

Prof. Dr.-Ing. Firoz Kaderali

Digitale Kommunikationstechnik

Netze, Dienste, Informationstheorie, Codierung, Übertragungstechnik,
Vermittlungstechnik, Datenkommunikation, ISDN



Vorwort

Das Buch **Digitale Kommunikationstechnik** wendet sich an Studenten nach dem Vordiplom und an berufstätige Ingenieure und Informatiker. Es werden insbesondere mathematische Grundkenntnisse und Grundkenntnisse der Nachrichtentechnik vorausgesetzt. Jeder Kapitel bildet jedoch eine abgeschlossene Einheit, in der alle verwendeten mathematischen Ergebnisse entweder im Text abgeleitet oder gegebenenfalls im Anhang aufgelistet werden. Theorie und Praxis stehen gleichermaßen im Mittelpunkt. Die Theorie wird anhand der praktischen Beispiele vermittelt, während die Grenzen der praktischen Verfahren anhand der Theorie aufgezeigt werden.

Der in den vorliegenden Kapiteln behandelte Stoff stammt aus drei verwandten und in den letzten Jahren zusammengewachsenen Disziplinen: Übertragungstechnik, Vermittlungstechnik und Datenkommunikation. Ich habe den Versuch unternommen, den Stoff unter einheitlichen Gesichtspunkten darzustellen. Um den Stoff einzugrenzen, habe ich mich bis auf wenige Ausnahmen auf die Digitaltechnik beschränkt. Des weiteren habe ich mich stets von dem Vorsatz leiten lassen, lieber Einschränkungen beim Stoff, dafür aber eine gründliche Behandlung des Wesentlichen vorzunehmen.

Für die Erstellung vieler Aufgaben und die Durchsicht der Manuskripte danke ich besonders meinen Mitarbeitern Herrn Dipl.-Math. H. Hagemann, Herrn Dipl.-Ing. T. Hermann, Herrn Dipl.-Phys. B. Heyber, Herrn Dipl.-Ing. P. Roer, Herrn Dipl.-Ing. A. Eshoh und Herrn Dipl.-Ing E. Güleç. Für zahlreiche Anmerkungen, Fragen und Diskussionen, die zur Erhöhung der pädagogischen Qualität der Abhandlungen beigetragen haben, danke ich meinen Studenten an der Fernuniversität in Hagen und an der Universität Siegen.

Hagen im April 2007

F. Kaderali

Autorenvorstellung

Prof. Dr.-Ing. Firoz Kaderali



1963 - 69	Studium der Theoretischen Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Darmstadt
1969 - 74	Assistent/Dozent für Grundlagen der Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Darmstadt
1974	Promotion auf dem Gebiet der Netzwerktheorie an der Technischen Hochschule Darmstadt
1974 - 76	Dozent für Statistische Signaltheorie an der Technischen Hochschule Darmstadt
1976 - 81	Projektleiter (Digitales Ortsnetz) im Forschungszentrum der Firma SEL (ITT)/Stuttgart
1981 - 86	Hauptabteilungsleiter (Systementwicklung Großsysteme) bei (Bosch) Telefonbau und Normalzeit/Frankfurt
1986 - 2007	Professor für Kommunikationssysteme an der FernUniversität Hagen Arbeitsgebiete: Kommunikationssysteme, -netze und -protokolle; Datenschutz und Datensicherheit in Kommunikationsnetzen; Einsatz von neuen Medien in der Lehre
1989 - 94	Leiter der Projektträgerschaft TELETECH NRW
1990 - 96	Mitglied der ISDN Forschungskommission des Landes NRW
Seit 1992	Direktor des Forschungsinstituts für Telekommunikation (FTK)/Dortmund
1995 - 2001	Mitglied der Steuerungsgruppe der Landesinitiative media NRW
1999 - 2003	Sprecher des Forschungsverbundes Datensicherheit NRW
2000 - 2002	Vorsitzender des Beirates der Gesellschaft für IT-Sicherheit in Bochum
Seit 2002	Vorsitzender der Open Source Initiative CampusSource

Gliederung

Vorwort	iii
Autorenvorstellung	iv
Prof. Dr.-Ing. Firoz Kaderali	iv
1 Kommunikationsmodelle	1
1.1 Einführung	1
1.1.1 Ein Beispiel zur Abwicklung der Kommunikation zwischen Systemen nach dem OSI-Modell	4
1.2 Grundbegriffe des OSI-Modells	6
1.3 Schichten des OSI-Modells	14
1.3.1 Bitübertragungsschicht (Schicht 1)	14
1.3.2 Sicherungsschicht (Schicht 2).....	15
1.3.3 Vermittlungsschicht (Schicht 3).....	15
1.3.4 Transportschicht (Schicht 4)	16
1.3.5 Kommunikationssteuerungsschicht (Sitzungsschicht, Schicht 5)	17
1.3.6 Darstellungsschicht (Schicht 6).....	17
1.3.7 Anwendungsschicht (Schicht 7)	18
1.4 TCP/IP-Protokollfamilie	19
1.4.1 TCP/IP-Modell	21
2 Netze und Dienste	23
2.1 Einführung	23
2.2 Netze	26
2.2.1 Fernsprechnet/ISDN	28
2.2.2 Funknetze	37
2.2.3 Datennetze	47
2.2.4 Rundfunk- und Fernsehnetze	54
2.3 Dienste	56
2.3.1 Datenübermittlungsdienste.....	58
2.3.1.1 Datenübermittlung im Fernsprechnet/ISDN	58
2.3.1.2 Leitungsvermittelte Datenübermittlung	60
2.3.1.3 Paketvermittelte Datenübermittlung nach X.25	62
2.3.1.4 Datenübermittlung in Hochgeschwindigkeitsnetzen (Frame Relay, SMDS).....	64
2.3.2 Teledienste	65
2.3.2.1 Teletex	66
2.3.2.2 Videotext	68
2.3.2.3 Telefax	70
2.3.2.4 SMS/MMS	71
2.3.2.5 X.400, Mailbox, SMTP, E-Mail.....	73

	2.3.2.6	World Wide Web.....	76
	2.3.2.7	Newsgroups	79
	2.3.2.8	Sprachdienste	82
	2.3.2.9	Videostreaming	83
3	Wahrscheinlichkeitslehre		87
	3.1	Zufallsexperiment und Wahrscheinlichkeiten	87
	3.2	Bedingte Wahrscheinlichkeiten	91
	3.3	Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeits- verteilung und Wahrscheinlichkeitsdichte	94
	3.4	Funktion einer Zufallsvariable und Erwartungswerte.....	98
	3.5	Zwei Zufallsvariablen	103
	3.6	Tschebyscheff'sche und Bernouilli'sche Ungleichungen.....	107
	3.7	Zufallsprozesse	112
4	Informationstheorie		124
	4.1	Nachrichtenquellen und -senken	124
	4.2	Nachrichtenkanäle	133
	4.3	Transinformation und Kanalkapazität	147
5	Abtastung und Quantisierung		157
	5.1	Die Zeit-Frequenz Unschärfebeziehung	157
	5.2	Das Abtasttheorem	161
	5.3	Die Quantisierung	167
6	Quellencodierung		174
	6.1	Grundbegriffe der Codierung	175
	6.2	Die Kraft-McMillan-Ungleichung	181
	6.3	Der Huffman-Code	185
	6.4	Der Fundamentalsatz der Quellencodierung	192
	6.5	Weitere Quellencodes	197
7	Kanalcodierung		207
	7.1	Fehlererkennung und Fehlerkorrektur	208
	7.2	Lineare Codes.....	217
	7.3	Zyklische Codes	233
	7.4	Weitere Codes zur Fehlererkennung und Fehlerkorrektur	241
	7.5	Der Kanalcodierungssatz.....	256
8	Leitungscodierung		263
	8.1	Anforderungen an Leitungscodes	264
	8.2	Binäre Leitungscodes.....	270
	8.3	Ternäre Leitungscodes.....	281
	8.4	Symbolinterferenz (Intersymbol Interference)	290
9	Verkehrs- und Bedientheorie		300
	9.1	Einführung	300
	9.2	Ankunfts- und Bedienprozesse.....	305
	9.3	Das Warte- und Verlustsystem M/M/1	315

9.4	Das Warte- und Verlustsystem M/M/m	328
9.5	Das M/G/1-Wartesystem	340
9.6	Warteschlangenorganisation und Prioritätsbearbeitung	345
10	Multiplexbildung und Richtungstrennung	351
10.1	Verfahren zur Multiplexbildung	351
10.2	Zeitmultiplexverfahren	358
10.3	Die PCM-Multiplex-Hierarchien	361
10.4	Richtungstrennungsverfahren	372
11	Durchschalte- und Speichervermittlung	379
11.1	Einführung	379
11.2	Durchschaltvermittlung	387
11.3	Speichervermittlung	408
11.4	Integrierte Vermittlungsverfahren	424
12	Mehrfach-Zugriffsverfahren / Lokale Netze	433
12.1	Polling (Sendeaufruf)	433
12.2	CSMA-Verfahren	439
12.3	Token-Verfahren	455
	Anhang	461
	Anhang A: Verallgemeinerte Funktionen	461
	Anhang B: Fouriertransformation	462
	Anhang C: Lineare Algebra	470
	Anhang D: Die Stirling'sche Formel und eine binomiale Abschätzung	477
	Anhang E: Zusammenfassung der Ergebnisse der Verkehrs- und Bedientheorie	479
	Lösungshinweise zu Selbsttestaufgaben	487
	Übungsaufgaben	513
	Lösungen zu Übungsaufgaben	541
	Abkürzungsverzeichnis	606
	Literaturverzeichnis	610

1 Kommunikationsmodelle

In diesem Kapitel wird die Modellierung von Kommunikationssystemen behandelt. Es werden zunächst die Aufgaben der technischen Kommunikation und deren Klassifizierungsmöglichkeiten erörtert. Am Beispiel der Briefübermittlung wird dann die prinzipielle Abwicklung entsprechend dem OSI-Modell erläutert. Es folgen die Grundbegriffe des OSI-Modells, wobei sowohl die verbindungslose als auch die verbindungsorientierte Datenübertragung behandelt werden. Das Adressierungsverfahren und die Meldungsformate werden erläutert, die typischen Aufgaben der einzelnen Schichten und die entsprechenden Dienste und Funktionen aufgezählt und eine Einführung in die TCP/IP-Protokollfamilie gegeben.

Die Modellierung von Kommunikationssystemen nach dem OSI-Modell hat sich seit Anfang der 80er Jahre zunehmend durchgesetzt. Heute werden fast alle neuen Systeme nach Modellen entworfen, die sich an das OSI-Modell anlehnen. Deshalb ist dieses Kapitel für das Studium der Kommunikationstechnik von besonderer Bedeutung.

1.1 Einführung

Kommunikation zwischen Menschen beinhaltet Nachrichtenaustausch zwischen Menschen mit einer Nachrichtenverarbeitung im Sinne von Verständigung. Formal definieren wir jedoch Kommunikation lediglich als Austausch von Nachrichten. Im Folgenden werden wir stets technische Kommunikation, also Kommunikation mit Hilfe der Technik betrachten. Typische Beispiele von technischer Kommunikation sind: Sprachkommunikation über das Telefonnetz, Textübermittlung via GSM, Nachrichtenaustausch zwischen mehreren PCs in einer technischen Anwendung.

Kommunikationssysteme sind Einrichtungen, die an der technischen Kommunikation beteiligt sind. Wir unterscheiden zwischen **Endsystemen** (wie Endgeräte, PCs, Hostrechner), die Nachrichtenquellen oder -senken enthalten und **Subsystemen** (wie Übertragungseinrichtungen, Vermittlungseinrichtungen, Protokollwandler), die nur Teilaufgaben der Kommunikation übernehmen. Endsysteme und Subsysteme und die sie verbindenden Leitungen bilden Kommunikationsnetze. Außer den zwischen den Endsystemen zu übermittelnden Nachrichten (auch Nutzinformatoren genannt) werden bei der technischen Kommunikation Steuerinformationen im Netz erzeugt und ausgetauscht. Beim Telefonieren z. B. beinhaltet die Sprache die Nutzinformation, während die Rufnummer, der Ruf und die Wähltöne die Steuerinformationen darstellen.

Kommunikationssysteme übernehmen Aufgaben wie Eingabe, Ausgabe, Übertragung, Vermittlung und Speicherung der Nutzinformatoren. Hierbei werden stets Steuerinformationen verarbeitet und soweit erforderlich auch eingegeben, ausgegeben, gespeichert, übertragen und vermittelt. Eine weitere Detaillierung und Klassifizierung der Aufgaben eines Kommunikationssystems unter verschiedenen

Kommunikation

Kommunikationssysteme
Endsysteme
Subsysteme

Gesichtspunkten führt zu Systemarchitekturen, die sich in den Implementierungen der Produkte einzelner Hersteller widerspiegeln. Ein wesentlicher Aspekt dabei ist das Bestreben der Hersteller, gleichartige Kommunikationsaufgaben in einer Hardware- oder Software-Implementierung (Modul) zusammenzufassen. Solche Module können dann in unterschiedlichsten Kommunikationssystemen eingesetzt werden. 1978 begann eine Expertengruppe (ISO TC 97 SC 16 - International Standardisation Organisation, Technical Committee 97 Subcommittee 16) ein Modell für die Strukturierung von Kommunikationssystemen zu erstellen. Bereits 1980 wurde ein Entwurf vorgestellt, der 1983 als ISO-Norm verabschiedet wurde.

ISO-Modell

Das **ISO-Modell** ist unter der Bezeichnung OSI (**O**pen **S**ystems **I**nterconnection) bekannt. Heute existieren bereits mehrere dieses Modell unterstützende Normen (Tabelle 1.1-1), und es wird ständig an einer Detaillierung und Erweiterung des Modells gearbeitet.

Tab. 1.1-1: ISO - Normen zur Systemmodellierung

ISO 7498	OSI Reference Model
ISO 8649/50	OSI Common Application
ISO 8517	OSI File Transfer
ISO 8831/32	OSI Job Transfer
ISO 9040/41	OSI Virtual Terminals
ISO 8822/23	OSI Presentation Service & Protocol
ISO 8824/25	OSI Transfer Syntax
ISO 8505/06	OSI Message Oriented Text
ISO 8613	Document Structure
ISO 646, 2022, 6937	Character Repertoire
ISO 8326/27	OSI Session Service & Protocol
ISO 8072/73	OSI Transport Service & Protocol
ISO 8602	OSI Connectionless Transport Service
ISO 8348	OSI Network Service
ISO 8473	OSI Connectionless Network Services
ISO 8878	X.25 Network Services
ISO 8808	X.25 Network Protocol
ISO 8880	LAN Network Services
ISO 8886	OSI Data Link Services
ISO 7776	X.25 Link Layer
ISO 3309/ 4335/ 7809	High Level Data Link Control (HDLC)
ISO 8802/ 2	LAN Logical Link Control
ISO 8802/ 3, 4, 5, 6, 7,	LAN Media Access & Physical Layer
ISO 9595	Common Management Information Service
ISO 13239	HDLC Procedures
ISO 8802/ 11	Wireless LAN Media Access Control & PHY

In Abb. 1.1-1 sind zwei herstellerspezifische Modelle und das OSI-Modell für Kommunikationssysteme dargestellt. Allen diesen Modellen ist gemeinsam, dass die Kommunikationsaufgaben in Gruppen zusammengefasst und hierarchisch (aufeinander aufbauend) gegliedert werden. Man nennt eine solche Gruppe von Kommunikationsaufgaben eine **Schicht** des Kommunikationsmodells. Durch das Zurückführen auf ein einziges Schichtenmodell - das OSI-Modell für Kommunikationssysteme - besteht die Aussicht, dass Produkte (sowohl Endsysteme als auch Subsysteme) verschiedener Hersteller zueinander kompatibel werden, d. h. freizügig miteinander kommunizieren können; daher auch die Bezeichnung "**Offene Systeme**" (Open Systems) für Systeme, die nach dem OSI-Modell strukturiert sind.

Schicht

Offene Systeme

SNA	OSI	DEC NET
End user	7 Anwendungsschicht	End User
Presentation services	6 Darstellungsschicht	Network Management
		Network Application
Data flow control	5 Kommunikations-Steuerungs (sitzungs) schicht	Session control
Transmission control	4 Transportschicht	End-to-end communication
Path control	3 Vermittlungsschicht	Routing
Data link control	2 Sicherungsschicht	Data link control
Physical	1 Bitübertragungsschicht	Physical

Abb. 1.1-1: SNA (System Network Architecture) von IBM und DEC NET von Digital Equipment im Vergleich zum OSI-Referenzmodell

Bei der Zerlegung der Aufgaben eines Kommunikationssystems in logisch aufeinander aufbauende Schichten werden folgende Aspekte berücksichtigt:

- Gleiche Funktionen werden in einer Schicht zusammengefasst.
- Jede Schicht hat nur direkte Interaktion mit den beiden benachbarten Schichten.
- Zwischen den einzelnen Schichten soll die Interaktion möglichst gering sein.
- Die von einer Schicht für die nächst höhere Schicht zu erbringenden Aufgaben werden in dieser Schicht gegebenenfalls unter Zuhilfenahme der jeweils niedrigeren Schicht realisiert.

- Kommunikationsmodelle sind logische Modelle. Sie legen keine Implementierungen fest, sondern beschreiben lediglich die jeweiligen Funktionen und deren logischen Zusammenhänge. Bei der Festlegung der einzelnen Schichten wird jedoch darauf geachtet, dass sie (hard- oder softwaremäßig) jeweils einzeln implementiert werden können.

Durch das beschriebene Vorgehen wird impliziert, dass eine (hard- oder softwaremäßige) Änderung in einer Schicht lediglich durch die Modifizierung dieser Schicht abgefangen wird - die anderen Schichten müssen nicht geändert werden. Das Vorgehen bei der Festlegung der einzelnen Aufgaben des Systems impliziert zudem, dass jeweils höhere Schichten die logischen Funktionen des Systems auf einer jeweils höheren Abstraktionsebene darstellen.

1.1.1 Ein Beispiel zur Abwicklung der Kommunikation zwischen Systemen nach dem OSI-Modell

Im Folgenden wollen wir die Abwicklung des Nachrichtenaustausches an einem Beispiel der Briefübermittlung zwischen zwei Teilnehmern darstellen. Die hierbei anfallenden Aufgaben werden anhand des OSI-Schichtenmodells erläutert. Hierzu betrachten wir zwei Endsysteme A und B, bestehend aus zwei Teilnehmern an Bildschirmendgeräten. Teilnehmer A möchte eine Mitteilung in Form eines Briefes an den Teilnehmer B übermitteln. Außer den beiden Endsystemen ist an der Kommunikation ein weiteres Transitsystem (d. h. eine die Kommunikation zwischen zwei Systemen unterstützende eigenständige Einrichtung) nämlich eine Vermittlungseinrichtung beteiligt. Die einzelnen Systeme sind über elektrische Leitungen miteinander verbunden (Abb. 1.1-2).

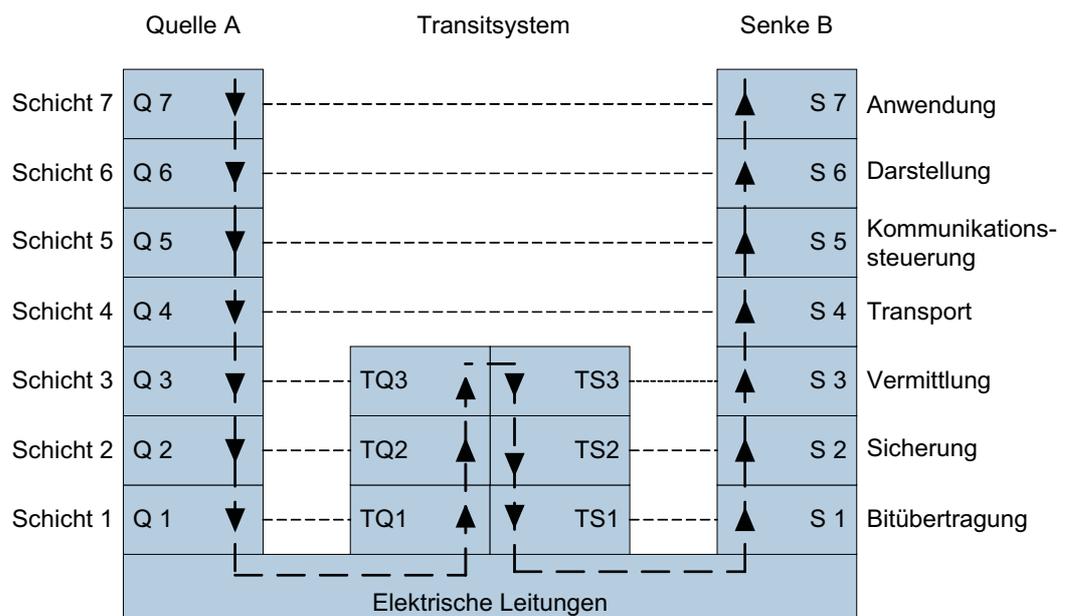


Abb. 1.1-2: Kommunikationsaufgaben bei der Briefübermittlung von A nach B nach dem OSI-Modell

Teilnehmer A, der als Quelle angesehen wird, erstellt eine Mitteilung in Form eines Briefes an seinem Terminal für den Teilnehmer B. Die Darstellungsschicht überprüft die lokalen begrifflichen und darstellungsmäßigen Vereinbarungen (z. B. Alphabet, Zeichenabstand, Zeilenabstand, Leerzeilen, Absatz u.s.w.) und aktiviert nach (interaktiver) Korrektur, die Kommunikationssteuerungsschicht. Diese stößt die Eröffnung einer Textübermittlungssitzung an, indem sie die Transportschicht aktiviert. Die Transportschicht stößt die Vermittlungsschicht an, die ihrerseits die Sicherungsschicht aktiviert. Diese aktiviert daraufhin die Bitübertragungsschicht. Die zwischen den benachbarten Schichten ausgetauschten Meldungen wollen wir **Primärmeldungen** ("primitives") nennen. Sie bestehen allgemein aus Nutz- und Steuerinformationen.

Primärmeldungen

Primärmeldungen stellen Ereignisse (Aktionen) bei dem Kommunikationsablauf dar. Die Schicht 1 des Teilnehmers A treibt nun einen Bitstrom über die elektrische Leitung und aktiviert so die Schicht 1 des Transitsystems. Die Bitübertragungsschichten der Quelle und des Transitsystems sorgen nun dafür, dass Bitströme in beiden Richtungen (Quelle zum Transitsystem und umgekehrt) fließen. Über diese Bitströme können nun die Sicherungsschichten der Quelle und des Transitsystems Meldungen miteinander austauschen. Im Wesentlichen vereinbaren sie, welche Sicherungsmethode zur Vermeidung von Verfälschungen der übertragenen Bits anzuwenden ist, und verfahren dann entsprechend, indem sie z. B. Bitfehler durch Überprüfung gewisser redundanter Bits erkennen und gegebenenfalls korrigieren. Nun können die Vermittlungsschichten der Quelle und des Transitsystems die gesicherte Strecke verwenden, um Meldungen miteinander auszutauschen. Insbesondere teilt die Schicht 3 der Quelle der Schicht 3 des Transitsystems nun mit, dass eine Schicht 3-Verbindung zu der Senke B aufgebaut werden soll. Analog wird nun nacheinander die Bitübertragungsschicht, die Sicherungsschicht und die Vermittlungsschicht zwischen dem Transitsystem und der Senke aufgebaut. Damit steht den Transportschichten der Quelle und der Senke eine vermittelte Strecke, die gewöhnlich durch ein größeres Kommunikationsnetz führt, zum Meldungsaustausch zur Verfügung.

Die Transportschichten der Quelle und Senke nehmen eine Ende-zu-Ende Sicherung vor, indem jede von der Quelle zur Senke fehlerfrei übertragene Seite des Briefes von der Transportschicht der Senke quittiert wird. Bei Übertragung mit Fehlern wird die Seite neu abgerufen. Den Kommunikationssteuerungsschichten der Quelle und der Senke steht somit eine Ende-zu-Ende gesicherte Verbindung, über die sie einzelne quittierte Seiten austauschen können, zur Verfügung. Aufgabe der Kommunikationssteuerungsschicht ist es, nun die Briefübermittlungssitzung zu steuern. Es muss sichergestellt werden, dass wirklich die gewünschten Teilnehmer miteinander verbunden sind und, dass die Endgeräte empfangsbereit sind (d. h. Seiten auch wirklich ankommen). Meist wird auch das Datum und die Uhrzeit der Sitzungseröffnung mit den Teilnehmerkennzahlen ausgetauscht. Wie wir bereits am Anfang gesehen haben, überprüft die Schicht 6 die lokalen, begrifflichen und darstellungsmäßigen Vereinbarungen. Es ist auch ihre Aufgabe, entsprechende (mit den lokalen Vereinbarungen verträgliche) Vereinbarungen zwischen der Quelle und der Senke

zu treffen. Auf diese Weise wird der Brief von der Schicht 7 der Quelle (dem Teilnehmer A) zur Schicht 7 der Senke (dem Teilnehmer B) übermittelt. Anschließend wird, beginnend mit der Schicht 7, die jeweilige Verbindung zwischen den Schichten wieder abgebaut.

An diesem vereinfachten und doch recht detaillierten Beispiel der Briefübermittlung haben wir einige Eigenschaften des Kommunikationsablaufes entsprechend dem OSI-Modell beobachten können. Die beiden wichtigsten sind:

- Physikalisch werden die einzelnen Meldungen (senkrecht) zwischen den Schichten des jeweiligen Systems ausgetauscht. Lediglich über das Medium selbst werden physikalische Meldungen zwischen den Systemen (waagrecht) ausgetauscht.
- Logisch werden Meldungen (horizontal) zwischen den gleichen Schichten der an der Kommunikation beteiligten Systemen ausgetauscht.

Die Regeln für den logischen Meldungs austausch (zeitliche Abwicklung einbezogen) zwischen zwei gleichen Schichten von Systemen, die an der Kommunikation beteiligt sind, nennt man ein **Protokoll**.

Protokoll

Selbsttestaufgabe 1.1-1:

Bei der Betrachtung von Kommunikationssystemen, die nach dem OSI-Modell strukturiert sind, tauchen die Begriffe offene Systeme, Schicht, Protokoll und Primärmeldung auf. Erläutern Sie deren Bedeutung.

1.2 Grundbegriffe des OSI-Modells

Bisher haben wir die Begriffe Schicht, Protokoll und Primärmeldungen (Abb. 1.2-1) kennengelernt. Es sei besonders darauf hingewiesen, dass der Begriff Schicht einmal innerhalb eines Systems, zum zweiten aber auch über das gesamte Kommunikationsnetz hinweg verwendet wird.

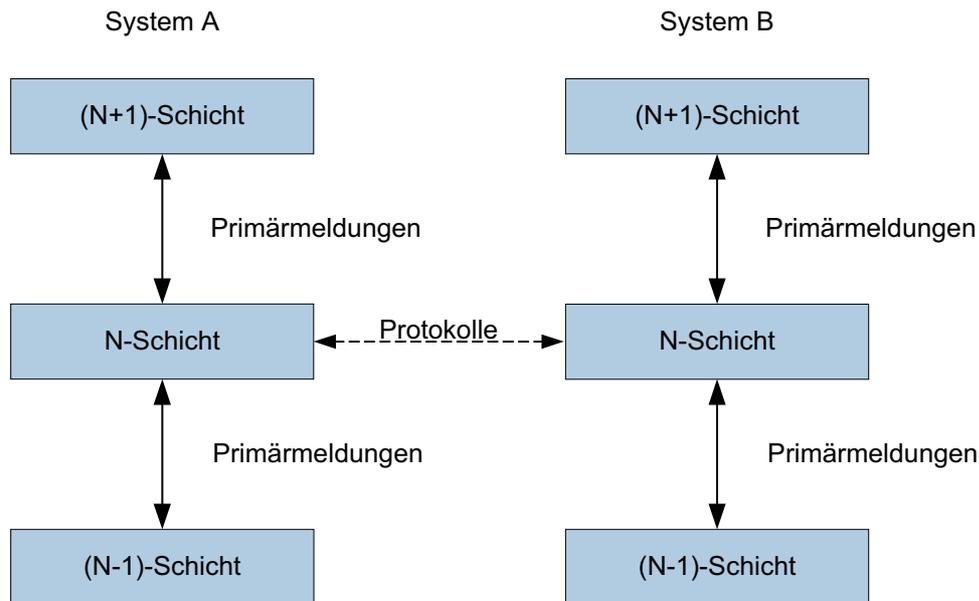


Abb. 1.2-1: Zu den Begriffen Schicht, Primärmeldungen und Protokolle

Eine **Instanz** einer Schicht ist eine aktive Einheit einer Schicht. Sie bietet der nächst höheren Schicht Kommunikationsfunktionen (auch **OSI-Dienste**)⁴ an und/oder beteiligt sich an der Kommunikation mit einer anderen Instanz der gleichen Schicht eines anderen Systems über Protokolle. Eine Instanz kann auch lediglich eine Aufgabe innerhalb einer Schicht wahrnehmen, ohne einer höheren Schicht einen Dienst anzubieten (z. B. gewisse Fehler- oder Verwaltungsaufgaben behandelnde Instanzen). In Implementierungen werden Instanzen mit hard- oder softwaremäßigen Modulen identifiziert, obwohl dies nicht zwingend ist.

Instanz
OSI-Dienste

Die Dienste, die eine Instanz der Schicht N (wir bezeichnen die Instanz als eine N-Instanz) einer (N+1)-Instanz anbietet, können Funktionen beinhalten, die die N-Instanz selbst erbringt, mit Hilfe der nächst niedrigeren Schicht erbringt oder auch (über die Protokollabwicklung) mit Hilfe einer anderen N-Instanz der Schicht N erbringt.

Jede N-Schicht-Instanz hat einen über das gesamte Netz eindeutigen (N-Schicht) Namen. Eine (N+1)-Instanz kann einen Dienst, der von einer N-Instanz angeboten wird, über einen durch seine N-Adresse eindeutig gekennzeichneten **Dienstzugangspunkt** zwischen den beiden Schichten in Anspruch nehmen. Ein Dienstzugangspunkt kann jeweils nur von einer N-Instanz bedient werden. Eine N-Instanz kann mehrere N-Dienstzugangspunkte bedienen und eine (N+1)-Instanz mehrere N-Dienstzugangspunkte benutzen. Der Sachverhalt ist in Abb. 1.2-2 dargestellt.

Dienstzugangspunkt

4 Nicht zu verwechseln mit Diensten in öffentlichen Netzen (s. Kapitel 2)

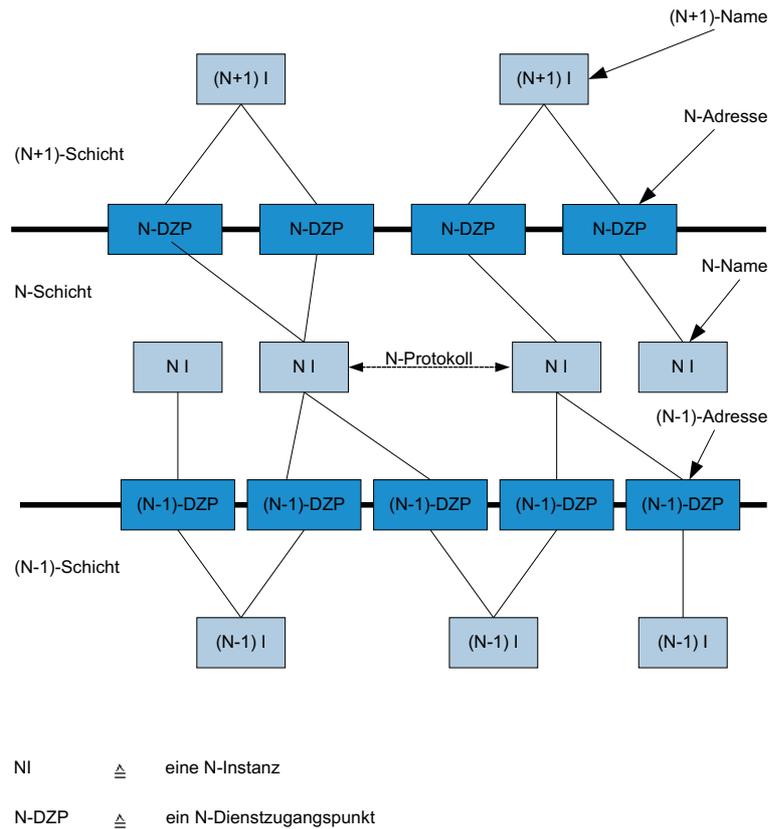
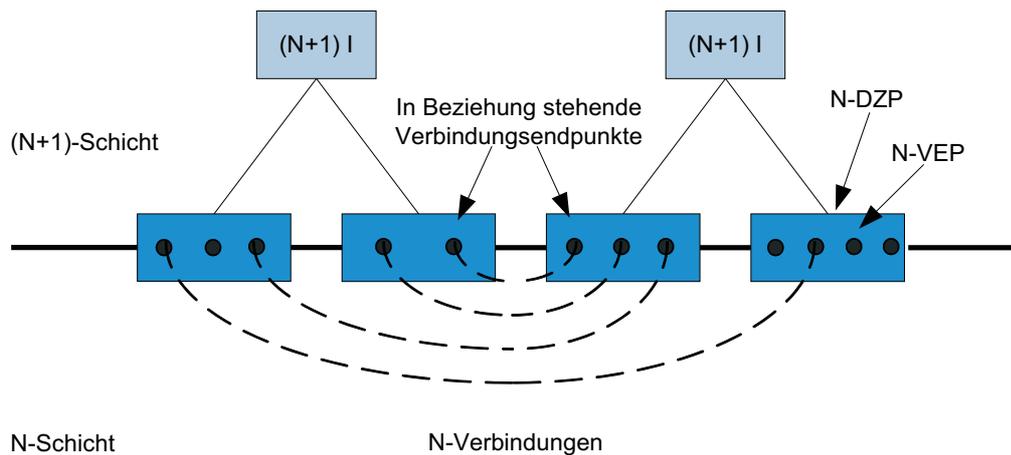


Abb. 1.2-2: Kennzeichnung der N-Instanzen durch N-Name und der N-Dienstzugangspunkte durch die N-Adresse

Sollen Nachrichten zwischen verschiedenen Instanzen der Schicht (N+1) ausgetauscht werden, so werden von der Schicht N logische Verknüpfungen zwischen den Dienstzugangspunkten (zur Schicht N), über die die Nachrichten ausgetauscht werden, erstellt. Besteht die Nachricht nur aus einzelnen Meldungen, die alle Adressierungs- und Sequenzierungsinformationen enthalten, so sind keine weiteren Kennzeichnungen als die Verknüpfung der Dienstzugangspunkte erforderlich, und man spricht von **verbindungsloser Datenübermittlung**.

**verbindungslose
Datenübermittlung**



(N+1) I \triangleq (N+1)-Instanz

N-DZP \triangleq N-Dienstzugangspunkt

N-VEP \triangleq N-Verbindungsendpunkt

Abb. 1.2-3: N-Verbindungen zwischen N-Dienstzugangspunkten werden durch Verknüpfung zwischen eindeutig bezeichneten N-Verbindungspunkten gekennzeichnet

Im anderen Falle wird eine (logische) Verbindung zwischen den Dienstzugangspunkten aufgebaut. Sie wird durch eine Zuordnung zwischen den **Verbindungsendpunkten**, die zu den jeweiligen Dienstzugangspunkten führen, identifiziert (Abb. 1.2-3). Verbindungen stellen somit eine logische Kommunikationsbeziehung zwischen den Verbindungsendpunkten, den Dienstzugangspunkten und letztlich, den diese Dienstzugangspunkte verwendenden Instanzen dar. Gewöhnlich werden Punkt-zu-Punkt Verbindungen verwendet, jedoch auch Mehrpunktverbindungen (z. B. für globale Mitteilungen) sind möglich. Zwischen zwei Dienstzugangspunkten können auch gleichzeitig mehrere Verbindungen bestehen.

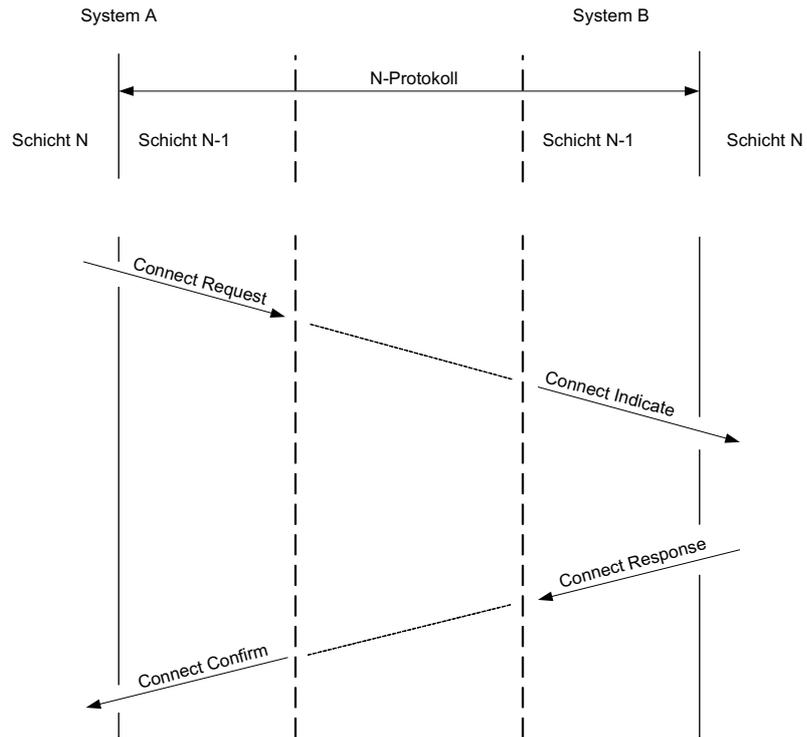
Verbindungsendpunkte

Die **verbindungsorientierte Datenübermittlung** verläuft in drei Phasen:

verbindungsorientierte Datenübermittlung

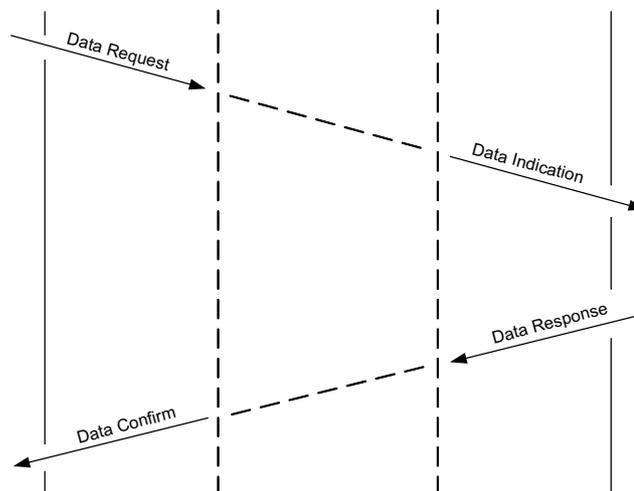
1. Eine Verbindungsaufbauphase, in der die Verbindung erstellt wird.
2. Eine Verbindungsphase, in der Nutzdaten übermittelt werden.
3. Eine Verbindungsabbauphase, in der die Verbindung wieder abgebaut wird.

Beispiele der verbindungsorientierten Datenübermittlung sind: Durchschaltverbindungen (Leitungsvermittlung) und virtuelle Verbindungen bei der Datenpaketübermittlung. In Abb. 1.2-4, Abb. 1.2-5 und Abb. 1.2-6 ist der typische Ablauf einer solchen Verbindung für eine verbindungsorientierte Datenpaketübermittlung mit den dabei verwendeten Primärmeldungen dargestellt.



Connect Request	≙	Verbindungswunsch
Connect Indicate	≙	Anzeige des Verbindungswunsches
Connect Response	≙	Annahme der Verbindung
Connect Confirm	≙	Bestätigung des Verbindungsaufbaus

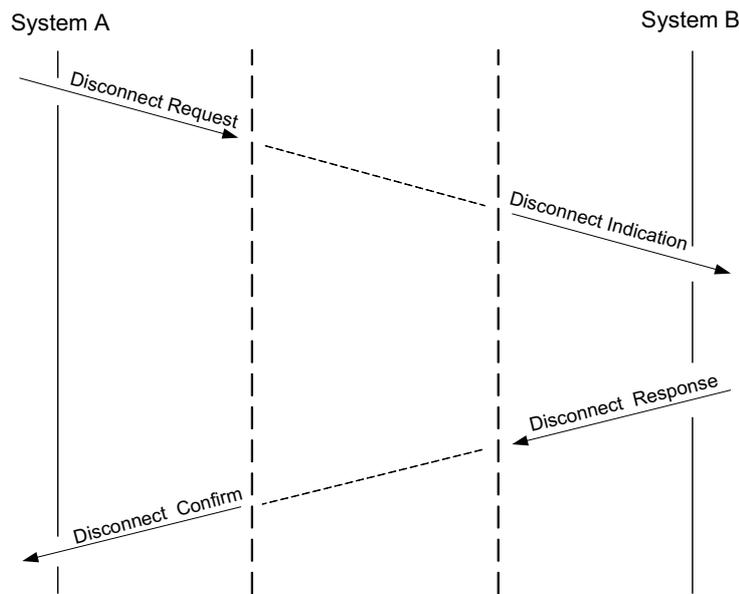
Abb. 1.2-4: Verbindungsaufbau



Der Datenaustausch wird mehrfach, ggf. auch verschachtelt durchgeführt

Data Request	≙	Wunsch, Datenpaket zu übermitteln
Data Indication	≙	Anzeige des Datenpakets
Data Response	≙	Annahme des Datenpakets
Data Confirm	≙	Bestätigung der Übermittlung des Datenpakets

Abb. 1.2-5: Verbindungsphase



Disconnect Request	≙	Wunsch, Verbindung abzubauen
Disconnect Indication	≙	Anzeige des Abbauwunsches
Disconnect Response	≙	Annahme des Abbauwunsches
Disconnect Confirm	≙	Bestätigung des Verbindungsabbaus

Abb. 1.2-6: Verbindungsabbau
Typische Primärmeldung bei verbindungsorientierter
Schicht N Kommunikation

Ein wesentlicher Punkt bei der **verbindungslosen Datenübermittlung** ist, dass die Zeitbedingungen gegenüber der verbindungsorientierten Datenübermittlung (insbesondere gegenüber der Durchschalteverbindung) gelockert werden. Die einzelnen Instanzen einer Schicht müssen nicht unmittelbar zur Verfügung stehen; lediglich eine Maximalzeit für den Übermittlungsvorgang sollte nicht überschritten werden. Obwohl eine zeitlich begrenzte Verbindung im Falle der verbindungslosen Datenübermittlung nicht existiert, wollen wir den Begriff "Route" auch für verbindungslose Datenübermittlung verwenden, um im Folgenden einheitliche Formulierungen verwenden zu können. Als **Route** bezeichnen wir den Weg, den eine Meldung zwischen zwei Endsystemen durch das Kommunikationsnetz benutzt.

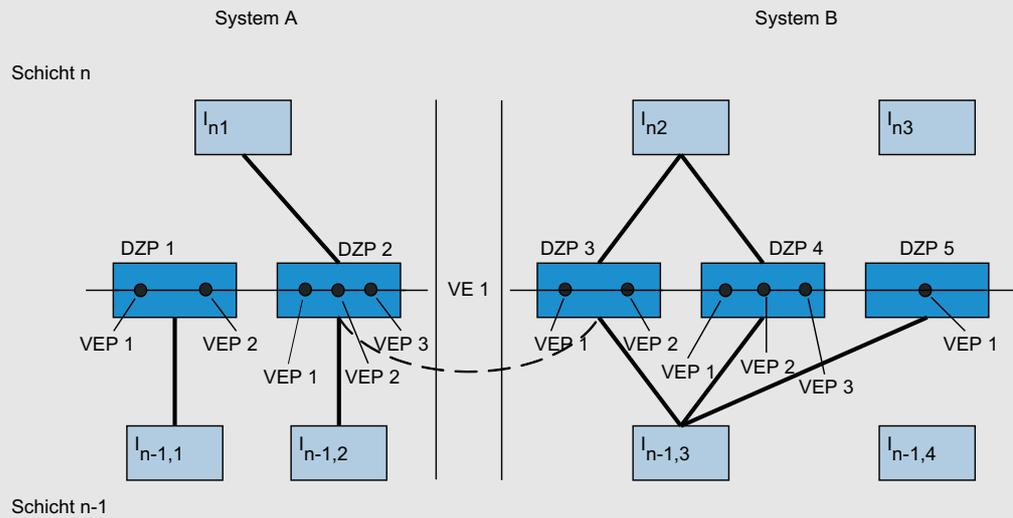
Route

Für die Adressierung im OSI-Modell gilt folgendes: Instanzen, Dienstzugangspunkte und Verbindungsendpunkte werden jeweils eindeutig gekennzeichnet (adressiert). Über die Zuordnung von N-Instanzen und den (N-1)-Dienstzugangspunkten, über die sie kommunizieren können, wird (in der N-Schicht) ein Verzeichnis geführt. Die N-Verbindungen (d. h. die Verknüpfungen zwischen den N-Verbindungsendpunkten) werden in der N-Schicht verwaltet. Ihr sind jeweils auch die Dienstzugangspunkte, die eine N-Instanz bedient und die (N-1)-Dienstzugangspunkte, deren Dienste sie hierfür in Anspruch nimmt, bekannt. Die jeweiligen Zuordnungen können einfach (eins zu eins oder hierarchisch) oder aber auch recht kompliziert sein. Wesentlich ist, dass die (N+1)-Schicht diese Zuordnungen nicht kennt und nicht zu verwalten braucht. Für die Schicht-(N+1) sind lediglich die Dienste, die ihr von der Schicht-N angeboten werden, relevant.

Wie sie erbracht, d. h. auch implementiert werden, ist für sie irrelevant und bleibt ihr verborgen.

Beispiel 1.2-1:

Nachfolgend sind zwei ISO-Schichten ($n, n - 1$) zweier miteinander kommunizierender Systeme A und B mit ihren Verarbeitungsinstanzen I , den Dienstzugangspunkten DZP und den Verbindungsendpunkten VEP dargestellt.



Es wird eine Verbindung VE1 zwischen I_{n1} und I_{n2} aufgebaut. Folgende Aussagen geben die wichtigsten Eigenschaften des OSI-Modells wieder.

1. I_{n1} muss die Adresse von I_{n2} kennen.
2. I_{n1} muss wissen, dass sie DZP1 oder DZP2 in Anspruch nehmen muss.
3. I_{n1} muss wissen, dass I_{n2} über DZP3 oder DZP4 zu erreichen ist.
4. $I_{n-1,2}$ muss nicht wissen, über welchen DZP I_{n2} zu erreichen ist.
5. $I_{n-1,2}$ hätte statt

$$VE1 = [VEP1(DZP2), VEP1(DZP3)]$$

auch

$$VE2 = [VEP2(DZP2), VEP2(DZP3)]$$

nehmen können,

6. $I_{n-1,2}$ muss dabei I_{n1} nicht über die Wahl des Weges informieren.

Formate von Meldungen

In Abb. 1.2-7 sind typische **Formate von Meldungen**, wie sie bei der Kommunikation zwischen zwei Systemen verwendet werden, dargestellt. Charakteristisch für einen solchen Meldungs austausch ist, dass jede Schicht eine Meldung von der

jeweils höheren Schicht übernimmt, Steuerinformationen der eigenen Schicht hinzufügt und die neue Meldung an die jeweils niedrigere Schicht weitergibt. Auf der Empfangsseite werden dann jeweils die Steuerinformationen von der Meldung abgenommen, verwertet und die Meldung an die jeweils höhere Schicht weitergegeben. Die Steuerinformationen einer Schicht werden somit nur in dieser Schicht verwendet. Sie sind für die jeweils höhere und niedrigere Schicht irrelevant.

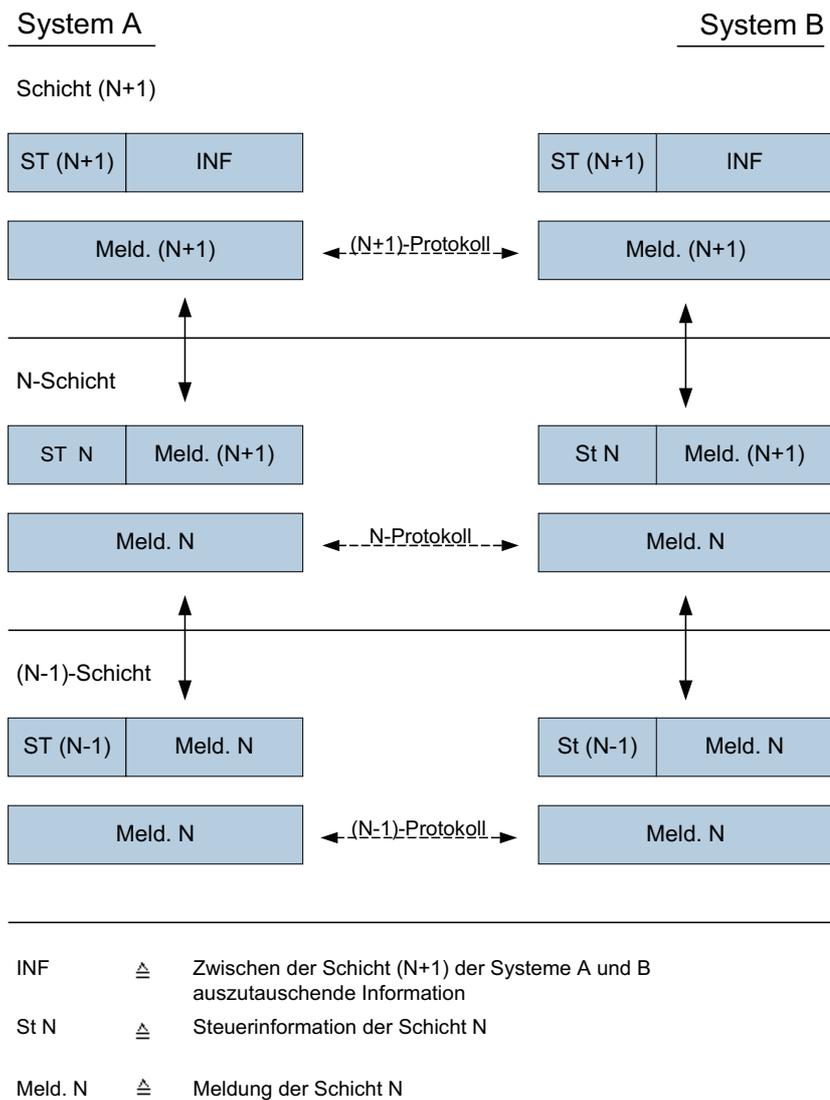


Abb. 1.2-7: Formate der Meldungen bei der Kommunikation zwischen Systemen

1.3 Schichten des OSI-Modells

Im Folgenden wollen wir die einzelnen Schichten des OSI-Modells ansehen. Wir wollen dabei die Aufgabe der jeweiligen Schicht, die Dienste, die diese Schicht der nächst höheren Schicht anbietet und die Funktionen, die in der jeweiligen Schicht ausgeführt werden, zusammenstellen. Wir haben die Formulierungen so gewählt, dass sowohl verbindungsorientierte als auch verbindungslose Datenübermittlung abgedeckt werden. Es sei hier darauf hingewiesen, dass in konkreten Fällen die Aufgaben, Dienste und Funktionen abhängig von den jeweiligen Anwendungen sind und über die Zuordnung einiger Funktionen zu bestimmten Schichten verschiedene Auffassungen herrschen.

transportorientierte Schichten

Die ersten vier Schichten bewältigen im Wesentlichen den Transport von Nachrichten, sie werden deshalb auch **transportorientierte Schichten**, ihre Protokolle Transportprotokolle genannt. Sie sind streng hierarchisch gegliedert. Die jeweiligen Funktionen sind sehr ähnlich aufgebaut und in konkreten Implementierungen oft austauschbar (so kann z. B. eine gute Fehlersicherung auf Teilstrecken eine Ende-zu-Ende Sicherung in der Schicht 4 überflüssig machen). Wir haben uns jeweils auf wesentliche Funktionen und Dienste beschränkt. Die oberen drei Schichten orientieren sich an den Anwendungen. Sie werden deshalb **anwendungsorientierte Schichten**, ihre Protokolle Anwendungsprotokolle genannt. Sie können hierarchisch dargestellt werden, dies ist jedoch keineswegs zwingend. Auch hier haben wir uns auf wesentliche Funktionen und Dienste begrenzt.

anwendungsorientierte Schichten

Bitübertragungsschicht

1.3.1 Bitübertragungsschicht (Schicht 1)

- Englisch: Physical Layer
- Aufgabe: Bitübertragung zwischen benachbarten Systemen (unter Verwendung des Übertragungsmediums)
- Dienste:
 - Aufbau, Abbau und Unterhaltung von (ungesicherten) physikalischen Verbindungen zwischen benachbarten Systemen
 - Physikalische Bitübertragung
 - Fehlermeldungen
- Funktionen:
 - Aktivieren und Deaktivieren der physikalischen Strecken
 - Bitübertragung auf der Strecke (Speisung, Leitungscodierung, Bitsynchronisierung)
 - Verwaltung von physikalischen Verbindungen (z. B. Zuordnung nach Güteparametern)
 - Fehlerbehandlung und -verwaltung (z. B. Resynchronisierung, Notspeisung)

1.3.2 Sicherungsschicht (Schicht 2)

Sicherungsschicht

- Englisch: Data Link Layer
- Aufgabe: Gesicherte Datenübertragung auf Teilstrecken zwischen benachbarten Systemen (unter Verwendung der Dienste der Schicht 1)
- Dienste
 - Auf- und Abbau von gesicherten Verbindungen auf Teilstrecken
 - Gesicherte Datenübertragung auf Teilstrecken
 - Flusskontrolle
 - Fehlermeldung
- Funktionen
 - Strukturierung der Bitübertragungsschicht (Wort- und Rahmenbildung sowie Wort- und Rahmensynchronisierung)
 - Sequenzierung (Sicherung der Reihenfolge von Bits, Wörtern und Meldungen)
 - Multiplexbildung (Splitten oder Zusammenfassen der Bitübertragungstrecken)
 - Verwaltung von gesicherten Verbindungen (Aufbau, Abbau und Zuordnung von Verbindungen nach Prioritäten und Güteparametern. Meist wird auch der Zugang zur Strecke, d. h. Verwaltung des Mediums hier angesiedelt)
 - Sicherung der Teilstrecken (durch Fehlererkennungs- und Fehlerbehebungsmaßnahmen)
 - Flussregelung zwischen den benachbarten Systemen
 - Umsetzung der zwischen den Instanzen der Schicht 3 auszutauschenden Nachrichten auf die gesicherten Strecken
 - Fehlerbehandlung und -verwaltung (der Schicht 2-Funktionen)

1.3.3 Vermittlungsschicht (Schicht 3)

Vermittlungsschicht

- Englisch: Network Layer
- Aufgabe: Erstellung und Unterhaltung von Netzverbindungen (für verbindungsorientierte Datenübertragung) und von Netzrouten (für verbindungslose Dateübertragung) zwischen Endsystemen im Kommunikationsnetz unter Verwendung von gesicherten Teilstrecken (d. h. unter Verwendung der Schicht 2-Dienste)
- Dienste
 - Auf- und Abbau von Verbindungen zwischen Endsystemen

- Datenübermittlung über Netzverbindungen und Netzzrouten (mit Mindest-Güteparametern wie Kosten, Durchsatz, Verzögerungen u.s.w. sowie Prioritäten)
- Fehlermeldung und -verwaltung
- Funktionen:
 - Splitten oder Zusammenfassen von gesicherten Teilstrecken (Multiplexbildung)
 - Sequenzierung und Sicherung auf zusammengefassten oder gesplitteten Teilstrecken (um z. B. die erforderliche Güte der Schicht 3-Dienste zu erhalten)
 - Wegesuche, Leitweglenkung, Routen- und Ersatzroutenbestimmung
 - Verwaltung von Netzverbindungen (Zuteilung nach Güteparametern und Prioritäten)
 - Betrieb von Netzverbindungen und Netzzrouten zwischen Endsystemen
 - Flussregelung und Optimierungen im Kommunikationsnetz (z. B. Kostenminimierung, Verzögerungsminimierung, Überlastbehandlung, Blockierungsauflösung)
 - Fehlerbehandlung und -verwaltung (der Schicht 3-Funktionen)

Transportschicht **1.3.4 Transportschicht (Schicht 4)**

- Englisch: Transport Layer
- Aufgabe: Gesicherte transparente Datenübertragung auf Netzverbindungen oder Netzzrouten (d. h. unter Verwendung der Schicht 3-Dienste) zwischen Endsystemen
- Dienste
 - Auf- und Abbau von Ende-zu-Ende Transportverbindungen
 - Datenübertragung auf Ende-zu-Ende Transportverbindungen und Transportrouten
 - Fehlerbehandlung und -verwaltung
- Funktionen
 - Splitten oder Zusammenfassen von Netzverbindungen zu Transportverbindungen
 - Sequenzierung und Sicherung auf Ende-zu-Ende Transportverbindungen oder Transportrouten
 - Flussregelung zwischen Endsystemen
 - Verschlüsselung von Meldungen zwischen Endsystemen
 - Betrieb von Transportverbindungen und -routen

- Verwaltung von Transportverbindungen (Zuteilung nach Güteparametern und Prioritäten)
- Fehlerbehandlung und -verwaltung (der Schicht 4-Funktionen)

1.3.5 Kommunikationssteuerungsschicht (Sitzungsschicht, Schicht 5)

Kommunikationssteuerungsschicht

- Englisch: Session Layer
- Aufgabe: Betrieb und Verwaltung von Sitzungen zwischen Anwenderinstanzen (unter Verwendung von Diensten der Transportschicht)
- Dienste
 - Auf- und Abbau von Sitzungen zwischen Anwenderinstanzen
 - Durchführung von Sitzungen (Dialogverwaltung, Synchronisation, Datenübermittlung)
 - Fehlermeldung und -verwaltung
- Funktionen
 - Umsetzung von Sitzungen auf Transportverbindungen oder Transportrouten und entsprechende Datenübermittlung
 - Dialogverwaltung (z. B. Verwaltung des Senderechtes oder Abgrenzung von Aktivitäten innerhalb eines Dialoges)
 - Synchronisation des Dialoges (Setzen von Synchronisationspunkten, Rücksetzung des Dialoges auf einen Synchronisationspunkt)
 - Verwaltung von Sitzungen (Zuordnung nach Güteparametern und Prioritäten)
 - Fehlerbehandlung und -verwaltung (der Schicht 5-Funktionen)

1.3.6 Darstellungsschicht (Schicht 6)

Darstellungsschicht

- Englisch: Presentation Layer
- Aufgabe: Einheitliche Darstellung von Informationen der Anwendungsinstanzen, um die Kommunikation zwischen verschiedenen Endsystemen während einer Sitzung zu ermöglichen
- Dienste
 - Festlegung der lokalen (systeminternen) Darstellung für eine Sitzung
 - Festlegung der (globalen) neutralen Darstellung für eine Sitzung
 - Austausch von Informationen zwischen den Anwendungsinstanzen (ggf. mit Darstellungsumsetzungen) während einer Sitzung
 - Fehlerbehandlung und -verwaltung
- Funktionen

- Vereinbarungen über die lokalen (systeminternen) Darstellungen von Informationen für eine Sitzung (z. B. Zeichencodierung, Darstellung auf Bildschirm)
- Vereinbarungen über die (globale) neutrale Informationsdarstellung für eine Sitzung (z. B. Codierung der Anwenderinformationen, Codierung der Darstellungsinformationen)
- Überprüfung der Einhaltung lokaler Darstellungsvereinbarungen
- Umsetzungen zwischen lokalen und neutralen Darstellungen während einer Sitzung
- Fehlerbehandlung und -verwaltung (der Schicht 6-Funktionen)

Anwendungsschicht **1.3.7 Anwendungsschicht (Schicht 7)**

- Englisch: Application Layer
- Aufgabe: Wahrnehmung der kommunikationsrelevanten Aspekte des Anwendungsprozesses, Quelle und Senke für die Kommunikation
- Funktionen: Die Funktionen können je nach Anwendung sehr verschieden sein, so dass wir nur einige Beispiele aufzählen:
 - Identifikation des Kommunikationspartners
 - Nachfrage, ob der Partner verfügbar ist
 - Schutzmechanismen
 - Kostenregelung
 - Synchronisation der Anwendungsprozesse
 - File Transfer
 - Remote Job Entry
 - Message Handling
 - Virtual Terminal Function

Die Entwicklung eines Protokollstacks, der genau dem ISO-OSI-Modell entspricht ist insgesamt sehr aufwendig. Beispielsweise enthalten die Schichten einzelne Funktionen mehrfach, die neben dem Realisierungsaufwand auch zu kleinerem Durchsatz führen können. Außerdem kann abhängig von der Technologie auch eine andere Aufteilung der Funktionen sinnvoll sein. Daher existieren viele Entwicklungen (siehe ATM), die sich nicht exakt auf das ISO-OSI-Modell abbilden lassen. Daneben gibt es aber auch eine Vielzahl von Architekturen bei denen eine genau Zuordnung ohne weiteres möglich ist. Eine davon ist die TCP/IP-Implementierung, welche im Folgenden näher betrachtet wird.

