Nord- und Südpol	Äquator zu den Polen $0^\circ+/-90^\circ$	Frölingpunkt entgegen der Bewegung im Zeitmaß	Rektaszension $\Omega$ Deklination $\delta$	geozentrisch oder heliozentrisch
Eklptiksystem	Eklptik Nord- und Südpol der Eklptik	Eklptik zu den Polen $0^\circ+/-90^\circ$	Frölingpunkt mit zunehmender Rektaszension im Bogenmaß	Länge $\lambda$ Breite $\beta$	geozentrisch oder heliozentrisch

### Horizontsystem



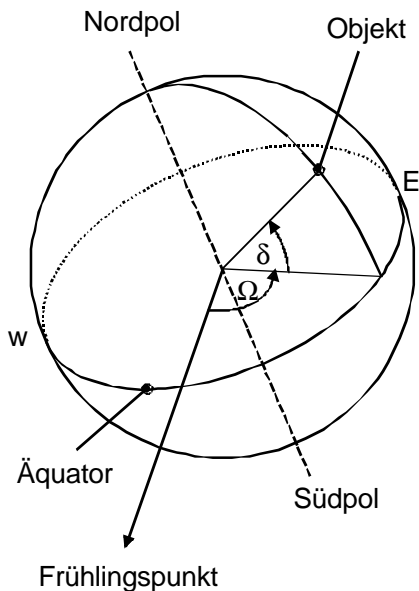
Parameter:  
 Elevation  $\epsilon$   
 Azimutalwinkel  $\alpha$   
 oder  
 $h, A$  im Bogenmaß

### Äquatorsystem relativ



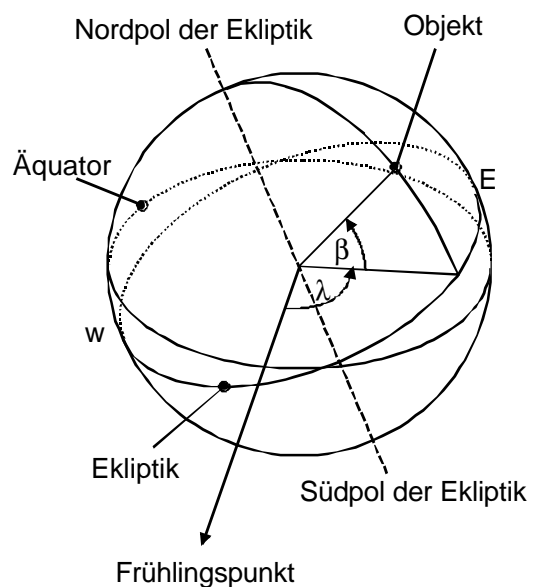
Parameter:  
 $90^\circ N < \delta < 90^\circ S$   
 $180^\circ W < \varphi < 180^\circ E$   
 oder Stundenwinkel  $t$

### Äquatorsystem inertial



Parameter:  
 Rektaszension  $\Omega$   
 Deklination  $\delta$

### Ekliptiksystem



Parameter:  
 Länge  $\lambda$   
 Breite  $\beta$

Abb.7.3: Koordinatensysteme

## 7.2 Bahnelemente

Um die Geometrie einer Bahn im Raum zu bestimmen, sind fünf sog. Bahn- oder Keplerelemente notwendig:

- a:** **große Halbachse** (bestimmt auch die Umlaufzeit, siehe Keplergesetze Kapitel 7.4)
- e:** numerische **Exzentrizität** ( $= e/a$ )

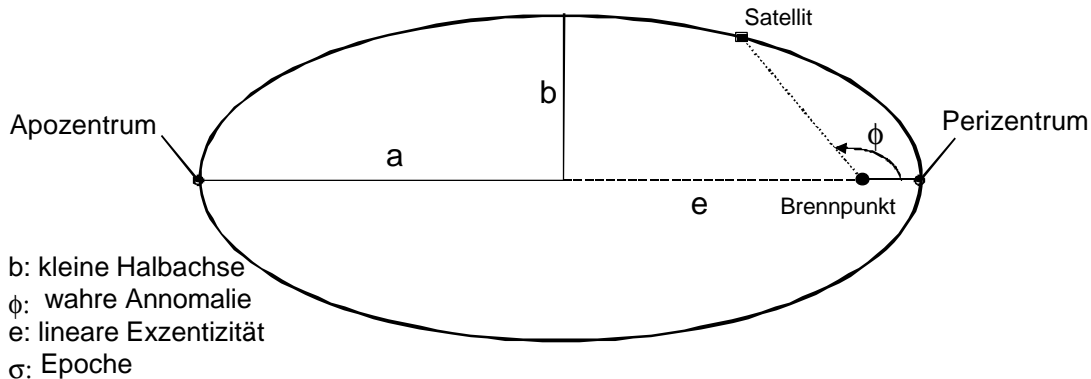


Abb. 7.4: Bahnparameter einer Ellipse

- i:** **Inklination** (= Winkel zwischen Äquator- und Bahnebene)
- W:** **Rektaszension** des aufsteigenden Knotens (= Winkel vom Frühlingspunkt zu dem Bahnpunkt, bei dem das Orbit die Äquatorebene nach Norden (= aufsteigend) durchdringt. Manchmal wird der Kürze wegen auch die engl. Abkürzung **RAAN** - „Right Ascension of Ascending Node“ benutzt)
- w:** **Argument des Perigäums** (= Winkel zw. Knotenlinie, also der Schnittgeraden aus Bahn- und Äquatorebene, und dem Perizentrum)

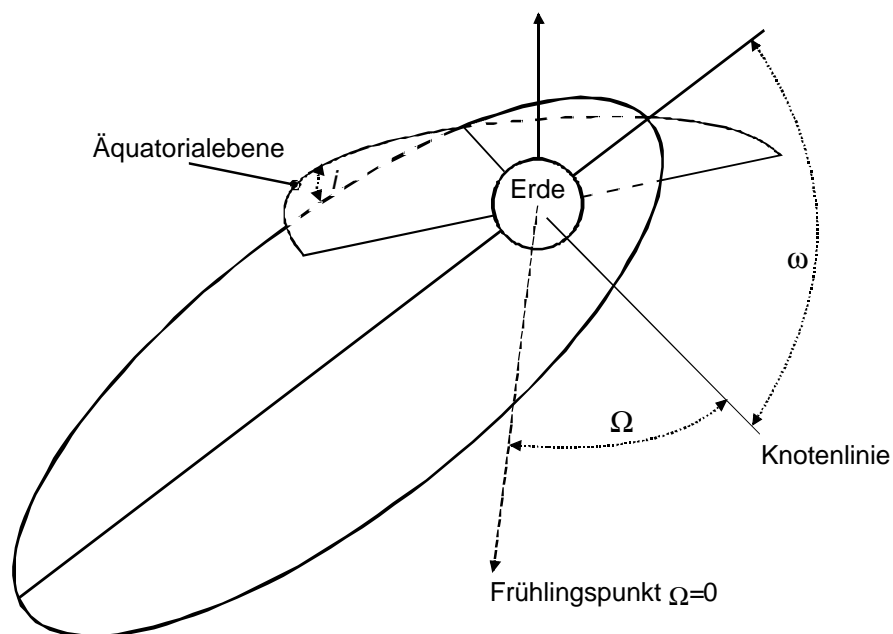


Abb. 7.5: Raumparameter

Zwei weitere Bahnelemente legen die Lage des Satelliten auf der Bahn im Raum fest. Dies ist zum einen die **Referenzzeit**  $T_0$ , also den Startpunkt der Betrachtung bzw. der Zeitpunkt, für den die Bahnelemente berechnet worden sind<sup>1</sup>, sowie zum anderen die **wahre Anomalie**  $F$ , also der Bahnwinkel (gemessen vom Perizentrum zum Satelliten, siehe Abb. 7.4). Meist gibt man die Referenzzeit für den Perizentrumsdurchgang an:

**s: Epoche** (= Zeitpunkt des Perigäumsdurchgangs, also  $\Phi=0$ )

Zusammenfassung:

Die große Halbachse  $a$  und die Exzentrizität  $\epsilon$  bestimmen die Größe und die Form der Bahn, die Inklination  $i$  und die Länge des aufsteigenden Knotens  $\Omega$  die Lage der Bahnebene zum Bezugssystem (vgl. Abb. 7.5). Durch den Winkel  $\omega$  ist die Lage der Bahn in ihrer Ebene eindeutig festgelegt. Den Bewegungsablauf bestimmt der Zeitpunkt  $\sigma$  des Periheldurchgangs (Epoche). Alle diese Parameter sind jedoch nur als konstant anzunehmen, solange die Massen als Punktmassen behandelt werden und man von einem Zweikörperproblem ausgeht.

### 7.3 Astronomische und bahnmechanische Begriffe

#### Zeitmessung

Die genaue Kenntnis des Zeitpunkts einer Positionsbestimmung ist ebenso wichtig, wie diese selbst. Als Einheit zur Zeitmessung bietet sich die tägliche scheinbare Bewegung des Sternenhimmels oder der Sonne an. In der Astronomie wird mit folgenden Zeiten gerechnet.

- **Sterntag**  
Die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen eines gegebenen Meridians durch den Frühlingspunkt wird als Sterntag bezeichnet. Er ist nur angenähert ein ideales Zeitmaß, denn die nicht konstante Erdrotation und der Einfluss der Nutation (siehe übernächste Seite) erfordern eine ständige Korrektur.
- **Wahrer Sonnentag**  
Ein wahrer Sonnentag entspricht der Zeit, die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kulminationen (Durchgänge) der Sonne durch den Ortsmeridian vergeht. Die Länge eines Sonnentages ändert sich aufgrund der ungleichmäßigen Bewegung der Erde in ihrer Bahn um die Sonne ständig. Für eine Zeitrechnung ist die Sonne deshalb nicht gut geeignet.
- **Mittlerer Sonnentag**  
Der mittlere Sonnentag entspricht dem Jahresdurchschnitt eines wahren Sonnentages und hat stets die Dauer von 24 Stunden. Der Beginn eines Tages wird 12 Stunden vor dem Meridiandurchgang der Mittleren Sonne, zur Zeit der unteren Kulmination, angenommen.

Die Zeitdifferenz zwischen mittlerer Sonnenzeit und wahrer Sonnenzeit wird durch die Zeitgleichung ausgedrückt:

---

<sup>1</sup> Insbesondere bei niedrig fliegenden Satelliten ändern sich die Bahnelemente aufgrund von Störeinflüssen wie z.B. Reibung, etc. ständig. Die jeweils aktuellen Daten können z.B. über das Internet abgefragt werden (als sog. „Two-Line Element Sets“, siehe z.B. NORAD <http://celestrak.com/NORAD/elements/>)

### Zeitgleichung = Wahre Zeit - Mittlere Zeit

Die Extremwerte werden am 12. Februar mit -14min 24s und am 03. November mit +16min 21s erreicht, d.h. die wahre Sonne wandert am 12.02. später durch den Meridian. Die mittlere Sonne rückt relativ zum Frühlingspunkt täglich um 0.99 Winkelgrade von Westen nach Osten im Äquator weiter. Der mittlere Sonnentag ist deshalb um 3min 56s länger als der Sterntag. Es entsprechen 365,2422 mittlere Sonnentage 366,2422 Sterntage. Sternzeit, mittlere und wahre Sonnenzeit sind Ortszeiten, da ihr Stundenwinkel vom Ortsmeridian aus gezählt wird. Für eine einheitliche Zeitangabe wird die mittlere Sonnenzeit von Greenwich (Nullmeridian) als Weltzeit oder Universalzeit (UTC) bezeichnet.

Aufgrund astronomischer Beobachtungen, durchgeführt mit Atomuhren, wurde festgestellt, dass säkulare und periodische Schwankungen der Erdrotation eine Korrektur der Sternzeit und Weltzeit fordern. Zu diesem Zweck wurde 1960 eine konstante Zeiteinheit, die sogenannte Ephemeridenzeit (ET) eingeführt. Als Zeiteinheit gilt der 31556926te Teil des tropischen Jahres von 1900, was einer Sekunde entspricht. Die Zeitkorrektur

$$\Delta t = ET - UT$$

wird in Jahrbüchern veröffentlicht. Eine exakte Korrektur ist jedoch erst nachträglich möglich.

### Bahn der Erde um die Sonne

Die elliptische Bahn der Erde um die Sonne wird Ekliptik genannt. Hierbei beträgt der mittlere Abstand Erde-Sonne 149,598 Mio. km, der als 1 AE (astronomische Einheit) bezeichnet wird. Die Erde wandert mit einer mittleren Bahngeschwindigkeit von 29,78 km/s und rotiert mit einer mittleren äquatorialen Umfangsgeschwindigkeit von 465 m/s. Die Umlaufzeit (Tropisches Jahr) entspricht 365,2422 Tage.

### Bahn des Mondes um die Erde

Die Mondbahn ist nur schwach exzentrisch und ihre mittlere Entfernung von der Erde beträgt 384 400 km. Der Mond wandert mit einer Geschwindigkeit zwischen 1,11 und 0,95 km/s in 27,32 Tagen um die Erde. Dabei befindet er sich in einer „gebundenen“ Rotation (er übt also pro Umlauf um die Erde eine Eigendrehung um sich selbst aus, was zur Folge hat, dass er der Erde immer dieselbe Seite zeigt). Die Bahn ist um 5° gegen die Ekliptik geneigt und dreht sich in 18,6 Jahren einmal um diese. Die Rotationsachse des Mondes hat eine Neigung zur Senkrechten seiner Bahnebene von 6,7°.

### Form der Erde

Die Erde ist, durch die Abplattung der Pole bedingt, ein Rotationsellipsoid mit einem mittleren Radius von 6371 km. Der Bahnverlauf erster künstlicher Satelliten zeigte, dass die Erde nicht nur abgeplattet ist, sondern auch noch überlagernde Formveränderung hat, wodurch Teile der Oberfläche aus dem betrachteten Ellipsoidmodell hervorragen (positive Anomalie) oder dieses

unterlaufen (negative Anomalie). In hochgenauen Bahnmodellierungen müssen auch diese Anomalien berücksichtigt werden, um die Orbits genau vorhersagen zu können.

### Erdrotation

Die Erdabplattung und der Neigungswinkel der Erdachse gegen die Ekliptik bewirken, dass der sonnenseitige bzw. der mondseitige Teil des Äquatorwulstes stärker angezogen wird als der Abgewandte. Es entsteht ein Drehmoment, das seitens des Mondes zweimal monatlich verschwindet sobald die Mondbahn die Äquatorebene schneidet, seitens der Sonne zweimal jährlich wirkungslos wird, wenn die Gerade der sich schneidenden Äquatorebene und Ekliptikebene zur Sonne zeigt.

- Präzessionsbewegung

Das durch die Anziehungskraft der Sonne aufgebrachte Drehmoment bewirkt ein Ausweichen der Erdachse (Kreiselwirkung), wobei der Neigungswinkel zur Ekliptik ( $= 23,5^\circ$ ) aber erhalten bleibt. Die Erdachse dreht sich somit rückläufig zur Erdrotation in 25800 Jahren einmal entlang einer Kegeloberfläche. Diese Bewegung ist durch die elliptische Bahn der Erde und den Einfluss des Mondes nicht gleichförmig.

- Nutationsbewegung

Die Mondbahn ist um  $5^\circ$  gegen die Ekliptik geneigt. Das dadurch entstehende Drehmoment verursacht die Nutationsbewegung der Erdachse, welche die Präzession periodisch überlagert. Die durch die Erdachse beschriebene Kegeloberfläche erhält dadurch eine wellige Kontur mit einer Wellenlänge von 18,6 Jahren (vgl. Abb.7.6).

- Überlagerung

Die Erdrotation wird durch zwei sich überlagernde Drehungen beschrieben. Zum einen durch die tägliche Rotation um die Erdachse, zum anderen durch die monatliche Rotation um das Baryzentrum (gemeinsamer Schwerpunkt von Mond und Erde), das sich noch innerhalb der Erdkugel befindet.

### Gezeiteneffekt

Der Mond zieht das Wasser auf der ihm zugewandten Seite der Erde stärker an als auf der ihm abgewandten Seite. Alle Punkte von der Erde, die näher dem Mond sind, haben eine etwas größere Gravitationskraft als die auf der gegenüberliegenden Seite, siehe Abbildung 1. Da das Wasser sich aber leicht bewegen lässt, folgt sie der Kraftdifferenz und nähert sich dem Mond auf der dem Mond zugewandten Seite. Auf der abgewandten Seite zeigt die Kraftdifferenz in die andere Richtung, also vom Mond weg und es entsteht ein zweiter Flutberg, dazwischen liegen die Ebbetäler. Darum gibt es je zweimal Ebbe und Flut pro Tag.

In ähnlicher Weise wirkt auch die Sonne auf die Erde. Die Gezeiten, die von der Sonne verursacht werden, sind nur 40% der Gezeiten, die vom Mond verursacht werden. Diese zwei Wirkungen addieren sich bei Voll- und Neumond, sodass sie dann ihr Maximum erreichen (Springflut).

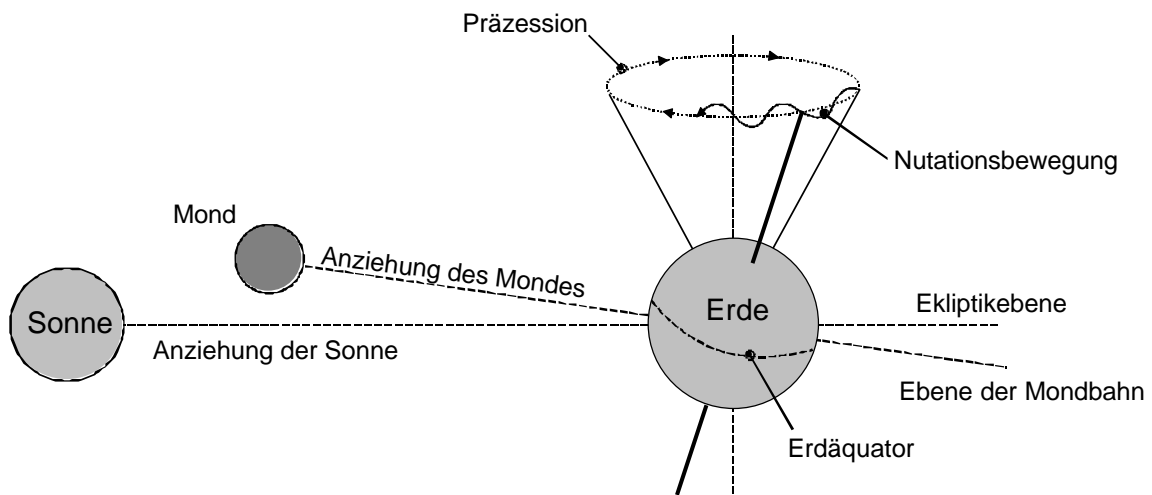


Abb.7.6: Bewegungen der Erdachse

Durch den Gezeiteneffekt verlangsamt sich die Erdrotation bei jeder Umdrehung um etwa  $5 \cdot 10^{-8}$ s, d.h. in 100 Jahren um 33s.



## 7.4 Die bahnmechanischen Gesetze nach Kepler

### Überblick

Die Bahnen von Himmelskörpern lassen sich näherungsweise durch die drei *Kepler-Gesetze* beschreiben. *Johannes Kepler (1571-1630)* hat diese Gesetze bereits 1609 in seinem Opus „*Astronomia nova*“ publiziert<sup>1</sup>.

#### **1. Gesetz: Die Gestalt der Bahn**

**Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.**

#### **2. Das Flächengesetz**

**Der Radiusvektor eines Planeten überstreicht in gleichen Zeiten der Größe nach gleiche Flächen.**

$$r^2 \cdot \dot{\mathbf{j}} = \text{const.} \quad (7.3)$$

#### **3. Gesetz der Umlaufzeiten**

**Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer großen Halbachsen (vgl.Abb.7.7).**

$$\left( \frac{T_1}{T_2} \right)^2 = \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^3 \quad (7.4)$$

Diese Formeln werden auch heute noch - 400 Jahre später - täglich in der Raumfahrt verwendet.

---

<sup>1</sup> Kopernikus, Kepler, Galilei und Newton standen damals aufgrund ihrer Forschung stets mit einem Bein auf dem Scheiterhaufen der Inquisition. Deshalb zog es z.B. Kopernikus vor, Teile seines Lebenswerkes („*De Revolutionibus Orbium*“) posthum zu veröffentlichen. Galileo schwor unter Androhung von Folter seinem „Irrglauben“ ab (→ „...und sie bewegt sich doch!“). 1979 (also 10 Jahre nach Apollo 11) schlug der Papst vorsichtig vor, die Verurteilung aufzuheben.

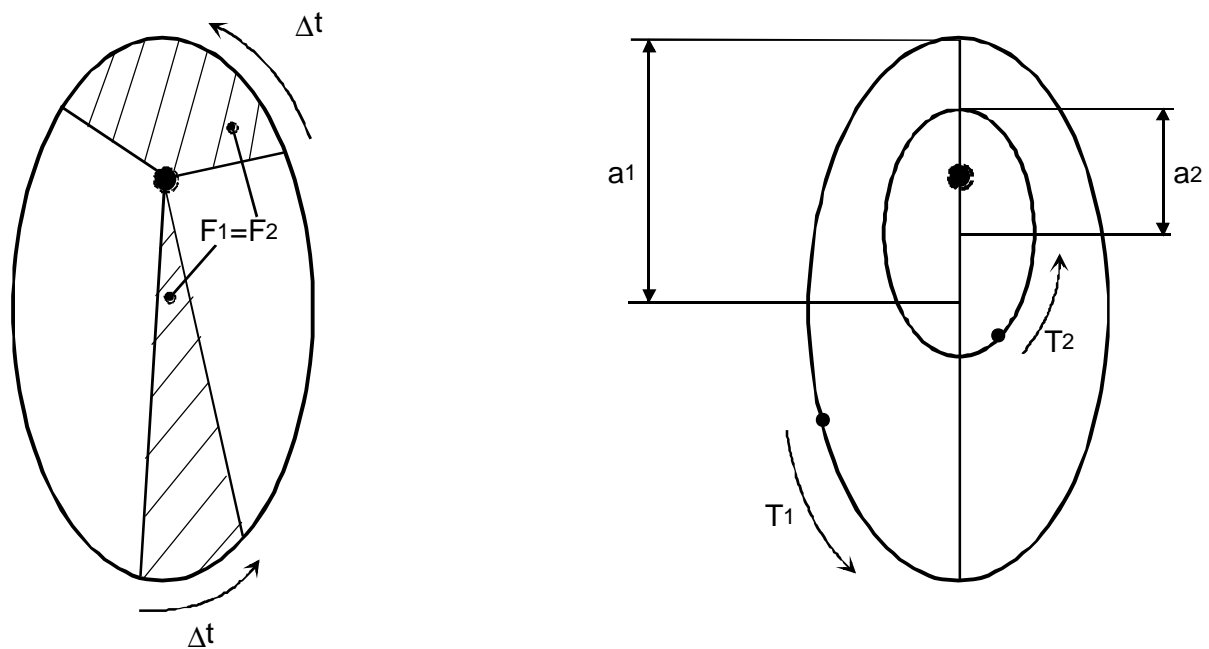


Abb.7.7: Kepler-Gesetze

### Herleitung

Die 3 Gesetze wurden von Kepler nicht aus der Theorie hergeleitet, sondern basierten auf dem Beobachtungsmaterial vom Tycho Brahe<sup>1</sup>, welches Kepler nach dessen Tode akribisch untersuchte. Erst Newton gelang es, diese Modelle aufgrund mathematischer und physikalischer Überlegungen auch theoretisch nachzuvollziehen:

Die Keplergesetze beruhen auf folgenden Annahmen:

- Die Gravitationskraft ist eine Zentralkraft
- Die Gravitationskraft wird durch die Newton'schen Gleichungen beschrieben.

Zur Herleitung der Kepler'schen Gesetze werden die Körper zu Punktmassen reduziert. Weiterhin wird nur die Auswirkung der Gravitation zweier Körper, einer Zentralmasse und einer dazu relativ kleinen umlaufenden Masse betrachtet. In einem inertialen Koordinatensystem wird jeder bewegter Punkt durch den Ortsvektor (= Verbindung vom Zentralkörper zum bewegten Punkt) und seinen Geschwindigkeitsvektor eindeutig festgelegt.

Eine Kraft  $\vec{f}$ , die auf einen Massenpunkt  $m$  wirkt (wobei diese Kraft immer auf ein Zentrum  $P$  oder von diesem weg gerichtet ist), wird als „Zentralkraft“ bezeichnet [19]. Diese ist nur vom Radialabstand  $r$  von diesem Zentrum abhängig. Legt man in  $P$  den Ursprung des Inertialsystems, so ist die Kraft, welche auf den Massenpunkt wirkt, definiert als:

$$\vec{F} = F(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r} = m \cdot \ddot{\vec{r}} \quad (7.5)$$

<sup>1</sup> Der dänische Adelige Brahe war der kaiserliche Astronom/Astrologe/Mathematiker am Prager Hof Rudolf II. Er hatte eine goldene Nase, da er seine bei einem Duell als Student verloren hatte. Sein Tod war ähnlich schillernd: Brahe starb an Harnvergiftung, da er es unschicklich fand, ein Staats banquet zu Ehren des Baron von Rosenberg auch nur kurz zu verlassen, um seine Notdurft zu verrichten. Doch dieses nur am Rande.

