

## Modulationsverfahren

Mit der Hilfe von Modulationsverfahren werden Informations-Signale so aufbereitet, daß diese über größere Distanzen übertragen werden können. Dieser Vorgang, der auf der Senderseite stattfindet, wird mit Modulation bezeichnet. Auf der Empfängerseite müssen die Informations-Signale wieder zurückgewonnen werden, was als Demodulation bezeichnet wird. Beide Vorgänge — Modulation und Demodulation — sind somit Gegenstand der Modulationsverfahren.

- Unter dem Modulationsvorgang soll die Beeinflussung der Parameter eines „Trägersignals“ (z.B. hochfrequente Schwingung) durch das Informations-Signal verstanden werden.

Die Informations-Signale können analoger oder digitaler Natur sein. Entsprechend ist es üblich von analoger bzw. digitaler Modulation zu sprechen. Wie sich hieraus bereits erahnen läßt, unterscheiden sich die zur Modulation beeinflussbaren Parameter des Trägersignals nicht durch die Natur der Informations-Signale. Daher kommen stets die gleichen Prinzipien zur Anwendung. Die praktische Ausformung wird sich allerdings unterscheiden, wie nachfolgend im Einzelnen dargelegt wird.

In den Abschnitten 2 bis 5.1 wird zunächst ein Überblick über die Themenstellung gegeben. Der Abschnitt 6 bringt eine kurze Auflistung der für die Modulationsverfahren notwendigen Zusammenhänge zwischen Zeitfunktionen und Spektren, wie sie mit Hilfe der Fourier-Transformation beschrieben werden können.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Modulationsverfahren</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Informations-Signale</b>	<b>1</b>
2.1	Analoge Signale	1
2.2	Digitale Signale	1
2.3	Die Bandbreite der Signale	2
2.4	Verrundung der Digital-Signale	3
<b>3</b>	<b>Träger-Signale</b>	<b>4</b>
3.1	Beeinflussung der Parameter der Trägersignale	4
3.2	Die Parameter der Trägersignale	5
3.2.1	Gleichspannungs-Träger	5
3.2.2	Puls-Träger	5
3.2.3	Hochfrequenz-Träger	6
3.2.4	Zwei orthogonale Hochfrequenz-Träger (mit Phasendifferenz $90^0$ )	7
3.2.5	Optische Übertragung	7
<b>4</b>	<b>Modulatoren</b>	<b>7</b>
4.1	Amplituden-Modulatoren	7
4.2	Winkel-Modulatoren	9
4.3	Quadratur-Modulatoren	9
4.4	Digitale Modulatoren	10
4.5	Hierarchische Modulationen	10
<b>5</b>	<b>Vergleich analoger und digitaler Modulationsverfahren</b>	<b>12</b>
5.1	Semantische Einordnung digitaler Modulationen	13
<b>6</b>	<b>Zeitbereich und Frequenzbereich</b>	<b>14</b>
6.1	Multiplikation und Faltung	15
6.1.1	Herleitung der vereinfachten Faltung im Zeitbereich	15
6.1.2	Faltung im Frequenzbereich	16
<b>7</b>	<b>Die gewöhnliche Amplituden-Modulation AM</b>	<b>18</b>
7.1	Ideale Amplituden-Modulation	18
7.2	Die AM im Zeitbereich	18
7.3	Blockschaltbild des AM Modulators	19
7.4	Spektrum der AM	19
7.5	Modulations-Grad der AM	21
7.5.1	Kompatibilität	21
7.5.2	Definition des Modulationsgrades	21
7.6	Zeigerdarstellung der Amplitudenmodulation	23
7.6.1	Leistung der AM	24
<b>8</b>	<b>Ideale AM Demodulation</b>	<b>26</b>
8.1	Hüllkurven-Demodulator (asynchrone Demodulation)	26
8.2	Synchrone Demodulation von AM	27
8.2.1	Zeitsignale bei Synchroner Demodulation von AM	28
8.2.2	Spektren bei Synchroner AM-Demodulation	29
<b>9</b>	<b>Lineare Amplituden-Modulation DSB</b>	<b>29</b>
9.1	Blockschaltbild und Spektrum der DSB	30
9.2	Demodulation der DSB	31
9.3	Träger-Rückgewinnung für DSB	32
9.3.1	Frequenz-Verdopplung	32
9.3.2	Costas-Loop	33

<b>10 Quadratur-Doppel-Seitenband-Modulation QDSB</b>	<b>33</b>
10.1 QDSB Blockschaltung . . . . .	34
10.2 Ortskurve der QDSB . . . . .	35
<b>11 Die Winkelmodulation im Zeitbereich</b>	<b>36</b>
11.1 Eingriff in den Winkel des Hochfrequenzträgers . . . . .	36
11.1.1 Beeinflussung des Winkels $\varphi(t)$ . . . . .	37
11.2 Verwandtschaft von Phasen- und Frequenzmodulation . . . . .	37
11.2.1 Phasenmodulation . . . . .	38
11.2.2 Frequenzmodulation . . . . .	38
11.2.3 Phasenmodulation mit einem Frequenzmodulator . . . . .	38
11.2.4 Erzeugung von FM mit einem Phasenmodulator . . . . .	39
<b>12 Modulation und Demodulation von PM und FM</b>	<b>40</b>
12.1 Erzeugung von Phasenmodulation mit I/Q Phasenmodulator . . . . .	40
12.1.1 Schmalband Phasen-Modulator . . . . .	41
12.1.2 Demodulation einer Phasenmodulation . . . . .	42
12.2 Erzeugung einer Frequenzmodulation . . . . .	42
12.2.1 Demodulation einer Frequenzmodulation . . . . .	43
<b>13 Spektren winkelmodulierter Schwingungen</b>	<b>43</b>
13.1 Die „Momentan“-Frequenz . . . . .	44
13.1.1 Der Frequenz-Hub . . . . .	45
13.2 Spektrum der Schmalband-Modulationen . . . . .	45
13.2.1 Bandbreite der Schmalband-WM . . . . .	46
13.3 Breitband-Frequenzmodulation . . . . .	46
13.3.1 Breitband-FM mit tieffrequentem Nachrichtensignal . . . . .	47
13.3.2 HF-Bandbreite der Breitband-FM . . . . .	47
13.3.3 Beispiel 1: FM-Spektrum für Cos-förmiges Nachrichtensignal . . . . .	48
13.3.4 Beispiel 2: FM-Spektrum für Sägezahnförmiges Nachrichtensignal . . . . .	49
13.3.5 Spektralverteilung und Bandbreite des FM-Spektrums für den allgemeinen Fall des Nachrichtensignals . . . . .	49
13.3.6 FM-Bandbreite mit der Carson-Formel . . . . .	50
<b>14 Klassische Analyse der FM</b>	<b>52</b>
14.1 Das FM-Signal im Zeitbereich . . . . .	52
14.2 Die Pendelzeigerdarstellung der FM . . . . .	52
14.2.1 Pendel-Zeiger bei Breitband-FM . . . . .	53
14.2.2 Zerlegung des Pendelzeigerdiagramms in seine Inphasen- und Quadratur-Komponente . . . . .	53
14.3 Die Spektralverteilung des FM-Signals für Cos-förmiges Nachrichtensignal . . . . .	54
14.3.1 Die Besselfunktionen . . . . .	55
14.3.2 Bestimmung des FM-Spektrums aus den Besselfunktionen . . . . .	58
14.3.3 FM Spektrum eines UKW-Senders . . . . .	59
14.4 Das Zeigerdiagramm der FM . . . . .	59
14.4.1 Das Drehzeigerdiagramm für Schmalband-FM . . . . .	60
14.4.2 Das Drehzeigerdiagramm der Breitband-FM . . . . .	60
14.5 Verzerrungen der FM bei der Übertragung . . . . .	61
14.6 Amplitudenbegrenzung der FM-Schwingung . . . . .	62
14.6.1 Hubvergrößerung durch Frequenzvervielfachung . . . . .	64
<b>15 Informations-Übertragung analog und digital</b>	<b>65</b>
15.1 Analoge Übertragung . . . . .	65
15.1.1 Aufgabe des analogen Empfängers . . . . .	65
15.1.2 Beispiel AM-Übertragung . . . . .	66
15.2 Digitale Übertragung . . . . .	67
15.2.1 Aufgabe des Digitalen Empfängers . . . . .	68
15.3 Eigenschaften der Signale im physikalischen Übertragungs-Kanal . . . . .	68
15.3.1 Analoge Signale . . . . .	68

15.3.2	Digitale Signale . . . . .	68
<b>16</b>	<b>Digital-Übertragung im Basisband</b>	<b>70</b>
16.1	Der Basisband-Kanal . . . . .	70
16.2	Die Sender-Seite . . . . .	70
16.3	Die Empfänger-Seite . . . . .	71
16.3.1	Korrelations-Empfänger . . . . .	72
16.3.2	Empfangs-Symbole durch weißes Rauschen gestört . . . . .	74
16.3.3	Matched Filter Empfänger . . . . .	75
16.3.4	Optimierung des Matched Filters . . . . .	76
16.3.5	Fehler-Raten bei binärer Datenübertragung (Störung durch weißes Gauß'sches Rauschen)	77
16.3.6	Entscheider-Schwelle und Bitfehler-Wahrscheinlichkeit . . . . .	78
16.3.7	Gauß'sche Fehlerfunktion und $Q$ -Funktion . . . . .	79
16.3.8	Bit-Fehler-Rate . . . . .	80
16.3.9	Der $Q$ -Faktor . . . . .	81
16.3.10	Bipolare Datenübertragung . . . . .	81
16.3.11	Unipolare Datenübertragung . . . . .	81
16.3.12	Die Fehlerwahrscheinlichkeit $P_B$ ist unabhängig von der Form der Symbole. . . . .	82
<b>17</b>	<b>Spektren Digitaler Signale</b>	<b>83</b>
17.1	Daten mit statistischer Unabhängigkeit . . . . .	83
17.2	Beispiele für Daten mit statistischer Abhängigkeit . . . . .	84
17.2.1	Die Biphase-Level Codierung . . . . .	85
<b>18</b>	<b>Modell einer Digitalen Übertragung im Basisband</b>	<b>87</b>
<b>19</b>	<b>Nyquist-Bedingungen</b>	<b>88</b>
19.1	Idealer Tiefpaß als einfachste Form, die die Nyquist-Bedingung 1 erfüllt . . . . .	88
19.2	Verallgemeinerung der Nyquist-Bedingung 1 . . . . .	90
19.2.1	Nyquist-Symbole gemäß der Nyquist-Bedingung abgetastet . . . . .	91
<b>20</b>	<b>Cosinus Roll-Off</b>	<b>91</b>
20.1	Die gerade Spektral-Funktion ist eine Cos-Kuppe $G_c(\omega)$ . . . . .	91
20.2	Verrundungs-Filter mit Cosinus Roll-Off . . . . .	92
20.3	Nyquist-Bedingung 2 . . . . .	93
20.4	Symbol-Rate und Spektrale Effizienz bei Cos-Roll-Off Verrundung . . . . .	95
<b>21</b>	<b>Root-Raised-Cosine</b>	<b>96</b>
21.1	Das Augen-Diagramm . . . . .	97
<b>22</b>	<b>Die Gauß-Verrundung</b>	<b>98</b>
22.0.1	Gauß-Form und Nyquistbedingung 1 . . . . .	99
22.1	Matched Filter für die Gauß-Form . . . . .	100
22.2	Gauß-Roll-Off . . . . .	100
22.2.1	Gauß-Roll-Off im Frequenzbereich . . . . .	100
22.2.2	Gauß-Roll-Off im Zeitbereich . . . . .	100
22.2.3	Symbol-Verrundung bei GSMK und DECT . . . . .	102
<b>23</b>	<b>Modell der Digital-Übertragung mit Modulation</b>	<b>104</b>
23.1	Grundsätzliches Blockschaltbild des Digitalen Modulators . . . . .	104
23.2	Systematik Digitaler Modulationen . . . . .	105
23.3	Quadratur Modulations-Verfahren: Eingriff in die Amplitude der Träger . . . . .	106
23.3.1	4-Quadranten-Multiplizierer in Hardware . . . . .	106
23.4	Amplitude-Phase Modulations-Verfahren: Eingriff in Amplitude & Phase der Träger . . . . .	107
23.4.1	2-Quadranten-Multiplizierer in Hardware . . . . .	108

<b>24 Digitale Modulationen im Basisband betrachtet</b>	<b>108</b>
24.1 Komplexe Einhüllende	108
24.1.1 Darstellung der Modulations–Arten mit Hilfe der Komplexen Einhüllenden	109
24.1.2 Komplexer I/Q Modulator	109
24.2 Das Vektor–Diagramm	110
24.2.1 Digital Mapping	110
24.3 Konstellations–Diagramm, Signal–Raum, Phasen–Stern	110
24.3.1 Digitale Interpolation	111
24.3.2 Vektor–Diagramm	112
24.4 Daten–Symbole und Vektor–Diagramm dreidimensional	112
<b>25 Modulationen ohne konstante Einhüllende</b>	<b>113</b>
25.1 Modulation der Amplitude durch nur ein Nachrichten–Signal	113
25.1.1 Phasen–Stern (Signal–Konstellation, Signal–Raum) der BPSK (2PSK)	116
25.2 Quadratur–Träger–Verfahren	116
25.2.1 Mapping für quadratische Symbol–Konstellationen	118
25.2.2 QPSK (4PSK, 4QAM)	118
25.2.3 16QAM	119
25.2.4 64QAM	120
25.2.5 Symbol–Energie, Entscheider–Grenzen, Phasen–Winkel	120
25.2.6 8PSK	122
25.2.7 Mapping Tabellen in der Praxis	123
25.2.8 Weitere Symbol–Konstellationen	123
<b>26 Modulationen mit konstanter Einhüllender</b>	<b>124</b>
26.1 Von der QPSK zur Offset QPSK (OQPSK)	124
26.1.1 Hüllkurven–Schwankungen der QPSK	124
26.1.2 Hüllkurven–Schwankungen der OQPSK	126
26.2 Von der OQPSK zur MSK	127
26.2.1 Vektordiagramme von QPSK, OQPSK & MSK	127
26.2.2 MSK als OQPSK mit Datensymbolen in Form von Cos–Kuppen	128
26.2.3 MSK als Frequenz–Modulation	129
26.2.4 Vektor–Diagramm der MSK	131
26.2.5 Frequenz–Hub und Modulations–Index der MSK	131
26.2.6 MSK Modulator–Struktur (Winkel–Modulation)	132
26.2.7 Phasen–Modulator mit I/Q Vorverzerrung	132
26.2.8 Phasen–Modulator mit numerisch gesteuertem Oszillator NCO	134
26.3 CPM–Verfahren mit verrundeten Daten–Symbolen	134
26.3.1 GMSK–Verfahren	135
<b>27 Modulations–Verfahren mit Pre–Codierung</b>	<b>136</b>
27.1 Verfahren zur Vermeidung von Phasenfehlern bei der Demodulation	136
27.2 Verfahren zur Vermeidung von Nulldurchgängen im Vektor–Diagramm	137
27.2.1 $\pi/4$ Phasen–Differenz–Codierung ( $\pi/4$ DQPSK)	137
27.2.2 EDGE	138
<b>28 Aufgaben der digitalen Demodulation</b>	<b>139</b>
<b>29 Modell des digitalen Demodulators</b>	<b>139</b>
29.1 Prinzipielle Empfänger–Struktur	139
29.2 Modell des I/Q Empfängers	140
<b>30 Äquivalente Tiefpaß–Signale</b>	<b>140</b>
30.1 Analytisches Signal und komplexe Einhüllende	141
30.1.1 Komplexe Multiplikation und Faltung	143
30.1.2 Hilbert–Filterung einer reellwertigen Zeitfunktion	143
30.2 Das Hilbert–Filter	144
30.2.1 Hilbert Allpass–Filter	144

30.2.2 Hilbert Tiefpass–Filter . . . . .	144
30.2.3 Hilbert Bandpass–Filter . . . . .	145
30.3 Blockschaltbilder des digitalen Demodulators . . . . .	145
30.3.1 Quadratur–Filter–Struktur . . . . .	145
30.3.2 Tiefpass–Filter–Struktur . . . . .	146
30.4 Blockschaltbild eines typischen digitalen Empfängers . . . . .	147
<b>31 Synchrone Demodulator–Strukturen</b>	<b>147</b>
31.1 Demodulation von QPSK, QAM und OQPSK Signalen . . . . .	148
31.2 Synchrone Demodulation von MSK Signalen . . . . .	149
31.3 Demodulation von GMSK Signalen . . . . .	151
31.3.1 Asynchrone Demodulation von GMSK . . . . .	151
31.3.2 Synchrone Demodulation von GMSK . . . . .	152
<b>32 Asynchrone Demodulator–Strukturen</b>	<b>154</b>
32.1 DQPSK Demodulator . . . . .	154
32.2 FSK Demodulator . . . . .	154
<b>33 Träger–Synchronisation</b>	<b>156</b>
33.1 CW Träger . . . . .	156
33.1.1 Der Phasen–Regelkreis (PLL) . . . . .	157
33.2 Synchronisation bei BPSK . . . . .	158
33.2.1 Costas Loop . . . . .	158
33.3 Synchronisation von QPSK und 8PSK . . . . .	159
33.3.1 QPSK Costas Loop . . . . .	160
<b>34 Synchronisation mit Test–Sequenzen (Einträger–Modulationen)</b>	<b>160</b>
34.1 Struktur des Daten–Stroms . . . . .	161
34.2 Modulations–Arten des Daten–Stroms . . . . .	162
34.3 Erster Synchronisations–Schritt . . . . .	163
34.4 Zweiter Synchronisations–Schritt . . . . .	164
34.5 Bestimmung der Impulsantwort $c(t)$ des Kanals . . . . .	164
34.6 Pegel–Regelung . . . . .	165
34.7 Dritter Synchronisations–Schritt . . . . .	165
34.8 Auswertung der Count–Symbole und des FIC . . . . .	165
34.9 CW Störung durch AM–Träger . . . . .	165
<b>35 DMT bei zeitlich konstanten Kanälen</b>	<b>167</b>
35.1 Asymmetric Digital Subscriber Line . . . . .	168
<b>36 OFDM bei Funk–Kanälen</b>	<b>168</b>
36.1 Symbol–Dauer und Bandbreite . . . . .	169
36.2 Die Auswirkung der Echos im Zeitbereich . . . . .	170
36.2.1 Modellfall: Nur 1 Subchannel ist aktiv . . . . .	170
36.3 OFDM Zeitverläufe . . . . .	172
36.3.1 Hochstufige Datensymbole in vielen Sub–Channel . . . . .	172
36.3.2 Träger–Phasen und Crestfaktor . . . . .	173
<b>37 Die OFDM im Frequenzbereich</b>	<b>174</b>
37.1 Die Auswirkung der Echos auf die Kanal–Übertragungsfunktion . . . . .	174
37.2 Höherstufige Symbol–Konstellationen in den Subchannels . . . . .	175
37.3 Pilot–Symbole . . . . .	176
37.4 Zeit– und Frequenz–Abhängigkeit der Kanal–Übertragungsfunktion . . . . .	177
<b>38 OFDM Modulatoren und Demulatoren</b>	<b>178</b>
38.1 Analoge Realisierung des OFDM Modulators . . . . .	178
38.2 Analoge Realisierung des OFDM Demodulators . . . . .	178
38.3 Digitale Realisierung des OFDM Modulators und Demodulators . . . . .	179
38.3.1 Warum IFFT im Sender und FFT im Empfänger? . . . . .	180

<b>39 Leistungs-Dichte-Spektrum der OFDM</b>	<b>180</b>
39.1 Leistungs-Dichte-Spektrum am Sender-Ausgang . . . . .	180
39.2 Leistungs-Dichte-Spektrum im Empfänger und Orthogonalität . . . . .	180
39.3 Gemessene OFDM Spektren . . . . .	181
39.3.1 Erniedrigung des Crest-Faktors der OFDM ohne Erhöhung der Randaussendungen . . . . .	182
<b>40 Analyse des OFDM Empfängers</b>	<b>183</b>
40.1 Auswertung von Mis-Matched Symbolen . . . . .	183
40.2 Die FFT im Empfänger . . . . .	184
40.3 Synchronisation . . . . .	185
<b>41 Von der OFDM zur COFDM</b>	<b>186</b>
41.1 Die Notwendigkeit einer Fehlerschutz-Codierung . . . . .	186
41.1.1 Ein Vergleich mit einer Einträger-Übertragung . . . . .	187
41.1.2 Anwendung auf Mehrträger-Modulation . . . . .	187
41.2 Zweiwege Pfad und punktierte Faltungs-Codes . . . . .	188
41.3 Interleaving . . . . .	188
<b>42 Die Problemstellung</b>	<b>190</b>
42.1 Modell der digitalen Funkübertragung . . . . .	192
42.2 Kanal-Entzerrungsverfahren . . . . .	193
42.3 Vielträger-Modulation . . . . .	195
<b>43 Einträgermodulation mit Frequenzbereichsentzerrung</b>	<b>196</b>
43.1 Vergleich mit OFDM . . . . .	196
43.2 SC-FDE Blockstruktur . . . . .	197
43.3 Filterung im Frequenzbereich . . . . .	199
<b>44 3GPP-LTE Upstream</b>	<b>201</b>
44.1 SC-FDMA als Zugriffsverfahren . . . . .	201
44.2 SC-FDMA Blockstruktur . . . . .	203
<b>45 Übersicht über die Spread Spectrum Techniken</b>	<b>205</b>
45.1 Prinzip der „Direct Sequence“ Spreading Technik . . . . .	205
45.1.1 Historie: Das Noise Wheel . . . . .	206
45.2 Eigenschaften der Spread Spectrum Modulationen . . . . .	207
45.3 Modulations-Verfahren für Spread Spectrum . . . . .	207
45.4 Definition der Spread Spectrum Verfahren . . . . .	207
45.4.1 Nicht alle Modulationen mit erhöhter Bandbreite sind Spread Spectrum Verfahren. . . . .	207
<b>46 Binäre Pseudo-Zufalls-Signale</b>	<b>208</b>
46.1 Eigenschaften der Pseudo-Zufalls-Signale . . . . .	208
46.2 PN Sequenz mit Schiebe-Register . . . . .	209
46.2.1 Die Autokorrelations-Funktion der PN Sequenz . . . . .	209
46.2.2 Zur Resistenz gegen Echos im Funk-Kanal . . . . .	210
46.2.3 Zur genauen zeitlichen und örtlichen Auflösung . . . . .	211
46.2.4 Spektrale Leistungs-Dichte einer PN Sequenz . . . . .	211
46.3 Kreuz-Korrelation von PN Sequenzen . . . . .	212
46.3.1 Gold-Codes . . . . .	212
46.4 Hadamard- oder Walsh-Codes . . . . .	214
<b>47 Direct Sequencing Spread Spectrum</b>	<b>214</b>
47.1 Modulationen für DSSS . . . . .	215
47.2 Demodulation von DSSS . . . . .	216
47.2.1 Prinzip des Entspreizens der Daten . . . . .	216
47.2.2 Demodulation des entspreizten Signals . . . . .	216
47.3 Der Processing Gain . . . . .	216
47.3.1 Auswirkung des De-Spreading auf Weißes Rauschen . . . . .	218

<b>48 Frequency Hopping Verfahren</b>	<b>219</b>
48.1 FHSS Processing Gain . . . . .	219
48.2 Slow Frequency Hopping . . . . .	220
48.3 Fast Frequency Hopping . . . . .	220
48.4 Time Hopping . . . . .	221
48.5 Chirp Verfahren . . . . .	222

## Abbildungsverzeichnis

2.1	Bildung von 8-wertigen Symbolen . . . . .	1
2.2	□ Datenimpulse unterschiedlicher Breite . . . . .	2
2.3	Verrundeter Datenimpuls . . . . .	3
2.4	Datenfolge verrundet mit Roll-Off-Faktor $\rho = 0.5$ (links) und $\rho = 1$ (rechts) . . . . .	3
3.1	Prinzip der Morse-Telegraphie . . . . .	5
3.2	Puls-Modulationsverfahren . . . . .	5
3.3	Amplituden-, Frequenz- und Phasenmodulation . . . . .	6
3.4	Ortskurve (Ausschnitt) einer I/Q Quadratur-Modulation . . . . .	7
4.1	DSB-Modulator Blockschaltbild und (charakteristische) Spektren der DSB . . . . .	8
4.2	Typische Zeitverläufe einer DSB (normierte Darstellung mit Träger $\hat{U}_C = 1$ ) . . . . .	8
4.3	Blockschaltbild eines NCO . . . . .	9
4.4	Blockschaltbild des I/Q Modulators — Demodulators . . . . .	10
4.5	Blockschaltbild des Digitalen Modulators . . . . .	10
4.6	Blockschaltung eines einstufigen Modulationsvorgangs . . . . .	11
4.7	Blockschaltung einer zweistufigen hierarchischen Modulation . . . . .	11
4.8	Frequenz-Plan einer Vorgruppen-Modulation der analogen Telefon-Technik . . . . .	11
4.9	Prinzipielles Blockschaltbild eines OFDM Modulators . . . . .	12
6.1	Beispiel zur Durchführung der vereinfachten Faltung $u_e(t) * h(t)$ im Zeitbereich . . . . .	16
6.2	Beispiel für die Faltung $H_i(\omega) \overset{\left\{\frac{1}{2\pi}\right\}}{*} G(\omega)$ im Frequenzbereich . . . . .	16
7.1	Typische Zeitverläufe einer AM (normierte Darstellung mit Träger $\hat{U}_C = 1$ ) . . . . .	19
7.2	Blockschaltbilder des AM Modulators (entsprechend Gleichung (7.4)) . . . . .	20
7.3	AM Spektrum . . . . .	20
7.4	Detektor Schaltungen . . . . .	21
7.5	Zur Definition des Modulationsgrades . . . . .	22
7.6	Übermodulation: Zeitfunktion . . . . .	22
7.7	Amplituden-Modulation mit Cosinusförmigem NF-Signal . . . . .	23
7.8	Zeigerbilder der AM: a) rotierender Träger-Zeiger, b) feststehender Träger-Zeiger . . . . .	23
7.9	Beispiel für die Konstruktion einer AM-Schwingung mit Hilfe der Zeigerdarstellung. . . . .	24
7.10	Zur momentanen und mittleren Leistung der AM . . . . .	24
7.11	Zur Leistung der AM . . . . .	25
8.1	AM-Schwingung und ihre Hüllkurve . . . . .	26
8.2	Hüllkurven-Demodulator: AM-Demodulator im Super (links), Detektorschaltung (rechts) . . . . .	26
8.3	Der Einfluß der Entlade-Zeitkonstante auf das demodulierte Signal . . . . .	27
8.4	Diagonales Clippen bei zu großer Zeitkonstante . . . . .	27
8.5	Synchron-Demodulator von AM; Das Trägerfilter ist optional. . . . .	28
8.6	PLL Demodulator für AM . . . . .	28
8.7	Die zeitlichen Verläufe der Signale bei Synchron-Demodulator von AM („lineare“ Demodulation) . . . . .	29
8.8	Die Spektren der Signale bei Synchron-Demodulator von AM; LPF: <i>low pass filter</i> . . . . .	29
9.1	Typische Zeitverläufe einer DSB (normierte Darstellung mit Träger $\hat{U}_C = 1$ ) . . . . .	30
9.2	DSB-Modulator Blockschaltbild und Spektren der DSB . . . . .	31
9.3	Blockschaltbild des multiplikativen Demodulators . . . . .	31
9.4	Zeitverläufe bei der multiplikativen Demodulation von DSB . . . . .	31
9.5	Spektrum der synchronen Demodulation für $\varphi = 0^0$ . . . . .	32
9.6	Spektrum der synchronen Demodulation für $\varphi = 90^0$ . . . . .	32
9.7	Träger-Rückgewinnung durch Frequenz-Verdopplung und synchrone Demodulation von DSB . . . . .	33
9.8	Costas Loop zur Träger-Rückgewinnung und synchroner Demodulation von DSB . . . . .	33
10.1	Blockschaltbild für eine QDSB-Übertragung . . . . .	34
10.2	Ortskurve (Ausschnitt) der I/Q-Modulation . . . . .	35
11.1	FM und PM für Cos-förmiges Nachrichtensignal . . . . .	36
11.2	FM und PM für rechteckförmiges und dreieckförmiges Nachrichtensignal . . . . .	36
11.3	FM Schwingung als Funktion der Amplitude des Nachrichtensignals . . . . .	37
11.4	Bodediagramm des Differenziergliedes $H_D(\omega)$ . . . . .	38
11.5	Phasenmodulation mit einem Frequenzmodulator . . . . .	39
11.6	Bodediagramm des Integrierergliedes $H_I(\omega)$ . . . . .	39
11.7	Frequenzmodulation mit einem Phasenmodulator . . . . .	40

12.1 I/Q Phasenmodulator für beliebige Werte von $\varphi(t)$ . . . . .	41
12.2 Phasenmodulator für kleine Werte von $\varphi(t) \ll 1$ . . . . .	41
12.3 Zur Demodulation einer PM ist eine Schwingung mit einer Referenz-Phase $\varphi_2$ notwendig. . . . .	42
12.4 Erzeugung von Frequenzmodulation mit spannungsgesteuertem Oszillator . . . . .	42
12.5 Blockschaltbild eines NCO . . . . .	43
12.6 Differenzier zur FM $\rightarrow$ AM Wandlung . . . . .	43
12.7 Hüllkurven-Demodulation eines differenzierten FM-Signals . . . . .	43
13.1 Filterbank zur Veranschaulichung der Frequenz . . . . .	44
13.2 Cosinus-Schwingung aus der Projektion eines rotierenden Zeigers auf die reelle Achse . . . . .	44
13.3 Spektralverteilung von Schmalband-PM und Schmalband-FM . . . . .	46
13.4 Zur Definition des Dispersions-Index . . . . .	47
13.5 Spektralverteilung der FM-Schwingung für cos-förmiges Nachrichtensignal . . . . .	48
13.6 Spektralverteilung der FM-Schwingung für sägezahnförmiges Nachrichtensignal . . . . .	49
13.7 Annäherung der FM durch Bursts unterschiedlicher Frequenz zur Abschätzung der Bandbreite . . . . .	49
13.8 Universelle Kurve für die erforderliche 99%-Bandbreite $B_{99}$ einer FM-Schwingung; $\beta = \eta$ . . . . .	50
13.9 Typische FM-Spektren für Breitband-FM . . . . .	51
13.10 FM Spektrum für Nachrichtensignal mit Gauß-förmiger Amplitudendichte . . . . .	51
13.11 Linien-Spektrum eines FM-Signals mit rechteckförmigem (periodischem) Nachrichtensignal . . . . .	51
14.1 Pendelzeigerdiagramme für verschiedene maximale Phasenauslenkung . . . . .	53
14.2 Zerlegung eines Pendelzeigers in seine Inphasen- und Quadratur-Komponente. $A = \hat{U}_C$ . . . . .	53
14.3 Der zeitliche Verlauf der I- und Q-Komponenten für Winkelmodulationen mit unterschiedlichen Phasenhüben. . . . .	54
14.4 Beispiele für Chladni'sche Klangfiguren . . . . .	56
14.5 Besselfunktionen 1. Art als Funktion des Arguments $\beta$ . . . . .	56
14.6 Dreidimensionale Darstellung der Besselfunktionen . . . . .	56
14.7 Anfangsbereiche der Besselfunktionen für kleine Werte bis 0,06 . . . . .	57
14.8 Nullstellen und Extrema der Besselfunktionen . . . . .	57
14.9 Trägerleistung zu Seitenbandleistung in Abhängigkeit vom Phasenhub (Modulationsindex) . . . . .	58
14.10 Die Größe der Spektrallinien aus den Besselkurven für $\beta = 5$ . . . . .	58
14.11 Betrag des FM-Spektrums für $\beta = 5$ in zweiseitiger Darstellung . . . . .	58
14.12 FM-Spektren für Cosinus Signal bei unterschiedlicher Amplitude; $\beta = k_{FM} \cdot \hat{u}_m / f_m$ . . . . .	59
14.13 FM-Spektrum eines UKW-Senders mit Programm . . . . .	59
14.14 Das Zeigerdiagramm der Schmalband-FM/PM . . . . .	60
14.15 Besselspektrum und Drehzeigerdiagramm . . . . .	61
14.16 Beispiele für Drehzeigerdiagramme . . . . .	61
14.17 Das Drehzeigerdiagramm zu verschiedenen Zeiten . . . . .	61
14.18 Beispiel für Drehzeigerdiagramm und demoduliertes Signal bei harter Bandbegrenzung . . . . .	62
14.19 Beispiele für die Verzerrung des Drehzeigerdiagramms . . . . .	62
14.20 Dämpfungsverlauf und Gruppen-Laufzeit $t_{gr}(f)$ eines FM ZF-Filters . . . . .	63
14.21 Amplitudenbegrenzung einer FM-Schwingung: Blockstruktur und Signale . . . . .	63
14.22 Spektrum der amplitudenbegrenzten FM-Schwingung . . . . .	64
15.1 Analoges Übertragungs-System mit Störung im Kanal . . . . .	65
15.2 Übertragung einer Cos-förmigen Nachricht mittels AM über einen Kanal, der durch weißes Rauschen gestört ist. . . . .	66
15.3 Blockschaltbild eines analogen Übertragungssystems (AM Sender und Empfänger) . . . . .	67
15.4 Digitales Übertragungs-System mit Störung im Kanal. Über den Kanal werden digitale Symbole übertragen, welche aber analoge Zeitverläufe haben. . . . .	67
16.1 Blockschaltbild des I/Q Basisband-Kanals . . . . .	70
16.2 Modell der Sender-Seite einer binären Datenübertragung im Basisband . . . . .	71
16.3 Die grundsätzlichen Schritte zur Erkennung und Detektion von Digitalen Signalen. . . . .	72
16.4 Modell der Empfänger-Seite einer binären Datenübertragung im Basisband (Korrelations-Empfang) . . . . .	72
16.5 Die Signale im Korrelations-Empfänger . . . . .	73
16.6 Amplituden-Dichte Verteilung pdf und Zeitverlauf von weißem Rauschen; der Effektivwert (RMS <i>root mean square</i> ) ist $\sigma$ . . . . .	74
16.7 Die Signale im Korrelations-Empfänger mit Rauschen . . . . .	75
16.8 FIR-Filter und Matched Filter . . . . .	76

16.9 Darstellung und Verteilung der (umsortierten) Werte $z(T)$ . . . . .	77
16.10 Die bedingten Wahrscheinlichkeits-Dichten $p(z s_1)$ und $p(z s_2)$ . . . . .	78
16.11 Gauß-Glocke ( $\sigma = 1$ ), Error Function $\text{erf}(x)$ , Komplementäre Error Function $\text{erfc}(x)$ , Q-Funktion und gespiegelte Q-Funktion . . . . .	80
16.12 Gauß-Glocke ( $\sigma = 1$ ), Q-Funktion und gespiegelte Q-Funktion dazu flächengleiches Rechteck und Tangenten . . . . .	80
16.13 Die Q-Funktion und ihre Grenzkurven (logarithmische Darstellung) . . . . .	81
16.14 Zur meßtechnischen Bestimmung des Q-Faktors . . . . .	82
16.15 Bitfehler-Wahrscheinlichkeit für bipolare und unipolare Digital-Übertragung . . . . .	82
17.1 AKF und PSD statistisch unabhängiger Daten mit $\square$ Symbolform . . . . .	84
17.2 Beispiele für Leitungs-Codes im Basisband und deren Spektraldichten . . . . .	84
17.3 BIPHASE Daten, deren AKF $R_{dd}(\tau)$ und Spektrale Leistungs-Dichte $S_{dd}(\omega)$ . . . . .	85
17.4 Das Leistungs-Dichte Spektrum der unverrundten Biphase Symbole . . . . .	86
18.1 Modell der Übertragungs-Stecke im Basisband . . . . .	87
19.1 Der ideale Tiefpaß $H_i(\omega) = \square_{\omega_c}(\omega)$ (mit Phase 0) und seine Impulsantwort $h_i(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t}$ . . . . .	88
19.2 Daten gemäß Nyquist 1 mit $\frac{\sin(\pi \frac{t}{T})}{\pi \frac{t}{T}}$ verrundet zeigen starke Inter-Symbol-Interferenz . . . . .	89
19.3 Verrundungs-Filter $H_v(\omega)$ gemäß Nyquist 1 mit verminderter Inter-Symbol-Interferenz . . . . .	90
19.4 Übertragungsfunktion gemäß Nyquistbedingung . . . . .	91
20.1 Das Cos-Filter und seine Impulsantwort . . . . .	92
20.2 Cos-Roll-Off Verrundungsfilter . . . . .	93
20.3 Verrundete Datensymbole . . . . .	94
20.4 Datenfolge verrundet mit Roll-Off-Faktor $\rho = 0.5$ (links) und $\rho = 1$ (rechts) . . . . .	94
21.1 Root-Raised-Cosine Daten-Impulse mit $[\rho = 0, 0.2, 0.5, 1]$ (Basis-Band) . . . . .	96
21.2 Daten-Symbole und Augen-Diagramm für Root-Raised-Cosine Verrundung ( $\rho = 0.5$ ) . . . . .	96
21.3 Messung des Augendiagramms . . . . .	97
21.4 Entstehung des Augendiagramms . . . . .	97
21.5 Öffnung der Augendiagramme . . . . .	97
21.6 Augen-Diagramme . . . . .	98
22.1 Impulsantworten $h_g(t)$ des Gauß-Filters . . . . .	99
22.2 Durchlaßkurven $H_G(\omega)$ des Gauß-Filters . . . . .	99
22.3 Vergleich der Gauß-Verrundung mit der $\cos^2$ -Verrundung . . . . .	100
22.4 Gauß-Glocke, Error Function, Q-Funktion . . . . .	101
22.5 Gauß-Glocke ( $\sigma_t = 1$ ), Q-Funktion . . . . .	101
22.6 Gauß-verrundete Daten . . . . .	102
23.1 Blockschaltbild der Digitalen Modulation . . . . .	104
23.2 Blockschaltbild eines I / Q Modulators ( $\hat{u}_C = 1$ ) . . . . .	106
23.3 Blockschaltbild eines A / $\Phi$ Modulators . . . . .	107
24.1 Ortskurve (Ausschnitt) der komplexen Einhüllenden der I/Q Modulation . . . . .	109
24.2 Blockschaltbild des komplexen I/Q Modulators . . . . .	110
24.3 Bildung der bipolaren I & Q Daten-Symbole . . . . .	111
24.4 Konstellations-Diagramm (Signal-Raum, Phasen-Stern) der QPSK (4PSK) . . . . .	111
24.5 Zeitverläufe und Augen-Diagramme der I & Q Symbole $I(t)$ , $Q(t)$ . . . . .	111
24.6 Vektor-Diagramme von QPSK und OQPSK . . . . .	112
24.7 3D Darstellung der QPSK Symbole . . . . .	113
24.8 Vektor-Diagramme . . . . .	113
25.1 DSB Modulator und Spektrum . . . . .	114
25.2 Beispiel für den Zeitverlauf von 2PSK oder BPSK . . . . .	115
25.3 ASK (a), PSK (b) und FSK (c) für unverrundetes Daten-Signal . . . . .	116
25.4 Konstellations-Diagramm (Phasen-Stern, Signal-Raum) der BPSK (2PSK) . . . . .	116
25.5 Blockschaltbild zur Erzeugung von QPSK & QAM . . . . .	117
25.6 Blockschaltbild zur Erzeugung von QPSK & QAM mit MDACs . . . . .	117
25.7 Blockschaltbild für das Mapping von QAM Symbolen . . . . .	118
25.8 Blockschaltbild für das Mappen von QPSK (4PSK, 4QAM) Symbolen . . . . .	118
25.9 4PSK Phasen-Stern . . . . .	119
25.10 Zeitverlauf der QPSK . . . . .	119
25.11 16QAM Modulator . . . . .	120
25.12 $I(t)$ und $Q(t)$ Symbole & Konstellations-Diagramm . . . . .	120

25.13	Bildung von 8-wertigen Symbolen . . . . .	120
25.14	Quadratische Symbol-Konstellationen: 16QAM & 64QAM . . . . .	121
25.15	Signal-Raum der 64QAM . . . . .	121
25.16	Phasensterne von 2PSK, 4PSK und 8PSK . . . . .	122
25.17	Blockschaltbild für das Mappen von 8PSK Symbolen . . . . .	122
25.18	Konzentrische Symbol-Konstellationen . . . . .	123
25.19	Beispiele für Symbol-Konstellationen . . . . .	124
26.1	Wanderfeld-Wellen-Röhre TWT . . . . .	125
26.2	$I(t)$ , $Q(t)$ & $A(t)$ Zeitverläufe der QPSK . . . . .	125
26.3	Hüllkurven-Schwankungen der QPSK (schematisch) und Phase der Trägerschwingung . . . . .	126
26.4	Blockschaltbild für das Mappen von OQPSK Symbolen . . . . .	126
26.5	Zustands-Diagramm (Trellis) der OQPSK . . . . .	127
26.6	Hüllkurven-Schwankungen der OQPSK und Phase der Trägerschwingung . . . . .	127
26.7	Typische Vektor-Diagramme für QPSK, OQPSK (schematisch) und MSK . . . . .	128
26.8	Symbolformung und Timing in den I und Q Zweigen bei MSK . . . . .	128
26.9	Hüllkurven-Schwankungen der MSK . . . . .	128
26.10	Linearer MSK Modulator . . . . .	129
26.11	Spektrale Leistungs-Dichte von MSK . . . . .	129
26.12	Pendelzeiger der FM; I/Q Zerlegung . . . . .	130
26.13	MSK: Phasenänderung pro Bit . . . . .	130
26.14	MSK als FM . . . . .	131
26.15	Phase und Komplexe Einhüllende der MSK . . . . .	131
26.16	Vektor-Diagramm der MSK in 3D Darstellung . . . . .	131
26.17	Blockschaltbild eines Winkel-Modulators für MSK (bzw. allgemein CPM) . . . . .	132
26.18	Blockschaltbild eines Phasen-Modulators . . . . .	133
26.19	Gewinnung der Phasen-Signale $\Phi_I(t)$ , $\Phi_Q(t)$ . . . . .	133
26.20	Blockschaltbild eines NCO . . . . .	134
26.21	Blockschaltbild des NCO AD7008 . . . . .	134
26.22	Blockschaltbild eines GMSK-Modulators . . . . .	135
26.23	GSM: Impulsform und Augendiagramm . . . . .	135
26.24	Verlauf der Momentanphase $\phi(t)$ für MSK, GSM & DECT . . . . .	135
26.25	Gemessene Spektren von CPM Signalen . . . . .	136
27.1	Übertragungs-Strecke mit Differentieller Codierung . . . . .	136
27.2	Symbol-Punkte und Vektor-Diagramme von $\pi/4$ DQPSK . . . . .	137
27.3	Vektor-Diagramm von EDGE (Root-Raised-Cosine, $\rho = 0.6$ ) . . . . .	138
29.1	Blockschaltbild eines typischen (konventionellen) Superheterodyne-Empfängers („Super“) . . . . .	140
29.2	Blockschaltbild des I/Q Modulators (links) — Demodulators (rechts) . . . . .	140
30.1	Bildung des Äquivalenten Tiefpaß-Signals im Spektrum . . . . .	141
30.2	Bildung des Äquivalenten Tiefpaß-Signals . . . . .	142
30.3	Struktur für eine komplexe Faltung im Basisband-Bereich . . . . .	143
30.4	Ideales Hilbert Allpass-Filter (HAP) und seine Impulsantwort . . . . .	144
30.5	Idealisiertes Hilbert Tiefpass-Filter (HLP) und seine Impulsantwort . . . . .	144
30.6	Im Bereich $ \Omega_C \pm B_\omega/2 $ kann der Betrag eines Hilbert Bandpaß-Filters $ H_{HBP} $ exakt gleich dem eines Bandpaß-Filters $ H_{BP} $ gemacht werden. . . . .	145
30.7	Quadratur-Filter Struktur des Digitalen Empfängers . . . . .	146
30.8	Tiefpaß-Filter Struktur des Digitalen Empfängers . . . . .	146
30.9	Typisches Blockschaltbild eines digitalen Empfängers in komplexer Darstellung. . . . .	147
31.1	Blockschaltbild eines PSK oder QAM Demodulators. . . . .	148
31.2	Blockschaltbild eines OQPSK Modulators und Demodulators. . . . .	148
31.3	Blockschaltbild eines MSK Modulators und Demodulators. . . . .	149
31.4	Blockschaltbild eines MSK Demodulators/Empfängers. . . . .	149
31.5	MSK-Symbol und Ausgangssignal des Matched Filters (I oder Q) . . . . .	150
31.6	MSK Ausgangs-Signale des Matched Filters . . . . .	150
31.7	Augendiagramm von MSK . . . . .	150
31.8	GSM: Impulsform und Augendiagramm . . . . .	151
31.9	Verlauf der Momentanphase $\phi(t)$ für MSK, GSM & DECT . . . . .	151
31.10	Bluetooth Empfänger . . . . .	152

31.11	GMSK Symbol . . . . .	152
31.12	Blockschaltbild eines MSK Modulators als FM Modulator und eines linearen Demodulators. . . . .	153
31.13	Laurent-Approximation . . . . .	153
31.14	Augendiagramme GMSK . . . . .	153
32.1	DQPSK Demodulator . . . . .	154
32.2	FSK Demodulator . . . . .	155
33.1	Grundschialtung einer PLL . . . . .	157
33.2	Grundschialtung einer quadrierenden PLL . . . . .	158
33.3	Costas Loop zur Träger-Rückgewinnung und synchroner Demodulation von BPSK . . . . .	159
33.4	Grundschialtung einer PLL für M-PSK . . . . .	159
33.5	Grundschialtung einer COSTAS Loop für QPSK . . . . .	160
34.1	Struktur des Daten-Stroms . . . . .	161
34.2	Phasen-Sterne der 16APSK und der 64APSK . . . . .	162
34.3	Blockschaltbild eines digitalen Empfängers . . . . .	163
34.4	Rotation des Phasen-Sterns . . . . .	163
34.5	Vektor-Diagramme einer 32APSK (links) und einer 64APSK (rechts) nach der De-Rotation . . . . .	164
34.6	Gemessene und ideale (gestrichelt) Kanal-Übertragungsfunktion . . . . .	165
34.7	Auswirkung einer Interferenz-Störung durch einen Träger . . . . .	166
35.1	Frequenz-Schema von ADSL . . . . .	168
36.1	Strukturen von Ein- und Mehrträger-Modulationen für gleiche Symbol-Übertragungsraten. Dargestellt ist die frequenzmäßige Kanal-Belegung in Abhängigkeit von der Übertragungs-Zeit (Fläche aus Bandbreite $\times$ Übertragungszeit) . . . . .	169
36.2	Echo-Struktur eines typischen terrestrischen DVB-T Kanals . . . . .	170
36.3	Zusammensetzung des Empfangs-Signals aus Haupt-Signal, Echo-Signalen und Gleichwellen-Signal (Nur 1 Subchannel ist aktiv) $T_g = T_G$ Guard Time, $T_s = T_{Sv}$ Symbol-Dauer, $T_{Nutz}$ empfangsseitig ausgenutzter Teil des Symbols . . . . .	170
36.4	Struktur der Vielträger-Modulation mit Berücksichtigung des Guard-Intervalls . . . . .	171
36.5	Der Ein- und Auswiringvorgang unter Berücksichtigung des Guard-Intervalls . . . . .	171
36.6	OFDM-Symbol bestehend aus 3 Subträgern mit vorne angefügtem Guard-Intervall (ohne Echos). Im Intervall $T' = T_{Nutz}$ sind die Sub-Träger zu einander orthogonal. . . . .	172
36.7	Prinzipielle Zeitverläufe von komplexen OFDM-Symbolen (mit Guard-Intervall und ohne Echos) . . . . .	173
36.8	Wahrscheinlichkeits-Dichte-Verteilung der Amplituden von OFDM-Symbolen (DVB-T mit 2K bzw. 8K Sub-Channel) . . . . .	173
36.9	OFDM Zeitfunktion bei einer OFDM mit 16 Subchannel (Subträger sin förmig, alle Bits = 1) . . . . .	174
37.1	Betrag der Kanal-Übertragungs-Funktion $ C(\omega) $ für mehrere feste Echo-Pfade . . . . .	174
37.2	Phasensterne einer 4PSK nach der Übertragung über einen Kanal . . . . .	175
37.3	Phasensterne einer 16QAM nach der Übertragung über einen (Funk-) Kanal . . . . .	176
37.4	Struktur des DVB-T Rahmens mit Pilot-Symbolen zur Kanal-Vermessung . . . . .	176
37.5	Beispiel einer zeit- und frequenz-abhängigen Kanal-Übertragungs-Funktion . . . . .	177
38.1	Prinzipielles Blockschaltbild eines OFDM Modulators . . . . .	178
38.2	Prinzipielles Blockschaltbild eines OFDM Demodulators . . . . .	179
38.3	Prinzipielles Blockschaltbild eines digitalen OFDM Modulators und Demodulators, bei dem die Modulation durch eine IFFT und die Demodulation durch eine FFT erfolgen. . . . .	180
39.1	Prinzipielle Zusammenhänge zwischen den Daten und den Symbolen einer OFDM . . . . .	181
39.2	Spektren am Ausgang des OFDM Modulators . . . . .	182
39.3	OFDM Spektren am Ausgang eines Senderverstärkers . . . . .	182
39.4	Vektor-Diagramm eines OFDM-Symbols vor und nach der Begrenzung des Crest-Faktors . . . . .	183
39.5	OFDM Spektren ohne und mit „Dummy“-Daten zur Reduzierung der Nebenaussendungen . . . . .	183
40.1	Intergrate & Dump Verfahren bei $\square$ förmigen Symbolen, das für jeden Subchannel auszuführen ist. . . . .	184
40.2	Veranschaulichung des FFT Analyse-Vorgangs im OFDM Empfänger ( $T_s = T_{Nutz}$ ) . . . . .	185
40.3	Autokorrelationsfunktion des OFDM Signals . . . . .	186
41.1	Empfangsleistung in den Subchannels bei einer 0 dB Zweivegeausbreitung (Ausschnitt) . . . . .	187
41.2	Veranschaulichung des Interleaving in der Zeit- und Frequenz-Ebene . . . . .	188
42.1	Beispiele für die Entstehung von Echos auf dem Funkweg. . . . .	191
42.2	Bitfehler-Raten von 16QAM in Kanälen mit Rauschen (AWGN) und Fading durch Echo-Störungen. . . . .	192
42.3	Basisband-Modell der digitalen Übertragung mit AWGN Kanal . . . . .	192
42.4	Basisband-Modell der digitalen Übertragung mit Funk-Kanal und Entzerrer (Equalizer) . . . . .	193

42.5 Echo-Struktur und Frequenzgang eines typischen terrestrischen Kanals . . . . .	193
42.6 Modell des Funk-Kanals als FIR-Filter . . . . .	193
42.7 FIR und IIR Filter-Strukturen . . . . .	194
42.8 Prinzip eines adaptiven Filters zur Entzerrung der Symbole. . . . .	194
42.9 Struktur der Vielträger-Modulation mit Berücksichtigung des Guard-Intervalls . . . . .	195
43.1 Vergleich zwischen SC-FDE und OFDM Übertragungs-Systemen . . . . .	196
43.2 Erweiterter Vergleich zwischen SC-FDE und OFDM Übertragungs-Systemen . . . . .	196
43.3 Modell der physikalischen Schicht des SC-FDE Übertragungs-Systems . . . . .	197
43.4 Beispiel für die Rahmenstruktur . . . . .	198
43.5 Datenblöcke mit Cyclic Prefix CP bzw. Unique Word UW als Guard-Intervall . . . . .	199
43.6 Faltung im Zeitbereich und Schnelle Faltung im Frequenzbereich . . . . .	199
43.7 Blockschaltbild eines Einträgersystems mit Frequenzbereichs-Entzerrer . . . . .	200
43.8 Vergleich der Bitfehlerraten zwischen Einträgersystem und OFDM . . . . .	200
44.1 FDMA und TDMA . . . . .	201
44.2 Steuerung der Sende-Frequenz der Mobile durch die Basis-Station . . . . .	202
44.3 Zeit-Frequenz-Muster für die Belegung der Sub-Channel durch die Mobile . . . . .	202
44.4 Blockschaltbild SC-FDMA Senderseite (Mobile) . . . . .	202
44.5 Im Mobile erfolgt die Multiplex-Bildung im Frequenzbereich . . . . .	202
44.6 Zuweisung der Sub-Channel für das Mobile: verteilt oder gebündelt . . . . .	203
44.7 Beispiele für FDMA Sub-Channel Mapping. . . . .	203
44.8 Blockschaltbild SC-FDMA Sender und Empfänger. . . . .	203
45.1 Prinzip des Direct Sequencing Spreiz-Verfahrens . . . . .	205
45.2 Noise Wheel (Rogoff 1950) . . . . .	206
46.1 Prinzipielle Struktur zur Erzeugung einer PN Sequenz . . . . .	208
46.2 PN Generator mit Schieberegister zur Erzeugung einer PN Sequenz . . . . .	209
46.3 Autokorrelations-Funktion (AKF) einer PN Sequenz als Faltung mit $\uparrow\uparrow\uparrow$ Funktionen . . . . .	210
46.4 Normierte Autokorrelations-Funktion (AKF) einer PN Sequenz . . . . .	211
46.5 Leitungs-Dichte Spektrum (PSD) einer PN Sequenz . . . . .	211
46.6 Autokorrelation einer PN-Sequenz . . . . .	212
46.7 Kreuz-Korrelation von PN-Sequenzen . . . . .	212
46.8 Generator für Gold-Sequenzen der Länge $N = 2^7 - 1 = 127$ . . . . .	213
46.9 Kreuz-Korrelation von Gold-Sequenzen . . . . .	213
46.10 Walsh-Funktionen entsprechend zu <i>cal</i> (even) und <i>sal</i> (odd) bis 63. Ordnung. . . . .	214
47.1 Direct Sequencing Spreiz Code . . . . .	215
47.2 Spreizen und Entspreizen über EXOR Verknüpfungen . . . . .	216
47.3 DSSS Empfänger . . . . .	216
47.4 Leistungsdichte-Spektrum der Daten vor und nach der Spreizung . . . . .	217
47.5 Leistungsdichte-Spektrum von Störung und Daten vor und nach der Ent-Spreizung . . . . .	217
47.6 Auswirkungen von Weißem Rauschen und Jammer im Spektrum . . . . .	218
48.1 Frequency Hopping Modulator . . . . .	219
48.2 Frequency Hopping Demodulator . . . . .	219
48.3 Slow Frequency Hopping . . . . .	221
48.4 Fast Frequency Hopping . . . . .	221
48.5 Prinzip des Time Hopping Verfahrens . . . . .	221
48.6 Chirp-Signal und Chirp-Spektrum . . . . .	222

# 1 Modulationsverfahren

Modulations-Verfahren werden in der Technik dazu verwendet, um (analoge oder digitale) Informations-Signale so umzuwandeln, daß diese möglichst verlustfrei über größere Distanzen übertragen werden können.

- Das Informations-Signal wird hierbei einem Träger-Signal aufgedrückt, indem dessen Parameter gemäß dem zeitlichen Verlauf des Informations-Signals verändert werden.

## 2 Informations-Signale

### 2.1 Analoge Signale

**Informations-Signale** Analoge Informations-Signale sind entweder akustischer (Sprache, Klänge, Geräusche) oder optischer (Bilder) Natur.

**Meß-Signale** Als Meß-Signale finden cosinusförmige, dreieckförmige oder mäanderförmige Zeitfunktionen Verwendung, da deren Verlauf mathematisch leicht beschreibbar ist, was ebenso auf den Verlauf des modulierten Signals zutrifft. Damit ergibt sich eine einfache Möglichkeit sowohl den Modulationsvorgang als auch den Demodulationsvorgang meßtechnisch zu überprüfen.

### 2.2 Digitale Signale

**Binär-Signale** Digitale Signale werden als binäre Daten (Nullen & Einsen) angenommen. Die Form der Datenbits ist dabei  $\square$  förmig. Im Zusammenhang mit digitaler Signalverarbeitung werden die Bits auch als Pin  $\uparrow$  zu den jeweiligen Abtastzeitpunkten  $n \cdot T$  dargestellt.

**Digitale Symbole** Zum Zwecke der Modulation muß das digitale Signal als zeitlich kontinuierlich vorliegen, wenn das Träger-Signal, dessen Parameter es beeinflussen soll, ebenfalls ein zeitlich kontinuierliches Signal ist. Aus den  $\uparrow$  werden dann  $\square$  förmige Symbole der Höhe 1 und mit zeitlicher Breite  $T$  gemäß dem Abtastintervall. Am Eingang des digitalen Modulators sollen sie bipolar als  $\pm 1$  vorliegen.<sup>2.1</sup>

Höherstufige Symbole werden erzeugt, indem jeweils mehrere (z.B.  $z = 2, 3, 4, \dots N$ ) Bits zusammengefaßt werden und daraus (zunächst wieder) ein  $\square$  förmiges Symbol aber mit einer Höhe entsprechend zum Wert der jeweiligen Bit-Kombination gebildet wird.<sup>2.2</sup> Die Breite  $T_S$  dieser höherstufigen Symbole entspricht dann der Breite entsprechend der Anzahl  $z$  der zusammengefaßten Bits. Entsprechend erniedrigt sich dann die Takt-Frequenz für die Symbole, Bild 2.1.

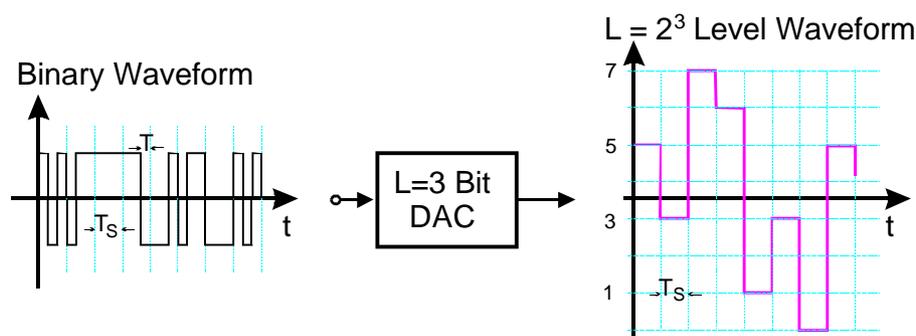


Bild 2.1: Beispiel für die Bildung von 8-wertigen Symbolen ( $I$  bzw.  $Q$  (unverrundet) einer 64QAM)

<sup>2.1</sup>Bipolare Daten benötigen bei gleichem Unterschied  $2U$  zwischen „0“ und „1“ im Mittel nur die halbe Leistung wie unipolare Daten. ( $P_{\text{bipolar}} \sim U^2$ ;  $P_{\text{unipolar}_0} = 0$ ;  $P_{\text{unipolar}_1} \sim 4U^2 \sim \bar{P}_{\text{unipolar}} \sim 2U^2$ ) Bei Binärübertragung über Leitungen wird daher stets das bipolare Format benutzt.

<sup>2.2</sup>Die Bitfolge ist das Eingangssignal eines DAC (*digital to analog converter*), dessen Ausgangssignal dann die Symbole bilden.

### 2.3 Die Bandbreite der Signale

Über die Fourier-Transformation erhält man die Spektraldichte  $F(\omega)$  einer Zeitfunktion  $f(t)$ . Speziell für  $\square$  Symbole der Breite  $T$ , die dann als kontinuierliche Zeitfunktion  $f(t) = \square_{T/2}(t)$  heißen, gilt:

$$f(t) = \square_{T/2}(t) \quad \circ \bullet \quad F(\omega) = T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \tag{2.1}$$

Daß  $f(t)$  und  $F(\omega)$  über die Fourier-Transformation mit einander verknüpft sind, wird durch das Symbol „ $\circ \bullet$ “ zum Ausdruck gebracht. Hierbei ist stets „ $\circ$ “ bei der Zeitfunktion und „ $\bullet$ “ bei der Spektralfunktion, also  $f(t) \circ \bullet F(\omega)$ . Entsprechend kann auch  $F(\omega) \bullet \circ f(t)$  stehen.

Wie aus der Gleichung (2.1) leicht zu erkennen ist, wird der  $\text{sinc} x = \frac{\sin(x)}{x}$  erst im Unendlichen ( $\omega \rightarrow \pm\infty$ ) zu Null.

Theoretisch ist diese Aussage unabhängig von der zeitlichen Dauer  $T$  der Bits, also der Bit-Breite. Daraus kann allgemein gefolgert werden:

- Eine Zeitfunktion kann praktisch keine „scharfen Flanken“ haben, also die idealisierte  $\square$  Form, weil andernfalls ihre Spektralverteilung bis zu  $\infty$  hohen Frequenzen gehen würde, was technisch nicht geht.
- Auch aus energetischen Gründen sind keine „scharfen Flanken“ möglich, weil sonst in unendlich kurzer Zeit eine Spannung und ein Strom springen müßten, wofür hierbei (kurzzeitig) eine unendlich hohe Leistung erforderlich wäre.

Wird die Gleichung für unterschiedliche Bitbreite  $2T$ ,  $T$  graphisch ausgewertet<sup>2,3</sup>, Bild 2.2, so sieht man, daß die Breite des Hauptmaximums in der Spektralverteilung  $\Delta\omega$  in gleichem Maß abnimmt, wie die Breite des Rechtecks  $\Delta t$  zunimmt, also  $\Delta\omega \cdot \Delta t = \text{konstant}$ .<sup>2,4</sup>

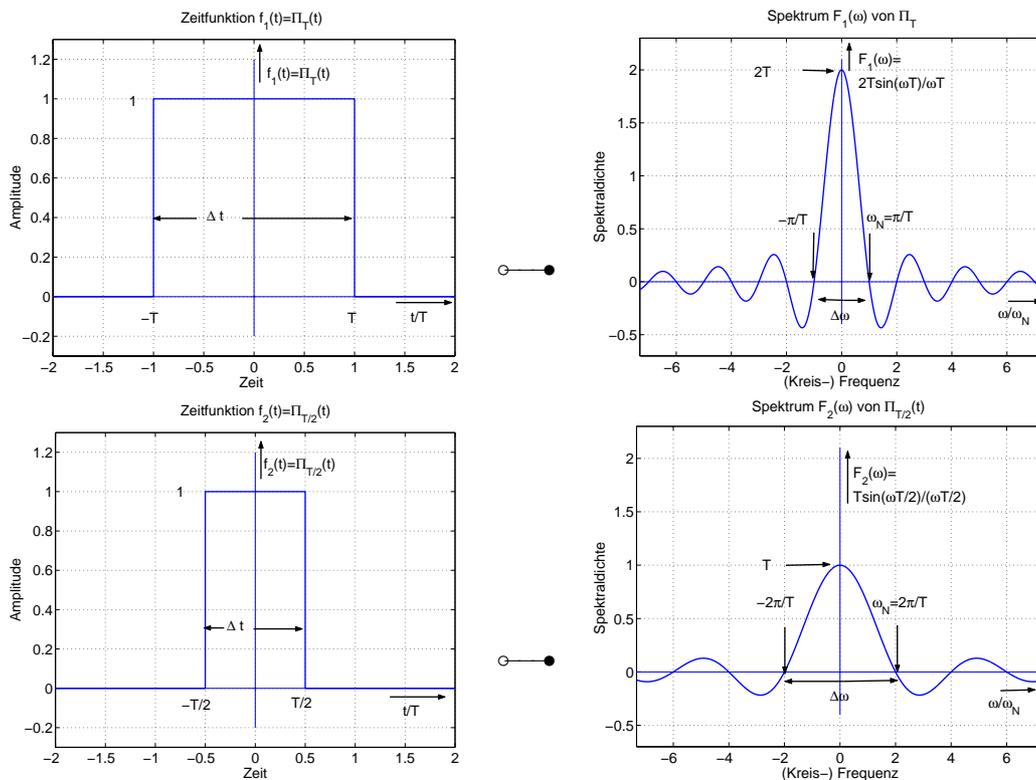


Bild 2.2: Nimmt die Breite der Zeitfunktion zu, nimmt die Breite des Hauptmaximums der Spektralverteilung im gleichen Maß ab. (Ähnlichkeitssatz der Fourier-Transformation)

<sup>2,3</sup>Die Zentralordinate  $F(0)$  der Spektraldichte  $F(\omega)$  ist gleich der Fläche unter der Zeitfunktion,  $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j0} f(t) dt$ .

<sup>2,4</sup>Diese Aussage ist eine spezielle Form des Zeit-Bandbreiten-Gesetzes der Nachrichtentechnik.

### 2.4 Verrundung der Digital-Signale

Im spektralen Hauptmaximum, Bild 2.2, steckt die meiste Energie. Wenn also die Ausläufer des  $\text{sinc}$  vernachlässigt (zu Null gesetzt) werden könnten, wäre so die erforderliche Bandbreite zu reduzieren, wenn breitere Symbole verwendet werden. Allerdings sind dann keine  $\square$  förmigen, sondern nur verrundete Symbole möglich, Bild 2.3.

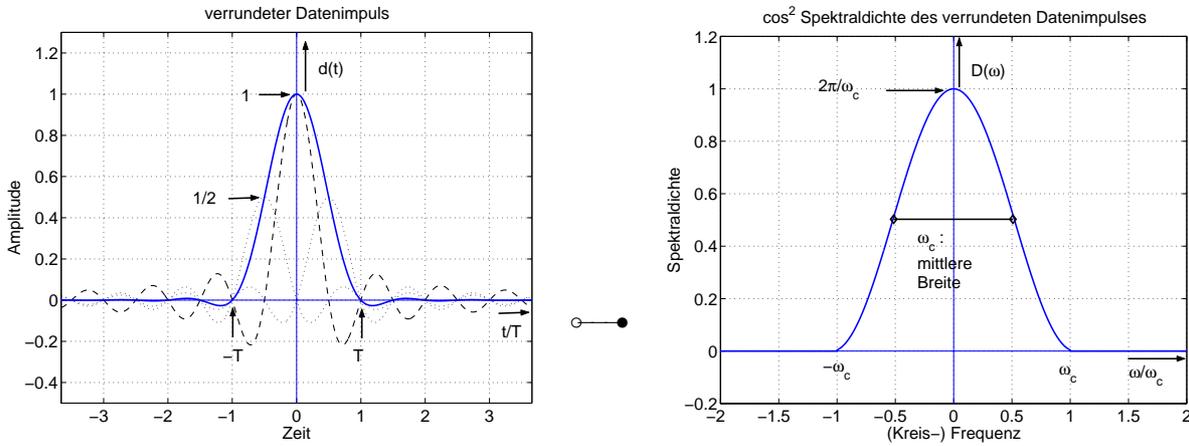


Bild 2.3: Beispiel für einen verrundeten Datenimpuls  $d(t)$  mit endlicher Bandbreite; Verrundung im Spektrum gemäß  $\cos^2$ , d.h. Roll-Off-Faktor  $\rho = 1$ . Datentakt:  $T$

Man erkennt, daß bei endlicher Bandbreite die Symbole nun aber im Zeitbereich (theoretisch)  $\infty$  lange andauern. Gestrichelt ist in der Zeitfunktion angedeutet, daß sich in diesem speziellen Fall das verrundete Datensymbol aus 3 zeitlich gegeneinander verschobenen  $\text{sinc}$  Verläufen zusammensetzt. Weiterhin ist zu sehen, daß nun die einzelnen Datenimpulse sich teilweise überlappen.

- Dadurch wird aus dem ursprünglich „digitalen“ Signal de facto ein Signal mit einem „analogen“ Zeitverlauf.

Es ist aber ein ganz spezielles „analoges Signal“. Dieses hat nämlich exakt zu den Abtastzeitpunkten  $n \cdot T$  genau die gleichen Werte wie die (ursprünglichen) unverrundeten Daten-Signale.

- Bei verrundeten Digital-Signalen ist daher der exakte Zeitpunkt für die Abtastung einzuhalten.

Bild 2.4 zeigt Beispiele für eine Datenfolge mit unterschiedlich stark verrundeten Binär-Symbolen.

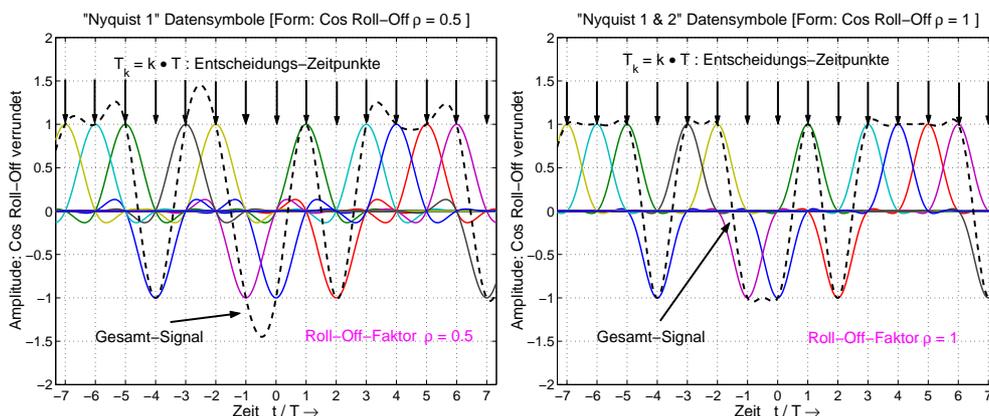


Bild 2.4: Datenfolge verrundet mit Roll-Off-Faktor  $\rho = 0.5$  (links) und  $\rho = 1$  (rechts)

Bei den weniger stark verrundeten Datensymbolen ( $\rho = 0.5$ ) ist die Anforderung an die Genauigkeit des Abtastzeitpunktes größer als bei den maximal verrundeten Symbolen ( $\rho = 1$ ). Je besser aber die Verrundung der Datensymbole ist, um so größer ist die notwendige Übertragungsbandbreite.<sup>2,5</sup>

- Zur Begrenzung der Bandbreite müssen die digitalen Symbole „verrundet“ sein, dürfen also keine „scharfen Flanken“ haben. Zusätzlich dauert jedes Symbol theoretisch  $\infty$  lange an, so daß die Symbole „in einander fließen“. Günstig sind solche Formen, bei denen die (unvermeidlichen) Ausläufer möglichst schnell verschwinden. Eine Symbolform, die eine  $\cos^2$  Form im Spektrum besitzt, Bild 2.3, ist in diesem Sinn eine geeignete Wahl.

### 3 Träger-Signale

Im Laufe der Geschichte der Nachrichtentechnik wurden mehrere physikalischen Phänomene und Prinzipien entdeckt und Techniken erfunden, die große Distanzen sehr schnell überwinden können. Dies sind in der Reihenfolge ihrer Erfindung bzw. Entdeckung

1. die **Gleichspannung** (bzw. der Gleichstrom), welche auf einer gut isolierten **Leitung** über mehrere hundert Kilometern geführt werden kann.  
Anwendungen: Morse-Telegraphie, Telephon
2. die **elektromagnetischen Wellen**, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.  
Anwendungen: Funken-Telegraphie, Funk-Übertragung
3. die **optische Faser**, auf der **Lichtsignale** eines Lasers (ohne Zwischenverstärkung) über hunderte Kilometer übertragen werden können.  
Anwendungen: Optische Übertragungstechnik

Die Gleichspannung, die elektromagnetischen Wellen (allgemein) und die Lichtwellen (speziell) werden im Rahmen der Modulations-Verfahren als **Träger** bezeichnet, denn ihnen kann die zu übertragende Information aufgebürdet (aufmoduliert) werden, damit sie diese mit Lichtgeschwindigkeit an entfernte Orte tragen können.

#### 3.1 Beeinflussung der Parameter der Trägersignale

Modulation bedeutet nun, die Parameter der Träger-Signale in Abhängigkeit der Informations-Signale zu beeinflussen.

Folgende Gesichtspunkte sind dabei maßgeblich:

- Die Informations-Signale müssen in elektrischer Form vorliegen.
- Die hierfür notwendigen Verfahren zur Umwandlung akustischer oder optischer Signale in elektrische Spannungen oder Ströme werden für **analoge** Modulationen nicht zur Modulation gerechnet.
- Die **digitalen** Modulationen unterscheiden sich wesentlich durch die verwendeten Symbole, mit denen das Informations-Signal codiert wird. Daher sind hier die Gewinnung und die Eigenschaften der Symbole wesentlicher Teil der „Modulation“.
- Die Beeinflussung der Parameter der Träger (Modulation) soll **proportional** zu der informationstragenden Größe des Nachrichten-Signals sein.
- Die empfangsseitige Rückgewinnung des Nachrichtensignals (Demodulation) muß möglich sein.
- Die Auswirkung der Wahl eines zu beeinflussenden Parameters (also die Art des Modulationsverfahrens) aus auf:
  - den technischen Aufwand
  - die notwendige Sendeleistung
  - den empfangsseitigen Signal-zu-Geräusch-Abstand
  - die notwendige Bandbreite des Übertragungskanal
  - die Verzerrungen des Empfangssignals

Entsprechend zu den möglichen vielfältigen Antworten gibt es verschiedene Modulationsverfahren.

<sup>2,5</sup>In der Praxis wird deswegen  $\rho \approx 0.3 \dots 0.5$  verwendet.

## 3.2 Die Parameter der Trägersignale

### 3.2.1 Gleichspannungs-Träger

Eine Gleichspannung kann man z.B. dadurch beeinflussen, daß diese ein- und aus-geschaltet wird. Dies stellt die älteste Form der digitalen elektrischen Nachrichtenübermittlung dar. Das bekannteste Verfahren dazu ist das Morsen,<sup>3.1</sup> Bild 3.1 [2].

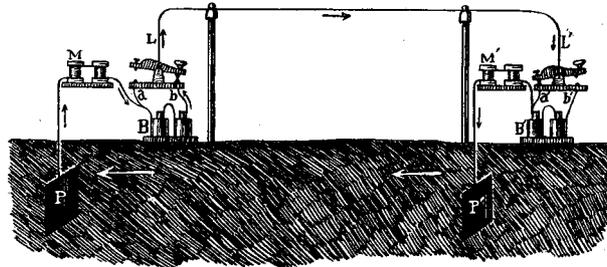


Bild 3.1: Prinzip der Morse-Telegraphie

Um diese (verhältnismäßig primitive) Art der Übermittlung anwenden zu können, ist zuerst eine **Codierung** der Buchstaben und Zahlen notwendig. Auf der Empfangsseite ist daher eine **Decodierung** erforderlich.

### 3.2.2 Puls-Träger

Das (mehr oder weniger) periodische Ein- und Aus-Schalten einer Spannung beim Morsen stellt einen Zeit-diskreten Vorgang dar. Dies kann weiter perfektioniert werden, indem diese Schaltvorgänge so schnell hintereinander erfolgen, daß bezüglich eines Nachrichten-Signals  $u_N(t)$  das **Abtast-Theorem**<sup>3.2</sup> (Shannon) erfüllt ist. Man kommt so zu den **analogen Puls-Modulationsverfahren**, Bild 3.2.

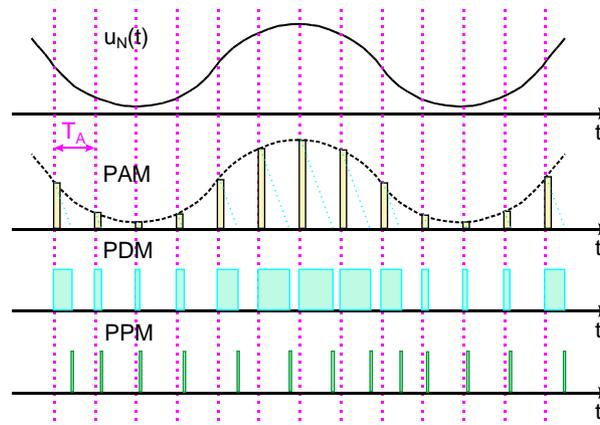


Bild 3.2: Puls-Modulationsverfahren: Puls-Amplituden-Modulation (PAM), Puls-Dauer-Modulation (PDM), Puls-Phasen-Modulation (PPM),  $T_A$  Abtast-Periode

Die Pulse können beeinflusst werden in

- ihrer Höhe (Puls-Amplituden-Modulation, PAM)
- ihrer Breite (Puls-Dauer-Modulation, PDM)
- ihrer Verschiebung gegenüber einem festen Zeitraster (Puls-Position-Modulation, PPM)
- ihrer relativen Häufigkeit (Puls-Frequenz-Modulation, PFM)

<sup>3.1</sup>Samuel Finley Breese Morse, \* 27.04.1791 Charlestown, Mass., † 02.04.1872 New York; ursprünglich Kunstmaler; 1840 erstes Patent auf einen Telegraphenapparat

<sup>3.2</sup>Die Abtastperiode  $T$  muß kleiner sein als die halbe Periode der höchsten im Signal enthaltenen Frequenz,  $T < 1/(2f_{\max})$ .

- Werden die Amplituden der äquidistanten Abtastwerte des Nachrichten-Signals (d.h. der PAM) **quantisiert**, erhält man die (digitale) **Puls-Code-Modulation (PCM)**.

PCM Signale dienen u.a. als Eingangssignale für einen digitalen Modulator.

### 3.2.3 Hochfrequenz-Träger

Elektromagnetische Wellen werden als Cosinus (oder Sinus) förmige Schwingungen erzeugt. Ein solcher Hochfrequenz-Träger  $u_C(t)$  kann beschrieben werden als

$$u_C(t) = \hat{U}_C \cos(\Omega_C t + \varphi) = \hat{U}_C \cos(\psi(t)) \quad (3.1)$$

Es gibt hierbei (maximal) 3 Parameter (markiert durch  $\Downarrow$ ) des Trägers, die durch das Nachrichten-Signal  $u_N(t)$  beeinflusst werden können, Bild 3.3.<sup>3.3</sup> [1]

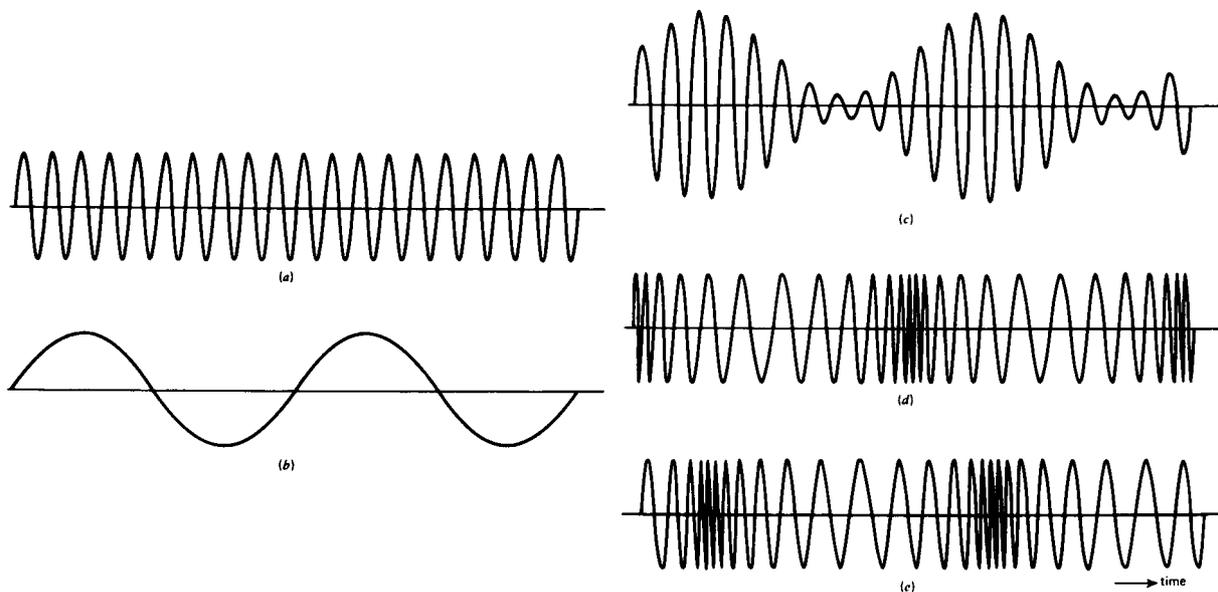


Bild 3.3: links: Hochfrequenz-Träger-Schwingung (a), Modulations-Signal (b), rechts: (gewöhnliche) Amplituden-Modulation AM (c), Phasen-Modulation PM (d), Frequenz-Modulation FM (e)

- **Amplitude**  $\hat{U}_C \Rightarrow \hat{U}_C(u_N(t))$  (Amplituden-Modulation, AM: **Amplitudenänderung**  $\sim$  zur Nachricht)
- **Frequenz**  $\Omega_C \Rightarrow \Omega_C(u_N(t))$  (Frequenz-Modulation, FM: **Frequenzänderung**  $\sim$  zur Nachricht)
- **Phase**  $\varphi \Rightarrow \varphi(u_N(t))$  (Phasen-Modulation, PM: **Phasenänderung**  $\sim$  zur Nachricht)

Tatsächlich jedoch sind **Frequenz und Phase** eines Cosinus-förmigen Trägers **nicht unabhängig von einander**, Bild 3.3, so daß **Frequenz- und Phasen-Modulation nicht unabhängig von einander** existieren können. Man spricht daher allgemeiner von **Winkel-Modulation**.

- **Winkel**  $\psi \Rightarrow \psi(u_N(t))$  (Winkel-Modulation, WM)
- Es bleiben damit **nur 2 Parameter**  $\hat{U}_C$  und  $\psi$ , die **unabhängig von einander** beeinflusst werden können.
- **Andere Möglichkeiten gibt es hier nicht, unabhängig davon ob das Nachrichtensignal analog oder digital ist.**<sup>3.4</sup>

<sup>3.3</sup>Als Nachrichtensignal ist hierbei ein cosinusförmiges Zeitsignal angenommen, wie es auch für die Zwecke der Meßtechnik verwendet wird.

<sup>3.4</sup>Aus den Bezeichnungen bzw. Namen der digitalen Modulationen ist der beeinflusste Parameter oft nicht erkennbar, da sich diese Namen meistens aus den Eigenschaften der verwendeten Symbole herleiten.

### 3.2.4 Zwei orthogonale Hochfrequenz-Träger (mit Phasendifferenz $90^\circ$ )

Werden **gleichzeitig** ein **Cosinus-** und ein **Sinus-Träger** verwendet, die jeweils in ihrer **Amplitude**  $|I(t)|$  bzw.  $|Q(t)|$  (geeignet) beeinflusst werden (d.h. je 1 Parameter), kann dadurch (neben der Amplitude  $A(t)$ ) auch die **Phase**  $\Phi(t)$  **des resultierenden Signals** beeinflusst werden. Die Ortskurve dieser (als „komplex“  $[I(t) + jQ(t)]$  bezeichneten) Modulation liegt im Bereich  $-I_{\max} \leq I(t) \leq I_{\max} / -Q_{\max} \leq Q(t) \leq Q_{\max}$ , Bild 3.4.

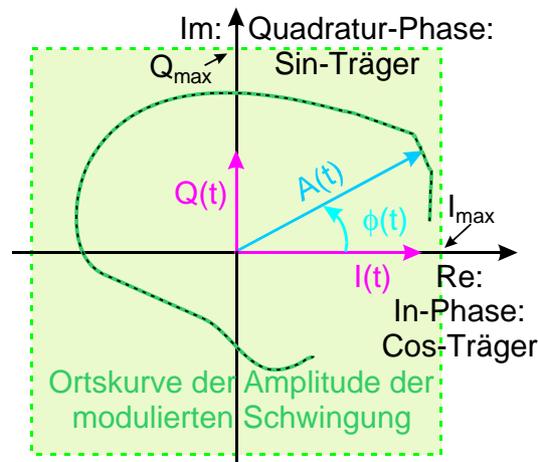


Bild 3.4: Ortskurve (Ausschnitt) einer I/Q Quadratur-Modulation

Derartige **Quadratur-Modulationen** finden ihre Anwendung insbesondere bei den digitalen Modulationen und werden dort (irreführenderweise) u.a. als Phase-Shift-Keying (PSK) bezeichnet.

### 3.2.5 Optische Übertragung

Licht ist eine elektromagnetische Schwingung sehr hoher Frequenz. Im Prinzip gelten daher alle Beeinflussungsmöglichkeiten wie bei einem (tiefer-frequenten) Hochfrequenz-Träger. Das ist aber noch weitestgehend ein Gegenstand der Forschung.

Bislang ist es möglich, die **Amplitude des Lichtes** zu beeinflussen (ein — aus bzw. kontinuierlich). Als Modulationsverfahren ergeben sich damit alle diejenigen, die auch bei einem Gleichspannungsträger möglich sind (ein — aus).

Mit Hilfe von doppelbrechenden Prismen lassen sich aus dem (weitestgehend) monochromatischen Licht eines Lasers zwei Lichtströme mit Polarisierungen von  $0^\circ$  und  $90^\circ$  erzeugen (entsprechend zu Cosinus- und Sinus-Trägern). Werden diese in ihrer Amplitude (geeignet) beeinflusst, können damit **optische Quadratur-Modulationen** erzeugt werden, womit sich dann digitale Informationen übertragen lassen.

## 4 Modulatoren

- Im Folgenden wird nur noch die Modulation von einem (oder mehreren) hochfrequenten Träger betrachtet.

In diesem Abschnitt werden die Modulatoren zu den verschiedenen Modulationen als Blockschaltbilder betrachtet. Ausgangspunkt hierfür ist die Gleichung (3.1), bei der die Eingriffsmöglichkeiten durch Pfeile  $\downarrow$  gekennzeichnet sind.

### 4.1 Amplituden-Modulatoren

Ausgehend von Gleichung (3.1) erhält man als amplitudenmodulierte Schwingung  $u_{DSB}(t)$ :

$$u_{DSB}(t) = \hat{U}_C(u_N(t)) \bullet \cos(\Omega_C t + \varphi) \quad (4.1)$$

Da die Beeinflussung der Amplitude  $\hat{U}_C$  durch das Nachrichtensignal  $u_N(t)$  proportional erfolgen soll, wird

$$u_{DSB}(t) = K_{DSB} \cdot u_N(t) \bullet \cos(\Omega_C t + \varphi) = u_N(t) \bullet \cos(\Omega_C t + \varphi), \quad (4.2)$$

wobei die Modulatorkonstante vereinfachend  $K_{DSB} = \hat{U}_C / \hat{U}_N = 1$  gesetzt wird.

Der (dicke) Punkt mit dem Pfeil darüber  $\bullet$  in Gleichung (4.2) soll hervorheben, daß hier das Nachrichtensignal  $u_N(t)$  und das Trägersignal  $u_C(t)$  **multiplikativ** mit einander zu verknüpfen sind. Als Modulator wird daher hier ein (idealer 4 Quadranten-) Multiplizierer benötigt, der im Blockschaltbild durch  $\boxtimes$  (oder auch als  $\otimes$ ) dargestellt wird, Bild 4.1 (links).

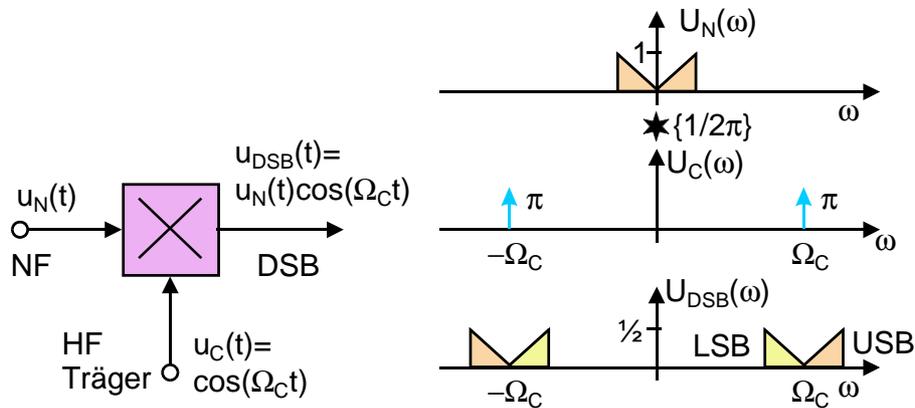


Bild 4.1: DSB-Modulator Blockschaltbild und (charakteristische) Spektren der DSB (*double side band*); (LSB: *lower side band*, USB: *upper side band*)

Auf der rechten Seite in Bild 4.1 ist (symbolisch als „Schmetterling“) das Spektrum des in dieser Art in seiner Amplitude modulierten Signals dargestellt.<sup>4.1</sup> Im Spektrum des modulierten Signals gibt es zwei Seitenbänder, jedoch keine Trägerlinie. Übertragungstechnisch heißt die Modulation deshalb Doppel-Seiten-Band (DSB).<sup>4.2</sup>

Während man im Frequenzbereich (symbolisch) die „Schmetterlings-Form“ zur Vereinfachung der Darstellung gewählt hat, wird zur Darstellung des Sachverhaltes im Zeitbereich das Nachrichtensignal als cosinusförmige Schwingung<sup>4.3</sup> gewählt, Bild 4.2.

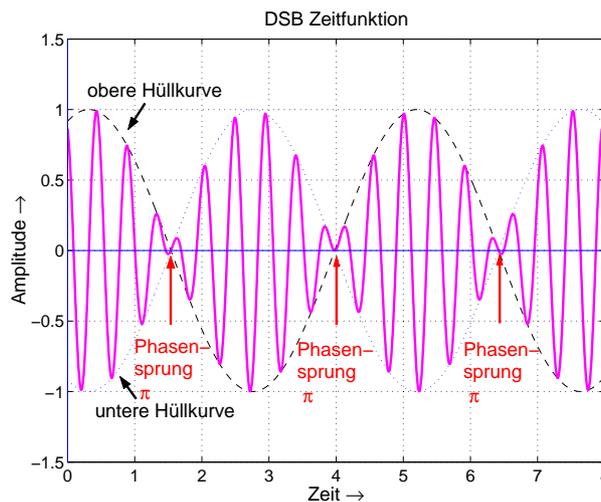


Bild 4.2: Typische Zeitverläufe einer DSB (normierte Darstellung mit Träger  $\hat{U}_C = 1$ )

In der modulierten Zeitfunktion erscheint das Nachrichtensignal nur noch als (gedachte) Hüllkurve (oben bzw. unten). Weil das Nachrichtensignal einen Vorzeichenwechsel hat, hat auch das Produkt von Nachrichtensignal und Trägersignal an dieser Stelle einen Vorzeichenwechsel. Dieser Vorzeichenwechsel kann auch als

<sup>4.1</sup>Eine Multiplikation im Zeitbereich ergibt im Spektrum eine Faltung, hier mit  $\pi\delta(\omega + \Omega_C)$  und  $\pi\delta(\omega - \Omega_C)$ , den Träger-Linien.

<sup>4.2</sup>Für digitales Nachrichtensignal wird sie jedoch mit „Phase Shift Keying“ (2PSK) bezeichnet.

<sup>4.3</sup>Diese Cosinusform im Zeitbereich und die Schmetterlings-Form im Frequenzbereich sind jedoch kein Transformationspaar bzw. keine Korrespondenz der Fourier-Transformation.

„Phasen-Sprung“  $\pi$  aufgefaßt werden.

Betrachtet man nun das Nachrichtensignal nicht als Cosinus-Schwingung, sondern als eine Folge von entsprechend zu Bild 2.4 (Seite 3) „schön verrundeten“ Datensymbolen, so sieht man, daß nun von Symbol zu Symbol die Phase einen Sprung um  $\pi$  gemacht hat. Da in der Digitaltechnik die Zeitachse aus diskreten Abtastpunkten besteht, ist somit von Abtastzeitpunkt zu Abtastzeitpunkt die Phase „gesprungen“. Daher wird die DSB in der Digitaltechnik mit PSK (*phase shift keying*) bezeichnet, genauer mit 2PSK, da genau 2 Phasen-zustände vorkommen.<sup>4.4</sup>

- **Charakteristisch für eine Amplitudenmodulation bzw. DSB sind**

- die **äquidistanten** Nulldurchgänge der modulierten hochfrequenten Schwingung.  
Dies folgt daraus, weil per Definition hier nur in die Amplitude, nicht aber in die Frequenz oder in die Phase des Hochfrequenz-Trägers eingegriffen wird.
- daß die Bandbreite der Modulation bzw. des modulierten Signals nur **exakt das doppelte** der Grenzfrequenz des modulierenden Signals ist.

## 4.2 Winkel-Modulatoren

Nach Gleichung (3.1) wird in das Argument des hochfrequenten Trägers, also in dessen Phase bzw. Frequenz, eingegriffen.

Viele der für analoge Winkelmodulationen üblichen Schaltungen arbeiten für digitale Anforderungen nicht präzise genug, wie z.B. die Beeinflussung der Frequenz eines Schwingkreises über Kapazitäts-Dioden, wie sie bei Spannungs-gesteuerten Oszillatoren (VCO: *voltage controlled oscillator*) üblich sind.

Insgesamt gibt es 2 Möglichkeiten, mit der notwendigen Genauigkeit eine Winkelmodulation zu erzeugen.

- Numerisch gesteuerter Oszillator, NCO
- Quadratur-DSB-Modulator mit Cos- und Sin-Vorverzerrung des Nachrichten-Signals (Phasen-Signals)

Bild 4.3 zeigt die Blockstruktur eines NCO (NCO: *Numerically Controlled Oscillator*). Herzstück eines NCO ist eine Look-Up Tabelle, in der die Stützwerte der Cos- bzw. Sin-Schwingung mit großer Genauigkeit und in ausreichender Anzahl abgelegt sind. Für eine gewünschte Frequenz wird im Phasenaccumulator eine entsprechende Schrittweite eingestellt. Über das  $\Delta$ -Phasen Register läßt sich die Phase modulieren.

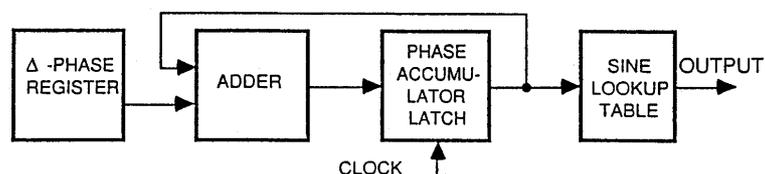


Bild 4.3: Blockschaltbild eines NCO

- **Charakteristisch für eine Winkelmodulation sind**

- die **absolut konstante Amplitude** der modulierten Schwingung, denn es wird bei der Winkelmodulation nur in den Winkel, aber nicht in die Amplitude der Trägerschwingung eingegriffen.
- daß die Bandbreite der Modulation bzw. des modulierten Signals **größer als das doppelte** der Grenzfrequenz des modulierenden Signals ist.

## 4.3 Quadratur-Modulatoren

Quadratur-Modulatoren (oder I/Q-Modulatoren) verwenden 2 zu einander orthogonale Hochfrequenzträger  $\cos(\Omega_C t)$  und  $\sin(\Omega_C t)$ , Bild 3.4 (Seite 7), deren Amplituden von 2 Nachrichtensignalen  $s_I(t)$  bzw.  $s_Q(t)$  multiplikativ beeinflusst werden, Bild 4.4.

<sup>4.4</sup>Die Bezeichnung PSK ist insoweit irreführend, als nicht in die Phase, sondern in die Amplitude des Trägers eingegriffen wurde.

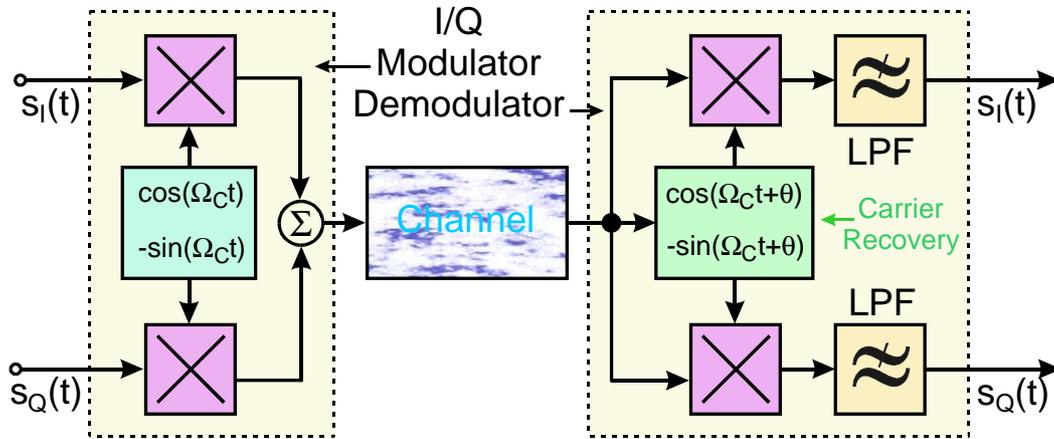


Bild 4.4: Blockschaltbild des I/Q Modulators — Demodulators

Dieses Bild zeigt auch einen wesentlichen Grund, weshalb die I/Q-Modulation angewendet wird. Im Übertragungskanal (*channel*) belegen beide modulierten Signale das gleiche Frequenzband, wodurch sich die erforderliche Übertragungs-Bandbreite halbiert. Auf der Empfangsseite lassen sich die beiden Nachrichtensignale wieder zurückgewinnen, wenn eine synchrone Demodulation angewendet wird. Hierfür benötigt man Multiplizierer und die auf der Empfangsseite regenerierten (Hilfs-) Träger (*carrier recovery*), was einen nicht unerheblichen Aufwand im Empfänger bedeutet.

### 4.4 Digitale Modulatoren

Da man digital meist von der Bit-Ebene kommt, wird i.a. die Symbolbildung (*digital mapping*) und die Symbol-Verrundung (als *digital interpolation*), sowie die Digital/Analog-Wandlung (DAC *digital to analog converter*) als ein Teil des digitalen Modulators aufgefaßt. Danach kommt dann noch der Analoge I/Q Modulator (der im physikalischen Sinne eigentliche Modulator), Bild .<sup>4.5</sup>

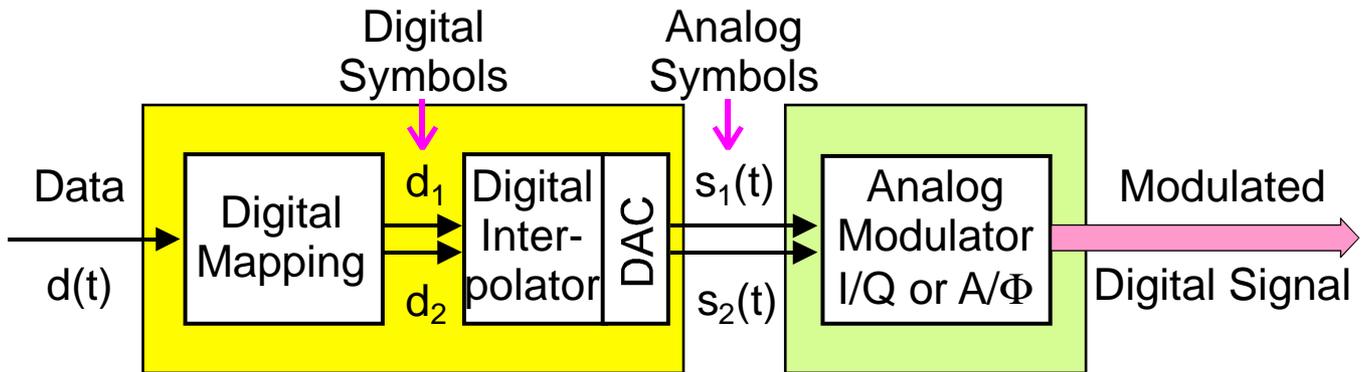


Bild 4.5: Blockschaltbild des Digitalen Modulators (digitaler Teil: gelb; analoger Teil: grün): Mapping der Daten, Interpolation (und Verrundung), D/A-Wandlung und Analoge Modulation

### 4.5 Hierarchische Modulationen

**Einstufiger Modulator** Bei vielen technischen Anwendungen erfolgt die Modulation in einer Stufe, wobei direkt der gewünschte Parameter des Trägersignals  $u_C(t)$  moduliert wird, Bild 4.6.

<sup>4.5</sup>Die kartesischen Größen  $I(t) + jQ(t)$  lassen sich auch in die polaren Größen  $A(t) \cdot e^{j\phi(t)}$  umwandeln. Deshalb gibt es neben dem I/Q Modulator auch noch einen gleichwertigen  $A/\phi$  Modulator.

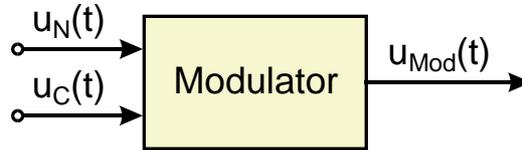


Bild 4.6: Blockschaltung eines einstufigen Modulationsvorgangs

**Mehrstufiger (hierarchischer) Modulator** Bei hierarchischen Modulationen wird das Nachrichtensignal zuerst einer ersten Modulationsart (Modulator 1) unterzogen und danach das so modulierte Signal als Eingangssignal für eine zweite (oft unterschiedliche) Modulationsart (Modulator 2) verwendet, Bild 4.7.

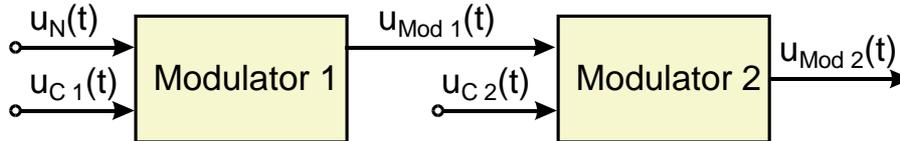


Bild 4.7: Blockschaltung einer zweistufigen hierarchischen Modulation

In der Technik wird dieses hierarchische Prinzip häufig verwendet, weil sich damit optimierte Lösungen erzielen lassen. Beispiele sind:

- Pulsmodulations-Signale (mit Gleichstrom-Träger) lassen sich nicht direkt per Funk übertragen. Vielmehr stellen diese Eingangs-Signale für einen zweiten Modulator mit Hochfrequenz-Träger der Frequenz  $\Omega_C$  dar.
- Beim UKW-Rundfunk wird z.B. das Radio-Daten-Signal (RDS) in einer ersten Modulationsstufe einer (linearen) Amplitudenmodulation unterzogen (auf 57 kHz) und in einer zweiten Modulationsstufe (zusammen mit den Audio-Signalen) Frequenz-moduliert (UKW Bereich 87,5 – 107,9 MHz).

**Hierarchische Modulation und Multiplex-Bildung** Hierarchische Modulationen sind nicht (notwendigerweise) auf zwei Hierarchiestufen beschränkt. Bei vielen Anwendungen werden mehrere Modulationen der 1. Stufe gebündelt (addiert) und dann der 2. Stufe zugeführt. Entsprechend wird in den höheren Stufen gebündelt. Der Vorteil eines solchen Verfahrens liegt darin, daß insgesamt weniger unterschiedliche Modulatoren (und Demodulatoren) notwendig sind. Bild 4.8 zeigt dazu ein Beispiel der Vorgruppen-Modulation (mit SSB Signalen) [3], wie sie bei der analogen Telefon-Technik üblich war.

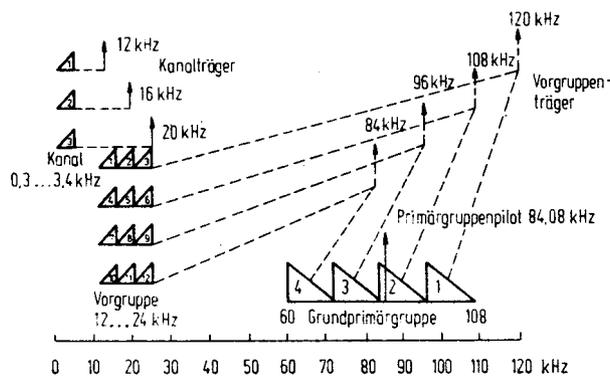


Bild 4.8: Frequenz-Plan einer Vorgruppen-Modulation der analogen Telefon-Technik

**Mehrträger-Modulation OFDM** OFDM (*orthogonal frequency deviation multiplex*) wird als COFDM (*coded OFDM*) z.B. beim terrestrischen digitalen Fernsehen DVB-T (*digital video broadcast terrestrial*) oder bei WLAN angewendet. Hierbei werden viele Kanäle mit digitalen Modulationen und kleiner Bandbreite zunächst frequenzmäßig gestaffelt und gebündelt bzw. gemultiplext (1. Modulations-Stufe) und dann anschließend in einer 2. Stufe auf die Hochfrequenz-Ebene (RF *radio frequency*) umgesetzt, Bild 4.9.[4]

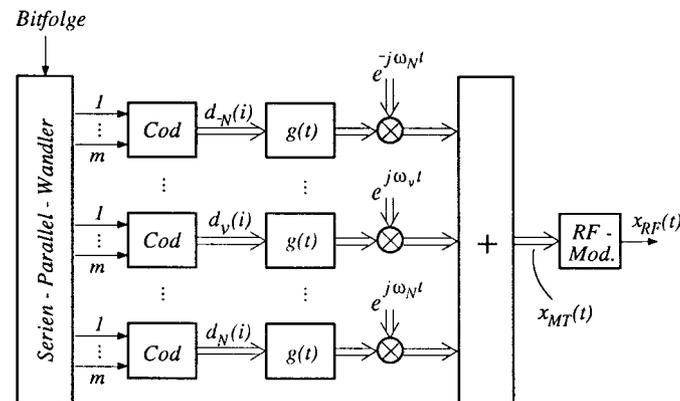


Bild 4.9: Prinzipielles Blockschaltbild eines OFDM Modulators, wie er in analoger Technik realisiert werden könnte. Benötigt werden  $2N + 1$  Multiplizierer und die zugehörigen Oszillatoren.

## 5 Vergleich analoger und digitaler Modulationsverfahren

Physikalisch gesehen gibt es nur 3 Eingriffsmöglichkeiten für den Eingriff in die Parameter eines Hochfrequenzträgers, wobei tatsächlich nur zwei von einander unabhängig sind.

$$u_C(t) = \hat{U}_C \cos\{\psi(t)\} = \hat{U}_C \cdot \cos(\hat{\Omega}_C t + \hat{\varphi}) \quad (5.1)$$

Es gibt somit **genau 2 Möglichkeiten**, die Parameter dieses Trägers durch ein Nachrichtensignal  $u_N(t)$  zu beeinflussen, egal ob dieses „analog“ oder „digital“ ist:

Amplitude	$\hat{U}_C \Rightarrow \hat{U}_C\{u_N(t)\}$	: <b>Amplitudenmodulation</b>	(5.2)
Winkel	$\psi(t) \Rightarrow \psi(t)\{u_N(t)\}$	: <b>Winkel-Modulation</b>	

Technisch unterscheidet man dagegen 3 grundsätzliche Modulationsarten:

Amplitude	$\hat{U}_C \Rightarrow \hat{U}_C\{u_N(t)\}$	: <b>Amplitudenmodulation</b>	(5.3)
Frequenz	$\hat{\Omega}_C \Rightarrow \hat{\Omega}_C\{u_N(t)\}$	: <b>Frequenzmodulation</b>	
Phase	$\hat{\varphi} \Rightarrow \hat{\varphi}\{u_N(t)\}$	: <b>Phasenmodulation</b>	

Alle Modulationen, analog oder digital, haben insgesamt nur diese 3 Möglichkeiten der Beeinflussung des HF-Trägers. Wie das (analoge oder digitale) Nachrichtensignal im Detail auf den HF-Träger einwirkt, unterscheidet die unterschiedlichen Arten.

**Analoge Modulationen** Die analogen Modulationen sind:

- Amplituden-Modulation AM (wie DSB, aber mit Träger; wird im Rundfunk z.B. auf Mittel- und Kurzwelle angewendet.)
- Doppel-Seitenband-Modulation DSB
- Quadratur-DSB QDSB (I/Q DSB; wurde für das Farbsignal beim analogen Fernsehen verwendet.)
- Einseitenband-Modulation SSB (*single side band*; nur eines der Seitenbänder der DSB wird übertragen; früher bei Telefonsystemen angewendet.)
- Restseitenband-Modulation VSB (*vestigial side band*; ähnlich wie SSB; früher beim analogen Fernsehen angewendet.)
- Frequenz-Modulation FM (Nachrichtensignal ändert die Frequenz der Trägerschwingung; wird beim UKW Rundfunk angewendet.)
- Phasen-Modulation PM (Nachrichtensignal ändert die Phase der Trägerschwingung)

AM und DSB haben äquidistante Nulldurchgänge der HF-Schwingung. FM und PM haben konstante Amplitude. Die anderen analogen Modulationen sind weder in der Amplitude noch in der Phase der HF Schwingung konstant.

**Digitale Modulationen** Die Bezeichnungen für digitale Modulationen stammen aus deren **Eigenschaften zu den Abtastzeitpunkten** auf der Empfängerseite. Hierbei wird jeweils die Eigenschaft benannt, die sich von Abtastzeitpunkt zu Abtastzeitpunkt im Empfangssignal geändert haben kann: Phase  $\varphi$ , Frequenz  $\Omega_C$ , Amplitude  $\hat{U}_C$  bzw. Kombinationen daraus.

Digitale Modulationen, bei denen in die **Amplitude** des/der HF-Träger eingegriffen wird, erzeugt z.B. durch Multiplizierer (Bild 4.1, Seite 8) oder I/Q-Modulator (Bild 4.4, Seite 10):

- Phase Shift Keying [PSK]
- Amplitude Shift Keying [ASK]
- Quadrature Amplitude Modulation [QAM]
- Amplitude Phase Shift Keying [APSK]
- Frequency Shift Keying [FSK]

Digitale Modulationen, bei denen in die **Frequenz/Phase** des HF-Trägers eingegriffen wird, erzeugt z.B. durch einen NCO (Bild 4.3, Seite 9):

- Continuous Phase Modulation [CPM]
- Minimum Shift Keying [MSK]
- Gaussian Minimum Shift Keying [GMSK]
- Continuous Phase FSK [CPFSK]
- Tamed Frequency Modulation [TFM]

Keying bedeutet (Um-) Tasten<sup>5.1</sup> und dies ist damit ein deutlicher Hinweis darauf, daß die digitale Modulation **nur zu den Abtastzeitpunkten** betrachtet wird. Daher geht aus diesen Bezeichnungen meist nicht hervor, in welchen Parameter des Trägersignals eingegriffen wurde und was zwischenzeitlich d.h. zwischen den Abtastzeitpunkten mit dem Signal passiert.<sup>5.2</sup>

## 5.1 Semantische Einordnung digitaler Modulationen

Ganz zu Anfang waren die „analoge Welten“ völlig getrennt von den „digitalen Welten“. Diese lassen sich folgendermaßen charakterisieren.

- Analoge Signale sind **für alle Zeitpunkte** definiert.
- Digitale Signale sind **nur zu den Abtast- oder Taktzeitpunkten** definiert.
- Ein wichtiges Kriterium für analoge Signale ist deren Spektralverteilung und Bandbreite.
- Wichtig für digitale Signale ist die eindeutige Zuordenbarkeit zu logischen „1“ und „0“ Zuständen.

Diese unterschiedlichen Blickwinkel führten dazu, daß sich in jeder dieser „Welten“ praktisch unabhängig von einander Bezeichnungen herausbildeten, und in Folge dessen für gleiche oder ähnliche physikalische Prozesse unterschiedliche und damit in manchen Fällen auch widersprüchliche bzw. irreführende Namen verwendet werden. Dies trifft insbesondere für die Modulationsverfahren zu.

Bei der Namensgebung für die digitalen Modulationsverfahren wurde das **Digitalsignal als nicht verrundet** unterstellt. Dies drückt sich in der Bezeichnung **Tastung** aus.

In der Literatur finden sich z.T. daher folgende **semantische Gleichsetzungen** der Modulationsverfahren, die bei unkritischer Anwendung **eine Quelle von Mißverständnissen** sein können.

<sup>5.1</sup> „Key“ ist auch die Bezeichnung für die Morse-Taste.

<sup>5.2</sup> Das geht oft sogar so weit, daß salopp davon gesprochen wird, daß die Amplitude „springt“ oder die Phase „umspringt“. Aus physikalischen Gründen können aber Sprünge in modulierten Signalen nicht auftreten.

Doppelseitenbandmodulation	DSB	⇒	Amplitudentastung	ASK
Frequenzmodulation	FM	⇒	Frequenzumtastung	FSK
Phasenmodulation	PM	⇒	Phasenumtastung	PSK

Diese unrichtigen Zuordnungen ergaben sich daraus, daß die Vergleiche mit unverrundeten, □ förmigen, Symbolen angestellt wurden. Hier kann man tatsächlich Spezialfälle finden, die diese Zuordnungen zu bestätigen scheinen.

Sobald jedoch, wie in der Praxis erforderlich, verrundete Datensymbole betrachtet werden, zeigt es sich, daß diese Zuordnungen eben nicht stimmen.

## 6 Zeitbereich und Frequenzbereich

Es werden im Zusammenhang mit der Modulation folgende Zusammenhänge der Fourier-Transformation angewendet.

Satz	Zeitbereich $f(t)$		Frequenzbereich $F(\omega)$
Zentralordinate	$f(0)$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$	=	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega$ $F(0)$
Linearität	$a \cdot f(t) + b \cdot g(t)$	○—●	$a \cdot F(\omega) + b \cdot G(\omega)$
Symmetrie	$f_e(t)$	○—●	$F_e(\omega)$
	$f_o(t)$	○—●	$j \cdot F_o(\omega)$
Komplexe Zeitfunktionen	$f(t) = f_R(t) + j f_I(t)$	○—●	$F(\omega) = F_R(\omega) + j F_I(\omega)$
	$f^*(t)$	○—●	$F^*(-\omega)$
Vertauschung	$g(t) = F(t)$	○—●	$G(\omega) = 2\pi \cdot f(-\omega)$
Ähnlichkeit	$f(at)$	○—●	$\frac{1}{ a } F(\omega/a)$
Zeitverschiebung	$f(t - t_0)$	○—●	$e^{-j\omega t_0} \cdot F(\omega)$
Frequenzverschiebung	$e^{+j\Omega_C t} \cdot f(t)$	○—●	$F(\omega - \Omega_C)$
Analytisches Signal $f_A(t)$	$f(t) \cos(\Omega_C t) + j f(t) \sin(\Omega_C t)$	○—●	$F(\omega - \Omega_C)$
Modulation	$f(t) \cdot \cos(\Omega_C t)$	○—●	$\frac{F(\omega - \Omega_C) + F(\omega + \Omega_C)}{2}$
Differentiation	$\frac{d}{dt} f(t)$	○—●	$j\omega \cdot F(\omega)$
	$t \cdot f(t)$	○—●	$j \frac{d}{d\omega} F(\omega)$
Integration	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	○—●	$\frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$
Hilbert-Transformation	$f(t) * (2/j\omega)$	○—●	$F(\omega) \cdot \text{sgn}(\omega)$
Faltung	$f(t) * g(t)$	○—●	$F(\omega) \cdot G(\omega)$
Multiplikation	$f(t) \cdot g(t)$	○—●	$\frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega) = F(\omega) \left\{ \frac{1}{2\pi} \right\} * G(\omega)$
Energiesatz	$\int_{-\infty}^{\infty}  f(t) ^2 dt$	○—●	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}  F(\omega) ^2 d\omega$
Abgetastete Zeitfunktion	$f(t) \cdot \text{III}_T(t)$	○—●	$F(\omega) \left\{ \frac{1}{2\pi} \right\} * [\Omega \cdot \text{III}_{\Omega}(\omega)]; \Omega = \frac{2\pi}{T}$
Auto-Korrelation	$f(t) \star f(t)$	○—●	$ F(\omega) ^2$
Kreuz-Korrelation	$f^*(t) \star g(t)$	○—●	$F^*(-\omega) \cdot G(\omega)$
Korrelation & Faltung	$f(t) \star g(t) = f(-t) * g(t)$	○—●	$F^*(\omega) \cdot G(\omega)$

Die allgemeinen Symmetriebeziehungen zwischen Zeitfunktionen und Spektaldichten sind in Gleichung (6.1) angegeben.

$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$	$= \Re\{f_e(t)\} + j\Im\{f_e(t)\} + \Re\{f_o(t)\} + j\Im\{f_o(t)\}$	(6.1)
$f(t) = f_R(t) + jf_I(t)$	$= f_{R_e}(t) + jf_{I_e}(t) + f_{R_o}(t) + jf_{I_o}(t)$	
$F(\omega) = F_e(\omega) + F_o(\omega)$	$= \Re\{F_e(\omega)\} + j\Im\{F_e(\omega)\} + \Re\{F_o(\omega)\} + j\Im\{F_o(\omega)\}$	
$F(\omega) = F_R(\omega) + jF_I(\omega)$	$= F_{R_e}(\omega) + jF_{I_e}(\omega) + F_{R_o}(\omega) + jF_{I_o}(\omega)$	

### 6.1 Multiplikation und Faltung

Der Modulationsvorgang besteht häufig in der Multiplikation von zwei Signalen, z.B. dem Nachrichten-Signal und dem Träger-Signal. Da zur Multiplikation im Zeitbereich die Faltung im Frequenzbereich gehört — und nach dem Vertauschungs-Satz zur Multiplikation im Frequenzbereich die Faltung im Zeitbereich — soll hier mit Hilfe von einfachen Beispielen erläutert werden, wie eine Faltung auf einfache Weise durchgeführt werden kann.<sup>6.1</sup>

#### 6.1.1 Herleitung der vereinfachten Faltung im Zeitbereich

Zur Faltung (symbolisch: Faltungs-Stern \*) im Zeitbereich gehört die Multiplikation im Frequenzbereich.

$$f_2(t) = f_1(t) * h(t) \quad \circ \bullet \quad F_2(\omega) = F_1(\omega) \cdot H(\omega) \tag{6.2}$$

Den Ausdruck im Frequenzbereich kann man mit  $j\omega/j\omega$  auf 2 Arten erweitern. Beide Arten sind gleichwertig, aber man wählt schlussendlich diejenige aus, die **im Zeitbereich am einfachsten** auf  $\delta$ -Funktionen führt.

$F_2(\omega) = \frac{F_1(\omega)}{j\omega} \cdot j\omega H(\omega) = j\omega F_1(\omega) \cdot \frac{H(\omega)}{j\omega}$	<b>Erweiterung mit <math>\frac{j\omega}{j\omega}</math></b>	(6.3)
$F_2(\omega) = F_1(\omega) \cdot \frac{H(\omega)}{j\omega} = F_1(\omega) \cdot j\omega \frac{H(\omega)}{j\omega}$		

Nach dem Zeit-Differentiationssatz, bzw. dem Zeit-Integrationsatz<sup>6.2</sup> gilt:

$j\omega X(\omega)$	$\bullet \circ$	$\frac{dx(t)}{dt}$	<b>Zeit-Differentiation</b>	(6.4)
$\frac{X(\omega)}{j\omega} + \dots$	$\bullet \circ$	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	<b>Zeit-Integration</b>	

Das bedeutet aber, daß man anstatt einer Faltung mit den ursprünglichen Funktionen  $f_1(t)$  und  $h(t)$  auch eine Faltung mit dem gleichen Ergebnis durchführen kann, wenn **eine** davon **abgeleitet** und die **andere** dafür **integriert** wird:

$f_2(t) = f_1(t) * h(t) = \frac{d f_1(t)}{dt} * \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t f_1(\tau) d\tau * \frac{d h(t)}{dt}$	(6.5)
--	-------

Symbolisch kann man für die Ableitung einen ' und für die Integration einen Strich unter die betreffende Funktion schreiben:

$f_2(t) = f_1(t)' * \underline{h(t)} = \underline{f_1(t)} * h(t)'$	(6.6)
--	-------

Es gilt der Grundsatz:

- **Es wird diejenige Funktion differenziert, die am einfachsten auf  $\delta$ -Funktionen führt.**
- **Ggf. Approximation einer Funktion durch eine Treppenkurve und dann ableiten.**

**Übungsbeispiel: Faltung zweier Rechteckimpulse** Bild 6.1 zeigt ein Beispiel zur Durchführung der vereinfachten Faltung. Hierbei sind auch die **Einheiten der beteiligten Größen** berücksichtigt.

<sup>6.1</sup>Die beiden Beispiele sind dem Skript „Anwendungen der Fourier-Transformation“ [5] entnommen.

<sup>6.2</sup>Im Zeit-Integrationsatz tritt noch ein Term  $\pi\delta(\omega)X(0)$  auf, hier mit  $\dots$  angedeutet, der sich aber bei der Vereinfachten Faltung wieder weghebt. Die Vereinfachte Faltung läßt sich genauso auch bei der **Laplace-Transformation** anwenden, bei deren Transformierten keine  $\delta$ -Funktionen auftreten. [6]

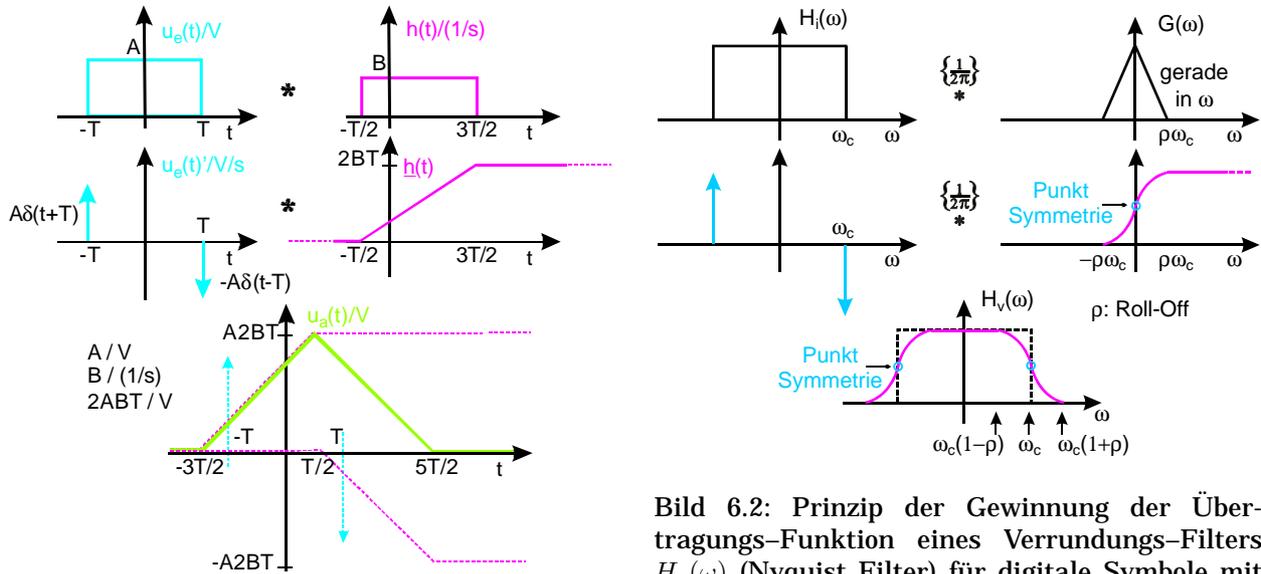


Bild 6.1: Beispiel zur Durchführung der vereinfachten Faltung  $u_e(t) * h(t)$  im Zeitbereich

Bild 6.2: Prinzip der Gewinnung der Übertragungsfunktion eines Verrundungs-Filters  $H_v(\omega)$  (Nyquist Filter) für digitale Symbole mit Hilfe der vereinfachten Faltung  $H_i(\omega) \left\{ \frac{1}{2\pi} \right\} * G(\omega)$  im Frequenzbereich

6.1.2 Faltung im Frequenzbereich

Eine Multiplikation im Zeitbereich bedeutet eine Faltung im Frequenzbereich. Nach dem Vertauschungssatz gelten hier die gleichen Zusammenhänge wie bei der Faltung im Zeitbereich. Da das Faltungsintegral über der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$  gebildet wird, muß hier vor dem betreffenden Integral  $\frac{1}{2\pi}$  stehen.

$$f_1(t) \cdot h(t) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\nu) H(\omega - \nu) d\nu = \frac{1}{2\pi} \{ F_1(\omega) * H(\omega) \} = F_1(\omega) \left\{ \frac{1}{2\pi} \right\} * H(\omega) \quad (6.7)$$

Bei der graphischen Durchführung z.B. der vereinfachten Faltung im Frequenzbereich empfiehlt es sich, falls die Funktionen graphisch vorliegen, den Faktor  $\frac{1}{2\pi}$  z.B. über dem Faltungsstern  $\left\{ \frac{1}{2\pi} \right\} *$  zu schreiben, damit er nicht vergessen wird. Bis auf den Faktor  $\frac{1}{2\pi}$  ist die Faltung im Frequenzbereich identisch mit der Faltung im Zeitbereich. Das gilt auch für die vereinfachte Faltung.<sup>6.3</sup>

**Formung von Daten-Symbolen: Roll-Off** Die Gewinnung der Übertragungsfunktion  $H_v(\omega)$  eines **allgemeinen** Roll-Off-Filters, das der Nyquist-Bedingung 1 genügt, mit Hilfe der Faltung im Frequenzbereich wird in Bild 6.2 gezeigt.

Damit die Datensymbole die erste Nyquist-Bedingung erfüllen, muß die Übertragungsfunktion  $H_v(\omega)$  des Formungs-Filters **Symmetrie-Punkte** auf ihren Flanken (Nyquist-Flanken) aufweisen. Wie die Konstruktion erkennen läßt, entstehen diese Symmetrie-Punkte dadurch, daß die Übertragungsfunktion  $H_i(\omega)$  eines idealen Tiefpasses mit einer **geraden Funktion**  $G(\omega)$  gefaltet wird. Diese Bedingung ist hinreichend.

In der Praxis wird für die gerade Funktion  $G(\omega)$  eine **Cos-Kuppe** genommen, weil durch diese Wahl die Nebenmaxima der Datensymbole kleiner werden.

- Bei der Beschreibung der Modulationsverfahren wird wahlweise der Zeit- oder der Frequenzbereich betrachtet, abhängig davon, was
  - einfacher zu beschreiben ist oder
  - die Eigenschaften deutlicher darstellt.

Die Eigenschaften der Fourier-Transformation werden hierfür als bekannt vorausgesetzt. Das gilt insbesondere für die Faltung, die bei den Modulationen verschiedentlich zur Anwendung kommt.

<sup>6.3</sup>Bei vielen typischen Anwendungen wie Modulation und Abtastung ist mindestens eine *periodische* Zeitfunktion an dem Produkt im Zeitbereich beteiligt.

## **Die Modulationsverfahren im Detail**

Es folgt im weiteren Verlauf eine ausführliche Beschreibung der Modulationsverfahren. [13]

### **Analoge Modulationen :**

- Amplituden-Modulationen
- Winkel-Modulationen (Frequenz- und Phasen-Modulationen)

### **Digitale Modulationen :**

- Eingriff in die Träger-Amplitude
- Eingriff in die Träger-Frequenz oder -Phase
- Vielträger-Modulationen

## Die Amplituden-Modulationen

Die Amplituden-Modulation ist (als „gewöhnliche Amplituden-Modulation“ AM) die historisch älteste Art der Modulation.

In einer anderen Form, als „Quadratur-Doppel-Seitenband-Modulation“ (QDSB), ist sie jedoch die wichtigste Modulationsform bei den **digitalen Modulationen**.

Zunächst werden die prinzipiellen Eigenschaften der verschiedenen Formen<sup>6.4</sup> der Amplituden-Modulationen vorgestellt:

- gewöhnliche Amplituden-Modulation **AM**
- lineare Amplituden-Modulation, Doppel-Seitenband-Modulation **DSB**
- Quadratur-Doppel-Seitenband-Modulation **QDSB**

## 7 Die gewöhnliche Amplituden-Modulation AM

### 7.1 Ideale Amplituden-Modulation

In diesem Abschnitt wird zunächst betrachtet, wie eine Amplituden-Modulation im Idealfall erzeugt werden könnte und was demzufolge die Eigenschaften eines amplitudenmodulierten Signals im Zeit- und Frequenzbereich sind.

Spektral bedeutet „Modulation“ eine **Frequenz-Umsetzung** vom Niederfrequenz-Bereich in den Hochfrequenz-Bereich.

- Da in einem linearen zeitinvarianten (LTI *linear time invariant*) Übertragungssystem keine neuen Frequenzen entstehen, sind diese für Modulation und Demodulation nicht zu gebrauchen.
- Sowohl für die Modulation (als auch für die Demodulation) sind deshalb **nichtlineare** Systeme erforderlich. Für AM ist eine quadratische Nichtlinearität oder ein Multiplizierer geeignet.
- Besonders geeignet für eine Amplituden-Modulation sind:
  - „**Knick-Kennlinien**“ (additive Modulation)
  - **quadratische Nichtlinearitäten**, „quadratische Kennlinie“ (additive Modulation)
  - **Multiplizierer** (multiplikative Modulation)  
Multiplikation von Nachricht mit Trägerschwingung ergibt „ideale“ Modulation.
  - **Schalter** oder **Umpoler** (multiplikative Modulation)  
Schalter und Umpoler in Kombination mit entsprechenden Filtern arbeiten bezüglich Modulation wie (ideale) Multiplizierer, haben aber einen besseren Wirkungsgrad. Beide können auch als Zeit-variante lineare Systeme betrachtet werden.

### 7.2 Die AM im Zeitbereich

Der Hochfrequenz-Träger (*carrier*)  $u_C(t)$  ist eine Cos-förmige Schwingung.

$$u_C(t) = \hat{U}_C \cos(\Omega_C t) \quad (7.1)$$

Das modulierende Signal  $u_N(t)$  (analoges NF-Signal, Nachrichten-Signal) beeinflusst die **Amplitude**  $\hat{U}_C$  der Trägerschwingung. Die (Hüllkurve der) Amplitude der modulierten Schwingung soll **proportional** zum Zeitverlauf des Nachrichten-Signals sein. Der Proportionalitätsfaktor  $k_{AM}$  wird als **Modulatorkonstante** bezeichnet. Die so definierte Hüllkurve an den AM Zeitverlauf muß dabei stets  $\geq 0$  sein.

$$\hat{U}_C \rightarrow \hat{U}_C(t) = \hat{U}_C + k_{AM} \cdot u_N(t) \geq 0 \quad \text{Hüllkurve bei AM} \quad (7.2)$$

Der Zeitverlauf der (gewöhnlichen) Amplituden-Modulation (AM) wird dann:

<sup>6.4</sup>Eine weitere Art ist die **Einseitenband-Modulation** (SSB, *single side band*). Diese geht aus der Doppelseitenband-Modulation (DSB) hervor, stellt aber genau genommen eine Mischform aus Amplituden- & Phasen-Modulation dar, ähnlich zur QDSB. SSB wird in einem eigenen Kapitel „Einseitenband- und Restseitenband-Modulation, SSB — VSB“ [13] behandelt.

$$u_{AM}(t) = [\hat{U}_C + k_{AM} \cdot u_N(t)] \downarrow \cos(\Omega_C t + \varphi) \quad \text{AM Zeitverlauf} \quad (7.3)$$

Bild 7.1 zeigt einen typischen Zeitverlauf für die AM. Hier folgt die (obere) Hüllkurve exakt dem Zeitverlauf des Nachrichtensignals  $u_N(t)$ . Die Amplitude des Trägers ist normiert auf  $\hat{U}_C = 1$ .

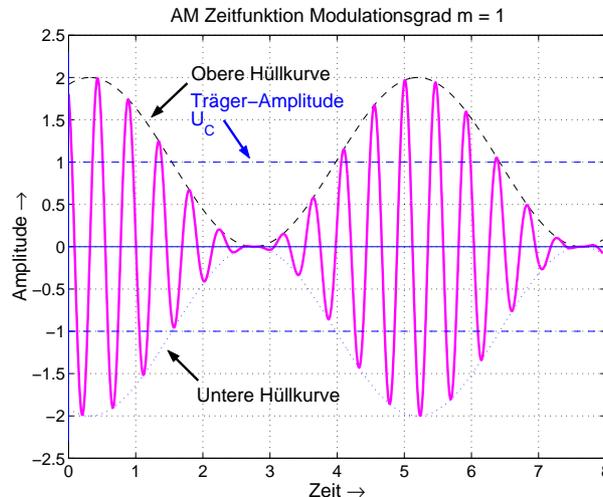


Bild 7.1: Typische Zeitverläufe einer AM (normierte Darstellung mit Träger  $\hat{U}_C = 1$ )

Bei den Amplituden-Modulationen ist es zur Darstellung des Zeitverlaufes üblich, als **typisches Nachrichtensignal**  $u_N(t)$  eine **Cosinus-** (oder Sinus-) **Schwingung** anzunehmen. Dies hat den Vorteil, daß sich mit dieser Wahl die Verhältnisse im Zeitbereich recht einfach und klar darstellen lassen.

### 7.3 Blockschaltbild des AM Modulators

Die AM kann auch als **multiplikative Modulation** bezeichnet werden, da der Cos-Träger mit einem Amplitudenfaktor multipliziert wird, welcher vom modulierenden Signal  $u_N(t)$  abhängt, markiert durch  $\downarrow$  in Gleichung (7.3). Diese Gleichung kann auch noch ausmultipliziert werden, was zu einem weiteren Blockschaltbild führt.

$$u_{AM}(t) = [\hat{U}_C + k_{AM} \cdot u_N(t)] \downarrow \cos(\Omega_C t) = \hat{U}_C \cos(\Omega_C t) + [k_{AM} \cdot u_N(t)] \downarrow \cos(\Omega_C t) \quad \text{AM Zeitverlauf} \quad (7.4)$$

Damit ergeben sich unmittelbar zwei Varianten für das Blockschaltbild für eine Realisierung einer gewöhnlichen AM mittels eines Multiplizierers, Bild 7.2.<sup>7.1</sup>  $k_{AM}$  ist die Modulator-Konstante (Verstärkungs-Faktor).

Kennzeichnend für alle „**multiplikativen**“ Modulationen sind die absolut **äquidistanten Nulldurchgänge der modulierten Hochfrequenz-Schwingung** (im Zeitbereich), vergleiche Bild 7.1.