Selbsttestaufgabe 1.3-1:

Das OSI-Modell für Kommunikationssysteme besteht aus 7 Schichten, die jeweils bestimmte Gruppen von Kommunikationsaufgaben übernehmen. Zeigen Sie an Beispielen jeweils eine dieser Aufgaben für jede einzelne Schicht auf.

1.4 TCP/IP-Protokollfamilie

In diesem Abschnitt wird eine Einführung in die TCP/IP-Protokollfamilie gegeben. Der Schwerpunkt liegt dabei weniger auf der detaillierten Darstellung der einzelnen Protokolle und Datenformate, vielmehr sollen die Grundlagen und Zusammenhänge aufgezeigt werden.

Die Geschichte des Internet ist sehr stark verbunden mit dem Kommunikationsprotokoll TCP/IP – dem **Transmission Control Protocol/Internet Protocol**. Als der Vorgänger des Internet, das ARPANET, in den siebziger Jahren immer größer wurde, stellte man fest, dass es immer schwieriger wurde, ein gemeinsames Protokoll zu finden, das von allen Rechnersystemen verstanden wurde und auch in großen Netzen stabil lief. Hinzu kam, dass sich weitere Netze entwickelten, wie z. B. das USENET und FIDONET, die untereinander und mit dem ARPANET verbunden werden sollten. In dem sich so entwickelnden Verbundnetz kam überwiegend ein Protokoll zum Einsatz – das TCP/IP Protokoll. Das Netz, das sich zwischen den verschiedenen Netzinseln entwickelte, kann praktisch als Netz zwischen den Netzen, oder auch „InterNetz“, bezeichnet werden, woraus sich im Englischen der Name „Internet“ entwickelte.

Internet-Protokoll

Die grundlegende Idee von TCP/IP wurde 1974 von Vinton Cerf und Robert E. Kahn in einem wissenschaftlichen Artikel veröffentlicht. Im Jahre 1980 wurde dann begonnen, alle Hostrechner des ARPANET (ca. 300) auf TCP/IP umzustellen. Im Jahr 1983 war die Umstellung auf TCP/IP abgeschlossen, und das Internet war geboren.

Die freie Verfügbarkeit von TCP/IP führte dazu, dass nach dem Militär in den achtziger Jahren zuerst wissenschaftliche Einrichtungen und Hochschulen das Internet für den Informationsaustausch nutzten, in den neunziger Jahren wurde das Internet dann zunehmend auch für kommerzielle und private Anwendungen interessant.

Das Prinzip der TCP/IP-Übertragung liegt darin, dass es eine klare Aufgabenverteilung zwischen den einzelnen Protokollen von TCP/IP gibt. Das Internet-Protokoll (IP) hat die Aufgabe, Datenpakete von einem Sender durch das Kommunikationsnetz an den Empfänger zu leiten. Falls ein Paket verloren geht, wird dies den Kommunikationspartnern nicht angezeigt. Diese Aufgabe übernimmt das oberhalb von IP operierende TCP, das im Fehlerfall eine erneute Übertragung von Datenpaketen anfordert.

Übertragungsprinzip

TCP/IP Vorteile Ein großer Vorteil von TCP/IP ist, dass es in heterogenen Netzen eingesetzt werden kann, die aus unterschiedlichen physikalischen Netzen und Netztopologien bestehen. Um z. B. zwei kleine lokale Netze in unterschiedlichen Städten zu verbinden, muss keine Direktverbindung zwischen den LANs aufgebaut werden, sondern jedes LAN braucht nur an das Internet-Backbone angeschlossen zu sein. Die Kommunikation zwischen den beiden LANs erfolgt dann über das Internet, unabhängig davon, welche Technologie unterhalb der TCP/IP-Protokollschichten an den beiden Standorten eingesetzt wird.

Ein weiterer Vorteil ist, dass die beiden kommunizierenden Hosts nicht wissen müssen, auf welchem Weg die Daten zu dem jeweiligen Kommunikationspartner gelangen. Die Datenpakete werden nur mit der Zieladresse des anderen Hosts versehen und dann an das Netz übergeben. Innerhalb des Netzes sorgen dann spezialisierte Rechner, die als **Router** bezeichnet werden, dafür, dass die Datenpakete durch das Internet an das gewünschte Ziel gelangen. Falls eine Verbindung innerhalb des Netzes ausfällt, wird einfach über einen Umweg geroutet und die Daten erreichen trotzdem ihr Ziel. Router haben also die Aufgabe, die verschiedenen selbständigen Netze innerhalb des „Internetes“ miteinander zu verbinden. Das bedeutet, dass sie immer mindestens mit zwei verschiedenen Netzen verbunden sind und somit auch mindestens zwei Internetadressen besitzen (hosts).

Ein weiterer wichtiger Grund für die starke Verbreitung von TCP/IP ist, dass es von Anfang an für den Einsatz in Client-Server-Anwendungen konzipiert wurde. In diesem Konzept kann jeder Host als Client oder Server agieren, unabhängig davon ob es sich bei dem Computer um einen PC oder eine Mainframe handelt. Als Server wird hierbei ein Host bezeichnet, der anderen Rechnern über ein Netz einen Dienst zur Verfügung stellt. Ein Rechner, der den Dienst auf einem Server in Anspruch nimmt, wird als Client bezeichnet. Typische Client-Server-Anwendungen sind z. B. das World Wide Web, das File Transfer Protocol oder eine Datenbankabfrage.

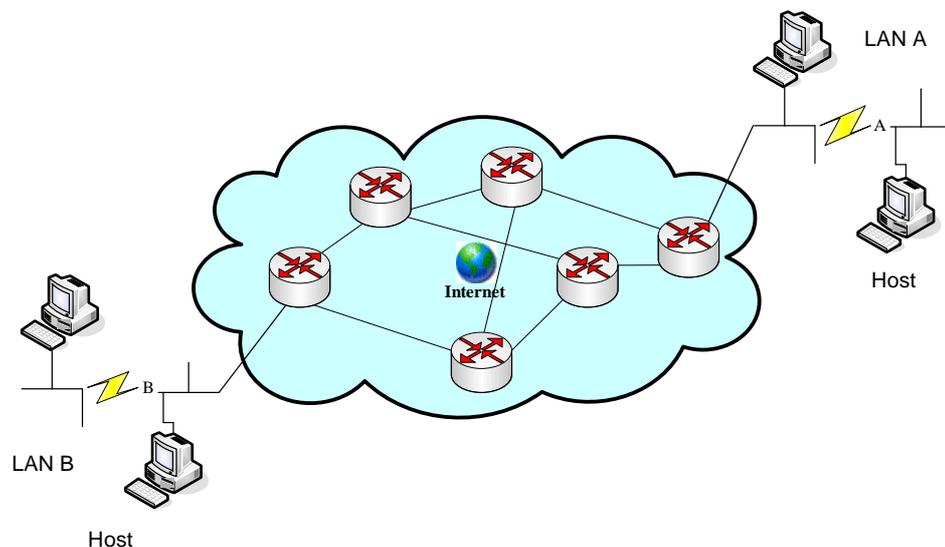


Abb. 1.4-1: Hosts in verschiedenen LANs kommunizieren über das Internet

1.4.1 TCP/IP-Modell

Zu der TCP/IP-Protokollfamilie gehört neben TCP und IP ein ganzer Satz weiterer Protokolle, die sich über die verschiedenen Schichten des OSI-Modells verteilen. Die TCP/IP-Protokolle sind entsprechend dem OSI-Modell schichtweise angeordnet. Im Gegensatz zum OSI-Modell besteht das **TCP/IP-Modell** nicht aus sieben sondern nur aus vier Schichten (siehe Abb. 1.4-2), wobei diese vier Schichten aber eindeutig den OSI-Schichten zugeordnet werden können.

TCP/IP Schichtenmodell

OSI	TCP/IP
7 Anwendungsschicht	Anwendung FTP, HTTP, SMTP, TELNET,
6 Darstellungsschicht	
5 Kommunikations- Steuerungs (sitzungs) schicht	
4 Transportschicht	Transport TCP, UDP
3 Vermittlungsschicht	Internet IP
2 Sicherungsschicht	Netz-Interface HDLC, ATM, Ethernet, FDDI
1 Bitübertragungsschicht	

Abb. 1.4-2: Das TCP/IP-Schichtenmodell

Die Verwendung eines solchen Schichtenmodells hat den Vorteil, dass z. B. ein Anwendungsentwickler nicht wissen muss, welche Netztechnologie bei potentiellen Kunden eingesetzt wird. Das Schichtenmodell verbirgt die Technologie unterhalb der IP-Schicht und die Anwendung kann ohne Wissen über die eingesetzte Technologie entwickelt werden.

Auf der **Anwendungsschicht** laufen Programme, die auf Dienste in dem TCP/IP-Netz zugreifen. Die Anwendungen entscheiden, ob ein konstanter Datenstrom verarbeitet werden soll oder ob einzelne Nachrichten über das Netz ausgetauscht werden. Im ersten Fall wird die Anwendung TCP verwenden, im zweiten Fall UDP. Das Anwendungsprogramm überreicht seine Daten in der gewünschten Form an die Transportschicht.

Anwendungsschicht

- Transportschicht** Die **Transportschicht** ermöglicht die Kommunikation zwischen zwei Anwendungen über das TCP/IP-Netz (Ende-zu-Ende-Verbindung). TCP-Verbindungen bieten einen zuverlässigen Dienst, bei dem dafür gesorgt wird, dass keine Datenpakete verloren gehen und diese in der richtigen Reihenfolge an die Anwendungen weitergeleitet werden. UDP hingegen garantiert nicht dafür, dass alle gesendeten Pakete auch zum Empfänger gelangen. Dafür ist es gut geeignet, ohne großen Protokoll-Overhead Nachrichten an die Kommunikationspartner zu schicken. So wird für die E-Mail TCP und für Videostreams UDP verwendet. Dateneinheiten auf der Transportschicht werden als Segmente (TCP) oder Nachrichten (UDP) bezeichnet.
- Internetschicht** Die **Internet-Schicht** übernimmt die Aufgabe, die Daten aus den höheren Schichten in Pakete zu verpacken und durch das TCP/IP-Netz an das Ziel zu routen. Im Gegensatz zur Transportschicht erfolgt hier die Kommunikation nicht zwischen Programmen, sondern zwischen Hosts. Die Datenpakete auf der Internet-Schicht werden als Datagramme bezeichnet und transportieren die TCP-Segmente und UDP-Nachrichten der Transportschicht als Nutzlast.
- Netz-Interface-Schicht** Die **Netz-Interface-Schicht** bildet die unterste Ebene in dem TCP/IP-Modell und hat die Aufgabe, die Daten über die jeweilig vorhandenen physikalischen Netze zu senden. Dateneinheiten auf der untersten Schicht werden als Rahmen (Frame) bezeichnet. Das Rahmenformat ist abhängig von der eingesetzten Netztechnologie und transportiert IP-Datagramme als Nutzlast.

2 Netze und Dienste

In diesem Kapitel werden Kommunikationsnetze und die in ihnen angebotenen Dienste behandelt, dabei wird die Absicht verfolgt die Strukturen und Funktionen, die hinter den Netzen und Diensten stehen, aufzuzeigen. Wegen der vorhandenen Vielfalt wurde auf Details der einzelnen Netze und Dienste verzichtet - es sei auf die Literatur am Ende der jeweiligen Kurseinheit hingewiesen. Die Übertragungs- und vermittlungstechnischen Verfahren und die Kommunikationsprotokolle, die diesen Netzen und Diensten zugrunde liegen, werden, soweit sie von allgemeiner Bedeutung sind, an anderer Stelle im Kurs ausführlicher behandelt.

Es ist für das Studium der Kommunikationstechnik von besonderer Bedeutung, dass die theoretischen Kenntnisse durch den praktischen Umgang ergänzt und untermauert werden. Es wird dringend empfohlen, dass der Leser einige der hier behandelten Dienste selbst am Endgerät kennenlernt. Hierzu gibt es heute vielfältige Möglichkeiten. Erwähnt seien die Ausstellungen der Netzbetreiber und Diensteanbieter und die diversen Messen und Ausstellungen. Die Zahlenbeispiele in diesem Kapitel sollen die Bandbreiten und die Datenübertragungsgeschwindigkeiten der einzelnen Kommunikationsmöglichkeiten aufzeigen. Der Leser soll stets die bei einzelnen Kommunikationsvorgängen umgesetzten Datenmengen vor Augen haben und die der Kommunikation zugrunde liegenden Netzstrukturen und Abläufe kennenlernen.

Das Studium dieses Kapitels vermittelt dem Leser Grundkenntnisse über Netze und Dienste heute und insbesondere über die ihnen unterliegenden Systemstrukturen.

2.1 Einführung

Kommunikationsnetze bestehen aus Übertragungswegen, Übertragungseinrichtungen und Vermittlungseinrichtungen. In der Vergangenheit wurden häufig auch Endgeräte zu den Netzen gezählt. **Kommunikationsnetze** ermöglichen, Nutzinformationen zwischen Endgeräten bzw. Anwendern auszutauschen. Hierbei werden auch Steuerinformationen erzeugt und ausgetauscht. Zur Kennzeichnung von Netzen können verschiedene Eigenschaften herangezogen werden, wie

Kommunikationsnetze

- Netztopologie (ggf. auch Hierarchie)
 - Stern- oder Baumstruktur
 - Ring- oder Maschenstruktur
- Kommunikationsrichtung
 - Einwegkommunikation (Simplex, z. B. Rundfunk- und Fernsehnetze)
 - alternative Zweiwegkommunikation (Halbduplex, z. B. in Meldenetzen)
 - simultane Zweiwegkommunikation (Duplex, z. B. im Fernsprechnetze)
- Übertragungstechnik
 - analoge Netze

- digitale Netze
- Übertragungsbandbreite
 - Schmalbandnetze
 - Breitbandnetze
- Übertragungsmedium
 - Kupferkabelnetze
 - Koaxkabelnetze
 - Funknetze
 - Glasfasernetze
- Vermittlungstechnik
 - Festgeschaltete Leitungen (z. B. Direktrufnetze)
 - Leitungsvermittelte (Durchschalte-) Netze (z. B. Fernsprechnetze)
 - Paketvermittelte Netze (z. B. X.25-Netze)
- Versorgungsgebiet
 - Lokale Netze
 - Inhouse Netze (z. B. Profibus)
 - **LAN** (*Local Area Network*), **WLAN** (*Wireless Local Area Network*)
 - Firmen TK- und Rechner-Netze
 - Regionale Netze
 - Citynetze
 - Kabelfernsehtnetze
 - Nationale Netze
 - Fernsprechnetze (**ISDN** - *Integrated Services Digital Network*)
 - Mobilfunknetze (**GSM** - *Global System for Mobile Communication*)
 - Fernsehnetze
 - Internationale Netze
 - Satellitennetze
 - Netze internationaler Firmen wie IBM (**SNA** - *Systems Network Architecture*).

In der Praxis findet man Netze, die eine Mischung der hier aufgezählten Eigenschaften aufweisen und für verschiedene Kommunikationsaufgaben verwendet werden.

Dienste **Dienste** sind Kommunikationsmöglichkeiten mit festgelegten Eigenschaften, die den Anwendern von Kommunikationsnetzen angeboten werden. Zu einem Dienst gehören Ablaufprotokolle, eine Mindestdienstgüte, die vom Netz garantiert wird, Grundmerkmale, die stets angeboten werden, und Zusatzmerkmale, die wahlweise verfügbar sind.

Früher waren Dienste unmittelbar mit den Netzen gekoppelt, so z. B. der Fernsprechdienst im Fernsprechnetze und der Telexdienst im Fernschreibnetz. Es folgten die Hörfunk- und Fernsehdienste in den Sendernetzen. Heute werden zahlreiche Dienste in den verschiedenen Netzen angeboten, so wird z. B. der Fernsprechdienst

im analogen Fernsprechnet, im ISDN sowie in den Mobilfunk-, Bündelfunk- und Satellitenfunknetzen angeboten.

Zur Kennzeichnung von Diensten können verschiedene Eigenschaften herangezogen werden, wie:

- Informationstyp
 - Sprache
 - Text
 - Daten
 - Stillbild
 - Bewegtbild
- Kommunikationsart
 - Individualkommunikation
 - Verteilkommunikation
- Kommunikationsrichtung
 - Monologdienste
 - Dialogdienste
- erforderliche Bitrate
 - Sporadische Meldungen mit einigen bit/s z. B. Telemetriedienste
 - Schmalbanddienste mit Bitraten ≤ 64 kbit/s z. B. Sprach- und Datendienste, streaming video.
 - Schmalbanddienste mit Bitraten $= n \cdot 64$ kbit/s, ($n = 2 \dots 10$), z. B. Stillbildübertragung oder Sprachübertragung hoher Güte.
 - Breitbanddienste mit einigen Mbit/s wie Videoübertragung höherer Qualität, Filetransfer, **HDTV** (*High Definition Television*).

Tab. 2.1-1: Typische Dienste heute.

Dienst	Informationstyp	Typische Bitraten
SMS (Short Message Service)	Text	9,6 kbit/s
Videotext	Text/Graphik	32 - 80 kbit/s
Telemetrie	Daten	< 300 bit/s
Telefax Gr. III	Text/Graphik	2,4 - 14,4 kbit/s
Telefax Gr. IV	Text/Graphik	64 kbit/s
Fernsprechen (Festnetz)	Sprache	64 kbit/s
Fernsprechen (Mobilfunk)	Sprache	13 kbit/s
E-Mail	Text	64 kbit/s - 2 Mbit/s
<i>Filetransfer</i>	Daten	2 Mbit/s
MMS (Multimedia Messaging System)	Bild	384 kbit/s
<i>Streaming video</i>	Bewegtbild	64 kbit/s - 2 Mbit/s
Rundfunk (Stereo)	Sprache	768 kbit/s
Videokonferenz	Bewegtbild	64 kbit/s - 2 Mbit/s

Tabelle 2.1-1 zeigt typische heutige Dienste mit dem jeweils übermittelten Informationstyp und der zur Übertragung der Information üblichen Bitrate.

Häufig wird auch zwischen Übermittlungsdiensten, bei denen lediglich der Datentransport angeboten wird (z. B. Datendienste), und den Standarddiensten, auch Teledienste genannt, bei denen darüberhinaus auch anwenderorientierte Merkmale festgelegt sind (z. B. Videotext), unterschieden.

Selbsttestaufgabe 2.1-1:

Erläutern Sie das Wesentliche der Begriffe Netze und Dienste und geben Sie entsprechende Beispiele.

2.2 Netze

Kommunikationsnetze bilden die Telekommunikationsinfrastruktur eines Landes und zählen heute zu dessen volkswirtschaftlich strategischen Ressourcen. Sie wurden über Jahrzehnte hinweg überwiegend von jeweils einer vom Staat beauftragten Instanz aufgebaut und landesweit öffentlich (d. h. für jedermanns Nutzung zu gleichen Bedingungen) im Monopol betrieben. Daneben gab es auch meist geographisch begrenzte unternehmensinterne private Netze und auch Sondernetze (z. B. der Bahn oder der Energieversorgungsunternehmen). Die Liberalisierung des Fernmeldemonopols begann vor gut 35 Jahren mit der Einführung des Wettbewerbs im Endgerätebereich (USA, Carterfone 1968); es folgte die Lizenzierung bestimmter Netze (Richtfunk, Mobilfunk, Betriebsfunk) zunächst in den USA (MCI Richtfunk 1969) und dann in England (Mercury 1981) und in Deutschland (D2 1992). Heute ist die vollständige Liberalisierung (mit gewissen infrastrukturellen Auflagen wie Versorgungsgrad und Pflichtleistungen) sowohl der Dienste als auch der Netze in den meisten westlichen Ländern üblich. In Deutschland können Gemeinschaftsnetze (*Corporate Networks*) für Sprache und Daten unter recht liberalen Bedingungen aufgebaut und auch für Dritte betrieben werden.

Der Betrieb eines Kommunikationsnetzes ist eine recht komplexe Angelegenheit zu der diverse Aufgaben zählen, wie z. B.

- Planung
- Bereitstellung und Optimierung von Netzressourcen
- Leistungsoptimierung und Dienstgüteüberwachung
- Gebührenerfassung und Abrechnung und
- weitere Verwaltungsaufgaben wie Aktivierung von Leistungsmerkmalen, Überwachung von Berechtigungen usw.

Prinzipiell sind drei Arten von Netzen, die im letzten Jahrhundert entstanden sind, zu unterscheiden:

- das Fernsprechnet, bestehend aus dem Festnetz und dem Mobilfunknetz
- die Datennetze, größtenteils bestehend aus paketvermittelten Netzen, und teilweise auch leitungsvermittelten Netzen und
- die Rundfunk- und Fernsehnetze.

Die ersten beiden Netze dienen überwiegend der Individualkommunikation, das letztgenannte Netz überwiegend der Verteilkommunikation. In den siebziger Jahren begann der Aufbau von Satellitennetzen für Daten, Sprache und Fernsehen. Es folgten Koaxialkabel- und Glasfasernetze in den achtziger Jahren. Heute gibt es auch zahlreiche festgeschaltete Leitungen (Mietleitungen, Direktrufnetze) und Zugangnetze wie WLAN und **DSL** (*Digital Subscriber Line*).

Im privaten Bereich findet man

- Sprachnetze überwiegend aus Nebenstellenanlagen
- Datennetze überwiegend auf Paketvermittlungsbasis und
- LANs überwiegend aus Ethernet, Token Ring, Token Bus und WLANs.

Die Digitalisierung der Netze ist heute weit fortgeschritten. Dies führt dazu, dass die Netze auf verschiedenen Ebenen miteinander verknüpft werden können. Da sie alle digitale Signale übertragen, geht auch die Zuordnung zu den einzelnen Diensten allmählich verloren.

In Abb. 2.2-1 ist die Entwicklung der Teilnehmerzahlen im Festnetz und im Mobilfunknetz aufgetragen. Inzwischen haben wir sowohl weltweit als auch in Deutschland mehr Mobilfunkteilnehmer als Festnetzanschlüsse. Die höchsten Wachstumsraten in den letzten Jahren waren jedoch bei Breitbandanschlüssen (**ADSL** - *Asymmetric Digital Subscriber Line*, Breitbandkabelmodem für bidirektionale Kommunikation und andere Technologien z. B. Satellitenkanäle) zu verzeichnen. Diverse Schätzungen zufolge lag das Wachstum bei über 50%. Weltweit werden Mitte 2004 rund 136 Millionen Breitbandanschlüsse geschätzt, davon 43% im Asien/Pazifikraum, 30% in Nordamerika und 22% in Europa. In Deutschland waren Mitte 2004 5,2 Millionen Breitbandanschlüsse (überwiegend DSL) zu verzeichnen [RegTP].

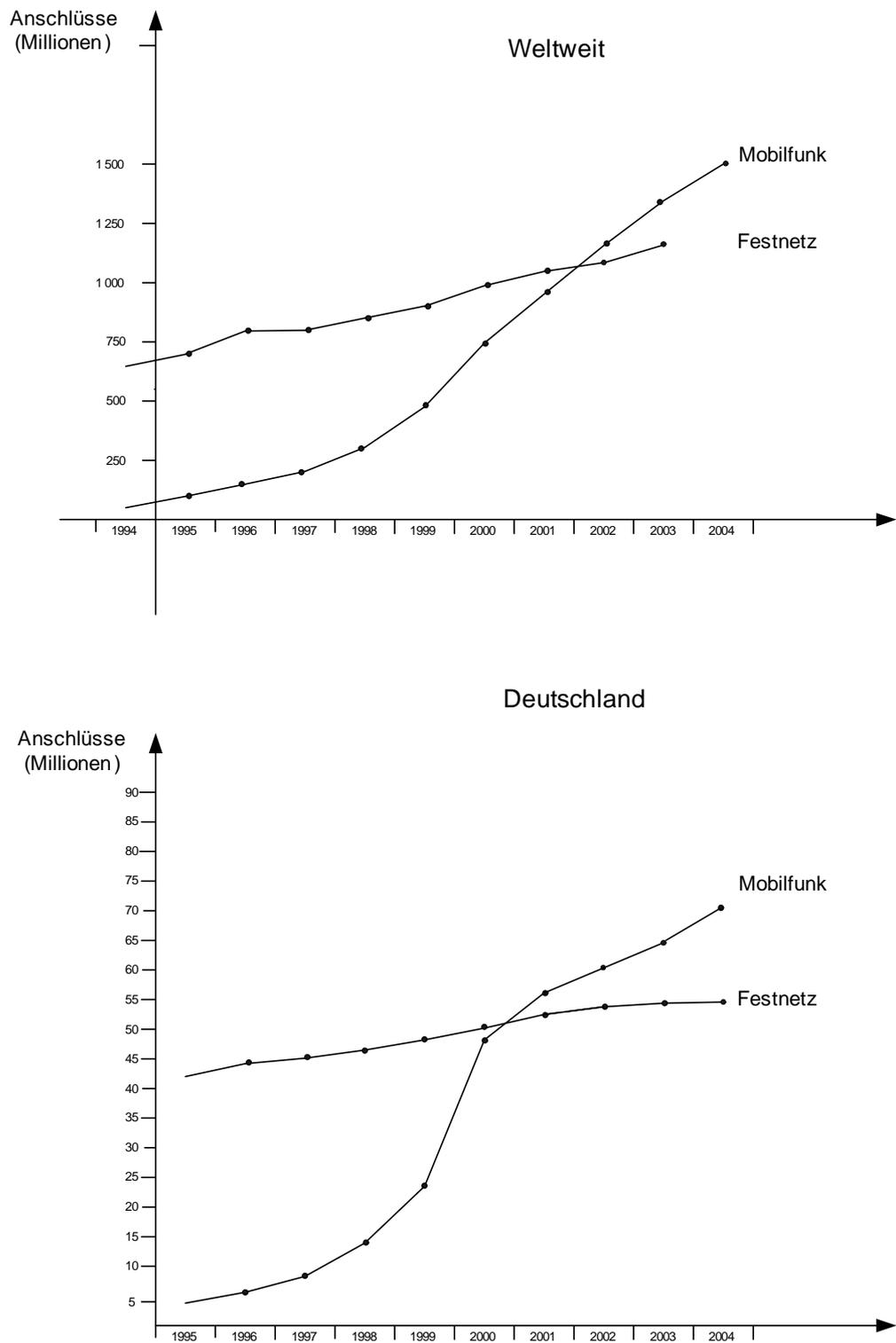


Abb. 2.2-1: Entwicklung der Festnetz- und der Mobilfunkanschlüsse in Deutschland [RegTP] und weltweit [ITU-T].

2.2.1 Fernsprechnetzt/ISDN

Fernsprechnetzt

Mit der Eröffnung der ersten Fernsprechzentrale in Berlin 1881, also vor fast 125 Jahren, begann der Aufbau des Fernsprechnetzes in Deutschland. 1993 versorgte das **Fernsprechnetzt** der Deutschen Bundespost ca. 37 Millionen Fernsprechhauptanschlüsse und ca. 12 Millionen Nebenanschlüsse. Es werden im Jahr etwa 160

Milliarden Gespräche abgewickelt - seit 1970 bundesweit im Selbstwähldienst. Ursprünglich wurde das Netz für analoge Sprachübertragung ausgelegt, bietet also für die Nutzsignalübertragung eine vermittelte Bandbreite von 300 bis 3.400 Hz und eine geringe Signalisierungskapazität von einigen bit/s. Die mittlere Verbindungsaufbauzeit beträgt ca. 10 Sekunden.

Die Digitalisierung des Fernsprechnetzes ist inzwischen soweit fortgeschritten, dass wir Mitte 2004 mehr digitale Sprachkanäle als analoge Sprachkanäle im Fernsprechnet hatten (27,5 Millionen digitale Kanäle und 27,1 Millionen analoge Kanäle [RegTP]). Das analoge Sprachsignal wird mit 8 kHz abgetastet, logarithmisch quantisiert und mit 8 bit digital codiert. Somit erhält man eine Bitrate von 64 kbit/s. Die mittlere Verbindungsaufbauzeit für einen digitalen 64 kbit/s Kanal beträgt weniger als eine Sekunde. Für die Signalisierung stehen 16 kbit/s am Teilnehmeranschluss zur Verfügung.

Übertragungstechnisch gesehen besteht das Netz aus drei Teilnetzen:

- dem Leitungsnetz,
- dem Richtfunknetz und
- dem Fernmeldesatellitennetz.

Es herrscht im Wesentlichen noch die analoge Niederfrequenz (NF)- und Trägerfrequenz (TF)- Technik, für den Ausbau wird jedoch ausschließlich die digitale Zeitmultiplextechnik **TDM** (*Time Division Multiplex*) eingesetzt. Im Vermittlungsbereich wurden die mechanischen Direktwählsysteme (Dreh-, Hebdreh- und Edelmetall-Motordrehwähler) zunächst durch analoge, speichergesteuerte, elektronische Wählsysteme abgelöst. Heute werden ausschließlich digitale, elektronische **PCM** (*Pulse Code Modulation*)-Zeitmultiplex Wählsysteme eingesetzt. Das Fernsprechnet ist hierarchisch aufgebaut und besteht aus dem Ortsnetz (bestehend aus Orts- und Endvermittlungsstellen), dem nationalen Fernnetz (Knoten-, Haupt- und Zentralvermittlungsstellen) und dem internationalen Fernnetz. Die acht Zentralvermittlungsstellen in den alten Bundesländern sind voll vermascht, während das restliche Netz eine Baumstruktur mit überlagerten Maschenzweigen (Querwegen) aufweist (Abb. 2.2-2). Die mittlere Anschlusslänge vom Teilnehmer (Endverzweiger) zur Ortsvermittlungsstelle beträgt 2,3 km. Heute werden im Fernsprechnet außer dem Fernsprechdienst verschiedene Text- und Datendienste (wie Internetdienste, Telefax, Datenübertragung über Modems, usw.) abgewickelt.

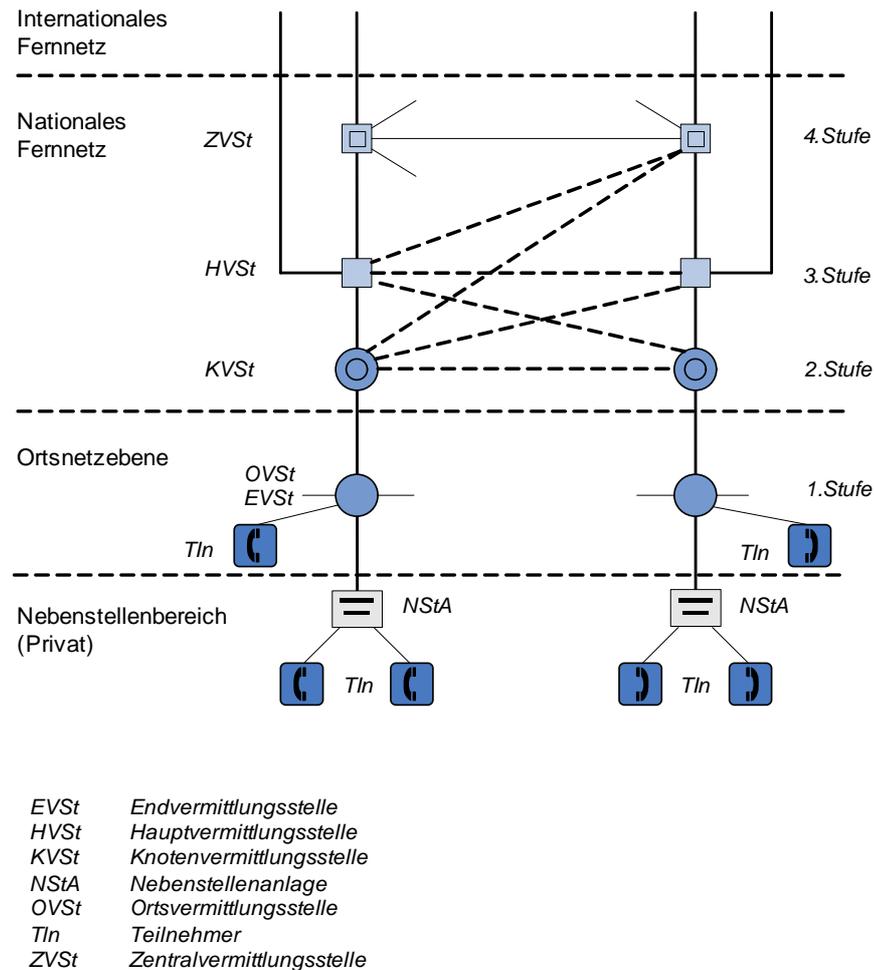


Abb. 2.2-2: 4-stufige Hierarchie des Fernsprechnetzes in den alten Bundesländern.

Unternehmensnetze

Parallel zu dem öffentlichen Fernsprechnetzen entstanden im privaten Bereich **Unternehmensnetze**, um den innerbetrieblichen Kommunikationsbedarf abzudecken. Zunächst war es der Bedarf an Sprachkommunikation. Private Unternehmen kauften oder mieteten sich Vermittlungsanlagen und bauten ihr betriebseigenes Infranetz für das innerbetriebliche Fernsprechen auf. Natürlich bestand auch ein Bedarf an Sprachkommunikation mit externen - an öffentlichen Netzen angeschlossenen - Teilnehmern. Daher wurden die privaten Vermittlungsanlagen über Amtsleitungen an öffentlichen Vermittlungsstellen angeschlossen. Heute kann man in vielen Ländern die an privaten Netzen angeschlossenen Teilnehmer aus dem öffentlichen Netz direkt anwählen (d. h. durchrufen). Private Vermittlungsanlagen werden **Nebenstellenanlagen**, die daran angeschlossenen Telefonapparate **Nebenstellen** genannt. In der Bundesrepublik werden Nebenstellenanlagen als Ausläufer des öffentlichen Fernsprechnetzes angesehen. Deren technischer Betrieb ist durch diverse technische und verwaltungsmäßige Vorschriften der (**BNetzA** - **Bundesnetzagentur** für Elektrizität, Gas, Telekommunikation, Post und Eisenbahnen, früher **RegTP** - **Regulierungsbehörde für Telekommunikation und Post**) geregelt. So werden z. B. Anlagen und Endgeräte von einer Zulassungsstelle überprüft und genehmigt.

Nebenstellenanlagen Nebenstellen

Private Netze für Sprachkommunikation haben in der Regel eine sternförmige Struktur. Die Nebenstellen werden über zwei Kupferadern mit gewöhnlich 0,6 mm

Aderdurchmesser an die Nebenstellenanlagen angeschlossen. Die Nebenstellenanlage besteht aus den Anschlusssätzen, an denen diverse Peripherie (Nebenstellen, Amtsleitungen, Bedienplätze und Konsolen) angeschlossen werden, dem Koppel-feld, in dem die gewünschten Verbindungen zwischen den Anschlüssen vorgenommen werden und der Steuerung, die den Verbindungsaufbau und -abbau steuert und in der die Leistungsmerkmale realisiert werden (Abb. 2.2-3).

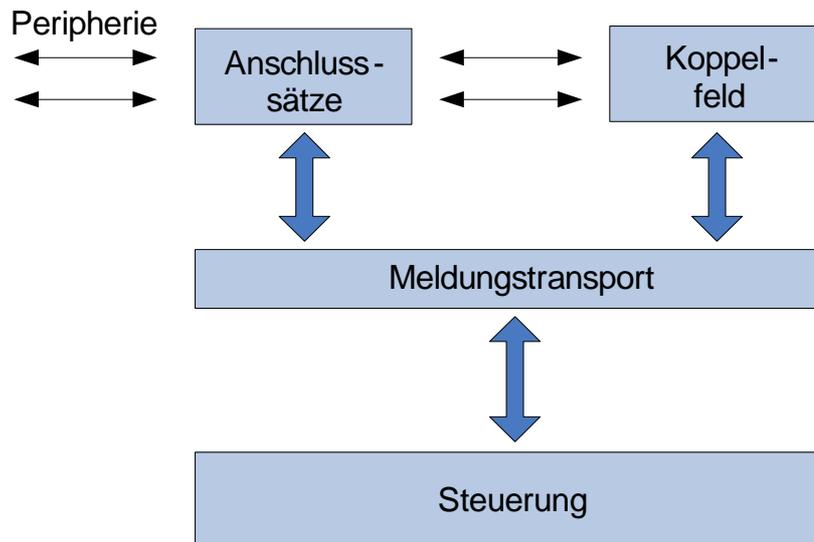


Abb. 2.2-3: Struktur von zentralgesteuerten Nebenstellenanlagen.

Grössere private Fernsprechnetze beinhalten mehrere Nebenstellenanlagen, die jeweils ihre sternförmigen Anschlussbereiche haben und auch untereinander verbunden sind. Solche Nebenstellenanlagen sind entweder hierarchisch geordnet (Haupt-Unteranlagentechnik) oder sie bilden einen Verbund von gleichberechtigten Nebenstellenanlagen und bieten in der Regel anlagenübergreifende Leistungsmerkmale wie Kurzwahl, Rückruf, usw. Die größten solcher Netze in Europa bestehen aus mehreren 10.000 Nebenstellen.

Die **Digitalisierung des Fernsprechnetzes** geht auf A.H. Reeves zurück, der bereits 1938 die PCM für Sprache festlegte und patentieren ließ. Erst durch den Fortschritt auf dem Gebiet der Halbleitertechnik konnten kostengünstige Schaltungen für die PCM-Codierung der Sprache (zunächst als Mehrkanalcodecs und letztlich als Einzelkanalcodecs) erstellt werden. In den frühen siebziger Jahren zeigte sich, dass im Fernbereich oft der Einsatz von PCM-Strecken wirtschaftlicher war, als der von NF- oder TF-Strecken. Erst in den späten siebziger Jahren zeigte sich weiter, dass auch PCM-Vermittlungen unter Verwendung von PCM-Strecken kostengünstiger wurden als herkömmliche Vermittlungen. Dies lag unter anderem in folgendem begründet. Für die PCM-Übertragung wird die Abtastung, Quantisierung, Codierung und Speicherung vorgenommen. Die Hinzunahme des wahlfreien Zugriffs beim Auslesen nach der Speicherung ermöglicht bereits eine Vermittlung. Man spricht deshalb auch von der Integration der Übertragungs- und der Vermittlungstechnik, oder von der Übermittlungstechnik. Heute werden neue Netze

Digitalisierung des Fernsprechnetzes

und Erweiterungen von bestehenden Netzen in der Regel in Digitaltechnik durchgeführt. Lediglich im Teilnehmeranschlussbereich (Teilnehmer bis zur OVSt oder NStA) bietet die NF-Technik die kostengünstigere Lösung. Die Tendenz zur Digitalisierung auch der Teilnehmeranschlussleitung begründet sich in den Vorteilen, die ein bis zum Teilnehmer volldigitales Netz (ohne analoge Zwischenstrecken) bietet. Diese wurden besonders deutlich, als bei den Feldversuchen 1979/80 in Berlin (unter dem Namen **DIGON** - **DIG**itales **O**rts**N**etz) gezeigt wurde, dass durch den Einsatz der Digitaltechnik drei simultane unabhängige Duplex-Kanäle (2 Nutzkanäle und ein Signalisierungskanal) auf der Teilnehmeranschlussleitung (d. h. auf zwei Adern) betrieben werden können.

Die Wirtschaftlichkeit vorausgesetzt, bietet ein volldigitales Netz folgende weitere Vorteile:

- Zwei Nutzkanäle zum Teilnehmer ermöglichen die gleichzeitige Nutzung von zwei Diensten.
- Da die Digitaltechnik zwischen Sprache, Text, Bild und Daten nicht unterscheidet, sondern nur Bitströme übermittelt, können die digitalen Kanäle und somit auch die übertragungs- und vermittlungstechnischen Einrichtungen für verschiedene Dienste genutzt werden (Diensteintegration).
- Der Signalisierungskanal bietet eine von Nutzkanälen unabhängige Möglichkeit der Signalisierung; so können z. B. bei zwei bestehenden Verbindungen weitere Verbindungswünsche über den Signalisierungskanal angezeigt werden.
- Hohe Übertragungskapazität, z. B. auf der Anschlussleitung zwei Nutzkanäle (jeweils 64 kbit/s) und ein davon unabhängiger Signalisierungskanal (16 kbit/s), ermöglicht die Realisierung neuer Dienste und Leistungsmerkmale. Analoge Netze bieten demgegenüber gewöhnlich 2,4 kbit/s bis 28,8 kbit/s vermittelte digitale Nutzkanäle (über Modems) und etwa 10 Zeichen/Sekunde Signalisierungskapazität (gewöhnlich im Sprachband).
- Wegen der Regenerierbarkeit der PCM-Signale hat ein volldigitales Netz eine bessere Sprachqualität und geringere Bitfehlerraten.
- Digitale Einrichtungen sind raum- und stromsparend.

Die Fülle der Vorteile, die ein volldigitales Netz bietet, führte zu einem Konzept für ein diensteintegrierendes digitales Kommunikationsnetz **ISDN**, das auf einem Teilnehmeranschlusskonzept mit zwei Nutzkanälen (B-Kanälen) von 64 kbit/s und einem Signalisierungskanal (D-Kanal) von 16 kbit/s basiert. Ende 1984 wurden CCITT-Empfehlungen⁵ (der Serie I) für das ISDN erstmals verabschiedet und 1988 erweitert. Weitergehende Festlegungen wurden in nationalen Richtlinien (1 TR6 der Telekom) und Europäischen Standards (Euro-ISDN von **ETSI** - *European Telecommunications Standards Institute*) getroffen.

5 Comité Consultatif International Télégraphique et Téléphonique. Internationales Normungsgremium, zuständig für öffentliche Netze. Seit 1993: ITU-T International Telecommunication Union -Telecommunication Standardisation Sector.

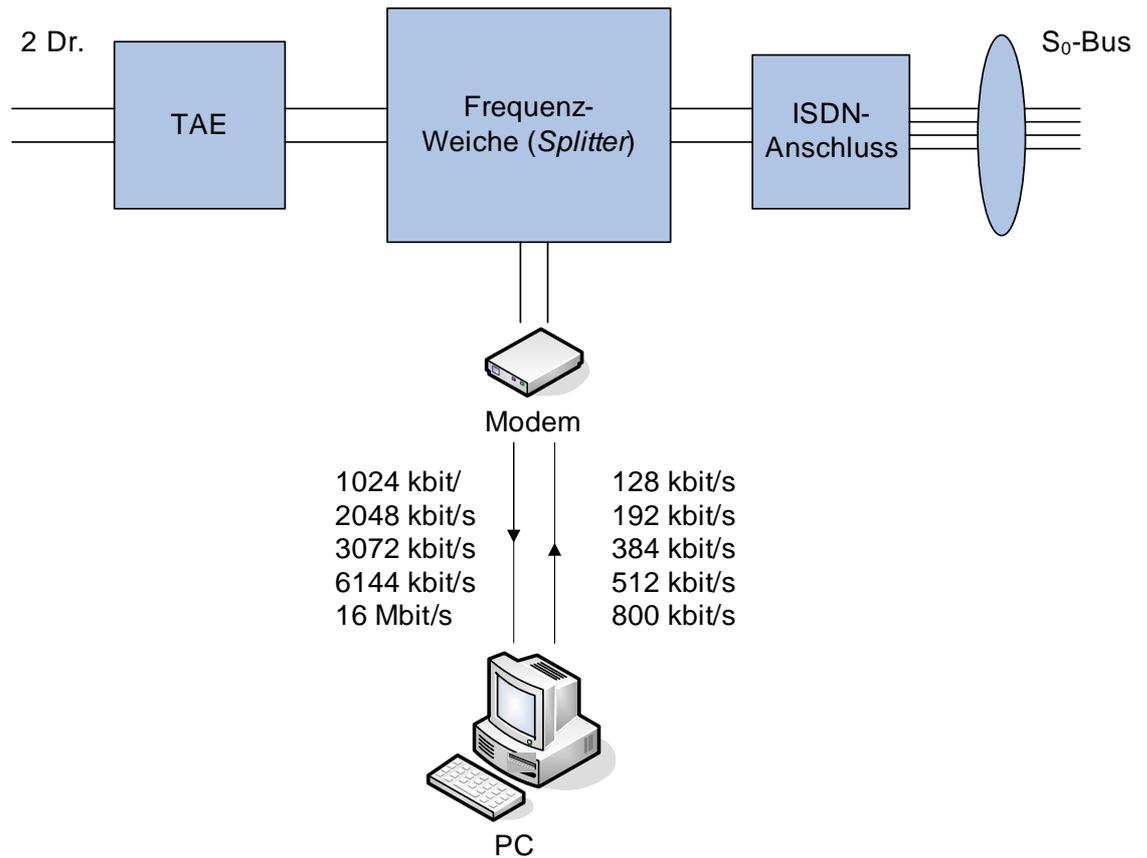


Abb. 2.2-5: Das Konzept der asynchronen digitalen Teilnehmeranschlusses ADSL.

Heute ist die ADSL-Technologie mit weltweit rund 85 Mio. Anschlüssen (Mitte 2004) die führende Breitbandtechnologie. Europa führt hier mit rund 33 % der Anschlüsse gefolgt von Asien/Pazifik 28% und Nordamerika 18%. In Deutschland waren im gleichen Zeitraum insgesamt rund 6 Mio. Anschlüsse geschaltet (Zahlen 2005 aus [EITO] und [IDC]).

Beispiel 2.2-1:

Die Vergrößerung der Übertragungsgeschwindigkeit im ADSL wollen wir am Beispiel der Übertragung eines Bildes im Umfang von 360 KByte verdeutlichen. Im herkömmlichen Telefonnetz mit Modem (2400 bit/s) wird das Bild in

$$360 \cdot 1024 \cdot 8 \text{ bit} \cdot \frac{1}{2400} \frac{\text{s}}{\text{bit}} = 1228,8 \text{ s} = 20,5 \text{ min}$$

übertragen. Das ISDN erbringt die gleiche Leistung in

$$360 \cdot 1024 \cdot 8 \text{ bit} \cdot \frac{1}{64000} \frac{\text{s}}{\text{bit}} = 46,08 \text{ s}$$

Ein ADSL-Anschluss mit 2048 kbit/s Abruftrate benötigt lediglich

$$360 \cdot 1024 \cdot 8 \text{ bit} \cdot \frac{1}{2048 \text{ kbit}} \frac{\text{s}}{\text{bit}} = 1,44 \text{ s.}$$

Außer von der **Digitalisierung der Nutz- und Signalisierungskanäle**, die wir bisher betrachtet haben, spricht man gelegentlich auch von der **Digitalisierung der Steuerung**. Gemeint ist der Einsatz der digitalen Halbleitertechnologie in Steuerungen der Fernmeldeanlagen. Elektromechanische Steuerungen, wie sie in den früheren Jahren der Fernmeldetechnik eingesetzt wurden, sind heute noch in Betrieb. In den sechziger und siebziger Jahren wurden zentrale (Großrechner-) Steuerungen für Vermittlungsanlagen wie **EWSO (Elektronisches Wählsystem für Ortsverkehr)** von Siemens eingesetzt. Ab den siebziger Jahren wurden zunehmend neben dem Großrechner für die zentrale Steuerung Mikrorechner zur Verrichtung einzelner Aufgaben hinzugenommen. In den letzten Jahren werden vermehrt Systeme entworfen, deren Steuerungen aus lose gekoppelten, dezentral angeordneten Mikrorechnern im Verbund bestehen (z. B. System 12 von SEL).

Digitalisierung der Nutz- und Signalisierungskanäle
Digitalisierung der Steuerung

Der Begriff **Diensteintegration** kennzeichnet in erster Linie die Tatsache, dass verschiedene Dienste in einem Kommunikationsnetz angeboten werden. Er impliziert aber auch, dass die Dienste möglichst gleichartig (homogen) betrieben bzw. aneinander angeglichen werden. So erwartet man möglichst gleiche Benutzeroberflächen, Güte, Zeitverhalten, Dienstabwicklung und Leistungsmerkmale. Seit Mitte der achtziger Jahre werden in verschiedenen Ländern Breitband-Versuchsnetze (in der BRD **BIGFON (Breitband Integriertes Glasfaser Fernmelde Ortsnetz)**, **BIG-FERN (Breitband Integriertes Glasfaser FERNnetz)** und Berkom in Berlin) installiert. Soweit es sich um Kommunikationsnetze für Individualkommunikation handelt, werden in diesen Netzen auch dieselben Dienste wie im ISDN angeboten. Zu den ISDN-Diensten kommen typische Breitbanddienste wie Bildtelefonie und Bewegtbildübertragung hinzu.

Diensteintegration

Ursprünglich wurden **Breitbandnetze** auf der Basis von Zeitmultiplexkanälen mit hohen Bitraten entworfen und aufgebaut. Das **VBN (Vermitteltes Breitband Netz)** das die Telekom anfang der neunziger Jahre betrieb war nach diesem Prinzip aufgebaut. Für den Videokonferenzdienst konzipiert, wurde es zunächst für 140 Mbit/s ausgelegt. Aus Kostengründen wurde es dann nur noch für 2 Mbit/s ausgebaut. In den späten 80er Jahren ermöglichte der technologische Fortschritt die Realisierung einer neuen schnellen Paketvermittlungstechnik unter Verwendung von kleinen Paketen fester Länge (Zellen genannt). Wesentlicher Vorteil dieser Technik ist die Unabhängigkeit von der festen Bitrate. Sie ermöglicht die Ausnutzung der Bitratenschwankungen (*Burstiness*) der Nutzdaten und die Unterstützung verschiedener Dienste mit unterschiedlichsten Bitraten. Bereits 1988 wurde von CCITT eine solche auf festen Zellen von 53 Bytes basierende Technik, die **ATM (Asynchronous Transfer Mode)**-Technik als die künftige Übermittlungstechnik für das **Breitband-ISDN** empfohlen.

Breitbandnetze
VBN

Burstiness

ATM

B-ISDN

Heute wird die ATM-Technik sowohl im lokalen Bereich (LAN) als auch im Weitverkehrsbereich (**WAN - Wide Area Network**) für die breitbandige vermittelte verbindungsorientierte Hochgeschwindigkeitskommunikation eingesetzt.

Klassifizierung von Fernmeldeanlagen

Die angesprochenen Kriterien der Digitalisierung und der Dienstintegration bieten eine Möglichkeit für die **Klassifizierung von Fernmeldeanlagen** in verschiedenen Generationen (Abb. 2.2-6).

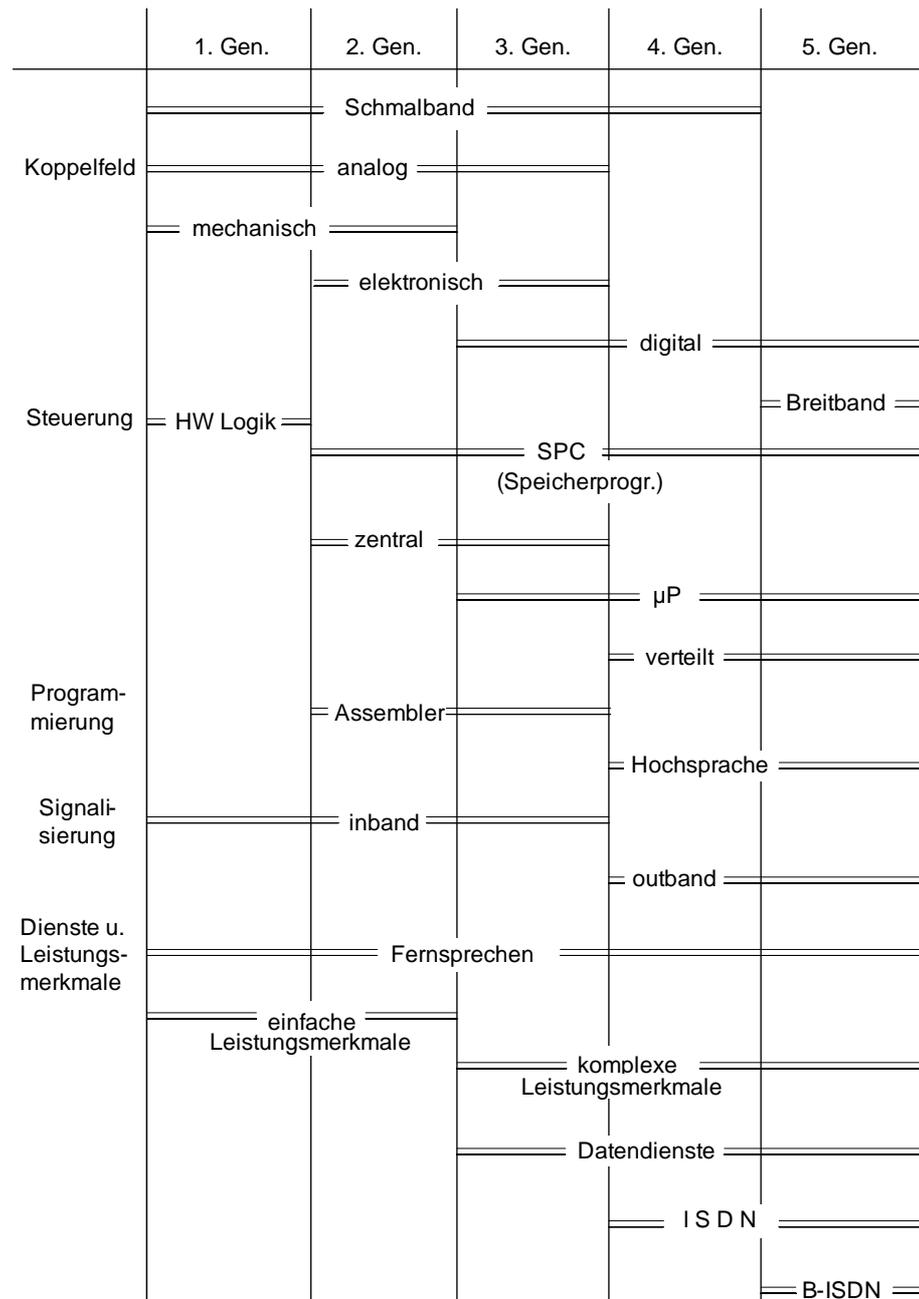


Abb. 2.2-6: Fernmeldeanlagen der verschiedenen Generationen.

