MATHEMATICS

QUELQUES TEXTES MATHÉMATIQUES DE LA MISSION DE SUSE

PAR

E. M. BRUINS

(Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER at the meeting of June 24, 1950)

Les tablettes mathématiques faisant l'objet de la présente étude ont été trouvées par Mr R. DE MECQUENEM à Suse au chantier no I de la ville Royale en 1936 [1])

Les fouilles amorcées en 1922 arasèrent le terrain à un niveau inférieur de 3 à 5 m au sol naturel.

Sous des caveaux funéraires se trouvait un grand dallage. C'est seulement en 1933 que fut atteint le substratum du dallage entouré de caveaux funéraires Elamites. Il s'agit donc d'une butte funéraire élevée en bordure de la ville; elle comportait un sanctuaire, qui dut être reconstruit au fur et à mesure de la hauteur atteinte par la superposition des tombes.

Dès 1933 Mr R. DE MECQUENEM a trouvé entre les deux dallages successifs signalés plus haut des tablettes en terre crue de l'époque des "soukkals" de Suse généralement fragmentées et en mauvais état. Les textes scolaires publiés par P. E. VAN DER MEER [2]) appartiennent à ce lot; les textes de cet ouvrage nos. 291 à 296 se rapportent à des excercices de calcul généralement assez simples. Les tablettes de 1936 relatives à de nouveaux problèmes appartiennent à la même série. M. le Docteur G. CONTENAU, Directeur Général des fouilles avait confié ces tablettes à Mlle M. RUTTEN, attachée à la Mission de Suse pour la Publication. Après les avoir copiées Mlle M. RUTTEN a fait appel à ma collaboration pour en donner le commentaire mathématique suivant.

Les tablettes et les problèmes ont été numerotés 1, 2, 3, ... A, B, ... Quelques unes ne contiennent que des choses bien connues. Par exemple: la tablette K donne une table de multiplication pour 25; la tablette F contient deux problèmes: équations linéaires à une variable en formulant les problèmes en largeur et longueur d'un rectangle, donnant la largeur; la tablette O traite problèmes du type $lb + (l \pm b)^2 = A$, $l \pm b = B$, la solution écrite presque complètement en phonétique. Celles, dont les parties abimées peuvent être reconstruites d'une manière univoque (à l'exception peut-être de S) et qui, à l'exception de A, B, donnent des

---

[1]) Cf. Mém. de la Miss. Archéol. en Iran, tome XXIX; pp. 44–62, Presses Universitaires de France–Paris 1943.

[2]) Mém. de la Miss. Archéol. de Perse, tome XXVII. E. LEROUX, Paris, 1935.

problèmes nouveaux seront discutées ici du point de vue mathématique. Elles sont:

4. Calcul du rayon du cercle circonscrit à un triangle isocèle,
3. Polygones réguliers,
I. Table de constantes mathématiques,
A, *B*. Livre d'instruction,
C. Calcul d'un rectangle par transformation semblable,
D. Solution d'une équation de huitième degré,
H. Changement de variables, *KI—GUB*,
Q. Calcul d'intérêt composé et annuité,
S. Problème de division d'un triangle.

La tablette 4.

Cette tablette (comp. fig. 1) contient évidemment le calcul du rayon d'un cercle circonscrit à un triangle isocèle. La base étant 60 et les deux

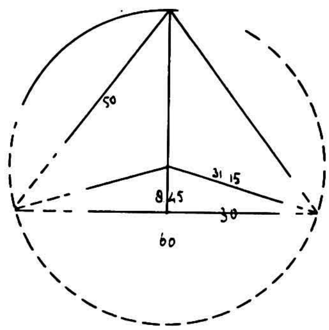

Fig. 1

autres cotés 50, la hauteur sera 40, d'après le théorème de Pythagore. Alors on a l'équation

$$(40-x)^2+30^2=x^2 \quad \text{ou bien} \quad 4.10\,x=1.20 \quad x=31.45 \quad 40-x=8.15$$

La tablette 3.