Da das Moment einer Zentralkraft  $\vec{r} \times \vec{F} = 0$  ist folgt aus Gleichung (7.5):

$$\vec{r} \times m \cdot \ddot{\vec{r}} = 0 \quad (7.6)$$

Ganz allgemein gilt bei Differenzierung nach der Kettenregel:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m \cdot \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}} + \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} \quad (7.7)$$

Das Vektorprodukt aus zwei parallelen Vektoren ist 0, also gilt:  $\dot{\vec{r}} \times m \cdot \dot{\vec{r}} = 0$ . Auch der zweite Ausdruck auf der rechten Seite ist laut (7.7) gleich 0, also gilt für die rechte Seite:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = 0$$

bzw. nach Integration:

$$\text{Drallerhaltung} \quad \vec{r} \times m \dot{\vec{r}} = \vec{G} = \text{const.} \quad (7.8)$$

Diese Gleichung ist der Drallerhaltungssatz, d.h. der Bahndrehimpuls  $\vec{G}$  eines Massenpunktes ist im Zentralfeld zeitlich konstant. Da ferner  $\vec{r} \cdot \vec{G} = 0$  ist, also  $\vec{r}$  immer senkrecht zu  $\vec{G}$  steht, erfolgt die Bewegung eines Massenpunktes stets in einer Ebene, welche im Raum von  $\vec{G}$  festgelegt wird.

Den Drallerhaltungssatz (7.8) kann man in Polarkoordinaten überführen und schreiben:

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} &= \frac{\vec{G}}{m} \Rightarrow \\ |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| &= r^2 \times \dot{\varphi} = C = \text{const.} \end{aligned} \quad (7.9)$$

Die Gleichung (7.9) ist das **2. Kepler'sche Gesetz ("Flächensatz")** (der Name basiert auf der Tatsache, dass  $\frac{1}{2} r^2 \times \dot{\varphi}$  die Flächengeschwindigkeit darstellt; dies ist also die Fläche, die der Ortsvektor der umlaufenden Punktmasse pro Zeiteinheit überstreicht).

Aus Gleichung (7.5) ergibt sich eine weitere Schlussfolgerung bezüglich der Gesamtenergie bei der Bewegung im Zentralfeld, wie im Folgenden gezeigt werden wird.

## Einführung des Gravitationspotentials

Ein Zentralfeld ist auch drehungsfrei, man kann sich dies übrigens auch durch ein Experiment veranschaulichen: Die Kraftlinie sei eine ideale Schnur. Durch Drehen an dem Ursprung der Zentralkraft wird die Masse, auf die die Zentralkraft wirkt, nicht in Drehung versetzt. Diese Eigenschaft wird dargestellt durch die Bedingung  $\text{rot } \vec{F} = 0$ . Für Gleichung (7.5) kann man also (wie für jedes Zentralkraftfeld) schreiben:

$$\text{rot } \vec{F} = \text{grad } F(r) \times \vec{r}_0 + F(r) \cdot \text{rot } \vec{r}_0 = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (7.10)$$

Die Zentralkraft  $F$  lässt sich also von einem skalaren Potential  $V(r)$  ableiten. Dabei beschreibt das Minuszeichen die Tatsache, dass die Kraft zur Zentralmasse hin gerichtet ist:

$$\vec{F} = -\text{grad}V(r) \quad \text{oder, in anderer Schreibweise:} \quad F = -\nabla V(r)$$

bzw.

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \vec{F} \times d\vec{r} = - \int_{r_0}^r \mathbf{F}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{r} \quad (7.11)$$

Für einen willkürlich gewählten Punkt  $P_0(r_0)$  ist das Potential 0. Man kann dann für  $\vec{F}$  schreiben:

$$\vec{F} = m \cdot \ddot{\vec{r}} = -\text{grad} \cdot V \quad (7.12)$$

Da keine anderen Kräfte an der umlaufenden Masse angreifen, gilt das Kräftegleichgewicht

$$m\ddot{\vec{r}} + \text{grad}V = 0$$

Durch skalare Multiplikation mit  $\dot{\vec{r}}$

$$m \cdot \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \text{grad} \cdot V = 0$$

und Kettenregel „rückwärts“

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \cdot \dot{\vec{r}}^2 + V \right) = 0$$

folgt nach Integration über  $t$  der Satz von der Erhaltung der Energie:

$$\text{Energieerhaltung} \quad \frac{m}{2} \times \dot{\vec{r}}^2 + V = E = \text{const.} \quad (7.13)$$

Bei einer Zentralbewegung bleibt die aus kinetischer Energie und potentieller Energie zusammengesetzte Gesamtenergie eines Massenpunktes zeitlich konstant. Dies gilt übrigens ganz allgemein in jedem Zentralfeld (nicht beschränkt auf das hier behandelte bahnmekanische Problem). Die Gleichung (7.13) erhält in Polarkoordinaten folgende Form:

$$\frac{m}{2} \cdot [\dot{r}^2 + (r \cdot \dot{\mathbf{j}})^2] + V(r) = E \quad (7.14)$$

In dieser Form ist die Unterteilung der kinetischen Energie in radialen und transversalen Anteil gut zu erkennen.

Zusammenfassend liefert die Annahme eines 3-dimensionalen Zentralfeldes 3 Informationen, die bei der Behandlung eines bahnmekanischen Problems zu folgenden Aussagen führen:

- die Bewegung verläuft stets in einer Ebene
- Zur Lösung unseres Problems, der Beschreibung des Verhaltens von 2 Massen im "Freiflug", müssen wir nun das Potential  $V(r)$  berechnen. Es beschreibt die "Physik" der wirkenden Zentralkraft. Hierzu soll zunächst die Zeit  $t$  aus dem "Energiesatz" eliminiert werden.

Mit dem 2. Kepler'schen Gesetz ( $r^2 \dot{\mathbf{j}} = C$ ) kann  $\dot{\mathbf{j}}$  ersetzt werden:

$$\frac{m}{2} \left[ \dot{r}^2 + r^2 \frac{C^2}{r^4} + V(r) \right] = E$$

Die Bahngeschwindigkeit lässt sich durch einen nach  $\varphi$  veränderlichen Radiusvektor und dessen Winkelgeschwindigkeit ausdrücken

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\mathbf{j}} \cdot \dot{\mathbf{j}} = \frac{dr}{d\mathbf{j}} \cdot \frac{C}{r^2}$$

In dieser Form :

$$\frac{m}{2} \cdot \left[ \left( \frac{dr}{d\mathbf{j}} \right)^2 \cdot \frac{C^2}{r^4} + \frac{C^2}{r^2} \right] + V(r) = E$$

kann die Differentialgleichung zur Integration separiert werden

$$\int_{j_0}^j d\mathbf{j} = \int_{r_0}^r \frac{1}{r^2} \left[ \frac{2}{mC^2} [E - V(r)] - \frac{1}{r^2} \right]^{-\frac{1}{2}} dr \quad (7.15)$$

Die Lösung diese Integrals ergibt  $r$  als eine Funktion von  $\varphi$  und beschreibt damit die Geometrie einer Freiflugbahn.

## Newton-Gravitationsgesetz

Die Potentialfunktion  $V(r)$  muss aus einer Information darüber hergeleitet werden, wie die Zentralkraft  $\vec{F} = F(r) \cdot \vec{e}_r$  vom Radius  $r$  abhängt: Man braucht also eine Funktion  $F(r)$ . An dieser Stelle leistete Newton - Jahre nach der Aufstellung der Keplersgesetze - mit seinem Gravitationsgesetz den entscheidenden Beitrag. Es besagt, dass die Kraft  $F$ , mit der eine Masse  $m_1$  von einer anderen Masse  $m_2$  angezogen wird, umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung  $r$  der beiden Massen und zur Masse  $m_2$  gerichtet ist. Handelt es sich um homogene Kugeln, so kann für die Berechnung der Anziehungskraft  $F$  sowohl  $m_1$  wie  $m_2$  als punktförmiger Massenpunkt angenommen werden. Es erweist sich als zweckmäßig, denn Ursprung des Koordinatensystems in den gemeinsamen Schwerpunkt zu legen. Dann gilt:

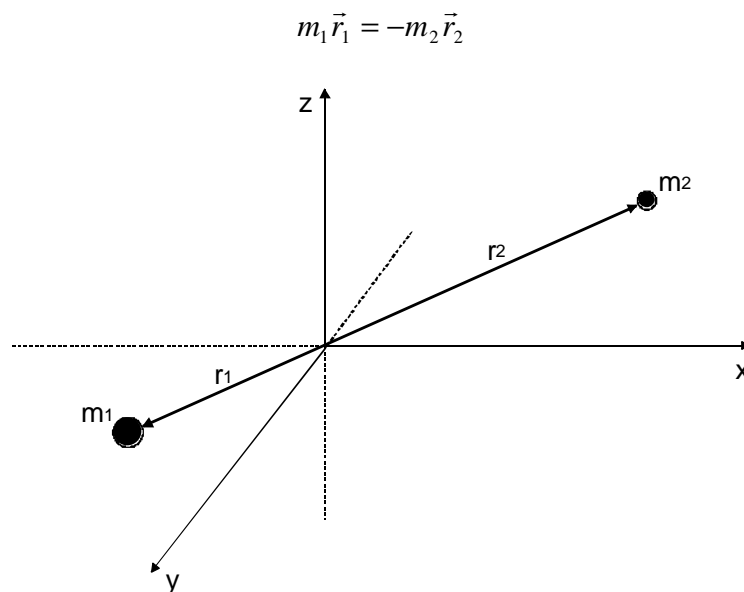


Abb.7.8: Parameter des Gravitationsgesetzes

Für die zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$ , die sich gegenseitig beeinflussen, folgt dann (basierend auf Abbildung 7.8) die Beziehung:

$$\vec{F}_2 = m_2 \cdot \ddot{\vec{r}}_2 = -\mathbf{g} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{(r_1 + r_2)^2} \cdot \frac{\vec{r}_2}{r_2} \quad \text{mit } r_2 = |\vec{r}_2| \quad (7.16)$$

$$\vec{F}_1 = m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1 = -\mathbf{g} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{(r_1 + r_2)^2} \cdot \frac{\vec{r}_1}{r_1} \quad \text{mit } r_1 = |\vec{r}_1| \quad (7.17)$$

wobei  $\gamma$  die Gravitationskonstante ist. Teilt man die beiden obigen Gleichungen durch die jeweilige Masse und subtrahiert man sie dann voneinander, so erhält man unter Beachtung der aus Abbildung 8.2 folgenden Beziehung  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  für den Vektor von  $m_1$  zu  $m_2$ , sowie der beiden Beziehungen

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \text{und} \quad \vec{r}_2 = +\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (7.18)$$

die Bewegungsgleichung für das Zweikörperproblem:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mathbf{g} \cdot \frac{m_1 + m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{mit} \quad r = |\vec{r}| \quad (7.19)$$

Mit dieser Gleichung gefundene Lösungen für  $\ddot{\vec{r}}$  führen durch zweimalige Integration nach der Zeit und Einsetzen in (7.18) unmittelbar zu Lösungen für  $F_1$  und  $F_2$ . Da sonst keine Kräfte wirken, kann man schreiben  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$  bzw.  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F$ .

**Im „idealisierten“ oder „eingeschränkten“ Zweikörperproblem geht man nun von einem starken Ungleichgewicht der Massen aus, sprich  $m_1 \gg m_2$ .** Dieses ist für viele Fälle der Praxis der Fall, so z.B. für die Massenpaare Sonne – Erde, Erde – Mond, Mars – Phobos, usw. Insbesondere gilt diese Näherung auch gut für Satelliten, da diese immer eine verschwindend geringe Masse im Vergleich zu ihrem Zentralkörper haben. In diesem eingeschränkten Fall geht  $r_1 \rightarrow 0$  und  $r_2 \rightarrow r$ , wie aus Gleichung (7.18) leicht ersichtlich. In diesem Fall kann man für die Kraft auf die kleine Masse  $m_2$  schreiben:

$$\vec{F}_2 = m_2 \cdot \ddot{\vec{r}} = -\mathbf{g} \cdot \frac{(m_1 + m_2) \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

bzw.

$$F = F(r) = -\mathbf{g} \cdot \frac{m_1 + m_2}{r^2} \cdot m_2 \quad (7.20)$$

Die Gleichung (7.20) ist nun exakt in der Form, die man laut Gleichung (7.5) für die Herleitung eines Gravitationspotentials benötigt, nämlich nur in Abhängigkeit von der Entfernung zum Zentralkörper. Alle Überlegungen, die im Unterkapitel „Herleitung“ gemacht wurden, können also nun auf die auf die aus der Newton'schen Gravitationstheorie abgeleiteten Ergebnisse angewandt werden. Dies soll im Folgenden geschehen, zunächst allerdings noch kurz eine Betrachtung der eben erzielten Ergebnisse in Polarkoordinaten. Beachtet man nämlich, dass  $x = r \cdot \cos \mathbf{j}$  und  $y = r \cdot \sin \mathbf{j}$  ist, dann kann man die Bewegungsgleichung (7.19) in Polarkoordinaten überführen:

$$\ddot{r} - r \cdot \dot{\mathbf{j}}^2 = -\mathbf{g} \cdot \frac{m_1 + m_2}{r^2} = \frac{F_r}{m_2} \quad (7.21)$$

$$r \cdot \dot{\mathbf{j}} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt} \cdot (r^2 \cdot \mathbf{j}) = \frac{F_j}{m_2} = 0 \quad (7.22)$$

$F_r$  und  $F_\varphi$  sind dabei die Radial- bzw. Transversalkomponenten der Kraft  $\vec{F}$ . Die Gravitation wirkt also als einzig angreifende Kraft nur in radialer Richtung.

## Bahngleichungen

Integriert man die Kraft auf die Satellitenmasse (Gleichung 7.20) über einen Weg im Potentialfeld der Zentralmasse von einem Referenz-/Anfangsradius  $r_0$  ausgehend bis zu einem beliebigen Abstand  $r$  wie in Gleichung (7.11) angedacht, so ist die dabei verrichtete Arbeit ein Maß für die potentielle Energie:

$$V(r) = -\int_{r_0}^r F(r) dr = \mathbf{g} \cdot \frac{m_1 + m_2}{r_0} \cdot m_2 - \mathbf{g} \cdot \frac{m_1 + m_2}{r} \cdot m_2$$

Zweckmäßigerweise wählt man für den Referenzradius die Unendlichkeit. Bei einem Wechsel der Bezugssysteme treten so nämlich keine Probleme auf<sup>1</sup>. Zudem verschwindet für  $r_0 \rightarrow \infty$  der erste Term und man kann schreiben:

$$V(r) = -\mathbf{g} \cdot \frac{m_1 + m_2}{r} \cdot m_2 \quad (7.23)$$

Auch hier kann wiederum die umlaufende Masse gegenüber der Zentralmasse vernachlässigt werden; manchmal schreibt man deshalb für das Potential:

$$V(r) = -\mathbf{g} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r} \quad (7.24)$$

**In den nun folgenden Formeln kann analog zu Gleichung (7.24) die Näherung  $m_1 + m_2 \gg m_1$  verwendet werden.**

In der Energiegleichung (7.14) kann die potentielle Energie nach Gleichung (7.23) eingesetzt werden.

$$\dot{r}^2 + r^2 \mathbf{j}^2 - 2\mathbf{g} \frac{m_1 + m_2}{r} = \frac{2E}{m_2} \quad (7.25)$$

Und auch die Differentialgleichung (7.15) wird mit  $r_0 \rightarrow \infty$  zu

$$\mathbf{j} - \mathbf{j}_0 = \int_{r_0}^r r^{-2} \left( \frac{2E}{m_2 C^2} + 2\mathbf{g} \cdot \frac{m_1 + m_2}{C^2 r} - \frac{1}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} dr \quad (7.26)$$

Integration und Auflösen nach  $r$  führt, wie bereits von Kepler im **1. Kepler'schen Gesetz** vorhergesagt, zur allgemeinen Gleichung für Kegelschnitte:

<sup>1</sup> Bei der Auslegung eines interplanetaren Fluges z.B. von der Erde zum Mars rechnet man zunächst das Verlassen des Erdsystems (System I), den Flug durch den Interplanetaren Raum unter Einfluss der Sonnengravitation (System II), sowie den Eintritt in das Schwerefeld des Mars (System III). Ein Begriff, der dabei eine wichtige Rolle spielen wird ist die sog. „Einflussosphäre“, welche später erörtert werden wird. Wird bei einer Problemstellung der Zentralkörper nicht gewechselt, ist es manchmal auch zweckmäßig, den Radius desselben als Referenzradius zu verwenden.



$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos j}$$

mit 
$$p = \frac{C^2}{g \cdot (m_1 + m_2)}, \quad e^2 - 1 = \frac{2EC^2}{g^2 \cdot (m_1 + m_2)^2 m_2} \quad (7.27)$$

und 
$$j^* = j - j_0 + \arccos \frac{\frac{C^2}{g \cdot (m_1 + m_2)} - 1}{\left(1 + \frac{2EC^2}{g^2 \cdot (m_1 + m_2)^2 \cdot m_2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad j^* \mapsto j$$

In Abhängigkeit von  $\epsilon$  ergeben sich die folgenden Möglichkeiten für die Form der Bahn:

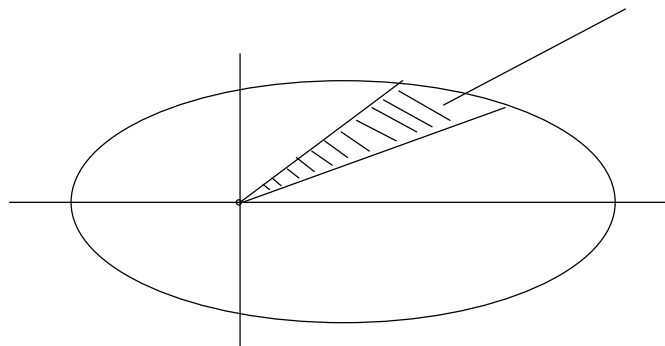
<b>Es liegt vor eine</b>	<b>Kreisbahn für</b>	$e = 0$
	<b>Ellipse für</b>	$e < 1$
	<b>Parabel für</b>	$e = 1$
	<b>Hyperbel für</b>	$e > 1$

Die Parabel stellt genau den Übergang zwischen einer geschlossenen und einer offenen Umlaufbahn dar. Auf einer Parabel ist die Bahnenergie laut Definition gleich Null, die kinetische und potentielle Energie ist also immer entgegengesetzt gleich groß. Ein Körper auf dieser Bahn hat im Unendlichen theoretisch seine Energie vollständig abgegeben.

Das dritte Kepler'sche Gesetz macht eine Aussage über die Umlaufzeit eines Körpers um die Zentralmasse  $m_1$ . Ein nach dem 2. Kepler'schen Gesetz stets gleich großes Flächenelement  $dA$ , das der Fahrstrahl  $r$  pro Zeiteinheit  $dt$  überstreicht lässt sich laut Gleichung (7.9) angeben:

$$r^2 \dot{j} = C = 2 \frac{r}{2} \frac{dj}{dt} = 2 \frac{dA}{dt}$$

$$dA = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r dj$$



Man integriert  $dt = \frac{2}{C} dA$  über einen vollständigen Umlauf. Dabei läuft der Fahrstrahl über die ganze Fläche der Ellipse ( $A = ab\pi$ ) und man erhält die Umlaufzeit:

$$T = \frac{2}{C} \cdot abp$$

Mit  $c^2 = pg(m_1 + m_2)$  und  $b^2 = ap$  erhält man das schon erwähnte **3. Kepler'sche Gesetz: (Gesetz der Umlaufzeiten)**:

$$T = 2p \times \sqrt{\frac{a^3}{g \times (m_1 + m_2)}} \quad (7.28)$$

und damit  $T^2 \sim a^3$ . Bei Lauf der Planeten um die Sonne ist die Exzentrizität der Umlaufbahn so gering, dass man auch den mittleren Abstand zur Sonne verwenden kann.

#### Planetenabstände zur Sonne nach Titius-Bode

*J.K.Titius* und *J.E.Bode* entdeckten 1766, dass im Sonnensystem der mittlere Radius einer Planetenbahn zum mittleren Radius des nächsten, weiter innen umlaufenden Planeten ungefähr ins Verhältnis gesetzt werden kann. Damit folgt der Abstand Planet-Sonne in astronomischer Einheit *AE* mit den planetenspezifischen Wert *n* (vgl. Tab.7.2) in erster Näherung zu [13]:

$$r = 0,4 + 0,3 \times 2^n \quad [AE] \quad (7.29)$$

*Tabelle 7.2: Titius-Bodesche Reihe*

Planet	Merkur	Venus	Erde	Mars	Asteroiden	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun	Pluto
n	$-\infty$	0	1	2	3	4	5	6	7	8

## 8 Keplerbahnen

Ist die Näherung für kleine Satellitenmassen zulässig, so verwendet man die im Kapitel 7 hergeleiteten Formeln oft auch in der Form  $M:=m_1$  und  $m:=m_2$ . Hiervon soll im folgenden Kapitel ausgegangen werden.

### 8.1 Kreisbahnen

Damit ein Satellit auf einer Kreisbahn einen Zentralkörper wie z.B. die Erde umläuft, muss die Zentrifugalkraft  $F_Z$  der Anziehungskraft  $F_G$  entsprechen:

$$F_G = F_Z$$

$$F_G = m \cdot g = \mathbf{g} \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \quad (8.01)$$

$$F_Z = r \cdot \mathbf{w}^2 \cdot m = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad \text{mit} \quad \mathbf{w} = \frac{2 \cdot \mathbf{p}}{T} \quad (8.02)$$

$$m = \text{Satellitenmasse} \\ M = \text{Erdmasse } 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Aus den Gleichungen (8.01) und (8.02) folgt für die Kreisbahngeschwindigkeit<sup>1</sup>:

$$v_{Kr} = \sqrt{g \cdot r} = \sqrt{\frac{\mathbf{g} \cdot M}{r}} \quad (8.03)$$

$$\mathbf{g} = \text{Gravitationskonstante } 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$$

Für die Umlaufzeit  $T$  erhält man – entweder durch (8.03) oder durch (7.28):

$$T = 2 \cdot \mathbf{p} \cdot \sqrt{\frac{r^3}{\mathbf{g} \cdot M}} \quad (8.04)$$

$$r = h + R_0 \text{ Kreisbahnradius} \\ h = \text{Höhe über Erdoberfläche}$$

Für den Kreisbahnradius folgt somit:

$$r = \sqrt[3]{\frac{\mathbf{g} \cdot M \cdot T^2}{4 \cdot \mathbf{p}^2}} \quad (8.05)$$

<sup>1</sup> Für diese Geschwindigkeit wird auch der Ausdruck „circulare“ Geschwindigkeit  $v_c$  bzw. „1. kosmische Geschwindigkeit“ benutzt.

## 8.2 Fluchtgeschwindigkeit

Die Fluchtgeschwindigkeit  $v_E$  ergibt sich aus der Überlegung, dass die kinetische Energie eines Körpers der Masse  $m$ , der sich aus dem Anziehungsbereich des Planeten der Masse  $M$  entfernen will, gleich der gegen die Gravitation zu leistende Arbeit ist:

$$m \cdot \frac{v_E^2}{2} = \int_{R_0}^{\infty} F_G(r) \cdot dr \quad (8.06)$$

$$F_G(r) = \mathbf{g} \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = m \cdot \mathbf{g} \quad (8.07)$$

$$g = g_0 \cdot \frac{R_0^2}{r^2} \quad (8.08)$$

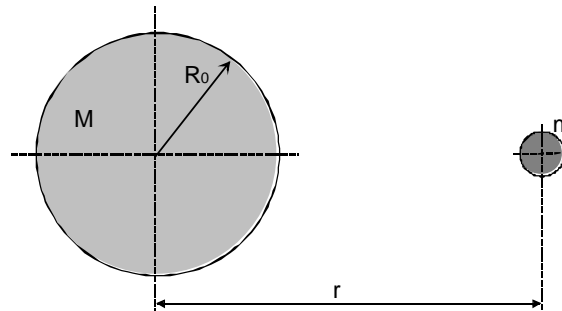


Abb.8.1: Parameter der Gravitation

Durch Integration erhält man für die Fluchtgeschwindigkeit von der Erdoberfläche:

$$v_E^2 = 2 \cdot \int_{R_0}^{\infty} g_0 \cdot R_0^2 \cdot \frac{dr}{r^2} = 2 \cdot g_0 \cdot R_0 \quad \Rightarrow \quad v_E = \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R_0} \quad (8.09)$$

Befindet sich der Flugkörper bereits auf einer Kreisbahn in der Entfernung  $r > R$  dann gilt für die Fluchtgeschwindigkeit<sup>1</sup>:

$$v_E = \sqrt{2 \cdot g \cdot r} = \sqrt{2} \cdot v_{Kr} \quad (8.10)$$

Die Fluchtgeschwindigkeit von der Oberfläche beträgt zum Beispiel für:

- Erde                      11,18 km/s
- Mond                      2,38 km/s
- Jupiter                    61 km/s
- Phobos                    5.8 m/s

Auf dem Phobos könnte ein Astronaut also ohne weiteres z.B. einen Tennisball aus dem Schwerefeld des kleinen Marsmondes „hinauswerfen“.

<sup>1</sup> Diese Geschwindigkeit wird oft auch als „2. kosmische Geschwindigkeit“ bezeichnet.

### 8.3 Freiflugbahnen

Die Bahnen von Satelliten, Raumsonden und Raumfahrzeugen im Weltraum können mit den Methoden der Himmelsmechanik berechnet werden. Je nach Berücksichtigung der beteiligten Massen bei der Bahnberechnung, spricht man von Ein-, Zwei-, Drei- bis n-Körperproblemen.

#### Zweikörperproblem / Kegelschnitte

Im 7. Kapitel wurde gezeigt, dass Satelliten sich bei ihrer Bewegung um Zentralkörper auf Kegelschnittbahnen bewegen. Diese sollen nun für das eingeschränkte Zweikörperproblem näher untersucht werden.

Diese Aussage über die Form der Bahnen im Zweikörperproblem und die Stellung von  $M$  im Brennpunkt entspricht dem ersten *Kepler*-Gesetz. In Abhängigkeit von  $\epsilon$  handelt es sich bei den Bahnen um Kreise, Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln. Am Beispiel der Ellipse ( $\epsilon < 1$ ) werden die Parameter des Kegelschnittes dargestellt.