Die Anlagen der ersten Generation hatten ein analoges, mechanisches Schmalband-Koppelfeld, eine verdrahtete Logik als Steuerung, die Signalisierung im Sprachband und wurden für das Fernsprechen mit einfachen Leistungsmerkmalen (Intern-,

Externverkehr) verwendet. Charakteristisch für die zweite Generation war die speicherprogrammierte zentrale Steuerung, die in Assembler programmiert wurde; im Koppler wurden die ersten elektronischen Koppelpunkte verwendet. In den Fernmeldeanlagen der dritten Generation findet man digitale (PCM) Raum- und Zeitkoppelfelder, Mikrorechner für Einzelaufgaben, komplexe Fernsprechleistungsmerkmale und einzelne Datenanwendungen. Die vierte Generation, die heute überwiegend eingesetzt wird, hat ausschließlich PCM Raum- und Zeitkoppelfelder, eine mehr oder weniger verteilte Mikrorechnersteuerung mit Anwendersoftware in einer Hochsprache (C oder Chill) und bietet eine gewisse Dienstintegration (meist ISDN-Teilnehmeranschlüsse), so dass sie als eine digitale dienstintegrierende Kommunikationsanlage bezeichnet wird. Die fünfte Generation basiert auf Glasfaser, verwendet eine zellenbasierte Technik wie ATM und unterstützt Breitbanddienste.

2.2.2 Funknetze

Zu den Funknetzen für Individualkommunikation gehören der Bündelfunk, der Personenfunkruf, der Mobilfunk und der Satellitenfunk.

Der **Betriebsfunk** wird für die innerbetriebliche Kommunikation, überwiegend zwischen mobilen Teilnehmern und einer Einsatzzentrale verwendet. Typische Beispiele sind Taxiunternehmen, Flottensteuerung und Einsatzsteuerung bei der Feuerwehr. Die Knappheit an Funkfrequenzen für den Betriebsfunk führte zur gemeinsamen Nutzung einer Frequenz durch mehrere Unternehmen und damit verbundenen Problemen wie Wartezeiten, Mithören usw. Als Nachfolgesysteme des Betriebsfunks werden in Deutschland seit Oktober 1990 Lizenzen zum Aufbau und Betrieb von **Bündelfunknetzen** an private Betreiber vergeben. Im Gegensatz zum Betriebsfunk, bei dem die Nutzer auch Besitzer der Infrastruktur waren, werden Bündelfunknetze überwiegend als Dienstleistung für Dritte betrieben. Typisches Merkmal von Bündelfunk ist, dass die Nutzung eines Bündels von Funkkanälen durch mehrere Gruppen von Nutzern möglich ist. Einem Teilnehmer wird erst dann ein freier Kanal aus einem Bündel von Funkkanälen zugeteilt, wenn dieser einen Gesprächswunsch signalisiert. Dies verbessert einerseits die Kanalauslastung, sichert andererseits die Vertraulichkeit des Gespräches. Die von dem Benutzer erzeugte Information wird zunächst über einen Frequenzkanal (*uplink*) zur Feststation übertragen, dort auf einen zweiten Frequenzkanal (*downlink*) umgesetzt und an die übrigen gewählten Teilnehmer der Gruppe wie beim Rundfunk abgestrahlt. Bündelfunknetze werden regional betrieben, wobei inzwischen auch eine überregionale Verknüpfung und der Übergang zu anderen Netzen möglich ist. Bündelfunk wird von zahlreichen Netzbetreibern mit Bündelfunklizenz angeboten. Für den Bündelfunk gibt es verschiedene Standards, in Europa der digitale Standard **TETRA** (*Trans European Trunked Radio Access*) von ETSI.

Betriebsfunk

Bündelfunk

Funkrufdienste wie Personenruf (Paging), Eurosignal, Cityruf, **ERMES** (*European Radio Message System*), Scall, usw. haben durch die Möglichkeit Kurznachrichten (**SMS**) über Mobilfunk und inzwischen auch über das Festnetz zu

Funkrufdienste

SMS

versenden erheblich an Bedeutung verloren.

Beispiel 2.2-2:

Die Adresse beim Cityruf besteht aus 21 Bit. Somit können $2^{21} \approx 2$ Millionen Empfänger adressiert werden. Bei einer Übertragungsrate von 512 bit/s benötigt eine 40 Byte Nachricht eine Sendezeit von 0,625 s; hinzu kommt die verkehrsunabhängige Wartezeit und die im Vergleich dazu vernachlässigbaren Bearbeitungs- und Ausbreitungszeiten.

Beispiel 2.2-3:

Für die Übermittlung von einer SMS aus 160 Zeichen im Signalisierkanal von 9,6 kbit/s benötigt man

$$160 \cdot 7 \text{ bit} \cdot \frac{1}{9,6 \text{ kbit}} \frac{s}{\text{bit}} = 0,12 \text{ s}$$

- Mobilfunknetz** Das erste für das Telefonieren konzipierte **Mobilfunknetz** in Deutschland, das **A-Netz**, wurde 1958 in Betrieb genommen. 1972 folgte das **B-Netz**. Beide Systeme waren analog und verwendeten die Frequenzmodulation. Während im A-Netz per Hand vermittelt wurde, ermöglichte das B-Netz die Selbstwahl. Das A-Netz ist seit 1977, das B-Netz seit 1994 nicht mehr in Betrieb. Das **C-Netz** ging 1986 in Betrieb. Es handelte sich dabei um ein analoges zelluläres Netz, das bei 450 MHz betrieben wurde. Für Sprache wurde die Phasenmodulation, für Signalisierdaten die Frequenzumtastung (**FSK - Frequency Shift Keying**) verwendet. Das Prinzip eines **zellulären Netzes** beruht darauf, dass das zu versorgende Gebiet in viele kleine Zellen unterteilt und mit entsprechend zugeordneten Frequenzen versorgt wird. Durch eine niedrige Sendeleistung werden die Zellradien absichtlich begrenzt. Hierdurch können die in einer Zelle verwendeten Frequenzen in einer anderen Zelle wieder verwendet werden (Abb. 2.2-7). Zellulare Netze erlauben auf diese Weise eine starke Mehrfachnutzung von Frequenzen und dadurch eine höhere Teilnehmerzahl. Mitte 1993 versorgte das C-Netz gut 800.000 Teilnehmer, die größte Teilnehmerzahl die erreicht wurde. Seitdem waren die Zahlen zu gunsten des digitalen Mobilfunknetzes rückläufig. Ende 2000 wurde das C-Netz abgeschaltet.
- A-Netz**
- B-Netz**
- C-Netz**
- zellulare Netze**

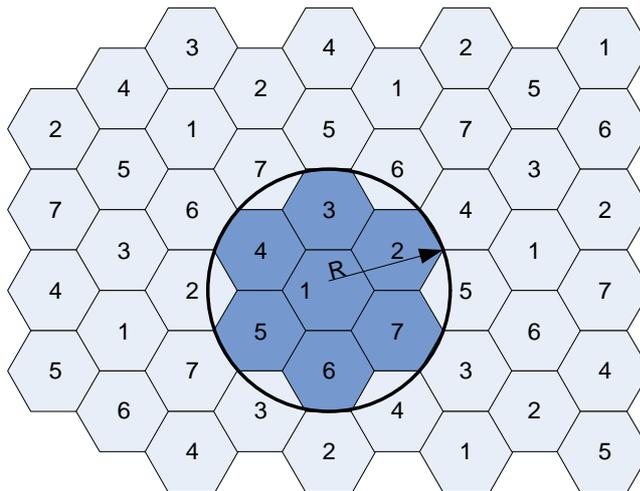
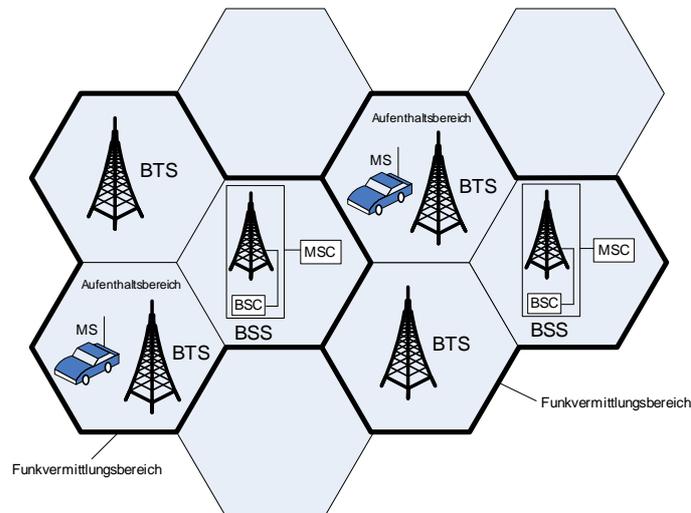


Abb. 2.2-7: Zellularer Mobilfunk: Frequenzverteilung im Siebener-Zellen-Cluster.

Die Standardisierung des digitalen, zellularen Mobilfunks **GSM** geht auf eine 1982 bei der **CEPT** (*Conference Européennes des Administrations des Postes et des Telecommunications*) gebildete Gruppe **GSM** (*Groupe Speciale Mobile*) zurück. 1984 beschloss sie, digitale Übertragungsverfahren mit Analogverfahren zu vergleichen und entschied sich 1986 aus Gründen der Spektromeffizienz, der leichten Verschlüsselbarkeit, der Realisierbarkeit neuer Leistungsmerkmale und der günstigen Kosten im Hinblick auf einen Massendienst, für das jetzt weltweit verwendete digitale Verfahren. **GSM**

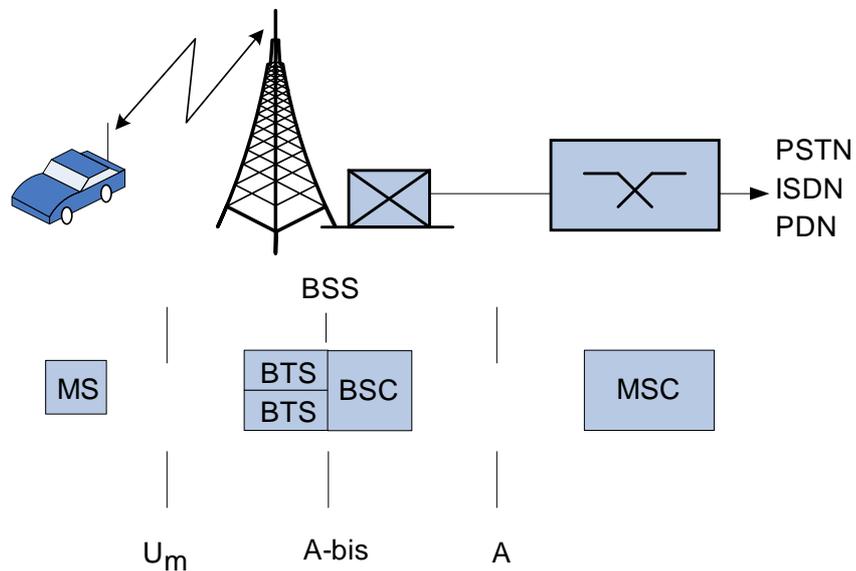
Die Groupe Speciale Mobile wurde 1989 von ETSI übernommen. Im März 1990 wurden umfangreiche Empfehlungen festgelegt und in Empfehlungsserien eingegliedert, freigegeben. Heute wird der GSM-Standard in 650 Netze in 210 Ländern weltweit unterstützt GSM (siehe <http://www.gsmworld.com/>).

In Deutschland werden seit Mitte 1992 zwei Netze (D-Netze) nach dem GSM 900 Standard (900 MHz Funkfrequenz) betrieben und seit Mai 1994 ein weiteres Netz (E-Netz) nach dem GSM 1800 Standard (1800 MHz Funkfrequenz). Das D1-Netz wird von der Telekom-Töchter T-Mobile, das D2-Netz von Vodafone und das E1-Netz vom E-Plus-Konsortium betrieben. Die Telekom erhielt die Lizenz seinerzeit direkt vom Bundestpostministerium. Die D2- und E1-Lizenzen wurden im Wettbewerb vergeben. Für die D2-Lizenz gaben 10 Bewerber jeweils ein Angebot ab. Mit der technischen Bewertung der Angebote waren die Professoren der FernUniversität, Kaderali, Kittel und Walke beauftragt. Den Zuschlag erhielt seinerzeit Mannesmann Mobilfunk (heute Vodafone). Für die E-1 Lizenz gingen zwei Angebote ein. Mit der technischen Bewertung waren Professor Kaderali von der FernUniversität Hagen und Professor Vary von der RWTH Aachen beauftragt. Den Zuschlag erhielt seinerzeit das E-Plus-Konsortium. Wie wir gesehen haben, haben heute die GSM-Netze mehr Teilnehmer in Deutschland als das Festnetz.



MS	Mobilstation (Mobile Station)
BTS	Sende-/Empfangsstation (Base Transceiver Station)
BSS	Funkfeststation (Base Station System)
MSC	Mobil-Vermittlung (Mobile Switching Center)
BSC	Funkfeststationssteuerung (Base Station Controller)

Abb. 2.2-8: Versorgung der Zellen durch Sende-/Empfangsstationen und der Funkvermittlungsbereiche durch Mobil-Vermittlungsstellen.



MS	Mobilstation (Mobile Station)
BTS	Sende-/Empfangsstation (Base Transceiver Station)
BSS	Funkfeststation (Base Station System)
BSC	Funkfeststationssteuerung (Base Station Controller)
MSC	Mobil-Vermittlung (Mobile Switching Center)
PSTN	Öffentliches Fernsprechnet (Public Switched Telephone Network)
PDN	Öffentliches Datennetz (Public Data Network)

Abb. 2.2-9: GSM Mobilfunk Systemkonzept.

Wir wollen uns nun kurz die Struktur des GSM-Netzes näher ansehen.

Funktional besteht ein GSM-Netz aus dem Funknetz, dem Vermittlungsnetz und dem Betriebs- und Unterhaltungsnetz. Die organisatorisch-räumliche Struktur besteht aus (s. Abb. 2.2-8 und Abb. 2.2-9)

- der Funkzelle, die jeweils von einer Sende-/Empfangsstation **BTS** (*Base Transceiver Station*) versorgt wird,
- der Funkfeststation **BSS** (*Base Station System*), die jeweils aus einer Funkstationssteuerung **BSC** (*Base Station Controller*) und dem zugehörigen BTS besteht und
- dem Funkvermittlungsbereich, der von einer Mobil-Vermittlungsstelle **MSC** (*Mobile Switching Center*) bedient wird.

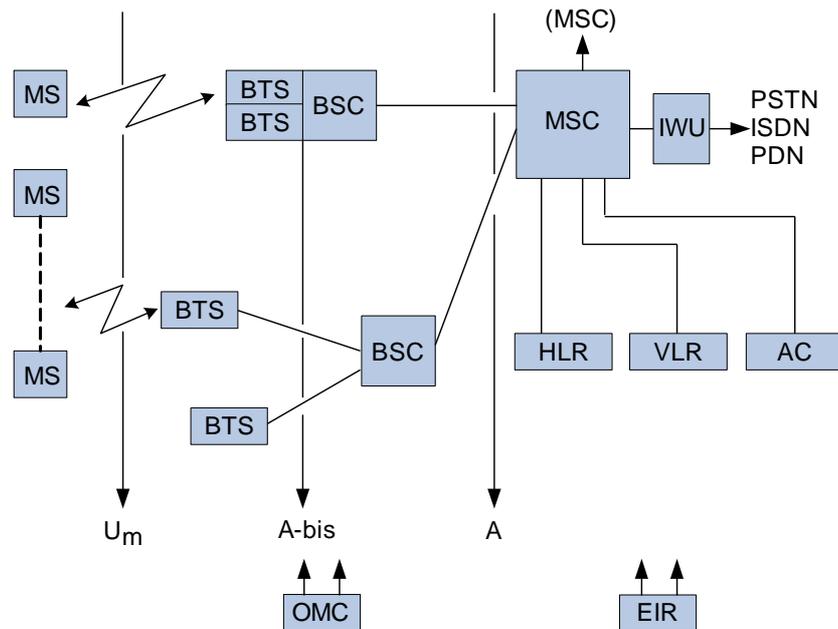
Einer Mobil-Vermittlungsstelle werden die folgenden Einrichtungen zugeordnet:

- eine Heimdatei **HLR** (*Home Location Register*)
- eine Besucherdatei **VLR** (*Visitor Location Register*)
- ein Geräte-Identifizierungsregister **EIR** (*Equipment Identification Register*) und
- eine Authentifikationszentrale **AC** (*Authentication Center*).

Für das GSM-Mobilfunknetz werden unterschiedliche **Mobilstationen** (Endgeräte) angeboten, so z. B. Autotelefone und Handys. Die Sendeleistung der Mobilstation beträgt je nach Typ 1 bis 20 Watt, wobei die E-Netze eine maximale Leistung von 1 Watt und D-Netze von 2 Watt für Handys haben. Die Regelung der Sendeleistung erfolgt zwischen 2 und 0,003 Watt in D- und 1 Watt und 0,001 Watt in E-Netzen.

Mobilstationen

In den GSM-Spezifikationen werden alle Schnittstellen (Abb. 2.2-10) zwischen den funktionalen Einheiten festgelegt, um Kompatibilität zu gewährleisten. Am Endgerät stehen 13 kbit/s für den Nutzkanal und eine variable Bitrate für die Signalisierung zur Verfügung. Der Nutzkanal kann noch halbiert werden, um den Einsatz von Sprachcodecs mit halber Bitrate (*Half rate Codecs*) zu ermöglichen. Abschließend wollen wir die beiden wichtigsten Leistungsmerkmale in zellularen Mobilfunknetzen kennenlernen: Roaming und Handover.



MS	Mobile Station	MSC	Mobile Switching Center
BTS	Base Transceiver Station	HLR	Home Location Register
BSC	Base Station Controller	VLR	Visitor Location Register
EIR	Equipment Identification Register	OMC	Operations and Maintenance Center
AC	Authentication Center	IWU	Interworking Unit

Abb. 2.2-10: GSM Schnittstellen an den Funktionalen Einheiten.

Roaming Als **Roaming** bezeichnet man in Mobilfunknetzen die Unterstützung der Erreichbarkeit eines Teilnehmers an einem beliebigen Ort im Netz ohne Kenntnis des Aufenthaltsortes. Zunächst wird jedem Teilnehmer ein Heimatort zugeordnet und er wird in die Heimatdatei (HLR) mit seiner eindeutigen Rufnummer und anderen Daten wie Leistungsmerkmalen, Berechtigungen usw. eingetragen. Hält er sich nun an einem anderen Ort auf, so stellt die Mobilstation (MS) dies durch Auswertung der Kennung, die durch die Feststation (BSS) gesendet wird, fest. Die Mobilstation (MS) erwirkt nun, dass der Ortswechsel in die Heimatdatei (HLR) eingetragen wird. Gleichzeitig wird er am besuchten Ort in der Besucherdatei (VLR) mit allen erforderlichen Daten geführt, so dass er ausgehende Rufe erwirken kann. Kommt nun ein Ruf für ihn an, so erkundigt sich zunächst die Mobilvermittlungsstelle (MSC) des Rufenden (beim Ruf aus einem anderen Netz übernimmt dies die Übergangsvermittlungsstelle - Gateway MSC) bei der Heimatdatei (HLR) nach dem Aufenthaltsort des Teilnehmers, konsultiert die Besucherdatei (VLR) dort und schaltet dann den Nutzkanal zum Aufenthaltsort durch, falls der Teilnehmer erreichbar ist. Die Abläufe zeigen, dass dieses Leistungsmerkmal einen leistungsfähigen Signalisierungskanal erfordert - bei den GSM-Netzen ist das Signalisierungssystem Nr. 7 hierfür vorgesehen.

Handover Als **Handover** bezeichnet man das automatische Nachführen bzw. Umschalten einer bestehenden Verbindung bei Funkzonenwechsel. Ein Teilnehmer kann somit beispielsweise mehrere Funkzellen überqueren, ohne sein Telefongespräch zu unterbrechen. Das Leistungsmerkmal Handover wird in drei Phasen abgewickelt.

Zunächst wird die Notwendigkeit eines Handovers durch die Messung der Signalleistung festgestellt. Die Mobilvermittlungsstelle (MSC) vergleicht die Messergebnisse der in Frage kommenden Zellen und entscheidet aufgrund der Ergebnisse und ggf. der Anzahl freier Kanäle, ob ein Handover eingeleitet wird. Falls sie sich zur Einleitung des Handovers entscheidet, vermittelt sie den Ruf zur ausgewählten Basisstation (BS) und teilt ihr mit, auf welchen Kanal sie umzuschalten hat. Das Leistungsmerkmal erfordert eine schnelle Signalisierung. Kleine Zellen und hohe Geschwindigkeiten führen zu Problemen beim Handover. Deshalb wird häufig eine gemischte Zellenstruktur, bestehend aus Makro-, Mikro- und Pikoellen, mit der Möglichkeit der Überdeckung von Zellen (Bildung von Umbrella-Zellen) verwendet. In dieser Struktur können den sich langsam bewegenden oder stillstehenden Teilnehmern kleine Zellen, schnellbewegenden Teilnehmern größere Zellen zugeteilt werden, um somit die Problematik zu entschärfen.

Der Beginn der Systementwicklung der GSM-Netze liegt nun gut zwanzig Jahre zurück. In der Zwischenzeit wurden zahlreiche Systeme der dritten Generation **3GS** (*3rd Generation Systems*) entwickelt. Diese sind gekennzeichnet durch höhere Frequenzen und ebenso höhere Bitraten als bei GSM-Systemen. Mitte 2000 wurden in Deutschland Lizenzen für den Aufbau der Mobilfunknetze der dritten Generation **UMTS** (*Universal Mobile Telecommunication System*) für insgesamt 100 Mrd. DM (aus heutiger Sicht viel zu teuer) an sechs Betreiberkonsortien versteigert. Zwei der Betreiber haben bereits aufgegeben, so dass heute vier Betreiber (E-Plus, o2, T-Mobile und Vodafone) ihre Netze aufbauen. UMTS verwendet die (**WCDMA** - *Wideband Code Division Multiple Access*)-Technologie im 1900 bis 2200 MHz Frequenzbereich (genauer downlink 1920-1980 MHz, uplink 2110-2170 MHz) und bietet eine variable Bitrate bis zu 2 Mbit/s. Die ersten Netze gingen Mitte 2004 in Deutschland in Betrieb und bieten zunächst eine maximale Bitrate von 384 kbit/s. Die Netzbetreiber haben sich zwar zunächst auf die Versorgung von größeren Städten konzentriert, sie haben aber alle die der Versorgung betreffenden Lizenzauflagen erfüllt. Nach Angaben von **BITKOM** (**B**undesverband **I**nformationswirtschaft, **T**ele**k**ommunikation und neuen Medien) gab es Ende 2004 rund 250.000 UMTS-Nutzer in Deutschland. Weltweit lag die Zahl der UMTS-Nutzer Ende 2004 bei 18 Millionen, die Hälfte davon in Japan.

Ein **WLAN** ist ein lokales Funknetz für breitbandige Computer-Verbindungen, in der Regel nach einem Standard der IEEE 802.11-Familie. In Abb. 2.2-11 ist eine typische Konfiguration eines WLANs in einem privaten Haushalt dargestellt. Es können mehrere Endgeräte (PCs, Notebooks, PDAs) über entsprechende Adaptoren (Notebookkarten oder **USB** - *Universal Serial Bus*-Adaptoren) drahtlos oder aber auch drahtgebunden an den Router angeschlossen werden. Sie teilen alle gemeinsam den breitbandigen Internetanschluss über ADSL.

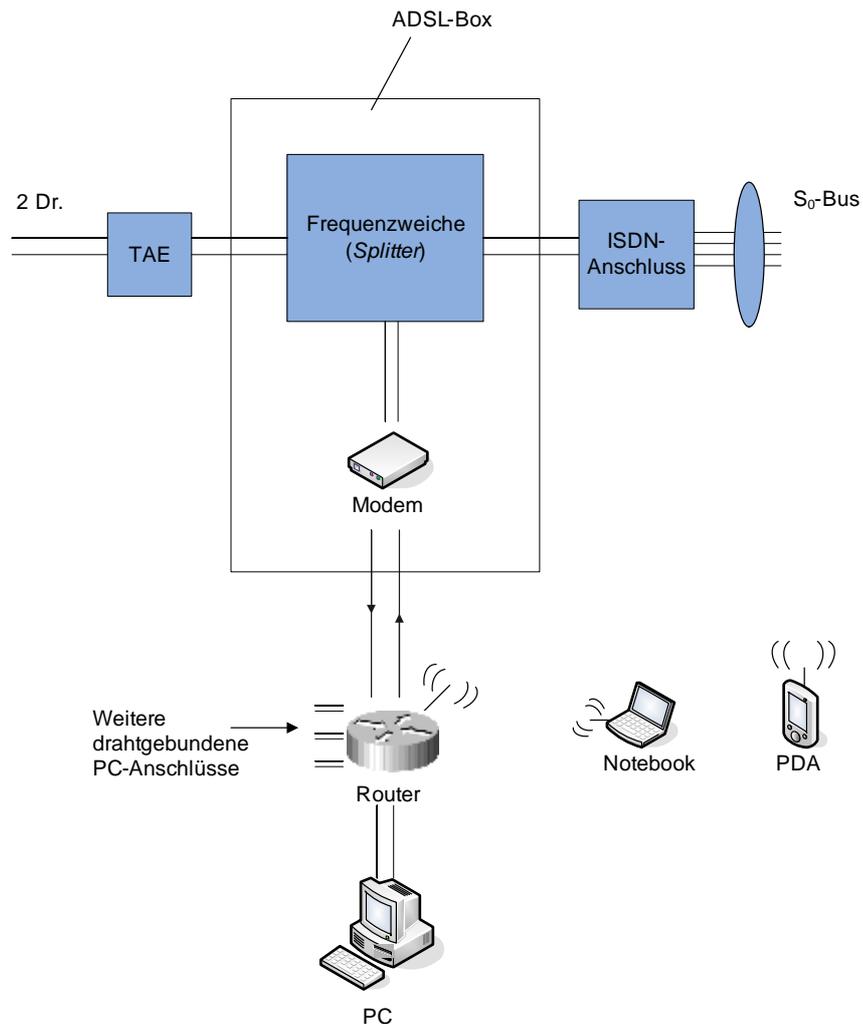


Abb. 2.2-11: Typische WLAN-Konfiguration am privaten DSL-Anschluss

Hotspots WLANs werden auch eingesetzt um einen drahtlosen (häufig kostenpflichtigen) Internetzugang an öffentlichen Orten (den sogenannten **Hotspots**) wie Hotels, Cafés, Tagungsstätte, Flughäfen, usw. anzubieten. Ende 2004 waren weltweit gut 26500 Hotspots aktiv, davon etwa die Hälfte in Europa, dann wiederum 5600 in Deutschland und rund 10.000 in Nordamerika (siehe <http://www.hotspot-locations.com/>). Deutschland nimmt somit nach den USA eine Spitzenstellung ein.

IEEE 802.11 WLANs der Familie 802.11 arbeiten in verschiedenen lizenzfreien Frequenzbereichen, so z. B. bei 2,4 bzw. 5,1 GHz. Sie haben eine Reichweite von 30 bis 200 Metern und Bitraten von 2 bis 54 Mbit/s bei einer Sendeleistung von 0,1 bis 1 Watt. Herstellergebundene Geräte mit nicht standardisierten Verfahren erreichen sogar bis zu 125 Mbit/s. Bei den Angaben handelt es sich um Bruttobitraten. Nettobitraten liegen bei gut 50% der angegebenen Werten. Die tatsächlich verfügbare Bandbreite wird zwischen den angeschlossenen Geräten aufgeteilt. Dennoch sind die verfügbaren Bandbreiten erheblich höher als bei UMTS. WLANs werden trotzdem nicht als Konkurrenz, eher als Ergänzung zu UMTS gesehen, da sie eine sehr begrenzte Reichweite haben. Erst in Verbindung mit ADSL-Anschlüssen erreichen sie die erforderliche Reichweite.

WIMAX Anders ist es bei der Weiterentwicklung der WLANs zu **WIMAX** (*Wireless*

Microwave Access) nach der IEEE .16-Familie. WIMAX Geräte arbeiten im 2 GHz bis 6 GHz bzw. 11 GHz Bereich und haben eine Reichweite von mehreren Kilometern bei Bitraten von 30 bis 70 Mbit/s. WIMAX-Geräte sind zurzeit in der Erprobungsphase und dürften nächstes Jahr auf den Markt kommen.

RFID (*Radio Frequency Identification*) ist eine weitere Technologie deren Einsatz in den letzten Jahren massiv zugenommen hat. Im einfachen Fall handelt es sich um einen Ersatz für herkömmliche Strichcodes und ermöglicht die Datenerfassung ohne Sicht- und Berührungskontakt. Die technische Infrastruktur eines RFID-Systems besteht aus einem Datenträger oder Transponder (auch Funketikett oder *Tag* genannt), einem Lese oder Lese/Schreib-Gerät (*Reader*) und einer softwaremäßigen Anbindung an einen Rechner, ein Kassen- oder Warenwirtschaftssystem. Daten (z.B für einen Artikel im Supermarkt) werden auf dem Transponder abgelegt und können per Radiowellen (übliche Frequenz in Europa 869 MHz und 0,5 Watt Sendeleistung) ausgelesen werden. Es gibt sehr unterschiedliche RFID-Systeme. So können die Transponder so klein sein, dass sie zur Identifikation von Banknoten oder von Kleidungsstücken (in der Kleidung eingelassen) eingesetzt werden können. Sie können auch wesentlich größer sein, wenn sie z. B. zur Identifikation von Lastwagen oder Schiffskontainer eingesetzt werden. Die Speicherkapazität kann lediglich einige Bits bis mehrere Megabytes betragen. Transponder können passiv (keine eigene Stromversorgung) oder aktiv, lediglich lesbar (d. h. nur einmal beschreibbar) oder mehrfach beschreibbar sein. Die Reichweite kann von einigen Centimetern bis zu mehreren hundert Metern betragen. Der RFID-Technologie werden hohe Wachstumsraten verbunden mit hoher wirtschaftlicher Bedeutung zugesagt. Auf der anderen Seite sind zahlreiche datenschutzrechtliche Fragen offen, die es noch angemessen zu lösen gilt.

RFID

Am 4. Oktober 1957, also vor fast fünfzig Jahren, wurde von der UdSSR Sputnik I als erster Satellit in die Erdumlaufbahn gebracht. Seitdem wird die Funkübertragung, also der **Satellitenfunk**, sowohl für die Satellitensteuerung als auch für die Kommunikation allgemein verwendet. Am 23. Januar 1962 wurde die erste Fernsehendung von wenigen Minuten von USA nach Europa über dem kommunikationssatellit Telestar I übertragen. Seitdem werden Satelliten sowohl für Rundfunk- und Fernsehversorgung als auch für Individualkommunikation eingesetzt. Hierbei kann man prinzipiell zunächst zwischen **GEO** - Satelliten und **LEO** (*Low Earth Orbit*)-Satelliten unterscheiden.

Satellitenfunk

Geostationäre (GEO-) Satelliten wie beispielsweise Intelsat und Inmarsat drehen mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit wie die Erde (d.h synchron) rund 38.000 km über dem Äquator. Für einen Beobachter auf der Erde nehmen sie somit eine feste Position ein. Dies ermöglicht, dass sowohl feste Sendestationen (um Daten zum Satelliten zu übertragen) als auch feste Empfangsstationen falls erforderlich (um Daten vom Satelliten zu empfangen) auf der Erde aufgebaut werden können. Geostationäre Satelliten werden somit sowohl für Duplexübertragung (z. B. gebündelte Fernsprechanäle zwischen zwei Erdfunkstellen) als auch für Verteilübertragung (Fernsehübertragung vom Erdfunksender über Satellit zum Fernsehschlüssel beim Teilnehmer) eingesetzt. Die große Entfernung zur Erde bedingt, dass rela-

Geostationäre Satelliten

tiv große Antennen und hohe Sendeleistungen erforderlich werden und ein gewisser Verzug durch die Signallaufzeit auftritt. Durch eine Einschränkung des Versorgungsgebietes (Bündelung) kann die erforderliche Sendeleistung verringert werden.

- LEO-Satelliten** **LEO-Satelliten** (wie beispielsweise Iridium und Globalstar) haben typischerweise eine Umlaufbahn etwa 1000 km über der Erde und umrunden die Erde in weniger als zwei Stunden. Dies bedeutet, dass von der Erde aus ein solcher Satellit nur ein paar Minuten in Sicht und damit im Funkkontakt bleibt. Insofern kann in dieser Zeit nur eine sporadische Kommunikation stattfinden. Üblicherweise sind mehrere Satelliten eines Verbundes zur gleichen Zeit an einem Ort in Sichtweite. Ferner, bilden die Satelliten in einem Verbund (bei Iridium beispielsweise 66 Satelliten) ein Kommunikationsnetz untereinander. Somit wird eine paketorientierte Kommunikation von einem Punkt auf der Erde über mehrere (teilweise wechselnde) Satelliten zu einem anderen Punkt auf der Erde ermöglicht. Gegebenenfalls können auch terrestrische Strecken hinzugenommen werden. Während bei geostationären Satelliten häufig der direkte Weg vom Satellit zum Teilnehmer durch Hochhäuser, Bäume, usw. versperrt sein kann, ist dies bei LEO-Satelliten kein Problem, da gleichzeitig mehrere Alternativwege über alle Satelliten in Sichtweite möglich sind. Der Steuerungsaufwand (für die Wegesuche und das Handover) ist dann zwar höher aber heute unerheblich. Wegen der geringeren Entfernung (als bei GEO-Satelliten) ist die Langzeitverzögerung relativ niedrig. Es gibt zahlreiche Möglichkeiten für die Auswahl der Satellitenumlaufbahnen, die zwischen denen bei GEO und LEO liegen. So z. B. **MEO(Medium Earth Orbit)-Bahnen** bei rund 10.000 km. oder auch elliptische Bahnen. Durch die Zusammensetzung verschiedener Umlaufbahnen, die ein Verbund von Satelliten abdeckt, ist es möglich eine gewünschte zeitliche und örtliche Abdeckung, so wie die erforderliche Bandbreite zu erreichen.

Der Satellitenkommunikation kommt in Ländern in denen terrestrische Netze nicht verfügbar sind auch für die Individualkommunikation (wie Telefonie und Internetdienste) eine besondere Bedeutung zu. In Industrieländern wird sie hauptsächlich für die Verteilung von Rundfunk- und Fernsehprogrammen und für interkontinentale Fernsprechverbindungen eingesetzt. In Deutschland waren beispielsweise Mitte 2004 lediglich 41.000 breitbandige Internetanschlüsse über Satellitennetze zu verzeichnen [RegTP]. Hiervon waren lediglich 1000 Anschlüsse im Duplexbetrieb über Satellit, d. h. der überwiegende Teil nutzte die Satellitenverbindung um Daten herunterzuladen, die Verbindung vom Teilnehmer zum Internet verlief in der Regel über das Telefonnetz.

Beispiel 2.2-4:

Um die Signallaufzeit zwischen einer Erdfunkstation und einem Satellit genau zu berechnen muss sowohl deren relative Position als auch deren Umlaufbahnen berücksichtigt werden. Dies führt zu einem Satz von Gleichungen, die zur Durchführung der Berechnung gleichzeitig erfüllt werden müssen. Eine grobe Abschätzung liefern die folgenden Beispiele:

Für einen GEO-Satelliten mit Abstand $2 \cdot 45.000 \text{ km}$ mit Wellenausbreitungsgeschwindigkeit von $299792,458 \text{ km/s}$ erhält man

$$2 \cdot \frac{45.000 \text{ km}}{299792,458 \text{ km/s}} = 300 \text{ ms.}$$

Für einen MEO-Satelliten mit Abstand $2 \cdot 12.000 \text{ km}$ erhält man

$$2 \cdot \frac{12.000 \text{ km}}{299792,458 \text{ km/s}} = 80 \text{ ms.}$$

Für einen LEO-Satelliten mit Abstand $2 \cdot 1200 \text{ km}$ erhält man 8 ms.

2.2.3 Datennetze

Vor gut fünfzig Jahren begann in Deutschland der Aufbau des **Fernschreibnetzes**, mit dem Probetrieb 1933 zwischen Berlin und Hamburg, und anschließender planmäßiger Eröffnung des öffentlichen Telexdienstes 1934. Das Netz wurde konzipiert, um schriftliche Mitteilungen unmittelbar, d. h. ohne den Transport von Schriftstücken, schnell und sicher auszutauschen. Es arbeitet im Start-Stop-Betrieb (7.5 Schritte / Zeichen) mit einer Schrittgeschwindigkeit von 50 Baud bzw. einer Zeichengeschwindigkeit von $6 \frac{2}{3}$ Zeichen / s. Das zunächst zweistufig ausgelegte Netz wurde 1956 in Anlehnung an das Fernsprechnet dreistufig geordnet. Für die Übertragung der Fernschreibsignale über große Entfernungen wurde überwiegend die Wechselstromtelegrafie mit Amplituden- und Frequenzmodulation für Mehrkanalübertragung im Fernsprechband eingesetzt und dann durch die digitale Zeitmultiplextechnik ersetzt. Das Netz wurde von Anfang an als Selbstwählnetz ausgelegt. Entsprechend der Entwicklung im Fernsprechnet wurden mechanische Dreh- und Hebdrehwähler durch **Edelmetall-Motor-Drehwähler (EMD)** und später durch voll-elektronische Wähler ersetzt.

Fernschreibnetz

Die Entwicklung der digitalen Übertragung- und Vermittlungstechnik und der enorm steigende Bedarf an schnellen Text- und Datenkommunikationen, der durch den technologischen Fortschritt auf dem EDV-Sektor bedingt war, führten Mitte der 60er Jahre zum Konzept eines neuen leitungsvermittelten Datennetzes (**Datex-L**) mit wählbaren Bitraten und integrierten Text- und Datendiensten. Nach Vorversuchen vollzog sich der Aufbau dieses Netzes zwischen 1975 und 1980. Basis dieses Netzes bildeten die vollelektronischen, digitalen, speichergesteuerten Vermittlungsstellen EDS der Firma Siemens, die nach einem speziellen Zeitmultiplexverfahren (mit Codierung des Polaritätswechsels) arbeiteten, und die durch digitale PCM 30 D Übertragungstrecken miteinander verbunden waren. Das Netz war hierarchisch zweistufig ausgelegt und bestand aus einer Verdichtungsebene und einer Vermittlungsebene (Abb. 2.2-12).

Datex-L

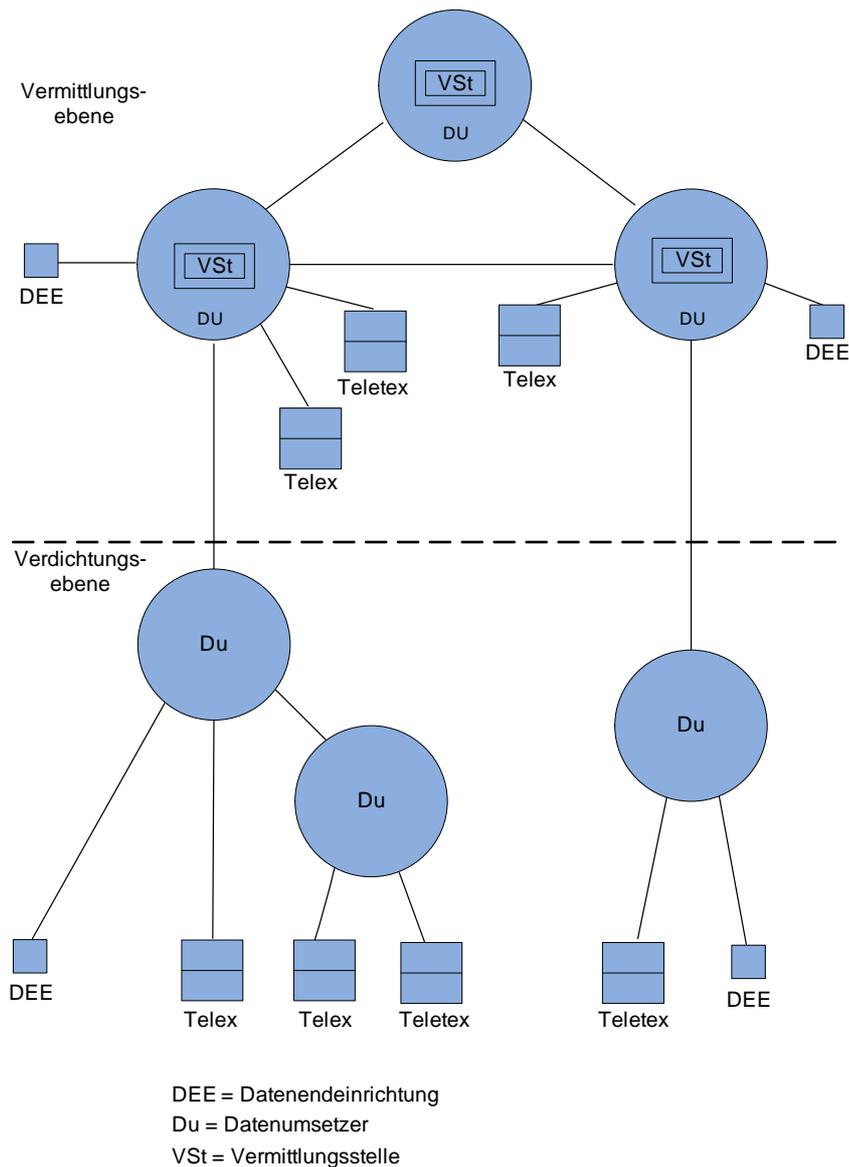
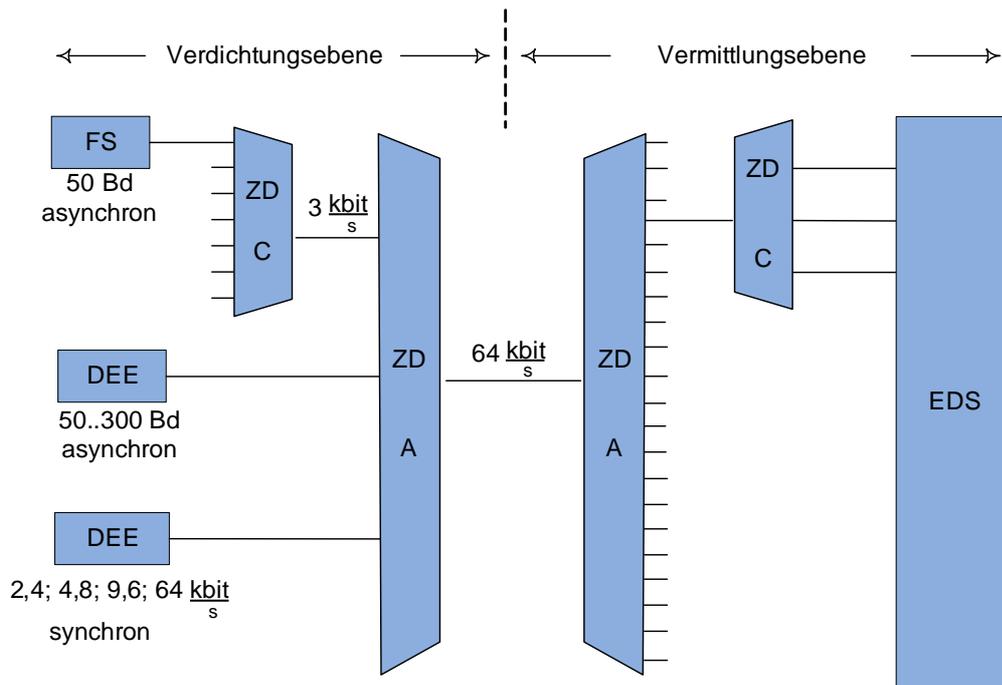


Abb. 2.2-12: Struktur des leitungsvermittelten Datennetzes.

Es war im Vergleich zum Fernsprechnet wesentlich kleiner. In der Verdichtungsebene wurden Datumsetzer (Abb. 2.2-13) in der Zeitmultiplextechnik zur Konzentration des aufkommenden Verkehrs eingesetzt. Die mittlere Teilnehmeranschlusslänge zum Datumsetzer betrug 6 km, zur Datenvermittlungsstelle 60 km. Die mittlere Verbindungsaufbauzeit lag wesentlich unter 1 s. Das Netz bot Wählverbindungen mit den Bitraten von 50-300 *bit/s* asynchron und Bitraten von 300, 2.400, 4.800, 9.600 und 64.000 *bit/s* synchron. Die Bitfehlerrate betrug 10^{-5} bis 10^{-6} . Im Netz wurden verschiedene Datendienste wie Telex, Teletex (seit 7/93 eingestellt) und transparente leitungsvermittelte Datenübertragung, abgewickelt. Datex-L wurde durch Datex-P und ISDN immer mehr verdrängt und 1996 abgeschaltet. Heute werden leitungsgebundene Verbindungen über ISDN abgewickelt.



FS	Fernschreiber
DEE	Datenendeinrichtung
ZD-A	Zeitmultiplex-Datenübertragungseinrichtung für 64 $\frac{\text{kbit}}{\text{s}}$
ZD-C	Zeitmultiplex-Datenübertragungseinrichtung für 3 $\frac{\text{kbit}}{\text{s}}$

Abb. 2.2-13: Typische Netzanschlüsse über Datenumsetzer im leitungsvermittelten Datennetz.

Der Bedarf an Rechnerkommunikation, bedingt insbesondere durch Dezentralisierung der Verarbeitung und die Verfügbarkeit der Paketvermittlungstechnik, führte 1981 nach einjähriger Probezeit zur Einführung des Datenpaketvermittlungsdienstes im Integrierten Datennetz der DBP-Telekom bestehend aus Telex, Teletex, Datex-L, Datex-P sowie dem Direktrufnetz. Basis dieses Netzes (**Datex-P**) war das Multiprozessor-Vermittlungssystem SL 10 der Firma Northern Telecom. Seit Anfang der 90er Jahre wird es durch die EWS-P Technik der Firma Siemens kompatibel ausgebaut. Der Zugang zum Datex-P Netz erfolgt dezentral über Datex-P, Modem-, Mobilfunk- und ISDN-Anschlüsse. Es sind Übertragungsgeschwindigkeiten von 300, 1.200, 2.400, 4.800, 9.600, 48.000, 64.000 bit/s und $n \cdot 64 \text{ kbit}/\text{s}$ bis maximal 1,92 Mbit/s möglich. Die Bitfehlerrate ist mit 10^{-9} sehr gering. Die Verbindungsaufbauzeit im Netz beträgt etwa 400 ms, die Netzlaufzeit von Datenpaketen von 128 Oktetts Benutzerdaten ca. 140 ms.

Datex-P

Beispiel 2.2-5:

Zu einem asynchronen Anschluss mit einer Übertragungsrate von 300 Baud und einem Code von 11 Schritten / Zeichen werden Daten, die über eine synchrone Leitung eintreffen, übertragen. Bei synchronen Übertragungsraten von 300 bit/s wird jedes Zeichen mit 8 bit codiert. Die eintreffenden Daten werden also zwischengespeichert. Der Zwischenspeicher hat einen Umfang von 1 KByte. Dies

bedeutet, dass bei der Ausnutzung der maximalen Übertragungsgeschwindigkeit nach einer Übertragungszeit von

$$1024 \text{ Zeichen} \times \frac{1}{\frac{300}{8} - \frac{300}{11}} \frac{s}{\text{Zeichen}} = 100,12 \text{ s}$$

und der gesendeten Zahl von

$$100,12 \text{ s} \times \frac{300 \text{ Zeichen}}{8 \frac{s}{\text{Zeichen}}} = 3754 \text{ Zeichen}$$

ein Datenverlust eintritt.

Parallel zu der Entwicklung im öffentlichen Bereich entstanden im privaten Bereich unternehmensinterne Netze. Der Fortschritt auf dem Datenverarbeitungssektor brachte zunächst Kabelnetze, die Grossrechner mit ihrer Peripherie verbanden. Solche Verbindungen wurden mit Modemübertragung oder im Basisband auf Fernsprechleitungen oder Koaxkabeln betrieben. Mit dem Aufkommen kleinerer leistungsstarker Rechner, PCs und Bürokommunikationssystemen erhöhte sich der Bedarf an Rechner-Rechner Kommunikation, und LANs wie Ethernet kamen zum Einsatz. Über den lokalen Bereich hinaus wurden außer Modemübertragung überwiegend Paketvermittlungsverfahren nach X.25 verwendet.

Datennetze vieler Unternehmen heute sind heterogen. Einerseits bestehen Host-Peripherie-Anbindungen mit Standard oder Quasi-Standard-Protokollen (wie TCP/IP oder SNA von IBM), andererseits entstehen dezentrale Strukturen durch den vermehrten Einsatz von Workstations und PCs. Im lokalen Bereich werden überwiegend Ethernet bzw. **CSMA/CD** (*Carrier Sense Multiple Access with Collision Detection*) und WLAN universell, Token Ring im Bürobereich und Token Bus im Produktionsbereich eingesetzt. Charakteristisch für **lokale Netze** ist, dass sie alle Endeinrichtungen mit einem Übertragungsmedium hoher Übertragungskapazität miteinander verbinden. Typisch sind derzeit Koax- und Glasfasersysteme mit Bitraten von 2 bis 16 Mbit/s. Hardwaremäßig werden die Endgeräte in einer Bus-, Ring- oder Sternstruktur angeschlossen (Abb. 2.2-14).

Lokale Netze

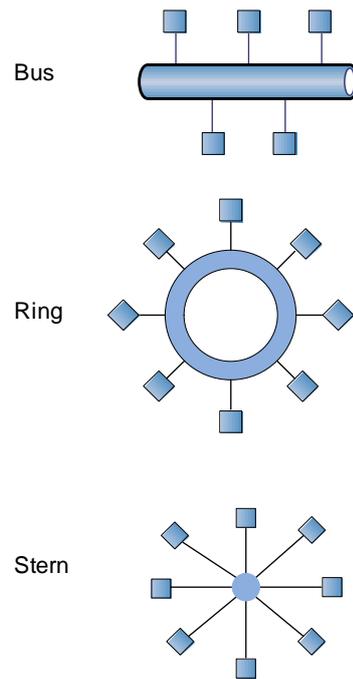


Abb. 2.2-14: Geläufige hardwaremäßige Strukturen von lokalen Netzen.

Die gesamte Übertragungskapazität wird jeweils kurzfristig einer Endeinrichtung zur Verfügung gestellt. Verschiedene Verfahren, nach denen dieser Zugriff geregelt wird, werden in späteren Abschnitten näher behandelt. Im Abb. 2.2-15 ist die Struktur eines Anschlusses für lokale Netze dargestellt. Der Anschlusssatz (auch Transceiver oder **MAU - Medium Access Unit**) genannt) regelt den Zugriff auf das Übertragungsmedium und übernimmt die physikalische Anpassung an das Medium. Die Steuerung (*Controller*) regelt den Austausch von Nachrichten zwischen Endeinrichtungen und dem Netz. Die Endeinrichtung selbst kann ein Gerät oder ein Zusammenschluss mehrerer Geräte sein (*cluster*). Lokale Netze können über Anpassungseinheiten (*Repeater, Gateway, Bridge*) miteinander verbunden werden, um **globale Netze (WAN)** zu bilden (Abb. 2.2-16).

Globale Netze
WAN

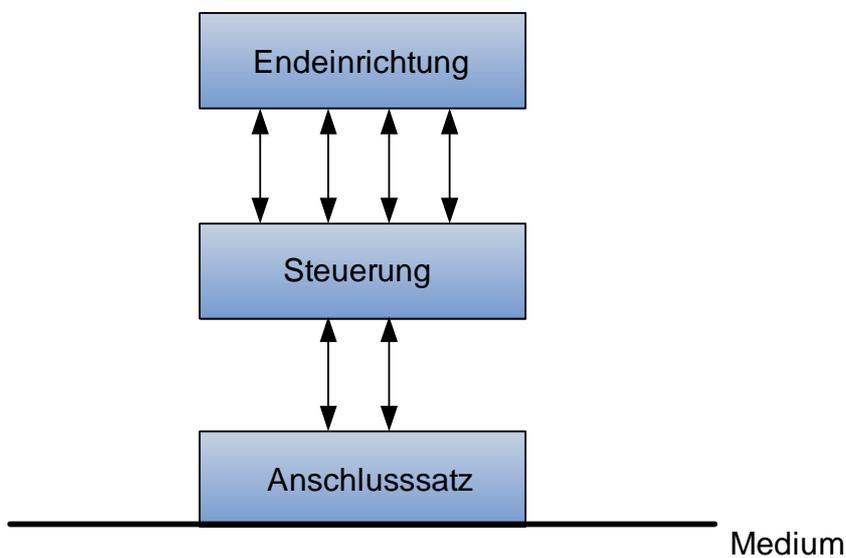


Abb. 2.2-15: Struktur eines Anschlusses (MAU) für lokale Netze

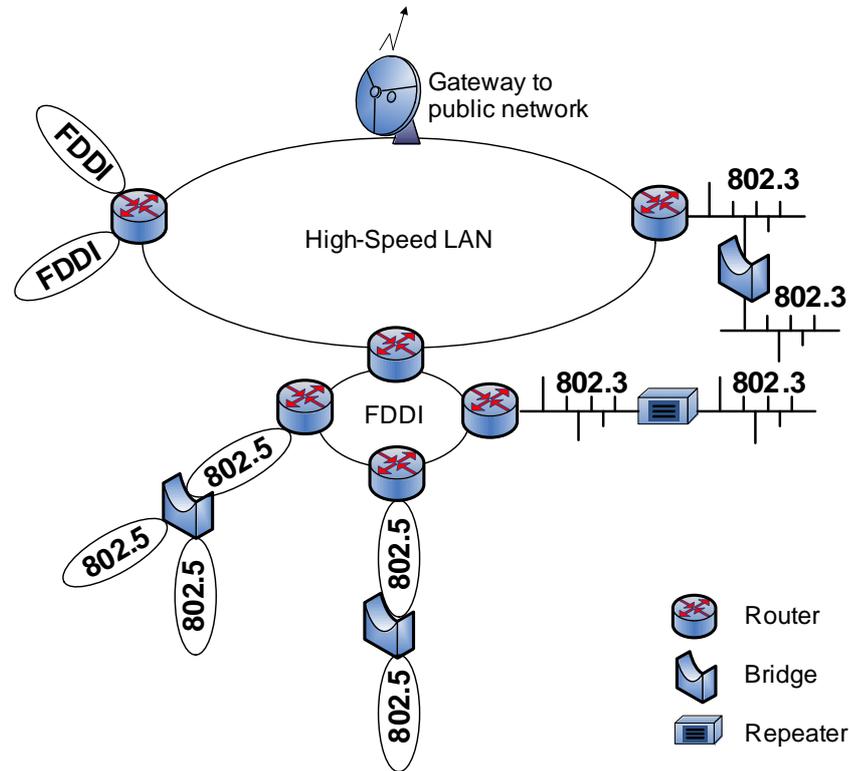


Abb. 2.2-16: Globales Netz (WAN).