3*a* contient un hexagone régulier (fig. 2). Le coté et le rayon portent

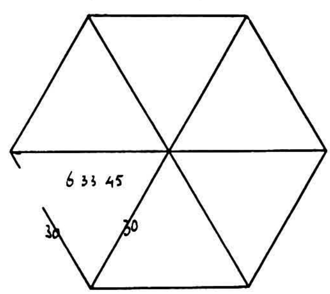

Fig. 2

les valeurs 30 et un des triangles centraux porte le nombre 6.33.45. Nous avons déduit[3]) de *VAT* 6598, que les formules pour le calcul de la racine carrée d de

$$d^2 = a^2 + b^2$$

étaient

$$a + \frac{b^2}{2a+b} < d < a + \frac{b^2}{2a}.$$

De ces deux formules on tire immédiatement en les résolvant pour a

$$d - \frac{b^2}{2d-b} < a < d - \frac{b^2}{2d}.$$

Cette méthode nous donne pour $x = \sqrt{3}$; $4 = x^2 - 1$, $x = 2 - \frac{1}{4} = 1.45$.

On trouvera donc pour la hauteur d'un triangle régulier: 52.30.

La méthode la plus directe pour obtenir l'aire du triangle indiqué sur 3*a* nous donne, à cause de $2 \times 30 = 1$, $30 - 15^2 = 30 - 3.45 = 26.15$ et par conséquent l'aire est $15 \times 26.15 = 6.33.45$.

On peut donc interpréter le contenu de 3*a* en posant $\sqrt{3} = 7/4$. D'autre part il est évident que le calcul ne peut pas se faire par $x^2 = 30^2 - 15^2$ parce que le radicand est $26^2 - 1$, ce qui donne en tout cas une valeur plus petite que 26. La choix du coté 30 doit donc avoir une autre raison qu'une augmentation de précision. Vraisemblablement, c'est parce que la formule pour l'aire totale du polygone à n côtés prend la forme simple

$$O = nx$$

x représentant la hauteur du triangle central.

Ce point de vue est supporté par 3*b*. L'inscription est presque complètement détruite, mais la figure montre un heptagone, le rayon étant 35, et les facteurs 7 et 4 et le mot "l'aire" sont à peu près les seules choses qui n'ont pas été détruites. En effet, mesurant le coté de l'heptagone on obtient pour la longueur relative 30.

De cette tablette on peut donc déduire que le quotient du rayon du cercle et du coté de l'hexagone et de l'heptagone a été posé 1 et 1.10 et en extrapolant on pourrait poser pour le pentagone 50.

Alors l'aire du pentagone serait $5 \times \frac{1}{2} \times 40 = 1.40$ (comp. Heroon, Metrica) et celle de l'hexagone $4 \times 6 \times 6.33.45 = 2.37.30$.

Pour l'heptagone on a pour la hauteur du triangle central x

$$x^2 = (1.10')^2 - (30')^2 = 1.6'.40'' = 1 + (20')^2$$

donc

$$1.3'.20'' > x > 1 + \frac{20'^2}{2.20} = 1 + \frac{20'}{7}$$

et multipliant par $\frac{1}{2} \times 7 = 3\frac{1}{2}$

$$3.41'.40'' > O_7 > 3.40'.$$

Cette interprétation est tout à fait confirmée par la tablette *I* des constantes mathématiques, qui donne en ligne 26, 27, 28, 29, 31 *)

[3]) Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, **51**, 332 seq. (1948).

*) Ligne 30 donne: 57.36 igi-gub ša SAR c.à.d. $\pi = 3^1/_8$, parce que $57.36 = {}^{24}/_{25}$.

1.40	la constante du pentagone
2.37.30	la constante de l'hexagone
3.41	la constante de l'heptagone
52.30	la constante du triangle
1.25	la constante de la diagonale du carré.

La tablette I.