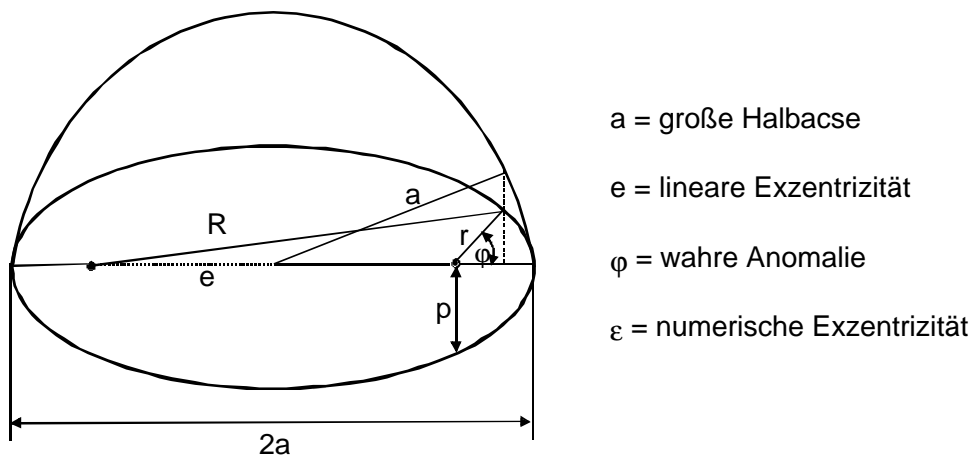


Abb.8.3: Ellipse

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos j} \quad \text{mit} \quad r(j = 90^\circ) = p$$

$$r_{peri} = r_{\min} = \frac{p}{1 + e} \quad \text{und} \quad r_{apo} = r_{\max} = \frac{p}{1 - e}$$

$$a = \frac{1}{2} \cdot (r_{\min} + r_{\max}) = \frac{p}{1 - e^2} \quad \text{oder} \quad p = a \cdot (1 - e^2)$$

$$e = a - r_{\min} = a \cdot e$$

Analoges Vorgehen mit den entsprechenden Werten für  $\varepsilon$  liefert die Definition für Parabel und Hyperbel.

### Bahnenergie

Aus (7.27) ergeben sich für das eingeschränkte Zweikörperproblem folgende Zusammenhänge:

$$p = \frac{C^2}{g \cdot M} \quad (8.11)$$

$$e^2 - 1 = \frac{2 \cdot \frac{E}{m} \cdot C^2}{g^2 \cdot M^2} = 2 \cdot \frac{E}{m} \cdot \frac{p^2}{C^2} \quad (8.12)$$

Damit folgt daraus für die...

Kreisbahn	$\varepsilon = 0 \Rightarrow E/m = -C^2/(2p^2)$
elliptische Bahn	$\varepsilon < 1 \Rightarrow E/m < 0$
parabolische Bahn	$\varepsilon = 1 \Rightarrow E/m = 0$
hyperbolische Bahn	$\varepsilon > 1 \Rightarrow E/m > 0$

Das bedeutet, dass die Gesamtenergie einer elliptischen Bahn negativ und einer hyperbolischen Bahn positiv ist. Der Betrag der potentiellen Energie muss bei elliptischen Bahnen in jedem Punkt auf der Bahn größer sein als die kinetische Energie. Dadurch bleibt ein Körper, der sich auf einer elliptischen Bahn bewegt, immer an die Zentralmasse gebunden.

Setzt man das Gravitationspotential (7.24) in die Energiegleichung (7.13) ein und bezieht diese auf die Masseneinheit  $m$  und substituiert  $\dot{\vec{r}} = d\vec{r}/dt = \vec{v}$ , dann folgt die extrem wichtige **Viva-Gleichung** (lat.: "lebende Kraft"):

$$\frac{E}{m} = \frac{v^2}{2} - \frac{gM}{r} = \text{const.} \quad (8.13)$$

Dabei stellt  $v$  den Betrag des Geschwindigkeitsvektors dar. Für den Geschwindigkeitsvektor im Perizentrum eines Kegelschnittes gilt:

$$|\vec{v}_{peri}| = r_{peri} \cdot \dot{\mathbf{j}} = \frac{r_{peri}^2 \cdot \dot{\mathbf{j}}}{r_{peri}} = \frac{C}{r_{peri}} \quad (8.14)$$

Mit Gleichung (8.11) folgt:

$$\frac{E}{m} = \frac{gM}{2 \cdot r_{peri}^2} \cdot (p - 2 \cdot r_{peri}) = const. \quad (8.15)$$

Setzt man in die Gleichung (8.15) die entsprechenden Werte aus den Kegelschnittsgleichungen ein, dann erhält man die spezifischen Bahnenergien (Einheit: [J/kg]) wie folgt:

Ellipse	$\frac{E}{m} = - \frac{gM}{2a}$	(8.16)
Parabel	$\frac{E}{m} = 0$	
Hyperbel	$\frac{E}{m} = + \frac{gM}{2a}$	

Mit diesem Zusammenhängen und der Vis-Viva-Gleichung (8.13) ergeben sich die Bahngeschwindigkeiten:

Ellipse	$v^2 = gM \times \frac{2}{r} - \frac{1}{a}$	(8.17)
Parabel	$v^2 = gM \times \frac{2}{r}$	
Hyperbel	$v^2 = gM \times \frac{2}{r} + \frac{1}{a}$	

Der Wert der Parabel deckt sich mit dem in Kapitel 8.2 ermittelten Wert für die Fluchtgeschwindigkeit. Das ist offensichtlich auch der Fall, da der Satellit in diesem Fall dem Zentralkörper gerade noch entfliehen kann.

### Das eingeschränkte Dreikörperproblem

Die Bewegung von drei Körpern im Raum kann mit neun Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschrieben werden. Zur vollständigen Lösung dieser Gleichungen sind neun mal zwei Integrationen erforderlich. Die analytische Lösung des Dreikörperproblems ist, außer in einigen Spezialfällen, nicht möglich. Das eingeschränkte Dreikörperproblem ist ein solcher Spezialfall. Die Einschränkung beruht darauf, dass einer der drei Körper als unendlich klein angenommen wird, d.h. er unterliegt zwar der Gravitation der beiden endlichen Massen, ist aber nicht in der Lage deren Bahn zu stören. Dieser Fall trifft praktisch für alle Raumfahrzeuge zu, denn deren Ausmaße sind gegenüber der Größe von Planeten und Monden sehr klein.

## Bahnstörungen

Ideale erdnahe *Kepler*-Bahnen werden durch folgende Einflüsse gestört:

- Gravitationseinfluss anderer Himmelskörper (siehe z.B. 8.3.2)
- nicht konzentrische Massenverteilung des Zentralkörpers (Erde)
- Restatmosphäre des Zentralkörpers
- Strahlungsdruck der Sonne
- Kollision mit Mikrometeoriten
- Elektrische und magnetische Wechselwirkungen
- Antriebskräfte (z.B. Lageregelungssystem)

Im Allgemeinen kann angenommen werden, dass die störenden Kräfte gegenüber den Anziehungskräften der Himmelskörper gering sind, so dass die ideale *Kepler* Bahn in kurzen Zeiträumen nicht wesentlich verändert wird.

## **8.4 Bahnübergänge**

Im Folgenden soll ein Raumfahrzeug von einer kreisförmigen Ausgangsbahn in eine von ihr verschiedene neue *Kepler*-Bahn, die eine zur Ausgangsbahn konzentrische Kreisbahn ist, überführt werden. Der dazwischen liegende Übergang sei ein Kegelschnitt mit demselben Brennpunkt wie Ausgangs- und Zielbahn. Solche Übergänge sind in vielen Variationen möglich. In allen Fällen sind ein erster Impuls  $\Delta v_1$ , der das Fahrzeug von der Ausgangsbahn in die Übergangsbahn befördert, sowie ein zweiter Impuls  $\Delta v_2$  der es von der Übergangsbahn in die Zielbahn bringt, notwendig. Der erforderliche Gesamtimpuls  $\Delta v$  ist dann:

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 \quad (8.18)$$

### Hohmann-Bahnübergang

Unter der Voraussetzung, dass man sich auf zwei Impulse beschränkt, ist die *Hohmann*-Bahn (vgl. Abb. 8.4) diejenige Übergangsbahn mit dem geringsten Energiebedarf (für eine eingeschränkte 2-Körperp., koplanar). Eine *Hohmann*-Bahn ist eine elliptische Übergangsbahn, die mit ihrem Perizentrum die innere Kreisbahn und mit dem Apozentrum die äußere Kreisbahn tangiert und deren Brennpunkt das beiden Bahnen gemeinsame Gravitationszentrum ist.



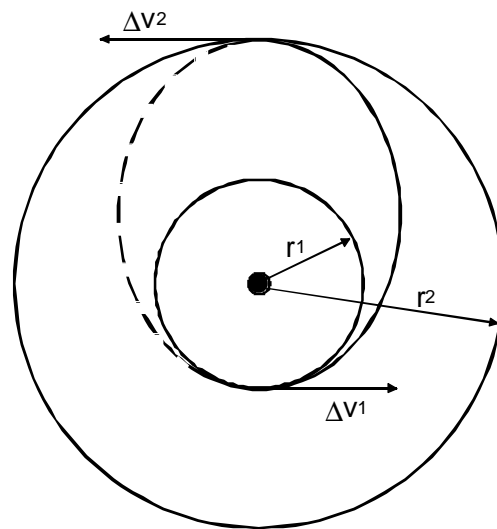


Abb.8.4: Hohmann-Bahn

Einschub: Sind tangentielle Bahnänderungsmanöver optimal?

Um eine Bahnänderung zu erreichen, muss offensichtlich der Impulsvektor der Ausgangsbahn verändert werden. Im Vakuum ist dies nur mit einem  $\Delta v$ -Manöver zu bewerkstelligen. Nun stellt sich die berechnete Frage, in welchem Winkel  $\alpha$  zum Ausgangsvektor dies am besten zu geschehen hat. Die neue Bahn, die sog. "Übergangsellipse" ist offensichtlich wieder eine Ellipse. Der größte Abstand von der Zentralmasse ist dabei  $r_{apo} = (1 + e) \cdot a$ . Dieser soll nun als Funktion von...

- dem Radius der Ausgangsbahn  $r_1$
- der Geschwindigkeitsänderung  $\Delta v_1$
- dem Winkel  $\alpha$  (zwischen  $v_{c1}$  und  $\Delta v_1$ )

dargestellt werden. Wir suchen also  $e = e(\alpha, \Delta v_1)$ , den Zusammenhang von Exzentrizität und dem Bahnänderungsmanöver.

Um von der Kreisbahngeschwindigkeit der Ausgangsbahn auf die Geschwindigkeit  $v$  der Übergangsellipse zu beschleunigen, wird der Impuls  $\Delta v_1$  benötigt. So ergibt sich die geänderte Geschwindigkeit  $v$  nach dem Kosinussatz nach Umformung zu

$$v^2 = v_{kr1}^2 + \Delta v_1^2 - 2 \cdot \Delta v_1 \cdot v_{kr1} \cdot \cos(\alpha)$$

Zuvor haben wir für  $e$  und  $C$  folgenden Zusammenhang festgestellt (8.12):

$$e^2 - 1 = \frac{2 \cdot \frac{E}{m} \cdot C^2}{g^2 \cdot M^2} \quad \text{mit} \quad m \ll M$$

Nun ist aber laut (8.16)

$$\frac{E}{m} = -\frac{gM}{2a}$$

und  $C$  ist definiert als  $C = |\vec{r} \circ \vec{v}|$ ; man kann also für den Zeitpunkt unmittelbar nach dem Bahnänderungsmanöver schreiben:

$$C = r_1 \cdot (v_{Kr1} + \Delta v_1 \cdot \cos \mathbf{a})$$

und damit

$$e^2 - 1 = 2 \cdot \frac{E}{m} \cdot \frac{C^2}{(gM)^2} = -2 \cdot \frac{gM}{2a} \cdot \frac{r_1^2}{(gM)^2} \cdot (v_{Kr1} + \Delta v_1 \cdot \cos \mathbf{a})^2$$

Drücken wir  $\Delta v_1$  als  $\Delta v_1 = \Delta \cdot v_{Kr1}$  aus, so vereinfacht sich mit Hilfe der Definition der Kreisbahngeschwindigkeit (8.03) die Schreibweise zu

$$e^2 - 1 = -\frac{r_1}{a} \cdot (1 + \Delta \cdot \cos \mathbf{a})^2$$

$$r_{\max} = r_{apo} = (1 + e) \cdot a = \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{r_1}{a} \cdot (1 + \Delta \cdot \cos \mathbf{a})^2} \right) \cdot a$$

Ganz allgemein gilt für eine Ellipse im eingeschränkten Zweikörperproblem laut Vis-Viva:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{gM}{r} = -\frac{gM}{2a}$$

Für den Zeitpunkt unmittelbar nach dem Bahnänderungsmanöver ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} \frac{v_{Kr1}^2 + \Delta v_1^2 + 2 \cdot \Delta v_1 \cdot v_{Kr1} \cdot \cos \mathbf{a}}{2} - \frac{g \cdot m_1}{r_1} &= -\frac{g \cdot m_1}{2a} \quad \left| \cdot \frac{2}{g \cdot m_1} \right. \\ \frac{v_{Kr1}^2 + \Delta v_1^2 + 2 \cdot \Delta v_1 \cdot v_{Kr1} \cdot \cos \mathbf{a}}{v_{Kr1}^2 \cdot r_1} - \frac{2}{r_1} &= -\frac{1}{a} \\ \frac{\Delta^2 + 2\Delta \cdot \cos \mathbf{a} - 1}{r_1} &= -\frac{1}{a} \\ a &= \frac{r_1}{1 - \Delta^2 - 2\Delta \cdot \cos \mathbf{a}} \end{aligned}$$

Die Differenz aus Apo- und Perigäumsradius ergibt die durch Zufuhr des Impulses  $\Delta$  maximal erreichbare Höhe  $h$  durch Einsetzen zu:

$$\begin{aligned}
 h &= r_{apo} - r_1 = \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{r_1}{a} \cdot (1 + \Delta \cdot \cos \alpha)^2} \right) \cdot a - r_1 = \\
 &\left( \frac{1 + \sqrt{1 - (1 - \Delta^2 - 2\Delta \cdot \cos \alpha) \cdot (1 + \Delta \cdot \cos \alpha)^2}}{1 - \Delta^2 - 2\Delta \cdot \cos \alpha} - 1 \right) \cdot r_1 = \\
 h &= \Delta \cdot \frac{\Delta + 2\cos \alpha + \sqrt{(1 + \Delta \cdot \cos \alpha + (\cos \alpha)^2)^2 + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}}{1 - \Delta^2 - 2\Delta \cdot \cos \alpha} \cdot r_1
 \end{aligned}$$

Um bei einem gegebenen Kickimpuls  $\Delta$  die maximale Höhe ( $h_{\max} = h \cdot r_{c1}$ ) in Abhängigkeit von Winkel  $\alpha$  aus der Kreisbahngeschwindigkeitsrichtung zu bestimmen sucht man in

$$h = f(\sin^2 \alpha; \cos \alpha; \cos^2 \alpha)$$

die Extremwerte, bzw. in der Ableitung nach dem Winkel die Nullstellen

$$\frac{dh}{d\alpha} = \frac{df}{d \sin^2 \alpha} 2 \sin \alpha \cos \alpha - \frac{df}{d \cos \alpha} \sin \alpha - \frac{df}{d \cos^2 \alpha} 2 \cos \alpha \sin \alpha$$

Bereits in dieser Form ist ersichtlich, dass für die Fälle  $\alpha = 0$  und  $\alpha = \pi$  ein Extremwert existiert. **Also bringt ein zur Kreisbahn tangentialer Kickimpuls den größten Höhengewinn.** Die Bestimmung der 2. Ableitung bringt ein Maximum bei gegebenem  $\Delta$ . Zur vorhandenen Kreisbahngeschwindigkeit parallele Geschwindigkeitserhöhung ( $\sin \alpha = 0$ ;  $\cos \alpha = 1$ ) bedeutet

$$\mathbf{h} = \mathbf{r}_{\max} - \mathbf{r}_1 = \frac{4D + 2D^2}{1 - 2D - D^2} \times \mathbf{r}_1$$

Für einen Bahnübergang in eine neue Kreisbahn mit dem Radius  $r_2$  ist es notwendig, die Bahn durch einen zweiten Impuls  $\Delta v_2$  zu „zirkularisieren“. Auch hier ist wiederum ein tangenciales  $\Delta v$ -Manöver optimal. (Ende Einschub)

Zusammenfassend lässt sich für die Bahnänderung mit zwei jeweils tangentialen Impulskicks (= „**Hohmann-Transfer**“) folgendes sagen:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \quad (8.19)$$

Für den gesamten Geschwindigkeitsbedarf gilt nach Gleichung (8.18):

$$\mathbf{Dv} = \mathbf{Dv}_1 + \mathbf{Dv}_2 = (\mathbf{v}_{\text{peri}} - \mathbf{v}_{\text{Kr1}}) + (\mathbf{v}_{\text{Kr2}} - \mathbf{v}_{\text{apo}}) \quad (8.20)$$

Mit dem Zusammenhang für  $a$  aus (8.19) erhält man unter Zuhilfenahme von (8.17) die für die Berechnung von  $\Delta v$  notwendigen Geschwindigkeiten im Perizentrum  $v_{peri}$  und im Apozentrum  $v_{apo}$ :

$$v_{peri} = \sqrt{2 \cdot g \cdot M \cdot \left( \frac{r_2}{r_1 \cdot (r_1 + r_2)} \right)} \quad (8.21)$$

$$v_{apo} = \sqrt{2 \cdot g \cdot M \cdot \left( \frac{r_1}{r_2 \cdot (r_1 + r_2)} \right)} \quad (8.22)$$

Normiert man jetzt den gesamten Geschwindigkeitsbedarf für den Bahnübergang  $\Delta v$  auf die Kreisbahngeschwindigkeit der Ausgangsbahn, so folgt:

$$\frac{\Delta v}{v_{Kr1}} = \frac{v_{peri}}{v_{Kr1}} - 1 + \frac{v_{Kr2}}{v_{Kr1}} - \frac{v_{apo}}{v_{Kr1}}$$

Unter Verwendung der jeweiligen Geschwindigkeiten erhält man:

$$\frac{\Delta v}{v_{Kr1}} = \frac{\sqrt{2 \cdot r_2^2 + \sqrt{r_1 \cdot (r_1 + r_2)}} - \sqrt{2 \cdot r_1}}{\sqrt{r_2 \cdot (r_1 + r_2)}} - 1 \quad (8.23)$$

beziehungsweise als Funktion einer auf  $r_1$  normierten Höhendifferenz  $h$ :

$$\frac{\Delta v}{v_{Kr1}} = \frac{\sqrt{2 \cdot h + \sqrt{h+2}}}{\sqrt{(h+2) \cdot (h+1)}} - 1 \quad \text{mit} \quad h = \frac{r_2 - r_1}{r_1} \quad (8.24)$$

Ist der Radius der Zielbahn bekannt, dann kann man den Geschwindigkeitsbedarf für den koplanaren *Hohmann*-Bahnübergang für  $r_1 = 6720$  km wie folgt abschätzen:

GEO	$r_2 = 42000$ km	$h = 5,6$	$\frac{\Delta v}{v_{Kr1}} = 0,507$
Mond	$r_2 = 380000$ km	$h = 58$	$\frac{\Delta v}{v_{Kr1}} = 0,508$

Der Geschwindigkeitsbedarf des Hohmann-Übergangs besitzt ein Maximum<sup>1</sup>. Unter bestimmten Bedingungen ( $r_2/r_1$  sehr groß, bzw. große Inklinationsänderung) kann eine andere Bahnübergangsmethode, der Drei-Impuls-Transfer theoretisch günstiger sein (siehe nächsten Abschnitt), wie aus Abbildung 8.5 ersichtlich.

<sup>1</sup> Für den Abflug aus einer niedrigen Erdumlaufbahn liegt das Maximum z.B. bei knapp 100,000km, also bei knapp einem Viertel der Entfernung Erde- Mond ( $h=14.58$ ,  $\Delta v/v_{Kr1} = 0,536$ ).

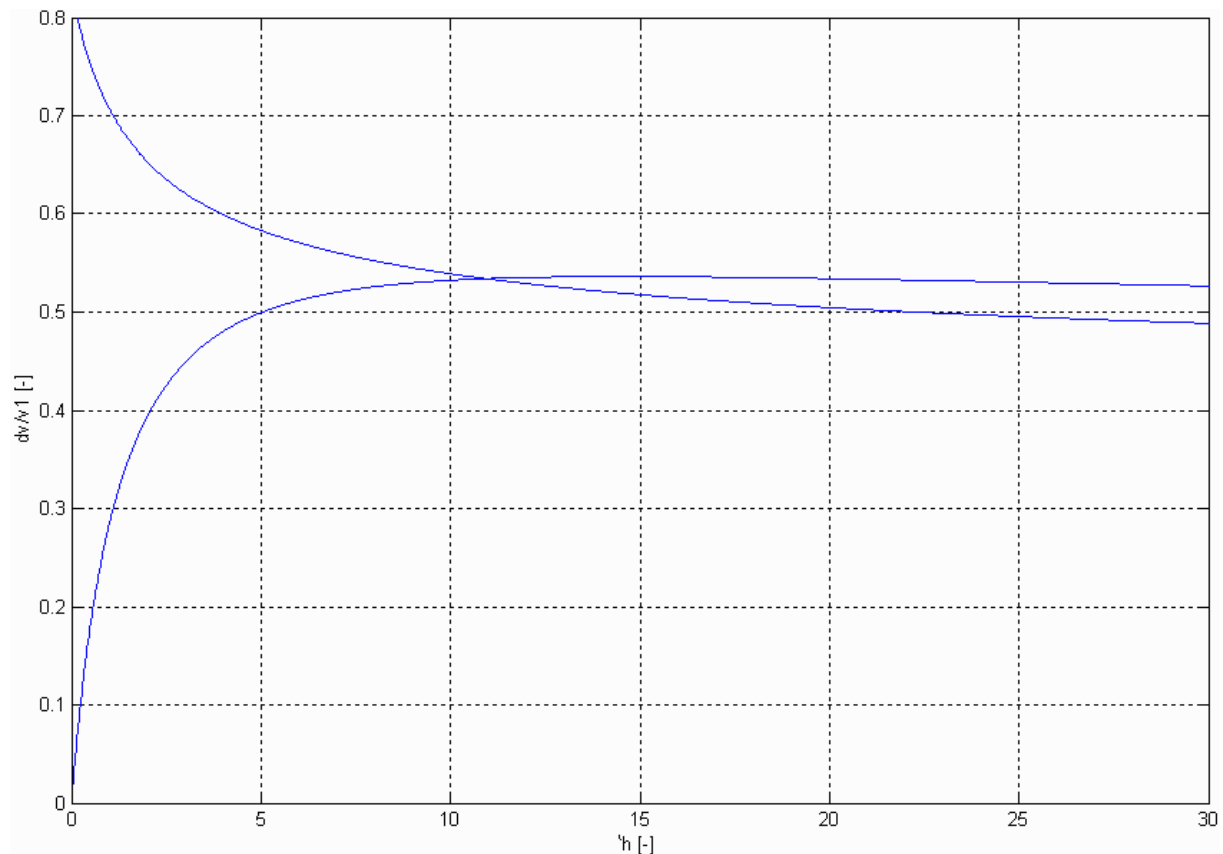


Abb.8.5: Geschwindigkeitsbedarf Hohmann vs. 3-Impuls-Transfer

Der Preis für einen geringeren Geschwindigkeitsbedarf bei hohem Radienverhältnis ist eine weitaus größere Transferzeit (theoretisch unendlich) für die Drei-Impuls-Bahn. Die Zeit für den *Hohmann*-Transfer hingegen kann errechnet werden mit:

$$T_{Trans} = \frac{T_{Ellipse}}{2} = \mathbf{p} \cdot \sqrt{\frac{a^3}{\mathbf{g} \cdot M}} \quad (8.25)$$

### Drei-Impuls-Bahnübergang / Bi-elliptischer Transfer

Der Grundgedanke hinter dem 3-Impuls-Bahntransfer ist, zunächst von der Ausgangsbahn auf Entweichgeschwindigkeit zu beschleunigen. „Unendlich weit“ von der Erde entfernt genügt dann ein zweites, „unendlich kleines“ Geschwindigkeitsmanöver, um wieder in das Schwerfeld der Erde einzutreten - auf einer Parabel mit dem Perigäumsabstand  $r_2$ . Mit Hilfe eines dritten Manövers erfolgt dann das Abbremsen auf die Kreisbahngeschwindigkeit der Zielbahn. Für den Gesamt-Geschwindigkeitsbedarf kann man für den idealen Fall schreiben:

$$\Delta v_{tri} = \Delta v_1 + \Delta v_\infty + \Delta v_2 = (v_{E1} - v_{Kr1}) + 0 + (v_{E2} - v_{Kr2})$$

bzw. mit  $(v_E = \sqrt{2} \cdot v_{Kr})$ :

$$\Delta v_{tri} = (\sqrt{2} - 1) \cdot (v_{Kr1} + v_{Kr2}) \quad (8.26)$$

Offensichtlich lohnt sich diese Vorgehensweise für kleine Werte von  $r_2/r_1$  nicht, da hier der Hohmann-Transfer natürlich besser abschneidet als ein Flug „in die Unendlichkeit“ und zurück. Wie jedoch aus Abbildung 8.5 ersichtlich, verliert der Hohmann-Transfer seinen Vorsprung für große Werte von  $h$ .