Der technologische Fortschritt, vor allem in der Mikroelektronik und der Glasfasertechnik, ermöglichte Anfang der achtziger Jahre schnelle lokale Netze - **HSLANs** (**H**igh **S**peed **L**ANs) mit Bitraten von 100 Mbit/s und darüber zu entwickeln. 1982 wurde auf Basis des Token-Verfahrens **FDDI** (**F**iber **D**istributed **D**ata **I**nterface) in die ANSI-Standardisierung aufgenommen und 1987 als erster Teil der FDDI-Spezifikation standardisiert (Abb. 2.2-17). Da FDDI Sprach- und Videodienste nur eingeschränkt unterstützt, wurde 1986 mit der Diskussion eines Hybrid Ring Control-Verfahrens begonnen, das auf Basis von 6 Mbit/s Kanälen diese Dienste unterstützt. Beim **FDDI-II**, wie diese Weiterentwicklung bezeichnet wird, ist jedoch die Abwärtskompatibilität nicht gegeben. 1986 wurde ein weiteres Verfahren von **QPSX** (**Q**ueued **P**acket and **S**ynchronous **E**xchange) Australien zur Standardisierung als **MAN** (**M**etropolitan **A**rea **N**etwork) bei IEEE 802.6 aufgenommen. Das als **DQDB** (**D**istributed **Q**ueue **D**ual **B**us) bezeichnete Verfahren hat physikalisch die Struktur eines Doppel-Busses (entsprechend dem Dual Ring beim FDDI), der mit bis zu 155 Mbit/s betrieben werden und sich über einige 100 km erstrecken kann (Abb. 2.2-18). Das Verfahren hat die Eigenschaft, dass sendewillige Stationen eine verteilte Warteschlange bilden, die dezentral verwaltet wird. Es wird Sprach- und Videoübertragung unterstützt, ohne jedoch feste Kanalstrukturen zu bilden. Dies wird dadurch erreicht, dass kleine Pakete, Slots genannt, gebildet werden. Diese entsprechen den ATM-Zellen; damit ist eine Kompatibilität zum B-ISDN gegeben. Das DQDB-Verfahren hat auch den Vorteil, dass es bei hoher Last besonders effizient arbeitet: Es erlaubt, praktisch die volle Buskapazität auszuschöpfen.

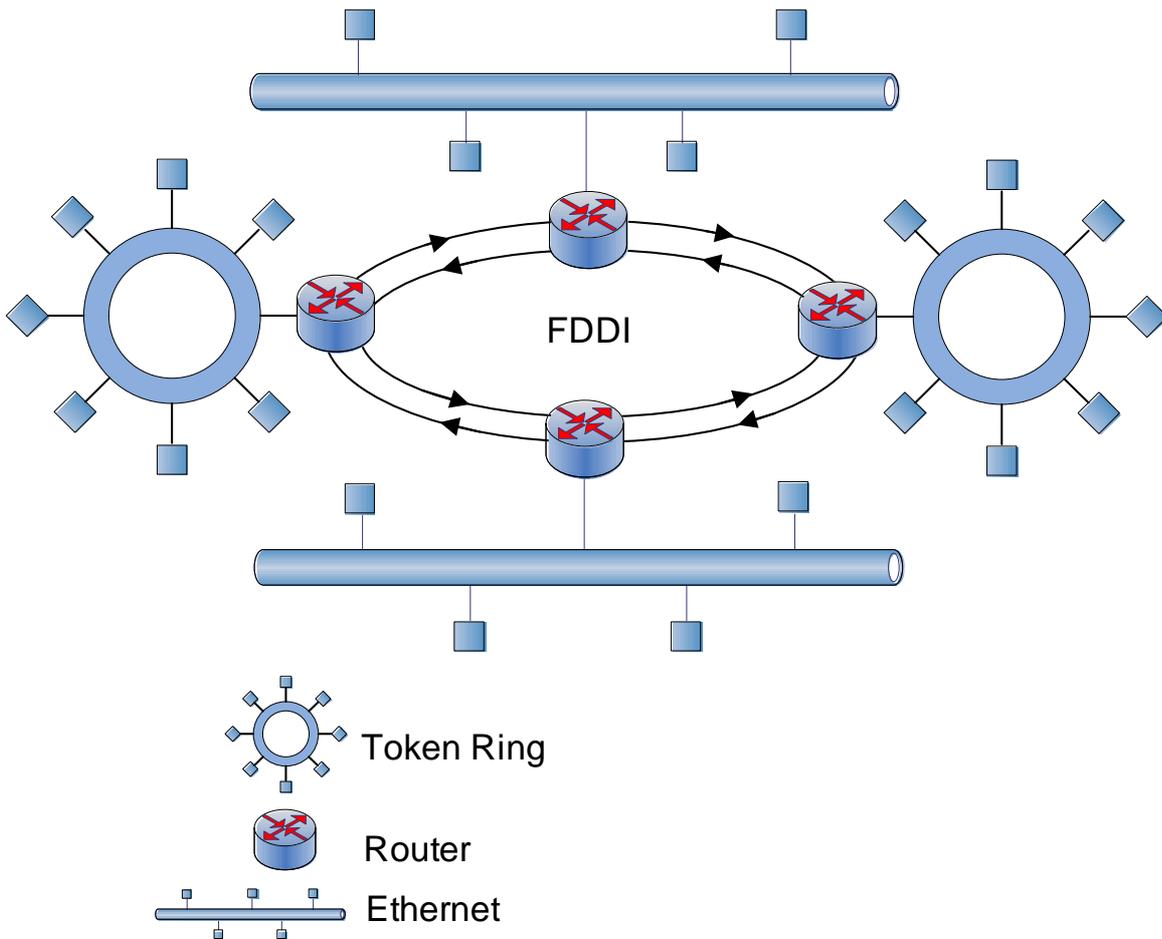


Abb. 2.2-17: FDDI als Backbone - Netz.

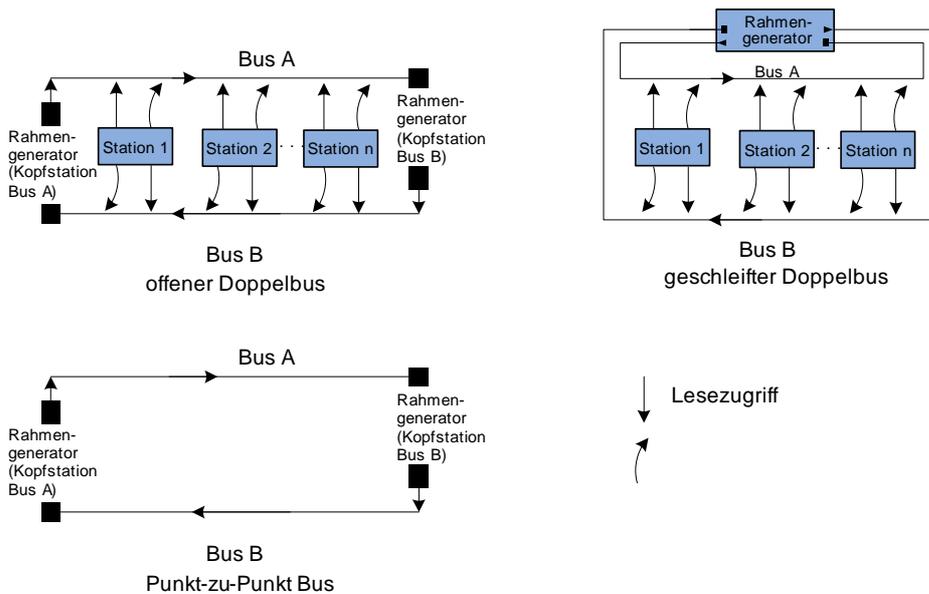


Abb. 2.2-18: DQDB-Bus-Topologien.

Bereits bei DQDB wird eine Reservierungsstrategie angewandt, um außer dem asynchronen (Paket-) Verkehr auch plesiochronen Verkehr zu bedienen. Es wurden weitere Verfahren, die Reservierungsstrategien und Kreditstrategien bzw.

CRMA Scheduling verwenden, entwickelt. Hierzu gehören das **CRMA** (*Cyclic Reservation Multiple Access*) Verfahren und der **ATM-Ring**. Heute erreichen MANs bereits Übertragungsraten in Gigabitbereich.

2.2.4 Rundfunk- und Fernsehnetze

Die ersten Tonrundfunkprogramme für jedermann wurden 1923 etwa gleichzeitig in allen Industriestaaten der Welt im Mittelwellenbereich (526,5 - 1606,5 kHz) unter Verwendung der Amplituden-Modulation (AM) und einer NF-Bandbreite von 4,5 kHz ausgestrahlt. Im Verlauf der nächsten zehn Jahre wurde der Langwellenbereich (150 - 285 kHz) und der Kurzwellenbereich (5,95 MHz - 26,1 MHz) erschlossen. 1949 nahmen die ersten Sender in der BRD Tonrundfunksendungen im UKW-Bereich (87,5 - 100 MHz) unter Verwendung der Frequenzmodulation (FM) und einer NF-Bandbreite von ca. 15 kHz auf. Die erste offizielle Fernsehsendung in der BRD wurde 1952 in der 625-Zeilen-Norm ausgestrahlt. 1967 wurde das Farbfernsehen mit der **PAL** (*Phase Alternation Line*)-Codierung mit einer Bandbreite von ca. 5 MHz eingeführt. Anfang der achtziger Jahre wurden die ersten **Koax-Kabelverteilstetze** aufgebaut und die ersten direktstrahlenden Satelliten für Fernseh- und Rundfunkprogramme errichtet.

PAL-Codierung

Das Rundfunk- und Fernsehnetz besteht somit aus:

- dem (im Wesentlichen festgeschaltetem) Programmaustauschnetz zwischen den Studios, Funkhäusern und Sendern,
- dem Verteilnetz bestehend aus den Tonrundfunksendern, den Fernsehgrundsendern, den Füllsendern (Umsetzern) und den Rundfunksatelliten und
- dem Teilnehmernetz bestehend aus
 - Einzelantennen
 - privaten Gemeinschaftsantennen
- den Breitbandkabelverteilstetzen (einschließlich Antennenanlagen).

Die Vorteile der Digitaltechnik, bei Rundfunk und Fernsehübertragung sind es vor allem die hohe Qualität (durch die Regenerierbarkeit digitaler Signale) und Frequenzökonomie (durch Anwendung digitaler Kompressionsverfahren), haben dazu geführt, dass analoge Rundfunk- und Fernsehtechniken allmählich durch digitale Verfahren abgelöst werden.

Für die digitale Rundfunkübertragung wird weltweit in 40 Ländern (außer in den USA) der in Europa entwickelte **DAB-Standard** (*Digital Audio Broadcasting*, ETSI 300401) eingesetzt. Die Audiodaten werden jeweils mit dem MP2-Verfahren (**MPEG 1** Audio Layer 2 - *Moving Picture Experts Group*) in 160 kbit/s Datenströme codiert anschließend mehrere Datenströme in einem Ensemble zusammengefasst, und unter Verwendung eines **CDM** (*Code Division Multiplex*)-Modulationsverfahrens ausgestrahlt. In Deutschland und in zahlreichen anderen europäischen Ländern ist ein flächendeckender DAB Empfang inzwischen gegeben.

Für die digitale Fernsehübertragung haben sich weltweit unterschiedliche Verfahren entwickelt - **DVB** (*Digital Video Broadcast*) in Europa, **ATSC** (*Advanced Television Systems Committee*)-Format in den USA und **ISDB** (*Integrated Services Digital Broadcasting*) in Japan. In Deutschland begann der Start des DVB-T (T steht für terrestrisch) am 1. November 2002. Nach derzeitiger Planung in Deutschland (Beschluss der Bundesregierung vom 24. August 1998) sollen Ende 2010 alle analoge Fernsehsender abgeschaltet und DVB-T flächendeckend verfügbar sein. Bei DVB werden Videodaten zunächst mit MPEG 2 codiert, dann mit einem **CDM** - Verfahren moduliert, anschließend wieder mit einem der drei für DVB-T festgelegten Verfahren **QPSK** (*Quadrature Phase Shift Keying*), **16-QAM** (*Quadrature Amplitude Modulation*) oder **64-QAM** moduliert und ausgestrahlt. Je nach gewählten einzelnen Parametern liegt die Bandbreite pro übertragenem Kanal mit vier Fernsehprogrammen zwischen 12 und 14 Mbit/s, d. h. pro Programm bei 3 bis 3,5 Mbit/s. Pro Analogkanal von ca. 7 MHz erhält man auf diese Weise 4 digitale Programme.

Breitbandnetze haben eine hohe Bandbreite sind aber in der Regel als Verteilnetze (d. h. Übertragung nur in eine Richtung) ausgelegt. In den vergangenen Jahren wurden unterschiedliche Verfahren entwickelt, um Individualkommunikation (Schmalbandkanal zum Netz hin, Breitbandkanal bis 4 Mbit/s zum Teilnehmer hin) zu ermöglichen. Ende 2004 waren in Deutschland lediglich 145.000 solcher Kabelmodems im Einsatz [RegTP]. Verglichen mit ADSL-Anschlüssen (6,7 Mio. zur gleichen Zeit) ist dies im weltweiten Vergleich niedrig. In Deutschland kam beispielsweise auf 1000 Einwohner ein Anschluss während in der Schweiz 1000 Einwohner auf 44 Anschlüsse kamen.

Individualkommunikation über Kabelnetze

Selbsttestaufgabe 2.2-1:

Welche Arten von öffentlichen und privaten Netzen kann man unterscheiden? Geben Sie passende Beispiele.

Selbsttestaufgabe 2.2-2:

Über eine Telex-Verbindung werden unter maximaler Ausnutzung der Übertragungsgeschwindigkeit Nachrichten übertragen.

- a. Erläutern Sie das bei Telex verwendete Übertragungsverfahren.*
- b. Welche Schritt- und welche Zeichengeschwindigkeit wird genutzt?*
- c. Erklären Sie den Unterschied zwischen Schrittgeschwindigkeit und Bitübertragungsrate.*
- d. Wieviele Nutzbits werden in einer Sekunde übertragen?*

2.3 Dienste

Wie wir bereits gesehen haben, waren in der Vergangenheit Dienste stets mit Netzen verknüpft. So hatte man den Fernsprehdienst im Fernsprechnetz, Telexdienste im Fernschreibnetz, leitungsorientierte Datenübermittlung im Datex-L-Netz und paketorientierte Datenübermittlung im Datex-P-Netz. Mit Einführung des ISDN (*Integrated Services Digital Network*) war es möglich verschiedene Dienste in einem Netz anzubieten. Mit fortschreitender Digitalisierung können unterschiedliche Netze auf verschiedenen Netzebenen miteinander verknüpft werden. Somit kann ein Dienst auch über mehrere Netze abgewickelt werden. Die Liberalisierung der Telekommunikation erfordert auch, dass man zwischen Netzen und Diensten bzw. Netzbetreibern und Dienstanbietern unterscheidet. Denn es sollen einerseits gleiche Dienste unter Verwendung unterschiedlicher Netze im Wettbewerb realisiert werden können, andererseits soll eine Quersubventionierung zwischen Netzen und Diensten (zu Gunsten eines Netzbetreibers) unterbunden werden.

Nach ITU (*International Telecommunication Union*) unterscheidet man zwischen zwei Arten von Diensten:

- Übermittlungsdienste (*bearer services*) und
- Teledienste (*teleservices*).

Übermittlungsdienste **Übermittlungsdienste** sind reine Transportdienste; sie ermöglichen beliebige Informationen transparent durch das Netz zu übermitteln (s. Abb. 2.3-1). Sie bieten lediglich übertragungs- und vermittlungstechnische Funktionen, die über entsprechende Netze (durchschaltevermittelt, paketvermittelt usw.) abgewickelt werden an.

Teledienste Auf der anderen Seite sind **Teledienste** weitergehend standardisierte Dienste. Bei ihnen sind über den Informationstransport hinausgehende Funktionen, wie die Steuerung des Informationsaustausches, die Darstellung der Information, bis hin zur Schnittstelle zu den Anwendungen, definiert (s. Abb. 2.3-1). Typische Teledienste sind beispielsweise Fernsprechen, Telefax, SMS und Internetdienste.

Zur Spezifikation von Diensten werden Attribute festgelegt. Diese sind:

- Übermittlungsattribute, wie z. B.:
 - Struktur (8 kHz transparent, unstrukturiert, ...)
 - Transfermodus (durchschaltevermittelt, paketvermittelt)
 - Transferrate (64 kbit/s, 128 kbit/s, ...)
 - Transferleistung (Sprache, 7 kHz Audio, Video, ...)
 - Verbindungsaufbau (nach Aufforderung, semi-permanent, permanent, ...)
 - Symmetrie (simplex, duplex symmetrisch, ...)
 - Konfiguration (Punkt-zu-Punkt, Punkt-zu-Mehr-Punkt)

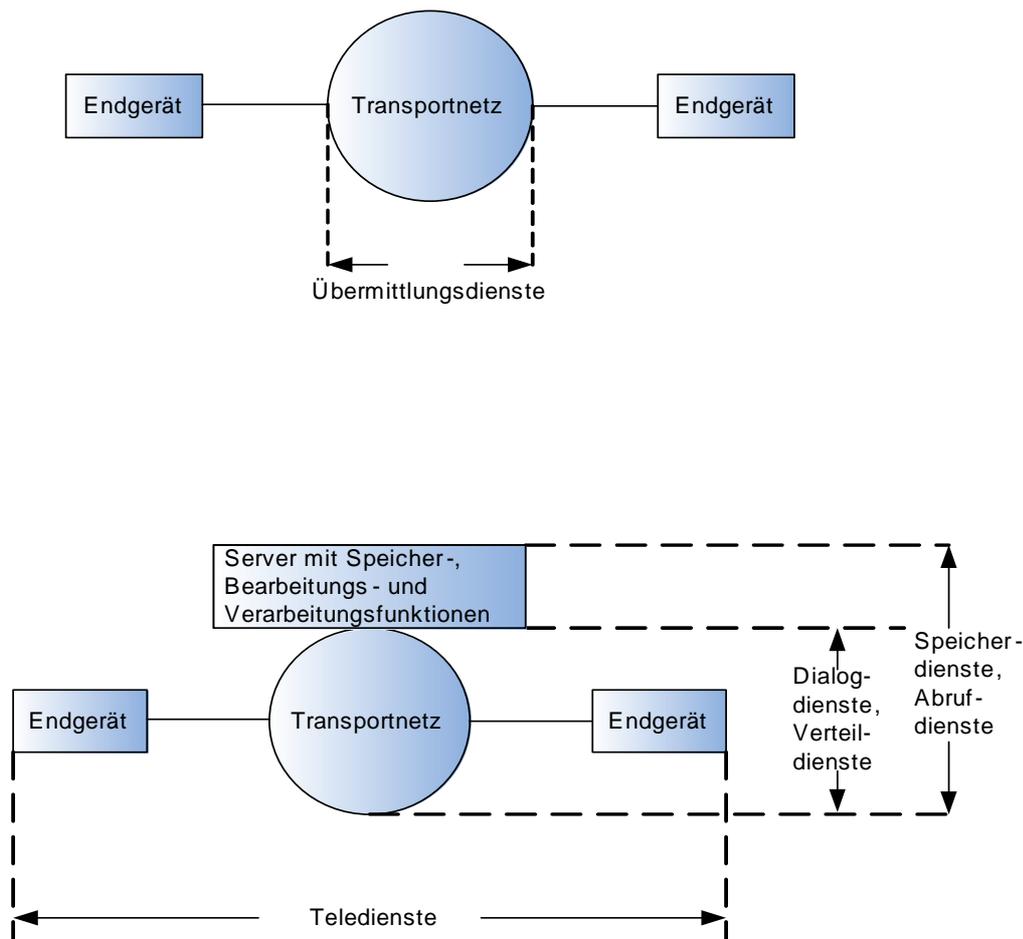


Abb. 2.3-1: Definitionsbereich der Übermittlungsdienste und der Teledienste

- Zugangsattribute, wie z. B.:
 - Zugangskanal und Bitrate (z. B. D-Kanal mit 16 kbit/s oder B-Kanal mit 64 kbit/s, ...)
 - verwendetes Protokoll (z. B. D-Kanal, SS Nr. 7 - *Signalling System Nr. 7*, X.25)
- und allgemeine Attribute, wie:
 - Leistungsmerkmale
 - Dienstgüte
 - Vernetzungsmöglichkeiten
 - Betriebseigenschaften
 - Gebühren usw.
- Bei Telediensten werden Attribute über die Transporteigenschaften hinaus festgelegt, wie beispielsweise:
 - Nutzinformationstyp (Text, Daten, Video, ...)
 - Informationssteuerungsprotokoll (z. B. Sitzungsprotokolle)
 - Informationsdarstellung (z. B. Textformate, Graphikauflösung usw.)
 - Ende-zu-Ende Funktionen (z. B. Anzeigen).

In den folgenden Abschnitten lernen wir einige realisierte Dienste kennen, wobei auch häufig Hinweise zu den Anwendungen gegeben werden. Im Vordergrund stehen Dienste in den öffentlichen Netzen.

2.3.1 Datenübermittlungsdienste

Bei den Datenübermittlungsdiensten handelt es sich um Transportdienste nach dem OSI (*Open System Interconnection*) -Modell. Sie werden sowohl in öffentlichen Netzen als auch in privaten Netzen in gleicher Weise angeboten. Sieht man von der Datenübertragung über festgeschaltete Leitungen (Datendirektverbindungen und Festverbindungen) ab, so bestehen **Datenübermittlungsdienste** aus:

Datenübermittlungs-
dienste

- Datenübermittlung im Fernsprechnetz/ISDN
- Leitungsvermittelter Datenübermittlung und
- Paketvermittelter Datenübermittlung.

2.3.1.1 Datenübermittlung im Fernsprechnetz/ISDN

Die ITU-T Empfehlungen der Serie V bilden die Grundlage für die **Datenübermittlung im analogen Fernsprechnetz**. Für die Datenübertragung werden Modems (Modulatoren-Demodulatoren) verwendet (s. Abb. 2.3-2 und Abb. 2.3-3), um die von den Datenendeinrichtungen (DEE) abgegebenen binären Signale in bandbegrenzte Signale im Fernsprechband umzusetzen und umgekehrt. Übliche Geschwindigkeiten für Duplexverbindungen sind 1200, 2400, 4800, 9600, 14400 und 28800 bits/s. In besonderen Fällen können bis 56 kbits/s (nach V. 90) erreicht werden.

Datenübermittlung im
analogen
Fernsprechnetz

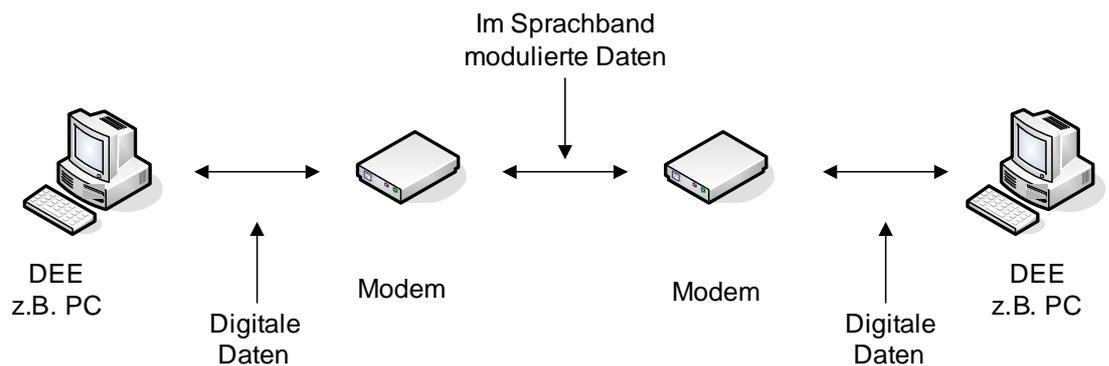
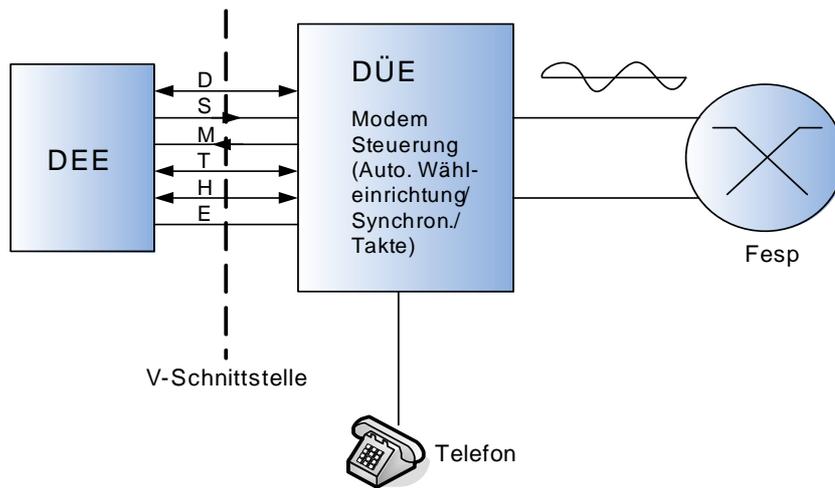


Abb. 2.3-2: Datenübermittlung im Sprachband



D	Datenleitungen	DEE	Datenendeinrichtung
E	Erdleitungen	DÜE	Datenübertragungseinrichtung
H	Hilfsleitungen	Fesp	Fernsprechnetz
M	Meldeleitungen		
S	Steuerleitungen		
T	Taktleitungen		

Abb. 2.3-3: V-Schnittstelle für Datenübertragung im Fernsprechnetz

Im ISDN kann für die transparente Datenübertragung der B-Kanal mit 64 kbit/s verwendet werden. Rechnet man den Anteil ab, der für das Übertragungsprotokoll benötigt wird (Synchronisation, Formatierung, Fehlerkorrektur), so verbleiben bei den **ISDN-Adapterkarten**, die zurzeit auf dem Markt sind, etwa 56 kbit/s für reine Nutzdaten. Der Einsatz von Kompressionsverfahren (Redundanzreduktion) liefert einen Faktor von bis 5 bei Texten, so dass maximal ca. 280 kbit/s erreicht werden können.

ISDN-Adapterkarten

ISDN-Adapterkarten unterstützen heute vielfältige Anwendungen, genannt seien Filetransferanwendungen, Telefonie-Unterstützung (z. B. Wahlunterstützung, Kopeln von Anrufen mit Kundendatenbanken), interaktive Kommunikation, Gruppenarbeit und Telearbeit. Für den Einsatz von ISDN-Adapterkarten werden in Deutschland im Wesentlichen zwei Schnittstellen unterstützt: **CAPI** (*Common ISDN Application Programmable Interface*) und **Appli/Com** (*Application Communication Interface*). Deren hierarchische Einbettung ist in Abb. 2.3-4 dargestellt.

CAPI

Appli/Com

Die **CAPI** bietet eine einheitliche Schnittstelle zu den ISDN-Adapterkarten und ist auf der Transportebene angesiedelt. Sie ermöglicht, mehrere Applikationen auf einer Karte zu realisieren, als auch eine Applikation über mehrere Karten zu implementieren. Sie entlastet den Applikationsprogrammierer von der Realisierung der unteren OSI-Schichten. Applikationen, die **CAPI** benutzen, sind von den ISDN-Adapterkarten verschiedener Hersteller unabhängig, d. h. portierbar und vor Änderungen und Erweiterungen der Adapterkarten geschützt.

Die Appli/Com-Schnittstelle bietet einen universellen Zugang zu den Telediensten (wie Telefax, Filetransfer, X.400 usw.). Sie ist für Applikationsprogrammierer gedacht, die mit geringem Aufwand (d. h. ohne Detailkenntnis der Teledienstprotokolle) ihre Applikationen kommunikationsfähig machen wollen. Appli/Com-Schnittstellen werden von ITU-T unterstützt (T.611).

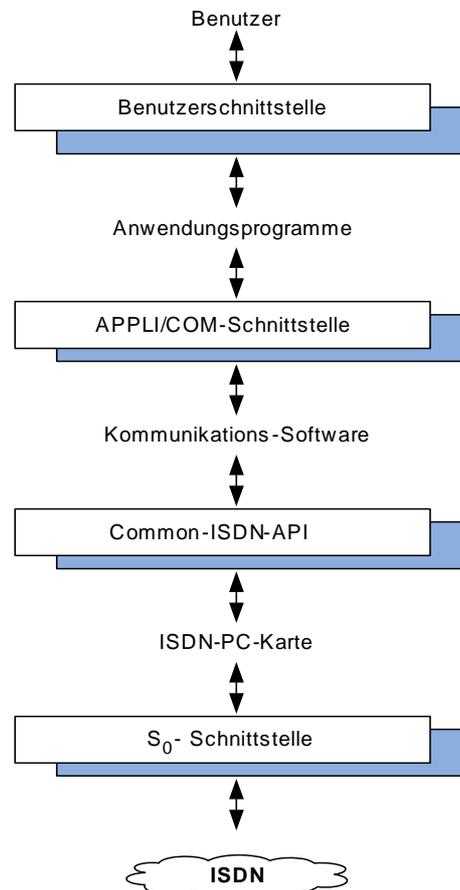


Abb. 2.3-4: Die Lage der Schnittstellen CAPI und APPLI/COM

2.3.1.2 Leitungvermittelte Datenübermittlung

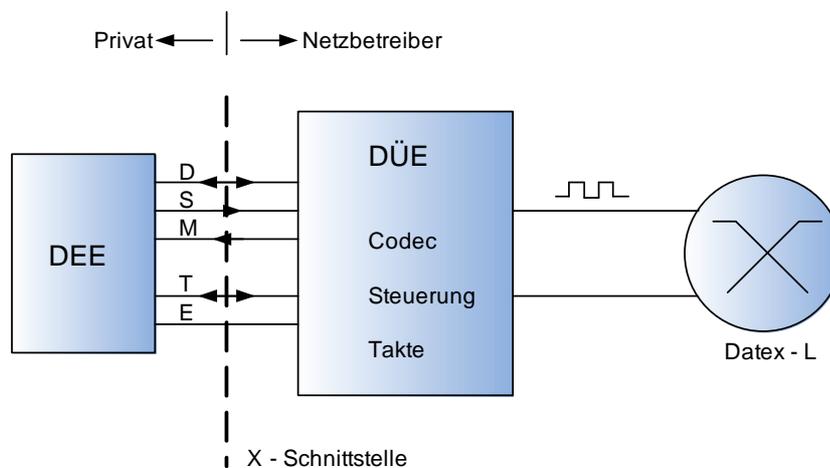
Abb. 2.3-5 zeigt die prinzipielle Struktur der Datenübermittlung in Datennetzen. Die ITU-T Empfehlungen der Serie X bilden die Grundlage für die Kommunikation in öffentlichen Datennetzen. In Abb. 2.3-6 sind die üblichen Benutzerklassen für asynchrone und synchrone (leitungvermittelte) Durchschalteverbindungen angegeben, wie sie von der ITU-T in der Empfehlung X.1 festgelegt sind und wie sie heute angeboten werden. Die angegebenen Geschwindigkeiten der Teilnehmerklassen sind die Geschwindigkeiten, die der Datenendeinrichtung (DEE) angeboten werden. In der Datenübertragungseinrichtung (DÜE) werden Bitgruppen von 6 oder 8 Informationsbits und zwei zusätzlichen Bits für Synchronisierung und Anzeige des Zustandes der Datenverbindung gebildet, so dass sich die Übertragungsgeschwindigkeit der DÜE entsprechend erhöht (Tabelle 2.3-1).

Beispiel 2.3-1:

Zwischen zwei DEE's wird eine Datei von 20 KByte synchron übertragen. Es wird dabei die Benutzerklasse 5 verwendet. Die DÜE überträgt mit einer Übertragungsrate von 6000 bit/s. Die gesamte Übertragung dauert somit:

$$20 \cdot 1024 \cdot 10 \text{ bit} \cdot \frac{1}{6000} \frac{s}{\text{bit}} = 34,13 \text{ s}$$

und von der DÜE werden 25 KByte (8 + 2) übertragen.



- | | | | |
|---|-----------------|-----|------------------------------|
| D | Datenleitungen | DEE | Datenendeinrichtung |
| E | Erdleitungen | DÜE | Datenübertragungseinrichtung |
| M | Meldeleitungen | | |
| S | Steuerleitungen | | |
| T | Taktleitungen | | |

Abb. 2.3-5: Datenübermittlung in Datennetzen

Benutzerklasse		Datenübertragungsrate und Code für Nutzdaten in der Verbindungsphase	Übertragungsrate und Code für Dienstsignale in der Verbindungsaufbauphase
Asynchron	1	300 $\frac{\text{bit}}{\text{s}}$, Start-Stop 11 Schritte/Zeichen	300 $\frac{\text{bit}}{\text{s}}$, Start-Stop 11 Schritte/Zeichen IA Nr. 5
	4	2400 $\frac{\text{bit}}{\text{s}}$, transparent	2400 $\frac{\text{bit}}{\text{s}}$ IA Nr. 5
Synchron	5	4800 $\frac{\text{bit}}{\text{s}}$, transparent	4800 $\frac{\text{bit}}{\text{s}}$ IA Nr. 5
	6	9600 $\frac{\text{bit}}{\text{s}}$, transparent	9600 $\frac{\text{bit}}{\text{s}}$ IA Nr. 5
	30	64000 $\frac{\text{bit}}{\text{s}}$, transparent	64000 $\frac{\text{bit}}{\text{s}}$ IA Nr. 5

Abb. 2.3-6: Übliche Benutzerklassen für leitungsvermittelte Datendienste nach ITU-T

Tab. 2.3-1: Geschwindigkeiten der Teilnehmerklassen für synchrone Datenübertragung

Benutzerklasse	Geschwindigkeit in der Teilnehmerklasse (bit/s)	Übertragungsgeschwindigkeit bei Bitgruppen (6+2) (bit/s)	Übertragungsgeschwindigkeit bei Bitgruppen (8+2)(bit/s)
3	600	800	750
4	2400	3200	3000
5	4800	6400	6000
6	9600	12800	12000
7	48000	64000	60000

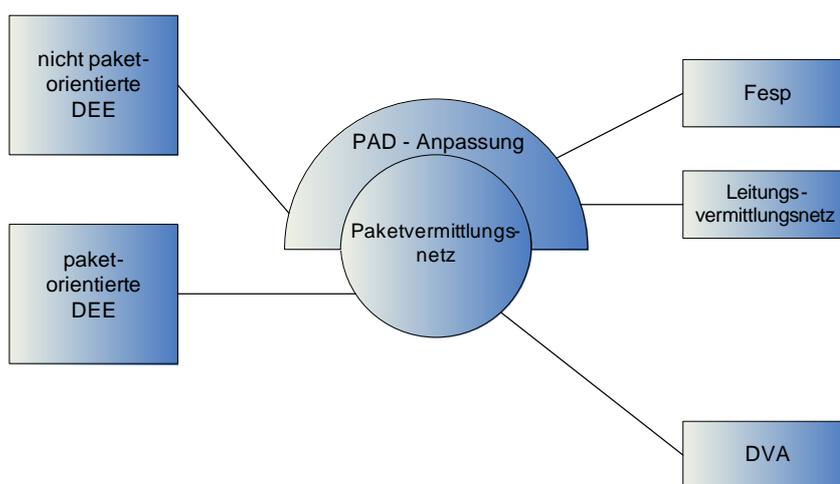
2.3.1.3 Paketvermittelte Datenübermittlung nach X.25

Die üblichen Benutzerklassen für paketvermittelte Datendienste in öffentlichen Netzen entsprechend den ITU-T-Empfehlungen sind in Abb. 2.3-7 aufgeführt.

Benutzerklasse		Datenübertragungsrate und Code für Nutzdaten
Synchron (ITU-T X.25)	8	2 400 bit/ s, transparent
	9	4 800 bit/ s, transparent
	10	9 600 bit/ s, transparent
	11	48 000 bit/ s, transparent
	12	1 200 bit/ s, transparent
	30	64 000 bit/ s, transparent
Asynchron (ITU-T X.28)	20	50-300 bit/s, 10 oder 11 Schritte/Zeichen
	21	75/1200 bit/s, 10 Schritte/Zeichen
	22	1200 bit/s, 10 Schritte/Zeichen
	23	2400 bit/s, 10 Schritte/Zeichen

Abb. 2.3-7: Benutzerklassen für paketvermittelte Datendienste nach ITU-T X.1

Das Angebot an Diensten in Paketvermittlungsnetzen unterteilt sich in den Basisdienst, bei dem Daten über Hauptanschlüsse über die X.25-Schnittstelle ausgetauscht werden, und in die Zusatzdienste, bei denen nicht paketorientierte Dateneinrichtungen über PAD (*Packet Assembler and Disassembler*)-Einrichtungen am Paketdatenverkehr teilnehmen können (s. Abb. 2.3-8). Hierbei unterscheidet man wiederum zwischen Hauptanschlüssen, Zugang über das Leitungsvermittlungsnetz, Zugang über das Fernsprechnetz/ISDN und speziellen Diensten, bei denen IBM- und Siemens-kompatible Endgeräte besondere Unterstützung erhalten (s. Abb. 2.3-9). Im Netz werden auf Wunsch weitere Leistungsmerkmale, wie z. B. Direktruf, Benutzererkennung, Mehrfachanschluss, feste oder gewählte virtuelle Verbindungen, geschlossene Benutzergruppen oder Gebührenübernahme angeboten.



DEE Datenendeinrichtung Fesp Fernsprechnetz
 DVA Datenverarbeitungsanlage PAD Paket Assemblierer und Deassemblierer

Abb. 2.3-8: Anschlüsse an ein Paketvermittlungsnetz

Dienststart	Anschlussart	Benutzerklasse	
Basis-Dienst	Direktanschluss über X.25		
Datex P10H	Hauptanschlüsse		
	2400	8	
	4800	9	
	9600	10	
	48000	11	
	64000	30	
Zusätzliche Dienste	Anschluss über PAD nach X.28		
Datex P20H	Hauptanschlüsse		
	300	(X.20bis)	20
	1200	(V.23)	22
	1200 / 75	(V.23)	21
	2400	(V.23)	23
Datex P20F	Zugang zum öffentlichen Fesp -Netz über Modem		
	300	(V.21)	
	1200	(V.22)	
	1200 / 75	(V.23)	
	2400	(V.22 bis)	
	9600	(V.32)	
	14400	(V.32 bis)	
	19200	(PEP)	
	23000	(Turbo PEP)	
Datex P20I	Zugang zum ISDN über Adapter - Karte oder ISDN - /V.24 Adapter		
	9600 später 19200		
Datex P10F	Zugang für synchrone , paket-orientierte Terminals vom öffentlichen Fesp -Netz (X.32)		
	bis 14400		

Abb. 2.3-9: Dienste im Datex-P Netz der Telekom

2.3.1.4 Datenübermittlung in Hochgeschwindigkeitsnetzen (Frame Relay, SMDS)

Wie wir bereits in Abschnitt 2.2.1 und Abschnitt 2.2.3 gesehen haben, sind heute Hochgeschwindigkeitsnetze auf ATM (*Asynchronous Transfer Mode*)-Basis und auf HSLAN (*High Speed LAN*)-Basis (insbesondere **DQDB** - *Distributed Queue Dual Bus*) verfügbar. Über sie werden einerseits synchrone Übermittlungsdienste (z. B. für 2, 34, 140 Mbit/s), andererseits auch asynchrone Übermittlungsdienste mit verschiedenen Bitraten und unterschiedlichen Protokollen (z. B. nach X.25, IEEE 802. - *Institute of Electrical and Electronics Engineers*) angeboten. *Frame*

Relay Services und SMDS (*Switched Multimegabit Data Services*) sind zwei solcher Hochgeschwindigkeitsdatendienste.

Frame Relay Services basieren auf einer Weiterentwicklung der herkömmlichen Paketvermittlungstechnik (nach X.25). Ziel dieser Weiterentwicklung war, die Paketvermittlungstechnik schneller zu machen. Hierzu wurden die unterschiedlichsten Maßnahmen eingeführt. Die beiden wichtigsten waren:

Frame Relay

- Verschiedene Flusskontroll- und Fehlerkorrekturmaßnahmen, die bei der Paketvermittlung abschnittsweise durchgeführt werden, wurden weggelassen. Dies wurde insbesondere durch die niedrige Fehlerrate und die hohe Übertragungsrate von Glasfaserstrecken ermöglicht bzw. gefordert.
- Es wurde die Verlagerung aller für die Vermittlung eines Rahmens erforderlichen Informationen in den Rahmenkopf vorgenommen.

Die zweite Maßnahme ermöglicht, die Rahmen, die eine variable Länge von bis zu 8192 Byte haben können, durch das Netz auf einem zuvor festgelegten Pfad zu übermitteln. Der Name *Frame Relay* d. h. Rahmenübermittlung deutet dies an. *Frame Relay Services* wurden zunächst von ANSI (*American National Standards Institute*) standardisiert (T1.606, 617, 618) und werden seit 1988 von CCITT (*Comité Consultatif International Télégraphique et Téléphonique*) (heute ITU-T) empfohlen (I.233, Q.922, Q.933). Zurzeit wird der Dienst in verschiedenen Ländern für Bitraten von beispielsweise 56 kbit/s, 64 kbit/s, 1,5 Mbit/s, 2 Mbit/s und sogar bis 45 Mbit/s angeboten.

SMDS ist eine von Bellcore in den USA entwickelte Dienstspezifikation für einen paketerorientierten, verbindungslosen Hochgeschwindigkeitsdatendienst im Weitverkehrsbereich. Verbindungslos bedeutet, dass (im Gegensatz zu *Frame Relay*) kein Pfad im Netz für die Übermittlung der Datenpakete vorab festgelegt wird. Die Pakete können verschiedene Wege durch das Netz nehmen und sich auch überholen. Sie müssen am Netzausgang reassembliert (d. h. wieder in die richtige Reihenfolge gebracht) werden.

SMDS

Der Dienst basiert auf der DQDB-Technologie, d. h. insbesondere, dass die Pakete auch Zellen genannt, eine feste Länge von 53 Byte haben und kompatibel mit dem ATM-Zellenformat sind. Der Dienst wird in verschiedenen Ländern für Bitraten von 1,5 bis zu 34 Mbit/s angeboten.

2.3.2 Teledienste

Während Übermittlungsdienste durch die Spezifikation der transportorientierten Schichten des OSI-Modells charakterisiert werden, nutzen Teledienste unterschiedliche Netze und somit deren transportorientierte Schichten um die gewünschten Anwendungen zu realisieren. Sie werden durch die Spezifikation der anwendungsorientierten Schichten charakterisiert. Im Folgenden lernen wir einige typische Teledienste aus den Bereichen Text, Graphik, Daten, Bild, Sprache und Bewegtbild kennen.

2.3.2.1 Teletex

Teletex **Teletex** (Bürofernschreiben) wurde erstmals auf der Hannover-Messe 1980 vorgestellt und 1981 als Dienst der DBP angeboten. 1982 wurde er von der DBP auf die inzwischen verabschiedete internationale Norm (s. ITU-T Empfehlungen der Serie T und F <http://www.itu.int/home/index.html>) umgestellt. Nach rund 19.000 Teilnehmern Ende 1988 waren Ende 1993 nur noch etwa 6.000 Teilnehmer an den Dienst angeschlossen. Die Teilnehmerzahl war stark rückläufig, so dass der Dienst seit dem 1.7.1993 nicht mehr angeboten wird. Telefax und später E-Mail haben den Teletex-Dienst, der an den Teletex-Zeichensatz gebunden war und eine Übertragungsgeschwindigkeit von lediglich 2400 bit/s hatte, überflüssig gemacht. Er soll dennoch als klassischen Textdienst etwas näher angesehen werden.

Der Teletexdienst ermöglicht Textaustausch zwischen beliebigen Teilnehmern im nationalen und internationalen Verkehr ohne vorherige Absprache; entsprechend sind alle Kommunikationsebenen des Grunddienstes festgelegt. Die Textübermittlung ist seitenorientiert und inhalts- und formgetreu. Bei einer Bitübertragungsrate von 2.400 bit/s dauert die Übertragung einer Seite (typisch für Büroanwendungen sind im Mittel ca. 1.660 Zeichen einschließlich ca. 400 Zeichen für Steuerung) etwa 5,5 Sekunden. Im Netz der Telekom wurde der Dienst im Datex-L Netz abgewickelt, in anderen Ländern auch im paketvermittelten Datennetz oder im Fernsprechnetz über Modemübertragung (z. B. Österreich, Schweiz). Der Zeichenvorrat von Teletex (Abb. 2.3-10) entspricht etwa dem einer Büroschreibmaschine; er beinhaltet Groß- und Kleinbuchstaben, Ziffern und Sonderzeichen. Es ist möglich, Texte zu unterstreichen, zu tabellieren und in verschiedenen Zeilen- und Zeichenabständen (Grunddienst mit Zeichenabstand 1/10 Zoll) und Hoch- oder Querformat darzustellen.

				b ₈	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	
				b ₇	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	
				b ₆	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	
				b ₅	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	
					0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
b ₄	b ₃	b ₂	b ₁																		
0	0	0	0	0				SP	0	@	P		p				°		Ω	K	
0	0	0	1	1				!	1	A	Q	a	q				i	±	`	Æ	æ
0	0	1	0	2				"	2	B	R	b	r				c	²	'	Ð	ð
0	0	1	1	3				(1)	3	C	S	c	s				£	³	^	á	ä
0	1	0	0	4				(2)	4	D	T	d	t				\$	x	~	Ĥ	ĥ
0	1	0	1	5				%	5	E	U	e	u				¥	μ	-		1
0	1	1	0	6				&	6	F	V	f	v				#	¶	~	IJ	ij
0	1	1	1	7				'	7	G	W	g	w				§	°	°	L	l
1	0	0	0	8	BS			(8	H	X	h	x				¤	÷	°°	Ł	ł
1	0	0	1	9)	9	I	Y	i	y							Ø	ø
1	0	1	0	10	LF			*	:	J	Z	j	z						°	Œ	œ
1	0	1	1	11				+	;	K	[k		PLD	CSI	«	»	,		o	ß
1	1	0	0	12	FF			,	<	L		l		PLU			¼	(3)		P	p
1	1	0	1	13	CR			-	=	M]	m					½	"		Ŧ	ŧ
1	1	1	0	14				.	>	N		n					¾	ł		D	η
1	1	1	1	15				/	?	O	_	o							¿	˘	'n

- (1) bei Empfang als # auszuwerten
- (2) bei Empfang als □ auszuwerten
- (3) Die „Unterstreichen ohne Schreibrift“ kann mit jedem anderen Schriftzeichen kombiniert werden
-  Gerasterte Felder kennzeichnen Bit-Kombinationen, die einer künftigen Normung von Steuerfunktionen vorbehalten sind
-  Freie Felder kennzeichnen Bit-Kombinationen, die einer künftigen Normung von Schriftzeichen vorbehalten sind

Abb. 2.3-10: Teletex-Schriftzeichensatz

Das Telexkonzept war so ausgelegt, dass das Endgerät funktional aus zwei Teilen bestand (Abb. 2.3-11). Ein lokaler Teil, bestehend aus Tastatur, Drucker, Steuerung, Speicher und wahlweise Bildschirm, ermöglichte die ungestörte Abwicklung lokaler Büroarbeiten wie Texterstellung, Textverarbeitung, Textspeicherung und Ein-

und Ausgabe der zu übermittelnden Dokumente nach Bedarf. Der Kommunikationsteil, bestehend aus Steuerung, Sende- und Empfangsspeicher und Übertragungseinrichtungen, wickelte den Dokumentenaustausch mit anderen Teilnehmern ab, zeigte den Empfang von Dokumenten optisch an und führte ein Sende- und Empfangsjournal.

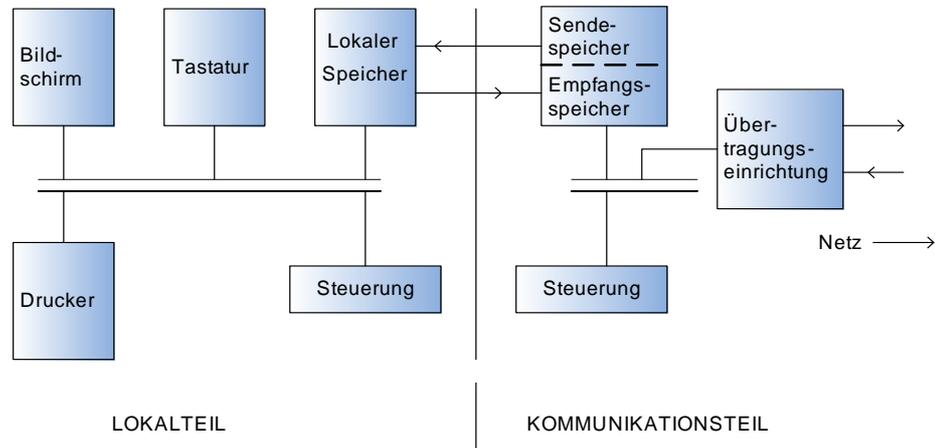


Abb. 2.3-11: Konzept der Teletex-Endeinrichtung

2.3.2.2 Videotext

Videotext *Videotext* (auch Teletext genannt) ist ein Verteildienst, bei dem eine begrenzte Anzahl gespeicherter Bildschirmseiten zyklisch an die Teilnehmer gesendet werden. Die Seiten bestehen aus 24 Zeilen je 40 Zeichen. Der Zeichenvorrat besteht aus ca. 300 alphanumerischen und Graphik-(Mosaik) Zeichen, sowie Steuerzeichen. Die Verteilung der Informationsseiten wird in der vertikalen Austastlücke des normalen Fernsehsignals vorgenommen (Abb. 2.3-12).

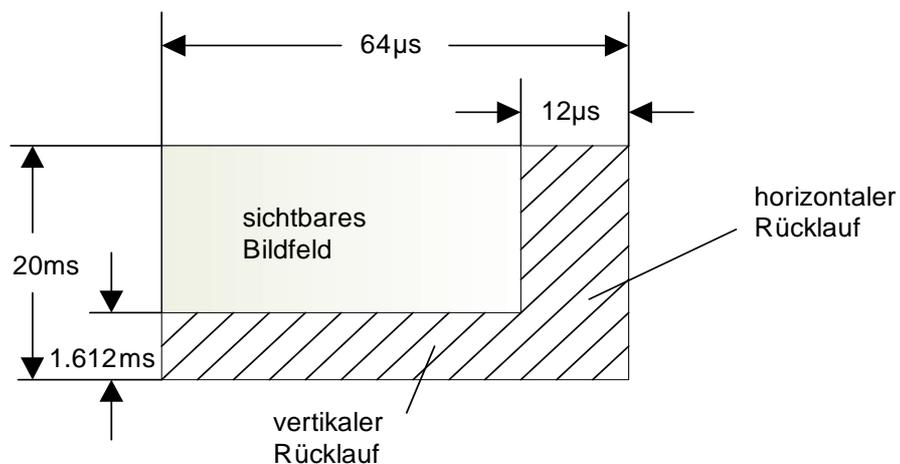


Abb. 2.3-12: Flächenschema des Fernsehrasters

In der europäischen 625-50 Fernsehnorm (625 Zeilen pro Bild, 50 Halbbilder pro Sekunde) besteht die vertikale Austastlücke aus 25 von Bildinformationen freigehaltenen Leerzeilen; hiervon werden bis zu 10 Zeilen für Videotext genutzt. Diese nutzbaren Leerzeilen treten 25 mal in der Sekunde auf, so dass bei Verwendung von 4 Zeilen für Videotext und 24 Videotextzeilen pro Videotextseite ca. 4 Seiten pro Sekunde übertragen werden können. Bei einer Zyklusdauer von 24 Sekunden würde dann das gesamte Videotext-Informationsangebot aus ca. 100 Seiten bestehen. Oft abgerufene Seiten können dabei mehrmals pro Zyklus gesendet werden, um die mittlere Wartezeit zu verkürzen. Das Videotextempfangsgerät (Abb. 2.3-13) besteht aus einem gewöhnlichen Fernsehbildschirm mit einem Videotextzusatz, bestehend aus einem Videotextdecoder, einem Seitenspeicher und einem Zeichengenerator. Der Decoder wählt die über die Fernbedienung ausgewählte Seite aus den empfangenen Informationen aus, decodiert sie und gibt sie zyklisch an den Seitenspeicher weiter. Der Zeichengenerator erzeugt hieraus die gewählte Seite auf dem Bildschirm. Heute werden überwiegend Farbfernseher mit eingebautem Videotextdecoder angeboten. Videotext wurde erstmals 1971 in Großbritannien vorgestellt. In der BRD wurde Videotext 1980 gemeinsam von ARD und ZDF eingeführt. Inzwischen strahlen die meisten Sender eigene Videotextdienste aus. Außer Nachrichten und diversen regionalen und überregionalen Informationen werden auch Untertitel für verschiedene Fernsehsendungen übertragen.

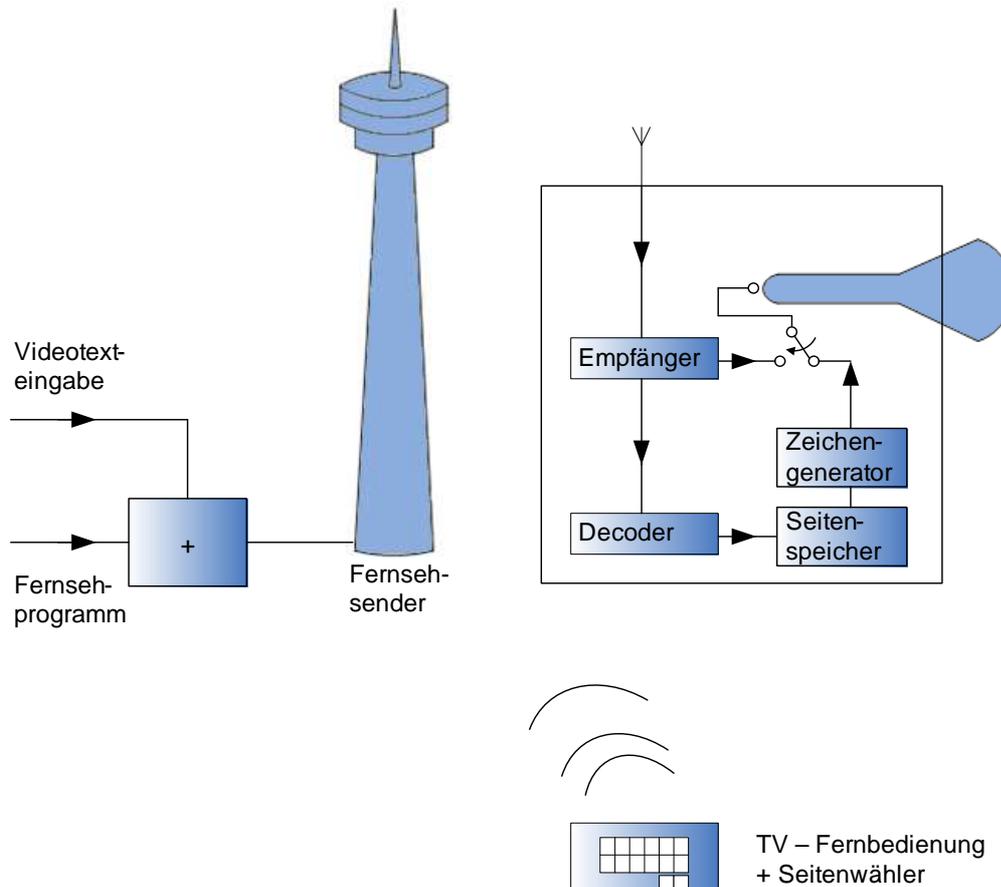


Abb. 2.3-13: Videotext Systemkonzept

2.3.2.3 Telefax

Telefax *Telefax*, auch **Faksimile** oder **Fernkopieren** genannt, geht zurück auf die Bildtelegraphie, die z. B. für die Übertragung von Pressebildern bereits in den 30er Jahren verwendet wurde. Eine zu übertragende Vorlage (Brief, Zeichnung oder Bild) wird abgetastet, (redundanzmindernd) codiert und mit Hilfe eines Modems im Fernsprechnet oder im Basisbandverfahren im Datennetz übertragen und am Empfangsort wieder in eine Bildvorlage (*Hardcopy*) umgewandelt. Bisher werden Telefaxgeräte überwiegend für die Übertragung von schwarz-weiß Bildern (ggf. mit Grautönen) verwendet. Der heutige Telefaxdienst basiert auf ITU-T-Empfehlungen (s. Tabelle 2.3-2), die zwischen vier Telefax Gerätegruppen unterscheiden:

Gruppe I Geräte nach ITU-T-Empfehlung T.2 benötigen etwa 6 Minuten für die Übertragung einer DIN A4 Seite. Sie werden in der BRD nicht mehr angeboten.