Cette tablette contient 70 constantes mathématiques, parmi lesquelles apparait de nouveau: 18, im–li–im. Les premières 36 données sont des constantes pour des figures géométriques. La tablette commence par les valeurs igigub, ri et pi–ir–ku du cercle 5, 20, 10 pour l'aire, le diamètre et le rayon du cercle exprimé par le périmètre c

$$\frac{1}{4\pi}c^2, \quad \frac{1}{\pi}c, \quad \frac{1}{2\pi}c, \quad \pi = 3.$$

Plus loin on donne 15, 40, 20 pour l'aire, diamètre et rayon d'un uš–qa–ri ce qui dénote le demicercle dont l'aire est calculée comme un quart du produit de l'arc et du diamètre (comp *BM* 85210) et qui met en évidence le procédé suivi en *BM* 85210 pour obtenir l'arc, en prenant la somme du diamètre et du rayon! En ces deux cas par lesquels la table commence l'arc du cercle est pris comme unité. Toute une série de constantes, groupées en triades analogues, qui suit peut être interprétée comme des constantes analogues pour différents segments du cercle, ayant l'arc comme unité de longueur.

Les problèmes A, B.

Ces problèmes ont une importance du point de vue de didactique babylonienne. Il s'agit de deux problèmes d'équations linéaires resp. à deux et à trois inconnues. Le problème A consiste des deux équations, (les inconnues sont nommées uš $= l$ et sag $= b$)

$$\tfrac{1}{4} b + l = 7 \text{ šu} \quad ; \quad l + b = 10 \text{ šu}.$$

Il est remarquable, que partout dans la solution les termes uš et sag signifient "coefficient de uš" et "coefficient de sag". D'abord on donne la solution heuristique. On transforme les šu en doigts: $5 \times 7 = 35$. Décomposition $35 = 30 + 20$; $5 \times 10 = 50$; décomposition $30 + 20$. Alors on multiplie $30 \times 4 = 2.0$ et $4 \times 5 = 20$. On continue: $20 - 20$ et $2.0 - 30$, tu vois 1.30. On évite évidemment le "0 ta–mar" en continuant simplement par "et". Prenant un tiers de 1.30 on obtient 30 pour la longueur et $50 - 30 = 20$ pour la largeur.

Cette démonstration prend 11 lignes sur un total de 16 du problème A.

Dans les 5 dernières lignes la solution directe est donnée:

„De nouveau:

$7 \times 4 = 28$, $28 - 10 = 18$, $18 \times 20 = 6$, $10 - 6 = 4$, $5 \times 6 = 30$, $5 \times 4 = 20$".

Le problème B contient les trois données pour les inconnues uš, sag et si–a

$$\tfrac{1}{4}b + l = 7 \text{ šu}; \quad l + b + t = 11 \text{ šu}; \quad t = 5$$

Ce problème est d'abord discuté du point de vue heuristique comme en A. On multiplie

$$5 \times 7 = 35 = 30 + 5 \qquad 5 \times 11 = 55 = 30 + 20 + 5$$

et on a réduit le problème au problème A, dont la même solution suit

$$4 \times 5 = 20, \ 4 \times 30 = 2.0, \ 20 - 20 \text{ et } 2.0 - 30 \text{ est } 1.30$$

et le scribe ne fait plus les autres calculs mais ajoute "et 5 le si–a".

De nouveau on donne la solution directe:

$7 \times 4 = 28$, $28 - 11 = 17$ et on diminue le coefficient de uš en $4 - 1 = 3$;

on prend un troisième de $17 = 5.40$ et un troisième de si–a $= 1.40$. On soustrait les 5.40 de 11 en obtenant 5.20 et on ajoute 5 de si–a à $1.40 = 6.40$.

Ensuite on réduit les šu: $5 \times 5.48 = 28.20$ et $5 \times 5.20 = 26.40$. La solution est maintenant trouvée par $28.20 + 1.40 = 30$ et $26.40 - 6.40 = 20$.

Le problème C.