In der Praxis hat der Drei-Impuls-Transfer jedoch einen entscheidenden Nachteil: die Transferzeit. So dauert es natürlich „unendlich lange“ bis man auf einer Parabelbahn das Schwerefeld der Erde verlässt. In Praxis wählt man daher einen endlichen Wert für  $r_2$ . Das führt zwar zu einem geringfügig höheren Gesamt-Geschwindigkeitsbedarf (der 2.Kick ist nicht mehr Null!), jedoch bleibt dafür die Transferzeit endlich. Die Bahn besteht dann im Endeffekt aus 2 Halbellipsen mit gleichem Apogäumsabstand, jedoch verschiedenen großen Halbachsen. Daher spricht man in diesem Fall auch von einem „**Bi-elliptischen Transfer**“. Der dafür notwendige Geschwindigkeitsbedarf kann leicht mit den Formeln (8.03), (8.21) und (8.22) errechnet werden

### Weak Stability Transfer

Eine Abart des 3-Impuls-Übergangs ist der „Weak Stability Transfer“. Bisher waren wir bei der Analyse von Freiflugbahnen immer von eingeschränkten Zweikörper-Problemen ausgegangen. In der Realität gibt es jedoch Drittkörperstörungen anderer Himmelskörper (vgl. Kapitel 8.3). In der Regel wurden diese Störungen immer als „Hindernisse“ für die energieoptimierten Hohmann-Transfers betrachtet. Seit einigen Jahren werden jedoch Methoden analysiert, wie man diese Störungen zu seinen Gunsten nutzen kann<sup>1</sup>. Die resultierenden Bahnen ähneln den Drei-Impuls-Bahnen, bei denen der zweite Impuls nicht durch Raketentriebwerke, sondern eben durch besagte Drittkörper (z.B. Sonne und Mond bei der Mond-Transferbahn) geleistet wird. In großer Entfernung (Größenordnung  $10^6$ km) von der Erde ist der Bereich, in welchem dieses bewerkstelligt werden kann. Aufgrund des ungefähren Gleichgewichts der Anziehungskräfte von Sonne, Mond und Erde in diesem Grenzbereich wird diese Region als „**Weak Stability Boundary**“ (**WSB**) bezeichnet. Für Transfers zum Mond spart man sich auf diese Weise bis zu 200m/s und mehr gegenüber der Hohmann-Bahn. Die Transferzeit steigt dabei jedoch auf etliche Wochen.

### Änderung der Bahnebene/Inklination

In den vorangegangenen Abschnitten wurde der Übergang zwischen 2 Bahnen behandelt, die in der gleichen Bahnebene liegen. Nun soll der Übergang zwischen 2 Bahnen folgen, die in unterschiedlichen Ebenen liegen. In der Praxis tritt dies zum Beispiel nach dem Start auf. Konkretes Bsp. wäre z.B. ein Start vom Weltraumbahnhof Kennedy Space Center (= KSC / Cape Canneveral) auf. Das KSC liegt auf einer Breite von 26,5 Grad Nord. Zunächst kann man also nur in Orbits von 26.5° Inklination oder mehr einschließen (Großkreis!). Soll eine Äquatorbahn erreicht werden (Inklination 0°), so startet man zunächst (zur maximalen Nutzung der Erdrotation) vom KSC nach Osten in eine inklinierte Bahn. Dann ist das Raumfahrzeug nach Erreichen des Erdorbits in einer durch seinen Geschwindigkeitsvektor

---

<sup>1</sup> Siehe z.B. W. Seefelder: „Lunar Transfer Orbits utilizing Solar Perturbations and Ballistic Capture“, LRT Dissertation, 2002.

und den Radiusvektor zum Erdmittelpunkt bestimmten Bahnebene. Dieser Sachverhalt wird in der folgenden Abbildung dargestellt.

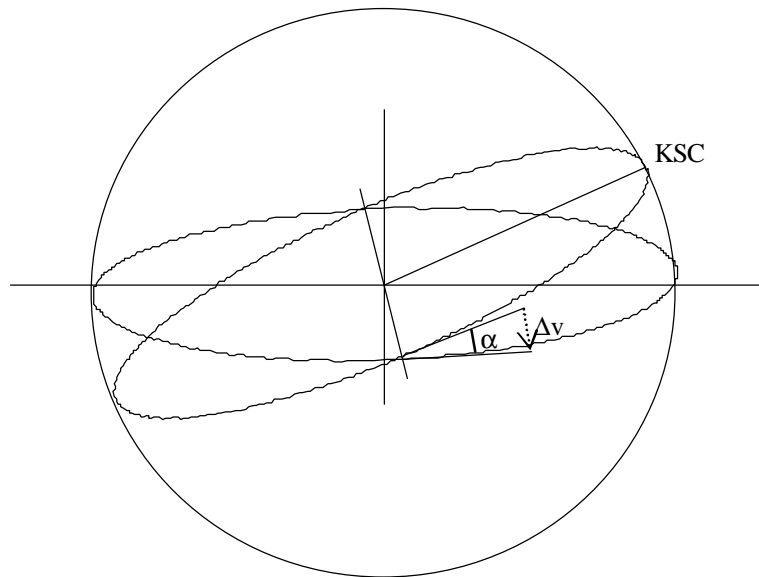


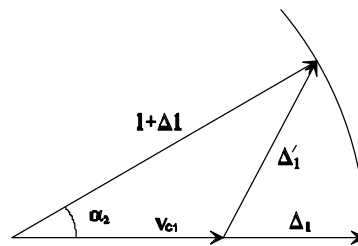
Abbildung 8.6: Injektion und Bahnebene

Zur Überführung in eine äquatoriale Umlaufbahn muss man den Geschwindigkeitsvektor entsprechend drehen. Dies lässt sich am einfachsten am Schnittpunkt der beiden Bahnen, am "Knoten" zeigen. Dort ergibt einen Geschwindigkeitsbedarf, welcher von der Bahngeschwindigkeit und der Inklinationsdifferenz abhängig ist. In Abbildung 8.6 erscheint er als gestrichelter Vektor.

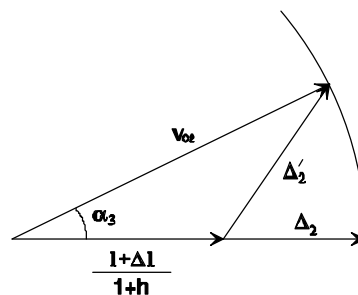
Ganz allgemein soll nun der Übergang zwischen 2 Bahnen behandelt werden. Diese sollen durch 2 Kreisbahnen mit unterschiedlichem Bahnradius dargestellt werden, die in 2 unterschiedlichen Bahnebenen liegen. Der Aufwand zur Drehung eines Geschwindigkeitsvektors ist abhängig von dessen Größe. Also wäre es günstig, die Bahndrehung möglichst im Apozentrum der elliptischen Übergangsbahn durchzuführen, weil dort die Bahngeschwindigkeit am geringsten ist. Hieraus ergibt sich die Frage nach der optimalen Neigung der Übergangsbahn. Am Beispiel einer Hohmann-Übergangsbahn zur *polaren*<sup>1</sup> Erdumlaufbahn sollen die einzelnen Schritte dargestellt werden. Dabei sollen zur Vereinfachung die jeweiligen Impulse zur Änderung des Geschwindigkeitsvektors an den Schnittpunkten (den Knoten) der jeweiligen Bahnen stattfinden. Das ergibt folgenden Ablauf (Distanzen werden dabei wieder mit  $r_1$ , Geschwindigkeiten wieder mit  $v_{Kr1}$  normiert):

- Start von einem Startplatz mit der geographischen Breite  $26.5^\circ$  in eine niedrige Erdumlaufbahn
- Im Schnittpunkt der Ausgangskreisbahn (Inklination  $\alpha_1$ ) und der Übergangsellipse, dem Knoten, der über dem Äquator liegt, erfolgt ein Kickimpuls  $\Delta'_1$  so, dass im Apogäum die Höhe der Zielkreisbahn erreicht wird und gleichzeitig eine Bahnneigungsänderung um  $\alpha_2$  gegenüber  $\alpha_1$  erfolgt.

<sup>1</sup> Die folgende Herleitung geht der Einfachheit halber von einer *Erhöhung* der Inklination aus, da so auf negative Winkel verzichtet werden kann. Allerdings gelten die resultierenden Formeln auch für negative Inklinationsänderungen. Der Ablauf der Manöver ist vergleichbar z.B. mit der STS-99 Radarmission (G. Thiele).



- Die maximale Höhe wird auf der anderen Seite der Erde wieder über dem Äquator erreicht. Dort wird mit einem weiteren Kickimpuls  $\Delta_2'$  die Bahn zirkularisiert und die Bahn um einen weiteren Winkel  $\alpha_3$  geneigt, dass genau die Inklination der Zielbahn  $\alpha_4$  erreicht wird.



Die gesamte Bahnneigungsänderung  $\alpha$  ist somit

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_4$$

Von der Verteilung der Bahnneigungsänderung  $\mathbf{a}$  auf Perigäums- oder Apogäumskick hängt der gesamte Energiebedarf für dieses Manöver ab. Ohne Bahnneigungsänderung gilt für den Kick  $\Delta_1$  auf die Hohmann-Übergansellipse

$$(1) \quad \Delta_1 = \left( \frac{1+h}{1+h/2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \quad \text{also} \quad \Delta_1 + 1 = \left( \frac{1+h}{1+h/2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(2) \quad (\Delta_1')^2 = (1+\Delta_1)^2 + 1^2 - 2(1+\Delta_1)\cos\mathbf{a}_2 = \Delta_1'^2 + 2(1+\Delta_1)(1-\cos\mathbf{a}_2)$$

Der Kickimpuls  $\Delta_1'$  zur Bahnneigungsänderung verursacht keine Geschwindigkeitsänderung und es gilt:

$$\left| \vec{v}_{Kr1} + \bar{\Delta}_1' \right| = \left| \vec{v}_{Kr1} + \bar{\Delta}_1 \right| = 1 + \Delta_1$$

$$\Delta_1' - \Delta_1 = \frac{\Delta_1'^2 - \Delta_1^2}{\Delta_1' + \Delta_1}$$

was sich aus dem Hohmann-Übergang durch die Höhe  $h$  ausdrücken lässt:



$$1 + \Delta_1 = \left( \frac{1 + \gamma h}{1 + \gamma h/2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2(\Delta_1 + 1)(1 - \cos \mathbf{a}_2)}{\Delta_1' + \Delta_1}$$

Dasselbe gilt für den Kick  $\Delta_2'$  in die Zielkreisbahn

$$\left| \frac{1 + \Delta_1}{1 + \gamma h} + \Delta_2 \right| = \left| \frac{1 + \Delta_2}{1 + \gamma h} + \Delta_2' \right| = v_{Kr2}$$

Für den Kick  $\Delta_2$  auf die Zielkreisbahn

$$(3) \quad \Delta_2 = \frac{1}{(1 + \gamma h/2)^{\frac{1}{2}}} \left[ 1 - \frac{1}{(1 + \gamma h/2)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

Das zweite Kepler'sche Gesetz liefert die Apogäumsgeschwindigkeit

$$v_{Apo} = \frac{1 + \Delta_1}{1 + \gamma h} \quad \text{bei max. } \Delta_1'^2 + 2\Delta_1 + 2$$

und aus dem Gleichsetzen der Vis-Viva-Gleichungen beider Kreisbahnen erhält man die Kreisgeschwindigkeit auf der Zielbahn

$$v_{Kr2} = \frac{v_{Kr1}}{(1 + \gamma h)^{\frac{1}{2}}}$$

Der Kosinussatz liefert jeweils den Geschwindigkeitsbedarf für beide Bahnneigungsänderungen.

$$\begin{aligned} (\Delta_1')^2 &= (1 + \Delta_1)^2 + 1 - 2(1 + \Delta_1)\cos \mathbf{a}_2 \\ (4) \quad (\Delta_2')^2 &= \left( \frac{1}{(1 + \gamma h)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 + \left( \frac{1 + \Delta_1}{1 + \gamma h} \right)^2 - 2 \frac{1 + \Delta_1}{1 + \gamma h} \frac{1}{(1 + \gamma h)^{\frac{1}{2}}} \cos \mathbf{a}_3 \end{aligned}$$

Den Geschwindigkeitsbedarf, der zur Neigung der Bahn aufgewendet werden muss, lautet

$$\Delta_{\text{Bahnneigung}} = \left| \bar{\Delta}_1' - \bar{\Delta}_1 \right| + \left| \bar{\Delta}_2' - \bar{\Delta}_2 \right| \quad (8.27)$$

Es ist jedoch von größerem Interesse den Geschwindigkeitsbedarf für den gesamten Bahnübergang zu minimieren

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{Hohmann\_und\_Bahnneigung}} &= \bar{\Delta}'_1 + \bar{\Delta}'_2 = \\ &= \left[ \Delta_1^2 + 2(1 + \Delta_1) - 2(1 + \Delta_1) \cos \alpha_2 \right]^{1/2} + \\ &\quad \left[ \Delta_2^2 + 2 \frac{1 + \Delta_1}{(1 + h)^{3/2}} - 2 \frac{1 + \Delta_1}{(1 + h)^{3/2}} \cos(\alpha - \alpha_2) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (8.28)$$

Für gegebene Bahnneigungsänderungen  $\alpha$  und Höhenunterschiede  $h$  setzt man die Ableitung der Funktion nach  $\alpha_2$  gleich Null

$$\frac{d}{d\alpha_2} \left( \Delta_1' + \Delta_2' \right) = 0$$

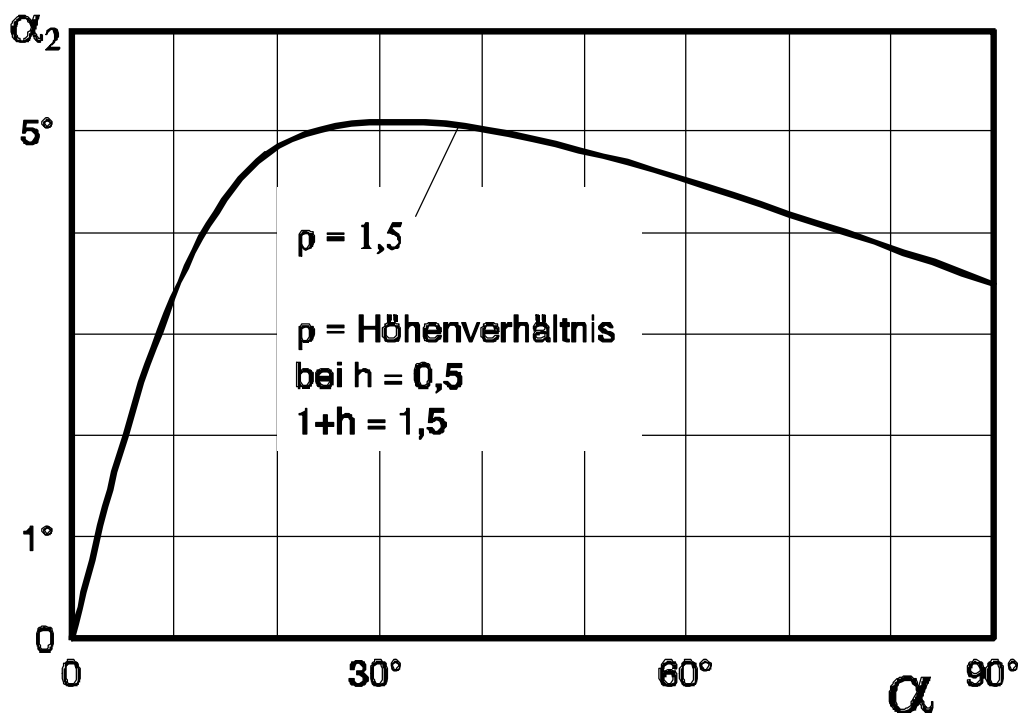
und erhält damit

$$(1 + h)^{3/2} \frac{\sin \alpha_2}{\sin(\alpha - \alpha_2)} = \frac{\Delta_1'}{\Delta_2'}$$

oder

$$\frac{1 - \cos^2 \alpha_2}{1 - \cos^2(\alpha - \alpha_2)} = \frac{\Delta_1'^2 + 2(1 + \Delta_1)(1 - \cos \alpha_2)}{(1 + h)^3 \Delta_2'^2 + 2(1 + \Delta_1)(1 + h)^{3/2} [1 - \cos(\alpha - \alpha_2)]}$$

In Abhängigkeit von  $\alpha$  und  $h$  erhält man für  $\alpha_2$  eine Schar von Kurven des minimalen Energieaufwands für den Bahnübergang:



Aus diesen Überlegungen sind Einsparungen des Geschwindigkeitsbedarfs von bis zu ca. 200m/s möglich. Im vorher verwendeten Beispiel (Satellit vom KSC in die geostationäre Umlaufbahn) beträgt der Gewinn aus einer 200km-Umlaufbahn gerade noch 18m/s.

Üblicherweise wird deshalb die Inklinationsänderung bei einer solchen Injektion komplett im Zielorbit vorgenommen; dadurch kann auf eine niedrige Parkbahn verzichtet, was die Mission technisch vereinfacht.

Auch hier ist zu bemerken, dass ab einem bestimmten Höhenunterschied  $h$  ein Drei-Impuls-Bahnübergang mit einem geringeren Geschwindigkeitsbedarf als bei Hohmann zu bewerkstelligen ist. Das liegt einfach daran, dass in großer Entfernung von der Erde der Geschwindigkeitsvektor klein ist und deshalb einfach zu drehen ist.

## 9 Umweltfaktoren des Weltraums

Raumfahrzeuge und Raumstationen unterliegen einer Vielzahl von Umgebungseinflüssen. Diese Einflüsse können direkt oder indirekt auf den Orbit, auf Beschaffenheit und Zustand der verwendeten Werkstoffe, auf an Bord befindliche Besatzungsmitglieder oder auf Experimente und deren Betrieb einwirken. Im Folgenden werden die wesentlichen Umweltfaktoren und deren Auswirkungen beschrieben.

### 9.1 Strahlung

Die Erforschung der Weltraumstrahlung begann bereits Anfang dieses Jahrhunderts. Einschlägige Ergebnisse wurden jedoch sehr viel später durch die ersten Satelliten gewonnen. Bis heute ist ein großer Teil der Strahlungsumwelt noch unerforscht. Man unterscheidet mehrere Arten der Strahlung:

- Elektromagnetische Strahlung:
  - Solare Strahlung
  - Albedostrahlung
  - Thermalstrahlung
- Korpuskularstrahlung:
  - Galactic Cosmic Radiation
  - Solar Cosmic Radiation:
    - Sonnenwind
    - Sonneneruption
  - Van-Allen-Gürtel

Der Großteil schädlicher Strahlungsanteile kann die Erdatmosphäre nicht durchdringen, doch im Weltraum sind Mensch und Material ihrem Einfluss schutzlos ausgeliefert.

#### Elektromagnetische Strahlung

Elektromagnetische Wellen werden nach ihrer Wellenlänge in verschiedene Bereiche eingeteilt, die in Tabelle 9.1 zusammengefasst sind.

Tabelle 9.1: Elektromagnetische Strahlung

Bezeichnung	Wellenlänge
$\gamma$ -Strahlung	< 0,1 nm
Röntgen-Strahlung	0,1 - 10 nm
Ultraviolett (UV)	10 - 300 nm
sichtbares Licht	300 - 700 nm
Infrarot (IR)	0,7 - 1000 $\mu\text{m}$
Mikrowellen	1 - 1000 mm
Kurz-/Mittel-/Langwellen	>1m

### Solare Strahlung

Das Spektrum der elektromagnetischen Strahlung der Sonne entspricht in etwa dem eines schwarzen Strahlers bei 5900 K. Die gesamte mittlere Bestrahlungsstärke in der Erdbahn beträgt  $S = 1370 \text{ W/m}^2$  (Solarkonstante). Durch die leicht elliptische Bahn der Erde um die Sonne schwankt die aktuelle Solarkonstante zwischen 1353 und 1400  $\text{W/m}^2$ .

Die solare Strahlungsintensität  $S$  ist eine Funktion der Solarkonstante in Erdnähe  $S_E$  und der jeweiligen Entfernung von der Sonne  $r$  (in AE):

$$S = \frac{r_E^2}{r^2} \cdot S_E \quad \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad (9.1)$$

Die Entfernung der Erde von der Sonne ist dabei  $r_E$ . Die solaren Intensitäten verschiedener Himmelskörper sind in Tabelle 9.3 zusammengefasst.

Neben der Absorption bestimmter Spektrallinien in der Sonnenatmosphäre wird die solare Strahlung auch in der Erdatmosphäre gestreut und in den Absorptionsbanden der atmosphärischen Gase absorbiert. Dadurch reduziert sich die von einer terrestrischen Fläche empfangene Leistung auf stets weniger als etwa  $747 \text{ W/m}^2$  (wird weiter reduziert durch Wolken, Schrägeinstrahlung, etc.).

Die von der Sonne emittierte UV-Strahlung schädigt Kunststoffe, Farben, Klebstoffe, die meisten Glasarten und die Matrixmaterialien in Verbundwerkstoffen. Schutz bieten UV-absorbierende Farben und das Umhüllen der bestrahlten Teile mit Metallfolien. Die Röntgenstrahlen der Sonne haben eine relativ niedrige Intensität, so dass selbst der relativ schwache Schutz eines Raumanzuges zur Abschirmung ausreicht. In der Atmosphäre verursachen die UV- und Röntgenstrahlen Dissoziations- und Ionisationsprozesse, die u.a. zur Bildung des atomaren Sauerstoffs und damit auch zur Ozonbildung führen.

Aufgrund des Abschattungseffektes der Erde sind Raumfahrzeuge speziell in niedrigen Erdorbits stark schwankenden thermischen Lasten ausgesetzt, die zu Materialverformung und Ermüdung führen können. Der Wärmeübergang durch Strahlung ist dabei stark abhängig von der Temperaturdifferenz beider Medien

$$\dot{Q}_{Rad} = A_e \cdot \epsilon \cdot \sigma \cdot (T_{Sat}^4 - T_{\infty}^4)$$

Dabei ist  $A_e$  die abstrahlende Fläche,  $\epsilon$  dessen Emissionskoeffizient und  $\sigma$  die Stephan-Boltzmann-Konstante.

Die Absorption der Sonnenstrahlung in einer Kugel ist proportional zu ihrer Projektionsfläche. Nimmt man die Sonne als punktförmige Strahlungsquelle an, kann die Kugel über ihrer gesamten Oberfläche gegen den Hintergrund des Alls thermisch wieder abstrahlen. Die Leistungsbilanz der Strahlung lautet dann:

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha \cdot S \cdot A_a - A_e \cdot \epsilon \cdot s \cdot T_{sat}^4$$

mit  $\alpha$ , dem Absorptionskoeffizienten,  $S$  der eingestrahnten Leistung und  $A_a$  der Projektionsfläche des Körpers in Einstrahlungsrichtung. Die Hintertemperatur ( $T_\infty \approx 3K$ ) ist um einige Größenordnungen geringer als die des Satelliten und kann daher - insbesondere angesichts der Potenzierung - vernachlässigt werden. Sobald das System im Gleichgewicht ist, ist der Energietransport über die Grenzen des Systems konstant:

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

Die sich einstellende Gleichgewichtstemperatur beträgt dann:

$$T = \sqrt[4]{\frac{S}{s} \cdot \frac{\alpha}{\epsilon} \cdot \frac{A_a}{A_e}} \quad [K] \quad (9.2)$$

$s$  = Stephan-Boltzmann-Konstante  $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$

$\epsilon$  = infrarotes Emissionsvermögen der Oberfläche

$\alpha$  = solares Absorptionsvermögen der Oberfläche

$A_e$  = abstrahlende Fläche

$A_a$  = bestrahlte Fläche (projiziert in Einstrahlrichtung)

Im Falle eines kugelförmigen Satelliten (z.B. Sputnik I) ist das Verhältnis der Flächen  $A_e/A_a = 4r^2p/r^2p = 4$ . Die Gleichgewichtstemperatur ist, wie aus Gleichung (9.2) ersichtlich, vorrangig von dem Verhältnis  $\alpha/\epsilon$  abhängig. Damit eröffnet sich eine einfache, Kosten sparende Methode, den Wärmehaushalt eines Raumfahrzeuges zu kontrollieren. In Tabelle 9.2 sind die Quotienten  $\alpha/\epsilon$  einiger Materialien aufgeführt.

Tabelle 9.2: Thermische Strahlungseigenschaften technischer Werkstoffe

Material	$\alpha$	$\epsilon$	$\alpha/\epsilon$
Weißer Farbe	0,15 - 0,25	0,85 - 0,9	0,18 - 0,28
Schwarze Farbe	0,94	0,9	1,04
Aluminiumfarbe	0,3	0,25	1,2
Aluminium	0,08 - 0,35	0,04 - 0,1	2,0 - 3,5
Gold	0,4	0,06	6,7
Rostfreier Stahl	0,5	0,13	3,8
Titan	0,8	0,18	4,4

## Albedostrahlung

Den mittleren Reflexionskoeffizienten eines Planeten bezüglich der auf ihn fallenden solaren Strahlung bezeichnet man als Albedo. Der angegebene Mittelwert der Albedo bezieht sich auf das Mittel der unter den vorhandenen Oberflächenmaterialien und (bei vorhandener Atmosphäre) auf eine mittlere Wolkenbedeckung. Die reflektierte Strahlung stellt gemeinsam mit der direkten Sonnenstrahlung und der Thermalstrahlung der Erde den wesentlichen Beitrag der Wärmebelastung von Raumfahrzeugen im niedrigen Orbit dar, wobei für die Albedostrahlung ein Mittelwert von  $410 \text{ W/m}^2$  in Erdnähe angenommen werden kann. Für die Albedo der Planeten des Sonnensystems werden die in Tabelle 9.3 aufgeführten Werte benutzt.