Gruppe II Geräte nach ITU-T-Empfehlung T.3 benötigen etwa 3 Minuten für die Übertragung einer DIN A4 Seite. Die Vorlagen werden mit 3,85 Zeilen/mm Vertikal- und 6 Bildpunkte/mm Horizontalauflösung abgetastet. Für die Übertragung im Fernsprechnet wird das Restseitenband-Amplituden-Phasenmodulations-(RSB-AM-PM) Verfahren verwendet. Eine einfache Zeichengabe durch Signaltöne wird als Steuerprozedur verwendet.

Gruppe III Geräte nach ITU-T-Empfehlung T.4 benötigen etwa 1 Minute für die Übertragung einer DIN A4 Seite. Die Vorlagen werden mit 7,7 Zeilen/mm (alternativ 3,85 Zeilen/mm) Vertikal- und 8 Bildpunkte/mm Horizontalauflösung abgetastet. Für die Bildpunktcodierung wird der modifizierte Huffman Code (Laufängen-Codierung) verwendet. Für die Übertragung im Fernsprechnet wird 8/4-wertige Phasen-Differenz-Modulation mit der Übertragungsgeschwindigkeit von 4,8/2,4 kbit/s verwendet. Die Geräte der Gruppe III sind abwärtskompatibel zu den Geräten der Gruppe II. Geräte der Gruppe III haben heute die größte Ausbreitung.

Gruppe IV Geräte benötigen etwa 10 Sekunden pro DIN A4 Seite bei einer Übertragung mit 64 kbit/s. Geräte der Gruppe IV sind für den Einsatz im ISDN mit einer Übertragungsgeschwindigkeit von 64 kbit/s konzipiert. Sie ermöglichen außer der Übertragung abgetasteter schwarz-weiß Bilder verschiedener Auflösung (Horizontal- und Vertikalauflösung von 8 bis 16 Punkte/mm) auch die Übertragung von teletexcodierten Schriftzeichen, d. h. es ist eine Mischung von bild- und zeichencodierter Information innerhalb einer Vorlage möglich.

Tab. 2.3-2: CCITT-Empfehlungen für Telefax

T.0	Klassifizierung von Fernkopierern
T.2	Telefax Gruppe I
T.3	Telefax Gruppe II
T.4	Telefax Gruppe III
T.6	Telefax Codierung für Gruppe IV
T.10	Telefax Übertragung
T.20-T.23	Standardisierte Testvorlagen für Telefax
T.30	Prozeduren für Telefax-Übertragung
T.62	Steuerprozeduren für Teletex u. Telefax Gruppe IV
T.503	Dokumentenprofil Telefax Gruppe IV
T.563	Eigenschaften von Telefax Gruppe IV Geräten
T.611	Appli/Com für Telefax Gruppe III, Gruppe IV, Teletex und Telex
T.160-F.190	Internationale Telefaxdienste

Der Telefaxdienst in der BRD wird im Fernsprechnetz bzw. ISDN abgewickelt. Als Basisdienst wird die jeweilige Auflösung der Geräteklassen und die entsprechende Übertragungsgeschwindigkeit angeboten. Als Ergänzungsmerkmale werden unter anderem Merkmale wie Kennungsaustausch beim Verbindungsaufbau, Senden von mehreren Vorlagen über eine hergestellte Verbindung, automatisches (bedienerloses) Senden (z. B. nach Zeit) und Empfangen usw. angeboten.

2.3.2.4 SMS/MMS

Das GSM-Protokoll sieht die Möglichkeit vor, im Signalisierungskanal paketorientierte Nutzdaten zu übermitteln. Nach der Einführung des GSM-Mobilfunkdienstes in Europa stellte sich heraus, dass diese Möglichkeit parallel zum Telefongespräch eine kurze textorientierte Nachricht zwischen Handys auszutauschen, von den Teilnehmern sehr gut angenommen wurde. Dieser **SMS** (*Short Message Service*) genannte Dienst war zunächst kostenlos. Heute ist er die größte Einnahmequelle der Mobilfunkbetreiber. Inzwischen wird der Dienst auch im Festnetz angeboten und man kann von einem PC unter Verwendung des Internetprotokolls SMS (z. B. Börsennachrichten, Verkehrsnachrichten usw.) versenden. Laut [RegTP] wurden im Jahre 2004 20,6 Mrd. SMS aus dem Mobilfunknetz zu einem Durchschnittspreis von 0,17 € pro SMS versandt.

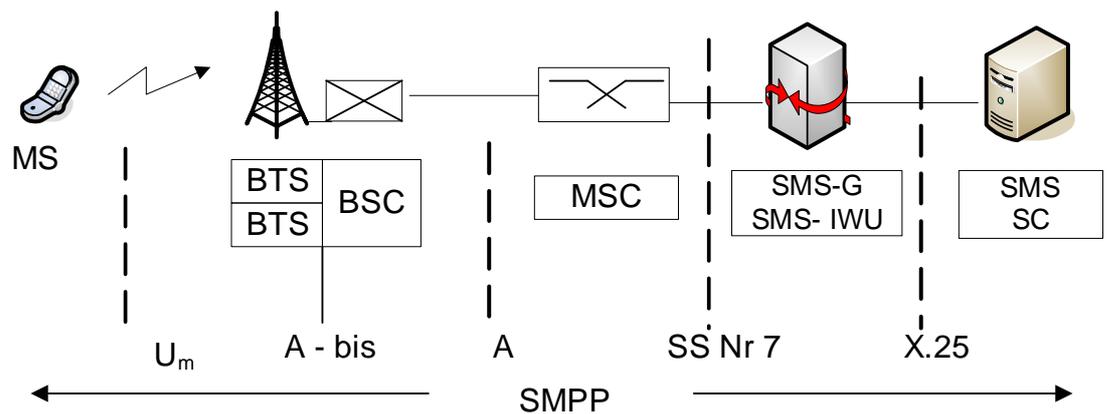
SMS

Eine SMS besteht aus einem Kopf (*Header*) und dem Inhalt (*Body*). Im Kopf werden grundlegende Informationen über die Nachricht angegeben, so z. B. Absendernummer, Empfänger Nummer, verwendete Codierung, verwendeter Zeichensatz (bspw. Lateinisch oder Arabisch), Gültigkeit der Nachricht usw.

Für die Codierung des Inhalts gibt es drei Möglichkeiten. Für Texte mit lateinischen Buchstaben (und einigen Sonderzeichen) wird eine 7-Bit Codierung verwendet. Die SMS darf maximal 160 Zeichen (d. h. 160 Zeichen x 7 Bit/Zeichen = 1120 Bit) enthalten. Daten (wie Bilder, Klingeltöne usw.) werden mit 8 Bit codiert und dürfen

maximal 140 Zeichen (d. h. 140 Zeichen x 8 Bit/Zeichen = 1120 Bit) enthalten. Textmeldungen in anderen Sprachen (Arabisch, Kyrillisch usw.) werden mit 16 Bit codiert und dürfen maximal 70 Zeichen enthalten (70 Zeichen x 16 Bit/Zeichen = 1120 Bit).

In Abb. 2.3-14 ist die Übermittlung einer SMS über ein GSM-Netz dargestellt. Eine SMS von einem Handy wird im Signalisierkanal bis zum *SMS Gateway* und von hieraus über ein Datennetz (im dargestellten Fall über ein Paketvermittlungsnetz nach X.25) zum *SMS Service Center* übertragen. Umgekehrt wird eine SMS vom *Service Center* über eine *SMS Interworking Unit* in den GSM Signalisierkanal und zum Handy weitergeleitet. Bei der Übermittlung handelt es sich um ein einfaches **SMPP** Protokoll (**SMPP** - *Short Message Peer-to-Peer Protocol*) nach dem Speichervermittlungsprinzip, d. h. die Nachricht wird zwischengespeichert. Einige Anbieter bzw. Handys ermöglichen eine Unterteilung einer langen Nachricht in mehreren SMS, welche dann beim Empfänger wieder als eine zusammenhängende Nachricht angezeigt werden kann.



MS	Mobile Station
BTS	Base Transceiver Station
BSS	Base Station System
BSC	Base Station Controller
MSC	Mobile Switching Center
SMS G	SMS Gateway
SMS IWU	SMS Interworking Unit
SMS SC	SMS Service Center
SMPP	Short Message Peer-to-Peer Protocol

Abb. 2.3-14: Übermittlung einer SMS über ein GSM-Netz

Mit Mobilfunknetzen der dritten Generation (3GS 3rd - *Generation Systems* bzw. UMTS - *Universal Mobile Telecommunication System*) stehen größere Bandbreiten zur Verfügung als bei GSM-Netzen. Somit wird es möglich Nachrichten mit

multimedialen Inhalten an mobile Geräte zu senden bzw. zwischen ihnen auszutauschen. **MMS** (*Multimedia Message Service*) ist eine Weiterentwicklung der SMS in diese Richtung. MMS verwendet eine XML-basierte Sprache **SMIL** (*Synchronized Multimedia Integration Language*) um Sprache, Ton, Text, Graphiken, Bilder und Videos zu integrieren. SMIL ermöglicht die Positionierung, Synchronisation und Präsentation von multimedialen Objekten. Bei den Präsentationen können somit Sprache, Ton, Text, Graphiken, Bilder und Videos in einer festgelegten zeitlichen Reihenfolge visualisiert werden. Es wird erwartet, dass dieser Dienst eine große Akzeptanz findet. Laut [RegTP] wurden im Jahr 2004 91 Mio MMS in Deutschland zu einem Durchschnittspreis von 0,39 € je MMS verschickt.

MMS
SMIL

Beispiel 2.3-2:

Nach [RegTP] kostet 1 SMS in Deutschland im Durchschnitt 0,17 €. Gehen wir davon aus, dass eine SMS die maximale Länge von 160 Zeichen d.h. $160 \text{ Zeichen} \cdot 7 \cdot \frac{\text{bit}}{\text{Zeichen}} = 1120 \text{ bit}$ hat. Für 1 kbit Datenvolumen zahlt man somit $\frac{0,17}{\text{SMS}} \text{ €} \cdot \frac{1}{1120} \cdot \frac{\text{SMS}}{\text{bit}} \cdot 1000 \text{ bit} = 0,15 \text{ €}$

Beim Fernsprechen im ISDN haben wir 64 kbit/s d.h. $64 \cdot 60 \cdot \frac{\text{kbit}}{\text{min}} = 3840 \text{ kbit/min}$. Bei dem für SMS berechneten Preis würden wir somit

$3840 \cdot \frac{\text{kbit}}{\text{min}} \cdot \frac{0,15}{\text{kbit}} \text{ €} = 576 \text{ €}$ pro Minute bezahlen!

Diese etwas pauschale Rechnung in der die Kosten für die Vermittlung der SMS durch das Netz nicht berücksichtigt wurden, zeigt warum SMS zur größten Einnahmequelle der Netzbetreiber wurde.

2.3.2.5 X.400, Mailbox, SMTP, E-Mail

Mailbox, **X.400**, **E-Mail** (Electronic-Mail), **SMTP** (*Simple Mail Transport Protocol*) und verwandte Bezeichnungen stehen für einen Dienst, der es ermöglicht, Mitteilungen zwischen Teilnehmern auszutauschen. Wie bei SMS und MMS handelt es sich hier um einen Speicherdienst, d.h. die Mitteilungen werden im Netz (auf einem *Server*) so lange gespeichert, bis der Empfänger sich meldet bzw. einloggt. Bereits Anfang der siebziger Jahre wurden Mailboxdienste in Großrechnerumgebungen angeboten. Die Anwendung von Textmailsystemen verbreitete sich jedoch erst mit dem Aufkommen von (über LANs) vernetzten PCs. Die ITU-T-Empfehlung X.400 für den Mitteilungsdienst **MHS** (*Message Handling System*) wurde in der ersten Fassung 1984 verabschiedet und seitdem mehrmals überarbeitet.

Mailbox
X 400
E-Mail
SMTP

In X.400 Netzen gibt es stets nur namentlich bekannte Serverbetreiber und nachvollziehbare Wege auf denen die Nachrichten durch das Netz übermittelt werden. Somit hat man auch kein Problem mit unaufgefordert versandter Massenwerbung, den sogenannten **SPAMs** (*Spiced Pork And Meat*).

SPAM

Die DBP führte Mitte 1984 den elektronischen Mitteilungsdienst **Telebox** probeweise ein. Seit Oktober 1984 wird er als regulärer Dienst angeboten und wurde 1991

an die ITU-T-Empfehlungen X.400 angepasst. Heute wird er unter der Bezeichnung Mailbox X.400 vor allem für sensiblen Datenverkehr angeboten.

Inzwischen werden E-Mails überwiegend unter Nutzung des Internet Protokolls (in der Regel IPv4) und Verwendung des SMTP-Protokolls versandt. Obwohl diese Möglichkeit datensicherheitsmäßig dem X.400 Protokoll völlig unterlegen ist, verdrängt sie allmählich Mailboxen nach X.400. Sicherheitsbewussten Anwendern wird deshalb eine Ende-zu-Ende Verschlüsselung und Authentifikation dringend empfohlen. Die heute in Zusammenhang mit E-Mail verwendeten kryptologischen Verfahren sind PGP (*Pretty Good Privacy*) und S/MIME (*Secure/ Multipurpose Internet Mail Extensions*). Laut einer Pressemeldung von heise online vom 3. Juli 2004 sind weltweit über 60 %, in Deutschland mehr als 40 % der E-Mails Spams.

Bei der E-Mail-Kommunikation handelt es sich um eine *Client/Server* Konfiguration. Der *Client* (auch *Mail User Agent* - MUA genannt) ist ein Programm auf dem Rechner des Anwenders mit dem E-Mails erstellt und bearbeitet werden können. Bekannte E-Mail Programme sind Outlook und Pegasus. Während der *Client* nicht immer eingeschaltet ist, ist der Mailserver (auch *MTA* - *Mail Transfer Agent* genannt) beim E-Mail Dienstanbieter (*Service Provider*) stets an. Eine für den Anwender ankommende E-Mail wird auf dem *Server* gespeichert bis der Teilnehmer sich dort einloggt. Für die Kommunikation zwischen dem *Client* und dem *Server* wird in der Regel das **POP3** (*Post Office Protocol Version 3*) verwendet. **IMPS** (*Internet Message Access Protocol*) ist ein weiteres Protokoll das zwischen *Client* und *Server* eingesetzt wird. Dieses Protokoll erlaubt, dass die ankommenden E-Mails auf dem *Server* bleiben. Man kann also auch herkömmliche Internetbrowser als *Client* verwenden. Um E-Mails zwischen *Server* (MTAs) auszutauschen wird in der Regel SMTP oder seine erweiterte Version **ESMTP** (E für *Enhanced*) eingesetzt. Es handelt sich um ein Push-Protokoll, d. h. der Sender wird aktiv. In Abb. 2.3-15 ist eine typische E-Mail Konfiguration mit mehreren MTAs und verwendeten Protokollen dargestellt.

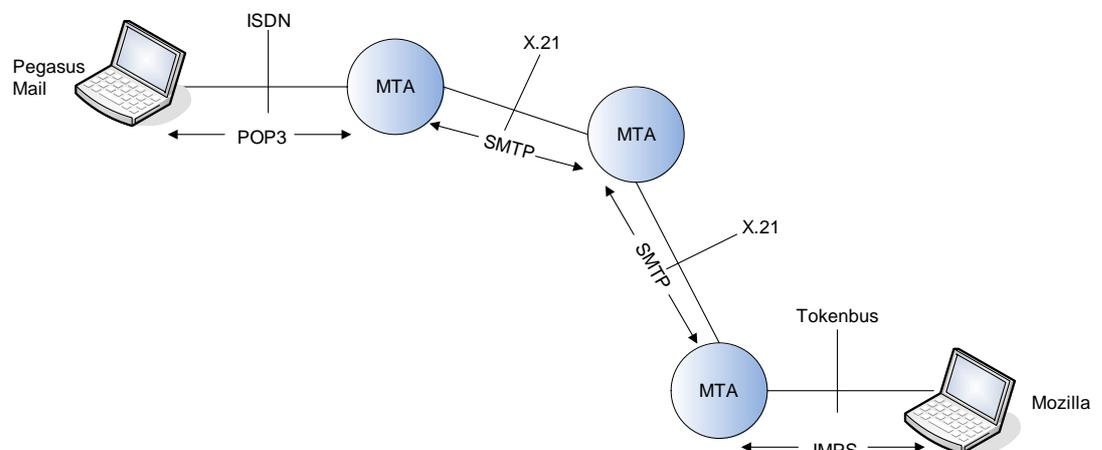


Abb. 2.3-15: Eine typische E-Mail *Client/Server* Konfiguration mit verwendeten Netzen und Protokollen

Eine E-Mail besteht aus zwei Teilen, dem Kopf (*Header*) und dem Inhalt (*Body*) zu dem auch etwaige Anhänge (sogenannte *Attachments*) gehören. Der Kopf enthält administrative Daten (s. Tabelle 2.3-3).

Tab. 2.3-3: Einige typische E-Mail Kopffelder

E-Mail-Kopffeld	Bedeutung
<i>From</i> oder <i>Sender</i>	E-Mail Adresse des Absenders
<i>Return-Path</i>	Adresse, an die unzustellbare Nachrichten bzw. Fehlermeldungen und Warnungen zu senden sind.
<i>Received</i>	Hier trägt jeder Rechner, den die Nachricht auf ihrem Weg durchläuft, seine Identität und weitere Angaben ein; dies kann bei der Fehlersuche hilfreich sein
<i>Message-ID</i>	Diese Zahl wird vom absendenden Rechner einer E-Mail zugeordnet und von jedem unterwegs beteiligten Rechner in eine Logdatei eingetragen.
<i>Date</i>	Datum und Zeitpunkt des Absendens der Nachricht. Bei der Konfigurierung des Mailprogramms werden i. d. R. die Startwerte eingegeben.
<i>Subject</i>	Betreff
<i>To</i>	Empfänger der Nachricht, dies kann auch eine Mailing-Liste oder Alias-Name sein.
<i>CC</i>	Steht für <i>Carbon Copy</i> : hier werden die Empfänger angegeben, die eine Kopie der Nachricht erhalten.

Der Absender muss lediglich den oder die Empfänger angeben, wer gegebenenfalls eine Kopie erhält und den Betreff ausfüllen. Die restlichen Daten werden vom MUA automatisch ausgefüllt. Die E-Mail Adresse von Teilnehmern haben die folgende Form:

local@domain

"local" ist dabei der eindeutige Name der Person, des Rechners oder einer Gruppe. Dieser ist dem Mailserver oder *Server* des verwendeten Dienstes bekannt. Typische "local"-Namen sind beispielsweise firoz.kaderali (Vorname.Nachname) oder HI-Et (Hochschullehrer-Elektrotechnik). "domain" ist der Name eines Bereichs. Im Internet werden die Domainnamen durch das **DNS** (*Domain Name System*) verwaltet. Domainnamen sind so aufgebaut, dass Menschen sie sich leicht merken können. Domain Name System ist eine verteilte Datenbank, die hauptsächlich verwendet wird, um Domainnamen in Adressen umzuwandeln. Dies ist vergleichbar mit einem Telefonbuch, das die Namen der Teilnehmer in ihre Teilnehmernummer auflöst. Von DNS kann man auch die umgekehrte Auskunft (Auflösen der numerischen Adresse in Namen) erhalten. Die Namen bzw. Adressen sind weltweit eindeutig. Sie wurden hierarchisch aus Teilnamen oder -adressen zusammengesetzt, die durch Punkte getrennt werden. Der rechts von einem Punkt stehende Name ist übergeordnet. So steht beispielsweise "ks.fernuni-hagen.de" von rechts gelesen, Deutschland, FernUniversität Hagen, Kommunikationssysteme. Die komplette E-Mail-Adresse wäre dann firoz.kaderali@ks.fernuni-hagen.de.

DNS

2.3.2.6 World Wide Web

World Wide Web Das *World Wide Web* (WWW) ist eine der sich am rasantesten entwickelnden Anwendungen des Internets der letzten Jahre. Einerseits findet diese Entwicklung auf technischer Seite statt; andererseits wird das World Wide Web von immer größeren Teilen der Bevölkerung genutzt, beispielsweise von Privatpersonen, Unternehmen, Schulen und Behörden.

Die Entwicklung im WWW nahm ihren Ausgangspunkt im *Laboratory for Particle Physics* (CERN - *Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire*) in der Schweiz. Zur Verbesserung der internen Kommunikation formulierte Tim Berners-Lee einen ersten Vorschlag, wie Informationen in vernetzten Umgebungen mittels Verweisen verknüpft und einfach zugänglich gemacht werden können. 1990 wurde unter seiner Führung eine Version von Programmen zur Erstellung und zum Abruf solcher Dokumente entwickelt. Da die Dokumente neben Text auch darüber hinausgehend, die Struktur beschreibende Informationen enthalten, werden sie mit *Hypertext* bezeichnet. Damals prägte Tim Berners-Lee auch den Begriff *World Wide Web*.

Hypertext

Browser 1992 waren erste Programme, sogenannte *Browser* (aus dem Englischen: lesen, stöbern) frei erhältlich, mit denen man solche Informationsstrukturen - vorerst zeilenorientiert - abrufen konnte. 1993 folgte der erste bildschirmorientierte *Browser* "Mosaic", der vom NCSA (*National Center for Supercomputing Applications*) der Universität in Illinois entwickelt wurde, der die Akzeptanz und Verbreitung weiter vorantrieb. Die Anzahl öffentlich zugänglicher *WWW-Sites* stieg von ca. 50 im Januar 1993 auf ca. 1.700 im Oktober 1994 und auf über 37.000 ein Jahr später. Das World Wide Web hat die Entwicklung des Internet stark gefördert, da es durch die graphische Darstellung auch ohne Vorkenntnisse die Nutzung von Internetressourcen erlaubt.

Der *Web Client* oder *Web Browser* ist eine Software, die den Zugriff auf World Wide Web-Angebote erlaubt. Inzwischen sind die gängigen *Browser* alle bildschirmorientiert und erlauben die unmittelbare Wiedergabe einer Vielzahl von World Wide Web-Elementen. Heute sind der Netscape Navigator, der Microsoft Internet Explorer und der Mozilla Firefox die am weitesten verbreiteten *Web Browser*. Alle sind frei erhältlich.

Die Grundfunktionalität aller *Browser* umfasst die Darstellung der angeforderten Dokumente, Vor- und Zurück-Blättern zwischen Seiten, direkter Sprung zur eigenen Heimatseite, einfache Suche innerhalb eines Dokuments, Ausdrucken und Abspeichern eines Dokuments. Daneben gibt es die Möglichkeit, interessante Adressen in eine persönliche Präferenzliste einzutragen, um sie später schnell erreichen zu können.

Adressenverwaltung Die URL (*Uniform Resource Locator*) dient dazu, weltweit alle *Server* eindeutig zu adressieren. Sie ist folgendermaßen aufgebaut:

Protokoll://Serveradresse/Verzeichnisstruktur/Dateiname

So findet man beispielsweise die Veröffentlichungen des Lehrgebietes Kommunikationssysteme unter http://ks.fernuni-hagen.de/forschung/veroeff/index_veroeff.html.

Das *World Wide Web* ist ein Internetdienst und arbeitet nach dem *Client/Server Model*. Zur Kommunikation zwischen *Client* und *Server* wird das **HTTP** (*Hypertext Transfer Protocol*) verwendet, das neben den Dokumenteninhalten und seiner Struktur auch Informationen über den *Client*, wie Typ und Version des *Browser* und zusätzlich verfügbare Programme, austauscht. Zur Erstellung von Hypertext-Dokumenten wird die HTML (*Hypertext Markup Language*) verwendet, eine abstrakte Beschreibungssprache, die neben dem Inhalt auch den Aufbau der *World Wide Web*-Seiten beschreibt. Zur Adressierung von *Server* und Dokumenten werden sogenannte URLs verwendet, die eine weltweite, eindeutige Referenzierung erlauben.

Der *World Wide Web Server* bietet Dokumente zum Abruf an, verwaltet diese und versendet sie auf Anfrage (nach Prüfung der Zulässigkeit). *World Wide Web Server* haben einen weltweit eindeutigen Namen (die URL), über den sie vom *Client* angesprochen werden. Die Kommunikation erfolgt über das HTTP-Protokoll. Für den Betrieb des *World Wide Web Server* steht Software, die teilweise frei erhältlich ist, für alle gängigen Betriebssysteme zur Verfügung, die sich in Funktionalität und Leistungsfähigkeit jedoch deutlich unterscheiden.

Aufgaben bei der Verwaltung eines *WWW-Server* umfassen Konfiguration des *Server*, z. B. Anzahl möglicher Verbindungen, Statistiken, Aufbau der Verzeichnisstruktur, Verwaltung, Aktualisierung und Freigabe der Dokumente, Verwaltung der Benutzergruppen, Bereitstellung von Angeboten. Des Weiteren müssen Schutzmechanismen, wie z. B. Passwortschutz, verschlüsselte Übertragung usw. eingerichtet werden, und die Integration erweiterter Funktionalitäten (Datenbanken, Formulare, CGI-Skripte) gehört auch zu den Grundaufgaben.

Dokumente werden über die Verzeichnisstruktur, in der sie sich befinden, und die Dateinamen spezifiziert und können vom *Server* abgerufen werden. Dazu ist jedoch eine Serveradresse notwendig. Die Adressierung der *Server* wurde bereits bei E-Mail dargestellt.

Die Grundlage für die im WWW veröffentlichten Dokumente stellt die HTML-Sprache dar, eine plattformunabhängige Dokumentenbeschreibungssprache. HTML-Dokumente bestehen selbst aus reinem Text, enthalten aber neben dem Inhalt generelle Formatierungsanweisungen, wie Schriftgröße, Unterstreichungen, Listenform, Verweise, Befehle zum Einbinden von Grafiken und Tondateien usw. Sie enthalten jedoch keine genauen Layoutvorgaben wie in Textverarbeitungsprogrammen. Der *Browser* interpretiert die Formatierungsanweisung und stellt sie abhängig von den lokalen Einstellungen auf dem Monitor dar; der Benutzer sieht also eine angepasste Version des Dokuments, die z. B. vom Monitor und Betriebssystem abhängen. HTML stellt dadurch ein flexibles, plattformunabhängiges und einfach zu bedienendes Medium für die Informationsdarstellung dar, das jedoch nur bedingt eine einheitliche Darstellung unterstützt.

Das wichtigste Formatierungselement ist der Verweis (*Hyperlink*) der es ermöglicht,

Dokumente untereinander zu verbinden. Beliebigen Text eines Dokuments wird eine URL zugeordnet; durch Anklicken des *Link* mit der Maus gelangt man direkt zu dem referenzierten Dokument. Über *Links* können auch andere Internetdienste direkt aktiviert werden, wie z. B. E-Mail oder *Newsgroups*.

Datenformate Neben Text und Formatierungselementen können verschiedene **Datenformate** wie Graphiken, Tondateien, Videos, Animationen und Programme in eine HTML-Datei integriert werden (s. Abb. 2.3-16). Diese können teilweise direkt in ein HTML-Dokument integriert, über einen *Link* aufgerufen oder auf die eigene Festplatte gespeichert werden. Für manche Formate sind zusätzliche Programme, sogenannte Helferprogramme zur Wiedergabe notwendig, wie zum Beispiel *Audio-player*, *Video-player* oder Programme zum Abspielen von Animationen. Das *World Wide Web* unterstützt damit eine vielfältige Kombination unterschiedlicher digitaler Medien, so dass statt Hypertext auch oft der Begriff *Hypermedia* verwendet wird.

		Extensions
Datenformate	HTML-Format	*.html / *.htm
	Reines Textformat	*.txt
	Portable Document Format (Adobe Acrobat)	*.pdf
	Postscript Format	*.ps
Bildformate	Graphics Interchange Format (GIF)	*.gif
	Joint Photographic Experts Group (JPEG)	*.jpeg / *.jpg
	Erweitertes Basic Mode / Bitmap (XBM)	*.xbm
Audioformate	Audioformate mit verschiedenen Codierungsverfahren	*.aiff, *.au, *.wav, *.voc
Videoformate	Quick Time Format	*.mov
	Moving Pictures Expert Group (MPEG) Format	*.mpeg / *.mpg
Weitere Formate	Autorentool HMCARD	*.hmc
	Komprimierungsformate	*.zip, *.Z, *.gz

Abb. 2.3-16: Typische Datenformate

Neben diversen Formaten ist auch die Verwendung von erweiterten Skriptsprachen möglich, die es ermöglichen, weitere Funktionen über HTML-Seiten zu realisieren.

Java Skript Eine solche Erweiterungsmöglichkeit ist Java Skript, das direkt vom *Browser* der dritten Generation interpretiert werden kann und mit Hilfe dessen sich Aktionen, wie das Öffnen eines neuen Fensters oder Aktionen beim Laden oder Verlassen eines Dokumentes realisieren lassen. Alternativ können spezielle Programme mit

herkömmlichen Programmiersprachen erstellt werden, die dann von HTML-Seiten aus, zum Beispiel über das **CGI** (*Common Gateway Interface*) aufgerufen werden können. Diesen Programmen können über Textfelder auch Daten vom *Client* eingespeist werden. Auf diesem Weg lassen sich Datenbanken, Programme oder CD-ROMs ansprechen.

CGI

Bei diesen Anwendungen ist jedoch darauf zu achten, dass die Übertragung über HTTP unverschlüsselt stattfindet. Werden persönliche oder vertrauliche Daten abgefragt, sollte auf diesen Tatbestand hingewiesen werden, gegebenenfalls muss mit Hilfe von Verschlüsselung für eine vertrauliche Verbindung gesorgt werden. Auch serverseitig müssen Schutzvorkehrungen getroffen werden, damit keine unerwünschten Aktionen durchgeführt werden, da durch den *Client* initiiertbare Aktionen generell ein Sicherheitsrisiko für den *Server* darstellen. Die gesicherte Übermittlung wird durch die Adresse `https://` angezeigt ("*s*" steht hierbei für *secure*).

Bei den Suchmechanismen, die auch Suchmaschinen (*Search Engines*) genannt werden, handelt es sich um Programme, die sich durch das *World Wide Web* bewegen und Dokumente und deren Inhalt in eine Datenbank einspeisen, worauf die Benutzer dann zugreifen können. Der Inhalt wird dabei oft über Speichern aller Hauptwörter des Textes (Volltextsuche) erfasst, wobei Titel, Überschriften und Schlagwörter teilweise stärker bewertet werden. Die bekannteste Suchmaschine ist google (www.google.de).

Suchmaschinen

Nachteile von Suchmaschinen sind, dass bei einfachen Anfragen und häufig verwendeten Wörter, eine nicht zu bewältigende Anzahl von Dokumenten geliefert wird, die u. U. nicht einmal zum gewünschten Themengebiet gehören. Gute Suchmaschinen bieten deshalb diverse Suchanfragemöglichkeiten an, wie die Kombination von Wörtern, Suche nach Teilwörtern, Einschränkung der *Domain* und der Sprache u. a. Darüber hinaus hängt die Qualität der Ergebnisse von der erfassten Datenmenge ab (wobei keine Suchmaschine das ganze Internet referenziert), sowie der Aktualität der Erfassung.

2.3.2.7 Newsgroups

Newsgroups gehören zu den traditionellen Diensten vernetzter Computer und dienen als virtuelle Diskussionsforen. Sie ermöglichen den weltweiten Austausch von thematisch organisierten Informationen mit einer Vielzahl von Teilnehmern. Da *Newsgroups* allgemein zugänglich sind, d. h. jeder mit entsprechender Software *Newsarticles* lesen und selbst dazu beisteuern kann, können sie in ihrer Funktionsweise mit elektronischen „Schwarzen Brettern“ verglichen werden – allerdings mit einer weitaus größeren Reichweite.

Newsgroups

Newsgroups waren von jeher ein wichtiges Element des wissenschaftlichen Austausches in der akademischen Welt. Maßgeblich dafür war einerseits die thematische Organisation der Information, und andererseits der asynchrone, text-basierte und plattformunabhängige Zugriff, der eine weitgehende Unabhängigkeit von Ort und Zeit erlaubt. Zudem sind die Anforderungen an Hardware, Rechnerleistung und Übertragungskapazitäten sehr gering. Diese Eigenschaften haben dazu geführt, dass

Newsgroups auch außerhalb der Universitäten eine wichtige Rolle spielen, was man an der weiterhin wachsenden Zahl von *Newsgroups* zu Themen aus den unterschiedlichsten Bereichen sehen kann.

Die *Newsarticles* haben eine große Ähnlichkeit mit E-Mails. Im Vergleich zu E-Mails können *Newsgroups* jedoch den Austausch zwischen beliebig großen, sich ständig verändernden Gruppen verwalten, ohne die Netzkapazitäten in einem mit E-Mail vergleichbaren Maße zu belasten. Durch die Realisierung über ein *Client/Server Model*, finden viele Aktionen nur zwischen den sogenannten *Newsserver* statt, wie zum Beispiel Austausch, Verwaltung und Speicherung der *Newsarticles*. Für den Teilnehmer, der mit einem *Newsclient* oder *Newsreader* arbeitet, besteht der Vorteil darin, dass er Informationen nur bei Bedarf abrufen kann. Eine Verwaltung der Teilnehmer ist dadurch nicht nötig.

Usenet Weltweit gibt es zahlreiche *Newssysteme*. Das bekannteste ist hierbei das **Usenet** (*Unix User network*). Die Entwicklung des Usenets begann 1979 an zwei Universitäten des Staates North Carolina, USA. Aufbauend auf V7 Unix und **UUCP** (*Unix-to-Unix CoPy*) wurden Skripte entwickelt, die den Austausch zwischen Computern beider Universitäten erlaubten. Mitte der 80er Jahre wurde eine Version implementiert, die zur Übertragung der Informationen das NNTP (*Network News Transfer Protocol*, spezifiziert in RFC 977 - **Request For Comments**) verwendete, das seinerseits auf TCP/IP-Verbindungen aufbaut, anstelle des früher verwendeten UUCP. Ab diesem Zeitpunkt wurde das System auch als *Client/Server Model* realisiert, so dass spezielle *Usenet-Software* nur noch für die als *Newsserver* fungierenden Computer nötig ist, die sowohl den Austausch der *Newsarticles* und *Newsgroups*, als auch die Speicherung und die Verwaltung vornehmen. Zur Teilnahme an *Newsgroups* wird lediglich eine einfache *Client Software*, ein *Newsreader*, benötigt.

Newsserver Die heute über das Usenet verfügbaren *Newsgroups* werden über weltweit verteilte *Newsserver* verwaltet, die den Usenet-Konventionen folgen. Das Weiterreichen der Informationen geschieht über gegenseitige Vereinbarungen zwischen den Administratoren von zwei *Newsserver*. *Server*, von denen Informationen bezogen werden, werden *Newsfeed* genannt. Ein *Newsserver* kann dabei Informationen von verschiedenen Quellen beziehen. Der Administrator legt dabei fest, welche Gruppen bezogen werden und auf dem eigenen *Newsserver* abrufbar sind. Restriktionen bestehen im entstehenden Kommunikationsaufwand und Speicherbedarf auf dem Rechner, auf dem der *Newsserver* installiert ist. Zudem kann es sinnvoll sein, thematisch uninteressante Gruppen auszuschließen. Der Administrator eines *Newsserver* ist auch für die Einrichtung neuer *Newsgroups* zuständig.

Die *Newsgroups* sind hierarchisch aufgebaut. Innerhalb des Usenets wurden dazu die folgenden sieben Hauptgruppen definiert (s. Tabelle 2.3-4).

Tab. 2.3-4: Hauptgruppen des Usenets

comp.*	Gruppen über computerbezogene Themen
News.*	Gruppen über aktuelle Themen
Rec.*	Gruppen über Hobbies, Kunst, usw.
Sci.*	Gruppen zu wissenschaftlichen Themen
Soc.*	Gruppen zu gesellschaftsrelevanten Themen
Talk.*	Gruppen mit Diskussionen zu kontroversen Themen
Misc.*	Gruppen, die in keine der obigen oder mehrere Gruppen passen

Die Teilnahme an *Newsgroups* findet mittels Programmen statt, die auf dem eigenen Rechner installiert sind, sogenannte *Newsreader*. Diese greifen als *Client* auf die Angebote eines oder mehrerer *Newsserver* zu. Der eigene Zugang zum Internet entscheidet dabei auch über die *Newsserver*, auf die man zugreifen kann. Für alle Betriebssysteme stehen inzwischen eine Vielzahl von *Newsreader* zur Verfügung, die unterschiedliche Funktionen unterstützen und Informationen auf verschiedene Art und Weise organisieren und darstellen.

Newsreader

Alle Programme umfassen jedoch einen Grundbefehlssatz, der das Lesen von Artikeln, das Veröffentlichen von eigenen Artikeln, das persönliche Beantworten von Anfragen, sowie das Markieren und Speichern von Nachrichten unterstützen. Diese sind im Folgenden tabellarisch zusammengefasst:

Tab. 2.3-5: Grundfunktionen eines Newsreader

read	Lesen von Artikeln
post	Veröffentlichen eigener Artikel, entweder als Anmerkung (follow up) zu einem bestehenden Artikel oder einer bestehenden Artikelgruppe (thread) oder als neuer Artikel einer <i>Newsgroup</i>
reply	Persönliche Antwort an den Autor eines Artikels
save	Abspeichern eines Artikels
subscribe	Abonnieren einer <i>Newsgroup</i> , d. h. beim Aufruf kann direkt darauf zugegriffen werden, ohne den Namen eingeben zu müssen
mark	Kennzeichnen bereits gelesener Artikel
sort/select	Sortieren und Auswählen von Artikeln

Newsgroups können in vielfältiger Weise zur Informationsgewinnung und zum Informationsaustausch genutzt werden. Über die weltweit zugänglichen *Newsgroups* zu annähernd allen denkbaren Themen können Informationen gesucht sowie Hilfestellung erfragt werden. Zudem stellen sie ein nützliches Medium dar, um über aktuelle Entwicklungen und Diskussionen im Bilde zu bleiben und Kontakte auf bestimmten Fachgebieten zu knüpfen.

2.3.2.8 Sprachdienste

Fernprechdienst Da der Leser den **Fernsprechdienst** und darin angebotene Leistungsmerkmale aus eigener Erfahrung kennt, erübrigt sich eine detaillierte Beschreibung des Dienstes. Wir wollen deshalb lediglich einige wichtige Leistungsmerkmale benennen. Dies wären z. B.:

- Im Endgerät realisierte Leistungsmerkmale:
 - Anrufbeantworterfunktion
 - Berechtigungsprüfung
 - Elektronisches Telefonbuch
 - Freisprechen
 - Kurzwahl
 - Notizbuchfunktion
 - Wahlwiederholung
 - Klingeltöne
 - *Voicemail*
- Mit Hilfe des Netzes realisierte Leistungsmerkmale:
 - Anklopfen bei besetzt
 - Anrufliste (Liste der Anrufe bei Abwesenheit)
 - Anrufumleitung, Anrufweiterleitung
 - Anzeige der Rufnummern
 - Einheitliche Rufnummern
 - Gebührenanzeige
 - Gebührenfreie Anrufe z. B. 0800 Nummern
 - Gebührenpflichtige Anrufe z. B. 0190 Nummern
 - Konferenzschaltung
 - Makeln
 - Rückruf
 - Sperren

Weitere Funktionen, die ergänzend angeboten werden, sind einheitlicher Notruf (Polizei, Feuerwehr), Auskunftsdienste, Televotum, Weckdienst.

Seitdem der Wettbewerb im Mobilfunknetz (und später auch im Festnetz) zugelassen wurde, sind besonders viele Zusatzdienste erfunden worden, so z. B.

- Fluginformation
- Hotelreservierung
- Pannenhilfe
- Reiseservice
- Sprachmailbox

- Verkehrsinfo
- 24-Stunden-Service (Auskunft und Betreuung)
- Börsennachrichten.

VoIP (*Voice over IP*) oder IP-Telefonie ist eine Bezeichnung für den Telefondienst über das Internetprotokoll. Wie wir gesehen haben wird die abgetastete und codierte Sprache im digitalen Fernsprechnet in PCM-Zeitschlitzten übermittelt. Es handelt sich dabei um Leitungsvermittlung. Bei VoIP wird die abgetastete und codierte Sprache in Datagrammen verpackt. Diese können ganz unterschiedliche Wege im Netz durchlaufen und werden dann beim Empfänger wieder in die richtige Reihenfolge gebracht. Es handelt sich also um eine paketorientierte verbindungslose Sprachübermittlung. Um Verzögerungen zu vermeiden wird hierfür das UDP- (*User Datagram Protocol*) verwendet, da es ein minimales verbindungsloses Protokoll ist. Der eigentliche Transport erfolgt über das RTP (*Real Time Transport Protocol*) gesteuert durch das RTCP (*Real Time Transport Control Protocol*). Dennoch können bei VoIP Verbindungen Probleme der Übertragungsqualität auftreten, wenn das Netz einen hohen Verkehr abwickeln muss. Laufzeitverzögerungen treten beim Transport von IP-Paketen stets auf. Die Obergrenze der Verzögerung für eine akzeptable Sprachverbindung liegt bei etwa 150 Millisekunden. Hinzu kommt der *Jitter*, d. h. die zeitliche Schwankung zwischen dem Empfang von zwei Datenpaketen. Um diesen zu kompensieren muss man Pufferspeicher einbauen, allerdings nur so groß, dass die Laufzeit noch akzeptabel ist. Dann kommt noch der Paketverlust hinzu. Paketverlust entsteht dann, wenn Pakete verloren gehen oder nicht in der richtigen Reihenfolge eingeordnet werden können. Bei VoIP werden außerdem Pakete, die zu spät kommen (d. h. die Echtzeitanforderung der Sprache nicht einhalten) verworfen. Trotz dieser Probleme hat sich die IP-Telefonie in Firmennetzen (wo genügend Kapazitäten vorhanden sind) durchgesetzt. Seit 2004 wird in Deutschland auch in öffentlichen Netzen für private Anwender IP-Telefonie über **ADSL** (*Asymmetric Digital Subscriber Line*) angeboten. Eine Priorisierung der Sprachpakete im Internet wäre eine erhebliche Erleichterung zur Verminderung der Verzögerung. Obwohl das Internet Protokoll (bereits IPV4) eine Priorisierung anbietet, wird sie in der Regel von Routern im Netz leider nicht unterstützt. Die Verbindung zu herkömmlichen Telefonteilnehmern wird über *Gateways* zum Fernsprechnet ermöglicht. Es ist davon auszugehen, dass IP-Telefonie drastisch zunehmen wird und dadurch das lange gehegte Bild von einem diensteintegrierten digitalen Netz in Erfüllung geht.

VoIP

2.3.2.9 Videostreaming

Wie bei der Sprachübermittlung (s. Abschnitt 2.3.2.8), haben wir auch bei der Videoübermittlung harte Echtzeitbedingungen, die eingehalten werden müssen. Sollen Videoinhalte im Internet verfügbar gemacht werden, so gibt es diverse Möglichkeiten dies zu bewerkstelligen. Wir wollen im Folgenden drei Möglichkeiten kennenlernen (s. [Kur04a]).

Im ersten Fall werden die Video- bzw. Audiodaten auf dem *Server* wie ganz normale Daten hinterlegt. Der Zugriff auf die Daten erfolgt dann per WWW. Der Sachverhalt

ist in Abb. 2.3-17 dargestellt. Der *Browser* stellt eine GET-Anfrage an den *Web Server* (1) und erhält die Video- bzw. Audiodaten (2). Zur Abspielung der Inhalte wird das in Frage kommende Helferprogramm angestoßen (3).

Nachteilig bei dieser Vorgehensweise ist jedoch die Tatsache, dass die Inhalte nicht während der Übertragung angesehen werden können, sie müssen erst komplett heruntergeladen werden. Hierzu gibt es einen *Link* auf der Webseite, der auf die eigentliche Datei verweist.

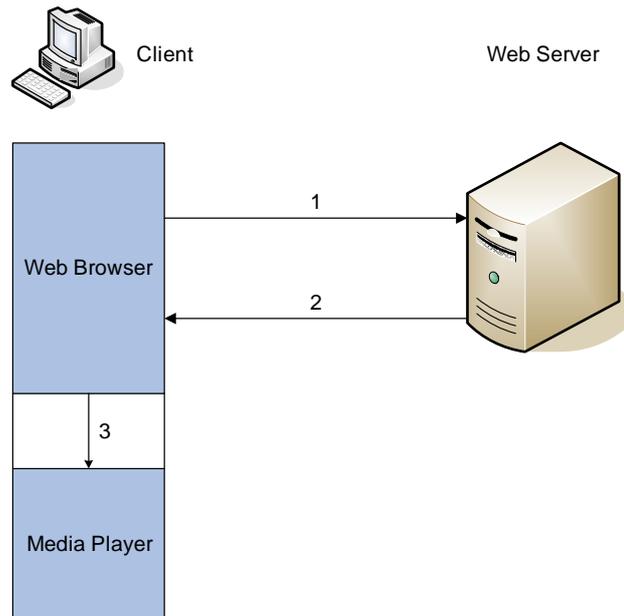


Abb. 2.3-17: Web Server

Im zweiten Fall stellt der *Browser* eine GET-Anfrage an den *Web Server* (1). Als Ergebnis dieser Anfrage erhält der *Browser* eine Liste (*Metafile*) mit der Beschreibung des codierten Datenstroms einschließlich URL (rstp-Adresse) der Datei (2). Anhand dieses *Metafile* kann der geeignete *Media Player* gestartet werden (3). Dieser baut dann eine Verbindung zum *Web Server* auf (4), woraufhin der *Web Server* den Verbindungsaufbau bestätigt (5) (s. Abb. 2.3-18). Eine direkte Kommunikation zwischen *Media Player* und *Web Server* kann dann stattfinden. Eine Interaktion ist allerdings nicht gegeben.

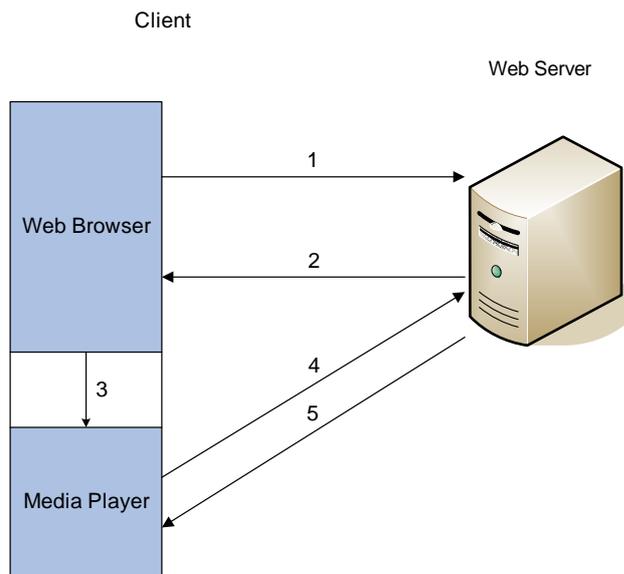


Abb. 2.3-18: HTTP-Streaming

Abb. 2.3-19 stellt den Fall dar, in dem sowohl ein *Web-* als auch ein geeigneter *Streaming Server* vorhanden sind. Zunächst stellt der *Browser* eine GET-Anfrage an den *Web Server* (1). Als Ergebnis erhält der *Browser* eine Liste mit der Beschreibung des codierten Datenstroms, einschließlich URL des *Streaming Server* (rstop-Adresse) (2). Anhand des *Metafile* kann der geeignete *Media Player* angetoßen werden (3). Dieser baut dann eine Verbindung zum *Streaming Server* auf (4), woraufhin dieser den Verbindungsaufbau bestätigt (5). Eine direkte Kommunikation zwischen *Media Player* und *Streaming Server* kann dann stattfinden. Der Anwender kann mit dem *Streaming Server* interagieren und den Datenstrom steuern (vorwärts, rückwärts, pause, usw.).

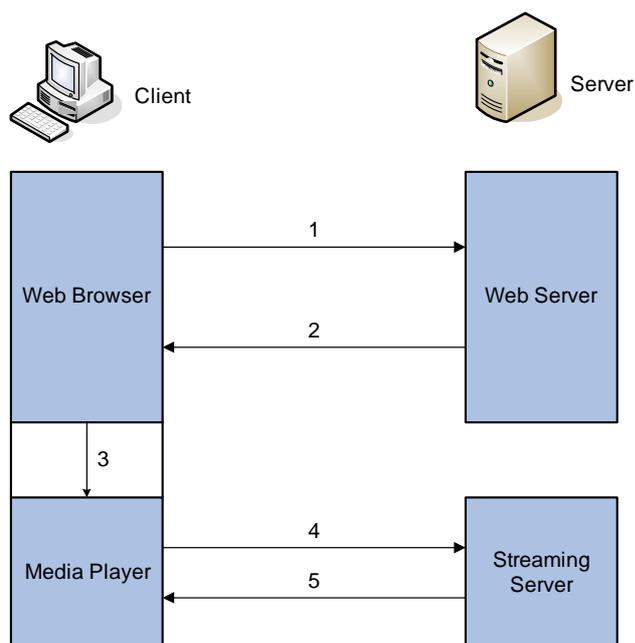


Abb. 2.3-19: Streaming Server und Web Server

Selbsttestaufgabe 2.3-1:

Bei der Datenübertragung im Datex-L Netz werden die Nutzdaten der Teilnehmer je nach Klasse mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten übertragen. Unterscheidet sich diese Geschwindigkeit von der tatsächlichen Übertragungsgeschwindigkeit der DÜE? Begründen Sie Ihre Aussage.

Selbsttestaufgabe 2.3-2:

Rufen sie die folgende Adresse auf: <http://cgibin.erols.com/ziring/cgi-bin/nsgate/gate.pl> und ergänzen Sie Tabelle 2.3-6 indem Sie für die in der Tabelle aufgelisteten Domainnamen eine DNS-Adressauflösung durchführen.

Tab. 2.3-6: DNS-Auflösung

Domainnamen	IP
yahoo.de	
lycos.de	
web.de	
gmx.de	

Führen Sie die Inverse Auflösung durch (reverse lookup) und ergänzen Sie Tabelle 2.3-7.

Tab. 2.3-7: Inverse Auflösung

IP	Domainnamen
132.176.12.30	
213.165.64.215	
129.217.128.2	
132.176.12.10	

Selbsttestaufgabe 2.3-3:

Kann man Sprache als ON/OFF-Quelle (auch als Burst-Silence-Model bekannt) modellieren?

Hinweis: Eine ON/OFF-Quelle kann als ein Prozess mit lediglich zwei Zuständen (ON, OFF) betrachtet werden.

3 Wahrscheinlichkeitslehre

Die Wahrscheinlichkeitslehre bildet die Grundlage der modernen Nachrichtentechnik. Sowohl in der Übertragungstechnik als auch in der Vermittlungstechnik kommt ihr heute eine besondere Bedeutung zu. Der Leser wird ihr in verschiedenen Grund- und Pflichtkursen bereits begegnet sein. Ich habe mich hier um eine knappe Darstellung bemüht, die Ingenieuren zugänglich sein sollte und dennoch durchweg mathematisch korrekt ist. Das Kapitel ist so aufgebaut, dass es für den Leser mit Vorkenntnissen eine Zusammenfassung der für die weiteren Kapitel erforderlichen mathematischen Grundlagen bietet. Er sollte sein Wissen anhand der Beispiele testen, damit er sicher ist, dass er den Stoff wirklich beherrscht. Für den Leser ohne Vorkenntnisse bietet Kapitel 3 eine knappe Einführung in den Stoff. Der Leser ohne Vorkenntnisse sollte sich unbedingt ausführlich mit dem Stoff befassen, denn die hier behandelten Grundlagen sind unerlässlich für das Verständnis der folgenden Kurseinheiten. Er sollte für die Durcharbeitung mit etwa dem doppelten Aufwand wie sonst rechnen.

3.1 Zufallsexperiment und Wahrscheinlichkeiten

Ein **Zufallsexperiment** wird durch das Tripel (H, E, P) gekennzeichnet.

Zufallsexperiment

H ist die **Menge der Ausgänge** des Experiments:

**Menge der Ausgänge
eines Experiments**

$\eta_i \in H, i \in I$, wobei $I \subseteq N$ eine Indexmenge in der Menge N der natürlichen Zahlen ist.

Eine Durchführung des Experiments liefert genau einen Ausgang (das **Ergebnis**)

Ergebnis

$\eta_i \in H, i \in N$.

Beispiel 3.1-1:

In einem Körbchen befinden sich n Widerstände gleicher Bauart, die von eins bis n durchnummeriert sind. Das Experiment besteht darin, dass ein Widerstand dem Körbchen zufällig entnommen wird. Das Experiment kann beliebig wiederholt werden, wenn der entnommene Widerstand wieder zurückgelegt wird. Dieses Experiment liegt den folgenden Beispielen zugrunde.

Die Menge der Ausgänge ist $H = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$

Bei einer Durchführung des Zufallsexperiments wurde R_3 entnommen, $R_3 \in H$.

E ist eine nichtleere Menge von Teilmengen aus H mit den beiden Eigenschaften:

- Mit A ist auch sein Komplement \bar{A} ein Element von E , d. h.

$$A \in E \Rightarrow \bar{A} \in E$$

3.1-1

- b. Eine Vereinigung von (endlich oder unendlich vielen) Elementen von E ist ein Element von E , d. h. für jede Familie $\{A_i \mid i \in I\}$ mit $I \subseteq N$ gilt

$$\bigcup \{A_i \mid i \in I\} \in E. \quad 3.1-2$$

Aus formel Gl. 3.1-1 und Gl. 3.1-2 folgt, dass auch

$$\bigcap \{A_i \mid i \in I\} \in E. \quad 3.1-3$$

Ereignisfeld
Ereignis
unmögliches Ereignis
sicheres Ereignis

E wird ein **Ereignisfeld**, ein Element von E ein **Ereignis** genannt. Aus der Definition folgt, dass die Leermenge \emptyset und die Menge H Elemente von E sind. \emptyset wird das **unmögliche Ereignis**, H das **sichere Ereignis** genannt.

Beispiel 3.1-2:

Ein Ereignis, z. B. $A = \{R_1, R_2, R_3\}$ tritt genau dann auf, wenn der entnommene Widerstand entweder R_1 oder R_2 oder R_3 ist. Das Ereignis H ist ein sicheres Ereignis, weil jede Durchführung des Experiments einen Ausgang $R_i \in H$ liefert.

Das Ereignis \emptyset ist ein unmögliches Ereignis. Das Ereignis bestünde z. B. daraus, dass eine Durchführung einen Ausgang "Kondensator" liefert.

Die Potenzmenge von H liefert ein Ereignisfeld E , das 2^n Elemente enthält. Sei $n = 4$. Alle Elemente von E sind:

$$\{R_1\}, \{R_2\}, \{R_3\}, \{R_4\}, \{R_1, R_2\}, \{R_1, R_3\}, \{R_1, R_4\}, \{R_2, R_3\}, \\ \{R_2, R_4\}, \{R_3, R_4\}, \{R_1, R_2, R_3\}, \{R_1, R_2, R_4\}, \{R_1, R_3, R_4\}, \{R_2, R_3, R_4\}, \\ \{R_1, R_2, R_3, R_4\}, \emptyset.$$

Diese Elemente werden mit A_i , $i = 1, 2, \dots, 16$ bezeichnet, z. B. $A_{15} = H = \{R_1, R_2, R_3, R_4\}$, $A_{16} = \emptyset$. Man kann leicht bestätigen, dass die Gleichungen Gl. 3.1-1 bis Gl. 3.1-3 für E erfüllt werden.

$E' = \{A_1, A_2, \dots, A_{15}\}$ ist kein Ereignisfeld, da $\overline{A_{15}} = \overline{H} = \emptyset = A_{16}$ nicht zu E' gehört.