Dans le problème C il s'agit d'un rectangle, l, b, diagonale d. On pose la question:

Largeur sur (a–na) longueur, un quart l'excès. 40 la diagonale.

On pose $l = 1$ et 15 le prolongement (*daḫ*) donc $45 = b$ et la racine carrée de $1 + (45')^2 = 1.33'.45''$, soit $1.15'$, est la diagonale. Parce que "j'ai dit 40, la diagonale, dénoue l'inverse de $1.15'$: c'est 48"

$$48 \times 40 = 32 \qquad 32 \times 1 = 32 = l \qquad 32 \times 45 = 28 = b.$$

Le problème D.

On donne: 20 l'aire. Longueur multiplié par son carré et par la diagonale 14.48.53.20. Combien longueur, largeur et diagonale?

En symboles modernes on a

$$lb = 1200 = O \qquad l^3 d = 3200000 = B \text{ donc}$$
$$B^2 = l^6 d^2 = l^8 + l^6 b^2 = l^8 + l^4 O^2$$

et en résolvant l'équation quadratique en l^4

$$l^4 = -\tfrac{1}{2} O^2 + \sqrt{B^2 + (\tfrac{1}{2} O^2)^2}\ , \quad l^2 = \sqrt{l^4}.$$

En effet le scribe obtient la valeur de l^2 par le calcul de ces expressions et en utilisant des nombres à huit sexagésimales il obtient le résultat $b = 30$ par $b^2 = O^2/l^2$ et prenant la racine carrée de cette dernière valeur:

Il carre l'aire $20^2 = 6.40$ et il carre B: $(14.48.53.20)^2 = 3.39.[28.43.27]24.26.40$. Il prend la moitié de $6.40 = 3.20$ et la carre 11.6.40 et il ajoute 3.39.28.43.27.[24.26.40] à 11.6.40 et il écrit pour la somme 3.50.36.43.34.26.40. au lieu de la somme correcte 3.50.35.23.27.24.26.40 ce qui n'est qu'une faute faite en copiant le "brouillon" parce qu'il continue: Combien la racine carrée? 15.11.6.40 est la racine carrée et $(15.11.6.40)^2$ est bien 3.50.35.23.27.24.26.40. Il soustrait ensuite 3.20 de 15.11.6.40 et obtient 11.51.6.40 dont il prend la racine carrée 26.40. La valeur réciproque de 26.40 est 2.15, par laquelle il multiplie 6.40 le carré de l'aire obtenant [15] dont la racine carrée est 30, la largeur.

La tablette H.

La tablette H contient trois problèmes concernant le changement de variables. Le premier problème (ligne 1 — 9): la somme de l'aire et la longueur $= 40$ (20 la largeur, que j'ai dite) et la solution est donnée en ajoutant une unité — *KI GUB–GUB* à la largeur ce qui transforme le problème en: l'aire $=$ 40, largeur 1.20, ki–a–am ta–ša–al, que tu vas investiger, rechercher.

Le deuxième problème (ligne 10 — 18) est le même que le premier, seulement la solution est donnée "comme l'accadien la fait". Il ajoute 1 à la largeur et une unité à la longueur et en ajoutant à l'aire, 40, la largeur nouvelle on obtient le problème: l'aire $=$ 2, largeur $=$ 1.20. C'est à dire que "l'accadien" utilise l'identité

$$(l + 1)(b + 1) = (lb + l + b + 1)$$

pour obtenir des données numériques plus simples.

Le troisième problème (ligne 19 — 51) contient la solution de

$$lb + l + b = 1$$
$$b + \tfrac{1}{17}(3l + 4b) = 30$$

En lignes 19 — 25 on calcule en multipliant par 17 les coefficients de

$$3l + 21b = 8.30$$

En lignes 26 — 30 on ajoute une unité à la largeur et à la longueur et on obtient l'équation

$$LB = 2;\ L = l + 1;\ B = b + 1.$$

En lignes 31 — 34 on transforme par $21 + 3 + 8.30 = 32.30$ la deuxième équation en l et b en

$$3L + 21B = 32.30.$$

Ensuite on multiplie $3 \times 21 \times 2 = 2.6$ et on calcule les racines de l'équation quadratique

$$X^2 - 32.30\,X + 2.6 = 0$$

dont les racines sont $3L$ et $21B$, desquelles on obtient $l = 30$ et $b = 20$.