*Tabelle 9.3: Solare Intensität der Planeten und deren Albedo*

Himmelskörper	Solare Intensität [ $\text{W/m}^2$ ] ( $S_E = 1370 \text{ W/m}^2$ )	Albedo (Koeffizient)
Merkur	$666 \cdot S_E$	0,096
Venus	$1,91 \cdot S_E$	0,760
Erde	$1,00 S_E$	0,290
Mars	$0,43 \cdot S_E$	0,150
Jupiter	$0,04 \cdot S_E$	0,510
Saturn	$0,01 \cdot S_E$	0,420
Uranus	$0,003 \cdot S_E$	0,660
Neptun	$0,001 \cdot S_E$	0,620
Pluto	$0,0006 \cdot S_E$	0,630
Erdmond	$1,00 S_E$	0,070

## Thermalstrahlung

Zusätzlich zur Albedostrahlung geht von der Erde durch ihre Eigentemperatur noch eine Thermalstrahlung aus. Das Spektrum dieser Strahlung entspricht der eines schwarzen Körpers bei einer Temperatur von 288 K. Durch Absorptionsverluste in der Atmosphäre beträgt die thermische Strahlungsleistung, die auch im Erdschatten auf ein erdnahees Raumfahrzeug wirkt, etwa  $220 \text{ W/m}^2$ . Dieses muss im Thermalbudget ebenfalls berücksichtigt werden.

## Korpuskularstrahlung

Als Korpuskularstrahlung bezeichnet man den Teilchenstrom aus Elementarteilchen und Ionen hoher Energie/Geschwindigkeit. Sie bildet zusammen mit der sehr kurzwelligen elektromagnetischen Strahlung (Röntgen- und  $\gamma$ -Strahlung) die Klasse der ionisierenden Strahlung, die imstande ist, in organische und anorganische Materie einzudringen und dabei ihre Energie an die Materie abzugeben.

Die ionisierende Strahlung im erdnahe Raum setzt sich im Wesentlichen aus sechs Arten von Teilchen, die in Tabelle 9.4 aufgeführt sind, und der elektromagnetischen  $\gamma$ -Strahlung zusammen.

*Tabelle 9.4: Korpuskel der radioaktiven Strahlung*

<b>Teilchen</b>	<b>Ladung</b>	<b>Ruhemasse</b>
Elektronen ( $\beta$ -Strahlung)	$-e_0$	$m_0$
Positronen	$+e_0$	$1836,1 \cdot m_0$
Protonen	$+e_0$	$1836,1 \cdot m_0$
Neutronen	0	$1838,7 \cdot m_0$
He-Kerne ( $\alpha$ -Strahlung)	$2e_0$	$7349,6 \cdot m_0$
Schwere Kerne	$>e_0$	$>7349,6 \cdot m_0$

$e_0 = \text{Elementarladung } 1,60210 \times 10^{-19} \text{ C}$   
 $m_0 = \text{Ruhemasse des Elektrons } 9,10814 \times 10^{-31} \text{ kg}$

Die Energie eines Teilchens ist gegeben durch folgende relativistische Beziehung:

$$E = \frac{m}{2} \cdot v^2 \quad \text{mit} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (9.3)$$

$m = \text{relativistische Masse}$   
 $v = \text{Teilchengeschwindigkeit}$   
 $c = \text{Lichtgeschwindigkeit}$

Für die  $\gamma$ -Strahlung gilt, da es sich nicht um ein Teilchen handelt (siehe oben), hingegen die quantentheoretische Beziehung:

$$E = \frac{h \cdot c}{\lambda} \quad (9.4)$$

$h = \text{Plancksches Wirkungsquantum}$   
 $\lambda = \text{Wellenlänge}$

### Teilchen solaren Ursprungs („Solar Cosmic Radiation“)

Der von der Sonne kommende Teilchenstrom (Solar Cosmic Radiation-SCR) kann in zwei Komponenten unterteilt werden: zum einen den stetigen niederenergetischen Sonnenwind, zum anderen die hochenergetischen Teilchen, die bei Sonneneruptionen (Solar Flares) frei werden.



## **Sonnenwind**

Der Teilchenstrom des Sonnenwindes setzt sich im Wesentlichen aus Protonen (etwa 99 %),  $\alpha$ -Teilchen (etwa 1%) und wenigen Elektronen zusammen, wobei die Teilchenenergien bei 1keV liegen. Diese Teilchen werden mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 1000 km/s in den Raum gesandt. In Erdnähe ist die Geschwindigkeit im Mittel auf 400 km/s abgesunken, und die Teilchendichte beträgt 3 bis 40 1/cm<sup>3</sup>. Geschwindigkeit und Dichte können in Zeiträumen von wenigen Tagen durch Schwankungen der Sonnenaktivität Veränderungen unterliegen.

## **Solar Flares**

Als Solar Flares (Sonneneruption) bezeichnet man hochkonzentrierte, explosionsartige Freisetzungen von Energie innerhalb der solaren Atmosphäre, die optisch als kurzlebige Aufhellung eng begrenzter Gebiete der Chromosphäre zu beobachten sind. Der dabei ausgesandte Teilchenstrom besteht zu etwa 89% aus sehr schnellen Protonen (ca. 30 MeV), zu 11% aus  $\alpha$ -Teilchen und aus etwa 1% schweren Kernen, die Energien von 10 MeV bis zu mehreren hundert MeV erreichen. Die Solar Flares stellen die größte Gefahr für die bemannte Raumfahrt dar.

## Teilchen galaktischen Ursprungs

Unter Galactic Cosmic Radiation (GCR) versteht man extrem hochenergetische Partikel, deren Quelle außerhalb des Sonnensystems liegt. Der Fluss der kosmischen Teilchen ist sehr viel schwächer als der von der Sonne ausgehende Teilchenstrom. Er besteht aus ca. 85 % Protonen, 14%  $\alpha$ -Teilchen, aus schweren Kernen, Elektronen und Positronen. Die Energien liegen im Mittel bei 10 GeV. Die Ablenkung der GCR-Teilchen im Erdmagnetfeld ist sehr gering, sodass als einziger Schutz auf der Erdoberfläche die Atmosphäre dient.

## Van-Allen-Strahlungsgürtel

Im Erdmagnetfeld werden durch dessen dipolähnliche Struktur geladene Teilchen (Elektronen und Protonen) in den *Van-Allen-Strahlungsgürteln* (Van-Allen-Belts VAB) festgehalten. Die Teilchendichte variiert mit dem Abstand von der Erde, sowie der geomagnetischen Breite und ist am Äquator am höchsten. Die durch Solar Flares freigesetzten hochenergetischen Protonen werden nahezu vollständig abgelenkt oder in VAB gefangen, sodass sie in niederen Erdbits mit Inklinationen unter 60° keine Gefahr darstellen. Außerhalb dieses Bereichs können die Flarepartikel entlang der Feldlinien direkt in die Atmosphäre strömen, sodass Schutzmaßnahmen erforderlich sind.

## **Auswirkungen**

Als Auswirkungen der ionisierenden Strahlung auf Materialien können Fehlschaltungen und Schäden an elektronischen Bauteilen sowie die Zerstörung von Solarzellen auftreten. Beim Menschen kann es bei entsprechend hoher Strahlenbelastung zu Veränderungen des Erbgutes kommen und die Entwicklung von Krebs zur Folge haben.

## Schutzmaßnahmen

Im Weltall fehlt die schützende Wirkung der Erdatmosphäre, die den Großteil der schädlichen solaren und galaktischen Strahlung abhält. Deshalb müssen für Raumfahrzeuge Schutzmaßnahmen getroffen werden, um die Sicherheit der Besatzung zu gewährleisten.

- Aluminium stellt ein geeignetes Strahlenschutzschild dar, da es eine hohe Dichte besitzt und sehr leicht ist
- Niedrige, äquatoriale Orbits setzen ein Raumfahrzeug wesentlich geringeren Strahlungsintensitäten aus als polare oder interplanetare Bahnen
- Wählt man die Bahn unterhalb der *Van-Allen*-Strahlungsgürtel, wird die Strahlenbelastung durch das Erdmagnetfeld stark reduziert
- Leichte Elemente wie Wasserstoff, bzw. deren Anteil an Werkstoffkomponenten stellen ein geeignetes Material zur Strahlungsabsorption dar
- Die Besatzung kann man vor sporadisch auftretenden Solar Flares durch gut abschirmende Räume (Storm Shelters) schützen

## 9.2 Mikrogravitation

### Schwerelosigkeit versus Mikrogravitation

Früher war im Zusammenhang mit Weltraummissionen oft von Schwerelosigkeit die Rede. Vollkommene Schwerelosigkeit herrscht nur im Schwerpunkt eines Raumfahrzeuges, wenn sich Zentrifugalkraft und Gravitationskraft gerade die Waage halten. Oberhalb des Schwerpunktes ist die wirkende Gravitation leicht verringert, da sie eine Funktion Abstandes zur Zentralmasse ist (vgl. Kapitel 7.4). Unterhalb des Schwerpunktes wirkt entsprechend eine leicht verstärkte Gravitation. Umgekehrtes gilt für die Zentrifugalkraft. Dementsprechend wirken auf Körper oberhalb oder unterhalb des Massenschwerpunktes Kräfte bzw. Beschleunigungen (typischerweise im  $\mu\text{g}$ -Bereich). Auch Erschütterungen im Raumfahrzeuges (z.B. durch Geräte, Besatzung, Lageregelungstriebwerke, etc.) verursachen Beschleunigungen, die den Zustand idealer Schwerelosigkeit verhindern. Daher ist auch der Begriff Mikrogravitation treffender als der bildlichere Ausdruck Schwerelosigkeit.

Im Zustand der Mikrogravitation treten Phänomene auf, die auf der Erde gewöhnlich durch die Gravitation überlagert werden; so z.B. die Mahagoni-Konvektion und andere Effekte der Oberflächenspannung von Flüssigkeiten. Daher ist für viele Weltraum-Experimente in diesem Zusammenhang eine hohe Güte der Mikrogravitation (also möglichst nahe an der idealen Schwerelosigkeit) erwünscht.

## Oberflächenspannung / Mahagoni-Konvektion

Bei der Mahagoni-Konvektion führt die Temperaturabhängigkeit der Oberflächenspannung zu einem Gradienten der Tangentialspannung, wodurch die angrenzende Flüssigkeit bewegt wird. Ein Maß für dieses Verhalten ist das Verhältnis von Massenkräften zu Volumenkräften, beide jeweils auf die Volumeneinheit bezogen. Die Massenkraft pro Volumeneinheit ist die Summe aller wirkenden Beschleunigungen multipliziert mit der Dichte. Die Oberflächenkraft pro Volumeneinheit ist die Oberflächenspannung, die in N/m angegeben wird, dividiert durch eine kennzeichnende Fläche.

Das Verhältnis beider Kräfte wird ausgedrückt durch die dimensionslose Bondzahl:

$$N_{Bo} = \frac{\text{Gravitationskraft}}{\text{Oberflächenspannungskraft}} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')L^2 g}{\mathbf{s}} \quad (9.5)$$

mit  $\rho$  Dichte des Tropfens [kg/m<sup>3</sup>]  
 $\rho'$  Dichte des umgebenden Mediums [kg/m<sup>3</sup>]  
 $L$  charakteristische Längeneinheit des Tropfens [m]  
 $\sigma$  Oberflächenspannung [N/m]

Bei einer Bondzahl  $N_{Bo} = 1$  sind Gravitations- und Oberflächenspannungskräfte gleich groß,  $N_{Bo} = 0$  bedeutet die vollständige Unwirksamkeit der Gravitationskraft (freier Fall, Schwerelosigkeit) und  $N_{Bo} = 8$  wäre eine Flüssigkeit, die sich auf eine ebenen Fläche mit der Filmdicke gleich Null ausbreitet.

Das dynamische Verhalten wird zum dargestellt durch das Verhältnis des Staudrucks zu dem aus der Oberflächenspannung resultierenden Druck, die ebenfalls dimensionslose Weberzahl:

$$N_{We1} = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Oberflächenspannungskraft}} = \frac{v^2 \cdot \mathbf{r} \cdot L}{\mathbf{s}} \quad (9.6)$$

mit  $v$  Geschwindigkeit des Strahls [m/s]  
 $\mathbf{r}$  Dichte der Flüssigkeit [kg/m<sup>3</sup>]  
 $L$  Durchmesser des Strahls [m]  
 $\sigma$  Oberflächenspannung [N/m]

Große Weberzahlen sagen aus, dass der Flüssigkeitsstrahl in „unendlich kleine“ Partikel zerstäubt, bei kleinen Weberzahlen kann es lediglich zur Tropfenbildung kommen. Das ist z.B. ein wichtiges Kriterium bei der Treibstoffeinspritzung in die Brennkammer von orbitalen Antriebssystemen.

Das Verhalten von Flüssigkeiten ist ebenfalls von besonderem Interesse, zum Beispiel in teilweise gefüllten Treibstofftanks. In einem normalen Tankbehälter ist es nämlich durchaus möglich, dass bei nur teilweise gefülltem Tank im Moment der Triebwerkszündung kein Treibstoff am Tankauslass ist. Im Rahmen der Vorbereitungen für das APOLLO - Programm wurden diese Fragen bereits vor 30 Jahren grundsätzlich und wie das Ergebnis dieser Flüge zeigte, auch grundsätzlich erfolgreich gelöst. ("Fallturm " in Cleveland; Ohio). Die nach wie vor gängigsten Lösungen dieser Problematik sind

- Elastische Kunststoff-**Membrane** (pressen durch Spannung im Material den Treibstoff zum Auslass)
- **Vorbeschleunigung** durch kleine Feststoff-Treibsätze (durch die resultierende Beschleunigung „fallen“ die Treibstoffe nach „unten“ zum Auslass)
- **„Propellant Management Devices“ (PMDs)**: Eine siebartige Vorrichtung am Auslass sorgt dafür, dass immer eine kleine Menge Treibstoff im Bereich des Auslasses ist (dieser setzt sich aufgrund der Oberflächenspannung am PMD ab).

### Auswirkungen der Mikrogravitation auf den Menschen

Die Auswirkungen der Mikrogravitation können grob in folgende Bereiche eingeteilt werden:

- Verlagerung von Körperflüssigkeiten
- Desorientierung und „Weltraumkrankheit“ („Space Motion Sickness“, Übelkeit)
- Knochen- und Muskelschwund
- Abbau von Knochenmark und Schwächung des Immunsystem

## 9.3 Erdmagnetfeld

Das Erdmagnetfeld ist ein dipolares Feld, dessen Zentrum 500 km außerhalb des Erdmittelpunktes liegt und das um  $11,5^\circ$  zur Erdachse geneigt ist [4].

### Auswirkungen des Erdmagnetfeldes

Die Auswirkungen des Erdmagnetfeldes lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Geladene Teilchen werden gefangen, was zu den *Van-Allen-Belts* (vgl. Kapitel 9.1) führt.
- Raumflugkörper erfahren eine elektromagnetische Induktion
- Teilchen solaren Ursprungs werden zum Großteil abgelenkt oder gefangen

## 9.4 Vakuum

Das im Weltraum herrschende Vakuum stellt einen wesentlichen Faktor für die Auslegung von Raumfahrzeugen dar. Der Wärmeaustausch kann nur durch Strahlung erfolgen, denn aufgrund der fehlenden Materie findet kein konvektiver Austausch statt. Für die bemannten Raumfahrt und einige unbemannte Systeme muss eine Druckkabine zur Verfügung stehen, um das Überleben oder die Funktion zu ermöglichen. Druckkabinen erfordern eine aufwendige Kontrolle und Energieversorgung.

Durch Ausgasung werden Materialien im Vakuum geschädigt und ermüden. Weiterhin treten bei einem Großteil aller Werkstoffe Diffusions- und Sublimationseffekte auf.

Es gibt keine scharf definierte Grenze zwischen Atmosphäre und Vakuum<sup>1</sup>. Daher tritt in der Praxis in niedrigen Umlaufbahnen auch Luftwiderstand auf. Im Kapitel 10 wird näher darauf eingegangen werden.

---

<sup>1</sup> Juristisch ist die Grenze jedoch klar definiert und liegt bei 100km. Darunter gelten die jeweiligen nationalen Hoheitsrechte sowie die Luftverkehrsordnungen.

# 10 Datenübertragung

Die Datenübertragung spielt eine zentrale Rolle in der Raumfahrt. Dies gilt für alle Arten von Weltraummissionen:

- Der Zweck von wissenschaftlichen Weltraummissionen ist die Gewinnung von Informationen und Erkenntnissen über den Weltraum bzw. über Himmelskörper.
- Das Ziel von Nachrichten- bzw. Navigationssatelliten ist die Übertragung von Telekommunikationsdaten bzw. Positionsdaten.
- Das Ziel von militärischen Missionen (Aufklärungssatelliten) ist die Gewinnung von Informationen über (u.U. potentielle) Gegner.
- Das Ziel von Erdbeobachtungsmissionen ist das Sammeln von Informationen unseren Planeten betreffend.

Wie man sieht, spielt in allen Weltraummissionen der Begriff „Information“ eine entscheidende Rolle. Raumfahrt ist ohne Datenübertragung nicht denkbar. Zur Datenübertragung werden in der Regel Radiowellen benutzt. In diesem Kapitel soll die Theorie der Datenübertragung näher beleuchtet werden.

## 10.1 Grundlegendes

### Funktionen

Datenübertragung hat verschiedene Funktion, abhängig von der Mission:

- Bahnverfolgung, Telemetrie, Command
- Messdatenübermittlung
- Relayfunktion (Datenübermittlung)  
(z.B. Telefon, Live-Fernsehen)

### Entfernungen und Laufzeiten

Abhängig von der Mission gilt es verschiedene, z.T. sehr große Entfernungen, zu überwinden, wie Tabelle 10-1 zeigt. Die entsprechende Laufdauer ergibt sich aus der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Radiowellen, der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit ( $2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , also ziemlich genau  $0.3 \text{ Mio.km/s}$ ):

Tab. 10-1: Entfernungen und Laufzeiten.

<b>Funkstrecke</b>	<b>Entfernung</b>	<b>Laufdauer</b>
<b>Erde-LEO</b>	360km	1.2ms
<b>Erde-GEO</b>	36000km	$0.12\text{s}^1$
<b>Erde-Mars</b>	79...377Mio.km	4.4...20.9min.
<b>Erde-Pluto</b>	5764...6063Mio.km	5.3...5.6h

<sup>1</sup> Der Unterschied in der Laufzeit wird offensichtlich, wenn man Satellitenfernsehen empfängt. So kann man den Gong der 19:00 Heute-Nachrichten auf ZDF zweimal hören, wenn man schnell genug von normalem terrestrischen Empfang auf Satellitenempfang umschaltet. Der Unterschied zwischen dem Empfang der Signale beträgt zwar nur ca. eine Viertel Sekunde, ist aber lang genug, um wahrgenommen zu werden.

## 10.2 Kriterium Orbit und Bodenstation

### Store und Forward

Die Datenübertragung erfolgt nicht direkt. Die zu übertragenden Daten werden gespeichert, bis das nächste Mal eine/die Bodenstation in Sichtweite ist. Dann werden die Daten aus dem Speicher per Downlink zur Bodenstation gesendet:

- + billiger Start und Satellit
- + je nach Orbit auch Polarregionen erreichbar
  
- (u.U. lange) Wartezeiten
- typ. nur für  $h < 1000$  km

### Geostationäres Orbit

Die geostationäre Bahn wurde lange vor dem Start des ersten Satelliten vom Science Fiction Autoren Sir Arthur C. Clarke angedacht. Die Umlaufdauer des Satelliten ist dabei gerade genau so lang wie ein Tag. Bewegt sich der Satellit dann noch auf einer äquatorialen Bahn (Inklination  $i=0^\circ$ ) so steht er für einen Betrachter auf der Erde quasi fest im Firmament und man spricht von einer „geostationären Bahn“ („geostationary Earth Orbit“, kurz GEO). Dieses ist von großem Vorteil, weil nun auch High-Gain-Antennen benutzt werden können, ohne dass dabei komplizierte Nachführsysteme vonnöten wären (vgl. „Satellitenschüssel“).

Die sich ergebenden Bahndaten sind:  $h= 35786$  km, Inklination =  $0^\circ$ ,  $r$  vom Erdmittelpunkt: ziemlich genau 42000km

- + kein Umhersalten zwischen Satelliten
- + Bodenstation muss nicht nachgeführt werden
  
- teure Satelliten (aufgrund der Entfernung sind starke Transponder nötig)
- teure Starts (hoher  $\Delta v$ - Bedarf)
- Laufzeit im Signal
- Antennenausrichtung
- Empfang nur gut bis  $70^\circ$  Breite (keine Polarregionen)

Das „Geostationary Transfer Orbit“ (GTO) ist die Ellipsenbahn, auf welcher heutige kommerzielle Träger (wie z.B. Ariane) ihre Nutzlast aussetzen. Das Apogäum liegt dabei in der GEO-Höhe von knapp 36000km, das Perigäum bei ca. 500km. Die Zirkularisierung ins GEO muss der Satellit dann in der Regel selber bewerkstelligen.

Aufgrund der großen Nachfrage nach Telekommunikationssatelliten im „Zeitalter der Telekommunikation“ ist der Raum im GEO knapp. Die Frequenzen und Orbitpositionen werden zentral vergeben (siehe Kapitel 10.5); jeder Satellitenbetreiber muss zudem sicherstellen, dass sein Satellit am Ende der Mission/Lebensdauer noch über genügend Treibstoff verfügt, um das GEO zu verlassen (um den Platz für neue Satelliten frei zu machen).

## Molniya – Orbits

Molniya Orbits sind/waren die sowjetische Alternative zu den geostationären Orbits. Es handelt sich dabei um hochelliptische, hochinklinierte Bahnen. Sie basieren auf zwei wesentlichen Fakten: Zum einen waren die Trägerleistungen in den frühen Tagen der Raumfahrt begrenzt. Der  $\Delta v$ - Bedarf der Molniya-Bahnen ist geringer als der des GEO, daher war es möglich auch Satelliten zu starten, die zu groß für GEO waren. Zum anderen war zur damaligen Zeit der Kommunikationsbedarf der Sowjetunion im Wesentlichen auf sich selbst (evtl. noch die Warschauer Pakt Staaten begrenzt). Daher wählten die Ingenieure Orbits, bei welchem das Apogäum über der Sowjetunion lag. Auf diese Weise waren die Satelliten während ihres 12-stündigen Orbits circa. 8h von dort aus sichtbar (Perigäum 500 km, Apogäum 40 000 km,  $T = 12$  h, Inklination  $63,4^\circ$ ).

- + nördliche Breitengrade abgedeckt
- + ~ 8 h verbringt der Satellit auf der Nordhalbkugel
- + bei 3 Satelliten: dauernde „Abdeckung“
  
- mehrere Satelliten nötig
- Antennennachführung
- Umschalten zwischen Satelliten

## Vernetzte Satelliten (Inter-Sat-Link)

Satelliten sind u.U. auch dazu in der Lage, sich miteinander/untereinander zu unterhalten. Dieses kann z.B. dazu dienen, Signale um den Planeten zu transportieren (z.B. die Bilder der Olympischen Spiele 2000 in Australien nach Europa), bzw. um die Wartezeiten des „Store and Forward“ zu vermeiden. Da bei der Kommunikation im Weltraum keine Atmosphäre die Übertragung beeinflusst, werden hier neuerdings auch andere Kommunikationsmethoden angewendet, wie z.B. Laser. Diese Strategie erfordert allerdings einigen technischen Aufwand, so müssen die Satelliten sehr genau ausgerichtet werden. Die erzielbaren Datenübertragungsraten sind dafür ungleich höher.

Inter-Sat-Link wird sowohl bei geostationären als auch in niedrigen Umlaufbahnen angewendet.

- + große Entfernungen ohne Bodenstation
- + mehrere Übertragungswege möglich
  
- große Komplexität

Im Folgenden sollen nun die „Technischen Kriterien“ der Datenübertragung (wie Antennenauslegung, Modulation, Kodierung, Informationsmenge und Datenraten) besprochen werden, sowie auch die Umwelteinflüsse (Atmosphäre, Rauschen), welche die Übertragung beeinflussen.



### 10.3 Fortpflanzung von Radiowellen

Ein Sender („Transmitter“) mit der Leistung  $P$  sendet isotrop Radiowellen in den Raum („omnidirektional“, also in alle Richtungen gleichmäßig). Die Flussdichte im Abstand  $s$  ergibt sich daraus zu:

$$\frac{P_T}{4\pi s^2}$$

Am Empfänger („Receiver“) ist die Empfangsleistung von der effektiver Fläche  $A_{\text{eff}}$  ( $A_{\text{eff}} = \eta \cdot A$ ,  $\eta_{\text{typ}} \approx 0,5$ ) abhängig:

$$P_R = \frac{P_T A_{\text{eff}}}{4\pi s^2}$$

Für einen Abstand von  $s = 40\,000$  km und  $A_{\text{eff}} = 1$  m<sup>2</sup> ergibt sich ein Verhältnis der Leistungen von  $\frac{P_T}{P_R} = 5 \cdot 10^{-17}$

Verwendet der Sender hingegen eine Antenne mit gewisser Richtungscharakteristik, so muss der sogenannte Antennengewinn  $G_T$  berücksichtigt werden:

$$P_R = \frac{P_T G_T A_{\text{eff}}}{4\pi s^2}$$

Der Antennengewinn ist Funktion von  $\lambda$  und  $A_{\text{eff}}$  ( $D =$  Durchmesser):

$$G = \frac{4\pi A_{\text{eff}}}{\lambda^2} = \frac{h D^2 \rho^2}{\lambda^2} \quad l = \frac{c}{f}$$

$$P_R = P_T \frac{G_R G_T}{(4\pi)^2 s^2} \lambda^2 = P_T G_R G_T \left( \frac{c^2}{(4\pi)^2 s^2 f^2} \right)$$

Zur Vereinfachung kann man die sog. „Raumdämpfung“ definieren als:

$$L_s = \frac{4\pi s^2}{\lambda^2}$$

Oder man schreibt:

$$P_R = P_T \frac{A_{\text{eff},T} A_{\text{eff},R}}{s^2 \lambda^2}$$

Da bei diesen Radiogleichungen Faktoren dividiert und multipliziert werden, die über mehrere Größenordnungen gehen, wird eine logarithmische Formulierung gewählt:

$$\text{decibels} = 10 \log_{10}$$

z.B. Raumdämpfung  $L_s = \left(\frac{c}{4\pi s f}\right)^2$ :

$$L_s \text{ (dB)} = -92,44 - 20 \log s - 20 \log f$$



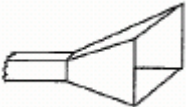
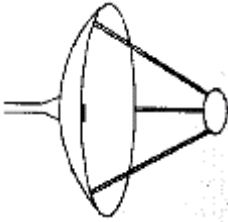

Oder Antennengewinn:

$$G \text{ (dB)} = 20,40 + 20 \log D + 20 \log f + 10 \log \eta$$

Dabei sind folgende Einheiten zu verwenden: s [km]; f[GHz]; D[m].