Wahrscheinlichkeit
Axiome der
Wahrscheinlichkeit

P ist eine Abbildung, die jedem Ereignis $A \in E$ eine reelle Zahl $P(A) \in R$ zuordnet und folgende drei Eigenschaften besitzt. $P(A)$ wird die **Wahrscheinlichkeit** von A genannt und die drei Eigenschaften die **Axiome der Wahrscheinlichkeit**:

- a. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist stets nicht negativ, d. h.

$$P(A) \geq 0, A \in E. \quad 3.1-4$$

- b. Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses ist gleich eins, d. h.

$$P(H) = 1. \quad 3.1-5$$

- c. Die Wahrscheinlichkeiten von paarweise disjunkten Ereignissen addieren sich, d. h. für jede (endliche oder unendliche) Familie

$\{A_i | i \in I\}$ gilt

$$P\left(\bigcup_{i \in I} \{A_i | i \in I\}\right) = \sum_{i \in I} P(A_i) \quad 3.1-6$$

falls $A_j \cap A_k = \emptyset$ für $j \neq k$ und $j, k \in I$

Beispiel 3.1-3:

Wir nehmen wieder $n = 4$ an. Da alle Widerstände gleich aufgebaut sind, können wir $P(\{R_i\}) = \frac{1}{4}$, für $i = 1, 2, 3, 4$ setzen. Man kann die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis auch über seine relative Häufigkeit definieren; für gleichwahrscheinliche Ausgänge setzt man:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ausgänge}}{\text{Anzahl aller Ausgänge}}$$

Dann ist offensichtlich:

$$P(A_i) \geq 0, A_i \in E.$$

Wir können noch bestätigen:

$$P(H) = \frac{4}{4} = 1.$$

A_1, A_2, A_3 und A_4 sind paarweise disjunkte Ereignisse.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^4 A_i\right) = P(\{R_1, R_2, R_3, R_4\}) = 1$$

und

$$\sum_{i=1}^4 P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Aus den Axiomen der Wahrscheinlichkeit folgt für das komplementäre Ereignis \bar{A} ,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad 3.1-7$$

und somit für das unmögliche Ereignis

$$P\{\emptyset\} = 0. \quad 3.1-8$$

Für nicht disjunkte Ereignisse A und B folgt aus den Axiomen außerdem

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad 3.1-9$$

Für $A \supset B$ mit $A, B \in E$ folgt wegen $P(A) = P(B) + P(A \setminus B)$

$$P(A) \geq P(B). \quad 3.1-10$$

Beispiel 3.1-4:

Es gilt:

$$\bar{A}_1 = H - A_1 = \{R_2, R_3, R_4\} = A_{14}.$$

So ist

$$P(\bar{A}_1) = P(\{R_2, R_3, R_4\}) = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} = 1 - P(A_1).$$

Für das unmögliche Ereignis gilt $\emptyset = \bar{H}$. Daraus folgt:

$$P(\emptyset) = P(\bar{H}) = 1 - P(H) = 1 - 1 = 0.$$

Wir betrachten zwei Ereignisse $A_5 = \{R_1, R_2\}$ und $A_{12} = \{R_1, R_2, R_4\}$ mit $A_5 \cap A_{12} \neq \emptyset$, dann gilt

$$P(A_5 \cup A_{12}) = P(\{R_1, R_2\} \cup \{R_1, R_2, R_4\}) = P(\{R_1, R_2, R_4\}) = \frac{3}{4}$$

$$P(A_5) + P(A_{12}) - P(A_5 \cap A_{12}) = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(A_{12}) = \frac{3}{4} > \frac{2}{4} = P(A_5), \text{ und } A_{12} \supset A_5.$$

Selbsttestaufgabe 3.1-1:

- Welche Eigenschaften weist ein Ereignisfeld E auf?
- Was ist ein Ereignis?
- Man erkläre die Begriffe
 - *sicheres Ereignis*
 - *unmögliches Ereignis*
 - *Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit Null.*

3.2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Bedingung, dass das Ereignis B eingetreten ist, wird als die **bedingte Wahrscheinlichkeit** bezeichnet und ist definiert als:

**bedingte
Wahrscheinlichkeit**

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{für } P(B) > 0. \quad 3.2-1$$

Beispiel 3.2-1:

Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ für $A = \{R_3\}$ und $B = \{\text{alle Widerstände mit Index kleiner als 4}\} = \{R_1, R_2, R_3\}$.

$$P(A \cap B) = P\{R_3\} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{3}{4}$$

und somit:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Zwei Ereignisse A und B mit der Eigenschaft

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad 3.2-2$$

nennt man **statistisch unabhängig**, denn für sie folgt aus der Definition und Gl. 3.2-1

**statistische
Unabhängigkeit**

$$P(A|B) = P(A) \text{ und } P(B|A) = P(B), \quad 3.2-3$$

d. h. die Ereignisse haben keinen Einfluss aufeinander.

Beispiel 3.2-2:

Wir betrachten die Ereignisse $A_5 = \{R_1, R_2\}$, $A_6 = \{R_1, R_3\}$ und $A_9 = \{R_2, R_4\}$.

Es gelten:

$$P(A_5) = \frac{1}{2}, P(A_6) = \frac{1}{2}, P(A_9) = \frac{1}{2}.$$

Wir berechnen nun die Wahrscheinlichkeiten $P(A_5 \cap A_6)$, $P(A_6 | A_5)$ und $P(A_6 | A_9)$:

$$P(A_5 \cap A_6) = P(\{R_1\}) = \frac{1}{4}$$

$$P(A_5 | A_6) = \frac{P(A_5 \cap A_6)}{P(A_6)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_6 | A_5) = \frac{P(A_5 \cap A_6)}{P(A_5)} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_6 | A_9) = \frac{P(A_6 \cap A_9)}{P(A_9)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A_9)} = \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0.$$

Daraus folgen:

$$P(A_5 \cap A_6) = P(A_5) \cdot P(A_6)$$

$$P(A_5 | A_6) = P(A_5)$$

$$P(A_6 \cap A_9) \neq P(A_6) \cdot P(A_9).$$

Die Ergebnisse zeigen:

A_5 und A_6 sind statistisch unabhängig, obwohl $A_5 \cap A_6 \neq \emptyset$, während A_6 und A_9 nicht statistisch unabhängig sind, obwohl $A_6 \cap A_9 = \emptyset$.

Bilden paarweise disjunkte Ereignisse $\{A_1, \dots, A_i, \dots, A_n\}$ mit $A_i \in E$ zusammen das sichere Ereignis, so folgt aus Gl. 3.1-5 und Gl. 3.1-6

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$$

Ist B ein beliebiges Ereignis, so folgt

$$B = B \cap H = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i).$$

Mit Gl. 3.1-6 folgt daraus

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)$$

Satz über die absolute Wahrscheinlichkeit

und mit Gl. 3.2-1 folgt hieraus **der Satz über die absolute Wahrscheinlichkeit**

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B | A_i) \cdot P(A_i). \quad 3.2-4$$

für A_i paarweise disjunkt und $\bigcup_{i=1}^n A_i = H$.

Beispiel 3.2-3:

Die Ereignisse $A_1 = \{R_1\}$, $A_2 = \{R_2\}$, $A_3 = \{R_3\}$ und $A_4 = \{R_4\}$ bilden das sichere Ereignis H . $A_{14} = \{R_2, R_3, R_4\}$ ist ein Ereignis von E . Wir bestätigen Gl. 3.2-4.

$$P(A_{14}) = \frac{3}{4}$$

Wenn A_1 eingetreten ist, kann A_{14} unmöglich eingetreten sein, d. h.

$P(A_{14} | A_1) = 0$. Wenn A_2 eingetreten ist, ist A_{14} sicher eingetreten, d. h.

$P(A_{14} | A_2) = 1$.

Analog gilt:

$$P(A_{14} | A_3) = 1 \text{ und } P(A_{14} | A_4) = 1.$$

Mit $P(A_i) = \frac{1}{4}$ für $i = 1, 2, 3, 4$:

$$\sum_{i=1}^4 P(A_{14} | A_i) \cdot P(A_i) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = P(A_{14}).$$

Aus Gl. 3.2-1 folgt wegen der Symmetrie

$$P(B | A_i) \cdot P(A_i) = P(A_i | B) \cdot P(B).$$

$P(B)$ aus Gl. 3.2-4 eingesetzt ergibt

$$P(B | A_i) \cdot P(A_i) = P(A_i | B) \cdot \sum_{i=1}^n P(B | A_i) \cdot P(A_i)$$

oder den **Bayes'schen Satz**

Bayes'scher Satz

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B | A_i) \cdot P(A_i)}. \quad 3.2-5$$

für A_i paarweise disjunkt und $\bigcup_{i=1}^n A_i = H$.

Beispiel 3.2-4:

Wir setzen Beispiel 3.2-3 fort und bestätigen die Gleichung Gl. 3.2-5:

$$P(A_3 | A_{14}) = \frac{1}{3},$$

$$P(A_{14} | A_3) \cdot P(A_3) = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

und (siehe Beispiel 3.2-3)

$$\sum_{i=1}^4 P(A_{14} | A_i) \cdot P(A_i) = \frac{3}{4},$$

so dass

$$\frac{P(A_{14} | A_3) \cdot P(A_3)}{\sum_{i=1}^4 P(A_{14} | A_i) \cdot P(A_i)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} = P(A_3 | A_{14})$$

gilt.

Selbsttestaufgabe 3.2-1:

- Welche Bedingung müssen zwei Ereignisse erfüllen, damit sie statistisch unabhängig sind?
- Wie berechnet man die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A | B)$?
- Wie lautet der Bayes'sche Satz?

3.3 Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsverteilung und Wahrscheinlichkeitsdichte

Zufallsvariable Eine **Zufallsvariable** x ordnet jedem Ausgang η_i des Zufallsexperiments (H, E, P) eine reelle Zahl $x(\eta_i)$ zu und erfüllt die Eigenschaften:

- Die Menge $\{\eta_i | x(\eta_i) \leq x\}$ ist ein Ereignis für alle $x \in \mathbb{R}$
- $P(\{\eta_i | x(\eta_i) = +\infty\}) = 0$ und $P(\{\eta_i | x(\eta_i) = -\infty\}) = 0$.

Die Eigenschaft (a) ermöglicht für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Wahrscheinlichkeit anzugeben, dass die Zufallsvariable $x(\eta_i)$ kleiner oder gleich x ist. Die Eigenschaft (b) bedingt, dass eine Zufallsvariable nur endliche Werte mit einer von Null verschiedenen Wahrscheinlichkeit annehmen darf.

Beispiel 3.3-1:

Es befinden sich n Widerstände, die von eins bis n durchnummeriert sind, in einem Körbchen. Von den Widerständen wissen wir, dass 15% davon 47 Ohm, 5% davon 220 Ohm, 25% davon 680 Ohm, 40% davon 1000 Ohm und 15% davon 2200 Ohm aufweisen. In den folgenden Beispielen werden alle Widerstände in Ohm angegeben. Wir definieren eine Zufallsvariable x , die jedem Ausgang R_i dessen Widerstandswert zuordnet. Bei einer Durchführung des Experiments wird der Widerstand R_k entnommen, dessen Wert z. B. 1000 (Ohm) beträgt, d. h. $x(R_k) = 1000$.

Die Menge $\{R_i | x(R_i) \leq 300\}$ stellt das Ereignis dar, in dem der Wert eines entnommenen Widerstands kleiner oder gleich 300 Ohm ist.

$$F_{\mathbf{x}}(x) = P(\{\eta_i \mid \mathbf{x}(\eta_i) \leq x\}), x \in \mathbb{R}. \quad 3.3-1$$

Aus der Definition folgt, dass $F_{\mathbf{x}}(x)$ eine Funktion von $x \in \mathbb{R}$ ist; aus Gl. 3.1-10 weiter, dass $F_{\mathbf{x}}(a) \geq F_{\mathbf{x}}(b)$ für $a \geq b$, $a, b \in \mathbb{R}$ ist.

Ferner gilt $F_{\mathbf{x}}(-\infty) = 0$, $F_{\mathbf{x}}(x) \leq 1$, $F_{\mathbf{x}}(\infty) = 1$.

Beispiel 3.3-2:

Wir bleiben beim Beispiel 3.3-1. Gegeben sind $b = 500$, $a = 1000$. Es sind die Wahrscheinlichkeiten $F_{\mathbf{x}}(a)$ und $F_{\mathbf{x}}(b)$ gesucht.

Die Menge $\{R_i \mid \mathbf{x}(R_i) \leq 500\}$ ist die Menge der Widerstände, deren Widerstandswerte kleiner oder gleich 500 (*Ohm*) sind. Diese Menge enthält insgesamt $(15 \cdot \frac{1}{100} \cdot n + 5 \cdot \frac{1}{100} \cdot n) = 20 \cdot \frac{1}{100} \cdot n$ Widerstände.

$$F_{\mathbf{x}}(b) = P(\{R_i \mid \mathbf{x}(R_i) \leq 500\}) = 0,2.$$

Analog gilt

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{x}}(a) &= P(\{R_i \mid \mathbf{x}(R_i) \leq 1000\}) \\ &= \frac{1}{n} \cdot (15 \cdot \frac{1}{100} \cdot n + 5 \cdot \frac{1}{100} \cdot n + 25 \cdot \frac{1}{100} \cdot n + 40 \cdot \frac{1}{100} \cdot n) \\ &= 85 \cdot \frac{1}{100} = 0,85. \end{aligned}$$

Es bestätigt sich, dass für $a \geq b$ gilt:

$$F_{\mathbf{x}}(a) \geq F_{\mathbf{x}}(b).$$

Die **Wahrscheinlichkeitsdichte** $f_{\mathbf{x}}(x)$ einer Zufallsvariable \mathbf{x} ist definiert als

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \frac{dF_{\mathbf{x}}(x)}{dx} \quad 3.3-2$$

Da

$$F_{\mathbf{x}}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\mathbf{x}}(\xi) d\xi \leq 1 \quad 3.3-3$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, kann man $f_{\mathbf{x}}$ als eine **verallgemeinerte Funktion (Distribution)** auffassen (s. Anhang A). An Stellen x_k an denen $F_{\mathbf{x}}(x)$ Sprünge aufweist, wird $f_{\mathbf{x}}(x)$ durch die δ -Funktion, gewichtet mit der Höhe des Sprunges h_k , dargestellt, d. h.

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \sum_k h_k \cdot \delta(x - x_k). \quad 3.3-4$$

$\delta(x)$ ist dabei durch die Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \delta(x - x_k) \cdot dx = f(x_k) \quad 3.3-5$$

Wahrscheinlichkeitsdichte

Verallgemeinerte Funktion Distribution

definiert, wobei $f(x)$ eine beliebige Grundfunktion ist (s. Anhang A).

Beispiel 3.3-3:

Wir setzen Beispiel 3.3-1 fort und bestimmen die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathbf{x}}(x)$. Die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathbf{x}}(x)$ ist hier diskret, da die Widerstandswerte diskret sind.

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \sum_k h_k \delta(x - x_k).$$

Es sind

$$x_1 = 47, x_2 = 220, x_3 = 680, x_4 = 1000, x_5 = 2200$$

und damit

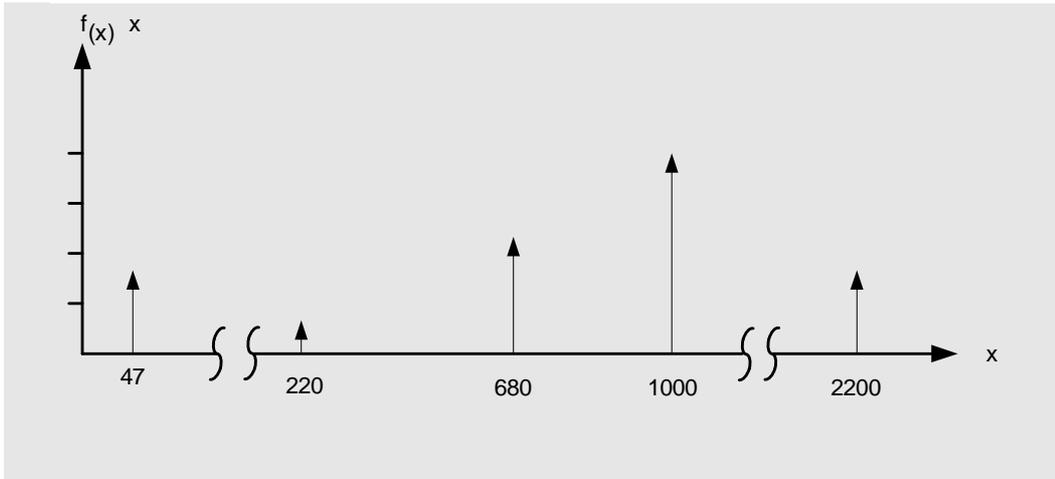
$$h_1 = 0,15, h_2 = 0,05, h_3 = 0,25, h_4 = 0,4, h_5 = 0,15.$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte lautet nun

$$f_{\mathbf{x}}(x) = 0,15 \cdot \delta(x - 47) + 0,05 \cdot \delta(x - 220) + 0,25 \cdot \delta(x - 680) \\ + 0,4 \cdot \delta(x - 1000) + 0,15 \cdot \delta(x - 2200).$$

$$F_{\mathbf{x}}(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbf{x}}(x) dx \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} 0,15 \cdot \delta(x - 47) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} 0,05 \cdot \delta(x - 220) dx \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} 0,25 \cdot \delta(x - 680) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} 0,4 \cdot \delta(x - 1000) dx \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} 0,15 \cdot \delta(x - 2200) dx. \\ = 0,15 + 0,05 + 0,25 + 0,4 + 0,15 = 1$$

Die folgende Skizze stellt die Wahrscheinlichkeitsdichte qualitativ dar.



Entsprechend der bedingten Wahrscheinlichkeit Gl. 3.2-1 definieren wir die **bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung**

$$F_{\mathbf{x}}(x | A) = \frac{P(\{\mathbf{x} \leq x\} \cap A)}{P(A)} \text{ für } P(A) > 0 \quad 3.3-6$$

bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung

und die **bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte**

$$f_{\mathbf{x}}(x | A) = \frac{d F_{\mathbf{x}}(x | A)}{dx}. \quad 3.3-7$$

bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte

Beispiel 3.3-4:

Über die im Beispiel 3.3-1 gemachten Angaben hinaus nehmen wir noch an, dass jede Widerstandssorte bezüglich der Genauigkeit aus 4 Klassen besteht. Davon sind, unabhängig vom Widerstandswert, 4% von der Klasse 0, 05%, 16% von der Klasse 0, 1%, 30% von der Klasse 0, 5% und 50% von der Klasse 1%. Wir bestimmen die bedingte Wahrscheinlichkeit $F_{\mathbf{x}}(1000 | A)$ wobei A die Bedingung darstellt, dass ein entnommener Widerstand von der Klasse 0, 1% ist, $A = \{R_i | R_i \text{ von Klasse } 0, 1\%\}$. Gemäß Gleichung Gl. 3.3-6

$$F_{\mathbf{x}}(1000 | A) = \frac{P(\{\mathbf{x} \leq 1000\} \cap A)}{P(A)} = \frac{0,85 \cdot 0,16}{0,16} = 0,85$$

Selbsttestaufgabe 3.3-1:

- a. Was bedeutet das Ereignis $A = \{\eta_i | \mathbf{x}(\eta_i) \leq x_0\}$?
- b. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Wahrscheinlichkeitsverteilung $F_{\mathbf{x}}$ und der Wahrscheinlichkeit P?
- c. Wie wird die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathbf{x}}$ definiert?

3.4 Funktion einer Zufallsvariable und Erwartungswerte

Funktion einer Zufallsvariablen

Wir betrachten eine **Funktion** $g(\mathbf{x})$ **einer Zufallsvariablen** \mathbf{x} , die wir bilden, indem wir für jeden Ausgang des Experiments η_i der reellen Zahl $\mathbf{x}(\eta_i)$ eine neue reelle Zahl y zuordnen. Erfüllt $y(\eta_i)$ auch die Eigenschaften (a) und (b) des Abschnitt 3.3, so kann

$$y = g(\mathbf{x}) \quad 3.4-1$$

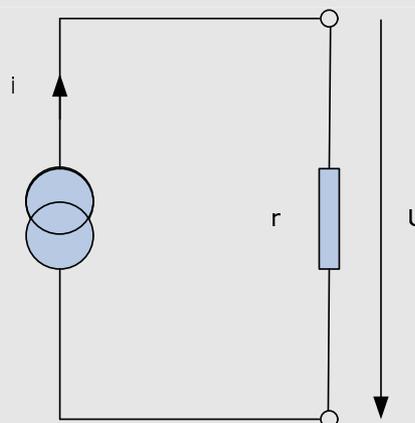
als eine neue Zufallsvariable aufgefasst werden; wir bezeichnen y als Funktion der Zufallsvariablen \mathbf{x} . Für einen Ausgang η_i gilt dann

$$y(\eta_i) = g(\mathbf{x}(\eta_i)). \quad 3.4-2$$

Beispiel 3.4-1:

Wir betrachten folgendes Experiment:

In einem Korb befindet sich eine große Anzahl von Widerständen, die von gleichem Widerstandswert und von gleicher Genauigkeitsklasse sind. Ein Widerstand wird zufällig entnommen und an eine Konstantstromquelle angeschlossen.



Es wird angenommen, dass die tatsächlichen Widerstandswerte normalverteilt sind, d. h.

$$f_r(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot b} \cdot \exp\left(-\frac{(r-a)^2}{2 \cdot b^2}\right).$$

Dieses Experiment liegt den folgenden Beispielen zugrunde.

Die Normalverteilung (auch Gaußverteilung genannt) ist eine in der Praxis häufig vorkommende Verteilung. In der Darstellung $f_r(r)$ sind a und b Konstanten, deren Bedeutung wir im nächsten Beispiel kennenlernen werden.

Der Widerstand stellt eine Zufallsvariable dar. Die Spannung U an ihm ist eine Funktion von r ,

$$U = g(r).$$

Die zugehörige Abbildung lautet

$$U = i \cdot r.$$

Der **Erwartungswert** der Funktion $g(x)$ einer Zufallsvariablen x mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f_x ist definiert als ⁶

Erwartungswert

$$E\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_x(x) dx, \quad 3.4-3$$

soweit das Integral existiert.

Beispiel 3.4-2:

Der Erwartungswert von U liegt bei

$$E\{U\} = E\{g(r)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(r) \cdot f_r(r) dr = i \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} r \cdot f_r(r) dr = i \cdot E\{r\},$$

wobei $E\{r\}$ der Erwartungswert von r ist.

Wir betrachten nun einige Sonderfälle von $g(x)$. Der **lineare Mittelwert** (auch erstes Moment genannt) einer Zufallsvariablen x ist definiert als $E\{x\}$, d. h.

linearer Mittelwert

$$m_x = E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) dx. \quad 3.4-4$$

Der **quadratische Mittelwert** (auch zweites Moment genannt) einer Zufallsvariablen x ist definiert als $E\{x^2\}$, d. h.

quadratischer Mittelwert

$$m_x^{(2)} = E\{x^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x) dx. \quad 3.4-5$$

Entsprechend können höhere Momente definiert werden.

Die **Varianz** (auch zweites zentrales Moment genannt) einer Zufallsvariablen x ist

Varianz

⁶ Wir werden den Erwartungswert stets mit $E\{\}$ angeben, damit keine Verwechslung mit dem Ereignisfeld E auftritt (s. Abschnitt 3.1).

definiert als $E\{(x - m_x)^2\}$, d.h

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= E\{(x - m_x)^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 \cdot f_x(x) dx && 3.4-6 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 + m_x^2 - 2m_x \cdot x) \cdot f_x(x) dx \\ \sigma_x^2 &= m_x^{(2)} - m_x^2.\end{aligned}$$

Standardabweichung Die positive Wurzel der Varianz nennt man die **Standardabweichung** σ_x oder
Streuung **Streuung** der Zufallsvariablen x

Beispiel 3.4-3:

Einige wichtige statistische Mittelwerte von r werden nun ermittelt. Das sind der lineare Mittelwert m_r , der quadratische Mittelwert $m_r^{(2)}$ und die Varianz σ_r^2 . Wir setzen dabei als bekannt voraus, dass für das folgende Integral gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a \cdot \eta^2} d\eta = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

1. Der lineare Mittelwert bzw. das erste Moment:

$$m_r = E\{r\} = \int_{-\infty}^{+\infty} r \cdot f_r(r) dr = \int_{-\infty}^{+\infty} r \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot b} \cdot \exp\left(-\frac{(r-a)^2}{2 \cdot b^2}\right) \cdot dr,$$

durch die Substitution

$$\eta = \frac{r-a}{\sqrt{2} \cdot b}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}m_r &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{2} \cdot b \cdot \eta + a) \cdot e^{-\eta^2} d\eta \\ &= \frac{\sqrt{2} \cdot b}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \eta \cdot e^{-\eta^2} d\eta + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta \\ &= 0 + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = a\end{aligned}$$

(das erste Integral ist gleich Null, weil $f(\eta) = \eta \cdot e^{-\eta^2}$ eine ungerade Funktion ist). Die Konstante a ist somit der Mittelwert der normalverteilten Zufallsvariablen r .

2. Der quadratische Mittelwert bzw. das zweite Moment:

$$\begin{aligned}
 m_r^{(2)} = E\{r^2\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} r^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot b} \cdot \exp\left(-\frac{(r-a)^2}{2 \cdot b^2}\right) dr \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{2} \cdot b \cdot \eta + a)^2 \cdot e^{-\eta^2} d\eta \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} 2 \cdot b^2 \cdot \eta^2 \cdot e^{-\eta^2} d\eta \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \cdot \sqrt{2} \cdot a \cdot b \cdot \eta \cdot e^{-\eta^2} d\eta \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \cdot e^{-\eta^2} d\eta \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot (b^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \cdot \eta^2 \cdot e^{-\eta^2} d\eta + 0 + a^2 \cdot \sqrt{\pi}) \\
 &= b^2 + a^2,
 \end{aligned}$$

wobei wir berücksichtigt haben, dass:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \cdot \eta^2 \cdot e^{-\eta^2} d\eta &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \cdot \eta \cdot \eta \cdot e^{-\eta^2} d\eta \\
 &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \eta \cdot d(e^{-\eta^2}) \\
 &= [-\eta \cdot e^{-\eta^2}]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta \\
 &= 0 + \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}.
 \end{aligned}$$

3. Die Varianz bzw. das zweite zentrale Moment:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r^2 &= E\{(r - a)^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (r - a)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot b} \cdot \exp\left(-\frac{(r - a)^2}{2 \cdot b^2}\right) dr \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{2} \cdot b \cdot \eta)^2 \cdot e^{-\eta^2} \cdot d\eta \\
 &= \frac{b^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \cdot \eta^2 \cdot e^{-\eta^2} d\eta \\
 &= b^2.
 \end{aligned}$$

Die Konstante b ist somit die Standardabweichung der Zufallsvariablen r . Mit den ermittelten Werten kann man die Wahrscheinlichkeitsdichte einer

Normalverteilung so darstellen:

$$f_r(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_r} \cdot \exp\left(-\frac{(r - m_r)^2}{2 \cdot \sigma_r^2}\right).$$

charakteristische Funktion

Die **charakteristische Funktion** einer Zufallsvariablen x ist definiert als

$$\Phi_x(\omega) = E\{e^{j\omega x}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) e^{j\omega x} dx. \quad 3.4-7$$

Ein Vergleich mit Gleichung (3) in Anhang B zeigt, dass die charakteristische Funktion die konjugiert komplexe Fouriertransformierte der Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Bei Berechnungen kann anstatt mit der Dichte einer Zufallsvariablen mit der charakteristischen Funktion gearbeitet werden - man hat dieselben Vorteile wie bei den Berechnungen mit der Fouriertransformierten. Aus der charakteristischen Funktion kann die Dichte durch die Rücktransformation

$$f_x(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(\omega) e^{-j\omega x} d\omega \quad 3.4-8$$

bestimmt werden.

Beispiel 3.4-4:

Wir bestimmen nun mit Hilfe der charakteristischen Funktion die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_U(U)$ im Beispiel 3.4-1. U ist eine Funktion der Zufallsvariablen r :

$$U = g(r)$$

mit der reellen Abbildung

$$U = i \cdot r.$$

Die charakteristische Funktion von U lautet

$$\Phi_U(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega U} U(U) \cdot dU \quad (*1)$$

Entsprechend Gl. 3.4-3 können wir auch schreiben

$$\Phi_U(\omega) = E\{e^{j\omega U}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega g(r)} \cdot f_r(r) \cdot dr \quad (*2)$$

Wir führen eine Substitution durch $r = \frac{U}{i}$ und formen (*2) um:

$$\begin{aligned} \Phi_U(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega U} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot b} \cdot \exp\left(-\frac{(r-a)^2}{2b^2}\right) \cdot dr \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega U} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot b} \cdot \exp\left(-\frac{(U/i-a)^2}{2b^2}\right) \cdot \frac{1}{i} \cdot dU. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\Phi_U(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega U} \exp\left(-\frac{(U-ia)^2}{2(ib)^2}\right) \cdot dU \quad (*3)$$

Durch Vergleich der beiden Gleichungen (*1) und (*3) erhalten wir

$$f_U(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot ib} \cdot \exp\left(-\frac{(U-ia)^2}{2(ib)^2}\right),$$

denn $\Phi_U(\omega)$ und $f_U(U)$ bilden ein Fouriertransformationspaar.

Selbsttestaufgabe 3.4-1:

- Wie wird eine Funktion y einer Zufallsvariablen x definiert?
- Wie berechnet man den Erwartungswert von y , wenn f_x bekannt ist?

3.5 Zwei Zufallsvariablen

Für zwei Zufallsvariablen \mathbf{x} und \mathbf{y} sind die Mengen $\{\eta_i \mid \mathbf{x}(\eta_i) \leq x\}$ und $\{\eta_i \mid \mathbf{y}(\eta_i) \leq y\}$ Ereignisse. Das Produkt $\{\eta_i \mid \mathbf{x}(\eta_i) \leq x\} \{\eta_i \mid \mathbf{y}(\eta_i) \leq y\}$ wird als $\{\eta_i \mid \mathbf{x}(\eta_i) \leq x \wedge \mathbf{y}(\eta_i) \leq y\}$ definiert und ist auch ein Ereignis. Die **gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung** für die beiden Zufallsvariablen \mathbf{x} und \mathbf{y} ist definiert

**gemeinsame
Wahrscheinlichkeits-
verteilung**

als

$$F_{\mathbf{xy}}(x, y) = P(\{\eta_i \mid \mathbf{x}(\eta_i) \leq x\} \cap \{\eta_i \mid \mathbf{y}(\eta_i) \leq y\}) \quad 3.5-1$$

gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte

und ferner die **gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte** als

$$f_{\mathbf{xy}}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\mathbf{xy}}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad 3.5-2$$

wobei die partiellen Ableitungen entsprechend Abschnitt 3.3 gegebenenfalls als verallgemeinerte Funktionen aufgefasst werden. Entsprechend Gl. 3.3-3 gilt dann

$$F_{\mathbf{xy}}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\mathbf{xy}}(\xi, \eta) d\eta d\xi. \quad 3.5-3$$

Ferner gelten zwischen den einzelnen und den gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsdichten die Zusammenhänge

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbf{xy}}(x, \eta) d\eta \quad 3.5-4$$

und

$$f_{\mathbf{y}}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbf{xy}}(\xi, y) d\xi. \quad 3.5-5$$

statistische Unabhängigkeit

Entsprechend Gl. 3.2-2 nennt man zwei Zufallsvariablen **statistisch unabhängig** wenn gilt

$$f_{\mathbf{xy}}(x, y) = f_{\mathbf{x}}(x) \cdot f_{\mathbf{y}}(y). \quad 3.5-6$$

Lineare Unabhängigkeit

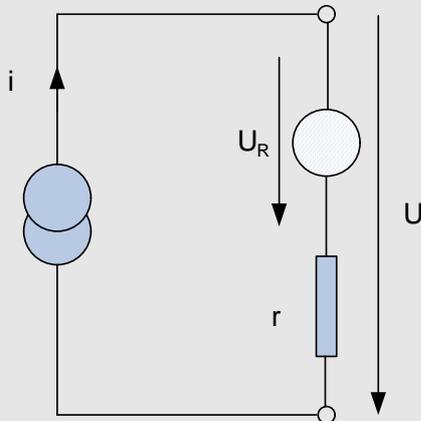
Man nennt zwei Zufallsvariablen **linear unabhängig** oder auch unkorreliert, wenn gilt

$$E\{\mathbf{xy}\} = E\{\mathbf{x}\} \cdot E\{\mathbf{y}\}.$$

Die statistische Unabhängigkeit ist die stärkere Bedingung, d. h. aus der statistischen Unabhängigkeit folgt die lineare Unabhängigkeit.

Beispiel 3.5-1:

Wir berücksichtigen nun eine Rauschquelle in dem Stromkreis in Beispiel 3.4-1. Die Ersatzschaltung sieht wie folgt aus:



U_R stellt die Rauschspannung dar und $E\{U_R\} = 0$ wird als bekannt vorausgesetzt.

Der Widerstandswert r und die Rauschspannung U_R können als zwei statistisch voneinander unabhängige Zufallsvariablen aufgefasst werden.

Die Spannung U ist somit eine Funktion der beiden Zufallsvariablen U_R und r :

$$U = U_R + i \cdot r.$$

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte ist gegeben durch

$$f_{U_R r}(U_R, r) = f_{U_R}(U_R) \cdot f_r(r).$$

Wir integrieren $f_{U_R r}(U_R, r)$ über r von $-\infty$ bis $+\infty$ und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U_R r}(U_R, r) dr &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U_R}(U_R) \cdot f_r(r) dr \\ &= f_{U_R}(U_R) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f_r(r) dr \\ &= f_{U_R}(U_R). \end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{U_R r}(U_R, r) dU_R = f_r(r).$$

Korrelationskoeffizient Als Maß der Korreliertheit zweier Zufallsvariablen dient der **Korrelationskoeffizient** der definiert ist als

$$\rho_{xy} = \frac{E\{(x - m_x)(y - m_y)\}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad 3.5-7$$

Orthogonalität Zwei Zufallsvariablen nennt man **orthogonal**, wenn gilt :

$$E\{xy\} = 0.$$

Beispiel 3.5-2:

Wir setzen Beispiel 3.5-1 fort und untersuchen die Korrelationseigenschaft der beiden Zufallsvariablen U_R und \mathbf{r} .

$$\begin{aligned} E\{U_R \mathbf{r}\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_R \cdot r f_{U_R \mathbf{r}}(U_R, \mathbf{r}) dU_R dr \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_R \cdot r f_{U_R}(U_R) \cdot f_{\mathbf{r}}(r) dU_R dr \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} U_R f_{U_R}(U_R) dU_R \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} r f_{\mathbf{r}}(r) dr \right) \\ &= E\{U_R\} \cdot E\{\mathbf{r}\} \end{aligned}$$

U_R und \mathbf{r} sind also unkorreliert, was auch zu erwarten war, denn zwei statistisch unabhängige Zufallsvariablen sind stets unkorreliert.

Man kann leicht bestätigen

$$E\{(\mathbf{r} - m_{\mathbf{r}})(U_R - m_{U_R})\} = E\{\mathbf{r} - m_{\mathbf{r}}\} \cdot E\{U_R - m_{U_R}\} = 0.$$

Somit ist der Korrelationskoeffizient

$$\rho = \frac{E\{(\mathbf{r} - m_{\mathbf{r}})(U_R - m_{U_R})\}}{\sigma_{\mathbf{r}} \cdot \sigma_{U_R}} = 0.$$

Wegen $E\{U_R\} = 0$, ist auch $E\{\mathbf{r}U_R\} = 0$, d. h. sind \mathbf{r} und U_R orthogonal. Zwei statistisch unabhängige Zufallsvariablen sind stets orthogonal, wenn mindestens ein Mittelwert Null ist.

Selbsttestaufgabe 3.5-1:

- Was versteht man unter dem Ausdruck $F_{xy}(x, y)$?
- Was versteht man unter linear unabhängigen Zufallsvariablen?

c. Was sagt der Korrelationskoeffizient aus?

3.6 Tschebyscheff'sche und Bernoulli'sche Ungleichungen

Ist die Varianz σ_x^2 einer Zufallsvariablen x endlich, so gilt für ein beliebiges festes $k > 0$,

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 \cdot f_x(x) dx \\ &\geq \int_{|x - m_x| > k\sigma_x} (x - m_x)^2 \cdot f_x(x) dx \\ &\geq k^2 \sigma_x^2 \int_{|x - m_x| > k\sigma_x} f_x(x) dx = k^2 \sigma_x^2 \cdot P\{|x - m_x| \geq k\sigma_x\}\end{aligned}$$

oder

$$P\{|x - m_x| \geq k\sigma_x\} \leq \frac{1}{k^2} \quad 3.6-1$$

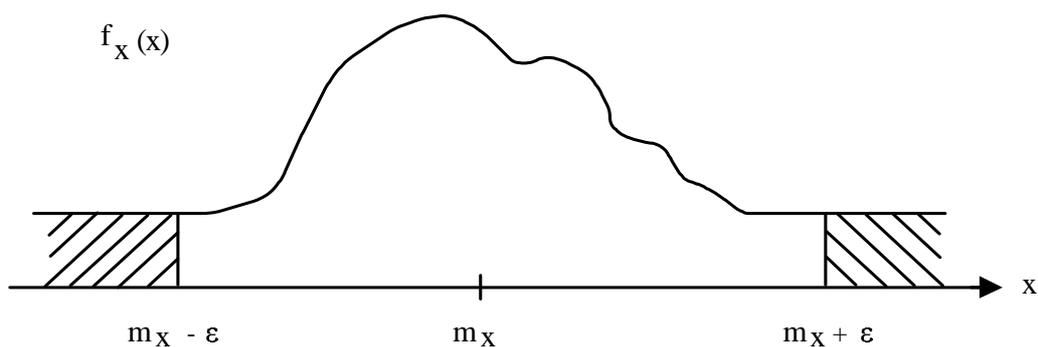


Abb. 3.6-1: Zur Tschebyscheff'schen Ungleichung

oder mit $k\sigma_x = \varepsilon$

$$P\{|x - m_x| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma_x^2}{\varepsilon^2}.$$

Wir können dies auch für das komplementäre Ereignis schreiben

$$P\{|\mathbf{x} - m_{\mathbf{x}}| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma_{\mathbf{x}}^2}{\varepsilon^2}. \quad 3.6-2$$

**Tschebyscheff'sche
Ungleichung**

Dieses Ergebnis ist als **Tschebyscheff'sche Ungleichung** bekannt und besagt, dass unabhängig vom tatsächlichen Verlauf der Funktion $f_{\mathbf{x}}(x)$, die Wahrscheinlichkeit, dass \mathbf{x} innerhalb des Streifens $\pm\varepsilon$ um den Mittelwert $m_{\mathbf{x}}$ liegt, nahe bei Eins liegt, sofern $\varepsilon \gg \sigma_{\mathbf{x}}$ gewählt wird.

Beispiel 3.6-1:

Wir betrachten die Zufallsvariable \mathbf{r} (vgl. Beispiel 3.4-3). Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung $F_{\mathbf{r}}(r)$ hat die Form

$$F_{\mathbf{r}}(r) = \int_{-\infty}^r f_{\mathbf{r}}(\eta) \cdot d\eta = \frac{1}{2} + \operatorname{erf}\left(\frac{r - m_{\mathbf{r}}}{\sigma}\right),$$

wobei $\operatorname{erf}()$ als Fehlerfunktion wie folgt definiert ist,

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\eta^2/2} \cdot d\eta.$$

Für die Fehlerfunktion gelten

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x) \text{ und } \operatorname{erf}(\infty) = \frac{1}{2}.$$

Wir berechnen nun die Wahrscheinlichkeit

$$P\{|\mathbf{r} - m_{\mathbf{r}}| < \varepsilon\}$$

für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und prüfen die Tschebyscheff'sche Ungleichung.

$$\begin{aligned} P\{|\mathbf{r} - m_{\mathbf{r}}| < \varepsilon\} &= P\{m_{\mathbf{r}} - \varepsilon < \mathbf{r} < m_{\mathbf{r}} + \varepsilon\} \\ &= \int_{m_{\mathbf{r}} - \varepsilon}^{m_{\mathbf{r}} + \varepsilon} f_{\mathbf{r}}(r) \cdot dr \\ &= \int_{-\infty}^{m_{\mathbf{r}} + \varepsilon} f_{\mathbf{r}}(r) \cdot dr + \int_{m_{\mathbf{r}} - \varepsilon}^{-\infty} f_{\mathbf{r}}(r) \cdot dr \\ &= F_{\mathbf{r}}(m_{\mathbf{r}} + \varepsilon) - F_{\mathbf{r}}(m_{\mathbf{r}} - \varepsilon) \\ &= \operatorname{erf}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right) \\ &= 2 \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Wir nehmen die folgenden Zahlenwerte an:

$$\varepsilon = 0,015 \text{ und } \sigma = 0,01;$$

Somit beträgt

$$P\{|\mathbf{r} - m_{\mathbf{r}}| < \varepsilon\} = 2 \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{0,015}{0,01}\right) = 0,86638.$$

Anmerkung: Der Wert der Fehlerfunktion wurde aus der zugehörigen Wertetafel entnommen.

x	er f (x)	x	er f (x)	x	er f (x)
0,05	0,01994	1,05	0,35314	2,05	0,47982
0,10	0,03983	1,10	0,36433	2,10	0,48214
0,15	0,05962	1,15	0,37493	2,15	0,48422
0,20	0,07926	1,20	0,38493	2,20	0,48610
0,25	0,08971	1,25	0,39435	2,25	0,48778
0,30	0,11791	1,30	0,40320	2,30	0,48928
0,35	0,13683	1,35	0,41149	2,35	0,49061
0,40	0,15542	1,40	0,41924	2,40	0,49180
0,45	0,17364	1,45	0,42647	2,45	0,49286
0,50	0,19146	1,50	0,43319	2,50	0,49379
0,55	0,20884	1,55	0,43943	2,55	0,49461
0,60	0,22575	1,60	0,44520	2,60	0,49534
0,65	0,24215	1,65	0,45053	2,65	0,49597
0,70	0,25804	1,70	0,45543	2,70	0,49653
0,75	0,27337	1,75	0,45994	2,75	0,49702
0,80	0,28814	1,80	0,46407	2,80	0,49744
0,85	0,30234	1,85	0,46784	2,85	0,49781
0,90	0,31594	1,90	0,47128	2,90	0,49813
0,95	0,32894	1,95	0,47441	2,95	0,49841
1,00	0,34134	2,00	0,47726	3,00	0,49865

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\eta^2/2} \cdot d\eta .$$

Die rechte Seite der Tschebyscheff'schen Ungleichung hat den Wert

$$1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = 0,5556.$$

Die Zahlenwerte zeigen

$$P\{|\mathbf{r} - m_{\mathbf{r}}| < \varepsilon\} > 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Wir betrachten nun die n -fache Wiederholung eines Experiments und insbesondere ein Ereignis, $A \in E$, das mit der Wahrscheinlichkeit P_a auftritt. Die Zufallsvariable

$$\mathbf{x}_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } A \text{ im } i\text{-ten Versuch auftritt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

hat die Erwartungswerte

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{x}_i\} &= 1 \cdot P_a + 0 \cdot (1 - P_a) = P_a \\ E\{\mathbf{x}_i^2\} &= 1^2 \cdot P_a + 0^2(1 - P_a) = P_a \end{aligned}$$

und die Varianz

$$\sigma_{\mathbf{x}_i}^2 = P_a - P_a^2 = P_a(1 - P_a).$$

Für die Varianz gilt ferner $\sigma_{\mathbf{x}_i}^2 \leq 1/4$, denn das Maximum liegt bei $P_a = 1/2$. Wir bilden nun eine neue Zufallsvariable

$$\bar{\mathbf{x}}_n = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_n}{n} = \frac{\mathbf{k}}{n},$$

wobei \mathbf{k} die Anzahl der Versuche ist, bei denen das Ereignis A bei n Wiederholungen eintritt. Für die Zufallsvariable $\bar{\mathbf{x}}_n$ erhalten wir nach einer kurzen Umrechnung $\sigma_{\bar{\mathbf{x}}_n}^2 = \frac{1}{n} \cdot \sigma_{\mathbf{x}_i}^2$.

Die Tschebyscheff'sche Ungleichung für $\bar{\mathbf{x}}_n$ ergibt somit

$$P\{|\bar{\mathbf{x}}_n - P_a| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{P_a(1 - P_a)}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \quad 3.6-3$$

oder

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{\mathbf{k}}{n} - P_a\right| < \varepsilon\right\} = 1. \quad 3.6-4$$

Dieses Ergebnis wird das schwache Gesetz der großen Zahlen (auch **Bernoulli'sche Ungleichung**) genannt und besagt, dass für große n sich die relative Häufigkeit $\frac{\mathbf{k}}{n}$ der Wahrscheinlichkeit P_a annähert.

**Bernoulli'sche
Ungleichung**

Beispiel 3.6-2:

Wir wollen die Wahrscheinlichkeit P_a eines Ereignisses A durch seine relative Häufigkeit $\frac{\mathbf{k}}{n}$ abschätzen. Wir führen hierzu das zugrundeliegende Zufallsexperiment n -mal durch. Möchten wir, dass unsere Abschätzung mit einer Wahrscheinlichkeit von 98% unter einer Fehlerschranke von 1% liegt, so fordern wir $P\{|\bar{\mathbf{x}}_n - P_a| < \varepsilon\} \geq 0,98$ und $\varepsilon = 0,01$ und erhalten entsprechend Gl. 3.6-3

$$1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \geq 0,98$$

oder

$$n \geq \frac{1}{0,08 \varepsilon^2} = 125000.$$

Dies bedeutet, dass wir unsere Anforderung an die Abschätzung erfüllen, wenn wir für ihre Gewinnung das Experiment 125000-mal durchführen.

3.7 Zufallsprozesse

Wir gehen von einem Zufallsexperiment (H, E, P) aus und ordnen jedem Ausgang $\eta_i \in H$ des Experiments eine eindeutige Zeitfunktion $x(\eta_i, t)$ zu. Ist $\mathbf{x}(\eta, t)$ für alle t aus dem betrachteten Zeitintervall $T_{\mathbf{x}}$ eine Zufallsvariable, so nennen wir $\mathbf{x}(\eta, t)$ einen **Zufallsprozess**, oder einen **stochastischen Prozess**.

Zufallsprozess
stochastischer Prozess

Ein Zufallsprozess kann aus verschiedenen Sichten interpretiert werden:

1. Man kann ihn als eine Familie von Funktionen $\mathbf{x}(\eta, t)$ ansehen, wobei η und t Variablen sind.
2. Man kann ihn als eine Musterfunktion einfache reelle Funktion der Zeit für einen festen Ausgang η_i des Experiments ansehen. In diesem Fall ist t eine Variable und η fest. Die einzelnen Zeitfunktionen nennt man **Musterfunktionen**.
3. Man kann ihn als eine Zufallsvariable ansehen. In diesem Fall ist der Zeitpunkt t fest und η eine Variable, \mathbf{x} somit eine Zufallsvariable.
4. Man kann ihn als eine einzige reelle Zahl ansehen, wenn t und η beide fest vorgegeben sind.

Musterfunktion

Sprechen wir von zwei oder mehr Zufallsprozessen, so setzen wir stets voraus, dass sie über demselben Ergebnisraum definiert sind und über dem gleichen Zeitintervall betrachtet werden.

Da ein Zufallsprozess als eine Zufallsvariable für jeden festen Zeitpunkt aufgefasst wird, können wir für einen festen Zeitpunkt jeweils die statistischen Eigenschaften betrachten. Entsprechend Abschnitt 3.3 und Abschnitt 3.4 erhalten wir

Wahrscheinlichkeits-
verteilung

die **Wahrscheinlichkeitsverteilung**

$$F_{\mathbf{x}}(x, t) = P\{\eta_i \mid \mathbf{x}(\eta_i, t) \leq x\}, \quad 3.7-1$$

Wahrscheinlichkeits-
dichte

die **Wahrscheinlichkeitsdichte**

$$f_{\mathbf{x}}(x, t) = \frac{\partial F_{\mathbf{x}}(x, t)}{\partial x}, \quad 3.7-2$$

linearer Mittelwert

den **linearen Mittelwert**

$$m_{\mathbf{x}}(t) = E\{\mathbf{x}(\eta, t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\mathbf{x}}(x, t) dx, \quad 3.7-3$$

den **quadratischen Mittelwert**

**quadratischer
Mittelwert**

$$m_{\mathbf{x}}^{(2)}(t) = E\{[\mathbf{x}(\eta, t)]^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\mathbf{x}}(x, t) dx \quad 3.7-4$$

und die **Varianz**

Varianz

$$\sigma_{\mathbf{x}}^2(t) = E\{(\mathbf{x} - m_{\mathbf{x}})^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_{\mathbf{x}})^2 f_{\mathbf{x}}(x, t) dx. \quad 3.7-5$$

Beispiel 3.7-1:

Es werden n Widerstände nacheinander entnommen und n Schaltungen wie im Beispiel 3.5-1 aufgebaut. Es wird angenommen, dass die Widerstandswerte normalverteilt sind, wie im Beispiel 3.4-1.

Es entsteht eine Familie von Funktionen $U(r_j, t)$, für $j = 1, 2, \dots, n$. Sie stellt einen Zufallsprozess dar. Jede $U(r_j, t)$ ist eine Musterfunktion des Zufallsprozesses. Für einen festen Zeitpunkt t ist \mathbf{U} eine Zufallsvariable, die abhängig von dem gewählten Widerstand r_j ist.

Wir betrachten die Rauschspannung \mathbf{U}_R näher, bevor wir uns mit $\mathbf{U}(r, t)$ beschäftigen.

Es gelte für \mathbf{U}_R als schmalbandiges Rauschen

$$\mathbf{U}_R = \mathbf{U}_S \cdot \sin \omega_0 t + \mathbf{U}_C \cdot \cos \omega_0 t,$$

mit

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{U}_S\} &= E\{\mathbf{U}_C\} = 0, \\ E\{\mathbf{U}_S^2\} &= E\{\mathbf{U}_C^2\} = \sigma^2 \end{aligned}$$

und

$$E\{\mathbf{U}_S \mathbf{U}_C\} = 0.$$

1.

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{U}_R\} &= E\{\mathbf{U}_C \cdot \cos \omega_0 t + \mathbf{U}_S \cdot \sin \omega_0 t\} \\ &= E\{\mathbf{U}_C\} \cdot \cos \omega_0 t + E\{\mathbf{U}_S\} \cdot \sin \omega_0 t \\ &= 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
E\{\mathbf{U}_R^2\} &= E\{(\mathbf{U}_C \cdot \cos \omega_0 t + \mathbf{U}_S \cdot \sin \omega_0 t)^2\} \\
&= E\{\mathbf{U}_C^2\} \cdot \cos^2 \omega_0 t + 2 \cdot E\{\mathbf{U}_C \mathbf{U}_S\} \cdot \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t \\
&\quad + E\{\mathbf{U}_S^2\} \cdot \sin^2 \omega_0 t \\
&= \sigma^2 \cos^2 \omega_0 t + 0 + \sigma^2 \sin^2 \omega_0 t \\
&= \sigma^2.
\end{aligned}$$

Wir bestimmen nun für einen festen Zeitpunkt t die Erwartungswerte $m_{\mathbf{U}}$, $m_{\mathbf{U}}^{(2)}$ und $\sigma_{\mathbf{U}}^2$. Die diversen Erwartungswerte der Zufallsvariablen \mathbf{r} werden dem Beispiel 3.4-3 entnommen.

1. Der lineare Mittelwert:

$$\begin{aligned}
m_{\mathbf{U}}(t) &= E\{\mathbf{U}(r, t)\} \\
&= E\{\mathbf{U}_R + i \cdot \mathbf{r}\} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_R + i \cdot r) f_{\mathbf{U}_R, \mathbf{r}}(U_R, r) dU_R dr \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} U_R \cdot f_{\mathbf{U}_R}(U_R) dU_R + \int_{-\infty}^{+\infty} i \cdot r \cdot f_{\mathbf{r}}(r) dr \\
&= E\{\mathbf{U}_R\} + i \cdot E\{\mathbf{r}\} \\
&= i \cdot a
\end{aligned}$$

2. Der quadratische Mittelwert:

$$\begin{aligned}
m_{\mathbf{U}}^{(2)}(t) &= E\{[\mathbf{U}(r, t)]^2\} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_R + i \cdot r)^2 f_{\mathbf{U}_R, \mathbf{r}}(U_R, r) dU_R dr \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_R^2 + 2 \cdot i \cdot U_R \cdot r + i^2 \cdot r^2) f_{\mathbf{U}_R}(U_R) \\
&\quad \cdot f_{\mathbf{r}}(r) dU_R dr \\
&= E\{\mathbf{U}_R^2\} + 2 \cdot i \cdot E\{\mathbf{U}_R\} E\{\mathbf{r}\} + i^2 \cdot E\{\mathbf{r}^2\} \\
&= \sigma^2 + 0 + i^2 \cdot (a^2 + b^2) \\
&= \sigma^2 + i^2 \cdot (a^2 + b^2)
\end{aligned}$$

3. Die Varianz:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\mathbf{U}}^2(t) &= E\{(\mathbf{U}(r, t) - i \cdot a)^2\} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_R + i \cdot (r - a))^2 f_{\mathbf{U}_R, r}(U_R, r) dU_R dr \\
 &= E\{\mathbf{U}_R^2\} + 2 \cdot i \cdot E\{\mathbf{U}_R\} E\{(r - a)\} + i^2 \cdot E\{(r - a)^2\} \\
 &= \sigma^2 + i^2 \cdot b^2.
 \end{aligned}$$

Da für verschiedene feste Zeitpunkte t_1, t_2, \dots, t_n der Zufallsprozess $\mathbf{x}(\eta, t_i)$ jeweils als eine Zufallsvariable aufgefasst wird, können wir für verschiedene feste Zeitpunkte die gemeinsame Statistik betrachten. Entsprechend Abschnitt 3.5 definieren wir für zwei (gleiche oder verschiedene) Zufallsprozesse \mathbf{x} und \mathbf{y} die **gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung**

$$F_{\mathbf{xy}}(x, y, t_1, t_2) = P(\{\eta_i \mid \mathbf{x}(\eta_i, t_1) \leq x\} \cap \{\eta_i \mid \mathbf{y}(\eta_i, t_2) \leq y\}) \quad 3.7-6$$

gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung

und die **gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte**

$$f_{\mathbf{xy}}(x, y, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_{\mathbf{xy}}(x, y, t_1, t_2)}{\partial x \partial y}, \quad 3.7-7$$

gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte

und können somit diverse Erwartungswerte bilden.

Die **Autokorrelationsfunktion** eines Zufallsprozesses $\mathbf{x}(\eta, t)$ ist definiert als

$$\begin{aligned}
 R_{\mathbf{xx}}(t_1, t_2) &= E\{\mathbf{x}(\eta, t_1)\mathbf{x}(\eta, t_2)\} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{\mathbf{xx}}(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 \cdot dx_2.
 \end{aligned} \quad 3.7-8$$

Autokorrelationsfunktion

Der ihr verwandte Autokorrelationskoeffizient $\rho_{\mathbf{xx}}$ entsprechend Gl. 3.5-7 ist ein Maß für die (lineare) Abhängigkeit des Zufallsprozesses für zwei verschiedene Zeitpunkte.

Die **Kreuzkorrelationsfunktion** zweier Zufallsprozesse $\mathbf{x}(\eta, t)$ und $\mathbf{y}(\eta, t)$ ist entsprechend definiert als

Kreuzkorrelationsfunktion

$$\begin{aligned}
 R_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) &= E\{\mathbf{x}(\eta, t_1)\mathbf{y}(\eta, t_2)\} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{\mathbf{xy}}(x, y, t_1, t_2) dx \cdot dy.
 \end{aligned} \quad 3.7-9$$

Der ihr verwandte Kreuzkorrelationskoeffizient $\rho_{\mathbf{xy}}$ entsprechend Gl. 3.6-4 ist ein Maß für die (lineare) Abhängigkeit zwischen den beiden Prozessen für zwei verschiedene Zeitpunkte.

Beispiel 3.7-2:

Wir setzen Beispiel 3.7-1 fort und berechnen die Autokorrelationsfunktion von U :

$$\begin{aligned}
 R_{UU}(t_1, t_2) &= E\{U(r, t_1)U(r, t_2)\} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_R(t_1) + i \cdot r) \cdot (U_R(t_2) + i \cdot r) \\
 &\quad \cdot f_{U_R, r}(U_R, r) dU_R dr \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_R(t_1) \cdot U_R(t_2) + i \cdot r \cdot (U_R(t_1) \\
 &\quad + U_R(t_2)) + i^2 \cdot r^2) \\
 &\quad \cdot f_{U_R, r}(U_R, r) dU_R \cdot dr \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (U_R(t_1) \cdot U_R(t_2)) \cdot f_{U_R}(U_R) dU_R \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} i \cdot r \cdot (U_R(t_1) + U_R(t_2)) \cdot f_{U_R}(U_R) \\
 &\quad \cdot f_r(r) dU_R \cdot dr + \int_{-\infty}^{+\infty} i^2 \cdot r^2 \cdot f_r(r) dr \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} U_R(t_1) \cdot U_R(t_2) \cdot f_{U_R}(U_R) dU_R + 0 \\
 &\quad + i^2 \cdot (a^2 + b^2).
 \end{aligned}$$

Für den ersten Term gilt

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{+\infty} U_R(t_1) \cdot U_R(t_2) \cdot f_{U_R}(u_R) dU_R \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_C \cdot \cos \omega_0 t_1 + U_S \cdot \sin \omega_0 t_1) \cdot (U_C \cdot \cos \omega_0 t_2 + U_S \cdot \sin \omega_0 t_2) \cdot \\
 &\quad \cdot f_{U_C, U_S}(U_C, U_S) dU_C \cdot dU_S \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (U_C^2 \cdot \cos \omega_0 t_1 \cdot \cos \omega_0 t_2) f_{U_C}(U_C) dU_C \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_C \cdot \cos \omega_0 t_1 \cdot U_S \cdot \sin \omega_0 t_2) \cdot f_{U_C}(U_C) \cdot f_{U_S}(U_S) dU_C dU_S \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_S \cdot \sin \omega_0 t_1 \cdot U_C \cdot \cos \omega_0 t_2) \cdot f_{U_C}(U_C) \cdot f_{U_S}(U_S) dU_C dU_S
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-\infty}^{+\infty} (U_S^2 \cdot \sin \omega_0 t_1 \cdot \sin \omega_0 t_2) f_{U_S}(U_S) dU_S \\
& = \sigma^2 \cdot (\cos \omega_0 t_1 \cdot \cos \omega_0 t_2 + \sin \omega_0 t_1 \cdot \sin \omega_0 t_2) \\
& = \sigma^2 \cdot \cos \omega_0 (t_1 - t_2) \\
& = \sigma^2 \cdot \cos \omega_0 (t_2 - t_1) .
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt somit für $R_{UU}(t_1, t_2)$:

$$R_{UU}(t_1, t_2) = \sigma^2 \cdot \cos \omega_0 (t_2 - t_1) + i^2 \cdot (a^2 + b^2) .$$

Gilt für zwei beliebige Zeitpunkte t_1, t_2

$$E\{\mathbf{x}(\eta, t_1)\mathbf{y}(\eta, t_2)\} = E\{\mathbf{x}(\eta, t_1)\} \cdot E\{\mathbf{y}(\eta, t_2)\}, \quad 3.7-10$$

so nennt man $\mathbf{x}(\eta, t)$ und $\mathbf{y}(\eta, t)$ **unkorrelierte** (linear unabhängige) **Zufallsprozesse**.