Les signes *KI–GUB* désignent donc dans cette tablette un changement de variable pour simplifier le calcul.

Remarque. *KI–GUB* se trouve aussi en *BM* 85210 et l'interprétation de ces signes donnée par la tablette *H* peut éliminer aussi toutes les difficultés pour *BM* 85210. Le problème serait alors (fig. 3): Volume

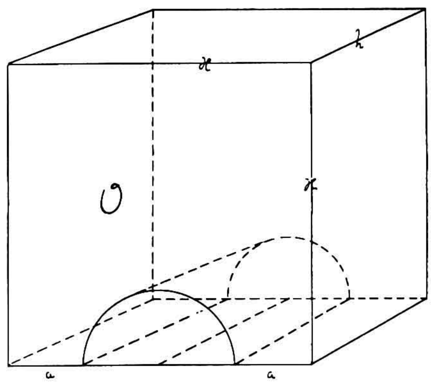

Fig. 3

1.12.30, $h = 3$, $a = 10$. Cela nous donne $\frac{1}{3} \times 1.12.30 = 24.10 = O$. Alors

$$x^2 - \frac{\pi}{8}(x - 20)^2 = 24.10$$

ou

$$\left[1 - \frac{\pi}{8}\right] x^2 + 5\pi x - \frac{\pi}{8}(20)^2 = 24.10.$$

Le coefficient $\pi/8 \times (20)^2$ est calculé par $KI\text{–}GUB = 10$ comme $\frac{1}{6}(30)^2$ c.à.d. au lieu de $20^2 = 6.40$; $3 \times 6.40 = 20$; $\frac{1}{8} = 7.30$, $7.30 \times 20 = 2.30$ le scribe calcule $30^2 = 15$, $10 \times 15 = 2.30$ parce que $\frac{1}{6} = 10$ est fondamental pour le système sexagésimale. Ensuite on trouve $2.30 + 24.10 = 26.40$.

Tout de même on obtient $[1 - \pi/8]$ par $1 - \frac{1}{6}(\pi/2)^2 = 1 - \frac{1}{6}(1.30)^2 = 22.30$ et $\frac{1}{2} \times 5 \times \pi = \frac{1}{6} \times 45 = 7.30$. Ainsi on a toutes les constantes nécessaires pour la solution; $x = 40$.

La tablette Q.

La tablette *Q* nous donne le problème, partant d'une quantité initiale de 1; 31.58.48 še, l'intérêt de 3.30 še étant 1.30 še par an et en prenant chaque année 1 še; à calculer le total après trois années.

L'intérêt est calculé par $\frac{1}{2}(A - \frac{1}{7}A)$ donc

$1.31.58.48. - 13.8.24 = 1.18.50.24$	$1.31.58.48 + 39.25.12 = 2.11.24$
$1.11.24 - 10.12 = 1.1.12$	$1.11.24 + 30.36 = 1.42$
$42 - 6 = 36$	$42 + 18 = 1.0$

La tablette S.

Le contenu de la tablette *S* nous donne

> . . .[4]) longueur inférieure multiplié par longueur supérieure est . . .
> aire supérieure multiplié par aire inférieure: 36

[4]) Le signe est la figure 4, dont l'hypotenuse a été détruite.

La somme du carré de ... rieure et du carré de la ligne de séparation: 20.2x (ou $x = 4$, 5, ou 6)
Toi, le produit de l'aire par l'aire, 36, multiplie par 4: 2.24. Dénoue l'inverse de 10, le produit du prolongement et prolongement, 6: $6 \times 2.24 = 14.24$. Carre 14.24: 3.27.21. (36) 14.24 par 2 ....