### 7.4 Spektrum der AM

Mit Hilfe des Faltungs-Satzes oder des Modulations-Satzes der Fourier-Transformation<sup>7.2</sup> erhält man aus Gleichung (7.4) die Spektraldichte einer AM.

$$U_{AM}(\omega) = \underbrace{\pi \hat{U}_C [\delta(\omega - \Omega_C) + \delta(\omega + \Omega_C)]}_{\text{Träger}} + \underbrace{\frac{k_{AM}}{2} [U_N(\omega - \Omega_C) + U_N(\omega + \Omega_C)]}_{\text{DSB}} \quad (7.5)$$

<sup>7.1</sup>Wird die Addition des Trägers (bzw. von  $\hat{U}_C$ ) fortgelassen, erhält man eine Doppelseitenband-Modulation (DSB).

<sup>7.2</sup>Da diese Zusammenhänge früher nicht allgemein bekannt waren, mußte an dieser Stelle das Nachrichtensignal als Cos-Schwingung angesetzt werden. Eine Aussage über die dabei entstehenden Spektrallinien ließ sich dann mit Hilfe von **trigonometrischen Umformungen** gewinnen. In zahlreichen Fachbüchern findet man das auch heute noch so dargestellt. Zur Fourier-Transformation siehe auch: <http://www.diru-beze.de>

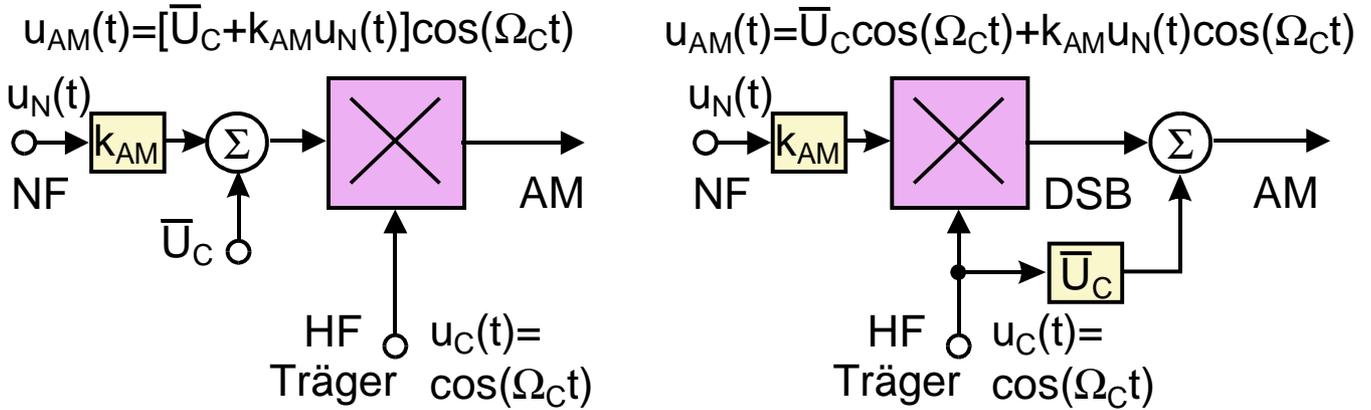


Bild 7.2: Blockschaltbilder des AM Modulators (entsprechend Gleichung (7.4))

Zur Darstellung der Spektren der Amplitudenmodulation ist es üblich, **symbolische Formen** zu verwenden, aus denen die Umsetzung im Frequenzbereich deutlich zu ersehen ist, z.B. eine Art von „Schmetterlings-Form“. Die Sektraldichte der AM ergibt sich dann entsprechend zur Blockstruktur rechts in Bild 7.2, wie es Bild 7.3 zeigt.

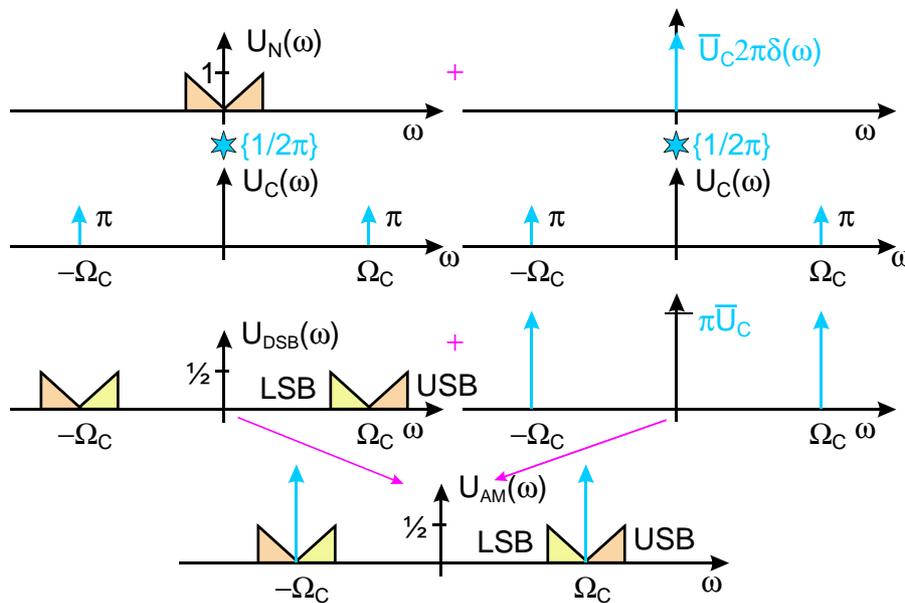


Bild 7.3: Typische Spektraldichten einer AM; Das AM Spektrum hat eine Trägerlinie und ein oberes (USB) und ein unteres (LSB) Seitenband. (zweiseitige spektrale Darstellung)

Wie aus Bild 7.3 zu erkennen ist, besteht die AM im Spektrum aus folgenden Teilen:

- Trägerlinien bei  $\pm\Omega_C$  (Hier wird die **zweiseitige** spektrale Darstellung verwendet.)
- (jeweils) einem oberen und einem unteren Seitenband (*upper side band*: USB, *lower side band*: LSB).

Beide Seitenbänder enthalten die gleiche Information.<sup>7.3</sup> Im USB ist die Information in **Regellage**, d.h. in der gleichen relativen Frequenzlage wie im NF-Bereich. Im LSB ist die Information in **Kehrlage**, d.h. die relative Frequenzlage ist gegenüber dem NF-Bereich vertauscht.

Die **HF-Bandbreite** der Amplituden-Modulationen ist gleich der **doppelten NF-Bandbreite**. Damit gehören diese Modulationsarten zu den **Bandbreite-sparenden** Arten. Diesem Vorteil steht jedoch der Nachteil gegenüber, daß diese Modulationsarten einen höheren hochfrequenten Störabstand benötigen, um zum gleichen

<sup>7.3</sup>Man kann daher (ohne Verlust an Information) auch nur ein Seitenband übertragen und kommt so zur Einseitenband-Modulation (*single side band*, SSB)

Störabstand nach der Demodulation zu kommen wie eine Modulationsart mit größerer HF-seitigen Bandbreite, wie z.B. Frequenzmodulation.

Da bei der AM im Spektrum die Trägerfrequenz-Linie vorhanden ist, heißt diese auch **DSB-LC** (*double side band - large carrier*), im Unterschied zur **Doppel-Seitenband-Modulation** (DSB), bei der keine Trägerlinie im Spektrum vorhanden ist, Bild 7.3 (linke Seite).

## 7.5 Modulations-Grad der AM

### 7.5.1 Kompatibilität

Die Bedingung bei AM ist, daß die Information aus der **Abtastung der Hüllkurve** der modulierten Schwingung zurückgewonnen werden kann. Die Hüllkurve der AM darf daher die Nulllinie bestenfalls berühren, jedoch nicht schneiden. Als Maß dafür wurde der Modulationsgrad  $m$  eingeführt.

Diese Bedingung resultiert aus der *Geschichte des Radios*: Am Anfang der (Rund-) Funk-Übertragung von Musik und Sprache gab es als Demodulator nur den *Detektor*, mit dessen Hilfe die Hüllkurve der AM abgetastet werden konnte, Bild 7.4. Der Röhren-Detektor [7] ist älter (1904) als der Kristall-Detektor [8].

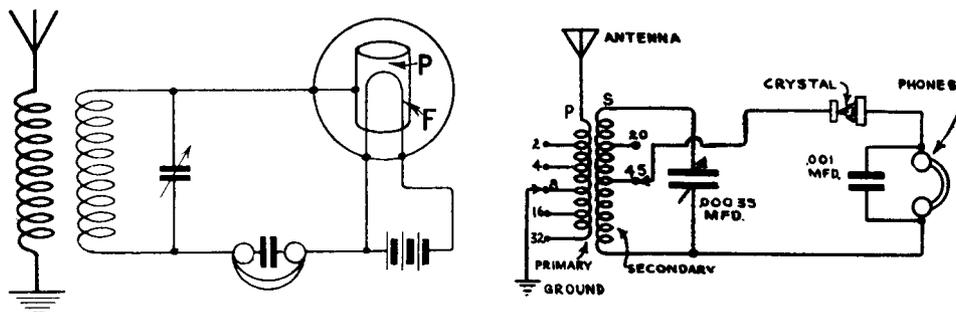


Bild 7.4: Typische Schaltbilder von Detektor-Apparaten aus den Anfängen des Radios

Die Bezeichnung Detektor bedeutet (heute) *speziell*: Kristall mit Drahtspitze zur HF-Gleichrichtung. Dies kann als Vorläufer der Halbleiter-Diode aufgefaßt werden. Mit Detektor *allgemein* wird ein abstimmbarer Schwingkreis mit HF-Gleichrichter, ein so genannter Detektor-Apparat bezeichnet.

Alle Verbesserungen und Verfeinerungen der Technik der Amplitudenmodulation mußten auf diese (einmal getroffene) Festlegung Rücksicht nehmen, damit die **Kompatibilität** erhalten bleibt. Bei einer Umstellung auf eine andere (und günstigere) Modulationsart hätte es ansonsten schlagartig Millionen von nicht mehr zu gebrauchenden Empfängern gegeben. Dies ist nicht durchsetzbar. Neue Übertragungsverfahren im Rundfunk (UKW-FM, DSR, DAB, DVB) erfordern daher i.a. auch neue Frequenzbereiche. Die alten Verfahren können aber nicht einfach aufgegeben werden, sondern laufen meist noch jahrelang parallel, bis sie schließlich mangels Nachfrage (eventuell) eingestellt werden können.

Der AM-Rundfunk auf Lang- Mittel- und Kurz-Wellen existiert z.B. nunmehr seit vielen Jahrzehnten (Start: 1923). Mittlerweile wurde unter dem Namen „DRM“ (siehe: <http://www.drm.org>) ein digitales Übertragungsverfahren entwickelt, das den AM-Rundfunk längerfristig ablösen könnte. Hierfür werden neue Empfänger benötigt. Da die Umstellung von AM auf das DRM-Format schrittweise erfolgen soll, wurde DRM kompatibel zur AM Kanalbandbreite (LW & MW 9 KHz; KW 10 KHz) gewählt.

### 7.5.2 Definition des Modulationsgrades

Der Modulationsgrad  $m$  ist definiert als ein Verhältnis, das aus den Maximal- und den Minimal-Werten der (oberen) AM-Hüllkurve gebildet wird.

$$m = \frac{\hat{U}_{\max} - \hat{U}_{\min}}{\hat{U}_{\max} + \hat{U}_{\min}} \quad \text{Modulationsgrad allgemein} \quad (7.6)$$

Gleichung (7.6) gilt für beliebige Kurvenformen der Nachricht. Meßtechnisch benutzt man eine Cos-förmige Nachrichtenschwingung:

$$u_N(t) = \hat{U}_N \cos(\omega_N t) \quad (7.7)$$

Mit Gleichung (7.6) wird dann:

$$\hat{U}_{max} = \hat{U}_C + \hat{U}_N ; \hat{U}_{min} = \hat{U}_C - \hat{U}_N ; \quad \rightsquigarrow \quad m = \frac{\hat{U}_N}{\hat{U}_C} \quad \textbf{Modulationsgrad me\ss} \textbf{technisch} \quad (7.8)$$

In Bild 7.5 ist die Definition des Modulationsgrades dargestellt.

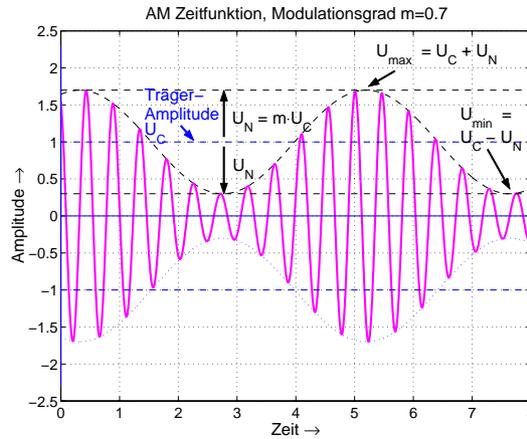


Bild 7.5: Zur Definition des Modulationsgrades

Wird der Modulationsgrad  $m > 1$ , so entsteht Übermodulation.

$$\hat{U}_N > \hat{U}_C \rightsquigarrow m > 1 \quad \textbf{Übermodulation} \quad (7.9)$$

Bei AM muß Übermodulation unbedingt vermieden werden. Bild 7.6 zeigt deren Auswirkung auf die (detektierte) Hüllkurve. Ist die Amplitude der Hüllkurve größer als die Amplitude des HF-Trägers (Übermodulation), so folgt daraus eine (nichtlineare) Verzerrung des demodulierten Signals.

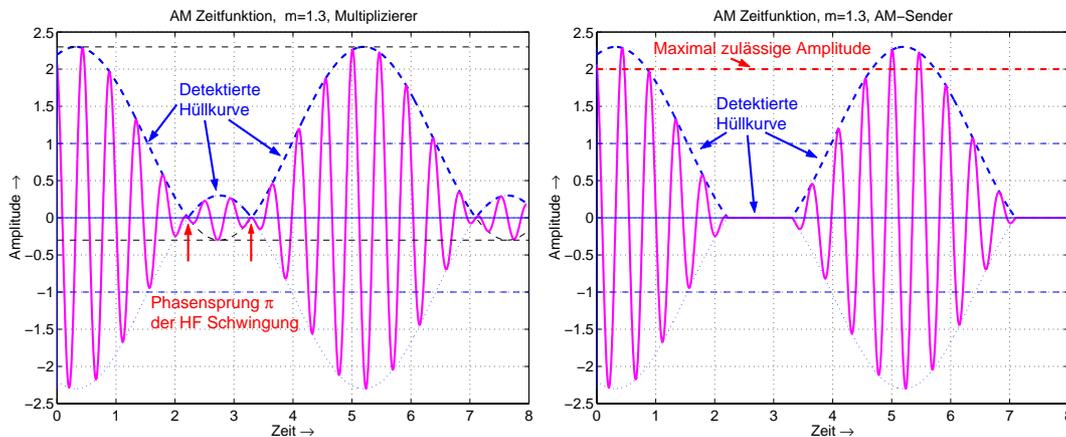


Bild 7.6: Auswirkung einer Übermodulation  $m > 1$  auf das demodulierte Signal in Abhängigkeit vom Modulator (Multiplizierer (links) bzw. AM-Sender (rechts))

Übermodulation in der Form von Bild 7.6 (links) entsteht auch auf dem Funkweg infolge von Reflexionen an der Ionosphäre (Mehrwege-Ausbreitung), was zu unangenehmen (selektiven) Verzerrungen des empfangenen Signals führt. Da sich die Reflexions-Eigenschaften der Ionosphäre beständig ändern, wechselt sich, besonders bei Nacht, guter und gestörter Empfang z.T. in rascher zeitlicher Folge ab.

AM-Sender müssen unbedingt eine Übermodulation auch deswegen verhindern, da sonst die maximale Amplitude des Sende-Signals den Aussteuerungs-Bereich (des Senders) übersteigen würde, Bild 7.6 (rechts). Dies erfolgt mit Hilfe eines Amplituden-Begrenzers (oder Clippers) für das NF-Signal.

Zusätzlich ist es bei AM-Sendern üblich, leise NF-Passagen in der Lautstärke anzuheben (Compander), was zu einer **Dynamik-Kompression** führt, die meist auch noch frequenzabhängig ausgeführt wird (Präsenz-Filter).<sup>7.4</sup> Der Zweck ist ähnlich wie bei entsprechenden Kompressionsverfahren bei Tonbandaufnahmen (Dolby, HighCom etc.) und dient der Unterdrückung von Störgeräuschen, die auf dem HF-Weg entstehen (Störungen auf dem Übertragungskanal). Die AM-Empfänger haben jedoch keine Expander, weil es erstens für die senderseitige Kompression keine Norm gibt und zweitens, weil speziell für die Wiedergabe mit Hintergrund-Geräuschen, wie z.B. im Auto, eine komprimierte NF „besser“ klingt.

### 7.6 Zeigerdarstellung der Amplitudenmodulation

Für die Zeigerdarstellung der Modulation wird eine Cos-förmige NF angesetzt. Man erhält damit eine Spektraldarstellung für die AM mit Linien gemäß Bild 7.7. Die Länge der Zeiger werden für die Zeigerdarstellung gleich den Amplituden der Teilschwingungen gewählt<sup>7.5</sup>.

Die Zeigerdarstellung ist eine **Mischform aus Zeit- und Frequenzbereich**. Diese hat Ähnlichkeiten mit der Zeigerdarstellung bei der symbolischen Berechnung (mit komplexer Rechnung) von elektrischen Netzwerken. Dort haben alle Zeiger die gleiche Rotationsgeschwindigkeit, weil in allen Teilen des Netzwerkes die gleiche Frequenz herrscht.

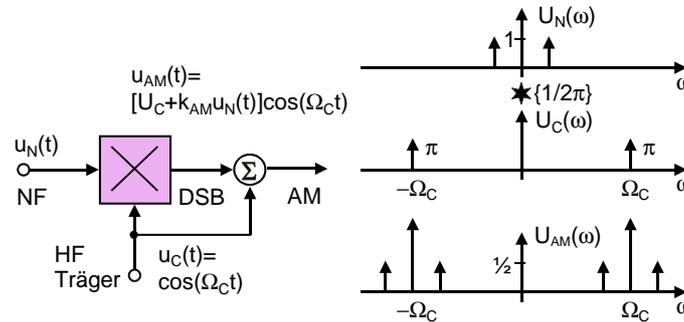


Bild 7.7: Amplituden-Modulation mit Cosinusförmigem NF-Signal

Da die **Frequenzen dieser Linien unterschiedlich** sind, stellt man sich das resultierende Zeigerbild als mit der Frequenz  $\Omega_C$  des Trägers stroboskopisch angeleuchtet vor. Damit steht die Trägerlinie still und die Seitenlinien führen Relativ-Drehungen mit  $\pm\omega_N$  aus. Bild 7.8 zeigt diese Zeigerbilder der AM (mit  $\omega_s = \omega_N$ ).<sup>7.6</sup>

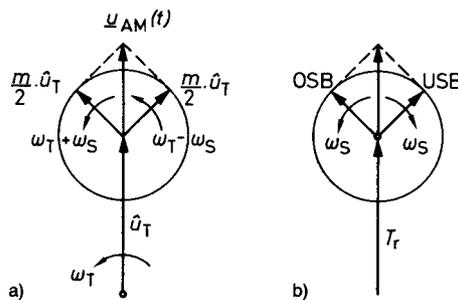


Bild 7.8: Zeigerbilder der AM: a) rotierender Träger-Zeiger, b) feststehender Träger-Zeiger

<sup>7.4</sup>Zur Dynamik-Beeinflussung hat sich (speziell auch bei UKW FM) das „Optimod“ Verfahren eingebürgert.

<sup>7.5</sup>Die Linien bei der zweiseitigen Darstellung über der Frequenz  $\omega$  stellen jeweils die Längen von rechts bzw. links herum laufenden Zeigern dar, die der halben Amplitude der zugehörigen Cos-Schwingung entsprechen.

<sup>7.6</sup>Etwas ungenau werden hier die Zeiger mit „OSB“ (oberes Seitenband) und „USB“ (unteres Seitenband) — statt „Seiten-Linien“ — bezeichnet.

Bild 7.9 zeigt, wie man sich die Zeitpunkte, in denen die Amplituden-modulierte HF die Hüllkurve berührt, durch die Zeigerdarstellung entstanden denken kann.

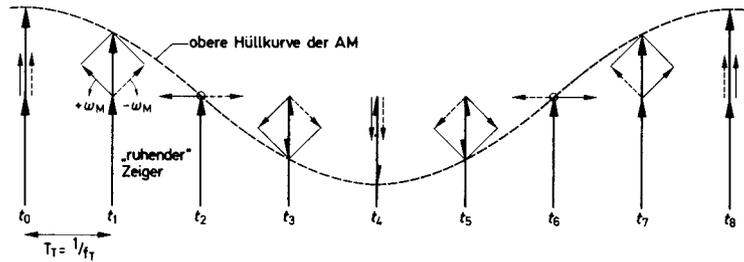


Bild 7.9: Beispiel für die Konstruktion einer AM-Schwingung mit Hilfe der Zeigerdarstellung.

Bevor die Fouriertransformation zum allgemeinen Handwerkszeug des Ingenieurs gehörte, war die Zeigermethode eine sehr weit verbreitete und benutzte Methode um Modulationen zu beschreiben. Bei der linearen Verzerrung der AM beim Durchgang durch Filter ist sie besonders anschaulich.

### 7.6.1 Leistung der AM

Für Cos-förmiges Nachrichtensignal ergeben sich im Zeit- und Frequenz-Bereich die Verhältnisse gemäß Bild 7.10. Man muß dabei unterscheiden zwischen der *momentanen* Leistung und der *mittleren* Leistung. Beide Werte sind bei der Dimensionierung der Senderendstufe zu berücksichtigen. Bezogen wird auf die Träger-Leistung  $P_C$ .

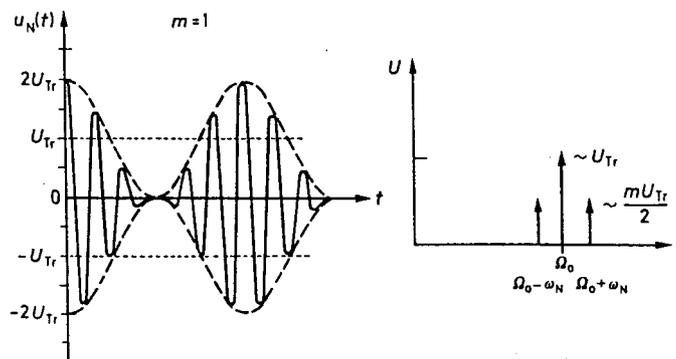


Bild 7.10: Zur momentanen und mittleren Leistung der AM

Die momentane Leistung entnimmt man dem Zeitverlauf der AM. Sie schwankt zwischen einem maximalen und einem minimalen Wert, der vom Modulationsgrad  $m$  abhängt. Für die Dimensionierung ist der maximale Wert der Leistung maßgeblich.

$$P_{\max}(m) \sim [(1 + m)\hat{U}_C]^2 \rightsquigarrow P_{\max}(m) = (1 + m)^2 \cdot P_C \tag{7.10}$$

Für  $m = 1$  ergibt sich die Spitzen-Leistung  $P_{sp}$

$$P_{sp} = P_{\max}(1) \sim 4 \cdot \hat{U}_C^2 \rightsquigarrow P_{sp} = 4P_C \quad \textbf{AM Spitzen-Leistung} \tag{7.11}$$

Würde die Spitzenleistung überschritten, könnte der Sender beschädigt werden. Daher besteht auch senderseitig ein wichtiger Grund um Übermodulation  $m > 1$  zu vermeiden.

Die mittlere Leistung  $\bar{P}$  kann man nach dem *Parseval'schen Theorem* der Spektralverteilung entnehmen.

$$\bar{P}(m) \sim (1 + \frac{m^2}{2})\hat{U}_C^2 \rightsquigarrow \bar{P}(m) = (1 + \frac{m^2}{2})P_C \tag{7.12}$$

Für  $m = 1$  ergibt sich ein Maximalwert der mittleren Leistung zu

$$\bar{P}_{\max} \sim \frac{3}{2} \hat{U}_C^2 \rightsquigarrow \bar{P}_{\max} = 1,5 \cdot P_C \quad \textbf{maximale mittlere Leistung der AM} \quad (7.13)$$

Damit wird das Verhältnis von Spitzenleistung zu maximaler mittlerer Leistung

$$\frac{P_{\text{sp}}}{\bar{P}_{\max}} = \frac{8}{3} = 2,666 \dots \quad (7.14)$$

Dies bedeutet einen maximalen Crestfaktor  $C_{F_{\max}}$  der AM, definiert als das Verhältnis von Spitzenwert zu Effektivwert der Spannung, von

$$C_{F_{\max}} = \frac{\sqrt{P_{\text{sp}}}}{\sqrt{\bar{P}_{\max}}} = \frac{2 \cdot \hat{U}_C}{\sqrt{3/2} \cdot \hat{U}_C} = \sqrt{\frac{8}{3}} = 1,633 \rightsquigarrow 4,26\text{dB} \quad \textbf{Crestfaktor der AM (m = 1)} \quad (7.15)$$

Aus der Spektralverteilung sieht man zudem, wie sich die mittlere Leistung auf die Träger-Leistung und die Seitenband-Leistung aufteilt.

In den Seitenbändern steckt die Information. Die betreffende Leistung ( $P_{\text{SB}} = \frac{m^2}{2} \cdot P_C$ ) muß vom Modulations-Verstärker aufgebracht und der Senderendstufe (dem eigentlichen Modulator im engeren Sinne) zur Verfügung gestellt werden, also maximal ( $m = 1$ ) somit die halbe Trägerleistung  $P_{\text{SB}} = \frac{1}{2} \cdot P_C$ .

Im Träger steckt eine viel größere Leistung ( $P_C \sim \hat{U}_C^2$ ) als in den Seitenbändern. Für das Verhältnis von Träger-Leistung zu Seitenband-Leistung folgt in Abhängigkeit vom Modulationsgrad:

$$\frac{\bar{P}_C}{\bar{P}_{\text{SB}}} = \frac{2}{m^2} \geq 2 \rightsquigarrow \frac{\textbf{Träger-Leistung}}{\textbf{Seitenband-Leistung}} \geq 2 \quad (7.16)$$

Bei AM steckt somit **maximal 1/3 der gesamten abgestrahlten Leistung in den Seitenbändern**, Bild 7.11. Bei einem mittleren Modulationsgrad  $\bar{m} = 30\%$  beträgt die Seitenband-Leistung nur wenige % der Träger-Leistung. Auch aus diesem Grunde wird senderseitig das NF-Signal komprimiert, so daß sich  $\bar{m}$  vergrößert.

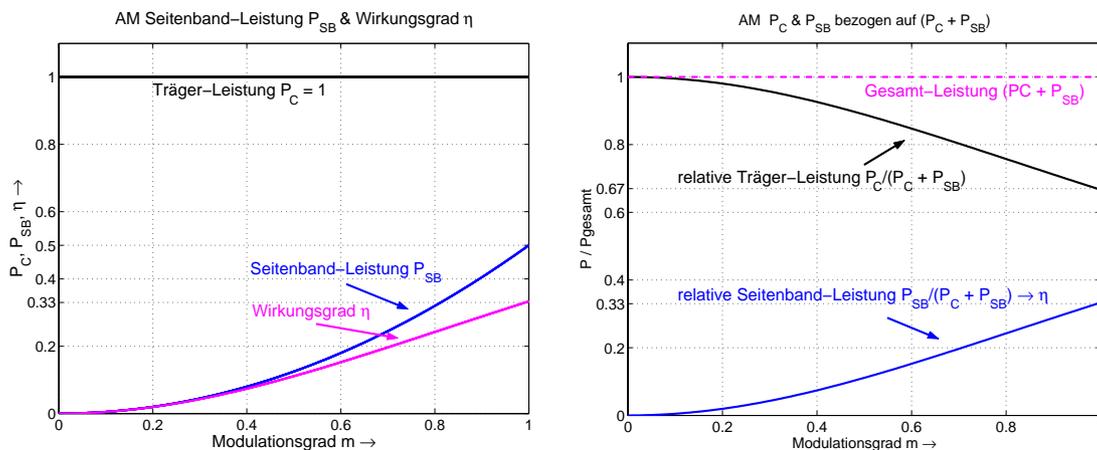


Bild 7.11: Seitenband-, Träger-Leistung und Wirkungsgrad der AM, absolut und bezogen auf die (gesamte) abgestrahlte Leistung als Funktion des Modulationsgrades  $m$  (normierte Darstellung)

Die abgestrahlte Trägerleistung trägt nichts zur Informationsübertragung bei. Für die *Informationsübertragung* ist diese Leistung nutzlos. Die Trägerleistung muß jedoch für AM zur Verfügung gestellt werden, da man bei der AM (aus Gründen der Kompatibilität) die Hüllkurven-Demodulation anwendet. Der Betrieb von AM-Sendern ist daher unnötig teuer. Im AM-Empfänger wird jedoch die Größe des Trägers für eine Verstärkungsregelung (*Schwund-Regelung*) und zur „Feldstärke-Anzeige“ genutzt<sup>7.7</sup>.

<sup>7.7</sup>Bei Röhrenempfängern erfolgte diese Anzeige mit Hilfe eines (grün leuchtenden) *magischen Auges*.

## 8 Ideale AM Demodulation

Die hier betrachtete ideale Demodulation einer AM-Schwingung lässt sich mit heutiger Technik (Integrierte Schaltkreise oder Digitale Signalverarbeitung) ziemlich exakt realisieren.

Mit der früheren Röhren-Technik war man auf Kompromisse angewiesen. Die „ideale“ AM Demodulation ist somit die Zielvorgabe für das mit dem jeweiligen Stand der Technik erreichbare Ergebnis.

### 8.1 Hüllkurven-Demodulator (asynchrone Demodulation)

Der Hüllkurven-Demodulator (Spitzen-Detektor) tastet die Hüllkurve der AM-Schwingung ab. Er ist als Demodulator nur für AM zu gebrauchen, weil nur hier die Hüllkurve der modulierten Schwingung mit der Nachrichtenschwingung übereinstimmt, Bild 8.1. Es muß daher Übermodulation  $m > 1$  vermieden werden.<sup>8.1</sup>

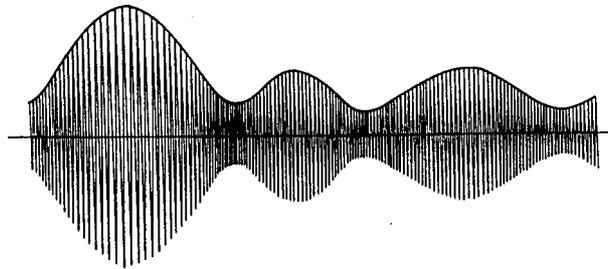


Bild 8.1: AM-Schwingung und ihre Hüllkurve

Der konventionelle Hüllkurven-Demodulator entspricht der *Detektor-Schaltung* aus den Anfängen des Radios (mit Ausnahme, daß der Schwingkreis fest auf die ZF abgestimmt ist), Bild 8.2.

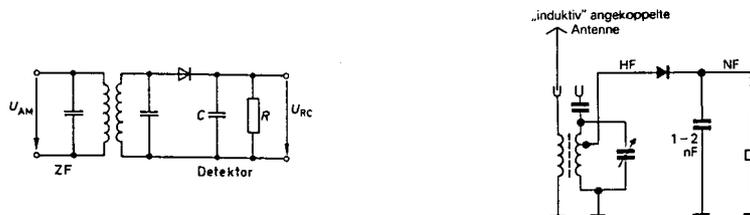


Bild 8.2: Hüllkurven-Demodulator: AM-Demodulator im Super (links), Detektorschaltung (rechts)

„Ideal“ arbeitet der Hüllkurven-Demodulator dann, wenn die Diode eine „Knick-Kennlinie“ hat, die Zeitkonstante  $T = RC$  richtig dimensioniert und die Amplitude der AM-Schwingung genügend groß ist.

Diese Bedingungen lassen sich mit Halbleiterdioden näherungsweise erfüllen, solange der Modulationsgrad  $m < 100\%$  bleibt.

Die Gleichrichter-Diode trennt den HF-Teil (links) vom NF-Teil (rechts) des Detektors, Bild 8.2.

- Der **HF-Teil** muß dabei so ausgeführt sein, daß an ihm **keine NF-Spannung und keine Gleichspannung** abfällt. Dies erreicht man durch die Spule des Schwingkreises, die Gleichstrom- und NF-mäßig kurzschließt.
- Andererseits muß der **NF-Teil** so ausgelegt sein, daß an ihm **keine HF-Spannung** abfällt. Dies erreicht man durch den Kondensator  $C$ . Die NF muß andererseits an diesem  $C$  abzugreifen sein. Daher benötigt man einen Entlade-Widerstand  $R$  parallel zu  $C$ .

Die Zeitkonstante  $T = RC$  muß so gewählt sein, daß die Entladung der NF folgen kann, Bild 8.3 [9]. Andernfalls ergibt sich „Diagonales Clippen“, Bild 8.4 [10]. Dieses führt auf starke **nichtlineare Verzerrungen** des demodulierten Signals.

<sup>8.1</sup>Bei AM-Fernempfang läßt sich (empfangsseitig) Übermodulation praktisch nicht vermeiden, da infolge von **selektivem Fading** der Träger zeitweise mehr oder weniger geschwächt bis gelöscht werden kann.

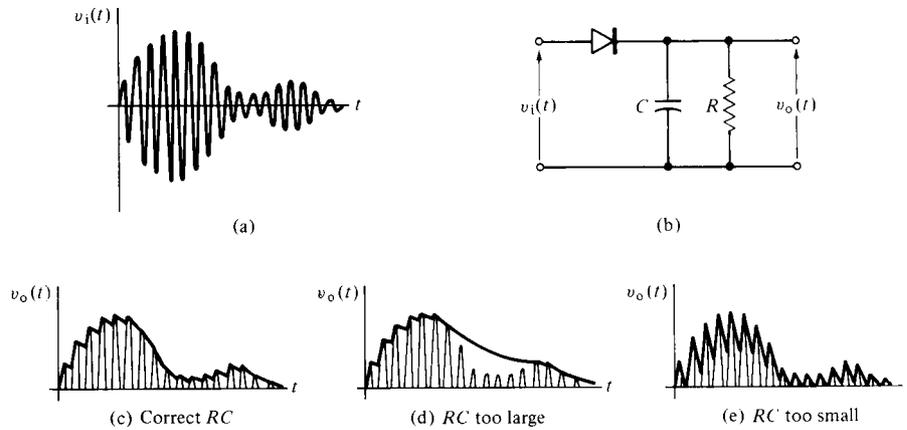


Bild 8.3: Der Einfluß der Entlade-Zeitkonstante auf das demodulierte Signal

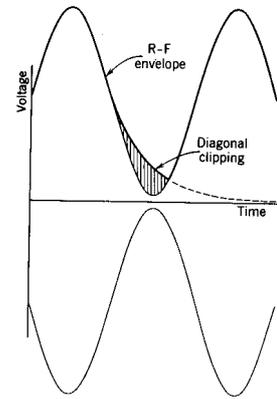


Bild 8.4: Diagonales Clipping bei zu großer Zeitkonstante

Die Zeitkonstante des RC-Gliedes läßt sich (vereinfacht) wie folgt dimensionieren. Die NF-Spannung entspricht der Hüllkurve der AM und ist (ohne den Gleichanteil):

$$u_N(t) = m \cdot \hat{U}_C \cos(\omega_N t) \tag{8.1}$$

An der Stelle ihrer größten negativen Steigung hat die Hüllkurve den Wert  $\hat{U}_C$ . Das RC-Glied wird bei jeder Halbwelle wieder aufgeladen und entlädt sich dann exponentiell bis zur nächsten. Die exponentielle Entladekurve des RC-Gliedes kann dabei durch eine Tangente ersetzt werden, weil die Krümmung der e-Funktion noch vernachlässigbar ist. Damit ergibt sich als Bedingung:

$$\left. \frac{du_{RC}(t)}{dt} \right|_{\max} = \frac{\hat{U}_C}{T} > \hat{U}_C \cdot m\omega_N \tag{8.2}$$

Damit die Entladung der NF-Spannung folgen kann, muß also die Entladung schneller erfolgen, als es der maximalen Steilheit der Hüllkurve und damit von  $u_N(t)$  entspricht. Daraus folgt für die Größe der Zeitkonstanten  $T$  bzw. für den zulässigen Modulationsgrad  $m$ :

$$T = RC < \frac{1}{m\omega_N} \rightsquigarrow m < \frac{1}{\omega_N T} \tag{8.3}$$

Eine genauere Betrachtungsweise, Bild 8.4, liefert das gegenüber Gleichung (8.3) leicht modifizierte Ergebnis.

$$m < \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_N T)^2}} \tag{8.4}$$

- Da diese Art der Demodulation **ohne empfangsseitigen Hilfs-Träger** auskommt, wird sie **asynchrone Demodulation** genannt.

## 8.2 Synchrone Demodulation von AM

Die synchrone Demodulation benötigt einen **Frequenz- und Phasen-richtigen Hilfsträger**. Dieser muß aus dem empfangenen Signal gewonnen werden.

Ist der Modulationsgrad der AM  $m < 1$  (wie es ordnungsgemäß sein soll), so erkennt man aus dem Zeitverlauf der AM, siehe Bild 7.5 (Seite 22), daß man den **Träger** ganz einfach dadurch **zurückgewinnen** kann, daß man die AM-Schwingung durch einen Begrenzer-Verstärker (*limiter*) schickt, Bild 8.5. Da bei AM die Nulldurchgänge der Zeitfunktion äquidistant sind, hat man anschließend den wiedergewonnenen Träger in Rechteckform vorliegen, womit er sich direkt zur Steuerung eines Multiplizierers eignet, der in diesem Fall eine mäanderförmige Trägerschwingung erhält.

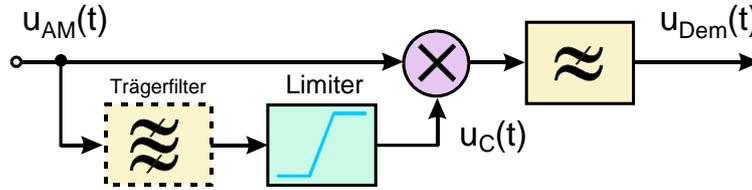


Bild 8.5: Synchron-Demodulator von AM; Das Trägerfilter ist optional.

Diese Schaltung (Begrenzer & Multiplizierer) eignet sich zur Realisierung in einem IC.<sup>8.2</sup> Bei der Realisierung als IC wird — allerdings ohne das (optionale) Trägerfilter — nur ein Begrenzer-Verstärker eingesetzt. Die Träger-Rückgewinnung arbeitet somit breitbandig. Geht nun infolge (ausbreitungsbedingter) **Übermodulation** die Hüllkurve der modulierten Schwingung durch 0, so hat die ausfüllende HF-Schwingung einen **Phasensprung**. Dieser Phasensprung tritt dann auch im amplituden-begrenzten Signal auf. Dies hat zur Folge, daß der Synchron-Demodulator bei dieser Art der Träger-Rückgewinnung genau wie ein Hüllkurven-Demodulator arbeitet. Das demodulierte Signal hat damit die (prinzipielle) Form der detektierten Hüllkurve links in Bild 7.6 (Seite 22). Also ist bei den IC-Demodulatoren (ohne Träger-Filter) auch keine Übermodulation zulässig, weil dies auf nichtlineare Verzerrungen des demodulierten Signals führt.

Eine wesentliche Verbesserung in Bezug auf Übermodulation bringt das in Bild 8.5 vorgesehene (optionale) schmale **Bandpaß-Filter für den Träger**. Wird tatsächlich nur der Träger (und praktisch nichts von den Seitenbändern) durchgelassen, so erhält man immer einen phasenrichtigen Hilfsträger, also auch bei einem „Träger-Rest“ in Folge von Fading. Ausnahme davon ist nur ein Totalschwund des Trägers bei Fading. Mit dem schmalbandigen Trägerfilter arbeitet der Synchron-Demodulator auch bei Übermodulation  $m > 1$  richtig<sup>8.3</sup>.

Statt eines schmalen Filters für den Träger wird in moderner Technik ein **Phasen-Regelkreis** (PLL, *phase locked loop*) verwendet, Bild 8.6 [11].

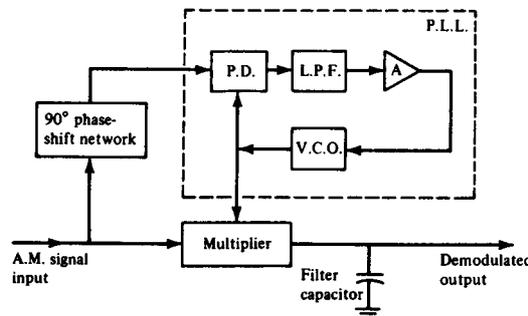


Bild 8.6: PLL Demodulator für AM (PD: *phase detector*, LPF: *low pass filter*, A: *amplifier*, VCO: *voltage controlled oscillator*, PLL: *phase locked loop*)

### 8.2.1 Zeitsignale bei Synchroner Demodulation von AM

In Bild 8.7 sind die zeitlichen Verläufe der Signale dargestellt, die sich bei synchroner Demodulation („lineare“ Demodulation, ideale Demodulation) eines AM Signals ergeben.

In Bild 8.7 ist die AM-Schwingung mit Modulationsgrad  $m = 0,7$  in der Farbe magenta gezeichnet. Das Produkt der AM-Schwingung mit der (empfangsseitigen) Hilfsträger-Schwingung ist grün gezeichnet. Dies ist das Ausgangssignal des Multiplizierers und hat nur positive Werte. Es enthält daher einen Gleichanteil (blau, gestrichelt), der proportional zur Amplitude des Trägers ist. Diese Spannung  $u_{AGC}$  wird zur Verstärkungs-Regelung (automatischer Schwundausgleich, AGC: *automatic gain control*) des Empfängers verwendet. Dieser überlagert ist die demodulierte Nachrichtenspannung  $u_N(t)$  (NF-Spannung), hier blau gezeichnet.

<sup>8.2</sup>Die AM-IC's enthalten diese Funktionsblöcke, zusammen mit HF-Vorstufe, Transistor-Ring-Mischer, ZF-Verstärker, Regelspannungs-Erzeugung, NF-Vorverstärker: also ein komplettes Empfangs-IC. Als äußere Beschaltung verbleiben i.w. noch: HF-Spulen, Kapazitäts-Dioden & (Keramik-) ZF-Filter. IC's für Rundfunkempfänger enthalten zusätzlich die für UKW FM notwendigen Stufen.

<sup>8.3</sup>Nicht jedoch bei DSB (DSB-SC), weil hier der Träger identisch Null ist:  $m \rightarrow \infty$ . Für DSB (digital: PSK, *phase shift keying*) kann der „Costas“ PLL-Demodulator verwendet werden.

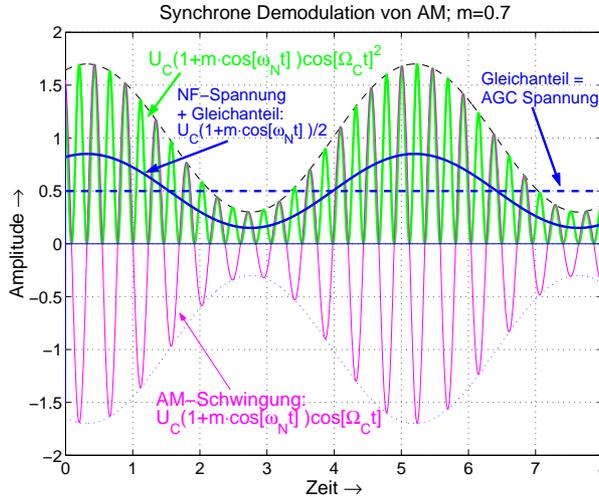


Bild 8.7: Die zeitlichen Verläufe der Signale bei Synchron-Demodulation von AM („lineare“ Demodulation)

Die Spannungen  $u_{AGC}$  und  $u_N(t)$  stehen hinter dem Tiefpaß (LPF: *low pass filter*), der auf den Multiplizierer folgt, als  $u_{Dem}(t)$  zur Verfügung, Bild 8.5.

- Wie aus Bild 8.7 erkennbar ist, gewinnt man die NF-Spannung hier nicht durch Spitzengleichrichtung, sondern durch **zeitliche Mittelwertbildung**. Ein „Diagonal Clipping“ kann daher hier nicht auftreten.

### 8.2.2 Spektren bei Synchroner AM-Demodulation

Zur Multiplikation im Zeitbereich gehört im Spektrum die Faltung. Diese ist in dem Falle, daß eine dieser Funktionen aus  $\delta$ -Linien (Dirac-Impulse) besteht, sehr einfach durchzuführen: Die zu faltende Funktion, hier das AM-Spektrum, wird an die Position von jedem der beiden  $\delta$ -Linien geschoben und addiert.<sup>8,4</sup> Man erhält damit die Darstellung in Bild 8.8. Die Faltungsoperation wird hier durch  $\left\{ \frac{1}{2\pi} \right\} *$  dargestellt.

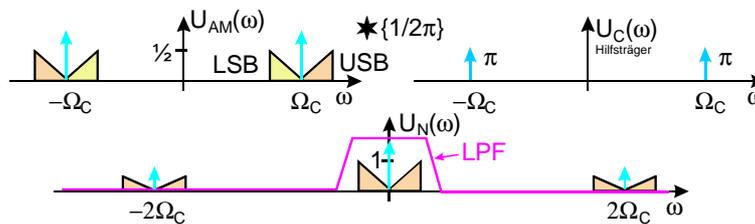


Bild 8.8: Die Spektren der Signale bei Synchron-Demodulation von AM; LPF: *low pass filter*

Das Tiefpaß-Filter (LPF: *low pass filter*) nach dem Multiplizierer läßt nur den Gleichanteil (AGC Spannung) und das Spektrum des demodulierten Signals passieren. Höherfrequente Anteile (auf der zweifachen Trägerfrequenz  $2\Omega_C$ ) werden unterdrückt.

## 9 Lineare Amplituden-Modulation DSB

Bei der linearen Amplituden-Modulation oder Doppel-Seitenband-Modulation (DSB) ist der Hochfrequenz-Träger (*carrier*)  $u_C(t)$  (ebenfalls) eine Cos-förmige Schwingung.

$$u_C(t) = \hat{U}_C \cos(\Omega_C t) \tag{9.1}$$

<sup>8,4</sup>Zur Faltung und zu deren Vereinfachung „vereinfachte Faltung“ siehe das Vorlesungsskript „Die Fourier-Transformation und ihre Anwendungen“, Teil 4. [5]

Die Amplitude  $\hat{U}_C$  der Trägerschwingung wird proportional (und damit linear) zum Nachrichten-Signal  $u_N(t)$  beeinflusst. Das Nachrichten-Signal kann dabei (je nach Anwendung) analog oder digital sein.

$$\hat{U}_C \rightarrow \hat{U}_C(t) = k_{DSB} \cdot u_N(t) = u_N(t); \quad k_{DSB} = 1 \quad \text{Amplitude bei DSB, linearer AM} \quad (9.2)$$

Der Zeitverlauf der linearen Amplituden-Modulation (DSB) wird damit:

$$u_{DSB}(t) = k_{DSB} u_N(t) \cdot \cos(\Omega_C t) = u_N(t) \cdot \downarrow \cos(\Omega_C t); \quad k_{DSB} = 1 \quad \text{Zeitverlauf DSB} \quad (9.3)$$

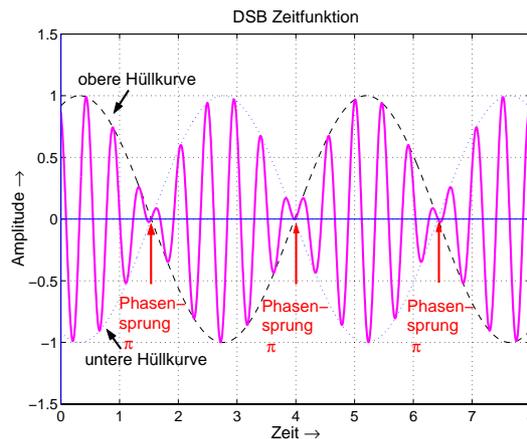


Bild 9.1: Typische Zeitverläufe einer DSB (normierte Darstellung mit Träger  $\hat{U}_C = 1$ )

Bild 9.1 zeigt den typischen Zeitverlauf einer DSB. Bei der DSB überschneiden sich untere und obere Hüllkurve. Bei diesen Überschneidungspunkten tritt jeweils ein **Phasensprung** von  $\pi$  in der **Trägerschwingung** auf.

Kennzeichnend für die „multiplikativen“ Modulationen sind die **absolut äquidistanten Nulldurchgänge der modulierten Hochfrequenz-Schwingung**. Zusätzliche Nulldurchgänge entstehen bei der DSB bei den Nulldurchgängen der Hüllkurve, die in diesen Fällen mit einem **Phasensprung** von  $\pm\pi$  für die Trägerschwingung einhergehen.

## 9.1 Blockschaltbild und Spektrum der DSB

Da bei der DSB eine Nachrichten-Spannung  $u_N(t)$  mit dem (cos-förmigen) HF-Träger  $u_C(t)$  multipliziert wird, siehe Gleichung (9.3), erhält man das zugehörige Spektrum mit Hilfe des **Modulationssatzes** oder des **Faltungssatzes** der Fourier-Transformation, Gleichung (9.4).

$$U_{DSB}(\omega) = U_N(\omega) \overset{\{\frac{1}{2\pi}\}}{*} U_C(\omega) = \frac{1}{2} \{U_N(\omega - \Omega_C) + U_N(\omega + \Omega_C)\} \quad (9.4)$$

Hierbei interessiert, wie die NF-Spektren in den HF-Bereich verschoben werden (Frequenz- & Phasen-Lage, Grenzfrequenzen), weniger jedoch die genaue Form der tatsächlich auftretenden Spektren.

Daher wählt man zur zeichnerischen Darstellung *symbolische Formen für die Spektren*, wie z.B. die „Schmetterlings-Form“ in Bild 4.1. Dieses Bild zeigt auch das Blockschaltbild eines DSB Modulators.

Wie aus Bild 9.2 zu erkennen ist, hat die DSB ein oberes und ein unteres Seitenband (*upper side band*: USB, *lower side band*: LSB). Daher der Name „Doppel-Seitenband-Modulation“ (DSB).

Beide Seitenbänder enthalten die gleiche Information. Im **USB** ist die Information in **Regellage**, d.h. in der gleichen relativen Frequenzlage wie im NF-Bereich. Im **LSB** ist die Information in **Kehrlage**, d.h. die relative Frequenzlage ist gegenüber dem NF-Bereich vertauscht.<sup>9.1</sup> Die HF-Bandbreite  $B_{HF}$  ist doppelt so groß wie die obere Grenzfrequenz  $f_{gr_o}$  der NF. Bezüglich der beiden Seitenbänder besteht somit kein Unterschied zur gewöhnlichen AM.

<sup>9.1</sup>Durch einen weiteren Modulationsvorgang, in Verbindung mit einer Filterung, kann man auch die NF in Kehrlage erzeugen. Dies ist eine primitive Form der Sprachverschleierung.

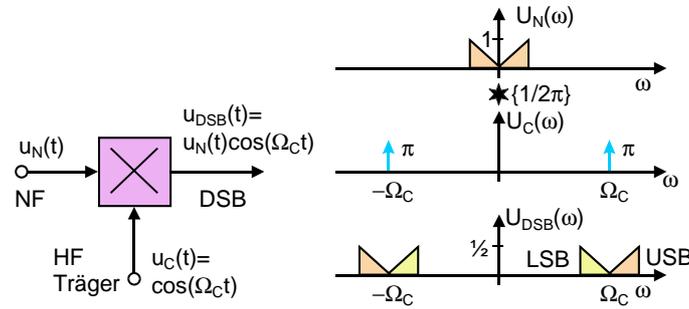


Bild 9.2: DSB-Modulator Blockschaltbild und Spektren der DSB

### 9.2 Demodulation der DSB

Da bei DSB das Nachrichtensignal nicht durch eine Hüllkurven-Gleichrichtung wieder gewonnen werden kann, ist nur eine **synchrone Demodulation** mit einem **Frequenz- und Phasen-richtigen Hilfsträger** möglich, wobei Frequenz und Phase mit den Werten im Sender (Modulator) übereinstimmen müssen.<sup>9.2</sup> Zunächst wird vorausgesetzt, daß dieser Hilfsträger vorhanden sein soll.

Wird eine AM oder eine DSB mit einem *in der Frequenz & Phase richtigen* (empfangsseitigen) Hilfsträger  $u_h(t) = \hat{U}_h \cos(\Omega_C + \varphi)$  multipliziert, so läßt sich aus dem Produkt mittels eines Tiefpaß-Filters (LPF *low pass filter*) wieder die NF herausfiltern, Bild 9.3. Diese Art der Demodulation heißt **Synchrone Demodulation**. Für DSB ist dies die einzig mögliche Demodulationsart.

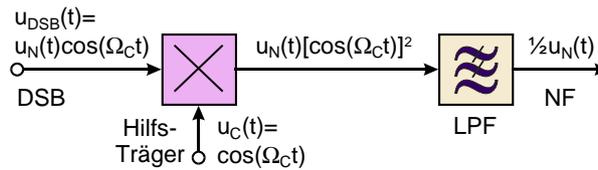


Bild 9.3: Blockschaltbild des multiplikativen Demodulators

Die Darstellung in Bild 9.3 entspricht einer direkten Demodulation der Hochfrequenz-Schwingung (Synchro-dyn-Empfänger).<sup>9.3</sup> Bei traditionellen Empfängern ist dieser Multiplizierer hinter der letzten ZF-Stufe. Die Bedingungen für den Hilfsträger beziehen sich dann auf die Verhältnisse in der ZF.

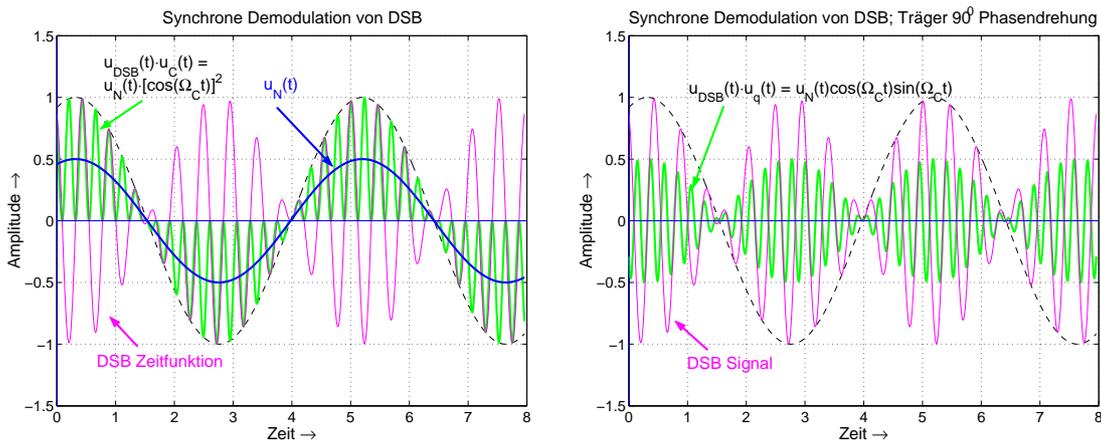


Bild 9.4: Zeitverläufe bei der multiplikativen Demodulation von DSB: (links) Hilfsträger ist phasenrichtig; (rechts) Hilfsträger ist 90° phasenverschoben: es gibt kein demoduliertes Nachrichtensignal  $u_N(t)$

<sup>9.2</sup>In der Praxis wird dies mit Hilfe eines Phasen-Regelkreises (*phase locked loop*, PLL) erreicht.

<sup>9.3</sup>Diese Art wird heute zunehmend bei Mobilfunk-Empfängern angewendet, wobei dann allerdings eine Quadratur-Demodulation erfolgt.

Hier sind die Zeitfunktionen dargestellt, die bei der synchronen Demodulation einer DSB entstehen, Bild 9.4. Man erkennt die Auswirkung des Phasenwinkels des Hilfsträgers.

Die Wichtigkeit der Bedingungen für den Hilfsträger  $u_h(t)$ , nämlich **frequenz- und phasenrichtig** zu sein, sieht man auch, wenn man den Demodulations-Vorgang im Frequenzbereich betrachtet. Aus der Multiplikation des Zeitbereichs wird dann eine Faltung, Bild 9.5. Wie man erkennt, setzt sich die demodulierte Nachricht aus 2 spektralen Anteilen zusammen, welche sich addieren. Durch eine Tiefpaß-Filterung (LPF *low pass filter*) erhält man dann die Nachricht zurück.

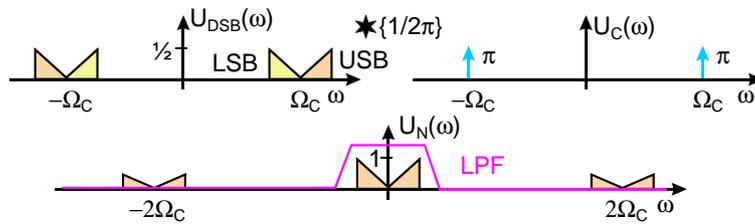


Bild 9.5: Der multiplikative Demodulator im Frequenzbereich: Der Hilfsträger ist in der Frequenz und Phase richtig.

Als Gegenbeispiel soll der Fall betrachtet werden, bei dem der empfangsseitige Hilfsträger zwar Frequenz-richtig ist, aber um  $90^\circ$  in der Phase gedreht ist, Bild 9.6. Es entsteht kein demoduliertes Signal.

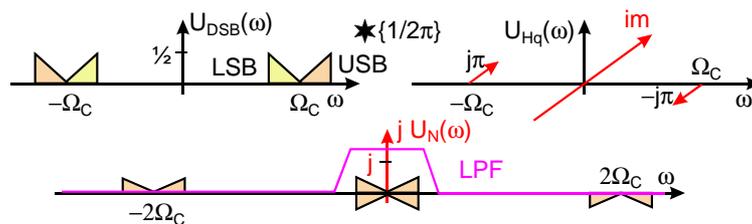


Bild 9.6: Der multiplikative Demodulator im Frequenzbereich; Der Hilfsträger ist Frequenz-richtig, aber um  $90^\circ$  in der Phase gedreht. Dadurch wird das Ausgangssignal zu Null.

Die beiden Anteile der demodulierten Nachricht ergeben sich hier mit gegensätzlichem Vorzeichen, wodurch es zu einer Löschung kommt. Damit erhält man kein demoduliertes Signal  $u_N(t)$ . Diese **Orthogonalität ist der Schlüssel zur Quadratur-DSB (QDSB)**, bei welcher sowohl ein Cosinus- als auch ein Sinus-Träger zum Einsatz kommt. Die Orthogonalität gestattet die empfangsseitige Trennung der Modulationsanteile. Hiervon machen insbesondere die digitalen Modulationen Gebrauch.

### 9.3 Träger-Rückgewinnung für DSB

#### 9.3.1 Frequenz-Verdopplung

Im DSB-Signal ist kein Träger vorhanden, der ausgefiltert werden könnte. Abhilfe schafft hier, das DSB-Signal auf einen Quadrierer zu geben. Ein Quadrierer ist technisch ein Multiplizierer, der an beiden Eingängen das gleiche Signal erhält. Am Ausgang des Quadrierers erhält man:

$$[u_N(t) \cos(\Omega_C t)]^2 = \frac{u_N^2(t)}{2} \{1 + \cos(2\Omega_C t)\} \tag{9.5}$$

Mit Hilfe eines schmalen Filters auf  $2\Omega_C$  läßt sich nun eine Cos-Schwingung auf der **doppelten Trägerfrequenz** ausfiltern, z.B. mit einem Bandpaß-Filter oder einer PLL (*phase locked loop*, Phasen-Regelschleife).

Die Frequenz  $2\Omega_C$  dieser Schwingung muß halbiert werden (z.B. binärer Teiler 2:1), wodurch sich eine mäanderförmige Trägerschwingung ergibt, Bild 9.7. [12] Wird diese Kurvenform durch ein Filter verrundet, muß die dadurch entstehende Phasendrehung wieder ausgeglichen werden.

Aufgrund des Binär-Teilers besteht für den rückgewonnenen Hilfsträger eine **Phasen-Unsicherheit** von  $180^\circ \doteq \pi$ . Bei einer NF als Nachrichtensignal ist dies unerheblich, da man dies nicht hört. Ist das Nachrich-

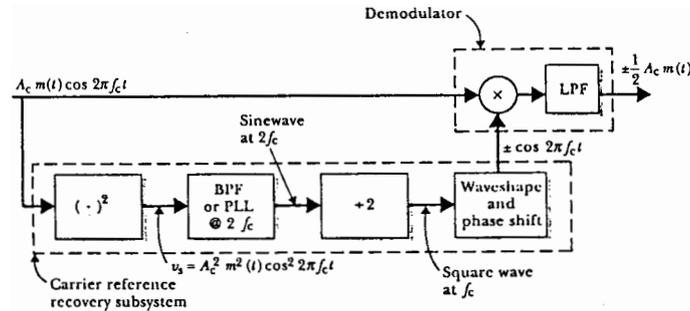


Bild 9.7: Träger-Rückgewinnung durch Frequenz-Verdopplung und synchrone Demodulation von DSB

tensignal ein Datensignal, ergäbe sich dann 100% Fehler. Das ist jedoch kein Problem, weil mit Hilfe eines Synchronwortes auf die richtige Phasenlage umgeschaltet werden kann.

### 9.3.2 Costas-Loop

Sind die beiden Seitenbänder der DSB identisch, kann der Träger mittels einer Phasen-Regelschleife zurückgewonnen werden, Bild 9.8.

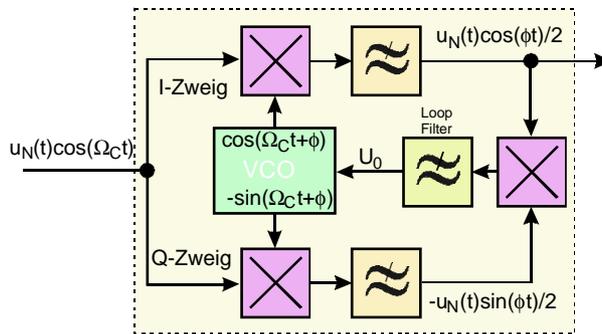


Bild 9.8: Costas Loop zur Träger-Rückgewinnung und synchroner Demodulation von DSB

Die Costas-Loop (Regelschleife) enthält einen „In-Phasen Demodulator“ und einen „Quadratur Demodulator“. Der I-Demodulator liefert das demodulierte Signal. Der Q-Demodulator bildet zusammen mit dem Spannungs-gesteuerten Oszillator (VCO *voltage controlled oscillator*) eine Phasen-Regelschleife (PLL *phase locked loop*).

Stimmen Frequenz und Phasenwinkel überein, d.h.  $\phi = 0$ , so wird im Q-Demodulator eine Cos-Schwingung mit einer Sin-Schwingung multipliziert. Dabei entsteht kein Gleichanteil, weil der  $\sin(0) = 0$  ist, vergl. Bild 9.4 (rechts). Daher entsteht auch keine Nachstimmspannung ( $U_0 = 0$ ). Diese entsteht, im Vorzeichen abhängig vom Vorzeichen von  $\phi$ , wenn sich der Phasenwinkel  $\phi$  ändert. Nun ist aber die Ausgangsspannung des Q-Demodulators auch noch durch das Nachrichtensignal  $u_N(t)$  beeinflusst und damit eine Wechselgröße, die nicht unmittelbar als Nachstimmspannung geeignet ist. Abhilfe schafft hier, diese Ausgangsspannung mit der Ausgangsspannung des I-Demodulators zu multiplizieren. Damit erhält man die quadrierte Spannung,  $u_N(t)^2$ , die einen Gleichanteil  $U_0$  enthält, der durch das Loop-Filter (Regler) noch von dem verbleibenden Wechselanteil befreit wird. Damit steht eine vorzeichenrichtige Nachstimmspannung zur Verfügung.

Die Costas-Loop hat ebenfalls eine Phasenunsicherheit von  $\pi$ . Ist die Phase um  $\pi$  falsch, wechseln die Spannungen in beiden Zweigen das Vorzeichen. Das Vorzeichen von  $U_0$  ändert sich dadurch nicht, weshalb die Costas-Loop auch dann einrasten kann.

## 10 Quadratur-Doppel-Seitenband-Modulation QDSB

Bei QDSB werden 2 zu einander **orthogonale** Trägerschwingungen ( $\cos(\Omega_C t); \sin(\Omega_C t)$ ) verwendet und jede dieser Trägerschwingung DSB moduliert. Die Nachricht  $u_{N_i}(t)$  im **I-Zweig** (I: in Phase) wird auf den Cosinus-

Träger  $\cos(\Omega_C t)$  und die Nachricht  $u_{N_q}(t)$  im **Q-Zweig** (Q: Quadratur-Phase  $90^\circ$ ) auf den Sinus-Träger  $\sin(\Omega_C t)$  moduliert. I&Q beziehen sich somit auf die Phasen der jeweiligen Träger.

### 10.1 QDSB Blockschaltung

Bild 10.1 ist das Blockschaltbild für eine QDSB Modulation und Demodulation sowie das Prinzipschaltbild sehr vieler Digitalen Übertragungen.<sup>10.1</sup>

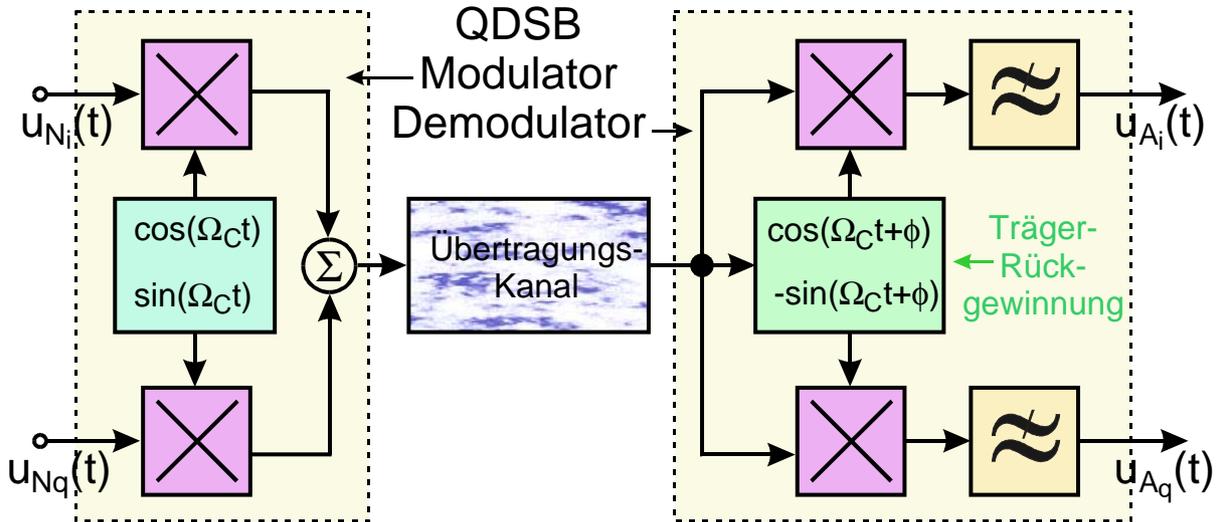


Bild 10.1: Blockschaltbild für eine QDSB-Übertragung. I/Q Modulator (links) & Demodulator (rechts).  $\Phi$  ist der Fehlerwinkel bei der Träger-Rückgewinnung. Ideal ist  $\Phi = 0$ .

Das Signal am Ausgang des **QDSB-Modulators** ist:

$$u_{QDSB}(t) = u_{N_i}(t) \cdot \cos(\Omega_C t) + u_{N_q}(t) \cdot \sin(\Omega_C t) = A(t) \cos[\Omega_C t + \varphi(t)] \quad \text{QDSB Modulation} \quad (10.1)$$

Hierbei sind:

$$A(t) = \sqrt{[u_{N_i}(t)]^2 + [u_{N_q}(t)]^2} \quad \text{Amplitude}; \quad \varphi(t) = - \arctan \left\{ \frac{u_{N_q}(t)}{u_{N_i}(t)} \right\} \quad \text{Phase} \quad (10.2)$$

Das QDSB-Signal  $u_{QDSB}(t)$  ist also sowohl in seiner **Amplitude**  $A(t)$ , als auch in seiner **Phase**  $\varphi(t)$  **moduliert**. Der Zeitverlauf der Phase  $\varphi(t)$  ist jedoch **nicht proportional** zu  $u_{N_i}(t)$  noch zu  $u_{N_q}(t)$ . Schließlich wurde bei der Modulation nicht in die Winkel, sondern in die Amplituden von Cosinus- und Sinus-Träger eingegriffen. QDSB und die daraus abgeleiteten Digitalen Modulationen sind deswegen **keine Phasen-Modulationen** (im übertragungstechnischen Sinn)<sup>10.2</sup> und werden deshalb auch nicht mit Hilfe von Phasen-Modulatoren erzeugt.

Auf der **Empfänger-Seite** müssen die beiden Hilfsträger Frequenz- und Phasen-richtig aus dem empfangenen QDSB-Signal zurückgewonnen werden: **Träger-Rückgewinnung** (*carrier recovery*).<sup>10.3</sup> Bei einer praktischen Realisierung ist das ein erheblicher Aufwand. Hier soll zunächst wieder angenommen werden, daß die Rückgewinnung erfolgt sei.

Es wird angenommen, daß die Frequenz  $\Omega_C$  exakt zurückgewonnen wird, jedoch beim Phasenwinkel ein (kleiner) Fehler  $\Phi$  besteht.<sup>10.4</sup>

<sup>10.1</sup>Der QDSB-Modulator ist die universellste Form eines Modulators. In Abhängigkeit von der Vor-Verarbeitung der Eingangs-Signale  $u_{N_i}(t)$  und  $u_{N_q}(t)$  kann mit ihm **jede Art von Modulation** erzeugt werden.

<sup>10.2</sup>In der Literatur wird oftmals von „*phase modulation*“ gesprochen, was zu Mißverständnissen führen kann.

<sup>10.3</sup>**Achtung:** Auf der Modulator-Seite wird bei manchen Anwendungen statt  $\sin(\Omega_C t)$  auch  $-\sin(\Omega_C t)$  verwendet. Auf der Demodulator-Seite ist dann dieses Vorzeichen zu beachten! Manche Autoren verwenden sogar (im Sender) den Sinus-Träger im I-Zweig und den Cosinus-Träger im Q-Zweig. Auch das ist dann für den Demodulator zu berücksichtigen! Insbesondere bei der Einführung neuer Systeme (z.B. DAB, DVB-T, DRM) können sonst entsprechende Probleme entstehen: Empfänger der Firma F funktioniert nur mit Sender der Firma F, nicht jedoch mit Sendern der Firmen D oder G. Und jeder glaubt, sich genau an die Vorgaben von ITU bzw. ETSI gehalten zu haben, aber die Anderen hätten ja wohl einen Fehler gemacht...

<sup>10.4</sup>Dies entspricht den praktischen Verhältnissen unter Verwendung einer PLL.

Nach dem Multiplizierer im I-Zweig des Empfängers entsteht das Signal:

$$\begin{aligned}
 u_{\text{QDSB}}(t) \cdot \cos(\Omega_C t + \Phi) &= [u_{N_i}(t) \cdot \cos(\Omega_C t) + u_{N_q}(t) \cdot \sin(\Omega_C t)] \cdot \cos(\Omega_C t + \Phi) \\
 &= u_{N_i}(t) \cdot \cos(\Omega_C t) \cdot \cos(\Omega_C t + \Phi) + u_{N_q}(t) \cdot \sin(\Omega_C t) \cdot \cos(\Omega_C t + \Phi) \\
 &= \frac{1}{2}u_{N_i}(t)[\underbrace{\cos(\Phi)} + \underbrace{\cos(2\Omega_C t + \Phi)}_{\text{hochfrequent}}] + \frac{1}{2}u_{N_q}(t)[\underbrace{\sin(\Phi)} + \underbrace{\sin(2\Omega_C t + \Phi)}_{\text{hochfrequent}}]
 \end{aligned} \tag{10.3}$$

Die beiden hochfrequenten Anteile werden durch das Tiefpaß-Filter unterdrückt und erscheinen nicht im Ausgangs-Signal  $u_{A_i}(t)$  des I-Zweiges.

$$u_{A_i}(t) = \frac{1}{2}u_{N_i}(t) \cos(\Phi) + \frac{1}{2}u_{N_q}(t) \sin(\Phi) \approx \frac{1}{2}u_{N_i}(t) + \underbrace{0.5u_{N_q}(t)\Phi}_{\text{Fehlersignal}} \quad \text{für } \Phi \ll 1 \tag{10.4}$$

Im Q-Zweig ergeben sich gleichartige Verhältnisse.

$$u_{A_q}(t) = \frac{1}{2}u_{N_i}(t) \sin(\Phi) + \frac{1}{2}u_{N_q}(t) \cos(\Phi) \approx \underbrace{0.5u_{N_i}(t)\Phi}_{\text{Fehlersignal}} + \frac{1}{2}u_{N_q}(t) \quad \text{für } \Phi \ll 1 \tag{10.5}$$

Haben die empfangsseitigen Hilfsträger einen Phasenfehler  $\Phi \neq 0$ , ergeben sich dadurch Übersprechen zwischen dem I- und dem Q-Zweig. Für  $\Phi = 0$  erhält man:

$$u_{A_i}(t) = \frac{1}{2}u_{N_i}(t); \quad u_{A_q}(t) = \frac{1}{2}u_{N_q}(t) \quad \text{ideale QDSB-Demodulation} \tag{10.6}$$

### 10.2 Ortskurve der QDSB

Die beiden Nachrichtensignale  $u_{N_i}(t)$  und  $u_{N_q}(t)$  können (innerhalb eines Aussteuerbereichs) beliebige Werte annehmen. Als Zeiger-Darstellung, wobei  $u_{N_i}(t)$  in reeller Richtung und  $u_{N_q}(t)$  in imaginärer Richtung aufgetragen wird, erhält man die Ortskurve, wenn der Ort der Spitze des Betrags-Zeigers aufgetragen wird, Abb. 10.2. Der Zusammenhang zwischen Amplitude  $A(t)$  / Phase  $\varphi(t)$  und In-Phasen-Komponente  $I(t) = u_{N_i}(t)$  / Quadratur-Phasen-Komponente  $Q(t) = u_{N_q}(t)$  ist durch Gl. (10.2) gegeben.

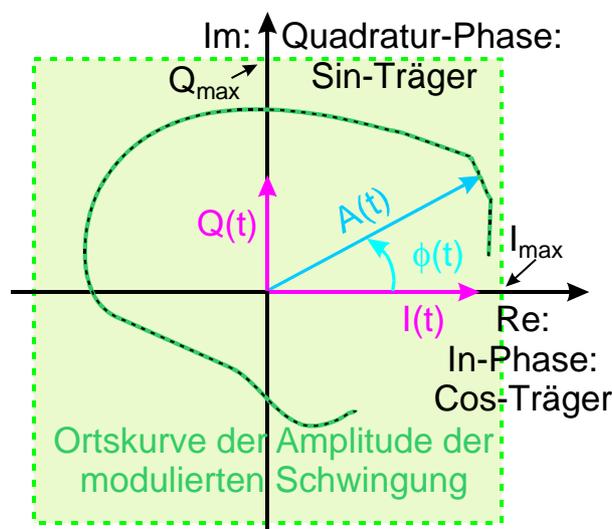


Bild 10.2: Ortskurve (Ausschnitt) der I/Q-Modulation; komplexe Einhüllende der Modulation  $\Rightarrow$  Vektor-Diagramm

Diese Ortskurve wird auch als „komplexe Einhüllende“ der QDSB-Modulation bezeichnet.<sup>10.5</sup>

<sup>10.5</sup>Bei einer Digitalen Modulation ergibt sich aus dieser Ortskurve das „Vektor-Diagramm“.

## Winkelmodulationen

Bei dieser Modulationsart beeinflusst das Nachrichtensignal den Phasen-Winkel des hochfrequenten Trägersignals. Je nachdem, ob dabei die Frequenz-Änderung oder die Phasen-Änderung proportional zur Nachricht ist, entsteht eine Frequenz- bzw. eine Phasen-Modulation. Beide Winkelmodulationen sind eng miteinander verwandt und treten daher stets gleichzeitig auf. Jedoch erfolgt die Namensgebung entsprechend zu der Größe (Frequenz bzw. Phase), die proportional zum Nachrichtensignal ist. Die Amplitude des Trägersignals bleibt bei der Winkelmodulation konstant.

### 11 Die Winkelmodulation im Zeitbereich

Der hochfrequente Träger (*carrier*) ist eine Cos-förmige Schwingung der Form

$$u(t) = \hat{U}_C \cos(\Omega_C t + \varphi(t)) = \hat{U}_C \cos[\psi(t)] = \Re\{\hat{U}_C e^{j(\Omega_C t + \varphi(t))}\} \quad (11.1)$$

Je nach der Art, wie das Nachrichtensignal  $u_N(t)$  in den Winkel  $\psi(t)$  eingreift, unterscheidet man zwischen Frequenzmodulation (FM) oder Phasenmodulation (PM).

**FM** : Die **Frequenz-Änderung** (der modulierten Schwingung) ist proportional zum Nachrichten-Signal  $u_N(t)$

**PM** : Die **Phasen-Änderung** (der modulierten Schwingung) ist proportional zum Nachrichten-Signal  $u_N(t)$

In komplexer Schreibweise wird der Cosinus durch  $e^{j(\Omega_C t + \varphi(t))}$  ersetzt, wodurch die (alternative) Bezeichnung **Exponentialmodulation** für die Winkelmodulation verständlich wird.

#### 11.1 Eingriff in den Winkel des Hochfrequenzträgers

Das Nachrichtensignal  $u_N(t)$  beeinflusst den Winkel  $\psi(t)$  des Trägers. Die **Amplitude** der Trägerschwingung bleibt dabei **unverändert**.

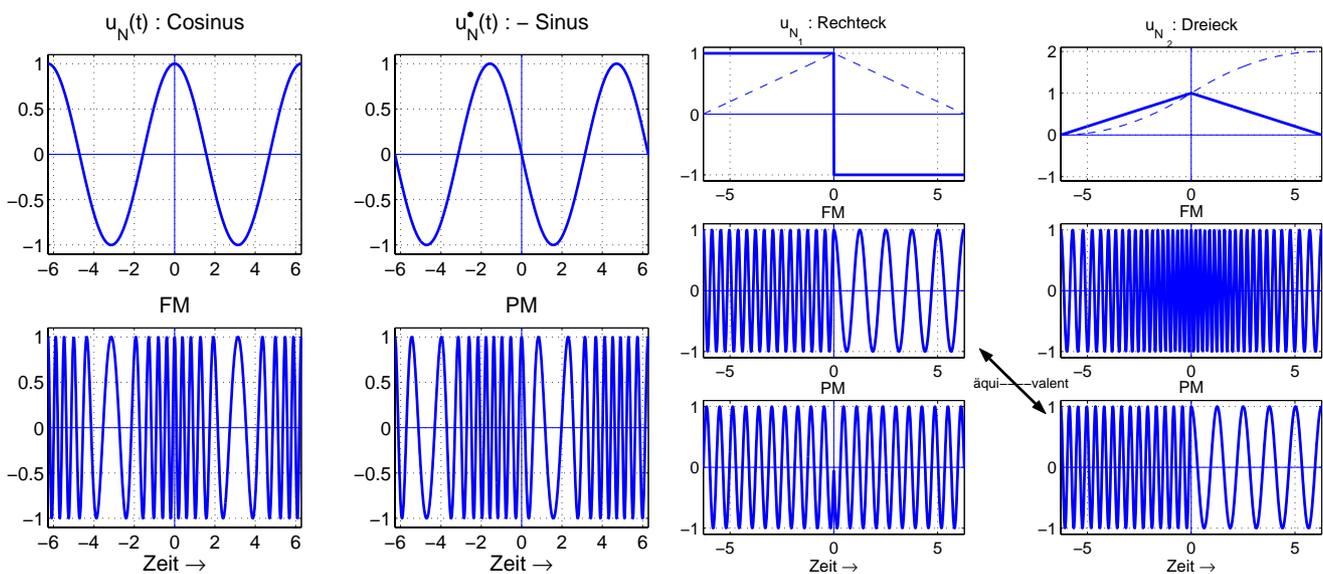


Bild 11.1: FM und PM für Cos-förmiges Nachrichtensignal; die Frequenz-Änderung der FM-Schwingung ist proportional zu  $u_N(t)$ , die Frequenz-Änderung der PM-Schwingung ist proportional zu  $u_N^*(t)$

Bild 11.2: FM und PM für rechteckförmiges und dreieckförmiges Nachrichtensignal, erzeugt mit einem Frequenz-Modulator. Integriertes Nachrichtensignal (gestrichelt) für eine Erzeugung mittels eines Phasen-Modulators.

Die zeitlichen Verläufe von Phasen- und Frequenzmodulation stellen sich damit wie in den Bildern 11.1 und 11.2 dar, wenn als Nachrichtensignal  $u_N(t)$  eine sinusförmige bzw. eine rechteckförmige und eine dreieckförmige

Spannung verwendet wird. Man beachte, daß die **Amplitude** der winkel-modulierten Schwingung **absolut konstant** ist.

Die Amplitude des Nachrichtensignals bestimmt die **Lage der Nulldurchgänge** der winkelmodulierten Schwingung — nicht jedoch in ihre Amplitude, wie Bild 11.3 [24] am Beispiel eines frequenzmodulierten Signals zeigt.

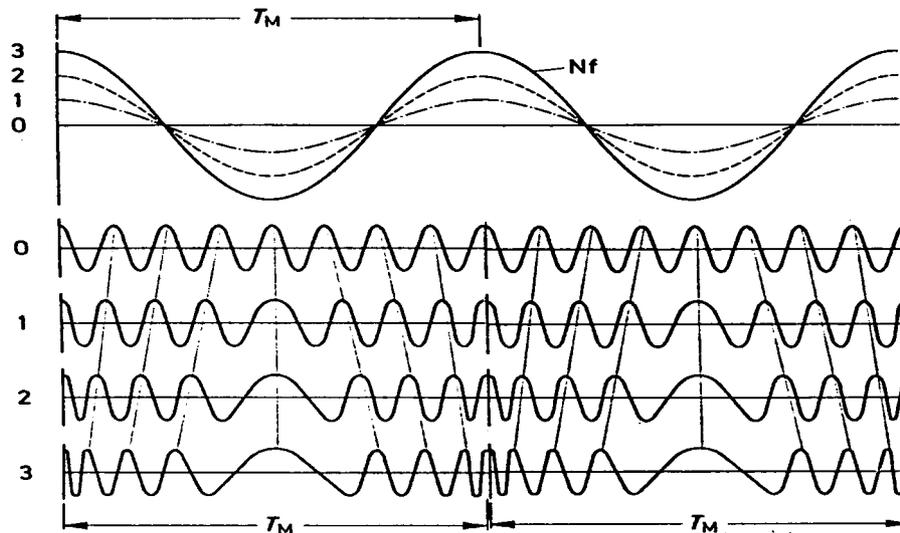


Bild 11.3: Die Auswirkung der Amplitude des Nachrichtensignals auf den Zeitverlauf eines frequenzmodulierten Signals: Die Nulldurchgänge der FM ändern sich, die Amplitude der FM bleibt konstant.

### 11.1.1 Beeinflussung des Winkels $\varphi(t)$

Zur Beeinflussung des Winkels  $\varphi(t)$  einer Trägerschwingung  $\hat{U}_C \cos(\Omega_C t + \varphi(t))$  gibt es folgende Möglichkeiten:

$\varphi(t) = k_{PM} \cdot u_N(t) \rightsquigarrow$	<b>Phasen-Modulation PM</b>	(11.2)
$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \Delta\omega(t) = k_{FM} \cdot u_N(t) \rightsquigarrow$	Frequenz-Modulation FM	
$\rightsquigarrow \varphi(t) = k_{FM} \cdot \int_0^t u_N(\tau) d\tau \rightsquigarrow$	<b>Frequenz-Modulation FM</b>	

$k_{PM}$  und  $k_{FM}$  sind die zugehörigen **Modulatorkonstanten**. Wie aus dieser Gleichung (11.2) hervorgeht, sind PM und FM eng miteinander verwandt, siehe auch Bilder 11.1 und 11.2.

- Ist die Phasen-Änderung proportional zum Nachrichten-Signal, so ist die **Frequenz**-Änderung proportional zum **integrierten** Nachrichtensignal.
- Ist die Frequenz-Änderung proportional zum Nachrichten-Signal, so ist die **Phasen**-Änderung proportional zum **differenzierten** Nachrichten-Signal.

## 11.2 Verwandtschaft von Phasen- und Frequenzmodulation

Die Analyse der Zeitverläufe in den Bildern 11.1 11.2 und 11.3 zeigt folgendes:

- Positives Nachrichten-Signal  $u_N(t)$  ergibt höhere „Frequenz“ bei der FM; negatives Nachrichten-Signal ergibt eine niedrigere „Frequenz“ bei der FM.  
„Frequenz“ soll hier als **Anzahl der Nulldurchgänge pro Zeiteinheit** verstanden werden. Da sich diese „Frequenz“ zeitlich ändert, wird sie als **„Momentan“-Frequenz  $\varpi(t)$**  bezeichnet,
- Bei der PM hat man ein gleichartiges Verhalten bezogen auf die **zeitliche Ableitung** des Nachrichten-Signals  $\frac{d}{dt} u_N(t)$ .

- Eine ein Nachrichten-Signal  $u_{N_1}(t)$  in Rechteck-Form ergibt eine FM, die genau so aussieht, wie eine PM mit einem dreieckförmigen Nachrichten-Signal  $u_{N_2}(t)$ .

Das Rechteck  $u_{N_1}(t)$  ergibt sich als Ableitung des Dreiecks  $u_{N_2}(t)$ . Also liegen die gleichen Verhältnisse vor wie im vorigen Fall.

### 11.2.1 Phasenmodulation

Mit den Definitionen, Gleichungen (11.1, 11.2), gilt für einen **phasenmodulierten Träger**  $u_{PM}(t)$ :

$$u_{PM}(t) = \hat{U}_C \cos[\Omega_C t + \varphi(t)] = \hat{U}_C \cos[\Omega_C t + k_{PM} \cdot u_{N_1}(t)] \quad \mathbf{PM} \quad (11.3)$$

Die **Modulorkonstante**  $k_{PM}$  hat die **Einheit** [Grad/Volt] oder [rad/Volt], bzw. [1/Volt], da Grad und Radian *Pseudoeinheiten* sind.

### 11.2.2 Frequenzmodulation

Für einen **frequenzmodulierten Träger**  $u_{FM}(t)$  gilt mit Gleichung (11.2):

$$u_{FM}(t) = \hat{U}_C \cos[\Omega_C t + \varphi(t)] = \hat{U}_C \cos \left\{ \Omega_C t + k_{FM} \int_0^t u_{N_1}(\tau) d\tau \right\} \quad \mathbf{FM} \quad (11.4)$$

Die **Modulorkonstante**  $k_{FM}$  hat die **Einheit** [1/(Volt Sekunde)] (bzw. [KHz/Volt] für natürliche Frequenz).

### 11.2.3 Phasenmodulation mit einem Frequenzmodulator

Da PM und FM eng miteinander verwandt sind, kann eine PM auch mit Hilfe eines FM Modulators erzeugt werden. Um mit Hilfe eines Frequenzmodulators eine Phasenmodulation zu erzeugen, muß das Nachrichtensignal  $u_N(t)$  **differenziert** werden. Die geschieht mittels eines Differenziergliedes (D-Glied). Für das Differenzierglied gilt<sup>11.1</sup>:

$$x_a(t) = T \cdot \frac{dx_e(t)}{dt} \quad \circ \bullet \quad X_a(\omega) = T \cdot j\omega X_e(\omega) \quad \rightsquigarrow \quad H_D(\omega) = j\omega T \quad (11.5)$$

Bild 11.4 zeigt das Bodediagramm eines Differenziergliedes. Wie man daraus erkennt, ist das Differenzieren der Nachrichtenspannung gleichbedeutend mit einer **Höhen-Anhebung** (und Tiefen-Absenkung).

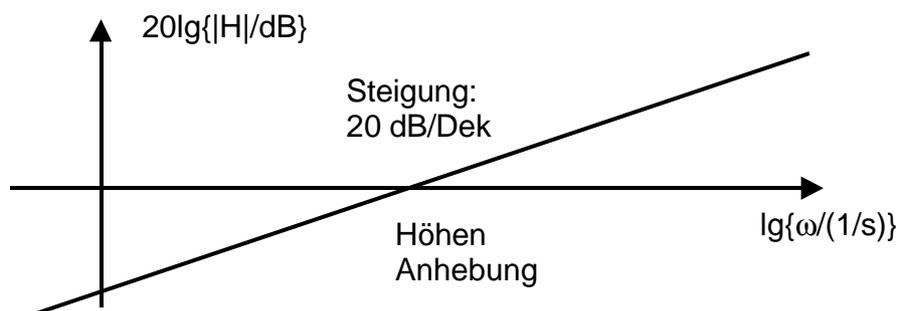


Bild 11.4: Bodediagramm des Differenziergliedes  $H_D(\omega)$

Differenziert man also das Nachrichtensignal  $u_N(t)$ , so erhält man  $T \cdot u_N(t)'$ . Mit Gleichung (11.2) wird dann bei Benutzung eines Frequenzmodulators:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = k_{FM} \cdot T \frac{du_N(t)}{dt} \quad (11.6)$$

<sup>11.1</sup>Vergleiche hierzu den Zeit-Differentiationssatz der Fourier-Transformation. Aus der Regelungstechnik ist die Schreibweise  $H_D(s) = sT$  für das D-Glied bekannt.

Bezogen auf das Nachrichtensignal  $u_N(t)$  muß Gleichung (11.6) integriert werden, wodurch man zu einer Phasenmodulation kommt:

$$\varphi(t) = k_{FM} \cdot T \cdot u_N(t) = k_{PM} \cdot u_N(t) \tag{11.7}$$

Die Modulatorkonstante dieses mit Hilfe eines Frequenzmodulators erzeugten Phasenmodulators ist somit:

$$k_{PM} = k_{FM} \cdot T \quad \text{Modulatorkonstante} \tag{11.8}$$

Bild 11.5 zeigt links die zugehörige Struktur für diesen Modulator und rechts den entsprechenden Demodulator.

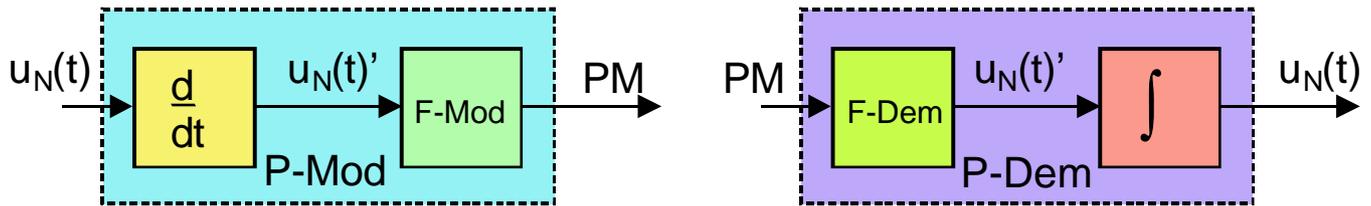


Bild 11.5: Erzeugung einer Phasenmodulation mit einem Frequenzmodulator (links) und Demodulation einer PM mit einem F-Demodulator (rechts)

### 11.2.4 Erzeugung von FM mit einem Phasenmodulator

Um eine Frequenzmodulation mit einem Phasenmodulator zu erzeugen, muß das Nachrichtensignal  $u_N(t)$  **integriert** werden. Dies geschieht mittels eines Integriergliedes. Für das Integrierglied gilt<sup>11.2</sup>:

$$x_a(t) = \frac{1}{T} \int_0^t x_e(\tau) d\tau \quad \circ \bullet \quad X_a(\omega) = \frac{1}{T} \cdot \frac{X_e(\omega)}{j\omega} \quad \rightsquigarrow \quad H_I(\omega) = \frac{1}{j\omega T} \tag{11.9}$$

Bild 11.6 zeigt das Bodediagramm eines Integriergliedes. Wie man daraus erkennt, ist das Integrieren eines Nachrichtensignals gleichbedeutend mit einer **Höhen-Absenkung** (und Tiefen-Anhebung).

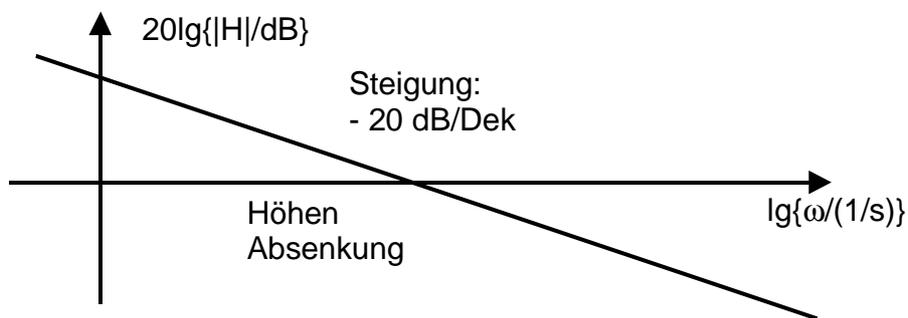


Bild 11.6: Bodediagramm des Integriergliedes  $H_I(\omega)$

Integriert man nun das Nachrichtensignal  $u_N(t)$ , so erhält man  $\frac{1}{T} \int_0^t u_N(\tau) d\tau$ . Mit Gleichung (11.2) wird dann bei Benutzung eines Phasenmodulators:

$$\varphi(t) = k_{PM} \cdot \frac{1}{T} \int_0^t u_N(\tau) d\tau \tag{11.10}$$

Bezogen auf das Nachrichtensignal  $u_N(t)$  muß Gleichung (11.10) differenziert werden:

<sup>11.2</sup>Vergleiche hierzu den Zeit-Integrationssatz der Fourier-Transformation. Aus der Regelungstechnik ist die Schreibweise  $H_I(s) = \frac{1}{sT}$  für das Integrierglied bekannt.

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = k_{PM} \cdot \frac{1}{T} \cdot u_N(t) = k_{FM} \cdot u_N(t) \quad \rightsquigarrow \quad k_{FM} = \frac{1}{T} \cdot k_{PM} \quad \text{Modulatorkonstante} \quad (11.11)$$

Das Blockschaltbild zur Erzeugung einer FM mittels eines Phasenmodulators zeigt Bild 11.7 links. Wegen der Quarz-Stabilität der Trägerschwingung wurde diese Modulator-Struktur zu Beginn des UKW-FM-Rundfunks gerne verwendet.

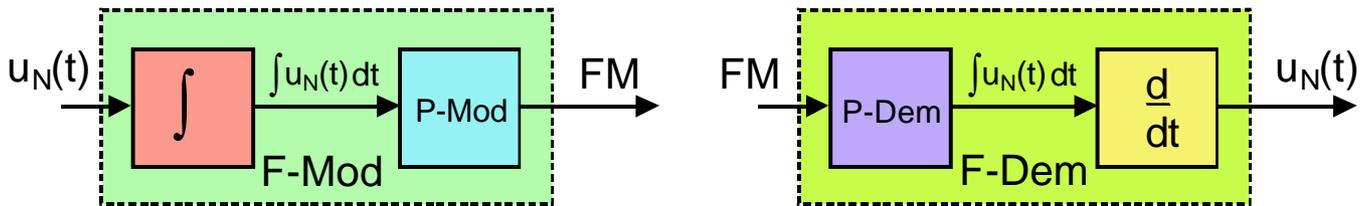


Bild 11.7: Erzeugung einer Frequenzmodulation mit einem Phasenmodulator (links) und Demodulation einer FM mit einem P-Demodulator (rechts)

- Die Demodulation einer FM mit Hilfe eines Phasen-Demodulators und nachfolgendem Differenzieren ist in der Praxis ungünstig, weil durch das Differenzieren die Störungen (Rauschen usw.) gegenüber dem Nutzsignal angehoben werden.

Aufgrund der engen Verwandtschaft von PM und FM ist es somit möglich, die zugehörigen Modulatoren und Demodulatoren wechselseitig zu verwenden.

## 12 Modulation und Demodulation von PM und FM

Von den zahlreichen technischen Möglichkeiten werden nur diejenigen betrachtet, die

- eine exakte bzw. präzise Modulation und Demodulation ergeben und die
- sowohl digital in Hardware als auch in Software (und im Prinzip auch analog) realisierbar sind.

Diese Verfahren sind daher sowohl für analoge als auch für digitale Nachrichtensignale geeignet.

### 12.1 Erzeugung von Phasenmodulation mit I/Q Phasenmodulator

Gemäß Gleichungen (11.3,11.4) kann man für eine winkelmodulierte Schwingung schreiben:

$$u_{WM}(t) = \hat{U}_C \cos[\Omega_C t + \varphi(t)] \quad (12.1)$$

Mit dem Additionstheorem wird Gleichung (12.1) wie folgt umgeformt.

$$u_{WM}(t) = \hat{U}_C [\cos \varphi(t) \cos(\Omega_C t) - \sin \varphi(t) \sin(\Omega_C t)] \quad (12.2)$$

Diese Gleichung (12.2) liefert die Grundlage für den I/Q Phasen-Modulator. Sie kann direkt in eine Blockstruktur überführt werden, Bild 12.1. Die Eingangsgröße  $\varphi(t)$  ist hierbei direkt proportional zum Nachrichten-Signal  $u_N(t)$ .

Wird eine Integration des Nachrichtensignals vorgenommen, kann auch eine FM erzeugt werden. Diese Art der Realisierung hat speziell für Modulationen für Digitale Signale eine große Bedeutung erlangt, da sich die Bildung von  $\cos(\varphi)$  und  $\sin(\varphi)$  digital sehr exakt realisieren läßt. Es wird dann mit Hilfe von 2 orthogonal ( $\cos(\Omega_C t)$  bzw.  $\sin(\Omega_C t)$ ) angesteuerten Multiplizierern (DSB-Modulatoren!) eine Winkelmodulation erzeugt. Technisch läßt sich diese Art der Modulation völlig digital realisieren. Hierin liegt die große Bedeutung dieser Methode.

Die Realisierung einer PM nach dem I/Q-Verfahren hat folgende Eigenschaften, die für eine digitale Modulation unverzichtbar sind:

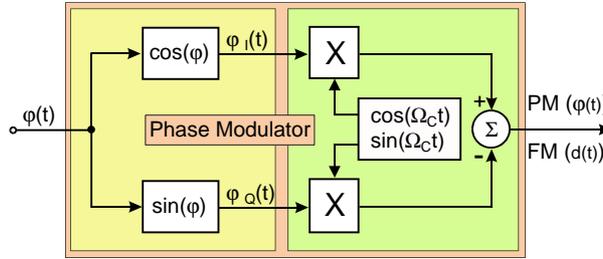


Bild 12.1: I/Q Phasenmodulator für beliebige Werte von  $\varphi(t)$

1. Die Trägerfrequenz  $\Omega_C$  ist quarzstabil.
2. Die untere Grenzfrequenz für das Nachrichtensignal ist 0.
3. Auch bei beliebig großem Wert des Phasenwinkels  $\varphi$  ist der Modulator nicht übersteuert.
4. Der Zusammenhang zwischen Nachrichtensignal und Phasenwinkeländerung ist linear.

**12.1.1 Schmalband Phasen-Modulator**

Beschränkt man sich auf kleine Werte des Phasenwinkels, erhält man eine Schmalband Winkelmodulation und die Struktur in Bild 12.1 läßt sich sehr stark vereinfachen. Nach diesem Prinzip arbeiteten die ersten FM-Sender auf UKW.

Schmalband-Winkelmodulation ist dadurch definiert, daß gilt:

$$|\varphi(t)| \ll 1 \quad \rightsquigarrow \quad \cos \varphi(t) \approx 1 \quad ; \quad \sin \varphi(t) \approx \varphi(t) \tag{12.3}$$

Für den Spezialfall eines cos-förmigen Nachrichtensignals  $u_N(t) = \hat{u}_N \cos \omega_N t$  kann man zusätzlich die Bedingung

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \Delta\varpi(t) \ll \omega_N \tag{12.4}$$

angeben. Damit erhält man für das winkelumodierte Signal

$$u_{WM}(t) \approx \hat{U}_C [\cos(\Omega_C t) - \varphi(t) \cdot \sin(\Omega_C t)] \tag{12.5}$$

Die Struktur, die zu dieser Gleichung gehört, zeigt Bild 12.2.

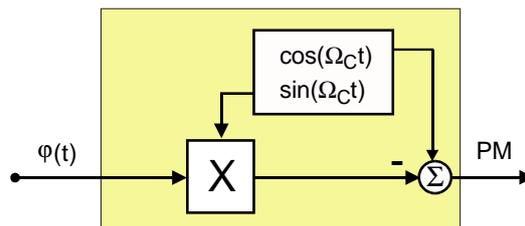


Bild 12.2: Phasenmodulator für kleine Werte von  $\varphi(t) \ll 1$

Dem Nachteil daß die Phasenänderung nur sehr klein sein darf, steht der Vorteil gegenüber, daß keine nichtlinearen Übertragungsblöcke ( $\cos(\dots)$ ,  $\sin(\dots)$ ) erforderlich sind. Der Nachteil der geringen Phasenauslenkung (und damit des kleinen Frequenzhubes) läßt sich mittels Frequenz-Vervielfachung überwinden. (s. Kapitel 14.6.1, Seite 64)

### 12.1.2 Demodulation einer Phasenmodulation

**Direkte Phasen-Demodulation :** Ein Phasendemodulator benötigt eine **Referenzphase**  $\varphi_2$  (z.B.  $\varphi_2 = 0$ ), da per Definition der Phase diese nur als Unterschied zwischen zwei Schwingungen angegeben werden kann. Bei der Demodulation von phasenmodulierten Daten muß diese Referenzphasenlage z.B. mit Hilfe einer Schaltung zur **Trägerrückgewinnung** erzeugt werden. Für die Demodulation **digitaler** Nachrichten-Signale ist dies die einzige Möglichkeit. Dies ist eine praktische Schwierigkeit bei der direkten Demodulation einer Phasenmodulation für analoges Nachrichtensignal.

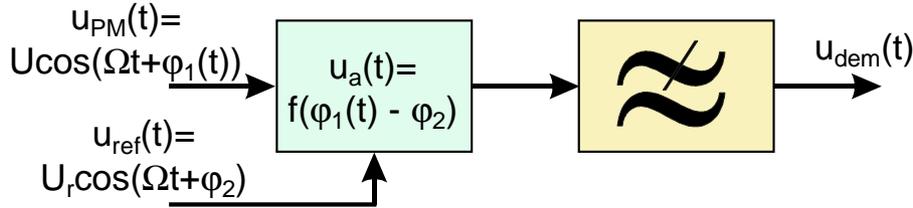


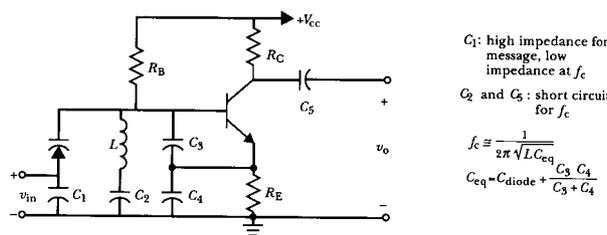
Bild 12.3: Zur Demodulation einer PM ist eine Schwingung mit einer Referenz-Phase  $\varphi_2$  notwendig.

**Indirekte Phasen-Demodulation :** Ein **Frequenzdemodulator** benötigt eine **Referenzfrequenz**, die aber bequem z.B. mit Hilfe eines Resonanzkreises dargestellt werden kann, was technisch viel einfacher ist.<sup>12.1</sup> Da Phasenmodulation als Frequenzmodulation mit Höhenanhebung (D-Glied) aufgefaßt werden kann, folgt sofort, daß nach einem Frequenzdemodulator eine Höhenabsenkung (I-Glied) folgen muß, Bild 11.5 rechte Seite.

### 12.2 Erzeugung einer Frequenzmodulation

Die direkte Erzeugung einer Frequenzmodulation erfolgt mit Hilfe eines Spannungs- oder Strom-gesteuerten Oszillators (VCO bzw. CCO). Das Nachrichtensignal greift also unmittelbar in den frequenzbestimmenden Teil des Oszillators ein, Bild 12.4.

Ein Frequenzmodulator ist daher ein Oszillator mit Frequenz-Steuereingang. Eine analoge Änderung der Schwingkreis Kapazität über die Vorspannung einer Kapazitätsdiode führt nur für kleine Aussteuerung näherungsweise zu einer proportionalen (linearen) Frequenzänderung. Die Frequenzstabilität der Trägerfrequenz kann bei einer analogen Realisierung des Oszillators nur mit Hilfe einer Frequenz-Regelung sichergestellt werden.



$C_1$ : high impedance for message, low impedance at  $f_c$   
 $C_2$  and  $C_5$ : short circuit for  $f_c$   
 $f_c \approx \frac{1}{2\pi \sqrt{L C_{eq}}}$   
 $C_{eq} = C_{diode} + \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4}$

Bild 12.4: Erzeugung von Frequenzmodulation mit spannungsgesteuertem Oszillator

Die digitale Variante ist der **numerisch gesteuerte Oszillator** (NCO), welcher eine quarzstabile Mittenfrequenz hat und dessen Frequenzänderung exakt proportional zum Nachrichtensignal ist.

Bild 12.5 zeigt die Blockstruktur eines NCO (NCO: *numerically controlled oscillator*). Herzstück eines NCO ist eine Look-Up Tabelle, in der die Stützwerte der Cos- bzw. Sin-Schwingung mit großer Genauigkeit und in ausreichender Anzahl abgelegt sind. Für eine gewünschte Frequenz wird im Phasen-Accumulator eine entsprechende Schrittweite eingestellt. Über das  $\Delta$ -Phasen Register läßt sich die Phase modulieren.

<sup>12.1</sup>Im analogen UKW-Rundfunk werden deshalb FM-Demodulatoren verwendet, obwohl die dort benutzte Winkelmodulation für höhere NF-Frequenzen (aufgrund der dabei verwendeten Pre-Emphase) eine PM ist. Die im Empfänger deshalb notwendige Höhenabsenkung wird „De-Emphase“ genannt.

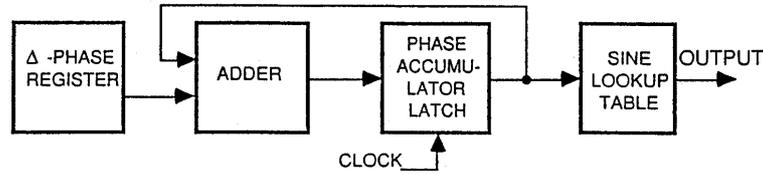


Bild 12.5: Blockschaltbild eines NCO

### 12.2.1 Demodulation einer Frequenzmodulation

Eine der Möglichkeiten zur Demodulation einer FM besteht darin, die Frequenzänderung eines FM-Signals mittels eines **Differenzierers** in eine (zusätzliche) **Amplitudenänderung** zu überführen, Bild 12.6 [1]<sup>12.2</sup>. Diese Amplitudenänderung läßt sich dann mit Hilfe eines **Hüllkurven-Demodulators** demodulieren, wie es Bild 12.7 (Seite 43) [15] zeigt.

Ein winkelmoduliertes Signal hat per Definition eine konstante Einhüllende. Im praktischen Fall muß dies (empfangsseitig) mit Hilfe eines **Begrenzerverstärkers** zuvor erzwungen werden.

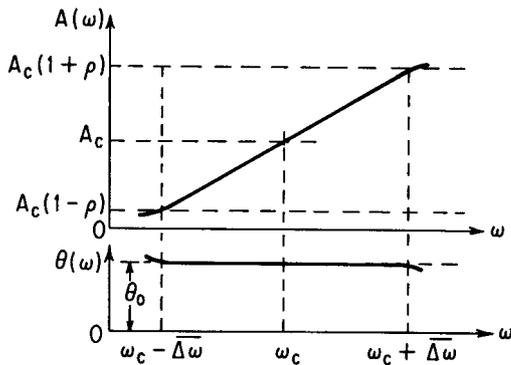


Bild 12.6: Differenzier zur FM → AM Wandlung

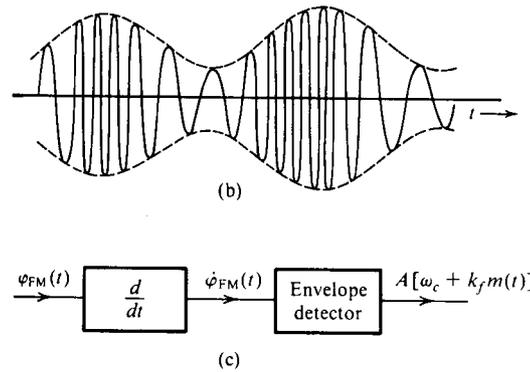


Bild 12.7: Hüllkurven-Demodulation eines differenzierten FM-Signals

Wird zur Demodulation einer FM-Schwingung ein Phasen-Demodulator verwendet, so muß das Ausgangssignal dieses Phasendemodulators *differenziert* werden, Bild 11.7 rechts. Dies kann als Umkehrung des Modulationsprozesses zur Erzeugung einer FM mittels eines Phasenmodulators gesehen werden. Ein solcher Demodulator ist für eine praktische Anwendung in aller Regel ungeeignet, da durch das Differenzieren (Höhenanhebung) das **Rauschen** und sonstige **Störungen** verstärkt werden.

## 13 Spektren winkelmodulierter Schwingungen

Das Spektraldichte  $F(\omega)$  einer Zeitfunktion  $f(t)$  berechnet sich mit Hilfe des Fourier-Integrals.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad \text{Fourier-Transformation: Spektraldichte von } f(t) \quad (13.1)$$

Ein (idealisiertes) Meßgerät für eine Spektraldichte stellt eine Filterbank dar, bestehend aus  $\infty$  vielen LC-Kreisen  $\infty$  hoher Güte und damit mit Bandbreiten  $\rightarrow 0$ , Bild 13.1.

Die FM- und PM-Schwingungen der Bilder 11.1, 11.2 und 11.3 sind offensichtlich periodisch entsprechend zur Periode der Nachrichten-Signale. Periodische Zeitsignale haben Spektraldichten, die aus äquidistanten Linien bestehen. Es gilt allgemein:

**periodische Zeitfunktion**  $\circ \bullet$  **Spektraldichte: äquidistante Linien**

<sup>12.2</sup>Weitere Informationen zur FM-Demodulation im Skript „Demodulation frequenzmodulierter Signale“.[13]

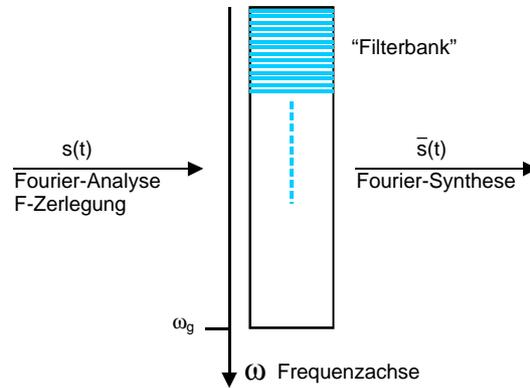


Bild 13.1: Filterbank zur Veranschaulichung der Frequenz

Die Berechnung der Spektralverteilung einer winkelmodulierten Schwingung ist für beliebiges Nachrichtensignal nicht **allgemein** möglich, da der Eingriff in das Argument einer  $\cos$ -Schwingung einen nichtlinearen Zusammenhang ergibt.

Aufgrund des nichtlinearen Zusammenhangs werden nur verschiedene **Näherungen** betrachtet, mit deren Hilfe man für praktische Fälle eine ausreichende Aussage über die zu erwartende Spektralverteilung eines winkelmodulierten Signals erhält.

### 13.1 Die „Momentan“-Frequenz

Die „Momentan“-Frequenz ist eine **zeitabhängige** Größe und damit keine Frequenz im Sinne von Fourier! Die Vorstellung, die der „Momentan“-Frequenz zugrunde liegt, ist die eines rotierenden Zeigers, dessen Projektion auf die reelle Achse eine Cosinus-Schwingung ergibt, Bild 13.2.

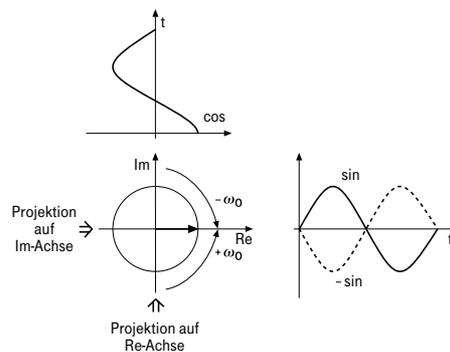


Bild 13.2: Cosinus-Schwingung aus der Projektion eines rotierenden Zeigers auf die reelle Achse

Die (Umlauf-)Frequenz des Zeigers (hier  $\omega_0$ ) bestimmt sich aus der Größe der **Phasen-Änderung** (des Zeigers) **pro Zeiteinheit**. Läuft der Zeiger **gleichmäßig** um, erhält man (als Projektion) eine **reine** Cosinus-Schwingung. Läuft der Zeiger dagegen **ungleichmäßig** um, erhält man (als Projektion) eine **winkelmodulierte** Cosinus-Schwingung.

Die Ableitung der Phase  $\psi(t)$  des modulierten Trägers  $\hat{U}_C \cos[\psi(t)]$ , Gleichung (11.1), nach der Zeit, die Phasenänderungs-Geschwindigkeit, ist **dimensionsmäßig** eine **Frequenz**, welche **Momentan-Frequenz**  $\varpi(t)$  genannt wird. Diese **Momentan-Frequenz**  $\varpi(t)$  ist **zeitabhängig**, da sie **physikalisch** eine **Änderungsgeschwindigkeit** darstellt.

Im Unterschied dazu ist die bei der Fourieranalyse auftretende Frequenz  $\omega$ , die physikalisch mit Hilfe einer **Filterbank** definiert werden kann, **nicht zeitabhängig**.<sup>13.1</sup>

<sup>13.1</sup>**Achtung:** in der Literatur wird die Momentan-Frequenz meist ebenfalls mit  $\omega(t)$  bezeichnet, was zu Mißverständnissen führen kann.

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d\{\Omega_C \cdot t + \varphi(t)\}}{dt} = \Omega_C + \frac{d\varphi(t)}{dt} = \varpi(t) \quad ; \quad \varpi(t) : \text{Momentan-Frequenz} \quad (13.2)$$

### 13.1.1 Der Frequenz-Hub

Die zeitliche Frequenzänderung beträgt mit Gleichung (13.2)

$$\Delta\varpi(t) = \varpi(t) - \Omega_C = \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad \text{mit} \quad |\Delta\varpi(t)|_{\max} = \Delta\Omega \ll \Omega_C; \quad \Delta\Omega: \text{Frequenzhub} \quad (13.3)$$

Die maximale (zeitliche) Frequenzänderung  $|\Delta\varpi(t)|_{\max} = \Delta\Omega$  wird **Frequenz-Hub** genannt.

$$\Delta\Omega = |\Delta\varpi(t)|_{\max} = \left| \frac{d\varphi(t)}{dt} \right|_{\max} = k_{FM} |u_N(t)|_{\max} \quad \text{Frequenzhub} \quad (13.4)$$

Der Frequenz-Hub ist im Fourier-Spektrum der FM somit kein Wert, wo sich notwendigerweise eine Spektrallinie befindet! Wie aus Gleichung (13.4) hervorgeht ist der **Frequenz-Hub** vielmehr ein **Maß für die maximale Amplitude** des Nachrichten-Signals  $u_N(t)$ . Für **praktische Fälle** zeigt sich jedoch:

- Die **Bandbreite**  $B_\omega$  einer winkelmodulierten Schwingung ist  $B_\omega \geq 2\Delta\Omega$ .

$\Delta\Omega$  ist meist sehr klein, bezogen auf den Wert der Trägerfrequenz  $\Omega_C$ . Insofern sind die Darstellungen in den Bildern 11.1 bis 11.3 (aus didaktischen Gründen) stark übertrieben. Die Momentanfrequenz  $\varpi(t)$  kann zudem **nie negativ** werden, weil das **physikalisch eine negative Frequenz** bedeuten würde. Der Frequenz-Hub  $\Delta\Omega$  kann also nie größer werden als die Trägerfrequenz  $\Omega_C$ .

Die in Gleichung (13.3) definierte **zeitliche Änderung der Momentanfrequenz**  $\Delta\varpi(t)$  ist also die **zeitliche Änderung der Winkelgeschwindigkeit eines rotierenden Zeigers**. Der Zeiger entspricht der komplexen Schreibweise einer Cos-förmigen Schwingung. Diese führt auf das bei den Winkelmodulationen gebräuchliche Bild des **Pendelzeigers**. Wie man sofort erkennt, gilt stets:

- **Eine Phasenänderung bewirkt immer eine Frequenzänderung.**
- **Eine Frequenzänderung bewirkt immer eine Phasenänderung.**

Frequenz- und Phasen-Änderung treten also stets **gemeinsam** auf. Ob demnach eine Winkelmodulation als Phasenmodulation (PM) oder als Frequenzmodulation (FM) bezeichnet wird, hängt nur davon ab, welche der beiden Größen **Phasenänderung** oder **Frequenzänderung** dem Nachrichtensignal  $u_N(t)$  **proportional** ist.

Mit Gleichungen (13.3, 11.2) erhält man folgenden Zusammenhang, der die Bezeichnung **Frequenzmodulation** (FM) verständlich macht:

$$\Delta\varpi(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = k_{FM} \cdot u_N(t) \quad (13.5)$$

Daraus folgt: **Die zeitliche Änderung der Momentanfrequenz  $\Delta\varpi(t)$  ist bei einer FM proportional zum Nachrichtensignal.**

## 13.2 Spektrum der Schmalband-Modulationen

Gleichung (12.5) (Seite 41) läßt sich direkt Fourier-transformieren, wodurch sich die Spektralverteilung einer Schmalband-Winkelmodulation ergibt. Dabei werden die Korrespondenzen

$$\varphi(t) \circ \bullet \Phi(\omega) \quad ; \quad u_N(t) \circ \bullet U_N(\omega)$$

und der **Modulationssatz** verwendet.

$$U_{WM}(\omega) \approx \frac{\hat{U}_C}{2} [\delta(\omega - \Omega_C) + \delta(\omega + \Omega_C) + j\Phi(\omega - \Omega_C) - j\Phi(\omega + \Omega_C)] \quad (13.6)$$

Mit den Gleichungen (11.2, 11.4) gilt

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= k_{PM} \cdot u_N(t) & \circ \bullet & \Phi(\omega) = k_{PM} \cdot U_N(\omega) & \mathbf{PM} \\ \varphi(t) &= k_{FM} \int_0^t u_N(\tau) d\tau & \circ \bullet & \Phi(\omega) = k_{FM} \cdot \frac{U_N(\omega)}{j\omega} & \mathbf{FM} \end{aligned} \quad (13.7)$$

Mit Gleichungen (13.6, 13.7) folgt nun für die Spektralverteilung von Schmalband-PM und Schmalband-FM, Bild 13.3:

$$U_{PM}(\omega) \approx \frac{\hat{U}_C}{2} [\delta(\omega - \Omega_C) + \delta(\omega + \Omega_C) + jk_{PM}U_N(\omega - \Omega_C) - jk_{PM}U_N(\omega + \Omega_C)] \quad \mathbf{PM} \quad (13.8)$$

$$U_{FM}(\omega) \approx \frac{\hat{U}_C}{2} \left[ \delta(\omega - \Omega_C) + \delta(\omega + \Omega_C) + k_{FM} \frac{U_N(\omega - \Omega_C)}{\omega - \Omega_C} - k_{FM} \frac{U_N(\omega + \Omega_C)}{\omega + \Omega_C} \right] \quad \mathbf{FM} \quad (13.9)$$

### 13.2.1 Bandbreite der Schmalband-WM

Bei Schmalband-Winkelmodulation ist also die HF-Bandbreite (im Wesentlichen) durch die NF-Bandbreite bestimmt, und es gilt

$$B_{HF} \approx 2 \cdot B_{NF} \quad \mathbf{Schmalband-WM} \quad (13.10)$$

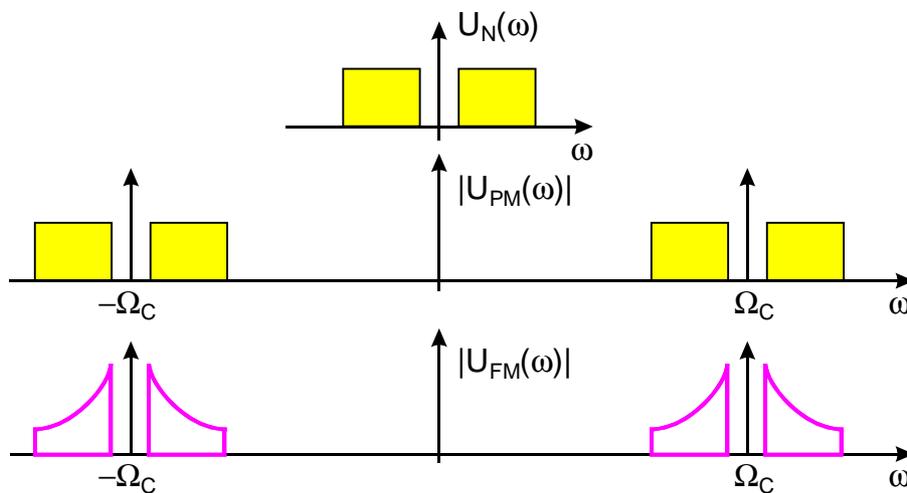


Bild 13.3: Spektralverteilung von Schmalband-PM und Schmalband-FM

Wie man aus Bild 13.3 erkennt, sind im Spektrum der **Schmalband-FM** die zu den höheren Nachrichtenfrequenzen gehörenden Spektralanteile mit geringerer Amplitude vertreten als diejenigen, die zu tieferfrequenten Signalanteilen gehören. Bezüglich der Trägerfrequenz ergibt sich ein **hyperbolischer Verlauf**, wenn die Spektraldichte der Nachricht konstant ist.

Hier erkennt man bereits, daß die Signalamplituden mit höherer Nachrichten-Frequenz bezüglich des Rauschens (und anderer Störungen) benachteiligt sind, weshalb in der Praxis für analoge Übertragung eine **Preemphase** angewendet wird.

## 13.3 Breitband-Frequenzmodulation

Wegen der engen Verwandtschaft von FM und PM einerseits und der Tatsache andererseits, daß bei praktischen (analogen) Systemen stets eine FM mit Preemphase Verwendung findet, genügt es für analoges Nachrichtensignal, vorwiegend die FM zu betrachten.

### 13.3.1 Breitband-FM mit tieffrequentem Nachrichtensignal

Bei Breitband-FM ist die Änderung des Phasenwinkels:

$$|\varphi(t)| \gg 1 \quad \text{Breitband-FM} \quad (13.11)$$

Eine Näherung wie bei der Schmalband-WM ist damit nicht mehr möglich. Man geht nunmehr von der zeitlichen Frequenzänderung aus, Gleichung (13.5), und betrachtet zusätzlich den Fall, daß sich das Nachrichtensignal **zeitlich nur sehr langsam ändert** und deshalb innerhalb eines Zeitintervalls  $t_1 < t < t_1 + \Delta t$  als praktisch konstant ( $u_N(t) \approx \hat{u}_N$ ) angesehen werden darf.

$$\Delta\varpi(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = k_{FM} \cdot u_N(t) \rightsquigarrow \Delta\varpi(t) \implies k_{FM} \cdot \hat{u}_N = \Delta\Omega : \text{Frequenz-Hub} \quad (13.12)$$

- $\Delta\Omega$  ist hierbei die maximale Frequenzablage von der Trägerfrequenz  $\Omega_C$  (maximale Frequenzablage = Frequenzhub) und ist eine **Frequenz** — im Unterschied zur Momentanfrequenz  $\varpi(t)$ .
- $\Delta\Omega$  ist hier **zeitunabhängig** und damit eine **echte Frequenz**.

Man kann sich das auch anhand der Realisierung des FM-Modulators klar machen: Da das Nachrichtensignal den Wert der Schwingkreis-Kapazität beeinflusst, erhält man durch Anlegen einer Konstantspannung eine andere Schwingfrequenz. Bei langsamer Änderung der Nachrichtenspannung ändert sich die Schwingfrequenz entsprechend langsam: **Wobbelbetrieb**. In diesem Fall entspricht die **mathematische Größe**  $\varpi(t)$  der **physikalischen Größe**  $\omega$ .

### 13.3.2 HF-Bandbreite der Breitband-FM

Bei Breitband-FM (mit niederfrequentem Nachrichtensignal) ist die **HF-Bandbreite** daher **proportional zur Amplitude  $\hat{u}_N$  des Nachrichtensignals**.

$$B_{HF} = 2 \cdot k_{FM} \cdot \hat{u}_N \quad \text{Breitband-FM (für niederfrequentes Nachrichtensignal)} \quad (13.13)$$

Die näherungsweise Bestimmung des Spektralverlaufes der Breitband-FM ist an die folgenden **Bedingungen** gebunden.

Es sei wieder ein Nachrichtensignal mit **sehr langsamer Änderung** seines Zeitverlaufes angenommen, Bild 13.4.  $T$  sei die Periode des Nachrichtensignals und  $\Delta\omega = \Delta\Omega$  die maximale Frequenzänderung (Frequenzhub).

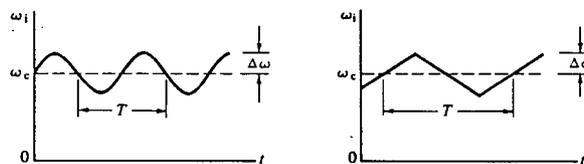


Bild 13.4: Zur Definition des Dispersions-Index

Eine charakteristische Größe ist hierbei der **Dispersions-Index**  $\vartheta$ .

$$\vartheta = \frac{\Delta\Omega}{2\pi} \cdot T \quad \text{Dispersions-Index} \quad (13.14)$$

Für  $T \rightarrow \infty$  wird  $\vartheta \rightarrow \infty$  und  $u_N(t) \approx const.$  (bezogen auf ein gegebenes Zeitintervall.)

Für den Fall eines **cos-förmigen** Nachrichtensignals  $u_N(t) = \hat{u}_N \cos(\omega_N t)$  wird dieser Dispersions-Index als **Modulations-Index** ( $\eta = \beta = \Delta\varphi$ ) bezeichnet.<sup>13.2</sup>

$$\eta = \beta = \Delta\varphi = \frac{\Delta\Omega}{\omega_N} = \frac{\Delta F}{f_N} \quad \text{Modulations-Index} \quad (13.15)$$

<sup>13.2</sup>In der Literatur sind für den Modulations-Index die Bezeichnungen  $\eta = \beta = \Delta\varphi$  gebräuchlich.

- Der Ansatz zur Gewinnung der Spektralverteilung des FM-Signals geht von der Überlegung aus, daß die **Größe der Spektraldichte proportional zur Zeitspanne** ist, die **bei der jeweiligen Frequenz** verbraucht wird.

Das Nachrichtensignal  $u_N(t)$  wird hierfür durch seine **Amplituden-Wahrscheinlichkeits-Dichte-Funktion**  $p(u_N)$  beschrieben. Die zugehörigen Überlegungen sind dabei die folgenden:

1. **Zeitspanne** für  $u_N(t)$  zwischen  $u_{N_1}$  und  $u_{N_1} + du_{N_1}$  ist  $\sim$  zur **Wahrscheinlichkeit**, daß  $u_N(t)$  zwischen  $u_{N_1}$  und  $u_{N_1} + du_{N_1}$  liegt.
2. Mit der Momentanfrequenz  $\varpi(t) = k_{FM} \cdot u_N(t)$  folgt, daß diese zwischen  $\varpi_1$  und  $\varpi_1 + d\varpi$  liegt. ( $\varpi_1 = k_{FM} \cdot u_{N_1}$  und  $d\varpi = k_{FM} \cdot du_{N_1}$ )
3. Da jedoch die Frequenzänderung **relativ langsam** erfolgt, kann  $\varpi_1$  näherungsweise durch  $\omega_1$  ersetzt werden, d.h., die **mathematische Größe**  $\varpi_1$  ist  $\approx$  der **physikalische Größe**  $\omega_1$ .
4. Die in das Intervall  $\omega_1 \cdots \omega_1 + d\omega$  fallende **Teil-Leistung** der FM-Schwingung **ist proportional zu der Zeit**, in der  $u_N(t)$  im Bereich  $u_{N_1} \cdots u_{N_1} + du_{N_1}$  liegt.
5. Sei  $G(\omega)$  die **spektrale Leistungsdichte** der FM-Schwingung, so folgt:  $G(\omega_1)d\omega \sim p(u_{N_1})du_{N_1}$ . Und, da  $d\omega \sim du_{N_1}$  ist, gilt  $G(\omega) \sim p(u_{N_1})$ .
6. **Die spektrale Leistungsdichte der Breitband-FM ist daher von der gleichen Form wie die Wahrscheinlichkeits-Dichte-Funktion des modulierenden Nachrichtensignals.**

Die praktische Vorgehensweise zur Gewinnung der Spektralverteilung des FM-Signals wird anhand von 2 Beispielen gezeigt.

### 13.3.3 Beispiel 1: FM-Spektrum für Cos-förmiges Nachrichtensignal

$$u_N(t) = a \cdot \cos(\omega_N t) \quad ; \quad \omega_N = 2\pi/T \tag{13.16}$$

Die Momentanfrequenz wird dann:

$$\Delta\varpi(t) = k_{FM} \cdot a \cdot \cos(\omega_N t) = \Delta\Omega \cdot \cos(\omega_N t) \tag{13.17}$$

Gleichung (13.17) wird nun wie folgt umgeformt, wodurch die Spektralverteilung gemäß Bild 13.5 entsteht:

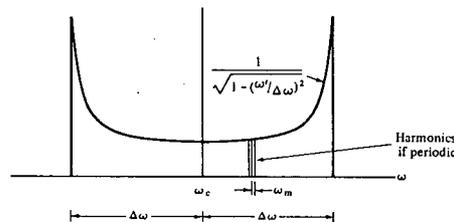


Bild 13.5: Der näherungsweise Verlauf der Spektralverteilung der FM-Schwingung für cos-förmiges Nachrichtensignal (sehr niedriger Frequenz)

$$\begin{aligned} \omega_N t = \frac{2\pi}{T} t &= \arccos\left(\frac{\Delta\varpi(t)}{\Delta\Omega}\right) \\ \frac{1}{T} \cdot \frac{dt}{d[\Delta\varpi(t)]} &= \frac{1/(2\pi)}{\Delta\Omega \sqrt{1 - [\Delta\varpi(t)/\Delta\Omega]^2}} \end{aligned} \tag{13.18}$$

**Spektralverteilung der FM**

**13.3.4 Beispiel 2: FM-Spektrum für Sägezahnförmiges Nachrichtensignal**

$$\begin{aligned}
 u_N(t) &= a \frac{t}{T/2} & -T/2 \leq t \leq T/2 \\
 \Delta\varpi(t) &= k_{FM} \cdot a \frac{t}{T/2} = \Delta\Omega \frac{t}{T/2}
 \end{aligned}
 \tag{13.19}$$

Daraus folgt für die Spektralverteilung, siehe Bild 13.6:

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{dt}{d[\Delta\varpi(t)]} = \frac{1}{2\Delta\Omega} = \text{konstant} \quad \text{Spektralverteilung der FM}
 \tag{13.20}$$

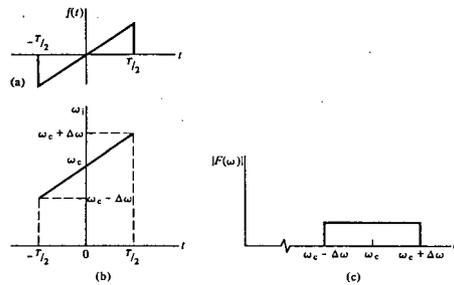


Bild 13.6: Der näherungsweise Verlauf der Spektralverteilung der FM-Schwingung für sägezahnförmiges Nachrichtensignal (sehr niedriger Frequenz)

**13.3.5 Spektralverteilung und Bandbreite des FM-Spektrums für den allgemeinen Fall des Nachrichtensignals**

Zur Abschätzung der Bandbreite des FM-Spektrums für ein allgemeines Nachrichtensignal  $u_N(t)$  wird dieses näherungsweise durch eine **Treppenkurve** beschrieben, Bild 13.7. [15]

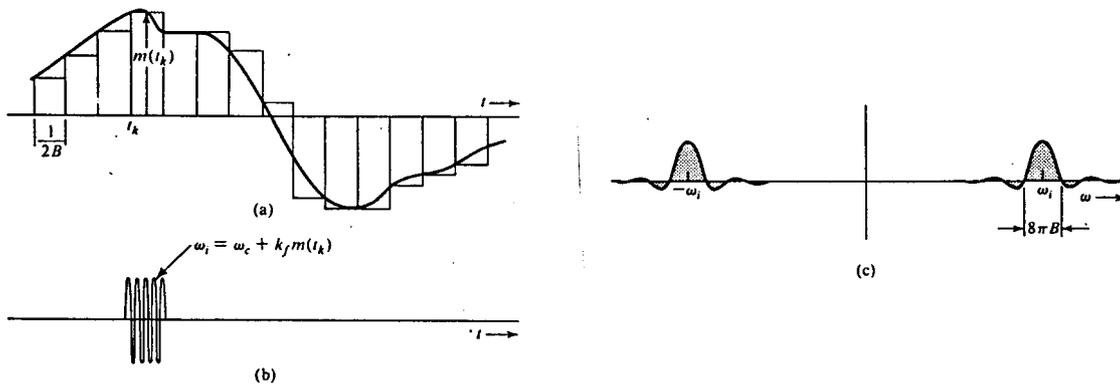


Bild 13.7: Annäherung der FM durch Bursts unterschiedlicher Frequenz zur Abschätzung der Bandbreite

Die **Breite** der Treppenstufen wird dabei gemäß der **Abtastbedingung** gewählt:

$$T_A = \frac{2\pi}{\omega_A} \leq \frac{2\pi}{2\omega_g} = \frac{1}{2B}
 \tag{13.21}$$

Die Höhe der Treppenstufe (Amplitude) bestimmt die **momentane Frequenz**  $\varpi(t)$ , die jedoch als **Frequenz**  $\omega_i$  angesetzt werden darf, da sich **innerhalb** jeder Treppenstufe keine Frequenzänderung ergibt. Dadurch kann das FM-Signal aus **Bursts** der jeweiligen Frequenz zusammengesetzt werden.