**unkorrelierte
Zufallsprozesse**

Gilt für zwei beliebige Zeitpunkte t_1, t_2

$$E\{\mathbf{x}(\eta, t_1) \cdot \mathbf{y}(\eta, t_2)\} = 0, \quad 3.7-11$$

so nennt man $\mathbf{x}(\eta, t)$ und $\mathbf{y}(\eta, t)$ **orthogonale Zufallsprozesse** .

**orthogonale
Zufallsprozesse
statistische
Unabhängigkeit**

Zwei Prozesse $\mathbf{x}(\eta, t)$ und $\mathbf{y}(\eta, t)$ nennt man **statistisch unabhängig**, wenn für beliebige Zeitpunkte t_1, t_2 die Zufallsvariable $\mathbf{x}(\eta, t_1)$ und $\mathbf{y}(\eta, t_2)$ voneinander statistisch unabhängig sind, d. h. wenn Gl. 3.5-6 entsprechend gilt.

Im allgemeinen sind die Statistiken von Zufallsprozessen, die wir betrachtet haben, zeitabhängig. Man kann also außer Erwartungswerten (**Scharmittelwerten**) auch über die einzelnen Zeitfunktionen (Musterfunktionen) mitteln. Diese **Zeitmittelwerte** können wiederum als Zufallsvariablen aufgefasst werden, da sie im allgemeinen von den betrachteten Musterfunktionen abhängen. Wir definieren entsprechende Zeitmittelwerte, soweit die jeweiligen Integrale existieren:

Scharmittelwerte

Zeitmittelwerte

Linearer Zeitmittelwert

**Linearer
Zeitmittelwert**

$$\tilde{m}_{\mathbf{x}}(\eta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \mathbf{x}(\eta, t) dt \quad 3.7-12$$

Quadratischer Zeitmittelwert

**Quadratischer
Zeitmittelwert**

$$\tilde{m}_{\mathbf{x}}^{(2)}(\eta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \mathbf{x}^2(\eta, t) dt \quad 3.7-13$$

Beispiel 3.7-3:

Die Mittelwerte, die in den vorigen Beispielen ermittelt wurden, sind Scharmittelwerte. Neben den Scharmittelwerten werden diverse Zeitmittelwerte für Zufallsprozesse definiert.

Wir nehmen $U(r_6, t)$ als Musterfunktion. Es gelten für die Rauschspannung bekanntlich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U_S \cdot \sin \omega_0 t \, dt &= 0, \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U_C \cdot \cos \omega_0 t \, dt &= 0, \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U_S \cdot U_C \cdot \cos \omega_0 t \cdot \sin \omega_0 t \, dt &= 0, \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U_C^2 \cdot \cos^2 \omega_0 t \, dt &= \frac{1}{2} \cdot \sigma^2,\end{aligned}$$

und

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U_S^2 \cdot \sin^2 \omega_0 t \, dt = \frac{1}{2} \cdot \sigma^2. \quad 3.7-14$$

Wir ermitteln die Zeitmittelwerte $\tilde{m}_U(r_6)$ und $\tilde{m}_U^{(2)}(r_6)$.

1. Der lineare Zeitmittelwert:

$$\begin{aligned}\tilde{m}_U(r_6) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U(r_6, t) \, dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (U_R(t) + i \cdot r_6) \, dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (U_C \cdot \cos \omega_0 t + U_S \cdot \sin \omega_0 t + i \cdot r_6) \, dt \\ &= 0 + i \cdot r_6 = i \cdot r_6\end{aligned}$$

2. Der quadratische Mittelwert:

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_{\mathbf{U}}^{(2)}(r_6) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U^2(r_6, t) dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (U_C \cdot \cos \omega_0 t + U_S \cdot \sin \omega_0 t + i \cdot r_6)^2 dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[\int_{-T}^T (U_C^2 \cdot \cos^2 \omega_0 t + U_S^2 \cdot \sin^2 \omega_0 t) dt \right. \\
&\quad + \int_{-T}^T 2 \cdot U_S \cdot U_C \cdot \sin \omega_0 t \cdot \cos \omega_0 t dt \\
&\quad + \int_{-T}^T 2 \cdot i \cdot r_6 \cdot (U_C \cdot \cos \omega_0 t + U_S \cdot \sin \omega_0 t) dt \\
&\quad \left. + \int_{-T}^T i^2 \cdot r_6^2 dt \right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 + 0 + 0 + i^2 \cdot r_6^2 \\
&= \sigma^2 + i^2 \cdot r_6^2 .
\end{aligned}$$

Sind die Statistiken eines Zufallsprozesses invariant gegenüber einer Zeitverschiebung, so nennt man den Zufallsprozess **streng stationär**. Dies bedeutet, dass die Prozesse $\mathbf{x}(\eta, t)$ und $\mathbf{x}(\eta, t + \tau)$ für beliebige τ die gleichen Statistiken haben. Ein Prozess $\mathbf{x}(\eta, t)$ wird **schwach stationär** genannt, wenn der lineare Mittelwert konstant ist, und die Autokorrelationsfunktion lediglich von der Zeitverschiebung $\tau = |t_1 - t_2|$ abhängt, d. h. wenn gelten

$$E\{\mathbf{x}(\eta, t)\} = E\{\mathbf{x}(\eta, t + \tau)\} = m_{\mathbf{x}} \quad 3.7-15$$

und

$$R_{\mathbf{xx}}(t_1, t_2) = E\{\mathbf{x}(\eta, t_1)\mathbf{x}(\eta, t_2)\} = R_{\mathbf{xx}}(\tau). \quad 3.7-16$$

Für den quadratischen Mittelwert gilt dann

$$E\{\mathbf{x}^2(\eta, t)\} = R_{\mathbf{xx}}(0) = m_{\mathbf{x}}^{(2)}. \quad 3.7-17$$

Der Begriff der Stationarität kann auch für mehrere Prozesse erweitert werden. Man spricht dann von **gemeinsamer Stationarität**. So gilt entsprechend Gl. 3.7-16 für zwei Prozesse $\mathbf{x}(\eta, t)$ und $\mathbf{y}(\eta, t)$ die gemeinsam schwach stationär sind, dass ihre Kreuzkorrelationsfunktion lediglich von der Zeitspanne τ abhängt, d. h. es gilt

$$R_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) = E\{\mathbf{x}(\eta, t_1)\mathbf{y}(\eta, t_1 + \tau)\} = R_{\mathbf{xy}}(\tau) \quad 3.7-18$$

strenge Stationarität

schwache Stationarität

gemeinsame Stationarität

Beispiel 3.7-4:

Wir überprüfen die Stationarität des Zufallsprozesses. Man sieht im Beispiel 3.7-1, dass die Ergebnisse von $m_U(t)$ und $m_U^{(2)}(t)$ für beliebiges t konstant sind, d. h. es gelten auch für $(t + \tau)$ mit der Zeitverschiebung τ die folgenden Gleichungen:

$$E\{U(t + \tau)\} = i \cdot a$$

und

$$E\{U^2(t + \tau)\} = \sigma^2 + i^2 \cdot (a^2 + b^2).$$

Die Autokorrelationsfunktion von U wurde im Beispiel 3.7-2 ausgerechnet. Das Ergebnis lautete

$$\begin{aligned} R_{UU}(t_1, t_2) &= \sigma^2 \cdot \cos \omega_0(t_1 - t_2) + i^2 \cdot (a^2 + b^2) \\ &= \sigma^2 \cdot \cos \omega_0(t_2 - t_1) + i^2 \cdot (a^2 + b^2) \\ &= \sigma^2 \cdot \cos \omega_0\tau + i^2 \cdot (a^2 + b^2) \\ &= R_{UU}(\tau), \end{aligned}$$

wobei $\tau = |t_1 - t_2|$ ist.

Die Autokorrelationsfunktion hängt also nur von der Zeitspanne τ zwischen t_1 und t_2 aber nicht unmittelbar von t_1 und t_2 ab. Dieses Ergebnis zeigt, dass der Prozess schwach stationär ist.

Leistungsdichtespektrum

Für stationäre Prozesse ist die Autokorrelationsfunktion eine Funktion eines Parameters τ . Es bietet sich daher die Möglichkeit, die Fouriertransformierte von $R_{xx}(\tau)$ zu bilden. Diese wird das **Leistungsdichtespektrum** genannt und mit S_{xx} bezeichnet, d. h.

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad 3.7-19$$

Die Rücktransformation ergibt dann

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad 3.7-20$$

Wie allgemein bei den Fouriertransformationspaaren (s. Anhang B), sind die Autokorrelationsfunktion und das Leistungsdichtespektrum gleichwertig, insbesondere hinsichtlich ihrer Aussage über die statistischen Eigenschaften eines Zufallsprozesses.

Für zwei gemeinsame stationäre Prozesse $\mathbf{x}(\eta, t)$ und $\mathbf{y}(\eta, t)$ wird entsprechend Gl. 3.7-19 das **Kreuzleistungsdichtespektrum** definiert, mit

Kreuzleistungsdichtespektrum

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad 3.7-21$$

und der Rücktransformation

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad 3.7-22$$

Beispiel 3.7-5:

Im Beispiel Beispiel 3.7-4 haben wir die Autokorrelationsfunktion $R_{UU}(\tau)$ ermittelt,

$$R_{UU}(\tau) = \sigma^2 \cdot \cos \omega_0 \tau + i^2 \cdot (a^2 + b^2) .$$

1. Aus $|\cos \omega_0 \tau| \leq \cos 0 = 1$ folgt

$$|R_{UU}(\tau)| \leq R_{UU}(0)$$

2. Da \cos eine gerade Funktion ist, haben wir

$$R_{UU}(\tau) = R_{UU}(-\tau).$$

Das Leistungsdichtespektrum erhalten wir durch die Fouriertransformation (s. Anhang B) der Autokorrelationsfunktion $R_{UU}(\tau)$:

$$S_{UU}(\omega) = \pi \cdot (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \cdot \sigma^2 + 2\pi \cdot \delta(\omega) \cdot i^2 \cdot (a^2 + b^2) .$$

1. Es gilt

$$S_{UU}(\omega) = S_{UU}(-\omega),$$

weil $\delta(\omega) = \delta(-\omega)$ ist.

2. $S_{UU}(\omega)$ ist reell.
3. Weil die Gewichtungen der einzelnen δ -Funktionen nicht kleiner als Null sind, ergibt sich stets $S_{UU}(\omega) \geq 0$.

Wie wir gesehen haben, sind für stationäre Zufallsprozesse die Erwartungswerte konstant oder Funktionen von Zeitdifferenzen. Die Zeitmittelwerte sind jedoch

Ergodizität

Zufallsvariablen, die wiederum zeitunabhängig oder Funktionen von Zeitdifferenzen sein können. Gilt für die Zeitmittelwerte, dass sie mit der Wahrscheinlichkeit Eins mit den entsprechenden Erwartungswerten (Scharmittelwerten) übereinstimmen, so nennt man den Zufallsprozess **ergodisch**. Wie bei der Stationarität kann man auch hier strenge und schwache Ergodizität definieren.

Für einen schwach ergodischen Zufallsprozess gilt also z. B.

$$E\{\mathbf{x}(\eta, t)\} = m_{\mathbf{x}} \doteq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \mathbf{x}(\eta, t) dt,$$

$$E\{\mathbf{x}^2(\eta, t)\} = m_{\mathbf{x}}^{(2)} \doteq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \mathbf{x}^2(\eta, t) dt,$$

$$E\{\mathbf{x}(\eta, t_1) \mathbf{x}(\eta, t_2)\} = R_{\mathbf{xx}}(\tau) \doteq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \mathbf{x}(\eta, t) \cdot \mathbf{x}(\eta, t + \tau) dt, \quad 3.7-23$$

wobei das Zeichen \doteq als Gleichheit mit der Wahrscheinlichkeit Eins zu lesen ist, d. h. die Zufallsvariable auf der einen Seite der Gleichung mit der Wahrscheinlichkeit Eins den Wert auf der anderen Seite der Gleichung annimmt.

Beispiel 3.7-6:

Wir listen hier einige Ergebnisse aus den Beispielen Beispiel 3.7-1, Beispiel 3.7-2 und Beispiel 3.7-3 auf.

1. Die Scharmittelwerte:

$$\begin{aligned} m_{\mathbf{U}}(t) &= E\{\mathbf{U}(r, t)\} = i \cdot a \\ m_{\mathbf{U}}^{(2)}(t) &= E\{\mathbf{U}^2(r, t)\} = \sigma^2 + i^2 \cdot (a^2 + b^2) \\ R_{\mathbf{U}\mathbf{U}}(\tau) &= \sigma^2 \cdot \cos \omega_0 \tau + i^2 \cdot (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

2. Die Zeitmittelwerte:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{\mathbf{U}}(r_6) &= i \cdot r_6 \\ \tilde{m}_{\mathbf{U}}^{(2)}(r_6) &= \sigma^2 + i^2 \cdot r_6^2 \end{aligned}$$

Man kann die folgende Gleichung leicht bestätigen:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} U(r_6, t) \cdot U(r_6, t + \tau) dt = \sigma^2 \cos \omega_0 \tau + i^2 \cdot r_6^2.$$

Die obigen Ergebnisse besagen, dass der Zufallsprozess schwach stationär aber nicht ergodisch ist, weil die Scharmittelwerte mit den entsprechenden Zeitmittelwerten nicht mit der Wahrscheinlichkeit Eins übereinstimmen.

Selbsttestaufgabe 3.7-1:

- a. Man erkläre den Begriff "Musterfunktion".
- b. Wofür steht der Ausdruck $R_{\mathbf{xx}}(t_1, t_2)$? Wie wird $R_{\mathbf{xx}}(t_1, t_2)$ definiert?
- c. Man erkläre den Unterschied zwischen einem schwach stationären Prozess und einem streng stationären Prozess.

4 Informationstheorie

4.1 Nachrichtenquellen und -senken

Information	Information im herkömmlichen Sinne ist eine Aussage über einen Zustand oder eine Zustandsänderung. Als Modell für den Kommunikationsprozess betrachten wir zwei Kommunikationspartner, die Symbole oder Symbolfolgen als Nachrichten austauschen. Informationen sind in den Symbolen bzw. Symbolfolgen eingebettet.
Alphabet	Die Menge der verwendeten Symbole nennen wir das Alphabet . Die Bedeutung der
Semantik	Symbole oder Symbolfolgen wird die Semantik genannt. Regeln, die unabhängig von der Semantik für die Zusammensetzung von Symbolen zu Symbolfolgen gelten, werden die Syntax (oder Grammatik) genannt. Unsere Alltagserfahrung lehrt, dass verschiedene Menschen einer Symbolkette (z. B. einem Satz) oft verschiedene Bedeutungen zuordnen. Um jedoch eine quantitative Auswertung zu ermöglichen, gehen wir davon aus, dass die Abbildung von Informationen auf die Symbolfolgen eindeutig ist. Wir können somit anstatt Kommunikation als Informationsaustausch Kommunikation als Symbolaustausch betrachten. Wir betrachten im Folgenden jeweils nur eine Richtung des Informationsaustausches und sprechen von einem Kommunikationspartner als die Quelle und dem anderen als die Senke.
Syntax	
Quelle	Wir betrachten nun eine (diskrete) Quelle , die alle T Sekunden ein Symbol erzeugt. Wir können den Vorgang als ein wiederholtes Zufallsexperiment auffassen und das jeweilige Symbol als einen Ausgang des Experimentes ansehen. x_i sei ein solcher Ausgang des Experimentes zu einem festen Zeitpunkt nT . Ist $P(x_i)$ die Wahrscheinlichkeit, dass das Element x_i als Ausgang auftritt, so definieren wir den Informationsgehalt des Symbols x_i als
Informationsgehalt	

$$I(x_i) = - \log_2 P(x_i) , \quad 4.1-1$$

wobei \log_2 den Logarithmus mit der dualen Basis darstellt.

Für eine Symbolkette $(x_1 x_2 x_3 \dots x_n)$ gilt entsprechend

$$I(x_1 x_2 x_3 \dots x_n) = - \log_2 P(x_1 x_2 x_3 \dots x_n) . \quad 4.1-2$$

Diese Definition des Informationsgehaltes hat folgende Eigenschaften:

- Der Informationsgehalt eines Symbols, das mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auftritt, ist gleich Eins. Diese Pseudoeinheit der Information wird ein Bit genannt.
- Der Informationsgehalt ist stets nicht negativ, d. h.

$$I(x_i) \geq 0 , \text{ da } 0 \leq P(x_i) \leq 1 . \quad 4.1-3$$

- Ein seltenes Symbol enthält mehr Information als ein häufiges Symbol, d. h.

$$I(x_1) \geq I(x_2) , \text{ falls } P(x_1) \leq P(x_2) . \quad 4.1-4$$

- Der Informationsgehalt eines Symbols, das mit der Wahrscheinlichkeit Eins auftritt, ist gleich Null, d. h.

$$I(x_i) = 0, \text{ falls } P(x_i) = 1. \quad 4.1-5$$

- Der Informationsgehalt eines Symbols, das mit der Wahrscheinlichkeit Null auftritt, ist gleich unendlich, d. h.

$$I(x_i) = \infty, \text{ falls } P(x_i) = 0. \quad 4.1-6$$

- I ist eine stetige Funktion von P .
- Sind zwei Symbole der Symbolketten statistisch unabhängig, so addiert sich der Informationsgehalt, d. h. aus

$$P(x_1 x_2) = P(x_1) \cdot P(x_2)$$

folgt

$$I(x_1 x_2) = I(x_1) + I(x_2). \quad 4.1-7$$

Betrachten wir eine Quelle mit einem Alphabet aus n Symbolen $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, so ist jedem Ausgang x_i ein Informationsgehalt $I(x_i)$, also eine reelle Zahl zugeordnet. Man kann $I(\mathbf{x})$ entsprechend Abschnitt 3.3 als eine Zufallsvariable auffassen. Der Erwartungswert $E\{I(\mathbf{x})\}$ ist der mittlere Informationsgehalt der Quelle pro Symbol und errechnet sich als

$$H = E\{I(\mathbf{x})\} = - \sum_{i=1}^n P(x_i) \log_2 P(x_i). \quad 4.1-8$$

H ist also der Informationsgehalt, den ein Symbol der Quelle im Mittel enthält. Man nennt H die **Symbolentropie** der Quelle, oft auch **Entropie**, und gibt sie in der Einheit Bit pro Symbol an. Sie ist stets positiv, da $0 \leq P \leq 1$ gilt.

Symbolentropie
Entropie

Wir zeigen nun, dass H den maximalen Wert annimmt, wenn die Symbole gleichverteilt sind, wir benutzen dabei die Ungleichung für den natürlichen Logarithmus $\ln \omega \leq \omega - 1$ für jede positive reelle Zahl $\omega \neq 0$.

Wir erhalten für

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_i \cdot \log_2 \frac{1}{n P_i} &= \frac{1}{\ln 2} \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot \ln \frac{1}{n P_i} \\ &\leq \frac{1}{\ln 2} \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot \left(\frac{1}{n P_i} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} - \sum_{i=1}^n P_i \right) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \cdot (1 - 1) = 0, \end{aligned}$$

wobei das Gleichheitszeichen in der Ungleichung oben genau dann gilt, wenn für alle i gilt

$$\frac{1}{nP_i} = 1 \text{ oder } P_i = \frac{1}{n}.$$

Der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^n P_i \cdot \log \frac{1}{nP_i} = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \log \frac{1}{P_i} - \log n$$

wird jedoch genau dann maximal, wenn

$$\sum_{i=1}^n P_i \log \frac{1}{P_i} = H$$

maximal wird. Wir haben somit gezeigt, dass H den maximalen Wert annimmt, wenn die Symbole gleichverteilt sind und

$$H_{max} = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \log \frac{1}{n} = \log n. \quad 4.1-9$$

maximale Entropie Man erhält eine anschauliche Interpretation der **maximalen Entropie** H_{max} , wenn man eine Quelle mit n verschiedenen Symbolen betrachtet, für die $\log n$ eine ganze Zahl ist. Dann ist $\log n$ gerade die Anzahl der Binärstellen, die erforderlich sind, die Symbole unabhängig von deren Auftretswahrscheinlichkeiten zu kennzeichnen bzw. zu codieren. Manchmal wird die Differenz

$$H_{max} - H = R \quad 4.1-10$$

Redundanz einer Quelle als die **Redundanz einer Quelle** bezeichnet. Sie ist ein Maß, um das die Entropie einer Quelle lediglich durch die Veränderung der Auftretswahrscheinlichkeiten der Symbole erhöht werden kann. Warum $H_{max} - H$ Redundanz genannt wird, wird deutlich, wenn man folgendes betrachtet. Wenn eine Quelle die Redundanz Null hat, sind alle Symbole gleichwahrscheinlich. Ist die Redundanz ungleich Null, so treten gewisse Symbole mit größerer Wahrscheinlichkeit auf als andere: sie werden also häufiger wiederholt. Betrachtet man Symbolketten, so treten nun gewisse Ketten häufiger auf als andere.

Beispiel 4.1-1:

Wir betrachten eine Quelle mit dem Quellenalphabet $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten der Symbole sind durch

$$P(a) = P(b) = \frac{1}{4},$$

$$P(c) = P(d) = \frac{1}{8}$$

und

$$P(e) = P(f) = P(g) = P(h) = \frac{1}{16}$$

gegeben.

Wir berechnen die Informationsgehalte der einzelnen Symbole, die max. Entropie und die Redundanz der Quelle.

Die einzelnen Informationsgehalte ergeben sich zu:

$$I(a) = I(b) = -\log_2 P(a) = -\log_2 P(b) = -\log_2 \frac{1}{4} = 2 \text{ Bit},$$

$$I(c) = I(d) = -\log_2 P(c) = -\log_2 P(d) = -\log_2 \frac{1}{8} = 3 \text{ Bit},$$

$$I(e) = I(f) = I(g) = I(h) = -\log_2 \frac{1}{16} = 4 \text{ Bit}.$$

Die max. Entropie ergibt sich dann, wenn alle Symbole des Alphabetes gleich wahrscheinlich sind, d. h.

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = P(e) = P(f) = P(g) = P(h) = \frac{1}{8}.$$

Somit ist

$$H_{\max} = -8 \cdot \frac{1}{8} \cdot \log_2 \frac{1}{8} = 3 \text{ Bit/Symbol}.$$

Die Symbolentropie der Quelle liegt bei

$$H = -\sum_{i=1}^8 P(x_i) \log_2 P(x_i) = 2,75 \text{ Bit/Symbol}.$$

Daraus folgt für die Redundanz

$$R = H_{\max} - H = 0,25 \text{ Bit/Symbol}.$$

Im Allgemeinen sind die Symbolwahrscheinlichkeiten $P(x_i)$ invariant gegenüber einer Zeitverschiebung, man spricht dann von einer **stationären Quelle**. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Symbolkette ein bestimmtes Symbol auftritt, ist im Allgemeinen jedoch nicht unabhängig von den vorangegangenen Symbolen. Reicht diese Abhängigkeit k Symbole zurück, so spricht man von einer **Markoff-Quelle k-ter Ordnung**. Wird die Auswahl des nächsten Symbols nur noch vom momentanen Wert beeinflusst, so spricht man von einer **Markoff-Quelle** (genauer einer Markoff-Quelle erster Ordnung). Für eine Markoff-Quelle gilt demnach

$$P(x_{(n+1)T} \mid x_T, \dots, x_{(n-1)T}, x_{nT}) = P(x_{(n+1)T} \mid x_{nT}), \quad 4.1-11$$

wobei wir mit x_{nT} das Auftreten eines Symbolen x zum Zeitpunkt nT bezeichnet haben.⁷

stationäre Quelle

Markoff-Quelle k-ter Ordnung

Markoff-Quelle

⁷ Genauer muss es hier heißen $x_{i,(n+1)T}, x_{j,nT}$ usw. Um die Schreibweise zu vereinfachen, haben wir den ersten Index, der das betrachtete Symbol kennzeichnet, unterdrückt.

relevante Information
irrelevante Information

Betrachten wir nun den Vorgang der Kommunikation, so ist nicht jede von der Quelle erzeugte Information für die Senke von Interesse. Die für die Senke interessante Information nennt man **relevante Information**; die uninteressante **irrelevante Information**. So sind beim Fernsprechen Sprachsignale über 3400 Hz irrelevant, beim Rundfunk Tonsignale über ca. 15 kHz. Die Relevanz einer Informationsquelle hängt entscheidend von den Anforderungen der Senke ab, und beim Prozess der Kommunikation ist es sinnvoll, nach dieser Relevanz zu fragen, um gegebenenfalls die irrelevante Information vor der Übermittlung zu eliminieren, um somit kostensparende Systeme zu erhalten. Ein weiteres Beispiel ist die Bewegtbildübertragung. Hier ist die menschliche Aufnahmefähigkeit so geartet, dass bereits eine Folge von ca. 25 Bildern pro Sekunde für die Bewegtbildübertragung genügt. Die in einer schnelleren Bildfolge enthaltene Information ist für den Menschen also irrelevant, wenn man diese Qualität als ausreichend ansieht.

Außer irrelevanter Information erzeugt eine Quelle auch redundante Information. Während die Irrelevanz von der Senke abhängig ist, ist die Redundanz eine Eigenschaft der Quelle. Eine vollständige Elimination der Redundanz einer Quelle ist jedoch nicht sinnvoll, denn die Aufnahmefähigkeit der Senke Mensch ist unvollständig; die Redundanz wird dann benutzt, um die nicht explizit aufgenommene Information aus den empfangenen Nachrichten zu rekonstruieren. Auch die Syntax benötigt eine gewisse Redundanz und trägt entsprechend zur Verständlichkeit bei.

Wir betrachten nun eine Markoff-Quelle 1. Ordnung, die alle T Sekunden ein Symbol erzeugt. Unter der Annahme der Stationarität ist die Symbolentropie unabhängig von dem betrachteten Zeitpunkt nT , und es gilt

$$H(X) = - \sum_i P(x_i) \cdot \text{ld} P(x_i) .$$

Für die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Symbole x_i, y_j hintereinander auftreten gilt

$$P(x_i y_j) = P(y_j | x_i) \cdot P(x_i) \quad 4.1-12$$

Entropie von zwei Symbolen

und somit für die **Entropie von zwei Symbolen**

$$\begin{aligned} H(XY) &= - \sum_{i,j} P(x_i y_j) \cdot \text{ld} P(x_i y_j) \\ &= - \sum_{i,j} P(y_j | x_i) \cdot P(x_i) \cdot \text{ld} [P(y_j | x_i) \cdot P(x_i)] \\ &= - \sum_{i,j} P(y_j | x_i) \cdot P(x_i) \cdot \text{ld} P(y_j | x_i) \\ &\quad - \sum_{i,j} P(y_j | x_i) \cdot P(x_i) \cdot \text{ld} P(x_i) . \end{aligned} \quad 4.1-13$$

Wegen $\sum_j P(y_j | x_i) = 1$ gilt dann

$$H(XY) = - \sum_i P(x_i) \sum_j P(y_j | x_i) \cdot \text{ld} P(y_j | x_i) - \sum_i P(x_i) \cdot \text{ld} P(x_i) ,$$

oder mit

$$H(Y | X) = - \sum_i P(x_i) \sum_j P(y_j | x_i) \cdot \text{ld} P(y_j | x_i)$$

haben wir

$$H(XY) = H(Y | X) + H(X). \quad 4.1-14$$

Für statistisch unabhängige Symbole gilt

$$P(x_i y_j) = P(x_i) \cdot P(y_j)$$

und somit

$$H(XY) = H(X) + H(Y), \quad 4.1-15$$

während für vollständig statistisch abhängige Symbole gilt

$$P(y | x) = 1 \text{ d.h. } P(xy) = P(y | x) \cdot P(x) = P(x)$$

und somit

$$H(XY) = H(X). \quad 4.1-16$$

Die **Synentropie** einer Quelle bzw. zwei aufeinander folgender Symbole ist definiert als **Synentropie**

$$H(X; Y) = - \sum_{i,j} P(x_i y_j) \cdot \text{ld} \frac{P(x_i) \cdot P(y_j)}{P(x_i y_j)}. \quad 4.1-17$$

Mit $P(x_i y_j) = P(y_j | x_i) \cdot P(x_i)$ erhält man

$$\begin{aligned} H(X; Y) &= - \sum_{i,j} P(x_i y_j) \cdot \text{ld} \frac{P(y_j)}{P(y_j | x_i)} \\ &= - \sum_{i,j} P(x_i y_j) \cdot \text{ld} P(y_j) \\ &\quad + \sum_{i,j} P(x_i y_j) \cdot \text{ld} P(y_j | x_i), \end{aligned}$$

$$H(X; Y) = H(Y) - H(Y | X). \quad 4.1-18$$

Die Synentropie ist also die Entropie des zweiten Symbols, verringert um die bedingte Entropie dieses Symbols unter der Bedingung, dass das erste Symbol bekannt ist. Die Synentropie ist somit ein Maß für die statistische Abhängigkeit zweier Symbole im Mittel und wird auch als die **Redundanz** zweier Symbole einer Quelle bezeichnet. Mit (Gl. 4.1-14) erhält man

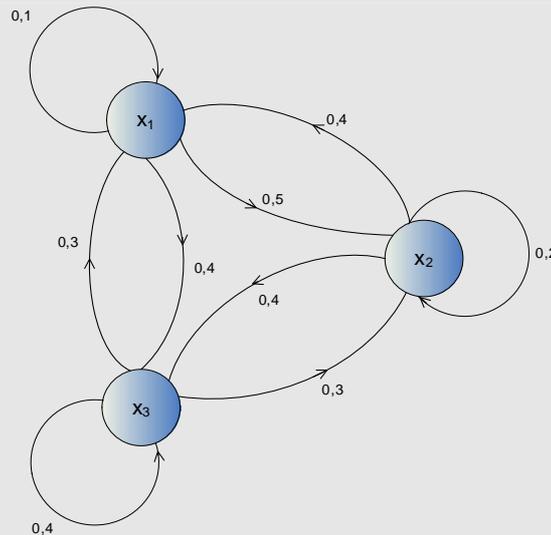
Redundanz zweier Symbole

$$H(XY) = H(Y) + H(X) - H(X; Y). \quad 4.1-19$$

Dies besagt, dass die gemeinsame Entropie zweier Symbole die Summe der Einzelentropien verringert um die Redundanz ist.

Beispiel 4.1-2:

Wir betrachten eine Markoff-Quelle 1.Ordnung mit 3 Symbolen, die alle T Sekunden ein Symbol erzeugt. Die Quelle hat somit 3 Zustände, die jeweils durch das zuletzt erzeugte Symbol (x_1, x_2 oder x_3) gekennzeichnet werden. Diese Zustände mit den einzelnen Übergangswahrscheinlichkeiten im stationären Fall sind in dem nachstehenden Zustandsgraphen angegeben.



Gesucht sind die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten der Symbole $P(x_i)$, die einzelnen Informationsgehalte und die Entropien $H(X)$, $H(XY)$ und $H(Y | X)$.

Es gelten im stationären Fall:

$$\begin{aligned}
 P(x_1) &= P(x_1 | x_1)P(x_1) + P(x_1 | x_2)P(x_2) + P(x_1 | x_3)P(x_3), \\
 P(x_2) &= P(x_2 | x_1)P(x_1) + P(x_2 | x_2)P(x_2) + P(x_2 | x_3)P(x_3), \\
 P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) &= 1,
 \end{aligned}$$

wobei z. B. $P(x_1 | x_2)$ die Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand x_2 in den Zustand x_1 bedeutet.

Nach Einsetzen der Zahlenwerte ergeben sich

$$\begin{aligned}
 P(x_1) &= 0,1 \cdot P(x_1) + 0,4 \cdot P(x_2) + 0,3 \cdot P(x_3), \\
 P(x_2) &= 0,5 \cdot P(x_1) + 0,2 \cdot P(x_2) + 0,3 \cdot P(x_3), \\
 P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) &= 1.
 \end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet

$$\begin{cases}
 P(x_1) = \frac{18}{65} \\
 P(x_2) = \frac{21}{65} \\
 P(x_3) = \frac{26}{65}
 \end{cases}$$

Somit sind die einzelnen Informationsgehalte:

$$I(x_1) = 1,8524 \text{ Bit},$$

$$I(x_2) = 1,6301 \text{ Bit}$$

und

$$I(x_3) = 1,3219 \text{ Bit}.$$

Die Entropie der Quelle beträgt

$$H = - \sum_{i=1}^3 P(x_i) \log P(x_i) = 1,5684 \text{ Bit/Symbol}$$

und die bedingte Entropie

$$\begin{aligned} H(Y | X) &= - \sum_i P(x_i) \sum_j P(y_j | x_i) \cdot \log P(y_j | x_i) \\ &= 1,497 \text{ Bit/Symbolpaar}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Verbundentropie

$$H(XY) = H(Y | X) + H(X) = 3,0654 \text{ Bit/Symbolpaar}.$$

Beispiel 4.1-3:

Wir wollen nun die Entropie der deutschen Schrift abschätzen. Das Alphabet setzt sich aus 26 Buchstaben zusammen. Vereinfachend werden Sonderzeichen vernachlässigt und zunächst eine Quelle ohne Gedächtnis angenommen. In Abb. 4.1-1 sind die Häufigkeiten der einzelnen Buchstaben angegeben.

Buchstabe	Häufigkeit	Buchstabe	Häufigkeit	Buchstabe	Häufigkeit
E	0,1669	U	0,0370	W	0,0140
N	0,0992	G	0,0365	V	0,0107
I	0,0782	M	0,0301	Z	0,0100
S	0,0678	C	0,0284	P	0,0094
T	0,0674	L	0,0283	J	0,0019
R	0,0654	B	0,0257	Q	0,0007
A	0,0651	O	0,0229	Y	0,0003
D	0,0541	F	0,0204	X	0,0002
H	0,0406	K	0,0188		

Abb. 4.1-1: Häufigkeiten der einzelnen Buchstaben in der deutschen Sprache

Aus der Tabelle errechnet sich die Entropie:

$$H = 4,097 \text{ Bit/Symbol.}$$

Die maximale Entropie ergibt sich, wenn alle Symbole gleichwahrscheinlich sind:

$$H_{\max} = -26 \cdot \frac{1}{26} \cdot \log_2 \frac{1}{26} = 4,7 \text{ Bit/Symbol.}$$

Somit liegt die Redundanz bei

$$R = H_{\max} - H = 0,6 \text{ Bit/Symbol.}$$

In Wirklichkeit ist das Auftreten eines Symbols von k direkt vorher erzeugten Symbolen abhängig. Für $k = 1$ ist z. B. $P(u | q) = 1$, für $k = 2$ z. B.

$P(h | sc) = 0,98$ usw. Wenn derartige Abhängigkeiten und noch die Abhängigkeiten zwischen den Silben bzw. Wörtern berücksichtigt werden, wobei das Modell der Quelle entsprechend modifiziert wird (d. h. mehrere Buchstaben zu einem neuen Symbol zusammengefasst werden), liegt die Entropie deutscher Texte ungefähr bei

$$H = 1,6 \text{ Bit/Symbol.}$$

Die Redundanz ist in diesem Fall

$$R = H_{\max} - H = 3,1 \text{ Bit/Symbol.}$$

Selbsttestaufgabe 4.1-1:

Wir betrachten eine stationäre Quelle mit einem Alphabet X aus n Symbolen $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, die alle T Sekunden ein Symbol erzeugt. Dieser Vorgang kann als ein wiederholtes Zufallsexperiment aufgefasst werden. Mit $P(x_i)$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass das Symbol x_i als Ausgang auftritt.

- Geben Sie den Informationsgehalt des Symbols x_i an.
- Wie wird die Symbolentropie H der Quelle definiert? Wie kann man die Symbolentropie H interpretieren? Wann nimmt H den maximalen Wert an?
- Wie wird die Redundanz R der Quelle definiert?

4.2 Nachrichtenkanäle

Bei der technischen Kommunikation sind die Kommunikationspartner gewöhnlich räumlich getrennt. Übertragungs- und vermittlungstechnische Einrichtungen werden verwendet, um diese Entfernungen zu überbrücken. Aus informationstheoretischer Sicht können die Einrichtungen durch Nachrichtenkanäle modelliert werden. Hierbei wird bei einer spezifischen Aufgabe festgelegt, welche Einrichtungen tatsächlich durch den Kanal modelliert werden und welche außerhalb der Modellierung bleiben - dies ist oft bei Codierungseinrichtungen der Fall.

Ein (diskreter) **Nachrichtenkanal** besteht aus einem Eingang, an dem alle T Sekunden ein Symbol $x_i \in X$ angelegt wird, und aus einem Ausgang, an dem alle T Sekunden ein Symbol $y_i \in Y$ herausgegeben wird. Man nennt X das Eingangsalphabet und Y das Ausgangsalphabet - oft sind beide Alphabete identisch. Im Allgemeinen sind die statistischen Verknüpfungen zwischen den Ein- und Ausgängen des Kanals invariant gegenüber einer Zeitverschiebung - der Kanal also stationär. Wir setzen dies stets voraus.

Nachrichtenkanal

In vielen Fällen hängt die Statistik des Ausgangssymbols außer vom momentanen Eingangssymbol auch von der Vergangenheit des Kanals (d.h. von vorangegangenen Ein- und Ausgangswerten am Kanal) ab. Lässt sich die bedingte Wahrscheinlichkeitsmatrix $P(Y|X)$ in Abhängigkeit von k vorangegangenen Ein-/Ausgangswerten angeben, so spricht man von einem (diskreten) **Kanal mit einem Gedächtnis k -ter Ordnung**. Für die Modellierung eines solchen Kanals sind k Zustandsvariablen und die jeweils zu jedem Zustand gehörigen bedingten Übergangswahrscheinlichkeiten $P(Y|X)$ erforderlich.

Kanal mit einem Gedächtnis k -ter Ordnung

Im einfachsten Fall ist der Kanal gedächtnislos - d. h. er besitzt nur einen Zustand. Bei einem solchen **gedächtnislosen Kanal** sind die Ausgangswahrscheinlichkeiten durch die bedingte Wahrscheinlichkeitsmatrix $P(Y|X)$ festgelegt. Nimmt man an, dass die Quelle am Eingang eines solchen Kanals stationär ist, so ist, wenn man die Eingangsquelle mit dem Kanal wiederum als eine neue Quelle betrachtet, diese auch stationär.

gedächtnisloser Kanal

Beispiel 4.2-1:

Das Eingangsalphabet X und das Ausgangsalphabet Y sind durch

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

und

$$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

angegeben.

$P(y_j | x_i)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Symbol y_j am Kanalausgang empfangen wird, wenn das Symbol x_i am Kanaleingang gesendet wird.

Die Kanalmatrix sieht wie folgt aus:

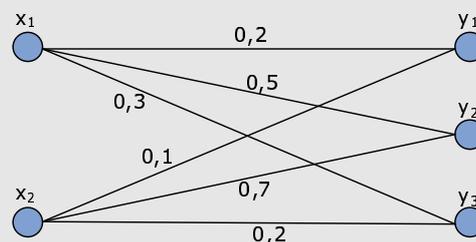
$$P(Y | X) = \begin{bmatrix} P(y_1 | x_1) & P(y_2 | x_1) & \dots & P(y_n | x_1) \\ P(y_1 | x_2) & P(y_2 | x_2) & \dots & P(y_n | x_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P(y_1 | x_m) & P(y_2 | x_m) & \dots & P(y_n | x_m) \end{bmatrix}.$$

Ein wichtiges Merkmal einer beliebigen Kanalmatrix ist, dass die Zeilensumme gleich eins ist, z. B. für die erste Zeile gilt:

$$\sum_{i=1}^n P(y_i | x_1) = P(Y | x_1) = 1,$$

weil $\{Y | x_1\}$ ein sicheres Ereignis ist, d. h. dass irgendein $y_i \in Y$ sicher empfangen wird, wenn das Symbol x_1 gesendet wird.

Wir nehmen $m = 2$ und $n = 3$ und die folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten an:



Somit sieht die Kanalmatrix wie folgt aus:

$$P(Y | X) = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten der Eingangssymbole sind wie folgt gegeben:

$$P(x_1) = 0,5$$

und

$$P(x_2) = 0,5.$$

Wir rechnen nun die Wahrscheinlichkeiten $P(y_i)$ für $i = 1, 2, 3$ aus.

$$P(y_1) = \sum_{i=1}^2 P(y_1 | x_i) \cdot P(x_i) = 0,15,$$

$$P(y_2) = 0,6$$

und

$$P(y_3) = 0,25.$$

Gilt bei einem gedächtnislosen Kanal mit jeweils q Ein- und Ausgängen für die bedingte Wahrscheinlichkeitsmatrix $P(Y|X)$, die den Kanal charakterisiert,

$$P(y_j | x_i) = \begin{cases} 1 - p & \text{für } i = j \\ \frac{p}{q-1} & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad 4.2-1$$

wobei $0 \leq p \leq 1$, so spricht man von einem **symmetrischen Kanal** mit der Fehlerwahrscheinlichkeit p . **symmetrischer Kanal**

Beispiel 4.2-2:

Die Kanalmatrix P eines symmetrischen Kanals mit jeweils 3 Ein- und Ausgangssymbolen und $P = 0,05$ ist gegeben durch

$$P(Y|X) = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,025 & 0,025 \\ 0,025 & 0,95 & 0,025 \\ 0,025 & 0,025 & 0,95 \end{bmatrix}.$$

Am Eingang des Kanals sei eine Quelle mit den Symbolwahrscheinlichkeiten $P(x_1) = \frac{1}{2}$, $P(x_2) = P(x_3) = \frac{1}{4}$ angeschlossen.

Wir bestimmen die (Fehler-)Wahrscheinlichkeit dafür, dass y_i nicht empfangen wird, wenn x_i gesendet wird.

Für $i = 1$ ist diese Wahrscheinlichkeit gegeben durch

$$P(\{y_2, y_3\} | x_1) = 1 - P(y_1 | x_1) = 0,05. \quad 4.2-2$$

Analog für $i = 2, 3$ sind die Fehlerwahrscheinlichkeiten gegeben durch

$$P(\{y_1, y_3\} | x_2) = 0,05$$

und

$$P(\{y_1, y_2\} | x_3) = 0,05.$$

Die Fehlerwahrscheinlichkeit P_f des Kanals errechnet sich zu

$$P_f = 0,05 \cdot \frac{1}{2} + 0,05 \cdot \frac{1}{4} + 0,05 \cdot \frac{1}{4} = 0,05.$$

Die Fehlerwahrscheinlichkeit des symmetrischen Kanals liegt also bei 5 Prozent. Sie ist unabhängig von den Symbolwahrscheinlichkeiten der Quelle.

Minimierung der Fehlerwahrscheinlichkeit

Oft besteht bei der Datenübertragung die Aufgabe, aus einem empfangenen Symbol darauf zu schließen, welches Symbol gesendet wurde. Will man die **Fehlerwahrscheinlichkeit** bei der Auswahl **minimieren**, so sucht man beim Empfang eines Symbols y_j aus allen möglichen Sendesignalen x_i das Signal x^* aus, für welches gilt

$$P(x^* | y_j) \geq P(x_i | y_j). \quad 4.2-3$$

Wegen $P(x | y) \cdot P(y) = P(y | x) \cdot P(x)$ (s. Gl. 3.2-1) erhalten wir

$$\frac{P(y_j | x^*) \cdot P(x^*)}{P(y_j)} \geq \frac{P(y_j | x_i) \cdot P(x_i)}{P(y_j)}$$

oder

$$P(y_j | x^*) \cdot P(x^*) \geq P(y_j | x_i) P(x_i). \quad 4.2-4$$

Gl. 4.2-4 zeigt, dass die Auswahl abhängig von der a priori Wahrscheinlichkeit $P(x_i)$ ist. Nimmt man an, dass die Eingangssymbole gleichwahrscheinlich sind, so erhält man als Kriterium

$$P(y_j | x^*) \geq P(y_j | x_i). \quad 4.2-5$$

Maximum-Likelihood-Verfahren

Dieses Entscheidungsverfahren wird als **Maximum-Likelihood-Verfahren** bezeichnet.

Beispiel 4.2-3:

Wir betrachten einen Kanal mit der Kanalmatrix

$$P(Y | X) = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Ausgehend von der Kanalmatrix $P(Y|X)$ können wir gemäß des Maximum-Likelihood-Verfahrens wie folgt schließen:

1. Wenn das Symbol y_1 empfangen wird, wurde das Symbol x_1 gesendet.
2. Wenn das Symbol y_2 empfangen wird, wurde das Symbol x_1 oder x_2 oder x_3 gesendet, d. h. die Auswahl ist nicht eindeutig. Wir entscheiden uns für x_3 .
3. Wenn das Symbol y_3 empfangen wird, wurde das Symbol x_2 gesendet.

$P(R)$ sei nun die Wahrscheinlichkeit, dass richtig entschieden wird. Die Fehlerwahrscheinlichkeit P_f ist dann

$$P_f = 1 - P(R).$$

Da x_1, x_2, x_3 paarweise disjunkt sind und gemeinsam das sichere Ergebnis bilden, gilt entsprechend Gl. 3.2-4

$$P(R) = P(R|x_1) \cdot P(x_1) + P(R|x_2) \cdot P(x_2) + P(R|x_3) \cdot P(x_3).$$

Wurde nun x_1 gesendet, so tritt y_1 mit der Wahrscheinlichkeit $P(y_1|x_1)$ auf und die gefällte Entscheidung ist richtig, d. h. $P(R|x_1) = P(y_1|x_1)$. Entsprechend gilt $P(R|x_2) = P(y_3|x_2)$ und $P(R|x_3) = P(y_2|x_3)$. Somit haben wir

$$P(R) = P(y_1|x_1) \cdot P(x_1) + P(y_3|x_2) \cdot P(x_2) + P(y_2|x_3) \cdot P(x_3).$$

Sind die Symbole x_1, x_2, x_3 gleichwahrscheinlich, so erhalten wir mit $P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = \frac{1}{3}$

$$P(R) = 0,6 \cdot \frac{1}{3} + 0,6 \cdot \frac{1}{3} + 0,2 \cdot \frac{1}{3} = 0,47 \text{ und } P_f = 0,53.$$

Sind jedoch die Wahrscheinlichkeiten der Eingangssymbole $P(x_1) = 0,4$, $P(x_2) = 0,3$ und $P(x_3) = 0,3$ so erhalten wir

$$P_f = 1 - [0,6 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,3] = 0,52.$$

Um die Fehlerwahrscheinlichkeit zu minimieren, sollte man in diesem Fall beim Auftreten des Symbols y_2 auf das Symbol x_1 schliessen. Man erhält dann

$$P(R) = [P(y_1|x_1) + P(y_2|x_1)] \cdot P(x_1) + P(y_3|x_2) \cdot P(x_2)$$

und

$$P_f = 1 - [(0,6 + 0,2) \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,3] = 0,50.$$

Nach Gl. 4.1-8 ist die Entropie der Eingangsquelle an einem Kanal

$$H(X) = - \sum_i P(x_i) \cdot \lg P(x_i). \quad 4.2-6$$

Die Eingangsquelle und der Kanal können zusammen wiederum als eine Quelle betrachtet werden, für deren Entropie gilt

$$H(Y) = - \sum_i P(y_i) \cdot \text{ld} P(y_i). \quad 4.2-7$$

Wie bei den Markoff-Quellen können wir für einen Nachrichtenkanal auch Verbund- und bedingte Entropien definieren.

Verbundentropie Die **Verbundentropie** des Kanals ist definiert als ⁸

$$H(X, Y) = - \sum_{i,j} P(x_i, y_j) \cdot \text{ld} P(x_i, y_j). \quad 4.2-8$$

Sie ist ein Maß für die in einem Ein/Ausgangssymbolpaar im Mittel enthaltene Information.

Äquivokation Die **Äquivokation** oder **Rückschlusentropie** ist definiert als
Rückschlusentropie

$$H(X | Y) = - \sum_{i,j} P(x_i, y_j) \cdot \text{ld} P(x_i | y_j). \quad 4.2-9$$

Sie ist ein Maß für die im Mittel in einem Eingangssymbol für einen Beobachter, der den Ausgang kennt, enthaltene zusätzliche Information.

Streuentropie Die **Streuentropie** oder **Irrelevanz** ist definiert als
Irrelevanz

$$H(Y | X) = - \sum_{i,j} P(x_i, y_j) \cdot \text{ld} P(y_j | x_i). \quad 4.2-10$$

Sie ist ein Maß für die im Mittel in einem Ausgangssymbol für einen Beobachter, der den Eingang kennt, enthaltene zusätzliche Information.

Transformation Die **Transinformation** ist entsprechend der Synentropie Gl. 4.1-17 definiert als

$$H(X; Y) = - \sum_{i,j} P(x_i, y_j) \cdot \text{ld} \frac{P(x_i) \cdot P(y_j)}{P(x_i, y_j)}. \quad 4.2-11$$

Aus der Definition sieht man, dass die Transinformation in X und Y symmetrisch ist, und wie in Gl. 4.1-18 erhält man

$$H(X; Y) = H(Y) - H(Y | X) \quad 4.2-12$$

und

$$H(X; Y) = H(X) - H(X | Y). \quad 4.2-13$$

Die Transinformation ist entsprechend Gl. 4.2-12 ein Maß für die im Mittel in einem Ausgangssymbol enthaltene Information verringert um die Streuentropie. Wie bei den Markoff-Quellen (Gl. 4.1-14), (Gl. 4.1-19) gelten auch hier die Beziehungen

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= H(Y | X) + H(X) \\ &= H(X | Y) + H(Y) \end{aligned} \quad 4.2-14$$

⁸ Wir haben ein Komma zwischen den Symbolen gesetzt, um zu verdeutlichen, dass die Symbole nicht wie bei Symbolfolgen zeitlich nacheinander auftreten, sondern als Paare am Kanaleingang und Kanalausgang. $P(x, y)$ ist lediglich die Wahrscheinlichkeit, dass x und y gemeinsam auftreten. Deshalb ist $P(x, y) = P(y, x)$.

und

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X; Y). \quad 4.2-15$$

Gl. 4.2-15 lässt sich wie folgt interpretieren. Die Verbundentropie der Ein- und Ausgangssymbole eines Kanals ist die Summe der Einzelentropien verringert um die Transinformation.

Wir zeigen nun, dass wie zu erwarten, die Transinformation stets grösser oder gleich 0 ist. Hierzu verwenden wir wieder die Ungleichung für den natürlichen Logarithmus

$$\ln w \leq w - 1 \quad \text{für } w > 0, \quad 4.2-16$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann gegeben ist, wenn $w = 1$ ist.

Aus der Definition der Transinformation folgt

$$-H(X; Y) = \sum_{i,j} P(x_i, y_j) \cdot \text{ld} \frac{P(x_i) \cdot P(y_j)}{P(x_i, y_j)},$$

mit $\text{ld } z = (\ln 2)^{-1} \cdot \ln z$ erhalten wir

$$-H(X; Y) = \sum_{i,j} (\ln 2)^{-1} \cdot P(x_i, y_j) \cdot \ln \frac{P(x_i) \cdot P(y_j)}{P(x_i, y_j)}.$$

Die Ungleichung Gl. 4.2-16 ergibt daraus

$$\begin{aligned} -H(X; Y) &\leq (\ln 2)^{-1} \cdot \sum_{i,j} P(x_i, y_j) \cdot \left[\frac{P(x_i) \cdot P(y_j)}{P(x_i, y_j)} - 1 \right] \\ &= (\ln 2)^{-1} \left[\sum_{i,j} P(x_i) P(y_j) - \sum_{i,j} P(x_i, y_j) \right] = 0. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$H(X; Y) \geq 0, \quad 4.2-17$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn

$$P(x_i, y_j) = P(x_i) \cdot P(y_j) \quad \text{für alle } i \text{ und } j, \quad 4.2-18$$

d. h. X und Y statistisch unabhängig sind.

Mit Gl. 4.2-17 folgt aus der Definition der Transinformation (Gl. 4.2-12) und (Gl. 4.2-13) ferner, dass

$$H(Y) \geq H(Y | X) \quad \text{und} \quad H(X) \geq H(X | Y) \quad 4.2-19$$

sind, was ja auch zu erwarten war.

Wegen Gl. 4.2-15

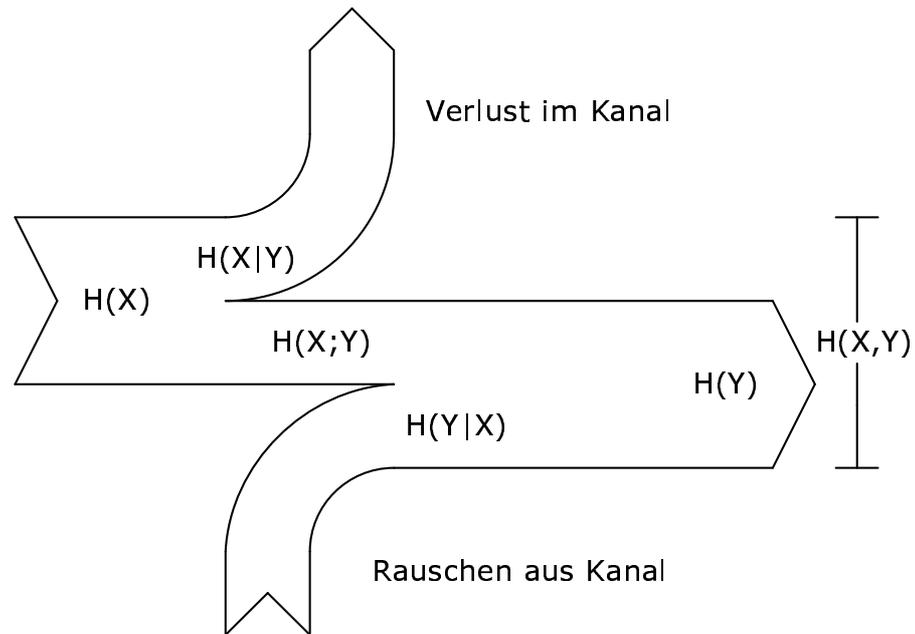
$$H(X, Y) + H(X; Y) = H(X) + H(Y)$$

folgt nun, da alle Terme ≥ 0 sind,

$$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y), \quad 4.2-20$$

wobei das Gleichheitszeichen wiederum gilt, wenn X und Y statistisch unabhängig sind.

Der gesamte Sachverhalt ist in Abb. 4.2-1 dargestellt. $H(X)$ ist die Eingangsentropie am Kanal. Sie besteht aus der Rückschlusentropie $H(X|Y)$, die im Kanal verloren geht, und der Transinformation $H(X;Y)$, die zum Kanalausgang gelangt. Der Kanal fügt die Irrelevanz $H(Y|X)$ dem Ausgang zu, so dass am Kanalausgang die Ausgangsentropie als die Summe der Transinformation und der Irrelevanz vorliegt. Die Verbundentropie des Kanals besteht aus der Rückschlusentropie, der Transinformation und der Irrelevanz.