Sauf quelques traces le reste a été détruit. Mais un 30 ta-mar et un 20 ta-mar ont été conservés vers la fin de la solution.

Par un hasard la reconstruction de cette tablette est de nouveau univoque. Parce qu'il s'agit de trois inconnues, dont deux sont des segments contigues d'une même ligne (ce qui est prouvé par le terme daḫ, comp. tablette C) et d'une ligne de séparation, même dans le cas d'un triangle, il faut que l'on ait consideré un triangle spécial. Le produit des deux segments de la longueur k.a doit être 10, selon la valeur utilisée au commencement de la solution. De plus les nombres 20.24; 20.25; 20.26; ne peuvent être décomposés en somme de deux carrés que par

$$\begin{aligned} 20.24 &= (30)^2 + (18)^2 \\ 20.25 &= (21)^2 + (28)^2 \\ 20.26 &= (35)^2 + 1 \end{aligned}$$

et par hasard, sauf dans le premier cas on a des nombres irréguliers: 21, 28, 35 qui ne sauraient donner un produit régulier en les multipliant par un nombre entier, casu quo, une fraction sexagésimale finie. La combinaison 1, 35 donnerait de plus une division vraiment bizarre. Les seules nombres que l'on puisse avoir sont donc longueur supérieure $a = 30$, ligne de séparation $r = 18$ et par conséquent ligne inférieure $k = 20$. En supposant que le triangle soit rectangulaire comme dans la plupart des problèmes de division (comp. *M L C* 1950) on obtient pour l'aire supérieure $A = 30 \times 9 = 4.30$ et pour l'aire inférieure $K = 10(30 + 18) = 8$ et le produit $AK = 36.0.0.$

Le problème posé était alors (fig. 4)

$$ak = 10$$
$$AK = 36.0.0.$$
$$r^2 + a^2 = 20.24$$

Puisque l'on a $A = \frac{1}{2}\, ar$; $K = \frac{1}{2}\, kr(2a + k)/a$ on obtient

$$AK = \tfrac{1}{4}\, r^2\, (2a + k)k$$

ou bien

$$AK\, a^2 = \tfrac{1}{4}\, r^2(2a^2 + ak)ak$$

et la réduction du problème à une équation de quatrième degré, soluble par une équation quadratique en a^2 devra commencer par le calcul de $4AK$ et par la division du résultat obtenu par ak - - - et celui est exactement ce que le scribe fait. Il multiplie 36.0.0. par 4 et multiplie le résultat par 6, l'inverse de 10. Alors un calcul des coefficients de l'équation pour a^2 ou r^2 doit commencer (et celle pour a est

$$14.24\,a^2 = (20.24 - a^2)\,(2a^2 + 10.0).)$$

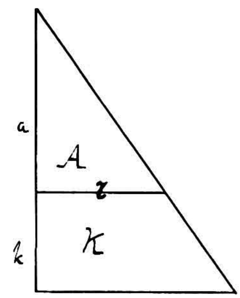

Fig. 4

Conclusion.

Les tablettes mathématiques de la Mission de Suse jettent une lumière tout à fait nouvelle sur "les mathématiques des Babyloniens". Sauf la table des igi–gub, des constantes mathématiques, elles nous donnent la démonstration de l'existence d'une théorie des polygones réguliers à 5, 6 et 7 cotés, qui est du point de vue numérique identique à la théorie de Héroon. Soit que l'application pratique des résultats obtenu pour les polygones réguliers n'est guère évidente, l'opinion commune, que les mathématiques babylonniennes ne considéraient que des problèmes pratiques est nettement contredite par les tablettes D et S. Le cube de la longueur multiplié par la diagonale d'un champ rectangulaire n'a pas une signification pratique, économique. La division d'un champ triangulaire de telle façon, que le produit des aires des parties ait une valeur prescrite n'a pas une signification pour "la vie de tous les jours". Ces problèmes ont vraiment été posés et résolus du point de vue purement scientifique; la science pour la science.