In der folgenden Tabelle sind einige Beispiele für Antennentypen sowie deren charakteristische Parameter zusammengestellt.

Tabelle 10-2: Typische Antennen mit ihren Eigenschaften ( $A_{\text{eff}}$  und G):

Antennentyp	Skizze	$A_{\text{eff}}$	G
<b>Isotroper Strahler</b> (Referenz)		1	$\frac{I^2}{4p}$
<b>Dipol</b>		1,64	$1,64 \frac{I^2}{4p}$
<b>Horn</b>		$10 \frac{A}{I^2}$	0,81 A
<b>Parabolantenne</b>  Oberflächengüte $\frac{1}{10} \div \frac{1}{50} I$ z.B. 10 GHz $\Rightarrow 3 \text{ cm } \lambda$		$6,9 \frac{A}{I^2}$	0,55 A
<b>Axial / Helix</b> ( $\pi D = \lambda$ )		$6 \frac{L}{I^2}$	$\frac{LI}{2}$

Welche Antenne letztendlich verwendet wird, hängt natürlich letztendlich von der Mission ab. Insbesondere bei Telemetrie/Telecommand kommt es dabei immer wieder zu einem „Trade-Off“ (d.h. zu einer Abwägung) zwischen Transmitterpower ( $\Rightarrow$  Strombedarf!) und bestrahlter Fläche: für eine gegebene Datenübertragungsleistung ist bei einer Omnantenne mehr Leistung vonnöten als bei einer High-Gain Parabolantenne, allerdings entfällt bei ersterer die Notwendigkeit für eine genaue Ausrichtung der Antenne. Satelliten verwenden daher oft auch zwei Systeme, ein omnidirektionales Low-Gain System für die Command-Daten, die bei jeder Satellitenausrichtung übermittelt werden können, sowie ein High-Gain System für die Missionsdaten (also z.B. Bilder der wissenschaftlichen Kamera, Kommunikationsdaten beim Telecom-Satellit) mit hoher Datenrate. Da Weltraumsysteme meist weitaus teurer sind, wird die effektive Fläche der Bodensegment-Antenne in der Regel wesentlich größer sein die des Weltraumsegments (ca. 1 Größenordnung) als. Die Genauigkeitsanforderung an die Antennengeometrie ist u.a. auch von der Wellenlänge und der Missionsanforderung abhängig. Als ersten Richtwert kann man von  $0.1\lambda$  ausgehen. Weitere Verluste treten auf dem Sendeweg auf; sie werden insbesondere durch die Atmosphäre verursacht.

#### 10.4 Beeinträchtigungen der Datenübermittlung: Atmosphäre und Rauschen

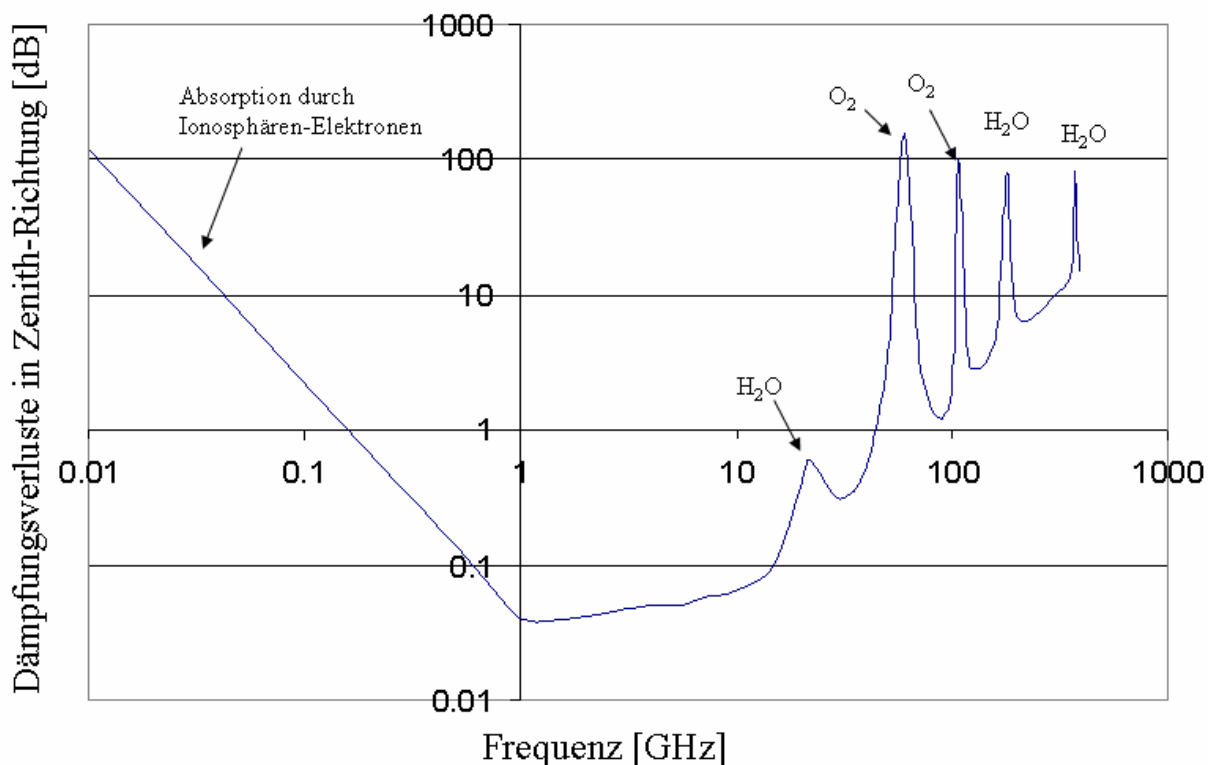


Abb. 10-1: Atmosphärenrauschen

Wie aus der Abb. 10-1 sofort ersichtlich wird, ist das Rauschen „der größte Feind der Datenübertragung“. Die Situation wird durch Regen noch wesentlich verschärft, wie Abb. 10-2 zeigt.

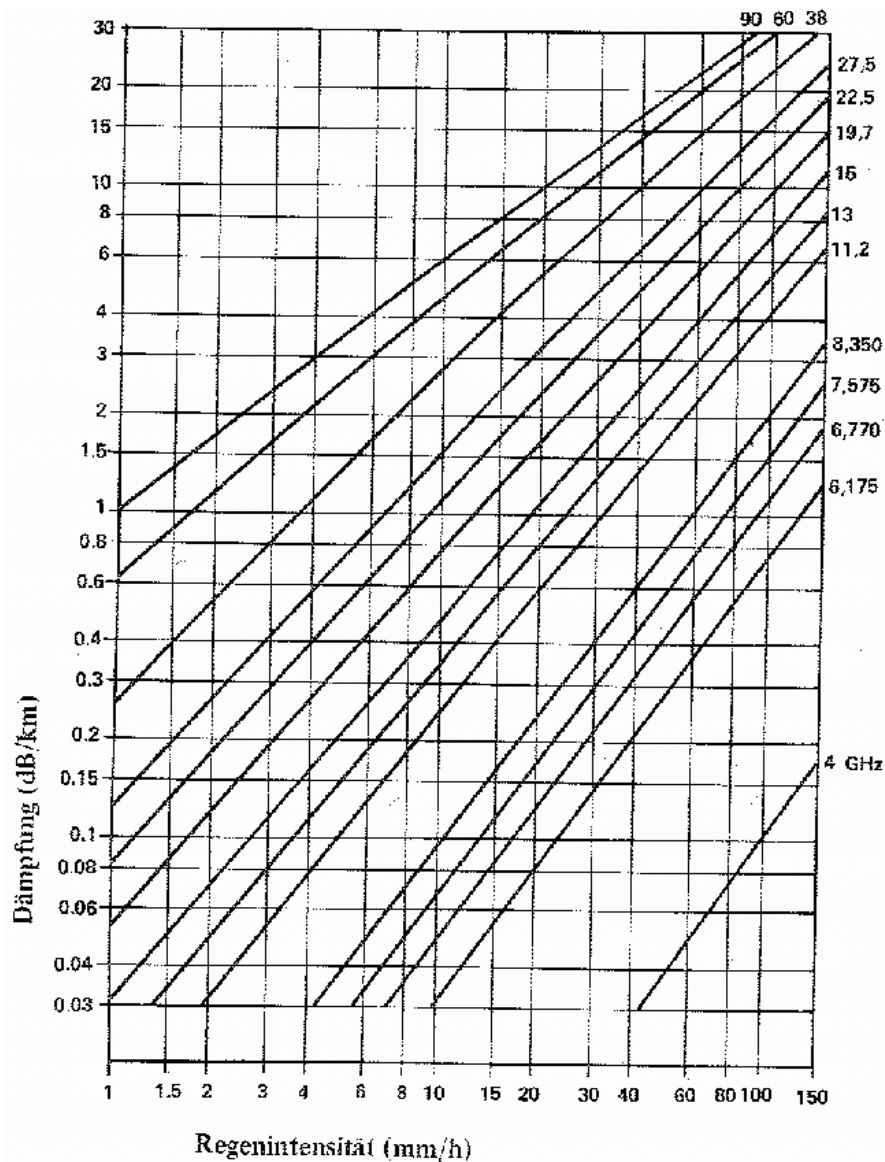


Abb. 10-2: Einfluss von Regen auf die Datenübertragung

Man definiert allgemein die Rauschdichte als  $N_0 = kT_s$  [W/Hz]

und die Rauschleistung als  $N = N_0 B = kT_s B$  [W]

B: Bandbreite [Hz]

$T_s$ : Systemtemperatur [K]

k: Boltzmannkonstante  $1.381 \cdot 10^{-23}$  J/K

Wie aus diesen Formeln ersichtlich, ist es ratsam, die Transpondersysteme kühl zu halten (natürlich nur soweit das die Elektronik zulässt), bzw. z.B. nicht direkt auf die Sonne auszurichten. Bandbreite und Rauschen limitieren Rate und Genauigkeit der Datenübertragung, wie aus folgender Abbildung ersichtlich wird:

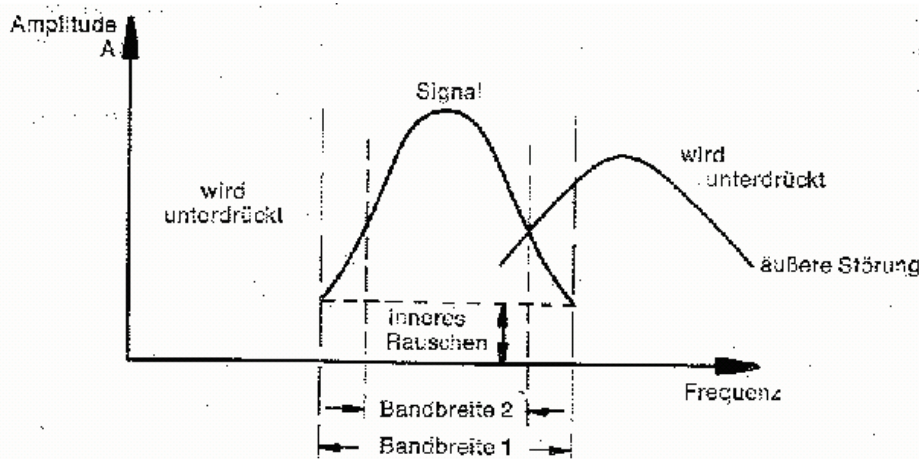


Abb. 10-3: Nachbarfrequenz

Zwischen Datenrate und Samplingrate besteht folgender Zusammenhang:

$$DR = B \times \log_2 \frac{\sigma S}{\epsilon N \theta} \quad [\text{bit/s}]$$

Außer dem atmosphärischen Rauschen gibt es noch eine Reihe anderer äußerer Rauschquellen, die die Datenübertragung (zusätzlich zum Systemrauschen) negativ beeinflussen. Diese Quellen sind in der folgenden Abbildung zusammengefasst.

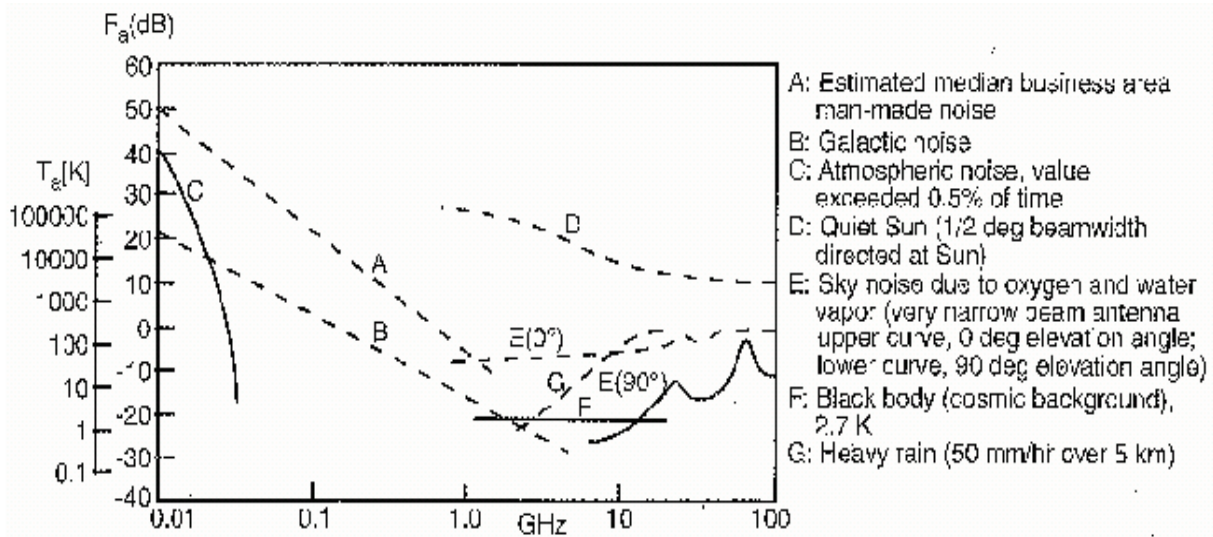


Abb. 10-4: Äußere Rauschquellen

## 10.5 Frequenzwahl

Durch die ITU (International Telecommunication Union) und die WARC (World Administrative Radio Conference) sind für die Raumfahrt Datenübertragung bestimmte Frequenzbänder definiert und militärisch und kommerziell verteilt.

Im Wesentlichen werden dabei Frequenzen von 0.1 bis ca. 60 GHz benutzt (UHF–SHF–EHF). Diese Frequenzen werden in folgende Bänder unterteilt:

Tab. 10-3: Frequenzbänder

Frequenzband	Frequenzbereich [GHz]		Verwendung
	Uplink	Downlink	
<b>UHF</b>	0.2...0.45	0.2...0.45	Militär
<b>L</b>	1.635...1.66	1.535...1.56	Navigation/Maritim
<b>S</b>	2.65...2.69	2.5...2.54	kommerziell (TV)
<b>C</b>	5.9...6.4	3.7...4.2	nat. Com-Sats
<b>X</b>	7.9...8.4	7.25...7.75	milit. Com-Sats
<b>Ku</b>	14.0...14.5	12.5...12.75	nat. Com-Sats
<b>Ka</b>	27.5...31.0	17.7...19.7	nat. Com-Sats
<b>SHF/EHF</b>	43.5...45.5	19.7...20.7	milit. Com-Sats
<b>V</b>	ca. 60		Inter-Sat-Links <sup>1</sup>

Je höher die Frequenzen sind, desto kürzer wird die Wellenlänge und desto größer auch der Antennengewinn ( $\Rightarrow$  die „Sendekeule“ kann sehr schmal gemacht werden). Den Extremfall stellt hierbei der Laser dar. Mit Frequenzen von 20 bis 40 GHz ist er so stark gebündelt, dass er praktisch abhörsicher ist. Allerdings ist dafür dann auch eine extrem hohe Ausrichtungsgenauigkeit erforderlich und es gibt Probleme mit Wolken, Regen und der Atmosphäre (daher vorzugsweise für Inter-Sat-Links!).

Je niedriger die Frequenzen werden, desto größer muss die Sendeantenne werden ( $\Rightarrow$  weniger Kanäle pro Frequenz).

## 10.6 Modulation und Codierung

Um Daten übertragen zu können, muss die Trägerfrequenz verändert (moduliert) werden.

Trägersignal:  $s(t) = A \cos(2\pi ft + \emptyset)$

Man kann sowohl die Amplitude  $A$  oder die Frequenz  $f$  oder die Phase  $\emptyset$  ändern. (Alternative: „zerhacken“  $\Rightarrow$  Morse – Code). Man spricht dann von „Amplituden-“ bzw. „Phasenmodulation“. Die folgende Abbildung fast modulierendes Signal (oben) sowie Amplituden- (Mitte) und Phasenmodulation (unten) zusammen:

<sup>1</sup> In diesem Frequenzbereich wirkt die Atmosphäre wie ein Reflektor.

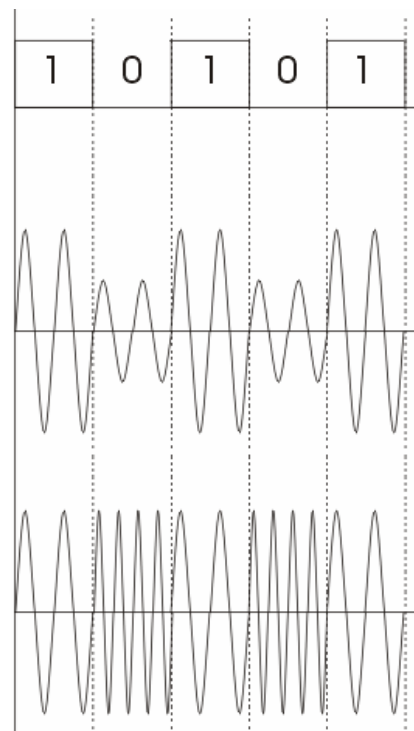


Abb. 10-5: Amplituden- versus Phasenmodulation

### Analoge Übertragung

Bei der analogen Datenübertragung ist die Änderung der Signaleigenschaft (Amplitude bzw. Frequenz) analog zum übertragenen Messwert. Je nach der Modulation spricht man von AM (Amplituden-), FM (Frequenz-) oder PM (Phasenmodulierung).

### Digitale Übertragung

Bei der digitalen Datenübertragung durch „Sampling“ in mehrere diskrete Werte überführt, welche dann digital, sprich binär, übermittelt werden. Nyquist stellte schon 1928 fest, dass für die Rekonstruktion eines Signals aus einem Digitalsignal die „Sampling“-Rate (=Abtastrate) mindestens die sog. Nyquist-Rate erreichen muss:

$$\text{Nyquist-Samplingrate: } f_s \geq 2,2f_{mess}$$

Je nach dem zu übertragenden Signal sind niedrigere oder höhere Bandbreiten/Datenraten bzw. Sampling-Raten notwendig:

- Telefon: 4..8kHz
- HI-FI-Musik (Napster!): 20..40kHz (CDs: 44.1kHz)
- TV: einige MHz (je nachdem ob S/W oder Farbe, Auflösung,..)

Die Folge von binären Werten wird ebenso auf eine Trägerfrequenz nach Amplitude (ASK), Frequenz (FSK) oder Phase (PSK) aufmoduliert<sup>1</sup>. Während die bei der analogen Übertragung unvermeidliche Störungen zu einer Verfälschung des übertragenen Wertes führen können, ist dies bei der digitalen Übertragung nicht der Fall. Dort kommt es aber durch die notwendige Diskretisierung zu Fehlern.

### Datenrate

Die Datenraten in der Raumfahrt haben sich in den vergangenen Jahrzehnten dramatisch verändert. Dies gilt zum einen für die Entwicklung in der bemannten Raumfahrt:

- 1962: Mercury      2 bit/s            ≈ Telegraph
- 1965: Gemini        40 bit/s           ≈ Fernschreiber
- 1969: Apollo       4kbit/s            ≈ Telefon
- 1973: Skylab       20kbit/s           ≈ gutes Radio
- 1982: Shuttle       10Mbit/s          ≈ Fernsehen

als auch für die Entwicklung bei den Nachrichtensatelliten (Beispiel Intelsat):

- 1965: Intelsat I    39 kg            45 W            240 Sprachkanäle oder 1 TV
- 1975: Intelsat IV   795 kg           700 W           6250 Sprachkanäle + 2 TV
- 1989: Intelsat VI   2200 kg          2,8 kW          33000 Sprachkanäle + 4 TV

Diskretisierungsfehler können offensichtlich durch eine feinere Einteilung verringert werden (vgl. 16-Farben-Grauton versus 16bit-TrueColor bei Computer-Grafikkarten!)

$M = 2^n$	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
Anzahl bits/sample	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Max. Diskretisierungsfehler	6,25	3,13	1,65	0,79	0,39	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01

Die notwendige Anzahl der Bits pro Sample wird von der Mission bestimmt. Sie ist auch eine Frage der Sensorik an Bord, vgl. z.B.

- JPL-Kamera an Bord von Viking: 256 (n=8) Graustufen (plus verschiedene Farbfilter) also 8bits pro Bildpunkt
- Fernsehbild: 3Kanäle (RGB), jeweils 8 Farbstufen: 9bits pro Bildpunkt

Analoge Information	Max. Eingangsfrequenz	Samplingfrequenz	Anzahl Bits pro Sample	Datenrate in bits/s
Sprache	3600	8000	7	56 K
Fernsehen	4 M	8,8 M	5	44 M

Um die Datenrate wenn möglich zu reduzieren werden oft auch Komprimierungsalgorithmen eingesetzt (→ z.B. \*.jpeg, \*.mpeg).

<sup>1</sup> SK steht dabei jeweils für „Shift Keying“.



# 11 Bahn- und Lageregelung

## 11.1 Bahnbestimmung

Bei Raumfahrtmissionen ist meist eine genaue Kenntnis der Position und Bahn des Satelliten notwendig, um die Mission erfüllen zu können. Gegebenenfalls muss die Bahn dann geändert werden.

Aufgabe der Bahnbestimmung ist es also, die Position des RFZ für jeden Zeitpunkt  $t$  ermitteln zu können. In der Theorie gibt es dabei zwei Fälle:

- a. **Angetriebene Bahnen:**  
Wurde schon im Rahmen der Aufstiegsbahnen“ behandelt.
- b. **Freiflugbahnen:**  
Wird hier als eingeschränktes 2-Körper-Problem behandelt  
(vgl. auch eingeschränktes 3-Körper-Problem / Lagrange Punkte)

Die zur Bahnbestimmung notw. Parameter wurden in Kapitel 7.2 vorgestellt. Sie werden als **Keplerelemente (Ephemeriden, Bahnparameter)** bezeichnet. Es sind:

- a** - **große Halbachse**
- e** - numerische **Exzentrizität**
- n** - wahre **Anomalie** (oder  $F$ )
- $T_0$**  - **Referenzzeit** (meist Perizentrumsdurchgang, dann spricht man von der **Epoche**  $s$ . Bei Kreisbahn nicht definiert, da es kein Perizentrum gibt  $\rightarrow u_0$ )
- i** - **Inklination** (= Bahnneigung, Winkel zwischen Bahnebene und Referenzebene, also z.B. Äquatorebene)
- W** - **Rektaszension** des aufsteigenden Knotens  
(= Winkel von der Richtung des Frühlingspunktes zum Knoten)
- ?** - **Argument des Perigäums:** Winkel vom aufsteigenden Knoten zum Perizentrum

Dabei ist die **Knotenlinie** die Schnittgerade von Äquatorebene und Bahnebene, der **aufsteigende Knoten** hingegen ist der Ort, an dem das RFZ die Äquatorebene von „unten“ kommend durchfliegt.

Im Falle einer Kreisbahn ist kein Perihel definiert. In diesem Falle wird die Perihel-Durchgangszeit durch  $u_0$ , das „**Argument of Latitude at Epoch**“, ersetzt. Dies ist der Winkel zwischen dem aufsteigenden Knoten und dem Satelliten (er liegt in der Bahnebene) zur Zeit  $t=0$ .

Soweit die Theorie. Wie wird jedoch in der Praxis die aktuellen / tatsächlichen Bahnelemente. Dazu wird zunächst mittels Messung (z.B. Radardopplerverschiebung, etc.) in einem Bodenstations-Koordinatensystem die Position und der Geschwindigkeitsvektor des RFZ gemessen. Diese werden dann in ein „inertiales“ (z.B. das heliozentrische) KOS umgerechnet.

Dies soll an einem Beispiel gezeigt werden: Ort und Geschwindigkeit seien bereits bekannt und ins inertielle System überführt worden. Hat man am Ort die Geschw. zur Zeit  $t$ , so lassen sich daraus die Bahnelemente berechnen. Die Bahn, also Ort und Geschwindigkeit, sind dann für immer bekannt (allerdings nur, wenn kein Antrieb und keine Störungen wirken).