Die Spektralanalyse eines jeden Bursts liefert einen an die jeweilige Stelle  $\omega_i$  verschobenen  $(\sin x/x)$ -Impuls, dessen Abstand der 1. Nullstellen (näherungsweise) den gesuchten Wert der Bandbreite ergibt.

$$2 \frac{2\pi}{T_A} = 2\omega_A = 8\pi B \tag{13.22}$$

Da die momentane Frequenz  $\varpi(t) = k_{FM} \cdot u_N(t)$  beträgt, liegt die Spektralverteilung für die Treppennäherung des Nachrichtensignals in folgendem Frequenzbereich, wobei  $u_{N_{max}}$  das Maximum von  $|u_N(t)|$  bedeuten soll:

$$\Omega_C - k_{FM} \cdot u_{N_{max}} - 4\pi B \leq \omega \leq \Omega_C + k_{FM} \cdot u_{N_{max}} + 4\pi B \tag{13.23}$$

### 13.3.6 FM-Bandbreite mit der Carson-Formel

Die erforderliche HF-Bandbreite  $B_{FM}$  für das FM-Signal wird gemäß dieser Abschätzung demnach für die NF-Bandbreite  $B$ :

$$2\pi \cdot B_{FM} \approx 2k_{FM} \cdot u_{N_{max}} + 8\pi B = 2\Delta\Omega + 8\pi B \tag{13.24}$$

In natürlichen Frequenzen ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} B_{FM} &\approx 2\Delta F + 4B = 2(\Delta F + 2B) \\ B_{FM} &\approx 2\Delta F + 2B = 2(\Delta F + B) \end{aligned} \quad \text{Abschätzung nach Carson} \tag{13.25}$$

Speziell für Cosinus-förmiges Nachrichtensignal  $u_N(t) = \hat{u}_N \cos(\omega_N t)$  ergibt sich daraus unter Berücksichtigung des Modulations-Index  $\eta = \beta$ , Gleichung (13.15):

$$B_{FM} \approx 2\Delta F + 2f_N = 2(\Delta F + f_N) = 2\Delta F \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \quad \text{Carson-Formel für } u_N(t) = \hat{u}_N \cos(\omega_N t) \tag{13.26}$$

Die graphische Auswertung der Gleichung (13.26) liefert eine universelle Kurve für die Bandbreite innerhalb der 99% der Spektralanteile einer FM-Schwingung liegen (99%-Bandbreite  $B_{99}$ ), Bild 13.8. [1]

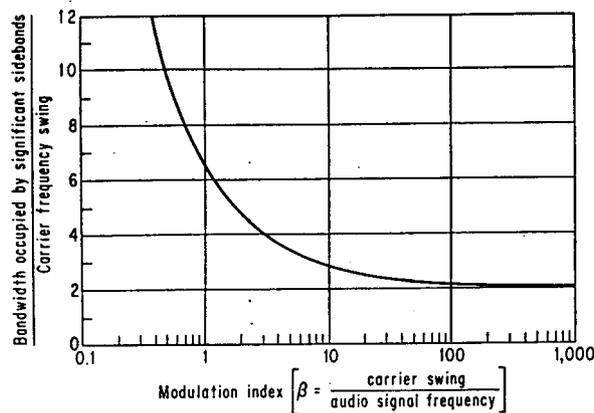


Bild 13.8: Universelle Kurve für die erforderliche 99%-Bandbreite  $B_{99}$  einer FM-Schwingung:  $\beta = \eta$

Typische Spektralverteilungen für Breitband-FM-Signale zeigt Bild 13.9.

Viele technisch interessante Signale  $u_N(t)$  haben zumindest näherungsweise eine *Gauß-förmige* Wahrscheinlichkeits-Dichtefunktion  $p(u_N)$  für die auftretenden Amplitudenwerte. Meßtechnisch können solche Signale durch Rauschen nachgebildet werden. Da die spektrale Leistungsdichte  $G(\omega)$  der FM die gleiche Form wie die Wahrscheinlichkeits-Dichte  $p(u_N)$  hat, folgt für diesen Fall eine Spektralverteilung gemäß Bild 13.10. [15]

Für die 98%-Bandbreite eines Signals mit **Gauß-förmiger Amplitudenverteilung** kann daraus folgender Wert gewonnen werden:

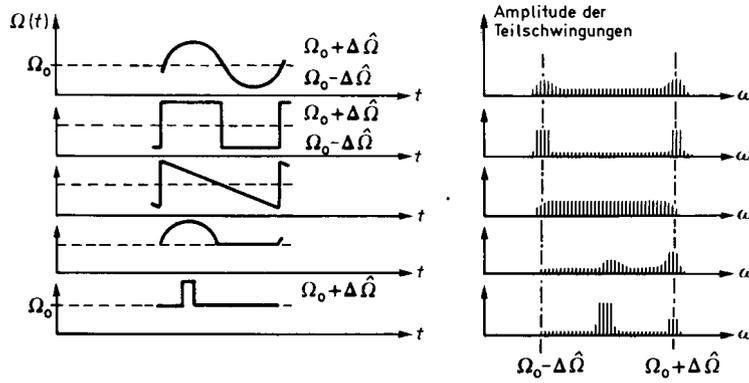


Bild 13.9: Typische FM-Spektren für Breitband-FM

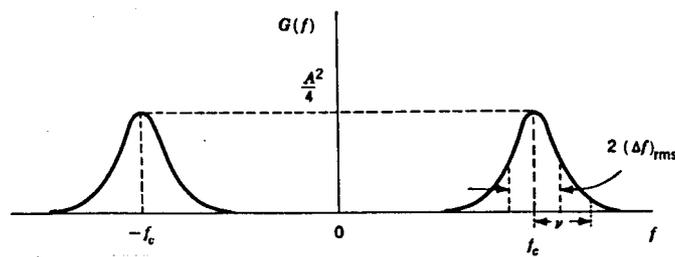


Bild 13.10: Spektralverteilung einer FM mit einem Nachrichtensignal mit Gauß-förmiger Amplitudenverteilung

$$B_{98} = 2\sqrt{2} \cdot 1.645 \Delta f_{\text{rms}} = 4.68 \Delta f_{\text{rms}} \quad \text{rms : Effektivwert (root mean square)} \quad (13.27)$$

Für **rechteckförmiges** Nachrichtensignal ergibt sich die folgende Spektralverteilung für das FM-Signal, Bild 13.11 [1],[22], wobei (linke Bildhälfte) der Dispersionsindex  $\vartheta = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \cdot T$  (und damit die Periode  $T$  des Rechtecks) verändert wird, während für die rechte Bildhälfte die Periode  $T$  konstant bleibt, aber die Amplitude der Rechteckschwingung geändert wird.

Aus diesen Beispielen sieht man die Linien-Form des FM-Spektrums für periodische Signale.

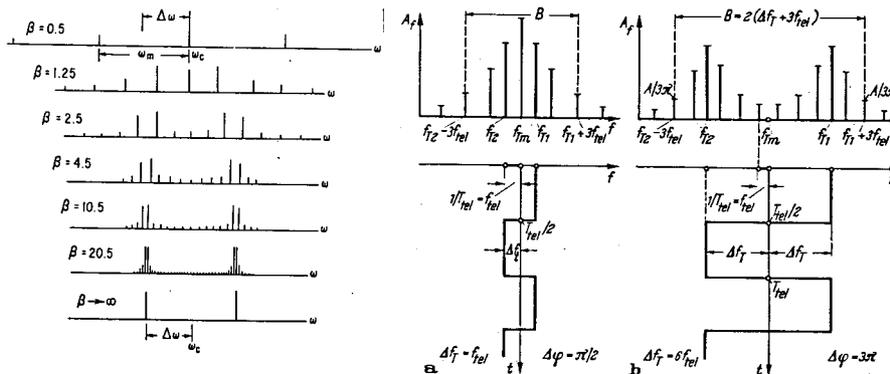


Bild 13.11: Linien-Spektrum eines FM-Signals mit rechteckförmigem (periodischem) Nachrichtensignal

## 14 Klassische Analyse der FM

Im klassischen Fall wird ein **Cos-förmiges Nachrichtensignal** für die Bestimmung des Spektrums einer Winkelmodulation zugrunde gelegt. Seine Bedeutung ergibt sich zudem daraus, daß es für meßtechnische Zwecke verwendet wird.

Nach der Beziehung

$$\boxed{\text{Periodizität im Zeitbereich} \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \text{äquidistante Linien im Frequenzbereich}}$$

wird sich in diesem Fall ein **Linienspektrum** ergeben.

### 14.1 Das FM-Signal im Zeitbereich

Das Nachrichtensignal ist jetzt<sup>14.1</sup>

$$u_N(t) = \hat{u}_N \cos(\omega_N t) \quad ; \quad \hat{u}_N : \text{NF-Amplitude} \quad (14.1)$$

Bei FM benötigt man nach Gleichung (11.2) das Integral von Gleichung (14.1)

$$\int_0^t u_N(\tau) d\tau = \hat{u}_N \frac{\sin(\omega_N t)}{\omega_N} \quad (14.2)$$

Das FM-Zeitsignal ergibt sich hieraus mit Gleichung (11.4) zu:

$$\begin{aligned} u_{FM}(t) &= \hat{U}_C \cdot \cos[\Omega_C t + k_{FM} \cdot \frac{\hat{u}_N}{\omega_N} \sin(\omega_N t)] \\ &= \hat{U}_C \cdot \cos[\Omega_C t + \frac{\Delta\Omega}{\omega_N} \sin(\omega_N t)] \\ u_{FM}(t) &= \hat{U}_C \cdot \cos[\Omega_C t + \beta \sin(\omega_N t)] \end{aligned} \quad (14.3)$$

In Gleichung (14.3) sind folgende Abkürzungen eingeführt, die für meßtechnische Zwecke eine große Bedeutung haben:

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= k_{FM} \cdot \hat{u}_N & : & \text{ (Kreis-) Frequenzhub} \\ \beta = \eta &= \frac{\Delta\Omega}{\omega_N} = \frac{\Delta F}{f_N} & : & \text{ Modulations-Index} \end{aligned} \quad (14.4)$$

Der Modulations-Index ist der Phasenhub der FM, also gilt (mit verschiedenen in der Literatur üblichen Bezeichnungen):

$$\beta = \eta = \Delta\varphi = \Delta\Phi = \frac{k_{FM} \cdot \hat{u}_N}{\omega_N} \quad \text{Phasenhub} = \text{Modulations-Index} \quad (14.5)$$

### 14.2 Die Pendelzeigerdarstellung der FM

In komplexer Schreibweise wird aus Gleichung (14.3):

$$\underline{u}_{FM}(t) = \hat{U}_C \cdot \underbrace{e^{j\Omega_C t}}_{\text{Drehung}} \cdot \underbrace{e^{j\beta \sin(\omega_N t)}}_{\text{Pendelbewegung}} \quad (14.6)$$

Man denkt sich dabei die Ebene mit der Frequenz  $\Omega_C$  rotierend, entsprechend zu einem **stroboskopischen Bild einer rotierenden Scheibe** mit einer **Pfeilmarkierung**, und erhält dann das Bild einer Sin-förmigen **Pendelbewegung** des Zeigers, Bild 14.1.[22] Die Zeigerlänge entspricht der Amplitude  $\hat{U}_C$  der FM-Schwingung.

Da der maximale Phasenwinkel  $\Delta\varphi = \beta \sim \hat{u}_N$  ist, erhält man für feste NF-Frequenz  $\omega_N = \text{const}$  Pendelzeigerausschläge proportional zur NF-Amplitude.

<sup>14.1</sup>Es ist genauso gut möglich, das Nachrichtensignal als  $\sin(\omega_N t)$  anzusetzen; schließlich könnte man auch das Trägersignal Sin-förmig annehmen. Somit ergeben sich insgesamt 4 Kombinationsmöglichkeiten. Bei FM-Spektren, die in der Literatur angegeben werden, ist das zu beachten.

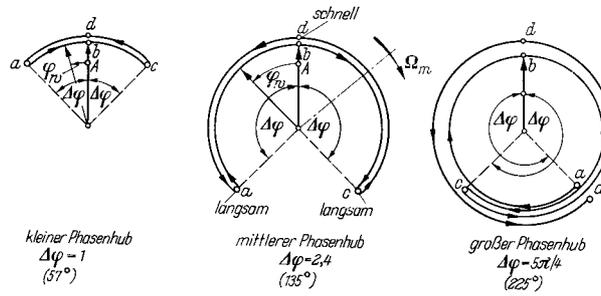


Bild 14.1: Pendelzeigerdiagramme für verschiedene maximale Phasenauslenkung

Da aber auch  $\Delta\varphi \sim 1/\omega_N$  ist, kann man genauso für feste NF-Amplitude zu den verschiedenen Pendelzeigerdiagrammen des Bildes 14.1 kommen, wenn die NF-Frequenz entsprechend verändert wird. Ein Pendelzeigerdiagramm ist ja auch nur eine **Momentaufnahme** aus welcher die tatsächliche Bewegung nicht ohne weiteres entnommen werden kann.

**14.2.1 Pendel-Zeiger bei Breitband-FM**

Bei Breitband-FM ist  $\Delta\varphi \gg 1$ . Daher sind dann in dem Pendelzeigerbild mehrfache volle Umdrehungen des Pendelzeigers möglich. In einem solchen Fall kann man annehmen, daß pro Umdrehung sich die Winkelgeschwindigkeit nicht merklich ändert. Damit hat man dann zu diesen Zeitpunkten praktisch eine konstante Winkelgeschwindigkeit und damit eine konstante Frequenz. In diesen Fällen kann man dann die Momentanfrequenz  $\varpi(t)$  durch die entsprechende Frequenz  $\omega$  ersetzen. Diese Annahmen wurden bei der Bestimmung der Spektralverteilung einer Breitband-FM angewendet.

**14.2.2 Zerlegung des Pendelzeigerdiagramms in seine Inphasen- und Quadratur-Komponente**

Entsprechend zur Gleichung (12.2) läßt sich auch der Pendelzeiger in eine Inphasen-Komponente  $I(t)$  und eine Quadratur-Komponente  $Q(t)$  aufspalten, Bild 14.2. (Amplitude der WM-Schwingung:  $A = \hat{U}_C$ )

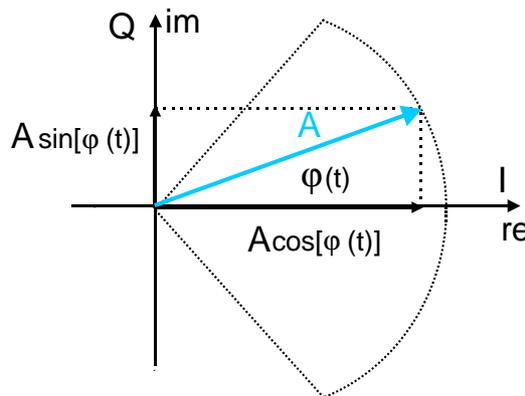


Bild 14.2: Zerlegung eines Pendelzeigers in seine Inphasen- und Quadratur-Komponente.  $A = \hat{U}_C$

Aus Bild 14.2 liest man ab:

$I(t) = \hat{U}_C \cos[\varphi(t)]$	<b>Inphase-Komponente</b>	(14.7)
$Q(t) = \hat{U}_C \sin[\varphi(t)]$	<b>Quadratur-Komponente</b>	

Wird in Gleichung (14.7)  $\varphi(t) \sim u_N(t)$  gewählt, so erhält man eine Phasenmodulation. Für den Zeiger erhält man hiermit:

$$\underline{u}_{PM}(t) = [I(t) + jQ(t)] \cdot e^{j\Omega_C t} \tag{14.8}$$

Die Zerlegung in die beiden orthogonalen Komponenten gilt für **beliebige Werte des Phasenwinkels** (= Modulationsindex)  $\Delta\varphi = \beta$ . Die Projektionen des I-Zeigers bzw. Q-Zeigers liefern die zugehörigen Zeitverläufe der I- bzw. Q-Komponente, Bild 14.3. [22]

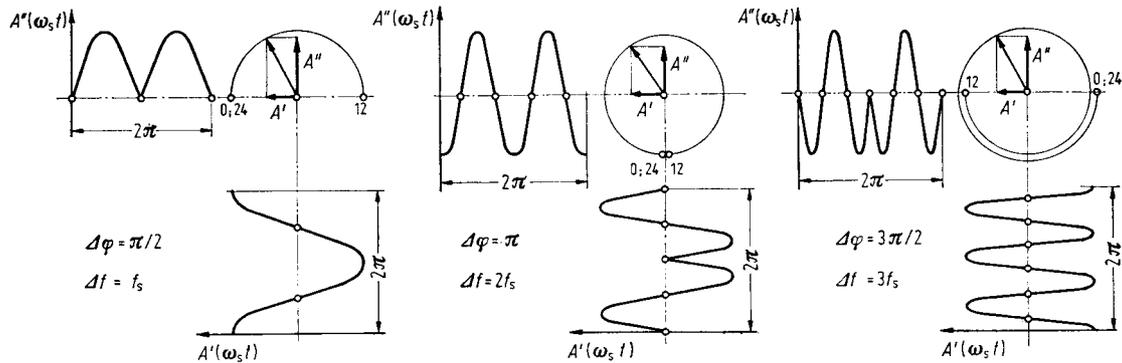


Bild 14.3: Der zeitliche Verlauf der I- und Q-Komponenten für Winkelmodulationen mit unterschiedlichen Phasenhuben.

Die Zeitverläufe der I-Komponenten und der Q-Komponenten sind typische Beispiele für die I und Q Signale im Phasenmodulator nach Bild 12.1, falls  $\varphi(t)$  einen cos-förmigen Zeitverlauf hat.

### 14.3 Die Spektralverteilung des FM-Signals für Cos-förmiges Nachrichtensignal

Die Gleichung für das FM-Zeitsignal, Gleichung (14.3), wird hierzu mit Hilfe der trigonometrischen Beziehung  $\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$  aufgespalten. Diese Aufspaltung ist identisch zu der in Gleichung (12.2), in welcher aber noch allgemein  $\varphi(t)$  steht.

$$\begin{aligned}
 u_{FM}(t) &= \hat{U}_C \cdot \cos[\Omega_C t + \beta \sin(\omega_N t)] \\
 &= \hat{U}_C \cos(\Omega_C t) \cos[\beta \sin(\omega_N t)] - \hat{U}_C \sin(\Omega_C t) \sin[\beta \sin(\omega_N t)]
 \end{aligned}
 \tag{14.9}$$

Diese Aufspaltung liefert wieder die Inphase- und Quadratur-Komponenten.

$  \begin{aligned}  I(t) &= \hat{U}_C \cos[\beta \sin(\omega_N t)] \\  Q(t) &= \hat{U}_C \sin[\beta \sin(\omega_N t)]  \end{aligned}  $	<b>Inphase-Komponente</b> <b>Quadratur-Komponente</b>	$(14.10)$
---	--	-----------

Die Inphase- und Quadratur-Komponenten werden nun in komplexer Schreibweise zu der **komplexen Einhüllenden**  $\underline{E}_{FM}(t)$  der Winkelmodulation zusammengefaßt, woraus sich auch sofort wieder der Zeitverlauf der modulierten Schwingung gewinnen läßt.

$  \begin{aligned}  \underline{E}_{FM}(t) &= I(t) + jQ(t) && \text{komplexe Einhüllende} \\  &= \hat{U}_C \cdot e^{j\beta \sin(\omega_N t)} \\  u_{FM}(t) &= \Re \{ \underline{E}_{FM}(t) \cdot e^{j\Omega_C t} \}  \end{aligned}  $	$(14.11)$
--	-----------

Aus Gleichung (14.11) entnimmt man unmittelbar:

- $\underline{E}_{FM}$  enthält die vollständige Information über den Modulationsprozess, denn  $u_{FM}(t)$  läßt sich aus  $\underline{E}_{FM}(t)$  eindeutig rückgewinnen.
- $|\underline{E}_{FM}(t)| = \hat{U}_C = const.$ , wie es für eine winkelmodulierte Schwingung sein muß.
- Geometisch ist die komplexe Einhüllende  $\underline{E}_{FM}(t)$  die **Ortskurve** des Amplitudenzeigers  $\vec{A}(t)$  in Bild 14.2.
- **Die komplexe Einhüllende hat die Periodizität des Nachrichtensignals**, hier einer Cos-Schwingung, wie man auch aus der Pendelzeigerdarstellung, Bild 14.3, sieht.
- Damit ist  $\underline{E}_{FM}(t)$  periodisch und läßt sich daher in eine **Fourier-Reihe** zerlegen.

Die Entwicklung in eine (komplexe) Fourier-Reihe lautet:

$$\underline{E}_{FM}(t) = \hat{U}_C \cdot e^{j\beta \sin(\omega_N t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{jn\omega_N t} \quad (14.12)$$

Die Koeffizienten  $C_n$  dieser Reihenentwicklung müssen jedoch nicht extra berechnet werden, weil aus der Theorie der **Besselschen Funktionen** folgende Beziehung bekannt ist ( $J_n(\beta)$ : Besselfunktion 1. Art, n. Ordnung):

$$e^{j\beta \sin(x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cdot e^{jn x} \quad (14.13)$$

Damit sind die Koeffizienten  $C_n$  der Reihenentwicklung:

$$C_n = \hat{U}_C \cdot J_n(\beta) \quad (14.14)$$

Folglich gilt für die komplexe Einhüllende:

$$\underline{E}_{FM}(t) = \hat{U}_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cdot e^{jn\omega_N t} \quad (14.15)$$

Aus Gleichung (14.11) erhält man somit für die Zeitfunktion der FM-Schwingung

$$\begin{aligned} u_{FM}(t) &= \hat{U}_C \cdot \Re \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{jn\omega_N t} \cdot e^{j\Omega_C t} \right\} \\ &= \hat{U}_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[(\Omega_C + n \cdot \omega_N) t] \end{aligned} \quad (14.16)$$

Der 2. Ausdruck in Gleichung (14.16) läßt sich direkt Fourier-transformieren, wodurch man die **Spektralverteilung der Cos-förmig modulierten FM** erhält.

$$U_{FM}(\omega) = \frac{\hat{U}_C}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \{ \delta(\omega - \Omega_C - n \cdot \omega_N) + \delta(\omega + \Omega_C + n \cdot \omega_N) \} \quad (14.17)$$

Eine Analyse der Gleichung (14.17) zeigt, daß das FM-Spektrum einer mit Cos-förmigem Signal modulierten FM-Schwingung (in Abhängigkeit von  $\beta$  und damit von der NF-Amplitude und/oder der NF-Frequenz) aus **einer Trägerlinie und vielen Seitenlinienpaaren** besteht. Die **Größe dieser Linien** wird (außer durch  $\hat{U}_C$ ) wie folgt festgelegt:

- Trägerlinie : durch  $J_0(\beta)$
- 1. Seitenlinienpaar : durch  $J_1(\beta)$
- 2. Seitenlinienpaar : durch  $J_2(\beta)$
- usw. für alle weiteren Seitenlinienpaare

Aus Gleichung (14.17) scheint zunächst zu folgen, daß das mit Hilfe der Besselfunktionen gewonnene FM-Spektrum theoretisch aus  $\infty$  vielen Linien besteht. Daß dem praktisch nicht so ist, geht aber bereits aus den vorausgegangenen Abschätzungen für die Spektralverteilung der Winkelmodulationen hervor. Der scheinbare Widerspruch löst sich auf, wenn man die Besselfunktionen näher betrachtet.

### 14.3.1 Die Besselfunktionen

Die Besselfunktionen (Zylinderfunktionen) dienen ursprünglich der Beschreibung mechanischer Schwingungsformen, wie sie z.B. entstehen, wenn eine kreisrunde Scheibe, die zuvor bestäubt wurde, z.B. mittels eines Geigenbogens zu akustischen Schwingungen angeregt wird.<sup>14.2</sup> In den Knotenlinien der Schwingung bleibt der Staub liegen, Bild 14.4. Diese „Chladni'schen Klangfiguren“ wurden bereits 1787 entdeckt.

<sup>14.2</sup> Ähnliche Figuren ergeben sich für die Feldverteilung in einem runden Hohlleiter für Mikrowellen.



Bild 14.4: Beispiele für Chladni'sche Klangfiguren

Die für die Winkelmodulationen interessante 1. Art der Besselfunktionen ( $J_n$  : 1. Art, n. Ordnung) kann z.B. wie folgt berechnet werden.

$$J_n(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \cdot \left(\frac{\beta}{2}\right)^{n+2k} \tag{14.18}$$

Mit

$$\beta = k_{FM} \cdot \hat{U}_N / \omega_N$$

geht die NF-Amplitude  $\hat{U}_N$  **direkt** und die NF-Frequenz  $\omega_N$  **reziprok** in den Wert von  $\beta$  ein.

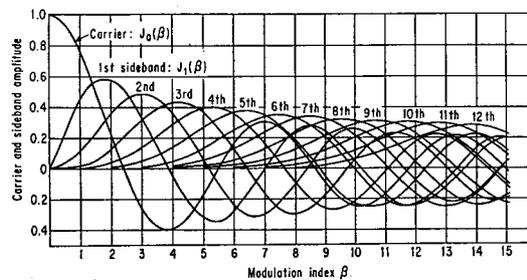


Bild 14.5: Besselfunktionen 1. Art als Funktion des Arguments  $\beta$

Den Verlauf der Besselfunktionen kann man Bild 14.5 [1] entnehmen. Ein **negativer** Wert der Besselfunktionen bedeutet, daß die zugehörigen Linien **gegenphasig** für diese Werte von  $\beta$  sind. Auf die Phasenbeziehungen der Linien untereinander wird später eingegangen. Bei der üblichen Spektraldarstellung werden nur **Beträge** gezeichnet. Dies geschieht in Übereinstimmung mit der Anzeige eines Spektrumanalyzers.

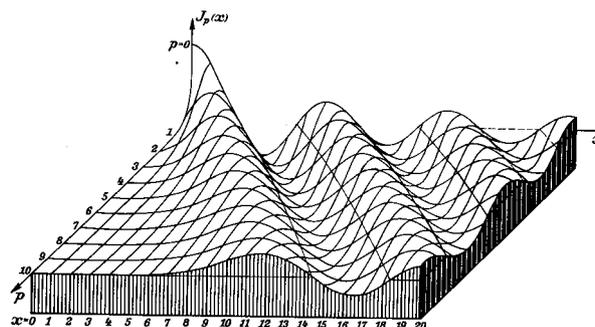


Bild 14.6: Dreidimensionale Darstellung der Besselfunktionen

Aus der 3-dimensionalen Darstellung der Besselfunktionen in Bild 14.6 [21] sieht man deutlich, daß die Besselfunktionen mit höherer Ordnungszahl  $n$  erst bei größeren Werten des Modulationsindex  $\beta = \eta = \Delta\Phi$  wesentlich von 0 verschiedene Werte haben.

In einer weiteren Darstellung, Bild 14.7, kann man schließlich erkennen, daß die Besselfunktionen der Ordnung  $n$  erst ab  $\beta > n/2$  merkbare Werte annehmen. Somit wird klar, daß das FM-Spektrum gemäß Gleichung (14.17) praktisch aus einer **endlichen Anzahl** von Linien besteht.

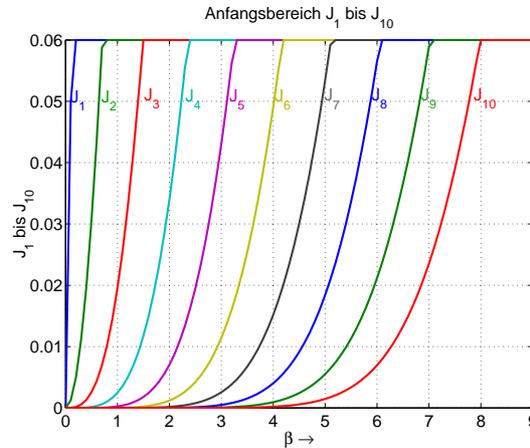


Bild 14.7: Anfangsbereiche der Besselfunktionen für kleine Werte bis 0,06

Da der Modulationsindex  $\beta$  von der Signalamplitude  $\hat{U}_N$  abhängt, hat das FM-Spektrum mit steigender Signalamplitude immer mehr Seitenlinien, da dann immer mehr Besselfunktionen höherer Ordnung  $n$  von 0 verschieden sind.

Andererseits hat die Zeitfunktion der FM-Schwingung eine **konstante Amplitude** und damit eine **konstante Leistung**.

Da nach dem **Parseval'schen Theorem** die Leistung im **Zeitbereich** gleich der Leistung im **Frequenzbereich** ist, kann die Größe der (vorhandenen) Linien nicht unverändert bleiben, wenn neue Linien hinzukommen. Für die Gesamtheit aller Linien eines FM-Spektrums gilt die Beziehung:

$$P \sim U_C^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = const. \rightsquigarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = J_0^2(\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} 2J_n^2(\beta) = 1 \tag{14.19}$$

Daraus erklärt sich qualitativ, daß sich — mit wachsendem  $\beta$  — die Größe aller Linien ändert und insbesondere auch zu 0 werden kann (Nullstellen der Besselfunktionen). Diese Nullstellen der Besselfunktionen, Bild 14.8, sind insbesondere **meßtechnisch** von Interesse, da sich die Nullstelle einer Linie (in Abhängigkeit von  $\beta$ ) mit Hilfe eines selektiven Voltmeters (Pegelempfänger) oder eines Spektrumanalyzers sehr exakt bestimmen läßt.

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$J_n(x) = 0$ Nullstellen	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715	9.9361
	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386	13.5893
	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002	17.0038
	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801	20.3208
	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178	23.5861
	18.0711	19.6159	21.1170	22.5827	24.0190	25.4303	26.8202
$J_n'(x) = 0$ Extrema	0.0000	1.8412	3.0542	4.2012	5.3176	6.4156	7.5013
	3.8317	5.3314	6.7061	8.0152	9.2824	10.5199	11.7349
	7.0156	8.5363	9.9695	11.3459	12.6819	13.9872	15.2682
	10.1735	11.7060	13.1704	14.5859	15.9641	17.3128	18.6374
	13.3237	14.8636	16.3475	17.7888	19.1960	20.5755	21.9317
	16.4706	18.0155	19.5129	20.9725	22.4010	23.8036	25.1839

Bild 14.8: Nullstellen und Extrema der Besselfunktionen

Da die Information bei einer Modulation nicht im Träger, sondern in den Seitenlinien steckt, ist das Verhältnis von Trägerleistung zu Seitenbandleistung interessant, Bild 14.9. [21] Die Nullstellen der Trägerleistung für  $\beta = 2,4048$ ;  $\beta = 5,5201$ ;  $\beta = 8,6537$  sind meßtechnisch zur Bestimmung der Modulatorkonstante  $k_{FM}$  von Interesse,

Die FM hat also ein günstiges Verhältnis von Seitenbandleistung zu Trägerleistung, besonders da  $\beta$  bei analogen Frequenzmodulationen meist groß ist. Im Unterschied dazu hat ein AM-Sender bei  $m = 1$  (100%

Amplituden-Modulation) ein Verhältnis von Trägerleistung / Seitenbandleistung von 1:(0,5). Im Unterschied zu einem AM-Sender gibt es bei einem FM-Sender keine „Übermodulation“ in diesem Sinne. Es darf allerdings der vorgeschriebene maximale Frequenzhub  $\Delta\Omega_{\max}$  bzw.  $\Delta F_{\max}$  nicht überschritten werden, damit es zu keinen Nachbarkanalstörungen kommt.

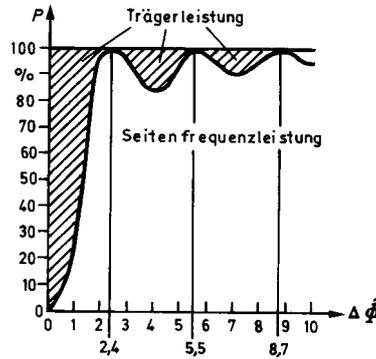


Bild 14.9: Trägerleistung zu Seitenbandleistung in Abhängigkeit vom Phasenhub (Modulationsindex)

### 14.3.2 Bestimmung des FM-Spektrums aus den Besselfunktionen

Aufgrund der Eigenschaften des Modulators:  $k_{FM}$  und des Signals:  $\hat{U}_N$  und  $\omega_N$  gewinnt man den zugehörigen Phasenhub  $\beta$

$$\beta = \frac{k_{FM} \cdot \hat{U}_N}{\omega_N} = \frac{\Delta\Omega}{\omega_N} = \frac{\Delta F}{f_N} \tag{14.20}$$

Mit dem so erhaltenen Wert für  $\beta$  geht man in die Besselkurven und liest (betragsmäßig) die Größe der Linien aus, Bild 14.10. Bei der Darstellung des Bildes 14.10 wurde die Eigenschaft der Besselfunktionen:  $J_{-n}(x) = -J_n(x)$  für  $n$  **ungerade**, was zu negativen Linien führt, sowie der Faktor 1/2 aus der Spektralzerlegung, Gleichung (14.17) berücksichtigt. In Übereinstimmung mit der Anzeige eines Spektumanalyzers wird jedoch meist der **Betrag** des FM-Spektrums aufgezeichnet. Das gleiche Spektrum für  $\beta = 5$ , jetzt betragsmäßig gezeichnet, dafür aber in der zweiseitigen Darstellung (negative Frequenzen), zeigt Bild 14.11. [23]

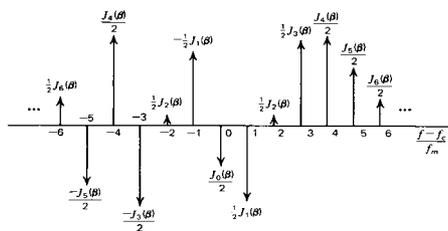


Bild 14.10: Die Größe der Spektrallinien aus den Besselkurven für  $\beta = 5$

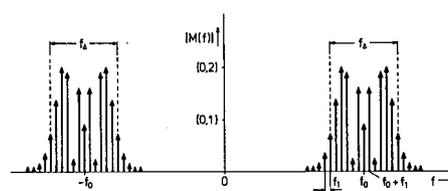


Bild 14.11: Betrag des FM-Spektrums für  $\beta = 5$  in zweiseitiger Darstellung

In der Modulationstechnik beschränkt man sich allerdings häufig auch noch auf eine einseitige Darstellung (ohne die negativen Frequenzen)<sup>14.3</sup>.

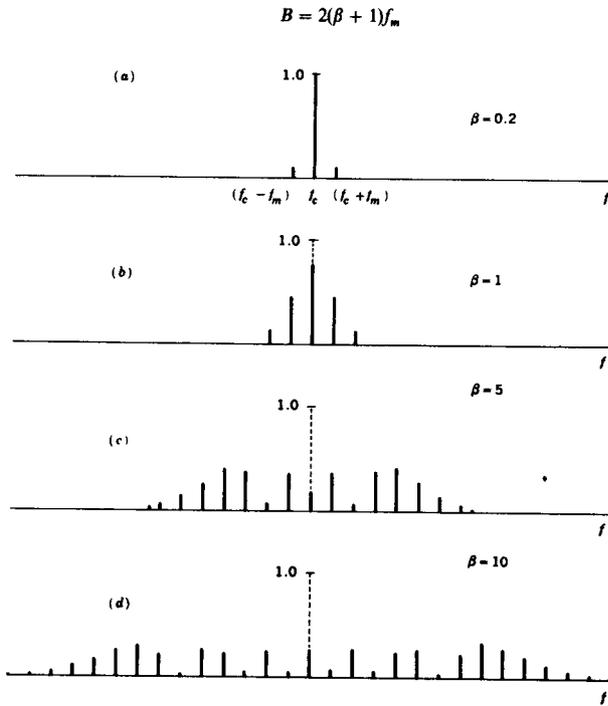


Bild 14.12: FM-Spektren für Cosinus Signal bei unterschiedlicher Amplitude;  $\beta = k_{FM} \cdot \hat{u}_m / f_m$

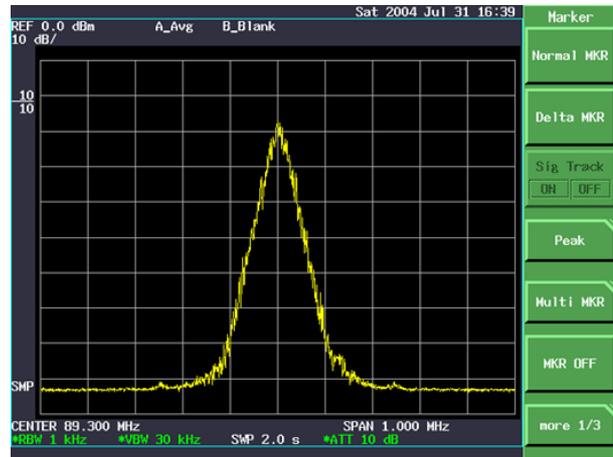


Bild 14.13: FM-Spektrum eines UKW-Senders mit Programm (Jazzmusik), KVOB, Denver, Colorado USA, Region 2 [28]. Der Spektralanalysator zeigt ein gemittelt Spektrum. Man kann dies auffassen als Mittelwert aus verschiedenen Bessel-Spektren mit unterschiedlichen Werten für  $f_m$  und  $\beta$ . Bei leisen Passagen ist  $\beta \rightarrow 0$ .

### 14.3.3 FM Spektrum eines UKW-Senders

Die Form eines FM-Spektrums bei Modulation mit „Programm“, Bild 14.13 [28], kann man näherungsweise erklären, wenn man die FM-Spektren für eine Cosinus-Schwingung<sup>14.4</sup> bei unterschiedlicher Amplitude betrachtet, Bild 14.12 [9], und berücksichtigt, daß die Amplitude zwischen Null und einem Maximalwert dabei schwankt. Mittelt man die einzelnen Spektren für die unterschiedlichen Amplituden, was ein Spektralanalysator auch tut, erhält man näherungsweise eine dreiecksförmige Spektralverteilung der FM. Linien sind dabei keine zu sehen, weil das Nachrichtensignal hier nicht Cosinus-förmig ist, sondern das gesamte NF Frequenzband umfaßt.

Der Frequenzhub  $\Delta\Omega$  läßt sich in Bild 14.12 recht bequem bestimmen. Mit Gleichung (14.20) wird durch einfache Umstellung:

$$\Delta\Omega = \beta \cdot \omega_N \rightsquigarrow \Delta F = \beta \cdot f_m \tag{14.21}$$

Da der Modulationsindex  $\beta$  und der Linienabstand  $\omega_N$  bekannt sind, hat man sofort den Frequenzhub  $\Delta\Omega$ .

### 14.4 Das Zeigerdiagramm der FM

Im Unterschied zum **Pendelzeiger** der FM, Bild 14.1, bei dem die **zeitliche Bewegung** des komplexen FM-Zeigers betrachtet wird<sup>14.5</sup>, setzt sich das **Drehzeigerdiagramm** der FM aus den Zeigern des Trägers ( $\sim J_0(\beta)$ ), sowie sämtlichen Seitenbandzeigern ( $\sim J_n(\beta), n = 1, 2, \dots$ ) zusammen, also aus den Bestandteilen des **FM-Spektrums**. Da die Seitenlinien jeweils unterschiedliche Frequenzen haben, ergeben sich **Relativedrehungen** der Zeiger zueinander. Das Drehzeigerdiagramm FM entspricht insofern dem Zeigerdiagramm der AM. Es entspricht einer Darstellung im Frequenzbereich, da sich in ihm die Eigenschaften des FM-Spektrums widerspiegeln. Wegen der zeitlichen Bewegung der Zeiger gestattet das Drehzeigerdiagramm auch einen **Übergang vom Frequenzbereich in den Zeitbereich**.

<sup>14.3</sup>Beim Problem der Frequenzumsetzung tritt eine Faltung auf. Hierfür ist dann aber in jedem Fall mit zweiseitiger Darstellung zu arbeiten!

<sup>14.4</sup>Für Cosinus-förmige Nachricht  $u_m(t) = \hat{U}_m \cos(\omega_m t)$  und Modulatorkonstante  $k_{FM}$  wird der Frequenzhub  $\Delta f = k_{FM} \cdot \hat{U}_m$  und der Modulations-Index  $\beta = \frac{\Delta f}{f_m}$ . Es ergibt sich die FM-Bandbreite (Carson-Bandbreite)  $B \approx 2(\beta + 1) \cdot f_m$ , die damit von der Amplitude der Nachricht  $\hat{U}_m$  abhängt.

<sup>14.5</sup>Der Pendelzeiger entspricht einer Darstellung der FM im Zeitbereich.

### 14.4.1 Das Drehzeigerdiagramm für Schmalband-FM

Bei Schmalband-FM ist  $\beta \ll 1$ . Damit wird aus Gleichung (14.10) entsprechend zu Gleichung (12.3)

$$\begin{cases} I(t) \approx \hat{U}_C \\ Q(t) \approx \hat{U}_C \cdot \beta \sin(\omega_N t) \end{cases} \quad (14.22)$$

Hieraus bestimmt sich die komplexe Einhüllende zu:

$$\underline{E}_{FM}(t) = I(t) + jQ(t) \approx \hat{U}_C [1 + j\beta \sin(\omega_N t)] \quad (14.23)$$

Für die Zeitfunktion berechnet sich damit:

$$\begin{aligned} u_{FM}(t) &\approx \hat{U}_C [\cos(\Omega_C t) - \beta \sin(\Omega_C t) \cdot \sin(\omega_N t)] \\ &\approx \hat{U}_C \left\{ \cos(\Omega_C t) - \frac{\beta}{2} \cos[(\Omega_C - \omega_N)t] + \frac{\beta}{2} \cos[(\Omega_C + \omega_N)t] \right\} \end{aligned} \quad (14.24)$$

Aus der Zeitfunktion erhält man das zugehörige Zeigerdiagramm.

$$\underline{u}_{FM}(t) = \hat{U}_C \left\{ e^{j\Omega_C t} - \frac{\beta}{2} e^{j(\Omega_C - \omega_N)t} + \frac{\beta}{2} e^{j(\Omega_C + \omega_N)t} \right\} \quad (14.25)$$

Gegenüber dem Zeigerdiagramm der AM hat ein Seitenbandzeiger **negatives Vorzeichen**. Die Schwingungsebene der 1. Seitenbandzeiger ist also um  $90^\circ$  gegenüber dem Trägerzeiger gedreht, so daß sich folgendes Bild ergibt, Bild 14.14.

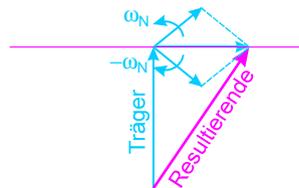


Bild 14.14: Das Zeigerdiagramm der Schmalband-FM/PM

Mit nur einem Seitenband-Zeigerpaar läuft der Summenzeiger nicht auf einer Kreislinie, sondern nur noch **tangential** dazu. Hierdurch entstehen Amplituden- und Phasen-Fehler. Für FM ist der **Phasenfehler** entscheidend, da der Amplitudenfehler mittels eines Begrenzerverstärkers beseitigt werden kann.

Die Blockschaltung, mit deren Hilfe eine Schmalband-PM erzeugt werden kann, wurde bereits in Bild 12.2 auf Seite 41 vorgestellt. Um eine Schmalband-FM zu erzeugen, muß zuvor noch das Nachrichtensignal integriert werden, siehe Bild 11.5 auf Seite 39. Dies kann man auch aus dem Zeigerdiagramm in Bild 14.14 erkennen, bei dem die Phasenauslenkung unabhängig von der Umlaufgeschwindigkeit der Seitenband-Zeiger ist.

### 14.4.2 Das Drehzeigerdiagramm der Breitband-FM

Bei Breitband-FM ist  $\beta \gg 1$ . Man geht wieder von der komplexen Einhüllenden aus, Gleichungen (14.11, 14.12) und wählt zur Abkürzung  $\beta \sin(\omega_N t) = x$ :

$$\underline{E}_{FM}(t) = \hat{U}_C e^{j\beta \sin(\omega_N t)} = \hat{U}_C e^{jx} \quad (14.26)$$

Den Ausdruck  $e^{jx}$  kann man in eine Reihe entwickeln und wie folgt interpretieren:

$$\begin{aligned} e^{jx} &= 1 + jx + \frac{j^2 x^2}{2} + \frac{j^3 x^3}{6} + \dots \\ &\quad \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 0^0 & 90^0 & 180^0 & 270^0 \end{matrix} \quad \leftarrow \text{Drehung der Schwingungsebene} \\ &\quad \begin{matrix} J_0 & J_1 & J_2 & J_3 \end{matrix} \quad \leftarrow \text{Zeigerlängen gemäß Bessel} \end{aligned} \quad (14.27)$$

Die Schwingungsebene der einzelnen Seitenbandzeiger dreht also jeweils um  $90^\circ$  weiter. Hierbei ist folgendes zu beachten:

- Die Länge der Zeiger ist aus den Besselfunktionen für den betreffenden Modulationsindex  $\beta$  zu entnehmen.
- Der Trägerzeiger ist einmal zu nehmen, alle **Seitenbandzeiger** aber **doppelt**.
- **Negatives Vorzeichen** einer Besselfunktion führt zu **negativem Vorzeichen für den Winkel der Schwingungsebene** für das betreffende Zeigerpaar. Also ist hierfür die Richtung umzudrehen.
- Günstig ist es, die Drehzeiger in einer Extremlage zu zeichnen.

Die Richtungen der Schwingungsebenen werden besonders deutlich, wenn man die rechtsseitige (oder linksseitige) Maximalauslenkung  $\pm\beta = \pm\Delta\Phi$  betrachtet. In dieser Art sind die Drehzeigerdiagramme üblicherweise gezeichnet.

Den Zusammenhang zwischen Bessel-Spektrum und Drehzeigerdiagramm (rechtsseitige Extremlage) zeigt Bild 14.15. [26] Der resultierende Zeiger entspricht dem Pendelzeiger. Dies kann als Kontrolle für die fehlerfreie Konstruktion des Drehzeigerdiagramms verwendet werden.

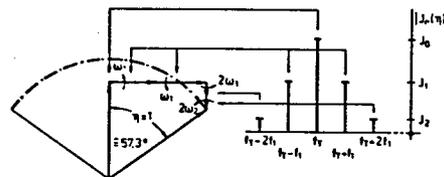


Bild 14.15: Besselspektrum und Drehzeigerdiagramm

Beispiele für andere Werte des Modulationsindex  $\beta$  zeigt Bild 14.16. [21] Man beachte die Umkehrung der jeweiligen Schwingungsrichtung, falls die zugehörige Besselfunktion einen negativen Wert hat.

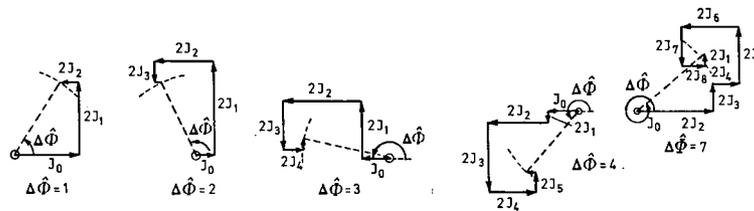


Bild 14.16: Beispiele für Drehzeigerdiagramme

### 14.5 Verzerrungen der FM bei der Übertragung

Die **linearen Verzerrungen**, die eine FM-Schwingung beim Durchgang durch ein lineares Übertragungssystem (Filter usw.) erleidet, wirken sich nach der Demodulation als **nichtlineare Verzerrungen der Nachricht** aus. Diesen Zusammenhang kann man mit Hilfe des Drehzeigerdiagramms finden, denn es ist möglich, das Drehzeigerdiagramm nicht nur für Extremwerte, sondern auch für alle Zwischenwerte zu konstruieren, siehe Bild 14.17 [26] für verschiedene Zeiten des Diagramms Bild 14.15.

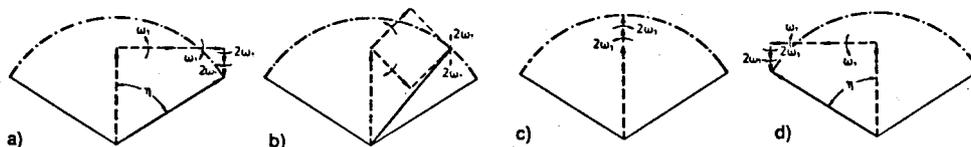


Bild 14.17: Das Drehzeigerdiagramm zu verschiedenen Zeiten

Die Übertragung über ein Filter bewirkt für die Frequenzen einer jeden Linie im Besselspektrum eine entsprechende Änderung der Länge und des Winkels der betreffenden Seitenbandzeiger. Damit setzt sich das Drehzeigerdiagramm am Ausgang des Übertragungssystems anders zusammen als es am Eingang war. Da aber der zeitliche Verlauf des resultierenden **Summenzeigers** (= Pendelzeiger) der Nachricht entspricht, kann man so die Verzerrung des demodulierten FM-Signals berechnen. Bild 14.18 zeigt für eine FM mit  $\beta = 3$  wie sich eine harte Bandbegrenzung der 4. und aller weiteren Linien auswirkt.

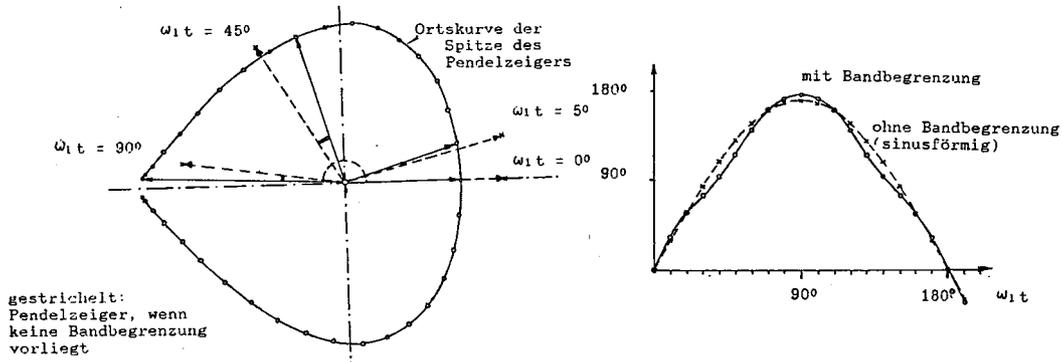


Bild 14.18: Beispiel für Drehzeigerdiagramm und demoduliertes Signal bei harter Bandbegrenzung

In Bild 14.19 sind zwei weitere Beispiele für die Verzerrung des Drehzeigerdiagramms dargestellt.

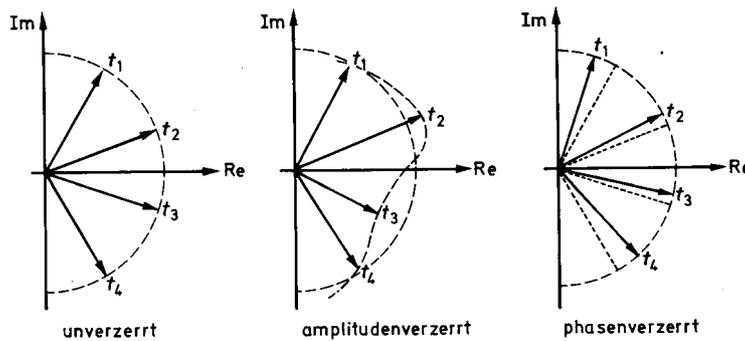


Bild 14.19: Beispiele für die Verzerrung des Drehzeigerdiagramms

Die in diesen Drehzeigerbildern augenfällige **Amplitudenverzerrungen der FM** sind jedoch unerheblich, da diese in der Praxis mit Hilfe eines **Begrenzer-Verstärkers** beseitigt werden.

**Wesentlich sind nur die Phasen-Verzerrungen** bzw. die Laufzeit-Verzerrungen, wobei sich die (Gruppen-) Laufzeit  $t_{gr}$  eines Systems aus der Ableitung der Phase  $\Theta$  nach der Frequenz ergibt:

$$t_{gr}(\omega) = d\Theta(\omega)/d\omega \tag{14.28}$$

Es zeigt sich, daß ein Filter, welches minimale Verzerrungen für ein FM-Signal ergibt, einen **gauß-förmigen Amplitudengang** und eine **lineare Phase** bzw. eine **konstante Gruppenlaufzeit** haben sollte.

Für sehr großen Modulationsindex  $\beta \gg 1$  gibt es viele Seitenbandzeiger. Der Endpunkt des Summenzeigers wird dabei **schneckenförmig** erreicht, wie in Bild 14.17 für  $\beta = 7$  erkennbar wird. Die **Gauß-Form** des Filters<sup>14.6</sup> in Verbindung mit der linearen Phase, Bild 14.20, führt dazu, daß sich die Schnecke **zusammenzieht**, ohne die Lage des Endpunktes zu verändern.

### 14.6 Amplitudengrenzung der FM-Schwingung

Infolge von zeitlich veränderlichen Ausbreitungsbedingungen (Mehrwege-Empfang und Echos bei Mobilfunk, Rundfunk, Richtfunk usw.) entsteht u.a. eine **Amplitudenschwankung** des winkelmodulierten Signals. Diese

<sup>14.6</sup>Als Dämpfung, Bild 14.20, wird aus der Gauß-Glocke eine Parabel.

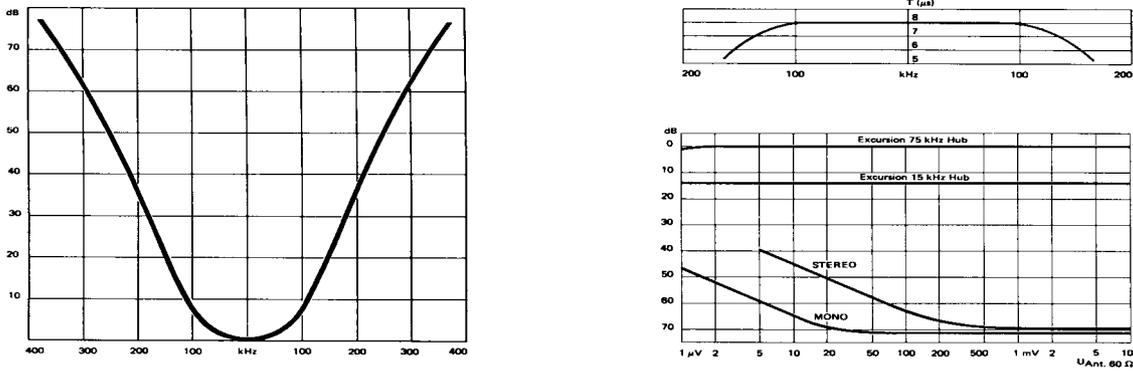


Bild 14.20: Dämpfungsverlauf und Gruppen-Laufzeit  $t_{gr}(f)$  eines FM ZF-Filters für minimale Verzerrungen des demodulierten Nachrichtensignals und Signal-zu-Geräusch-Abstand des demodulierten Signals

Amplitudenschwankungen sind (im Prinzip) ohne Einfluß auf den Informationsgehalt, da die Information in der Phase – und damit in der Lage der Nulldurchgänge des winkelmodulierten Zeitsignals – liegt. Da die Amplitudenschwankungen i.a. zu Störungen des demodulierten Signals führen, werden sie mittels Begrenzerverstärker beseitigt. Daraus ergeben sich zugleich folgende Vorteile im praktischen Betrieb:

- Alle Amplitudenstörungen (Mehrwege-Störungen) werden beseitigt, wenn keine Notches auftreten, die bis unterhalb der Begrenzerschwelle reichen. Für **digitale Modulation** ist dann kein Entzerrer erforderlich. (Anwendung bei Bluetooth)
- Alle (analogen FM-)Sender sind gleich laut, unabhängig von der Empfangsfeldstärke.
- Der Empfänger benötigt keine Verstärkungsregelung im Zwischenfrequenzteil.

Betrachtet man die Nulldurchgänge der FM-Schwingung als Abtastwerte für das Nachrichtensignal, so erhält man einen Abtastfaktor von  $\Omega_C/\omega_N \gg 2$ . Die Abtastbedingung ist somit übererfüllt (Oversampling).<sup>14.7</sup>

Der Begrenzerverstärker wird als **Kettenschaltung von Differenzverstärkern** realisiert. Wegen der Stromquelle im Differenzverstärker ist hiermit eine **Begrenzung ohne Sättigung** möglich, wodurch eine hohe Grenzfrequenz des Begrenzers erreichbar wird. Der große Amplitudenbereich kommt dadurch zustande, daß bei kleinen Eingangssignalen zunächst nur der letzte Differenzverstärker begrenzt, bei steigenden Eingangsamplituden der Reihe nach alle davorliegenden. Hieraus läßt sich auch noch bequem eine logarithmische Pegelanzeige gewinnen. Die dabei zulässigen Amplitudenwerte für das Eingangssignal liegen im Verhältnis von ca.  $3\mu V \cdots 0,3V$  d.h.  $(1 : 10^5)$ . Wird am Ausgang des Begrenzerverstärkers gefiltert, so liegt wieder eine FM-Schwingung mit konstanter Amplitude vor, Bild 14.21.

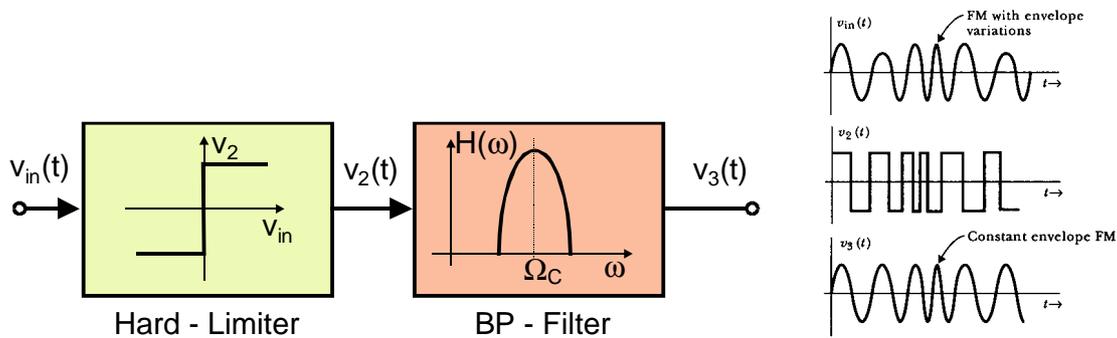


Bild 14.21: Amplitudenbegrenzung einer FM-Schwingung: Blockstruktur und Signale

<sup>14.7</sup>Dies zeigt eine weitere Methode für die *Demodulation* eines winkelmodulierten Signals auf, bei welcher keine  $FM \implies AM$  -Wandlung nötig ist.

### 14.6.1 Hubvergrößerung durch Frequenzvervielfachung

Filtiert man eine amplitudenbegrenzte FM-Schwingung nicht auf der Frequenz  $\Omega_C$  sondern auf einer ihrer ungeradzahigen Vielfachen  $(2n + 1) \cdot \Omega_C$ , so erhält man außer der entsprechenden Frequenzvervielfachung auch noch eine gleichartige Frequenzhub- und Phasenhub-Vervielfachung, Bild 14.22.

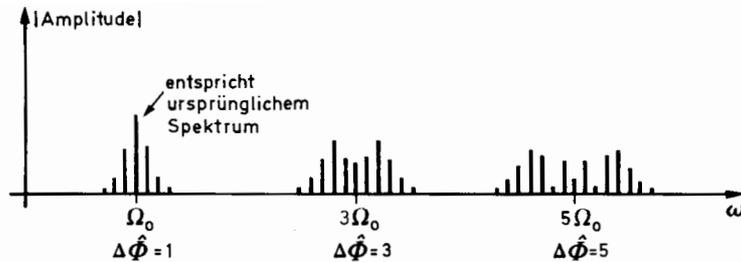


Bild 14.22: Spektrum der amplitudenbegrenzten FM-Schwingung: Der Hub  $\Delta\Phi$  ist proportional zur Vielfachen der Trägerfrequenz.

Die Hubvervielfachung um den Faktor  $2n+1$  sieht man am Einfachsten, wenn man die komplexe Darstellung der FM, Gleichung (14.6), betrachtet. Danach wird für das Eingangssignal  $\underline{u}_{\text{ein}}(t)$  bzw. für das Ausgangssignal  $\underline{u}_{\text{aus}}(t)$  des Begrenzerverstärkers:

$$\begin{aligned} \underline{u}_{\text{ein}}(t) &\sim e^{j\Omega_C t} \cdot e^{j\beta \sin(\omega_N t)} \\ \underline{u}_{\text{aus}}(t) &\sim \sum_n e^{j(2n+1)\Omega_C t} \cdot e^{j(2n+1)\beta \sin(\omega_N t)} \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (14.29)$$

Diese Art der Hubvervielfachung wird z.B. bei FM-Sendern angewendet, speziell wenn die FM mittels eines Phasenmodulators erzeugt wurde und daher zunächst nur ein sehr kleiner Frequenzhub möglich ist.

Ein entsprechender Effekt kann auch als **Störung in FM-Empfängern** auftreten, wenn die HF-Eingangsstufen **Nichtlinearitäten** aufweisen. Wird dann z.B. eine entsprechende Vielfache der Empfangsfrequenz mit einer Oberschwingung des Oszillators in die ZF umgesetzt, so hat diese FM einen entsprechend vervielfachten Hub. Nach der Demodulation erscheint dadurch ein Sender mit der entsprechenden vielfachen Lautstärke.

## Die Digitalen Modulationen

Ein wesentlicher oder prinzipieller Unterschied zwischen analogen und digitalen Modulationen zeigt sich am Beispiel einer Informationsübertragung unter Berücksichtigung der Störungen im Übertragungskanal.

### 15 Informations-Übertragung analog und digital

Die **analoge** Übertragung berücksichtigt insbesondere die Signalformen im Zeit- und Frequenzbereich. Hingegen werden die Störungen auf dem Übertragungsweg (Kanal) nur in zweiter Linie betrachtet. Es gibt dabei nur wenige Möglichkeiten, dagegen etwas zu unternehmen, wie z.B. die Vergrößerung der Sendeleistung, oder der Einsatz exponentieller Modulationen (FM, PM).

Prinzipiell ganz anders verhält es sich bei **digitaler** Übertragung. Hierbei werden zur Übertragung **Symbole** verwendet, die optimal an die Störungen durch den Kanal angepaßt werden können. **Die ausgesendeten Zeitverläufe der Symbole haben keinerlei Ähnlichkeiten mit den Zeitverläufen der zu übertragenden Nachricht.**

Die Vorteile einer Digitalen Übertragung werden dann besonders deutlich, wenn diese mit einer Analogen Übertragung verglichen wird. Hierfür wird als Beispiel eine Übertragung von Audio-Signalen betrachtet, wie sie z.B. als Musikübertragung im Rundfunk vorkommt.

#### 15.1 Analoge Übertragung

Bild 15.1 zeigt das Blockschaltbild eines Analogen Übertragungs-Systems mit einer Störung auf dem Übertragungskanal.  $Q_N$  ist die Nachrichten-Quelle, welche das Signal  $s(t)$  abgibt.  $S_N$  ist die Nachrichten-Senke, die das Signal  $g(t)$  empfängt, das aus  $s(t)$  und der Störung besteht. Bei einer analogen Übertragung geht diese Störung auf direktem Wege (voll oder teilweise, abhängig von der Modulationsart) in das empfangene Signal ein.

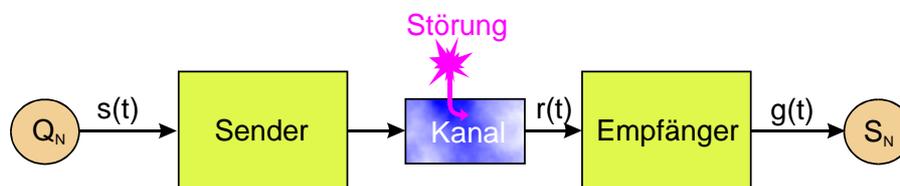


Bild 15.1: Analoges Übertragungs-System mit Störung im Kanal

Das Signal  $s(t)$  wird an den Kanal angepaßt bezüglich

- Frequenzbereich (durch Modulation),
- Bandbreite (durch Filterung).
- Störungen des Kanals (durch Wahl der Sendeleistung und der Modulations-Art).

##### 15.1.1 Aufgabe des analogen Empfängers

- **Aufgabe des analogen Empfängers** ist es, das **gesendete Nachrichten-Signal**  $s(t)$  empfangsseitig möglichst **originalgetreu zu rekonstruieren**.

Gewünscht ist also  $g(t) = s(t)$ , was jedoch grundsätzlich nicht exakt möglich ist, da die analoge (modulierte) Zeitfunktion auf dem Kanal über das verwendete (analoge) Modulationsverfahren eng mit  $s(t)$  verwandt ist. Erleidet das empfangene Signal eine Störung, so wirkt sich diese auch auf das demodulierte Signal  $g(t)$  aus.

- Bei Modulationen mit **geringer Bandbreite** (AM, DSB, QDSB, SSB) wirkt sich die **Störung stark** aus.
- Modulationen mit **vergrößerter Bandbreite** (FM, PM) werden um so weniger gestört, je größer die Bandbreite des modulierten Signals (entspricht der Kanal-Bandbreite  $B_{RF}$ ) gewählt wird.

- Dieser Zusammenhang wird durch den „Nachrichten–Quader“ ausgedrückt, für welchen gilt:

$$T_{\ddot{u}} \cdot B_{\text{RF}} \cdot D = \text{const} \quad (15.1)$$

Hierbei ist  $T_{\ddot{u}}$  die Zeitdauer der Übertragung (hier: Echt–Zeit),  $B_{\text{RF}}$  die Bandbreite der Übertragung und  $D$  die Dynamik des Kanals.

Die Dynamik  $D$  des Kanals ist gegeben durch

$$D = \log_2 \left( \frac{P_S + P_n}{P_n} \right) = \lg \left\{ 1 + \left( \frac{P_S}{P_n} \right) \right\} / \lg(2) \approx \frac{10 \cdot \lg(\text{SNR})}{10 \cdot \lg 2} \approx \frac{1}{3} \text{SNR/dB} \quad \textbf{Kanal-Dynamik} \quad (15.2)$$

wobei  $P_S$  die Signal–Energie und  $P_n$  die Energie der Störung (*noise*) und  $\left( \frac{P_S}{P_n} \right) = \text{SNR}$  das **Signal-zu-Geräusch-Verhältnis** ist.

- Erhöht man die Bandbreite  $B_{\text{RF}}$  der Übertragung, so wird (für gleiche Störwirkung bezogen auf das demodulierte Signal) eine geringere Dynamik  $D_{\text{Kanal}}$  im Kanal benötigt. Man kann dann bei gegebener Signal–Energie  $P_S$  eine größere Stör–Energie  $P_n$  zulassen oder bei gegebenem  $P_n$  die Signal–Energie  $P_S$  entsprechend verringern.

### 15.1.2 Beispiel AM–Übertragung

Zur Veranschaulichung dieses Sachverhaltes wird ein Beispiel einer amplitudenmodulierten Schwingung gewählt, Bild 15.2.

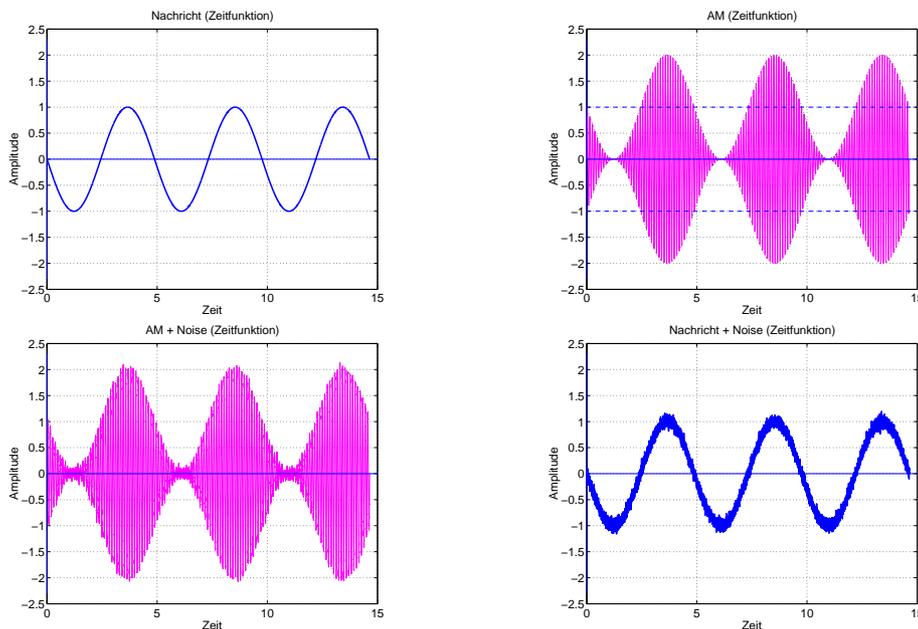


Bild 15.2: Übertragung einer Cos–förmigen Nachricht mittels AM über einen Kanal, der durch weißes Rauschen gestört ist.

Bei der AM gehen die Sörungen des Kanals voll in das demodulierte Signal ein. Andererseits kommt diese (historisch gesehen: alte) Modulationsart mit einem minimalen technischen Aufwand aus. Dies betrifft insbesondere den Empfänger. Die Philosophie zu Beginn der Rundfunkübertragung bestand darin, daß im Empfänger nur ein minimaler Aufwand nötig sein sollte. Unter den Gesichtspunkten des Marketings war dies bei der Einführung eines neuen Systems (anno 1923) sicherlich kein schlechter Ansatz. Demzufolge ist das Blockschaltbild des AM–Senders und des AM–Empfängers recht einfach, Bild 15.3.

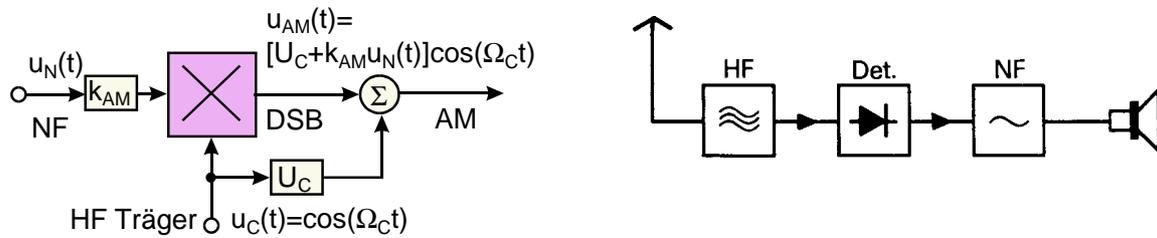


Bild 15.3: Blockschaltbild eines analogen Übertragungssystems (AM Sender und Empfänger)

## 15.2 Digitale Übertragung

Die zu übertragenden Nachrichtensignale werden in **digitale Symbole** umgewandelt. Damit sind die Zeitverläufe auf dem Übertragungskanal total verschieden von den Nachrichtensignalen am Ein- und Ausgang des Digitalen Übertragungs-Systems. Es besteht keinerlei Ähnlichkeit zwischen beiden Signalformen (Nachricht bzw. Symbole). Am Ausgang des Digitalen Senders erfolgt eine D/A Wandlung und am Eingang des Digitalen Empfängers eine A/D Wandlung der Symbole, Bild 15.4.

- Die Digitalen Symbole haben im Kanal analoge Zeitverläufe (in Form einer modulierten Schwingung).

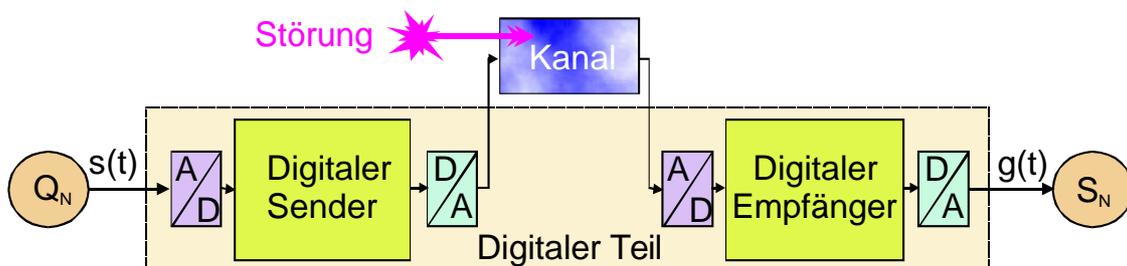


Bild 15.4: Digitales Übertragungs-System mit Störung im Kanal. Über den Kanal werden digitale Symbole übertragen, welche aber analoge Zeitverläufe haben.

Die Digitale Symbole werden so ausgewählt, daß sie **optimal an die Eigenschaften des Kanals angepaßt** sind hinsichtlich

- Frequenzbereich (als Digitale Modulation)
- Bandbreite (durch Symbol-Verrundung, daher analoge Zeitverläufe)
- Störungen (durch die Art der Digitalen Modulation und der Fehlerschutz-Codierung)

Die Störungen (im Kanal) sind z.B.:

- **Rauschen** (thermisch)
- **Echos** (Mehrwege-Ausbreitung)
- **Doppler-Verschiebungen** (bewegte Sender, Empfänger, Reflektoren)
- **Interferenzen** (fremde Sender)
- **Man-made-Noise** (elektromagnetische Störungen durch Funkenbildung)
- **Statics** (elektrische Entladungen in der Atmosphäre)
- **Jammer** (absichtliche Störsender)

### 15.2.1 Aufgabe des Digitalen Empfängers

Die **Aufgabe des Digitalen Empfängers** ist es, die **gesendeten Symbole zu erkennen**. Im Unterschied zum analogen Empfänger müssen die digitalen Symbole im Empfänger **nicht rekonstruiert** werden. Das ist ein Vorteil, denn ein digitales Symbol kann auch noch dann richtig erkannt werden, wenn es durch Störungen auf dem Übertragungsweg seine Form (leicht) verändert hat. Werden die empfangenen Symbole **richtig erkannt**, weist ihnen der digitale Empfänger die dafür **verabredeten Bitkombinationen** zu und es entsteht (trotz gestörter Symbolform) **keine empfangsseitige Störung** im wiedergegebenen Signal.

- **Die gesendeten und im Kanal übertragenen Symbole sind analoge Zeitfunktionen.** Dies ist notwendig, weil sie als **bandbegrenzt**es moduliertes Signal übertragen werden müssen.

Aufgrund der Notwendigkeit der optimalen Anpassung der Symbole an die verschiedenartigsten Störungen im Kanal hat sich eine „bunte Palette“ von Digitalen Modulationsverfahren, Fehlerschutz-Codierungen und Kombinationen aus beiden herausgebildet.

Als typische Vor- und Nachteile einer Digitalen Übertragung lassen sich angeben:

- Wiedererkennen von (bekannten) Symbolen ist (bis zu einer systembedingten Schwelle) fehlerfrei möglich. Im Unterschied dazu ist eine exakte Rekonstruktion eines (gestörten analogen) Empfangssignales praktisch nicht möglich.
- Werden die Störungen zu groß, werden zu viele Symbole nicht richtig erkannt, die Fehlerrate steigt und die Übertragung bricht zusammen.
- Nicht kompatibel mit analogen Übertragungsverfahren (z.B. im Rundfunk sind neue Empfänger erforderlich.)
- Höhere technische Komplexität (Fällt nicht ins Gewicht, da kundenspezifische digitale Schaltkreise bei großen Stückzahlen preiswert sind und die Funktion softwaremäßig realisiert wird.)
- Bandbreitenbedarf (bei Digitalübertragung aufgrund von Quellen-Codierung geringer als bei Analogübertragung, z.B. 4 DVB-T Fernsehkanäle statt 1 analogem Kanal)
- Quantisierungsgeräusch (Kann immer geringer gemacht werden als es im analogen Fall die Kanalstörungen sind.)

## 15.3 Eigenschaften der Signale im physikalischen Übertragungs-Kanal

### 15.3.1 Analoge Signale

Bei einer analogen Übertragung sind im Prinzip **alle Zeitverläufe** zulässig, die spektral innerhalb der (vom jeweiligen analogen System) zugelassenen Grenzfrequenzen liegen. Es gibt in diesem Sinne keine unzulässigen Zeitverläufe. Daher ist ein gesendeter Zeitverlauf, dem im Kanal eine Störung (Rauschen, Echos, usw.) überlagert wurde, ebenfalls ein „zulässiger“ Zeitverlauf. Der Empfänger hat keine Möglichkeit, diesen als „unzulässig“ zu erkennen und die Störung zu beseitigen. Mit diesem Problem kämpft der analoge Rundfunk seit seinen Kindertagen. Ein Beispiel hierzu ist in Bild 15.2 gezeigt.

### 15.3.2 Digitale Signale

Bei einer Digitalen Übertragung werden „nur“ **exakt zwischen Sender und Empfänger verabredete (analoge) Zeitverläufe** übertragen. Diese setzen sich aus **genau definierten Symbolen** zusammen, und nur diese sind „zulässige“ Zeitverläufe. Die Wahl der Symbole geschieht dabei jeweils so, daß die Übertragung optimiert wird, d.h. maximale Übertragungs-Rate bei minimaler Fehler-Rate.

**Der Empfänger kennt alle „zulässigen“ Symbolformen.** Er vergleicht die empfangene Zeitfunktion mit allen ihm bekannten Symbolformen. Dieser Vergleich geschieht mittels **Korrelation** (im Zeitbereich) oder mittels **Matched Filterung** (im Frequenzbereich). Aufgrund der überlagerten Störungen sind die empfangenen Symbole nie 100%ig gleich zu den im Empfänger gespeicherten Symbolen. Vielmehr ergibt sich i.a. eine gute Übereinstimmung mit einer Symbolform und eine schlechte mit allen anderen. Es muß also eine **Entscheidungs-Schwelle** definiert sein, oberhalb dieser auf eine „gute Übereinstimmung“ entschieden wird.

Ist die **Energie** in den empfangenen Symbolen größer als die Energie der Störungen, so wird diese Vorgehensweise mit ganz wenigen Ausnahmen zu einer richtigen Entscheidung führen. Dem im Empfänger erkannten Symbol wird die verabredete Bit-Folge zugeordnet und man erhält so den empfangsseitigen Bitstrom. Dieser ist dann fehlerfrei und von den Störungen im Kanal ist dann nichts mehr zu merken.

**Störungen sind Zufallsgrößen.** Diese können in einzelnen Fällen sehr wohl so groß werden, daß der Empfänger auf eine falsche Symbolform entscheidet. Dann entsteht ein Symbolfehler. Je nach zugeordneter Bit-Folge können daraus ein oder mehrere Bit-Fehler folgen.

Bit-Fehler können durch **Fehlerschutz-Codierung** (teilweise oder ganz) korrigiert werden. Je nach der Struktur der Bit-Fehler werden unterschiedliche Codierverfahren angewendet.

## Basisband-Signale

Die Auf- und Abbereitung der Signale für Digitale Übertragungs-Systeme geschieht weitestgehend im Basis-Band. Unter dem Basis-Band wird ein Frequenzbereich verstanden, der von der Frequenz  $\omega = 0$  bis zu einer (maximalen) Grenzfrequenz  $\omega_g$  reicht, welche z.B. durch die dabei angewendete Digitale Signalverarbeitung bzw. deren Rechner-Technik festgelegt ist.

Die Einschränkung der Verarbeitungs-Geschwindigkeit durch die digitale Hardware führt dazu, daß die Digitalen Modulationen zunächst im Basis-Band durchgeführt und dann auf eine digital noch bequem realisierbare Zwischenfrequenz (ZF) umgesetzt werden. Erst daran anschließend erfolgt eine analoge Mischung auf die Sende-Frequenz und die notwendige Verstärkung. Nur dieser letzte Schritt ist der analogen Hochfrequenz-Technik vorbehalten. Was für den Sender gilt, trifft umgekehrt entsprechend auch für den Empfänger zu. Hier wird mit Methoden der Hochfrequenz-Technik das Empfangssignal in eine Zwischenfrequenz-Lage oder ggf. direkt (mit einem I/Q Mischer) in die Basisband-Lage heruntergemischt (*frequency down-conversion*) und dann als Basiband-Signal weiterverarbeitet.

## 16 Digital-Übertragung im Basisband

In diesem Kapitel wird das Prinzip einer Binärübertragung im Basisband anhand von Beispielen einer Binär-Übertragung vorgestellt. Das betrachtete Übertragungssystem soll dabei möglichst einfach sein, damit die wesentlichen Prinzipien der digitalen Übertragung klar erkennbar werden.

### 16.1 Der Basisband-Kanal

Der Basisband-Kanal hat als Eingangs-Größen die Symbole im I- und Q-Kanal und entsprechende I und Q Ausgangs-Signale, Bild 16.1. Der I- und Q- Kanal sind orthogonal zueinander und können daher im gleichen Frequenzbereich übertragen werden, was auf die halbe Bandbreite im Funk-Kanal führt.

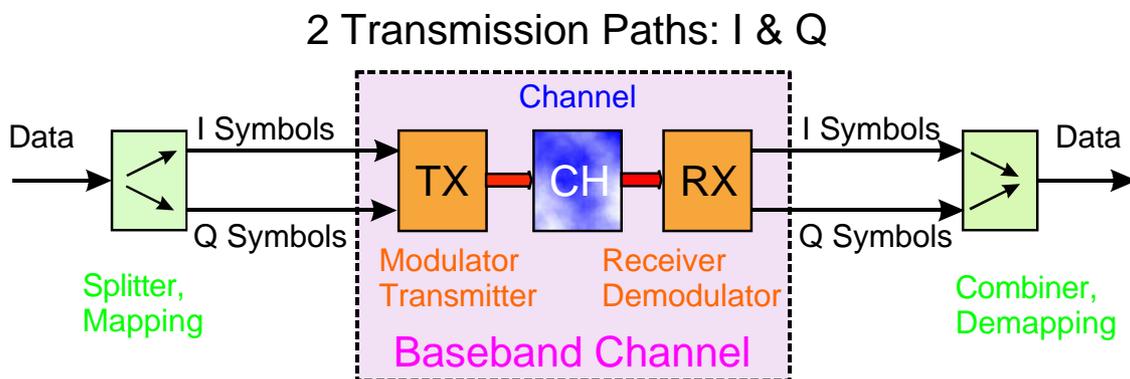


Bild 16.1: Blockschaltbild des I/Q Basisband-Kanals

Da im Basisband 2 Symbolströme (I & Q) simultan verarbeitet werden müssen, werden diese als komplexe Größen behandelt und demzufolge mit komplexer Rechnung berechnet.

- Um aber die wichtigen Prinzipien deutlicher herauszustellen, wird vorläufig nur der (reelle) I-Zweig betrachtet. Weiterhin werden die Symbole als Binär-Symbole angenommen. Die Blöcke *Splitter (Mapper)* und *Combiner (Demapper)* können deshalb vorläufig entsprechend vereinfacht werden.

### 16.2 Die Sender-Seite

Zunächst erfolgt auf der Senderseite die **Symbolbildung**. Die übertragenen (und gestörten) Symbole müssen im Empfänger wieder erkannt und decodiert werden. Zur Erkennung dient die **Korrelation** (im Zeitbereich) oder die „**Matched Filterung**“ (im Frequenzbereich). Daran anschließend erfolgt eine **Entscheidung**, mit der die digitale Information zurückgewonnen wird.

Die binären Daten werden dazu auf den Eingang eines Impulsgenerators gegeben. Dieser erzeugt aus einer logischen „L“ einen  $\delta$ -Impuls „ $\uparrow$ “ und aus einer logischen „0“ einen  $\delta$ -Impuls „ $\downarrow$ “. Damit entsteht zunächst eine Folge  $d(t)$  von  $\delta$ -Impulsen.

$$d(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i \delta(t - iT) \quad (16.1)$$

$b_i$  wird durch das Datenbit  $i$  bestimmt. Es soll gelten

$$b_i = \begin{cases} +1: & \text{das Datenbit } i \text{ ist } 1 \\ -1: & \text{das Datenbit } i \text{ ist } 0 \end{cases} \quad (16.2)$$

In diesem Beispiel hat man pro Bit ein Symbol bzw. jedes Symbol repräsentiert (nur) ein Bit. Damit handelt es sich um **Binär-Symbole**.

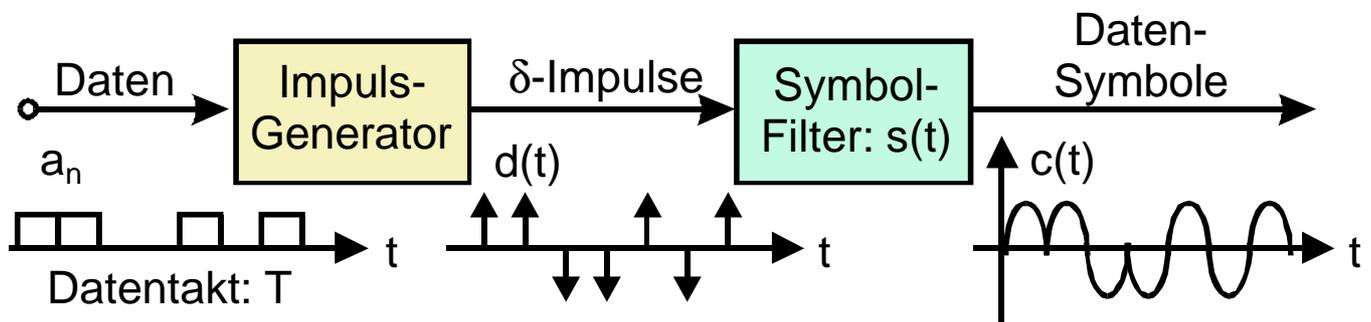


Bild 16.2: Modell der Sender-Seite einer binären Datenübertragung im Basisband

Für das nachgeschaltete Formungsfiler für Symbole ist (in diesem Beispiel) die Impulsantwort so gewählt, daß aus jedem Eingangs-Impuls ein verrundetes Daten-Symbol  $s(t)$  in der Form einer  $\sin$  Kuppe entsteht. Insgesamt entsteht so ein **analoges** (Zeit- & Wert-kontinuierliches) bipolares Signal  $c(t)$ , das aus den verrundeten Daten-Symbolen  $s_i(t)$  besteht.

$$c(t) = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i \delta(t - iT) \right\} * s(t) = d(t) * s(t) = \sum s_i(t) \quad (16.3)$$

Die binären Daten, die jeweils nur zu den Takt-Zeitpunkten  $i \cdot T$  definiert und damit **zeitdiskret** sind, werden so auf **zeitkontinuierliche analoge Symbole**  $s(t)$  abgebildet (*Mapping*). Die Symbol-Form ist in diesem Beispiel so gewählt, daß sich die einzelnen Symbole nicht überlappen,<sup>16.1</sup> Bild 16.2.

Wie aus Bild 16.2 zu erkennen ist, wird bei dieser Digitalen Übertragung nur **eine einzige Symbol-Form**  $s(t)$  verwendet (Form: „Cos-Kuppe“ bzw. „Sin-Kuppe“). Diese kann gemäß der einlaufenden Datenbits ihr Vorzeichen ändern. Hierin besteht die (digitale) Information, die der Empfänger **erkennen** muß und ausgeben soll.

### 16.3 Die Empfänger-Seite

Der Digitale Empfänger muß die Form (im Zeitbereich) der verwendeten Symbole genau kennen. Er vergleicht die empfangenen Datensymbole mit der ihm **bekanntem Symbol-Form** und berechnet daraus eine **Maßzahl für die Ähnlichkeit** mit dieser bekannten Form (Demodulation). Daraus wird dann mit Hilfe einer (geeignet gewählten) Schwelle eine **Entscheidung** getroffen, ob das empfangene Symbol eine „L“ oder eine „0“ sein soll (Detektion).

Die (hier gewählte) Symbol-Form ist eine Cos-Kuppe. Der Datenstrom  $c(t)$  setzt sich daher aus  $\pm s(t)$  Symbolen zusammen. Die empfangenen Symbole  $s_i(t)$  sind daher:

$$s_i(t) = +s(t) = s_1(t) \quad \text{oder} \quad s_i(t) = -s(t) = s_2(t) \quad (16.4)$$

<sup>16.1</sup>Die in dem Beispiel gewählte Symbol-Form ist zeitlich begrenzt. Daher hat sie (theoretisch) eine beliebig große Bandbreite. Daten-Symbole, deren Spektrum begrenzt ist, dauern (theoretisch)  $\infty$  lang an und führen zu Symbolen, die sich überlappen.

Zusätzlich kommt im (Basisband-) Kanal noch weißes Gauß-verteilt Rauschen  $n(t)$  (AWGN *additive white Gaussian noise*) als Störung additiv hinzu. Damit erhält der Digitale Empfänger ein Blockschaltbild gemäß Bild 16.3.[35]

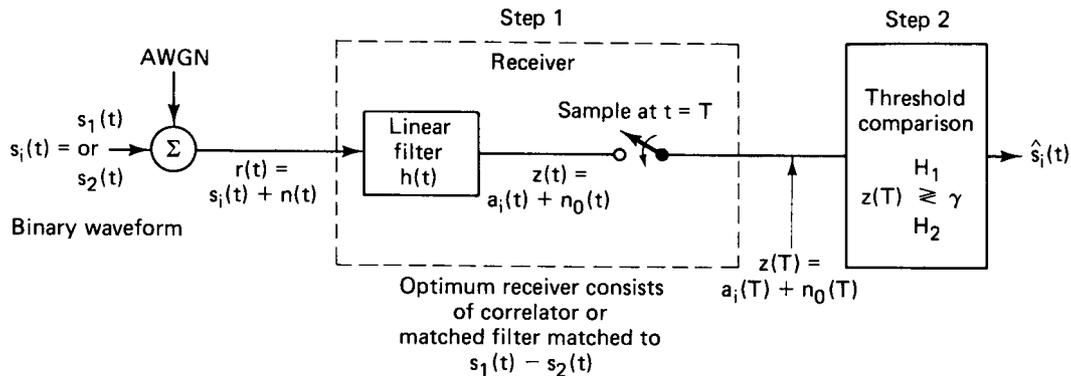


Bild 16.3: Die grundsätzlichen Schritte zur Erkennung und Detektion von Digitalen Signalen.

Da der Kanal Störungen  $n(t)$  hinzufügt (im einfachsten Fall ist das AWGN), hat der Empfänger nicht das gesendete Datensignal  $c(t)$  (bzw. die ungestörten Symbole  $s_i$ ) zur Verfügung, sondern nur ein gestörtes Empfangssignal  $r(t) = c(t) + n(t)$ . Infolge dessen können die Entscheidungen des Empfängers fehlerhaft werden und der empfangene Datenstrom enthält dann Symbol- bzw. Bit-Fehler.

### 16.3.1 Korrelations-Empfänger

Da bei einer Digitalen Übertragung der **zeitliche Verlauf** der digitalen Symbole im Empfänger (zur Demodulation) **ausgewertet** wird, bietet es sich an, die Ähnlichkeit mit Hilfe einer Korrelation zu bestimmen. Der Empfänger enthält dann einen Kreuz-Korrelator, mit dessen Hilfe jede empfangene (verzerrte und gestörte) Symbolform aus  $r(t)$  mit der im Empfänger gespeicherten (unverzerrten) Symbolform  $s(t)$  verglichen wird. Dazu ist es erforderlich, daß der Symbol-Generator und der Takt synchronisiert sind, Bild 16.4.

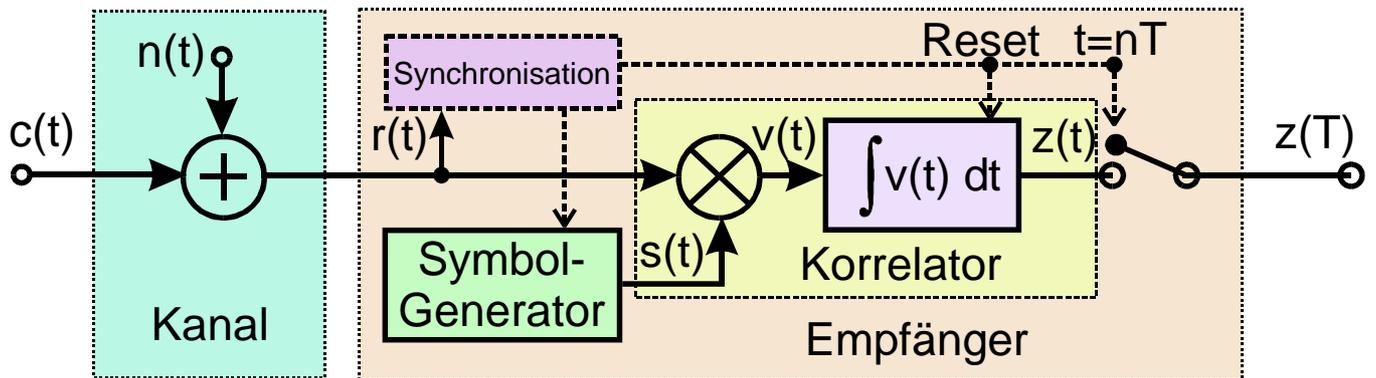


Bild 16.4: Modell der Empfänger-Seite einer binären Datenübertragung im Basisband (Korrelations-Empfang)

Allgemein ergibt sich die Korrelation  $\varrho_{rs}(\tau)$  (in Abhängigkeit der gegenseitigen zeitlichen Verschiebung  $\tau$ ) als

$$\varrho_{rs}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)s(t + \tau)dt \tag{16.5}$$

Die Korrelation  $\varrho_{rs}(\tau)$  hat zeitlich die doppelte Breite  $2T$ , wenn die Symboldauer  $T$  beträgt. Dies ist ganz analog zu der Breite des Ausgangssignals bei einer Faltung, und in der Tat kann eine Korrelation mit Hilfe

einer Faltung berechnet werden, wenn die erste Funktion gespiegelt wird.<sup>16.2</sup>

Andererseits interessiert zum Zweck der **Erkennung der Symbole** nicht der gesamte Verlauf  $\varrho_{rs}(\tau)$  der Kreuz-Korrelation, sondern tatsächlich nur der Wert, der sich ergibt, wenn beide Symbole genau übereinander liegen, die gegenseitige zeitliche Verschiebung  $\tau = 0$  ist, also  $\varrho_{rs}(0)$ .

$$\varrho_{rs}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)s(t)dt \rightsquigarrow \varrho_{rs}(0) = \int_0^T r(t)s(t)dt ; \quad nT \leq t \leq (n+1)T \quad (16.6)$$

Die empfangenen Symbole aus  $r(t)$  und das im Empfänger vorrätige Symbol  $s(t)$  dürfen daher **keine gegenseitige zeitliche Verschiebung**  $\tau$  aufweisen. Daher muß ein **perfekter Synchronismus** zwischen den einlaufenden Symbolen in  $r(t)$  und den lokal erzeugten Symbolen  $s(t)$  vorhanden sein. Im Korrelator wird das Produkt der beiden (zu vergleichenden) Symbole während der Zeitdauer  $T$  aufintegriert.

Die gesendeten Datensymbole  $s(t)$  (ohne Störungen durch den Kanal), die sich daraus nach der Multiplikation mit der Symbolform ergebende Zeitfunktion  $v(t)$  und die über die Taktzeit  $T$  aufintegrierte Zeitfunktion (mit jeweils anschließendem Dump oder Reset) ist in Bild 16.5 dargestellt.

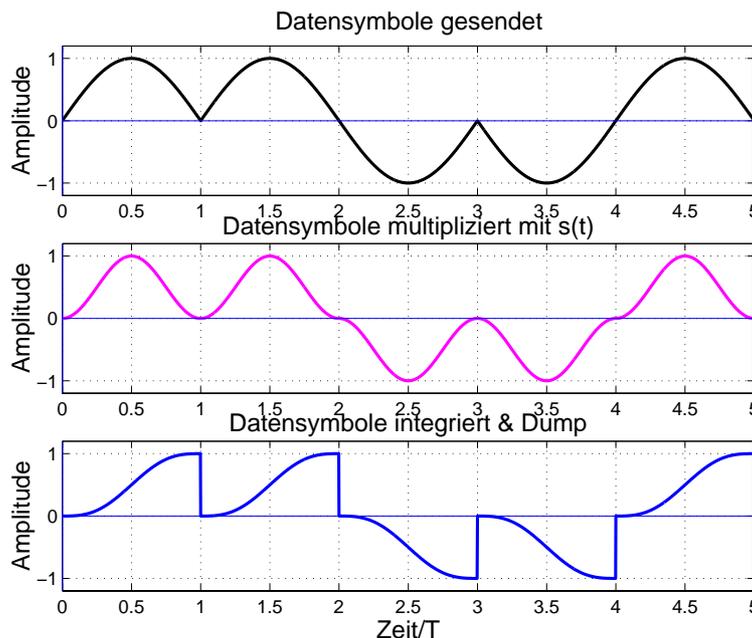


Bild 16.5: Die Signale im Korrelations-Empfänger (ohne Störungen durch den Kanal); oberes Bild: gesendete Datensymbole  $c(t)$ ; mittleres Bild:  $v(t)$ ; unteres Bild:  $z(t)$

Für die Symbol-Form im Sender  $s(t)$  wurde gewählt („Sin-Kuppe“):

$$s(t) = a \sin\left(\pi \frac{t}{T}\right); \quad 0 < t < T \quad \text{Dimension: Spannung} \quad (16.7)$$

Nach der Multiplikation mit Symbolen  $s(t)/a$  der Amplitude 1 im Empfänger folgt daraus (im ungestörten Fall):

$$v(t) = s^2(t)/a = a \sin^2\left(\pi \frac{t}{T}\right) = \frac{a}{2} \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)\right); \quad 0 < t < T \quad (16.8)$$

Die Integration erfolgt in der Form **mit laufender oberer Grenze**  $t$ , damit man den Zeitverlauf erhält:

$$z(t) = \frac{2a}{T} \int_0^t v(\xi)d\xi = \frac{a}{T} \left(t - \frac{T}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)\right); \quad 0 < t < T \quad \text{Dimension: Energie} \quad (16.9)$$

<sup>16.2</sup>Siehe: „Signale und Systeme“, Kapitel „Die Fourier-Transformation und ihre Anwendungen“, Teil 6 [5]

Der Faktor  $\frac{2}{T}$  in Gleichung (16.9) wurde gewählt, damit sich für  $|z(T)|$  der Wert  $a$  ergibt. Damit sich die Dimension „Energie“ ergibt, muß die Gleichung (16.9) noch durch  $R = 1\Omega$  dividiert werden. Bild 16.5 zeigt die entsprechenden Zeitverläufe.

Der zeitliche Verlauf der Ausgangs-Spannung  $z(t)$  des Integrators kann (jeweils während der Zeit  $T$  des Datentaktes) geschrieben werden als:

$$z(t) = \int_0^t r(\xi)s(\xi)d\xi; \quad 0 \leq t \leq T \tag{16.10}$$

Zum Zeitpunkt  $t = T$  ist daher der Wert von  $z(t)$  mit Gleichung (16.6):

$$z(T) = T \cdot \varrho_{rs}(0) \tag{16.11}$$

Nun wird der Integrator immer zu den Zeitpunkten  $n \cdot T$  **resettet**, nachdem zuvor der Abtast-Wert  $z(T) = T \cdot \varrho_{rs}(0)$  aus dem Zeitverlauf  $z(t)$  des Ausgangssignals des Kreuz-Korrelators gewonnen wurde.

### Notwendigkeit der Takt-Information im Digitalen Empfänger

Der Korrelations-Empfänger kann nur dann wie gewünscht funktionieren, wenn

- die Symbole (wie in dem Beispiel) zeitlich begrenzt sind und
- der Symbolgenerator mit dem Symboltakt exakt synchronisiert ist und wenn
- die Zeitpunkte für Abtasten und Resetten mit dem Symboltakt synchronisiert sind.

Da der Empfänger nur die (gestörten) Symbole empfängt und keine extra Leitung für die Übertragung des Taktes vorhanden ist, ist im Empfänger eine (aufwendige) **Takt-Rückgewinnung** (Synchronisation in Bild 16.4) erforderlich.

### 16.3.2 Empfangs-Symbole durch weißes Rauschen gestört

Die bisherige Analyse des Korrelations-Empfängers erfolgte noch unter der Annahme, daß die Störung im Kanal nicht vorhanden ist, also  $n(t) = 0$ . Nunmehr wird für  $n(t)$  ein **weißes Rauschen mit Gaußlocken förmiger Amplituden-Dichte Verteilung** (pdf *probability density function*) angenommen, Bild 16.6. [36]

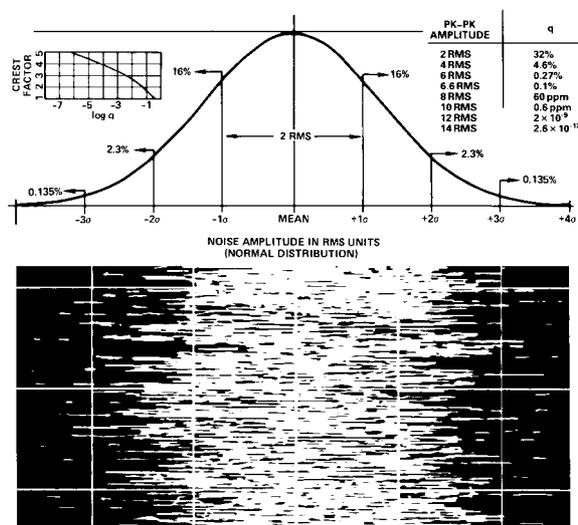


Bild 16.6: Amplituden-Dichte Verteilung pdf und Zeitverlauf von weißem Rauschen; der Effektivwert (RMS *root mean square*) ist  $\sigma$ .

Die Wahrscheinlichkeits-Dichte-Funktion  $p(n_0)$  (*probability density function*, pdf) des Gauß-verteiltern Rauschens ist:

$$p(n_0) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{n_0}{\sigma_0}\right)^2} = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{n_0}{\sigma_0}\right)^2\right] \quad \text{pdf Gauß-förmiges Rauschen} \quad (16.12)$$

Hierbei ist  $\sigma_0$  der **Effektivwert** (Standard-Abweichung) und  $\sigma_0^2$  die **Wechsel-Leistung** (Varianz) des Rauschens im Signal  $z(t)$  (am Ausgang des Korrelators). Eine derartige Rauschspannung ist den empfangenen Symbolen  $r(t)$  überlagert. Die sich daraus ergebenden Zeitverläufe  $r(t), v(t), z(t)$  im Korrelations-Empfänger zeigt Bild 16.7 für den Effektivwert  $\sigma = 2$  des Rauschens.

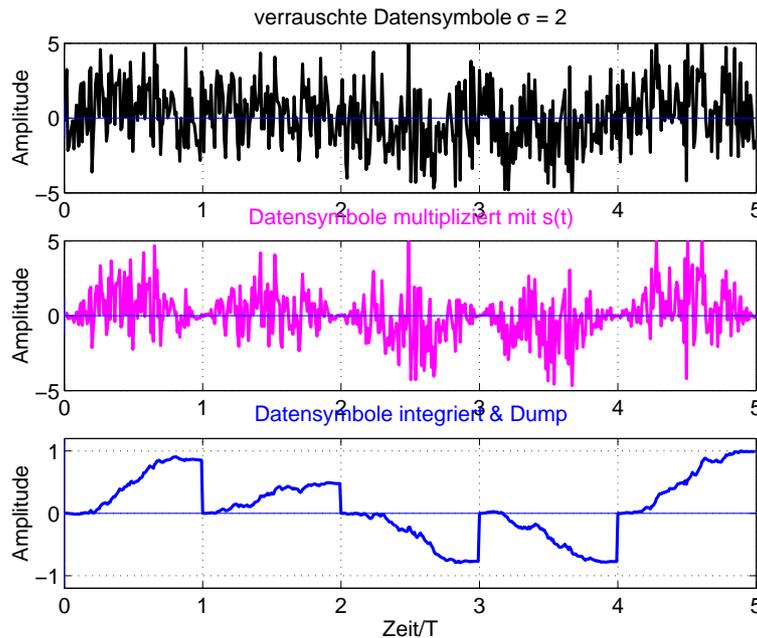


Bild 16.7: Die Signale im Korrelations-Empfänger (mit Störungen durch Rauschen, mit dem Effektivwert  $\sigma = 2$ ); oberes Bild: gesendete Datensymbole  $c(t)$ ; mittleres Bild:  $v(t)$ ; unteres Bild:  $z(t)$

Diese AWGN Rausch-Störung tritt bei einer Digital-Übertragung in jedem Fall auf. Der Grund dafür ist, daß die Übertragung trotzdem hinreichend fehlerfrei gemacht werden kann und man den großen Vorteil hat, mit weniger Sendeleistung auszukommen bzw. bei gegebener Sendeleistung eine größere Reichweite erzielt werden kann. **Praktische Digitale Übertragungs-Systeme gehen daher immer bis an diese Grenze.**<sup>16.3</sup>

### 16.3.3 Matched Filter Empfänger

Die Korrelation (Symbol  $\star$ ) kann durch eine Faltung (Symbol  $*$ ) dargestellt werden und es gilt:<sup>16.4</sup>

$$h(\tau) \star s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)s(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(-\zeta)s(\tau-\zeta)d\zeta = h(-\tau) * s(\tau) \quad (16.13)$$

$$h(\tau) \stackrel{\downarrow}{\star} s(\tau) = h(-\tau) \stackrel{\downarrow}{*} s(\tau) \quad \text{Korrelation} \implies \text{Faltung} \quad (16.14)$$

Da die Faltung die Wirkung eines Filters im Zeitbereich beschreibt, kann somit auch die Korrelation durch eine Filterung ersetzt werden. Offensichtlich muß dazu dieses Filter eine **zeitgespiegelte Impulsantwort**  $h(-t)$  aufweisen. Für ein Filter mit FIR-Struktur bedeutet das, daß die **Filterkoeffizienten**  $h_n$  in **umgekehrter Reihenfolge** einzugeben sind, Bild 16.8.

<sup>16.3</sup>Aus der Darstellung in Bild 16.7 kann nicht der Schluß gezogen werden, daß der Effektivwert  $\sigma$  des Rauschens den Wert der doppelten Amplitude der (empfangenen) Datensymbole haben darf, bis Fehler auftreten. Es sind hier ja nur 5 Symbole dargestellt. Eine digitale Übertragung wird aber (je nach Aufwand in der Codierung) bereits unbrauchbar, wenn 1 von 10.000 bis 1 von 1.000 Symbolen fehlerhaft empfangen werden (Symbol-Fehlerrate SER  $10^{-4} \dots 10^{-3}$ ).

<sup>16.4</sup>Siehe: „Signale und Systeme“, Kapitel „Die Fourier-Transformation und ihre Anwendungen“, Teil 6.3.5 [5]

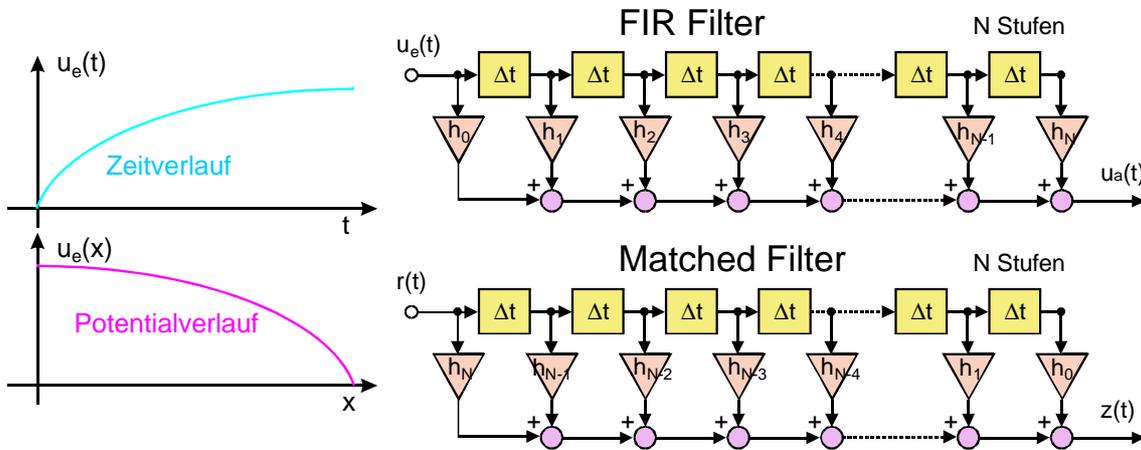


Bild 16.8: Beispiel für den Zeit- und Potential-Verlauf der Eingangsspannung  $u_e(t)$  (links); FIR-Filter und Matched Filter (Filterkoeffizienten in umgekehrter Reihenfolge)

Die Filterkoeffizienten  $h_n$  eines Matched Filters (MF) sind gemäß der gespiegelten Symbolform  $s(-t)$  zu wählen, an die es angepaßt (*matched*) sein soll, d.h. es sind entsprechende Abtast-Werte einzuprogrammieren. Werden Daten-Symbole verwendet, die in ihrer Bandbreite begrenzt sind, muß die Filterlänge auch die Nebenmaxima der Symbole berücksichtigen.

**16.3.4 Optimierung des Matched Filters**

Der Abtastwert  $z(T)$  zum Zeitpunkt  $t = T$  besteht aus einer **Signalkomponente** der Größe  $a_i$  und einer **Rauschkomponente**  $n_0$ . Die Rauschkomponente hat die **Varianz** (mittlere Rauschleistung)  $\sigma_0^2$ . Damit läßt sich das Signal-zu-Geräusch-Verhältnis zum Zeitpunkt  $T$  angeben zu:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{a_i^2}{\sigma_0^2} \text{ SNR}_T \tag{16.15}$$

**Das gesuchte Matched Filter (MF)  $H_o(\omega)$  ist dasjenige, das dieses Signal-zu-Geräusch-Verhältnis maximiert.**

Die Signal-Komponente am Eingang des (noch nicht optimierten) Filters  $H(\omega)$  sei  $c(t)$  mit der Spektraldichte  $C(\omega)$ . Die Signalkomponente am Ausgang des Filters sei  $a(t)$ . Damit folgt:

$$a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)C(\omega)e^{j\omega t} d\omega \tag{16.16}$$

Die zweiseitige Spektraldichte des weißen Rauschens ist konstant und beträgt  $N_0/2$ . Dadurch wird die Rauschleistung am Filter-Ausgang:

$$\sigma_0^2 = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \tag{16.17}$$

Gleichungen (16.16) und (16.17) werden in Gleichung (16.15) eingesetzt, woraus folgt:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)C(\omega)e^{j\omega T} d\omega \right|^2}{\frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega} \tag{16.18}$$

Der nächste Schritt besteht nun darin, diesen Ausdruck zu optimieren. Hierzu wird die Schwarz'sche Ungleichung<sup>16.5</sup> auf den Zähler angewendet.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T \leq \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |C(\omega)e^{j\omega T}|^2 d\omega}{\frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |C(\omega)e^{j\omega T}|^2 d\omega}{N_0/2} = \frac{2E}{N_0} \tag{16.19}$$

Hierbei ist  $E$  die Energie des Eingangssignals  $c(t)$ . Damit folgt für das Optimum, welches nur von der Signal-Energie, nicht aber von der Symbol-Form abhängt:

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_T^{\max} = \frac{2E}{N_0}} \quad \text{SNR}_T^{\max} \tag{16.20}$$

Das Gleichheitszeichen in Gleichung (16.20) bzw. in der Schwarz'schen Ungleichung gilt nur dann, wenn die Übertragungsfunktion des Filters lautet:

$$H(\omega) = \boxed{H_o(\omega) = k \cdot C^*(\omega)e^{-j\omega T}} \quad \text{ÜTF matched Filter} \tag{16.21}$$

Daraus folgt für die Impulsantwort  $h_o(t)$  des Matched Filters (MF)

$$\boxed{h_o(t) = \begin{cases} k \cdot s(T-t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}} \quad \text{Impulsantwort MF} \tag{16.22}$$

- Damit ist das Ergebnis bestätigt (und präzisiert), das sich für die Impulsantwort des MF aufgrund der Darstellung der Korrelation durch die Faltung bereits ergeben hat.

### 16.3.5 Fehler-Raten bei binärer Datenübertragung (Störung durch weißes Gauß'sches Rauschen)

Die integrierten Symbole  $z(t)$  am Ausgang des Korrelators, Bild 16.5 (Seite 73), haben einen überlagerten Rauschanteil  $n_0(t)$ . Dieser ist zwar nicht mehr „weiß“, weil der Integrator eine Frequenzabhängigkeit erzeugt, jedoch ist die Amplituden-Dichte-Funktion trotzdem noch Gauß-förmig.

Analysiert man entsprechend zu Bild 16.7 (Seite 75) die detektierten Werte  $z(kT); k = 1 \dots N$  für  $N \rightarrow \infty$  und sortiert so um, daß zuerst die Werte dargestellt werden, die ohne Störung +1 ergeben und anschließend diejenigen, die ohne Störung -1 ergeben, erhält man die Darstellung in Bild 16.9.

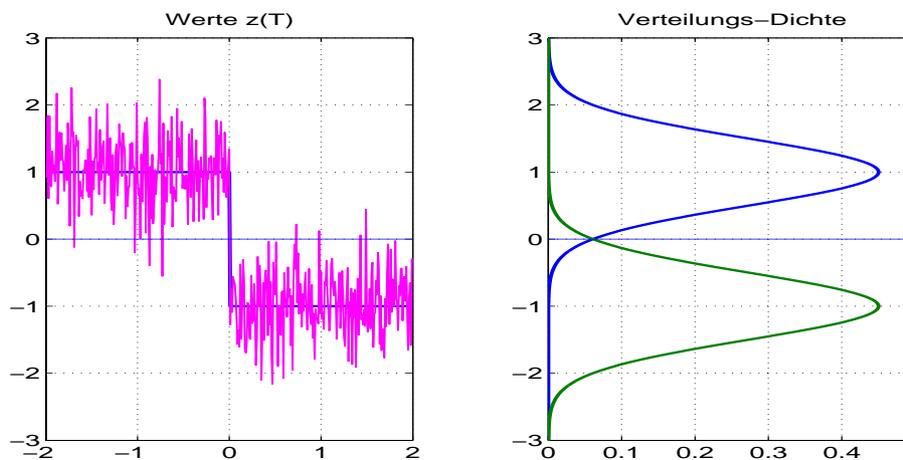


Bild 16.9: Darstellung und Verteilung der (umsortierten) Werte  $z(T)$

<sup>16.5</sup>Die entsprechende Formulierung für Vektoren lautet, daß das innere Produkt kleiner oder höchstens gleich dem Produkt der Beträge ist,  $|\langle a, b \rangle| \leq |a| \cdot |b|$ .

Die Verallgemeinerung für Flächen unterhalb von Funktionen lautet  $k \int_{-\infty}^{\infty} a(t)^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} b(t)^2 dt \geq k \cdot \left[ \int_{-\infty}^{\infty} a(t)b(t) dt \right]^2$ .

Die unverrauschten Werte  $z(T)$  ergeben umsortiert den (idealen) Verlauf  $+1 \rightarrow -1$ . Das überlagerte Rauschen  $n_0(t)$  erhält dadurch einen Konstantanteil (in diesem Fall  $\pm a$ ), der sich als Mittelwert der Gauß-Verteilungen wieder findet.

Das überlagerte Rauschen hat zur Folge, daß zum Abtast-Zeitpunkt eine Fehlentscheidung entstehen kann, woraus dann ein Symbol- bzw. Bitfehler resultiert.

**16.3.6 Entscheider-Schwelle und Bitfehler-Wahrscheinlichkeit**

Die gewonnenen Werte  $z(T)$  bzw.  $z(nT)$  werden nun einem Entscheider zugeführt, der die binären Daten zurückgewinnt, Bild 16.3 (Seite 72). Dieser Schritt wird mit Detektion (*detection*) bezeichnet.

Wenn dabei zum Abtast-Zeitpunkt die Amplitude und die Polarität der überlagerten Rauschspannung so sind, daß die Entscheidungs-Schwelle  $\gamma_0$  in verkehrter Richtung überschritten wird, entsteht ein Bit-Fehler.

Die Gauß-Glocken der Amplituden-Dichte  $p(n_0)$ , Gleichung (16.12) und Bild 16.9, erscheinen hierbei als die **bedingten Wahrscheinlichkeits-Dichte-Funktionen**  $p(z|s_1)$  und  $p(z|s_2)$ . Diese sind die Verteilungsdichten für die Fälle, daß das Symbol  $s_1$  bzw.  $s_2$  gesendet wurde.

$$\begin{aligned}
 p(z|s_1) &= \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - a_1}{\sigma_0} \right)^2 \right] \\
 p(z|s_2) &= \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - a_2}{\sigma_0} \right)^2 \right]
 \end{aligned}
 \quad \text{bedingte pdf} \quad (16.23)$$

Die Entscheidungs-Schwelle sei zu  $\gamma_0$  gewählt. Damit erhält man die bedingten Wahrscheinlichkeits-Dichte-Funktionen  $p(z|s_1)$  und  $p(z|s_2)$ , wie sie in Bild 16.10 [30] dargestellt sind.

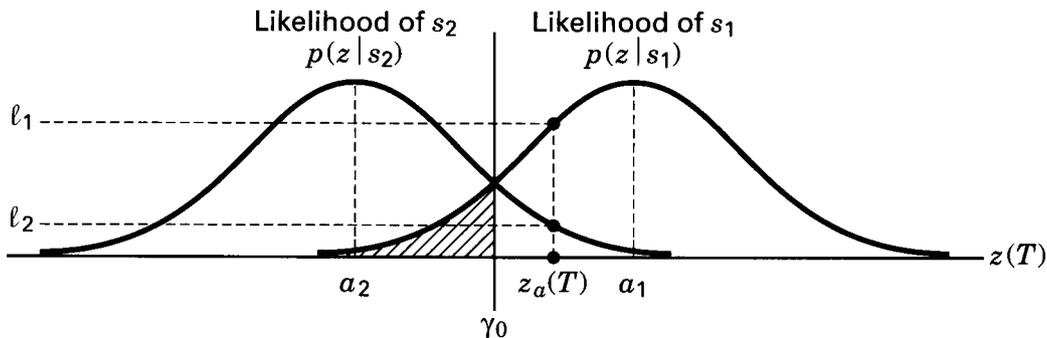


Bild 16.10: Die bedingten Wahrscheinlichkeits-Dichten  $p(z|s_1)$  und  $p(z|s_2)$

Der Empfänger entscheidet nun nach folgenden **Hypothesen** (Gewißheit gibt es im Empfänger nicht!):

- Liegt  $z(T)$  links der Schwelle  $\gamma_0$ , entscheide daß  $s_2(t)$  gesendet wurde. (Hypothese  $H_2$ )
- Liegt  $z(T)$  rechts der Schwelle  $\gamma_0$ , entscheide daß  $s_1(t)$  gesendet wurde. (Hypothese  $H_1$ )

$$\begin{array}{l}
 H_1 \\
 z(T) > \gamma_0 \\
 H_2
 \end{array}
 \longleftrightarrow
 \begin{cases}
 z(T) > \gamma_0 & \text{wähle Hypothese } H_1 : s_1(t) \text{ wurde gesendet} \\
 z(T) < \gamma_0 & \text{wähle Hypothese } H_2 : s_2(t) \text{ wurde gesendet}
 \end{cases}
 \quad (16.24)$$

Bei einer bipolaren Binär-Übertragung ist die Entscheidungs-Schwelle bei  $\gamma_0 = 0$ , wenn im Datenstrom im Mittel gleich viele „L“ wie „0“ enthalten sind. Dies wird rein anschaulich auch durch die Darstellung in Bild 16.9 suggeriert.

Wenn das Symbol  $s_1(t)$  gesendet wurde, der „entschiedene“ Wert  $z(T)$  jedoch links der Schwelle  $\gamma_0$  liegt, also die Hypothese  $H_2$  entschieden wurde, ist ein Fehler entstanden. Die schraffierte Fläche in Bild 16.10 gibt die Wahrscheinlichkeit  $P_{B_2}$  dafür an. Genau so gut entsteht ein Fehler, wenn das Symbol  $s_2(t)$  gesendet wurde und

der „entschiedene“ Wert  $z(T)$  rechts der Schwelle  $\gamma_0$  liegt, also  $H_1$  entschieden wurde. Es sind also beide Werte  $P_{B_2}$  und  $P_{B_1}$  zu addieren. Damit gilt für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit.

$$P_B = P_{B_2} + P_{B_1} = P(H_2|s_1)P(s_1) + P(H_1|s_2)P(s_2) \quad \text{Bitfehler-Wahrscheinlichkeit} \quad (16.25)$$

Sind (wie hier) die Dichtefunktionen  $p(z|s_1)$  und  $p(z|s_2)$  symmetrisch und die „L“ und „0“ Datenbits gleich wahrscheinlich und damit (die „à priori Wahrscheinlichkeiten“)  $P(s_1) = P(s_2) = 0,5$ , so folgt:

$$P_B = P(H_2|s_1) = P(H_1|s_2) \quad (16.26)$$

Damit liegt die Schwelle  $\gamma_0$  genau zwischen  $a_2$  und  $a_1$ .

$$\gamma_0 = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad (\text{für } a_2 = -a_1 \text{ folgt daraus } \gamma_0 = 0.) \quad (16.27)$$

Die Fehlerwahrscheinlichkeit  $P_B$  folgt aus dem **Integral über die schraffierte Fläche** der Dichtefunktion  $p(z|s_1)$  oder  $p(z|s_2)$ .

$$P_B = \int_{\frac{a_1+a_2}{2}}^{\infty} p(z|s_2) dz = \int_{\frac{a_1+a_2}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_2}{\sigma_0}\right)^2\right] dz \quad (16.28)$$

Mit der Substitution

$$\xi = \frac{z-a_2}{\sigma_0}; \quad \sigma_0 d\xi = dz; \quad z = \frac{a_1+a_2}{2} \rightarrow \xi = \frac{a_1-a_2}{2\sigma_0} \quad (16.29)$$

ergibt sich:

$$P_B = \int_{\frac{a_1-a_2}{2\sigma_0}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2}\right] d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a_1-a_2}{2\sigma_0}}^{\infty} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2}\right] d\xi \quad (16.30)$$

- Wie häufig Fehler entstehen, hängt davon ab, wie groß der **Spitze-Spitze-Wert** ( $a_1 - a_2$ ) des **Signals**  $z(t)$  im Verhältnis zum **Effektivwert**  $\sigma_0$  des **Rauschens** ist.

Allerdings ist es bei Digitalen Übertragungen üblich, nicht die Amplituden bzw. Effektivwerte der Signale am Entscheider zu betrachten, sondern die **Energie der Datensymbole** und die **Spektrale Leistungsdichte des Rauschens**. Wie die Energie der Datensymbole in die Amplitude des Nutz-Signals eingeht, ist abhängig vom gewählten Modulationsverfahren.

### 16.3.7 Gauß'sche Fehlerfunktion und Q-Funktion

Das Integral über die Gauß'sche Glockenkurve, Gleichung (16.30). Es ist als Gauß'sche Fehlerfunktion  $\text{erf}(x)$  bzw. als Q-Funktion  $Q(x)$  bekannt, Bilder 16.11 und 16.12.

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi; \quad \text{Error Function} \quad \text{erf}(-x) = -\text{erf}(x) \quad (16.31)$$

Die Funktion  $\text{erf}(x)$  läßt sich nicht analytisch berechnen, liegt jedoch tabellarisch und in Näherungsformeln vor. Die komplementäre Fehlerfunktion dazu ist  $\text{erfc}(x)$  und diese ist eng verwandt mit der Q-Funktion  $Q(x)$ , die bei der Berechnung der Symbol-Fehler-Rate Verwendung findet.  $Q(-x)$  ist die gespiegelte Q-Funktion und entsteht aus der Gauß-Glocke durch Integration mit laufender oberer Grenze.

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 1 - \text{erf}(x) = 2Q(\sqrt{2}x) \quad (16.32)$$

$$Q(x) = \frac{\text{erfc}(x/\sqrt{2})}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi; \quad (\sigma_x = 1) \quad \text{Q-Funktion} \quad (16.33)$$

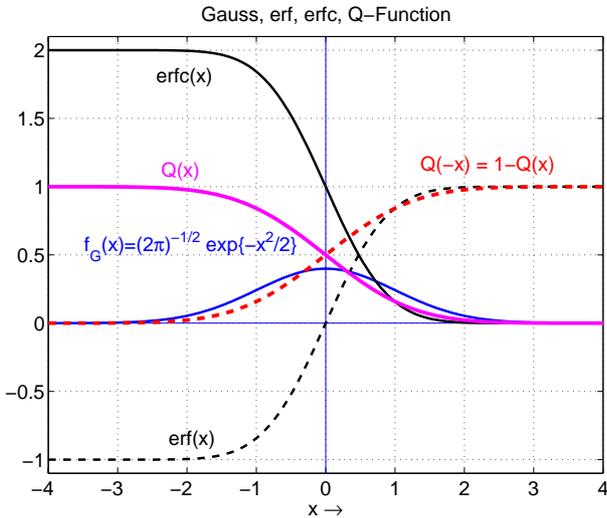


Bild 16.11: Gauß-Glocke ( $\sigma = 1$ ), Error Function  $\text{erf}(x)$ , Komplementäre Error Function  $\text{erfc}(x)$ , Q-Funktion und gespiegelte Q-Funktion

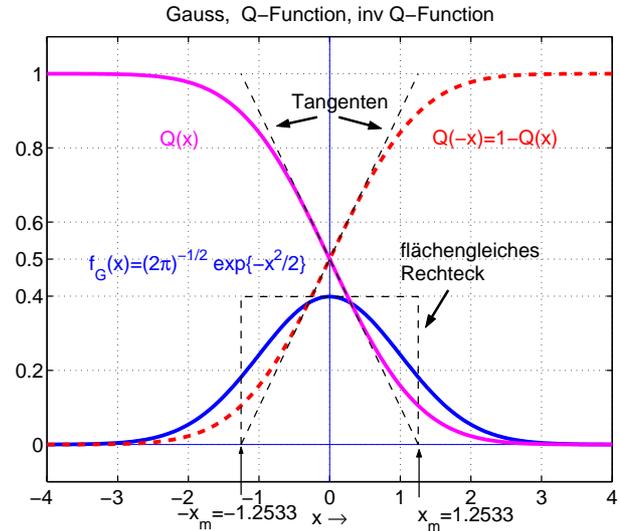


Bild 16.12: Gauß-Glocke ( $\sigma = 1$ ), Q-Funktion und gespiegelte Q-Funktion dazu flächengleiches Rechteck und Tangenten

$$Q(-x) = 1 - Q(x) = \frac{1 + \text{erf}(x/\sqrt{2})}{2} \tag{16.34}$$

Das Integral in Gleichung (16.30) mit der unteren Schwelle  $x = \frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0}$  kann mit Hilfe der Q-Funktion  $Q(x)$  bestimmt werden.

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left[-\frac{\xi^2}{2}\right] d\xi \tag{16.35}$$

Für große Werte von  $x$  gilt die Näherung:

$$\frac{(x^2 - 1)e^{-x^2/2}}{x^3\sqrt{2\pi}} \approx Q(x) \approx \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}} \tag{16.36}$$

Wenn die Gauß-Glocken in Bild 16.10 (Seite 78) sich nur wenig überschneiden, wie das für geringe Fehlerraten erwünscht ist, werden die Werte von  $Q(x)$  entsprechend klein und man kann aus der linearen Darstellung der Bilder 22.4 und 22.5 nichts mehr ablesen.

Bild 16.13 zeigt deshalb die Q-Funktion in logarithmischer Darstellung. Diese hat die für die Bitfehler-Kurven typische „Wasserfall“-Form.

### 16.3.8 Bit-Fehler-Rate

Mit Hilfe der Q-Funktion ergibt sich gemäß Gleichung (16.30) für die Bit-Fehler-Rate  $P_B$  (BER *bit error rate*):

$$P_B = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0}\right) \tag{16.37}$$

Der Wert  $\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0}$  muß maximiert werden, damit BER minimal wird. Im Abschnitt 16.3.4 (Optimierung des Matched Filters, Seite 76) zeigte es sich, daß das Signal-zu-Geräusch-Verhältnis optimiert werden kann, Gleichung (16.20). Die Signal-Energie ergibt sich zu:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T^{\max} = \frac{2E}{N_0} = \frac{(a_1 - a_2)^2}{\sigma_0^2} \tag{16.38}$$

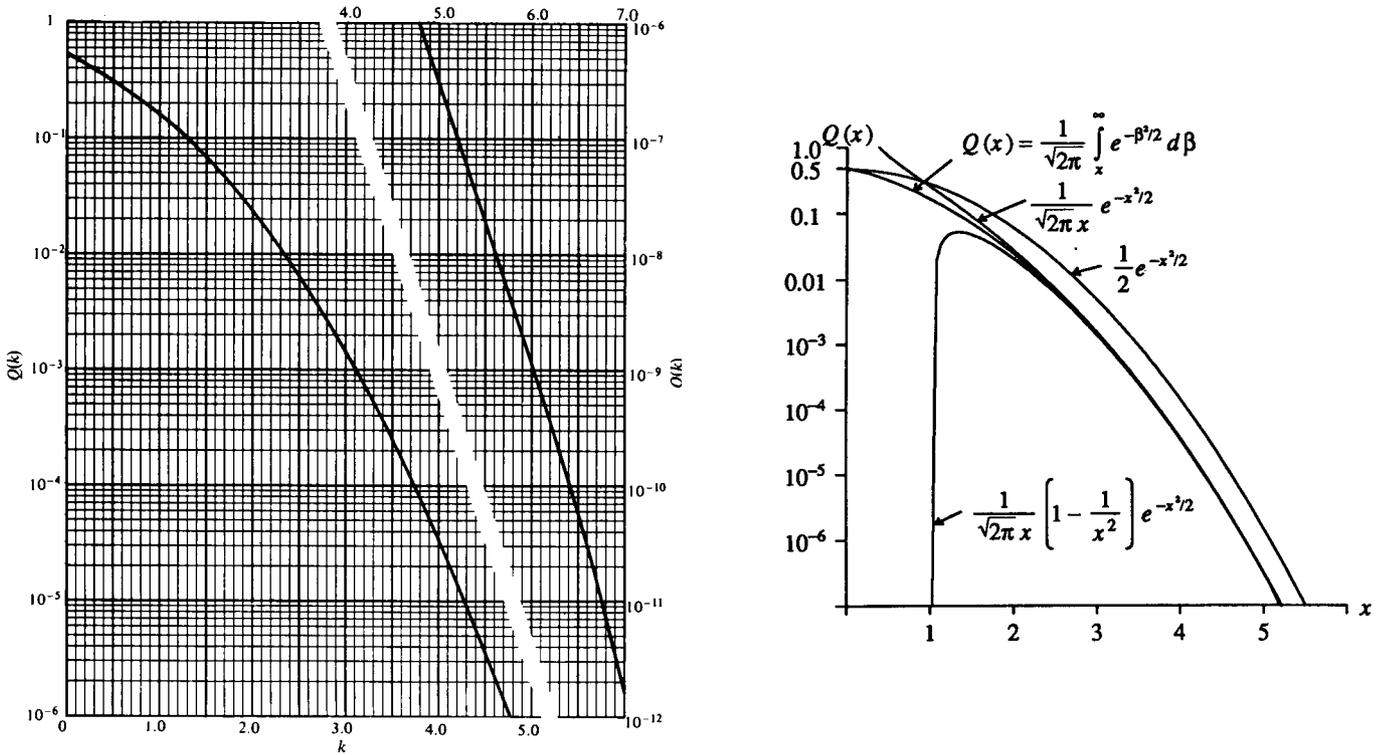


Bild 16.13: Die Q-Funktion und ihre Grenzkurven (logarithmische Darstellung)

Hieraus folgt

$$\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0} = \sqrt{\frac{E_d}{2N_0}} \quad \mathbf{Q\text{-Faktor}} \quad (16.39)$$

wobei  $E = E_d$  die Energie des Differenz-Signals ist.

**16.3.9 Der Q-Faktor**

In der Optischen Übertragungstechnik wird der Ausdruck Gleichung (16.39), also das **Argument der Q-Funktion**, als **Q-Faktor** bezeichnet, da die betreffenden Größen bequem mittels (optischer) Digitaler Oszilloskope meßtechnisch bestimmt werden können. Man erhält dabei ein Augendiagramm, aus dem der Abstand der logischen Pegel und die Größe des bei jedem Pegel vorhandenen eff. Rauschens  $\sigma_0$  bzw.  $\sigma_1$  bestimmt werden kann, Bild 16.14. Es ist typisch für eine Optische Übertragung, daß die Größe des Rauschens bei logisch „0“ anders ist als bei logisch „1“, daher  $2\sigma_0 \rightsquigarrow \sigma_0 + \sigma_1$ .

**16.3.10 Bipolare Datenübertragung**

Bei einer bipolaren Übertragung hat die Differenz den doppelten Wert der Symbolgröße. Damit hat die Energie des Differenz-Signals  $E_d$  den 4 fachen Wert der Bit-Energie  $E_b$ . Damit folgt für die bipolare Übertragung:

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{4E_b}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \quad (16.40)$$

**16.3.11 Unipolare Datenübertragung**

Bei einer unipolaren Übertragung wird in der Hälfte der Zeit (d.h. für die „0“ Bits) nichts übertragen, wodurch sich die Signalenergie halbiert. Deswegen gilt für die unipolare Übertragung:

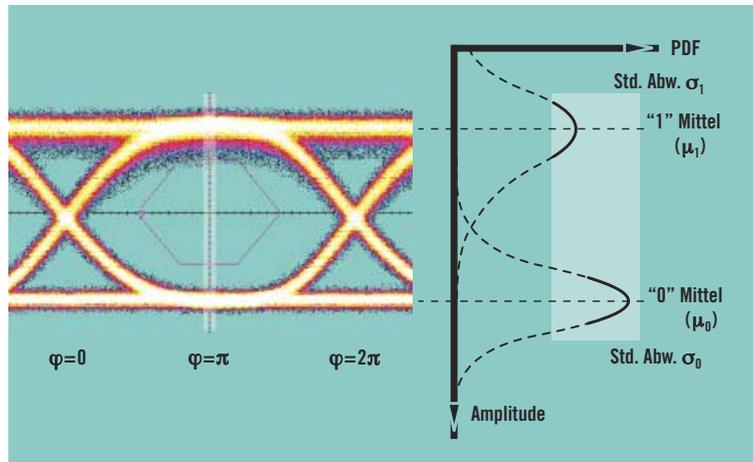


Bild 16.14: Zur meßtechnischen Bestimmung des Q-Faktors

$$P_B = Q \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \tag{16.41}$$

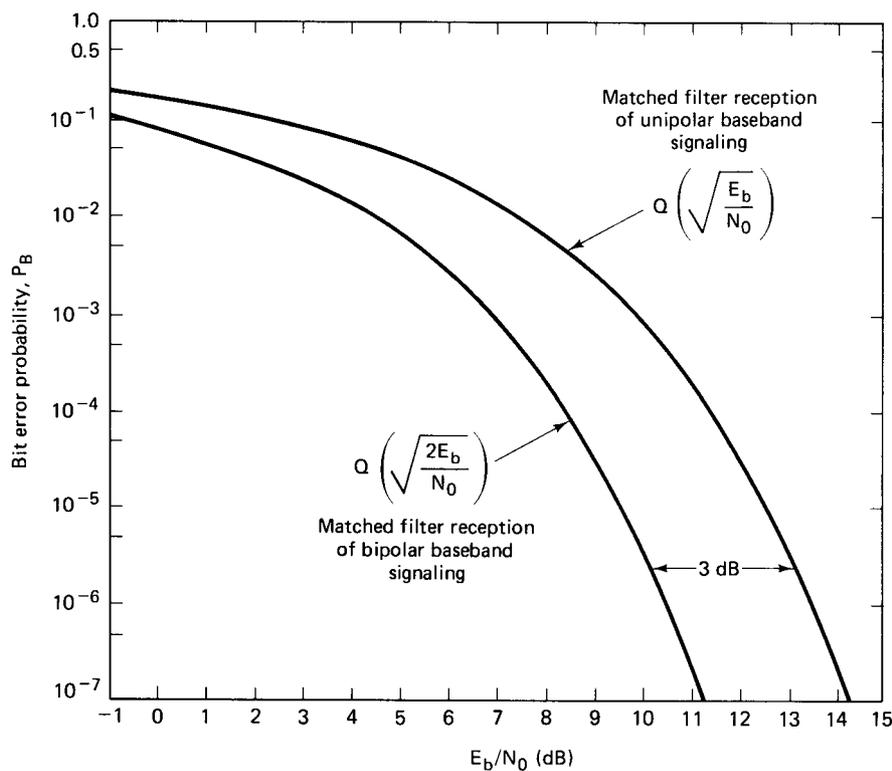


Bild 16.15: Bitfehler-Wahrscheinlichkeit für bipolare und unipolare Digital-Übertragung

**16.3.12 Die Fehlerwahrscheinlichkeit  $P_B$  ist unabhängig von der Form der Symbole.**

Im ersten Moment mag es verwundern, daß nur die (mittlere) Signal-Energie (bzw. Symbol-Energie) in diese Beziehung eingeht, nicht jedoch die Form der Symbole. Das erklärt sich ganz einfach. Durch die Korrelation —

oder genau so durch die „Matched Filterung“ — erhält man zum Abtast-Zeitpunkt (also bei einer Verschiebung  $\tau = 0$ ) immer ein Maximum und zwar **unabhängig von der gewählten Form der Symbole**, denn Sender und Empfänger verwenden in jedem Fall die gleiche Form.

Die Integration in Gleichung (16.9) zusammen mit Gleichung (16.8) läßt zusätzlich erkennen, daß das Signal  $z(t)$  dimensionsmäßig eine Energie darstellt und deshalb  $z(T)$  proportional zur Symbol-Energie ist. Bei einer Binär-Übertragung ist die Symbol-Energie gleich der Bit-Energie  $E_b$ . Die Bitfehler-Rate wird damit abhängig vom Verhältnis der Bit-Energie  $E_b$  zur Spektralen Leistungsdichte  $N_0$  des weißen Rauschens und vom gewählten Modulationsverfahren.

## 17 Spektren Digitaler Signale

Zur Bestimmung der spektralen Leitungs-Dichten digitaler Signale wird das Blockschaltbild 16.2 (Seite 71) angenommen, wonach die Datensymbole  $c(t)$  nach einer Filterung der Daten (als  $\delta$ -Impulse  $d(t)$ ) durch ein Symbol-Filter mit der Impulsantwort  $h(t) = s(t)$  entstehen. Damit gilt:

$$c(t) = d(t) * s(t) \quad (17.1)$$

Bildet man die Auto-Korrelations-Funktionen (AKF) dieser (Leistungs-) Signale, so erhält man mit Gleichung (16.14):<sup>17.1</sup>

$R_{cc}(\tau) = c(\tau) * c(\tau) = c(-\tau) * c(\tau)$	<b>AKF der Symbole</b>	(17.2)
$R_{dd}(\tau) = d(\tau) * d(\tau) = d(-\tau) * d(\tau)$	<b>AKF der Daten</b>	
$R_{ss}(\tau) = s(\tau) * s(\tau) = s(-\tau) * s(\tau)$	<b>AKF des Symbol-Filters</b>	

Die AKF der Ausgangsgröße  $R_{cc}(\tau)$  ist über Gleichung (17.1) mit den AKFs  $R_{dd}(\tau)$  und  $R_{ss}(\tau)$  verknüpft. Für die Umformung werden zunächst die Ausdrücke mit der **Korrelation** (Symbol  $*$ ) **durch die Faltung** (Symbol  $*$ ) **ersetzt**, da diese sowohl kommutativ als auch assoziativ ist.

$$\begin{aligned} R_{cc}(\tau) &= [d(-\tau) * s(-\tau)] * [d(\tau) * s(\tau)] \\ &= [d(-\tau) * d(\tau)] * [s(-\tau) * s(\tau)] \\ &= [d(\tau) * d(\tau)] * [s(\tau) * s(\tau)] \end{aligned} \quad (17.3)$$

$$\leadsto R_{cc}(\tau) = R_{dd}(\tau) * R_{ss}(\tau) \quad \text{AKF der Daten-Symbole} \quad (17.4)$$

- Die AKF  $R_{cc}(\tau)$  der Daten-Symbole ergibt sich damit aus der Faltung der AKF  $R_{dd}(\tau)$  der Daten mit der AKF  $R_{ss}(\tau)$  des Symbol-Filters bzw. der Symbol-Form.

Nach dem Satz von Einstein-Wiener-Chintchine<sup>17.2</sup> ist das Leistungs-Dichte-Spektrum (PSD *power spectrum density*) die Fourier-Transformierte der AKF. Damit wird:

$$S_{cc}(\omega) = S_{dd}(\omega) \cdot S_{ss}(\omega) \quad \text{PSD der Daten-Symbole} \quad (17.5)$$

- Daraus folgt, daß sich das **Leistungs-Dichte-Spektrum der Symbole**  $S_{cc}(\omega)$  aus dem **Produkt des Leistungs-Dichte-Spektrums der Daten**  $S_{dd}(\omega)$  und dem **Leistungs-Dichte-Spektrum der Symbol-Form**  $S_{ss}(\omega)$  ergibt.

### 17.1 Daten mit statistischer Unabhängigkeit

Sind die Daten statistisch von einander unabhängig, so ist deren AKF  $\delta$ -förmig.

$$R_{dd}(\tau) = \delta(\tau) \quad \circ \bullet \quad S_{dd}(\omega) = 1 \quad (17.6)$$

Deren Leistungs-Dichte-Spektrum ist daher konstant,  $S_{dd}(\omega) = 1$ . Damit ist das **Leistungs-Dichte-Spektrum der Symbole**  $S_{cc}(\omega)$  **nur durch das Symbol-Filter festgelegt**, wobei  $H_s(\omega)$  die Übertragungsfunktion des Symbol-Filters ist.

<sup>17.1</sup>Siehe hierzu: Skript „Signale und Systeme“, Abschnitt 6.4: „Korrelation und LTI-Systeme“. [5]

<sup>17.2</sup>Siehe „Signale und Systeme“, Abschnitt 6.5 [5]

$$S_{cc}(\omega) = S_{ss}(\omega) = H_s^*(\omega) \cdot H_s(\omega) = |H_s(\omega)|^2 \quad \text{PSD für statistisch unabhängige Daten} \quad (17.7)$$

Für unverrundete ( $\square$  förmige) Datensymbole  $\square_{T/2}(t)$  ergibt sich (bei statistischer Unabhängigkeit der Daten) somit ein Leistungs–Dichte–Spektrum  $P(\omega)$ , Bild 17.1.

$$P(\omega) = \left\{ \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right\}^2 \quad (17.8)$$

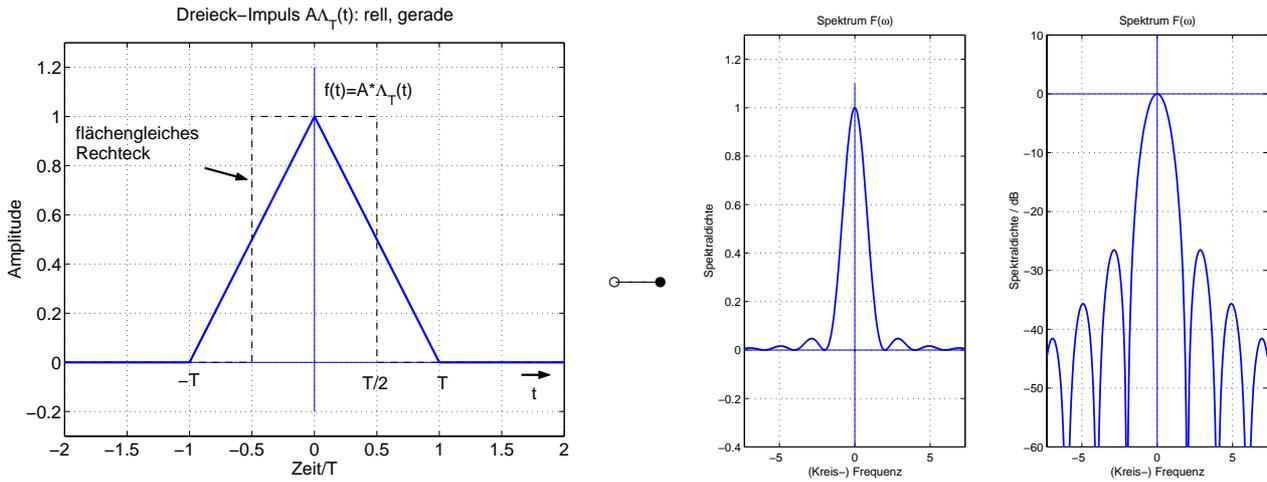


Bild 17.1: Die Autokorrelations–Funktion (statt  $t$  lies  $\tau$ ) und die Spektrale Leistungs–Dichte von rechteckförmigen Daten–Symbolen ( $\square$  Symbolform), die statistisch von einander unabhängig sind. (lineare und logarithmische Darstellung)

### 17.2 Beispiele für Daten mit statistischer Abhängigkeit

Bei  $\square$ –förmigen Datensymbolen müßten deren Leistungs–Dichte–Spektren in ihrer Form stets gemäß  $\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$  sein, wenn keine Korrelation vorliegen würde. Beispiele für solche Leitungs–Codes und deren Spektralverteilungen sind in Bild 17.2 gezeigt.

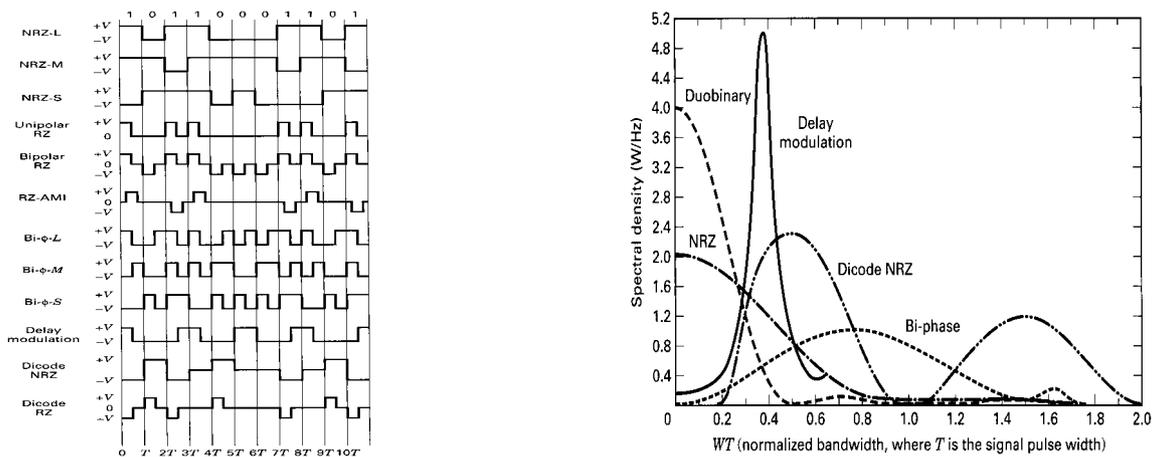


Bild 17.2: Beispiele für Leitungs–Codes im Basisband und deren Spektraldichten

**17.2.1 Die Biphase-Level Codierung**

Als Beispiel wird die BIPHASE-Level Codierung (Bi-Φ-L) betrachtet (Symbole der Breite  $T$ ). Diese kann

1. entweder als BIPHASE Symbol  $f_{bp}(t)$  komplett analysiert werden mit ansonsten von einander statistisch unabhängigen Daten oder
2. als  $\square_{T/4}(t)$  Bit (d.h.  $\square$ -Symbol) mit der Vorschrift, daß dann unmittelbar ein weiteres Bit mit  $-\square_{T/4}(t)$  zu folgen hat.

Die beiden unterschiedlichen Wege führen auf das gleiche Ergebnis, wodurch eine Kontrollmöglichkeit gegeben ist.

Zunächst wird der **1. Weg** beschrieben. Für das (gesamte) BIPHASE Symbol  $f_{bp}(t)$  gilt:<sup>17.3</sup>

$$f_{bp}(t) = \square_{T/4}(t + \frac{T}{4}) - \square_{T/4}(t - \frac{T}{4}) \quad \circ \bullet \quad jT \frac{[\sin(\omega T/4)]^2}{\omega T/4} = F_{bp}(\omega) = H_s(\omega) \quad (17.9)$$

Mit Gleichung (17.7) wird daraus das Leitungs-Dichte-Spektrum der BIPHASE-Symbole:

$$S_{cc}(\omega) = H_s^*(\omega) \cdot H_s(\omega) = \left\{ T \frac{[\sin(\omega T/4)]^2}{\omega T/4} \right\}^2 \quad (17.10)$$

Beim **2. Weg** wird die Bit-Form (hier:  $s(t) = \square_{T/4}(t)$ ) und die **statistische Abhängigkeit** bzw. Verknüpfung (hier:  $d(t) = \delta_{T/4}(t + \frac{T}{4}) - \delta_{T/4}(t - \frac{T}{4})$ ) getrennt untersucht. Damit gilt:

$$f_{bp}(t) = c(t) = s(t) * d(t) = \underbrace{\square_{T/4}(t)}_{\text{Form}} * \underbrace{\left\{ \delta(t + \frac{T}{4}) - \delta(t - \frac{T}{4}) \right\}}_{\text{statistische Abhängigkeit}} \quad (17.11)$$

In Bild 17.3 sind die BIPHASE Daten als Pin  $\bullet$  eingetragen. Dabei sind für die Zeitverschiebung  $\tau = 0$  zusätzlich die zugehörigen  $\square$ -Symbole gezeichnet. Da die Daten zeitdiskret sind, können sie immer nur in Schritten von  $T/2$  verschoben werden. In den gezeichneten Positionen ( $\tau = [-T/2, 0, T/2]$ ) gibt es Überlappungen, so daß die AKF der Daten hier  $\neq 0$  ist. Die AKF ist ebenfalls zeitdiskret und besteht aus 3 Pin.

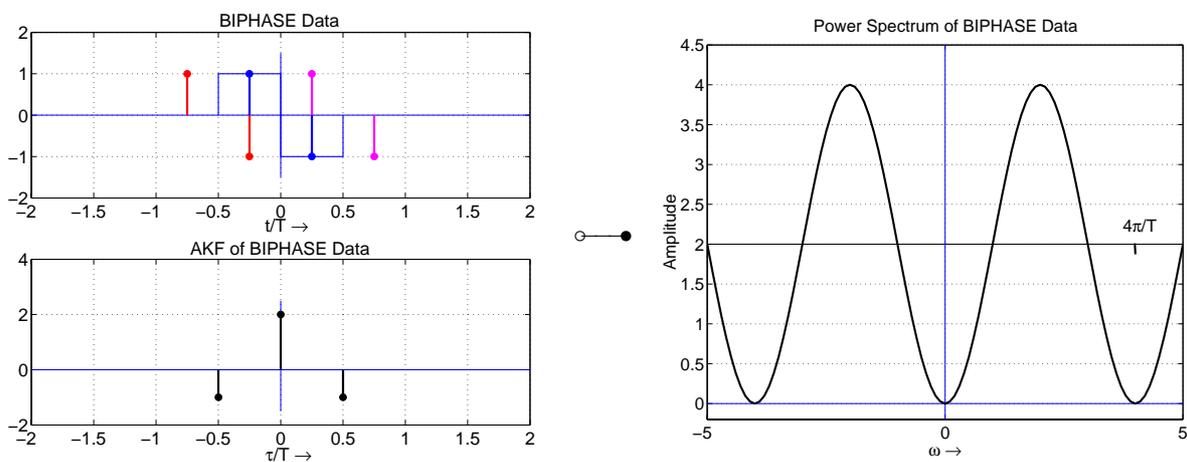


Bild 17.3: BIPHASE Daten, deren AKF  $R_{dd}(\tau)$  und Spektrale Leistungs-Dichte  $S_{dd}(\omega)$

Die Gewinnung der AKF ist sehr einfach. Jede Übereinstimmung gibt einen Wert von 1. Jede negative Übereinstimmung ergibt  $-1$ . Keine Übereinstimmung ergibt 0. Für jede der diskreten Verschiebungs-Positionen ist die Summe der Werte aufzutragen. Hieraus ergibt sich die AKF  $R_{dd}(\tau)$ . Formelmäßig werden diese Pins nun als  $\delta$  behandelt. Damit folgt für die Spektrale Leistungs-Dichte der BIPHASE Daten, Bild 17.3 (rechts):

<sup>17.3</sup>Siehe hierzu im Skript „Signale und Systeme“ die entsprechende Korrespondenz im 2. Kapitel der „Anwendungen der Fourier-Transformation“. [5]

$$R_{dd}(\tau) = -\delta(\tau + T/2) + 2\delta(\tau) - \delta(\tau - T/2) \quad \circ \rightarrow \bullet \quad 2[1 - \cos(\omega T/2)] = 4 \sin(\omega T/4)^2 = S_{dd}(\omega) \quad (17.12)$$

Die Bit-Form  $s(t) = \square_{T/4}(t)$  hat als AKF  $R_{ss}(\tau)$  ein Dreieck. Daraus folgt als Fourier-Transformierte  $S_{ss}(\omega)$ :

$$S_{ss}(\omega) = \left(\frac{T}{2}\right)^2 \left(\frac{\sin(\omega T/4)}{\omega T/4}\right)^2 \quad (17.13)$$

Mit Gleichung (17.5) wird damit:

$$S_{cc}(\omega) = S_{dd}(\omega) \cdot S_{ss}(\omega) = \left(\frac{T}{2}\right)^2 \left(\frac{\sin(\omega T/4)}{\omega T/4}\right)^2 \cdot 4 \sin(\omega T/4)^2 = \left\{ T \frac{[\sin(\omega T/4)]^2}{\omega T/4} \right\}^2 \quad (17.14)$$

Dies stimmt überein mit Gleichung (17.10). Damit ist an diesem Beispiel gezeigt, auf welchem Weg man zu den Leistungs-Dichte-Spektren von codierten Daten bzw. Symbolen kommen kann.

Das Leistungs-Dichte-Spektrum der unerrundeten BIPHASE Symbole ist in Bild 17.4 dargestellt.

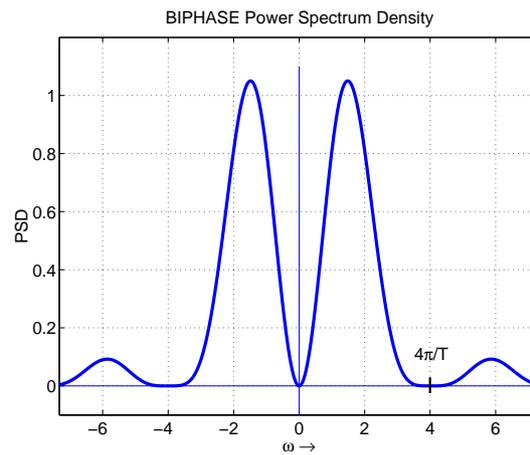


Bild 17.4: Das Leistungs-Dichte Spektrum der unerrundeten Biphase Symbole

# Inter-Symbol-Interferenz & Nyquist-Bedingung

Für eine Digitale Übertragung (z.B. Mobil-Funk, ISDN, T-DSL, Digitaler Rundfunk usw.) steht immer nur eine **begrenzte Bandbreite**  $B_{\Omega} = 2\pi B_{RF}$  zur Verfügung. Daher müssen die gesendeten **Datensymbole verrundet** werden, um die Bandbreitenbedingung einzuhalten.

- Bandbegrenzte Signale haben aber eine  $\infty$  lange zeitliche Ausdehnung.
- Korrelations-Empfang ist daher nicht mehr möglich, sondern nur Matched-Filter-Empfang.

Es sind dabei folgende Optimierungs-Aufgaben zu lösen:

- Maximierung der übertragenen Datenrate bei gegebener Bandbreite des Übertragungs-Kanals.
- Einfache (und korrekte) Rückgewinnung der Digitalen Information aus den empfangenen analogen (verzerrten und gestörten) Symbolen.
- Minimierung der Auswirkung der Intersymbol-Interferenzen, die infolge endlicher Bandbreite entstehen.

## 18 Modell einer Digitalen Übertragung im Basisband

Die Problemstellung wird anhand einer Digitalen Übertragung im I-Zweig des Basisbandes untersucht.<sup>18.1</sup>

Im Blockschaltbild für das Modell einer Übertragung [30] mit **Inter-Symbol-Interferenz** (ISI: *inter symbol interference*) werden die (binären) Daten (mit dem Daten-Takt  $T$ ) als vorzeichenbehaftete  $\delta$ -Impulse ( $\uparrow$  bzw.  $\downarrow$ ) dargestellt, woraus im Ausgang des Symbol-Filters des Senders (*transmitting filter*) die verrundeten Daten-Symbole entstehen, Bild 18.1 (a). Die Daten-Symbole repräsentieren in diesem Fall je 1 Bit (Binär-Symbole).<sup>18.2</sup>

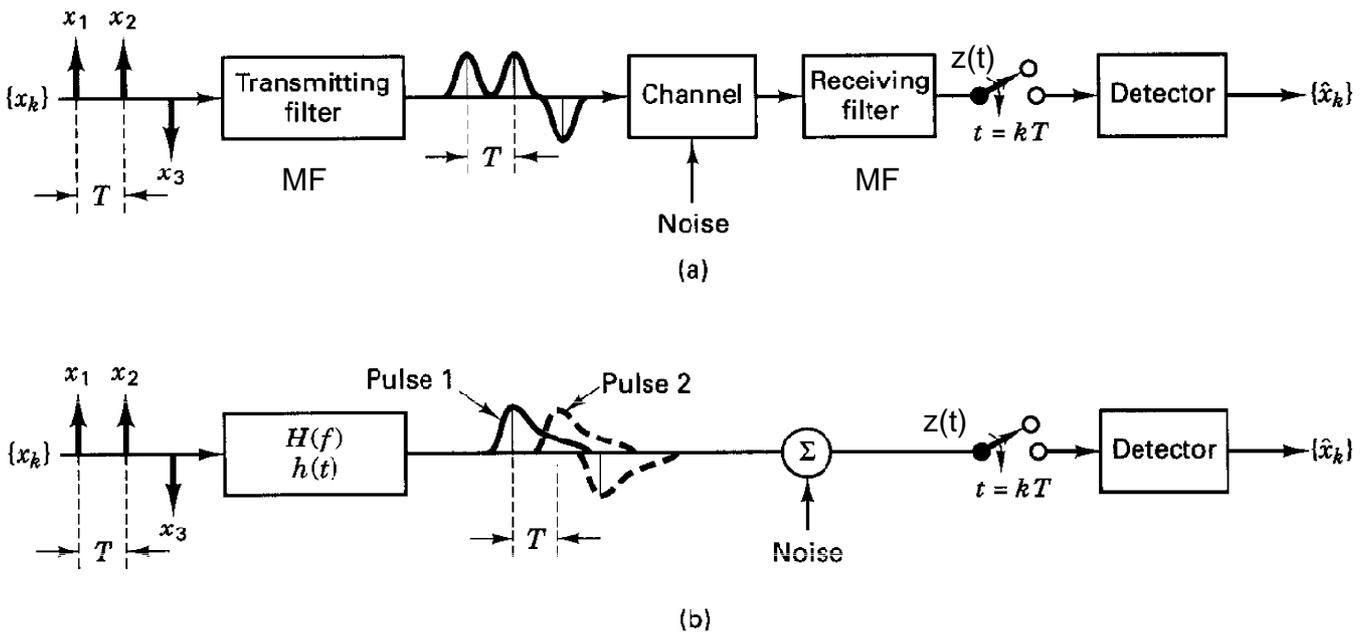


Bild 18.1: Modell der Übertragungs-Stecke im Basisband zur Untersuchung der Inter-Symbol-Interferenz (ISI)

Die Filter im Sender und im Empfänger (MF: *matched filter*), sowie die Filtereigenschaften des Kanals werden in einem einzigen Filter  $H(\omega)$  zusammengefaßt, Bild 18.1 (b). Die Digitalen Symbole (Puls 1, Puls 2, usw.) erleiden Verbreiterungen auf ihrem Weg bis zum Entscheider im Empfänger, welche zu Inter-Symbol-Interferenzen führen. Dadurch ist zu den Entscheidungs-Zeitpunkten  $t = k \cdot T$  das empfangene Signal von mehr als nur von einem einzigen Symbol abhängig.

<sup>18.1</sup>Dies stellt keine Einschränkung der Allgemeinheit dar, da sich eine Übertragung mit Digitalen Modulationen als parallele Übertragung (I- und Q-Kanal) im Basisband modellieren läßt.

<sup>18.2</sup>Bei höherstufigen Digitalen Übertragungs-Systemen werden mehrere Bit (2, 4, 8, ... ) pro Datensymbol übertragen. In diesen Fällen wird dann zwischen dem Bit-Takt  $T_b$  und dem Symbol-Takt  $T_S$  unterschieden.

Daher muß für eine Digitale Übertragung **gefordert** werden, daß die **Inter-Symbol-Interferenzen zu den Entscheidungs-Zeitpunkten verschwinden**. Für diese Untersuchung wird das Rauschen bzw. Geräusch im Kanal zu Null angenommen ( $Noise = 0$ ).<sup>18.3</sup>

### 19 Nyquist-Bedingungen

Ein Digitales Übertragungs-System muß folgender Bedingung genügen:

- **Um Inter-Symbol-Interferenzen zu vermeiden, müssen die Symbole zu den Abtast-Zeitpunkten  $t = k \cdot T$  des Entscheiders (im Empfänger) von einander unabhängig sein.**

Im Prinzip kann diese Unabhängigkeit auf zweierlei Arten erreicht werden.

1. Die verrundeten Datensymbole  $c(t)$  bzw.  $s(t)$  sind identisch Null außerhalb der Symboldauer  $T$ , d.h. sie verschwinden dort total. (Entsprechend zu den gezeichneten Symbolen in Bild 18.1 (a) ). Für diese Fälle kann der Korrelations-Empfänger verwendet werden.

Hierdurch wird die 1. Nyquist-Bedingung zwar erfüllt, jedoch scheidet dieser Fall hier aus, weil zeitlich begrenzte Symbole eine Bandbreite  $\rightarrow \infty$  haben.

2. Die verrundeten Symbole haben zwar Nebenmaxima außerhalb der nominellen Symbol-Dauer  $T$ , sind aber exakt zu den (weiteren) Abtast-Zeitpunkten  $t = k \cdot T$  dort Null.

Damit wird die **1. Nyquist-Bedingung für bandbegrenzte Symbole** erfüllt.

Jede Bandbegrenzung auf die Bandbreite  $B_\Omega = 2\omega_c$  kann als Multiplikation mit einem Rechteck  $\Pi_{\omega_c}(\omega)$  dargestellt werden. Bandbegrenzung wird dabei so verstanden, daß für  $|\omega| > \omega_c$  die Spektraldichte identisch Null wird.

#### 19.1 Idealer Tiefpaß als einfachste Form, die die Nyquist-Bedingung 1 erfüllt

Als einfachste Filterform  $H(\omega)$  in Bild 18.1 (b), mit der die Nyquist-Bedingung 1 erfüllt werden kann, ist der „Ideale Tiefpaß“ (Küpfmüller-TP) mit der Übertragungsfunktion  $H_i(\omega)$  und der Impulsantwort  $h_i(t)$ , Bild 19.1.

$$H(\omega) = H_i(\omega) = \Pi_{\omega_c}(\omega) \quad \bullet \text{---} \circ \quad h_i(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t} \quad (19.1)$$

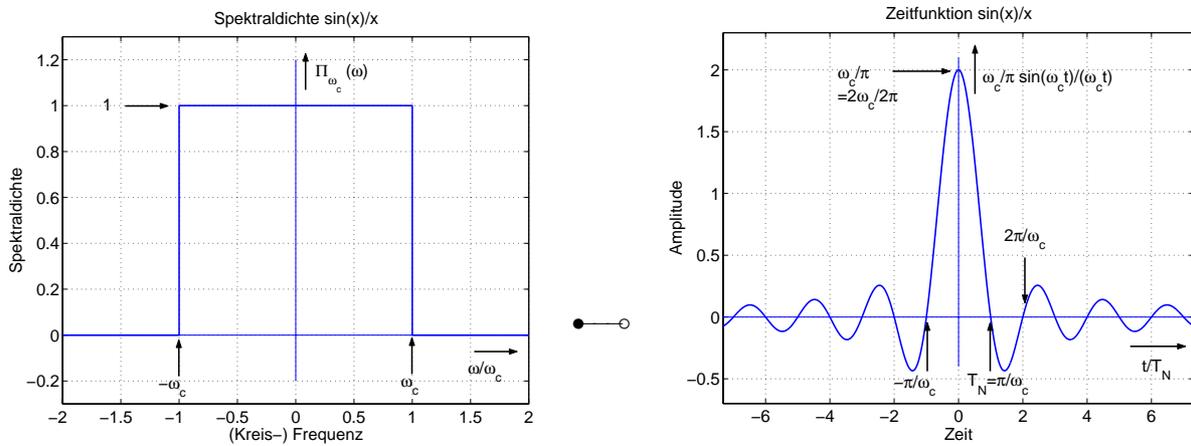


Bild 19.1: Der ideale Tiefpaß  $H_i(\omega) = \Pi_{\omega_c}(\omega)$  (mit Phase 0) und seine Impulsantwort  $h_i(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t}$

Da die  $\frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t}$  Funktion äquidistante Nullstellen für  $t = n \cdot T_N$  hat, läßt sich hiermit die 1. Nyquist-Bedingung erfüllen, wenn der Datentakt  $T$  entsprechend gewählt wird ( $T = T_N$ ). Alternativ kann die Grenzfrequenz  $\omega_c$  an den Datentakt  $T$  angepaßt werden.

<sup>18.3</sup>Störungen durch Mehrwegeausbreitung (Echos) sollen ebenfalls nicht auftreten.

$$T = T_N = \frac{\pi}{\omega_c} \quad \rightsquigarrow \quad \omega_c = \frac{\pi}{T} \tag{19.2}$$

Da jeweils im (zeitlichen) Abstand  $T$  ein weiteres Daten-Symbol übertragen wird, ergibt sich eine Symbolrate  $R$  zu

$$R = \frac{1}{T} \quad \text{Symbol-Rate} \tag{19.3}$$

Wenn die Bedingung (19.2) in Gleichung (19.1) eingesetzt wird, erhält man dadurch für die Symbolform am Entscheider:

$$z(t) = h_i(t) = \frac{1}{T} \frac{\sin(\pi \frac{t}{T})}{\pi \frac{t}{T}} = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t = nT; \quad n \neq 0 \end{cases} \quad \text{Symbol-Form} \tag{19.4}$$

- Die Daten-Formung gemäß  $\frac{\sin(\pi \frac{t}{T})}{\pi \frac{t}{T}}$  ist technisch ungünstig, da die Zeitpunkte für den Daten-Takt im Empfänger hierfür sehr exakt eingehalten werden müssen.

Dies rührt daher, daß (je nach Dateninhalt) die empfangene Zeitfunktion sehr steil durch die exakten Entscheidungs-Zeitpunkte geht, wie am Beispiel Bild 19.2 zu erkennen ist. Dieses zeigt eine (endlich lange) Datenübertragung mit den Daten ↑↑↑↓↑↑↓↓↑↑↓↑↑↓.

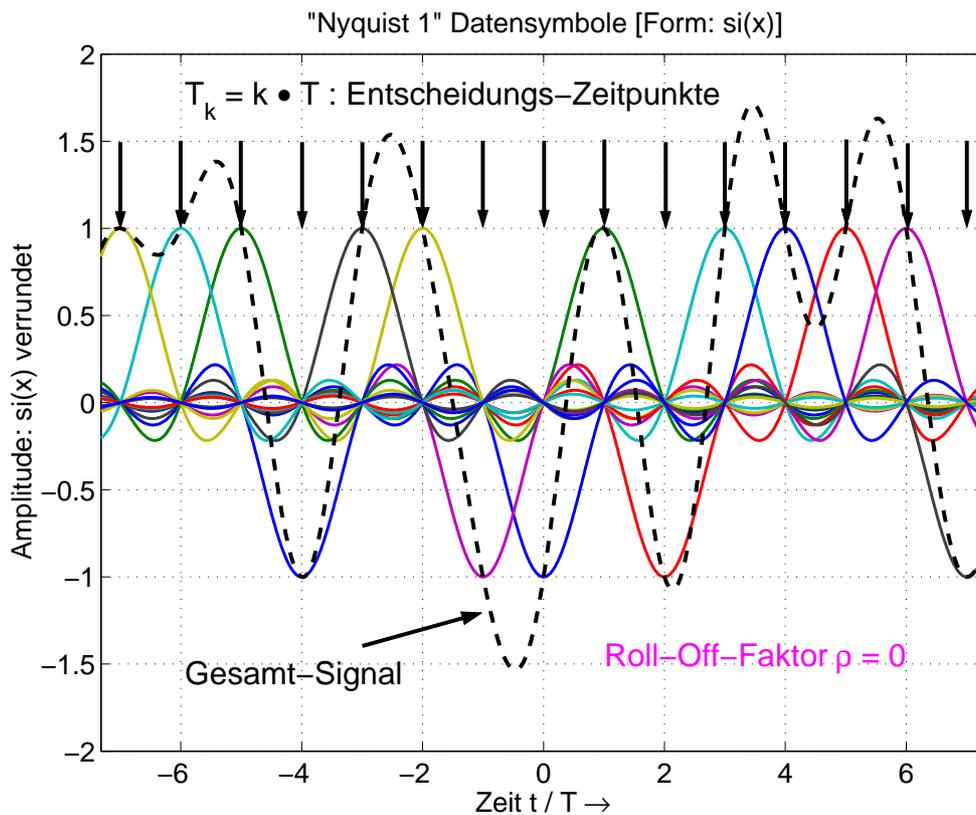


Bild 19.2: Daten gemäß Nyquist 1 mit  $\frac{\sin(\pi \frac{t}{T})}{\pi \frac{t}{T}}$  verrundet zeigen starke Inter-Symbol-Interferenz

Aus Bild 19.2 ist zu erkennen, daß der Datentakt (und damit die Entscheidungs-Zeitpunkte) nicht

- aus den Extrema des empfangenen Daten-Signals (Gesamt-Signal  $z(t)$ ), aber auch nicht
- aus den Nulldurchgängen dieses Signals gewonnen werden kann.

Die Detektion von Symbolen mit endlicher Bandbreite (die deshalb beliebig lang andauernde Ausläufer haben) ist daher aufwendiger als die Detektion von Symbolen endlicher Dauer (und Bandbreite  $\rightarrow \infty$ ), welche mittels Korrelation erkannt werden konnten.

### 19.2 Verallgemeinerung der Nyquist-Bedingung 1

Gesucht sind Symbol-Formen  $h_v(t)$ , die **äquidistante Nullstellen** bei  $t = kT$  haben sollen und deren **Nebenmaxima** (Überschwinger) **schneller verschwinden** als die vom  $\sin(x)/x$ .

Diese Bedingungen werden erfüllt, wenn  $h_i(t)$  mit einer **geraden Zeitfunktion**  $g(t)$  **multipliziert** wird.

$$h_v(t) = h_i(t) \cdot g(t) = \frac{1}{T} \frac{\sin(\pi \frac{t}{T})}{\pi \frac{t}{T}} \cdot g(t) \tag{19.5}$$

Der Anteil  $\frac{1}{T} \frac{\sin(\pi \frac{t}{T})}{\pi \frac{t}{T}}$  liefert die (für die Daten-Übertragung notwendigen) äquidistanten Nullstellen bei  $t = kT$ .

Der Anteil  $g(t)$  hat dafür zu sorgen, daß die Nebenmaxima von  $h_v(t)$  schneller abnehmen als dies beim  $\frac{\sin(x)}{x}$  der Fall ist. Die Funktion  $g(t)$  muß daher für  $t = 0$  ein Maximum haben und sollte für  $t \neq 0$  rasch abnehmen. Die verrundete Impuls-Form  $h_v(t)$  hat zusätzliche Nullstellen, die von  $g(t)$  herrühren. Diese tragen zwar nichts zur Erfüllung der 1. Nyquistbedingung bei, sondern bewirken nur, daß die Größe der Nebenmaxima von  $h_v(t)$  rasch abnimmt.

Im Frequenzbereich lautet die entsprechende Aussage, daß die  $\square$ -Form des Formungs-Filters  $H_i(\omega)$  mit einer **geraden Spektralfunktion**  $G(\omega)$  zu **falten** ist:

$$H_v(\omega) = H_i(\omega) \left\{ \frac{1}{2\pi} \right\} * G(\omega) = \square_{\omega_c}(\omega) \left\{ \frac{1}{2\pi} \right\} * G(\omega) \tag{19.6}$$

Die Durchführung dieser Faltung<sup>19.1</sup>, Bild 19.3, wird an einem einfachen Beispiel gezeigt.

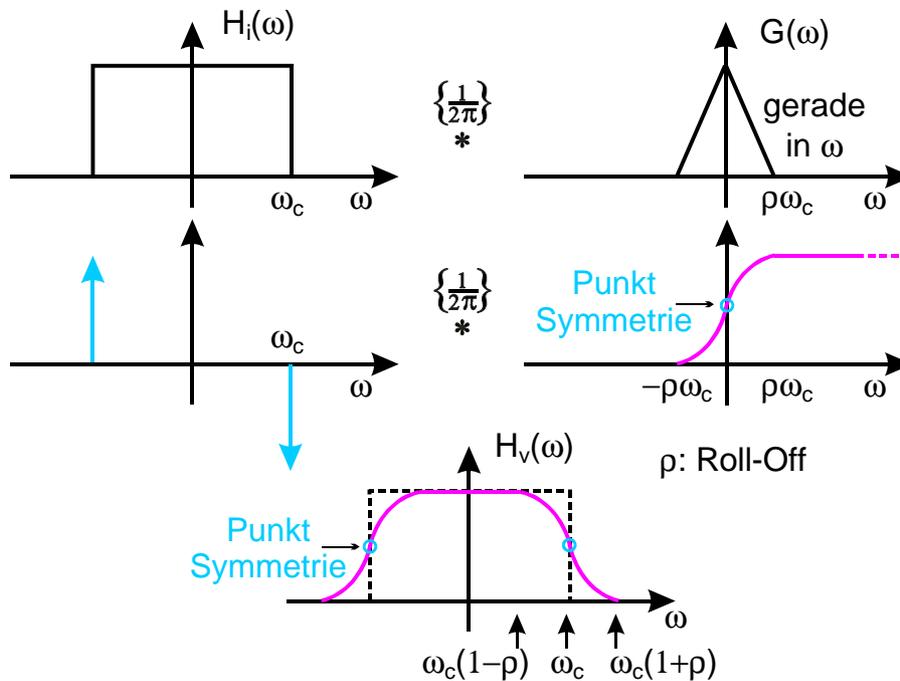


Bild 19.3: Verrundungs-Filter  $H_v(\omega)$  gemäß Nyquist 1 mit verminderter Inter-Symbol-Interferenz

Die Breite von  $G(\omega)$  sei  $2 \cdot \rho \omega_c$ , wobei  $\rho$  als *Roll-Off-Faktor* bezeichnet wird. Damit erhält das Formungs-Filter  $H_v(\omega)$  einen Übergangsbereich mit gleicher Breite  $2 \cdot \rho \omega_c$ .

Die wichtigste Eigenschaft von  $G(\omega)$  ist die **Spiegel-Symmetrie** (gerade in  $\omega$ ), die bei  $H_v(\omega)$  zur **Punkt-Symmetrie der Flanken** führt.

<sup>19.1</sup>Zur „Vereinfachten Faltung“ siehe: „Signale und Systeme“, Anwendungen der Fourier-Transformation, Kapitel 4 [5]

**19.2.1 Nyquist-Symbole gemäß der Nyquist-Bedingung abgetastet**

Hierzu betrachtet man einen einzelnen verrundeten Impuls  $h_v(t)$ , Gleichung (19.5), und tastet diesen zu den Takzeitpunkten  $k \cdot T$  ab, was mathematisch die Multiplikation mit einem  $\delta$ -Kamm  $\text{III}_T(t)$  darstellt. Es bleibt dabei nur der **Abtastwert**  $h_v(0)$  **an der Stelle**  $t = 0$  übrig.

$$h_v(t) \cdot \text{III}_T(t) = h_v(0) = \frac{g(0)}{T} \delta(t) \tag{19.7}$$

Eine Multiplikation mit einem  $\delta$ -Kamm<sup>19.2</sup>  $\text{III}_T(t)$  im Zeitbereich bedeutet eine Faltung mit einem  $\delta$ -Kamm  $\Omega \text{III}_\Omega(\omega)$  im Frequenzbereich. Der Linienabstand beträgt hierbei mit Gleichung (19.2):

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = 2\omega_c \tag{19.8}$$

Da  $H_v(\omega)$  an den Stellen  $\pm\omega_c$  eine Punktsymmetrie aufweist, überlappen sich sämtliche Teilspektren in der Faltung gerade so, daß insgesamt eine **Konstante** übrig bleibt, Bild 19.4.

$$H(\omega) = H_v(\omega) \overset{\left\{\frac{1}{2\pi}\right\}}{*} \Omega \text{III}_\Omega(\omega) = \frac{g(0)}{T} = H_v(0) = \text{konstant} \tag{19.9}$$

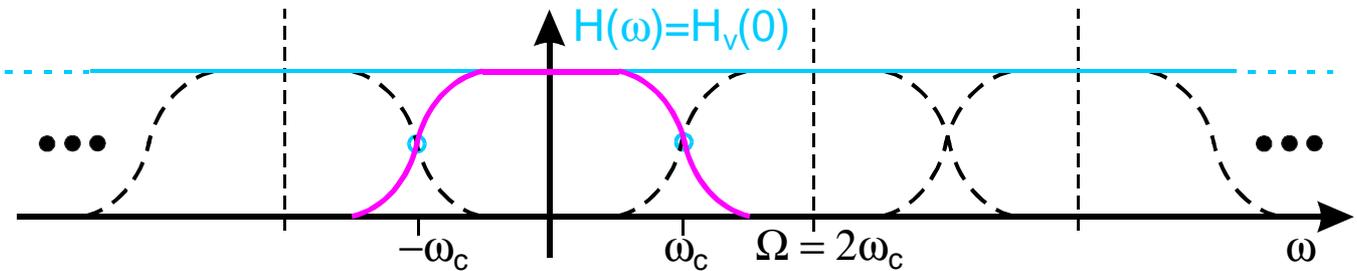


Bild 19.4: Die Transformierte  $H(\omega)$  des gemäß der Nyquist-Bedingung abgetasteten Nyquist-Daten-Symbols ist eine Konstante.

Wird  $g(0) = 1$  gewählt, bleibt der Wert des Datensymbols zu den Abtastzeitpunkten trotz Verrundung unverändert. Mit  $g(0) = 1$  wird die Fläche unter der Funktion  $G(\omega)$  zu  $2\pi$ .

**20 Cosinus Roll-Off**

**20.1 Die gerade Spektral-Funktion ist eine Cos-Kuppe  $G_c(\omega)$**

Eine häufig benutzte und **günstige Kurvenform** einer geraden Spektralfunktion  $G_c(\omega)$  für die Faltung Gleichung (19.6) und Bild 19.3 ist eine **Cosinus-Kuppe**, hier auch **Cos-Filter** bezeichnet. Die Cosinus-Kuppe hat die Breite  $\pm\omega_g = \pm\rho \omega_c$  ( $\rho$ : Roll-Off-Faktor), wodurch die Cosinus-Funktion eine Periode  $\omega_P$  erhält.

$$\omega_P = 4\omega_g = 4\rho \omega_c \quad \text{Periode des Cos} \tag{20.1}$$

Eine (einzelne) Cos-Kuppe läßt sich darstellen als Produkt einer (periodischen) Cos-Funktion mit einem Rechteck  $\Pi_{\omega_g}$ . Daraus folgt

$$G_c(\omega) = G_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi\omega}{\omega_P}\right) \cdot \Pi_{\omega_g} = G_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi\omega}{2\omega_g}\right) \cdot \Pi_{\omega_g} = G_0 \cdot \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi\omega}{2\rho\omega_c}\right) & \text{für } |\omega| < \rho \cdot \omega_c = \omega_g \\ 0 & \text{für } |\omega| \geq \rho \cdot \omega_c = \omega_g \end{cases} \tag{20.2}$$

Der Wert von  $G_0$  wird anschließend so bestimmt, daß sich  $g_c(0) = 1$  ergibt.

Die Rück-Transformierte  $g_c(t)$  der Cos-Kuppe  $G_c(\omega)$  kann als Faltung von 2  $\delta$ -Linien (Fläche je  $\frac{1}{2}$ ) mit einem  $\frac{\sin(\omega_g t)}{\omega_g t}$  (Zentralordinate:  $\frac{2\omega_g}{2\pi}$ ) dargestellt werden, entsprechend zum Produkt im Frequenzbereich.

<sup>19.2</sup>Zum  $\delta$ -Kamm  $\text{III}_T(t)$  siehe: „Signale und Systeme“, „Anwendungen der Fourier-Transformation“ AFT, Kapitel 5 [5]

$$g_c(t) = G_0 \cdot \frac{1}{2} \left[ \delta\left(t + \frac{\pi}{2\omega_g}\right) + \delta\left(t - \frac{\pi}{2\omega_g}\right) \right] * \frac{\omega_g}{\pi} \frac{\sin(\omega_g t)}{\omega_g t} \tag{20.3}$$

$$= G_0 \frac{\omega_g}{2\pi} \left[ \frac{\sin(\omega_g t + \pi/2)}{\omega_g t + \pi/2} + \frac{\sin(\omega_g t - \pi/2)}{\omega_g t - \pi/2} \right] = G_0 \frac{\omega_g}{2\pi} \left[ \frac{\cos(\omega_g t)}{\omega_g t + \pi/2} + \frac{-\cos(\omega_g t)}{\omega_g t - \pi/2} \right] \tag{20.4}$$

$$= G_0 \frac{\omega_g}{2\pi} \frac{\pi \cos(\omega_g t)}{(\pi/2)^2 - (\omega_g t)^2} = G_0 \frac{2\omega_g}{\pi^2} \frac{\cos(\omega_g t)}{1 - \left(\frac{2\omega_g t}{\pi}\right)^2} \tag{20.5}$$

Aus der Bedingung  $g_c(0) = 1$  folgt nun

$$G_0 = \frac{\pi^2}{2\omega_g} \rightsquigarrow G_0 \frac{\omega_g}{2\pi} = \frac{\pi}{4} \tag{20.6}$$

Damit ist die Impulsantwort  $g_c(t)$  eines Cos-Filters  $G_c(\omega)$  mit Grenzfrequenz  $\pm\omega_g$

$$g_c(t) = \frac{\cos(\omega_g t)}{1 - \left(\frac{2\omega_g t}{\pi}\right)^2} \quad \text{Impulsantwort Cos-Filter} \tag{20.7}$$

Das Cos-Filter und seine Impulsantwort  $g_c(t)$  zeigt Bild 20.1

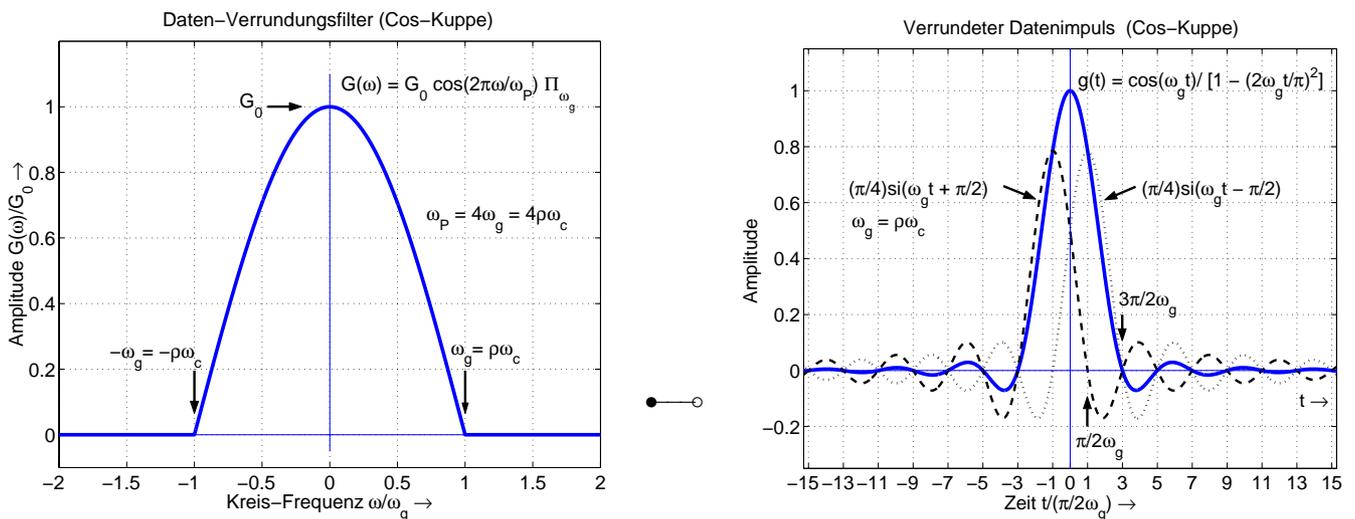


Bild 20.1: Das Cos-Filter und seine Impulsantwort

## 20.2 Verrundungs-Filter mit Cosinus Roll-Off

Die Verrundung erfolgt in der gleichen Art, wie in Gleichung (19.6) bzw. Bild 19.3, mit dem Unterschied, daß für  $G(\omega)$  die Cos-Kuppe  $G_c(\omega)$  gewählt wird. Die Grenzfrequenz  $\omega_g$  wird dabei ersetzt durch  $\omega_g = \rho \omega_c$ .

$$H_v(\omega) = H_i(\omega) \left\{ \frac{1}{2\pi} \right\} * G_c(\omega) = \Pi_{\omega_c}(\omega) \left\{ \frac{1}{2\pi} \right\} * \frac{\pi^2}{2\rho \omega_c} \cdot \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi\omega}{2\rho \omega_c}\right) & \text{für } |\omega| < \rho \cdot \omega_c = \omega_g \\ 0 & \text{für } |\omega| \geq \rho \cdot \omega_c = \omega_g \end{cases} \tag{20.8}$$

Die Faltung kann analog zur Faltung in Bild 19.3 (Seite 90) durchgeführt werden.<sup>20.1</sup> Für den Amplitudengang  $|H_v(\omega)|$  des Daten-Formungs-Filters erhält man in Abhängigkeit vom Roll-Off-Faktor  $\rho$  einen Verlauf gemäß Bild 20.2 (**Cos-RO-Filter**, Cos-Roll-Off-Filter).

<sup>20.1</sup>Diese Faltung als **Übungsaufgabe** durchführen! Zur Erinnerung:

1. Die Fläche unter einer Cos-Kuppe ist das  $2/\pi$  fache der Fläche des umbeschriebenen Rechtecks.
2. Die Integration der Cos-Kuppe ergibt einen Funktions-Verlauf gemäß  $(1 + \sin)$  im Intervall  $-\omega_g \leq \omega \leq \omega_g$ .

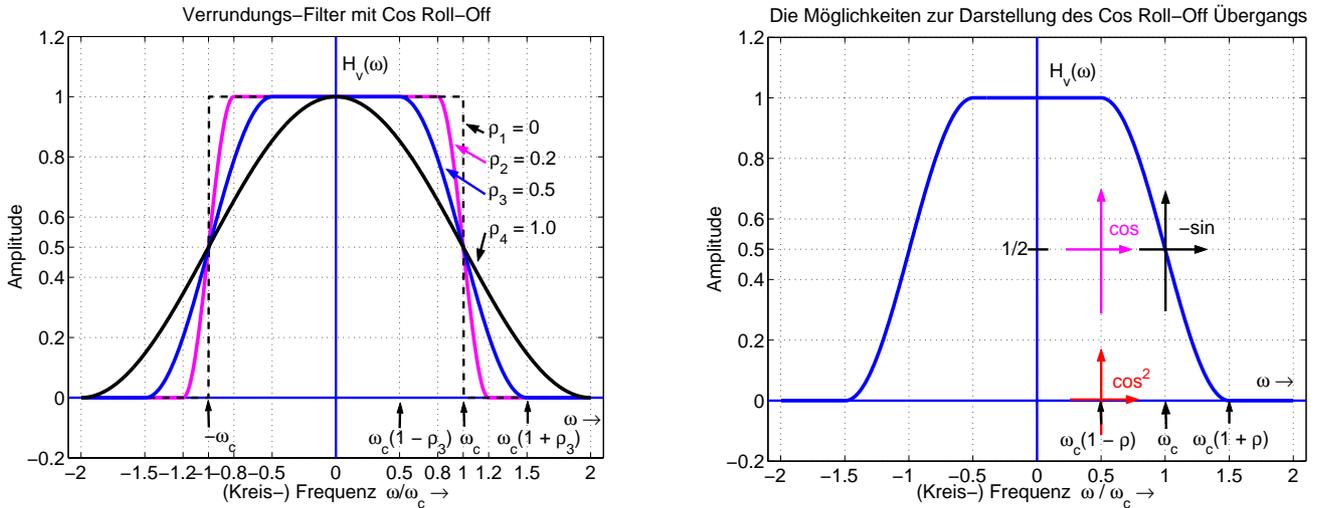


Bild 20.2: Das Verrundungs-Filter mit Cos-Roll-Off ( $\rho = [0, 0.2, 0.5, 1]$ ) und die Achsenkreuze zur formelmäßigen Darstellung des Übergangs-Bereichs

Je größer der Wert für den Roll-Off-Faktor gewählt wird, um so breiter wird das Daten-Verrundungs-Filter. Für  $\rho = 1$  hat es die Breite  $\pm 2\omega_c$  und ist damit doppelt so breit wie für  $\rho = 0$ . In diesem Fall ( $\rho = 1$ ) hat das Daten-Verrundungs-Filter eine  $\cos^2$ -Form.

Die formelmäßige Darstellung für  $H_v(\omega)$  ist davon abhängig, welches **Achsen-Kreuz** für den Übergangsbereich gewählt wird, Bild 20.2 rechte Seite. Dieser läßt sich wahlweise als  $\cos$ , als  $-\sin$  oder als  $\cos^2$  schreiben. Hier wird die Schreibweise mit  $\cos$  verwendet (*rc raised cosine*).

$$H_v(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\omega| < \omega_c(1 - \rho) \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{\pi}{2\rho} \left( \frac{\omega}{\omega_c} - (1 - \rho) \right) \right] \right\} & \text{für } \omega_c(1 - \rho) \leq |\omega| \leq \omega_c(1 + \rho) \\ 0 & \text{für } |\omega| > \omega_c(1 + \rho) \end{cases} \quad \text{Cos-RO-Filter} \quad (20.9)$$

Da  $H_v(\omega)$  mit Hilfe einer Faltung gewonnen wurde, ergibt sich im Zeitbereich für  $h_v(t)$  das Produkt der beiden Impulsantworten  $h_i(t)$  (Gleichung (19.1)) und  $g_c(t)$  (Gleichung (20.7)).

$$h_v(t) = h_i(t) \cdot g_c(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t} \cdot \frac{\cos(\omega_g t)}{1 - \left(\frac{2\omega_g t}{\pi}\right)^2} \quad (20.10)$$

Mit  $\omega_c = \pi/T$  und  $\omega_g = \rho\omega_c = \rho\pi/T$  wird daraus:

$$h_v(t) = \frac{1}{T} \frac{\sin(\pi \frac{t}{T})}{\pi \frac{t}{T}} \cdot \frac{\cos(\rho\pi \frac{t}{T})}{1 - (2\rho \frac{t}{T})^2} \quad \text{Impuls-Antwort Cos-Roll-Off-Filter} \quad (20.11)$$

Die sich damit für die Roll-Off-Faktoren  $\rho = [0, 0.2, 0.5, 1]$  ergebenden Impulsantworten bzw. verrundeten Datensymbole zeigt Bild 20.3 (links).

### 20.3 Nyquist-Bedingung 2

Aus der gezoomten Darstellung des Datensymbols mit  $\rho = 1$  (Bild 20.3 (rechts)) ist erkennbar, daß diese Form zusätzliche **Nullstellen genau in der Mitte** zwischen den Entscheidungs-Zeitpunkten  $t = k \cdot T$  hat. Die Zeitfunktion wurde hierbei mittels Linearitäts-Satz und Modulations-Satz (bzw. Faltungs-Satz) gewonnen, weshalb dieses Datensymbol auch als Überlagerung von drei  $\frac{\sin(x)}{x}$  Verläufen darstellbar ist. Aufgrund der  $\frac{\sin(x)}{x}$  Verläufe ist die zusätzliche Nullstelle **exakt in der Mitte zwischen den Entscheidungs-Zeitpunkten** sofort zu erkennen.

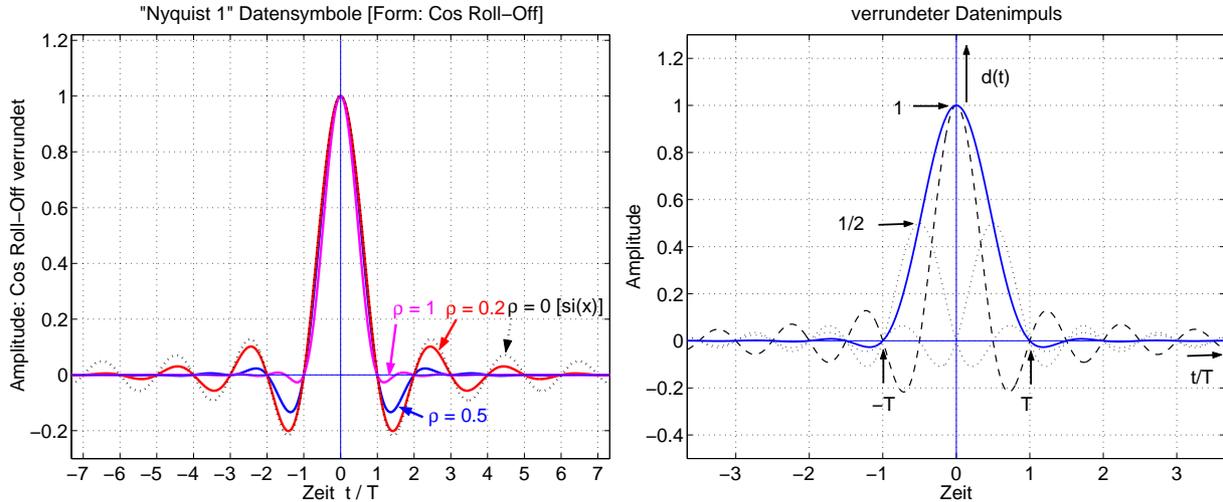


Bild 20.3: Die verrundeten Datensymbole für die Roll-Off-Faktoren  $\rho = [0, 0.2, 0.5, 1]$  (links) und Datensymbol mit  $\rho = 1$  verrundet ( $\cos^2$ -Form des Filters) (rechts)

- Symbolformen, die Nulldurchgänge exakt in der Mitte zwischen den Abtast-Zeitpunkten haben, erfüllen die **2. Nyquist-Bedingung**.

Für  $\rho = 1$  erhält man die (bekannte)  $\cos^2$ -Form der Breite  $\pm 2\omega_c$ , vergleiche Bild 20.2. Die mit einem  $\cos^2$ -Filter ( $\rho = 1$ ) verrundeten Datensymbole erfüllen die 1. & 2. Nyquist-Bedingung.

- Andererseits gibt es auch Impuls-Formen, die **nur die 2. Nyquist-Bedingung** erfüllen, nicht jedoch die 1. Nyquist-Bedingung. Dies sind z.B. die mit einem  $\cos$ -Filter verrundeten Daten, siehe hierzu Bild 20.1 (Seite 92). Hier gibt es ausschließlich Nulldurchgänge exakt in der Mitte zwischen den Entscheidungs-Zeitpunkten.

Damit ersichtlich wird, wie sich die Symbol-Verrundung auf einen Datenstrom auswirkt, wird wieder die gleiche Datenfolge (  $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$  ) verwendet, die Bild 19.2 (Seite 89 ) zu Grunde lag. Dies wird für die Roll-Off-Faktoren  $\rho = [0.5, 1]$  in Bild 20.4 dargestellt.

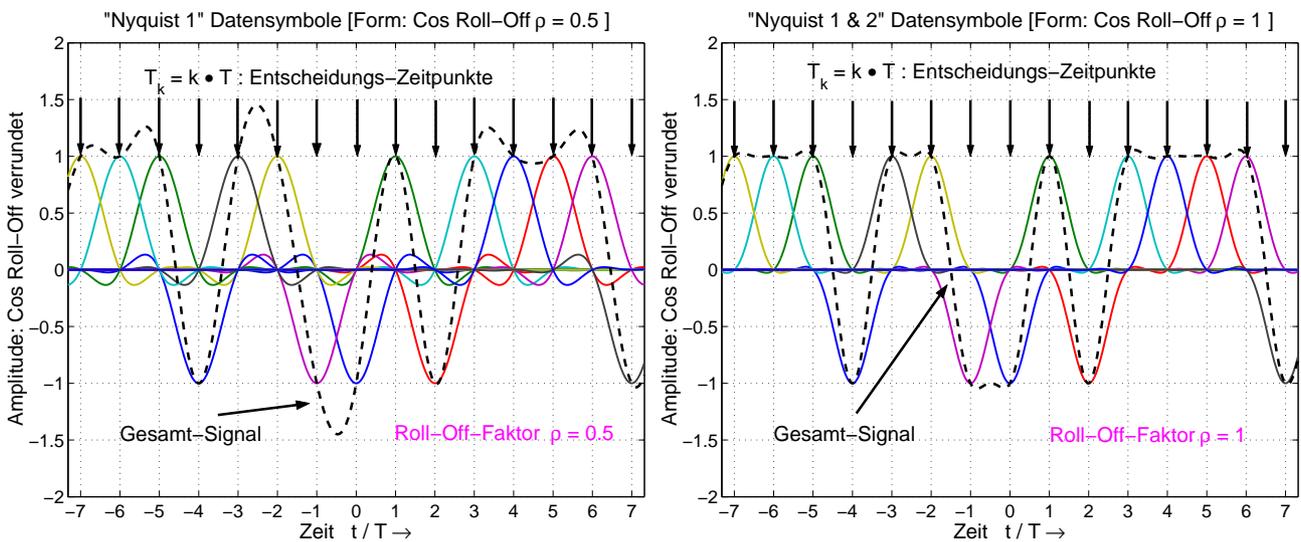


Bild 20.4: Datenfolge verrundet mit Roll-Off-Faktor  $\rho = 0.5$  (links) und  $\rho = 1$  (rechts)

Wie aus den (verrundeten) Datenfolgen in Bild 20.4 erkennbar ist, sind hier

- die Durchgänge des Summen-Signals durch die Abtast-Punkte sehr viel weniger steil als in Bild 19.2
- die Inter-Symbol-Interferenzen wesentlich schwächer, insbesondere für  $\rho = 1$
- für  $\rho = 1$  die Nulldurchgänge des Summensignals exakt in der Mitte zwischen zwei Entscheidungs-Zeitpunkten. (2. Nyquist-Bedingung)
- für  $\rho = 1$  in der Mitte zwischen den Entscheidungs-Zeitpunkten die Amplituden genau 1, wenn keine Nulldurchgänge erfolgen.

Die Nulldurchgänge des Summensignals exakt zwischen den Entscheidungs-Zeitpunkten, die infolge der 2. Nyquist-Bedingung entstehen, vereinfachen die Takt-Rückgewinnung ( $t = k \cdot T$ ) auf der Empfängerseite erheblich.

## 20.4 Symbol-Rate und Spektrale Effizienz bei Cos-Roll-Off Verrundung

Die Symbolrate  $R$  ist aufgrund der Nyquist-Bedingung 1

$$R = 1/T \quad \text{Symbol-Rate} \quad (20.12)$$

weil genau im Abstand  $T$  das nächste Symbol übertragen wird. Die dafür erforderliche Bandbreite  $B$  bzw.  $B_\Omega$  ergibt sich in Abhängigkeit des Roll-Off-Faktors  $\rho$  zu:

$B = 1/2T$	$\rightsquigarrow$	$B_\Omega = \pi/T$	für $\rho = 0$	<b>minimale Bandbreite</b>	(20.13)
$B = 1/T$	$\rightsquigarrow$	$B_\Omega = 2\pi/T$	für $\rho = 1$	<b>maximale Bandbreite</b>	
$B = (1 + \rho)/2T$	$\rightsquigarrow$	$B_\Omega = \pi(1 + \rho)/T$	für $0 \leq \rho \leq 1$		

In der Praxis ist meist die Kanal-Bandbreite  $B$  bzw.  $B_\Omega$  vorgegeben und darf nicht überschritten werden. Bei fest vorgegebener Bandbreite ändert sich die Symbolrate (bzw. Datenrate) entsprechend.

Zur Vereinfachung ist es gebräuchlich, den Ausdruck  $B \cdot T = B/R$  bzw. den Kehrwert  $r_S = R/B$  zu betrachten.

$$r_S = R/B = \eta_{sS} \quad [\text{Symb/Sec/Hz}]: \text{Spektrale Symbol-Rate} \quad (20.14)$$

Die Spektrale Symbol-Rate  $r_S = R/B = \eta_{sS}$  hat als Einheit [Symb/Sec/Hz] und kann auch als Spektrale Effizienz  $\eta_{sS}$ , bezogen auf die übertragenen Symbole interpretiert werden.

Bezogen auf die pro Symbol übertragenen Bit ergibt sich die Spektrale Bit-Rate  $r_b = \eta_{s_b}$  mit der Einheit [Bit/Sec/Hz], die als Spektrale Effizienz  $\eta_{s_b}$ , bezogen auf die übertragenen Bit aufgefaßt werden kann. Dies wird normalerweise unter „Spektraler Effizienz“ verstanden. Werden pro Symbol  $N$  Bit übertragen, so gilt

$$r_b = N \cdot R/B = N \cdot r_S = \eta_{s_b} \quad [\text{Bit/Sec/Hz}]: \text{Spektrale Bit-Rate, Spektrale Effizienz} \quad (20.15)$$

Für die mit Cos-Roll-Off verrundeten Daten-Symbole folgt damit:

$r_S = R/B = 2$	$\rightsquigarrow$	$R = 2B$	Symbole/Hz	für $\rho = 0$	<b>Max.</b>	(20.16)
$r_S = R/B = 1$	$\rightsquigarrow$	$R = B$	Symbole/Hz	für $\rho = 1$	<b>Min.</b>	
$r_S = R/B = 2/(1 + \rho)$	$\rightsquigarrow$	$R = 2B/(1 + \rho)$	Symbole/Hz	für $0 \leq \rho \leq 1$		

Die Symbolform mit der **besten spektralen Effizienz** benötigt somit einen **nicht realisierbaren idealen Tiefpaß** und hat die größten Anforderungen an die Genauigkeit des Datentaktes.

Andererseits stellt die Symbolform mit der schlechtesten spektralen Effizienz die geringsten Anforderungen an das Filter und an die Genauigkeit des Datentaktes.

In der Praxis wird meist als Kompromiß (zwischen erreichbarer Datenrate und Aufwand für die Takt-Rückgewinnung) ein Roll-Off-Faktor von  $\rho = 0,15$  bis  $\rho = 0,3$  gewählt.

## 21 Root–Raised–Cosine

Die **Symbole müssen am Entscheider die Nyquist–Bedingung erfüllen**, damit die Inter–Symbol–Interferenzen an den Entscheidungs–Zeitpunkten verschwinden. Da die Filterung gemäß den Bedingungen für die **Matched Filterung** gleichmäßig zwischen dem Sender und dem Empfänger aufzuteilen sind, gilt für die Kettenschaltung von Filter im Sender  $H_T(\omega)$  und Filter im Empfänger  $H_R(\omega)$ :

$$\begin{aligned} H_v(\omega) &= H_T(\omega) \cdot H_R(\omega) = \sqrt{H_v(\omega)} \cdot \sqrt{H_v(\omega)} \\ \rightsquigarrow H_{rrc}(\omega) &= H_T(\omega) = H_R(\omega) = \sqrt{H_v(\omega)} \end{aligned} \tag{21.1}$$

Das Filter im Sender und das Matched Filter im Empfänger haben somit einen Wurzel–Cosinus (rrc: *root raised cosine*) Verlauf (RRC–Filter), wenn das Nyquistfilter  $H_v(\omega)$  in Gleichung (20.9) (Seite 93) mit Cos–Roll–Off–Filter (rc: *raised cosine*) bezeichnet wird.

$$H_{rrc}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\omega| < \omega_c(1 - \rho) \\ \cos \left[ \frac{\pi}{4\rho} \left( \frac{\omega}{\omega_c} - (1 - \rho) \right) \right] & \text{für } \omega_c(1 - \rho) \leq |\omega| \leq \omega_c(1 + \rho) \\ 0 & \text{für } |\omega| > \omega_c(1 + \rho) \end{cases} \quad \text{RRC–Filter} \tag{21.2}$$

Die Impulsantworten  $h_{rrc}(t) = h_T(t) = h_R(t)$  können formelmäßig angegeben werden.

$$h_{rrc}(t) = \frac{4\rho(t/T) \cos[\pi(1 + \rho)(t/T)] + \sin[\pi(1 - \rho)(t/T)]}{\pi(t/T)[1 - (4\rho(t/T))^2]} \quad \text{Impuls–Antwort RRC} \tag{21.3}$$

Bild 21.1 zeigt diese Impulsantworten für die Roll–Off–Faktoren  $\rho = [0, 0.2, 0.5, 1]$ . Für  $\rho = 0$  erhält man die  $\frac{\sin(x)}{x}$  Form und für  $\rho = 1$  die Form  $g(t)$  von der Cos–Kuppe. Es ist deutlich zu erkennen, daß die **Nulldurchgänge** (für  $\rho \neq 0$ ) hier (im Unterschied zu Bild 20.3, Seite 94) **nicht mehr zu den Taktzeiten**  $t = k \cdot T$  erfolgen.

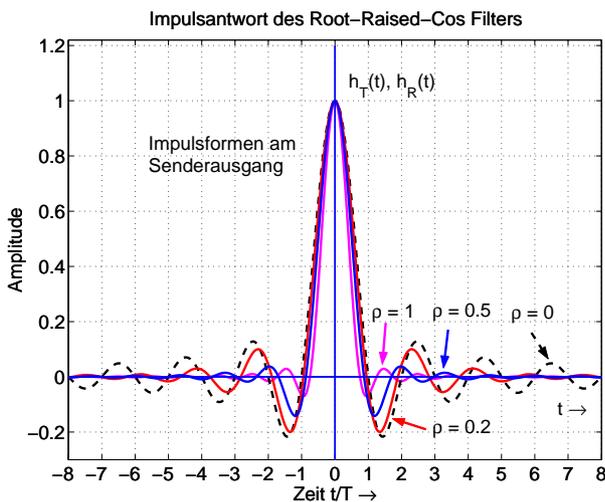


Bild 21.1: Root–Raised–Cosine Daten–Impulse mit  $[\rho = 0, 0.2, 0.5, 1]$  (Basis–Band)

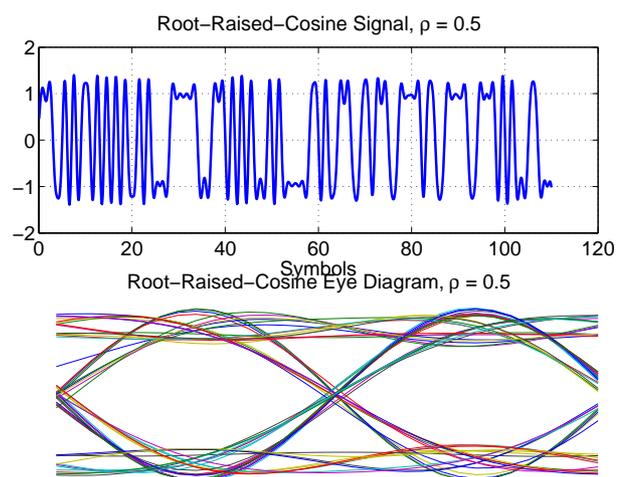


Bild 21.2: Daten–Symbole und Augen–Diagramm für Root–Raised–Cosine Verrundung ( $\rho = 0.5$ )

Der Sender mit Impulsformen gemäß Bild 21.1 arbeitet im Basis–Band. Die dargestellten Symbole sind daher nicht auf einen Hochfrequenz–Träger moduliert.

Ein Datenstrom (im Basis–Band), bestehend aus Root–Raised–Cosine (mit  $\rho = 0.5$ ) verrundeten Datensymbolen ist in Bild 21.2 dargestellt, zusammen mit dem sich daraus ergebenden Augendiagramm. Es ist deutlich zu erkennen, daß bei Root–Raised–Cos Verrundung die Daten–Symbole zu den Abtast–Zeitpunkten **nicht alle durch gemeinsame Punkte** laufen, im Unterschied zu Raised–Cos gefilterten Symbolen, Bild 21.6.

### 21.1 Das Augen-Diagramm

Einen guten Überblick über die Auswirkung einer Symbol-Verrundung liefert das Augen-Diagramm. Es entsteht bei einer oszilloskopischen Messung des Datenstromes, wenn man die Zeitablenkung so wählt, daß ein bis zwei verrundete Daten auf den Schirm passen. Für diese Messung mit dem Oszilloskop benötigt man eine Daten-Quelle mit (quasi) Zufalls-Folgen (PRBS: *pseudo random binary sequence*) und eine externe Triggerung mit dem Daten-Takt, Bild 21.3.[31]

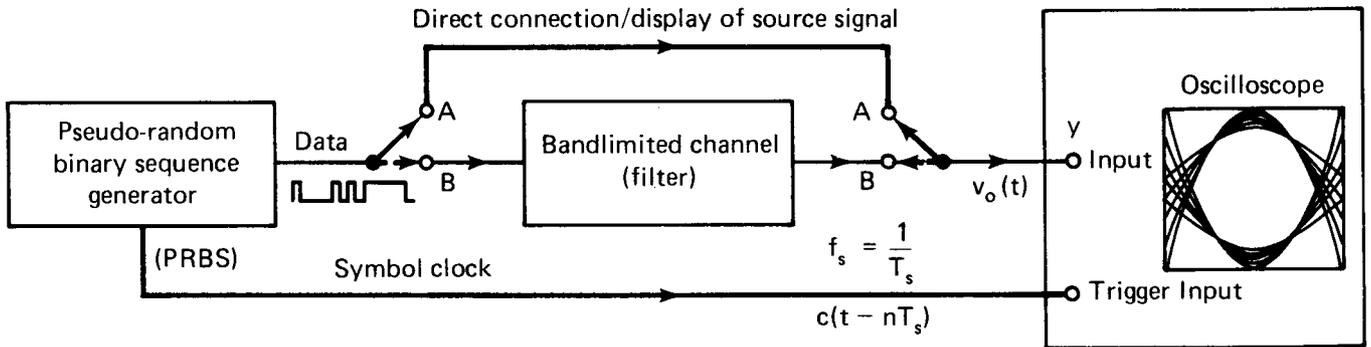


Bild 21.3: Blockschaltbild zur Messung des Augen-Diagramms mit einem Oszilloskop. Datenstrom aus digitaler Pseudo Zufalls-Quelle (PRBS) und Triggerung mit dem Daten-Takt  $T$

Aufgrund der Triggerung wird die Summe der Zeitverläufe der Symbole phasenrichtig auf dem Bildschirm des Oszilloskops über einander geschrieben. Bild 21.4 zeigt ein Beispiel für die Entstehung eines Augendiagramms aus einem bipolaren Datenstrom mit dem Verrundungsfaktor (Roll-Off-Faktor)  $\rho = 0,5$ . [32]

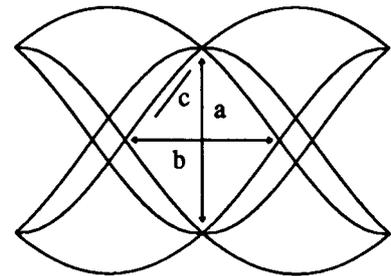
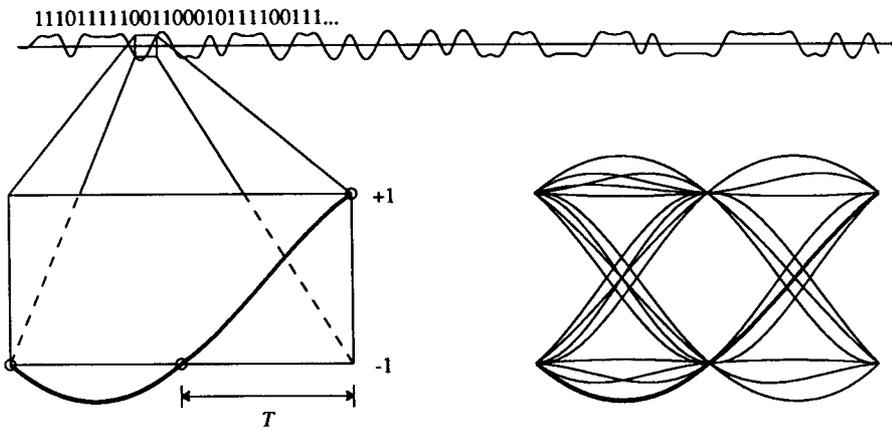


Bild 21.5: Beurteilungs-Kriterien für Augen-Diagramme:  $a$  vertikale Öffnung,  $b$  horizontale Öffnung,  $c$  Steigung im Auge

Bild 21.4: Entstehung des Augen-Diagramms aus der oszilloskopischen Darstellung des Datenstroms mit ( $\rho = 0.5$ ) und phasenrichtiger Triggerung in den Zeitabständen  $2T$

Das Augen-Diagramm liefert Kriterien zur Beurteilung des (empfangenen) Datenstroms, Bild 21.5. [32] Für jeden Wert des Roll-Off-Faktors  $\rho$  ergibt sich eine rechnerisch bestimmbare Form des Augen-Diagramms. Aus den markierten Größen läßt sich folgendes ablesen:

**Vertikale Öffnung  $a$**  : Je größer  $a$  ist, um so geringer ist die Auswirkung von Störungen durch Rauschen, Echos etc.

**Horizontale Öffnung  $b$**  : Je größer  $b$  ist, um so geringer ist die Auswirkung einer (konstanten) Phasenverschiebung des Takt-Zeitpunktes.

**Steigung im Auge  $c$**  : Je flacher  $c$  verläuft, um so geringer ist die Empfindlichkeit gegenüber Takt-Jitter.

**Q-Faktor** : Aus dem Wert von  $a$  und der Größe des Rauschens zum Entscheidungs-Zeitpunkt  $\sigma_0, \sigma_1$  folgt der Q-Faktor, mit dem die Fehler-Rate bestimmt werden kann.

$$Q_F = \frac{a}{\sigma_0 + \sigma_1} \quad \text{Q-Faktor} \quad (21.4)$$

Bild 21.6 zeigt die Augendiagramme von Cos-Roll-Off verrundeten Datensymbolen mit  $\rho = [1, 0.5, 0]$ , sowie die jeweiligen Werte der Größen  $a$  und  $b$ . Die Größe  $\Delta x$  markiert einen Takt-Versatz um  $T/16$ . [33], [34]

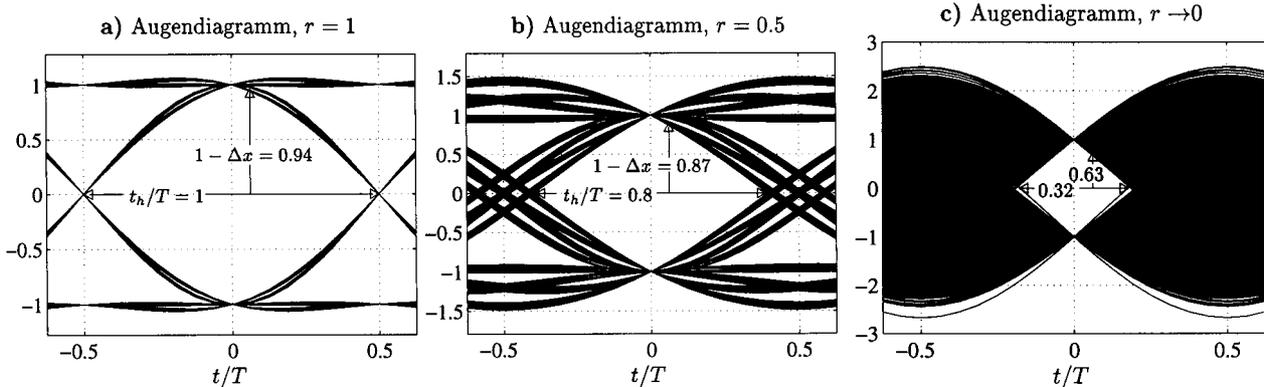


Bild 21.6: Augen-Diagramme mit Roll-Off  $\rho = 1$  (links),  $\rho = 0.5$  (mitte) und  $\rho = 0$  (rechts); Maßstäbe der vertikalen Achsen sind unterschiedlich.

## 22 Die Gauß-Verrundung

Die Gauß-Funktion hat die Form  $e^{-x^2/2} = \exp\{-(x/\sqrt{2})^2\}$  und wird je nach Anwendung mit Hilfe ihrer mittleren Dauer  $t_m$  bzw.  $\omega_m$  oder mit Hilfe ihrer Streuung  $\sigma$  angegeben. Die Impulsantwort  $h_G(t)$  des Gauß-Tiefpasses  $H_G(\omega)$  ist eine **Gauß-Glocke**.

$$\begin{aligned}
 h_G(t) &= \frac{1}{2t_m} \exp\left\{-\pi \left(\frac{t}{2t_m}\right)^2\right\} = \frac{1}{2t_m} \exp\left\{-\left(\frac{\sqrt{\pi}t}{2t_m}\right)^2\right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{t}{\sigma_t}\right)^2\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}\sigma_t}\right)^2\right\}
 \end{aligned}
 \quad \text{Gauß-Glocke} \quad (22.1)$$

Der Zusammenhang zwischen mittlerer Dauer  $t_m$  und Streuung  $\sigma_t$  folgt daraus zu:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2t_m} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_t} \rightsquigarrow 2t_m = \sqrt{2\pi}\sigma_t \rightsquigarrow t_m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_t \quad (22.2)$$

Die Übertragungsfunktion  $H_G(\omega)$  ist ebenfalls eine **Gauß-Funktion**, so daß man erhält:

$$\begin{aligned}
 H_G(\omega) &= \exp\left\{-\pi \left(\frac{\omega}{2\omega_m}\right)^2\right\} = \exp\left\{-\left(\frac{\sqrt{\pi}\omega}{2\omega_m}\right)^2\right\} \\
 &= \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\sigma_\omega}\right)^2\right\} = \exp\left\{-\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}\sigma_\omega}\right)^2\right\}
 \end{aligned}
 \quad \text{Gauß-Glocke} \quad (22.3)$$

Für den Zusammenhang von mittlerer Breite  $\omega_m$  und Streuung  $\sigma_\omega$  ergibt sich:

$$2\omega_m = \sqrt{2\pi}\sigma_\omega \rightsquigarrow \omega_m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_\omega \quad (22.4)$$

Für die Produkte von  $t_m$  mit  $\omega_m$  und  $\sigma_t$  mit  $\sigma_\omega$  gilt (Zeit-Bandbreiten-Gesetz):

$$t_m \cdot \omega_m = \frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_t \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_\omega = \frac{\pi}{2} \sigma_t \cdot \sigma_\omega \rightsquigarrow \boxed{\sigma_t \cdot \sigma_\omega = 1} \tag{22.5}$$

Bilder 22.1 und 22.2 zeigen die Impulsantworten  $h_G(t)$  für die Streuungen  $\sigma = [0.3, 0.5, 1/\sqrt{2}, 1, 2]$  und die zugehörigen Übertragungsfunktionen  $H_G(\omega)$  (mit  $\sigma_\omega = 1/\sigma_t$ ).

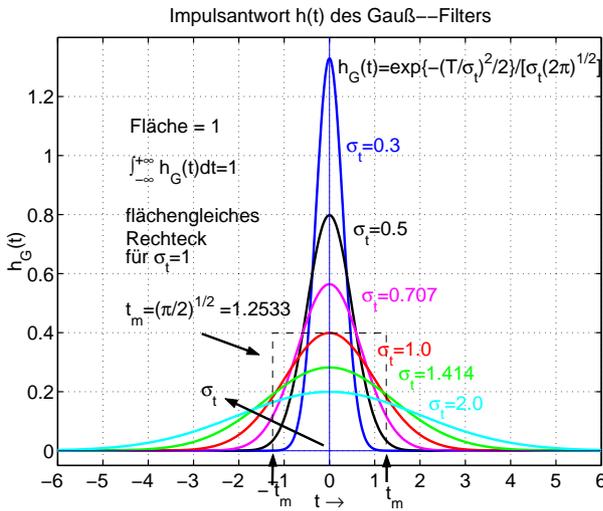


Bild 22.1: Impulsantworten  $h_G(t)$  des Gauß-Filters für die Streuungen  $\sigma_t = [0.3, 0.5, 1/\sqrt{2}, 1, 2]$

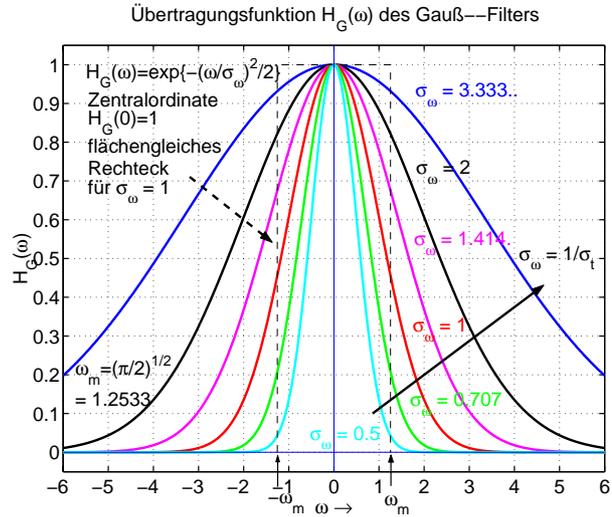


Bild 22.2: Durchlaßkurven  $H_G(\omega)$  des Gauß-Filters für  $\sigma_t = 1/\sigma_\omega$

Mit dem Satz von der Zentralordinate, angewendet im Zeit und im Frequenzbereich, folgt aus den Gleichungen (22.1) und (22.3) zusammen mit Gleichung (22.5):

$$\begin{aligned} \text{Zentr.Ord. (Zeit)} \quad h_G(0) = \frac{1}{2t_m} = \frac{2\omega_m}{2\pi} &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} H_G(\omega) d\omega = \frac{2\pi}{2t_m} = \frac{\pi}{t_m} = 2\omega_m \quad \text{Fläche (Freq.)} \\ \text{Fläche (Zeit)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} h_G(t) dt = 1 &\leftrightarrow H_G(0) = 1 \quad \text{Zentralordinate (Freq.)} \end{aligned} \tag{22.6}$$

**22.0.1 Gauß-Form und Nyquistbedingung 1**

Streng genommen kann die Nyquist-Bedingung 1 durch Gauß-Impulse nicht erfüllt werden. Praktisch jedoch nimmt die Gauß-Funktion so schnell ab, daß man diese ohne großen Fehler als erfüllt ansehen kann. Da die Gauß-Kurve keine weitreichenden Ausläufer hat, werden stets nur die unmittelbar benachbarten Datensymbole beeinträchtigt, so daß sich keine unzulässige Anhäufung von Fehlern ergeben kann.

In Bild 22.3 wird die Gauß-Verrundung verglichen mit der  $\cos^2$ -Verrundung ( $\rho = 1$ ) [29]. Der Parameter der Gauß-Kurve im Zeitbereich ist dabei so gewählt, daß deren Wert zum Zeitpunkt  $T$  auf 1% des Maximalwertes abgesunken ist, womit die Nyquist-Bedingung mit 99% Genauigkeit erfüllt ist. Mit dem Ansatz entsprechend zu Gleichung (22.1) läßt sich der erforderliche Wert  $T$  für den Datentakt finden.

$$h_G(t)/h_G(0) = e^{-x^2} = 0.01 \rightsquigarrow x^2 = 4.6052 = \pi \left(\frac{t}{2t_m}\right)^2 \rightsquigarrow \frac{t}{2t_m} = 1.211 \rightsquigarrow t = T = 2.42146t_m \tag{22.7}$$

Wie aus Bild 22.3 hervorgeht, wird die dafür benötigte Bandbreite größer als  $2\omega_c$ . Daher wird die Gauß-Verrundung bei **linearen** Modulationen nicht angewendet.

Die Gauß-Funktion  $h_G(t)$  wird jedoch für **exponentielle** Modulationen — ähnlich wie die Cos-Kuppe — dazu verwendet,  $\square$ -Daten zu verrunden, z.B. bei GMSK (*Gaussian minimum shift keying*) im Mobilfunk. Die Eigenschaft, daß sich die Nyquist-Bedingung 1 nicht exakt erfüllen läßt, bleibt auch hier bestehen.

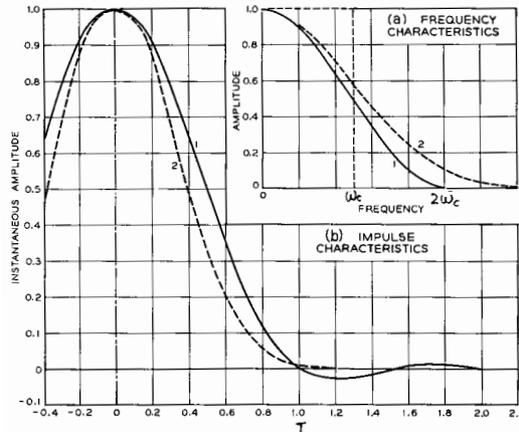


Bild 22.3: Vergleich der Gauß–Verrundung (gestrichelt) mit der  $\cos^2$ –Verrundung ( $\rho = 1$ )

### 22.1 Matched Filter für die Gauß–Form

Die gleichmäßige Aufspaltung eines Gauß–Filters auf die Sender– und Empfänger–Seite ist sehr einfach. Gemäß Gleichung (21.1) wird hier, wenn vereinfachend  $H_G(\omega) = H_0 \cdot e^{-\xi^2}$  geschrieben wird:

$$H_T(\omega) = H_R(\omega) = \sqrt{H_0} \cdot e^{-\frac{\xi^2}{2}} \tag{22.8}$$

Das ist aber wiederum die Gauß–Form. **Das Matched Filter für ein Gauß–Filter ist somit ebenfalls ein Gauß–Filter.**<sup>22.1</sup>

### 22.2 Gauß–Roll–Off

#### 22.2.1 Gauß–Roll–Off im Frequenzbereich

Wird als gerade Funktion  $G(\omega)$  in Abschnitt 19.2 eine Gauß–Glocke  $H_G(\omega) = \exp\left\{-\alpha\pi\left(\frac{\omega}{2\omega_m}\right)^2\right\}$  angesetzt, so wird das Filter mit Gauß–Roll–Off:

$$H_{vG}(\omega) = H_i(\omega) \left\{ \frac{1}{2\pi} \right\} * H_G(\omega) = \square_{\omega_c}(\omega) \left\{ \frac{1}{2\pi} \right\} * \exp\left\{-\pi\left(\frac{\omega}{2\omega_m}\right)^2\right\} \tag{22.9}$$

Der Wert für  $\omega_m$  muß dafür so bestimmt werden, daß die gewünschte Verrundung entsteht.

#### 22.2.2 Gauß–Roll–Off im Zeitbereich

Bei der Definition der Verrundung für GMSK (*Gaussian Minimum Shift Keying*)<sup>22.2</sup> wird ein Roll–Off im Zeitbereich definiert. Dabei wird angesetzt, daß die  $\square$ –förmigen Datenbits mit einer Gauß–Glocke  $h_G(t)$ , Gleichung (22.1), gefaltet werden.

$$h_{vG}(t) = \square_T(t) * h_G(t) = \square_T(t) * \exp\left\{-\pi\left(\frac{t}{2t_m}\right)^2\right\} \cdot \frac{1}{2t_m} \tag{22.10}$$

Der Wert für  $t_m$  muß dafür so bestimmt werden, daß die gewünschte Verrundung entsteht.

Die Faltung kann hier nach dem Schema der Vereinfachten Faltung ausgeführt werden. Dazu muß die Gauß–Funktion integriert werden, was auf die **Gauß’sche Fehlerfunktion**  $\text{erf}(z)$  führt. Diese ist definiert als:

<sup>22.1</sup>Eine gleichartige Aussage gilt übrigens auch für ein ideales Filter  $H_i(\omega) = \square_{\omega_c}(\omega)$ .

<sup>22.2</sup>Diese Modulation findet im GSM Mobilfunk–Netz (GSM: *Global System for Mobile Communication*) Verwendung.

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi; \quad \text{erf}(-x) = -\text{erf}(x) \quad \text{Gauß Fehlerfunktion} \quad (22.11)$$

Die Funktion  $\text{erf}(x)$  läßt sich nicht analytisch berechnen, ist jedoch tabellarisch und in Näherungsformeln bekannt. Die komplementäre Fehlerfunktion dazu ist  $\text{erfc}(x)$  und diese ist eng verwandt mit der **Q-Funktion**  $Q(x)$ , die bei der Berechnung der Symbol-Fehler-Rate Verwendung findet.  $Q(-x)$  ist die gespiegelte Q-Funktion und entsteht aus der Gauß-Glocke durch Integration mit laufender oberer Grenze, vergleiche dazu die Aussage über die Zentralordinaten, Gleichung (22.6) und die Bilder 22.4 und 22.5.

$$\begin{aligned} \text{erfc}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\xi^2} d\xi = 1 - \text{erf}(x) = 2Q(\sqrt{2}x) \\ Q(x) &= \frac{\text{erfc}(x/\sqrt{2})}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi; \quad (\sigma_x = 1) \\ Q(-x) &= 1 - Q(x) = \frac{1 + \text{erf}(x/\sqrt{2})}{2} \end{aligned} \quad (22.12)$$

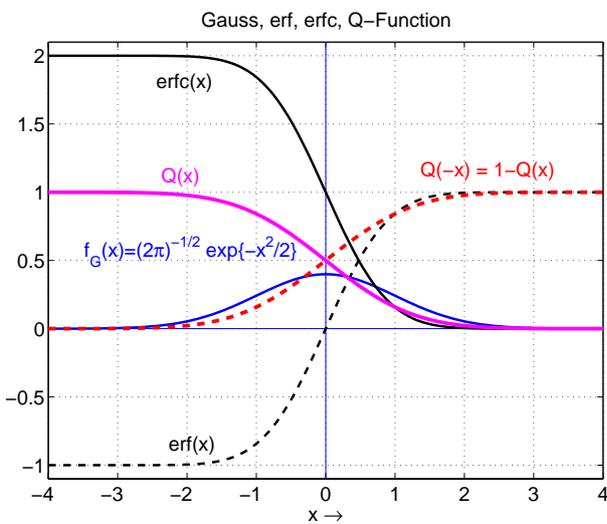


Bild 22.4: Gauß-Glocke ( $\sigma_t = 1$ ), Error Function  $\text{erf}(x)$ , Komplementäre Error Function  $\text{erfc}(x)$ , Q-Funktion und gespiegelte Q-Funktion

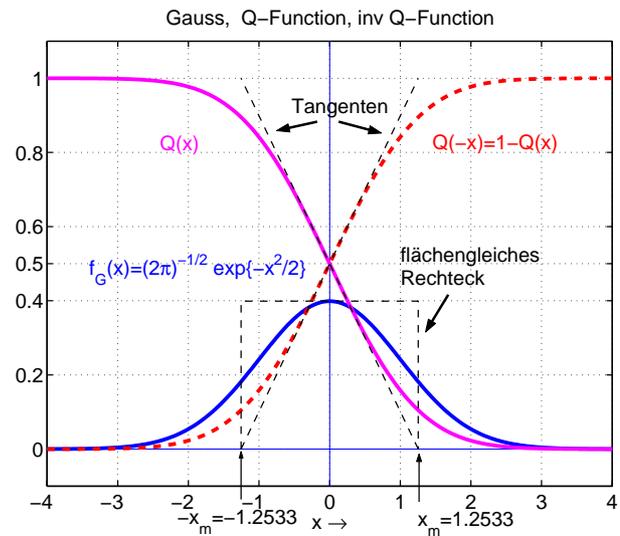


Bild 22.5: Gauß-Glocke ( $\sigma_t = 1$ ), Q-Funktion und gespiegelte Q-Funktion dazu flächengleiches Rechteck und Tangenten

Aus Bild 22.5 ist zu erkennen, daß die Steilheit des Übergangs der Q-Funktion  $Q(t)$  und  $Q(-t)$  von der Größe von  $t_m$  bzw.  $\sigma_t$  abhängt.

Das Integral (mit laufender oberer Grenze) über die Gauß-Glocke (Gleichung (22.1), Seite 98) wird:

$$\int_{-\infty}^t h_G(\tau) d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \int_{-\infty}^t \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{\sigma_t}\right)^2\right\} d\tau \quad (22.13)$$

Gleichung (22.13) läßt sich mittels Gleichung (22.12) ausdrücken.

Hierzu muß folgendes substituiert werden.

$$\text{Integrand: } -\frac{\tau}{\sigma_t} = \xi \rightsquigarrow d\tau = -\sigma_t d\xi; \quad \text{Grenzen: } \tau = t \rightsquigarrow \xi = -\frac{t}{\sigma_t}; \tau = -\infty \rightsquigarrow \xi = \infty \quad (22.14)$$

Damit wird:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \int_{-\infty}^t \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{\sigma_t}\right)^2\right\} d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \int_{\infty}^{-t/\sigma_t} e^{-\xi^2/2} (-d\xi)\sigma_t \tag{22.15}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t/\sigma_t}^{\infty} e^{-\xi^2/2} d\xi \tag{22.16}$$

$$\rightsquigarrow \int_{-\infty}^t h_G(\tau) d\tau = Q(-[t/\sigma_t]) \tag{22.17}$$

Daraus folgt für die Gauß-verrundeten Daten-Symbole:

$\begin{aligned} h_{vG}(t) &= Q(-[(t + T/2)/\sigma_t]) - Q(-[(t - T/2)/\sigma_t]) \\ &= Q([t - T/2]/\sigma_t) - Q([t + T/2]/\sigma_t) \end{aligned}$	<b>Gauß-verrundete Symbole</b>	(22.18)
--	--------------------------------	---------

**22.2.3 Symbol-Verrundung bei GSMK und DECT**

Hierfür wurde festgelegt, daß die Verrundung der  $\square_{T/2}(t)$  Datenbits dadurch erfolgen soll, daß diese einen Gauß-Tiefpaß  $H_G(\omega)$  durchlaufen und dadurch geformt werden. Im Zeitbereich ist das die Faltung von  $\square_{T/2}(t)$  mit  $h_G(t)$ , wie oben beschrieben. Je kleiner die Grenzfrequenz  $\omega_{3dB}$  des TP  $H_G(\omega)$  ist, um so mehr werden die Bits verrundet. Per Definition ist für GSM festgelegt, daß das Produkt aus der 3 dB Grenzfrequenz  $f_{3dB}$  des Gauß TP  $H_G(\omega)$  und dem Datentakt  $T$  den Wert 0.3 ergeben soll. Entsprechend gilt für DECT der Wert 0.5.

$f_{3dB} \cdot T = 0.3$ <b>GSM</b>	$f_{3dB} \cdot T = 0.5$ <b>DECT</b>	(22.19)
------------------------------------	-------------------------------------	---------

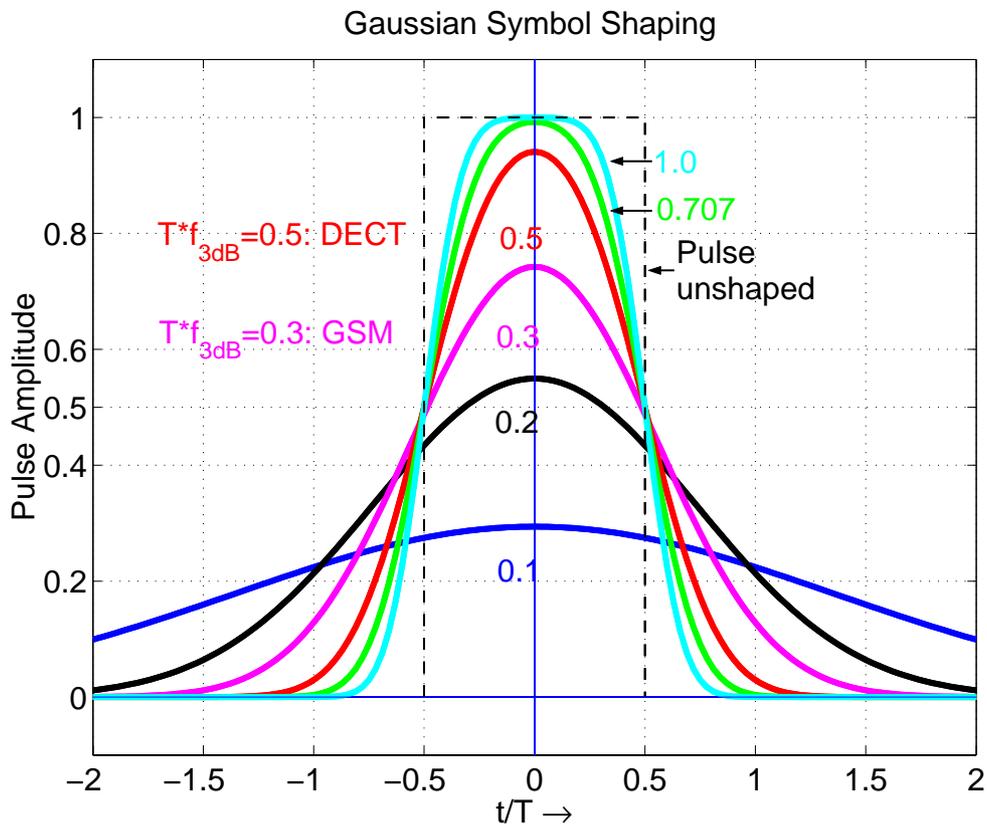


Bild 22.6: Gauß-verrundete Daten mit Daten-Takt  $T$  für  $f_{3dB} \cdot T = [0.1; 0.2; 0.3; 0.5; 1/\sqrt{2}; 1.0]$

In Bild 22.6 werden verschiedene verrundete Datensymbole dargestellt. Das Produkt  $f_{3dB} \cdot T$  ist dabei ein Parameter mit folgenden Werten:

$$f_{3dB} \cdot T = [0.1; 0.2; 0.3; 0.5; 1/\sqrt{2}; 1.0] \quad (22.20)$$

Für  $f_{3dB} \cdot T \gg 1$  werden praktisch nur noch die Ecken des Daten-Impulses verrundet.

Damit die hierfür passenden Werte von  $t_m$  bzw.  $\sigma_t$  gefunden werden können, ist eine **Zwischenrechnung** erforderlich. Für die 3dB Grenzfrequenz gilt:

$$H_G(\omega_{3dB}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \exp \left\{ -\pi \left( \frac{\omega_{3dB}}{2\omega_m} \right)^2 \right\} \quad (22.21)$$

Aufgelöst ergibt sich daraus:

$$\frac{\omega_{3dB}}{\omega_m} = 2 \sqrt{\frac{\ln(\sqrt{2})}{\pi}} \approx \frac{1}{1.5054} = 0.664 \quad (22.22)$$

Die mittlere Grenzfrequenz  $\omega_m$  ist also  $\approx 1.5$  größer als die 3 dB Grenzfrequenz  $\omega_{3dB}$ .

Mit Gleichung (22.5) folgt:

$$f_{3dB} = \frac{\omega_m}{\pi} \sqrt{\frac{\ln(\sqrt{2})}{\pi}} = \frac{1}{\pi\sigma_t} \sqrt{\frac{\ln(\sqrt{2})}{2}} \quad (22.23)$$

Nach  $\sigma_t$  aufgelöst und mit der Vorgabe nach GSM wird:

$$\sigma_t = \frac{1}{\pi f_{3dB}} \sqrt{\frac{\ln(\sqrt{2})}{2}} = \frac{T}{0.3\pi} \sqrt{\frac{\ln(\sqrt{2})}{2}} \quad (22.24)$$

Diesen Wert für  $\sigma_t$  kann man in Gleichung (22.18) einsetzen und erhält damit die gemäß der GSM Vorgabe verrundeten Datensymbole.

## Digitale Modulationsverfahren

Bei der digitalen Betrachtungsweise existieren die (digitalen) Signale nur zu den Abtast-Zeitpunkten  $T_A$ . Zur Beschreibung der **digitalen** Eigenschaften dieser Signale genügt das vollkommen. Da zeitliche Zwischenwerte hierfür nicht interessieren, ist auch der genaue Verlauf der Signale von einem logischen Wert zum nächsten nicht von Interesse.

Solange die digitalen Signale innerhalb eines geschlossenen (und abgeschirmten) Systems (z.B. eines PC) bleiben und die Taktfrequenz nicht zu hoch ist, mag diese Betrachtungsweise ausreichen. Sobald jedoch die digitalen Signale übertragen werden sollen, genügt die digitale Betrachtungsweise nicht mehr. Jetzt kommt es darauf an, daß die Signale eine vorgeschriebene spektrale **Bandbreite** einhalten. Damit müssen die Signale als **analoge Signale** betrachtet und behandelt werden. Somit werden auch die Zeiten und die **Zeitverläufe der Signale** zwischen den Abtast-Zeitpunkten wichtig.

Für die Modulation sind daher keine Digitalen Signale im herkömmlichen Sinne, sondern Analoge Signale (mit digitalen Eigenschaften) zu betrachten. Vereinfachend wird noch die Amplituden-Auflösung als beliebig fein unterstellt, so daß streng genommen nicht von Digitalen Signalen, sondern von Zeit-diskreten Signalen ausgegangen wird.

## 23 Modell der Digital-Übertragung mit Modulation

Der Ausgangspunkt ist das Blockschaltbild der I/Q Basisband-Übertragung, Bild 16.1 (Seite 70).

Der Basisband-Kanal ist, gemäß Bild 16.1, der Teil der Übertragungs-Stecke zwischen den basisfrequenten Eingang-Signalen und den entsprechenden Ausgangssignalen, umfaßt somit den für die (digitale) Modulation wichtigen hochfrequenten Funk-Kanal (*channel*). Als grundsätzliches Prinzip bei einer Funk-Datenübertragung ist ferner zu erkennen:

- Der Datenstrom wird in zwei zu einander **orthogonale** Symbol-Ströme aufgespalten, die im gleichen Frequenzband übertragen werden, wodurch sich die erforderliche Bandbreite im RF Bereich (RF: *radio frequency*) halbiert.

### 23.1 Grundsätzliches Blockschaltbild des Digitalen Modulators

Ein **Modulator für Digitale Signale** besteht immer aus

- einer Kettenschaltung eines **Mappers** für die Daten zu Digitalen Symbolen,
- eines Digitalen **Interpolators** (mit D/A Wandlung am Ausgang) zur Gewinnung der analogen bandbegrenzten Symbole und
- eines (kartesischen oder polaren) **Analogen Modulators**, Bild 23.1.

Der analoge Modulator erhält dabei zwei analoge Symbol-Ströme  $s_1(t)$  und  $s_2(t)$  als modulierende Signale.

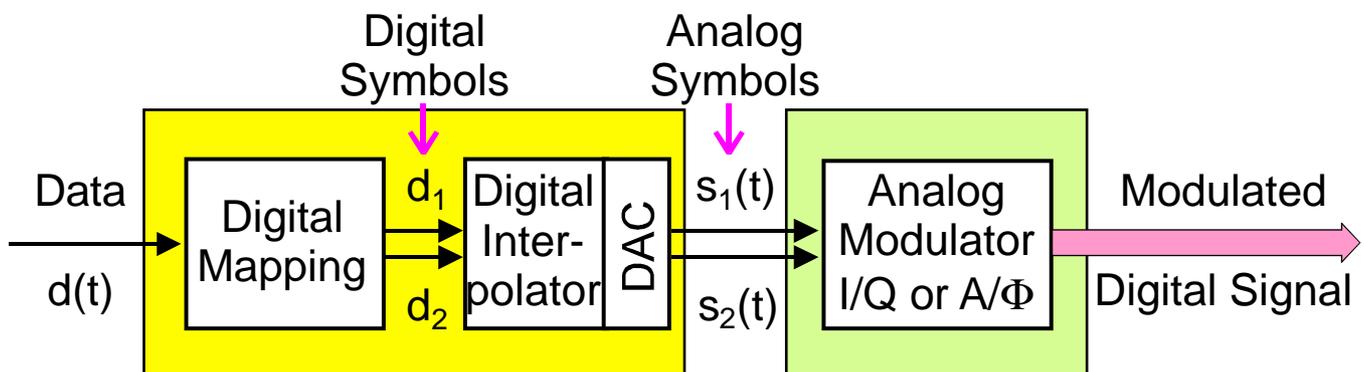


Bild 23.1: Blockschaltbild der Digitalen Modulation: Mapping der Daten, Interpolation, D/A-Wandlung und Analoge Modulation

Die Digitale Modulation erfolgt somit in 2 Schritten:

1. Verarbeitung der Daten  $d(t)$  (bzw. eines Nachrichtensignals  $m(t)$ ) im Basisband. Dies erfolgt nach dem Stand der Technik ausschließlich durch Digitale Signalverarbeitung.

Das Ergebnis dieser Verarbeitung sind 2 (analoge) Basisband-Signale (Tiefpaß-Signale)  $s_1(t)$  und  $s_2(t)$ , bestehend aus geeignet geformten digitalen Symbolen, mit denen der HF-Teil (in Bild 23.1: der analoge Modulator) angesteuert wird.

2. Beeinflussung der HF Trägerschwingung durch die beiden (analogen) Basisband-Signale  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$ . Dies stellt die Modulation im engeren Sinne dar.

Die beiden (analogen) Basisband-Signale (Symbol-Ströme)  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$  können dargestellt werden als:

- **kartesische** Signale  $I(t)$  und  $Q(t)$  (**Real- und Imaginär-Teil**) oder als
- **polare** Signale  $A(t)$  und  $\phi(t)$  (**Betrag und Phase**).

Zu jeder dieser Darstellungsweisen gibt es eine Blockstruktur für den Modulator.

- **Jede Modulations-Art kann mit jeder der beiden Modulator-Strukturen erzeugt werden.**
- Der (erreichbare) **Wirkungsgrad des polaren Modulators** ist größer als der des kartesischen.
- **Realisierungs-Aufwand und Qualitäts-Eigenschaften sind – abhängig von der Modulations-Art – für die beiden Strukturen unterschiedlich.**

## 23.2 Systematik Digitaler Modulationen

Bei den digitalen Modulationen interessieren die **Zustände der Amplitude und Phase zu den Abtastzeitpunkten**. Hierfür muß in die Parameter des hochfrequenten Trägers eingegriffen werden. Bei vielen digitalen Modulationen werden 2 zueinander **orthogonale Träger** ( $\cos(\Omega_C t)$  &  $\sin(\Omega_C t)$ ) verwendet.

Es gibt dabei folgende Systematik ( $x = (2), 4, 8, 16, 32, \dots$ ):

Digitale Modulationsart	Träger	Eingriff in	Wirkung auf	Amplitude	analog
$x$ PSK (linear)	cos, sin	Amplitude	Phase	schwankt	QDSB
$x$ QAM (linear)	cos, sin	Amplitude	Amplitude, Phase	schwankt	QDSB
CPM (nichtlinear)	cos	Frequenz	Frequenz, Phase	ist konstant	FM

Tabelle 1: Systematik der Digitalen Modulationen

- Die „Wirkung“ des Eingriffs in die Parameter des Trägers (bzw. der beiden zu einander orthogonalen Träger) interessiert **in Bezug auf die digitale Information immer nur zu den Abtastzeitpunkten**.
- Bei vielen Digitalen Modulationen wird daher in die **Amplitude** eingegriffen, wenn **zum Abtastzeitpunkt** eine Änderung der **Phase** gewünscht ist.
- Aufgrund dieser Tatsache sind die analogen und die digitalen Namen für verschiedene Modulationsarten unterschiedlich, wie aus der Tabelle 1 hervorgeht.
- Eine veränderliche Amplitude des modulierten Signals ist digital nur zu den Abtastzeitpunkten von Interesse und wird daher dazwischen oft nicht beachtet bzw. als unwichtig angesehen.
- Aus dem Namen der Digitalen Modulation kann daher i.a. nicht darauf geschlossen werden, welcher Parameter der HF-Träger-Schwingung in welcher Art beeinflusst wurde.
- Zur Einhaltung der Bandbreite des modulierten Signals ist es erforderlich, dieses exakt zu übertragen, d.h. zu allen Zeitpunkten und mitsamt allen Variationen der Amplitude.
- Alle digitalen Modulationen, bei denen in die Amplitude eingegriffen wird, haben eine minimale Bandbreite. Diesbezüglich gibt es keinen Unterschied zu den entsprechenden analogen Modulationen.

Modulations-Art	In Phase Signal $I(t)$	Quadratur Phase Signal $Q(t)$
<b>analog</b>		
AM	$I(t) = [1 + m(t)]$	$Q(t) = 0$
DSB	$I(t) = m(t)$	$Q(t) = 0$
QDSB	$I(t) = m_I(t)$	$Q(t) = m_Q(t)$
SSB	$I(t) = m(t)$	$Q(t) = \pm \hat{m}(t)$
PM	$I(t) = \cos\{K_{PM}m(t)\}$	$Q(t) = \sin\{K_{PM}m(t)\}$
FM	$I(t) = \cos\{K_{FM} \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau\}$	$Q(t) = \sin\{K_{FM} \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau\}$
<b>digital</b>		
<b>linear</b> (wie QDSB)	$I(t) = m_I(t)$	$Q(t) = m_Q(t)$
<b>nichtlinear</b> (wie FM)	$I(t) = \cos\{K_{FM} \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau\}$	$Q(t) = \sin\{K_{FM} \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau\}$

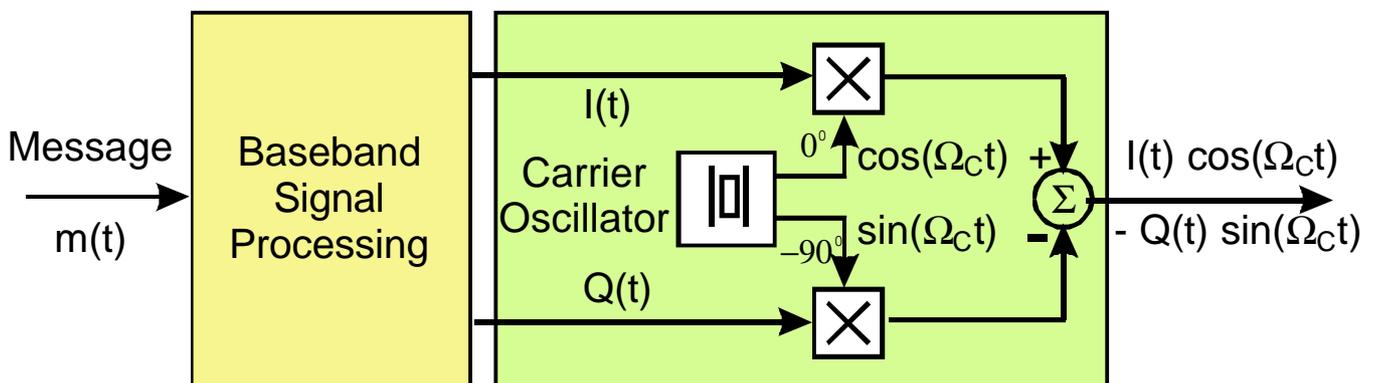
Tabelle 2: Mapping-Funktionen in **kartesischer** Darstellung

### 23.3 Quadratur Modulations-Verfahren: Eingriff in die Amplitude der Träger

Hier werden die **kartesischen Signale**  $s_1(t) = I(t)$  und  $s_2(t) = Q(t)$  gebildet, Tabelle 2.

Bei der Einseitenband-Modulation (SSB: *single side band*) ist  $\hat{m}(t)$  die Hilbert-Transformierte von  $m(t)$ .

Die eigentliche Modulation erfolgt dadurch, daß das  $I(t)$  Signal mit einer **Cosinus**-Träger-Schwingung  $\cos(\Omega_C t)$  **multipliziert** wird und das  $Q(t)$  Signal mit einer **Sinus**-Träger-Schwingung  $\sin(\Omega_C t)$ , Bild 23.2. Diese beiden Trägerschwingungen sind zu einander orthogonal. Es wird also (nur) in die **Amplitude der Trägerschwingungen** eingegriffen. Dies ist erkennbar an den Multiplizierern im Blockschaltbild 23.2.

Bild 23.2: Blockschaltbild eines I / Q Modulators ( $\hat{u}_C = 1$ )

Damit ergibt sich für das modulierte Signal:

$$u_{BP}(t) = \hat{u}_C \cdot \{I(t) \cdot \cos(\Omega_C t) - Q(t) \cdot \sin(\Omega_C t)\} \quad \text{Bandpaß-Signal} \quad (23.1)$$

Wie aus Tabelle 2 ersichtlich ist, gibt es Modulations-Arten, für die  $Q(t) = 0$  ist.

- Dies sind im analogen Fall die „gewöhnliche“ Amplituden-Modulation (AM) und die Doppel-Seitenband-Modulation (DSB).
- Bei den **Digitalen Modulationen** sind dies **BPSK** (2PSK, *Phase Shift Keying*) und **OOK** (*On Off Keying*).

#### 23.3.1 4-Quadranten-Multiplizierer in Hardware

Da sowohl die Modulations-Signale  $I(t)$  und  $Q(t)$  als auch die Träger-Signale  $\cos(\Omega_C t)$  und  $\sin(\Omega_C t)$  ihr **Vorzeichen wechseln**, werden in einem I / Q Modulator **4-Quadranten-Multiplizierer** benötigt.

- 4-Quadranten-Multiplizierer werden nur für kleine Leistungen gebaut. Das erzeugte digitale Modulations-Signal muß in einem **Linearverstärker** auf den erforderlichen Sendepiegel verstärkt werden.

### 23.4 Amplitude-Phase Modulations-Verfahren: Eingriff in Amplitude & Phase der Träger

Hierfür werden Amplituden-Signale  $s_1 = A(t)$  und Phasen-Signale  $s_2 = \phi(t)$  gebildet, Tabelle 3.

Modulations-Art	Amplituden-Signal $A(t)$	Phasen-Signal $\phi(t)$
<b>analog</b>		
AM	$A(t) = [1 + m(t)]$	$\phi(t) = 0$ für $m(t) > -1$ ; $\phi(t) = \pi$ für $m(t) < -1$
DSB	$A(t) =  m(t) $	$\phi(t) = 0$ für $m(t) > 0$ ; $\phi(t) = \pi$ für $m(t) < 0$
QDSB	$A(t) = \sqrt{m_I(t)^2 + m_Q(t)^2}$	$\phi(t) = \arctan\left(\frac{m_Q(t)}{m_I(t)}\right)$
SSB	$A(t) = \sqrt{m(t)^2 + \hat{m}(t)^2}$	$\phi(t) = \arctan\left(\frac{\pm \hat{m}(t)}{m(t)}\right)$
PM	$A(t) = 1$	$\phi(t) = K_{PM}m(t)$
FM	$A(t) = 1$	$\phi(t) = K_{FM} \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau$
<b>digital</b>		
<b>linear</b> (wie QDSB)	$A(t) = \sqrt{m_I(t)^2 + m_Q(t)^2}$	$\phi(t) = \arctan\left(\frac{m_Q(t)}{m_I(t)}\right)$
<b>nichtlinear</b> (wie FM)	$A(t) = 1$	$\phi(t) = K_{FM} \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau$

Tabelle 3: Mapping-Funktionen in **polarer** Darstellung

Die eigentliche Modulation erfolgt dadurch, daß das **Amplituden-Signal**  $A(t)$  mit einem Cos-förmigen HF-Träger multipliziert wird, welcher zuvor mit dem Phasensignal  $\phi(t)$  in seiner **Phase** moduliert wurde, Bild 23.3. Als Ausgangs-Signal  $u_{BP}(t)$  ergibt sich damit:

$$u_{BP}(t) = \hat{u}_C \cdot \{A(t) \cdot \cos[\Omega_C t + \phi(t)]\} \quad \text{Bandpaß-Signal} \quad (23.2)$$

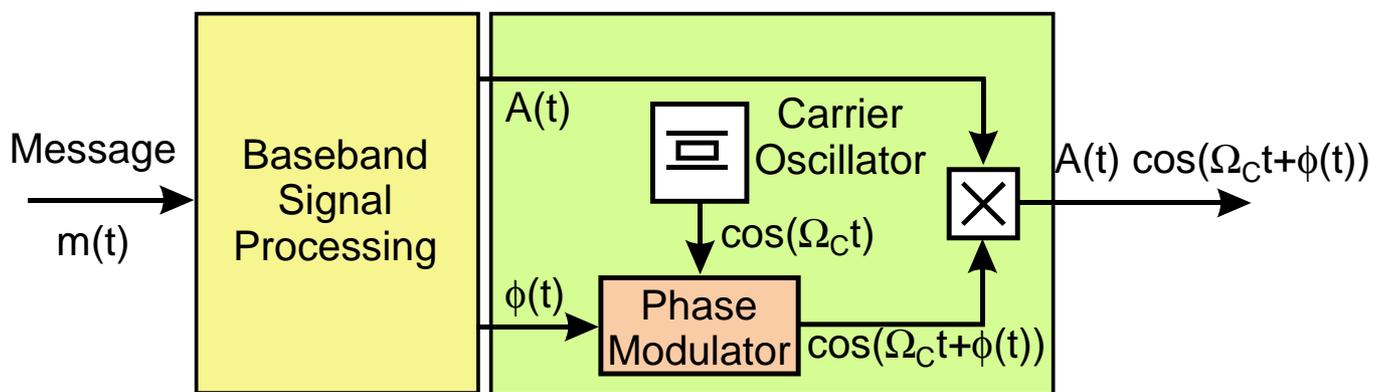


Bild 23.3: Blockschaltbild eines A /  $\Phi$  Modulators: **polarer Modulator** ( $\hat{u}_C = 1$ )

- Aus Tabelle 3 ist ersichtlich, daß für FM, PM und für nichtlineare Digitale Modulationen die Amplitude  $A(t) = 1$  ist. Technisch muß dann  $A(t)$  nicht extra erzeugt werden, weil dafür eine konstante Spannung (Versorgungs-Spannung) im HF Teil verwendet werden kann.

- Für AM ist die Phase  $\Phi = 0$ , falls keine Übermodulation erfolgt. Technisch wird die Übermodulation vermieden, so daß der Phasen-Modulator für AM entfallen kann. Man verwendet hier einen frequenz-konstanten Träger mit  $\phi(t) = 0$ .

Der Phasen-Modulator in Bild 23.3 wird gemäß Bild 12.1 (Seite 41) ebenfalls als I/Q-Struktur realisiert.

**23.4.1 2-Quadranten-Multiplizierer in Hardware**

Da die Amplitude stets positiv ist ( $A(t) \geq 0$ ), wird bei einem A /  $\Phi$  Modulator nur ein **2-Quadranten-Multiplizierer** benötigt.

- Die technische Realisierung eines 2-Quadranten-Multiplizierers erlaubt die Erzeugung **großer Sende-Leistungen mit hohem Wirkungsgrad**.

Moderne UMTS Handys machen davon Gebrauch<sup>23.1</sup>, weil sich damit die Standzeit des Akkus verlängert.

**24 Digitale Modulationen im Basisband betrachtet**

Der wesentliche Unterschied zwischen analogen und digitalen Modulationen besteht gemäß Bild 23.1 (Seite 104) darin, daß bei den digitalen Modulationen eine „digitale Vorverarbeitung“, bestehend aus *splitter, mapper, interpolator, digital to analog converter* vor den eigentlichen Modulator geschaltet wird. Vor dem eigentlichen Modulationsvorgang befindet man sich jedoch (noch) im Basisband. Es ist daher zur Beschreibung der digitalen Modulationen durchaus üblich, diese (nur) im Basisband zu betrachten.

Hiervon macht man Gebrauch z.B. bei der „Komplexen Einhüllenden“ oder dem „Vektor-Diagramm“.

**24.1 Komplexe Einhüllende**

Das modulierte digitale Signal ist eine (reelle) Bandpaß-Schwingung  $u_{BP}(t)$ . Da die digitale Information i.a. sowohl in der Amplitude  $A(t)$  als auch in der Phase  $\phi(t)$  übertragen wird, gilt:

$$u_{BP}(t) = A(t) \cos[\Omega_C t + \phi(t)] \quad \text{Polare Darstellung} \quad (24.1)$$

Alternativ zur polaren gibt es die kartesische Darstellung.

$$u_{BP}(t) = I(t) \cos \Omega_C t - Q(t) \sin \Omega_C t \quad \text{Kartesische Darstellung} \quad (24.2)$$

Bei der (kartesischen) Berechnung wird der Phasenwinkel  $\phi(t)$  dadurch berücksichtigt, daß die komplexe Einhüllende (Hüllkurve)  $g(t)$  gebildet wird.

$$g(t) = I(t) + jQ(t) = u_{TP}(t) \quad \text{komplexe Einhüllende} \quad (24.3)$$

Die **komplexe Hüllkurve** der Bandpaß-Schwingung  $g(t)$  ist also ein **komplexes Tiefpaß-Signal**  $u_{TP}(t)$ . Damit kann  $u_{BP}(t)$  als Realteil  $\Re$  einer komplexen Größe  $g(t) \cdot e^{j\Omega_C t}$  dargestellt werden.

$$u_{BP}(t) = \Re\{g(t) \cdot e^{j\Omega_C t}\} \quad \text{Bandpaß-Signal} \quad (24.4)$$

$$u_{BP}(t) = \Re\{[I(t) + jQ(t)] \cdot [\cos \Omega_C t + j \sin \Omega_C t]\} = I(t) \cos \Omega_C t - Q(t) \sin \Omega_C t \quad \text{Bandpaß-Signal} \quad (24.5)$$

Die **Umrechnung zwischen kartesisch und polar** kann dann zusammengefaßt werden.

$A(t) = \sqrt{I(t)^2 + Q(t)^2}$	<b>Betrag</b>	(24.6)
$\phi(t) = \arctan \left\{ \frac{Q(t)}{I(t)} \right\}$	<b>Phase</b>	
$I(t) = A(t) \cos \phi(t)$	<b>I-Komponente</b>	
$Q(t) = A(t) \sin \phi(t)$	<b>Q-Komponente</b>	
$g(t) = u_{TP}(t) = A(t)[\cos \phi(t) + j \sin \phi(t)] = A(t)e^{j\phi(t)}$	<b>komplexe Einhüllende: TP Signal</b>	
$u_{BP}(t) = \Re\{g(t) \cdot e^{j\Omega_C t}\} = \Re\{A(t)e^{j[\Omega_C t + \phi(t)]}\}$	<b>Bandpaß-Signal</b>	

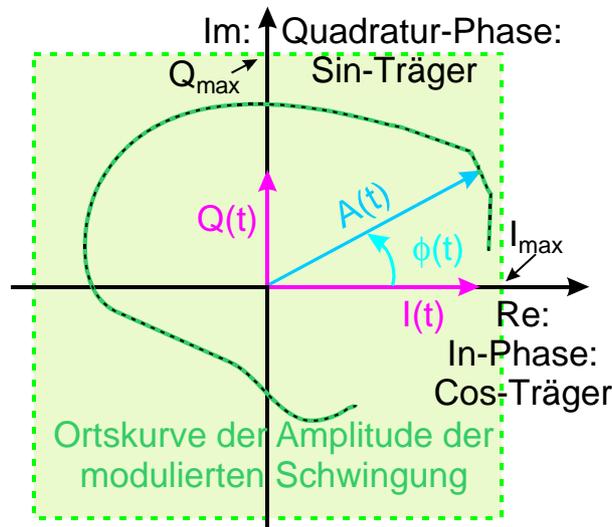


Bild 24.1: Ortskurve (Ausschnitt) der komplexen Einhüllenden der I/Q Modulation

Werden die Zeitfunktionen  $I(t)$  und  $Q(t)$  als  $g(t) = I(t) + jQ(t)$  aufgetragen (Y über X Darstellung im Oszilloskop), Bild 24.1, erhält man die **Ortskurve der komplexen Einhüllenden der I/Q Modulation**.

Aus Bild 24.1 ergibt sich sofort der Zusammenhang zwischen  $I(t), Q(t)$  (kartesisch) und  $A(t), \phi(t)$  (polar).

### 24.1.1 Darstellung der Modulations-Arten mit Hilfe der Komplexen Einhüllenden

Je nachdem, wie die Nachricht  $m(t)$  in die komplexe Einhüllende  $g(t)$  eingreift, ergeben sich die verschiedenen Modulations-Arten.

Für die Mapping-Funktion  $g[m(t)]$  sind nur solche Zusammenhänge sinnvoll, für die eine **eindeutige Umkehrfunktion**  $m[g(t)]$  besteht und die sich auch **realisieren** lassen.

Modulations-Art	Mapping-Funktion $g[m(t)]$
<b>analoge Modulationen</b>	
AM: Amplituden-Modulation	$g[m(t)] = [1 + m(t)]$ (reell)
DSB: Doppel-Seitenband-Modulation	$g[m(t)] = m(t)$ (reell)
QDSB: Quadratur-DSB	$g[m(t)] = [m_I(t) + j m_Q(t)]$
SSB: Ein-Seitenband-Modulation	$g[m(t)] = [m(t) \pm j \hat{m}(t)]$
PM: Phasen-Modulation	$g[m(t)] = \exp\{jK_{PM}m(t)\}$
FM: Frequenz-Modulation	$g[m(t)] = \exp\{jK_{FM} \int_{-\infty}^t m(\tau)d\tau\}$
<b>digitale Modulationen</b>	
<b>lineare</b> (wie QDSB)	$g[m(t)] = [m_I(t) + j m_Q(t)]$
<b>nichtlineare</b> (wie FM)	$g[m(t)] = \exp\{jK_{FM} \int_{-\infty}^t m(\tau)d\tau\}$

Tabelle 4: Modulationen und Mapping-Funktion

Bei der Einseitenband-Modulation (SSB: *single side band*) ist  $\hat{m}(t)$  die Hilbert-Transformierte von  $m(t)$ .

### 24.1.2 Komplexer I/Q Modulator

Gleichungen (24.4) & (24.6) führen auf das Blockschaltbild für einen komplexen I/Q-Modulator, Bild 24.2.

<sup>23.1</sup>Hierfür sind polare Modulatoren als IC erhältlich, die sich für alle gängigen Mobilfunk-Standards konfigurieren lassen.