$\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$  sind Einheitsvektoren (s. Abb.),  $\vec{H}$  ist der Vektor des Drehmoments, er steht senkrecht auf der Bahnebene. Mit  $\vec{n} = \vec{K} \times \vec{H}$  ist die Rektaszension des aufsteigenden Knotens:

$$W = \arccos \frac{\vec{I} \circ \vec{n}}{|\vec{n}|}$$

Nun sei  $\vec{B}$  definiert als:

$$\vec{B} := (\vec{H} \times \vec{v}) + \frac{\mu}{r} \times \vec{r}$$

wobei  $v$  die Geschwindigkeit und  $\mu$  das Produkt aus Gravitationskonstante und Zentralmasse darstellt. Dann gilt:

$$\vec{B} = (\vec{v} \times \vec{H}) - \frac{\mu}{r} \times \vec{r}$$

und für die Exzentrizität  $e$  folgt:

$$\vec{e} = \frac{1}{\mu} \left( \vec{v} \times \vec{H} - \frac{\mu}{r} \times \vec{r} \right) - (\vec{r} \times \vec{v})$$

$\vec{e}$  liegt dabei in der Bahnebene und weist vom Mittelpunkt der Zentralmasse in Richtung Perizentrum. Da die wahre Anomalie der Winkel zwischen  $\vec{e}$  und  $\vec{r}$  ist, gilt:

$$n = \arccos \frac{\vec{e} \circ \vec{r}}{|\vec{e}| r}$$

Ebenso gilt für die Inklination:

$$i = \arccos \frac{\vec{K} \circ \vec{H}}{|\vec{H}|}$$

...und das Argument der Periapsis:

$$w = \arccos \frac{\vec{n} \circ \vec{e}}{|\vec{n}| |\vec{e}|}$$

Sowie

$$\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{m}}{2\mathbf{a}}, \quad \mathbf{a} = -\frac{\mathbf{m}}{2 \times \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{m}}} \quad \text{und } W = \arccos \frac{\vec{I} \circ \vec{n}}{|\vec{n}|} \text{ für die Rektaszension}$$

## 11.2 Lagebestimmung und -Regelung

Das Wissen um die Bahn (Position, Geschwindigkeit) des Raumfahrzeuges ist notwendig, aber nicht hinreichend für eine Raumfahrtmission. Auch die Orientierung und die Regelung/Kontrolle derselben ist eine elementare Aufgabe. Auch hier bildet wiederum das Koordinatensystem die Grundlage jeder Modellierung. Wir betrachten daher das Raumfahrzeug in zwei verschiedenen Koordinatensystemen, dem **inertialen KOS** ( $X_I, Y_I, Z_I$ ) sowie einem **mitgeführten KOS** ( $x, y, z$ ), wie die nachfolgende Abbildung verdeutlicht.

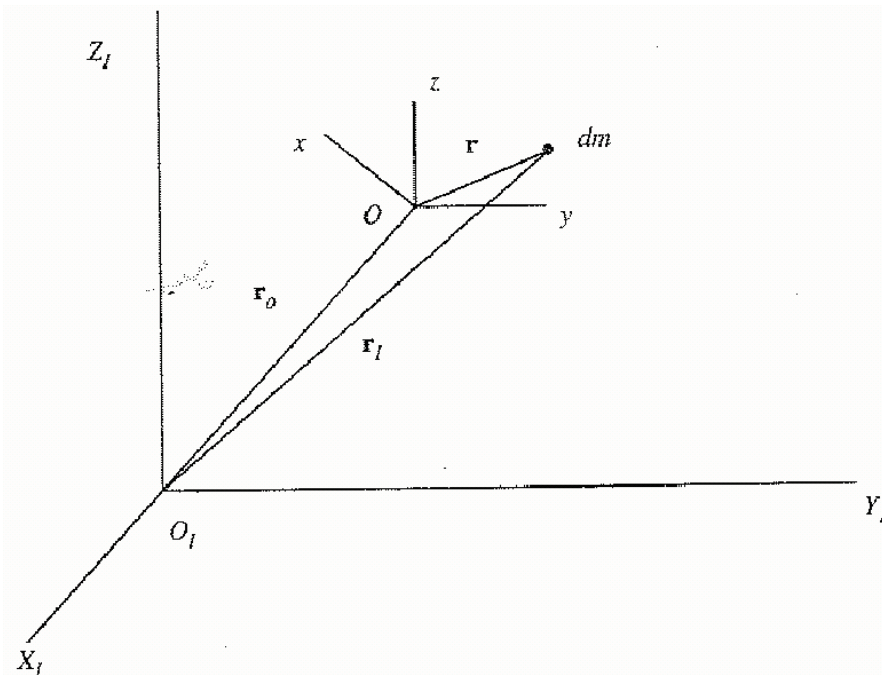


Abbildung 11.1: Inertiales ( $X_I, Y_I, Z_I$ ) und mitgeführtes ( $x, y, z$ ) Koordinatensystem

Ziel ist das Erlangen von Gleichungen zur Beschreibung der Lage eines Körpers mit translatorischen und rotatorischen Freiheitsgraden. Diese können hergeleitet werden, und zwar basierend nur aus den Erhaltungssätzen von:

- Masse,
- Impuls,
- Drehimpuls,
- Energie

Die resultierenden Formeln sollen dann am Beispiel von spinstabilisierten und gravitationstabilisierten Satelliten näher verdeutlicht werden.

Folgende Zusammenhänge ergeben sich anschaulich aus der obigen Zeichnung:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}}_I &= \frac{d\bar{\mathbf{v}}_I}{dt} = \frac{d^2\bar{\mathbf{r}}_I}{dt^2} \\ \bar{\mathbf{r}}_I &= \bar{\mathbf{r}}_0 + \bar{\mathbf{r}} \\ \bar{\mathbf{r}}_0 &= X_I \times \bar{\mathbf{i}}_I + Y_I \times \bar{\mathbf{j}}_I + Z_I \times \bar{\mathbf{k}}_I \\ \bar{\mathbf{r}} &= x \times \bar{\mathbf{i}}_I + y \times \bar{\mathbf{j}}_I + z \times \bar{\mathbf{k}}_I \\ \bar{\mathbf{v}}_I &= \bar{\mathbf{v}}_0 + \bar{\omega}_m \wedge \bar{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

$\vec{\omega}_m$  ist dabei der Vektor der Winkelgeschwindigkeit des bewegten KOS in Bezug zum inertialen KOS. Im bewegten System gilt:

$$\vec{\omega}_m = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

weil  $i, j, k$  die Einheitsvektoren des bewegten KOS sind. Also kann man auch schreiben:

$$\frac{d\vec{v}_I}{dt} = \vec{a}_I = \vec{a}_o + \vec{\omega}_m \wedge (\vec{\omega}_m \wedge \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}}_m \wedge \vec{r}$$

Dabei ist die zeitliche Ableitung eines rotierenden Einheitsvektors ist das Vektorprodukt aus Winkelgeschwindigkeitsvektor und dem Einheitsvektor selbst. Die allgemeine Form des Satzes von der Erhaltung des Drehimpulses ist:

$$\vec{M} = \dot{\vec{0}}(\vec{r} \wedge \vec{a}_I) dm = \left. \frac{d\vec{H}}{dt} \right|_I$$

$M$  ist dabei die Resultierende aus den eingebrachten Momenten und Drehimpulsen,  $r$  ist der Hebelarm,  $H$  ist das Drehmoment des Systems.

$$\vec{H} = \dot{\vec{0}}(\vec{r} \wedge \vec{v}_I) dm = \vec{I} \times \vec{\omega}_m \quad \vec{I} = \begin{pmatrix} \hat{e}_x + I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ \hat{e}_y - I_{xy} & +I_{yy} & -I_{yz} \\ \hat{e}_z - I_{xz} & -I_{yz} & +I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} \quad \vec{M} = \left. \frac{d\vec{H}}{dt} \right|_m + \vec{\omega}_m \wedge \vec{H}$$

Setzt man die Gleichung für  $a_I$  in den Erhaltungssatz für  $M$  ein und integriert man über die mit dem bewegten KOS verbundene Masse  $m$ , so ergibt sich:

$$\vec{M} = \left. \frac{d\vec{H}}{dt} \right|_m + \vec{\omega}_m \wedge \vec{H}$$

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} \dot{M}_x \\ \dot{M}_y \\ \dot{M}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{H}_x + \omega_y H_z - \omega_z H_y \\ \dot{H}_y + \omega_z H_x - \omega_x H_z \\ \dot{H}_z + \omega_x H_y - \omega_y H_x \end{pmatrix}$$

Selbst wenn das Raumfahrzeug  $M=0$  hat, also  $\left. \frac{d\vec{H}}{dt} \right|_I = \vec{0}$ , dann gilt dennoch:

$$\left. \frac{d\vec{H}}{dt} \right|_m = - \vec{\omega}_m \wedge \vec{H} \neq \vec{0}$$

$H$  ist also nicht konstant in Bezug auf das mitbewegte KOS!

Fällt das mitbewegte KOS mit den Haupt-Trägheitsachsen zusammen, dann sind die Kreuzprodukte null und es gilt:

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{xx} \dot{\varphi}_x \\ \mathbf{I}_{yy} \dot{\varphi}_y \\ \mathbf{I}_{zz} \dot{\varphi}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{xx} \times \dot{\varphi}_x \\ \mathbf{I}_{yy} \times \dot{\varphi}_y \\ \mathbf{I}_{zz} \times \dot{\varphi}_z \end{pmatrix}$$

damit ist also  $M=0$  und man kann schreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{xx} \times \dot{\varphi}_x + \varphi_y \times \varphi_z \times (\mathbf{I}_{zz} - \mathbf{I}_{yy}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{yy} \times \dot{\varphi}_y + \varphi_x \times \varphi_z \times (\mathbf{I}_{xx} - \mathbf{I}_{zz}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{zz} \times \dot{\varphi}_z + \varphi_x \times \varphi_y \times (\mathbf{I}_{yy} - \mathbf{I}_{xx}) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Dies ist ein System von nichtlinearen DGLs 1. Ordnung für  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  als Funktion der Zeit  $t$ .

Ein sich nicht drehender Körper (RFZ) hat kein Drehmoment, also muss nichts überwunden werden. Es ergibt sich eine Rotation um eine der Hauptachsen. Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- Zylindrischer Körper („prolate“)
- Scheibenförmiger Körper („oblate“)

Der letztere Fall (Rotation um die Achse mit dem höchsten Trägheitsmoment  $I$ ) ist stabiler.

Im Falle von  $I_{xx} = I_{yy}$  mit Drehung um z-Achse mit  $\dot{\varphi}_{SP}$  ergeben sich folgende Zusammenhänge (diese sind auch und dem Begriff „Euler“-Gleichungen bekannt):

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{xx} \times \dot{\varphi}_x + \varphi_y \times \varphi_{SP} \times (\mathbf{I}_{zz} - \mathbf{I}_{xx}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{xx} \times \dot{\varphi}_y + \varphi_x \times \varphi_{SP} \times (\mathbf{I}_{xx} - \mathbf{I}_{zz}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{zz} \times \dot{\varphi}_{SP} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

mit  $\dot{\varphi}_{SP} = 0 \quad \& \quad \varphi_{SP} = \text{const.}$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_x + l \times \varphi_y &= 0 \\ \dot{\varphi}_y - l \times \varphi_x &= 0 \end{aligned} \quad \& \quad l = \frac{\mathbf{I}_{zz} - \mathbf{I}_{xx}}{\mathbf{I}_{xx}} \times \varphi_{SP} \quad \& \quad \ddot{\varphi}_x + l^2 \times \varphi_x = 0$$

$$\& \quad \begin{aligned} \varphi_x &= \varphi_x(0) \times \sin(l t) - \frac{\dot{\varphi}_x(0)}{l} \times \cos(l t) \\ \varphi_y &= \varphi_x(0) \times \cos(l t) - \frac{\dot{\varphi}_x(0)}{l} \times \sin(l t) \end{aligned}$$

## Nutation

Die Lösungsgleichungen der oben aufgeführten Eulergleichungen beschreiben eine "konische" (elliptische) Drehung der Drehachse um den Vektor des Drehmomentes. Diese Bewegung bezeichnet man als "**Nutation**". Der Wert  $\omega_n$  stellt dabei die **Nutationsfrequenz** dar.

Die Nutation ist eine anhaltende, periodische Übertragung von Energie zw. x- und y-Achse. Eine passive Nutationsdämpfung kann nur bei „oblaten“ Konfigurationen erfolgen (welche deshalb bei spinstabilisierten Satelliten auch klar bevorzugt werden).

## Präzession

Wird ein Moment auf den Körper aufgebracht, so reagiert dieser mit einer Ausweichbewegung (vergl. Anschupfen eines Kinderkreisels). Ist das aufgebrachte Moment

$$\vec{M} = \vec{\omega}_m \times \vec{H}_{\text{spin}}$$

Ist die Spinachse z, so gilt  $M_z = 0$  und es ergibt sich folgende Gleichung

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_x} M_x \\ \frac{1}{I_y} M_y \\ \frac{1}{I_z} M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_y \times H_{\text{SP}} \\ -\omega_x \times H_{\text{SP}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Konsequenz des aufgebrachten Moments ist das Bestreben der Drehachse, sich mit dem aufgebrachten Moment auszurichten. Es entsteht ein Kreiselmoment bzw. eine charakteristische Ausweich- oder Präzessionsbewegung.

Nutations- und Präzessionsbewegung sind dabei oft überlagert (siehe dazu auch Kapitel 7.3!).

## Spinstabilisierung:

Es gibt verschiedene Arten der Spinstabilisierung. Im klassischen Fall dreht sich der gesamte Satellit. Der Umstand, dass die Drehachse dabei stets in eine Richtung zeigt, nutzt man zur Ausrichtung von Antennen (z.B. HITEN, Nozomi), aber auch für Experimente und Nutzlasten (z.B. die MeteoSat-Kamera). Eine Alternative ist, nur einen Teil des Satelliten drehen zu lassen – entweder enthält der Satellit dabei ein sog. „**Momentum Wheel**“, oder der Satellit als ganzer ist zweigeteilt, mit einem stillstehenden und einem rotierenden Teil („**Dual Spin**“). Eine weitere Variation des „**Momentum Wheel**“-Ansatzes ist der Momentenkreisel („**Control Moment Gyro**“), bei welchem der Widerstand, den die rotierenden Kreisel einer Lageänderung entgegenzusetzen dazu verwendet werden, Stellkräfte für die Ausrichtung des Satelliten mittels einer kardanischen Aufhängung zu nutzen.

### Gravitationsstabilisierung:

Auch die "Gravity-Gradient"-Stabilisierung ist eine Stabilisierungsmethode, welche sich mit wenig baulichem Aufwand realisieren lässt. Dabei nutzt man die Tatsache, dass der Ortsfaktor  $g$  mit zunehmender Orbithöhe abnimmt, da  $g$  ja definiert ist als

$$g = \frac{F_G}{m} = \frac{m}{r^2}$$

$$\frac{dg}{dr} = -\frac{2m}{r^3} \gg 10^{-6} \frac{m}{s^2} \times \frac{1}{m}$$

Die Abnahme ist gering, nichtsdestotrotz wirken als Konsequenz Stellkräfte auf den Satelliten. Diese Kräfte sind umso stärker, je weiter die Masse des Satelliten in der  $r$ -Richtung verteilt ist. Die Größe der Stellkraft soll hier am Beispiel zweier miteinander verbundener Massen  $m_1$  und  $m_2$  ermittelt werden.

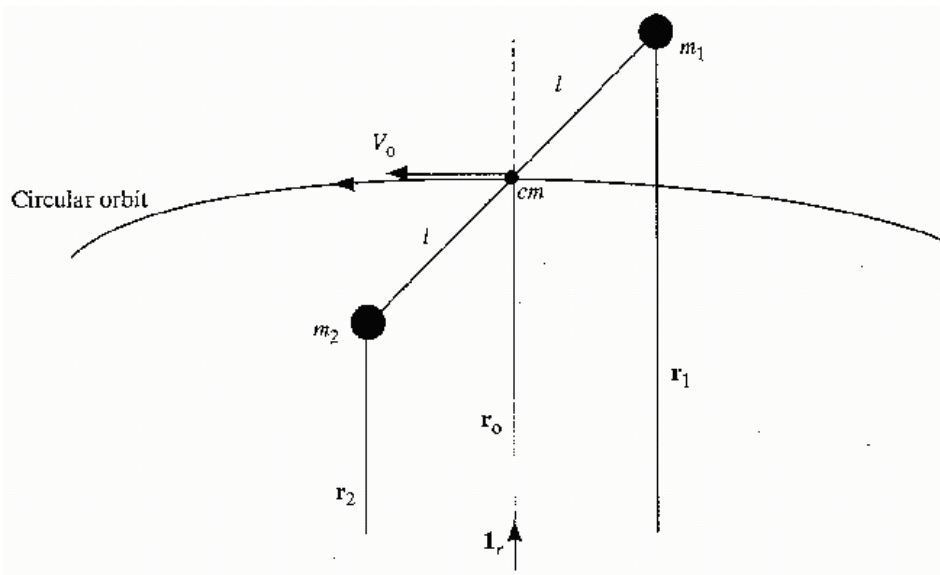


Abb. 11.2: Gravitationsstabilisierung

Sind die beiden Massen gleich groß, so ergeben sich die entstehenden Kräfte auf die Massen zu:

$$F_1 = \frac{m \times v_1^2}{r_1} - m \times g_1$$

$$F_2 = \frac{m \times v_2^2}{r_2} - m \times g_2$$

und es entsteht ein Drehmoment  $M$ , welches versucht, den Satelliten mit der Längsachse radial zum Zentralkörper auszurichten:

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}_2 \times \mathbf{l} \times \sin Q - \mathbf{F}_1 \times \mathbf{l} \times \sin Q \quad \text{D}$$

$$\mathbf{M} \gg \mathbf{l} \times \mathbf{Q} \times (\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1)$$

$$\mathbf{M} \gg -2\mathbf{m} \times \left[ \frac{\ddot{\alpha} \mathbf{l} \ddot{\theta}^2}{\dot{\xi} \mathbf{r}_0 \dot{\theta}} \times \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{r}_0} \times \mathbf{Q} \right]$$

Dieses Stellmoment wirkt immer, ohne das hierzu aufwendige aktive Lageregelungssysteme vonnöten wären. Für einfache Satelliten wird diese Stabilisierungsmethode daher gerne verwendet (z.B. UoSat-Serie). In der Praxis wird man den Satelliten natürlich nicht hantelförmig bauen, sondern stattdessen im Orbit eine kleine Masse an einer Teleskopantenne ausfahren, welche dann als stabilisierender „Anker“ wirkt und den restlichen Satelliten zum Nadir (oder zum Zenit) hin ausrichtet.



## 12 Landung auf Himmelskörpern

Es entspricht dem Wesen der Menschheit, dass eine der größten Triebfedern, die Raumfahrttechnik voranzutreiben, die Landung auf anderen Himmelskörpern ist. Es ist natürlich auch notwendig, sich Gedanken über die Rückkehr von Raumfahrzeugen zur Erdoberfläche zu machen, wenn mehr als nur Funksignale von einer Raumflugmission zurückerwartet werden.

Es gilt zwischen zwei verschiedenen Fällen der Landung auf Himmelskörpern zu unterscheiden: mit und ohne Atmosphäre. Ist eine Atmosphäre vorhanden, so besteht die Möglichkeit, diese für die Dissipation der kinetischen Energie zu verwenden. gelten andere Randbedingungen um die kinetische Energie des Raumflugkörpers umzusetzen.

### 12.1 Landung auf atmosphärelosen Himmelskörpern

#### Erläuterung am Beispiel der Mondlandung

Der Mond hat praktisch keine Atmosphäre. Ein Raumfahrzeug erreicht nach etwa 62,6 Stunden die Einflussosphäre des Mondes ( $r_E = 65000\text{km}$ ) und würde auf der Mondoberfläche mit 2687 m/s aufschlagen. Zur weiteren Betrachtung wird angenommen, dass die Annäherung senkrecht zur Oberfläche erfolgt (eindimensionale Betrachtung) [12]. Unter der Voraussetzung, dass der Schub und die Fallbeschleunigung  $g_M$  der jeweiligen Zentralmasse (in diesem Fall der Mond) konstant sind, kann die **Landung wie der senkrechte Aufstieg** behandelt werden, für den gilt:

Beschleunigung: 
$$\dot{v} = \frac{c \times \dot{m}}{m} - g_M$$

Geschwindigkeit: 
$$v = c \ln \frac{m_0}{m} - g_M \times t \quad \text{mit } v_0 = 0$$

Höhe: 
$$h = t \times c \left[ 1 - \frac{m}{m_0} \right] - \frac{m}{m_0 - m} \ln \frac{m_0}{m} - \frac{g_M}{2} t^2 \quad \text{mit } h_0 = 0$$

Wenn keine Gravitationsverluste aufträten, d.h. kein Treibstoff verbraucht würde, ließe sich die Landung mit einem Start gleichen Geschwindigkeitsbedarfs vergleichen (Abgassäule!).

Ein Raumfahrzeug hat nach dem Start vom Mond und einer Brenndauer  $T$  folgende Gesamtenergie  $E$  und ideale Geschwindigkeit  $v_{id}$  ( $m_{BS}$  = Brennschlussmasse):

$$E = \frac{m_{BS}}{2} \times v_T^2 + m_{BS} \times g_M \times h_T = \frac{m_{BS}}{2} \times c^2 \times \left[ 1 - \frac{m}{m_0} \right] - \frac{2 \times g_M \times T}{c} \times \frac{m_0}{m_0 - m_{BS}} \times c \ln \frac{m_0}{m_{BS}} - \frac{g_M}{2} T^2$$

$$v_{id} = c \times \ln \frac{m_o}{m_{BS}}$$

Lässt man den Gravitationsverlust außer Acht, so erhält man die ideale Brennschlussenergie  $E_{id}$ :

$$E_{id} = \frac{m_{BS}}{2} \times c^2 \times \ln^2 \frac{m_o}{m_{BS}}$$

Der Energieverlust  $DE$  aufgrund des Schwereverlustes ergibt sich aus der Differenz von  $E_{id}$  und  $E$  zu:

$$DE = E_{id} - E = \frac{m_{BS}}{2} \times c^2 \times \frac{2 \times g_M \times T}{c} \times \frac{\dot{m}_o}{\dot{m}_o - m_{BS}} \times \ln \frac{m_o}{m_{BS}} - \frac{\dot{m}_o}{\dot{m}_o - m_{BS}} \times \frac{\dot{m}_o}{\dot{m}_o - m_{BS}} \times \frac{\dot{m}_o}{\dot{m}_o - m_{BS}} \times \frac{\dot{m}_o}{\dot{m}_o - m_{BS}}$$

Um die in dieser Gleichung zunächst unbekannte Brenndauer  $T$  zu ermitteln, wird das auf die Erdegravitation  $g_o$  bezogene Verhältnis  $n$  von Schub zu Startgewicht verwendet:

$$n = \frac{F}{m_o \times g_o} = \frac{1}{m_o \times g_o} \times \frac{dm}{dt} \times c = \frac{1}{m_o \times g_o} \times \frac{m_o - m_{BS}}{T} \times c$$

Es folgt für die Brenndauer  $T$ :

$$T = \frac{1}{n} \times \frac{c}{g_o} \times \left( 1 - \frac{m_{BS}}{m_o} \right) = \frac{I_{sp}}{n} \times \left( 1 - \frac{m_{BS}}{m_o} \right)$$

Für den Energieverlust  $\Delta E$  gilt somit:

$$DE = \frac{m_{BS}}{2} \times c^2 \times \frac{2}{n} \times \frac{g_M}{g_o} \times \frac{\dot{m}_{BS}}{\dot{m}_o} + \ln \frac{m_o}{m_{BS}} - \frac{\dot{m}_o}{\dot{m}_o - m_{BS}}$$

Der durch den Schwereverlust zusätzlich benötigte Geschwindigkeitsbedarf  $\Delta v$  kann näherungsweise durch Einführung der Vergleichsgeschwindigkeit  $v$  wie folgt angegeben werden:

$$DE = \frac{1}{2} \times m \times (v + \Delta v)^2 - \frac{1}{2} \times m \times v^2 \gg m \times v \times \Delta v$$

Mit der Gleichung für den Energieverlust erhält man:

$$\Delta v \gg \frac{c}{n} \times \frac{c}{v} \times \frac{g_M}{g_o} \times \frac{\dot{m}_{BS}}{\dot{m}_o} + \ln \frac{m_o}{m_{BS}} - \frac{\dot{m}_o}{\dot{m}_o - m_{BS}}$$

Für eine erste Abschätzung werden die Variablen folgendermaßen festgelegt: Die Vergleichsgeschwindigkeit entspreche der Strahlgeschwindigkeit  $c \gg v \ll 3000 \text{ m/s}$ , das Verhältnis der Fallbeschleunigungen von Erde  $g_0$  und Mond  $g_M$  sei  $g_M/g_0 = 0,164$  und mit einem spezifischen Impuls von  $I_{sp} = 200 \text{ s}$  erhält man ein Verhältnis von Start- zu Brennschlussmasse von  $m_0/m_b = 2,7$ . Damit beträgt der Schwereverlust ungefähr:

$$Dv \ll \frac{181}{n} \frac{c}{g_0} \frac{g_M}{g_0}$$

Weiterhin gilt als Fluchtbedingung aus dem Einflussbereich des Mondes für das Verhältnis von Schub zu Gewicht der Wert  $n = 1$ , zum Erreichen einer niedrigen Mondumlaufbahn von der Mondoberfläche aus ist  $n = 0,4$  anzunehmen. Für eine weiche Mondlandung aus der Übergangsbahn Erde-Mond ergibt sich folglich ein Geschwindigkeitsbedarf von  $v \gg 3 \text{ km/s}$ .