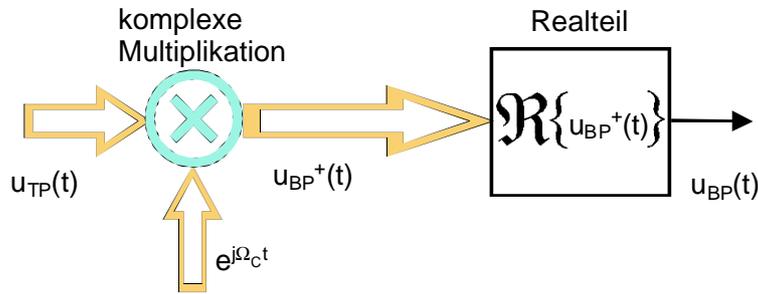


Bild 24.2: Blockschaltbild des komplexen I/Q Modulators

Ausgehend von Gleichung (24.3) folgt:

$$\begin{aligned}
 u_{TP}(t) &= g(t) = I(t) + jQ(t) && \text{komplexe Einhüllende} \\
 u_{BP}^+(t) &= u_{TP}(t) \cdot e^{j\Omega_C t} && \text{komplexwertiges BP-Signal} \\
 &= [I(t) + jQ(t)] \cdot [\cos \Omega_C t + j \sin \Omega_C t] \\
 &= \underbrace{I(t) \cos \Omega_C t - Q(t) \sin \Omega_C t}_{\Re\{u_{BP}^+(t)\} = u_{BP}(t)} + j \underbrace{Q(t) \cos \Omega_C t + I(t) \sin \Omega_C t}_{\Im\{u_{BP}^+(t)\}}
 \end{aligned}
 \tag{24.7}$$

Damit wird das **modulierte Signal** in Übereinstimmung mit Gleichung (24.2):

$$\boxed{u_{BP}(t) = \Re\{u_{BP}^+(t)\} = I(t) \cdot \cos \Omega_C t - Q(t) \cdot \sin \Omega_C t \quad \text{Bandpaß-Signal}}
 \tag{24.8}$$

Damit herrscht auch Übereinstimmung zwischen dem **reellen I/Q-Modulator**, Bild 4.4 (Seite 10) und dem **komplexen I/Q-Modulator**, Bild 24.2.

## 24.2 Das Vektor-Diagramm

### 24.2.1 Digital Mapping

Entsprechend zu der Darstellung in Bild 23.1 (Seite 104) wird der ankommende Daten-Strom in zwei Teilströme  $d_1$  &  $d_2$  aufgespalten. Im **einfachsten Fall** geschieht das Bit-weise. Damit wird der Symbol-Takt  $T_S$  doppelt so lange wie der Bit-Takt  $T_b = 2T_b$ , wenn  $T_b$  der Bit-Takt ist.

$$T_S = 2T_b
 \tag{24.9}$$

Da die Daten mit dem Daten-Takt  $T_b$  einlaufen, hat man genau 1 Wert pro Takt  $T_b$  zur Verfügung. Die Daten sind somit Zeit-diskret. Das gilt auch für die Daten-Symbole  $d_1$  &  $d_2$ , mit dem Takt  $T_S$ .

Daraus ergeben sich ungerundete bipolare Symbole  $d_1(t)$  und  $d_2(t)$ <sup>24.1</sup> mit einem Symbol-Takt  $T_S = 2T_b$ , Bild 24.3.

### 24.3 Konstellations-Diagramm, Signal-Raum, Phasen-Stern

Werden die (D/A gewandelten, ungerundeten) Symbole (bzw. Daten-Blöcke)  $d_1$  auf den Y-Eingang und die Symbole  $d_2$  auf den X-Eingang eines Oszilloskopes gegeben und das Display exakt zu den Symbol-Takt-Zeiten  $T_S$  kurzzeitig hell getastet, erhält man das Konstellations-Diagramm (Signal-Raum, Phasen-Stern) abgebildet.

Man erhält für das gewählte Beispiel einen Phasen-Stern gemäß Bild 24.4. Die zugehörige Digitale Modulation wird mit QPSK (*quadrature phase shift keying*) oder 4PSK bezeichnet.

Die Bezeichnung des Phasen-Sterns erfolgt (üblicherweise) analog zur jeweiligen Digitalen Modulation. Dabei ist zu beachten, daß die Bezeichnungen für Digitale Modulationen sich stark unterscheiden von den Bezeichnungen für Analoge Modulationen. So heißt „QPSK“ Quadratur-Phase-Shift-Keying. QPSK ist eine **lineare** Modulation (entsprechend QDSB) und keine (nichtlineare) Phasen-Modulation, s. Tabellen 2, 3 & 4 .

<sup>24.1</sup>In den Anfängen der Digitalen Übertragung wurden diese ungerundeten Symbole (ohne Interpolation) direkt dem Modulator zugeführt. Eine Filterung erfolgte (mehr schlecht als recht) auf der HF Seite.

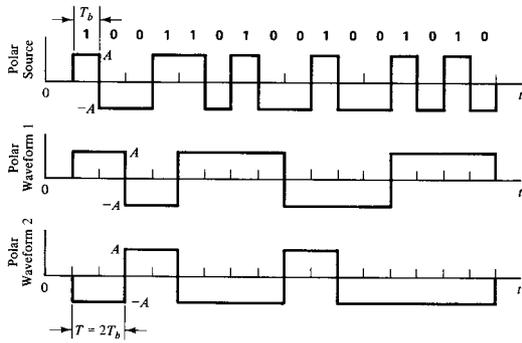


Bild 24.3: Bildung der (nicht verrundeten) bipolaren I & Q Daten-Symbole ( $d_1(t)$ ,  $d_2(t)$ ); nichtkausale Darstellung

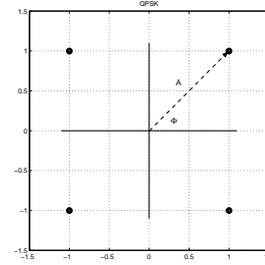


Bild 24.4: Konstellations-Diagramm (Signal-Raum, Phasen-Stern) der QPSK (4PSK); Zu den Abtast-Zeitpunkten ist die (normierte) Amplitude  $A = \sqrt{2}$  und die Phase hat sich um  $n \cdot \pi/2$ ; ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) geändert.

- Die Bezeichnung QPSK erklärt sich anschaulich aus dem Phasen-Stern. **Zu den jeweiligen Abtast-Zeitpunkten hat die Amplitude  $A$  stets den gleichen Wert, jedoch hat sich ggf. der Phasenwinkel  $\Phi$  geändert.** Werden nur die Abtast-Zeitpunkte betrachtet (digitale Betrachtungsweise), so wurde offensichtlich zwischenzeitlich die Phase „umgetastet“.

Diese Betrachtungsweise nimmt jedoch keine Rücksicht auf die spektralen Eigenschaften des Signals. Diese sind jedoch dafür verantwortlich, ob die Bandbreite des Kanals eingehalten oder überschritten wird.

### 24.3.1 Digitale Interpolation

Im Interpolator müssen Stützstellen zwischen den Takt-Zeiten  $T_S$  gebildet und dazu die Werte der verrundeten Symbol-Formen (z.B. entsprechend zu Root-Raised-Cos) berechnet werden.

Diese erscheinen zunächst in digitaler Form als Bytes am Ausgang des Interpolators.<sup>24.2</sup> Damit erhält man (nach einer D/A Wandlung) die analogen Symbole (bzw. Symbol-Ströme)  $I(t) = s_1(t)$ ,  $Q(t) = s_2(t)$ , Bild 24.5. Diese werden dem (analogen) Modulator zugeführt, wodurch dann die Digitale Modulation entsteht, Bild 23.2 (Seite 106).

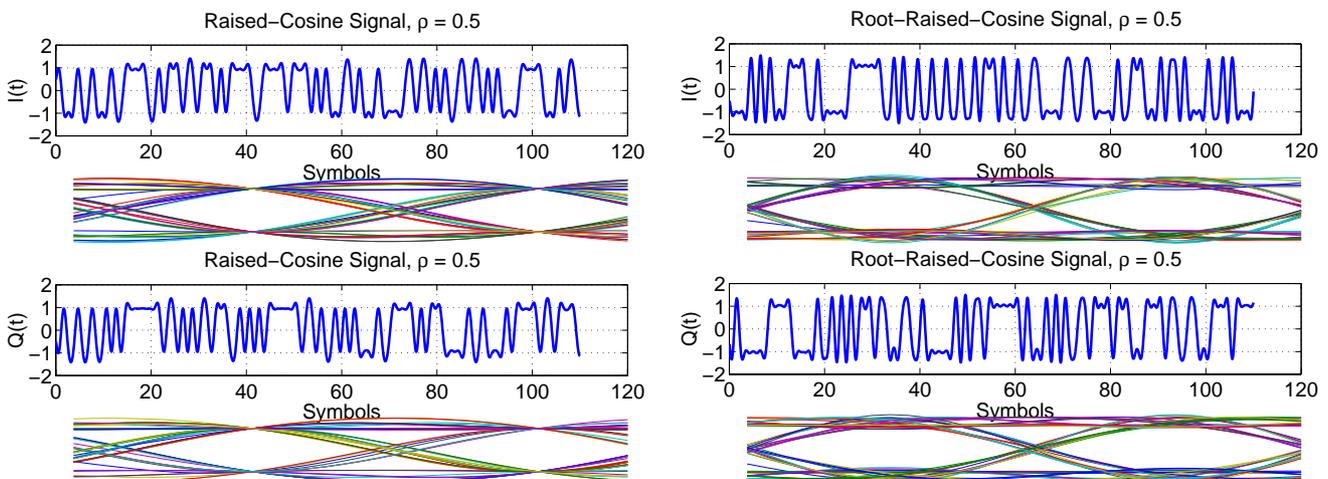


Bild 24.5: Zeitverläufe und Augen-Diagramme der I & Q Symbole  $I(t)$ ,  $Q(t)$  Beispiel: QPSK, (Links: Raised Cosine; Rechts: Root-Raised-Cos; Roll-Off-Faktor  $\rho = 0.5$ )

Im Modulator werden die  $I(t)$ -Symbole mit einem Cos-Träger multipliziert und die  $Q(t)$ -Symbole mit einem Sin-Träger, Bild 23.2. Damit entsteht eine Quadratur-Doppel-Seiten-Band Modulation (Q-DSB), die im Bei-

<sup>24.2</sup>Beispiele für eine Realisierungsmöglichkeit eines Interpolators für den I bzw. Q Zweig siehe „Intersymbol-Interferenz“ Kapitel „Realisierung der Symbol-Verrundung“.[13]

spiel Bilder 24.3 & 24.5, mit QPSK (*quadrature phase shift keying*) oder 4PSK (*4 phase shift keying*) bezeichnet wird.

### 24.3.2 Vektor-Diagramm

Werden die (verrundeten) Symbole, die der Interpolator liefert,  $I(t)$  auf den X-Eingang und die  $Q(t)$  Symbole auf den Y-Eingang eines Oszilloskopes gegeben, sieht man auch die Übergänge zwischen den Konstellations-Punkten. Die dann entstehenden Figuren werden Vektor-Diagramme benannt, Bild 24.6.

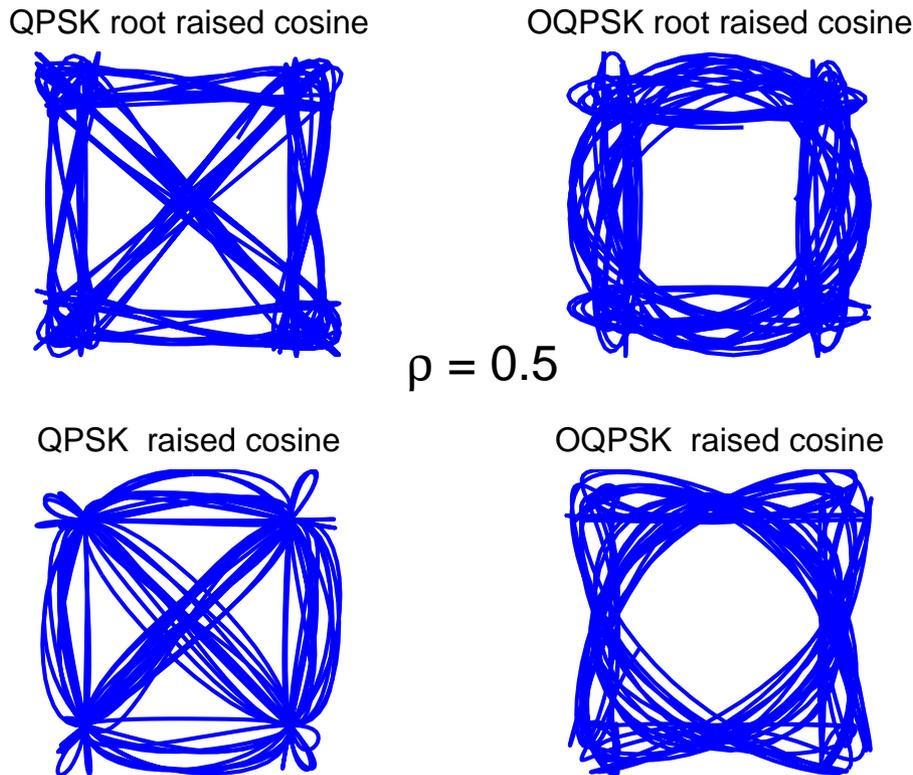


Bild 24.6: Vektor-Diagramme von QPSK und OQPSK, Symbole mit Roll-Off  $\rho = 0.5$  verrundet.

- Ein Vergleich mit Bild 24.1 (Seite 109) zeigt, daß das **Vektor-Diagramm** identisch ist mit der **Komplexen Einhüllenden** der (betreffenden) Digitalen Modulation, wenn ein komplexes I/Q Achsenkreuz unterstellt wird.

Bild 24.6 zeigt solche Vektor-Diagramme für Symbole, die gemäß Root-Raised-Cos verrundet sind (Sender) und solche die gemäß Raised-Cos verrundet sind (am Symbol-Entscheider im Empfänger).

Die Vektor-Diagramme zeigen dabei genau, welche Werte die beiden Symbol-Stöme dabei zwischen den Konstellations-Punkten annehmen können. Insbesondere ist für den Sender von großem Interesse, ob die modulierende Nachricht den Wert Null annehmen kann<sup>24.3</sup>. Eine Modifikation der QPSK, die Offset-QPSK (OQPSK), vermeidet diese Nulldurchgänge, wie in Bild 24.6 (rechts) zu sehen ist.

## 24.4 Daten-Symbole und Vektor-Diagramm dreidimensional

Die Darstellungen der  $I$  &  $Q$  Datenströme und Augendiagramme am Beispiel der QPSK, Bild 24.5 und das zugehörige Vektordiagramm, Bild 24.6 bzw. Bild 24.8, lassen sich dreidimensional darstellen, Bild 24.7.

<sup>24.3</sup>Es gibt Sender-Typen, die solche Signale nicht verzerrungs-frei verarbeiten können, wie z.B. Wanderfeld-Wellen-Röhren (TWT: *traveling wave tube*), die in Satelliten-Transpondern zu finden sind. Eine entsprechende Aussage (bezüglich Außerband-Strahlung) gilt auch für Sender, die die EER-Technik (EER: *envelope elimination and restauration*) verwenden (vergl. das Skript „EER-Technik“), z.B. für Digitale Rundfunk-Übertragung (DRM) in den Lang-, Mittel- und Kurz-Wellen (LMK) Bändern.

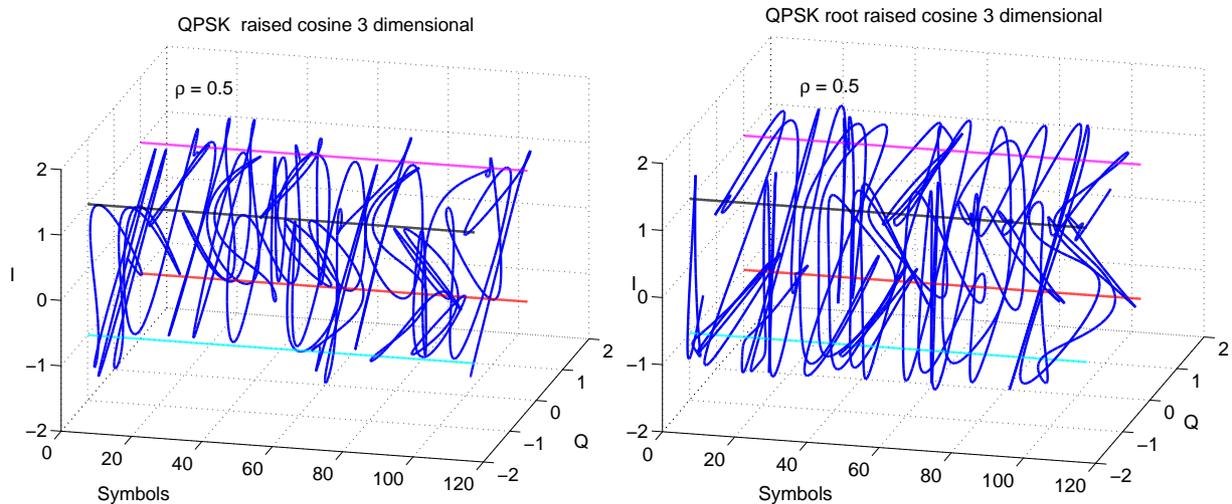


Bild 24.7: 3D Darstellung der QPSK Symbole (Links: Raised Cosine; Rechts: Root-Raised-Cos; Roll-Off-Faktor  $\rho = 0.5$ ). Die (zu den Abtastzeitpunkten gültigen) Sollzustände sind durch 4 farbige Geraden gekennzeichnet.

In diesem Bild sind die Orte der Soll-Punkte entsprechend zu Bild 24.4 (Seite 111) als (farbige) Geraden eingetragen (quasi „Spanndrähte“). Das (komplexe) Signal, bestehend aus den  $I$  und  $Q$  Symbolen, „schlingt“ sich von einem Symboltakt-Zeitpunkt  $T$  zum nächsten von einem „Spanndraht“ zum nächsten weiter.

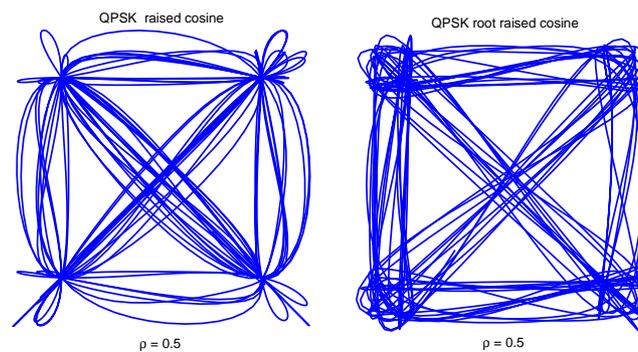


Bild 24.8: Blickrichtung entlang der Zeit-Achse in der 3D Darstellung der QPSK Symbole liefert das Vektor-Diagramm.

- Blickt man in Richtung der „Spanndrähte“ (Soll-Punkte), erhält man das **Vektor-Diagramm**, Bild 24.8. (Daten wie in Bild 24.7)
- Die Blickrichtung auf die Zeit/ $I$ -Ebene liefert das  $I(t)$  **Zeitsignal**, während die Blickrichtung auf die Zeit/ $Q$ -Ebene das  $Q(t)$  **Zeitsignal** zeigt, siehe Bild 24.5 (Seite 111). Bei anderer Triggerung des Oszilloskopes sieht man die **I/Q Augen-Diagramme**.

## 25 Modulationen ohne konstante Einhüllende

### 25.1 Modulation der Amplitude durch nur ein Nachrichten-Signal

Bei der Modulation der Amplitude durch ein einziges Nachrichten-Signal  $m(t)$  gibt es folgende Varianten, wie der Parameter „Amplitude“ eines hochfrequenten Trägers, siehe Gleichung (5.2) (Seite 12), beeinflusst werden kann:

$$\begin{aligned} \hat{U}_C\{m(t)\} &= \hat{U}_C \downarrow m(t) && : \text{DSB} \quad \text{Doppel-Seitenband-Modulation} \\ \hat{U}_C\{m(t)\} &= \hat{U}_C \downarrow [1 + m(t)] && : \text{AM} \quad \text{„gewöhnliche“ Amplituden-Modulation} \end{aligned} \quad (25.1)$$

- Der Eingriff in die Amplitude  $\hat{U}_C$  erfolgt **multiplikativ**. Dies ist markiert durch „ $\downarrow$ “ in Gleichung (25.1).
- Im Blockschaltbild erscheint nur ein Multiplizierer, Bild 25.1.

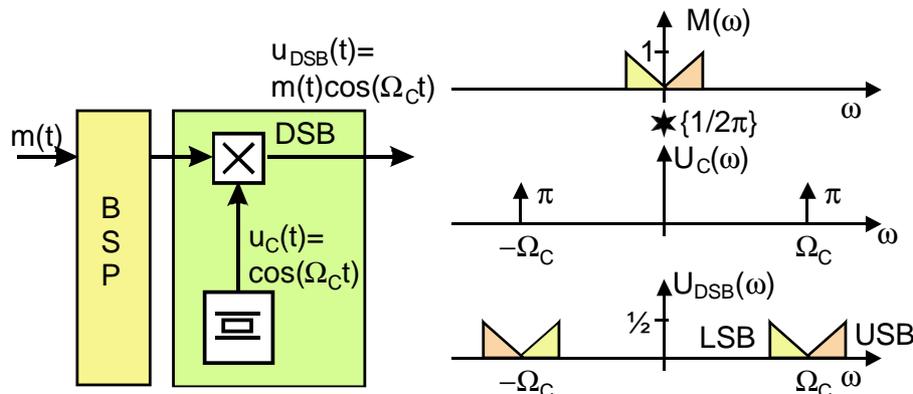


Bild 25.1: Blockschaltbild eines Doppelseitenband-Modulators (digital: PSK Modulators) und (symbolische) Spektren der Signale. Das Spektrum der DSB (bzw. PSK) enthält keine Träger-Linie.

- Das Blockschaltbild 25.1 kann entweder aufgefaßt werden als Spezialfall eines  $I/Q$  Modulators (Bild 23.2), bei welchem der Quadratur-Zweig  $Q(t)$  fehlt, oder als Spezialfall eines  $A/\Phi$  Modulators (Bild 23.3), bei welchem der Phasenwinkel  $\Phi = 0$  ist, wodurch auch der Phasenmodulator entbehrlich wird.
- Ist die Spektraldichte der Nachricht  $M(\omega)$  (symbolisch: Schmetterling-Form in Bild 25.1), folgt für die Spektraldichte der DSB, wenn die Amplitude der Trägerschwingung  $\hat{U}_C = 1$  gesetzt wird:

$$U_{DSB}(\omega) = \frac{1}{2} \{M(\omega + \Omega_C) + M(\omega - \Omega_C)\} \quad (25.2)$$

- Die „gewöhnliche“ AM tritt als „Amplitude Shift Keying“ (ASK) auf. Für Digitale Übertragung wird sie i.a. **nicht** verwendet, sondern nur die DSB. **Eine wichtige Ausnahme davon ist die optische Übertragung, wo ASK dominiert.** Digitale „Quadratur-Amplituden-Modulationen“ (QAM) sind daher keine AM, sondern DSB bzw. QDSB (Quadratur DSB).
- DSB hat **keine HF Träger-Linie** im Spektrum, Bild 25.1.
- Die Nachrichtenspannung  $m(t)$  tritt bei DSB in der Form von Hüllkurven an die Hochfrequenz-Schwingung auf. Die obere Hüllkurve ist proportional zu  $m(t)$ , die untere ist proportional zu  $-m(t)$ . Obere und untere Hüllkurve überschneiden sich, wodurch **Phasensprünge im hochfrequenten Signal** entstehen.
- Man beachte die Phasensprünge von **exakt  $\pi$**  bei der DSB, an den Stellen wo die Nachrichtenspannung  $m(t)$  durch 0 geht, siehe die Pfeile  $\downarrow$  in Bild 25.2.
- Diese Eigenschaft der DSB wird für Datenübertragung benutzt:  $0^\circ$  Phase entspricht logisch „1“,  $180^\circ$  Phase entspricht logisch „0“.

Die entsprechenden Digitalen Modulationen werden dann als **Phasen-Umtastung** oder **Phase Shift Keying (PSK)** bezeichnet. Die Ähnlichkeit im Namen führt häufig zu Verwechslungen mit (echter) Phasenmodulation (PM), zumal PSK in der angelsächsischen Literatur oft auch als „**phase modulation**“ bezeichnet wird.

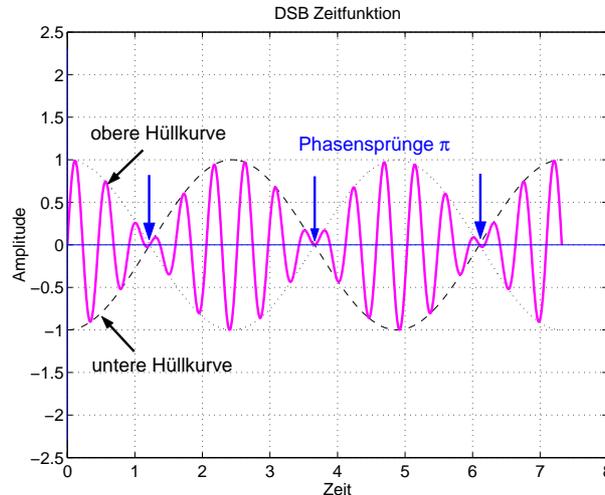


Bild 25.2: Beispiel für den Zeitverlauf von 2PSK oder BPSK, übertragungstechnisch: Doppelseitenband-Modulation (DSB). Das digitale Nachrichten-Signal ist eine Folge von verrundeten „L, 0, L, 0“ Bits (bipolares Signal). Die Phasensprünge um  $\pi$  im Zeitsignal der DSB sind durch Pfeile  $\downarrow$  gekennzeichnet.

- Die digitale **PSK** Modulation (Phase Shift Keying) ist demzufolge **keine Phasen-Modulation** (PM) im übertragungstechnischen Sinne, sondern eine **Doppelseitenband-Modulation** (DSB) mit unterdrücktem HF Träger. **PSK, DSB** sind **lineare** Modulationen; **PM** ist eine **nichtlineare** Modulation.
- **Charakteristisch für eine Modulation der Amplitude** (lineare Modulationen) sind die **äquidistanten** Nulldurchgänge der modulierten hochfrequenten Schwingung. Dies folgt daraus, daß per Definition hier nur in die Amplitude, nicht aber in die Frequenz oder in die Phase des Hochfrequenz-Trägers eingegriffen wird.
- Durch die äquidistanten Nulldurchgänge der modulierten Schwingung vereinfacht sich bei einer Digital-Übertragung die empfangsseitige Träger-Rückgewinnung.
- Da die **digitale Information in der Phase** der modulierten Schwingung steckt (Bild 25.2), ist sie **sehr unempfindlich (robust) gegenüber Störungen**. Die übertragene Information beträgt pro Zeitabschnitt (Symboldauer) nur ein (bzw. mehrere) Bit — und damit deutlich weniger als im analogen Fall, wo es auf den genauen Verlauf der Hüllkurve ankommt. Daraus resultiert die geringere Störanfälligkeit.

Den Phasensprung um  $\pi$  sieht man besonders deutlich bei **unverrundeten** Datensignalen<sup>25.1</sup>, Bild 25.3. Hier sind für unverrundetes Datensignal in (a) eine **ASK** (*Amplitude Shift Keying* oder **OOK** *On Off Keying*: Anwendung bei Optischer Übertragung) dargestellt, in (b) eine **PSK** und in (c) eine **FSK** (*Frequency Shift Keying*) mit kontinuierlichem Phasenverlauf.

- Da bei unverrundeten Datensignalen keine Schwankung in der Hüllkurve der DSB erkennbar ist, kann DSB in diesem speziellen Fall tatsächlich mit einer Phasenmodulation (PM) verwechselt werden.

Bei **DSB** ist der Phasensprung **immer exakt**  $\pi$ , während bei einer Phasenmodulation (**PM**) mit unverrundetem Datensignal die Größe des Phasensprungs **von der Amplitude des Datensignals abhängt**. Ein Wert von exakt  $\pi$  ist dabei nur bei genau eingehaltener Amplitude des digitalen Signals erreichbar. Bei verrundetem Datensignal erhält man bei DSB nach wie vor einen Phasensprung von exakt  $\pi$  (siehe Bild 25.2), während bei PM dagegen ein allmählicher Phasenübergang und kein Sprung entsteht, entsprechend zu Bild 25.3 (c).

- Da bei PM und bei FSK in den Winkel  $\psi(t)$  der Trägerschwingung eingegriffen wird, ist die Amplitude der modulierten Schwingung konstant und zwar auch dann, wenn die Daten verrundet sind.

<sup>25.1</sup>Bei den frühen Digitalen Übertragungssystemen, z.B. in der Satellitentechnik, wurden z.T. noch unverrundete Datensignale verwendet. Um die dadurch entstehenden störenden Randaussendungen (OOB *Out-Of-Band Emissions*) zu vermindern, verwendete man im HF Teil Bandpässe, wodurch die Daten-Symbole (z.T. auf unsymmetrische Art) verrundet wurden. Eine symmetrische Daten-Formung vor einer Modulation ist heute Stand der Technik.

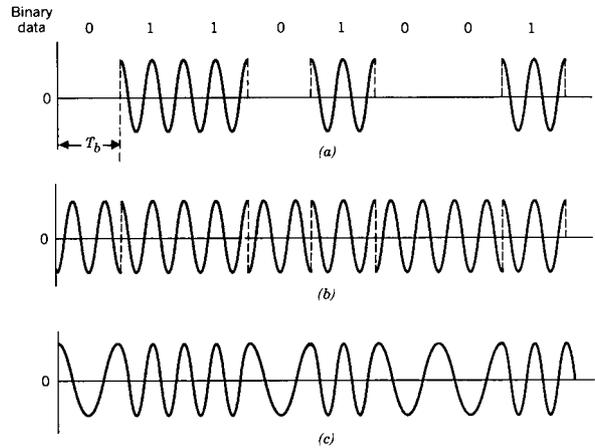


Bild 25.3: ASK (a), PSK (b) und FSK (c) für un verrundetes Daten-Signal

25.1.1 Phasen-Stern (Signal-Konstellation, Signal-Raum) der BPSK (2PSK)

Besonders deutlich wird die Namensgebung für diese Digitale Modulation, wenn der Phasen-Stern (Konstellations-Diagramm, Signal-Raum) betrachtet wird. Zu den Abtast-Zeitpunkten T hat bei einer bipolaren Übertragung das digitale Signal die Größe A = ±√Eb, wobei Eb die Bit-Energie ist, Bild 25.4. Da sich hier nur 2 Phasen-Zustände (Φ = [0, π]) ergeben (Soll-Punkte 1 & 2), wird die Modulation auch Binary Phase Shift Keying (BPSK) oder 2PSK genannt. Die Größe der Amplitude A, d.h. die Entfernung der Soll-Punkte (1, 2) vom Ursprung ist gleich groß. Die Änderung des Signals, von Abtast-Punkt zu Abtast-Punkt, betrachtet zu den jeweiligen Abtast-Zeitpunkten, betrifft damit (anscheinend) nur die Phase und nicht die Amplitude. Also ist es unter diesem Blickwinkel logisch, derartige Modulationen mit Phase Shift Keying (Phasen-Umtastung) zu bezeichnen.

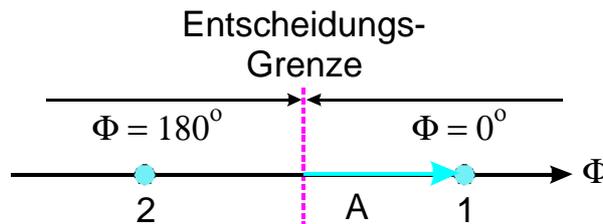


Bild 25.4: Konstellations-Diagramm (Phasen-Stern, Signal-Raum) der BPSK (2PSK)

25.2 Quadratur-Träger-Verfahren

Es werden ein Cos-Träger ŨC cos(ΩCt) und ein dazu orthogonaler Sin-Träger ŨC sin(ΩCt) verwendet, siehe Bild 23.2.

Der Daten-Strom d(t) wird in 2 Teil-Stöme aufgespalten, die zu Symbolen dI und dQ (als Bytes) zusammengefaßt werden. Diese Abbildung der Daten auf die Symbole wird Mapping genannt.

Optional folgt nach dem Mapping noch ein Pre-Coding, das z.B. für die Differenz-Codierung oder für einen zeitlichen Offset von Q(t) gegenüber I(t) eingesetzt wird.

Die anschließende Interpolation (mit höherer Taktrate) formt die Symbole I(t) und Q(t). Der Interpolator bewirkt eine Tiefpaß-Filterung und ist als FIR Filter auszuführen, damit die I(t) und Q(t) Symbole symmetrisch werden. Diese werden nach einer D/A Wandlung dem Quadratur-DSB-Modulator als analoge Signale zugeführt. Es entsteht somit (übertragungstechnisch gesehen) eine Quadratur-Doppel-Seitenband-Modulation (QDSB), uQDSB(t), Bild 25.5.

- Die entstehende lineare Digitale Modulation (z.B. 64QAM, 8PSK etc.) ist nur abhängig vom Mapping und vom Pre-Coding.

$$u_{QDSB}(t) = \hat{U}_C \cdot \{I(t) \cdot \cos(\Omega_C t) - Q(t) \cdot \sin(\Omega_C t)\} \tag{25.3}$$

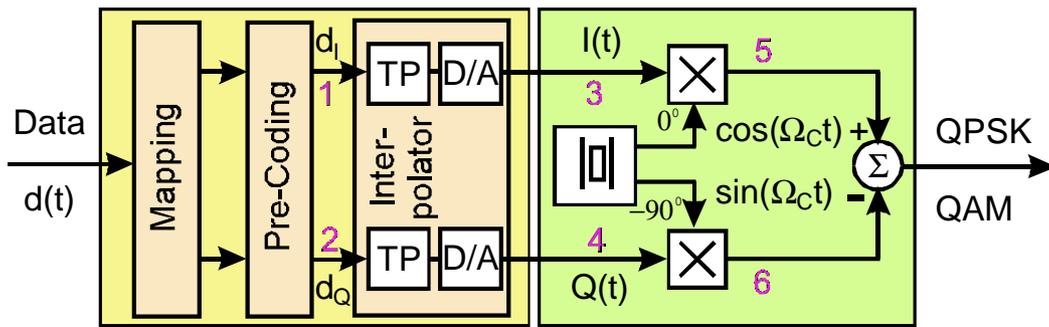


Bild 25.5: Blockschaltbild zur Erzeugung von QPSK & QAM (analog: QDSB). Das Baseband Signal Processing enthält die Blöcke: Mapping, Pre-Coding, Interpolator (mit D/A -Wandlung).

Das alternative Blockschaltbild, Bild 25.6, gibt einen Hinweis zu einer (aktuellen) Realisierungsmöglichkeit. Hier sind die D/A-Wandler (DAC) und die Multiplizierer zu **multiplizierenden D/A-Wandlern (MDAC)** zusammengefaßt.

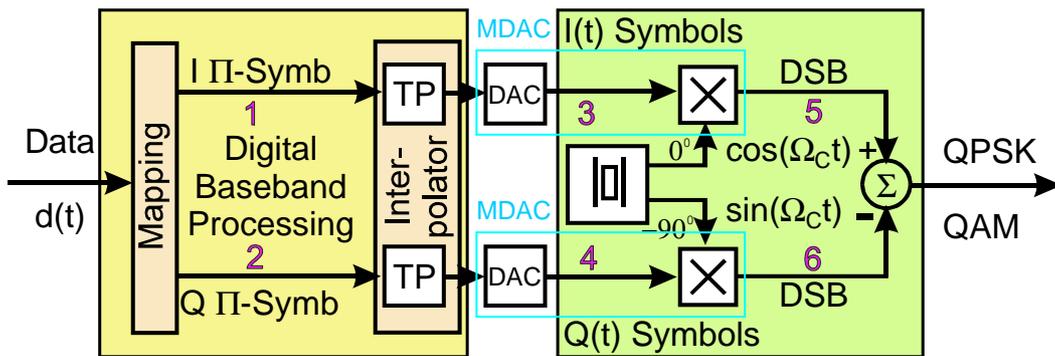


Bild 25.6: Blockschaltbild zur Erzeugung von QPSK & QAM. Die DACs und die Multiplizierer sind zu MDACs zusammengefaßt.

Das DSB modulierte  $Q(t)$  Signal hat  $90^\circ$  Phasendrehung gegenüber dem DSB modulierten  $I(t)$  Signal, ist damit also **orthogonal** zu diesem. Die beiden modulierten Schwingungen, die so entstehen, haben zwar die gleiche Mittenfrequenz  $\Omega_C$ , sind jedoch zu einander orthogonal. Sie können daher empfangsseitig wiederum getrennt werden. Die QDSB gestattet es somit, im gleichen Frequenzband wie die DSB die doppelte Menge an Information zu übertragen. Diese Eigenschaft erkennt man aus den Blockschaltbildern 25.5 & 25.6.

Durch eine QDSB entsteht eine Modulation, die **sowohl in der Amplitude als auch in der Phase** (der HF-Schwingung) moduliert ist, siehe auch die komplexe Einhüllende Bild 24.1 (Seite 109). Eine trigonometrische Umformung von Gleichung (25.3) ergibt den gleichen Sachverhalt.

$$u_{QDSB}(t) = \hat{u}_C \cdot \sqrt{I(t)^2 + Q(t)^2} \cos\left(\Omega_C t + \arctan \frac{Q(t)}{I(t)}\right) \tag{25.4}$$

Jedoch ist die **Bandbreite des QDSB Signals genau so groß wie die Bandbreite einer DSB**, da im I & Q Zweig gleiche Daten-Verrundung (FIR-Filter mit höherer Taktrate) angewendet wird. Die QDSB gehört damit zu den **Bandbreite sparenden Modulations-Arten**.<sup>25.2</sup>

<sup>25.2</sup>Eine QDSB kann auch mit einer Struktur gemäß Bild 23.3 (Seite 107) erzeugt werden. In der Praxis zeigt es sich jedoch, daß hierfür die Signal-Laufzeiten im Amplituden- und Phasen-Zweig sehr exakt übereinstimmen müssen, weil andernfalls Außerband-Strahlung entsteht, siehe Skript „EER-Technik“. Bei einer Realisierung des polaren Modulators als IC (für Handys) ist die Laufzeitbedingung erfüllt.

**25.2.1 Mapping für quadratische Symbol-Konstellationen**

Die (bipolaren) binären Daten  $d(t)$  am Eingang des Digitalen Modulators, Bild 25.5 werden auf den I & Q Zweig aufgeteilt. Dies geschieht im Falle von quadratischen Symbol-Konstellationen in einem 2 Bit Seriell-zu-Parallel Wandler (2 bit S2P). Hierbei werden alle geradzahigen Bits dem I-Zweig und alle ungeradzahigen Bits dem Q-Zweig zugeordnet.<sup>25.3</sup> Dafür ist vorab eine Synchronisation erforderlich.

Die Bit-Stöme in den I & Q Zweigen werden zu Bytes  $d_I$  und  $d_Q$  der Länge  $L$  (L-Bytes) zusammengefaßt. Nach einer D/A Wandlung ergeben sich hieraus (als didaktisches Zwischenergebnis) unverrundete  $d_I$  und  $d_Q$  Symbole. Verrundete  $I(t)$  und  $Q(t)$  Symbole entstehen nach einer Tiefpaß-Filterung der L-Bytes in einem (digitalen) Interpolator (mit anschließender D/A Wandlung),<sup>25.4</sup> Bild 25.7.

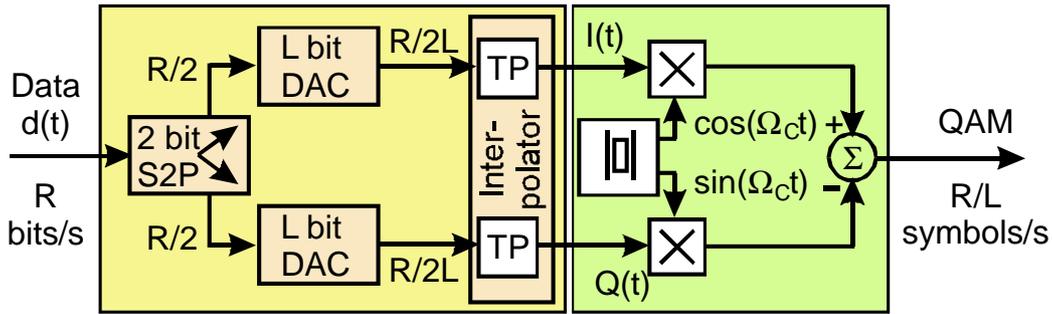


Bild 25.7: Blockschaltbild für das Mapping von QAM Symbolen

Die Datenrate des Datenstromes  $d(t)$  sei  $R$  bits/sec. Nach der Seriell-zu-Parallel Wandlung ergeben sich 2 Datenströme à  $R/2$  bits/sec. Hieraus entstehen hinter den  $L$  Bit D/A Wandlern zwei Symbolströme  $d_I$  und  $d_Q$  von je  $R/(2L)$  symbols/sec (unverrundete Symbole als L-Bytes). Da am Ausgang des QAM-Modulators die beiden (verrundeten und modulierten) Symbolströme wieder zusammengefaßt werden, ergibt sich am Sender-Ausgang eine Symbolrate von  $R/L$  symbols/sec.

**25.2.2 QPSK (4PSK, 4QAM)**

Werden in den D/A Wandlern im  $I$  und  $Q$  Zweig jeweils nur  $L = 1$  Bit verarbeitet, kommt man zur 4QAM, die (je nach Betrachtungsweise) auch QPSK oder 4PSK genannt wird. Das Blockschaltbild 25.8 und Bild 24.3 (Seite 111) zeigen eine Möglichkeit für das Mappen der Daten, siehe Kapitel 24.2 „Das Vektor-Diagramm“. Hierzu werden die einlaufenden (binären) Daten im Daten-Takt in ein Schiebe-Register (SR) gelesen. Nach zwei Takt-Zeiten werden die im SR befindlichen Daten in ein Latch (L) übernommen und stehen dann als  $I$  und  $Q$  Werte zur Verfügung. Die Umformung von unipolaren zu bipolaren Signalen ist dabei nicht extra gezeichnet, da dies im Digitalen Interpolator erfolgt.

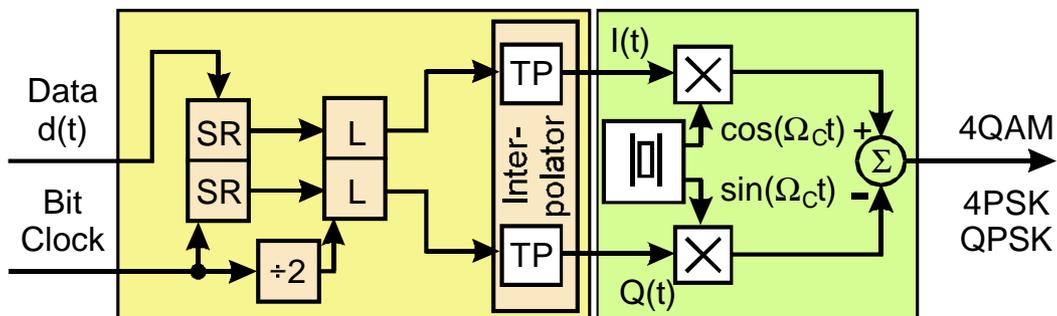


Bild 25.8: Blockschaltbild für das Mappen von QPSK (4PSK, 4QAM) Symbolen

<sup>25.3</sup>Es sind auch andere Aufteilungen möglich.

<sup>25.4</sup>Zur Realisierung der Symbol-Verrundung siehe das Skript „Inter-Symbol-Interferenz & Nyquist-Bedingung“, Kapitel „Realisierung der Symbol-Verrundung“.[13]

Mit Hilfe des Phasen-Sterns der QPSK ist die Bezeichnung dieser digitalen Modulation sofort erkennbar. Zu den Entscheidungs-Zeitpunkten ist die Amplitude  $A$  konstant, jedoch hat sich der Phasen-Winkel  $\Phi$  um

$$\Delta\Phi = n \cdot \pi/2; \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2) \quad (25.5)$$

von Abtast-Zeitpunkt zu Abtast-Zeitpunkt geändert, Bild 25.9.

Bei der Abbildung (*mapping*) der Daten auf  $I$  und  $Q$  wählt man eine **Gray-Codierung**, die dafür sorgt, daß bei einem Symbolfehler (im Empfänger) nur ein einfacher Bitfehler entsteht. Hierzu wird ggf. eine Vor-Codierung des Datenstrom  $d(t)$  durchgeführt.

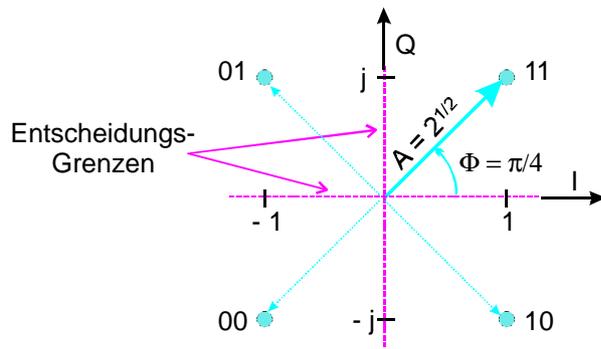


Bild 25.9: Konstellations-Diagramm (Phasen-Stern, Signal-Raum) und Entscheidungs-Grenzen der QPSK (4PSK)

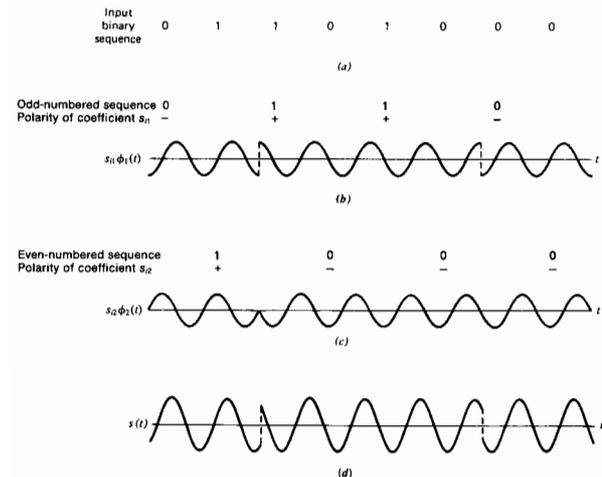


Bild 25.10: Der Zeitverlauf der QPSK (4PSK) für **unverrundete Datensymbole** zeigt Amplituden- und Phasen-Sprünge des modulierten Signals.

Die Änderung des Phasenwinkels der HF Schwingung (von Symbol zu Symbol) sieht man sehr deutlich, wenn (aus didaktischen Gründen)  $\square$ -förmige (unverrundete) Daten-Symbole zur Modulation verwendet werden, Bild 25.10. Zusätzlich entstehen in diesem Fall **Amplituden-Sprünge** an den Symbol-Grenzen.

### 25.2.3 16QAM

Werden in der Blockstruktur zur Erzeugung von QAM, Bild 25.7,  $L$  Bits zusammengefaßt, lassen sich höherstufige Digitale Modulationen mit quadratischer Symbol-Konstellation erzeugen. In solchen Fällen ändert sich von Symbol zu Symbol nicht nur die Phase der hochfrequenten Schwingung, sondern auch deren Amplitude. **Quadratische** Konstellationen werden mit **Quadratur Amplituden Modulation (QAM)** bezeichnet. Es ist jedoch zu beachten, daß es sich (übertragungstechnisch) trotzdem um eine QDSB handelt und nicht um eine AM. **Im Spektrum einer QAM ist also keine HF Träger-Linie vorhanden.**

Für eine 16QAM werden pro Zweig  $L = 2$  Bits zusammengefaßt, so daß 4 wertige Symbole entstehen. Ein sehr frühes Beispiel für eine 16QAM zeigt das Blockschaltbild 25.11. Verglichen mit der prinzipiellen Struktur in Bild 25.5 (Seite 117) ist folgendes zu beachten.

- Die Blöcke Mapping und Pre-Coding (als Differenz-Codierung) sind vorhanden.
- Die Symbol-Verrundung in einem Interpolator fehlt. Demzufolge sind hier die Symbole rechteck-förmig. (Die Filterung erfolgte nach der Modulation in der HF Ebene.)
- Es geht aus Bild 25.11 nicht eindeutig hervor, daß der  $I$  Zweig oben und der  $Q$  Zweig unten sein soll.
- Der ZF-Träger ist Sin-förmig anzusetzen. (ZF: Zwischen-Frequenz)
- An Punkt (8) des Blockschaltbildes ist der Phasen-„Stern“ der 16QAM zu sehen.

Der Zusammenhang zwischen den Takt-Zeitpunkten (1 bis 6) der  $I(t)$  und  $Q(t)$  Symbole und den Wegen (im Vektor-Diagramm) zu den Punkten des Konstellations-Diagrammes ist in Bild 25.12 zu sehen.

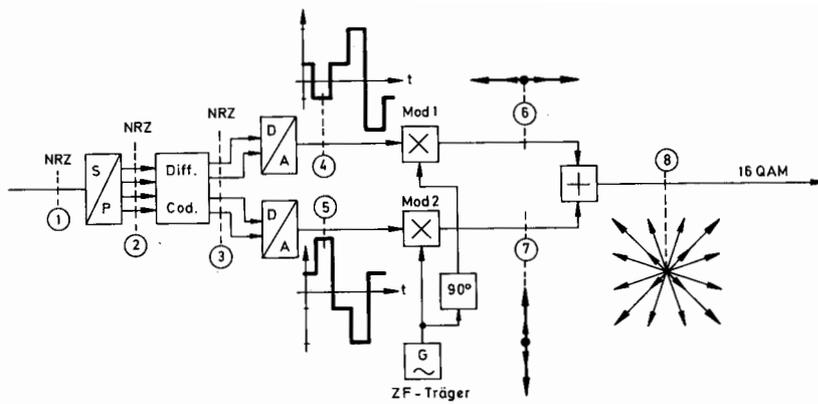


Bild 25.11: Struktur eines 16QAM Modulators mit (unverrundeten) 4 wertigen Symbolen in den I und Q Zweigen.

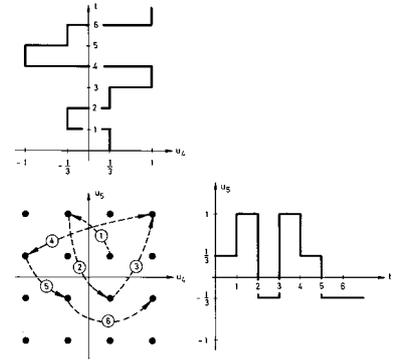


Bild 25.12: Zusammenhang zwischen den  $I(t)$  und  $Q(t)$  Symbolen und den Wegen durch das Konstellations-Diagramm der 16QAM

**25.2.4 64QAM**

Bei der 64QAM enthält jeder Konstellations-Punkt die Information von  $N = 6$  Bit, denn  $2^6 = 64$ . Zur Adressierung verwendet man je  $L = 3$  Bit in I Richtung (reelle Achse,  $\Re(z)$ ) und in Q Richtung (imaginäre Achse,  $\Im(z)$ ).

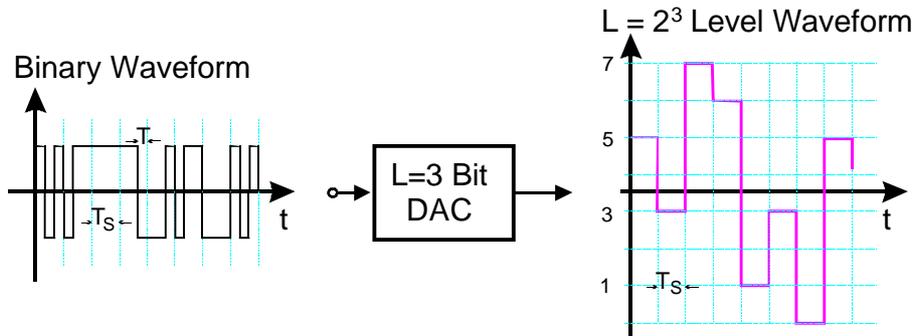


Bild 25.13: Beispiel für die Bildung von 8-wertigen Symbolen ( $I$  bzw.  $Q$  (unverrundet) einer 64QAM)

Die Zusammenfassung von  $L$  Bits zu  $2^L$  Symbolen zeigt Bild 25.13 am Beispiel eines 3 Bit D/A Wandlers. Entsprechende Signale treten bei der 64QAM in den  $I$  bzw.  $Q$  Zweigen (als  $L$ -Bytes) auf. In diesem Bild ist  $T$  der Bit-Takt im  $I$  bzw.  $Q$  Zweig. Dieser ist von doppelter Dauer wie der Bit-Takt des einlaufenden Datenstromes  $d(t)$ , vergleiche Bild 25.7

In Bild 25.14 sind die Konstellations-Diagramme von 16QAM und 64QAM dargestellt. Es ist üblich, diese **Konstellations-Diagramme zusammen mit den Mapping-Vorschriften** anzugeben. In der Praxis werden die Mapping-Tabellen häufig softwaremäßig ausgeführt. Daher ist es nicht verwunderlich, daß in der Praxis bei unterschiedlichen Realisierungen der QAM auch unterschiedliche Mapping-Vorschriften benutzt werden. Hierauf ist besonders zu achten, da die Digitale Modulation auch bei falschem Mapping „richtig“ aussieht, jedoch das Übertragung-System dann nicht funktioniert.

Bei einer Digitalen Übertragung muß bekanntlich genau verabredet werden, wie die eingelesenen Bits zu den jeweiligen Symbolen zusammengefaßt werden, damit der Empfänger anschließend wieder in die richtige Bit-Folge aufspalten kann.

**25.2.5 Symbol-Energie, Entscheider-Grenzen, Phasen-Winkel**

Aus Bild 25.14 erkennt man des weiteren, daß für gleiche Symbolabstände  $a$  in beiden Modulationen, die äußeren Punkte der 64QAM mehr als doppelt ( $7/3 = 2.33 \dots$ ) so weit außen liegen wie bei der 16QAM. Diese

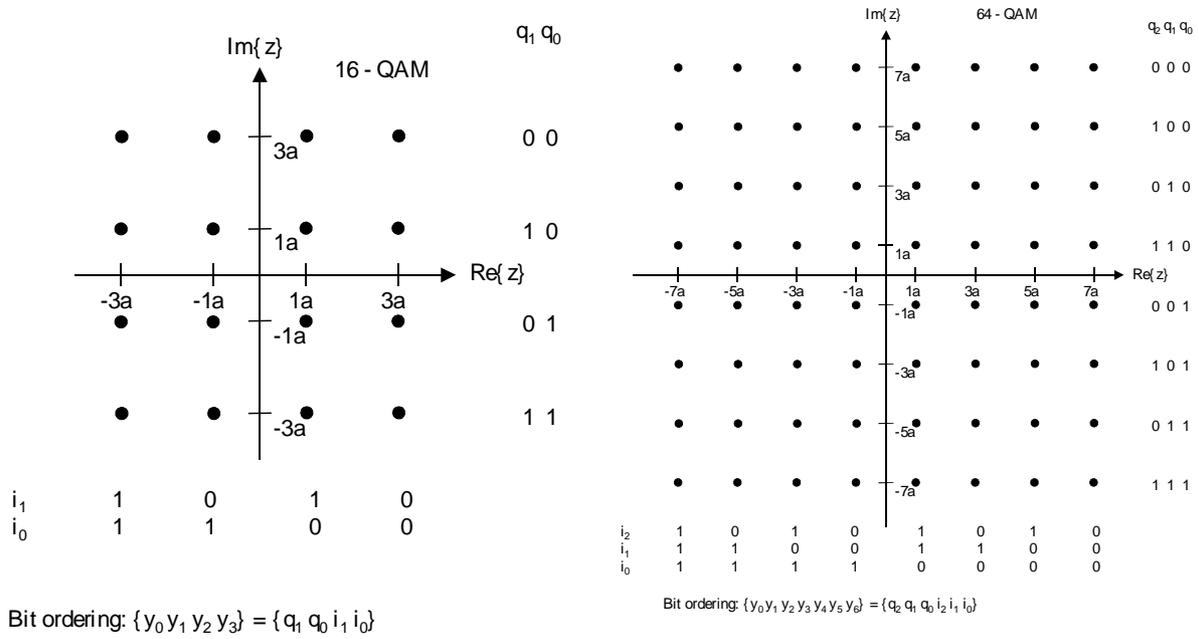


Bild 25.14: Quadratische Symbol-Konstellationen: 16QAM & 64QAM; Beispiel DRM

haben daher mehr als die 5.4 fache Energie, verglichen mit den äußeren Punkten der 16QAM.

Wenn jedoch **über den gleichen Sender** wahlweise 16QAM oder 64QAM abgestrahlt werden, so haben die äußeren Punkte jeweils die gleiche (maximale) Energie. Folglich verhalten sich die Abstände  $a_{16QAM}/a_{64QAM}$  wie 7/3. Die **16QAM** ist dann **robuster bezüglich Störungen** als die **64QAM**.

- Bei stärker gestörten Kanälen ist demnach eine Symbolkonstellation mit weniger Punkten zu wählen um die Fehlerrate zu verringern. Andererseits lassen sich mit niederstufigen Symbolen weniger Bits übertragen.

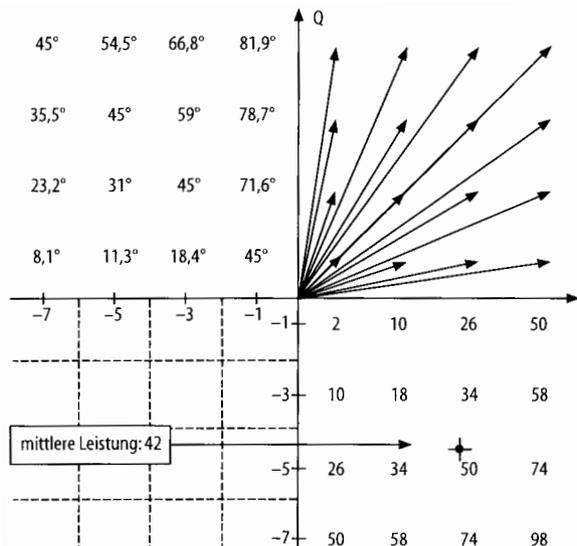


Bild 25.15: Signal-Raum der 64QAM. 1. Quadrant: Phasen-Stern; 2. Quadrant: relative Phasen-Winkel der Signal-Punkte; 3. Quadrant: Entscheidungsschwellen; 4. Quadrant: (relative) Leistungen der Symbolzustände und mittlere Leistung der 64QAM

Andere Darstellungsarten der 64QAM sind in Bild 25.15 dargestellt. Hier sieht man im 1. Quadranten

den **Phasen-Stern**, im 2. Quadranten die relativen **Phasen-Winkel der Signal-Punkte**, im 3. Quadranten die **Entscheider-Schwellen** und im 4. Quadranten die (relativen) **Leistungen bzw. Energien der Signal-Punkte**, sowie die **mittlere Energie der 64QAM** (unter der Voraussetzung, daß alle Symbole gleich häufig bei einer Übertragung vorkommen).

Da der Empfänger die gesendeten Symbole aus den gestörten empfangenen Symbolen schätzen muß, ist es vorteilhaft, den **Mindestabstand der Soll-Punkte der Symbol-Konstellationen so groß wie möglich** zu machen. Bei gegebener Anzahl der Punkte sind diese möglichst **gleichmäßig in der komplexen I/Q Ebene** zu verteilen.

**25.2.6 8PSK**

Als ein Beispiel für eine konzentrische Anordnung wird die 8PSK betrachtet. Hierbei ist die Entfernung aller Konstellations-Punkte vom Koordinaten-Ursprung konstant. Betrachtet man nur diese Punkte, könnte man zur Ansicht kommen, daß sich die 8PSK vorteilhaft mit Hilfe eines A / Φ Modulators, Bild 23.3 (Seite 107), als nichtlineare Modulation erzeugen lasse, wobei z.B.  $A = \sqrt{2}$  gewählt wird, um zu Symbolen mit gleicher Energie zu kommen wie bei der 4PSK (Bild 25.18 links).

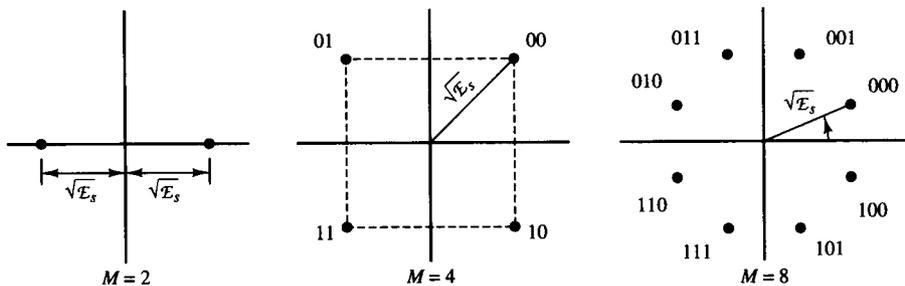


Bild 25.16: Phasensterne von 2PSK, 4PSK und 8PSK

Mit einer solchen Definition<sup>25.5</sup> käme man jedoch zu einem unterschiedlichen Vektor-Diagramm und zu einer wesentlich größeren Bandbreite, verglichen mit der üblichen Definition für 8PSK.

Die (übliche und Bandbreite sparende lineare) 8PSK wird mit Hilfe eines I / Q Modulators erzeugt, entsprechend zu Bild 23.2 (Seite 106). Für 8 Zustands-Punkte benötigt man 3 Bit. Der Datenstrom  $d(t)$  muß also in Blöcke à 3 Bit unterteilt werden. Andererseits zeigt der Phasensterne für I und für Q je 4 Werte. Bild 25.16 zeigt den Phasensterne für 8PSK im Vergleich zu denen von 2PSK und 4PSK. Die normierte Entfernung der Konstellations-Punkte ist für 4PSK und 8PSK jeweils  $\sqrt{E_S} = \sqrt{2}$ .

Die Struktur des 8PSK Modulators ist in Bild 25.17 dargestellt. Da der einlaufende Bitstrom in Blöcke à 3 Bit unterteilt wird, haben die Daten Q, I und C nur 1/3 der Taktgeschwindigkeit von  $d(t)$ .

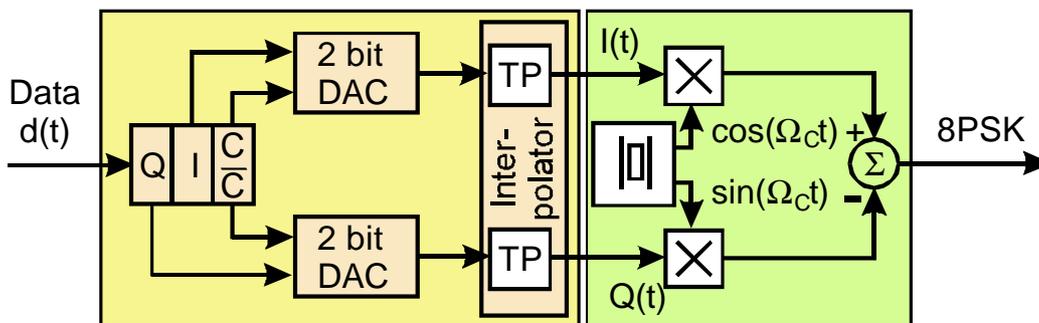


Bild 25.17: Blockschaltbild für das Mappen von 8PSK Symbolen

Für die in Bild 25.17 verwendeten 2 Bit Digital-Analog-Wandler (2 bit DAC) gilt folgende Tabelle, wenn die Punkte der 8PSK auf einem Kreis mit Radius  $\sqrt{2}$  V liegen sollen:

<sup>25.5</sup>Modulationen dieser Art heißen Continuous Phase Modulation (CPM), Abschnitt 26.

$I$	$C$	Ausg.		$Q$	$\bar{C}$	Ausg.	
0	0	$\sqrt{2} \cos(\pi/8) = 1.307$	V	0	1	0.541	V
0	1	$\sqrt{2} \cos(3\pi/8) = 0.541$	V	0	0	1.307	V
1	0	-1.307	V	1	1	-0.541	V
1	1	-0.541	V	1	0	-1.307	V

Tabelle 5: Werte für 8PSK (Mapping Tabelle)

Bezogen auf den Phasenstern in Bild 25.17 sind gemäß Tabelle 5 die Punkte des 2. und 4. Quadranten am Ursprung gespiegelt. Nicht jede 8PSK bildet die Bits in gleicher Weise auf die Symbole ab.<sup>25.6</sup>

**25.2.7 Mapping Tabellen in der Praxis**

Hier stellt sich die Frage nach einer praktischen Realisierung dieses Mappers. Tatsächlich handelt es sich — außer bei sehr schnellen Datenübertragungen — nicht um Lösungen in Hardware, wie man aufgrund der Blockschaltbilder vermuten könnte, sondern um **Software-Lösungen**. Die Mapping-Tabelle wird daher im Format „float“ oder „double“ aufgestellt. Zur D/A Wandlung werden schließlich, je nach Anforderung, 12 Bit bis 24 Bit DACs verwendet. Entsprechend verfährt man auch mit den höherstufigen Konstellationen. Da man softwaremäßig mit Mapping-Tabellen arbeitet, ist praktisch jede beliebige Zuordnung der Symbolpunkte zu Bit-Kombinationen möglich.

**25.2.8 Weitere Symbol-Konstellationen**

Bezüglich der Anordnung der Konstellations-Punkte hat man gewisse Freiheiten. In der Regel werden bis zu 8 Punkte auf einem Kreis angeordnet, wodurch man zur 8PSK kommt. Bei kreisförmigen Konstellationen ist es bei größerer Anzahl der Punkte jedoch nicht möglich, alle Konstellations-Punkte auf einem Kreis anzuordnen, weil sonst die gegenseitigen Abstände zu klein werden. Man wählt dann eine Verteilung mit mehreren konzentrischen Kreisen, womit auch sicher gestellt ist, daß die äußeren Punkte alle die gleiche Energie haben (im Unterscheid zur QAM). Damit erzielt man einen geringeren Crest-Faktor für die Digitale Modulation.

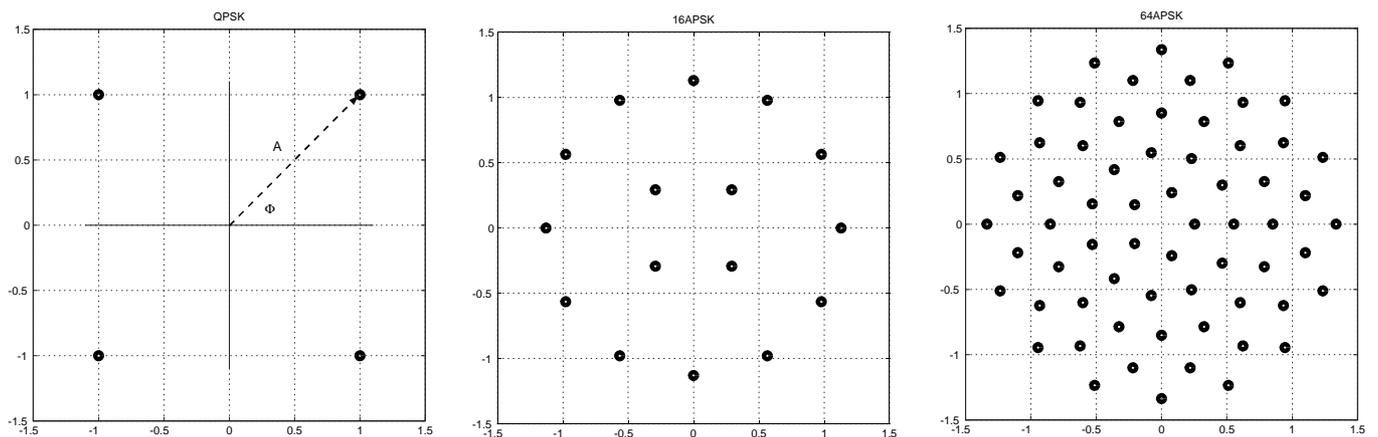


Bild 25.18: Konzentrische Symbol-Konstellationen: QPSK, 16APSK & 64APSK (gleiche mittlere Energie der Symbole)

Bild 25.18 zeigt Beispiele für solche Konstellationen, wobei die 4QAM oder QPSK sowohl der quadratischen als auch der konzentrischen Verteilung zugerechnet werden kann.

Liegen alle Punkte auf einem Kreis heißen die digitalen Modulationen **PSK** (*Phase Shift Keying*). Liegen die Punkte auf mehreren konzentrischen Kreisen, werden die Modulationen **APSK** (*Amplitude Phase Shift Keying*) genannt. 16APSK könnte (genauer) auch 12/4APSK heißen und 64APSK entsprechend 16/16/16/11/5APSK.

<sup>25.6</sup>Hierauf ist bei der Realisierung von Modulator und Demodulator zu achten!

Eine Übersicht über einige weitere Symbol-Konstellationen gibt Bild 25.19. Von diesen Anordnungen ist diejenige mit einer hexagonalen Anordnung bezüglich des Minimalabstandes der Punkte optimal. Die Realisierung solcher Schwellen im Empfänger ist jedoch aufwendig.

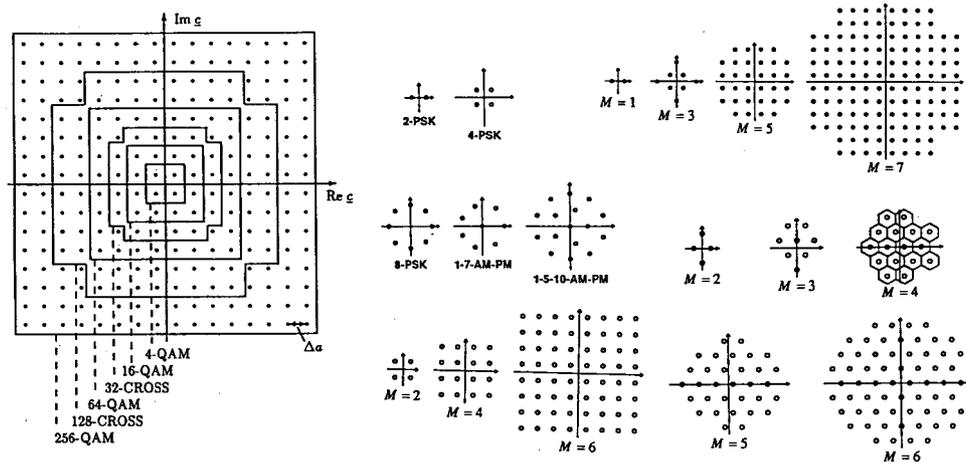


Bild 25.19: Beispiele für Symbol-Konstellationen

## 26 Modulationen mit konstanter Einhüllender

Alle (linearen) Digitalen Modulationen, die übertragungstechnisch als **DSB** bzw. **QDSB** bezeichnet werden können, führen auf modulierte Signale mit einer **minimalen Bandbreite im Übertragungskanal**, geeignete Daten-Verrundung vorausgesetzt. Das ist vorteilhaft.

Andererseits hat das HF Signal dieser Bandbreite sparenden Modulationen **starke Schwankungen seiner Hüllkurve**. Das ist oftmals nachteilig, weil

- zur Verstärkung solcher Signale **lineare** Verstärker erforderlich sind. Diese haben einen **geringen Wirkungsgrad**.
- einige Typen von HF Verstärkern, z.B. Wanderfeldwellen Röhren (TWT *Travelling Wave Tube*), aufgrund ihrer physikalischen Eigenschaften starke nichtlineare Amplitudenverzerrungen und Amplituden-Phasen-Umwandlungen ergeben, Bild 26.1.<sup>26.1</sup>

Insbesondere für TWTs in Satelliten-Transpondern hat man daher schon frühzeitig nach geeigneten Modulationen mit geringen Schwankungen der Hüllkurve gesucht.

Eine Modulation, die absolut keine Schwankungen in der Hüllkurve aufweist, ist die Exponential- oder Winkel-Modulation (FM, PM). Die Modulation wäre in einem solchen Falle zu 100% an die Eigenschaften der Senderseite angepaßt. Jedoch ist die Exponential-Modulation eine nichtlineare Modulation, weshalb dann der Aufwand im Empfänger steigt, speziell bei der Entzerrung der Empfangssignale.

**Ein Digitales Übertragungs-System ist daher immer als Ganzes zu betrachten. Hieraus resultieren dann gewisse Kompromisse teils auf der Sender-Seite, teils auf der Empfänger-Seite.**

### 26.1 Von der QPSK zur Offset QPSK (OQPSK)

#### 26.1.1 Hüllkurven-Schwankungen der QPSK

Bei der QPSK können sich die Symbole im I Zweig und im Q Zweig zu den gleichen Zeitpunkten ändern. Bei jedem Wechsel von  $(1; j) \longleftrightarrow (-1; -j)$  oder von  $(1; -j) \longleftrightarrow (-1; j)$  wird der Punkt  $(0; 0)$  im **Vektor-Diagramm** entweder direkt durchlaufen oder man kommt sehr nahe daran vorbei, Bild 24.8 (Seite 113). Für das QPSK Signal bedeutet das eine **starke Schwankung seiner Hüllkurve**. In Bild 26.2 ist der Verlauf des

<sup>26.1</sup>Moderne Halbleiter-Verstärker für Mikrowellen haben im Prinzip gleichartige Leistungs-Kennlinien und zeigen ähnliche AM-PM-Umwandlungen.

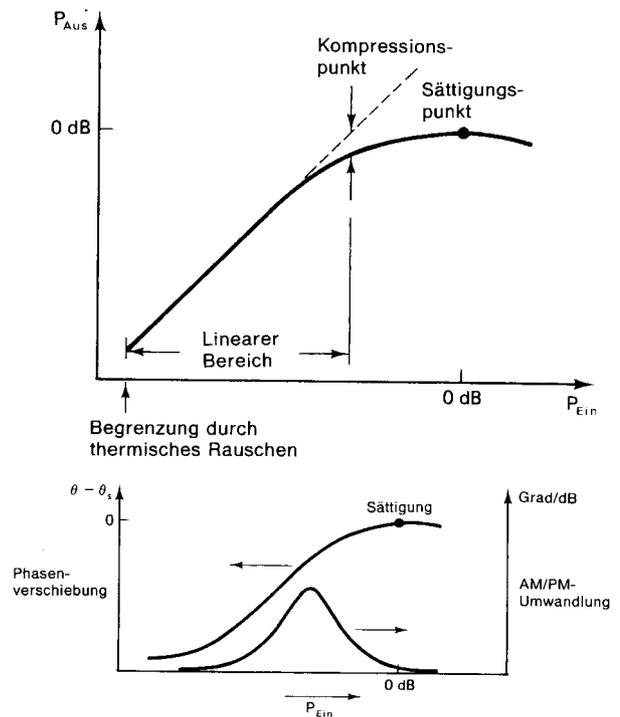
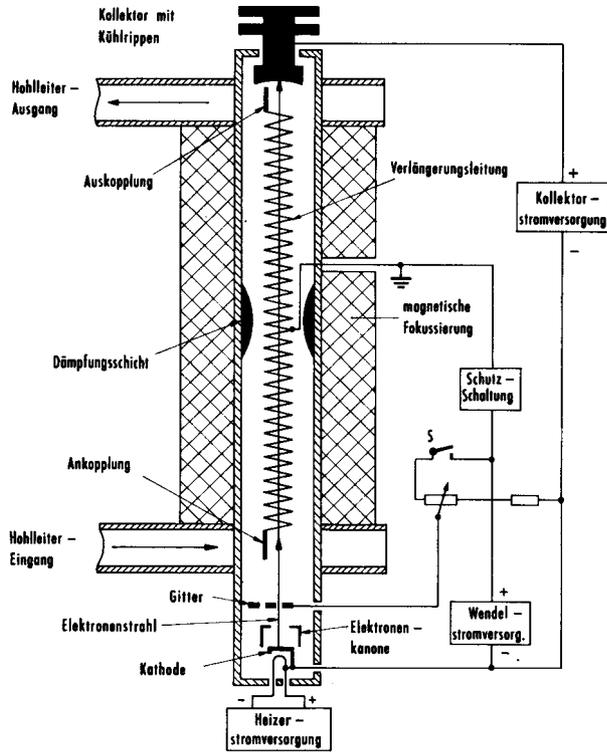


Bild 26.1: Prinzipschaltbild eines Mikrowellen-Verstärkers mit einer TWT Wanderfeld-Wellen-Röhre für Satelliten-Transponder (links); Leistungs-Kennlinie der TWT und AM-PM-Umwandlung (rechts)

Amplituden-Signals  $A(t)$  sowohl für eine Raised-Cosine Verrundung als auch für eine Root-Raised-Cosine Verrundung (Roll-Off-Faktor  $\rho = 0.5$ ) der Datensymbole dargestellt. Die Schwankungen des Amplituden-Signals  $A(t)$  erstrecken sich für beide Fälle von 0 bis 2, wobei der nominale Wert der Amplitude  $\sqrt{2}$  beträgt. Bei einem Verstärker, z.B. einer TWT oder einem Halbleiter-Verstärker, wird somit die **Leistungs-Kennlinie voll durchgesteuert**, was dann zu den unerwünschten Amplituden- und Phasenverzerrungen des Ausgangs-Signals führt.<sup>26.2</sup>

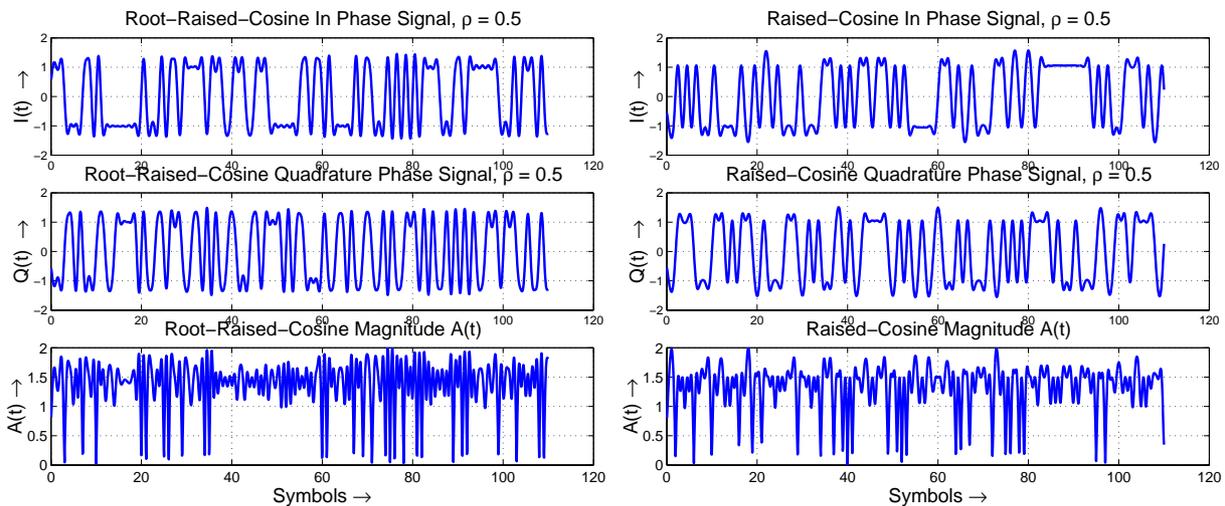


Bild 26.2:  $I(t)$ ,  $Q(t)$  &  $A(t)$  Zeitverläufe der QPSK mit Roll-Off-Faktor  $\rho = 0.5$  für Root-Raised-Cos Verrundung (Sender) und Raised-Cos Verrundung (Empfänger)

<sup>26.2</sup>Da im Digitalen Empfänger die Ähnlichkeit der empfangenen Symbole mit den (unverzerrten) Symbolen überprüft wird (Matched Filter, Korrelator), bedeuten verzerrte Symbole eine (vermeidbare) Erhöhung der Fehler-Rate der Digitalen Übertragung.

Die Darstellung in Bild 26.3 zeigt im Prinzip den gleichen Zusammenhang schematischer, wobei hier die einzelnen Binär-Symbole breiter und anders verrundet dargestellt sind. Gezeichnet sind nicht  $I(t)$  und  $Q(t)$ , sondern (nur) die jeweiligen oberen und unteren Hüllkurven an die modulierten Signale. Die dazu gehörende modulierte Schwingung hat jeweils die bezeichnete Phase (I-Zweig:  $0^{\circ}; 180^{\circ}$ , Q-Zweig:  $90^{\circ}; 270^{\circ}$ , resultierend:  $45^{\circ}; 135^{\circ}; 225^{\circ}; 315^{\circ}$ ).

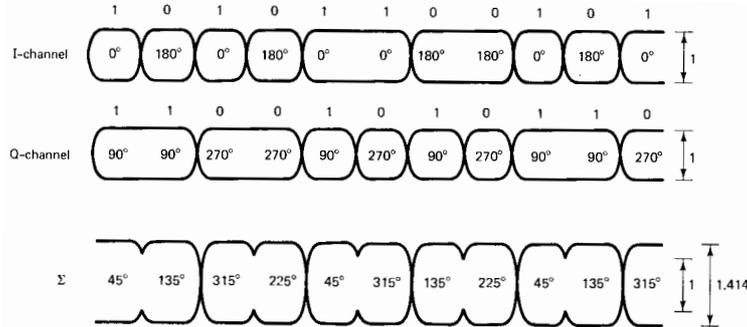


Bild 26.3: Hüllkurven-Schwankungen der QPSK (schematisch) und Phase der Trägerschwingung

- Wie aus diesem Bild erkennbar wird, ist die Schwankung der Hüllkurve sehr viel geringer, wenn nicht gleichzeitig in den I und Q Zweigen ein Vorzeichen-Wechsel stattfindet.

### 26.1.2 Hüllkurven-Schwankungen der OQPSK

Die Gleichzeitigkeit der Vorzeichen-Wechsel im I und Q Zweig kann dadurch vermieden werden, daß z.B. im Q Zweig eine Verzögerung um einen halben Symbol-Takt  $T_S/2 = T_b$  vorgenommen wird.

Im Blockschaltbild für das Mappen der OQPSK, Bild 26.4, kann dies dadurch erfolgen, daß ausgehend vom Bit-Takt "Bit Clock"  $T_b$  (pro Bit eine steigende und eine fallende Flanke) dieser Takt in einem Toggle Flip-Flop heruntergeteilt wird. Das D Flip-Flop im I Zweig übernimmt die Daten bei steigender Flanke, während gleichzeitig das D Flip-Flop im Q Zweig nichts übernimmt, denn da liegt dann eine fallende Flanke an. Ein Bit später liegen die Verhältnisse gerade umgekehrt vor. Damit ist die gewünschte Verzögerung im Q Zweig erreicht.

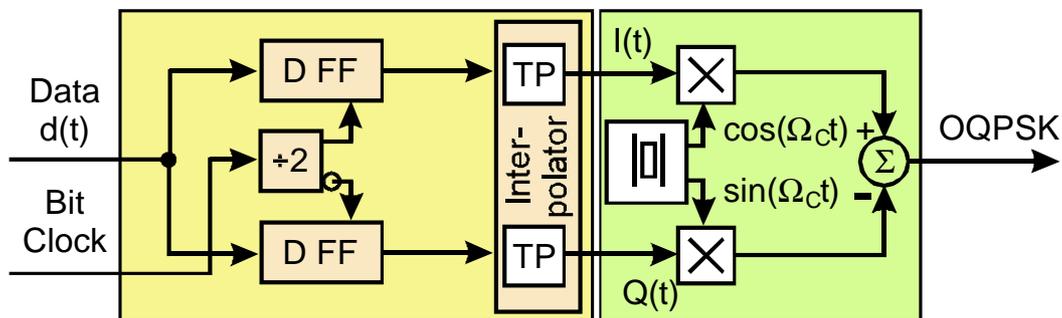


Bild 26.4: Blockschaltbild für das Mappen von OQPSK Symbolen

Da die Zustände im I Zweig und im Q Zweig nicht gleichzeitig wechseln können, sondern eine Zeitbedingung eingehalten werden muß, wird der Mapper für OQPSK zu einer **Finite-State-Maschine**. Die Signal-Zustände der OQPSK können daher vorteilhaft mit Hilfe eines Zustands-Diagrammes (Trellis) dargestellt werden, Bild 26.5. Zu ungeraden Zeitpunkten können sich nur die Zustände im Q Zweig ändern, während sich die Zustände im I Zweig nur zu geraden Takt-Zeiten ändern können.

Da jetzt die Symbole im I und Q Zweig nicht mehr gleichzeitig wechseln, gibt es keinen Nulldurchgang mehr in der Hüllkurve des modulierten Signals. Die Einhüllenden der modulierten Signale haben damit eine nominelle Schwankung von  $1 : \sqrt{2}$ , Bild 26.6.

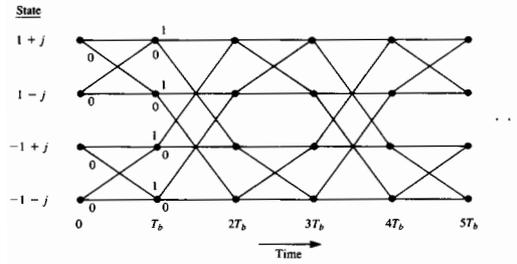


Bild 26.5: Zustands-Diagramm (Trellis) der OQPSK

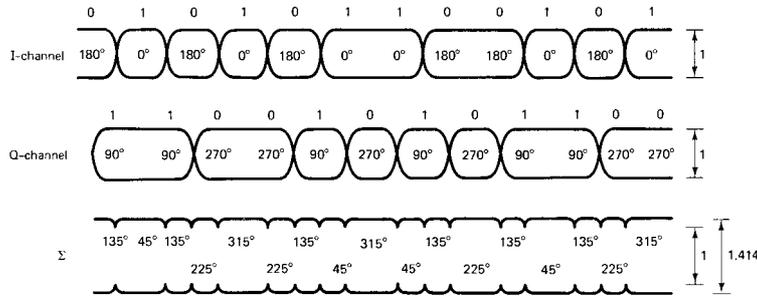


Bild 26.6: Hüllkurven-Schwankungen der OQPSK und Phase der Trägerschwingung

Aus den Bildern 26.3 und 26.6 geht hervor, daß die Symbol-Verrundung (in den Anfänger der Digitalen Übertragung) noch nicht optimal erfolgte. Vielmehr wurde eine Symbol-Verrundung nur als „notwendiges Übel“ angesehen. Dies drückt sich auch in den in der Literatur angegebenen Leistungs-Dichte-Spektren für QPSK und OQPSK aus, die dort in der Form  $10 \log_{10} \left( \frac{\sin(x)}{x} \right)^2$  in dB angegeben werden, die zu unverrundeten Symbolen gehört, vergleiche Bild 26.11 (Seite 129).

- Übertragungstechnisch ist die OQPSK ebenfalls eine Quadratur-DSB (QDSB), so daß die spektralen Eigenschaften mit der QPSK übereinstimmen, gleiche Symbol-Verrundung vorausgesetzt.

## 26.2 Von der OQPSK zur MSK

### 26.2.1 Vektordiagramme von QPSK, OQPSK & MSK

Verglichen mit QPSK hat OQPSK eine sehr viel geringere Schwankung der Amplitude. Es gibt jedoch auch Anwendungen, bei denen überhaupt keine Schwankung der Amplitude zulässig ist. Das Vektor-Diagramm ist dann ein exakter Kreis, wie z.B. bei Minimum Shift Keying (MSK).

Eine solche Anwendung ist der Digitale Mobilfunk (GSM: *global system for mobile communication*), worauf noch an anderer Stelle im Einzelnen näher eingegangen wird. Die hierbei verwendete Modulation (GMSK: *Gaussian minimum shift keying*) mit konstanter Amplitude (oder Einhüllender) kann ohne Verzerrungen in einem Senderverstärker verarbeitet werden, der im Klasse C Betrieb arbeitet. Dies bedeutet, daß die **Sender-Endstufe** im Schalt-Betrieb arbeiten kann und daher einen **hohen Wirkungsgrad** aufweist. Ein solches Feature ist gerade im mobilen Betrieb von sehr großer Wichtigkeit, weil dadurch der Stromverbrauch sinkt und deshalb die Standzeit des Accus erhöht wird und man andererseits zusätzlich mit kleineren Bauformen der Accus auskommt, wodurch die Handys klein und leicht werden.

Es ist dies ein Beispiel dafür, wie die Anwendung (*application layer* im ISO-OSI Modell) unmittelbar durch die physikalische Schicht (*physical layer*) beeinflusst ist.

Die schematischen Vektordiagramme von QPSK, OQPSK<sup>26.3</sup> und MSK zeigt Bild 26.7.

<sup>26.3</sup>Vergleiche Bild 24.6 (Seite 112) für die tatsächliche Form der Vektor-Diagramme.

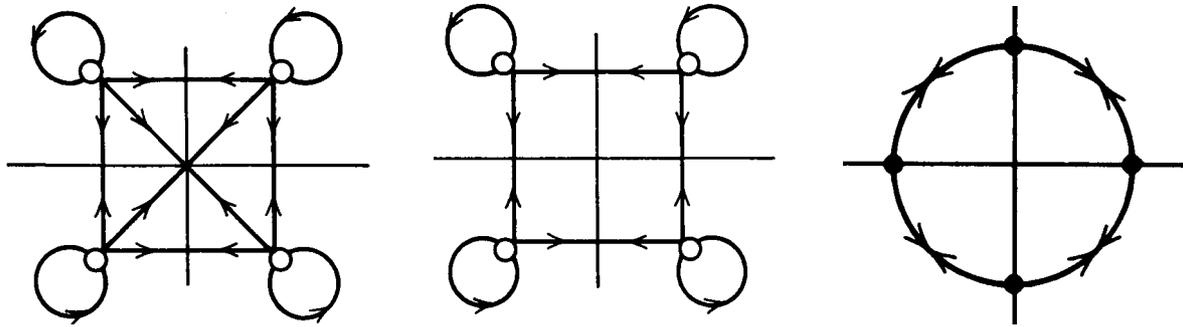


Bild 26.7: Typische Vektor-Diagramme für QPSK, OQPSK (schematisch) und MSK

**26.2.2 MSK als OQPSK mit Datensymbolen in Form von Cos-Kuppen**

Der Ausgangspunkt für die MSK ist die (unverrundete) OQPSK. Im Unterschied zur OQPSK werden die I & Q Symbole bei der MSK vor der Modulation Cos-förmig verrundet.<sup>26.4</sup> Damit wird aus jedem Bit ein Symbol in der Form einer Cos-Kuppe, Bild 26.8.

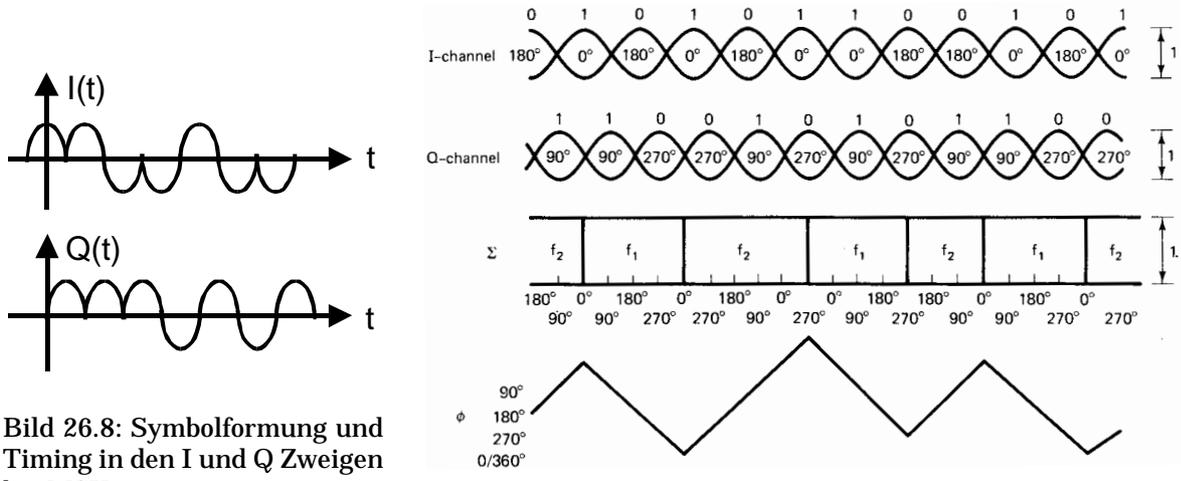


Bild 26.8: Symbolformung und Timing in den I und Q Zweigen bei MSK

Bild 26.9: Hüllkurven-Schwankungen der MSK, Phase der Trägerschwingung und Verlauf der Phase  $\Phi$

Durch den Offset (*Delay*) der Cos-Kuppen zwischen dem I Zweig und dem Q Zweig (um eine halbe Symbol-Dauer  $T_S/2 = T_b$ ) einerseits, und der  $0^\circ$  bzw.  $90^\circ$  Drehung bei der Modulation (mit einem Cos- bzw. Sin-Träger) andererseits, erreicht man genau die **Parameterdarstellung eines Kreises**, siehe das Vektor-Diagramm, Bild 26.7 (rechts). Damit ist sofort einsichtig, daß die **Hüllkurve der MSK konstant** ist, denn es gilt allgemein:

$$\sqrt{\cos(x)^2 + \sin(x)^2} = 1 \tag{26.1}$$

Dies zeigt auch Bild 26.9, bei dem die Symbole im I und Q Zweig und die resultierende Hüllkurve der Trägerschwingung dargestellt sind.

Die Information der MSK steckt also nicht in der Amplitude, sondern im **Winkel  $\Phi$**  der modulierten Schwingung. MSK ist daher eine **Winkel-Modulation** und kann deshalb mittels eines Klasse „C“ Verstärkers (mit hohem Wirkungsgrad) verstärkt werden, ohne dadurch eine Verzerrung zu erleiden.

Wie die vorausgegangene Überlegung aber zeigt, kann die **MSK als lineare Modulation mit Cos-förmig verrundeten Symbolen** aufgefaßt werden und demzufolge der MSK-Modulator auch so realisiert werden, Bild 26.10. Die Symbol-Formung erfolgt im Digitalen Interpolations-Filter.

Bei der Demodulation im Empfänger werden der I und der Q Zweig getrennt demoduliert. Als optimaler

<sup>26.4</sup>Vergl. hierzu „Basisband-Systeme“ Kapitel 1

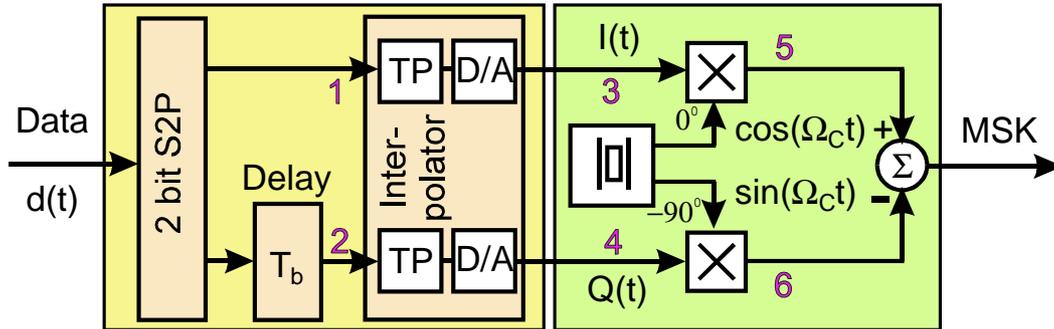


Bild 26.10: Der MSK Modulator als linearer OQPSK Modulator mit Cos-förmigen Symbolen; Symbol-Verrundung im Interpolator

Empfänger kann dafür jeweils ein Korrelator<sup>26.5</sup> eingesetzt werden. Damit kann in dem Spezialfall der MSK auch die Demodulation (und ggf. die Entzerrung) wie bei linearen Digitalen Modulationen erfolgen.

Da die Symbole zeitlich begrenzt sind, ist das Spektrum der MSK nicht bandbegrenzt. Es hat die Form, die von der Zeitfunktion „Cos Kuppe“ her bekannt ist. Es nimmt für größeren Abstand von der Mittenfrequenz gemäß  $1/\omega^2$  ab, also (betragsmäßig) mit 40 dB pro Dekade, Bild 26.11.

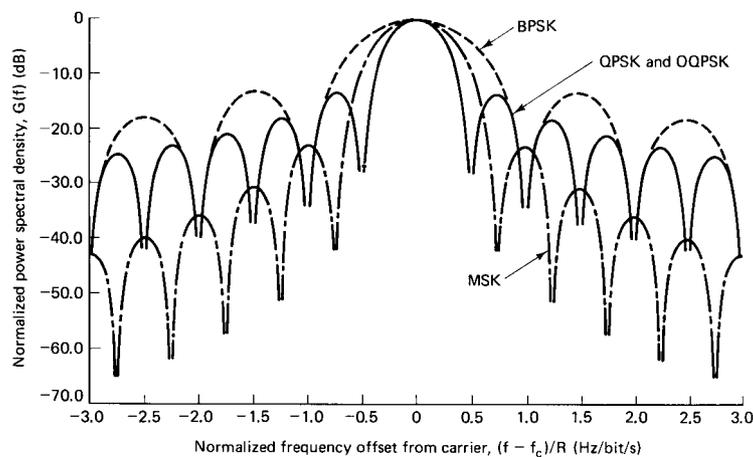


Bild 26.11: Spektrale Leistungs-Dichte von MSK im Vergleich zu QPSK/OQPSK (unverrundete Symbole) und BPSK (unverrundet, gleiche Datenrate)

### 26.2.3 MSK als Frequenz-Modulation

Die MSK kann aber auch als (echte) **Frequenzmodulation** mit **unverrundeten Datensymbolen** aufgefaßt werden. Hierzu betrachtet man die Zeigerdarstellung der FM, Bild 26.12.

Man erkennt dann sofort aus der Zeigerdarstellung, daß für eine Phasendrehung von

$$\Delta\Phi = \pi/2 \quad \text{bzw. allgemein} \quad \Delta\Phi = n\pi/2 \quad ; \quad n = 1, 2, \dots \quad (26.2)$$

$I(t) = \Phi_I(t)$  bzw.  $Q(t) = \Phi_Q(t)$  **Cos-** bzw. **Sin-Kuppen** darstellen, wenn sich  $\phi$  **linear mit der Zeit  $t$**  ändert.

$$I(t) = \Phi_I(t) = A \cos[\phi(t)]; \quad Q(t) = \Phi_Q(t) = A \sin[\phi(t)] \quad (26.3)$$

Die Phase  $\phi$  der modulierten Schwingung ändert sich dabei pro Bitdauer  $T_b$  des ursprünglichen Datenstroms um  $\pm\pi/2$ , je nach Vorzeichen des Bits.  $\pi$  ist der Phasenwinkel zwischen dem Beginn und dem Ende der Cos-Kuppe:  $\cos(0) = \cos(\pi) = 0$ . Dies entspricht der Dauer von 2 Bits ( $T_S = 2T_b$ ), da die Symbolströme in den I & Q Zweigen die halbe Geschwindigkeit des Datenstroms haben.

<sup>26.5</sup>Vergl. das Kapitel 16.3.1 „Korrelations-Empfänger“.

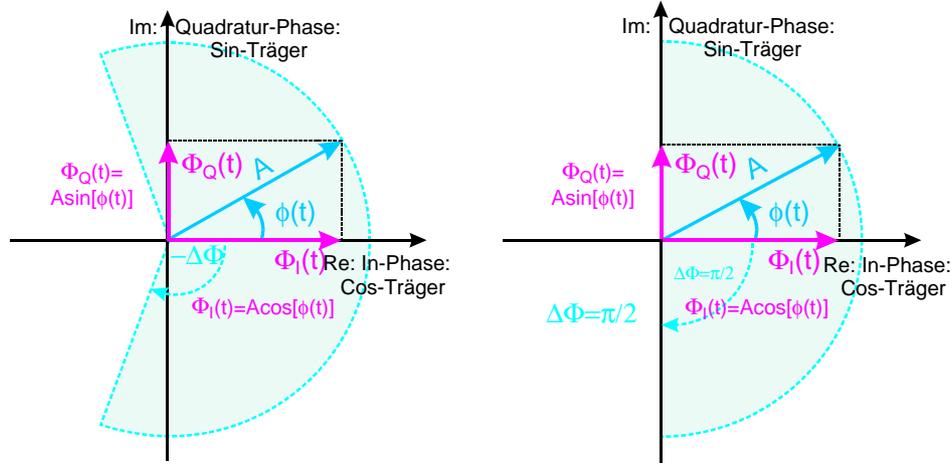


Bild 26.12: Pendelzeiger der FM und Zerlegung in I & Q Komponenten; links: allgemein; rechts:  $\Delta\Phi = \pi/2$

- Logisch "1" entspricht damit  $\Delta\Phi = \pi/2$ , logisch "0" entspricht  $\Delta\Phi = -\pi/2$ .

Damit steckt die digitale Information in der **Drehrichtung der Phase**  $\phi(t)$  des HF Trägers, Bild 26.13.

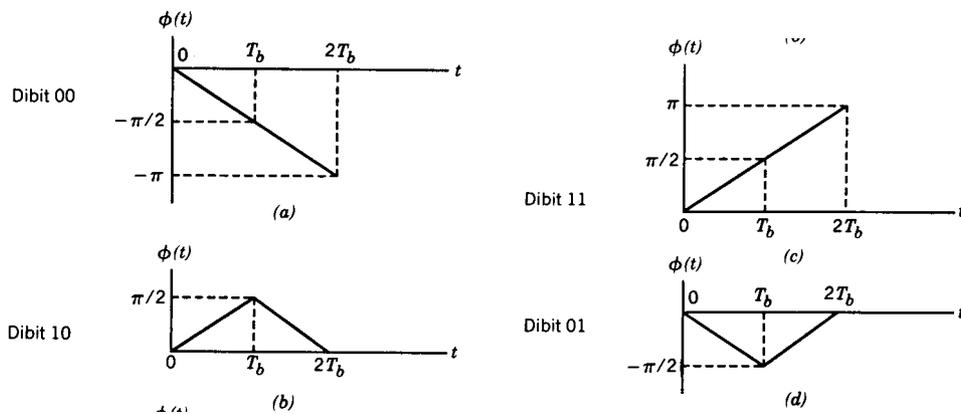


Bild 26.13: MSK: Phasenänderung der Trägerschwingung pro übertragenem Bit bzw. Dibit (Bitdauer:  $T_b$ )

Aus Bild 26.13 ist erkennbar, daß (im Unterschied zu QPSK mit unverrundeten Datensymbolen, Bild 25.10, Seite 119) bei der MSK (betrachtet als Frequenzmodulation mit unverrundeten Datensymbolen) **keine Phasen-Sprünge** auftreten. Modulationen dieser Art werden daher auch als **Continuous Phase Modulationen** (CPM) benannt. Für die Datenübertragung interessieren die an der Symbol-Grenze (bzw. an der Bit-Grenze) erreichten Werte der Phase. Dies entspricht der Energie des Symbols.

Gemäß Bild 26.13 ist der Phasen-Verlauf  $\phi(t)$  proportional zum Integral (mit laufender oberer Grenze) über die Zeitfunktion der Daten  $d(t)$  (als bipolares Signal). Das bedeutet, daß die (momentane) Frequenz-Änderung  $\varpi(t)$  proportional zum Zeitverlauf der Daten ist, wie Bild 26.14 das zeigt.

Bild 26.15 zeigt den Zusammenhang zwischen der momentanen Phase  $\phi(t)$  und der komplexen Einhüllenden  $\Re\{s_{MSK}\}, \Im\{s_{MSK}\}$  (Vergl. Bild 26.8, Seite 128).

Aus Bild 26.14 geht eindeutig hervor, daß es sich bei einer Digitalen Winkel-Modulation um eine **Frequenz-Modulation** (FM) handelt, denn der Zeitverlauf des Datensignals ist proportional zur Frequenz-Änderung des modulierten Signals. In der Literatur werden diese Digitalen Modulationen üblicherweise jedoch als „Digital Phase Modulation“ bezeichnet. Dies wird verständlich, wenn man bedenkt, daß die digitalen Symbole (entsprechend zur Matched Filterung bzw. Korrelation) integriert werden (mit laufender oberer Grenze). Die Integration der Frequenz-Änderung führt aber auf eine Phasen-Änderung.

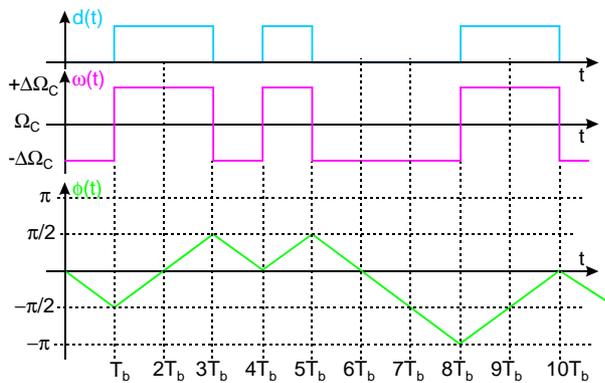


Bild 26.14: Bei MSK ist die Frequenz-Änderung proportional zum Daten-Signal. MSK ist daher übertragungstechnisch eine FM. Die Phase ändert sich um  $\pm\pi/2$  an der Bit-Grenze.

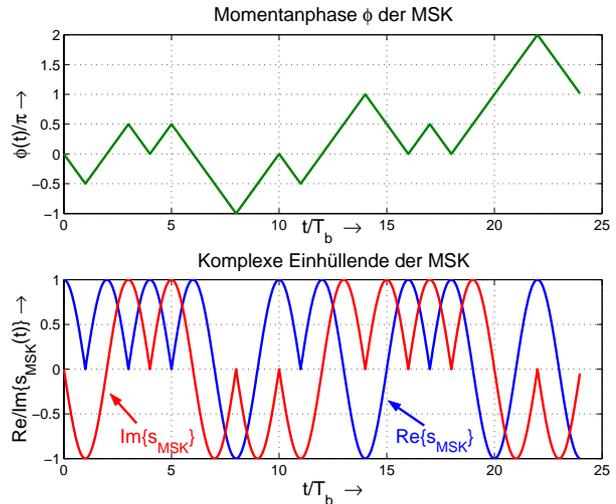


Bild 26.15: Phase und komplexe Einhüllende der MSK

**26.2.4 Vektor-Diagramm der MSK**

Wie aus Kapitel 24.3.2 „Vektor-Diagramm“ (Seite 112) hervorgeht, ist das Vektor-Diagramm identisch mit der Y über X Darstellung von  $Q(t)$  über  $I(t)$  und stellt damit die **Komplexe Einhüllende** der Modulation dar. Bild 26.16 zeigt das Vektor-Diagramm der MSK in 3D Ansicht mit den gleichen Daten wie in Bild 26.15. Man erkennt, daß der Verlauf aus exakten Kreis-Bögen besteht. (Vergl. Bild 26.7 rechts)

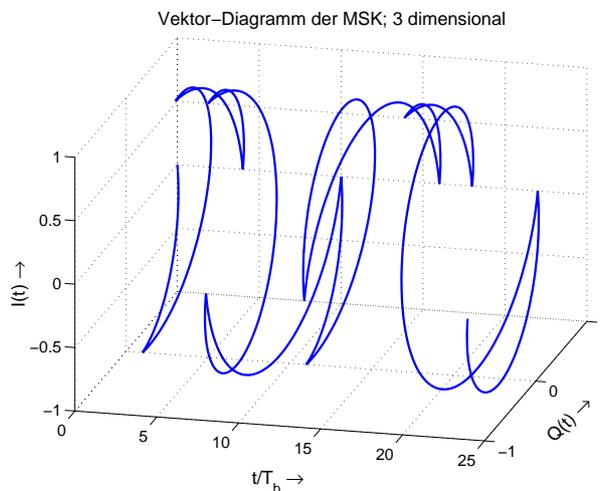


Bild 26.16: Vektor-Diagramm der MSK in 3D Darstellung

**26.2.5 Frequenz-Hub und Modulations-Index der MSK**

Die Momentan-Frequenz  $\varpi(t)$  einer FM ist die Ableitung der Phase  $\phi(t)$  nach der Zeit  $t$ .

$$\varpi(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \tag{26.4}$$

Da an der Bit-Grenze der Wert  $\Delta\Phi = \pi/2$  erreicht wird, läßt sich daraus die Größe des Frequenz-Hubes  $\Delta\Omega = 2\pi\Delta F$  berechnen.

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\pi/2}{T_b} = \frac{\pi}{2T_b} = \frac{\pi}{T_S} \rightsquigarrow \boxed{\Delta F = \frac{1}{4T_b} = \frac{1}{2T_S}} \quad (26.5)$$

Mit der „Bit-Frequenz“  $f_b = 1/(2T_b)$  wird

$$\boxed{\Delta F = f_b/2 \quad \text{Frequenz-Hub der MSK}} \quad (26.6)$$

Der Frequenz-Hub  $\Delta F$  ist bei MSK somit stets gleich der haben „Bit-Frequenz“. Der Modulations-Index<sup>26.6</sup> wird im digitalen Fall mit  $m$  bezeichnet und definiert als

$$\boxed{m = 2\Delta F \cdot T_b = \frac{\Delta F}{f_b}} \rightsquigarrow \boxed{m = \frac{1}{2} \quad \text{Modulations-Index der MSK}} \quad (26.7)$$

Mit Gleichung (26.6) folgt unmittelbar, daß der Modulations-Index (Phasenhub)  $m$  bei MSK immer den Wert  $m = 1/2$  hat.

### 26.2.6 MSK Modulator-Struktur (Winkel-Modulation)

Obwohl MSK übertragungstechnisch eine FM ist, sind übliche (analoge) FM Modulatoren hierfür ungeeignet. Diese haben eine untere Grenzfrequenz  $\omega_u \neq 0$  für das Nachrichtensignal, was (im Modulator) auf zeitabhängige Potential-Verschiebungen für das Nachrichten-Signal führen würde. Zusätzlich hat die dabei übliche direkte Beeinflussung der Frequenz zur Folge, daß sich die Trägerfrequenz  $\Omega_C$  in einem analogen FM Modulator nicht absolut konstant halten läßt, wodurch weitere Potential-Verschiebungen des demodulierten Signals entstehen.<sup>26.7</sup>

Als Modulator für digitale Signale kommt daher nur ein Verfahren in Frage, das

- eine Quarz stabile Trägerfrequenz  $\Omega_C$  und
- eine untere Grenzfrequenz  $\omega_u = 0$  für das Nachrichtensignal gewährleistet.

Aus Bild 11.7 (Seite 40) und Bild 23.3 (Seite 107) ist erkennbar, wie dies erreicht werden kann. In der Struktur Bild 23.3 kann jedoch der  $A(t)$  Zweig und der Multiplizierer entfallen, da MSK eine **konstante Amplitude** hat. Somit ergibt sich eine Blockstruktur gemäß Bild 26.17.

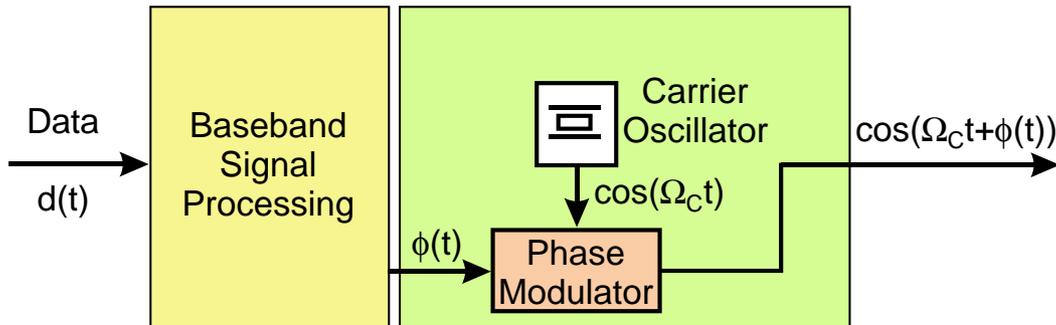


Bild 26.17: Blockschaltbild eines Winkel-Modulators für MSK (bzw. allgemein CPM)

### 26.2.7 Phasen-Modulator mit I/Q Vorverzerrung

Einen ersten Weg zur Realisierung des Phasen-Modulators liefert die Auswertung von Gleichung (26.2.3) und das Pendelzeiger-Diagramm der FM, Bild 26.12 (Seite 130).

Mit Gleichung (26.2.3) gilt mit  $\hat{U}_C = A$ :

$$u_C(t) = A\{\cos \phi(t) \cdot \cos(\Omega_C t) - \sin \phi(t) \cdot \sin(\Omega_C t)\} = \Phi_I(t) \cdot \cos(\Omega_C t) - \Phi_Q(t) \cdot \sin(\Omega_C t) \quad (26.8)$$

<sup>26.6</sup>Bei der analogen Frequenz-Modulation mit Cos-förmigem Nachrichtensignal der Frequenz  $f_N$  ist der Modulations-Index definiert als  $\beta = \Delta\Phi = \frac{\Delta F}{f_N}$  und damit formal gleich wie im digitalen Fall.  $\beta$  kann jedoch beliebige Werte annehmen.

<sup>26.7</sup>Diese Effekte spielen bei einer analogen Audio-Übertragung (z.B. im UKW Rundfunk) praktisch keine Rolle.

Danach ist der Winkel  $\phi(t)$  eindeutig durch die I Komponente  $\Phi_I(t) = A \cos(\phi)$  und die Q Komponente  $\Phi_Q(t) = A \sin(\phi)$  definiert.

$$\phi(t) = \arctan\left(\frac{\Phi_Q(t)}{\Phi_I(t)}\right) \tag{26.9}$$

Damit erhält man folgende Struktur für den Phasenmodulator, der eine untere Grenzfrequenz  $\omega_u = 0$  für das Eingangssignal  $\phi(t)$  und eine Quarz stabile Trägerfrequenz  $\Omega_C$  hat, Bild 26.18.

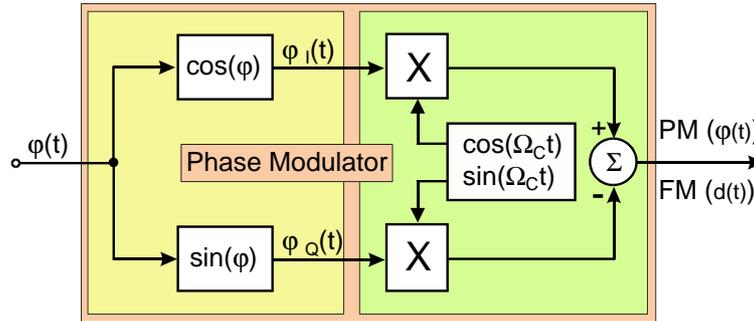


Bild 26.18: Blockschaltbild eines Phasen-Modulators

Die Erzeugung der Signale  $\Phi_I = A \cos(\phi)$  und  $\Phi_Q = A \sin(\phi)$  erfolgt mit Hilfe Digitaler Signalverarbeitung. Jedoch wird das Phasensignal  $\phi(t)$ , das als Eingangssignal für den Phasen-Modulator (Bild 26.18) bestimmt ist, in der Praxis nicht realisiert.

Dies hat einen ganz einfachen Grund. Hat das Datensignal nämlich eine längere „0“ oder „1“ Folge, kann dadurch der Betrag des Phasenwinkel-Signals  $|\phi|$  so weit ansteigen, daß der Eingang des Phasen-Modulators übersteuert werden kann, wodurch die Digitale Übertragung versagen würde. Man muß hier durch Codierverfahren (z.B. Scrambeln, Interleaven usw.) dafür sorgen, daß nie eine „0“ oder „1“ Folge mit unzulässiger Länge entsteht, bzw. die laufende digitale Summe einen unzulässig großen Wert annimmt. Es ist zu beachten, daß im Empfänger beim Demodulator ähnliche Probleme entstehen können, weshalb bei der Planung und Definition eines Übertragungssystems in jedem Fall darauf zu achten ist, daß die laufende digitale Summe einen definierten Maximalwert nicht übersteigt.

Digitale Modulationen werden im Basisband kartesisch als  $I(t), Q(t)$  realisiert und dann werden daraus die Phasensignale  $\Phi_I(t), \Phi_Q(t)$  direkt berechnet, Bild 26.19.

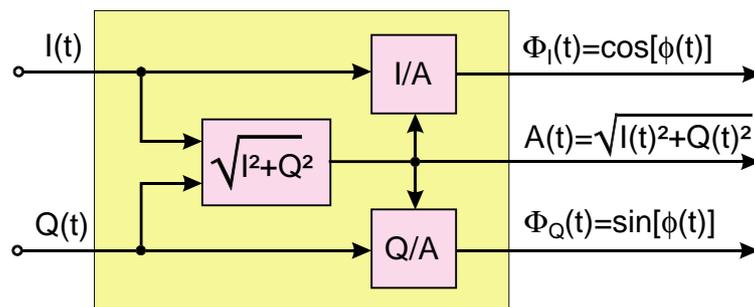


Bild 26.19: Gewinnung der Phasen-Signale  $\Phi_I(t), \Phi_Q(t)$  (und des Amplituden-Signals  $A(t)$ ) aus  $I(t)$  und  $Q(t)$

Es folgt aus Gleichung (24.6) und Bild 24.1 (Seite 108) bzw. aus Bild 26.12 (Seite 130):

$$\begin{aligned} \Phi_I(t) = \cos[\phi(t)] &= \frac{I(t)}{A(t)} \\ \Phi_Q(t) = \sin[\phi(t)] &= \frac{Q(t)}{A(t)} \\ A(t) &= \sqrt{I(t)^2 + Q(t)^2} \end{aligned} \tag{26.10}$$

Im Falle der MSK (bzw. CPM) ergibt sich  $|A(t)| = 1$ . Der Ausgang für  $A(t)$  in Bild 26.19 wird dann nicht benötigt.

### 26.2.8 Phasen-Modulator mit numerisch gesteuertem Oszillator NCO

Phasen- und Frequenz-Modulation lässt sich auch mit Hilfe eines NCO (*Numerically Controlled Oscillator*) erzeugen, Bild 26.20.

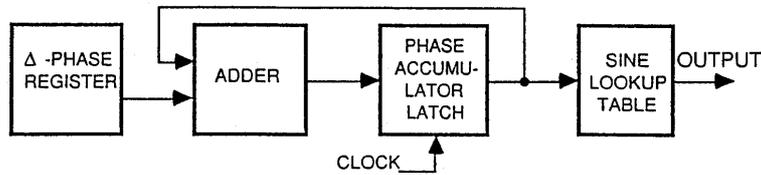


Bild 26.20: Blockschaltbild eines NCO

Herzstück eines NCO ist eine **Look-Up Tabelle** (EPROM), in der die Stützwerte einer (Sin- bzw.) Cos-Schwingung mit sehr großer Genauigkeit und in ausreichender Anzahl (z.B. mit  $2^{13}$  Stützstellen für  $1/4$  Periode und damit vielfach überabgetastet) abgelegt sind. Im Phasenaccumulator werden die Adressen für die Ansteuerung der Look-Up Tabelle berechnet. Für eine gewünschte Frequenz muß im Phasenaccumulator eine entsprechende Schrittweite eingestellt werden. Je größer die Schrittweite ist, um so höher wird die Frequenz der ausgelesenen Cos-Schwingung. Über das  $\Delta$ -Phasen Register läßt sich die Schrittweite einstellen und damit auch die Phase bzw. die Frequenz modulieren.

Der Vorteil eines NCO besteht nun darin, daß er für diese Anwendung nicht in seiner Phase moduliert zu werden braucht, sondern es ist tatsächlich nur seine **Frequenz** entsprechend zu den Daten-Symbolen zu modulieren. Dies resultiert daraus, daß sich die Phase als Integral über die Frequenz ergibt. Beispielsweise ergibt sich eine beständig ansteigende Phase aus einer konstanten positiven Frequenz-Ablage. Damit ist der NCO „übersteuerungsfest“ gegenüber einer beliebig ansteigenden (oder fallenden) Phase. Bild 26.21 zeigt das Blockschaltbild des NCO AD 7008, der bis zur Trägerfrequenz  $F_C = 20$  MHz I/Q modulierbar ist.

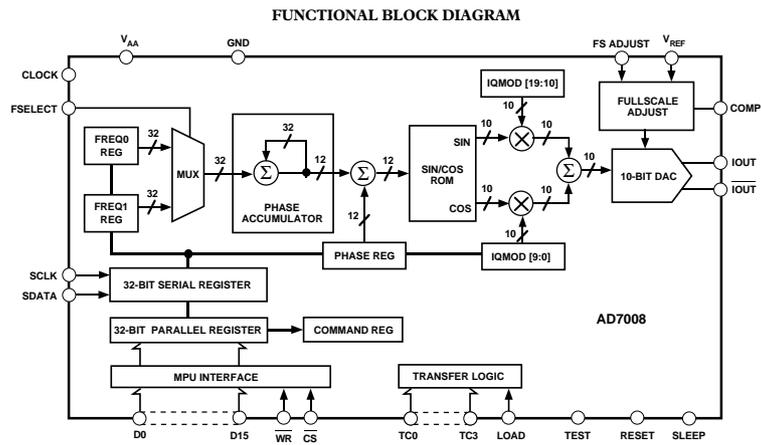


Bild 26.21: Blockschaltbild des NCO AD7008

NCOs sind als ICs in vielfältiger Ausführung für einen breiten Frequenzbereich verfügbar.<sup>26.8</sup>

### 26.3 CPM-Verfahren mit verrundeten Daten-Symbolen

Die Außerband-Strahlung, die bei MSK noch beachtlich ist, Bild 26.11 (Seite 129), läßt sich verringern, wenn die Datensymbole verrundet werden bevor sie dem Frequenz-Modulator zugeführt werden.

Üblich sind hierbei, je nach Anwendung, sowohl die Root-Raised-Cosine Verrundung als auch eine Gauß-Verrundung.

<sup>26.8</sup>Z.B. im Handy für die Frequenz-Einstellung und die Modulation (senderseitig) und den Umsetz-Oszillator (empfangsseitig).

26.3.1 GMSK-Verfahren

Werden die (bipolaren) Datenbits  $d(t)$  mittels eines Gauß-Filters verrundet, kommt man zu Gaussian Minimum Shift Keying (GMSK). Diese Modulationsart wird beim Mobilfunk angewendet, z.B. bei GSM (*Global System for Mobile Communication*) oder bei DECT (*Digital European Cordless Telecommunication*). Das Blockschaltbild eines GMSK-Modulators zeigt Bild 26.22.

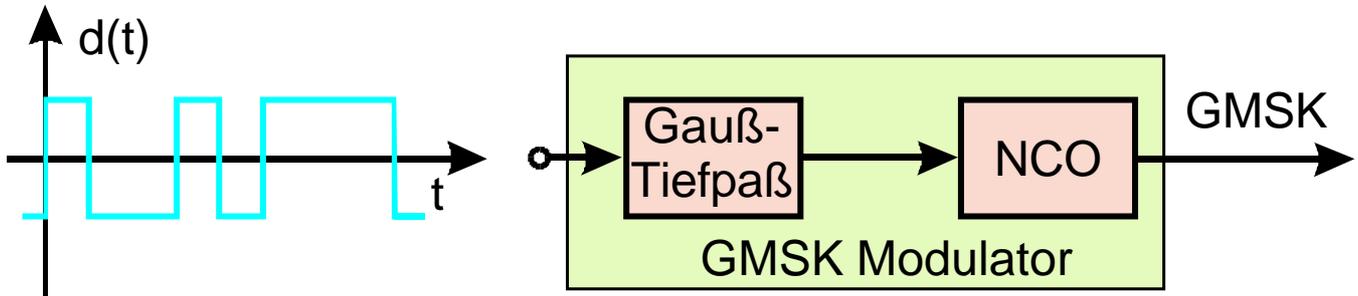


Bild 26.22: Blockschaltbild eines GMSK-Modulators

Ein Gauß-Tiefpaß hat eine Gauß-förmige Impulsantwort, die in Bild 26.23 (oben) für den Fall  $T_b \cdot f_{3dB} = 0.3$  (GMSK) dargestellt ist.<sup>26.9</sup> Im gleichen Bild ist unten das Augendiagramm der Gauß-verrundeten (bipolaren) Daten dargestellt. Genügt die Berücksichtigung von 3 Bits (Vorläufer, aktuelles Bit, Nachläufer), besteht das Augendiagramm aus  $2^3 = 8$  verschiedenen Kurven.

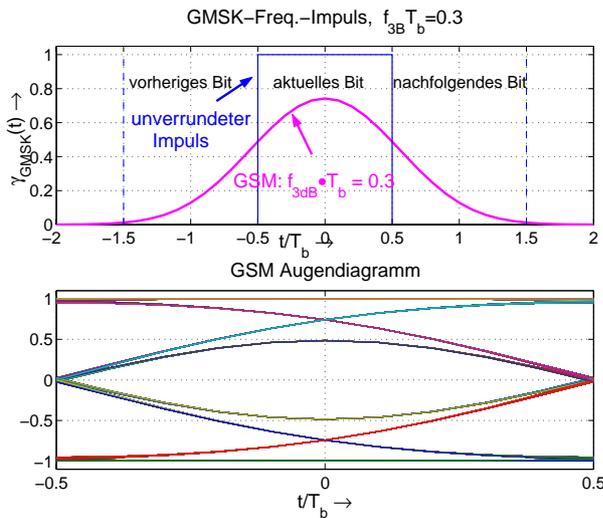


Bild 26.23: Impulsantwort des Gauß-Filters und Augen-Diagramm der Gauß-verrundeten (bipolaren) Daten für GSM

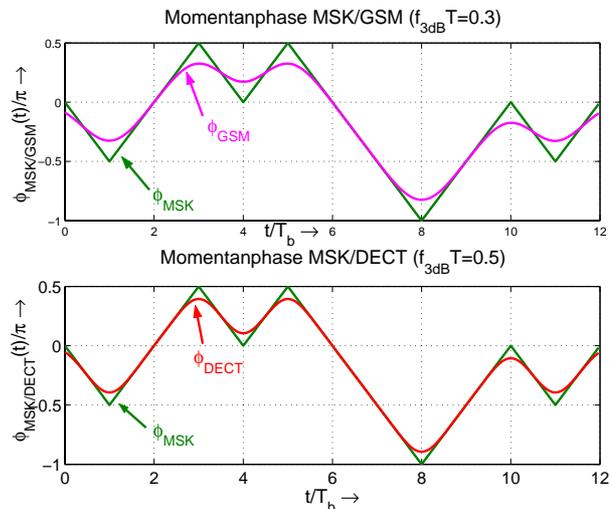


Bild 26.24: Verlauf der Momentanphase  $\phi(t)$  für MSK, GSM & DECT

Durch die Gauß-Verrundung der Daten wird die Außerband-Strahlung verringert. Bild 26.25 stellt dies anhand von Messungen der Spektren von verschieden stark verrundeten CPM-Signalen dar.

Der Vergleich der Bandbreite von QPSK mit MSK bzw. CPM, gemessen zwischen Mittenfrequenz und der ersten Nullstelle im Spektrum, zeigt, daß die für dieses Hauptmaximum erforderliche Bandbreite für die (exponentiellen) CPM Modulationen deutlich breiter ist als für die (lineare) QPSK Modulation.

<sup>26.9</sup>Siehe Bild 22.6 (Seite 102)

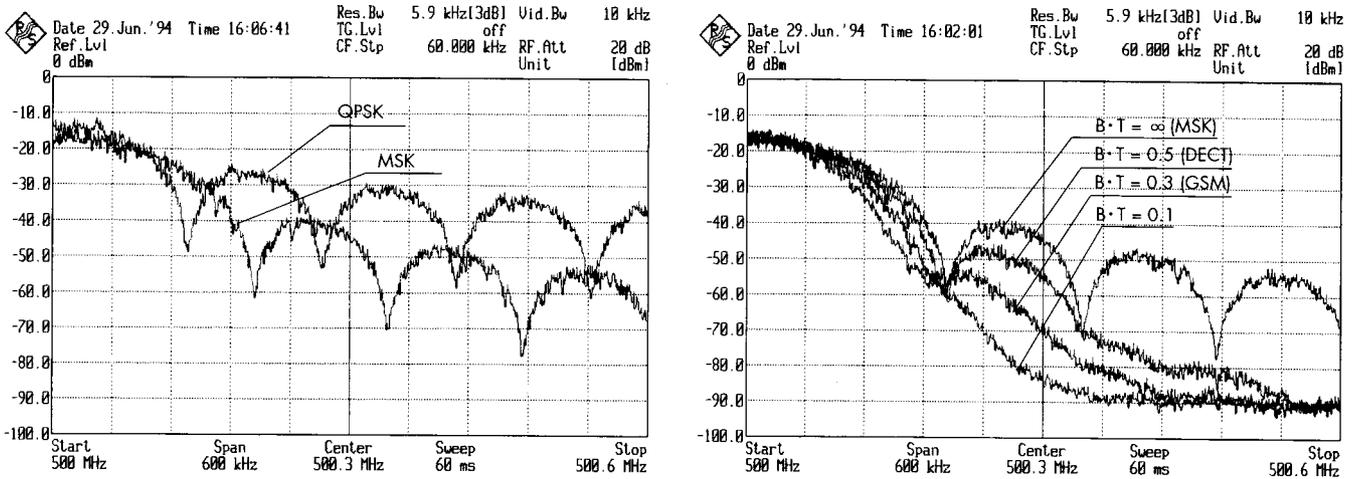


Bild 26.25: Gemessene Spektren von CPM Signalen und Vergleich mit den Spektren von QPSK und MSK Signalen (alle mit Pseudo-Random-Daten moduliert)

## 27 Modulations-Verfahren mit Pre-Codierung

### 27.1 Verfahren zur Vermeidung von Phasenfehlern bei der Demodulation

Digitale Übertragungssysteme bestehen stets aus einer Kettenschaltung von Einzel-Systemen. Dabei kann es (unabsichtlich) vorkommen, daß die Daten invertiert werden.<sup>27.1</sup> Aus „1“ wird dadurch „0“ und umgekehrt. Durch eine senderseitige differentielle Pre-Codierung in Verbindung mit einer empfängerseitigen differentiellen De-Codierung läßt sich dieses Problem beheben.

Bild 27.1 zeigt das Prinzip der differentiellen Codierung. Auf der Sender-Seite werden die ankommenden Daten in einer Rückkopplungs-Schleife EXOR verknüpft. Die Decodierung auf der Empfangs-Seite erfolgt ebenfalls mit einer EXOR Verknüpfung, jedoch in einer Parallel-Schleife. Die Übertragungs-Strecke ist als Basis-Band System dargestellt.

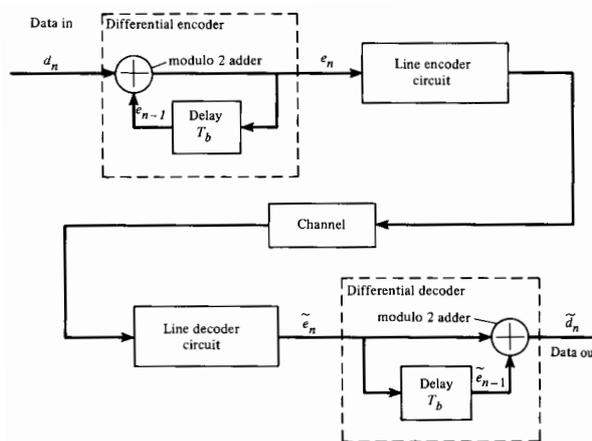


Bild 27.1: Übertragungs-Strecke mit Differentieller Codierung

Die Inversion der Daten kommt u.a. dadurch zustande, daß zur Demodulation ein phasenrichtiger Hilfs-träger aus dem Datenstrom gewonnen werden muß. Die dafür verwendbaren Schaltungen bzw. Verfahren arbeiten im Prinzip mit Hilfe von Frequenz-Vervielfachung, weil dadurch u.a. eine Dauerschwingung auf einer Vielfachen der Frequenz des Hilfsträgers entsteht. Um zur Frequenz des Hilfsträgers selbst zu kommen, ist

<sup>27.1</sup>Bei der für eine synchrone Demodulation notwendigen Träger-Rückgewinnung im Empfänger (aus dem empfangenen Digitalen Signal) ergeben sich i.a. Mehrdeutigkeiten der Trägerphase.

dann eine Frequenz-Teilung erforderlich. Bei den Frequenz-Teilern ist jedoch nicht vorhersehbar, ob diese mit der „richtigen“ Flanke starten. Tun sie das nicht, stimmt die Phasenlage des Hilfsträgers nicht.

Bei einer Teilung durch 2 ergibt sich somit eine Phasenunsicherheit von  $360^0/2 = 180^0$ . Bei einer notwendigen Teilung durch  $N$  für höherstufige Modulationsverfahren kann somit eine Phase mit Vielfachen von  $360^0/N$  entstehen, womit die empfängerseitige Zuordnung von Symbolen zu Bits auf vielfältige Weise falsch werden kann. Differentielle Codierung wird in praktischen Systemen häufig angewendet.

### 27.2 Verfahren zur Vermeidung von Nulldurchgängen im Vektor-Diagramm

Modulationen mit konstanter Einhüllender wie die CPM Verfahren können mit Hilfe von Klasse C Schalt-Verstärkern mit großem Wirkungsgrad verstärkt werden. Nachteilig ist die größere Bandbreite der CPM Modulationen gegenüber linearen Modulationen.

Lineare Modulationen können streng genommen überhaupt nicht mit Schaltverstärkern verstärkt werden, denn sie werden hierbei stark verzerrt, weil dadurch sämtliche Schwankungen der Hüllkurven verschwinden.<sup>27.2</sup> Man benötigt daher lineare Verstärker mit entsprechend schlechtem Wirkungsgrad. Das bedeutet aber, daß dann für mobilen Betrieb (handhelds) entsprechend große und schwere Accus erforderlich werden.

Als Kompromiß werden daher Modulations-Arten verwendet, die im Vektor-Diagramm keine Nulldurchgänge haben. Diese können in der Praxis mit Hilfe von Klasse C Verstärkern verstärkt werden, ohne allzu großen Schaden zu erleiden. Die dabei entstehenden Randaussendungen müssen durch Bandpässe in der Hochfrequenz-Ebene beseitigt werden.

#### 27.2.1 $\pi/4$ Phasen-Differenz-Codierung ( $\pi/4$ DQPSK)

Das Vektor-Diagramm von DQPSK unterscheidet sich nicht von dem von QPSK, denn in beiden Fällen wird keine Vorsorge dafür getroffen, daß Nulldurchgänge vermieden werden (im Unterschied zu OQPSK).