### Beispielrechnung

Gegeben:  $I_{sp} = 300 \text{ s}$       $n = 1$   
 Gesucht:  $H, T, m_b/m_0$

$$T = \frac{c}{g_0} \ln \left( 1 - \frac{m_{BS}}{m_0} \frac{g_0}{g_M} \times \frac{I_{sp}}{n} \right)$$

$$c \times \ln \frac{m_0}{m_{BS}} = v + Dv$$

$$v = 2670 \text{ m/s} + 181 \text{ m/s} = 2850 \text{ m/s}$$

$$c = I_{sp} \times g_0 = 2943 \text{ m/s}$$

$$\frac{m_0}{m_{BS}} = e^{\frac{v}{c}} = 2,56$$

$$T = \frac{c}{g_0} \ln \left( 1 - \frac{m_{BS}}{m_0} \frac{g_0}{g_M} \times \frac{I_{sp}}{n} \right) = 187 \text{ s}$$

Durch Einsetzen in die Gleichungen folgt für dieses Rechenbeispiel:

$$h = 255 \text{ km}$$

## Schwebeflug / „Flare“

Sowohl beim Abstieg mit als auch ohne Atmosphäre wird am Ende der Kontakt mit der Oberfläche stehen. Dabei ist es zweckmäßig, um Schäden an Mensch und Material vorzubeugen, einen „Flare“ durchzuführen, also das letzte Abbremsen auf eine Sinkgeschwindigkeit von annähernd null ( $\rightarrow$  Sojuz-Kapseln). Dies kann auch notwendig werden, wenn z.B. Hindernissen im Landegebiet ausgewichen werden soll ( $\rightarrow$  Apollo 11!). Der Treibstoffbedarf hierfür kann u.U. beträchtlich sein. Er lässt sich einfach aus der Schubgleichung ( $\mathbf{F} = -\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{c}_{\text{eff}}$ ) herleiten ( $\dot{\mathbf{m}}$  ist dabei der Massenverlust des Raumfahrzeuges durch die Treibstoffverbrennung,  $-\dot{\mathbf{m}}$  der Massendurchsatz im Triebwerk). Im Schwebefall muss der Betrag des Schubes der Gravitationskraft entsprechen, also gilt:

$$\mathbf{m} \times \mathbf{g} = -\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{c}_{\text{eff}}$$

Trennung der Variablen und Integration nach der Zeit liefert:

$$\int_0^t \frac{\dot{\mathbf{m}}}{\mathbf{m}} dt = - \int_0^t \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{c}_{\text{eff}}} dt$$

Der Ortsfaktor  $g$  ist in Bodennähe annähernd konstant, also ergibt sich für zeitlich abhängige Masse

$$\mathbf{m}(t) = \mathbf{m}_0 \times \exp\left\{ - \frac{\mathbf{g}_0 \times t}{\mathbf{c}_{\text{eff}}}\right\}$$

bzw. den notwendigen Massendurchsatz an Treibstoff:

$$-\dot{\mathbf{m}}(t) = \frac{\mathbf{m}_0 \times \mathbf{g}_0}{\mathbf{c}_{\text{eff}}} \times \exp\left\{ - \frac{\mathbf{g}_0 \times t}{\mathbf{c}_{\text{eff}}}\right\}$$

## 12.2 Atmosphärischer Wiedereintritt

Die Atmosphäre von Himmelskörpern /wie z.B. Erde, Mars, Titan, etc.) eignet sich dazu, einen Wiedereintrittskörper stark genug abzubremsen, dass eine Landung mit Fallschirmen möglich wird. Dabei wird die kinetische Energie hauptsächlich in Wärme umgewandelt. Eine einfache Abschätzung zeigt, dass die Wärmemenge ausreicht, um das Raumfahrzeug zu verdampfen, wenn es nicht dagegen geschützt würde. Im Folgenden sollen nun Methoden beschrieben werden, mit denen man zum einen die auftretenden Belastungen berechnen kann; zum anderen sollen Mittel vorgestellt werden, mit denen in der Praxis eintretende Raumfahrzeuge vor der Zerstörung geschützt werden.

### Ballistischer Eintritt / Straight Line Solution

Ein in die Erdatmosphäre eintauchender Flugkörper erfährt eine starke Verzögerung und nimmt trotz der kurzen Flugzeit von nur einigen Minuten sehr große Wärmemengen auf. Bei zu kleiner Anfangsneigung taucht das Raumfahrzeug nur kurz in die Erdatmosphäre ein und verlässt sie wieder („overshoot“ - vgl. Stein, der über die Wasserfläche flitzt). Ist der Winkel zu hoch, so sind die auftretenden Beschleunigungs- und Wärmespitzen so gewaltig, dass der Flugkörper zerlegt bzw. verdampft.

Ein Körper mit der Masse  $m$  und der Querschnittsfläche  $A = r^2 \cdot \pi$  überstricht in der Zeit  $dt$  das Volumen  $V = v \cdot dt \cdot A$ . Dies verdeutlicht auch die folgende Abbildung:

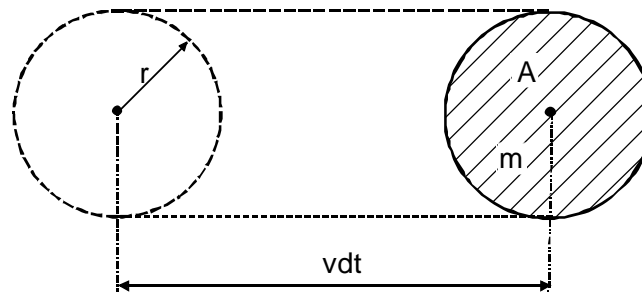


Abb. 12.1: Erläuterung des Impulserhaltungssatzes

Dabei geht ein Bruchteil des Gesamtimpulses (abhängig von  $c_D$ ) der ankommenden Strömung auf den Körper über. Aus dem Impulserhaltungssatz folgt:

$$- m \times \frac{dv}{dt} = \frac{c_D}{2} \times \rho \times v^2 \times A$$

Wie auch beim Aufstieg (vgl. Kapitel 6) kann man den Bahnneigungswinkel relativ zur Horizontalen oder zur Vertikalen definieren. Beides ist gebräuchlich. Analog zum Aufstieg wollen wir auch beim Abstieg uns nach der Vertikalen als Referenz richten.

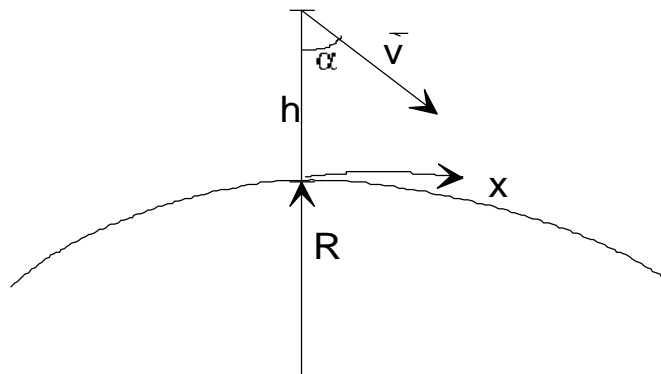


Abb. 12.2: Zeitliche Abnahme der Bahnhöhe

Die Zeitliche Abnahme der Bahnhöhe ergibt sich aus Abbildung 9.2 zu:

$$- dh = v \times dt \times \sin a$$

Mit diesen Annahmen erhalten wir folgende Formeln, welche praktisch identisch mit denen des Aufstieges sind:

$$\dot{v} = g \times \cos a - c_D \frac{r}{2} \times \frac{A}{m} \times v^2 \quad \text{für die Vertikale}$$

und

$$v \dot{a} = -\frac{g}{r} \times \frac{v^2}{\sin a} + c_L \frac{r}{2} \times \frac{A}{m} \times v^2 \quad \text{für die Horizontale}$$

sowie die Höhen- und Reichweitengleichung:

$$\dot{h} = -v \cos a \quad \text{für die Vertikale}$$

$$\dot{x} = v \sin a \quad \text{für die Horizontale}$$

Im Folgenden wird eine stark vereinfachte Abschätzung der beim Wiedereintritt auftretenden Verzögerung durchgeführt. Dabei wird angenommen, dass der Eintrittsvorgang mit konstanter Bahnneigung („Straight Line“) erfolgt und der Eintrittskörper keinen Auftrieb erzeugt [5]. Ohne Auftrieb gilt ein Wiedereintritt als **ballistisch**. In diesem Fall kann auf die zweite Bewegungsgleichung verzichtet werden.

Des Weiteren wird die Schwerkraft vernachlässigt, da sie gegenüber der hohen kinetischen Energie des Eintrittskörpers sehr klein ist. Wie wir oben gesehen haben, wird der Eintrittswinkel  $\alpha$  nicht wesentlich kleiner als  $90^\circ$  zur Vertikalen sein. Dadurch wird die Bewegungsgleichung weiter vereinfacht und wir können schreiben:

$$v = -\frac{c_D}{2} \frac{A}{m} \times v^2$$

Wie aus der obigen Formel ersichtlich, wird ein konstanter Faktor (bestehend aus mehreren Parametern, nämlich Widerstandsbeiwert, Querschnittsfläche und Masse) beim Eintritt eine entscheidende Rolle spielen. Es ist daher zweckmäßig, eine Kenngröße aus diesen Konstanten zu definieren, den sogenannten „ballistischen Faktor“  $B^1$ :

$$B := \frac{c_D \times A}{2m}$$

Genaugenommen ist dieser Wert nur ungefähr konstant – für Geschwindigkeiten oberhalb der zweifachen Schallgeschwindigkeiten jedoch in guter Näherung, da dort der Widerstandsbeiwert  $c_D$  annähernd geschwindigkeitsunabhängig wird.

Die Zunahme der Luftdichte mit abnehmender Höhe wird mit Hilfe der der barometrischen Höhenformel wie folgt beschrieben (vgl. Gl. 6.7):

$$\rho = \rho_0 \times \exp\left\{-\frac{h}{H}\right\}$$

$H$  ist dabei die sogenannte „Skalenhöhe“, ein Wert welcher vorrangig von der Atmosphärenzusammensetzung und dem Ortsfaktor abhängig ist. Aus den idealen Gasgesetzen lässt sich – wie in Kapitel 6 bereits erwähnt - dafür schreiben:

$$H = \frac{RT}{g_0}$$

Erweitert man

$$v = \frac{dv}{dh} \times \frac{dh}{dt} = -\frac{dv}{dh} v \times \cos \alpha$$

so wird die Bewegungsgleichung in eine Differentialgleichung überführt:

$$\frac{1}{v} \times \frac{dv}{dh} = \frac{B}{\cos \alpha} \times \rho_0 \times e^{-\frac{h}{H}}$$

die integriert werden kann

$$\ln \frac{v}{v_i} = -\frac{B \times H}{\cos \alpha} \times \rho_0 \times e^{-\frac{h}{H}} \quad \text{mit} \quad \dot{v} = -B \times \rho_0 \times e^{-\frac{h}{H}} \times v^2$$

<sup>1</sup> Da sich mit der o.a. Definition für den ballistischen Faktor  $B$  sehr kleine Werte ergeben ( $\approx 0.001 \text{m}^2/\text{kg}$ ), wird in manchen Quellen  $B$  auch als  $\frac{m}{c_D \times A}$  definiert.

mit  $v_i$  zu Beginn des Wiedereintritts, wo noch  $\rho = 0$  herrschen soll. Die Bewegungsgleichung lautet mit diesen Anfangsbedingungen:

$$\dot{v} = \frac{\cos a}{H} v_i^2 \frac{a v \ddot{\theta}}{e v_i \dot{\theta}} \ln \frac{v}{v_i}$$

Das Maximum der Abbremsung findet man mit Hilfe der Ableitung nach dem Verhältnis von gegenwärtiger zu Anfangsgeschwindigkeit:

$$\frac{d\dot{v}}{d\frac{v}{v_i}} = 0 = 2 \frac{a v \ddot{\theta}}{e v_i \dot{\theta}} \times \ln \frac{v}{v_i} + \frac{a v \ddot{\theta}}{e v_i \dot{\theta}} \times \frac{1}{\frac{a v \ddot{\theta}}{e v_i \dot{\theta}}}$$

$$2 \ln \frac{v}{v_i} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{v}{v_i} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{v_i} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Daraus kann man die maximale Verzögerung als Funktion von  $v/v_i$  bestimmt werden. Der Betrag der maximalen Beschleunigung ergibt sich zu:

$$\dot{v}_{\max} = -\frac{\cos a}{2eH} v_i^2 \gg -0.184 \frac{\cos a}{H} v_i^2$$

Die Höhe der maximalen Verzögerung bestimmt man zu

$$h_{\max} = H \cdot \ln \frac{2 \cdot B \cdot H \cdot r_0}{\cos a}$$

Hieraus geht hervor, dass der ballistische Faktor keinen Einfluss auf die maximale Verzögerung, sehr wohl aber auf die Höhe, in der sie auftritt, hat. Der Eintrittswinkel ist sehr eng begrenzt. Bei einem zu flachen Winkel kommt es erst gar nicht zum Eintritt, weil das Gerät nicht genügend abgebremst wird. Bei einem zu steilen Eintritt treten sehr hohe Verzögerungen auf. Erfolgt der Eintritt etwa mit Kreisbahngeschwindigkeit, nähert sich  $v_i$  dem Wert

$$v_i^2 = g_0 \cdot R$$

Für die maximale Verzögerung folgt dann die Faustformel

$$\left( \frac{\dot{v}}{g_0} \right)_{\max} = -0.184 \frac{R}{H} \cos a$$

was für einen Wiedereintritt in die Erdatmosphäre bedeutet:



$$-\left(\frac{\dot{v}}{g_0}\right)_{\max} \approx 156.3 \cos \alpha$$

Für einen Wiedereintrittswinkel  $\alpha$  von  $87^\circ$  erhält man damit eine maximale Verzögerung von 8g, was selbst für gut durchtrainierte Astronauten nach einem Aufenthalt im All in Schwerelosigkeit die Grenzbelastung darstellt (genauere Berechnungen ergeben für  $\alpha = 87^\circ$  eine Verzögerung von 10.6 g!). Verkleinert man den Winkel auf  $84^\circ$  steigt die maximale Verzögerung bereits auf über 16 g (bzw. 18 g). An diesen Werten sieht man, warum in der (bemannten) Raumfahrt nur fast horizontale Eintrittswinkel geflogen werden.

Bemerkenswert ist zu erwähnen, dass die maximale Verzögerung zwar zum Quadrat der Injektionsgeschwindigkeit proportional ist, die Energie, die auf das Fahrzeug übergeht aber zur dritten Potenz der Injektionsgeschwindigkeit wächst.

Der Unterschied zwischen der Eintrittsgeschwindigkeit aus einer Kreisbahn und aus einer fast parabolischen Bahn (beispielsweise vom Mond) beträgt einen Faktor von knapp  $\sqrt{2}$ . Während die Eintrittsgeschwindigkeit von acht auf elf Kilometer pro Sekunde zunimmt, wird die maximale Verzögerung sich also verdoppeln und die Hitzebelastung während des Eintritts sich sogar auf das Dreifache erhöhen. Eine Methode, den Eintritt aktiv zu beeinflussen, wird im folgenden Unterkapitel beleuchtet. Im Mittelpunkt des daran anschließenden Unterkapitels stehen hingegen die Methoden, mit welchen den Hitzebelastungen begegnet wird.

### Eintritt mit Auftrieb

Die Bewegungsgleichung auf Seite 12-5 beschreiben den Eintritt mit Auftrieb. In den Formeln kann die gesamte nicht-gravitationale Beschleunigung zusammengefasst werden zu:

$$d = \left\{ \left( \frac{\text{Widerstand}}{m} \right)^2 + \left( \frac{\text{Auftrieb}}{m} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

weil Widerstand und Auftrieb - nach Definition - senkrecht aufeinander stehen. Man kann also schreiben:

$$\mathbf{d} = \sqrt{\mathbf{c}_D^2 + \mathbf{c}_L^2} \times \frac{\mathbf{r}}{2} \times \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{m}} \times \mathbf{v}^2$$

Analog zum ballistischen Faktor  $\mathbf{B} = (\mathbf{c}_D \times \mathbf{A}) / (2\mathbf{m})$  lässt sich beim auftriebsbehafteten Eintritt ein „Lift Ballistic Factor“ definieren:

$$\mathbf{L} = \frac{\mathbf{c}_L \times \mathbf{A}}{2 \times \mathbf{m}} = \frac{\mathbf{c}_L}{\mathbf{c}_D} \times \mathbf{B}$$

Die beiden Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$\dot{v} = g \cdot \cos \alpha - B \cdot r \cdot v^2$$

$$v \dot{\alpha} = -g \left( 1 - \left( \frac{v}{v_k} \right)^2 \right) \sin \alpha + \frac{c_L}{c_D} \cdot B \cdot r \cdot v^2$$

Für geringe Flughöhen und kleine Änderungen des Flugbahnwinkels gilt  $v_k^2 = g \times r \gg g_0 \times R$  und  $\dot{\alpha} \gg 0$  („Straight Line Solution“), also:

$$g \left( 1 - \left( \frac{v}{v_k} \right)^2 \right) \sin \alpha = \frac{c_L}{c_D} \cdot B \cdot r \cdot v^2$$

Damit ergibt sich das Verhältnis aus nicht-gravitationalen und gravitationalen Beschleunigungen zu:

$$\frac{d}{g} = \frac{c_L}{c_D} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{c_L}{c_D} \cdot \frac{v^2}{v_k^2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha}$$

mit  $g \left( 1 - \left( \frac{v}{v_k} \right)^2 \right) \sin \alpha = \frac{c_L}{c_D} \cdot B \cdot r \cdot v^2$  ergibt sich

$$d = \left( 1 + \left( \frac{c_L}{c_D} \right)^2 \right)^{1/2} \cdot \frac{c_L \cdot B \cdot r \cdot v^2}{c_D}$$

Mit der Reihenentwicklung  $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2}$  für  $x \leq 1$  kann man obiges Verhältnis

$$\text{für } \frac{c_L}{c_D} < 1 \text{ in } \frac{d}{g} < \left( \frac{c_D}{c_L} + \frac{1}{2} \cdot \frac{c_L}{c_D} \right) \text{ bzw.}$$

$$\text{für } \frac{c_L}{c_D} > 1 \text{ in } \frac{d}{g} < 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{c_D}{c_L} \right)^2$$

überführen. Für eine Kapsel mit geringem Auftrieb ( $\rightarrow$  Apollo!) ergibt sich z.B. für  $c_L/c_D \gg 0,35$  ungefähr eine maximale Verzögerung von  $\dot{v}_{\max} \gg 3g$ . Für flache Eintritte ( $\dot{\alpha} = 0$ ,  $\alpha \approx 90^\circ$ ) kann man die maximale Verzögerung auch wie folgt abschätzen:

$$\frac{c_L}{c_D} \cdot B \cdot r \cdot v^2 = g \left( 1 - \left( \frac{v}{v_k} \right)^2 \right) \approx g_0 - \frac{v^2}{R}$$

Also kann man auch schreiben:

$$\frac{\dot{v}}{g} = - \left( \frac{c_L}{c_D} + \frac{1}{B \cdot r \cdot R} \right)^{-1}$$

bzw. (weil  $B \times r_0 \times R \gg 10^3$ ):

$$\frac{\dot{v}}{g_{\max}} \gg \frac{c_D}{c_L}$$

### 12.3 Hitzeschutzsysteme für Eintrittskörper

Die Struktur eines Wiedereintrittskörpers muss vor der hohen thermischen Belastung während des Wiedereintritts durch eine Isolationsschicht geschützt werden. Grundsätzlich sind zwei Schutzsysteme möglich, die Ablation und die Strahlungskühlung.

#### Isolation und Abstrahlung

Mit Hilfe eines vom Raumfahrzeug isolierten Wärmeschutzschildes wird ein Großteil der aufgenommenen Wärmemenge abgestrahlt. Die Intensität der Wärmestrahlung wächst mit der 4. Potenz der Temperatur (s. Kapitel 9.1). Das Schild muss somit sehr hohen Temperaturen standhalten. Der Wärmestrom im Schutzschild ist nur in großen Höhen so gering, dass er bei realistischen Schildtemperaturen abgestrahlt werden kann. Die Bremsung des Fahrzeuges muss deshalb während eines möglichst langen Fluges in möglichst großen Höhen erfolgen, was durch einen hinreichend kleinen Bahnneigungswinkel gegenüber der Horizontalen ermöglicht wird.

Bei der Strahlungskühlung wird durch eine geringe Wärmeleitfähigkeit der Isolationsschicht der Wärmefluss an der Schildoberfläche gestaut. Dadurch wird eine hohe Oberflächentemperatur erzielt, bei der ein Großteil der zugeführten Wärme wieder abgestrahlt wird (vgl. Kapitel 9.1). Der Vorteil der Strahlungskühlung liegt darin, dass Kontur und Masse des Eintrittskörpers während des Eintritts unverändert bleiben, was bei der Ablationskühlung nicht der Fall ist. Das Strahlungskühlungssystem wird daher insbesondere bei wiederverwendbaren Raumfahrzeugen (z.B. Space Shuttle, Buran) angewendet.

Als Materialien werden zur Strahlungskühlung verwendet:

- metallische Hitzeschilde (Thorium dispersed Nickel-Chromium)
- nichtmetallische Hitzeschilde (Keramik)

Der Vorteil von Keramik gegenüber metallischen Schilden ist, dass Keramik bei Überschreiten der Grenztemperatur als Ablator wirkt und dadurch einen zusätzlichen Sicherheitsfaktor besitzt.

## Ablation

Man kann einen schmelzenden und verdampfenden Wärmeschutzschild verwenden. Dabei sind die Wärmekapazität des Schildes, seine Schmelz- und Verdampfungswärme und die Kühlung der Grenzschicht durch den Wärme aufnehmenden Dampf ausschlaggebend. Man bezeichnet den Vorgang des Schmelzens und Verdampfens infolge der aerodynamischen Aufheizung als Ablation. Es existieren folgende Ablationsmaterialien:

- sublimierende Ablatoren (z.B. Teflon)
- schmelzende Ablatoren (z.B. Quarz)
- verkohlende Ablatoren (z.B. Nylonphenolic)
- oxydierende Ablatoren (z.B. Graphit)

Für Wiedereintrittskörper sind verkohlende Ablatoren am besten geeignet. Nachdem das Material verkohlt ist, bleibt eine Koksschicht an der Oberfläche stehen, die erst bei hohen Temperaturen oxydiert. Wegen der hohen Oberflächentemperatur und geringen Wärmeleitfähigkeit der Koksschicht wirken die verkohlenden Ablatoren zusätzlich wie ein Strahlungskühlungssystem. Ablatoren wurden bei den Mercury-, Gemini- und Apollo-Programmen eingesetzt.

## Retroraketen

Als die „triviale“ Lösung des Atmosphäreneintritt-Problems sind natürlich auch Raketentriebwerke denkbar. Man bremst das Raumfahrzeug dabei bereits außerhalb der Atmosphäre mit Hilfe einer Retrorakete ab. Diese Möglichkeit wird jedoch aufgrund ihrer Unwirtschaftlichkeit eigentlich nicht angewendet (Ausnahme: bei Landungen auf Himmelskörpern ohne Atmosphäre, dort gibt es keine Alternative).

## 13 Literatur

- [1] J. D. Anderson  
*Modern Compressibel Flow*  
McGraw-Hill, New York 1990
- [2] Werner Buedeler  
*Geschichte der Raumfahrt*  
Sigloch 1979
- [3] R. W. Bussard, R.D. DeLauer  
*Fundamentals of Nuclear Flight*  
McGraw-Hill, New York 1965
- [4] Eckart Elsner  
*Raumfahrt in Stichworten*  
Verlag Ferdinand Hirt
- [5] R. Friedrich  
*Raumfahrtaerodynamik* (Skript zur Vorlesung)  
Lehrstuhl für Fluidmechanik 1995
- [6] A. N. Hosny  
*Propulsion Systems*  
University of South Carolina Press
- [7] Heinz H. Koelle  
*Handbook of Astronautical Engeneering*  
McGraw-Hill, New York 1961
- [8] Heinz H. Koelle  
*Theorie und Technik der Raumfahrzeuge*  
Berliner Union, Stuttgart 1964
- [9] W. J. Larson and J. R. Wertz  
*Space Missions Analysis and Design*  
Kluwer Academic Publisher 1996
- [10] F. Mayinger, K. Stephan  
*Thermodynamik*  
Springer Verlag, Berlin 1986
- [11] Hans-Georg Münzberg  
*Flugantriebe*  
Springer Verlag 1972

- [12] Harry O. Ruppe  
*Introduction to Astronautics*  
Academic Press, New York London 1966
  
- [13] Harry O. Ruppe  
*Die grenzenlose Dimension*  
Econ Verlag
  
- [14] Horst Scheffold  
*Theoretische Grundlagen der Raumfahrttechnik*  
Goldmann Verlag, München 1973
  
- [15] Robert H. Schmucker  
*Hybridraketenantriebe*  
Goldmann Verlag, München 1972
  
- [16] R. E. Sorkin  
*Gas Dynamics and Thermodynamiks of Solid-Propellant Rockets*  
Israel Programm for Scientific Translations
  
- [17] E. Stuhlinger  
*Ion Propulsion for Spaceflight*  
McGraw-Hill, New York London 1964
  
- [18] K. Stumpf  
*Himmelsmechanik*  
Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1965
  
- [19] W. T. Thomson  
*Introduction to Space Dynamics*  
John Wiley & Sons, New York 1961
  
- [20] E. Messerschmid, S.Fasoulas  
*Raumfahrtsysteme*  
Springer Verlag 2000
  
- [21] Carl Sagan  
*Unser Kosmos*  
Droemer Knauer, 1982
  
- [22] Mark Wade  
*Encyclopaedia Astronautica*  
<http://www.astronautix.com>