Im Unterschied dazu werden bei der  $\pi/4$  DQPSK die Nulldurchgänge (im Vektor-Diagramm) dadurch vermieden, daß zwischen die ursprünglichen (quadratisch angeordneten) Symbol-Punkte  $\bullet$  des Phasensterns 4 weitere Punkte  $\circ$  eingefügt werden, so daß (oberflächlich betrachtet) ein Phasen-Stern wie von einer 8PSK entsteht, wobei dann der Winkelabstand benachbarter Punkte zu  $2\pi/8 = \pi/4$  wird.

Die Codier-Vorschrift lautet damit:

- Ist der aktuelle Symbol-Punkt  $d(2i + 1)$  ein  $\bullet$ , muß der nächste ein (beliebiger)  $\circ$  sein.
- Ist der aktuelle Symbol-Punkt  $d(2i)$  ein  $\circ$ , muß der nächste ein (beliebiger)  $\bullet$  sein.

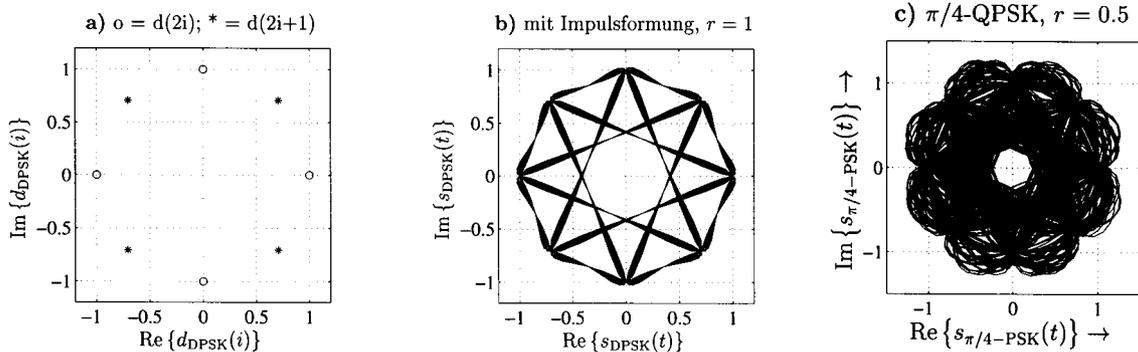


Bild 27.2: Symbol-Punkte und Vektor-Diagramme von  $\pi/4$  DQPSK mit Roll-Off  $\rho = [1, 0.5]$  und Raised Cosine Verrundung

Mit dieser Codier-Vorschrift werden Nulldurchgänge vermieden und es entsteht ein „Loch“ im Vektor-Diagramm, Bild 27.2. Für kleinere Werte des Roll-Off-Faktors  $\rho = r$  nimmt auch der Durchmesser des Loches ab.

<sup>27.2</sup>Alternativ kann die EER-Technik (EER: *Envelope Elimination and Restoration*) Anwendung finden.

Die Soll-Punkte bei  $\pi/4$  DQPSK liegen augenscheinlich dichter beisammen als bei DQPSK oder OQPSK. Allerdings bedeutet das in diesem Fall nicht automatisch eine größere Fehlerhäufigkeit. Dies ist daraus zu verstehen, daß infolge der Codiervorschrift, von einem Startpunkt  $\bullet$  nur ein Endpunkt  $\circ$  erreicht werden kann. Entscheidet der Empfänger infolge einer Störung trotzdem auf  $\bullet$ , so ist unmittelbar einsichtig, daß dies fehlerhaft sein muß. Damit hat der Empfänger die Möglichkeit, derartige Fehler zu erkennen und ggf. zu korrigieren.

### 27.2.2 EDGE

Die mit EDGE (*Enhanced Data Rates for GSM and TDMA/136 Evolution*) bezeichnete Modulation wurde vorgeschlagen, weil hiermit eine Möglichkeit eröffnet werden soll, die Datenrate gegenüber GSM wesentlich zu erhöhen.

Edge ist eine Modifikation der 8PSK. Zwischen die 8 Punkte  $\bullet$  der 8PSK werden 8 weitere Punkte  $\circ$  eingefügt, so daß insgesamt 16 Punkte entstehen. Die Codiervorschrift lautet:

- Ist der aktuelle Symbol-Punkt  $d(2i + 1)$  ein  $\bullet$ , muß der nächste ein  $\circ$  sein, der dadurch gewonnen wird, daß um den Winkel  $3\pi/8$  weiter gedreht wird als es dem entsprechenden  $\bullet$  bei einer 8PSK entspricht.
- Ist der aktuelle Symbol-Punkt  $d(2i)$  ein  $\circ$ , muß der nächste ein  $\bullet$  sein, der dadurch gewonnen wird, daß um den Winkel  $3\pi/8$  weiter gedreht wird als es dem entsprechenden  $\circ$  bei einer 8PSK entspricht

Das Vektor-Diagramm von Edge erhält dadurch ein Loch, Bild 27.3:

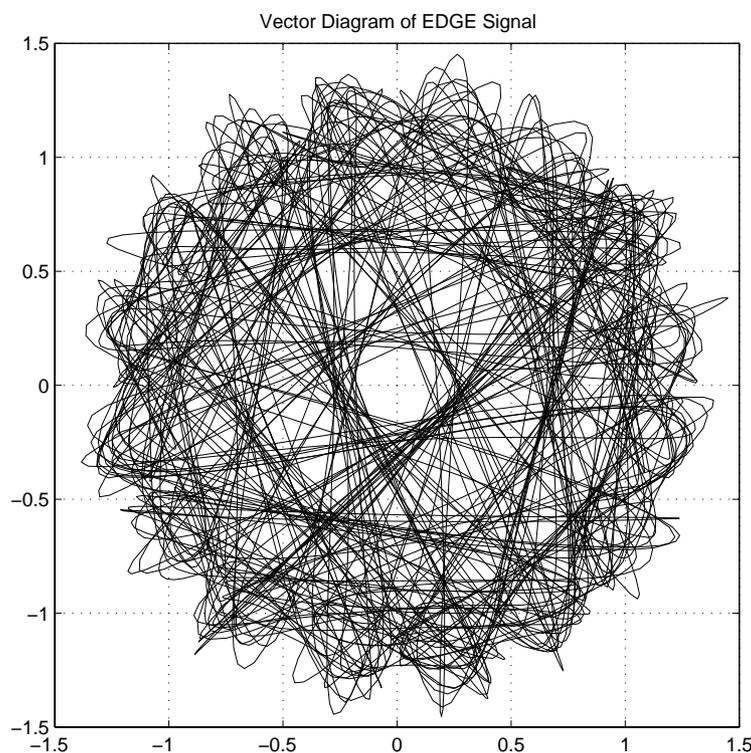


Bild 27.3: Vektor-Diagramm von EDGE (Root-Raised-Cosine,  $\rho = 0.6$ )

EDGE und  $\pi/4$  DQPSK sind Beispiele für codierte Modulationen.

## Digitale Demodulations-Verfahren

Es gibt nur wenige Lehrbücher, die auf die Problemstellungen des digitalen Empfängers eingehen. Besonders hervorzuheben sind hier [34] & [33]. In das vorliegende Skript sind einige Ansätze daraus eingeflossen.

### 28 Aufgaben der digitalen Demodulation

Bei einer **digitalen Übertragung** müssen im Empfänger die ausgesendeten Symbole wieder **erkannt** und ausgewertet werden. Dies ist eine aufwändige Prozedur. Die Demodulation digitaler Signale erfolgt daher **in mehreren Stufen**.

1. Umsetzen (transponieren) des modulierten hochfrequenten Signals in eine **Zwischenfrequenz-Lage** (IF *Intermediate Frequency*).
2. Umsetzen aus der IF Lage — oder unter Umgehung des 1. Schrittes: direktes Umsetzen aus der RF Lage (RF *Radio Frequency*, Hochfrequenz) — in die **Basisband-Lage** mittels eines I/Q Demodulators. Hierdurch gewinnt man die I- und Q-Symbole in „Rohform“, d.h. ohne die zugehörigen Takte.
3. Extrahieren der Parameter für den Umsetz-Oszillator (**Frequenz, Phase**) aus dem hochfrequenten Signal.
4. Extrahieren der Parameter für den digitalen Entscheider (**Symbol-Takt, Bit-Takt, Takt-Phase**) aus den I- und Q-Symbolströmen.
5. Extrahieren der Parameter des Übertragungs-Kanals (bzw. Funk-Kanals), insbesondere die **Kanal-Impulsantwort**, die **Dämpfung**, den **Delay-Spread** und den **Doppler-Spread**.
6. **Entzerren** der Roh-Symbole.
7. Erkennen bzw. **Entscheiden** der Symbole.
8. **Demappen** der Symbole zur Gewinnung von Bits.
9. **Multiplexen** der I- und Q-Bitströme zu einem gesamten Bitstrom.  
Damit liegen nun die Bits in „Rohform“ vor. Hier schließen sich dann die Decodierung und Fehler-Erkennung bzw. -Korrektur an.

In der Praxis sind die Aufgaben 3 bis 6 mit dem größten Aufwand verbunden.<sup>28.1</sup> In diesem Kapitel wird jedoch vorausgesetzt, daß der digitale Empfänger bzw. Demodulator diese Informationen „von irgend wo her“ bereits besitzt und daher diesbezüglich ideal demodulieren kann.<sup>28.2</sup> Die sich daraus ergebenden Werte für die Bitfehler-Raten (BER *Bit Error Rate*) sind stets (viel) besser als die tatsächlich erreichbaren Werte.

## 29 Modell des digitalen Demodulators

### 29.1 Prinzipielle Empfänger-Struktur

Digitale (Funk-) Empfänger sind grundsätzlich als Überlagerungs- oder Superheterodyne-Empfänger ausgeführt. Dieses Empfangs-Prinzip wird auch bei analogen Empfängern angewendet. Bild 29.1 zeigt ein typisches Blockschaltbild eines solchen „Supers“ [12].

In diesem Kapitel interessieren davon speziell:

- die Funktionsweise des Demodulators
- der Mischer und der Umsetzoszillator insofern, als Frequenz und Phase der Umsetzfrequenz exakt mit den Werten im digitalen Sender übereinstimmen müssen

<sup>28.1</sup>Die benötigten Parameter werden von dem „Inneren Empfänger“ bereitgestellt. Dieser ist entscheidend für die Qualität der Demodulation.

<sup>28.2</sup>Bei der Simulation digitaler Übertragungs-Systeme ist es leicht möglich, die notwendigen Informationen direkt aus dem Sender zu entnehmen (mittels „Schummel-Leitungen“). Beim Vergleich verschiedener System-Lösungen ist darauf zu achten, um zu einer relevanten Aussage zu kommen.

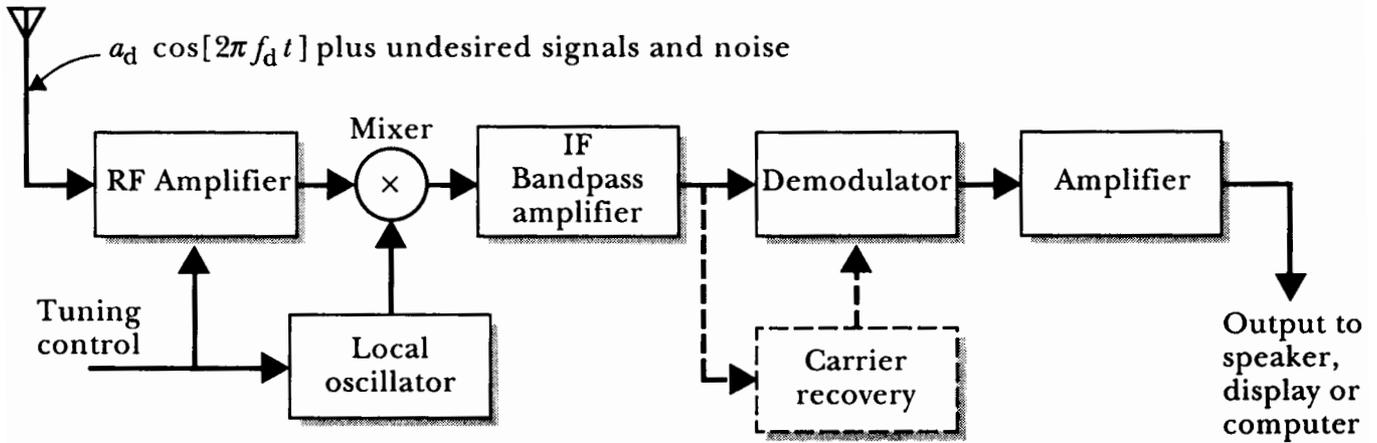


Bild 29.1: Blockschaltbild eines typischen (konventionellen) Superheterodyne-Empfängers („Super“)

Bei den folgenden Blockschaltbildern ist ein Mischer mit Oszillator als Teil des Demodulators dargestellt. Hierbei ist es zweitrangig, ob es sich um eine Demodulation aus der IF Ebene oder aus der RF Ebene handelt.

Wird aus der IF Ebene heraus demoduliert, muß die Träger-Rückgewinnung (*Carrier Recovery*) die Frequenz- und Phasen-Unsicherheiten des Lokal-Oszillators zusätzlich ausgleichen.<sup>29.1</sup> Dieser kann dann z.B. als PLL (*Phase Locked Loop*) realisiert werden, um den Empfänger auf die Empfangskanäle abstimmen zu können (*Tuning Control*).

### 29.2 Modell des I/Q Empfängers

Zur Analyse des digitalen Empfängers werden die Hochfrequenz-Stufen in Bild 29.1 nicht betrachtet. Damit vereinfacht das Blockschaltbild entsprechend, Bild 29.2.

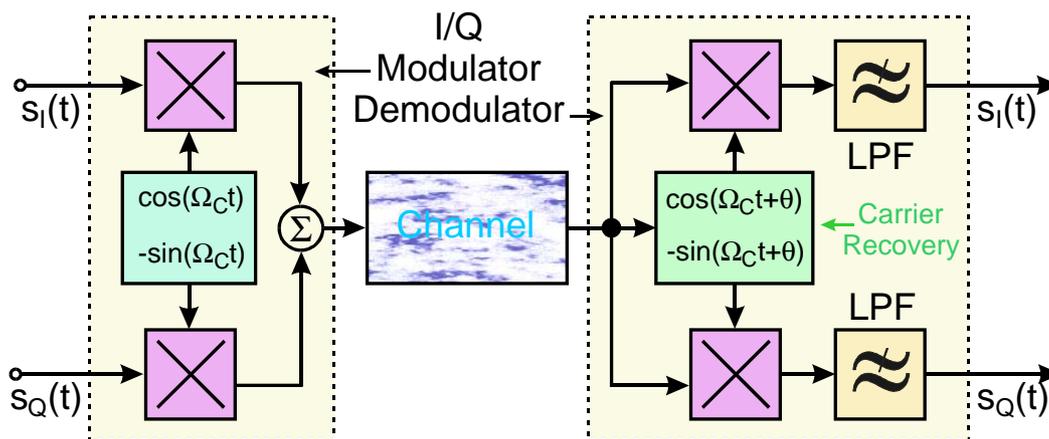


Bild 29.2: Blockschaltbild des I/Q Modulators (links) — Demodulators (rechts)

## 30 Äquivalente Tiefpaß-Signale

Nachdem Modulation und Demodulation mittlerweile in verstärktem Maße mit Hilfe von **Digitaler Signalverarbeitung** und damit softwaremäßig durchgeführt werden, ist bei der Realisierung darauf Rücksicht zu

<sup>29.1</sup>Auch ist es bei verschiedenen Demodulator-Konzepten üblich, zusätzliche quartzgenaue Frequenz-Umsetzungen zu verwenden (*Preliminary Demodulation, Frequency Conversion*). Das digital modulierte Signal steht dann auf einer (so niedrigen) Frequenz zur Verfügung, auf der unmittelbar die Digitale Signalverarbeitung stattfinden kann.

nehmen. Dies betrifft insbesondere die **Minimierung der erforderlichen Rechenleistung**.

- Bandpaß-Signale werden als (äquivalente) Tiefpaß-Signale verarbeitet ( $\leadsto$  geringere Abtastrate).
- Modulationsvorgänge erfolgen durch Multiplikation mit  $e^{j\Omega_C t}$  ( $\leadsto$  schnellere Berechnung) anstatt mit Cos- oder Sin-Schwingungen.
- Demodulation wird durch eine Multiplikation mit  $e^{-j\Omega_C t}$  erzielt.
- Dafür ist es erforderlich, mit **komplexen Signalen** zu rechnen.

### 30.1 Analytisches Signal und komplexe Einhüllende

Das komplexwertige Signal  $u_{BP}^+(t)$ , das **Spektralanteile nur bei positiven Frequenzen**  $\omega \geq 0$  hat, wird „**Analytisches Signal**“ genannt.

$$u_{BP}^+(t) = u_{TP}(t) \cdot e^{j\Omega_C t} \quad \text{Analytisches Signal} \quad (30.1)$$

Hierbei ist  $u_{TP}(t) = g(t)$  die **komplexe Einhüllende**.<sup>30.1</sup>

$$u_{TP}(t) = I(t) + jQ(t) = A(t)[\cos \phi(t) + j \sin \phi(t)] = A(t)e^{j\phi(t)} \quad \text{Komplexe Einhüllende} \quad (30.2)$$

Ein Bandpaß-Signal  $u_{BP}(t)$  ist ein **reellwertiges Zeitsignal**, das i.a. in seiner Amplitude und seiner Phase moduliert ist.

$$u_{BP}(t) = A(t) \cos[\Omega_C t + \phi(t)] = \Re\{u_{BP}^+(t)\} = \Re\{u_{TP}(t) \cdot e^{j\Omega_C t}\} \quad \text{Bandpaß-Signal} \quad (30.3)$$

**Reelle Zeitsignale**  $u_{BP}(t)$  haben **komplexwertige Spektralverteilungen**  $U_{BP}(\omega)$  mit geradem Real- und ungeradem Imaginär-Teil. Damit gilt:

$$U_{BP}(\omega) = U_{BP_e}(\omega) + jU_{BP_o}(\omega) \quad \text{Spektraldichte BP Signal} \quad (30.4)$$

Die Gewinnung des äquivalenten Tiefpaß-Signals (komplexe Einhüllende)  $u_{TP}(t)$  soll graphisch anhand des **Realanteils**  $U_{BP_e}(\omega)$  der Spektraldichte gezeigt werden, Bild 30.1. In diesem Bild ist **nur der Realanteil**  $\Re\{U_{BP}(\omega)\} = U_{BP_e}(\omega)$  **dargestellt** um das Bild nicht zu überfrachten. Die einzelnen Umformungsschritte gelten für den Imaginäranteil in gleicher Weise.

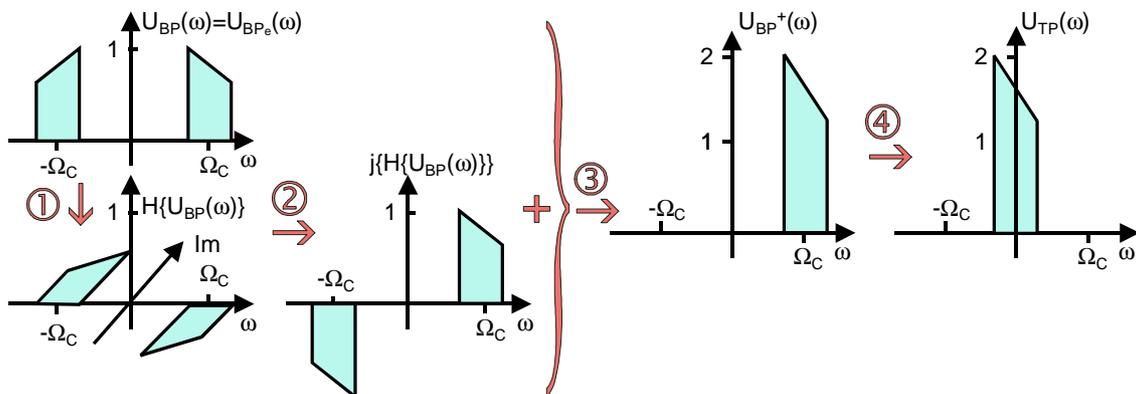


Bild 30.1: Bildung des Äquivalenten Tiefpaß-Signals im Spektrum

Für den Realanteil des Spektrums ist eine symbolische Form gewählt. Es ist **gerade** in Bezug auf die Achse bei  $\omega = 0$ , auch wenn es bezüglich der Trägerfrequenz  $\Omega_C$  nicht gerade ist.

Die einzelnen Schritte zur Bildung des Äquivalenten Tiefpaß-Signals  $u_{TP}(t)$   $\circ \bullet$   $U_{TP}(\omega)$  sind:

<sup>30.1</sup>Siehe Kapitel 24.1.2 „Komplexer I/Q Modulator“ (Seite 109).

1. Bildung des **Hilbert-gefilterten Spektrums**  $\mathcal{H}\{U_{BP}(\omega)\}$ . Ein Hilbert-Filter dreht alle positiven Spektralkomponenten in der Phase um  $-\pi/2$  und alle negativen um  $\pi/2$ . Formal entspricht dieses Filter einer mit  $-j$  multiplizierten Signum-Funktion.
2. Drehung des Hilbert-gefilterten Spektrums als Ganzes um  $-\pi/2$  in mathematisch positiver Richtung. Dies ist eine Multiplikation mit  $e^{j\pi/2}$ . Dadurch ergibt sich ein Spektrum  $j\mathcal{H}\{U_{BP}(\omega)\}$ , das für positive Frequenzen mit dem Spektrum von  $U_{BP}(\omega)$  übereinstimmt.
3. Die Addition des Bandpaß-Spektrums  $U_{BP}(\omega)$  mit dem Hilbert-gefilterten und Phase-gedrehten Spektrum  $j\mathcal{H}\{U_{BP}(\omega)\}$  löscht sich für negative Frequenzen und verdoppelt sich für positive Frequenzen zu  $U_{BP}^+(\omega)$ .
4. Eine Multiplikation mit  $e^{-j\Omega_C t}$  ergibt eine Verschiebung in den Tiefpaß-Bereich.  
Es entsteht  $U_{TP}(\omega) \bullet \circ \rightarrow u_{TP}(t)$ . Dieses Spektrum  $U_{TP}(\omega)$  ist komplexwertig, weil ja das ursprüngliche Spektrum  $U_{BP}(\omega)$  ebenfalls komplexwertig war.

Die Schritte zur Bildung der komplexen Eihüllenden  $u_{TP}(t)$  lassen sich in einem prinzipiellen Blockschaltbild zusammenfassen, Bild 30.2.

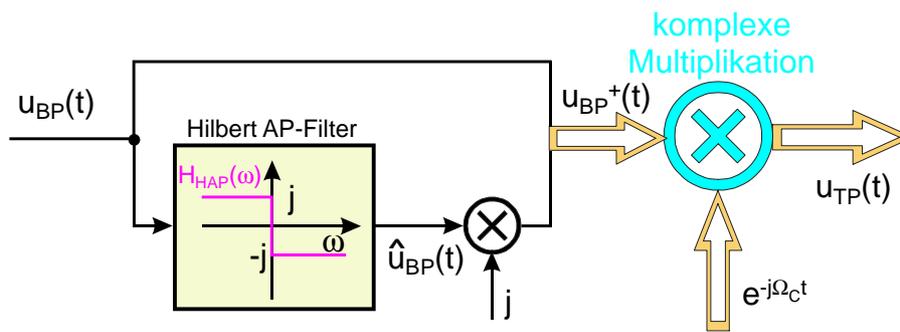


Bild 30.2: Bildung des Äquivalenten Tiefpaß-Signals (komplexe Eihüllende)  $u_{TP}(t)$  mittels Hilbert-Allpaß-Filter (HAP)  $H_{HAP}(\omega)$

Das Bandpaß-Signal  $u_{BP}(t)$  am Eingang des Blockschaltbildes 30.2 ist:

$$u_{BP}(t) = I(t) \cos(\Omega_C t) - Q(t) \sin(\Omega_C t) = A(t) \cos[\Omega_C t + \phi(t)] \quad \text{BP Signal} \quad (30.5)$$

Am Ausgang des Hilbert-Filters entsteht dadurch  $\hat{u}_{BP}(t)$ .<sup>30.2</sup>

$$\hat{u}_{BP}(t) = I(t) \sin(\Omega_C t) + Q(t) \cos(\Omega_C t) = A(t) \sin[\Omega_C t + \phi(t)] \quad \text{Hilbert gefiltertes BP Signal} \quad (30.6)$$

Dieses Signal  $\hat{u}_{BP}(t)$  wird mit  $j$  multipliziert.

$$j\hat{u}_{BP}(t) = jA(t) \sin[\Omega_C t + \phi(t)] \quad (30.7)$$

Zusammen mit  $u_{BP}(t)$  entsteht daraus das analytische Signal  $u_{BP}^+(t)$ .

$$u_{BP}^+(t) = u_{BP}(t) + j\hat{u}_{BP}(t) = A(t)\{\cos[\Omega_C t + \phi(t)] + j \sin[\Omega_C t + \phi(t)]\} \quad \text{Analytisches Signal} \quad (30.8)$$

Die komplexe Multiplikation mit  $e^{-j\Omega_C t}$  ergibt die Verschiebung in das Basis-Band.

$$\begin{aligned} u_{TP}(t) &= u_{BP}^+(t) \cdot e^{-j\Omega_C t} = \{u_{BP}(t) + j\hat{u}_{BP}(t)\} \cdot \{\cos(\Omega_C t) - j \sin(\Omega_C t)\} \\ &= \{u_{BP}(t) \cos(\Omega_C t) + \hat{u}_{BP}(t) \sin(\Omega_C t)\} + j\{\hat{u}_{BP}(t) \cos(\Omega_C t) - u_{BP}(t) \sin(\Omega_C t)\} \\ &= A(t) \cos[\Omega_C t + \phi(t)] \cos(\Omega_C t) + A(t) \sin[\Omega_C t + \phi(t)] \sin(\Omega_C t) + \dots \\ &\quad + j\{A(t) \sin[\Omega_C t + \phi(t)] \cos(\Omega_C t) - A(t) \cos[\Omega_C t + \phi(t)] \sin(\Omega_C t)\} \end{aligned} \quad (30.9)$$

Die beiden untersten Zeilen der Gleichung (30.9) haben die Form:

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta &= \cos(\alpha - \beta) \\ j\{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta\} &= j \cdot \sin(\alpha - \beta) \end{aligned} \quad (30.10)$$

Damit wird aus Gleichung (30.9) das Tiefpaß-Signal  $u_{TP}(t)$  (komplexe Eihüllende)

$$u_{TP}(t) = A(t)\{\cos[\phi(t)] + j \sin[\phi(t)]\} = A(t)e^{j\phi(t)} \quad \text{Komplexe Eihüllende} \quad (30.11)$$

<sup>30.2</sup>Die 90° Drehung im Spektrum entspricht der „Weaver-Methode“ zur Erzeugung der Einseitenband-Modulation (SSB *single side band*).

### 30.1.1 Komplexe Multiplikation und Faltung

**Komplexwertige Basisband-Signale werden digital als zwei parallele Datenströme verarbeitet.** Bei Multiplikationen ist daher komplex zu rechnen, was als teilweise Vermischung mit anschließender Trennung der Datenströme aufgefaßt werden kann:

$$(x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + j(x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2) \quad \text{komplexe Multiplikation} \quad (30.12)$$

Gleichwertig mit der komplexen Multiplikation im Frequenz-Bereich ist eine **komplexe Faltung** im Zeitbereich, Bild 30.3.

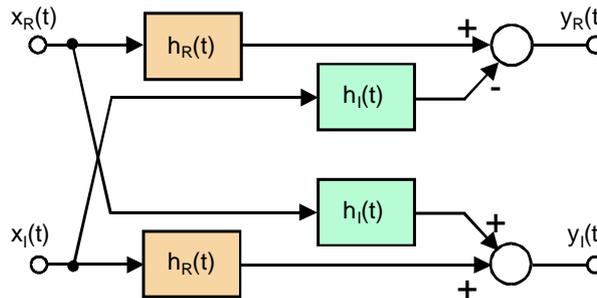


Bild 30.3: Struktur für eine komplexe Faltung im Basisband-Bereich

Da das Bandpaß-Filter für diesen Zweck ebenfalls in den Basisband-Bereich transformiert werden muß, ist die äquivalente Impulsantwort  $h_{aeq}(t)$  ebenfalls komplex.

$$h_{aeq}(t) = h_R(t) + jh_I(t) \quad (30.13)$$

Das äquivalente TP-Signal  $x(t) = x_R(t) + jx_I(t)$  soll gefiltert werden und ergibt dann das zugehörige Ausgangssignal  $y(t) = y_R(t) + jy_I(t)$ . Damit ergibt sich für die **komplexe Faltung**:

$$y(t) = y_R(t) + jy_I(t) = x(t) * h_{aeq}(t) = \{x_R(t) * h_R(t) - x_I(t) * h_I(t)\} + j\{x_R(t) * h_I(t) + x_I(t) * h_R(t)\} \quad (30.14)$$

Gleichung (30.14) entspricht formal derjenigen, die auch für eine komplexe Multiplikation erforderlich ist, Gleichung (30.12). Während jedoch eine komplexe Multiplikation mit vielen Programmen bzw. Simulatoren i.a. direkt ausgeführt werden kann, muß die komplexe Faltung meist gemäß Gleichung (30.14) in 4 (reelle) Faltungsoperationen aufgespalten werden.

### 30.1.2 Hilbert-Filterung einer reellwertigen Zeitfunktion

Als reellwertige Zeitfunktion werde das Bandpaß-Signal  $u_{BP}(t)$  betrachtet.

$$u_{BP}(t) \quad \circ \rightarrow \bullet \quad U_{BP}(\omega) = \underbrace{\Re\{U_{BP}(\omega)\}}_{\text{even}} + j \underbrace{\Im\{U_{BP}(\omega)\}}_{\text{odd}} \quad (30.15)$$

Das Ausgangs-Signal des Hilbert-Filters  $\hat{u}_{BP}(t)$ , Bild 30.2, ist ebenfalls ein reellwertiges Zeitsignal.

$$\hat{u}_{BP}(t) \quad \circ \rightarrow \bullet \quad \hat{U}_{BP}(\omega) = \underbrace{\Im\{U_{BP}(\omega)\}}_{\text{even}} \cdot \text{sgn}(\omega) - j \underbrace{\Re\{U_{BP}(\omega)\}}_{\text{odd}} \cdot \text{sgn}(\omega) \quad (30.16)$$

Hierbei ist  $\text{sgn}(\omega)$  die Signum-Funktion (im Frequenzbereich). Damit gibt es den Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \Re\{\hat{U}_{BP}(\omega)\} &= \Im\{U_{BP}(\omega)\} \cdot \text{sgn}(\omega) \\ \Im\{\hat{U}_{BP}(\omega)\} &= -\Re\{U_{BP}(\omega)\} \cdot \text{sgn}(\omega) \end{aligned} \quad (30.17)$$

$$\rightsquigarrow \text{allgemein: } \hat{U}_{BP}(\omega) = -jU_{BP}(\omega) \cdot \text{sgn}(\omega) \quad (30.18)$$

### 30.2 Das Hilbert-Filter

#### 30.2.1 Hilbert Allpass-Filter

Die Übertragungsfunktion des (idealen) **Hilbert Allpass-Filters** (HAP)  $H_{HAP}(\omega)$  ist die Signum-Funktion  $-j \cdot \text{sgn}(\omega)$  im Frequenzbereich, Bild 30.4.

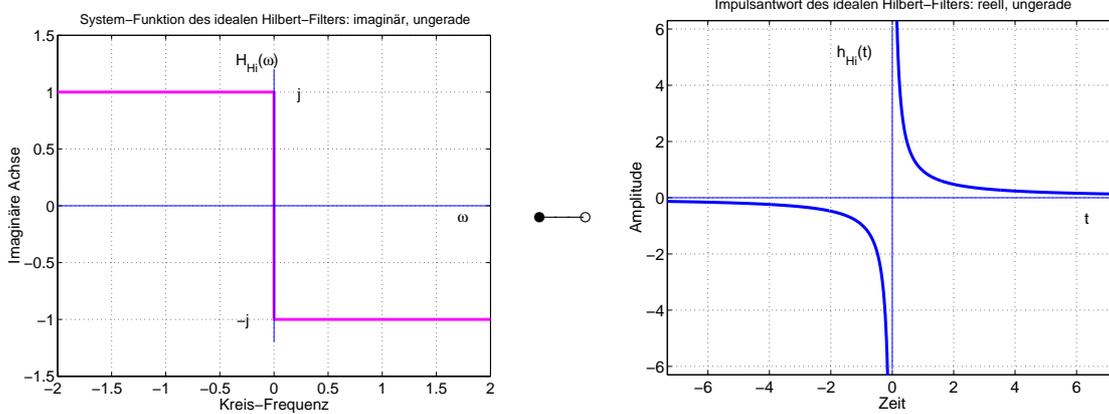


Bild 30.4: Ideales Hilbert Allpass-Filter (HAP) und seine Impulsantwort

Das (ideale) Hilbert Allpass-Filter hat die Impulsantwort  $h_{HAP}(t)$ .

$$H_{HAP}(\omega) = -j \text{sgn}(\omega) \quad \bullet \text{---} \circ \quad \frac{1}{\pi t} = h_{HAP}(t) \tag{30.19}$$

Das Hilbert Allpass-Filter hat eine beliebig hohe Grenzfrequenz.

#### 30.2.2 Hilbert Tiefpass-Filter

Für Basisband-Signale genügt ein **Hilbert Tiefpass-Filter** (HLP) mit oberer Grenzfrequenz  $\omega_g$ , Bild 30.5.

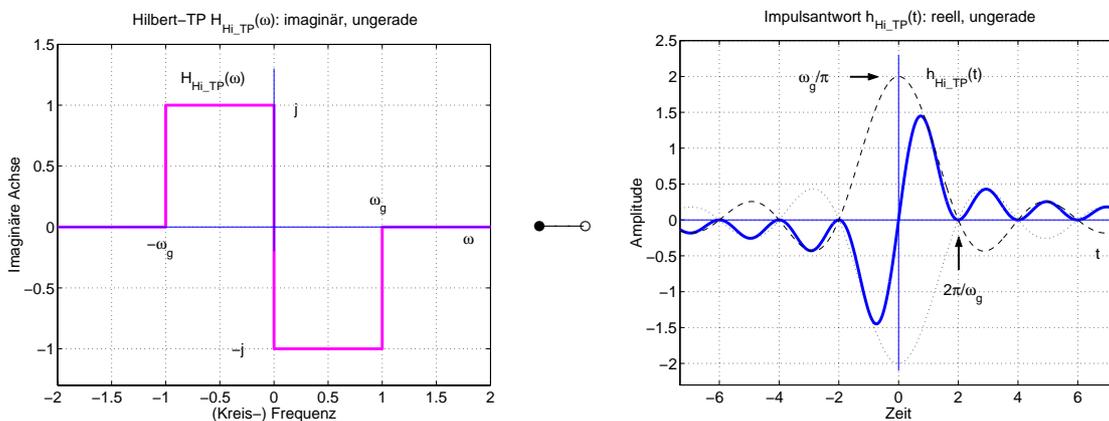


Bild 30.5: Idealisertes Hilbert Tiefpass-Filter (HLP) und seine Impulsantwort

Die Übertragungsfunktion und die Impulsantwort des (idealisierten) Hilbert Tiefpass-Filters sind:

$$H_{HLP}(\omega) = -j \Pi_{\omega_g/2}(\omega + \frac{\omega_g}{2}) + j \Pi_{\omega_g/2}(\omega - \frac{\omega_g}{2}) \quad \bullet \text{---} \circ \quad - \frac{\omega_g}{\pi} \frac{[\sin(t\omega_g/2)]^2}{t\omega_g/2} = h_{HLP}(t) \tag{30.20}$$

Bei der Realisierung des Hilbert-Tiefpaß-Filters mit Digitaler Signalverarbeitung ist zusätzlich eine Fensterung (Verrundung) anzuwenden, die wegen der steilen Flanken aufwendig ist.<sup>30.3</sup>

### 30.2.3 Hilbert Bandpass-Filter

Für modulierte Signale wird ein **Hilbert Bandpass-Filter** (HBP) benötigt. Das Spektrum modulierter Signale ist auf einen Bereich  $\pm B_\omega/2$  in der Nähe der Trägerfrequenz  $\Omega_C$  konzentriert.

- Dadurch vereinfacht sich die Realisierung des HBP, weil der Verlauf des Amplitudengangs des HBP  $|H_{HBP}(\omega)|$  außerhalb des Bereichs  $\pm B_\omega/2$  für die gewünschte  $90^\circ$  Drehung (des Bandpaß-Signals) keine Rolle spielt und deshalb so gewählt werden kann, daß der HBP günstig realisierbar wird, Bild 30.6.

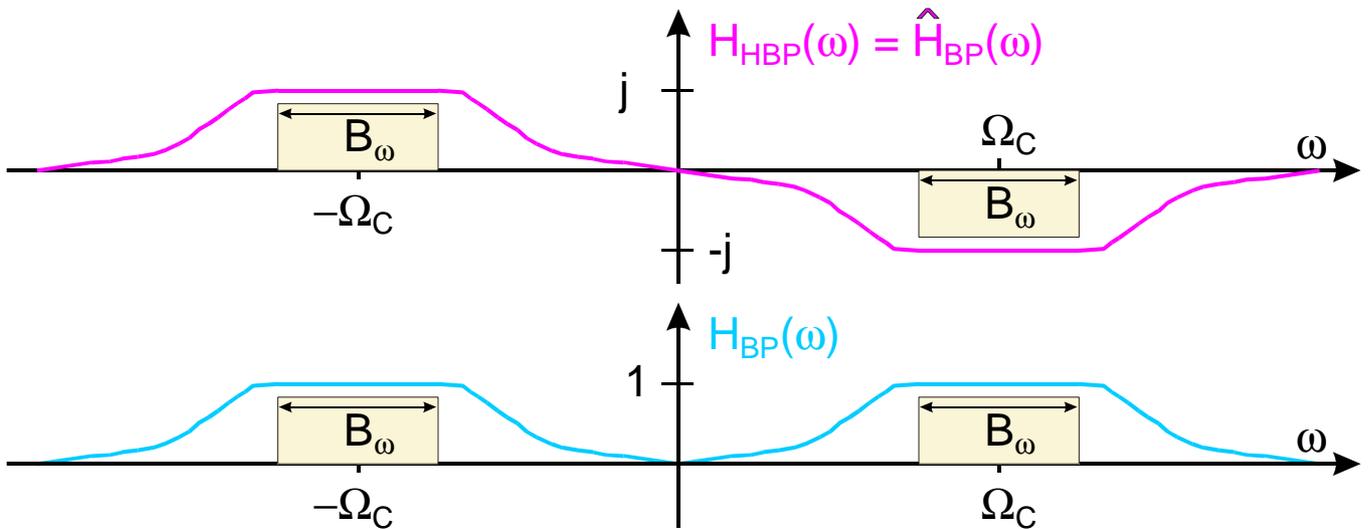


Bild 30.6: Im Bereich  $|\Omega_C \pm B_\omega/2|$  kann der Betrag eines Hilbert Bandpaß-Filters  $|H_{HBP}|$  exakt gleich dem eines Bandpaß-Filters  $|H_{BP}|$  gemacht werden.

Gemäß Bild 30.6 können sowohl der Hilbert Bandpaß  $H_{HBP}(\omega)$  als auch das Bandpaß-Filter  $H_{BP}(\omega)$  über eine Faltung aus einem (gemeinsamen) äquivalenten Tiefpaß  $H_{LP}(\omega)$   $\bullet \rightarrow h_{LP}(t)$  erzeugt werden.

$$\begin{aligned}
 H_{HBP}(\omega) &= H_{LP}(\omega) * j\{\delta(\omega + \Omega_C) - \delta(\omega - \Omega_C)\} & \bullet \rightarrow h_{HBP}(t) &= \hat{h}_{BP}(t) = h_{LP}(t) \cdot \sin[\Omega_C t] \\
 H_{BP}(\omega) &= H_{LP}(\omega) * \{\delta(\omega + \Omega_C) + \delta(\omega - \Omega_C)\} & \bullet \rightarrow h_{BP}(t) &= h_{LP}(t) \cdot \cos[\Omega_C t]
 \end{aligned}
 \tag{30.21}$$

Die Dimensionierung dieser beiden Filter beginnt mit der Festlegung für den äquivalenten Tiefpass Filters (LP).

$$H_{LP}(\omega) \bullet \rightarrow h_{LP}(t)$$

Nachdem die Impuls-Antwort  $h_{LP}(t)$  berechnet ist, muß nur noch mit  $\sin(\Omega_C t)$  bzw. mit  $\cos(\Omega_C t)$  multipliziert werden, um zur Impulsantwort des HBP bzw. des BP zu kommen.

- Auf diese Weise ist gewährleistet, daß die Ausgangs-Signale der beiden Filter  $H_{HBP}(\omega)$  und  $H_{BP}(\omega)$  gegen einander um exakt  $90^\circ$  gedreht sind.

Für die Digitale Realisierung werden die erforderlichen Abtastwerte mit einander multipliziert.

## 30.3 Blockschaltbilder des digitalen Demodulators

### 30.3.1 Quadratur-Filter-Struktur

Ausgehend von Bild 30.2 (Seite 142) und Bild 30.6 erhält man als Struktur für einen digitalen Demodulator die in Bild 30.7 gezeigte Anordnung.[34]

Gegenüber Bild 30.2 sind in dieser Quadratur-Filter Struktur des Digitalen Empfängers weitere Funktions-Blöcke berücksichtigt.

<sup>30.3</sup>Hierfür eignet sich z.B. eine Gauß-Verrundung.

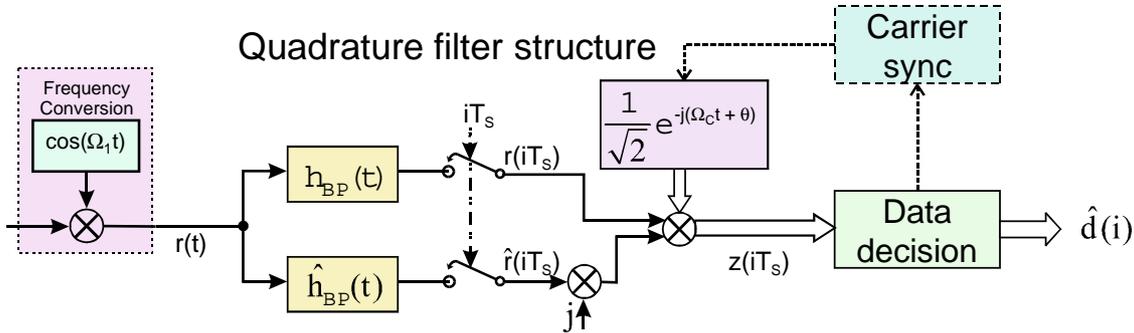


Bild 30.7: Quadratur-Filter Struktur des Digitalen Empfängers

1. Die (optionale) Frequenz-Umsetzung mit einer Frequenz  $\Omega_1$  dient dazu, das digitale Empfangs-Signal  $r(t)$  in einem solch niedrigen Frequenzbereich bereit zu stellen, in dem es unmittelbar digital weiter verarbeitet werden kann.

Diese Umsetzung wird in Blockschaltbildern häufig nicht dargestellt.

2. Das BP-Filter  $h_{BP}(t) \leftrightarrow H_{BP}(\omega)$  ist als „Matched Filter“ (MF) für die verwendete Symbolform auszuliegen.

3. Das Hilbert-Filter (HBP)  $\hat{h}_{BP}(t) \leftrightarrow \hat{H}_{BP}(\omega)$  ist das zu dem „Matched Filter“ (MF) für die verwendete Symbolform gehörende „matched“ Hilbert-Filter (MHF).

4. Der (komplexe) Umsetz-Oszillator wird in seiner Frequenz und Phase<sup>30.4</sup> synchronisiert. Die dafür notwendigen Informationen werden aus den decodierten Daten  $\hat{d}(i)$  gewonnen.

Der Faktor  $1/\sqrt{2}$  dient der Normierung.

5. Die Demodulator-Struktur ist günstig für eine praktische Realisierung, da die Regel-Schleife für die Träger-Regelung im Symbol-Takt  $T_S$  arbeiten kann.

**30.3.2 Tiefpass-Filter-Struktur**

Alternativ zur Quadratur-Filter-Struktur gibt es die Tiefpass-Filter-Struktur, Bild 30.8.[34]

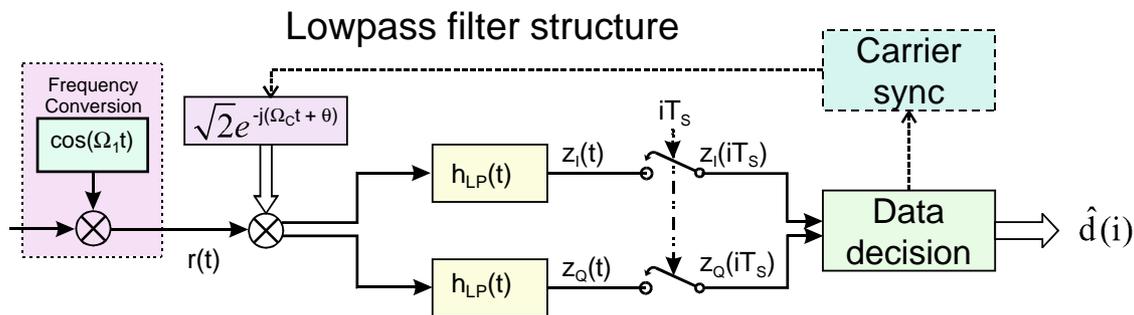


Bild 30.8: Tiefpaß-Filter Struktur des Digitalen Empfängers

1. In dieser Struktur erfolgt die Frequenz-Umsetzung mit  $\Omega_C$  vor der matched Filterung.

2. Als „Matched Filter“ (MF) werden 2 gleiche Tiefpässe  $h_{LP}(t) \leftrightarrow H_{LP}(\omega)$  benötigt.

Ein Hilbert-Filter ist nicht erforderlich. Die  $90^0$  Phasendrehung im Q-Zweig erfolgt durch die Frequenz-Umsetzung mit  $\sin(\Omega_C t)$ . (Entsprechend zur „Weaver“-Methode bei SSB.)

<sup>30.4</sup>Die Phasenlage kann ohne zusätzliche Information, z.B. aus einer Testsequenz, nur mit einer Unsicherheit von  $2\pi/M$  gewonnen werden, wenn die digitale Modulation  $M$  Phasenlagen verwendet.

- Der (komplexe) Umsetz-Oszillator wird in seiner Frequenz und Phase synchronisiert. Die dafür notwendigen Informationen werden aus den decodierten Daten  $\hat{d}(i)$  gewonnen.

Der Faktor  $\sqrt{2}$  dient der Normierung. Damit liefern beide Strukturen das gleiche Ergebnis.

- Für eine praktische Realisierung ist diese Struktur ungünstiger, da die MF  $h_{LP}(t) \leftrightarrow H_{LP}(\omega)$  innerhalb der Regel-Schleife liegen und deshalb wegen der Phasendrehungen dieser Filter die Stabilität der Regelung schwerer zu erreichen ist. Dadurch daß die Nachstellgröße für den Oszillator nur im Symbol-Takt erfolgt, ergibt sich (zusätzlich) eine „Tot-Zeit“ mit entsprechender Phasendrehung in dieser Regel-Schleife.

### 30.4 Blockschaltbild eines typischen digitalen Empfängers

Das Blockschaltbild eines typischen Digitalen Empfängers ist in Bild 30.9 dargestellt.[32]

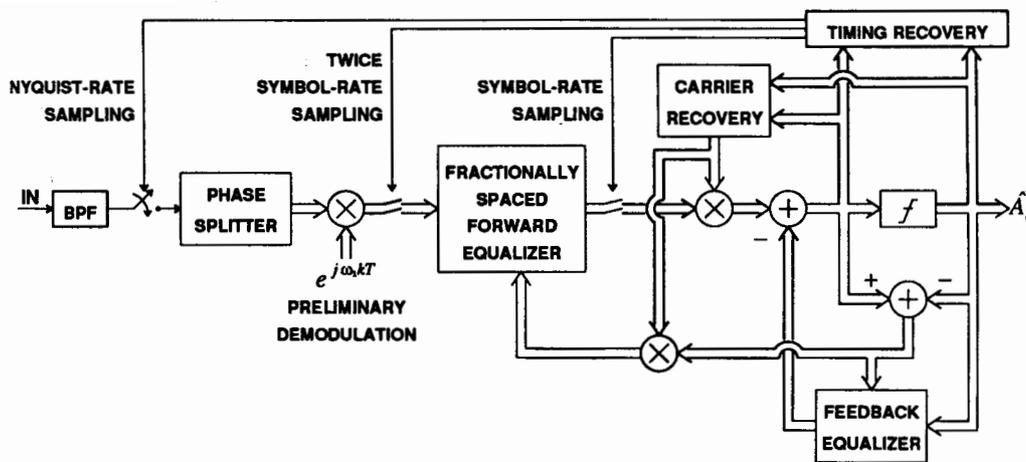


Bild 30.9: Typisches Blockschaltbild eines digitalen Empfängers in komplexer Darstellung.

Der Demapper sowie die Fehlerschutz-Decodierung sind nicht gezeichnet. Am Ausgang der Struktur treten somit die geschätzten Symbole  $\hat{A}_k$  auf.

Da mit I & Q Symbolen übertragen wird, ist die gesamte digitale Signalverarbeitung im Empfänger **komplexwertig** durchzuführen. Zur Minimierung der Rechenleistung wird dabei stets mit der niedrigsten zulässigen Abtastrate gearbeitet, die für den jeweiligen Teil des Empfängers zulässig ist.

- Die Abtastung mit der Nyquist-Rate am Eingang ist eine Bandpaß-Abtastung. Diese dient nicht nur der Abtastung als solcher, sondern stellt gleichzeitig eine Transponierung aus der IF Lage in die Basisband-Lage dar. Ein extra Frequenz-Umsetzer ist dann nicht notwendig.

Der im Blockschaltbild 30.9 dargestellte komplexe Multiplizierer, genannt „*preliminary demodulation*“ kann auch als „*derotation*“ interpretiert werden, also als Methode zum Ausgleich einer Rotation (des Phasensterms) in der komplexen I / Q Ebene, die infolge nicht exakt eingehaltener Sampling-Frequenz entstehen kann.

Die „*carrier recovery*“ muß auch noch die infolge der Eigenschaften des (Funk-) Kanals (Doppler-Verschiebungen) entstehenden (zufälligen) Rotationen des Phasensterms ausgleichen.

Der Vorwärts-Entzerrer und der Rückführ-Entzerrer dienen der Eliminierung von Inter-Symbol-Interferenzen durch den Kanal.

## 31 Synchrone Demodulator-Strukturen

Unter der Annahme, daß der digitale Empfänger

- Frequenz und Phase des RF Trägers und
- das Timing von Symbolen und Bits (von irgend woher) kennt, sowie

- ein unverzerrtes RF Signal empfängt,

werden die Strukturen für die Demodulation recht einfach. Häufig werden dafür dann auch nicht die (kompakteren) komplexen Blockschaltbilder gezeichnet, sondern die reellen.

### 31.1 Demodulation von QPSK, QAM und OQPSK Signalen

Der Demodulator hat hierfür eine I / Q Struktur. Das empfangene PSK oder QAM Signal wird mittels (frequenz- und phasenrichtigen) Hilfstägern heruntergemischt und mittels Korrelatoren oder Matched Filtern ausgewertet. Am Ende jedes Symbol-Intervalls erfolgt eine Entscheidung mit der das empfangene Symbol bewertet wird. Nach einem anschließenden Demappen und Multiplexen erhält man den empfangsseitigen (rekonstruierten) Bitstrom, Bild 31.1.[35]

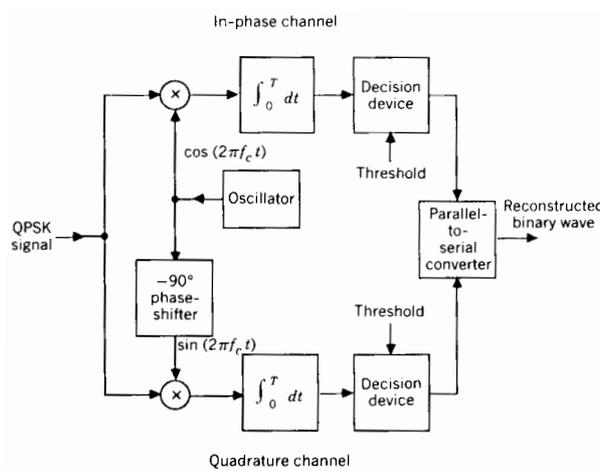


Bild 31.1: Blockschaltbild eines PSK oder QAM Demodulators.

Beschränkt man sich auf den I Zweig, so hat man eine Demodulator-Struktur für BPSK Signale oder auch für ASK Signale.

Für Offset QPSK (OQPSK) werden die Symbole im I und Q Zweig gegen einander um 1/2 Symboldauer versetzt gesendet, wodurch Nulldurchgänge im Vektor-Diagramm vermieden werden können. Gegenüber dem Blockschaltbild 31.1 ist nur folgende Ergänzung erforderlich. Im Sender wird das Q Signal verzögert (*Offset Delay*  $T_b = T_S/2$ ), während im Empfänger das I Signal verzögert wird, damit wieder Gleichzeitigkeit herrscht, Bild 31.2.[31]

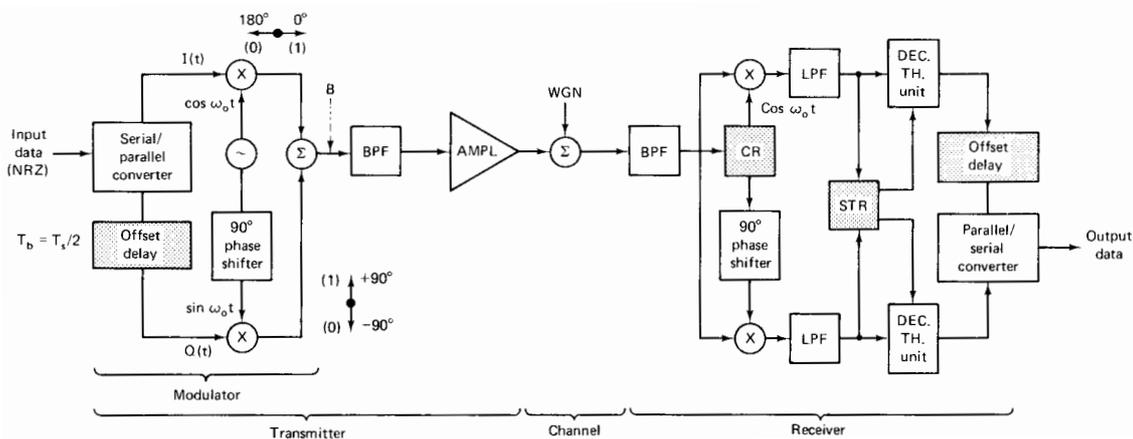


Bild 31.2: Blockschaltbild eines OQPSK Modulators und Demodulators.

Die grau hinterlegten Blöcke im Empfänger sind CR (*Carrier Recovery*) und STR (*Symbol Timing Recovery*), sowie Offset Delay  $T_b = T_S/2$ .

### 31.2 Synchrone Demodulation von MSK Signalen

Minimum Shift Keying (MSK) kann 1. als Spezialfall von OQPSK mit Cos-förmig verrundeten Symbole angesehen werden oder 2. auch als FM mit Modulationsindex  $m = 1/2$  und unverrundeten Datensymbolen. In Bild 31.3 ist ein Blockschaltbild für die 1. Darstellung des Modulators zusammen mit dem Demodulator, der prinzipiell gleich aussieht wie bei OQPSK, Bild 31.2.[31] Das im Blockschaltbild gezeichnete „*Transmitter Filter*“ ist technisch bedingt und hat einen konstanten Durchlaßbereich, so daß dadurch die Bedingung für die Matched Filterung nicht tangiert wird.

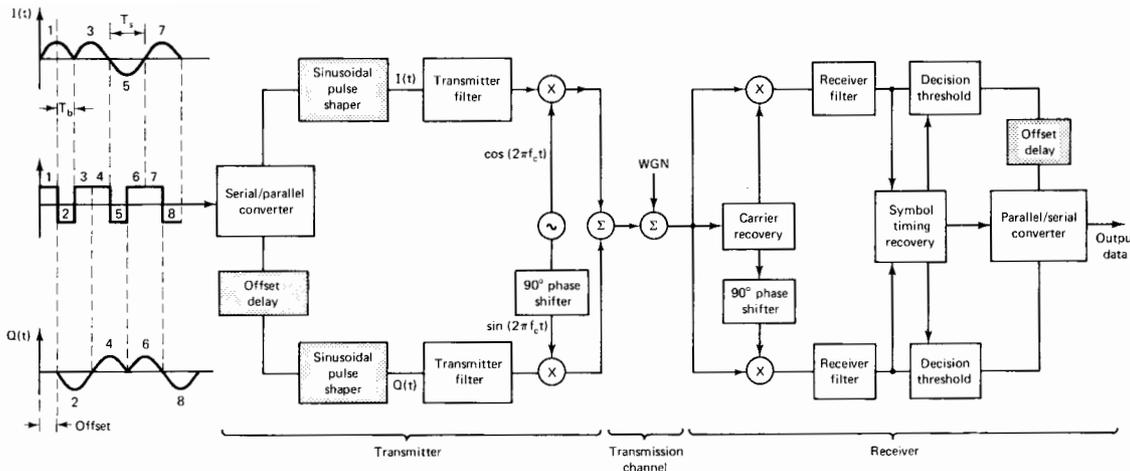


Bild 31.3: Blockschaltbild eines MSK Modulators und Demodulators.

Das Blockschaltbild des MSK Empfängers in einer alternativen Darstellung ist in Bild 31.4 dargestellt.[34]

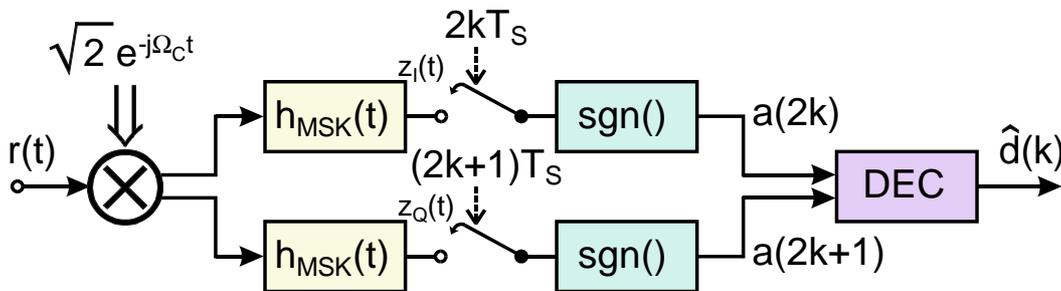


Bild 31.4: Blockschaltbild eines MSK Demodulators/Empfängers.

Das „Receiver Filter“  $h_{MSK}(t)$  muß an die Symbolform  $s_{MSK}(t)$  angepaßt werden, damit der Empfänger mit **Matched Filterung** arbeitet.<sup>31.1</sup> Mit der Darstellung in Bild 31.2 gilt:

$$h_{MSK}(t) = s_{MSK}(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{t}{T_b}\right) \Pi_{T_b}(t) \tag{31.1}$$

Das Ausgangs-Signal des Matched Filter  $h_{MSK}(t)$  im I-Zweig wird damit für eine einzelne Cos-Kuppe:

$$z_I(t) = s_{MSK}(t) * h_{MSK}(t); \quad z(x) = \frac{(\pi - x) \cos(x) + \sin(\pi - x)}{2}; \quad 0 \leq x \leq \pi; \quad z(-x) = z(x) \tag{31.2}$$

Die Zeitverläufe eines einzelnen Bits, des MSK-Symbols  $s_{MSK}(t)$  (I oder Q Zweig) und des MSK-Symbols am Ausgang des MF  $z(t)$  sind in Bild 31.5 dargestellt.

<sup>31.1</sup>Ein Beispiel dazu ist auch der Korrelator im Kapitel 16.3.1 „Korrelations-Empfänger“ (Seite 72).

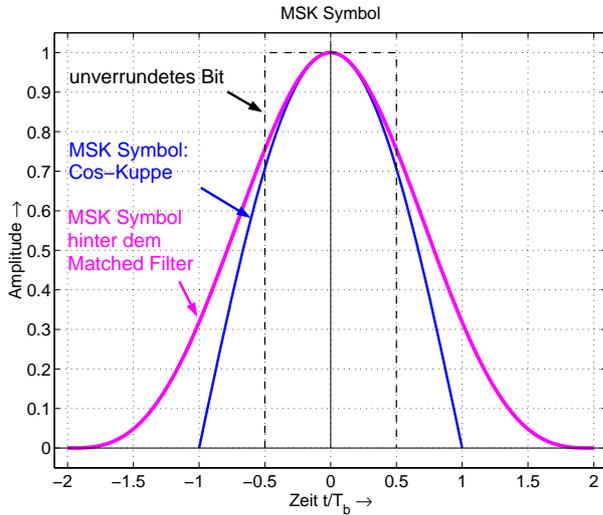


Bild 31.5: MSK-Symbol und Ausgangssignal des Matched Filters (I oder Q)

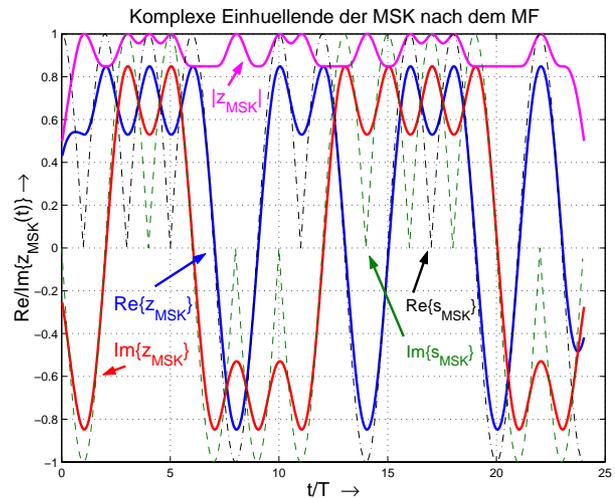


Bild 31.6: MSK Komplexe Einhüllende (gestrichelt) und Komplexe Einhüllende nach dem Matched Filter: Realteil  $\Re\{z_{MSK}(t)\} = z_I(t)$ , Imaginärteil  $\Im\{z_{MSK}(t)\} = z_Q(t)$ , Betrag  $|z_{MSK}(t)|$

In Bild 31.6 ist die Komplexe Einhüllende der MSK hinter dem Matched Filter dargestellt. (MATLAB Files aus [33]) (Realteil  $\Re\{z_{MSK}(t)\} = z_I(t)$ , Imaginärteil  $\Im\{z_{MSK}(t)\} = z_Q(t)$  und Betrag  $|z_{MSK}(t)|$ ) Die Zeitverläufe werden verglichen mit der komplexen Einhüllenden der MSK vor dem MF bzw. am Sender-Ausgang  $\Re\{s_{MSK}(t)\}$ ,  $\Im\{s_{MSK}(t)\}$  (gestrichelt gezeichnet). Aufgrund der Filterung ist der Betrag  $|z_{MSK}(t)|$  des Ausgangssignals nach der Matched Filterung nicht mehr konstant. Dies hat aber für den Empfänger keinen Einfluß.

Die Augendiagramme der Zeitfunktionen  $z_I(t)$  und  $z_Q(t)$  am Ausgang der Matched Filter des I und Q Zweiges im Blockschild 31.4 sind in Bild 31.7 dargestellt.[34]

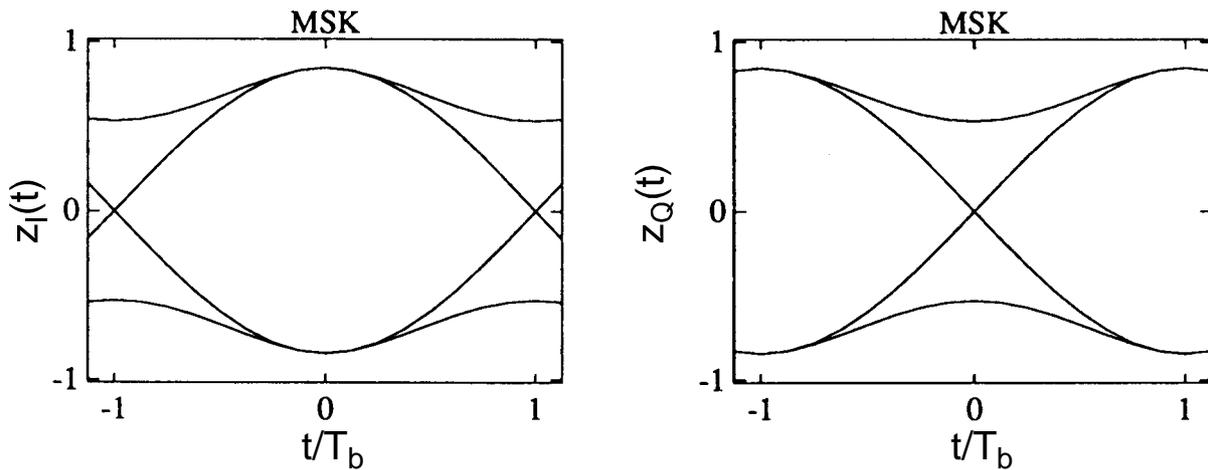


Bild 31.7: Augendiagramm von MSK; Abtastzeitpunkt im I-Zweig bei  $t = 0$ . Die Abtastzeitpunkte im Q-Zweig sind um  $T_b = T_S/2$  gegenüber dem I-Zweig verschoben.

Obwohl die MSK auch als FM aufgefaßt werden kann, gehört sie dennoch zu den **linearen** Modulationsarten, wie aus dem Blockschild 31.3 eindeutig hervorgeht. Das senderseitige Symbol-Filter hat als Durchlaßkurve die Form einer Cos-Kuppe (*Sinusoidal Pulse Shaper*). Dementsprechend muß auch das „Receiver Filter“ diese Form haben, damit die Bedingung für die Matched Filterung erfüllt ist.

### 31.3 Demodulation von GMSK Signalen

Im Unterschied zur MSK ist die GMSK eine „echte“ FM,<sup>31.2</sup> die nicht mehr als lineare Modulation dargestellt werden kann. Die Analyse des GMSK Frequenz-Impuls (GSM Symbol) und des Phasenverlaufes, Bilder 31.8 & 31.9, ergeben folgende Resultate. (MATLAB Files aus [33])

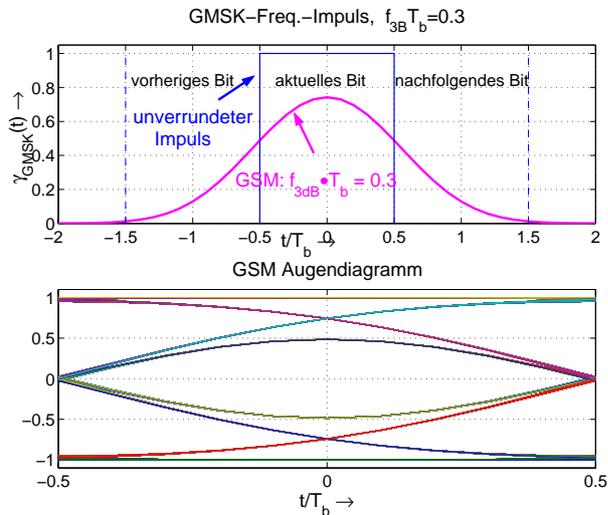


Bild 31.8: Impulsantwort des Gauß-Filters und Augen-Diagramm der Gauß-verrundeten (bipolaren) Daten für GSM

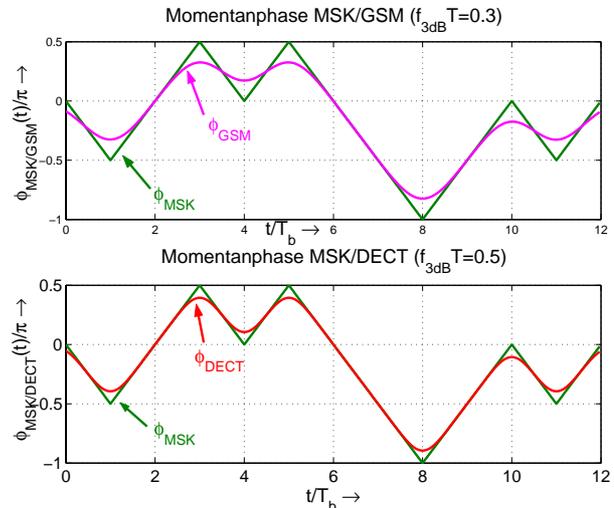


Bild 31.9: Verlauf der Momentanphase  $\phi(t)$  für MSK, GSM & DECT

- Das GSM Symbol hat die zeitliche Dauer von (mindestens) 3 Bits, Bild 31.8. Dadurch entsteht eine (absichtliche) Intersymbol-Interferenz.
- Im Unterschied zum GSM Symbol erzeugt das  $\square$ -förmige MSK Symbol keine Intersymbol-Interferenz.
- Weil die MSK keine Intersymbol-Interferenz erzeugt, kann empfangsseitig die Detektion pro Symbol erfolgen. Dies ist aus dem Phasenverlauf der MSK, Bild 31.9, erkennbar.
- Bei GSM (und DECT) kann eine Symbolentscheidung erst später erfolgen. Zur Detektion wird daher der Viterbi-Algorithmus verwendet.

#### 31.3.1 Asynchrone Demodulation von GMSK

Asynchrone Demodulation einer CPM wird z.B. bei Bluetooth angewendet (in Verbindung mit Frequency Hopping). Als Empfänger wird eine typische (analoge) FM Empfangsstruktur verwendet mit Begrenzer-Verstärker (*limiter*) und anschließendem Diskriminator. Der VCO wird dabei so gesteuert, daß der Bluetooth-Empfänger dem Frequency Hopping folgen kann.

Der Vorteil dieser Lösung ist, daß sie preiswert ist und vor allem sehr wenig Strom benötigt.<sup>31.3</sup> Das Zwischenfrequenz-Filter ist als Oberflächen-Wellen-Filter (SAW: surface acoustic wave) ausgeführt. Der Diskriminator ist ein asynchroner Demodulator für FM. Es ist weder die genaue Frequenz noch die Phase zur Demodulation erforderlich. Bei einer Frequenz-Ablage ist den demodulierten Daten-Symbolen eine Gleichgröße überlagert. Diese wird durch eine Kondensator-Kopplung abgetrennt. Damit sich keine unzulässigen Potentialverschiebungen (und entsprechende Symbol-Verformungen) daraus ergeben, muß durch Codierung sichergestellt werden, daß die laufende digitale Summe einen definierten Grenzwert nicht übersteigt.

<sup>31.2</sup>FM ist eine nichtlineare oder exponentielle Modulation.

<sup>31.3</sup>Ein entsprechender Lösungsvorschlag für die Digitalisierung des UKW FM Rundfunks ließ sich 1989 international leider nicht durchsetzen, obwohl damals die Chance bestanden hätte, das UKW Band (87.5 — 108 MHz) dafür mit zu benutzen und die analogen FM Sender successive umzurüsten. Statt dessen wurde das DAB Mehrträgerverfahren gewählt, obwohl dafür kein Frequenzbereich vorhanden war. DAB hat aufgrund der Bündelung mehrerer Programme noch andere Nachteile. Auf dem Markt hat es sich bislang nicht durchsetzen lassen, obgleich schon mehrere Anläufe dazu unternommen wurden. Die DAB Empfänger sind in der Anschaffung und im Betrieb (Batterie) zu teuer. Ein „Mehrwert“ von DAB infolge von Zusatzdiensten und Werbung wird vom Publikum nicht anerkannt.

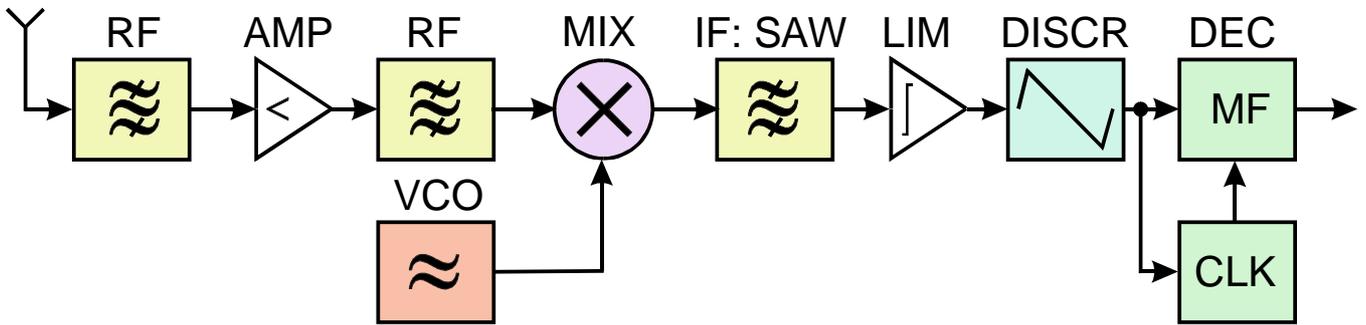


Bild 31.10: Bluetooth Empfänger; RF: Hochfrequenz–Filter, AMP: Verstärker, MIX: Mischer, VCO: Spannungsgesteuerter Oszillator, IF: Zwischenfrequenz, SAW: Oberflächenwellen Filter, DISCR: Diskriminator, DEC: Decoder, MF: Matched Filter, CLK: Takt

Wird das beim Bluetooth–Empfänger verwendete Empfangsprinzip auf die Demodulation einer GMSK angewendet, wird das Ausgangs–Signal des Diskriminators proportional zum GMSK Frequenz–Impuls, Bild 26.23. Nach einem Matched Filter wird aus einem (einzelnen) GMSK–Impuls eine Form wie sie Bild 22.6 zeigt.

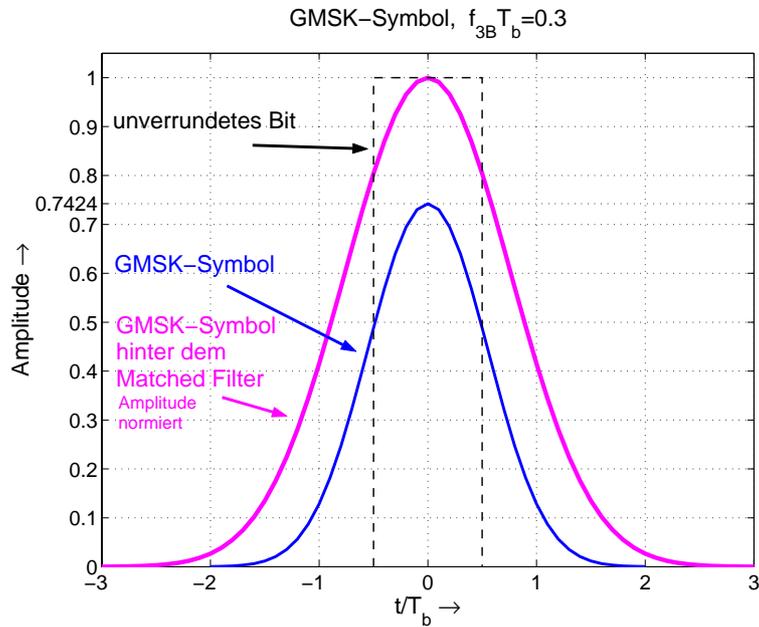


Bild 31.11: GMSK Symbol und das Ausgangs–Symbol eines Matched Filters.

Aus Bild 31.11 ist wieder erkennbar, daß die GMSK Symbole zu (absichtlicher) Intersymbol–Interferenz führen. Insgesamt werden jeweils (mindestens) 5 Bits beeinträchtigt. Die Decodierung der GMSK ist daher nicht wie bei der MSK unmittelbar nach jedem Symbol möglich, so daß erst eine spätere Entscheidung möglich wird (Viterbi Decoder).

Die asynchrone Demodulation ist nachteilig, wenn auf dem Übertragungsweg lineare Verzerrungen auftreten. Diese verwandeln sich nach der FM–Demodulation in nichtlineare Verzerrungen und können dann prinzipiell nicht mehr kompensiert werden.[34]

**31.3.2 Synchroner Demodulation von GMSK**

Die nichtlinearen Verzerrungen bei der Demodulation lassen sich vermeiden, wenn der Empfänger einen linearen Demodulator verwendet. Das paßt zunächst nicht zusammen. Allerdings ist mit  $m = 1/2$  der Modulationsindex der GMSK sehr klein (Schmalband–FM), so daß man näherungsweise auf der Empfängerseite trotzdem eine lineare Struktur ansetzen kann, Bild 31.12.[37]

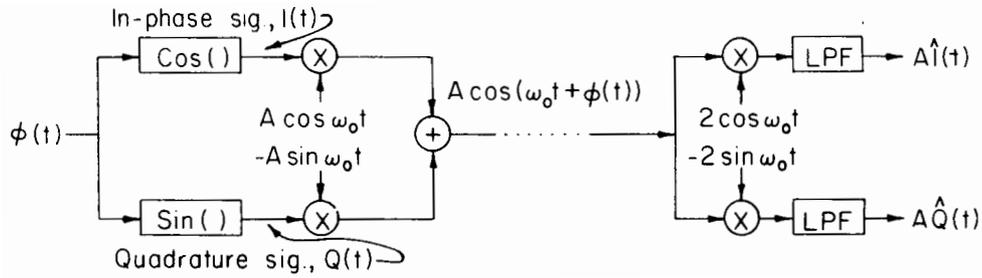


Bild 31.12: Blockschaltbild eines MSK Modulators als FM Modulator und eines linearen Demodulators.

Damit die lineare Demodulation von GMSK angewendet werden kann, wird der exponentielle Ausdruck für die FM in eine Reihe entwickelt.[38] Es zeigt sich dabei, daß die Reihe bereits nach dem 1. Glied ( $c_0$  Impuls) abgebrochen werden darf, ohne daß dadurch ein unzulässig großer Fehler entsteht. Diese Laurent-Approximation ist in Bild 31.13 dargestellt. (MATLAB Files aus [33])

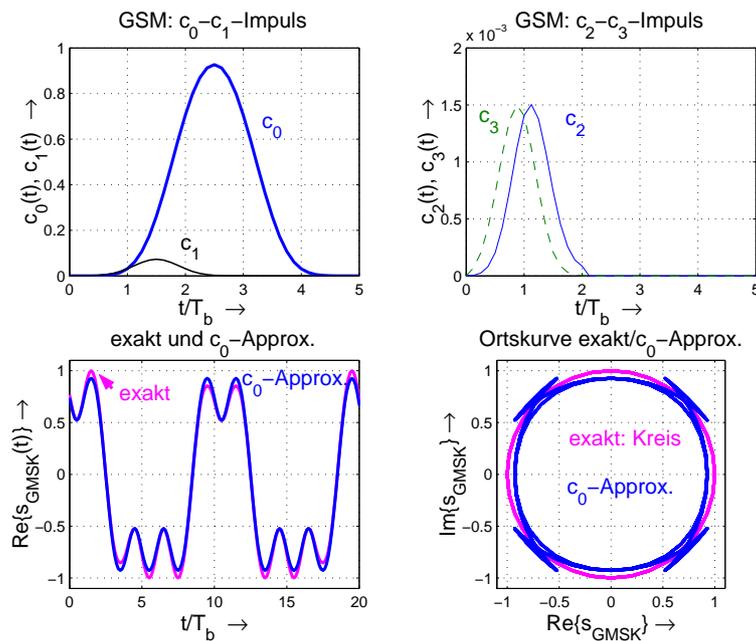


Bild 31.13: Laurent-Approximation des GMSK Symbols .

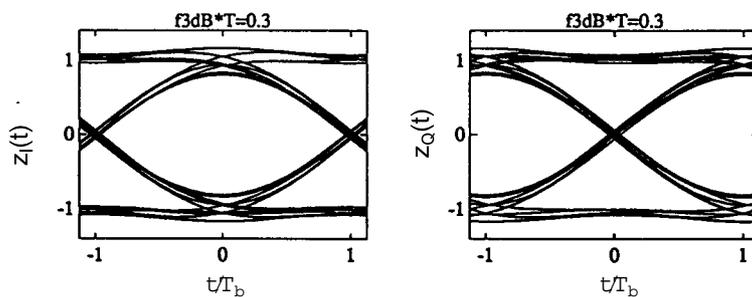


Bild 31.14: Augendiagramme GMSK

Aufgrund der Laurent-Approximation ergeben sich geringe Unterschiede, die dazu führen, daß in den Augendiagrammen von GMSK, Bild 31.14, im Vergleich zu MSK, Bild 31.7 (Seite 150), die Kurven zum Abtast-

zeitpunkt nicht alle genau durch einen Punkt gehen.[34] Dadurch hat das Auge der GMSK (bereits bei idealen Verhältnissen) eine etwas geringere Öffnung als dasjenige von MSK.

Der Zeitversatz von  $T_b$  der Augendiagramme im Q Zweig gegenüber dem I Zweig erklärt sich aus der Entstehung von MSK Und GMSK aus OQPSK.

## 32 Asynchrone Demodulator-Strukturen

Den aufwändigen „inneren Empfänger“ zur Beschaffung der Parameterwerte (z.B. Frequenz, Phase) kann man sich für einfachere Übertragungskanäle (wo z.B. keine Entzerrung notwendig ist) zum Teil ersparen, indem nicht synchrone (asynchrone) Demodulation angewendet wird.

### 32.1 DQPSK Demodulator

Die DQPSK entsteht aus der QPSK durch differentielle Vorecodierung. Im Vektor-Diagramm gibt es daher keinen Unterschied zwischen den beiden Modulationsarten. Jedoch ist es im Empfänger möglich, die Demodulation ohne Rückgewinnung von Frequenz und Phasenlage des RF Trägers durchzuführen. Bei der Demodulation wird dann der fehlende Träger durch das um eine Symboldauer verzögerte RF Signal ersetzt, Bild 32.1.[31] Der Nachteil besteht darin, daß das zur Demodulation verwendete RF Signal verrauscht (und gestört) ist. Dies ergibt eine Verschlechterung der Bitfehlerrate (BER) um (mindestens) 3 dB gegenüber einer synchronen Demodulation.

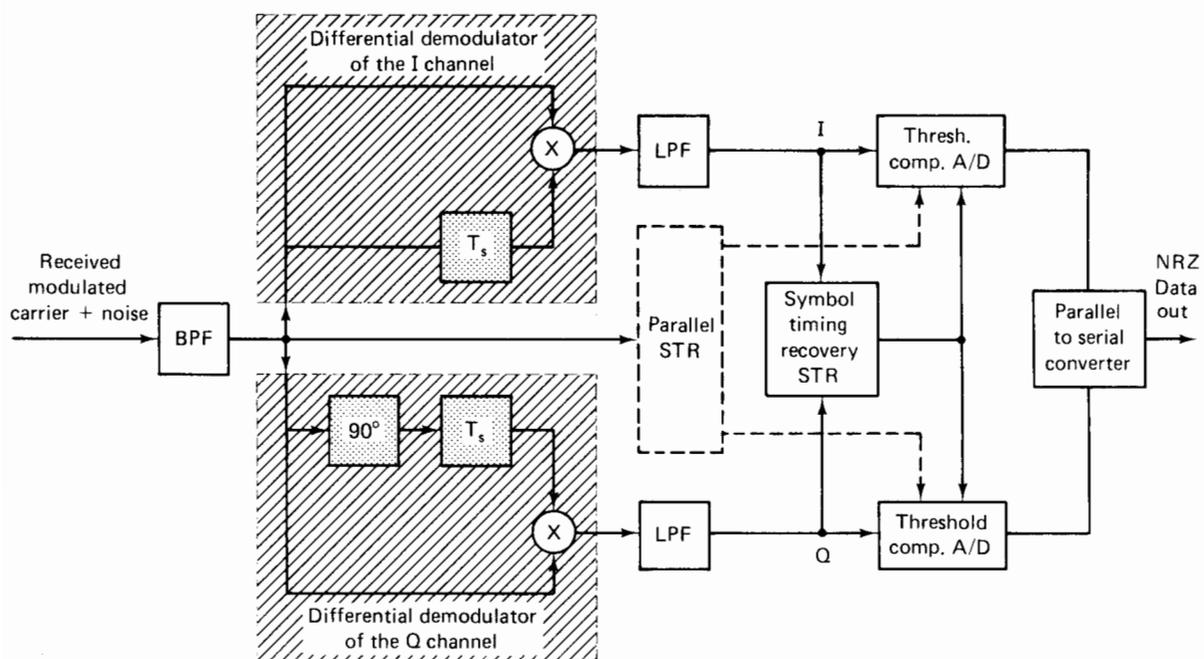


Bild 32.1: DQPSK Demodulator

Die Rückgewinnung von Symbol- und Bit-Takten (STR *Symbol Timing Recovery*) ist trotzdem erforderlich.

### 32.2 FSK Demodulator

Frequenz-Umtastung (FSK: *Frequency Shift Keying*) ist eine primitive Form einer FM. Allerdings wird hierbei i.a. nicht ein VCO moduliert, sondern es wird zwischen 2 (oder mehreren) frei schwingenden Oszillatoren umgeschaltet, entsprechend zu den zu übertragenden Binärdaten. Bei einer derartigen Umschaltung gibt es praktisch jedesmal Phasensprünge (im Unterschied zu den CPM Verfahren). Dafür kommt man im Empfänger dann auch mit einer ganz einfachen Schaltung aus, Bild 32.2.

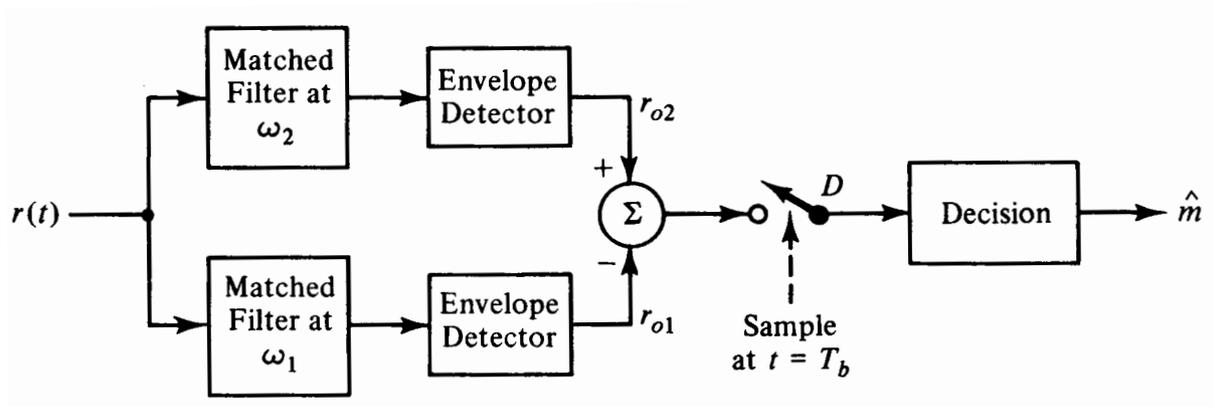


Bild 32.2: FSK Demodulator

Nachteile dieser Struktur sind außer einer schlechteren BER die große Bandbreite der Übertragung, da zwei deutlich unterschiedliche Mitten-Frequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  benötigt werden, damit durch das jeweilige andere Filter nichts mehr durchkommt. Andernfalls ergäbe sich aufgrund des Hüllkurven-Detektors immer ein Ausgangssignal, wodurch das Differenzsignal verkleinert würde.

## Die Synchronisation des digitalen Empfängers

Bei digitaler Übertragung muß das empfangene Signal die für die Synchronisation notwendige Information enthalten.<sup>32.1</sup>

Einen Empfänger für digitale Übertragung kann man in einen „äußeren“ und einen „inneren“ Empfänger aufteilen. Dabei kann man die Trennlinie folgendermaßen ziehen:

**Äußerer Empfänger:** Demodulation und Decodierung unter der Randbedingung, daß alle dafür notwendigen Parameter verfügbar sind (ideale Verhältnisse).

- Trägerfrequenz  $\Omega_C$
- Trägerphase  $\varphi_C$
- Timing-Zeitpunkte
- Kanal-Eigenschaften (zum Zwecke der Entzerrung)
  - Dämpfung
  - Delay
  - Doppler

**Innerer Empfänger:** Bereitstellung aller (zur Entzerrung und Demodulation) notwendigen Parameter, die aus Messungen (d.h. aus dem empfangenen Signal) gewonnen werden müssen.

**Datenstrom mit Synchronisations-Symbolen:**

- Diese Messungen beziehen sich z.B. auf Synchronisations-Symbole, die periodisch in den Datenstrom eingebettet werden.
- Da diese Symbole dem Empfänger bekannt sind, kann er aus deren Form bzw. Verformung die notwendigen Informationen gewinnen.
- Die Synchronisations-Symbole müssen so häufig gesendet werden, daß die zwischenzeitliche Interpolation nicht auf eine unzulässig hohe Fehlerrate führt.

**Datenstrom ohne Synchronisations-Symbole:**

- Für 2PSK, 4PSK, 8PSK kann mittels einer PLL die Träger-Phase  $\varphi_C$  (und damit auch die Trägerfrequenz  $\Omega_C$ ) gewonnen werden. (Trägersynchronisation)
- Daran anschließend können Rahmen- und Bit-Synchronisation erfolgen.

## 33 Träger-Synchronisation

Es werden hier die digitalen Modulations-Arten betrachtet, die übertragungstechnisch mit Quadratur-Doppel-Seitenband-Modulationen (QDSB) bezeichnet werden können, und zwar speziell 2PSK, 4PSK, 8PSK. Die hier beschriebenen Träger-Synchronisations-Verfahren können im Prinzip genauso für analoge QDSB-Modulationen eingesetzt werden.

### 33.1 CW Träger

Als erster Schritt soll die Synchronisation auf einen unmodulierten Träger (CW *continuous wave*) behandelt werden. Hierfür gibt es 2 Möglichkeiten:

1. Filtern mit einem schmalbandigen Filter
2. Phasenregelkreis (PLL, *phase locked loop*)

Technisch wird die PLL bevorzugt, weil hiermit nicht nur die Frequenz, sondern auch die Phase des Trägers korrekt gewonnen werden kann. Hinter einem schmalbandigen Filter bliebe stets noch eine Phasendrehung des Trägers bestehen.

<sup>32.1</sup> Entsprechendes gilt auch bei analoger Übertragung, z.B. beim analogen Fernsehen.

### 33.1.1 Der Phasen-Regelkreis (PLL)

Im Prinzip besteht ein Phasen-Regelkreis aus einem Phasen-Vergleicher (*phase detector*), einem Schleifen-Filter (*loop filter*) und einem Spannungs-gesteuerten Oszillator (VCO, *voltage controlled oscillator*), Bild 33.1 (Seite 157)[30].

Der VCO ist ein Oszillator, dessen Frequenz  $\Omega_C$  mit Hilfe des Signals  $y(t)$  gesteuert werden kann. Ist  $y(t) = 0$ , so erzeugt er die (Freilauf-) Frequenz  $\Omega_C$ . Für  $y(t) > 0$  erhöht sich die Frequenz proportional zu  $y(t)$  und für  $y(t) < 0$  wird sie erniedrigt.

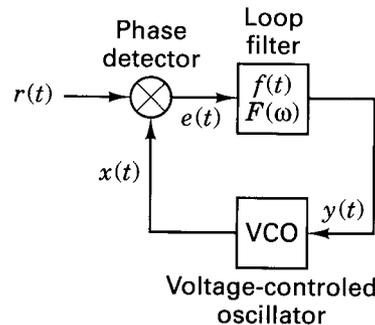


Bild 33.1: Grundschialtung einer PLL

$r(t)$  ist das empfangene Signal, das eine Trägerschwingung (mit Phase  $\varphi_C(t)$ ) enthält, z.B.:

$$r(t) = \cos[\Omega_C t + \varphi_C(t)] \quad \text{Empfangs-Signal} \quad (33.1)$$

$x(t)$  ist das sinus-förmige Signal (mit der „geschätzten“ Phase  $\hat{\varphi}_C(t)$ ), das der gesteuerte Oszillator erzeugt,

$$x(t) = -2 \sin[\Omega_C t + \hat{\varphi}_C(t)] \quad \text{VCO-Signal} \quad (33.2)$$

Der Phasen-Detektor sei als Multiplizierer ausgebildet, so daß als Ausgangssignal (Fehlersignal  $e(t)$ )

$$e(t) = x(t)r(t) = 2 \sin[\Omega_C t + \hat{\varphi}_C(t)] \cos[\Omega_C t + \varphi_C(t)] = \sin[\varphi_C(t) - \hat{\varphi}_C(t)] + \sin[2\Omega_C t + \hat{\varphi}_C(t) + \varphi_C(t)] \quad (33.3)$$

entsteht. Das Schleifen-Filter  $F(\omega)$  (mit dem Verstärkungsfaktor  $K$ ) läßt davon nur den **niederfrequenten Anteil** durch, so daß das Steuersignal für den VCO

$$y(t) = K \sin[\varphi_C(t) - \hat{\varphi}_C(t)] \approx K[\varphi_C(t) - \hat{\varphi}_C(t)] \quad \text{VCO Steuer-Signal} \quad (33.4)$$

wird.<sup>33.1</sup> Die Näherung gilt im eingerasteten Fall. Ist  $K$  genügend groß, kann die Differenz  $\varphi_C(t) - \hat{\varphi}_C(t)$  beliebig klein werden. Die Theorie zur PLL ist recht umfangreich [47] [39], zumal es sich um einen **nichtlinearen Regelkreis** handelt.

Viele Anwendungen zur PLL beziehen sich auf die Synchronisation des Empfängers. [47] – [43]. Die PLL wird dann meist softwaremäßig realisiert. Dabei ist es oft schwierig, die einzelnen Blöcke der Struktur des Bildes 33.1 dem Programm-Code zuzuordnen. Dies hat folgende Gründe:

- Der Phasenvergleich ist i.a. kein simpler Multiplizierer, sondern mathematisch oft viel komplizierter zu beschreiben.
- Der VCO erzeugt ggf. keinen sinusförmigen Träger.
- Die Schleife ist nicht kontinuierlich geschlossen, sondern nur periodisch in Abhängigkeit von der Rahmenstruktur des digitalen Signals. Es liegt dann eine **getastete Regelung** vor.

Unabhängig davon wird die prinzipielle Funktion der Träger-Rückgewinnung durch die PLL gemäß Bild 33.1 beschrieben.

<sup>33.1</sup>Der VCO hat an seinem Steuereingang Tiefpaß-Charakter, weshalb er nicht mit der doppelten Frequenz  $2\Omega_C$  gesteuert werden kann. Wird das Loop-Filter ganz weg gelassen, erhält man eine PLL der Ordnung 0. Übliche Loop-Filter sind 1. Ordnung (RC-TP) oder 2. Ordnung. PLL's mit Schleifenfilter höherer Ordnung sind nur bedingt stabil, weshalb diese i.a. keine Verwendung finden. In den Datenblättern der käuflichen PLL IC's sind Filterstrukturen und deren Dimensionierung angegeben, die für praktische Belange ausreichen, z.B. [44], [45], [46].

### 33.2 Synchronisation bei BPSK

Die Träger-Rückgewinnung mittels einer PLL erfordert, daß spektral im Empfangssignal eine Träger-Linie bei  $\Omega_C$  existiert. Das ist bei BPSK aber nicht der Fall, da BPSK eine **Doppelseitenband-Modulation mit unterdrücktem Träger** (DSB-SC) ist. Eine PLL kann somit bei einer BPSK nicht (unmittelbar) einrasten.

Abhilfe wird dadurch geschaffen, daß das Empfangssignal  $r(t)$  quadriert wird. Die mathematische Beschreibung wird besonders einfach, wenn rechteckförmige (!) Symbole mit gleicher Wahrscheinlichkeit unterstellt werden.

$$d(t) = \pm 1 \cdot \square \quad d(t)^2 = 1 \quad (33.5)$$

Es sei das Empfangssignal  $r(t)$

$$r(t) = d(t) \sin(\Omega_C t) \quad (33.6)$$

Dann wird

$$r^2(t) = d^2(t) \sin^2(\Omega_C t) = \frac{1}{2} \{1 - \cos(2\Omega_C t)\} \quad (33.7)$$

und man sieht, daß auf der doppelten Frequenz eine Trägerlinie existiert, auf die eine PLL synchronisieren kann, Bild 33.2.

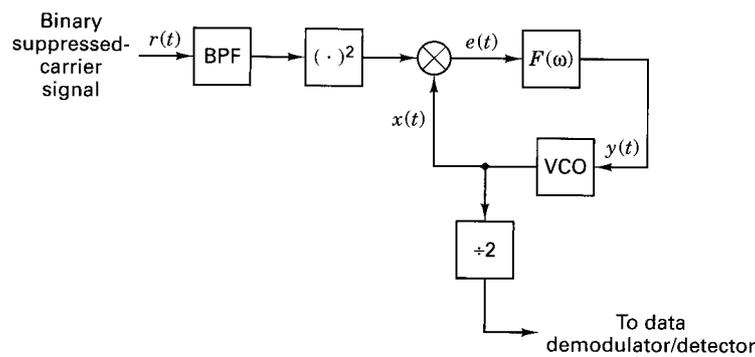


Bild 33.2: Grundsaltung einer quadrierenden PLL

Da der benötigte Hilfsträger auf der einfachen Frequenz  $\Omega_C$  sein muß, wird das Ausgangssignal des VCO **in der Frequenz durch 2 geteilt**. Dies hat folgende Auswirkungen:

- Bei einer analogen Realisierung ist die so gewonnene Trägerschwingung nicht mehr sinusförmig.
- Durch die Binärteilung entsteht eine **Phasenunsicherheit des Hilfsträgers** von  $\pm\pi$ .
- Die Phasenunsicherheit kann/muß mit Hilfe einer differentiellen Codierung abgefangen werden.
- Differenz-Codierung ergibt eine Verschlechterung des  $E_b/N_0$  Verhältnisses und deshalb eine Erhöhung der Symbol-Fehler-Rate gegenüber dem nicht Differenz-codierten Fall.
- Die quadrierende PLL benötigt zum Einrasten ein doppelt so hohes Signal-zu-Geräusch-Verhältnis wie die einfache PLL. [39]

#### 33.2.1 Costas Loop

Die Costas-Loop (Regelschleife) enthält einen „In-Phasen Demodulator“ und einen „Quadratur Demodulator“, Bild 33.3.<sup>33.2</sup>

Der I-Demodulator liefert das demodulierte Signal. Der Q-Demodulator bildet zusammen mit dem Spannungs-gesteuerten Oszillator (VCO *voltage controlled oscillator*) eine Phasen-Regelschleife (PLL *phase lock loop*). Stimmen Frequenz und Phasenwinkel überein, d.h.  $\theta = 0$ , so wird im Q-Demodulator eine Cos-Schwingung mit einer Sin-Schwingung multipliziert. Dabei entsteht kein Gleichanteil, weil der  $\sin(0) = 0$  ist. Daher entsteht auch keine Nachstimmspannung. Diese entsteht, im Vorzeichen abhängig vom Vorzeichen von  $\theta$ , wenn sich der Phasenwinkel  $\theta$  ändert. Nun ist aber die Ausgangsspannung des Q-Demodulators auch noch durch

<sup>33.2</sup>Siehe auch 9.3.2 „Costa Loop“, (Seite 33)

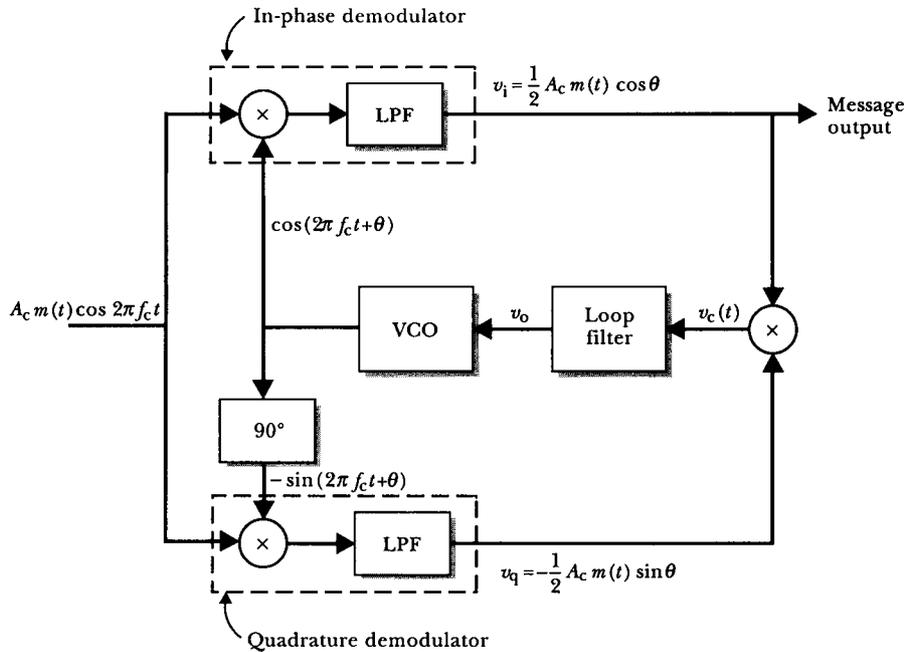


Bild 33.3: Costas Loop zur Träger-Rückgewinnung und synchroner Demodulation von BPSK

das Nachrichtensignal (hier  $m(t)$ ) beeinflusst und damit eine Wechselgröße, die nicht unmittelbar als Nachstimmspannung geeignet ist. Abhilfe schafft hier, diese Ausgangsspannung mit der Ausgangsspannung des I-Demodulators zu multiplizieren. Damit erhält man die quadrierte Spannung,  $m(t)^2$ , die einen **Gleichanteil** enthält, der durch das Loop-Filter (Regler) noch von dem verbleibenden Wechselanteil befreit wird. Damit steht eine **vorzeichenrichtige Nachstimmspannung** zur Verfügung.

Die **Phasen-Unsicherheit** von  $\pm\pi$  bleibt auch bei der Costas-Loop erhalten. Man sieht dies sofort, wenn man annimmt, daß der VCO  $-\cos(\Omega_C + \hat{\theta})$  erzeugt. Dann wird für den Q-Zweig  $+\sin(\Omega_C + \hat{\theta})$  entstehen. Also ändert sich das Vorzeichen in beiden Zweigen. Da aber zur Gewinnung der Nachstimmspannung das Produkt der Spannungen aus I- und Q-Zweig gebildet wird, fällt der Vorzeichenwechsel wieder weg und es entsteht die korrekte Nachstimmspannung. Aber es werden nun komplementäre Daten demoduliert. Also ist auch hier eine differentielle Codierung erforderlich.

### 33.3 Synchronisation von QPSK und 8PSK

Um hier zu Trägerlinien zu kommen, auf die synchronisiert werden kann, muß bei QPSK eine 4. Potenz und bei 8PSK eine 8. Potenz des Eingangssignals gebildet werden. Man erhält dann Linien auf der 4 fachen ( $4\Omega_C$ ) bzw. 8 fachen Trägerfrequenz ( $8\Omega_C$ ). Die Struktur dazu zeigt Bild 33.4. [34]

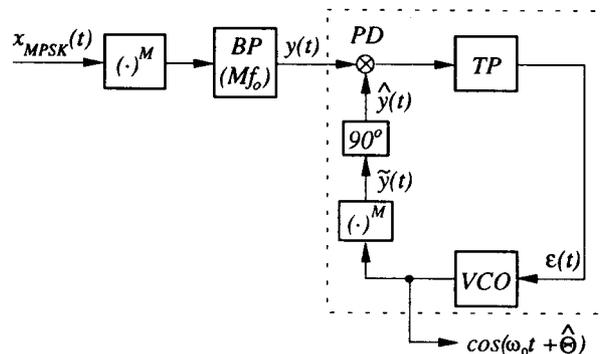


Bild 33.4: Grundschiung einer PLL für M-PSK

Bei dieser PLL kommt eine **Phasenunsicherheit** von  $M \cdot \left\{ \frac{2\pi}{M} \right\}$  zustande, die durch Codierungsmaßnahmen abgefangen werden muß.

### 33.3.1 QPSK Costas Loop

Für die Träger-Rückgewinnung bei QPSK wird die erweiterte Costas Loop verwendet, Bild 33.5. [31]

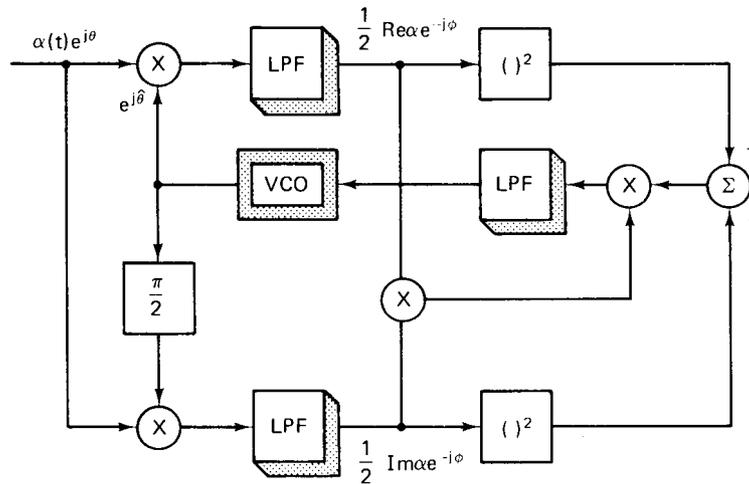


Bild 33.5: Grundschtung einer COSTAS Loop für QPSK

Anstatt von Potenzierern werden Multiplizierer und Quadrierer benötigt. Auch hier bleibt die Phasenunsicherheit von  $4 \left\{ \frac{2\pi}{4} \right\}$  bestehen.

## Symbol-, Bit- und Rahmen-Synchronisation

Nachdem die Trägerphase zurückgewonnen ist, kann die digitale Modulation demoduliert werden. Beim demodulierten Signal müssen nun die notwendigen zeitlichen Synchronisationen durchgeführt werden. Hierfür gibt es mehrere Verfahren, die z.B. in [30], [35], [34] beschrieben sind.

## 34 Synchronisation mit Test-Sequenzen (Einträger-Modulationen)

Die Synchronisation mit Hilfe von Test-Sequenzen läßt sich für analoge Übertragungen nicht anwenden. Dafür gestattet dieses Verfahren (für digitale Übertragung) alle benötigten Informationen aus der Auswertung der Test-Sequenzen zu gewinnen, einschließlich der Informationen über den Übertragungs-Kanal, der für Funk-Übertragung einen ganz entscheidenden Einfluß hat.

### Vorteile :

- Einfache und schnelle Synchronisation.  
Verfahren eignet sich besonders für Broadcast-Anwendungen.
- Hilfsträger wird phasenrichtig gewonnen.  
Die Phasen-Unsicherheiten wie bei der reinen Träger-Synchronisation treten nicht auf.
- Pegel-Regelung des Empfängers durch Auswertung der Amplituden der Test-Sequenz.
- Gleichzeitige Synchronisation auf den Symbol-Takt und den Rahmen-Takt.
- Messung der Kanal-Impulsantwort  $c(t)$  ist möglich.  
Man gewinnt damit die Informationen, die für eine Entzerrung der Symbole bei einer Funk-Übertragung erforderlich sind.

- Geringer Aufwand zur Implementierung.

**Nachteile :**

- Verlust an Übertragungskapazität durch die Test-Sequenzen.
- Verlust an Leistung (für die Nachrichten-Symbole) durch die Test-Sequenzen.

Grundsätzlich muß man immer im Auge behalten, daß die Ausschöpfung der Kanal-Kapazität bis an die Shannon-Grenze den Implementierungs-Aufwand und die Rechenzeit über alle Grenzen ansteigen läßt. Praktisch ist man daher immer zu Kompromissen gezwungen.

**34.1 Struktur des Daten-Stroms**

Es wird ein Einträger-System betrachtet, wie es z.B. auf Lang-, Mittel- oder Kurzwelle eingesetzt werden könnte.<sup>34.1</sup>

Man erkennt aus diesem Beispiel sehr gut, wie die Anforderungen an das digitale Übertragungs-System aus der physikalischen Schicht sich auf die höheren Schichten im OSI Schichten-Modell auswirken.

In den Daten-Strom werden hier periodisch Test-Sequenzen (TS) eingebettet, Bild 34.1. Um die Synchronisation des Empfängers zu beschleunigen, wird mit der Periode der Rahmen ein Fast Information Channel (FIC) übertragen, der z.B. Informationen zur aktuell verwendeten Modulation und Codierung der Daten enthält.

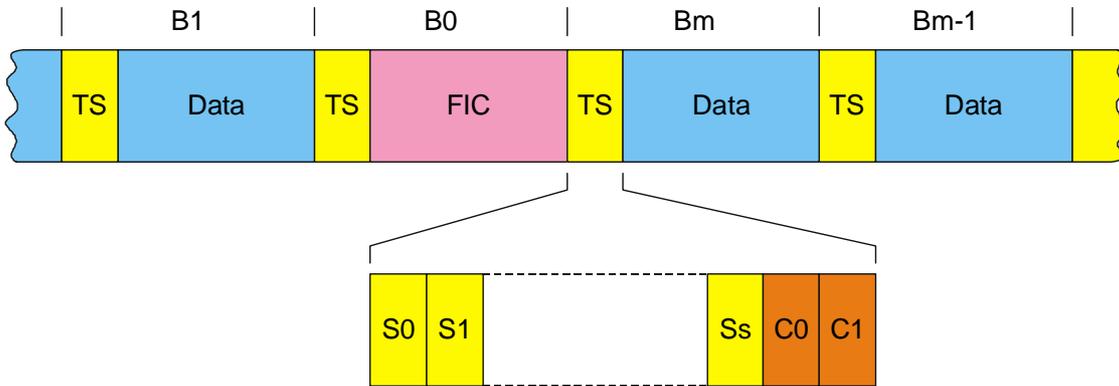


Bild 34.1: Gesamter Datenstrom bestehend aus Daten-Symbolen (Data) mit eingebetteten Test-Sequenzen (TS) und Fast Information Channel (FIC). Die gelb markierten Abschnitte TS enthalten die Test-Symbole  $S_0 - S_s$  und 2 Count-Symbole  $C_0, C_1$ . Der Rahmen geht (jeweils) von  $B_0$  bis  $B_m$

Der Rahmen (Länge  $m + 1$ ) beginnt immer mit dem FIC, der die Nummer  $B_0$  erhält. Die Test-Sequenzen TS enthalten daher auch einen Zählerstand (2 Count-Symbole  $C_0, C_1$ ), der den Abstand bis zum Ende des Rahmens angibt.

Die Test-Symbole  $S_0 - S_s$  werden aus einer PN-Folge (PN: *pseudo noise*) gebildet. Besonders geeignet dafür sind Barker-Sequenzen oder Willard-Sequenzen, die speziell zum Zwecke der Empfänger-Synchronisation entwickelt wurden. [42], [30] Diese Sequenzen haben die Eigenschaft, daß deren AKF (Autokorrelation) bei genauer Übereinstimmung einen Wert annimmt, der der Länge der Sequenz entspricht, jedoch bei jeder beliebigen Verschiebung betragsmäßig den Wert 1 nicht überschreitet. Die längsten bekannten dieser Sequenzen sind  $N = 13$  lang.

$$++++- - + + - + - + \quad \text{Barker 13} \quad (34.1)$$

$$++++- - + - + - - - \quad \text{Willard 13} \quad (34.2)$$

Mit Hilfe von Computer-Simulationen wurden die Neuman-Hofman Sequenzen gefunden, bei denen die Nebenmaxima betragsmäßig größer 1 werden können. Dafür sind diese bis zur Länge 24 bekannt. [42]

$$++++- - - + + - - - + - + - + - - + - - + \quad \text{Neuman-Hofman 24} \quad (34.3)$$

<sup>34.1</sup>Dies war das von der Deutschen Telekom entwickelte Konkurrenz-Systems zu DRM.

### 34.2 Modulations-Arten des Daten-Stroms

Die einzelnen Abschnitte TS, Data, FIC des Datenstromes verwenden unterschiedliche Modulations-Arten. Hierbei gelten folgende Gesichtspunkte:

- Die Test-Sequenzen zur Synchronisation und Kanal-Vermessung müssen sehr robust sein. Daher wird hierfür eine 2PSK verwendet.<sup>34.2</sup>

Synchronisation hat oberste Priorität, weswegen hierfür die Modulationsart mit der größten Robustheit verwendet wird.

- Die Count Symbole  $C$ , die den Zählerstand des Rahmens übertragen, müssen nicht ganz so robust sein, weswegen hier eine 8PSK vorgesehen ist.
- Für die Daten Symbole kann eine beliebige Modulation vorgesehen werden. Man wird eine höherstufige Modulationsart verwenden, um eine möglichst hohe Datenrate zu übertragen.

Im Gegensatz zu den dargestellten APSK Modulationen könnten hier auch QAM Modulationen verwendet werden. Die APSK-Modulationen haben jedoch den Vorteil, daß der Crest-Faktor des Modulations-Signals kleiner ist.

- Für den FIC kann die selbe Modulationsart wie für die Daten verwendet werden. Ggf. ist jedoch eine niederstufigere Modulationsart vorzuziehen. Alternativ ist eine höhere Fehlerschutz-Codierung als bei den Daten anzuwenden.

Bild 34.2 zeigt 2 Beispiele für den Symbol-Raum (Phasen-Sterne) der verwendeten Modulationsarten.

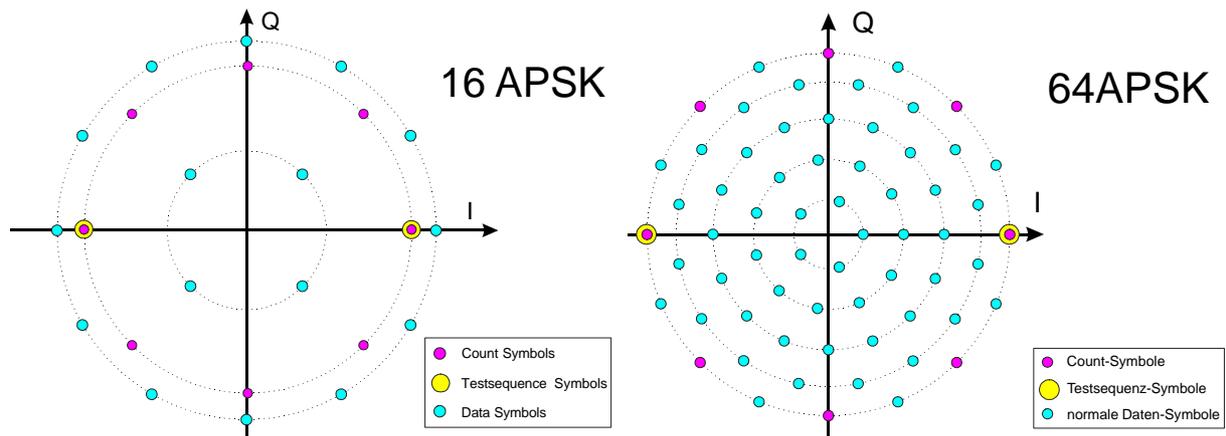


Bild 34.2: Phasen-Sterne der 16APSK und der 64APSK mit Test-Symbolen als 2PSK und Count-Symbolen als 8PSK. Bei der 64APSK liegen Datensymbole auch auf den Positionen von Test- und Count-Symbolen.

Angenommen, es soll über Kurzwellen z.B. eine Netto-Datenrate von 20 KBit/sec übertragen werden. Welches Modulations-Konzept (16APSK oder 64APSK) ist günstiger?

- Die Symbole der 16APSK repräsentieren 4 Bit, die der 64APSK 6 Bit.
- Die 64APSK kann somit mehr Fehlerschutz-Codierung übertragen.
- Die Symbole der 16APSK liegen jedoch weiter auseinander. Hier werden daher weniger Fehler entstehen (gleiche Verhältnisse wie bei der 64APSK vorausgesetzt).
- Eine Eigenschaft jeder Fehlerschutz-Codierung ist, daß für sehr geringe Signal-zu-Geräusch-Abstände mit Codierung mehr Fehler entstehen als ohne.

<sup>34.2</sup>Bei Anwendungen, die ein „Loch“ im Vektordiagramm erfordern, z.B. bei EER-Technik, ist hier eine OQPSK vorzusehen.

Praktische Messungen ergaben, daß für Kurzwellenübertragung die 16APSK vorzuziehen ist, weil damit i.a. kleinere Fehlerraten resultieren.

Die Test- und Count-Symbole der 16APSK liegen auf einem kleineren Kreis als die äußeren Symbole der Daten, Bild 34.2. In diesem Beispiel sind die Radien der Kreise so gewählt, daß die mittlere Symbol-Energie der Datensymbole (der 16APSK) übereinstimmt mit der Symbol-Energie der Count- und Test-Symbole.

Bei der 64APSK ist dagegen die mittlere Symbol-Energie kleiner gewählt als die Symbol-Energie der Count- und Test-Symbole. Hier liegen auf den Positionen der Count-Symbole auch Daten-Symbole.

### 34.3 Erster Synchronisations-Schritt

Wird der Empfänger auf ein Signal abgestimmt, muß er aus der empfangenen hochfrequenten Schwingung zuerst feststellen, ob dies ein Signal ist, das er „verstehen“. Hierzu ist es notwendig, die **Test-Sequenzen zu erkennen**. Dies geschieht mit Hilfe der **Korrelation**. Damit die Korrelation nicht in der RF-Ebene (RF: *radio frequency*) durchgeführt werden muß, wird in das Basis-Band (AF: *audio frequency*) mit quartzgenauen Oszillatoren heruntergemischt. Es entsteht dann ggf. über eine Mehrfach-Umsetzung mit Zwischenfrequenz (IF: *intermediate frequency*) ein I/Q Signal, Bild 34.3. Der 2. Umsetzer kann dabei auch als A/D-Wandler ausgeführt sein. In der AF Ebene kann nun eine **komplexe Korrelation im Symboltakt** durchgeführt werden.

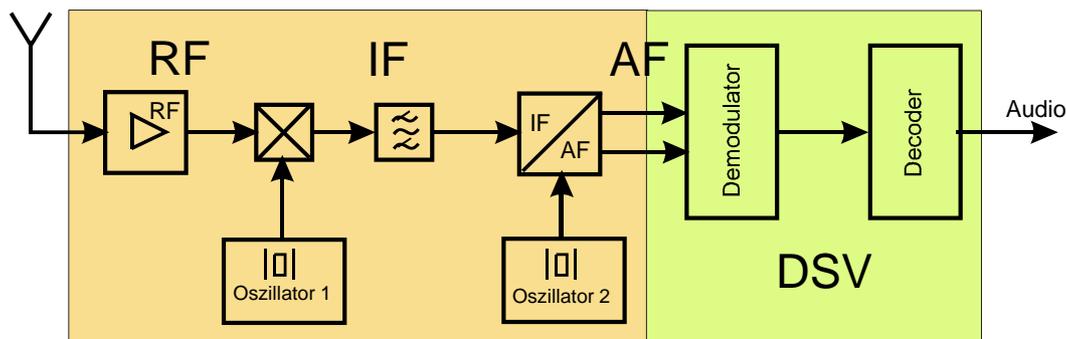


Bild 34.3: Blockschaltbild eines digitalen Empfängers mit RF Eingangsteil und I/Q Umsetzung in das Basisband. Analoger Teil: links; Digitaler Teil: rechts

Mit Hilfe der Korrelation gewinnt man zunächst die **genaue zeitliche Lage der Test-Sequenzen**. Diese werden als BPSK übertragen. Werden diese mit einem phasenrichtigen Träger demoduliert, hat die KKF (Kreuz-Korrelations-Funktion) ein positives Maximum und ist reell. Ist der Träger um  $\pi$  gedreht, hat die KKF ein negatives Maximum. Daher erhält man über dieses Verfahren eine **eindeutige Aussage über die korrekte Phase des Trägers**.

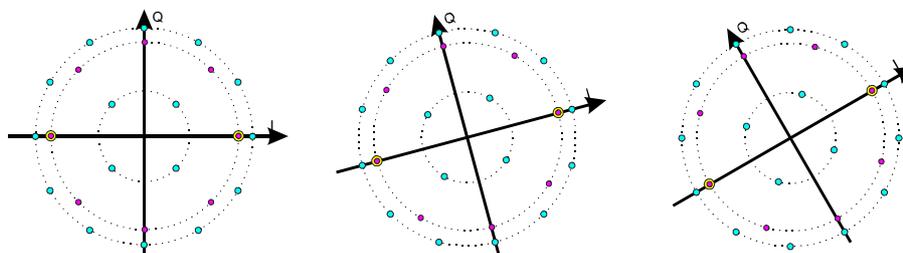


Bild 34.4: Rotation des Phasen-Sterns: Aufgrund von Frequenz-Differenzen der Oszillatoren dreht sich der Phasenstern nach der Umsetzung ins Basisband. Dargestellt sind 3 Zeitpunkte, wobei von Testsequenz zu Testsequenz z.B. jeweils um  $15^\circ$  (mathematisch positiv) weitergedreht werden soll. Der Winkel der I-Achse ist durch die (Punkte der) 2PSK der Test-Sequenz gegeben.

Die Quarz-Oszillatoren haben **Toleranzen**, so daß das digitale Signal frequenzmäßig nicht ganz exakt heruntergeschoben werden kann. Das bedeutet, daß der **Phasenstern** nicht fest steht, sondern sich (langsam)

**dreht**, Bild 34.4. Die Position der 2PSK für die Test-Sequenz gibt dabei den jeweiligen Winkel für die Drehung der I-Achse des Phasensterns an.

Im Digitalen Teil wird die Drehung herausgerechnet<sup>34.3</sup> (*de-rotation*), nachdem mit Hilfe der komplexen Korrelation die Größe des Drehwinkels bestimmt wurde. Die Drehung wird auch für die Daten herausgerechnet, wobei der zu berücksichtigende Drehwinkel von der Lage (bzw. dem zeitlichen Abstand) des jeweiligen Symbols von der vorausgehenden und nachfolgenden Testsequenz abhängt. Dies entspricht einer Interpolation.

### 34.4 Zweiter Synchronisations-Schritt

Der erste Synchronisations-Schritt liefert noch kein allzu genaues Ergebnis, sondern vermindert nur den Frequenzabstand zwischen der Soll-Frequenz und der Ist-Frequenz. Dies liegt daran, daß die **Test-Sequenz zunächst als Ganzes** betrachtet wurde. Bei der Bildung der AKF wurde quasi unterstellt, daß während der Dauer der Test-Sequenz die Rotation „angehalten“ wird. Tatsächlich dreht sich die Phase auch während der Testsequenz weiter. Da die Test-Sequenz als 2PSK gesendet wird, muß demnach der Phasenwinkel zwischen 2 Soll-Punkten der Test-Sequenz entweder  $0^0$  oder  $180^0$  sein. Wird nun im 2. Schritt dieser **Phasenwinkel zwischen den einzelnen Symbolen der Test-Sequenz ausgewertet**, so erhält man ein weiteres Korrektur-Signal zur genaueren Bestimmung der Phase des Empfangs-Oszillators. Damit kann der Wert der De-Rotation exakter festgelegt und die Interpolation verfeinert werden.

Die de-rotierten Vektor-Diagramme, Bild 34.5, zeigen aufgrund der 2PSK der Testsequenzen eine deutliche Linie, die die Lage der I-Achse angibt.

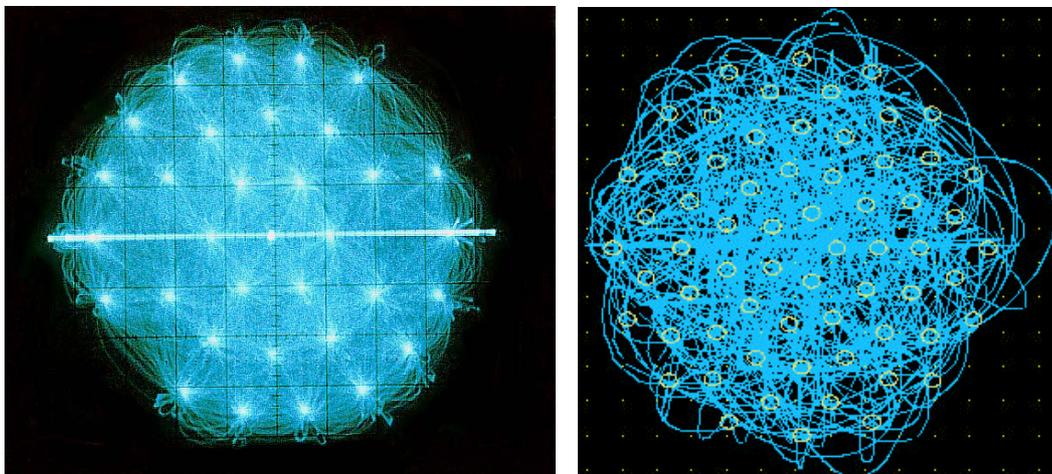


Bild 34.5: Vektor-Diagramme einer 32APSK (links) und einer 64APSK (rechts) nach der De-Rotation

Wird das Vektor-Diagramm mit genügend vielen Daten-Symbolen geschrieben, ergeben sich an den Soll-Punkten entsprechende Aufhellungen, so daß auch der Phasen-Stern erkennbar wird.

Man erkennt, daß der Drehwinkel zwischen zwei Symbolen der Test-Sequenzen  $< 90^0$  bleiben muß, damit die De-Rotation erfolgreich durchgeführt werden kann.

### 34.5 Bestimmung der Impulsantwort $c(t)$ des Kanals

Der Übertragungs-Kanal hat (aufgrund der Symbol-Verrundung) näherungsweise eine Roll-Off Form als Übertragungsfunktion  $C(\omega)$ . Als Kanal-Impulsantwort  $c(t)$  ergibt sich damit näherungsweise ein  $\frac{\sin(x)}{x}$  Impuls. Das allerdings nur dann, wenn im Kanal keine Echos auftreten.

Meßtechnisch ergibt sich die Impulsantwort  $c(t)$  über die **Kreuz-Korrelation** der empfangenen Test-Sequenz mit der im Empfänger bekannten Test-Sequenz. Mit Hilfe der FFT kann aus der Impulsantwort  $c(t)$  dann die Kanal-Übertragungsfunktion  $C(\omega)$  berechnet werden.

Da  $c(t)$  keine Symmetrien aufweist, wird  $C(\omega)$  komplex. In der Darstellung sind daher nur die jeweiligen **Beträge** gezeichnet, Bild 34.6.

<sup>34.3</sup>Alternativ kann auch ein Umsetz-Oszillator nachgestimmt werden.

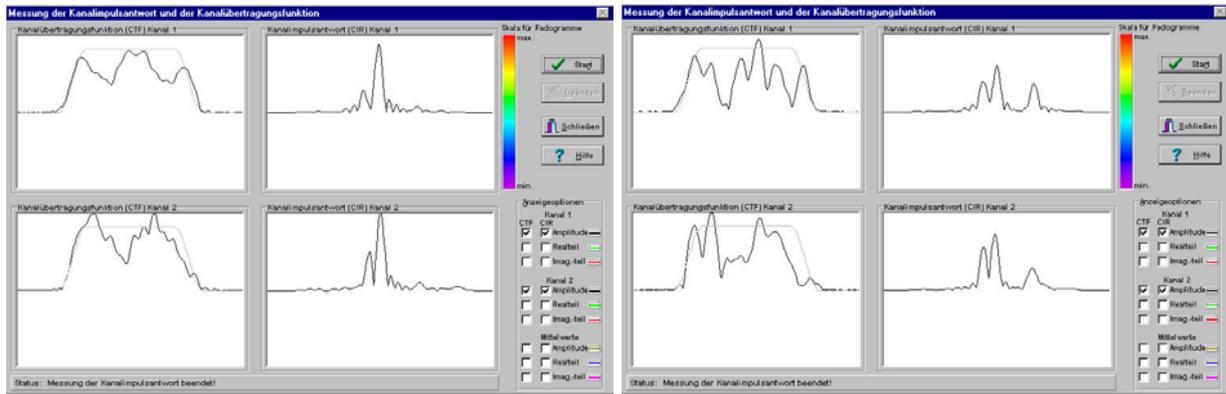


Bild 34.6: Gemessene und ideale (gestrichelt) Kanal-Übertragungsfunktion  $|C(\omega)|$  (Betrag) und gemessener Betrag der Kanal-Impuls-Antwort  $|c(t)|$  zu unterschiedlichen Zeiten (Kurzwellen-Kanal)

Aus der Messung Bild 34.6 ist zu sehen, wie sich 2 wesentliche Echos ausbilden (rechtes Bild), von denen eines vor dem Hauptimpuls erscheint und das andere danach. Die Auswirkung von Echos auf die „Durchlaßkurve“ des Funk-Kanals ist deutlich erkennbar: es gibt (Frequenz-) selektive Löschungen und Überhöhungen.

Aus der Kanal-Impulsantwort  $c(t)$  ist erkennbar, wie die Datensymbole bei einer Übertragung sich gegenseitig stören werden. Der Empfänger muß also unbedingt eine (adaptive) Entzerrung der Symbole durchführen, ehe diese detektiert werden können. Die notwendigen Informationen zur adaptiven Entzerrung gewinnt man durch die Auswertung der Kanal-Impulsantwort (nach Betrag und Phase bzw. nach Real- und Imaginärteil).

### 34.6 Pegel-Regelung

Aus dem **Betrag des Maximums der Impulsantwort** ist zusätzlich die Dämpfung des Übertragungs-Kanals zu bestimmen. Damit lassen sich die Amplituden der Empfangs-Signale normieren (**Pegel-Regelung**). Die so gewonnenen Werte für die Pegel-Regelung sind genauer als bei einer unmittelbaren Auswertung der Amplituden der 2PSK der Test-Sequenz, denn diese sind ja durch die auftretenden Echos „verzerrt“ und stimmen daher nicht.

### 34.7 Dritter Synchronisations-Schritt

Im 3. Synchronisations-Schritt wird die **zeitliche Lage des Maximums der Impulsantwort** ausgewertet. Dieses bewegt sich langsam aus der Mitte weg, wenn sich die Phase noch leicht dreht. Hier kann man nun eine Schwelle festlegen, wie weit sich das Maximum wegdrehen kann, bis eine (kleine) Korrektur durchgeführt wird.

Durch die Methode der 3 Schritte wird bei kleiner werdenden Differenzen der Phasenablage jeweils ein genaueres Meßverfahren angewendet. Insgesamt ergibt sich so eine Beschleunigung der Synchronisation.

### 34.8 Auswertung der Count-Symbole und des FIC

Nachdem die Träger-Synchronisation abgeschlossen ist, können die Count-Symbole ausgewertet werden. Diese werden als 8PSK übertragen. Sie sind daher zwar weniger robust als die Test-Symbole, aber robuster als die Daten-Symbole. Mit den Count-Symbolen wird ein Zähler heruntergezählt, so daß die **Rahmen-Synchronisation** mit dem nächsten FIC starten kann.

Dann wird der FIC ausgewertet. Damit erhält der Empfänger alle Informationen über die aktuell verwendete Modulation und Codierung der Daten sowie über alternative Frequenzen, auf denen das gleiche Programm ebenfalls ausgesendet wird. Letzteres ist für Rundfunk-Übertragungen wichtig, damit trotz schwieriger Ausbreitungsverhältnisse (des Funk-Kanals) ein unterbrechungs-freier Empfang möglich wird.

### 34.9 CW Störung durch AM-Träger

Die Umstellung der LMK Rundfunk-Bereiche auf digitale Übertragung kann aus praktischen Gründen nicht mit einem Schlag geschehen. Es wird daher eine sukzessive Umstellung einzelner Programme und Kanäle erfolgen. Da die Frequenz-Kanäle jedoch mehrfach mit Sendern belegt sind (die sich gegenseitig mehr oder weniger

stören), wird in der Regel der Fall auftreten, daß eine **digitale Ausstrahlung durch einen RF-Träger** eines Gleichkanal AM-Senders **gestört** ist.<sup>34.4</sup> Dieser RF-Träger ist eine Dauer-Schwingung (CW *continuous wave*). Bei AM hat der Träger eine größere bis sehr viel größere Leistung als die zugehörigen Seitenbänder, weshalb insbesondere die Störung durch Gleich-Kanal-Träger beseitigt werden muß.

Ein CW-Träger bewirkt, daß das Vektor-Diagramm bzw. der Phasen-Stern der digitalen Modulation aus dem Koordinaten-Ursprung herausgeschoben wird. Da die Frequenz des CW-Störträgers jedoch nicht exakt mit der Trägerfrequenz der digitalen Modulation übereinstimmt, führt das dazu, daß der Phasenstern um den Ursprung mit einer Geschwindigkeit kreist, die der Differenz der beiden Trägerfrequenzen entspricht, Bild 34.7.

Date: 09.09.96 Time: 09:24

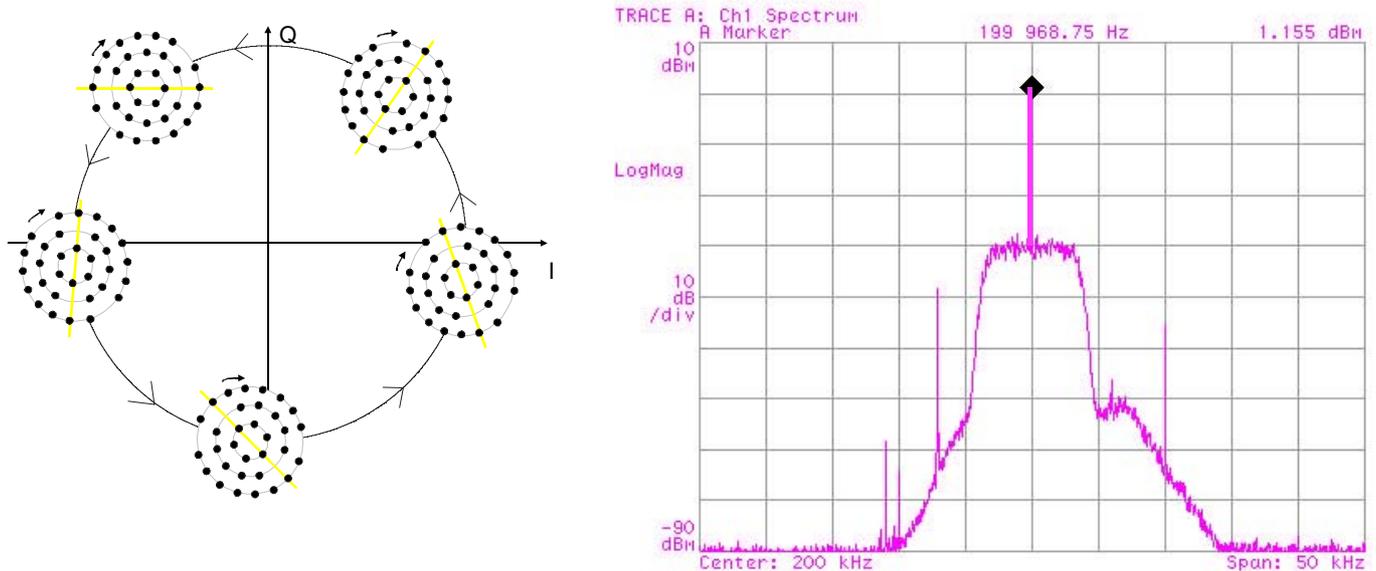


Bild 34.7: Auswirkung einer Interferenz-Störung durch einen Träger: Phasen-Stern einer 32APSK unter dem Einfluß einer CW Träger-Störung. Die Eigendrehung des Phasensterns zeigt, daß der Empfänger noch nicht synchronisiert hat. (links); Das gemessene digitale Spektrum (auf der Zwischenfrequenz) mit 30 dB größerem Störträger (rechts)

Bevor die Empfänger-Synchronisation und danach die Demodulation der Daten erfolgen kann, muß zuerst der CW-Träger unterdrückt werden.

Dies geschieht in folgender Weise. Da die Test-Sequenz als 2PSK übertragen wird, wird durch Subtraktion geeigneter Werte derselben der Mittelpunkt des Phasen-Sterns gefunden. Daraus bestimmt sich die Ablage des Phasensterns nach Betrag und Phase. Dies liefert ein Korrektur-Signal durch das der Phasen-Stern (bzw. das Vektor-Diagramm) in den Nullpunkt geschoben werden kann. Diese Methode gestattet es, Störträger, die das digitale Spektrum um 30 dB überragen auch dann (ausreichend) zu unterdrücken, wenn die Trägerfrequenz des CW-Störers also relativ weit (mehrere hundert Hz) abliegt.<sup>34.5</sup>

<sup>34.4</sup>Auf Mittelwelle tritt die Gleichkanal-Störung i.a. nur während der Nachtzeit auf.

<sup>34.5</sup>Alternativ könnte auch ein Notch-Filter (IIR-Struktur) verwendet werden. Allerdings ist dessen Loch-Frequenz dann fest, was für diese Anwendung nachteilig ist.

## Vielträger-Modulation

Die Echo-Pfade bei einer digitalen Funkübertragung haben zur Folge, daß beim Empfänger die Symbole mehrfach und mit unterschiedlicher Amplitude und Phasenlage eintreffen, wo sie sich **vektoriell** überlagern. Die Symbole werden dadurch in ihrer Form **verzerrt**, was zu Schwierigkeiten bei der Demodulation und damit zu Symbol- und Bitfehlern führt. Sind die Echo-Zeiten länger als es der Symbol-Dauer entspricht, werden nicht nur die einzelnen Symbole in ihrer Form beeinträchtigt, sondern es entsteht (ausbreitungsbedingte) **Intersymbol-Interferenz**.

Bei schnellen Datenübertragungen werden (gemäß Zeit-Bandbreiten-Gesetz) die Symbole sehr kurz. Je kürzer aber die Symbole werden, um so mehr Symbole werden durch die Echos beeinträchtigt.

- Die **Intersymbol-Interferenzen** sind damit eine **Funktion der Echo-Dauer bezogen auf die Symbol-Dauer**.

Im Empfänger müssen die Inter-Symbol-Interferenzen beseitigt werden bevor eine Demodulation und Entscheidung erfolgen kann. Hierfür gibt es zwei Strategien:

1. Symboldauer  $T_S$  größer wählen, als es der maximalen Echo-Zeit entspricht.  $\leadsto$  Vielträger-Modulation  
Damit erhält man empfangsseitig wenigstens einen Teil jedes Symbols ungestört.
2. Adaptive Entzerrung der Symbole im Empfänger. (bei Einträger-Modulation)

In diesem Kapitel wird die erst genannte Strategie untersucht. Diese führt zur Mehr- oder Vielträger-Modulation. Diese wird allgemein mit **DMT** (*Digital Multi Tone*) und in einer speziellen Form als **OFDM** (*Orthogonal Frequency Division Multiplex*) bezeichnet.

## 35 DMT bei zeitlich konstanten Kanälen

Die Mehr- oder Vielträger-Modulation (DMT *Digital Multi Tone*) wird eingesetzt auf Kanälen, die Inter-Symbol-Interferenzen (ISI) bei der Übertragung von Datensymbolen erzeugen. Dies sind aber nicht nur die zeitlich variablen Funk-Kanäle sondern auch solche Übertragungs-Strecken, die einen ausgeprägten **Amplituden- und Phasen- bzw. Laufzeitgang** haben, wie z.B. (längere) Kupfer-Kabel. Derartige lineare Verzerrungen sind frequenzabhängig, aber zeitlich konstant.

Die DMT Technik wird daher bei zeitlich konstanten Kanälen mit linearen Verzerrungen eingesetzt.

- Sprachband-Modemtechnik („Telefon-Modem“ 300 — 3400 Hz)  
Hierbei gibt es an den Bandgrenzen größere lineare Verzerrungen als in Bandmitte.
- Schnellen Datenübertragungen zum Teilnehmer (*Subscriber*), wie bei **HDSL** (*High speed Digital Subscriber Line*) und **ADSL** (*Asymmetric Digital Subscriber Line*) bzw. **T-DSL**.  
Hier sind die linearen Verzerrungen für höhere Frequenzen größer als für tiefere Frequenzen.

Aufgrund der eindeutigen Verhältnisse die linearen Verzerrungen betreffend, kann die Übertragung in den einzelnen Teilkanälen mit DMT optimal an diese angepaßt werden.

- Für Teilkanäle mit geringen linearen Verzerrungen werden viele Bits zu Symbolen und entsprechend hochstufigen digitalen Modulationen zusammengefaßt. (z.B. 16QAM, 32QAM, ggf. höherstufig)
- In Teilkanälen mit größeren linearen Verzerrungen werden niederstufige digitale Modulationen verwendet. (4PSK)

Damit läßt sich der Aufwand im Sender und Empfänger minimieren bei gleichzeitiger Maximierung der Übertragungsrate.

### 35.1 Asymmetric Digital Subscriber Line

Mit ADSL ist es möglich, auf einer 0,6 mm Cu Doppelader oberhalb von ISDN mehr als 8 Mbit/s zu übertragen. Frequenzmäßig reicht das verwendete Übertragungsband dabei bis 1,1 MHz und überdeckt damit sowohl das LW Rundfunkband (ca. 153 KHz — 280 KHz) als auch Teile des MW Rundfunkbandes (ca. 520 KHz — 1,61 MHz). In der Nähe starker Rundfunksender kann es dadurch zu Einstrahlungen kommen.

Die Teilkanäle von ADSL werden u.a. deshalb automatisch (beim Verbindungs-Aufbau) auf ihren Signal-zu-Geräusch-Abstand kontrolliert und adaptiv an die Übertragungssituation angepaßt.

- Bei kurzen Leitungen zwischen Vermittlungsstelle und Teilnehmer wirkt sich die (frequenzabhängige) Dämpfung des Kabels kaum aus. In diesem Fall wird in jedem Teilkanal mit einer 32QAM übertragen.
- Bei längeren Leitungen wird in Abhängigkeit von der Dämpfung und den Laufzeitverzerrungen in den betroffenen Teilkanälen auf bis zu 4PSK heruntergeschaltet. Damit erniedrigt sich die maximal übertragbare Datenrate entsprechend.
- Teilkanäle, die durch Einstrahlung eines Rundfunksenders gestört sind, werden nicht verwendet.

Das Frequenz-Schema von ADSL sieht 256 Teilkanäle (umgangssprachlich: Trägerfrequenzen) im Abstand von 4 KHz für den Downlink (Netz → Teilnehmer) vor und 32 entsprechende Kanäle für den Uplink (Teilnehmer → Netz), Bild 35.1. Die Teilkanäle sind zu einander nicht orthogonal.

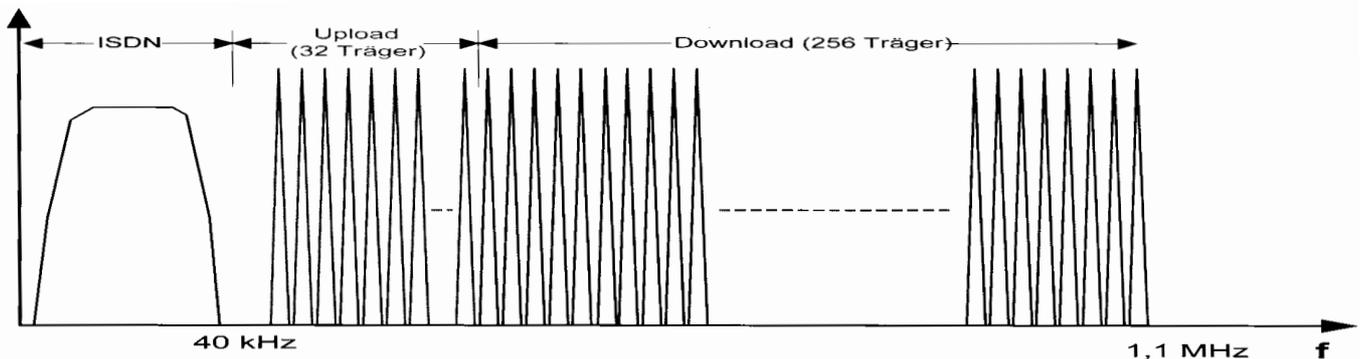


Bild 35.1: Frequenz-Schema von ADSL

Die Einstrahlung von L & M Sendern in das ADSL System ist die eine Seite der Medaille. Die andere Seite ist die Störung, die von ADSL ausgeht und den L & M Empfang beeinträchtigen kann.

## 36 OFDM bei Funk-Kanälen

Funk-Kanäle unterscheiden sich von anderen Kanälen u.a. dadurch, daß

1. nicht vorausgesehen werden kann, bei welchen Frequenzen innerhalb des Kanals große lineare Verzerrungen auftreten und
2. die Eigenschaften des Kanals sich zeitlich ändern.

Der Sender ist daher nicht in der Lage, die Übertragung individuell an einzelne Kanäle anzupassen. Demzufolge wird **in allen Teil-Kanälen die gleiche digitale Modulation** (z.B. 4PSK, 16QAM, 64QAM) verwendet. Diese wird als OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplex*) bezeichnet und stellt eine Viel- oder Mehr-Träger Modulation dar, bei der Orthogonalität zwischen den Teilkanälen herrscht.<sup>36.1</sup>

<sup>36.1</sup>Da OFDM ohne Fehlerschutz-Codierung bei Funk-Übertragung auf eine unzulässig hohe Fehlerrate führt, wird in der Praxis stets eine codierte Form, die COFDM (*Coded Frequency Division Multiplex*), eingesetzt.

### 36.1 Symbol-Dauer und Bandbreite

Je größer die (Echo-) Störungen im Kanal werden, umso weniger Bits lassen sich pro Symbol übertragen. Es ist daher nicht möglich, (als triviale Lösung) so viele Bits zu einem Symbol zusammen zu fassen, daß dieses dann länger wird, als es der Echo-Dauer entspricht. Um aber eine vorgegebene Datenrate zu übertragen, bleibt in diesem Falle nur als Lösung, mehrere **frequenzmäßig parallele** Übertragungs-Kanäle (*Subcarrier; Sub Channel; Unter-Träger, Teil-Kanäle*) zu nutzen. Man kommt damit zur Vielträger-Modulation.

In einer Darstellung von Kanal-Bandbreite  $B_{CH}$  über der Zeit kann man die Ein- und Mehrträger-Modulation mit einander (zunächst pauschal) vergleichen, Bild 36.1.

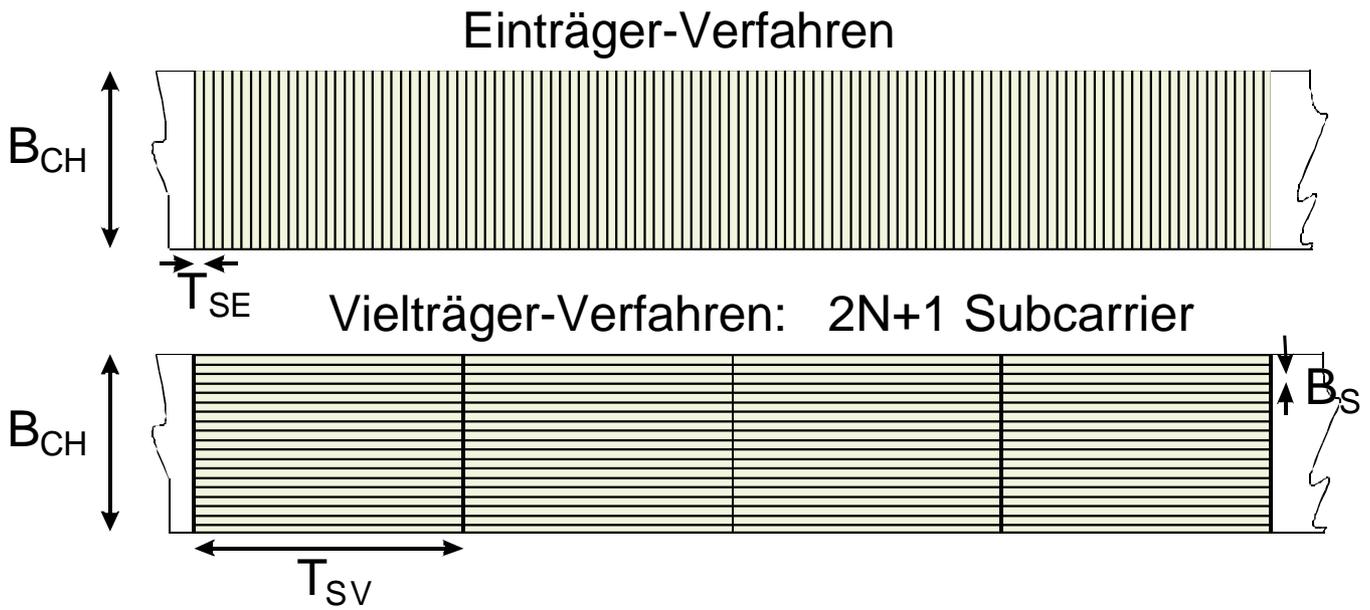


Bild 36.1: Strukturen von Ein- und Mehrträger-Modulationen für gleiche Symbol-Übertragungsraten. Dargestellt ist die frequenzmäßige Kanal-Belegung in Abhängigkeit von der Übertragungs-Zeit (Fläche aus Bandbreite  $\times$  Übertragungszeit)

In Bild 36.1 werden beim Mehrträgerverfahren  $2N + 1$  Teilkanäle verwendet. Die Symboldauer  $T_{SV}$  wird damit (mindestens) einen Faktor  $2N + 1$  mal so lang wie die Symboldauer  $T_{SE}$  des Einträger-Verfahrens. Die **Grenze für die Länge von  $T_{SV}$**  ist dadurch gegeben, daß während dieser Zeit **die Eigenschaften des Kanals praktisch konstant bleiben** müssen.

$$T_{SV} \geq (2N + 1) \cdot T_{SE} \tag{36.1}$$

Beim Einträger-Verfahren haben die Symbole die volle Bandbreite  $B_{CH}$  des Kanals. Sie füllen also den Übertragungskanal komplett aus. Die Bandbreite  $B_S$  der Subchannel des Mehrträger-Verfahrens haben dagegen eine geringere (Einzel-) Bandbreite. Da sie sich teilweise überlappen können, wird:

$$B_S \geq \frac{B_{CH}}{2N + 1} \tag{36.2}$$

Wenn für beide Verfahren jeweils eine gleiche Anzahl von Bits pro Symbol übertragen wird, ergibt sich daraus in der Darstellung in Bild 36.1 in beiden Fällen die gleiche Fläche, gebildet aus dem Produkt (Bandbreite  $\times$  Symboldauer, d.h.)

$$B_S \cdot T_{SV} \geq B_{CH} \cdot T_{SE} \tag{36.3}$$

Demnach kann für beide Verfahren dem Anschein nach<sup>36.2</sup> die gleiche Menge an Information bei gegebener Bandbreite  $B_{CH}$  übertragen werden.

<sup>36.2</sup>Hierbei müssen jedoch noch bei OFDM das Guard-Intervall und die Pilot-Symbole und bei COFDM die notwendige Faltungscodierung berücksichtigt werden.

## 36.2 Die Auswirkung der Echos im Zeitbereich

Die Impuls-Antwort  $c(t)$  terrestrische Funk-Kanäle besteht i.a. aus sehr vielen Echos, wie Bild 36.2 dies am Beispiel eines typischen DVB-T (*Digital Video Broadcast Terrestrial*; Digitales terrestrisches Fernsehen) Kanals zeigt. Aufgetragen ist die Echo-Struktur  $|c(t)|$  (Echo-Profil).

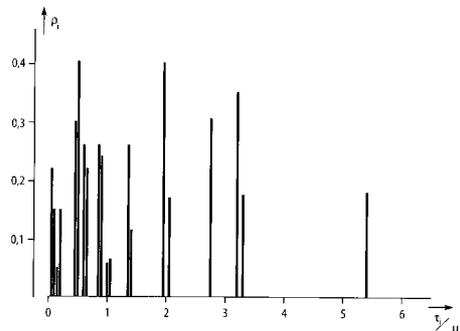


Bild 36.2: Echo-Struktur eines typischen terrestrischen DVB-T Kanals

In Bild 36.2 sind diese Echos als Profil betragsmäßig aufgetragen, also ohne Berücksichtigung der jeweiligen Phase. Man erkennt, daß keinesfalls der zuerst beim Empfänger eintreffende Impuls immer derjenige mit der größten Amplitude sein muß.

### 36.2.1 Modellfall: Nur 1 Subchannel ist aktiv

Beispielhaft soll in einem (sehr) vereinfachten Fall, bei dem nur in einem Subchannel ein Signal übertragen wird, gezeigt werden, wie sich die Echos auf das Empfangssignal auswirken, Bild 36.3. De facto sind dies Verhältnisse wie bei einer Einträger-Übertragung, bei der die Echostörungen kurz gegenüber der Symboldauer sind.<sup>36.3</sup> Das Empfangs-Signal bestehe hierbei aus Hauptsignal, 2 Echos und einem Gleichwellen-Kanal.

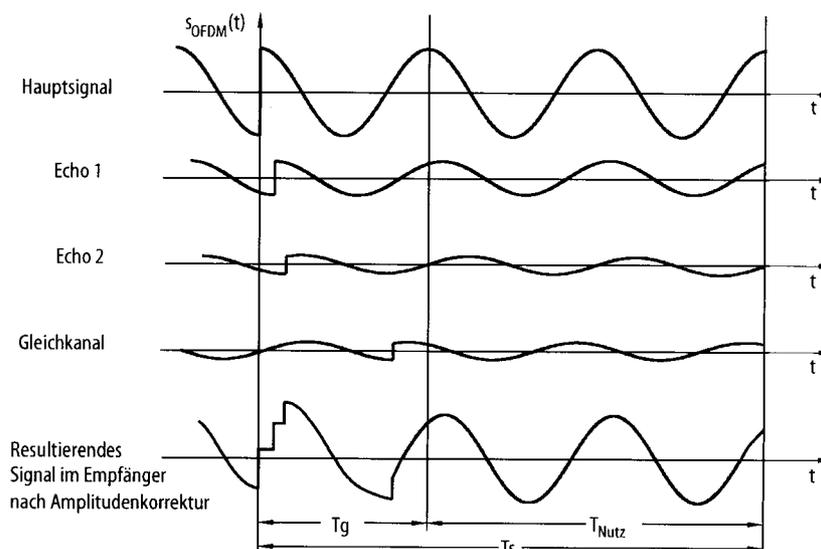


Bild 36.3: Zusammensetzung des Empfangs-Signals aus Haupt-Signal, Echo-Signalen und Gleichwellen-Signal (Nur 1 Subchannel ist aktiv)  $T_g = T_G$  Guard Time,  $T_s = T_{S_V}$  Symbol-Dauer,  $T_{Nutz}$  empfangsseitig ausgenutzter Teil des Symbols

Aus Bild 36.3 erkennt man folgende für OFDM typischen Eigenschaften und Zusammenhänge:

<sup>36.3</sup>Das „**selektive Fading**“ für den Gesamtkanal wird durch OFDM in ein „**Flat Fading**“ für die Teil-Kanäle umgewandelt.

1. Aus dem Hauptsignal ist zu erkennen, daß **keine Symbol-Verrundung** angewendet wird.  
Dies ist bei OFDM in der Praxis der Fall. Das Spektrum der OFDM muß daher nachträglich gefiltert werden.
2. Es ist ein Bereich  $T_G$  (*Guard Time*; Schutz-Zeit) definiert mit einer zeitlichen Dauer  $T_G$ , die **größer ist als die längste** (zu berücksichtigende) **Echo-Laufzeit**. Echos mit längerer Laufzeit bewirken Störungen.
3. Die gesamte Symboldauer  $T_{SV}$  wird in der Praxis 4 bis 8 mal so lange gewählt wie das Guard-Intervall  $T_G$ .
4. Während der (restlichen) Zeit  $T_{Nutz}$  hat das Symbol einen **stationären Wert** und kann dann ausgewertet werden.
5. Damit durch das Guard Intervall  $T_G$  nichts vom Symbol „verloren“ geht, wird ein entsprechend langer Teil vom Ende des Symbols zusätzlich am Anfang des Symbols als „Verlängerung“ angefügt, so daß trotz Störung durch Echos (mindestens) die volle Symboldauer als  $T_{Nutz}$  zur Auswertung Verfügung steht, Bilder 36.4 und 36.6.

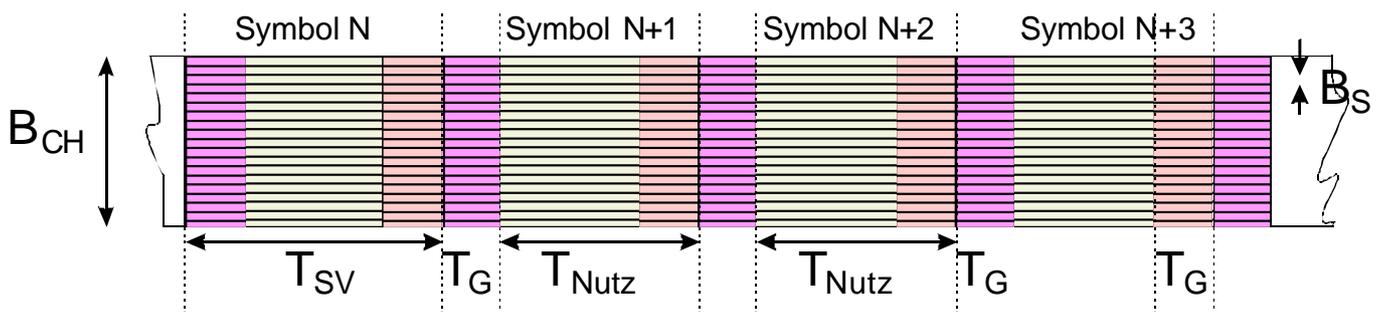


Bild 36.4: Struktur der Vielträger-Modulation mit Berücksichtigung des Guard-Intervalls

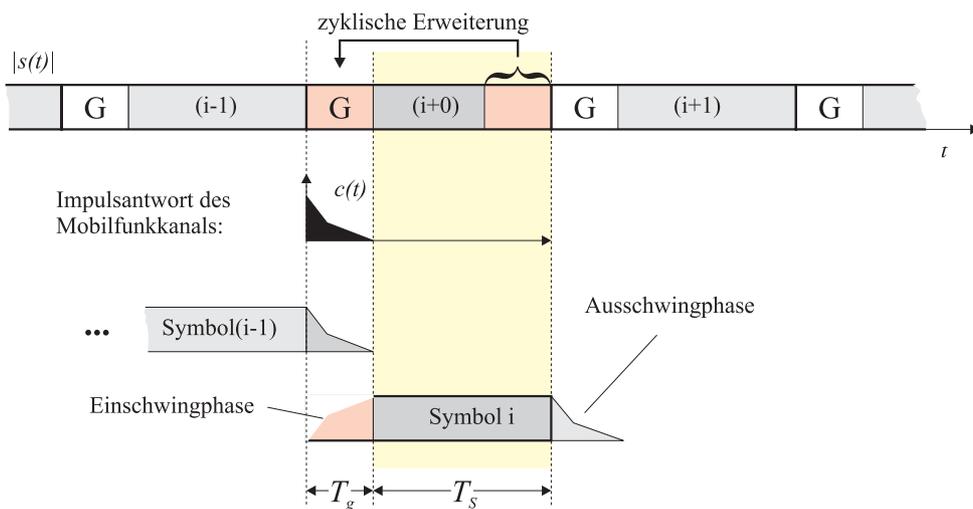


Bild 36.5: Darstellung des Ein- und Ausschwingvorgangs bei einer Mobil- bzw. Funk-Übertragung unter Berücksichtigung des Guard-Intervalls (hier ist  $T_{Nutz} = T_s$  bezeichnet).

6. Die während des Guard-Intervalls gesendete Signal-Energie ist für den Empfänger verloren.  
Der tatsächlich benötigte Wert von  $E_b/N_0$  für eine bestimmte Bit-Fehlerrate ist somit im Verhältnis  $\frac{T_G + T_{Nutz}}{T_{Nutz}}$  höher anzusetzen. In Bild 36.1 ist daher eine entsprechende Korrektur bei der Umrechnung vorzunehmen.

7. Die resultierende Phase der Trägerschwingung im Zeitabschnitt  $T_{\text{Nutz}}$  weicht ab von der Phase des Hauptsignals.
8. Die resultierende Amplitude der Trägerschwingung im Zeitabschnitt  $T_{\text{Nutz}}$  weicht ebenfalls ab von der Amplitude des Hauptsignals.
9. Ein Gleichwellen-Kanal (mit dem gleichen Programm-Inhalt) wirkt sich genau wie ein Echo aus. Daher ist mit einem solchen System ein Single Frequency Netzwerk (SFN) möglich.
10. Eine synchrone Demodulation mit (frequenz- und phasenrichtiger) Rückgewinnung des RF-Trägers (RF: *Radio Frequency*) ist erforderlich.

Aufgrund der Notwendigkeit eines Guard-Intervalls ist die mit OFDM übertragbare (Brutto-) Datenrate um den Faktor  $\frac{T_{\text{Nutz}}}{T_G + T_{\text{Nutz}}}$  geringer als es der Umrechnung in Gleichung (36.1) entspricht. Man erhält daher mit Berücksichtigung des Guard-Intervalls eine Verlängerung der (ausgesendeten) OFDM-Symbole.

$$T_{S_V} = T_G + T_{\text{Nutz}} = T_G + (2N + 1) \cdot T_{S_E} = \frac{T_G + T_{\text{Nutz}}}{T_{\text{Nutz}}} \cdot (2N + 1) \cdot T_{S_E} \quad (36.4)$$

Da die Fläche  $B_{CH} \cdot T_{\text{Zeiteinheit}}$  ein Maß für die übertragene Menge an Informationen ist, reduziert sich für OFDM die pro Zeiteinheit übertragbare Informationsmenge um den genannten Faktor von  $\frac{T_{\text{Nutz}}}{T_G + T_{\text{Nutz}}}$  gegenüber dem Ansatz gemäß Bild 36.1. Der Empfänger wertet nur die Zeitabschnitte  $T_{\text{Nutz}}$  aus, Bild 36.5.

### 36.3 OFDM Zeitverläufe

Bei drei aktiven Subchannels, jeweils mit reell positiven Binärsymbolen, ist die Form des OFDM-Symbols noch unmittelbar einsichtig, Bild 36.6. Ein Teil vom Ende des OFDM-Symbols ist am Anfang als Guard-Intervall angefügt, entsprechend zur Darstellung in Bild 36.5.

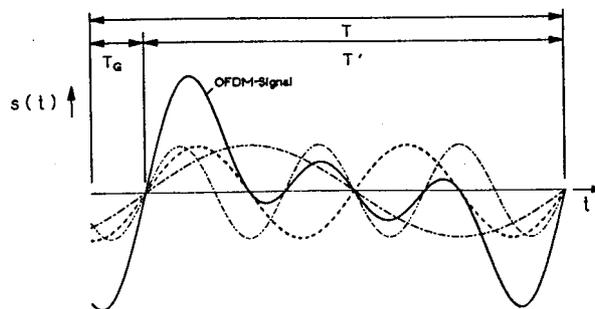


Bild 36.6: OFDM-Symbol bestehend aus 3 Subträgern mit vorne angefügtem Guard-Intervall (ohne Echos). Im Intervall  $T' = T_{\text{Nutz}}$  sind die Sub-Träger zu einander orthogonal.

Die Orthogonalität besteht (in diesem Beispiel) darin, daß die Frequenzen der Schwingungen in den Sub-Channel sich wie 1:2:4 verhalten.<sup>36.4</sup> Damit sind diese im Intervall  $T' = T_{\text{Nutz}}$  zu einander orthogonal.

#### 36.3.1 Hochstufige Datensymbole in vielen Sub-Channel

Werden höherstufige komplexe Datensymbole (64QAM, pseudo random Daten) und viele (ca. 280) aktive Sub-Channel verwendet, ergeben sich Zeitverläufe, wie sie beispielweise in Bild 36.7 dargestellt sind.

Die dargestellten OFDM-Symbole  $I(t)$  (reell) und  $Q(t)$  (imaginär) besitzen ebenfalls ein Guard-Intervall. Man erkennt dies daran, daß sich ab ca. 280 der gewählten Zeit-Skala der Zeitverlauf von 0 bis ca. 30 der Zeitskala wiederholt.

Bei 64QAM gibt es in den einzelnen Sub-Channel sowohl für  $I$  als auch für  $Q$  8 mögliche Zustände und damit 4 mögliche Amplituden mit je 2 möglichen Phasenlagen.<sup>36.5</sup> Die Überlagerung aller dieser möglichen Schwingungen führt auf einen scheinbar regellosen Verlauf der Zeitfunktionen  $I(t)$  und  $Q(t)$  in Bild 36.7.

<sup>36.4</sup>Sub-Channel 3 ist nicht aktiv.

<sup>36.5</sup>Siehe hierzu 25.2.4 „64QAM“ (Seite 120.)

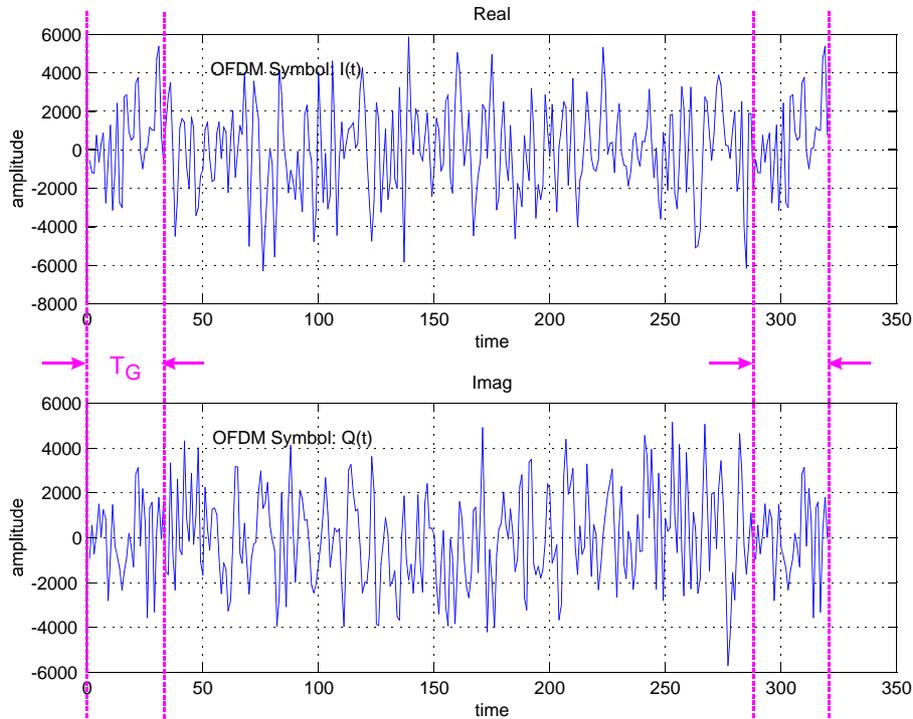


Bild 36.7: Prinzipielle Zeitverläufe von komplexen OFDM-Symbolen (mit Guard-Intervall und ohne Echos)

Der Zeitverlauf der OFDM-Symbole hat somit starke Ähnlichkeit mit dem Zeitverlauf von (bandbegrenztem) Weißen Rauschen. Die Analyse der Amplituden-Verteilungs-Dichte von OFDM-Signalen ergibt in guter Näherung eine Gauß-Glocke, unabhängig davon, ob z.B. 4PSK oder 16QAM als Modulation für die Subträger zur Anwendung kommt, Bild 36.8.

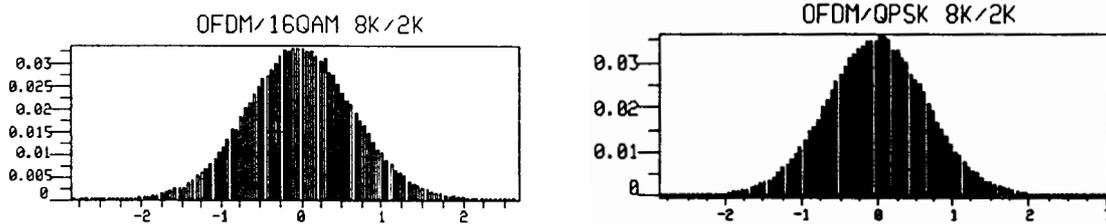


Bild 36.8: Wahrscheinlichkeits-Dichte-Verteilung der Amplituden von OFDM-Symbolen (DVB-T mit 2K bzw. 8K Sub-Channel)

Das bedeutet, daß OFDM einen so hohen Crest-Faktor von ca. 13 dB wie Rauschen mit Gauß-förmiger Amplituden-Dichte-Verteilung hat.<sup>36.6</sup>

### 36.3.2 Träger-Phasen und Crestfaktor

In Bild 36.6 ist bereits erkennbar, daß bei einem OFDM Signal leicht ein hoher Crest-Faktor  $C_F$  entstehen kann. Dieser ist definiert als Verhältnis von Spitzen-Wert (der Spannung) bezogen auf deren Effektiv-Wert.

$$C_F = 20 \log_{10} \left\{ \frac{s_{\text{peak}}}{s_{\text{eff}}} \right\} \tag{36.5}$$

Nachteilig an einem hohen Crest-Faktor  $C_F$  ist, daß der Sender sehr hohe Spitzenleistungen verkraften können muß, während er andererseits nur eine verhältnismäßig geringe mittlere Leistung abgeben kann.

<sup>36.6</sup>Siehe hierzu Kapitel 16.3.2 „Empfangs-Symbole durch weißes Rauschen gestört“ (Seite 74).

Offensichtlich entsteht ein (besonders) hoher Crestfaktor dann, wenn die Phasen aller Unter-Träger gleich sind, weil sämtliche I/Q Symbole die gleiche Phase haben, wie dies an einem entsprechenden Beispiel mit 16 Subchannel gezeigt wird, wobei alle Symbole den (reellen) Wert 1 haben, Bild 36.9.

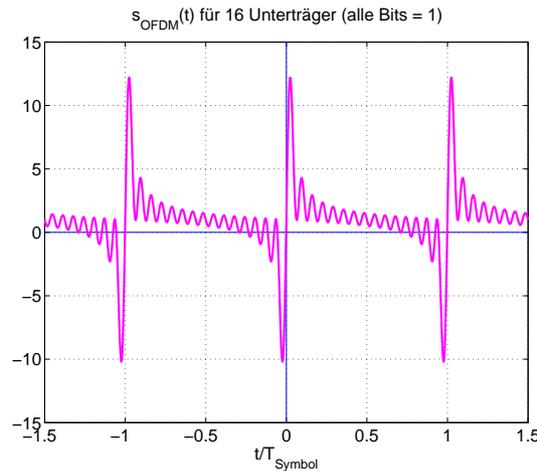


Bild 36.9: OFDM Zeitfunktion bei einer OFDM mit 16 Subchannel (Subträger sin förmig, alle Bits = 1)

Damit läßt sich abschätzen, welche Spitzen bei einem OFDM System auftreten könnten, wenn viele Sub-träger (infolge der Datensymbole) gleichphasig sind. Damit ein solcher Fall infolge der vielen benötigten Pilot-Symbole, siehe Bild 37.4 (Seite 176), nicht eintritt, werden die Phasenlagen der einzelnen Pilotsymbole nach einem bestimmten Algorithmus gegeneinander gedreht.

### 37 Die OFDM im Frequenzbereich

#### 37.1 Die Auswirkung der Echos auf die Kanal-Übertragungsfunktion

Die durch die Echos entstehenden Interferenzen sind sehr frequenz-selektiv. Sie wirken sich daher innerhalb der Bandbreite  $B_{CH}$  des Kanals sehr unterschiedlich aus und sind zusätzlich zeitlich veränderlich. Beispielhaft ergibt sich daraus eine Kanal-Übertragungs-Funktion  $C(\omega)$ , wie sie in Bild 37.1 als Betrag  $|C(\omega)|$  für ein System mit 16 Subchannels dargestellt ist.

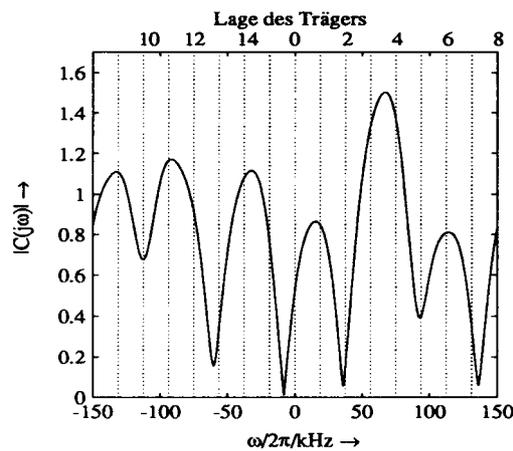


Bild 37.1: Betrag der Kanal-Übertragungs-Funktion  $|C(\omega)|$  für mehrere feste Echo-Pfade

Während sich die Echos bei der einen Frequenz „konstruktiv“ überlagern, gibt es andere (benachbarte) Frequenzen, wo sich die Echos „destruktiv“ überlagern und so zu Löschungen des Empfangs-Signals führen.

Aus der Darstellung Bild 37.1 ist zu sehen, daß hier 4 der 16 Teilkanäle (also 25%) nur sehr schwach beim Empfänger ankommen. Abhängig von der Größe der Störungen im Kanal sind daher (mindestens) die betroffenen Teilkanäle nicht mehr auswertbar, Bild 37.2.

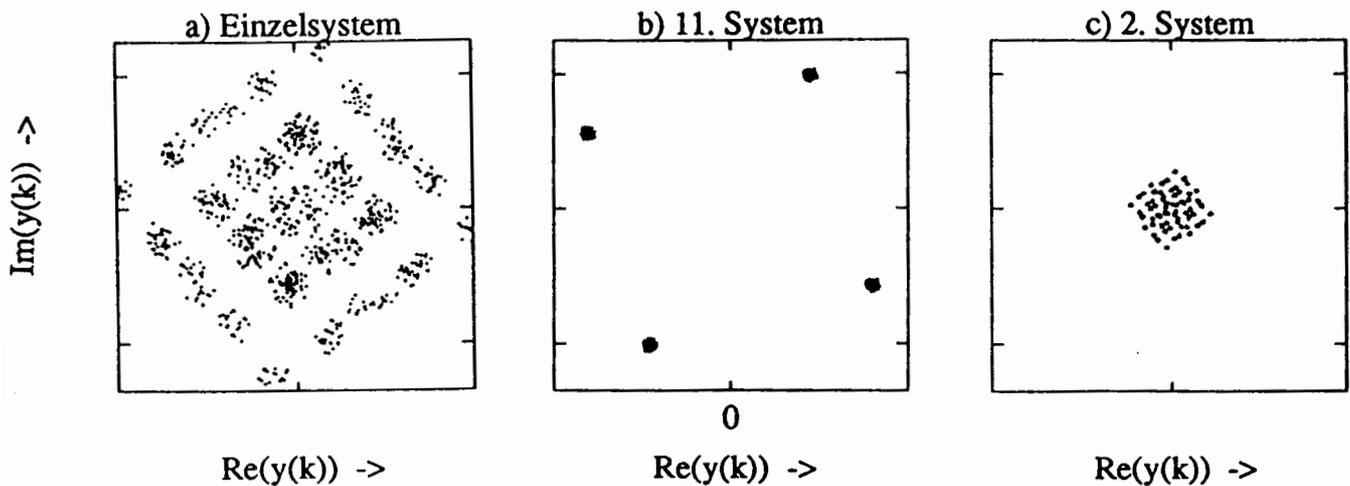


Bild 37.2: Phasensterne einer 4PSK nach der Übertragung über einen Kanal gemäß Bild 37.1; a): Übertragung als Einträger-Signal (nicht auswertbar), b): Subchannel 11 (auswertbar), c): Subchannel 2 (nicht auswertbar)

Während bei der Mehrträger-Übertragung nur einzelne Teil-Kanäle unbrauchbar sind, liefert eine Einträger-Übertragung (ohne empfangsseitige Entzerrung) einen „Punktehaufen“ statt eines Phasensterns und ist damit nicht auswertbar.

Gleichzeitig zeigt dieses Beispiel aber auch die Grenzen von OFDM auf:

- 25% Fehler ist eine Symbol-Fehler-Rate (*SER Symbol Error Rate*) von 0,25. Für eine Digitale Übertragung ist das absolut unbrauchbar! Für praktische Anwendungen ist i.a. eine Bit-Fehler-Rate (*BER Bit Error Rate*)  $BER < 10^{-4}$  erforderlich, wobei  $BER \geq SER$  ist.

Abhilfe schafft hier eine wirkungsvolle Fehlerschutz-Codierung, wodurch COFDM (*coded OFDM*) entsteht, siehe Abschnitt 41 (Seite 186). Daher wird praktisch auch nur COFDM verwendet, weil OFDM alleine wertlos ist.

- Infolge der Phasendrehungen der Teilkanäle sind die empfangsseitigen Phasensterne (individuell) gedreht. Vor der Demodulation und Entscheidung muß also eine **De-Rotation** (zurückdrehen zur Phase  $0^0$ ) erfolgen.

Bei einer 4PSK Modulation in den Subchannels ist ansonsten nach der De-Rotation die Größe des Phasensterns (d.h. die Amplitude) belanglos, soweit er nicht so klein ist, daß er im Rauschen untergeht. Das heißt, hier beschränkt sich die Symbol-Entscheidung auf eine Erkennung des betreffenden Quadranten.

Eine (differenzcodierte) 4PSK Modulation (DQPSK) wird bei DAB (digital audio broadcast) angewendet.

## 37.2 Höherstufige Symbol-Konstellationen in den Subchannels

Mit höherstufigen Modulationen in den Subchannels (16QAM, 64QAM) lassen sich bei gegebener Gesamt-Bandbreite  $B_{CH}$  des Funk-Kanals höhere Datenraten übertragen. Hiervon macht man Gebrauch bei DVB-T (Digitales Terrestrisches Fernsehen) und DRM (*Digital Radio Mondiale*, Digitaler Lang-, Mittel- und Kurzwellen-Rundfunk).

In diesen Fällen muß zur empfangsseitigen Demodulation auch der jeweilige Betrag bekannt sein. In einem Beispiel einer 16QAM (pro Subchannel) könnten sich z.B. Empfangszustände ergeben, wie sie in Bild 37.3 dargestellt sind. Vereinfachend soll dabei angenommen werden, daß das (aktuell) empfangene Symbol in jedem Subchannel gleich sein soll.

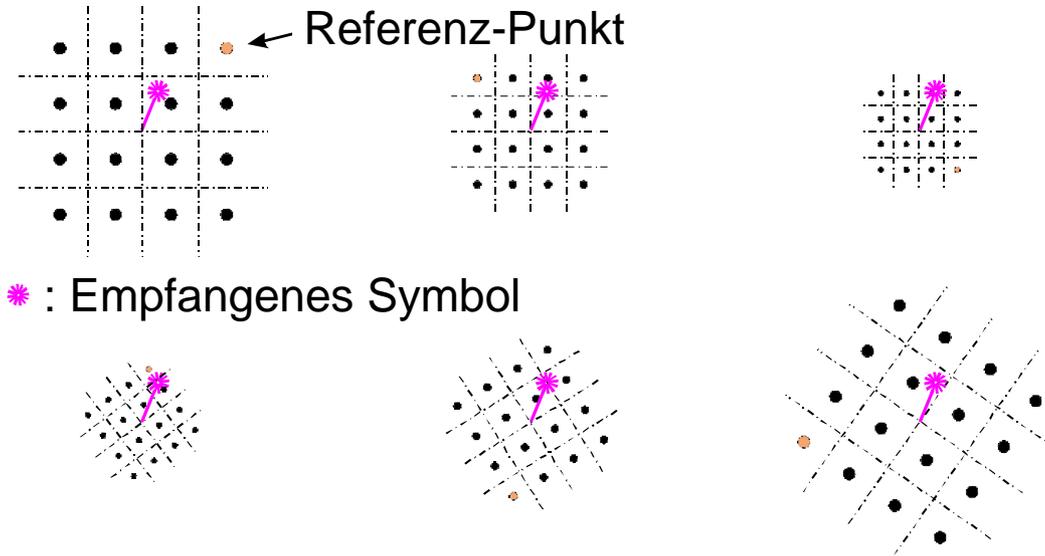


Bild 37.3: Phasensterne einer 16QAM nach der Übertragung über einen (Funk-) Kanal. Dargestellt sind das (jeweils als identische angenommene) Empfangs-Symbol und der hierfür aktuell gültige Phasensterne, der in seiner Amplitude und Phasendrehung (pro Subchannel) jeweils unterschiedlich ist.

### 37.3 Pilot-Symbole

Ohne Kenntnis der Phasendrehung und des Amplitudenmaßstabs für jeden Teilkanal ist offensichtlich eine Auswertung nicht möglich. Es ist empfangsseitig somit pro Subchannel eine **De-Rotation** und eine **Amplituden-Normierung** erforderlich. Um die dafür notwendige Information zu erhalten, müssen geeignete Pilot-Symbole in den Datenstrom eingebettet werden, Bild 37.4.

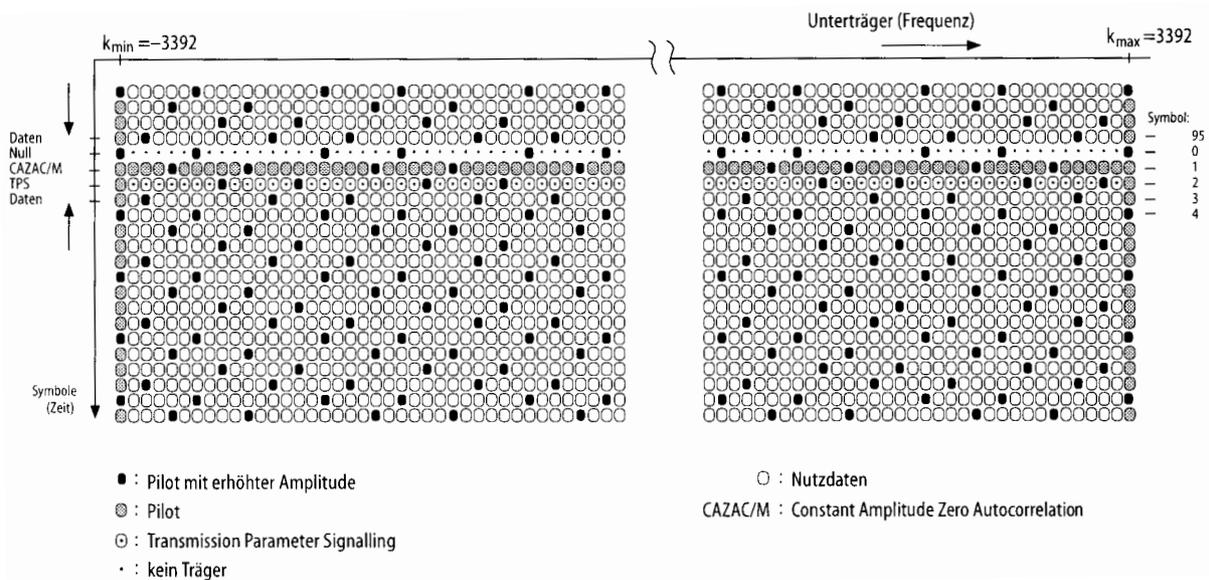


Bild 37.4: Struktur des DVB-T Rahmens mit Pilot-Symbolen zur Kanal-Vermessung

Die Pilot-Symbole müssen dabei in der Frequenz-Zeit-Ebene so angeordnet sein, daß jeweils das **Abtast-Theorem** erfüllt ist, d.h. aus der Kenntnis der dadurch erhaltenen Stützwerte für die Amplituden und Phasen der Frequenz-Zeit-Fläche muß deren Verlauf interpolierbar sein. Einige Pilot-Symbole werden mit erhöhter Leistung gesendet, damit sie mit einem entsprechend besseren Signal-zu-Geräusch-Abstand empfangen werden.

Ist der Kanal „schwierig“, müssen viele Pilote übertragen werden. Zudem lassen sich dann nur noch niederstufige Modulationen verwenden. Die Brutto-Rate der Nutzdaten erniedrigt sich entsprechend. Dieser Fall tritt z.B. bei der digitalen Kurzwellen-Übertragung auf. Entsprechend bescheiden wird dadurch die übertragbare Audio-Qualität.

Ist der Kanal „einfach“, werden weniger Pilote benötigt, wodurch mehr Nutzdaten übertragen werden können. Zusätzlich sind dann auch höherstufige Modulationsverfahren anwendbar. Dieser Fall tritt z.B. bei einer digitalen Lang- und Mittelwellen-Übertragung während des Tages auf, wodurch dann eine gute Audio-Qualität realisierbar wird.

In Bild 37.4 ist dies weiterhin erkennbar, daß die übertragenen Daten in Form von Rahmen strukturiert sind. Dies ist für die empfangsseitige Synchronisation notwendig.

- Das OFDM-Symbol #0 besteht nur aus einzelnen Piloten. Deren Verteilung kann zur Charakterisierung des betreffenden Senders (bzw. des SFN) verwendet werden.
- Das OFDM-Symbol #1 stellt eine CAZAC/M Sequenz (*Constant Amplitude Zero Auto Correlation*) dar, die zur Synchronisation mittels Korrelation verwendet wird.
- Mit dem OFDM-Symbol #2 werden Steuersignale zur Einstellung des Demodulators im Empfänger (auf den aktuellen Übertragungs-Mode) übertragen.
- Zwei bis 3 Subchannels übertragen ausschließlich Pilot-Symbole (hier dargestellt die Sub-Channel  $k_{\min}$  und  $k_{\max}$ ). Diese „*continuous pilots*“ dienen zur Frequenz-Synchronisation des Empfängers.

### 37.4 Zeit- und Frequenz-Abhängigkeit der Kanal-Übertragungsfunktion

Betragsmäßig stellt sich die durch die Interpolation zu bestimmende Kanal-Übertragungsfunktion  $|C(\omega, t)|$  als Fläche über Frequenz und Zeit (Frequenz-Zeit-Fläche) beispielsweise wie in Bild 37.5 dar. Hier sind zeitlich unveränderliche Reflexionsverhältnisse angenommen, wodurch eine regelmäßige Struktur der Übertragungsfunktion entsteht, wie an den Konturlinien erkennbar wird.

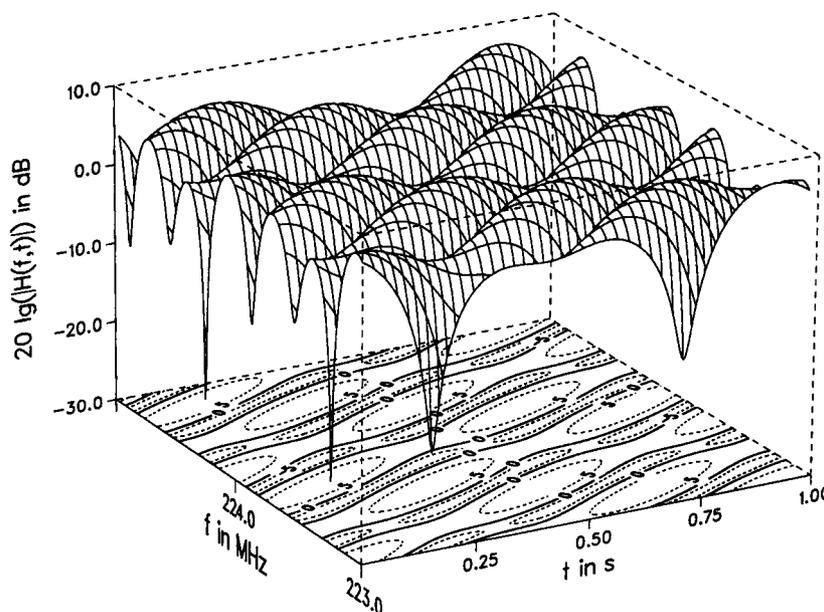


Bild 37.5: Beispiel einer zeit- und frequenz-abhängigen Kanal-Übertragungsfunktion  $20 \log_{10}\{|C(\omega, t)|\}$  (drei Wege Ausbreitung)

Da bei digitaler Übertragung der Signal-zu-Geräusch-Abstand stets so gering wie gerade noch zulässig gewählt wird, hat dies zur Folge, daß — bildlich ausgedrückt — die OFDM Symbole an der Stelle der „Einbrüche“ in der Frequenz-Zeit-Fläche in den Störungen „untergehen“. Die zu diesen Zeiten in den betroffenen Subchannels übertragenen Daten sind somit verloren.

## 38 OFDM Modulatoren und Demodulatoren

Im Prinzip ist das Blockschaltbild für den Sender und den Empfänger für ein Vielträgerverfahren ganz einfach. Man benötigt nur für jeden Teilkanal einen I/Q Modulator im Sender und einen I/Q Demodulator im Empfänger, also insgesamt je  $2N + 1$  Stück bei  $2N + 1$  Subchannels.

### 38.1 Analoge Realisierung des OFDM Modulators

Damit bekommt der OFDM Modulator (bzw. Sender) prinzipiell eine Struktur gemäß Bild 38.1.

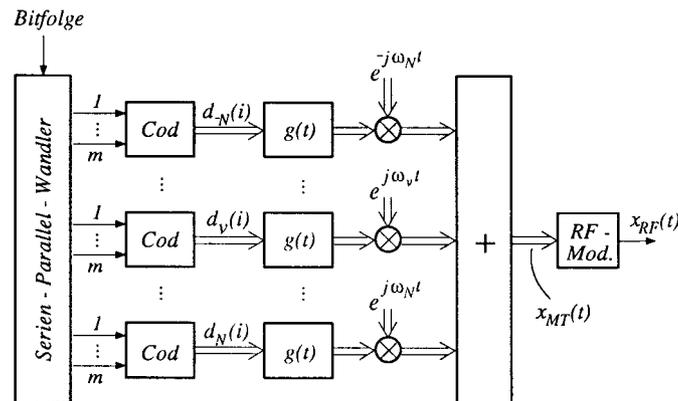


Bild 38.1: Prinzipielles Blockschaltbild eines OFDM Modulators, wie er in analoger Technik realisiert werden könnte. Benötigt werden  $2N + 1$  Multiplizierer und die zugehörigen Oszillatoren.

- Die einlaufenden Datenbits werden in  $2N + 1$  Blöcke à  $m$  bits aufgeteilt, entsprechend zu den gewählten Symbolen. Anschließend werden die nächsten  $(2N + 1) \cdot m$  Bits des Datenstromes genau so verarbeitet.
- Jeweils  $m$  Bits werden zu (komplexen) Symbolen eines  $2^m$  Alphabets gemappt.<sup>38.1</sup>
- Der Block  $g(t)$  stellt den Interpolator und das Symbol-Verrundungs-Filter dar. Die Interpolation hat dabei so zu erfolgen, daß die (komplexen) Symbole anschließend in Echtzeit verfügbar sind.
- Die (komplexen) Symbole werden jeweils mit einem I & Q Träger auf die entsprechende Subträger-Frequenz umgesetzt (komplexe Multiplikation mit anschließender Bildung des Realteils).
- Alle Sub-Kanäle werden addiert.
- Der mit „RF-Mod“ bezeichnete Block beinhaltet einen Multiplizierer (technisch: Mischer) und einen Oszillator, womit das modulierte OFDM-Signal auf die endgültige Frequenz umgesetzt wird.

Die  $2N + 1$  Mischer und die zugehörigen  $2N + 1$  Umsetz-Oszillatoren sind das Problem bei einer analogen Realisierung dieses Konzeptes. Insbesondere ist es technisch unmöglich diese Oszillatoren in Bezug auf deren Frequenzen und (gegenseitigen) Phasen stabil zu bekommen.

### 38.2 Analoge Realisierung des OFDM Demodulators

Ein prinzipiell ähnliches Blockschaltbild existiert auch für den Empfänger, Bild 38.2.

Die  $2N + 1$  Umsetz-Oszillatoren für die Subchannels müssen nun jeder für sich mit dem entsprechenden Umsetz-Oszillator im OFDM Sender frequenz- und phasenrichtig synchronisiert sein, da eine synchrone Demodulation notwendig ist. Das ist eine mit analoger Technik kaum lösbare Aufgabe.

Ansonsten enthält das Blockschaltbild des Demodulators keine Besonderheiten.

- Ein erster Frequenz-Umsetzer (mit „RF-Demod“ bezeichnet) mischt zunächst herunter als Umkehrung des entsprechenden Schrittes im Modulator.

<sup>38.1</sup>Der Mapper ist hier mit „Cod“ (Codierer) bezeichnet.

- Es folgen die gerade angesprochenen  $2N + 1$  Umsetz-Oszillatoren für die Subchannels.
- Nach einem Matched Filter, dessen Impulsantwort mit  $h(t)$  bezeichnet ist, folgt die Abtastung.
- Die Abtastwerte der empfangenen Symbole werden einem Entscheider zugeführt, der die Schätzung vornimmt.
- Danach werden die erkannten Symbole de-mapped (mit „Decod.“ bezeichnet) und die daraus gewonnenen Bitfolgen in einem Parallel-Seriell-Wandler wieder zu einem gesamten Bitstrom zusammengefügt.

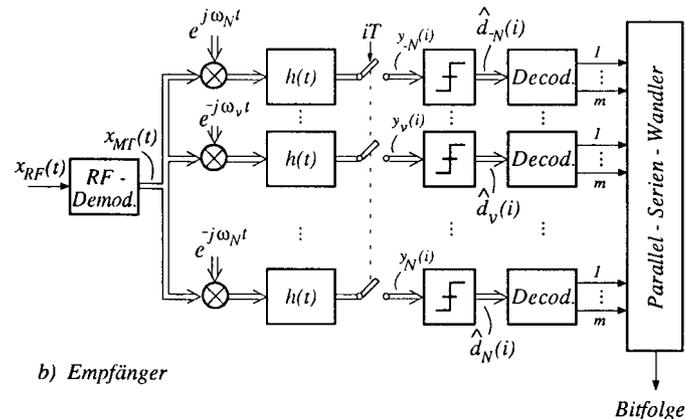


Bild 38.2: Prinzipielles Blockschaltbild eines OFDM Demodulators, wie er in analoger Technik realisiert werden könnte. Benötigt werden  $2N + 1$  Multiplizierer und die zugehörigen Oszillatoren, die synchronisiert werden müssen.

### 38.3 Digitale Realisierung des OFDM Modulators und Demodulators

Betrachtet man das Blockschaltbild des OFDM Modulators, Bild 38.1, so genügt es doch offensichtlich, wenn die Bedingung für die Echtzeit für das dort mit  $x_{MT}(t)$  bezeichnete Signal vor dem analogen Frequenz-Umsetzer erfüllt ist. Es ist also leicht möglich, sämtliche davor liegenden Schritte rein digital, d.h. softwaremäßig durchzuführen.

Entsprechendes gilt auch für den OFDM Empfänger.

Die Fast Fourier Transformation (FFT/IFFT) stellt den Algorithmus zur Verfügung, der die ganze Vor-Modulation auf die  $2N + 1$  Subträger mit einem Schlag leistet. Allerdings muß dabei ein Kompromiß eingegangen werden, damit die Ordnung der FFT in vernünftigen Grenzen bleibt und damit unter Echtzeitbedingungen ausgeführt werden kann:

- Als Symbolform wird die Rechteck-Form  $\square$  angenommen, wodurch man mit 1 Stützwert für jedes Symbol auskommt; also **keine Symbol-Verrundung!** Dies wird sich auf das OFDM Spektrum entsprechend auswirken.

Der digitale OFDM Modulator unterscheidet sich daher vom analogen im Prinzip nur bezüglich der Art und Weise, wie die Modulation auf die Subcarrier erfolgt.

- Im OFDM Modulator wird der ankommende Datenstrom (wie bei dem analogen Blockschaltbild) demultiplexed.
- Anschließend werden daraus (unverrundete,  $\square$  förmige) komplexwertige Symbole gebildet. (mapping)
- Diese bilden die Eingangsgrößen für die IFFT (*Inverse Fast Fourier Transform*).
- Die IFFT transformierten Symbole werden addiert und bilden das OFDM Zeit-Signal, welches nach einer D/A-Wandlung mittels eines Frequenz-Umsetzers (RF Mod) auf die (nominelle) Sende-Frequenz transponiert wird.

Hiermit erhält man das digitale Blockschaltbild für die OFDM Übertragung, Bild 38.3.

Im Empfänger werden die entsprechenden Stufen in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen.

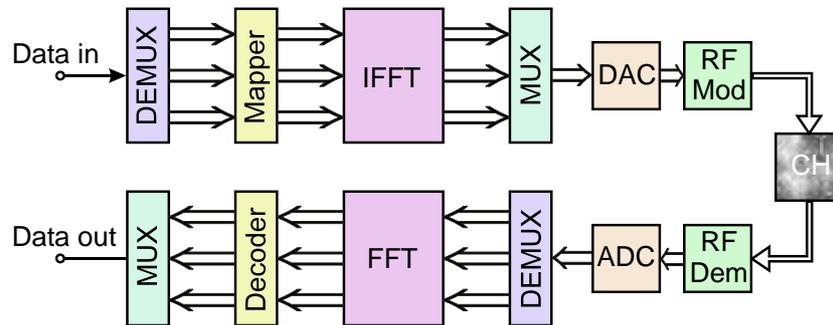


Bild 38.3: Prinzipielles Blockschaltbild eines digitalen OFDM Modulators und Demodulators, bei dem die Modulation durch eine IFFT und die Demodulation durch eine FFT erfolgen.

### 38.3.1 Warum IFFT im Sender und FFT im Empfänger?

Da die IFFT die (eindeutige) Umkehrung der FFT ist, wäre es eigentlich gleichgültig, wenn der Sender die FFT und der Empfänger die IFFT ausführen würde. Die getroffene Festlegung läßt sich jedoch anschaulich wie folgt erklären.

Das ausgesendete OFDM Signal stellt ein Zeitsignal dar. Üblicherweise ist das Ausgangssignal einer IFFT ebenfalls ein Zeitsignal. Daher kommt also die Festlegung.

Das OFDM Zeitsignal hat somit eine Spektral-Verteilung wie es der Form nach dem Signal am Eingang des IFFT Blocks entspricht. Das ist aber die Summe der (rechteckförmigen) Symbole in den *Sub Channel*.

## 39 Leistungs-Dichte-Spektrum der OFDM

### 39.1 Leistungs-Dichte-Spektrum am Sender-Ausgang

Zunächst wird mit Hilfe des Blockschaltbildes des OFDM Modulators, Bild 38.1 (Seite 178), und der Herleitung in Kapitel 3 „Spektren Digitaler Signale“ im Teil „Basisband-Signale“ eine Aussage über das Leistungs-Dichte-Spektrum der OFDM gemacht.

Hierzu sei unterstellt, daß die Daten (und damit auch die Symbole) der OFDM statistisch von einander unabhängig sein sollen.<sup>39.1</sup> Damit ist die AKF (*Auto Correlation Function*) der Symbole  $R_{ss}(\tau) = \delta(\tau)$ , weshalb deren spektrale Leistungsdichte  $S_{ss}(\omega) = 1$  und damit konstant wird.

Die spektrale Leistungs-Dichte in jedem Subchannel  $\nu$  der OFDM ist somit nur noch von der (rechteckigen) Form  $\Pi_{T_S/2}(t)$  der Symbole abhängig. Damit folgt für das Leistungs-Dichte-Spektrum in jedem Subchannel  $\nu$ :

$$S_\nu(\omega) = \left| \frac{\sin((\omega - \omega_\nu)T_S/2)}{(\omega - \omega_\nu)T_S/2} \right|^2 \quad (39.1)$$

### 39.2 Leistungs-Dichte-Spektrum im Empfänger und Orthogonalität

Vereinfachend läßt sich das Spektrum der OFDM anschaulich mit Hilfe einer Graphik erklären, Bild 39.1. Hierbei ist angenommen, daß die Symbole nur (noch) die Länge  $T_{\text{Nutz}}$  haben sollen. Dies entspricht den Verhältnissen im Empfänger nach der Elimination des Guard-Intervalls.

Damit die Zusammenhänge übersichtlich bleiben, sollen nur insgesamt 5  $\Pi$ -förmige Binär-Symbole zur Bildung eines OFDM Signals verwendet werden. Die Trägerfrequenzen  $\omega_\nu$  der Subchannels sind so gewählt, daß für den Subchannel  $S_1$  ( $\nu = 1$ ) exakt 1 Periode der Trägerschwingung mit der Frequenz  $\omega_1$  in die Zeit  $T_{\text{Nutz}}$  hineinpaßt. Die Subcarrier-Frequenzen  $\omega_\nu$  werden zu  $\nu \cdot \omega_1$  gewählt, so daß dann  $\nu$  Perioden der entsprechenden Sub-Träger-Schwingung in die Zeit  $T_{\text{Nutz}}$  hineinpassen. Man erhält somit (im Empfänger) Bursts gleicher zeitlicher Dauer mit zu einander orthogonalen Sub-Träger-Frequenzen.

- Die Orthogonalität der Sub-Träger-Frequenzen findet sich wieder als „O“ im Namen von OFDM.

<sup>39.1</sup>Für die Pilot-Symbole trifft das nicht zu.

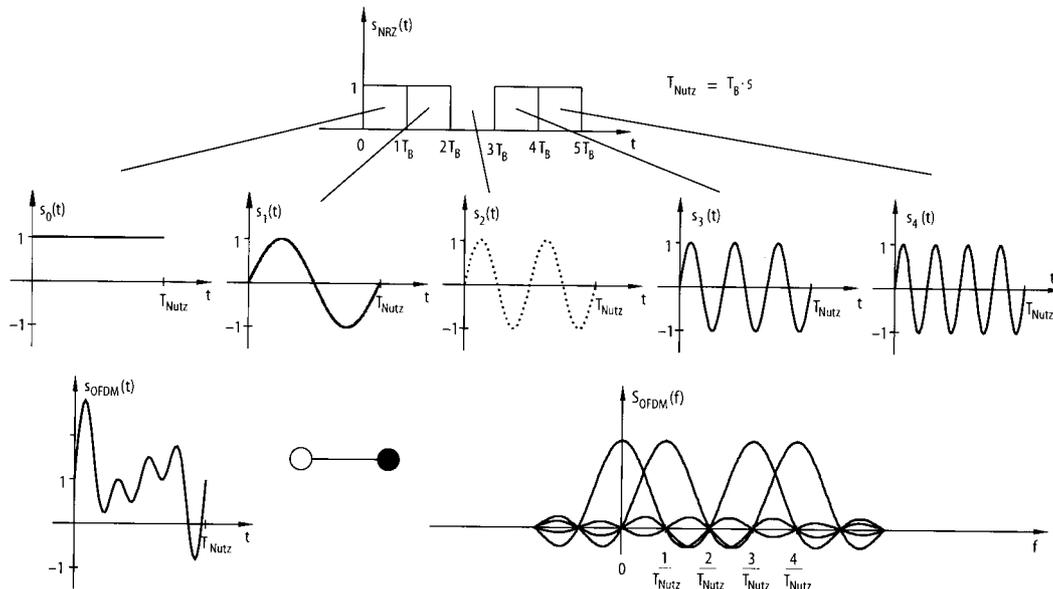


Bild 39.1: Prinzipielle Zusammenhänge zwischen den Daten und den Symbolen einer OFDM und das OFDM Summen-Signal und dessen Spektral-Verteilung. (ohne Guard-Intervall, alle Symbole  $T_{Nutz}$  lang)

- Der Abstand der Subcarrier ist  $f_s = \frac{1}{T_{Nutz}}$  bzw.  $\omega_s = \frac{2\pi}{T_{Nutz}}$
- Aufgrund der Orthogonalität kann jeder Sub-Channel störungsfrei (d.h. ohne Störung durch die anderen) ausgewertet werden.
- Die Orthogonalität ist nur dann gegeben, wenn empfangsseitig **exakt** die Länge des Nutz-Intervalls  $T_{Nutz}$  ausgewertet wird.
- Im Sendesignal besteht keine Orthogonalität, da  $T_{Sv} > T_{Nutz}$  ist, vergleiche Bild 36.6 (Seite 172).

Betrachtet wird (in diesem Beispiel) also das Summensignal, das tatsächlich dem Empfangs-Signal nach Abtrennung des Guard-Intervalls entspricht, da es auf das Intervall  $T_{Nutz}$  beschränkt ist.

$$s_{OFDM}(t) = \sum_{\nu=0}^{N=4} s_{\nu}(t) = \sum_{\nu=0}^4 \Pi_{T_{Nutz}/2}(t - T_{Nutz}/2) \cdot \sin(2\pi f_{\nu} t); \quad f_{\nu} = \frac{\nu}{T_{Nutz}}; \quad \omega_{\nu} = \frac{\nu \cdot 2\pi}{T_{Nutz}} \quad (39.2)$$

Jeder Burst  $s_1(t)$  bis  $s_4(t)$  stellt einen modulierten Rechteck-Impuls dar. Die zugehörigen Spektralverteilungen (in einseitiger Darstellung) sind die um  $f_{\nu}$  frequenzmäßig verschobenen  $\frac{\sin(x)}{x}$  Verläufe, entsprechend zum Modulationssatz.

- Die Orthogonalität zeigt sich (nach der Abtrennung des Guard-Intervalls) **im Spektrum der OFDM** darin, daß die  $\frac{\sin(x)}{x}$  Verläufe die Bedingung nach **Nyquist 1** einhalten. Bei jedem Maximum eines  $\frac{\sin(x)}{x}$  haben alle anderen eine Nullstelle. Die Maxima werden daher durch die anderen Ausläufer nicht verfälscht.<sup>39.2</sup>

Obwohl die Spektren der Subchannels sich teilweise überlagern, lassen sich die zugehörigen Zeitfunktionen infolge der Orthogonalität empfangsseitig wieder rückwirkungsfrei trennen.

### 39.3 Gemessene OFDM Spektren

Wie aus Bild 39.1 zu erkennen ist, ist das Spektrum einer OFDM (nach der Abtrennung des Guard-Intervalls) näherungsweise von der gleichen Form wie die Daten- bzw. Symbol-Belegung am Eingang des IFFT Prozessors. Insbesondere an den Stellen, wo die Symbole 0 sind, hat man deutliche Lücken im Spektrum der OFDM.

<sup>39.2</sup>Siehe hierzu Bild 19.2 (Seite 89), wobei dort die Zeit-Achse hierfür durch eine Frequenz-Achse zu ersetzen ist.

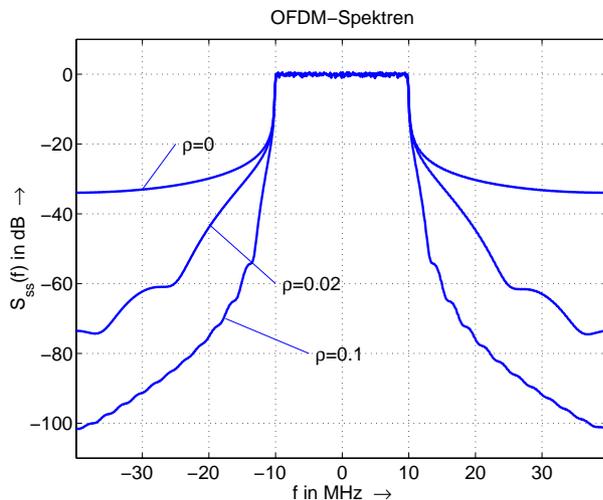


Bild 39.2: Spektren am Ausgang des OFDM Modulators. Hierbei ist dargestellt, wie günstig sich bereits eine geringe Roll-Off Verrundung ( $\rho = [0, 0.02, 0.1]$ ) auswirkt.

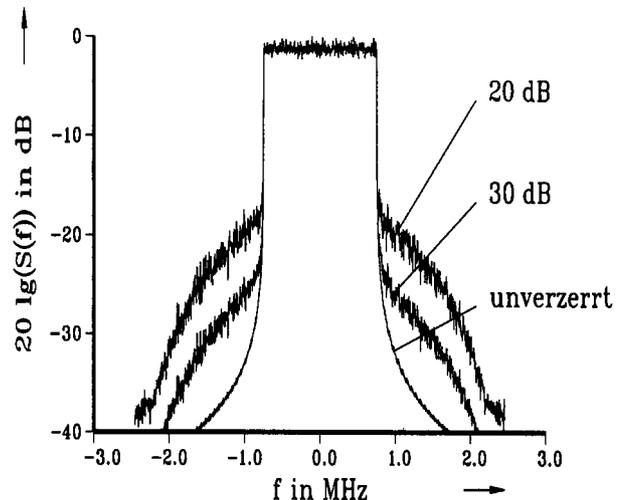


Bild 39.3: OFDM Spektren am Ausgang eines Senderverstärkers. Bereits ein Intermodulations-Abstand von 30 dB bzw. 20 dB führt zu starken Randaussendungen.

Bei den OFDM Spektren am Sender-Ausgang sind die einzelnen Sub-Channels nicht so deutlich erkennbar, da hier (infolge des Guard-Intervalls) keine Orthogonalität herrscht. Bild 39.2 zeigt berechnete OFDM-Spektren. Bei der unverrundeten Symbolform ( $\square$ ) haben die Teilkanäle im Spektrum eine  $\frac{\sin(x)}{x}$  Form. Daher ist der Schulter-Abstand<sup>39.3</sup>  $S_D < 20$  dB und die Nebenausstrahlungen sind sehr hoch. Bereits eine sehr geringe Symbol-Verrundung (Roll-Off  $\rho = [0.02, 0.1]$ ) wirkt sich günstig auf die Außerband-Strahlung aus. Bei OFDM ist jedoch keine Verrundung der Symbole üblich, so daß das Spektrum gemäß dem Fall mit  $\rho = 0$  entsteht. Die Außerband-Strahlung wird in der Praxis durch eine nachträgliche steilflankige Filterung beseitigt.<sup>39.4</sup>

Im OFDM-Spektrum von Bild 39.3 wurde zunächst ein OFDM Signal (mit  $\rho = 0$ , also  $\square$  förmige Symbole) so gefiltert, daß das mit „unverzerrt“ bezeichnete Spektrum entsteht. Beim Durchgang dieses Signals durch einen im Prinzip „linearen“ Sendeverstärker kommt es infolge des hohen Crest-Faktors der OFDM zum Clipping der Amplituden-Spitzen. Dies äußert sich in unerwünschten Spektral-Anteilen außerhalb des Nutzkanals, die als Neben- oder Stör-Aussendungen bezeichnet werden. Dieser Fall tritt offensichtlich bereits ein, wenn der Senderverstärker noch 30 dB (Faktor 30 in der Spannung) *Headroom* (Abstand zur Übersteuerungsgrenze) hat. Der notwendige Headroom wird bei einem Sendeverstärker auch als „back-off“ bezeichnet.

### 39.3.1 Erniedrigung des Crest-Faktors der OFDM ohne Erhöhung der Randaussendungen

Notwendige Back-Off Faktoren von 20 dB (oder höher) sind in der Praxis nicht vertretbar. Dies würde bedeuten, daß die effektive Leistung eines Senders nur  $\frac{1}{100}$  seiner Spitzen-Leistung sein dürfte! Die Investitionskosten der Sender würden dadurch unwirtschaftlich hoch ansteigen.

Zur Erhöhung der effektiven Sendeleistung empfiehlt es sich daher, das OFDM Zeitsignal gezielt (und damit definiert) in seiner Amplitude zu begrenzen, damit bei gegebener Spitzen-Leistung eines Sendeverstärkers noch genügend effektive Leistung erzeugt werden kann. Ein „hartes“ Clipping kann dabei nicht zur Anwendung kommen, weil es sonst, wie in Bild 39.3 gezeigt ist, zu unzulässig hohen Nebenausstrahlungen kommt. Es gibt hierfür verschiedene Verfahren, denen allen gemeinsam ist, daß sie zeit- und rechen-aufwändig sind.

1. Unterteilen jedes OFDM-Symbols in mehrere (z.B. 4) gleich große Bereiche und systematisches Verdrehen der Phasenlagen (z.B. um Vielfache von  $\pi/2$ ) der einzelnen Bereiche gegeneinander und Heraussuchen derjenigen Transformierten, die den geringsten Crest-Faktor aufweist.

Die Information über die benötigten Teil-Rotationen muß zusätzlich übertragen werden. Das muß zeitlich vor der Übertragung des gedrehten Symbols passieren, also im vorausgehenden Symbol. Dadurch wird eine entsprechende Zwischenspeicherung erforderlich, die eine Zeitverzögerung bedeutet.

<sup>39.3</sup>Der Schulter-Abstand ist der Unterschied zwischen dem Betrag des Spektrums im Kanal und dessen Wert unmittelbar am Rand desselben.

<sup>39.4</sup>Diese Methode bedeutet eine (leichte) Verbiegung des ausgesendeten OFDM-Signals.

- Erhöhen der Zahl der Unterträger um eine Anzahl von „Dummy“-Unterträgern. Diese werden gezielt so ausgesucht, daß der Crest-Faktor des OFDM-Symbols reduziert wird.

Die „Dummy“-Subchannels müssen zusätzlich übertragen werden, wodurch die Brutto-Datenrate erhöht oder die Netto-Datenrate erniedrigt wird. Hierbei kann im Extremfall die Hälfte aller Subchannels (z.B. jeder zweite) aus „Dummy“-Kanälen bestehen.<sup>39.5</sup>

- Festlegen einer Schwelle für den zulässigen Crest-Faktor und „Verbiegen“ des Vektor-Diagramms durch Hinzufügen von geformten Impulsen geeigneter Größe und Phase (soft clipping).

Es muß zwar hier keine Zusatz-Information übertragen werden, jedoch bedeuten die hinzugefügten Impulse eine Erhöhung des Störgeräusches in Bezug auf die Datenübertragung. Man kann hier also nicht beliebig „verbiegen“, weil sonst die Symbol- und Bit-Feherrate unzulässig ansteigt. Dieses Verfahren ist „verlust-behaftet“, läßt sich im Empfänger also nicht umkehren.<sup>39.6</sup>

In Bild 39.4 ist gezeigt, wie mit einigem Aufwand der Crest-Faktor einer OFDM nach der 2. Methode sogar bis auf 3 dB erniedrigt werden kann. Das OFDM-Symbol wird dadurch stark verformt, wie aus dem Vergleich der Vektor-Diagramme erkennbar wird. In mehreren Iterations-Schritten erreicht man damit schließlich eine Erhöhung des Schulterabstandes im Spektrum auf ca. 50 dB, auch wenn der Sende-Verstärker (wie in diesem Beispiel) nur ein Back-Off von 3 dB aufweist, Bild 39.5.

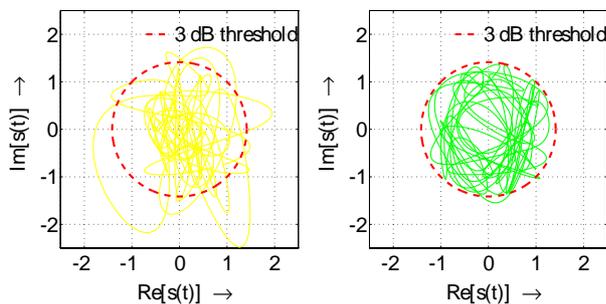


Bild 39.4: Vektor-Diagramm eines OFDM-Symbols vor und nach der Begrenzung des Crest-Faktors auf 3 dB durch „Dummy“-Daten

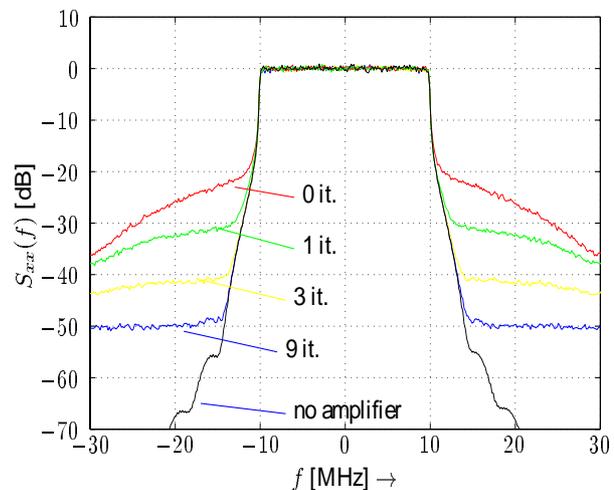


Bild 39.5: OFDM Spektren ohne und mit „Dummy“-Daten zur Reduzierung der Nebenausstrahlung, Back-Off 3 dB (mehrere Iterationen)

## 40 Analyse des OFDM Empfängers

### 40.1 Auswertung von Mis-Matched Symbolen

Der OFDM Sender verwendet (pro Subchannel)  $\square$  förmige Symbole der Länge  $T_{SV}$ . Im Empfänger werden  $\square$  förmige Symbole der Länge  $T_{Nutz}$  ausgewertet.  $\square$  förmige Symbole sowohl im Sender, als auch im Empfänger sind (zu 100 %) an einander angepaßt (matched) für den Fall, daß sie gleich lang sind. Sind wie bei OFDM die

<sup>39.5</sup>Eine Modifikation dieses Verfahrens, bei dem (im Spektrum) in der einen Hälfte Daten und in der anderen Hälfte nur Dummy-Daten übertragen werden, wird bei DRM als „Simulcast“-Verfahren angewendet. Durch Hinzufügung eines RF-Trägers in der Mitte des Spektrums erreicht man schließlich, daß damit die Hüllkurve der modulierten Schwingung (bei idealer Übertragung) mit einer Amplituden-Modulation übereinstimmt. Ziel ist es hierbei, daß herkömmliche AM-Empfänger auch nach einer Umstellung auf Digitale Modulation (während einer Übergangszeit) noch weiter betrieben werden können. Da die AM jedoch nur im Zusammenwirken aller Subchannels (quasi als Kompensation der Daten durch die Dummy-Daten) entsteht, bewirkt jegliche Störung dieser Kompensation durch den Übertragungs-Kanal, daß der demodulierten AM ein sehr deutlich wahrnehmbares scharfes Rauschen überlagert ist.

<sup>39.6</sup>Wird dieses Soft-Clipping auf die Bereiche kleiner Amplituden angewendet, läßt sich damit ein „Loch“ in das Vektor-Diagramm der OFDM einbringen. Dieses wird zur Reduzierung der Außerband-Strahlung erforderlich, wenn Sende-Verstärker mit EER-Technik zum Einsatz kommen.

Sende-Symbole um  $T_G$  länger als die Symbole, mit denen sie im Empfänger verglichen werden, hat man einen Fall von „*mis-matched*“, wodurch ein Energie-Verlust entsteht, der aber durch entsprechende Erhöhung der Sende-Leistung ausgeglichen werden kann.

Gemäß dem Blockschaltbild für den OFDM Empfänger, Bild 38.2 (Seite 179), werden die Signale der Subchannels nach dem Heruntermischen durch die  $2N + 1$  Mischer und Oszillatoren jeweils einem gleichartigen Matched Filter  $h(t)$  zugeführt. Dieses Matched Filter wird als Korrelator ausgeführt.

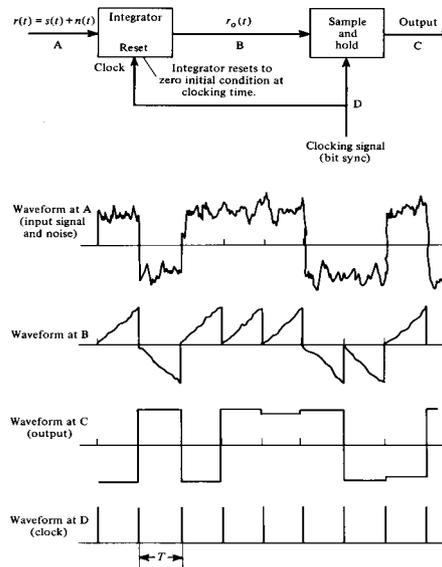


Bild 40.1: Intergrate & Dump Verfahren bei rechteckförmigen Symbolen, das für jeden Subchannel auszuführen ist.

Rechteckförmige Symbole lassen sich besonders einfach mit Hilfe eines Korrelations-Empfängers auswerten, der nach dem „Integrate and Dump“ Verfahren arbeitet und auf diese Weise eine Matched Filtering durchführt.<sup>40.1</sup> Bild 40.1 zeigt die dabei auftretenden Signale, wenn beim Heruntermischen nur der Konstant-Anteil entstünde.

Tatsächlich entsteht auch noch eine Komponente die eine  $\cos$ -förmige Schwingung mit der jeweiligen doppelten der Umsetzfrequenz  $2\omega_v$  darstellt, da alle Frequenz-Umsetzer das gesamte OFDM Signal umsetzen, noch jede Menge  $\cos$ -förmiger Schwingungen mit anderen Frequenzen.

- Aufgrund der **Orthogonalität** filtert das „Integrate and Dump“ Verfahren hierbei jeweils nur den Gleichanteil heraus, da infolge der Integrationszeit  $T_{\text{Nutz}}$  von sämtlichen entstehenden  $\cos$ -förmigen Schwingungen über **exakt** eine ganze Anzahl von Perioden integriert wird, wodurch sich hierfür jeweils der Wert Null ergibt. Somit ist **keine explizite Filterung notwendig**.<sup>40.2</sup> Es zeigt sich an dieser Stelle, wie wichtig die Orthogonalität für den OFDM Empfänger tatsächlich ist.

## 40.2 Die FFT im Empfänger

Dieser „Integrate und Dump“ Prozess muß nun für jeden Subchannel so erfolgen. Da die Verarbeitung digital erfolgt, wird die Integration durch eine Summation ersetzt und damit approximiert. Der Prozess, der dies für alle Teilkanäle simultan durchführt, ist die DFT (*Discrete Fourier Transform*), die im Empfänger ausgeführt wird. Zur Durchführung der DFT existiert ein effizienter und schneller Algorithmus, die FFT (*Fast Fourier Transform*). Übliche FFT Algorithmen arbeiten mit einer 2er Potenz von Stützstellen, also z.B.  $2^M$ .

Die empfangenen OFDM Symbole werden abgetastet und davon jeweils  $2^M$  Stützstellen gebildet. Die dadurch erhaltenen  $2^M$  komplexen Abtastwerte sind die Eingangsgrößen für die FFT. Die FFT berechnet daraus die gleiche Anzahl  $2^M$  komplexer Werte als Frequenz-Koeffizienten. Diese entsprechen den  $2^M$  komplexen Symbolen am Ausgang des Mappers auf der Sende-Seite und somit den demodulierten Daten-Symbolen.

<sup>40.1</sup>Siehe Kapitel 16.3.1 „Korrelations-Empfänger“ (Seite 72). Dort ist auch gezeigt, daß der Korrelations-Empfänger einem Matched-Filter-Empfänger gleichwertig ist.

<sup>40.2</sup>Der „Integrate und Dump“ Prozess ist äquivalent zu einer  $\frac{\sin(x)}{x}$  Filterung, bei der sämtliche Subträger-Frequenzen auf die Nullstellen fallen, wenn exakt über  $T_{\text{Nutz}}$  integriert wird.

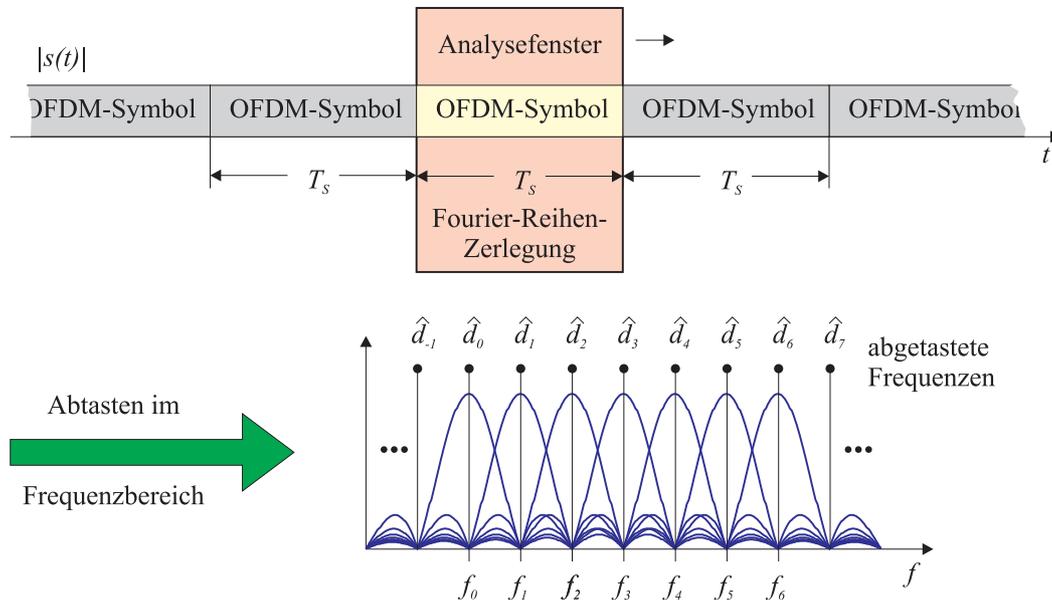


Bild 40.2: Veranschaulichung des FFT Analyse-Vorgangs im OFDM Empfänger ( $T_S = T_{\text{Nutz}}$ )

Bildlich ausgedrückt wird das empfangene Signal durch ein Analyse-Fenster betrachtet und jeder dieser Abschnitte als in sich **periodisch fortgesetzt** angenommen. Von einer (nunmehr) periodischen Zeitfunktion wird dann die Fourier-Reihe berechnet, Bild 40.2. Diese Vorgehensweise stellt eine Veranschaulichung der Wirkungsweise der FFT dar.

Auch bei der FFT ist die Orthogonalität entscheidend.<sup>40.3</sup> Nur dann, wenn eine volle Periode einer Schwingung oder Vielfache davon in das ( $\square$  förmige) Fenster der FFT fallen, entsteht kein „Leak-Effekt“ („Lattenzaun“-Effekt).

- Nur dann, wenn die Orthogonalitätsbedingung empfangsseitig exakt erfüllt ist, fallen die mit der FFT berechneten Abtastwerte (Stützstellen) im Frequenzbereich auf die Maxima der  $\frac{\sin(x)}{x}$  förmigen Spektren der einzelnen Subchannels und damit gleichzeitig auf die Nulldurchgänge der  $\frac{\sin(x)}{x}$  förmigen Spektren aller anderen (benachbarten) Subchannels. Infolge der  $\frac{\sin(x)}{x}$  Form ist daher ein sehr genaues Einhalten des Timings für die Abtastwerte notwendig.<sup>40.4</sup>

Anders ausgedrückt: Bei Nichteinhaltung der Orthogonalität enthalten die Abtastwerte — und damit die Empfangssymbole — Störanteile, die von allen anderen Symbolen abhängen. Dies kann zu Fehlern bei der Decodierung der Symbole führen.

### 40.3 Synchronisation

Nach dem Einschalten des OFDM Empfängers muß zunächst ein Synchronisierungs-Vorgang stattfinden. Dieser setzt sich aus mehreren Teilen zusammen.

1. Auffinden der Grenzen der OFDM Symbole, damit die FFT ausgeführt werden kann.  
Erst danach kommt man an die Daten überhaupt erst heran.
2. Detektieren der Continuous Pilots und Korrektur der Frequenz.
3. Detektieren des Anfangs des OFDM Rahmens und Durchzählen der OFDM Symbole.
4. Feinkorrektur des Zeitrahmens mittels AKF der CAZAC Symbole.

<sup>40.3</sup>Bei praktischen Realisierungen eines OFDM Empfängers kann die Orthogonalität z.B. durch Frequenz- und Phasen-Fehler oder durch Phasen-Rauschen des Lokaloszillators, sowie durch Ungenauigkeiten des Zeittaktes verloren gehen.

<sup>40.4</sup>Ein gleichartiges Problem ergab sich bei der Symbol-Verrundung. Dort wurde jedoch die  $\frac{\sin(x)}{x}$  Verrundung als technisch unbrauchbar verworfen.

## 5. Auswertung der TPS (*Transmission Parameter Signalling*) Informationen.

Die meisten dieser Vorgänge werden mit Hilfe der Korrelation (KKF oder AKF) ausgeführt. Als Beispiel soll die Methode zur Auffindung der Symbol-Grenzen betrachtet werden.

Hierbei spielt das Guardintervall eine wichtige Rolle. Nach Bild 36.5 (Seite 171) stellt das Guardintervall eine zyklische Erweiterung der Symbole dar. Man hat somit am Anfang und am Ende des ausgesendeten OFDM-Symbols zwei identische Abschnitte.

Wird daher im Empfänger das empfangene OFDM Signal (kreuz-) korreliert mit dem um die Zeit  $T_{\text{Nutz}} - T_G$  verzögertem OFDM Signal, so ergeben sich jeweils dann Maxima, wenn die Guardintervalle mit den entsprechenden Teilen der Symbole zusammenfallen. Daraus gewinnt man dann die Information über die Symbol-Grenzen.<sup>40.5</sup>

Zur Veranschaulichung dieser Methode ist in Bild 40.3 die Autokorrelation (AKF) einer OFDM gezeigt. Der maximale Peak in der Mitte entspricht der exakten Überdeckung der Symbole, während die kleineren Peaks zu beiden Seiten die Übereinstimmung der Enden der Symbole mit den jeweiligen Guardintervallen zeigt. Die Höhe der Peaks ist dabei proportional zur jeweiligen Zeitdauer.

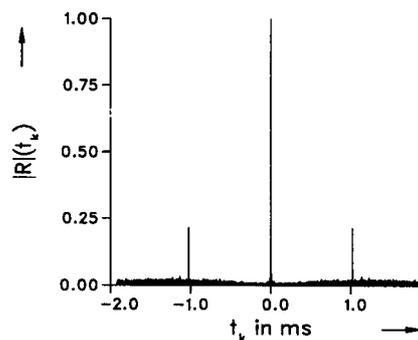


Bild 40.3: Autokorrelationsfunktion des OFDM Signals

## 41 Von der OFDM zur COFDM

Betrachtet man die OFDM aus dem Blickwinkel des Empfängers, so interessiert insbesondere die empfangsseitig erzielbare Fehlerrate, die möglichst gering sein sollte. Unter Berücksichtigung der Ausbreitungsverhältnisse im Funk-Kanal wurde bereits im Kapitel 36.2 „Die Auswirkung der Echos im Zeitbereich“ (Seite 170) deutlich, daß dabei die OFDM auf untragbar hohe Fehlerraten in der Größenordnung von  $10^{-1}$  kommt. Es muß also eine leistungsfähige Fehlerschutz-Codierung (FEC *Forward Error Correction*) erfolgen.

### 41.1 Die Notwendigkeit einer Fehlerschutz-Codierung

Ein einfaches Beispiel dient der Verdeutlichung der Problemstellung. Hierfür wird angenommen, daß im Kanal eine 2 Wege Ausbreitung stattfindet, wobei jeder dieser Übertragungswege zu Empfangssignalen mit gleicher Amplitude beim Empfänger führt. Der direkte Pfad und der Echo-Pfad sind also gleich stark. (Unterschied ist 0 dB.) Die Verzögerung (*delay*)  $T_E$  des Echos solle  $T_E = T_G = T_{\text{Nutz}}/4$  betragen und somit gerade noch im zulässigen Bereich liegen.

Bei einer 2 Wege-Ausbreitung mit 0 dB Echos stellt sich der Kanal als Kamm-Filter dar. Die einzelnen Durchlaßbereiche der Kanal-Übertragungsfunktion erhalten die Form einer Cos-Kuppe  $|\cos|$ . Betrachtet man die empfangene Leistung, wird daraus eine  $\cos^2$  Form, Bild 41.1. Wegen  $T_E = T_{\text{Nutz}}/4$  wird dabei jeder 4. Subchannel gelöscht.

Auch wenn das Signal-zu-Geräusch Verhältnis im Kanal ansonsten  $\infty$  groß wäre, ergibt sich hier eine Symbol-Fehler-Rate (SER symbol error rate) von 25%.<sup>41.1</sup>

<sup>40.5</sup>Die Echo-Störungen des Kanals machen eine Mittelung über mehrere Korrelationsergebnisse erforderlich.

<sup>41.1</sup>Vergleichsweise ist dagegen eine Störung durch einen einzelnen Störträger harmlos (wenn auch praktisch nicht vernachlässigbar), bei dem 1 von  $2N + 1$  Subchannel gestört ist.

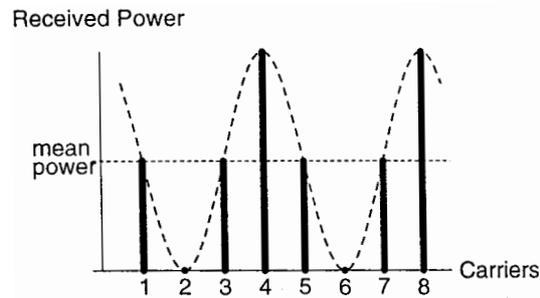


Bild 41.1: Empfangsleistung in den Subchannels bei einer 0 dB Zweiwegeausbreitung (Ausschnitt)

Eine Fehlerschutzcodierung, die mit „harten“ Symbol-Entscheidungen (hard decision) arbeitet, ist hier nicht geeignet. Die Lösung des Problems besteht in einer Faltungs-Codierung (*Convolutional Coding*) mit Soft Decision Decodierung (*Soft-Decision Decoding*). Soft Decision bedeutet, daß nicht nur entschieden wird, ob ein Symbol diesseits oder jenseits einer Schwelle zuzuordnen ist, sondern daß auch noch bewertet wird, wie sicher diese Entscheidung ist.

#### 41.1.1 Ein Vergleich mit einer Einträger-Übertragung

Zur Darstellung des Prinzips genügt es, eine 2PSK Übertragung zu betrachten. Die nominellen Empfangswerte seien  $+1$  und  $-1$  und die Entscheidungs-Schwelle sei beim Wert  $0$ .

Ein Empfänger mit *Hard Decision* Entscheidungen ordnet alle Empfangssymbole, die mit Werten  $> 0$  empfangen werden, dem Wert  $1$  zu und entsprechendes gilt für Empfangssymbole mit Werten  $< 0$ , die dem Wert  $-1$  zugeordnet werden. Es wird also eine „Vorzeichen“-Entscheidung getroffen. Es gibt wenig Zweifel daran, daß diese Entscheidung richtig ist, wenn die empfangenen Symbole betragsmäßig groß sind.

Wird jedoch z.B. ein Symbol mit dem Wert  $0.3$  empfangen, wurde höchst wahrscheinlich eine  $1$  gesendet. Es gibt aber (abhängig von der Störung im Kanal) auch eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine  $-1$  gesendet wurde. Das Vertrauen in die Richtigkeit der Entscheidung wächst also, wenn der Kanal zu diesem Zeitpunkt ein großes Signal-zu-Geräusch Verhältnis hatte.

Der erste Schritt lautet daher:

- Die Information über den Zustand des Kanals (*CSI Channel-State Information*) wird bei einer Soft Decision mit ausgewertet.

Realisiert ist eine solche Decodierung in einem Viterbi Decoder mit Soft Decision. Ein Viterbi Decoder speichert Informationen über den Verlauf der empfangenen Sequenzen und gewinnt daraus Werte für deren relative Wahrscheinlichkeit. Mit dieser Kenntnis entscheidet er dann auf  $-1$  oder  $1$  gemäß der größten Wahrscheinlichkeit (*Maximum Likelihood*).

Zur Berechnung werden die logarithmierten Wahrscheinlichkeitswerte benutzt (*log Likelihood*), weil sonst die Werte für die Wahrscheinlichkeiten multipliziert werden müßten. Im Falle von 2PSK ist das entsprechende Maß für die Log-Likelihood (oder die Metrik) für die Zuverlässigkeit der Entscheidungen direkt proportional zum Abstand von der Entscheidungs-Grenze. Daher erhält der Viterbi Decoder die beiden Informationen (Vorzeichen und Abstand) um daraus eine Soft Decision generieren zu können.

Für höherstufige Modulationen gibt es im Prinzip ähnliche Entscheidungskriterien für eine Soft Decision.

#### 41.1.2 Anwendung auf Mehrträger-Modulation

Bei einem zeitinvarianten Einträger-System werden alle Symbole im Mittel durch die gleiche Geräuschleistung beeinträchtigt. Für die Soft-Decision muß nur die zufällige Variation der Geräuschleistung von Symbol zu Symbol berücksichtigt zu werden.

Bei einem Mehrträger-System müssen diesbezüglich die einzelnen Subchannel betrachtet werden, weil für jeden ein anderes Signal-zu-Geräusch Verhältnis bestehen kann. Z.B. wird ein Subchannel, der in ein Notch fällt, praktisch nur noch Geräuschleistung enthalten. Die Symbole, die darin übertragen werden haben absolut keine Zuverlässigkeit. Diese Symbole erhalten ein Flag, womit sie als unzuverlässig gekennzeichnet sind. Umgekehrt werden die Symbole, die in einem Subchannel mit hohem Signal-zu-Geräusch Verhältnis übertragen werden, a priori eine größere Zuverlässigkeit haben. Diese a priori Information wird mit CSI (*Channel State Information*) bezeichnet.

## 41.2 Zweiwege Pfad und punktierte Faltungs-Codes

Im Beispiel des Bildes 41.1 werden alle Symbole (bzw. Bits) die aus der Auswertung der ausgelöschten Subchannels stammen als „absolut unzuverlässig“ gekennzeichnet (*flag*). Dies ist gleichbedeutend wie eine Löschung (*erasure*). Der Viterbi Decoder nimmt praktisch zur Kenntnis, daß er über diese Bits keine Informationen hat.

Es gibt in der Codierungs-Theorie einen anderen Fall, bei dem auch regelmäßige Erasures zum Einsatz kommen. Dies sind die **punktierten Faltungs-Codes** (*Punctured Convolutional Codes*).

Faltungs-Codes erzeugen (nach einem vorgegebenen Muster) z.B. 2, 3 oder mehr Ausgangs-Bits pro Eingangs-Bit. Man erhält damit Code-Raten von  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  usw. Die Fehlerkorrektur-Eigenschaften der Faltungs-Codes werden dabei um so besser, je kleiner die Code-Raten sind. Aber die zu übertragenen Daten-Raten steigen entsprechend an.

Die Leistungsfähigkeit der Faltungs-Codes ist so gut, daß diese selbst dann noch vorteilhaft sind, wenn bei der Übertragung systematisch Bits weggelassen werden. Dies wird mit Punktierung (*Puncturing*) bezeichnet.

Als Beispiel soll ein Rate  $\frac{1}{2}$  Faltungs-Code betrachtet werden. Diese macht aus 1 Eingangs-Bit 2 Ausgangs-Bits oder entsprechend aus 2 Eingangs-Bits 4 Ausgangs-Bits. Wird davon 1 Bit punktiert, so gibt es 3 Ausgangs-Bits für 2 Eingangs-Bits, was einen punktierten Faltungs-Code mit Code-Rate  $\frac{2}{3}$  darstellt. Dieser ist noch sehr leistungsfähig betreffend der Fehlerschutz-Codierung.

Das interessante Ergebnis besteht darin, daß eine COFDM Übertragung mit Faltungs-Codierung der Rate  $\frac{1}{2}$  und Soft Viterbi Decodierung, bei der jede 4. Subchannel ausfällt (stark selektiver Kanal) damit immer noch so gut ist wie eine Einträger-Übertragung mit Code-Rate  $\frac{2}{3}$  bei nicht frequenzselektivem Kanal und Soft Viterbi Decodierung. Dies ist die Stärke von COFDM.

## 41.3 Interleaving

Bei **kürzerem Echo-Delay** werden die **Notches im Frequenzbereich breiter**, so daß immer mehrere neben einander liegende Kanäle davon erfaßt werden. In solchen Fällen erhielte der Viterbi-Decoder keine Einzel-Fehler, mit denen er gut zurecht kommt, sondern **Bündel-Fehler**. Um solche Bündel-Fehler zu vermeiden, werden die Daten senderseitig umsortiert (*interleaving*). Bei Mehrträger-Verfahren kann dabei sowohl ein **frequenz-mäßiges Interleaven** (innerhalb einer OFDM Symbols) als auch ein **zeit-mäßiges Interleaven** zum Einsatz kommen.

Besteht nur eine ausgeprägte Selektivität im Frequenzbereich, genügt das frequenzmäßige Interleaving, wie z.B. bei DVB-T. Kommt eine Zeit-Selektivität hinzu, wie z.B. beim mobilen Empfang von DAB oder bei Ionosphären-Ausbreitung von Kurzwellen bei DRM, ist auch noch ein zeitmäßiges Interleaving notwendig.

Bild 41.2 stellt das Interleaving schematisch dar.

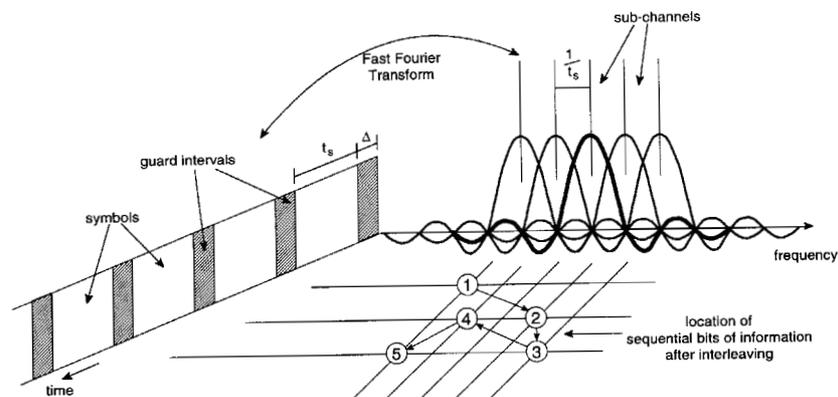


Bild 41.2: Veranschaulichung des Interleaving in der Zeit- und Frequenz-Ebene

## Einträger-Modulation mit Frequenzbereichsentzerrung

Digitale Funkübertragungen erleiden auf dem Übertragungsweg Störungen, die dadurch zustande kommen, daß

- das Empfangssignal schwach ankommt und deshalb verrauscht ist. In der Praxis wird die Sendeleistung so groß gewählt, daß der Einfluß des Rauschen auf die Fehlerrate vernachlässigt werden kann.
- mehrere unterschiedlich lange Ausbreitungswege bestehen, wodurch die unterschiedlichen „Funkstrahlen“ (gegeneinander) verzögert eintreffen (*Delay Spread*). Hierdurch entstehen
  - Interferenzen und
  - die Datensymbole werden durch die Echos verformt.

Durch *Delay Spread* ergibt sich ein **Frequenz-selektives** Verhalten des Übertragungskanal.

- Sender und/oder Empfänger und/oder Reflektoren sich bewegen, wodurch Doppler Verschiebungen der „Funkstrahlen“ entstehen (*Doppler Spread*). Hierdurch werden
  - die Frequenzbänder (Kanäle) der Übertragung verbreitert und
  - die Datensymbole zusätzlich (auf zufällige Weise) moduliert.

Durch *Doppler Spread* ergibt sich ein **Zeit-selektives** Verhalten des Übertragungskanal.

Das Prinzip einer digitalen Übertragung besteht darin, daß der Sender exakt definierte — und dem Empfänger (genau so) bekannte — Symbole überträgt. Ein Symbol ist hierbei eine vereinbarte Kurvenform (im Zeitbereich), die aus Gründen der Bandbreite „verrundet“ ist, wengleich häufig zur (zeichnerischen) Vereinfachung  $\square$ -förmige Symbolformen gewählt werden. Zur graphischen Veranschaulichung genügt dann sogar „nur“ ein einzelner Punkt in der komplexen Ebene, wodurch sich das Konstellationsdiagramm der verwendeten Modulationsart ergibt.

In der Regel wird jeweils nur eine einzige Symbolform benutzt. Die übertragenen Symbole unterscheiden sich dann „nur“ in ihren Amplituden und/oder Phasenlagen. In diesen Unterschieden wird die digitale Information codiert und damit übertragen. Die Aufgabe des digitalen Empfängers besteht deshalb genau darin, die Amplituden und/oder Phasenlagen der übertragenen Symbole zu erkennen und daraus wieder die hierfür vereinbarte Bitkombination auszugeben.

Um die Amplituden und/oder Phasenlagen der empfangenen Symbole zu erkennen, vergleicht der Empfänger diese mit der ihm bekannten Form der Symbole und der (zulässigen Werte für) Amplituden und Phasenlagen. Dieser Vergleich geschieht im Zeitbereich durch Korrelation oder durch Matched Filterung. Als Ergebnis des Vergleichs stehen zu den Abtastzeitpunkten Werte zur Verfügung, die mit den im Empfänger gespeicherten Werten verglichen werden. Der Empfänger wählt dabei jeweils den Wert aus, der auf den geringsten Unterschied führt.

Während gegen die Störung durch Rauschen eine Erhöhung der Sendeleistung genügt, hilft das gegenüber Echstörungen (und Dopplerstörungen) nicht weiter. Bei einer Erhöhung der Sendeleistung erhöhen sich auch die Amplituden der Echos, weshalb man dadurch praktisch nichts gewinnt. Die einzige Möglichkeit besteht nur darin, die schädliche „Wirkung“ des Funk-Kanals zu kompensieren. Dies führt auf die Forderung, daß der Empfänger ein zusätzliches „Filter“ benötigt, das alle Störungen, die auf Echos und Dopplerverschiebungen bestehen, wieder „zurechtbiegt“. Ein solches Filter wird mit Kanal-Entzerrer bezeichnet.

- Da die Störungen durch Echos und Doppler dem Empfänger zunächst nicht bekannt sind — und sich zudem ständig ändern — wird eine Methode benötigt, um den Kanal zu vermessen, also seine Eigenschaften (zeitnah) zu bestimmen.
- Da sich die Eigenschaften des Kanals (in zufälliger Weise) ändern, muß das Entzerrerfilter seine Eigenschaften entsprechend nachjustieren können.

Die Einstellung der Koeffizienten des Entzerrerfilters kann auf folgende Weise geschehen.

- Der Sender übermittelt (periodisch wiederholt) eine vorgegebene Datenfolge (Testsequenz, Trainingssequenz, Universal Word), die der Empfänger (genau kennt und) dazu benutzt, um die Filterkoeffizienten des Equalizers so einzustellen, daß Symbolform und Amplituden/Phasenlagen optimal übereinstimmen. Wenn sich die Eigenschaften des Funkkanals nicht (extrem schnell) ändern, kann man davon ausgehen, daß diese Filtereinstellungen auch für kurz zuvor und kurz danach übertragene Symbole richtig sind.

- Unter Verzicht auf spezielle Trainingssequenzen werden die Filterkoeffizienten aufgrund der Datensymbole nachgeführt (adaptives Entzerrerfilter mit *blind equalization*).

In der Dissertation von Hong [59] werden die in der Literatur behandelten Kanal-Schätzungsverfahren (*channel estimation*) zur Gewinnung der Kanal-Impulsantwort (CIR *channel impulse response*) in folgende Gruppen eingeteilt.

- trainings-basierte und entscheidungs-basierte Kanalschätzungsverfahren, wovon es drei Untergruppen gibt.
  - Parametrisiertes Modell des Funk-Kanals. Es werden die Parameterwerte des Modells mit Hilfe von Pilot-Symbolen ermittelt.
  - Kanal-Modell, das auf statistischen Methoden wie der Korrelation zwischen empfangenem Signal und/oder Pilot-Symbolen einerseits und bekannten Symbolen andererseits beruht.
  - Adaptives Kanal-Modell, das sowohl aus Pilot-Symbolen als auch aus den detektierten Datensymbolen die Parameterwerte des Kanal-Modells bestimmt.
- blinde Kanalschätzungsverfahren, die auf keine Pilot-Symbole zugreifen können.

Die Kanalschätzungsverfahren und damit auch der Entzerrer können (traditionell) im Zeitbereich oder im Frequenzbereich arbeiten. Nach Yang [60] können bei den in der Literatur behandelten Entzerrern im Frequenzbereich 2 Typen unterschieden werden.

**Typ 1:** Block-adaptives Filter mit Anwendung der *overlap-save* oder *overlap-add* Methode.

**Typ 2:** Eigenwert-Dekomposition zirkulärer Matrizen.

Im vorliegenden Skript werden speziell die Methoden behandelt, die sich auch bei der (neuesten) Generation der Mobilkommunikation (LTE *long term evolution*) als Modulation für den *Upstream* (vom Mobile zur Basisstation) wiederfinden.

Da die pro Teilnehmer bzw. Mobile erforderliche Frequenz-Bandbreite geringer ist als die gesamte Kanal-Bandbreite, die der Empfänger der Basisstation verarbeitet, müssen die Upstreams mehrerer Mobile frequenzmäßig in diesen Kanal eingepaßt werden. Dies wird durch die Basisstation gesteuert. Die pro Mobile dafür notwendige Frequenzverschiebung innerhalb des Kanals für den Upstream erfolgt in der Weise, daß das Signal des Mobiles zunächst einer ( $M$  Punkt) FFT unterworfen wird, wodurch ein Signal im Frequenzbereich vorliegt. Durch Verschieben der Ausgangssignale der FFT auf bestimmte Ports einer ( $N$  Punkt) IFFT wird diese Frequenzverschiebung erreicht. Nach dieser IFFT steht dann das Ausgangssignal des betreffenden Mobiles als (vor-modulierte) Zeitfunktion auf der richtigen Frequenz innerhalb des Übertragungs-Kanals zur Verfügung.

Die Notwendigkeit dieser Verschiebungs-Möglichkeit innerhalb der Übertragungsbandbreite macht es also notwendig, daß der Sender des Mobiles um eine  $N$  Punkt FFT und eine  $N$  Punkt IFFT mit  $N > M$  erweitert wird.

- Damit stellen die Blöcke  $N$  Punkt FFT, „Subcarrier Mapping“ &  $M$  Punkt IFFT einen „Vor-Modulator“ dar, mit dessen Hilfe das Sendesignal eines Mobiles in das zugewiesene Frequenzband innerhalb des Übertragungs-Kanals geschoben wird. (Bild 44.4, Seite 202)

## 42 Die Problemstellung

Funksignale erreichen den Empfänger meist über mehrere unterschiedlich lange Wege (*multipath*). Am Empfangsort überlagern sich alle diese Teilsignale. Die Überlagerung kann dabei konstruktiv oder destruktiv ausfallen, je nach Phasenlage der Teilsignale. Diese Art der Betrachtungsweise unterstellt im Prinzip, daß der Sender nur eine Trägerschwingung aussendet.

Bei der hier angenommenen digitalen Übertragung werden jedoch (modulierte) Datenimpulse gesendet, die dann aufgrund der unterschiedlich langen Wege zeitversetzt eintreffen. Vereinfachend sei der Datenimpuls mit der kürzesten Laufzeit als „Hauptimpuls“ und alle später eintreffenden als „Echoimpulse“ oder „Echos“ bezeichnet. Bild 42.1 [61][62][63] zeigt Situationen, wie sie beim Mobilfunk auftreten können.

Bei einer digitalen Übertragung folgen die Datenimpulse, die auch mit Daten-Symbolen bezeichnet werden, zeitlich ohne Lücke, so daß die Echos der früheren Datenimpulse die Hauptimpulse der späteren stören bzw. verzerren.

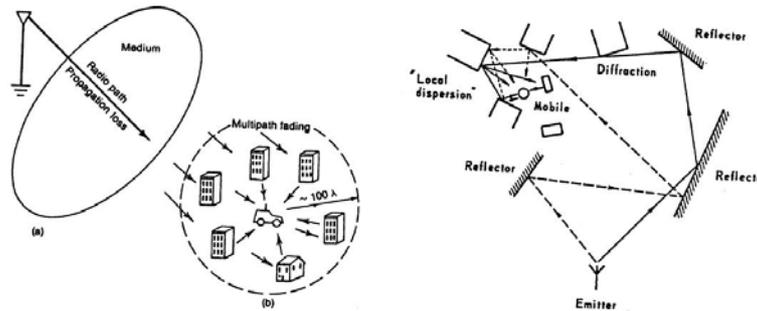


Bild 42.1: Beispiele für die Entstehung von Echos auf dem Funkweg.

Mit verzerrten Impulsformen hat der digitale Empfänger ein Problem. Eine Digitalübertragung verwendet immer nur eine (einzige) Impulsform bzw. Symbol-Form. Die unterschiedlichen Daten-Werte werden dabei als unterschiedliche Amplituden-Werte und/oder Phasen-Lagen der Symbole übertragen. Sämtliche zulässigen Amplituden-Werte und Phasen-Lagen sind dem Empfänger bekannt. Die Aufgabe des Empfängers besteht nun darin, die empfangenen Symbole mit den ihm bekannten Amplituden-Werten und Phasen-Lagen zu vergleichen und die optimale Übereinstimmung zu finden. Darauf hin kann die dafür vorgesehene Bitkombination ausgegeben werden. Ohne jegliche Störung auf dem Übertragungsweg funktioniert das Verfahren fehlerfrei.

Bei einer Funk-Übertragung treten am Empfangsort folgende Störungen auf:

- Rauschen wegen schwachem Empfangssignal
- Mehrwege-Ausbreitung durch Echos
- Dopplerverschiebungen infolge Bewegungen von Sender oder Empfänger oder Reflektor

Durch diese Störungen verändern die empfangenen Symbole nicht nur ihre Amplitude und ihre Phasenlage, sondern zusätzlich ihre Form, sehen also anders aus. Der Empfänger, der nur die im Idealfall zu erwartenden Symbolformen und deren Amplituden und Phasen kennt, kann deshalb die empfangenen Symbole nur damit vergleichen. Es ist nicht verwunderlich, daß die Entscheidung im Empfänger deshalb fehlerbehaftet wird. Da jedoch für viele Anwendungen eine Bit-Fehlerrate von  $BER \approx 10^{-4}$ , also ein Fehler auf 10 000 Bit, bereits eine obere Grenze darstellt, wird verständlich, weshalb bei einer Digitalübertragung viele verschiedene Maßnahmen ergriffen werden müssen, um unter eine solche Fehlerrate zu kommen.

Die theoretisch einfachste Maßnahme wäre die Erhöhung der Sendeleistung, so daß das Rauschen am Empfangsort vernachlässigbar wäre. Praktische Rauschfreiheit, was für eine analoge Übertragung erforderlich ist, ist für eine digitale Übertragung nicht notwendig. Wenn breitbandiges weißes Rauschen (*AWGN additive white Gaussian noise*) die einzige Störung ist, genügt es, daß (für 16QAM) die Bitenergie  $E_b \approx 12$  dB größer als Rauschleistungsdichte  $N_0$  ist, Bild 42.2, AWGN-Kurve.

Wenn aber Echo-Störungen hinzukommen, nutzt es kaum etwas, die Sendeleistung zu erhöhen. Mit erhöhter Sendeleistung werden nämlich auch die Echos proportional zum Hauptimpuls größer, so daß praktisch nichts oder nicht sehr viel dadurch gewonnen wird, Bild 42.2, Flat-fading und Frequency-selective fading. [60]

Aus den Kurven in Bild 42.2 ist erkennbar, daß die Erhöhung der Sendeleistung bzw. der Energie pro Bit  $E_b$

- bei Flat-Fading wenig bewirkt
- bei Frequenz-selektivem Fading praktisch wirkungslos ist.

**Flat-Fading** entsteht, wenn die Echo-Zeiten so kurz sind, daß die Echos i.w. den Hauptimpuls betreffen, wodurch dieser seine Amplitude ändert.

**Frequenz-selektives Fading** entsteht, wenn die Echo-Zeiten so lang sind, daß die Echos nachfolgende Symbole betreffen und diese dadurch in der Form ändern, was eindeutig den schlimmeren Fall darstellt.

Die einzig wirkungsvolle Gegenmaßnahme gegen Echo-Verzerrungen ist eine Entzerrung der empfangenen Symbole. Allerdings darf man bei einer digitalen Übertragung nicht nur eine einzige Gegenmaßnahme in Betracht ziehen, weil dann ein unverhältnismäßig hoher Aufwand erforderlich werden kann. Das Beispiel hierzu ist die Erhöhung der Sendeleistung. In der Praxis wird man stets ein ganzes Bündel von Strategien einsetzen, weil sich dadurch der Gesamtaufwand minimieren läßt. Das macht die Aufgabe einerseits schwieriger aber auch reizvoller.

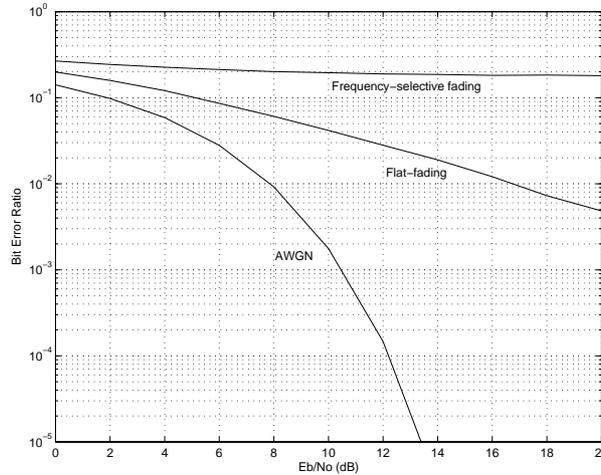


Bild 42.2: Bitfehler-Raten von 16QAM in Kanälen mit Rauschen (AWGN) und Fading durch Echo-Störungen.

### 42.1 Modell der digitalen Funkübertragung

Die Auswirkung der Echos und des Dopplereffektes auf eine digitale Funkübertragung wird hierfür in das Basisband übersetzt, was zu einer Vereinfachung führt. Das bedeutet, daß der hochfrequente Teil im engeren Sinne vom Sender und vom Empfänger in dem Modell nicht vorkommen. Andererseits muß jedoch berücksichtigt werden, daß die (hochfrequent) modulierten Symbole auf dem Übertragungsweg durch ihre Amplitude und ihre Phase charakterisiert sind (polare Darstellung), entsprechend zu den digitalen Modulationen. Dies wird in dem Modell im Basisband dadurch berücksichtigt, daß die Symbole hierbei als komplexwertig angesetzt werden (kartesische Darstellung). Alternativ dazu können im Basisband ein I-Kanal und ein Q-Kanal angesetzt werden.

Werden die Symbole komplexwertig angenommen, führt das zu einer kompakteren Darstellung für das Blockschaltbild des Modells, weil die Parallelstruktur von I-Zweig und Q-Zweig dann nicht extra gezeichnet werden müssen. Das Blockschaltbild wird dadurch einfacher, Bild 42.3.[66]

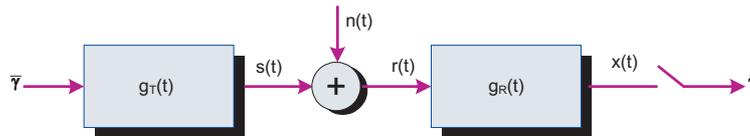


Bild 42.3: Basisband-Modell der digitalen Übertragung mit AWGN Kanal

Hier ist zunächst das einfachere Basisband-Modell gezeigt, bei dem nur weißes Rauschen (AWGN)  $n(t)$  das Empfangssignal  $r(t)$  beeinträchtigt. Die komplexwertigen Basisband-Symbole sind hierbei mit  $\tilde{\gamma}$  bezeichnet. Die Filterung im Sender wird durch die Impulsantwort  $g_T(t)$  berücksichtigt, wodurch die (verrundeten) Sendesymbole  $s(t)$  entstehen. Der Empfänger wird durch ein matched Filter (MF) mit der Impulsantwort  $g_R(t) = g_T(-t)$  vereinfacht dargestellt. Die Ausgangssignale  $x(t)$  des MF werden (im Symboltakt) einem Entscheider zugeführt, wodurch dann die empfangsseitigen Schätzwerte  $\hat{\gamma}$  entstehen.

Bei einer Funk-Übertragung kommt im Modell auf der Senderseite nun noch ein Block  $H_b(f) \bullet \circ h_b(t)$  hinzu, der die Auswirkung des Funkkanals beschreibt. Dadurch ergibt sich resultierend eine zusätzliche Filterung der Sende-Symbole, die mit dem MF auf der Empfängerseite alleine nicht mehr ausgeglichen werden kann. Die Ausgangssignale  $x(t)$  des MF sind deshalb noch zu entzerren, was durch den Equalizer  $E(f)$  erfolgt, Bild 42.4.[66] Dessen Ausgangssignale  $y(t) \circ \bullet Y(f)$  können dann dem Entscheider zugeführt werden.

Die Messung der Impulsantwort  $c(t) = h_b(t)$  eines typischen terrestrischen Funkkanals, entsprechend zu den Verhältnissen in Bild 42.1, gibt Echo-Strukturen  $|c(t)|$  (Echo-Profil) wie sie in Bild 42.5 [64] (links) beispielhaft gezeigt sind. Die hier dargestellte Impulsantwort entspricht ebenfalls einer Darstellung im Basisband. Die einzelnen Echos sind daher auch komplexwertig. Die rechte Seite zeigt den zugehörigen Frequenzgang  $|C(f)|$  dieses Funk-Kanals, bezogen auf das Basisband. Da dieser Frequenzgang nicht konstant ist, liegt somit ein Übertragungs-Kanal mit (Frequenz-)selektivem Fading vor.

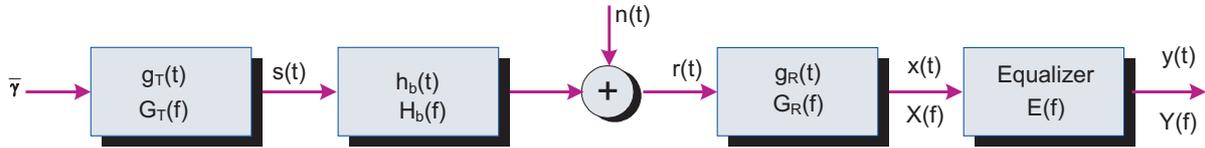


Bild 42.4: Basisband-Modell der digitalen Übertragung mit Funk-Kanal und Entzerrer (Equalizer)

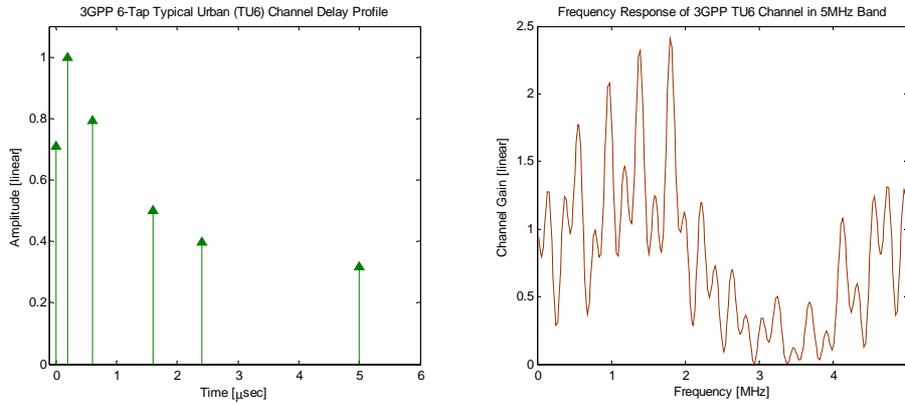


Bild 42.5: Echo-Struktur und Frequenzgang eines typischen terrestrischen Kanals

### 42.2 Kanal-Entzerrungsverfahren

Der Funk-Kanal kann als Finite-Impulse-Response (FIR) Filter-Struktur modelliert werden, Bild 42.6, wobei die Filter-Koeffizienten  $c_i(t)$  komplexwertig sind (Phasendrehungen) und sich zudem zeitlich ändern (infolge der Bewegungen z.B. des Mobilteilnehmers).

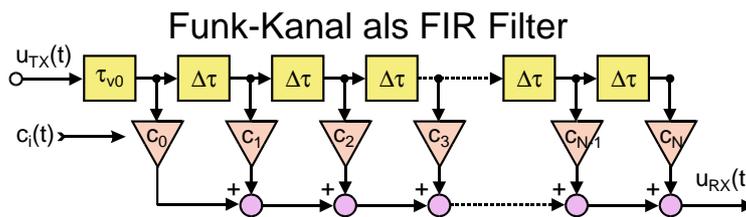


Bild 42.6: Modell des Funk-Kanals als FIR-Filter. Die Filter-Koeffizienten  $c_i$  müssen in Abhängigkeit von der Änderungsgeschwindigkeit (Doppler) des Funk-Kanals neu bestimmt und geladen werden.

Zur Entzerrung benötigt der Empfänger ein Filter, das die inverse Übertragungsfunktion  $E(f) \approx \frac{1}{C(f)}$  des Funk-Kanals  $C(f)$  nachbilden kann. Ein solches Filter kann als FIR-Filter oder als IIR-Filter (IIR *infinite impulse response*) ausgebildet sein, Bild 42.7. [65]

Die Größe  $y[n]$  ist die Zeit-diskrete (abgetastete) entzerrte Signalform. Diese wird dem Symbol-Entscheider zugeführt, der sich dann für eines der zulässigen Symbole (bzw. der zulässigen Amplitude und Phase) entscheidet. Zur Entzerrung wird in der IIR-Struktur, Bild 42.7 (rechts), die Rückführung nicht (wie hier gezeichnet) direkt von  $y[n]$  abgegriffen, sondern erst hinter dem Symbol-Entscheider. Die IIR-Struktur ist dadurch nicht mehr linear, sondern nichtlinear, jedoch ergibt sich daraus eine bessere Entzerrung als mit einer linearen Struktur. Die FIR-Struktur stellt dagegen einen linearen Entzerrer dar.

Die Werte der Koeffizienten des Entzerrer-Filters ( $a_i; b_i$  in Bild 42.7;  $c_i[n]$  in Bild 42.8) werden im Empfänger mit Hilfe eines Regelkreises gewonnen, Bild 42.8, der als adaptives Filter bezeichnet wird. [65]

Die Funktionsweise kann prinzipiell wie folgt beschrieben werden. Da bei einer digitalen Übertragung alle Parameterwerte exakt definiert sein müssen, kennt der Empfänger die Form der Symbole und deren Amplituden und Phasen. In Bild 42.8 seien die zulässigen Symbole mit  $g[n]$  bezeichnet. Der Regelkreis steuert nun die Filterkoeffizienten  $c_i[n]$  so, daß die entzerrten Empfangs-Symbole  $y[n]$  nur noch um einen (kleinen) Fehler  $\epsilon[n]$

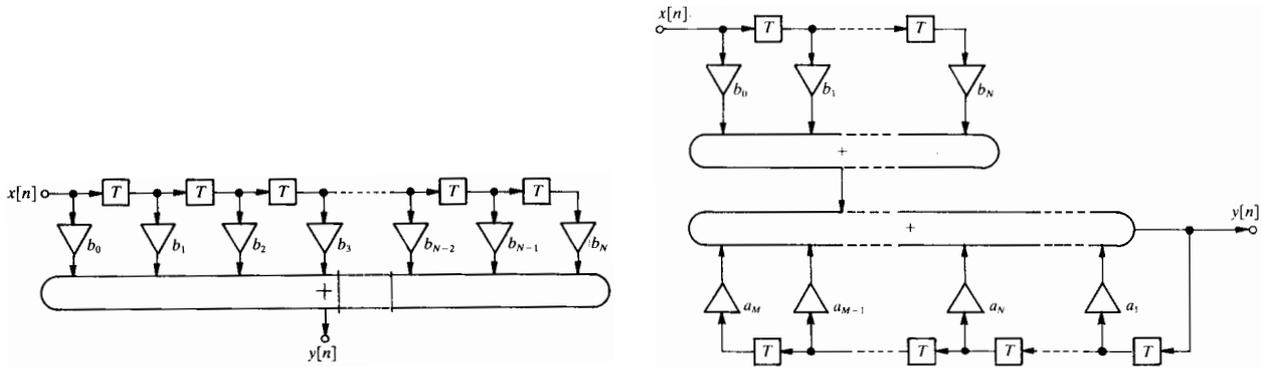


Bild 42.7: FIR und IIR Filter-Strukturen

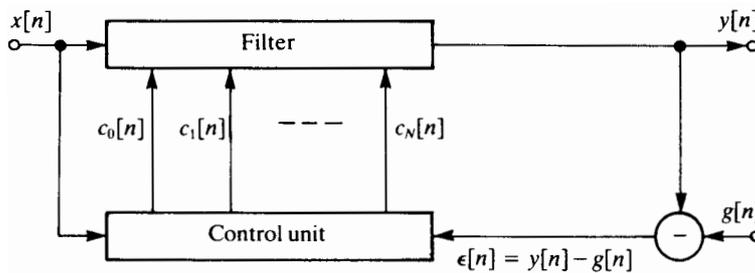


Bild 42.8: Prinzip eines adaptiven Filters zur Entzerrung der Symbole.

von den zulässigen Symbolen  $g[n]$  abweichen.

Bei dieser Betrachtungsweise wird die digitale Übertragung im Zeitbereich beschrieben. Dies ist in so weit logisch und konsequent, als der digitale Empfänger die Form der empfangenen Symbole (einschließlich deren Amplitude und Phase) auswertet. Das entspricht aber genau einer Darstellung im Zeitbereich. Die entsprechenden digitalen Modulationen sind die „Einträger-Modulationen“, die traditionell im Empfänger bislang nur mit adaptiven Entzerrer-Strukturen gemäß Bilder 42.7 und 42.8, also im Zeitbereich, arbeiten.

Digital realisierte Entzerrer-Filter entsprechend zu Bild 42.7 arbeiten im Symbol-Takt oder in erhöhter Taktrate (*Oversampling*), worauf sich die Variable  $[n]$  bezieht. Die Anzahl der Abgriffe (*tap*)  $N; M$  in Bild 42.7 bestimmt sich daher aus der Verzögerung des spätesten zu berücksichtigenden Echos der Kanal-Impulsantwort Bild 36.2 bezogen auf die (zeitliche) Dauer der Symbole. Bei langen Echos und schneller Datenübertragung mit entsprechend kurzen Symboldauern kommen dann sehr lange Entzerrer-Filter mit großen Werten für  $N; M$  zustande. Man erhält damit sehr rechenaufwendige Strukturen, die z.Z. noch an die Grenze der technischen Realisierbarkeit stoßen. Das ist ein Nachteil der Entzerrung im Zeitbereich.

Im Prinzip könnte die Entzerrung somit ganz einfach dadurch erfolgen, daß die Übertragungsfunktion  $E(f)$  des Entzerrers gleich der inversen Übertragungsfunktion  $\frac{1}{H_b(f)} = \frac{1}{C(f)}$  des Funk-Kanals gemacht wird. Dadurch ergibt sich  $H_b(f) \cdot E(f) = 1$  bzw.  $C(f) \cdot E(f) = 1$ , wodurch die verzerrende Wirkung des Funk-Kanals aufgehoben wäre. Diese Methode wird mit *Zero Forcing* bezeichnet.

Die Entzerrung nach dem *Zero Forcing* Prinzip hat aber einen entscheidenden Nachteil. Das sieht man sofort ein, wenn man das Blockschaltbild 42.4 betrachtet. Da das Rauschen  $n(t)$  am Eingang des Empfängers anliegt, wird dieses durch den Equalizer  $E(f)$  in allen den Frequenzbereichen sehr stark verstärkt, wo  $|E(f)|$  sehr groß werden muß um die geringen Werte von  $|C(f)|$ , Bild 42.5 (rechts), auszugleichen. Dies führt dann dazu, daß das Signal/Geräusch-Verhältnis sich so weit verschlechtert, daß das entzerrte Signal nicht mehr fehlerfrei ausgewertet werden kann.

- In der Praxis muß deswegen ein Kompromiß zwischen optimaler Entzerrung der Symbole einerseits und zulässiger Störung durch Rauschen andererseits gefunden werden.

### 42.3 Vielträger-Modulation

Als Abhilfe aus diesem Dilemma bieten sich die Mehrträger-Modulationen (OFDM bzw. COFDM *coded orthogonal frequency multiplex*) an, die hier nochmals zitiert wird, um den Unterschied zur Einträgermodulation mit Frequenzbereichsentzerrung zu verdeutlichen. Hierbei werden in vielen frequenzmäßig parallelen Teilkanälen (*subchannel*, oft auch *subcarrier* benannt) entsprechend (zeitlich) lange Symbole übertragen, wodurch die durch den Kanal erzeugten Echos nur noch den Anfang dieser Symbole beeinträchtigen. Diese verzerrten Anfangsteile der Symbole werden im Empfänger ausgeblendet und nur noch die von Echos nicht verzerrten, also „eingeschwungenen“ oder stationären Teile der Symbole ausgewertet, Bild 42.9.

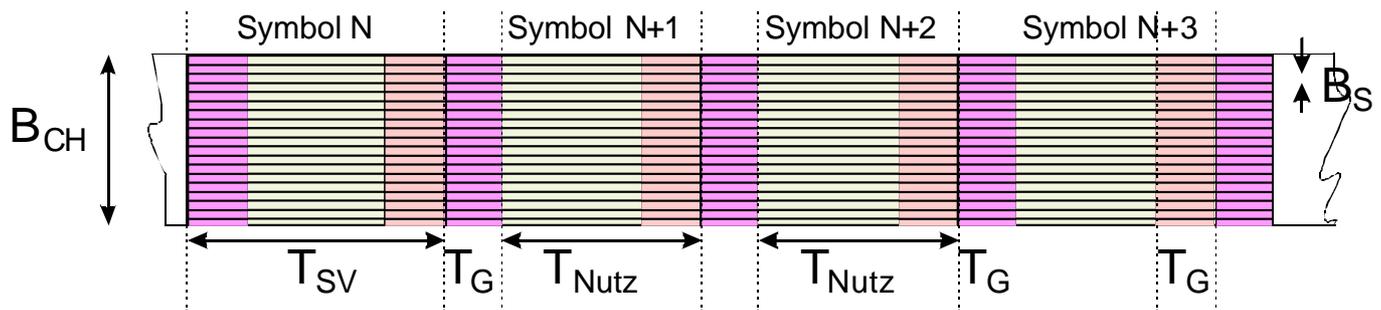


Bild 42.9: Struktur der Vielträger-Modulation mit Berücksichtigung des Guard-Intervalls

- Diese stationären Teile der Länge  $T_{\text{Nutz}}$  unterliegen dadurch „nur noch“ einem Flat Fading, das sich gleichmäßig in jedem Teilkanal auswirkt. Gegenüber einem selektiven Fading ergibt sich hieraus eine Verbesserung der Bitfehler-Rate, Bild 42.2 (Seite 192), die jedoch für eine praktische Datenübertragung nicht ausreicht.<sup>42.1</sup>

Der Datenstrom wird beim Mehrträgerverfahren in Blöcke unterteilt, deren Länge so gewählt wird, daß die Anzahl der aus den Daten gebildeten Symbolen gleich der Anzahl der Teilkanäle ist. Da die Teilkanäle sich in ihrer Mittenfrequenz unterscheiden (*subcarrier*), werden die Blöcke von Symbolen jeweils als im Frequenzbereich befindlich betrachtet. Über eine Inverse Fast Fourier Transformation (IFFT) wird dann eine Zeitfunktion gebildet, die über den Funk-Kanal übertragen wird. Im Empfänger werden dann mit Hilfe einer Fast Fourier Transformation (FFT) wieder die Symbolblöcke gebildet, die zusammengefügt und decodiert dann den empfangsseitigen Datenstrom ergeben.

Die Kanal-Entzerrung geschieht bei OFDM dadurch, daß zusätzlich Pilot-Symbole so in die Blöcke eingefügt werden, daß sich in der Zeit-Frequenz-Ebene normierte Stützwerte ergeben, wodurch sich die entzerrten Werte der dazwischen liegenden Symbole durch Interpolation berechnen lassen. Dadurch wird eine Entzerrung (des Flat Fading jedes Teilkanals) im Frequenzbereich erreicht. Das entspricht einer Entzerrung nach dem *Zero Forcing* Verfahren. Dieses ist hier deswegen „zulässig“, weil die Signal/Geräusch-Verhältnisse der jeweiligen Teilkanäle unverändert bleiben, so daß nur die Teilkanäle mit geringem  $S/N$  nicht ausgewertet werden können und zu Fehlern beitragen.<sup>42.2</sup>

Vorteilhaft an dem Verfahren ist, daß es für die FFT/IFFT effektive und schnelle Routinen gibt, wodurch die hierfür erforderliche Rechenleistung geringer ausfällt als bei einer Entzerrung im Zeitbereich. Der rechen-technische Vorteil, den COFDM durch die Anwendung der FFT/IFFT hat, ist der Grund dafür, daß die Viel-trägermodulation eine breite Anwendung fand, so z.B. beim terrestrischen Rundfunk (DVB-T, DAB, DRM) bei WLAN und anderen Datenverbindungen über Funk.

Wichtige Schwachpunkte von OFDM/COFDM wurden dabei zunächst in Kauf genommen oder nicht beachtet. Diese sind:

- Ein hoher Crest-Faktor (*PAPR peak-to-average power ratio*) von ca. 13 dB, entsprechend zu Rauschen mit Gauß-förmiger Amplitudenverteilung, resultierend aus der Summierung vieler von einander unabhängigen Teilkanälen für das Sendesignal.

<sup>42.1</sup>Aus diesem Grund wird OFDM immer nur in codierter Form als COFDM eingesetzt.

<sup>42.2</sup>Die daraus resultierende Fehlerrate liegt in der Größenordnung 10% – 25%, weshalb die Daten i.a. mit Hilfe einer Faltungs-Codierung oder einer Turbo-Codierung gegen Fehler geschützt werden müssen. Aus OFDM wird damit codierte OFDM: COFDM.

- Eine hohe Anforderung an die genauen (Mitten-)Frequenzen der Teilkanäle auf der Empfängerseite und damit an die Genauigkeit der Frequenzumsetzung im Empfänger.

Insbesondere der Crestfaktor von 13 dB, was bedeutet, daß die Spitzenleistung (des Senders) das 20-fache der mittleren Leistung ist, führt dazu, daß der Sender einen solchen Arbeitspunkt benötigt, der zu einem sehr schlechten Wirkungsgrad führt. Bei mobilen Geräten (Handy usw.) bedeutet das, daß der Akku entsprechend schnell erschöpft ist. Bei der neuesten Generation von Mobilgeräten (LTE *long term evolution*) wurde daher ein Einträger-Verfahren mit Entzerrung im Frequenzbereich (SC-FDE *single carrier — frequency domain equalization*) für den Sender des Mobilgerätes (*upstream*) vorgesehen, das die Vorteile der OFDM hat, ohne aber deren Schwachpunkte zu haben.

### 43 Einträgermodulation mit Frequenzbereichsentzerrung

#### 43.1 Vergleich mit OFDM

Zum Vergleich zwischen OFDM und SC-FDE (*single carrier — frequency domain equalization*) werden im ersten Schritt nur die Blöcke „FFT“, „IFFT“ und „Entzerrer“ (*equalizer*) betrachtet, Bild 43.1 [66].

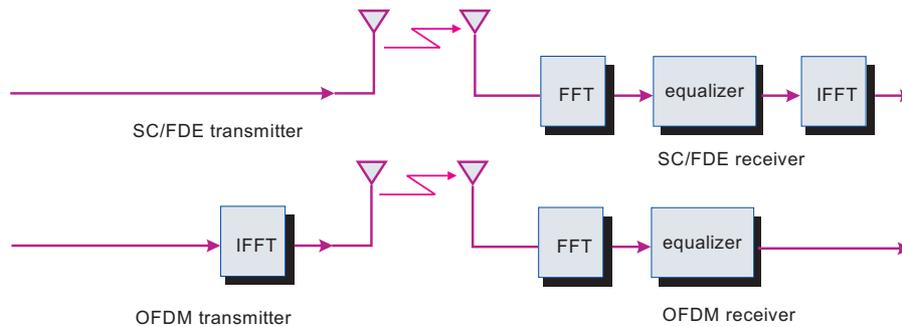


Bild 43.1: Vergleich zwischen SC-FDE und OFDM Übertragungssystemen

Der IFFT-Block, der bei OFDM im Sender ist, ist bei SC-FDE am Ende des Empfängers zu finden. Wenn man annimmt, daß der Entzerrer (*equalizer*) linear sei, sind die beiden Strukturen gleichwertig, weil ja die FFT/IFFT ebenfalls linear sind. Bei einer Kettenschaltung von linearen Blöcken ist es aber belanglos, in welcher Reihenfolge die Blöcke angeordnet sind.<sup>43.1</sup> Die Entzerrung im Frequenzbereich beruht also ebenfalls auf der Anwendung der FFT/IFFT und kann somit die bekannten günstigen Routinen dafür nutzen.

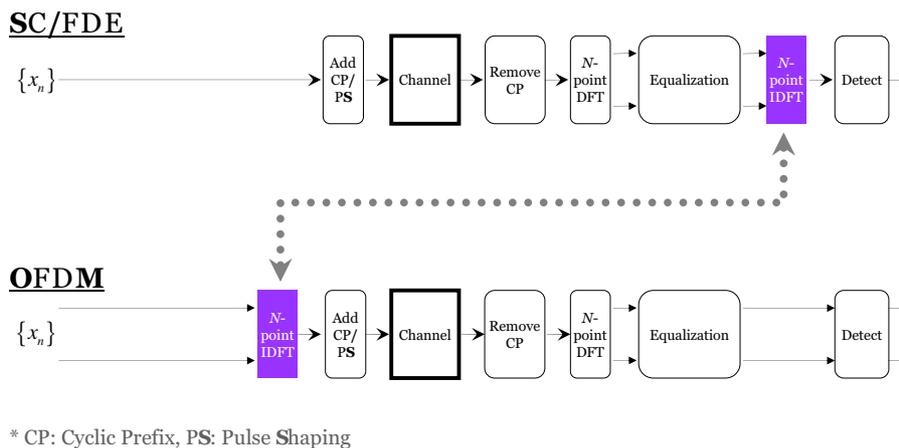


Bild 43.2: Erweiterter Vergleich zwischen SC-FDE und OFDM Übertragungssystemen

<sup>43.1</sup>Bei praktischen Realisierungen ist dabei darauf zu achten, daß durch die Umsortierung keine Übersteuerungen und damit Nichtlinearitäten entstehen.

In Bild 43.2 [64] wird nun der Vergleich zwischen OFDM und SC-FDE auf den Cyclic Prefix und die Symbolverrundung (*PS pulse shaping*) erweitert.<sup>43.2</sup>

Besonders einfach wird die Echo-Entzerrung bei OFDM dadurch, daß nur der (stationäre) Teil der Symbole ausgewertet wird, der nicht mehr durch Echos gestört ist und somit nur einem Flat Fading unterliegt.

Um diesen Vorteil auch für SC-FDE ausschöpfen zu können, wird der Datenstrom auch hierbei in Blöcke unterteilt und (wie bei OFDM) ein Teil der Daten vom Ende jedes Blocks an dessen Anfang angefügt (CP *cyclic prefix*). Dieser Cyclic Prefix ist dabei (mindestens) so lang zu wählen, wie es der Verzögerung des letzten (noch zu berücksichtigenden) Echos entspricht. Im Empfänger wird dieser Cyclic Prefix, auch Guard Intervall genannt, wieder entfernt und damit die Teile, die von den Echos betroffen sind. Somit bleibt auch hier nur der stationäre Teil übrig, der wiederum einem Flat Fading (innerhalb der Teilkanäle, die im Empfänger gebildet werden) unterliegt.

### 43.2 SC-FDE Blockstruktur

In der SC-FDE Blockstruktur, Bild 43.3 [66], wird die senderseitige Block-Bildung der Daten mit „Serial to parallel“ bezeichnet.

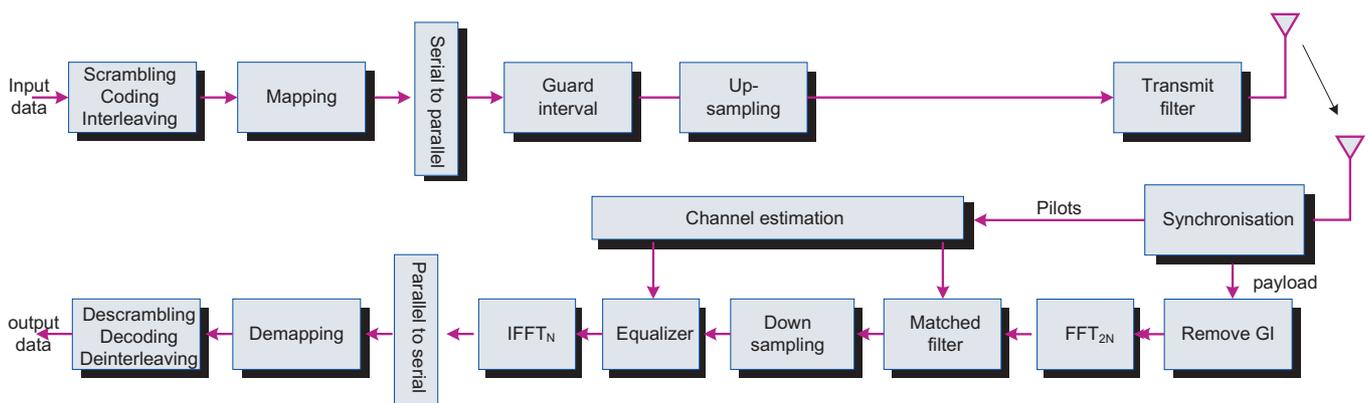


Bild 43.3: Modell der physikalischen Schicht des SC-FDE Übertragungs-Systems

In diesem Blockschaltbild sind die bei einer digitalen Übertragung anzuwendenden Standard-Methoden bzw. Strategien vertreten, die, in einer auf das spezielle Übertragungssystem zugeschnittenen Mischung, ein optimales Ergebnis bei minimalem Gesamtaufwand ergeben.

**Scrambling — Descrambling:** Den Daten werden über eine EXOR Stufe eine PN-Folge (*pseudo noise*) addiert. Damit vermeidet man lange 1-Folgen oder 0-Folgen im Datenstrom. Im Empfänger wird über eine EXOR Addition die gleiche PN-Folge nochmals addiert (*Descrambling*), wodurch sich wieder die Ursprungsdaten ergeben.

**Coding — Decoding:** Dies ist eine Fehlerschutz-Codierung (FEC *forward error coding*), bei der z.B. mit Hilfe einer Faltungs-Codierung zusätzliche Redundanz zum Datenstrom hinzugefügt wird. Im Empfänger wird in diesem Fall ein Viterbi-Decoder verwendet.

**Interleaving — Deinterleaving:** Hierbei wird der aufbereitete Datenstrom senderseitig umsortiert und dadurch in einer anderen Reihenfolge gesendet. Im Empfänger wird die Umsortierung wieder rückgängig gemacht. Tritt im empfangenen Datenstrom nun ein Burstfehler auf, so wird dieser Burstfehler durch das *Deinterleaving* in Einzelfehler aufgelöst, die sich dann vom Viterbi-Decoder leicht korrigieren lassen.

**Mapping — Demapping:** Beim Mapping werden binäre Daten zu Symbolen zusammengefaßt. Diese Symbole haben zwar alle die gleiche Form, unterscheiden sich jedoch durch ihre Amplitude und/oder ihre Phase. Amplitude & Phase entspricht der polaren Darstellung. Gleichwertig dazu ist die komplexe Darstellung mit Realteil und Imaginärteil. Deshalb werden die Symbole auch als komplexwertig bezeichnet. Beim empfangsseitigen *Demapping* werden den (vom Empfänger erkannten) Symbolen wiederum die zugehörigen Binärdaten zugeordnet.

<sup>43.2</sup>Eine Symbol-Verrundung wird bei OFDM nicht angewendet. Für jedes □-förmige Symbol wird 1 Stützwert in die IFFT eingebracht. Zur spektralen Begrenzung ist ein extra Filter hinter der IFFT erforderlich.

Die Amplituden und Phasen der Symbole werden in der komplexen Ebene durch Punkte dargestellt, wodurch man zu den für die jeweilige digitale Modulation typischen Konstellations-Diagrammen kommt.<sup>43.3</sup>

**Daten-Segmentierung: Rahmen & Blöcke** Der Datenstrom wird in Blöcke der Länge  $N$  unterteilt (segmentiert; hier „*Serial to parallel*“ bezeichnet). Das ist notwendig, wenn im Empfänger zur Entzerrung im Frequenzbereich die FFT/IFFT (mit  $N$  Punkten) verwendet werden soll. Eine gleichartige Blockbildung des Datenstroms wird auch bei der OFDM/COFDM angewendet, weshalb sich ein entsprechender Vergleich mit dieser Modulationsart anbietet, Bild 43.2 (Seite 196).

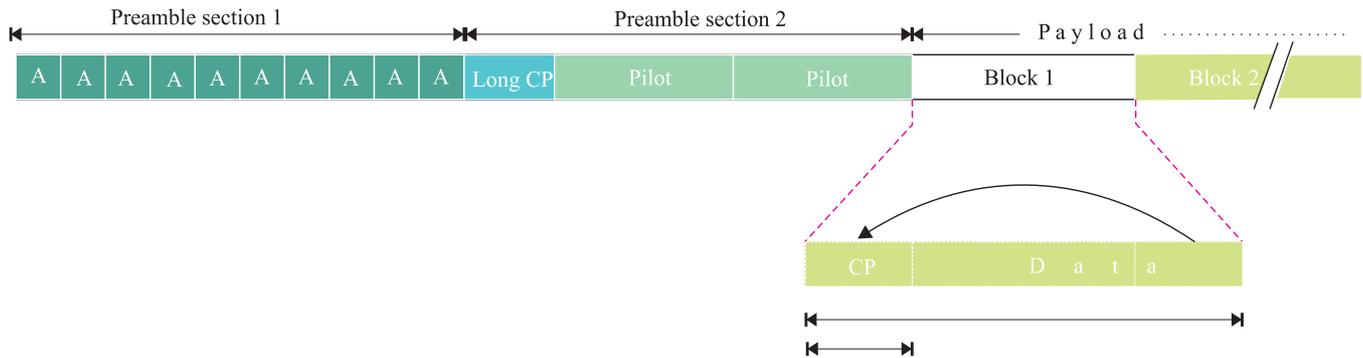


Bild 43.4: Beispiel für die Rahmenstruktur

Mehrere Blöcke mit Präambeln am Beginn bilden einen Rahmen, Bild 43.4 .[66]

**Präambel 1:** Dieser Teil des Rahmens dient zur (groben) Synchronisation von Zeit und Frequenz, sowie der Pegelregelung (AGC *automatic gain control*)

**Präambel 2:** Dieser Teil enthält 2 Pilot-Töne und ein verlängertes Guard-Intervall. Mit diesen Informationen gewinnt der Empfänger die erforderlichen Werte zur genauen Synchronisation von Zeit und Frequenz. Weiterhin werden hieraus die zur Kanal-Schätzung und damit für den Entzerrer notwendigen Informationen gewonnen.

**Guard-Intervall einfügen — entfernen:** Die Datenblöcke werden durch ein Guard-Intervall erweitert. Die Länge des Guard-Intervalls muß größer sein als es der (Verzögerungs-)Zeit des spätesten zu berücksichtigenden Echos entspricht. Hierdurch wird erreicht, daß die einzelnen Datenblöcke nicht durch Echos der vorausgehenden Blöcke beeinträchtigt werden. Das ist eine Maßnahme, die auch bei OFDM/COFDM in gleicher Art angewendet wird.

**Cyclic Prefix CP:** Hierbei wird ein Teil der Daten(-Symbole) vom Ende jedes Blocks an den Anfang (als CP *cyclic prefix*) kopiert. Man erhält damit (quasi) eine zyklische Periodizität in jedem Block. Eine derartige zyklische Periodizität hat auch die FFT/IFFT. Durch den CP werden die Blöcke an die Bedingungen der FFT/IFFT angepaßt.

**Unique Word UW:** Hierbei wird das Guard-Intervall zwischen den Datenblöcken mit einer speziellen CAZAC (*constant amplitude zero auto correlation*) Datensequenz aufgefüllt. Die CAZAC Datensequenz dient der Vermessung des (Funk-)Kanals und damit der Gewinnung der Daten für den Entzerrer.

Bild 43.5 [66] zeigt diese Blockstruktur.  $T_{\text{FFT}}$  ist die Länge der hierfür anzuwendenden FFT/IFFT.

**Upsampling — Downsampling:** Da die Amplitude und Phase (bzw. Real- und Imaginärteil) der Symbole (entsprechend zu den Punkten der Symbol-Konstellation) mit einem komplexen Wert beschrieben werden kann, genügt für diesen Teil eine entsprechend geringe Datenrate. Als Zeitfunktionen ergäben sich daraus nach einem D/A-Wandler allerdings rechteckförmige Zeitverläufe mit entsprechend breitem Spektrum. Auf dem Funkweg ist aber die Bandbreite begrenzt, weshalb dort verrundete (modulierte) Symbolformen mit bandbegrenztem Spektrum erforderlich sind. Eine verrundete Symbolform benötigt aber zu ihrer Beschreibung mehrere Stütz- oder Abtastwerte. Daher ist hierfür eine Erhöhung der Abtastrate

<sup>43.3</sup>Siehe hierzu 25.2.8 „Weitere Symbol-Konstellationen“ (Seite 123).

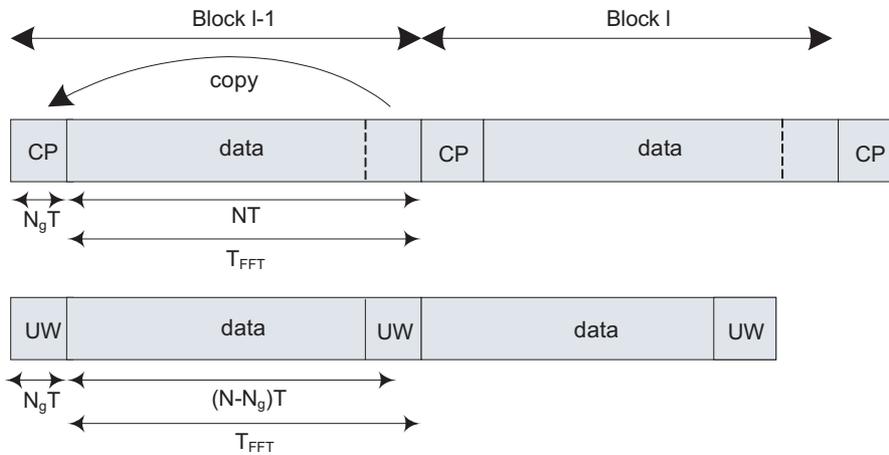


Bild 43.5: Datenblöcke mit Cyclic Prefix CP bzw. Unique Word UW als Guard-Intervall

(upsampling) erforderlich. Im Empfänger wird die Abtastrate hinter dem Matched Filter (MF), mit dessen Hilfe die (zulässigen) Symbolformen bzw. deren Amplituden und Phasen verglichen werden, wieder erniedrigt (downsampling).

**Transmit filter — Matched filter:** Digitales Filter im Sender zur Symbolverrundung und Bandbegrenzung des Spektrums. Die D/A rückgewandelten und nun kontinuierlichen (analogen) Zeitfunktionen der Symbole werden im I/Q-Modulator zum hochfrequenten Signal gewandelt und ggf. auf eine höhere Sendefrequenz gemischt (nicht im Blockschaltbild enthalten). Im Empfänger dient das MF zur Erkennung der Symbole.

### 43.3 Filterung im Frequenzbereich

Im Blockschaltbild des SC-FDE Systems, Bild 43.3, ist die Filterung für das Matched Filter und das Equalizer Filter im Frequenzbereich durchzuführen, im Unterschied zu der sonst in der digitalen Signalverarbeitung üblichen Filterung im Zeitbereich. Eine Filterung im Zeitbereich muß eine Faltung \* nachbilden, was mit Hilfe von FIR oder IIR Filterstrukturen geschieht, Bild 42.7 (Seite 194). Dagegen läuft eine Filterung im Frequenzbereich auf eine Multiplikation hinaus. Wegen der Verwendung der FFT/IFFT wird diese Methode „Schnelle Faltung“ genannt. Bild 43.6 [65] zeigt die Äquivalenz der beiden Methoden.

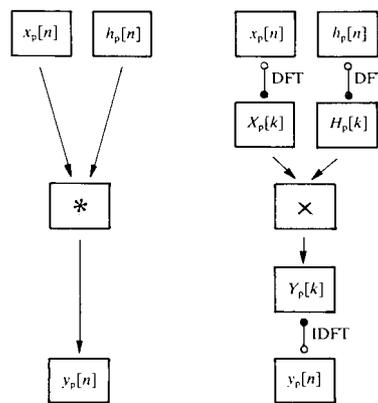


Bild 43.6: Faltung im Zeitbereich und Schnelle Faltung im Frequenzbereich; die DFT/IDFT wird als FFT/IFFT realisiert.

Da die FFT/IFFT zyklische bzw. periodische Funktionen unterstellt, ergibt sich zunächst eine zyklische Faltung, die aber in eine lineare Faltung überführt werden kann, wofür hier die „Overlap-Save“ statt der „Overlap-“

Add“ Methode verwendet werden.<sup>43.4</sup>

Für die Entzerrung im Frequenzbereich kann das *Zero Forcing* Verfahren nicht angewendet werden, da wegen des Einträgerverfahrens alle Symbole (eines Blocks) die gesamte Übertragungsbandbreite ausnutzen.<sup>43.5</sup> Die Bedingung für die MMSE (*minimum mean square equalization*) Entzerrung lautet daher nun nach [34] und [68] für die Koeffizienten  $e_n$  des Entzerrers<sup>43.6</sup>

$$e_n = \frac{1}{C(n) + \frac{1}{(S/N)}} \tag{43.1}$$

Hierbei ist  $C(n)$  der Wert der Kanal-Übertragungsfunktion  $C(f)$  im jeweiligen Teil-Kanal  $n = 0 \dots N-1$  und  $(S/N)$  das mittlere Signal/Stör-Verhältnis am Ausgang des Empfangsfilters.<sup>43.7</sup> Für ein Einträger-System mit Frequenzbereichs-Entzerrung kann ein prinzipielles Blockschaltbild gemäß Bild 43.7 [34] angegeben werden.

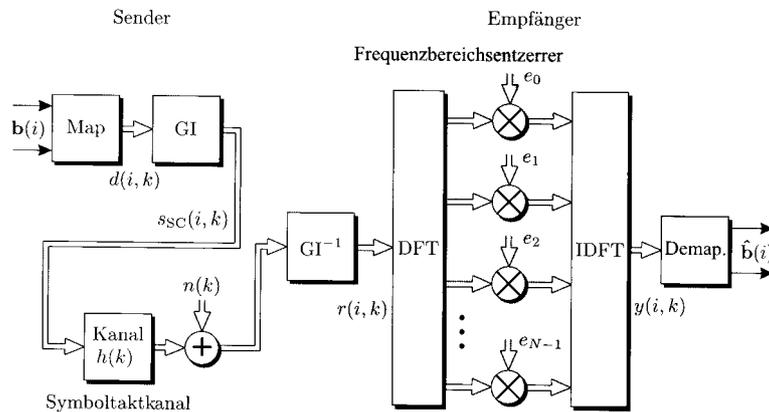


Bild 43.7: Blockschaltbild eines Einträgersystems mit Frequenzbereichs-Entzerrer

Die Aufspaltung in  $N$  Subchannel, die bei OFDM auf dem Übertragungskanal vorliegt, wird hier erst im Empfänger vorgenommen. Jeder dieser Subchannel wird dabei gemäß Gleichung (43.1) entzerrt.

Simulationen von Bitfehlerraten aus [34] zeigen daß das Einträgerverfahren mit Frequenzbereichs-Entzerrung (MMSE) im uncodierten Fall dem OFDM überlegen ist. Wird eine Kanal-Codierung angewendet (COFDM) schneidet OFDM etwas besser ab als das Einträgerverfahren mit Frequenzbereichs-Entzerrung, wobei in diesem Fall die Symbole innerhalb eines Blocks gescrambelt wurden. Ein Einträgerverfahren mit *Zero Forcing* (ZF) Entzerrung schneidet in beiden Fällen am ungünstigsten ab, Bild 43.8 [34].

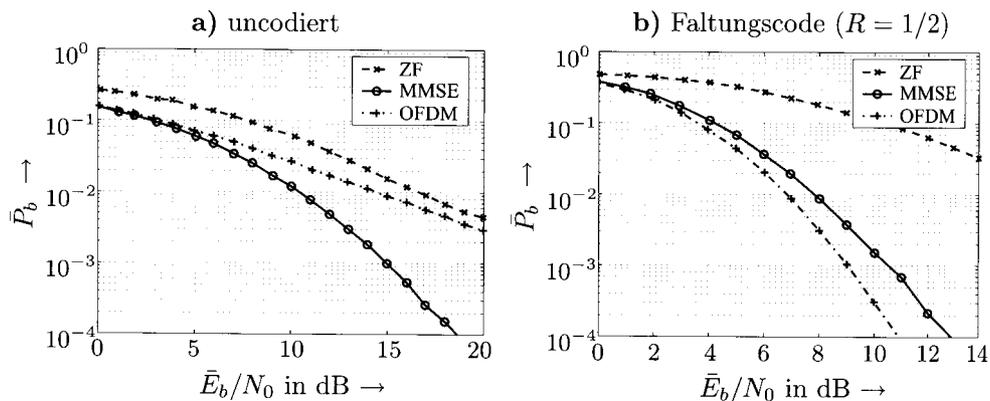


Bild 43.8: Vergleich der Bitfehlerraten zwischen Einträgersystem und OFDM

<sup>43.4</sup>Siehe das Skript: „Die Diskrete Fourier-Transformation und ihre Anwendung in der Nachrichtentechnik“ [5]

<sup>43.5</sup>Im Unterschied zu OFDM, wo jedes Symbol frequenzmäßig nur in seinem eigenen Subchannel zu finden ist.

<sup>43.6</sup>Für einen rauschfreien Kanal mit  $(S/N) \rightarrow \infty$  ergibt sich hieraus die *Zero Forcing* Lösung.

<sup>43.7</sup>Zur Messung der Übertragungsfunktion  $C(f)$  und der Kanal-Impulsantwort (CIR)  $c(t)$  siehe das Skript „Funk-Kanal“. [72]

## 44 3GPP-LTE Upstream

Das 3GPP *Long Term Evolution* (LTE) Mobilfunksystem nutzt als Modulation für den *Upstream*, d.h. vom Mobile zur Basis-Station das SC-FDE Verfahren. Als Gründe dafür werden benannt:[64]

- Eine Einträger-Modulation hat einen kleineren Crestfaktor (PAPR *peak to average power ratio*) als eine Mehrträgermodulation (COFDM), welche mit ca. 13 dB Crestfaktor eine 20 fache Spitzenleistung bezogen auf die effektive Leistung erreicht. Bei COFDM muß demzufolge der Sendeverstärker in einem linearen Arbeitspunkt mit entsprechend hohem Back-Off arbeiten, was einen geringen Wirkungsgrad ergibt, wodurch der Akku rasch erschöpft ist. Deshalb hat man sich für das Mobile gegen COFDM und für SC-FDE entschieden.
- SC-FDE ist robust gegen Delay Spread, speziell auch bei Zweibege-Ausbreitung, bei der Nullstellen (*spectral null*) in der Kanal-Übertragungsfunktion entstehen können.
- SC-FDE ist gegenüber Frequenz-Offset weniger empfindlich als COFDM.

### 44.1 SC-FDMA als Zugriffsverfahren

Für den Fall, daß die Mobile ohne Rückmeldung von der Basisstation über den Kanal-Zustand senden würden, gäbe es die Möglichkeiten gemäß Bild 44.1.[69]

- FDMA (*frequency division multiple access*): jedem Mobile wird ein Sub-Channel zugeordnet. (Die Sub-Channel beziehen sich auf die Entzerrung im Frequenzbereich, wo die gesamte Bandbreite des Kanals für den Upstream in Sub-Channels aufgespalten wird.)
- TDMA (*time division multiple access*): jedem Mobile wird ein Zeitschlitz zugeordnet (der sich periodisch wiederholt). Hierbei wird in jedem Zeitschlitz die gesamte Kanal-Bandbreite belegt.

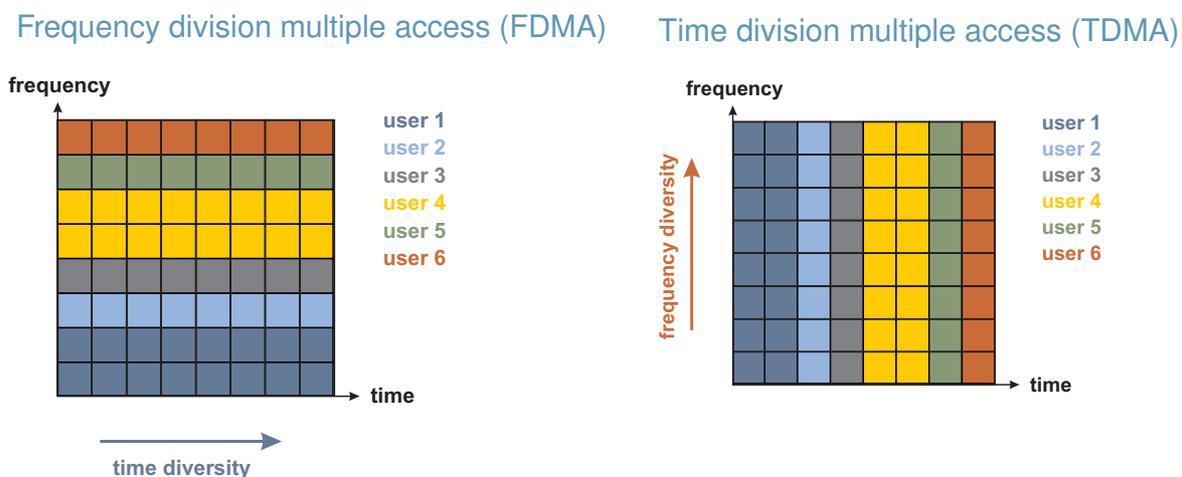


Bild 44.1: FDMA und TDMA

Tatsächlich wird jedoch die Übertragungsqualität jedes Mobiles aufgrund des momentanen Zustandes des Funkkanals in der Basisstation ausgewertet und der zu verwendende Sub-Channel pro Mobile durch die Basisstation festgelegt, Bild 44.2 [64], wodurch sich beispielhaft folgendes Zeit-Frequenz-Muster ergibt, Bild 44.3.[69]

Da eine Basis-Station mehrere Mobiles gleichzeitig bedient, muß hierfür das Modulationsverfahren so modifiziert werden, daß pro Mobile die zugewiesenen Sub-Channel verwendet werden. Man kommt damit zum SC-FDMA (*single carrier frequency division multiplex*) Verfahren, Bild 44.4.[64]

Die gesamte Bandbreite für den Upstream wird nicht durch ein einzelnes Mobile belegt, sondern nur ein Teil davon. Daher hat nun die Senderseite (im Unterschied zu SC-FDE) sowohl eine DFT (mit  $N$  Punkten) als auch eine IDFT (mit  $M$  Punkten) auszuführen. Hinter der FFT liegt das Signal im Frequenzbereich vor und kann dort durch Verschieben an geeignete Ports der IFFT in die zugewiesenen Sub-Channel verschoben werden.

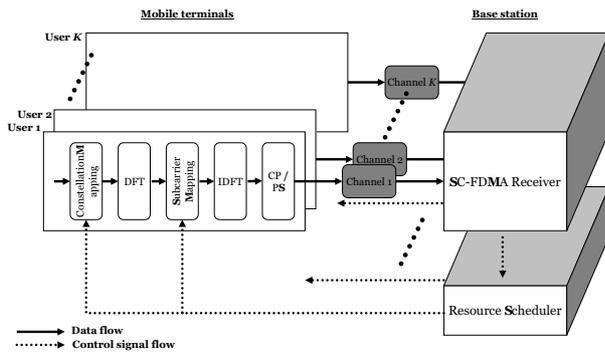


Bild 44.2: Steuerung der Sendefrequenz der Mobile durch die Basisstation

Time-frequency pattern

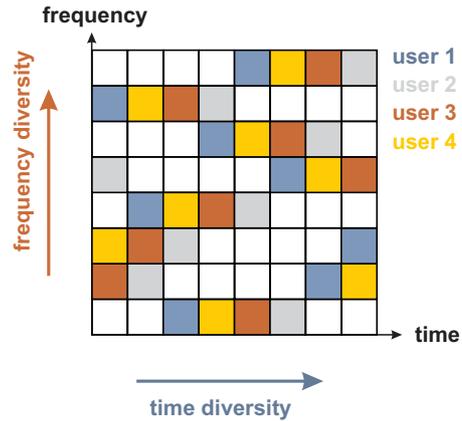


Bild 44.3: Zeit-Frequenz-Muster für die Belegung der Sub-Channel durch die Mobile

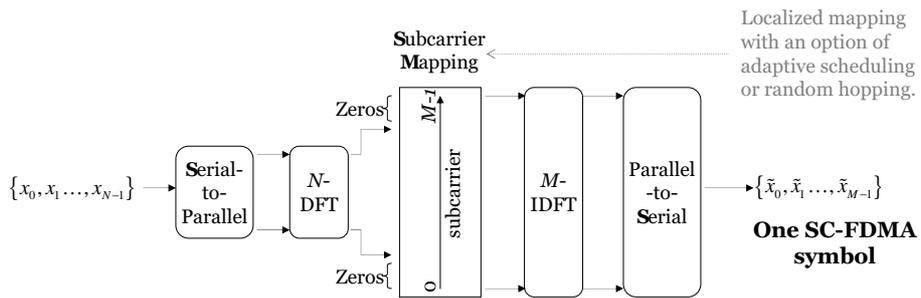


Bild 44.4: Blockschaltbild SC-FDMA Senderseite (Mobile)

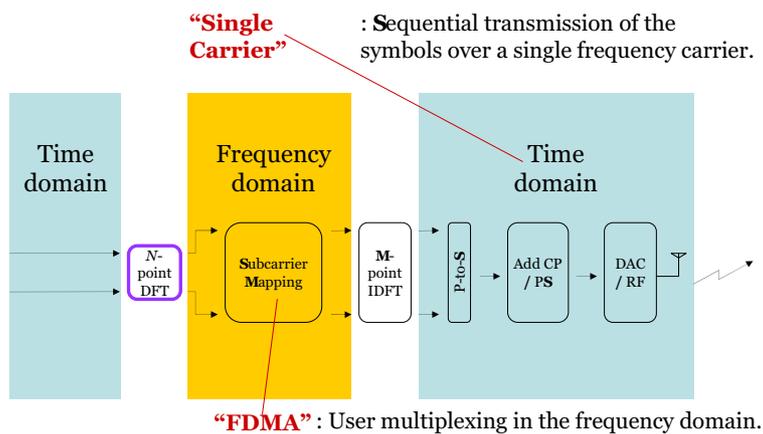


Bild 44.5: Im Mobile erfolgt die Multiplex-Bildung im Frequenzbereich. Die Blöcke FFT — Subcarrier Mapping — IFFT bilden einen „Vor-Modulator“.

Den übrigen Eingängen der IFFT werden  $(M - N)$  Nullen zugewiesen. Hinter der IFFT entsteht dadurch ein „vor-moduliertes“ Einträger-Signal, Bild 44.5.[64]  
 Die Zuweisung der Sub-Channel kann dabei verteilt (distributed) oder gebündelt (localized) erfolgen, Bild 44.6.[64]

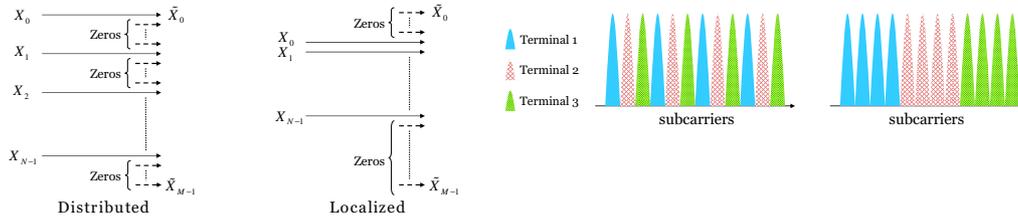


Bild 44.6: Zuweisung der Sub-Channel für das Mobile: verteilt oder gebündelt

Von mehreren denkbaren Zuweisungen wird für 3GPP-LTE (bislang) jedoch nur die gebündelte (LFDMA *localized FDMA*) verwendet, Bild .[64]

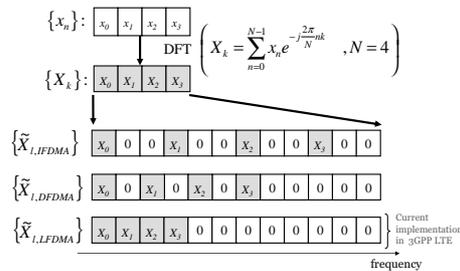


Bild 44.7: Beispiele für FDMA Sub-Channel Mapping.

### 44.2 SC-FDMA Blockstruktur

Im Empfänger der Basisstation werden die Signale von allen den Mobilten zunächst gemeinsam verarbeitet. In den Blockschaltbildern ist es aber der Übersichtlichkeit wegen oft so dargestellt, als ob nur jeweils ein einzelnes Mobile empfangen würde, Bild 44.8. [64] In diesem Blockschaltbild ist ebenfalls der Unterschied zu OFDMA (*orthogonal frequency division multiplex access*) gekennzeichnet.

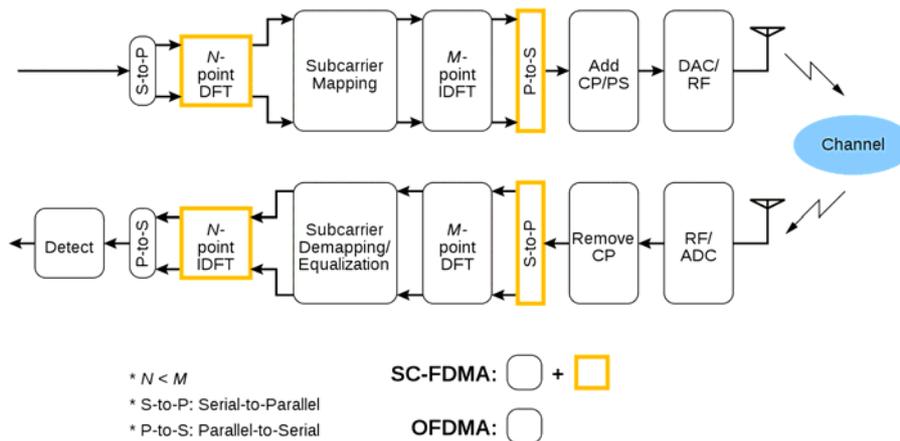


Bild 44.8: Blockschaltbild SC-FDMA Sender und Empfänger.

So wie wegen der Zusammenfassung mehrerer Mobile auf der Senderseite zum Zweck der Einpassung in die

Kanal-Bandbreite sowohl eine  $N$  Punkt FFT und eine  $M$  Punkt IFFT erforderlich ist, benötigt die Auftrennung im Empfänger dort eine  $M$  Punkt FFT und eine  $N$  Punkt IFFT. (Demodulation der „Vor-Modulation“)

Im Unterschied dazu wäre ohne diese Zusammenfassung, d.h. wenn jede Verbindung die gesamte Kanalbandbreite verfügbar hätte, auf der Senderseite weder eine FFT noch eine IFFT erforderlich, siehe Bild 43.2 (Seite 196), während die Struktur sich auf der Empfangsseite prinzipiell nur wenig ändert, sieht man ab von der notwendigen Auftrennung der einzelnen Teilnehmer.

## Spread Spectrum Modulationen

Unter Spread Spectrum Modulationen werden alle die digitalen Modulationsarten verstanden, die vor der Übertragung über einen Kanal **absichtlich spektral gespreizt** werden und dadurch dann ein Vielfaches der zur reinen Übertragung der Information notwendigen Bandbreite einnehmen. Da die ausgesendete Leistung hierbei auf ein sehr großes Frequenzband verteilt wird, reduziert sich dadurch deren Spektrale Leistungsdichte. Für große Spreizfaktoren wird sie dabei so gering, daß sie im Rauschen „untergeht“. Für einen nicht berechtigten Empfänger ist dann noch nicht einmal die Tatsache einer derartigen Funkaussendung erkennbar und es besteht eine geringe Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein solcher Funkverkehr entdeckt — und damit abgefangen (LPI *Low Probability of Intercept*) — wird. Die erste Anwendung der Spread Spectrum Modulationen war deswegen auch von militärischer Art, wo ein großes Interesse an „verdecktem“ Funkverkehr besteht. Informationen über diese Technik waren erst ab Mitte der '80er Jahre öffentlich zugänglich.

### 45 Übersicht über die Spread Spectrum Techniken

#### 45.1 Prinzip der „Direct Sequence“ Spreading Technik

Das Prinzip der Spread-Spectrum Techniken läßt sich am Beispiel eines der dabei angewendeten Verfahrens, der „Direct Sequence“ (DS) Technik veranschaulichen. Das zu übertragende digitale Signal mit der Datenrate  $R$  liegt dabei zunächst in Form einer (üblichen) Digitalen Modulation vor und hat da auch noch die minimal erforderliche Bandbreite. Bevor aber dieses Signal ausgesendet wird, erfolgt eine Multiplikation mit einem Spreiz-Code Signal, das eine „Chip-Rate“  $R_{ch}$  hat.<sup>45.1</sup> Das übertragene Signal erhält dadurch die Bandbreite

$$W_{ss} \approx R_{ch} + R \quad (45.1)$$

Im Empfänger wird das Empfangs-Signal zunächst wieder mit dem (synchronisierten) Spreiz-Code multipliziert und anschließend mit einem Filter der Bandbreite  $R$  gefiltert. Diese Prozedur stellt aber nichts anderes dar, als eine Korrelation des Empfangs-Signals mit dem Spreiz-Code. Das Ergebnis dieser Korrelation ist dann das zurückgewonnene Digitale Signal, Bild 45.1. Dieser Vorgang kann als Entspreizen (*De-Spreading*) bezeichnet werden.

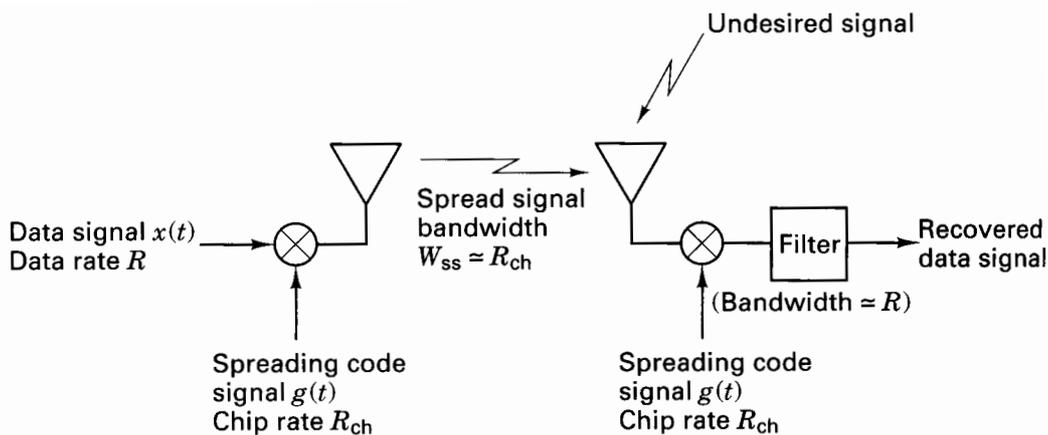


Bild 45.1: Prinzip des Direct Sequencing Spreading-Verfahrens

Das unbefugte „Abhören“ einer Digitalen Übertragung ist nur die eine Seite der Medaille. Genau so wichtig ist die Resistenz einer Spread Spectrum Übertragung gegen (beabsichtigte oder unbeabsichtigte) Störungen im Übertragungs-Kanal. Aus Bild 45.1 sieht man:

- Eine **einmalige** Multiplikation mit dem Spreiz-Signal erhöht die Bandbreite.

<sup>45.1</sup> Was beim Digitalen Signal „Bit-Rate“ genannt wird, bezeichnet man beim Spreiz-Code mit „Chip-Rate“. Die „Chips“ bedeuten für den berechtigten Empfänger keine zusätzlich Information. Für den nicht berechtigten Empfänger stellen sie jedoch „Informations-Müll“ dar und verhindern so, daß dieser die tatsächliche Information auswerten kann.

- Eine **zweimalige** Multiplikation mit dem Spreiz-Signal mit anschließender Filterung stellt das ursprüngliche Signal wieder her.
- Das Nutz-Signal wird **zweimal** multipliziert, das Stör-Signal aber nur **einmal**. Hinter dem Empfangs-Filter ist das Stör-Signal damit ganz wesentlich geschwächt.

#### 45.1.1 Historie: Das Noise Wheel

Beim Militär befaßte man sich seit dem Ende der '30er Jahre des letzten Jahrhunderts mit dieser Problemstellung. Zur damaligen Zeit gab es noch keine Digitale Signalverarbeitung. Alle Verfahren waren noch analog und daher sehr aufwendig. Eines dieser Verfahren benutzte zur spektralen Spreizung ein „Noise Wheel“, also eine Scheibe, auf deren Umfang 1440 Striche mit zufälliger Länge photographisch angebracht waren, Bild 45.2.

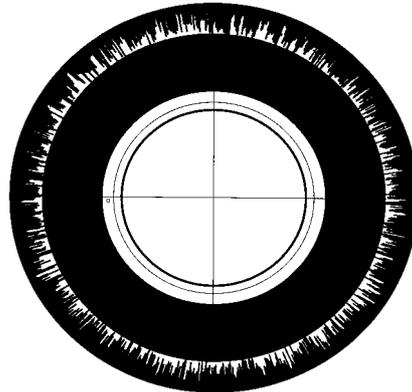


Bild 45.2: Noise Wheel (Rogoff 1950)

Alle  $0.25^0$  änderte sich die Länge der Striche.<sup>45.2</sup> Mit Hilfe einer optischen Abtastung (Photozelle) entstand daraus bei Drehung der Scheibe (mit 900 Umdrehungen pro Minute) ein pseudo-zufälliges Rauschsignal. Hiermit wurde dann ein binärer Datenstrom von 1 Bit/s gespreizt.

An diesem (historischen) Beispiel erkennt man bereits einige wesentliche Merkmale der (hier angewendeten „Direct Sequencing“ (DS) ) Spread Spectrum Technik.

- Es wird ein pseudo-zufälliges Spreiz-Signal benötigt.  
Pseudo-zufällig bedeutet, daß das Spreiz-Signal zwar periodisch ist, aber die Periodizität von einem Beobachter nicht (ohne weiteres) erkannt werden kann.
- Im Sender wird das Nutz-Signal mit dem Spreiz-Signal multipliziert.
- Der Empfänger benötigt zur Demodulation ebenfalls das senderseitig verwendete Spreiz-Signal.  
Ein pseudo-zufälliges Spreiz-Signal kann im Empfänger einfach erzeugt werden.
- Der Empfänger muß (bezüglich des Spreiz-Signals) mit dem Sender synchronisiert sein.
- Im Empfänger wird das empfangene Signal (im einfachsten Fall) durch das Spreiz-Signal dividiert,<sup>45.3</sup> wodurch das Empfangs-Signal „entspreizt“ wird. Tatsächlich wurde aber eine Korrelation durchgeführt.
- Ein unberechtigter Empfänger darf keine Informationen über das verwendete Spreiz-Signal bekommen.
- Die Taktrate (Chip-Rate)  $R_{Ch}$  des Spreiz-Signals ist sehr viel größer als die Datenrate  $R$  des Nutz-Signals.

<sup>45.2</sup>Die Länge der Striche wurde festgelegt nach zufällig ausgewählten Telefon-Nummern des Telefonbuches von Manhattan, die allerdings nicht auf „00“ enden durften. Von den Nummern wurden die mittleren beiden der letzten 4 Ziffern gewählt, was einen Wertebereich für die Länge der Striche zwischen 00 und 99 ergab.

<sup>45.3</sup>Im binären Fall reduzieren sich Multiplikation und Division je auf eine EXOR Verknüpfung.

## 45.2 Eigenschaften der Spread Spectrum Modulationen

Die günstigen Eigenschaften der Spread Spectrum Modulationen sind viel umfangreicher als es im obigen Beispiel dargestellt wurde. Insbesondere die damit möglichen zivilen Anwendungen stehen heute verstärkt im Interesse der Anwender.

- Widerstandsfähigkeit gegen absichtliche Störungen (Jammer).
- Unterdrückung von Interferenz-Störungen.
- Ermöglichung eines Vielfach-Zugriffs (Mobilfunk oder Satellitenfunk).
- Schutz vor Mehrwege-Ausbreitung (Echos im Funkkanal).
- Sichere (bzw. gesicherte) Übertragung.
- Verbesserte Spektrale Effizienz (beim zellularen Mobilfunk, z.B. UMTS).
- Genaue Ortung (z.B. bei GPS *Global Positioning System*).
- Verdeckter Funkverkehr und geringe Entdeckungs-Wahrscheinlichkeit.

## 45.3 Modulations-Verfahren für Spread Spectrum

Die aufgelisteten Eigenschaften lassen sich mit einem gegebenen Modulations-Verfahren nicht alle gleich gut erfüllen. Daher haben sich je nach Anforderung unterschiedliche Verfahren herausgebildet.

- Direct Sequencing (DS) mit Pseudo Noise.
- Frequency Hopping (FH).
- Time Hopping (TH).
- Chirp
- Hybride Verfahren (Mix aus den vorgenannten Methoden).

Die beiden zuerst genannten Verfahren besitzen die größte technische Bedeutung und werden daher ausführlicher dargestellt.

## 45.4 Definition der Spread Spectrum Verfahren

Nur solche Modulations-Verfahren, die bestimmte Kriterien erfüllen, werden als Spread Spectrum Verfahren bezeichnet.

1. Die Bandbreite des ausgesendeten Signals muß viel größer sein als die Bandbreite der Nachricht.
2. Die Bandspreizung muß (senderseitig) durch eine von der Nachricht unabhängige Spreiz-Funktion erfolgen.
3. Empfangsseitig muß mit Hilfe einer identischen synchron laufenden Spreiz-Funktion das empfangene Signal wieder entspreizt werden.

### 45.4.1 Nicht alle Modulationen mit erhöhter Bandbreite sind Spread Spectrum Verfahren.

Die (analogen) Winkel-Modulation (FM oder PM), die ebenfalls (in Abhängigkeit vom Modulations-Index) eine viel (bis sehr viel) größere Bandbreite zur Übertragung benötigen, gehören nicht zu den Spreiz-Verfahren. Das gleiche gilt auch für die (digitale) Puls-Code-Modulation (PCM).

Diese beiden Modulations-Verfahren sind jedoch in der Lage, speziell auch das **Weißes Rauschen** (AWGN *Additive White Gaussian Noise*) anlässlich ihrer Demodulation in einem Maße zu unterdrücken, das im Verhältnis der Übertragungs-Bandbreite zur Nachrichten-Bandbreite steht.

Spread Spectrum Modulationen sind dagegen nicht in der Lage, das weiße Rauschen zu reduzieren, wie sich bei einer genaueren Betrachtung des De-Spreading Vorgangs zeigen wird.

## 46 Binäre Pseudo-Zufalls-Signale

Die als Spreiz-Funktionen benötigten Pseudo-Zufalls-Signale (*pseudo random signals*, *Pseudo Noise sequence*: *PN sequence*) werden mit Hilfe von rückgekoppelten Schiebe-Registern der Länge  $m$  erzeugt, Bild 46.1.

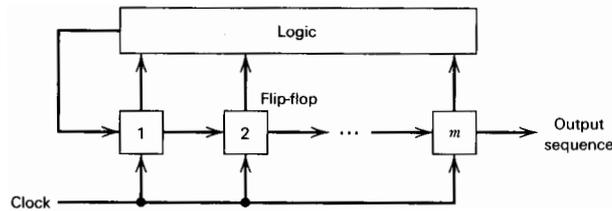


Bild 46.1: Prinzipielle Struktur zur Erzeugung einer PN Sequenz

Die Logik-Schaltung verknüpft die Ausgänge der Flip-Flop Schiebe-Register (SR) mit einander und führt das daraus gewonnene Signal auf den Anfang des SR zurück. Die Zustände des SR  $m$  ergeben die gesuchte PN Sequenz. Alle SR werden von einem gemeinsamen Takt  $T_c$  (Chip-Takt) gesteuert. Aufgrund der Rückführung ist klar, daß sich mit einer solchen Anordnung eine periodische PN Sequenz ergeben wird, die als maximale Periode  $2^m$  haben kann.

Als Verknüpfungs-Logik werden EXOR Glieder (modulo 2 Addition) verwendet. In einem solchen Fall wird das rückgekoppelte Schiebe-Register als „linear“ bezeichnet.

Enthält das SR lauter „Nullen“, so führt eine EXOR Verknüpfung auch nur zu „Nullen“, so daß am Ausgang beständig nur „Nullen“ erscheinen. Dieser Zustand muß also ausgeschlossen werden. Damit ist die maximal erreichbare Länge der PN Sequenz:

$$N = 2^m - 1 \quad (46.1)$$

Damit eine maximal mögliche Länge  $N$  der PN Sequenz tatsächlich erreicht wird, sind in Abhängigkeit von der Register-Länge  $m$  nur ganz bestimmte Rückführungen zulässig. Diese sind bis zur Länge  $m = 7$  in der Tabelle 6 gelistet. Die mit ‡ markierten Register ergeben Primzahlen als Länge der Periode der PN Sequenzen.

SR-Länge $m$	Rückführungen nach dem SR #
2‡	[2,1]
3‡	[3,1]
4	[4,1]
5‡	[5,2], [5,4,3,2], [5,4,2,1]
6	[6,1], [6,5,2,1], [6,5,3,2]
7‡	[7,1], [7,3], [7,3,2,1], [7,4,3,2], [7,6,4,2], [7,6,3,1], [7,6,5,2], [7,6,5,4,2,1], [7,5,4,3,2,1]

Tabelle 6: Rückführungen für PN Sequenzen maximaler Länge  $N$ . (‡: Länge  $N$  ist Primzahl.)

Je länger das SR wird, umso mehr Variationen bestehen. Jede Variation hat zwar die gleiche Länge  $N$ , unterscheidet sich aber in der Abfolge der „0“ und „1“.

Zu jeder Konfiguration von Rückführungen gibt es zusätzlich auch noch die „gespiegelte“ (bezüglich der Anzapfungen).

### 46.1 Eigenschaften der Pseudo-Zufalls-Signale

Die als Spreiz-Signale verwendeten binären Pseudo-Zufalls-Signale (*PN sequence*) der Länge  $N$  müssen bestimmten Kriterien genügen.

**Ausgewogenheit:** In jeder Periode einer PN Sequenz darf sich die Anzahl der „Einsen“ nur um 1 von der Anzahl der „Nullen“ unterscheiden.

**Laufänge:** Mit Laufänge (*run*) wird die Anzahl der jeweiligen unmittelbar aufeinander folgenden Nullen bzw. Einsen bezeichnet. Es soll sein:

- Die Hälfte aller Lauflängen soll einzelne Nullen oder Einsen betragen (Länge 1).
- Ein Viertel hat die Länge 2.
- Ein Achtel hat die Länge 3.
- usw., solange es (in Abhängigkeit von  $N$ ) noch sinnvoll ist.

**Korrelation:** Die durch zyklische Verschiebung gebildete Autokorrelations-Funktion (AKF) der PN Sequenz soll außerhalb des Maximums (normiert auf 1) nur Werte der Größe  $|1/N|$  erreichen.

## 46.2 PN Sequenz mit Schiebe-Register

Die Eigenschaften einer PN Sequenz sollen am Beispiel eines Schiebe-Registers der Länge  $m = 4$  veranschaulicht werden. Dieses soll eine Struktur gemäß Bild 46.2 haben. Der zugehörige Takt ist der Chip-Takt  $T_c$ .

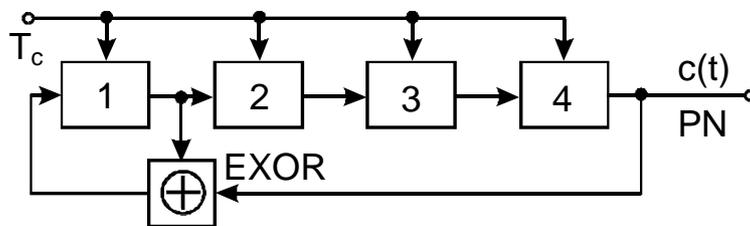


Bild 46.2: PN Generator mit Schieberegister zur Erzeugung einer PN Sequenz

Da der Zustand 0000 (nur Nullen in allen Registern) vermieden werden muß, soll anfänglich der Zustand 1000 eingestellt werden. Damit ergeben sich (nach jedem Taktimpuls) folgende Zustände des Registers innerhalb einer Periode  $N = 2^4 - 1 = 15$ :

$$1000, 1100, 1110, 1111, 0111, 1011, 0101, 1010, 1101, 0110, 0011, 1001, 0100, 0010, 0001 \quad (46.2)$$

Da nach dem 4. Register ausgekoppelt wird, ergibt sich die PN Sequenz  $c(t)$  der Länge  $N = 2^4 - 1 = 15$  (maximal mögliche Länge) innerhalb einer Periode zu:<sup>46.1</sup>

$$000111101011001 \quad (46.3)$$

Die Überprüfung der Eigenschaften ergibt für diese PN Sequenz:

**Ausgewogenheit:** 7 „Nullen“, 8 „Einsen“;  $\sim$  ist erfüllt.

**Laufänge:** 4 Läufe (*runs*) „Nullen“ & 4 Läufe (*runs*) „Einsen“, davon die Hälfte, also je 2 runs der Länge 1 ein Viertel, also je 1 run der Länge 2

Die Bedingung für die Laufängen ist erfüllt. Die PN Sequenz ist aber zu kurz um weiter unterteilen zu können.

### 46.2.1 Die Autokorrelations-Funktion der PN Sequenz

Die Autokorrelations-Funktion (AKF)  $R_{cc}(\tau)$  einer periodischen Zeitfunktion  $c(t)$  mit einer Periode  $T$  ist definiert zu:

$$R_{cc}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} c(t)c(t+\tau)dt \quad (46.4)$$

Die PN Sequenz ändert ihren Wert immer zu den Takt-Zeitpunkten. In diesem Fall kann das Integral für die AKF durch eine Summe ersetzt werden und es genügt dann, Bitweise die Übereinstimmungen (als +1) bzw. Nicht-Übereinstimmungen (als -1) auszuzählen.

<sup>46.1</sup>Eine Auskopplung nach einem anderen Register führt auf eine unterschiedliche PN Sequenz gleicher Länge  $N$ .

In dem gewählten Beispiel ist für die Verschiebung  $\tau = 0$ , also dann, wenn keine Zeitverschiebung besteht, die Übereinstimmung  $N = 15$  mal gegeben. Damit wird  $R_{cc}(0) = 15$ . Nun werden die beiden zu vergleichenden Sequenzen um 1 Chip ( $\tau = T_c$ ) gegeneinander verschoben. Da es sich bei der PN Sequenz um eine periodische Funktion handelt, sind somit für 15 Werte der Verschiebung  $\tau$  die Übereinstimmungen zu prüfen. Dabei stellt man fest, daß in 7 Fällen eine Übereinstimmung besteht und in 8 Fällen keine. Für jede andere Verschiebung  $\neq N$  (bzw. Vielfache von  $N$ ) ergibt sich das gleiche Resultat.

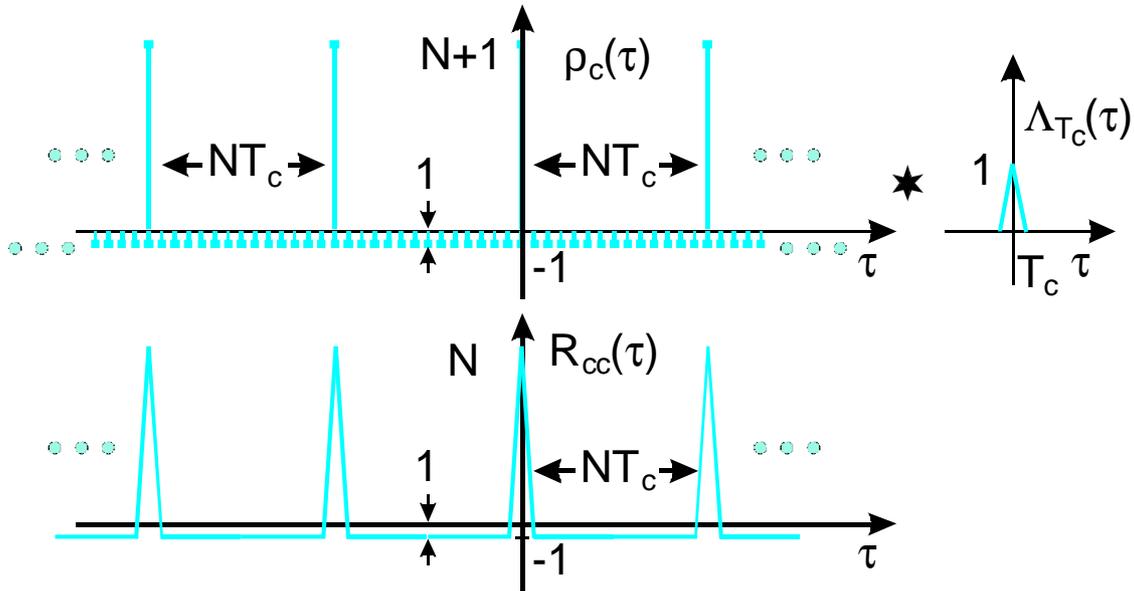


Bild 46.3: Autokorrelations-Funktion (AKF) einer PN Sequenz als Faltung mit  $\lll$  Funktionen

Werden die so gewonnenen Ergebnisse zu jedem Wert der Verschiebung  $\tau$  als  $\delta$ -Impuls dargestellt, läßt sich dieses auch als Differenz zweier  $\delta$ -Kämme  $\lll$  interpretieren, Bild 46.3.

$$\varrho_c(\tau) = (N + 1)\lll_{NT_c}(\tau) - \lll_{T_c}(\tau) \tag{46.5}$$

Als Form der Chips der PN Sequenz wird das Rechteck  $\square$  angenommen. Als AKF eines  $\square_{T_c/2}(t)$  Impulses ergibt sich  $T_c \wedge_{T_c}(\tau)$ .<sup>46.2</sup> Damit folgt für die (nicht normierte) AKF einer PN Sequenz:

$$R_{cc}(\tau) = \varrho_c(\tau) * T_c \wedge_{T_c}(\tau) \tag{46.6}$$

Die normierte Form  $R_c(\tau)$  der AKF erhält man, wenn auf  $R_{cc}(0)$  bezogen wird.

$$R_c(\tau) = \frac{R_{cc}(\tau)}{R_{cc}(0)} \tag{46.7}$$

Damit ergibt sich für die normierte AKF  $R_c(\tau)$  der PN Sequenz ein Verlauf gemäß Bild 46.4.

### 46.2.2 Zur Resistenz gegen Echos im Funk-Kanal

Für sehr lange PN Sequenzen, d.h.  $N$  ist sehr groß (und  $T_c$  entsprechend kurz) folgt, daß die AKF für  $|\tau| > T_c$  praktisch 0 ist, da  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \rightarrow 0$  geht.

Auf dieser Eigenschaft beruht die Fähigkeit der Spread Spektrum Modulation, mit Echos im Funk-Kanal zurecht zu kommen. Nur das Empfangs-Signal von demjenigen Pfad, auf den synchronisiert ist, wird entspreizt und damit demoduliert. Die Echos (mit Laufzeiten  $\tau_{\text{Echo}} > T_c$ ) werden alle nicht entspreizt und sind dadurch (praktisch) wirkungslos.

<sup>46.2</sup>Die AKF eines  $\square$  förmigen Symbols ist  $\wedge$  förmig, wie man sich mit Hilfe der „vereinfachten Faltung“ leicht selbst klar machen kann, nachdem hierfür die Korrelation „\*“ durch eine Faltung „\*“ ersetzt wurde.

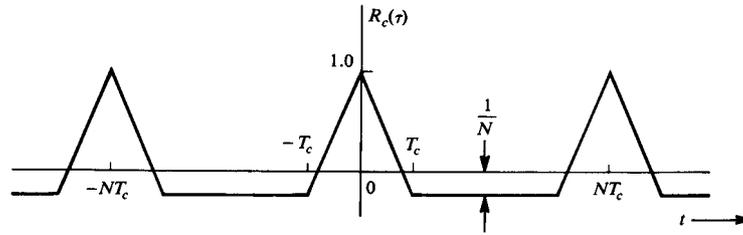


Bild 46.4: Normierte Autokorrelations-Funktion (AKF) einer PN Sequenz

**46.2.3 Zur genauen zeitlichen und örtlichen Auflösung**

Das Global Positioning System (GPS) als bekanntestes Ortungs-System benutzt ebenfalls sehr lange PN Sequenzen. Hierbei wertet der Empfänger mehrere Satelliten-Signale aus und kann dann mit den an einem bestimmten Ort zu dann bekannten Zeiten angekommenen Signalen die Position dieses Ortes berechnen.

**46.2.4 Spektrale Leistungs-Dichte einer PN Sequenz**

Nach dem Theorem von **Wiener & Chintchine** ist das Leistungs-Dichte-Spektrum  $P_c(\omega)$  (PSD *Power Spectrum Density*) die Fourier-Transformierte der AKF, wodurch in diesem Fall (für  $\square$  förmige Chips) eine  $\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$  Form für die Hüllkurve an die Spektralfunktion entsteht. Wegen der Periodizität der AKF besteht  $P_c(\omega)$  aus äquidistanten  $\delta$ -Linien, Bild 46.5.

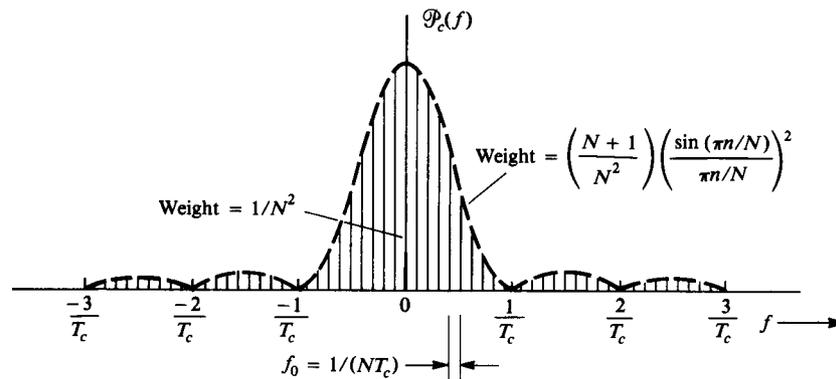


Bild 46.5: Leistungs-Dichte Spektrum (PSD) einer PN Sequenz

Mit der Korrespondenz

$$\text{III}_{T_c}(\tau) \circ \bullet \Omega_c \text{III}_{\Omega_c}(\omega); \quad \Omega_c = \frac{2\pi}{T_c} \tag{46.8}$$

wird aus Gleichung (46.5):

$$\varrho_c(\tau) \circ \bullet \frac{(N+1)}{N} \Omega_c \text{III}_{\Omega_c/N}(\omega) - \Omega_c \text{III}_{\Omega_c}(\omega) \tag{46.9}$$

Die Transformierte von  $T_c \wedge_{T_c}(\tau)$  ergibt sich zu:

$$T_c \wedge_{T_c}(\tau) \circ \bullet \left( T_c \frac{\sin(\omega T_c)}{\omega T_c} \right)^2 \tag{46.10}$$

Daraus folgt für das (normierte) Leistungs-Dichte-Spektrum (PSD *power spectrum density*)

$$P_c(n) = P_c(n/T_c):$$

$$P_c(n) = \begin{cases} \left(\frac{N+1}{N^2}\right) \left(\frac{\sin(\pi n/N)}{\pi n/N}\right)^2 & \text{für } n \neq 0 \\ \frac{1}{N^2} & \text{für } n = 0 \end{cases} \quad (46.11)$$

### 46.3 Kreuz-Korrelation von PN Sequenzen

Für Schiebe-Register mit Längen  $m \geq 5$  gibt es mehrere Möglichkeiten für Anzapfungen, welche alle die maximale Länge von  $N = 2^m - 1$  haben, Tabelle 6, wobei jede dieser Konfigurationen auf eine andere PN Sequenz führt. Jede dieser möglichen PN Sequenzen hat dabei die gleiche (nicht normierte) AKF, die für die Verschiebung  $\tau = 0$  ein Maximum der Größe  $N$  hat.

Wenn man die Bildung der AKF als Form einer „verallgemeinerten Resonanz“ versteht<sup>46.3</sup>, können damit offensichtlich entsprechend gespreizte Signale eindeutig empfangsseitig erkannt (und damit wieder entspreizt) werden.

Die Frage, die sich daraus ergibt ist, ob die Kreuz-Korrelationen (KKF) der unterschiedlichen PN Sequenzen (gleicher Länge) für jede mögliche Verschiebung  $\tau$  genügen kleine Werte ergeben, damit sich z.B. in einer Anwendung bei einem CDMA System (CDMA *Code Division Multiplex Access*) die Teilnehmer sich gegenseitig möglichst wenig stören.

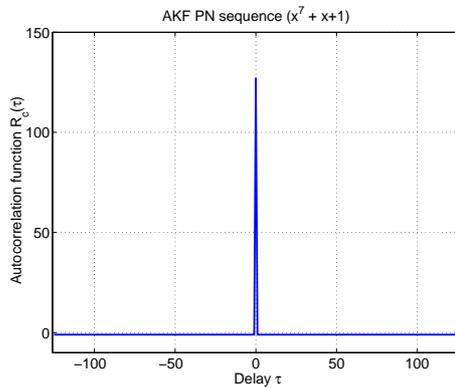


Bild 46.6: AKF einer PN Sequenz der Länge  $2^7 - 1$  (für alle zugelassenen Anzapfungen)

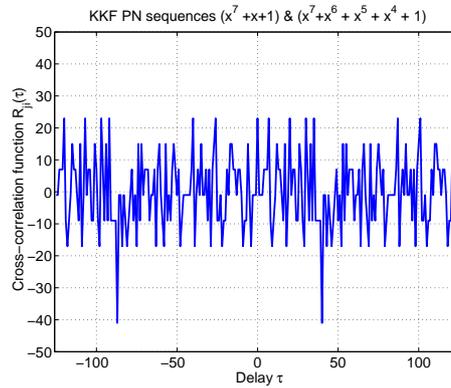


Bild 46.7: KKF zweier PN Sequenzen der Länge  $2^7 - 1 = 127$  (mit Anzapfungen  $[7, 1]$  und  $[7, 6, 5, 4]$ )

Als Beispiel hierzu werden zwei Schiebe-Register der Länge  $m = 7$  mit den Anzapfungen  $[7, 1]$  und  $[7, 6, 5, 4]$  betrachtet, und deren AKFs und die KKF gebildet, Bilder 46.6 und 46.7. Die PN Sequenzen sind in den Bildern 46.6 und 46.7 in Polynomform angegeben.

$$x^7 + x + 1 \quad \text{bzw.} \quad x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + 1 \quad (46.12)$$

Aus diesem Beispiel kann man erkennen, daß die KKF für bestimmte Verschiebungen (*delay*)  $\tau$  erhebliche Amplituden annehmen kann, hier z.B. -41 (normiert:  $-41/127 \approx -1/3$ ).

#### 46.3.1 Gold-Codes

Eine der Möglichkeiten, zu günstigeren Werten für die KKF zu kommen, sind die Gold-Codes.

Gold-Codes (Gold PN Sequenzen) entstehen aus der EXOR Verknüpfung zweier PN Schiebe-Register gleicher Länge, jedoch mit unterschiedlichen Anzapfungen.

Als Beispiel dazu werden die beiden zuvor verwendeten Schiebe-Register (SR) der Länge  $m = 7$  betrachtet, Bild 46.8. Ein Gold-Generator hat viele Freiheitsgrade, da die beiden SR mit jeweils  $2^n - 1$  verschiedenen Anfangswerten starten können, wobei es hierbei auf die dabei möglichen Unterschiede ankommt. Allerdings ist nicht jeder beliebige Anfangswert zulässig. Dadurch ergeben sich insgesamt (nur)  $2^n + 1$  (unterschiedliche) Gold-Sequenzen, die von dem Generator Bild 46.8 erzeugt werden können.

<sup>46.3</sup>Zur „verallgemeinerten Resonanz“ siehe Signale und Systeme, Kapitel „Frequenz, Spektrum, Resonanz“ (FSR).[73]

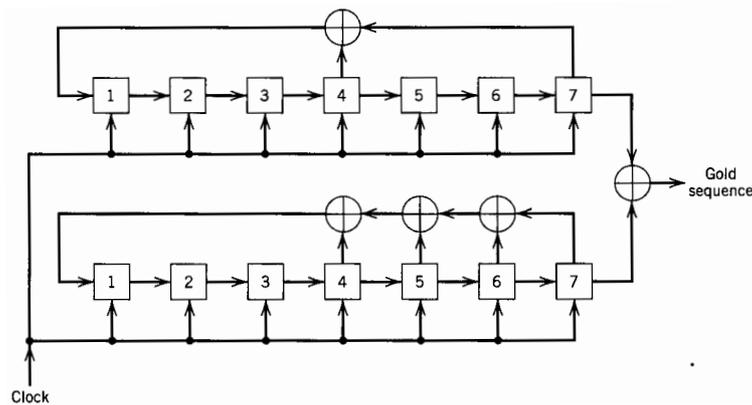


Bild 46.8: Generator für Gold-Sequenzen der Länge  $N = 2^7 - 1 = 127$

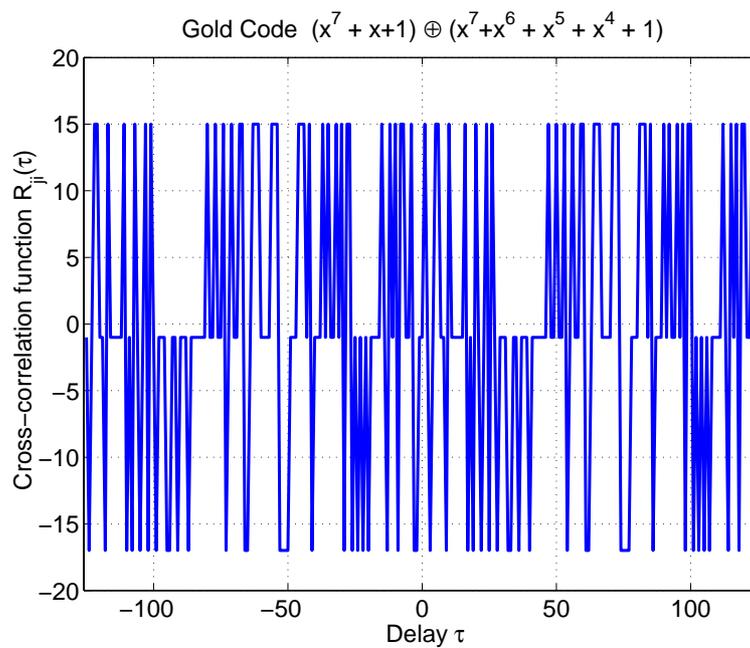


Bild 46.9: KKF zweier Gold-Sequenzen der Länge  $N = 2^7 - 1 = 127$ . Es treten nur 3 verschiedene Amplituden-Werte auf.

Gold hat allgemein gezeigt, daß die KKF's sämtlicher hiermit erzeugbaren Gold-Sequenzen betragsmäßig den Wert  $2^{(n+1)/2} + 1$  bei Generatoren mit einer ungeraden Anzahl von SR nicht überschreiten. Im gewählten Beispiel ist das  $2^4 + 1 = 17$ . Bild 46.9 zeigt ein Beispiel für die KKF zweier mit dem Gold-Generator gemäß Bild 46.8 erzeugten Gold-Codes.

Bemerkenswert an der KKF zweier Gold Sequenzen ist, daß nur 3 verschiedene Werte für die Amplitude vorkommen.

### 46.4 Hadamard- oder Walsh-Codes

Die Walsh-Funktionen sind periodisch und stellen ein orthogonales Funktionen-System dar. Werden 2 (beliebige) unterschiedliche Walsh-Funktionen mit einander multipliziert und dann über eine ganze Periode integriert, ergibt sich der Wert 0. Wenn 2 (beliebige) gleiche Walsh-Funktionen dieser Operation unterzogen werden, ergibt sich dagegen ein (jeweils gleich großes) Maximum.<sup>46.4</sup>

Agrund ihrer Orthogonalität werden Walsh-Funktionen als Hadamard Spreiz-Codes in CDMA Systemen angewendet. Bild 46.10 zeigt den Zeitverlauf der hierfür verwendeten Walsh-Funktionen.<sup>46.5</sup>

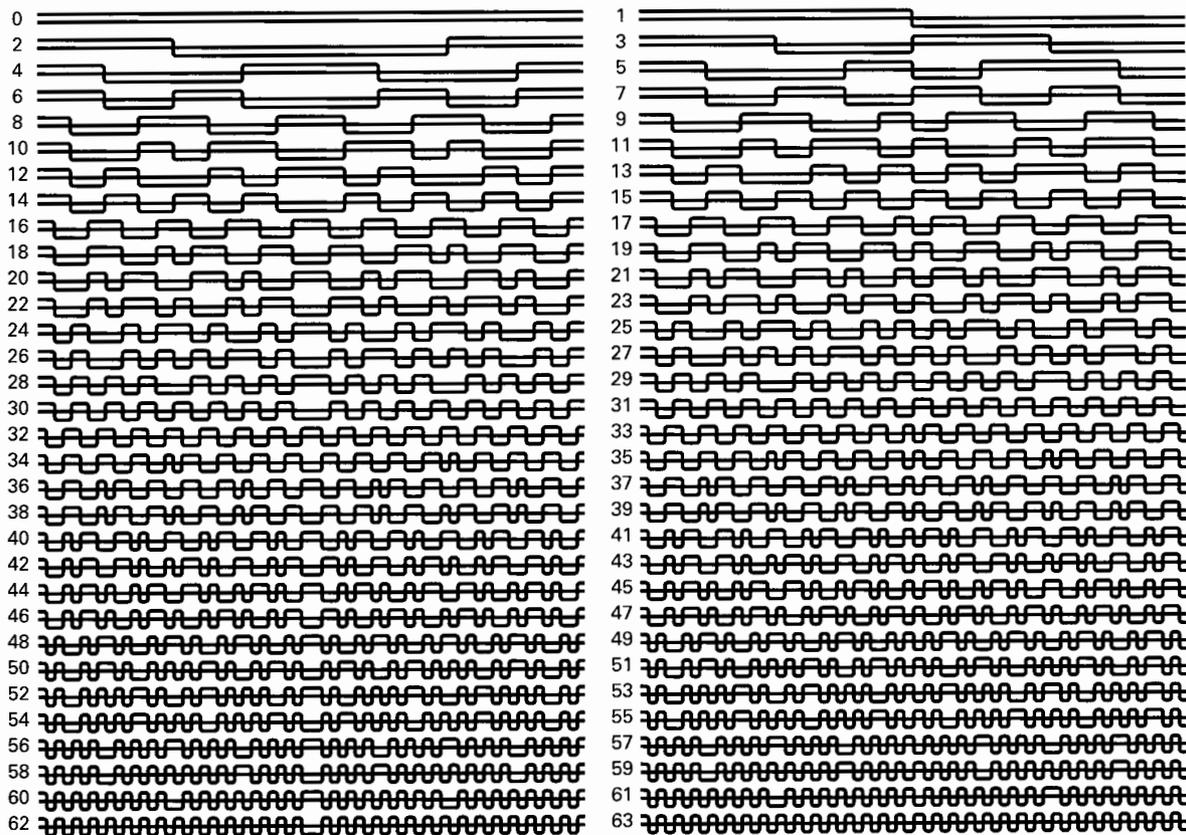


Bild 46.10: Walsh-Funktionen entsprechend zu *cal* (even) und *sal* (odd) bis 63. Ordnung.

## 47 Direct Sequencing Spread Spectrum

Das Direct Sequencing Spread Spectrum (DSSS) Verfahren wurde ganz pauschal bereits in Bild 45.1 (Seite 205) dargestellt. Nachdem zunächst die Eigenschaften der Spreiz-Code im Vordergrund waren, soll nun auf weitere System-Aspekte eingegangen werden.

<sup>46.4</sup>Dies ist die Orthogonalitäts-Bedingung. Technisch kann dies auch als „verallgemeinerte Resonanz“ aufgefaßt werden.

<sup>46.5</sup>Gegenüber der üblichen Definition der Walsh-Funktionen sind in Bild 46.10 alle Verläufe in geraden Zeilen (von oben durchgezählt) invertiert.

## 47.1 Modulationen für DSSS

Als digitale Modulationen für DSSS sind 2PSK und 4PSK üblich. Dies ist im Prinzip deshalb ausreichend, weil anschließend sowieso spektral gespreizt wird. Auch eine Verrundung der Symbole ist infolge der spektralen Spreizung von geringem Interesse.

Eine höherstufige Modulation, die ansonsten zur Verminderung der Übertragungs-Bandbreite verwendet wird, ist bei DSSS nicht allgemein üblich, da dies empfangsseitig mit einem erhöhten Aufwand verbunden ist.<sup>47.1</sup>

Für die Kombination von Digitaler Modulation und Spreiz-Code sind folgende Varianten üblich.

- 2PSK mit Spreiz-Code
- 4PSK mit Spreiz-Code
- 2PSK mit I/Q Spreiz-Code
- 4PSK mit I/Q Spreiz-Code

Für die Blockschaltbilder werden sowohl die Digitalen Signale als auch die Chips der Spreiz-Codes als bipolare Zeitfunktionen angesetzt und die jeweilige Verknüpfung multiplikativ angenommen. Da beide Verknüpfungen als Multiplikationen (bzw. EXOR Verknüpfungen) dargestellt werden können, gilt das kommutative Gesetz der Multiplikation,  $M \cdot S = S \cdot M$ . Damit ist also die Reihenfolge von Multiplikation  $M$  und Spreizung  $S$  beliebig und nur eine Frage der technischen Realisierung. In Bild 47.1 ist die Reihenfolge Modulation  $\rightarrow$  Spreizung gewählt.

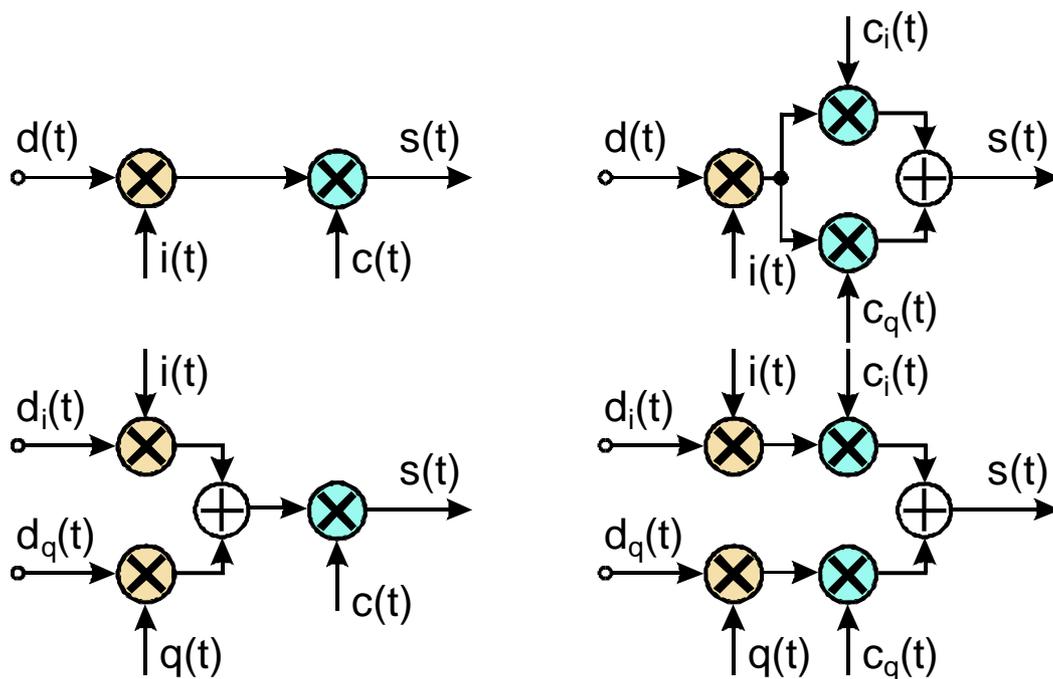


Bild 47.1: 2PSK mit Spreiz-Code, 2PSK mit I/Q Spreiz-Code (obere Zeile), 4PSK mit Spreiz-Code, 4PSK mit I/Q Spreiz-Code (untere Zeile). Jeweils linker Teil: Modulation; rechter Teil: Spreizung.

Ein I/Q Spreiz-Code besteht aus 2 gleich langen, jedoch ansonsten unterschiedlichen Codes  $c_i(t)$  und  $c_q(t)$ . I/Q gespreizte Signale sind schwerer zu entdecken und bezüglich mancher Störungen auch weniger empfindlich.

<sup>47.1</sup>Der Vorteil einer höherstufigen Modulation besteht in ihrer größeren Spektralen Effizienz, ausgedrückt in Bit/sec/Hz.

## 47.2 Demodulation von DSSS

### 47.2.1 Prinzip des Entspreizens der Daten

Die im Sender erfolgte Spreizung des Datensignals muß im Empfänger wieder aufgehoben werden. Dies ist bei Verwendung von binären Spreiz-Codes besonders einfach möglich. Zur Veranschaulichung der Wirkungsweise der Ent-Spreizung werden die Daten und der Spreiz-Code als Binär-Signale betrachtet. Damit erhält man das folgende vereinfachte Blockschaltbild (für eine Darstellung im Basisband), Bild 47.2.

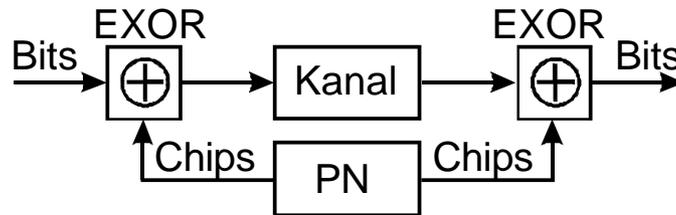


Bild 47.2: Spreizen und Entspreizen über EXOR Verknüpfungen

Bezüglich der Nutzbits liefert die 2-fache EXOR-Verknüpfung mit dem Spreiz-Code eine perfekte Wiederherstellung des Datensignals. Wird eine (unipolare) PN Sequenz mit sich selbst EXOR verknüpft, so gibt das einen konstanten Wert. Das gleiche gilt, wenn eine (bipolare) PN Sequenz mit sich selbst multipliziert wird.

$$c(t) \oplus c(t) = 1, \quad c(t) \text{ unipolar}; \quad c(t) \cdot c(t) = 1, \quad c(t) \text{ bipolar} \quad (47.1)$$

### 47.2.2 Demodulation des entspreizten Signals

Im Empfänger kommt zuerst die Entspreizung und danach die Demodulation. Es ergibt sich folgendes Blockschaltbild für den DSSS Empfänger, Bild 47.3.

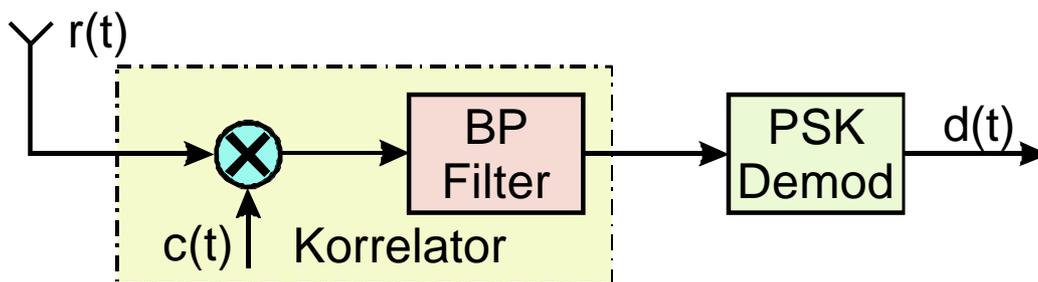


Bild 47.3: DSSS Empfänger

Das BP Filter im Korrelator hat die Bandbreite der ungespreizten Digitalen Modulation. Diese wird anschließend in einem Digitalen Demodulator demoduliert.

## 47.3 Der Processing Gain

Das digitale Signal habe (vor der Spreizung) die Bandbreite  $B_m$  entsprechend zur Datenrate  $R$ . Das Spreiz-Signal habe die Bandbreite  $B_s = B_c$  entsprechend zur Chip-Rate  $R_{Ch}$ . Die Bandbreite des gespreizten Signals  $B_{ss}$  läßt sich für praktische Fälle, bei denen  $R_{Ch} \gg R$  ist, hinreichend genau dadurch abschätzen, daß hierfür sowohl für das digitale Signal als auch für das Spreiz-Signal eine rechteckförmige Spektral-Belegung angenommen wird. Die Multiplikation von Datensignal mit dem Spreiz-Signal führt im Spektrum zu einer Faltung, die sich mit Hilfe der getroffenen Annahmen besonders einfach ausführen läßt und dann auf eine Trapez-Form führt.

Die Bandbreite des Faltungs-Produktes  $B_{ss}$ , auf die es hierbei ankommt, ist die Summe der Bandbreiten  $B_m$  und  $B_c = B_s$ . Für große Spreiz-Faktoren ist dies näherungsweise  $B_c$ .

$$B_{ss} = B_m + B_c \approx B_c \quad \text{für} \quad B_c \gg B_m \quad (47.2)$$

Da die Symbol-Rate  $R_s \approx B_m$  und die Chip-Rate  $R_{Ch} \approx B_c$  ist, gilt auch:

$$B_{ss} \approx R_{Ch} \quad (47.3)$$

Wie im Abschnitt 45.1 (Seite 45.1) bereits erwähnt ist, wird durch die empfangsseitige Entspreizung des Nutz-Signals gleichzeitig ein Stör-Signal gespreizt. Die Energie des Störsignals wird damit auf die volle Bandbreite verteilt und entsprechend gering ist dann der Störanteil, der in die Bandbreite des Filters im Korrelator fällt.

Andererseits wird das Nutzsignal ent-spreizt, so daß dessen Energie vollständig in die Bandbreite des Filters im Korrelator fällt und damit voll am Demodulator zur Verfügung steht.

Auf diesem Effekt beruht der Gewinn (*processing gain*), der typisch für die Spread Spektrum Verfahren ist. Dies läßt sich sehr einfach graphisch anhand der dabei auftretenden Spektren erklären, Bilder 47.4 und 47.5.

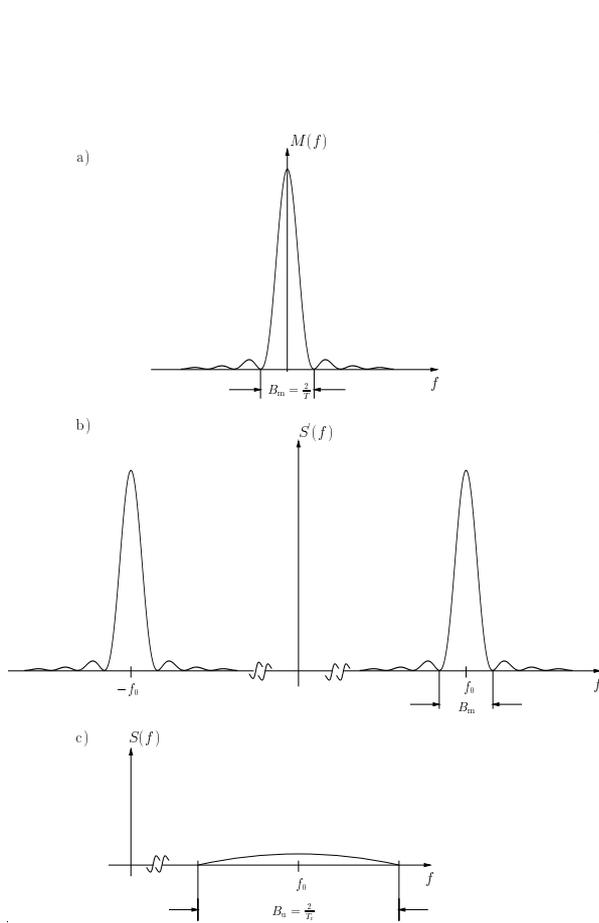


Bild 47.4: Leistungsdichte-Spektrum der Daten vor und nach der Spreizung

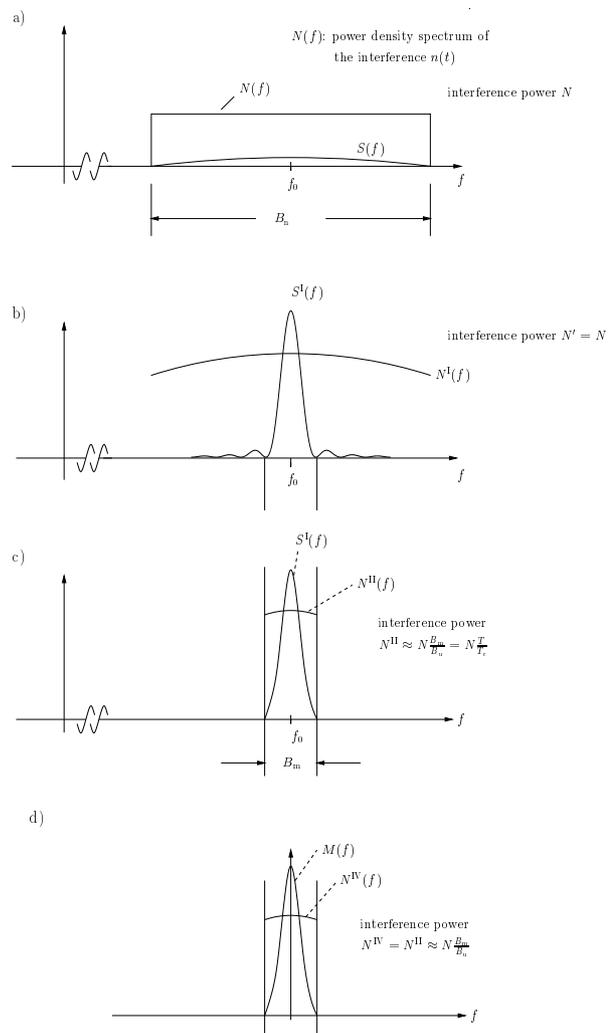


Bild 47.5: Leistungsdichte-Spektrum von Störung und Daten vor und nach der Ent-Spreizung

Empfangsseitig ist das Nutz-Signal spektral durch die Störung (Interferenz) völlig verdeckt und nicht erkennbar. Nach der Ent-Spreizung überragt das Nutz-Signal jedoch die Störung. Die Störung wird bei dieser Prozedur gespreizt und deren Leistungs-Dichte entsprechend vermindert. Diese Aussage gilt für Interferenz-Störungen (*jammer*), die eine endliche Bandbreite haben.

Das Signal zu Geräusch-Verhältnis wird vor allem aber dadurch verbessert, daß das BP Filter des Korrelators auf die Bandbreite des Nutz-Signals beschränkt ist. Am Ausgang dieses Filters ist somit nur noch ein Bruchteil der Stör-Leistung vorhanden, aber die gesamte Signal-Leistung.

Die damit erzielte Verbesserung des Signal zu Geräusch-Abstandes wird mit Processing Gain  $G_p$  bezeichnet. Dieser ist in erster Näherung proportional zum Verhältnis der Bandbreiten von gespreiztem zu un-gespreiztem Signal.

$$G_p \approx \frac{B_c}{B_m} = \frac{R_{Ch}}{R_s} \tag{47.4}$$

**47.3.1 Auswirkung des De-Spreading auf Weißes Rauschen**

Unter dem Aspekt der Störung eines Signals auf dem Übertragungsweg ist das Gauß-verteilte Weiße Rauschen (WR) ein Störer (*jammer*) mit (theoretisch)  $\infty$  großer Störleistung. Dies folgt daraus, daß das WR (theoretisch) eine  $\infty$  große Bandbreite hat.

Trotzdem kann in Anwesenheit eines solchen Störers eine sinnvolle Übertragung stattfinden, da das Nutz-Signal seine Leistung auf eine endliche Bandbreite beschränkt und damit die im Empfänger wirksame Störleistung übertrifft.

Es stellt sich die Frage, ob bezüglich WR mit Hilfe einer Spread Spektrum Übertragung ein Processing Gain realisierbar ist. Diese Frage muß verneint werden.

Da WR (theoretisch) eine  $\infty$  große Bandbreite hat, ändert sich daran auch nichts, wenn WR im Empfänger (erneut) einem Spreading-Prozeß unterworfen wird. Die Spektrale Leistungs-Dichte von WR bleibt dadurch unverändert, Bild 47.6. Das de-spreadete Signal enthält damit den gleichen Anteil an Rauschleistung, wie es ein nicht gespreiztes übertragenes Signal im Empfänger aufweist.

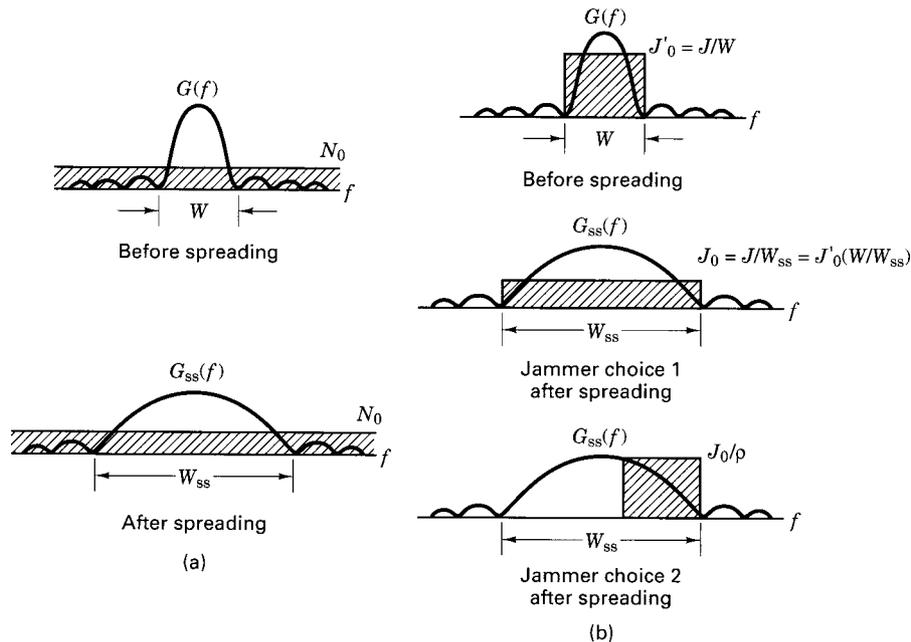


Bild 47.6: Auswirkungen von Weißem Rauschen und Jammer im Spektrum

Anders sieht der Fall aus, wenn ein absichtlicher (oder unabsichtlicher) bandbegrenzter Störer auf die Übertragung einwirkt. Es sei ein böswilliger Störer unterstellt, wie es bei militärischen Anwendungen vorkommt. Dieser hat nur eine endliche Sendeleistung zur Verfügung. Wird für eine Übertragung nun ein Spread Spektrum Verfahren gewählt, muß der Störer sich entscheiden, ob er seine Störleistung auf die gesamte Bandbreite  $B_{ss} = W_{ss}$  aufteilt (und damit die Leistungs-Dichte  $J'_0$  auf  $J_0$  verringert) oder ob er in einem Teil-Band stört (und er damit seine Leistungs-Dichte auf  $J_0/\rho$  erhöhen kann).

Wie immer er sich entscheidet, wird aufgrund des empfangsseitigen Spreading ein Teil der Störleistung außerhalb des Durchlaß-Bereichs des BP Filters des Korrelators sein und dadurch die Sörwirkung geschwächt

werden. Abhängig von den gewählten Parametern der Modulation kann die eine oder die andere Strategie des Jammers wirkungsvoller sein.<sup>47.2</sup>

## 48 Frequency Hopping Verfahren

Während die zuvor behandelten DSSS Verfahren die Interferenzen (durch Jammer etc.) vermindern, versuchen die FHSS Verfahren (FHSS *Frequency Hopping Spread Spectrum*) die Interferenzen zu vermeiden.<sup>48.1</sup> Die zunächst erzeugte digitale Modulation wird dadurch gespreizt, daß sie spektral mittels eines Mischers und (agilen) Umsetz-Oszillators in zeitlicher Abfolge innerhalb eines breiten Frequenzbereiches verteilt wird. Zur Steuerung der Frequenz des Umsetz-Oszillators werden PN Sequenzen (z.B. Gold Sequenzen) eingesetzt, Bild 48.1. Das BP Filter am Sender-Ausgang muß daher eine ausreichend große Bandbreite aufweisen.

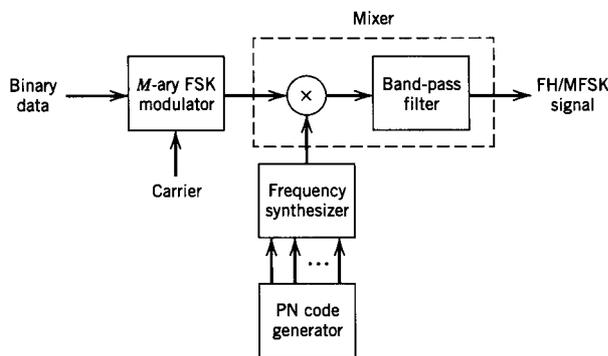


Bild 48.1: Frequency Hopping Modulator

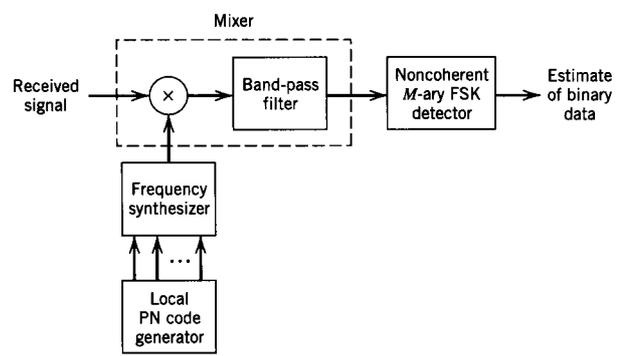


Bild 48.2: Frequency Hopping Demodulator

Der Empfänger verwendet die gleiche PN Sequenz zur synchronen Steuerung seines Umsetzoszillators, Bild 48.2. Das BP Filter des Empfängers hat nur die (geringe) Bandbreite, die für die digitale Modulation erforderlich ist. Die Baugruppen Frequenz-Synthesizer, Mischer und Bandpaß wirken zusammen als **Korrelator**, entsprechend zum DSSS Verfahren.

Da Sender und Empfänger nach jedem Hop einschwingen müssen, ist die Verwendung eines Modulationsverfahrens, das im Empfänger eine synchrone Demodulation erfordert, nicht möglich. Daher wird die **asynchrone L-FSK** ( $L$  stufiges Frequency Shift Keying) eingesetzt.

Bezüglich der Hopping Frequenz unterscheidet man 2 Fälle:

**Slow Frequency Hopping** : Während der Dauer einer Frequenz-Einstellung des Frequenz-Synthesizers, bzw. eines Hops, werden mehrere Symbole übertragen.

In diesem Fall ist die Symbol-Dauer kürzer als die Hop-Dauer. Die Symbol-Rate wird dann als Chip-Rate bezeichnet.

**Fast Frequency Hopping** : Während der Dauer eines Symbols ändert sich die Frequenz des Synthesizers mehrfach. Pro Symbol werden mehrere Hops ausgeführt.

Hier ist die Hop-Dauer kürzer als die Symbol-Dauer. Daher bestimmt die Hop-Dauer die Chip-Rate.

Allgemein gilt, daß die Chip-Rate  $R_{Ch}$  durch den größeren der beiden Werte von Hop-Rate  $R_h$  und Symbol-Rate  $R_s$  bestimmt wird.

$$R_{Ch} = \max(R_h, R_s) \quad (48.1)$$

### 48.1 FHSS Processing Gain

Der Processing Gain des FHSS Verfahrens berechnet sich nach der gleichen Formel wie beim DSSS Verfahren.

<sup>47.2</sup>Es gibt diesbezüglich kein optimales Modulations- bzw. Spreading-Verfahren, aber auch keine universelle Jamming Strategie.

<sup>48.1</sup>Frequency-Hopping Verfahren werden bei allen den Anwendungen eingesetzt, die in den ISM-Bändern (*industrial, scientific, medical*) arbeiten, wofür keine Lizenzgebühren anfallen. Beispiele sind WLAN & Bluetooth.

$$G_p \approx \frac{B_c}{B_m} = \frac{R_{Ch}}{R_s} \quad (48.2)$$

Hierbei ist als  $B_c$  die gesamte beim Hopping verwendete Bandbreite zu nehmen, entsprechend zur Chip-Rate  $R_{Ch}$ .  $B_m$  ist die Bandbreite der digitalen Modulation, entsprechend zur Symbol-Rate  $R_s$ , hier also der  $L$ -ary FSK (L-FSK).

Das Ergebnis erscheint auf den ersten Augenblick paradox, denn bei FHSS „sieht“ man ja direkt, in welchem Teilbereich des Spektrums zu welchem Zeitpunkt eine Signal-Leistung vorhanden ist.

Versteht man ein Spektrum jedoch als Ergebnis der Messung mit Hilfe einer Filter-Bank mit infinitesimal schmalen Filtern, die beliebig lange (ein-) und ausschwingen, erkennt man, daß obiger Ansatz für  $G_p$  zutrifft.<sup>48.2</sup>

Die Länge des PN Segmentes, das zur Steuerung der Frequenzen verwendet wird sei  $k$ .<sup>48.3</sup> Damit läßt sich der Processing Gain bequem in dB ausdrücken.

$$\frac{G_p}{\text{dB}} = 10 \log_{10} 2^k \approx 3k \quad (48.3)$$

Hierbei ist unterstellt, daß der Jammer seine Energie gleichmäßig auf die gesamte Bandbreite  $B_s$  verteilt. Konzentriert er jedoch seine Energie auf wenige der verwendeten Hop-Frequenzen, fällt der Processing Gain geringer aus.

## 48.2 Slow Frequency Hopping

Die Chip-Rate  $R_{Ch}$  ist hier gleich der Symbol-Rate  $R_s$ .

$$R_{Ch} = R_s \quad (48.4)$$

Ist  $L = 2^l$  die Anzahl der von der FSK verwendeten Frequenzen, ergibt sich die Bit-Rate  $R_b$  zu:

$$R_b = R_s \cdot \log_2 L = R_s \cdot l \quad (48.5)$$

Diese Frequenzen müssen so gewählt sein, daß sie jeweils um ein ganzes Vielfaches der Chip- bzw. Symbol-Rate  $R_{Ch} = R_s$  auseinander liegen, wodurch sie zu einander orthogonal werden. Dadurch wird empfangsseitiges Übersprechen zwischen den einzelnen Frequenzen im FSK-Demodulator verhindert.

Als Beispiel sollen die Parameter gemäß Tabelle 7 gewählt werden.

Zahl der L-FSK Töne	$L=4$
Bits pro L-FSK Symbol	$l=2$
Länge des PN Segments	$k=3$
Zahl der Hop-Frequenzen	$2^k=8$

Tabelle 7: Parameter eines FHSS Systems

In diesem Beispiel wird eine neue Hop-Frequenz gewählt, wenn 2 Symbole (entsprechend zu 4 Bits) übertragen sind.

Stellt man die zur Übertragung verwendeten Frequenzen über der Zeit dar, erhält man für Slow-Frequency Hopping eine Grafik gemäß Bild 48.3. Im oberen Teil sind die beim Hopping verwendeten Frequenzen gezeigt und im unteren Teil die empfangsseitig „de-hoppte“ Abfolge, die eine 4-FSK darstellt.

## 48.3 Fast Frequency Hopping

Bei einem Fast Frequency Hopping System wird die Hop-Frequenz mehrfach pro Symbol geändert. Der Vorteil besteht dabei darin, daß ein absichtlicher Störer (Jammer) dadurch weniger Zeit hat, um das gesendete Signal zu analysieren.

<sup>48.2</sup>Der Messung mit einer solchen Filter-Bank entspricht eine Spektrums-Berechnung nach Fourier.

Bei DSSS ist ebenfalls nicht zu jedem Zeitpunkt die Leistung innerhalb  $B_s$  gleichmäßig verteilt. Die Änderungen sind nur viel schneller und können daher auch leichter ausgemittelt werden.

<sup>48.3</sup>Die gesamte Länge der PN Sequenz ist  $N = 2^m - 1$ . Dies ist aber keine 2er Potenz. Da die Anzahl  $L$  der Hop-Frequenzen aber eine 2er Potenz sein soll, wird ein Ausschnitt aus der PN Sequenz zur Steuerung des Frequenz-Synthesizers verwendet.

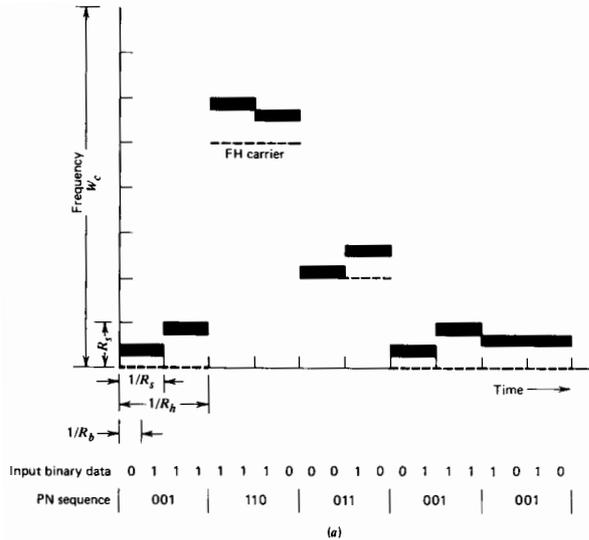


Bild 48.3: Slow Frequency Hopping

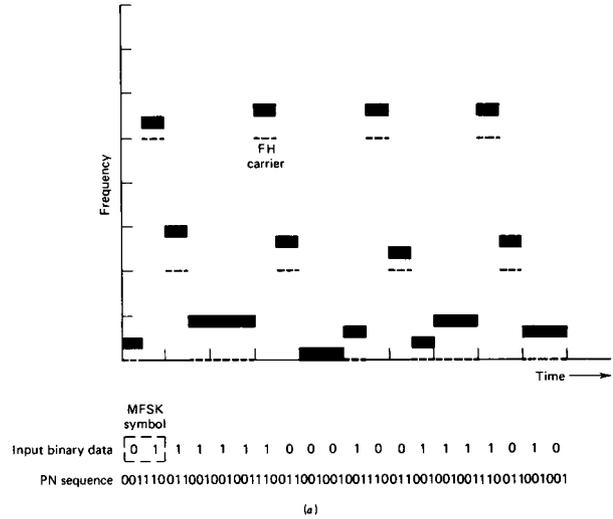


Bild 48.4: Fast Frequency Hopping

Es gelten auch hier die Parameterwerte gemäß Tabelle 7. Im Unterschied zum vorigen Beispiel werden hier nun 2 Hops pro Symbol ausgeführt, was damit 1 Hop pro Bit bedeutet, Bild 48.4. Die Chip-Rate wird damit gleich der Bit-Rate.

Würde man die Chip-Rate weiter erhöhen, so daß z.B. 3 Hops pro Symbol erfolgen, könnte im Empfänger zusätzlich eine Mehrheits-Entscheidung möglich werden, wenn Teile eines Symbols gestört empfangen werden. Das wäre ein einfacher Fall einer zusätzlichen Fehlerschutz-Codierung.

### 48.4 Time Hopping

Bei Time Hopping (THSS) Systemen werden zeitliche Rahmen zu je  $M$  Zeitschlitzten gebildet. Pro Rahmen wird in einem Schlitz mit einer digitalen Modulation übertragen, Bild 48.5.

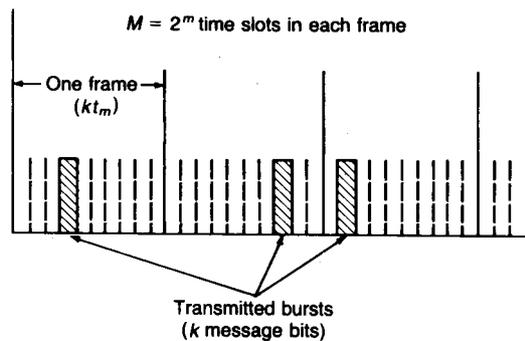


Bild 48.5: Prinzip des Time Hopping Verfahrens

THSS eignet sich für Übertragungen, bei der die mittlere Sende-Leistung begrenzt ist, jedoch nicht die Spitzen-Leistung.

## 48.5 Chirp Verfahren

Hierzu wird bei einem DSSS Verfahren der PN Generator durch einen Chirp Generator ersetzt. Ein Chirp ist eine Cos-förmige Schwingung, bei der die Trägerfrequenz z.B. linear erhöht wird, Bild 48.6.

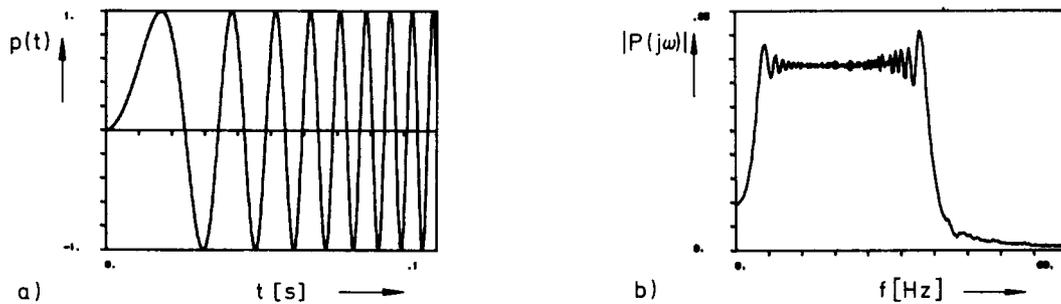


Bild 48.6: Chirp-Signal und Chirp-Spektrum

Chirps können auch zur Messung einer Impulsantwort anstatt eines  $\infty$  hohen  $\delta$ -Impulses verwendet werden.<sup>48.4</sup> Mit Hilfe eines Matched Filters, das als Impulsantwort den zeitgespiegelten Chirp hat, kann der empfangene Chirp wieder zu einem Nadel-Impuls komprimiert werden. Anstatt eines Matched Filters kann auch ein Korrelator verwendet werden.

<sup>48.4</sup>Fledermäuse benutzen Chirps zur Echo-Messung. („Chirp-Radar“)

## Literatur

- [1] Panter, F.P.: *Modulation, Noise, and Spectral Analysis*, McGraw–Hill, 1965
- [2] Beck, W.: *Die Elektrizität und ihre Technik*, E. Wiest Verlag Leipzig, 1906
- [3] Bergmann, K.: *Lehrbuch der Fernmeldetechnik Bd. 1*, Schiele und Schoen, 1986
- [4] Kammeyer, K.D.: *Nachrichtenübertragung, 2.A.*, Teubner, 1996
- [5] Rudolph, D.: *Anwendungen der Fourier-Transformation*, [online] [www.diru-beze.de](http://www.diru-beze.de)
- [6] Truxal, J.G.: *Entwurf automatischer Regelsysteme*, Oldenburg, 1960
- [7] Blake, G.G.: *History of Radio Telegraphy and Telephony*, Chapman & Hall, 1928
- [8] Ghirardi, A.A.: *Radio Physics Course, An elementary Text which explains the Principles of Electricity and Radio*, Farrar & Rinehart, 2nd ed. 1932, 10th impression 1942
- [9] Stremler, F.G.: *Introduction to Communication Systems*, Addison Wesley, 3rd ed., 1990
- [10] Arguimbau, L.B.; Adler, R.B.: *Vacuum-Tube Circuits and Transistors*, Wiley, 1956
- [11] Roddy, D.; Coolen, J.: *Electronic Communications*, Prentice Hall, 4th ed., 1995
- [12] Hambley, A.R.: *An Introduction to Communication Systems*, Computer Science Press, 1989
- [13] Rudolph, D.: *Skripte zu analogen und digitalen Modulationsverfahren*, [online] [www.diru-beze.de](http://www.diru-beze.de)
- [14] Haykin, S. : *An Introduction to Analog & Digital Communications*, Wiley, 1989.
- [15] Lathi, B.P. : *Modern Digital and Analog Communication Systems*, Hault Saunders, 1983.
- [16] Cuccia, C.L.: *Harmonics, Sidebands, and Transients in Communication Engineering*, McGraw Hill, 1952.
- [17] Taub, H.; Schilling, D.L. : *Principles of Communication Systems*, 2. ed., McGraw–Hill, 1989.
- [18] Poularkis, A.D.; Seely, S. : *Signals and Systems*, 2. ed., PWS–Kent, 1991.
- [19] Shanmugan, K.S. : *Digital and Analog Communication Systems*, Wiley 1979.
- [20] Bergmann : *Lehrbuch der Fernmeldetechnik*, 5. A., Schiele & Schön, 1986.
- [21] Woschni : *Informationstechnik*, 2. A., VT 1981.
- [22] Zinke; Brunswig : *Lehrbuch der Hochfrequenztechnik*, 2. A., Springer 1973.
- [23] Lüke, H.D. : *Signalübertragung*, 4.A., Springer 1990.
- [24] Stadler, E. : *Modulationsverfahren*, Vogel 1976.
- [25] Rohde & Schwarz : *Rezepte zur Messung und Überwachung von Rundfunk- und Fernsehsender*, R&S 1990, BN: N 4-023 D-2.
- [26] Wandel & Goltermann : *Verzerrungsmeßtechnik an Richtfunkssystemen*, W&G 1981, BN: 6134.
- [27] Dunlop, J.; Smith, D.G. : *Telecommunications Engineering*, 2. ed., Van Norstrand Reinhold 1989.
- [28] Maxson, D; Woods, M.; Mahaney, C.: *Measuring Your IBOC Spectrum*,
- [29] Sunde, E.D.: *Communication Systems Engineering Theory*, Wiley 1969
- [30] Sklar, B.: *Digital Communications, Fundamentals and Applications*, Prentice Hall, 2nd. Ed. 2001
- [31] Feher, K.: *Digital Communications, Satellite/Earth Station Engineering*, Prentice Hall, 1981
- [32] Lee, E. A.; Messerschmitt, D. G.: *Digital Communication*, Kluwer Academic Publishers, 1988
- [33] Kammeyer, K.D., Kühn, V.: *Matlab in der Nachrichtentechnik*, Schlembach, 2001

- [34] Kammeyer, K.D.: *Nachrichtenübertragung*, 3. A., Teubner 2004
- [35] Haykin, S.: *Communication Systems*, 4th. ed., Wiley, 2001
- [36] Sheingold, D.H. (Editor): *Analog–Digital Conversion Handbook*, Prentice Hall, 1986
- [37] Anderson, J.B.; Aulin, T.; Sundberg, C.E.: *Digital Phase Modulation*, Plenum Press, 1986
- [38] Laurent, P.A.: *Exact and Approximate Construction of Digital Phase Modulations by Superposition of Amplitude Modulated Pulses (AMP)*, IEEE Trans. COM 34,
- [39] Gardner, F.M.: *Phaselock Techniques*, Wiley, 1966
- [40] Ziemer, R.E.; Peterson, R.L.: *Introduction to Digital Communication*, McMillan, 1992
- [41] Blahut, R.E.: *Digital Transmission of Information*, Addison Wesley, 1990
- [42] Spilker, J.J.Jr.: *Digital Communications by Satellite*, Prentice Hall, 1977
- [43] Meyr, H.; Moeneclaey, M.; Fechtel, S.A.: *Digital Communication Receivers*, Wiley, 1998
- [44] [http://www.semiconductors.philips.com.products/all\\_appnotes/](http://www.semiconductors.philips.com.products/all_appnotes/)
- [45] <http://www.circuitsage.com/pl1.html>
- [46] <http://www.analog.com/index.html>
- [47] Meyr, H.; Ascheid, G.: *Synchronization in Digital Communications*, Wiley, 1990
- [48] Karrenberg, U.: *Signale, Prozesse, Systeme: Eine multimediale und interaktive Einführung in die Signalverarbeitung*, Springer, 2.A. 2002
- [49] Reimers, U.: *Digitale Fernsehtechnik*, Springer 1985
- [50] Tuisel, U.: *Multiträgerkonzepte für die digitale, terrestrische Hörrundfunkübertragung*, Wissenschaftliche Beiträge zur Nachrichtentechnik und Signalverarbeitung aus dem Arbeitsbereich der Technischen Universität Hamburg–Harburg, Nr. 15, 1993, herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. Norbert Fliege und Prof. Dr.-Ing. Dirk Kammeyer
- [51] Wächter, T.: *Das Übertragungsverfahren des zukünftigen digitalen Hörrundfunks*, Der Fernmeldeingenieur, 11 & 12, 1992
- [52] Engels, V.; Rohling, H.; Breide, S.: *OFDM–Übertragungsverfahren für den Digitalen Fernsehrundfunk*, Rundfunktechnische Mitteilungen, Jahrg. 37, 1993, H. 6, pp. 260 — 270
- [53] Schmidt, H.; Kammeyer, K.D.: *Reducing the Peak to Average Power Ratio of Multicarrier Signals by Adaptive Subcarrier Selection*, Department of Telecommunications University of Bremen (Germany), Florence ICUPC, 1998
- [54] Merchán, S.; García Aranda, A.; García, J.L.: *OFDM Performance in Amplifier Nonlinearity*, IEEE Trans. on Broadcasting, Vol. 44, No. 1, March 1998, pp. 106 — 114
- [55] Stott, J.: *Coded Orthogonal Frequency–Division Multiplexing (COFDM) – Theory*, IEE Summer School on „New Broadcast Standards and Systems“, July 1997
- [56] Stott, J.: *Explaining some of the magic of COFDM*, 20th Montreux International Television Symposium, 1997
- [57] Schmidt, H.: *OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing)*, Arbeitsbereich Nachrichtentechnik, Universität Bremen, o.J.
- [58] Couch, L.W.: *Digital and Analog Communication Systems*, McMillan, 4th ed., 1993
- [59] Hong, L.: *Frequency–Domain Equalization of Single Carrier Transmissions Over Doubly Selective Channels*, Dissertation, Ohio State University, 2007

- [60] Yang, Y.: *Frequency Domain Equalization for Space-Time Block-Coded Transmissions over Frequency-Selective Fading Channels*, Master Thesis, University of Singapore, 2003
- [61] Lee, W.C.Y.: *Mobile Communication Engineering*, Mc-Graw Hill 1982.
- [62] Lee, W.C.Y.: *Mobile Cellular Telecommunication Systems*, Mc-Graw Hill 1989.
- [63] Lee, W.C.Y.: *Mobile Communications Design Fundamentals*, 2ed Ed. Wiley 1993.
- [64] Myung, H.G.: *Single Carrier FDMA*, 2008, <http://hgmyung.googlepages.com/scfdma>
- [65] Van den Enden, A.W.M.; Verhoeckx, N.A.M.: *Discrete-Time Signal Processing, an Introduction*, Prentice Hall, 1989
- [66] Buzid, T.: *Frequency Domain Equalization of Modulation Formats with Low Peak to Average Power Ratio*, Dissertation an der Technischen Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg, 2010
- [67] Moschytz, G.; Hofbauer, M.: *Adaptive Filter*, Springer, 2000
- [68] Huemer, M.: *Frequenzbereichszerrung für hochratige Einträger-Übertragungsverfahren in Umgebungen mit ausgeprägter Mehrwegeausbreitung*, Dissertation, Universität Linz, 1999
- [69] Zemen, T.: *OFDMA/SC-FDMA Basics for 3GPP LTE*, Forschungszentrum Telekommunikation Wien, 2008
- [70] Agilent Technologies: *3GPP Long Term Evolution, System Overview, Product Development, and Test Challenges*, Application Note 5989-8139EN, 2009
- [71] Rumney, M. (Editor): *LTE and the Evolution to 4G Wireless, Design and Measurement Challenges*, Agilent, 2009
- [72] Rudolph, D.: „Funk-Kanal“, [online] [www.diru-beze.de](http://www.diru-beze.de)
- [73] Rudolph, D.: „Frequenz, Spektrum, Resonanz“, [online] [www.diru-beze.de](http://www.diru-beze.de)
- [74] Simon, M.K.; Omura, J.K.; Scholtz, R.A.; Levitt, B.K.: *Spread Spectrum Communications*, Computer Science Press, 1985
- [75] Simon, M.K.; Omura, J.K.; Scholtz, R.A.; Levitt, B.K.: *Spread Spectrum Communications Handbook, Electronic Edition*, McGraw-Hill, 2002
- [76] Cooper, G.R.; McGillem, C.D.: *Modern Communications and Spread Spectrum*, McGraw-Hill 1986
- [77] Harmuth, H.F.: *Transmission of Information by Orthogonal Functions*, Springer, 2nd printing, 1970
- [78] Proakis, J.G.: *Digital Communications*, McGraw-Hill, 2nd. ed. 1989
- [79] Klostermeyer, R.: *Digitale Modulation*, Vieweg, 2001
- [80] Lüke, H.D.: *Korrelationssignale*, Springer, 1992
- [81] Natke, H.G.: *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse*, Vieweg, 1983
- [82] Baier, P.W., Weber, T.: *Fundamentals of Mobile Communications*, Uni Kaiserslautern, 2000