- $H(X)$ Entropie am Kanaleingang
- $H(Y)$ Entropie am Kanalausgang
- $H(X|Y)$ Rückschlusentropie oder Äquivokation
- $H(X;Y)$ Transinformation
- $H(Y|X)$ Streuentropie oder Irrelevanz
- $H(X,Y)$ Verbundentropie

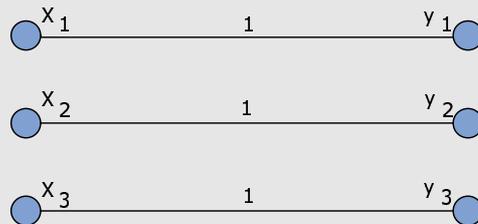
Abb. 4.2-1: Die Entropien an einem Kanal

rauschfreier Kanal Man nennt einen Kanal **rauschfreier Kanal**, wenn es für jedes Eingangssymbol des Kanals $x_i \in X$ mit $P(x_i) \neq 0$ genau ein Ausgangssymbol $y_j \in Y$ mit $P(y_j|x_i) = 1$ gibt.

Beispiel 4.2-4:

Ein rauschfreier Kanal ist z. B. beschrieben durch die folgende Kanalmatrix.

$$P(Y | X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Die Wahrscheinlichkeiten der Eingangssymbole seien:

$$P(x_1) = \frac{1}{4},$$

$$P(x_2) = \frac{1}{4}$$

und

$$P(x_3) = \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt für die Wahrscheinlichkeiten der Ausgangssymbole:

$$P(y_1) = \frac{1}{4},$$

$$P(y_2) = \frac{1}{4}$$

und

$$P(y_3) = \frac{1}{2}.$$

Mit diesen Angaben wurden die folgenden Entropien berechnet.

1. Entropie am Kanaleingang:

$$H(X) = 1,5 \text{ Bit/Symbol.}$$

2. Entropie am Kanalausgang:

$$H(Y) = 1,5 \text{ Bit/Symbol.}$$

3. Streuentropie:

$$H(Y | X) = 0 \text{ Bit/Symbolpaar.}$$

4. Rückschlusstropie :

$$H(X | Y) = 0 \text{ Bit/Symbolpaar.}$$

5. Verbundentropie:

$$H(X, Y) = 1,5 \text{ Bit/Symbolpaar.}$$

6. Transinformation:

$$H(X; Y) = 1,5 \text{ Bit/Symbolpaar.}$$

Diese Ergebnisse besagen, dass die Eingangsinformation über den betrachteten rauschfreien Kanal vollständig zum Kanalausgang gelangt und der Kanal dem Ausgang keine irrelevante Information hinzufügt, weil

$$H(X) = H(X; Y) = H(Y) \text{ und } H(X | Y) = H(Y | X) = 0$$

sind.

verlustfreier Kanal
ungestörter Kanal

Man nennt einen Kanal **verlustfreier Kanal** (auch **ungestörter Kanal**), wenn für alle Eingangssymbole $x_i \in X$ mit $P(x_i) \neq 0$ es eine Untermenge $Y_{x_i} \subset Y$ derart gibt, dass gilt

$$Y_{x_i} \cap Y_{x_k} = \emptyset \quad \text{für } x_i \neq x_k ; x_i, x_k \in X$$

und

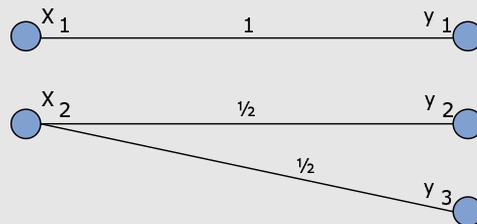
$$\sum_{y_k \in Y_{x_i}} P(y_k | x_i) = 1.$$

Dies bedeutet, dass bei einem ungestörten Kanal aus einem Ausgangssymbol mit Sicherheit (d. h. mit Wahrscheinlichkeit 1) Rückschlüsse auf das Eingangssymbol gezogen werden können.

Beispiel 4.2-5:

Ein verlustfreier, rauschbehafteter Kanal ist z. B. durch die folgende Kanalmatrix beschrieben:

$$P(Y | X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$



Die Wahrscheinlichkeiten der Eingangssymbole seien:

$$P(x_1) = \frac{1}{2}$$

und

$$P(x_2) = \frac{1}{2}.$$

Daraus folgen für die Wahrscheinlichkeiten der Ausgangssymbole:

$$P(y_1) = \frac{1}{2},$$

$$P(y_2) = \frac{1}{4}$$

und

$$P(y_3) = \frac{1}{4}.$$

Die einzelnen Entropien sind:

1. Entropie am Kanaleingang:

$$H(X) = 1 \text{ Bit/Symbol.}$$

2. Entropie am Kanalausgang:

$$H(Y) = 1,5 \text{ Bit/Symbol.}$$

3. Streuentropie:

$$H(Y | X) = 0,5 \text{ Bit/Symbolpaar.}$$

4. Rückschlusstropie:

$$H(X | Y) = 0 \text{ Bit/Symbolpaar.}$$

5. Verbundentropie:

$$H(X, Y) = 1,5 \text{ Bit/Symbolpaar.}$$

6. Transinformation:

$$H(X; Y) = 1 \text{ Bit/Symbolpaar.}$$

Die Eingangsinformation gelangt über den verlustfreien, rauschbehafteten Kanal vollständig ($H(X | Y) = 0$) zum Kanalausgang. Es gelangt noch irrelevante Information aus dem Kanal zum Ausgang, weil

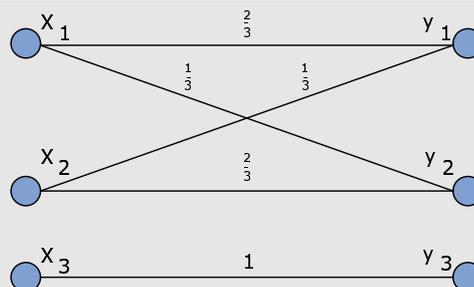
$$H(Y | X) = 0,5 \text{ Bit/Symbolpaar}$$

ist.

Beispiel 4.2-6:

Ein verlust- und rauschbehafteter Kanal ist z. B. durch die folgende Kanalmatrix beschrieben:

$$P(Y | X) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Die Wahrscheinlichkeiten der Eingangssymbole seien:

$$P(x_1) = \frac{1}{3},$$

$$P(x_2) = \frac{1}{3}$$

und

$$P(x_3) = \frac{1}{3}.$$

Daraus folgt für die Wahrscheinlichkeiten der Ausgangssymbole:

$$P(y_1) = \frac{1}{3},$$

$$P(y_2) = \frac{1}{3}$$

und

$$P(y_3) = \frac{1}{3}.$$

Die einzelnen Entropien sind:

1. Entropie am Kanaleingang:

$$H(X) = 1,585 \text{ Bit/Symbol.}$$

2. Entropie am Kanalausgang:

$$H(Y) = 1,585 \text{ Bit/Symbol.}$$

3. Streuentropie:

$$H(Y | X) = 0,6122 \text{ Bit/Symbolpaar.}$$

4. Rückschlussentropie :

$$H(X | Y) = 0,6122 \text{ Bit/Symbolpaar.}$$

5. Verbundentropie:

$$H(X, Y) = 2,1972 \text{ Bit/Symbolpaar.}$$

6. Transinformation:

$$H(X; Y) = 0,9728 \text{ Bit/Symbolpaar.}$$

Ein Teil der Eingangsinformation gelangt über den verlust- und rauschbehafteten Kanal nicht zum Kanalausgang, da $H(X | Y) \neq 0$ ist, d. h. dieser Teil geht verloren. Weil $H(Y | X) \neq 0$ ist, fügt der Kanal dem Ausgang noch irrelevante Information hinzu.

total gestörter Kanal Für einen **total gestörten Kanal** und beliebige $x \in X, y \in Y$ gilt $p(x | y) = p(x)$ und somit $p(x, y) = p(x) \cdot p(y)$. Die Ein- und Ausgangssymbole des Kanals sind also statistisch unabhängig. Ferner gilt $H(X | Y) = H(X)$, $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$, $H(Y | X) = H(Y)$ und insbesondere $H(X; Y) = 0$, d. h. es wird keine Information im Mittel vom Eingang zum Ausgang übertragen.

Selbsttestaufgabe 4.2-1:

Ein stationärer, gedächtnisloser Kanal hat das Eingangsalphabet X und das Ausgangsalphabet Y . Die Wahrscheinlichkeiten $P(x_i)$ sind grösser Null.

- a. Wodurch sind die Ausgangswahrscheinlichkeiten $P(y_j)$ des Kanals festgelegt?
- b. Geben Sie die jeweilige Definition der im Folgenden aufgeführten Begriffe:
 - i. Die Verbundentropie
 - ii. Die Äquivokation oder Rückschlussentropie
 - iii. Die Streuentropie oder Irrelevanz
 - iv. Die Transinformation
- c. Ein Kanal wird durch die folgende Kanalmatrix beschrieben:

$$P(Y | X) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Ist das ein verlustfreier, rauschbehafteter Kanal oder ein verlust- und rauschbehafteter Kanal? Begründen Sie Ihre Aussage.

4.3 Transinformation und Kanalkapazität

Wir betrachten nun eine Kaskadierung von zwei Kanälen, wobei das Ausgangsalphabet des ersten Kanals gleich dem Eingangsalphabet des zweiten Kanals ist. Wir nehmen ferner an, dass der Ausgang Z statistisch mit dem Eingang X lediglich über Y gekoppelt ist (Abb. 4.3-1). Dies bedeutet, dass

$$P(x | (y \text{ und } z)) = P(x | y) \quad 4.3-1$$

und

$$P(z | (x \text{ und } y)) = P(z | y) \quad 4.3-2$$

für alle

$$x \in X, y \in Y, z \in Z \quad 4.3-3$$

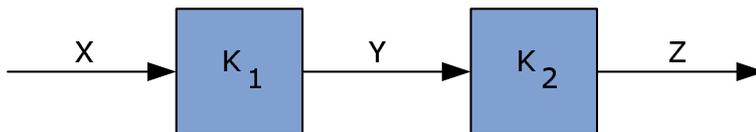


Abb. 4.3-1: Kaskadierung zweier Kanäle

Wir können nun die bedingte Transinformation $H(X; Y | Z)$ analog zu Gl. 4.2-11 definieren

$$H(X; Y | Z) = - \sum_{i,j,k} P(x_i, y_j, z_k) \cdot \text{ld} \frac{P(x_i | z_k) \cdot P(y_j | z_k)}{P((x_i, y_j) | z_k)},$$

und erhalten gemäß (Gl. 4.2-13) dann

$$H(X; Y | Z) = H(X | Z) - H(X | YZ), \quad 4.3-4$$

wobei wie bei (Gl. 4.2-17) gilt

$$H(X; Y | Z) \geq 0. \quad 4.3-5$$

Aus Gl. 4.3-4 erhält man wegen Gl. 4.3-1

$$H(X; Y | Z) = H(X | Z) - H(X | Y)$$

oder

$$H(X; Y | Z) + H(X) - H(X | Z) = H(X) - H(X | Y)$$

und mit Gl. 4.2-13

$$H(X; Y | Z) + H(X; Z) = H(X; Y). \quad 4.3-6$$

In Gl. 4.3-6 sind alle Terme ≥ 0 , und wir erhalten deshalb insbesondere

$$H(X; Z) \leq H(X; Y). \quad 4.3-7$$

Hauptsatz der Datenverarbeitung

Gl. 4.3-7 ist als der **Hauptsatz der Datenverarbeitung** bekannt und besagt, dass im ersten Kanal als Äquivokation verlorene Information durch die Verarbeitung im zweiten Kanal nicht wiedergewonnen werden kann. Im übrigen erhält man durch Definieren von $H(Y; Z | X)$, entsprechend (Gl. 4.3-4),

$$H(Y; Z | X) = H(Z | X) - H(Z | XY) \quad 4.3-8$$

und daraus analog zu (Gl. 4.3-7)

$$H(X; Z) \leq H(Y; Z). \quad 4.3-9$$

Kaskadierung von zwei Kanälen

Dies bedeutet, dass die Transinformation über eine **Kaskadierung von zwei Kanälen** immer höchstens gleich der Transinformation über einem der beiden Kanäle ist.

Die Transinformation ist im Allgemeinen eine Funktion sowohl der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(y_j | x_i)$, die den Kanal charakterisieren, als auch der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Kanaleingangssymbole $P(x_i)$. Bildet man das Maximum der Transinformation über alle möglichen (zulässigen) Eingangswahrscheinlichkeitsverteilungen, so erhält man eine von der Quelle am Eingang unabhängige Größe. Sie ist ein Maß für den Informationsgehalt, den ein Kanal maximal übertragen kann und wird deshalb die Kapazität des Kanals genannt. Die **Kanalkapazität** ist definiert als

Kanalkapazität

$$C = \max_{P(X)} H(X; Y), \quad 4.3-10$$

wobei das Maximum über alle zulässigen Eingangswahrscheinlichkeitsverteilungen zu bilden ist.

Ein solches Maximum existiert stets, denn die Transinformation ist eine stetige Funktion der n-Variablen $P(x_i)$, und ihr Definitionsbereich ist beschränkt und abgeschlossen (wegen $P(x_i) \geq 0$ und $\sum_i P(x_i) = 1$).

Beispiel 4.3-1:

Für einen total gestörten Kanal gilt

$$P(x_i | y_j) = P(x_i) \text{ für alle } x_i, y_j.$$

Wegen

$$H(X; Y) = H(X) - H(X | Y) = H(X) - H(X) = 0$$

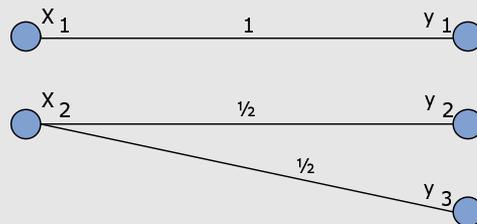
ist die Transinformation $H(X; Y)$ stets gleich Null. Daraus folgt

$$C = \max_{P(X)} H(X; Y) = 0.$$

Beispiel 4.3-2:

Ein ungestörter Kanal ist z. B. durch die nachstehende Kanalmatrix beschrieben.

$$P(Y | X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$



Die Wahrscheinlichkeiten der Eingangssymbole sind wie folgt gegeben:

$$P(x_1) = p$$

und

$$P(x_2) = 1 - p.$$

Die Wahrscheinlichkeiten der Ausgangssymbole liegen somit bei

$$P(y_1) = p,$$

$$P(y_2) = \frac{1}{2} \cdot (1 - p)$$

und

$$P(y_3) = \frac{1}{2} \cdot (1 - p).$$

Für die Kanalkapazität gilt

$$C = \max_{P(X)} (H(Y) - H(Y | X)),$$

wobei

$$\begin{aligned} H(Y) - H(Y | X) &= - \sum_{i=1}^3 P(y_i) \cdot \ln P(y_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 P(x_i) \cdot \sum_{j=1}^3 P(y_j | x_i) \cdot \ln P(y_j | x_i) \\ &= -p \cdot \ln p - (1 - p) \cdot \ln(1 - p). \end{aligned}$$

Mit

$$\frac{d}{dp}(H(Y) - H(Y | X)) = 0$$

ergibt sich

$$-\frac{\ln p}{\ln 2} + \frac{\ln(1-p)}{\ln 2} = 0$$

oder

$$\ln \frac{1-p}{p} = 0.$$

Die Lösung der letzten Gleichung lautet

$$p = \frac{1}{2}.$$

Es gilt

$$\frac{d^2}{dp^2}(H(Y) - H(Y | X)) = -\frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{p(1-p)} < 0,$$

für $0 < p < 1$.

Mit $p = \frac{1}{2}$ ergibt sich also das Maximum von $(H(Y) - H(Y | X))$, damit liegt die Kanalkapazität bei

$$C = 1 \text{ Bit/Symbol}.$$

Beispiel 4.3-3:

Ein symmetrischer Kanal mit jeweils q Ein- und Ausgangssymbolen wird beschrieben durch

$$P(Y | X) = \begin{bmatrix} 1-p & \frac{p}{q-1} & \dots & \frac{p}{q-1} \\ \frac{p}{q-1} & 1-p & \dots & \frac{p}{q-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{p}{q-1} & \frac{p}{q-1} & \dots & 1-p \end{bmatrix}.$$

Wir betrachten zunächst die Streuentropie $H(Y | X)$

$$H(Y | X) = - \sum_{i=1}^q P(x_i) \cdot \left[\sum_{j=1}^q P(y_j | x_i) \cdot \log P(y_j | x_i) \right].$$

Die Summe der eckigen Klammern ist für jedes i gleich groß, weil die Elemente in jeder Zeile bis auf eine Permutation gleich sind. Somit ist

$$\begin{aligned} H(Y | X) &= - \sum_{i=1}^q P(x_i) \cdot \left[\sum_{j=1}^q P(y_j | x_i) \cdot \text{ld} P(y_j | x_i) \right] \\ &= -1 \cdot [(1-p) \text{ld}(1-p) + (q-1) \cdot \frac{p}{q-1} \cdot \text{ld} \frac{p}{q-1}] \end{aligned}$$

von $P(x_i)$ unabhängig.

Der Ausdruck $H(Y) - H(Y | X)$ wird maximal, wenn $H(Y)$ maximal wird. Das ist nur der Fall, wenn alle Symbole des Alphabetes Y gleichwahrscheinlich sind,

$$H(Y)_{\max} = \text{ld} q.$$

Die Kanalkapazität errechnet sich zu:

$$\begin{aligned} C &= \max H(Y) - H(Y | X) \\ &= \text{ld} q + [(1-p) \text{ld}(1-p) + p \cdot \text{ld} \frac{p}{q-1}]. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun einen gedächtnislosen Kanal, der n Symbole (x_1, x_2, \dots, x_n) hintereinander überträgt und die Ausgangswerte (y_1, y_2, \dots, y_n) erzeugt. Man kann dies als eine einzige Übertragung an einem neuen Kanal betrachten, dessen Eingangsalphabet U aus allen Kombinationen der Länge n der X -Symbole und dessen Ausgangsalphabet V aus allen Kombinationen der Länge n der Y -Symbole besteht. War der ursprüngliche Kanal durch die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(y_j | x_i)$ definiert, so gilt für den neuen Kanal mit $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ und $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$P(v | u) = P(y_1 | x_1) \cdot P(y_2 | x_2) \cdot \dots \cdot P(y_n | x_n). \quad 4.3-11$$

Die Bedingung Gl. 4.3-11 besagt, dass die einzelnen Übertragungen $(y_k | x_k)$ statistisch unabhängig sind, d. h. dass auch die Störungen bei Folgeübertragungen voneinander unabhängig sind. Einen solchen Kanal, der n Symbole gemeinsam überträgt, nennt man die **n-te Erweiterung eines Kanals** (Abb. 4.3-2).

n-te Erweiterung eines Kanals

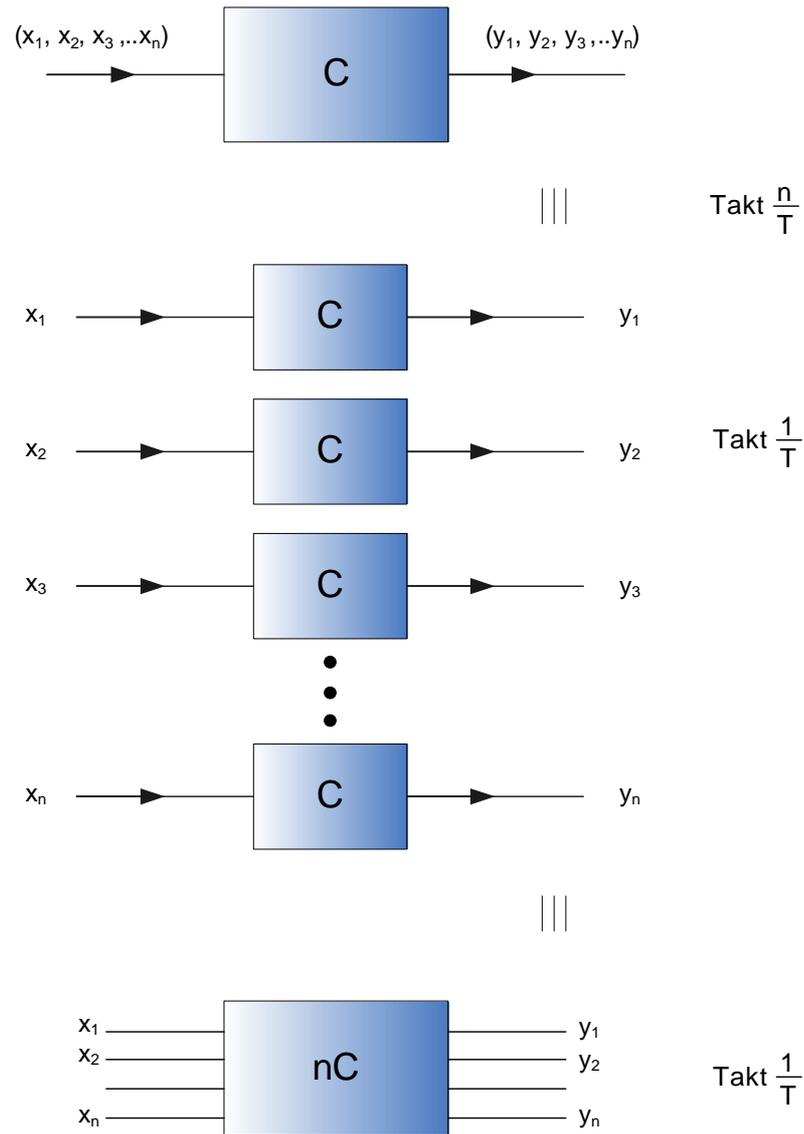


Abb. 4.3-2: n-te Erweiterung eines Kanals

Die Transformation der n-ten Erweiterung ist entsprechend (Gl. 4.2-12)

$$H(U; V) = H(V) - H(V | U), \quad 4.3-12$$

dabei ist

$$H(V) = H(Y_1, Y_2, \dots, Y_n). \quad 4.3-13$$

$H(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ ist in Erweiterung der Gleichung (Gl. 4.2-8) als Verbundentropie erklärt.

Wir haben gezeigt (Gl. 4.2-20), dass für zwei Variablen gilt

$$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y),$$

wobei das Gleichheitszeichen gilt, wenn X und Y statistisch unabhängig sind. Entsprechend gilt für n Variablen

$$H(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \leq \sum_{i=1}^n H(Y_i), \quad 4.3-14$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn die Ausgangssymbole y_k statistisch unabhängig sind. Da die einzelnen Übertragungen statistisch unabhängig vorausgesetzt werden, ist dies insbesondere dann der Fall, wenn die Eingangssymbole x_k statistisch unabhängig sind.

Für $H(V | U)$ gilt somit

$$\begin{aligned} H(V | U) &= H(Y_1, Y_2, \dots, Y_n | X_1, X_2, \dots, X_n) \\ &= - \sum_{x_1} \dots \sum_{x_n} \sum_{y_1} \dots \sum_{y_n} \cdot P(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \cdot \\ &\quad \text{ld}P(y_1, \dots, y_n | x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad 4.3-15$$

Wegen (Gl. 4.3-11) gilt

$$\text{ld}P(y_1, \dots, y_n | x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \text{ld}P(y_i | x_i). \quad 4.3-16$$

Setzt man (Gl. 4.3-16) in (Gl. 4.3-15) ein und berücksichtigt man, dass man aus $P(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ die Verbundwahrscheinlichkeit $P(x_k, y_k)$ genau dann erhält, wenn man über alle x und y außer x_k, y_k summiert, so erhält man

$$H(V | U) = \sum_{i=1}^n H(Y_i | X_i). \quad 4.3-17$$

(Gl. 4.3-14) und (Gl. 4.3-17) eingesetzt in (Gl. 4.3-12) ergeben schließlich

$$\begin{aligned} H(U; V) &\leq \sum_{i=1}^n H(Y_i) - \sum_{i=1}^n H(Y_i | X_i) \\ &= \sum_{i=1}^n H(X_i; Y_i) \end{aligned} \quad 4.3-18$$

wobei das Gleichheitszeichen für statistisch unabhängige y_i gilt, was insbesondere für statistisch unabhängige x_i gegeben ist.

Bildet man nunmehr das Maximum, so erhält man für die Kanalkapazität der n-ten Erweiterung des Kanals

$$\max_{P(U)} H(U; V) = \sum_{i=1}^n C = n \cdot C, \quad 4.3-19$$

d. h. die n-te Kanalerweiterung hat die n-fache Kapazität.

Beispiel 4.3-4:

Wir betrachten die 2-te Erweiterung eines symmetrischen gedächtnislosen Kanals mit je 2 Ein- und Ausgangssymbolen.

Das Eingangsalphabet U und das Ausgangsalphabet V des "neuen" Kanals sind angegeben durch

$$U = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_2, x_2)\} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \quad (*1)$$

und

$$V = \{(y_1, y_1), (y_1, y_2), (y_2, y_1), (y_2, y_2)\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}. \quad (*2)$$

Es gelten für die 2-te Erweiterung des symmetrischen Kanals mit

$$u_i = (x_{i_1}, x_{i_2}) \quad \text{und} \quad v_j = (y_{j_1}, y_{j_2}), \quad i_1, i_2, j_1, j_2 \in \{1, 2\},$$

die folgenden Gleichungen:

$$P(u_i) = P(x_{i_1}) \cdot P(x_{i_2}), \quad (*3)$$

und

$$P(v_j | u_i) = P(y_{j_1} | x_{i_1}) \cdot P(y_{j_2} | x_{i_2}). \quad (*4)$$

Daraus folgt für ein festes $v_j = (y_{j_1}, y_{j_2})$

$$\begin{aligned} P(v_j) &= \sum_{i=1}^4 P(v_j | u_i) \cdot P(u_i) \\ &= \sum_{i=1}^4 P(y_{j_1} | x_{i_1}) \cdot P(y_{j_2} | x_{i_2}) \cdot P(x_{i_1}) \cdot P(x_{i_2}) \\ &= \sum_{i=1}^4 P(y_{j_1} | x_{i_1}) \cdot P(x_{i_1}) \cdot P(y_{j_2} | x_{i_2}) \cdot P(x_{i_2}) \\ &= \left[\sum_{k=1}^2 P(y_{j_1} | x_k) \cdot P(x_k) \right] \cdot \left[\sum_{l=1}^2 P(y_{j_2} | x_l) \cdot P(x_l) \right]. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$P(y_{j_1}, y_{j_2}) = P(y_{j_1}) \cdot P(y_{j_2}). \quad (*5)$$

Die Kapazität des "neuen" Kanals mit den Alphabeten U und V ist definiert als

$$C_2 = \max_{P(U)} H(U; V) = \max_{P(U)} (H(V) - H(V | U)).$$

Wir betrachten zunächst $H(V)$.

$$\begin{aligned}
 -H(V) &= \sum_{i=1}^4 P(v_i) \cdot \text{ld}P(v_i) \\
 &= P(y_1, y_1) \cdot \text{ld}P(y_1, y_1) + P(y_1, y_2) \cdot \text{ld}P(y_1, y_2) \\
 &\quad + P(y_2, y_1) \cdot \text{ld}P(y_2, y_1) + P(y_2, y_2) \cdot \text{ld}P(y_2, y_2) \\
 &= 2 \cdot P(y_1) \cdot P(y_1) \cdot \text{ld}P(y_1) + 2 \cdot P(y_1) \cdot P(y_2) \cdot \text{ld}P(y_1) \\
 &\quad + 2 \cdot P(y_2) \cdot P(y_1) \cdot \text{ld}P(y_2) + 2 \cdot P(y_2) \cdot P(y_2) \cdot \text{ld}P(y_2) \\
 &= 2 \cdot P(y_1) \cdot \text{ld}P(y_1) \cdot (P(y_1) + P(y_2)) \\
 &\quad + 2 \cdot P(y_2) \cdot \text{ld}P(y_2) \cdot (P(y_1) + P(y_2)) \\
 &= 2 \cdot \sum_{i=1}^2 P(y_i) \cdot \text{ld}P(y_i) \\
 &= -2 \cdot H(Y)
 \end{aligned}$$

Für $H(V | U)$ gilt:

$$\begin{aligned}
 -H(V | U) &= \sum_{i=1}^4 P(u_i) \sum_{j=1}^4 P(v_j | u_i) \cdot \text{ld}P(v_j | u_i) \\
 &= P(u_1) \cdot [P(v_1 | u_1) \cdot \text{ld}P(v_1 | u_1) + P(v_2 | u_1) \cdot \text{ld}P(v_2 | u_1) \\
 &\quad + P(v_3 | u_1) \cdot \text{ld}P(v_3 | u_1) + P(v_4 | u_1) \cdot \text{ld}P(v_4 | u_1)] \\
 &\quad + P(u_2) \cdot [P(v_1 | u_2) \cdot \text{ld}P(v_1 | u_2) + P(v_2 | u_2) \cdot \text{ld}P(v_2 | u_2) \\
 &\quad + P(v_3 | u_2) \cdot \text{ld}P(v_3 | u_2) + P(v_4 | u_2) \cdot \text{ld}P(v_4 | u_2)] \\
 &\quad + P(u_3) \cdot [P(v_1 | u_3) \cdot \text{ld}P(v_1 | u_3) + P(v_2 | u_3) \cdot \text{ld}P(v_2 | u_3) \\
 &\quad + P(v_3 | u_3) \cdot \text{ld}P(v_3 | u_3) + P(v_4 | u_3) \cdot \text{ld}P(v_4 | u_3)] \\
 &\quad + P(u_4) \cdot [P(v_1 | u_4) \cdot \text{ld}P(v_1 | u_4) + P(v_2 | u_4) \cdot \text{ld}P(v_2 | u_4) \\
 &\quad + P(v_3 | u_4) \cdot \text{ld}P(v_3 | u_4) + P(v_4 | u_4) \cdot \text{ld}P(v_4 | u_4)].
 \end{aligned}$$

Durch ähnliche Umformung wie bei $H(V)$ unter Verwendung von (*1) bis (*5) erhält man die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
 H(V | U) &= -2 \cdot \sum_{i=1}^2 P(x_i) \sum_{j=1}^2 P(y_j | x_i) \cdot \text{ld}P(y_j | x_i) \\
 &= 2 \cdot H(Y | X) .
 \end{aligned}$$

Die Kapazität C_2 errechnet sich somit zu:

$$\begin{aligned}
 C_2 &= \max_{P(U)} H(U; V) \\
 &= \max_{P(U)} (H(V) - H(V | U)) \\
 &= 2 \cdot \max_{P(X)} (H(Y) - H(Y | X)) \\
 &= 2 \cdot C .
 \end{aligned}$$

wobei C die Kapazität des symmetrischen Kanals ist (siehe Beispiel 4.3-3).

Selbsttestaufgabe 4.3-1:

- a. Eine Kaskadierung von zwei Kanälen sei wie in Abb. 4.3-1 vorgegeben. Man erkläre die Gleichung (vgl. Abb. 4.3-1)

$$H(X; Z) \leq H(X; Y)$$

- b. Was versteht man unter Kanalkapazität?
- c. Wie groß ist die Kanalkapazität eines symmetrischen Kanals mit der Fehlerwahrscheinlichkeit $p = 0,02$ und $q = 6$ (Eingangs-/Ausgangssymbolen).

5 Abtastung und Quantisierung

Die meisten in der Praxis vorliegenden Quellen sind analog. In diesem Kapitel werden zwei Eigenschaften ihrer Signale - die Unschärfebeziehung und die Möglichkeit der exakten Rekonstruktion bandbegrenzter Signale durch ihre Abtastwerte - abgeleitet. Es wird kurz auf die Auswirkung der Bandbegrenzung auf die Sprachverständlichkeit hingewiesen und die gleichmäßige und logarithmische Quantisierung vorgestellt. Die analoge Quelle wird auf diese Weise auf eine digitale Quelle, die noch Redundanz enthält, zurückgeführt.

5.1 Die Zeit-Frequenz Unschärfebeziehung

Bisher haben wir für den Kommunikationsvorgang zeitdiskrete Quellen, die Symbole aus einem wertdiskreten Alphabet auswählen, betrachtet. Kontinuierliche Vorgänge können durch dieses Modell durch beliebig kleine Zeitspannen bzw. genügend großes Alphabet angenähert werden. Bei vielen technischen Anwendungen liegen kontinuierliche Quellen vor (z. B. Sprache). Die Ausgänge von Quellen verbindet man stets mit einer physikalischen Größe wie Strom oder Spannung und bezeichnet sie allgemein als **Signale**. Signale können zeit- und wertkontinuierlich, zeitdiskret und wertkontinuierlich, wertdiskret und zeitkontinuierlich oder wert- und zeitdiskret sein. Technisch werden häufig zeitkontinuierliche Signale abgetastet, um zeitdiskrete Signale zu ergeben, und wertkontinuierliche Signale quantisiert, um wertdiskrete Signale zu ergeben - beides zusammen liefert zeit- und wertdiskrete Signale wie bisher betrachtet.

Signale

Wir wollen im Folgenden zwei Eigenschaften von Signalen betreffend ihrer Ausdehnung und ihrer Abtastung kennenlernen. Bei den Ableitungen werden Grundkenntnisse der Fouriertransformation von Funktionen und Distributionen (s. KE 4 Anhang B) vorausgesetzt.

Wir betrachten ein Signal $f(t)$ dessen Fouriertransformierte $F(\omega)$ existiert, d. h. es gilt

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad 5.1-1$$

und

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad 5.1-2$$

In der Praxis können weder beliebig genaue noch unendlich lange Messungen von Signalen oder deren Spektren durchgeführt werden. Die Signale werden sowohl in ihrer zeitlichen Dauer als auch in ihrer frequenzmäßigen Ausdehnung begrenzt. Wird die zeitliche Dauer eines Signals bzw. die Bandbreite seines Spektrums genau

definiert, so können daraus einige mathematische Aussagen abgeleitet werden. Für die Ausdehnung von Signalen und deren Spektren werden je nach Anwendung verschiedene Maße definiert, z. B. der Mittelwert oder die Streuung der Signalwerte. Ist entsprechend einer solchen Definition D_t die Zeitausdehnung und D_ω die Frequenzausdehnung eines Signals, so gilt die **Unschärfebeziehung**

Unschärfebeziehung

$$D_t \cdot D_\omega \geq k. \quad 5.1-3$$

Sie besagt, dass das Produkt der Zeitausdehnung und Frequenzausdehnung, auch Zeit-Bandbreiten Produkt genannt, nie einen bestimmten Mindestwert (der von der Definition der Ausdehnung abhängt) unterschreiten kann.

Es sei $f(t)$ ein Signal, das reell und symmetrisch um den Nullpunkt ist. Das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$$

entspricht der Signalenergie,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |f(t)|^2 dt$$

der Streuung der Signalenergie um den Mittelwert

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t |f(t)|^2 dt,$$

der gleich Null ist. Wir definieren die Ausdehnungsmaße im Zeit- und Frequenzbereich symmetrisch als die normierte Streuung, d. h.

$$D_t^2 := \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |f(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt} \quad \text{und} \quad D_\omega^2 := \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega} \quad 5.1-4$$

und leiten für diese Maße die Unschärfebeziehung ab. Dabei verwenden wir die Parsevalsche Gleichung (s. KE 4 Anhang B.2, Gl. 14 b) für reelle $f(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega, \quad 5.1-5$$

die besagt, dass die Signalenergie im Zeitbereich gleich der Signalenergie im Frequenzbereich ist, und die aus der Mathematik bekannte Schwarzsche Ungleichung für Integrale

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} g_1 \cdot g_2 dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g_1|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |g_2|^2 dt, \quad 5.1-6$$

bei der das Gleichheitszeichen für $g_1 = k g_2$ gilt.

Setzen wir $g_1(t) = t \cdot f(t)$ und $g_2(t) = \frac{df(t)}{dt}$ in Gl. 5.1-6 ein und führen die partielle Integration durch, so erhalten wir für die linke Seite

$$\begin{aligned} L.S. &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t) \cdot \frac{df(t)}{dt} dt \right|^2 \\ &= \left| \left[t \cdot \frac{f^2(t)}{2} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^2(t)}{2} dt \right|^2. \end{aligned}$$

Der erste Summand verschwindet, wenn $f(t)$ für große t schneller als $1/\sqrt{t}$ gegen Null geht, was für reale Signale angenommen wird. Wir erhalten somit

$$L.S. = \frac{1}{4} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt \right|^2.$$

Für die rechte Seite gilt

$$R.S. = \int_{-\infty}^{+\infty} |t \cdot f(t)|^2 dt \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |j\omega F(\omega)|^2 d\omega.$$

Hierbei haben wir für das zweite Integral die Parsevalsche Gleichung verwendet und beachtet, dass die Differentiation im Zeitbereich der Multiplikation mit $(j\omega)$ im Frequenzbereich gleichkommt.

Somit erhalten wir insgesamt

$$\frac{1}{4} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |f(t)|^2 dt \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega.$$

Durch dividieren mit dem linken Integral ergibt unter Berücksichtigung, dass für reelle Funktionen $f(t)$ gilt: $f^2(t) = |f(t)|^2$

$$\frac{1}{4} \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |f(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f^2(t)| dt} \cdot \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega}$$

$$\frac{1}{4} \leq D_t^2 \cdot D_\omega^2$$

oder

$$D_t \cdot D_\omega \geq \frac{1}{2}.$$

5.1-7

Beispiel 5.1-1:

Wir wollen nachfolgend die Unschärfebeziehung $D_t \cdot D_\omega \geq k$ für die Gaußfunktion $y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ berechnen, wobei das Transformationspaar

$$y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \longleftrightarrow F(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

als bekannt vorausgesetzt wird.

Aus Gl. 5.1-4 folgt

$$D_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot |e^{-t^2}| dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-t^2}| dt}.$$

Weil $e^{-t^2} > 0$ gilt

$$D_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot e^{-t^2} dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt}.$$

Mit $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a \cdot \eta^2} d\eta = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ ergibt sich

$$D_t^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} t \cdot 2t \cdot e^{-t^2} dt.$$

Da $2t \cdot e^{-t^2} = -\frac{d(e^{-t^2})}{dt}$ folgt

$$\begin{aligned} D_t^2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{2} t \cdot d(e^{-t^2}) \\ &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \left([-t \cdot e^{-t^2}]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) \\ &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Aus Gl. 5.1-4 wird ferner

$$\begin{aligned} D_\omega^2 &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |2\pi \cdot e^{-\omega^2}| d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |2\pi \cdot e^{-\omega^2}| d\omega} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (\text{siehe Berechnung } D_t^2)$$

Damit erhalten wir als Unschärfebeziehung

$$D_t^2 \cdot D_\omega^2 = \frac{1}{4}$$

bzw. $D_t \cdot D_\omega = \frac{1}{2}$.

5.2 Das Abtasttheorem

Das Abtasttheorem

Als nächstes betrachten wir ein bandbegrenzt reelles Signal $f(t)$, d. h. ein Signal, das außerhalb einer Bandbreite $2B$ keine Spektralanteile aufweist. B wird im Allgemeinen obere Grenzfrequenz des Signals genannt und es gilt $F(\omega) = 0$ für $|\omega| \geq B$ (Abb. 5.2-1 a).

Es gilt dann

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-B}^{+B} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad 5.2-1$$

und

$$F(\omega) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt & \text{für } |\omega| \leq B \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad 5.2-2$$

Wir tasten nun $f(t)$ periodisch mit der Periode T ab und erhalten die abgetastete Funktion $f^*(t)$. Wir können sie durch die Multiplikation von $f(t)$ mit der Abtastfunktion $S_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$ entstanden denken (Abb. 5.2-1 b). Es gilt entsprechend

$$f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT). \quad 5.2-3$$

Die Fouriertransformierte $F^*(\omega)$ der abgetasteten Funktion ergibt sich aus dem Faltungsintegral von $F(\omega)$ und $S_{\omega'}(\omega)$, denn die Multiplikation im Zeitbereich entspricht einer Faltung im Frequenzbereich (KE 4 Anhang B.3). $S_{\omega'}(\omega)$ ist hierbei die Fouriertransformierte von $S_T(t)$, d. h.

$$S_{\omega'}(\omega) = \omega' \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega') \text{ mit } \omega' = \frac{2\pi}{T}.$$

ω' ist die zu T gehörige Abtastkreisfrequenz. Wir führen die Faltung durch und erhalten

$$\begin{aligned}
 F^*(\omega) &= F(\omega) * S_{\omega'}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega - \tilde{\omega}) S_{\omega'}(\tilde{\omega}) d\tilde{\omega} & 5.2-4 \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega - \tilde{\omega}) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\tilde{\omega} - n\omega') d\tilde{\omega} \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega').
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung besagt, dass wir $F^*(\omega)$ dadurch erhalten, dass wir jeweils $F(\omega)$ um $n\omega'$ verschieben, für verschiedene n aufaddieren und mit dem Faktor $\frac{1}{T}$ gewichten. $F^*(\omega)$ ist in Abb. 5.2-1 c für die drei Fälle $\omega' < 2B$, $\omega' = 2B$ und $\omega' > 2B$ dargestellt. Wie man sieht, ergibt sich für den Fall $\omega' \geq 2B$ eine periodische Wiederholung des mit $\frac{1}{T}$ gewichteten Originalspektrums.

In diesem Fall gibt eine Bandbegrenzung von $F^*(\omega)$ auf $-B$ bis $+B$ $F(\omega)$ bis auf den Faktor T wieder; denn die höheren Terme ($n \neq 0$) liefern keinen Beitrag zu $F^*(\omega)$ in Gl. 5.2-4. Eine solche Bandbegrenzung und Multiplikation mit dem Faktor T kann durch einen idealen Tiefpass mit der Grenzkreisfrequenz ω_0 und der Übertragungsfunktion

$$H(\omega) = \begin{cases} T & \text{für } |\omega| \leq \omega_0 \text{ mit } B \leq \omega_0 < \omega' - B \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

bzw. der Impulsantwort

$$h(t) = T \cdot \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}$$

vorgenommen werden (Abb. 5.2-1 d).

Man erhält für $\omega' \geq 2B$ in diesem Fall

$$F(\omega) = F^*(\omega) \cdot H(\omega),$$

woraus ersichtlich wird, dass das ursprüngliche Signal durch eine geschickte Filterung des abgetasteten Signals wiedergewonnen werden kann (Abb. 5.2-1 e). Das obige Produkt im Frequenzbereich korrespondiert zur Faltung des abgetasteten Signals mit der Impulsantwort des Filters. Wir führen diese Faltung durch und erhalten

$$\begin{aligned}
 f(t) &= f^*(t) * h(t) & 5.2-5 \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(\tau - nT) h(t - \tau) d\tau \\
 &= T \cdot \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \frac{\sin \omega_0 (t - nT)}{\omega_0 (t - nT)}.
 \end{aligned}$$

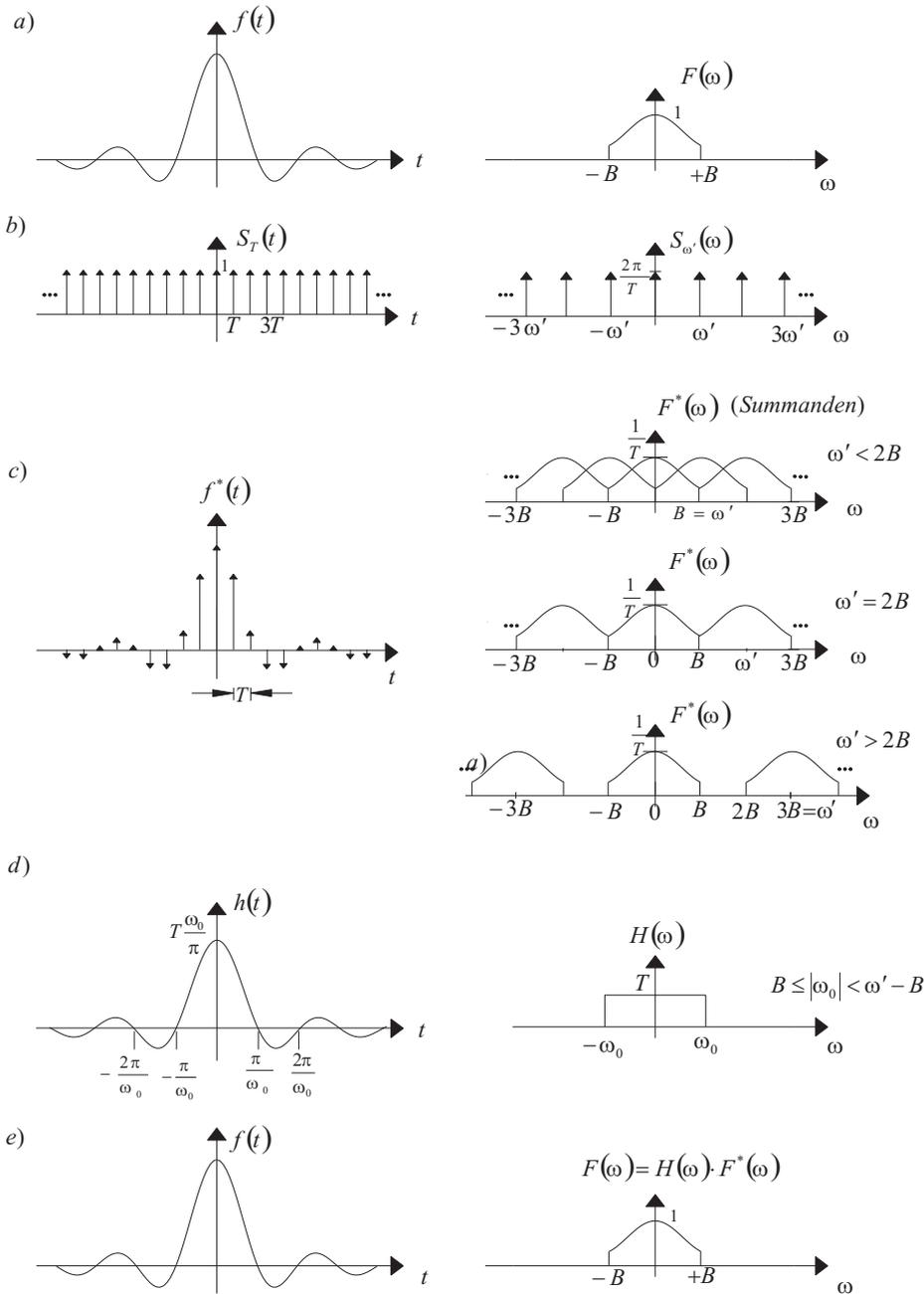


Abb. 5.2-1: Abtastung von bandbegrenzten Signalen mit Abtastperiodendauer T (Abtastkreisfrequenz: $\omega' = \frac{2\pi}{T}$).
 a) Bandbegrenztes Signal
 b) Abtastfunktion
 c) Abgetastete Funktion
 d) Tiefpass als Rekonstruktionsfilter
 e) Ursprüngliche Funktion aus der gefilterten, abgetasteten Funktion

Gleichung (Gl. 5.2-5) gestattet somit, für $\omega' \geq 2 B$ das ursprüngliche Signal $f(t)$ aus den Abtastwerten $f(nT)$ für alle t exakt wieder herzustellen. Dieser Sachverhalt ist als das **Abtasttheorem** in der Nachrichtentechnik bekannt. Wir wollen seine Aussage zusammenfassen:

Theorem 5.2-1: Ein reelles Signal $f(t)$ mit oberer Grenzkreisfrequenz B kann durch seine Abtastwerte $f(nT)$ exakt nach Gl. 5.2-5 für alle t rekonstruiert

werden, wenn die Abtastkreisfrequenz $\omega' = \frac{2\pi}{T}$ gleich oder größer als die doppelte obere Grenzkreisfrequenz $2B$ des Signals ist.

Technisch braucht man die abgetastete Funktion $f^*(t)$ lediglich durch einen Tiefpass mit einer entsprechenden Grenzfrequenz zu schicken, um die ursprüngliche Funktion $f(t)$ zu erhalten.

Aus der bisherigen Abhandlung wurde auch deutlich, dass die Rekonstruktion des abgetasteten Signals nicht nur durch einen idealen Tiefpass möglich ist, sondern man eine Freiheit bei der Wahl der Funktion $H(\omega)$ in den Bereichen $]-\omega' + B, -B[$ und $]B, \omega' - B[$ hat. Man sucht die Funktion so aus, dass die der Gl. 5.2-5 entsprechende Summe möglichst schnell konvergiert. In der Praxis wird oft eine Flanke ("roll off") entsprechend \cos - oder \cos^2 -Funktion angewandt.

Wir haben uns bei der Ableitung des Abtasttheorems auf das periodische Abtasten beschränkt, da dies von praktischer Bedeutung ist. Eine Verallgemeinerung auf das aperiodische Abtasten ist jedoch auch möglich. Analog zum Abtasttheorem für bandbegrenzte Funktionen im Zeitbereich, das wir hier betrachtet haben, kann auch für zeitbegrenzte Funktionen das Abtasttheorem im Frequenzbereich formuliert werden.

Beispiel 5.2-1:

Im vorangegangenen Abschnitt wurde zur Rekonstruktion des empfangenen Signals ein idealer Tiefpass verwendet (siehe Abb. 5.2-1). Filter mit einem solchen idealen Funktionsverlauf sind technisch nicht realisierbar. Es wird deshalb oft die folgende Funktion benutzt:

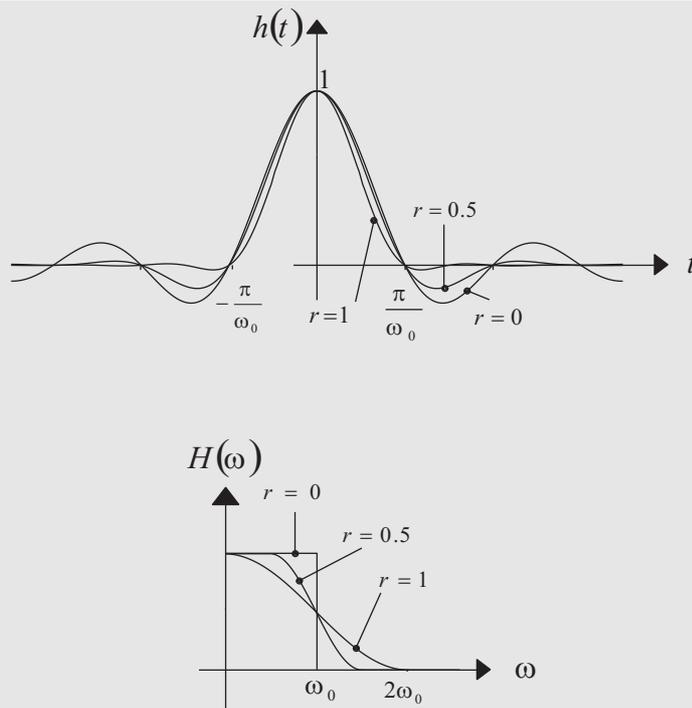
$$H(\omega) = \begin{cases} T & \text{für } |\omega| < \omega^*(1-r) = B \\ \frac{T}{2} [1 - \sin \frac{T}{2r} (|\omega| - \omega^*)] & \text{für } \omega^*(1-r) \leq |\omega| \leq \omega^*(1+r) \\ 0 & \text{für } |\omega| > \omega^*(1+r), \end{cases}$$

mit der Impulsantwort

$$h(t) = \frac{\sin \omega^* t}{\omega^* t} \cdot \frac{\cos \omega^* r t}{1 - 4r^2 \frac{t^2}{T^2}}.$$

Dabei ist $\omega^* = \frac{1}{2}\omega' = \frac{\pi}{T}$ und r wird hierbei als Roll-Off-Faktor bezeichnet, da er die Abflachung der Flanke im Spektralbereich bestimmt. Man beachte den per Konstruktion festen Zusammenhang zwischen Abtastkreisfrequenz ω' , oberer Grenzkreisfrequenz B des Signals und Roll-Off-Faktor r : $\omega'(1-r) = 2B$.

Nachfolgend sind die Funktionsverläufe für verschiedene Roll-Off-Faktoren dargestellt.



Wie zu ersehen ist, führt die Abflachung zu einer Verbreiterung (bei $r = 1$ um 100 %) der Funktion im Spektralbereich.

Um Verfälschungen des abgetasteten, bandbegrenzten Signals bei der Rekonstruktion der ursprünglichen Funktion zu vermeiden, muss also im Falle einer Filterfunktion mit abgeflachter Flanke eine größere Abtastkreisfrequenz als das doppelte der oberen Grenzkreisfrequenz $2B$ des Signals zur Verfügung stehen. Für das Beispiel mit $r = \frac{1}{2}$ muss $\omega' = 4B$ werden.

Wird ein Signal mit einer zu niedrigen Frequenz abgetastet, so führt es zu Beiträgen durch benachbarte Spektren entsprechend Gl. 5.2-4 bzw. Abb. 5.2-1 c oben. Diese werden als Übertragungsfehler ("aliasing") bezeichnet. In der Praxis lassen sich die notwendigen Abtastfrequenzen mit Hilfe des Abtasttheorems aus den vorgegebenen Grenzfrequenzen der Signale bestimmen. So wird bei der Sprachübertragung beim Fernsprechen eine Bandbegrenzung von etwa $3,1 \text{ kHz}$, im Rundfunk 15 kHz (UKW), bei TV-Bildübertragung 5 MHz vorgenommen. In Abb. 5.2-2 und Abb. 5.2-3 sind die Auswirkungen der Bandbegrenzung auf die Silben- bzw. Satzverständlichkeit aufgetragen.

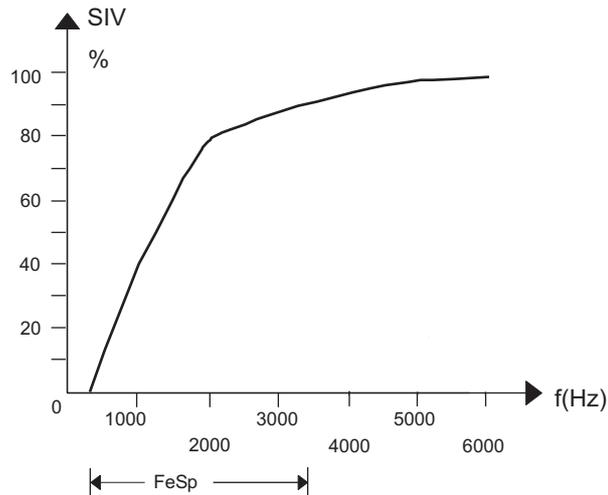


Abb. 5.2-2: Silbenverständlichkeit (SIV) in Abhängigkeit von der oberen Grenzfrequenz (nach NTZ 1962 Heft 7 Seite 349)

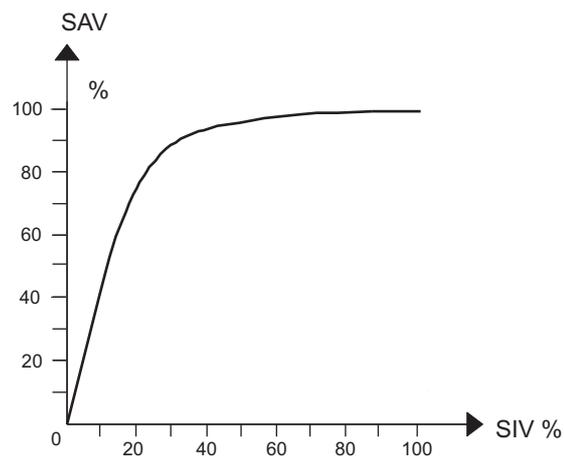


Abb. 5.2-3: Satzverständlichkeit (SAV) in Abhängigkeit von der Silbenverständlichkeit (SIV) (nach NTZ 1962 Heft 7 Seite 349)

Selbsttestaufgabe 5.2-1:

Ein analoges bandbegrenzttes Signal $f(t)$ soll aus seiner abgetasteten Funktion $f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - nT)$ rekonstruiert werden. Die Rekonstruktion führt nicht zu dem gewünschten Signal $f(t)$, sondern es tritt eine Verfälschung auf. Geben Sie zwei mögliche Ursachen für diese Verfälschung, und skizzieren Sie den Sachverhalt.

5.3 Die Quantisierung

Wir betrachten ein kontinuierliches Signal $f(t)$ mit dem Wertebereich A , das mit der Periode T abgetastet wird (Abb. 5.3-1 a). Im Allgemeinen Fall der **Quantisierung** wird der Wertebereich A in N Quantisierungsintervalle ΔA_n , $n \in N$ unterteilt, und alle im Intervall ΔA_n liegenden Werte werden auf einen Quantisierungswert A_n abgebildet. Im einfachsten Fall der gleichmäßigen Quantisierung sind alle Intervalllängen gleich A/N (Abb. 5.3-1 b). Die Differenz $\varepsilon(t) = f_q(t) - f(t)$, wobei $f_q(t)$ die quantisierte Funktion darstellt, wird als der **Quantisierungsfehler** bezeichnet.

Quantisierung

Quantisierungsfehler

Nimmt man an, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte der Signalamplitude über den Wertebereich A konstant $= \frac{1}{A}$ ist, so erhält man für den Erwartungswert des Fehlers $E\{\varepsilon\} = 0$, während man für den mittleren quadratischen Fehler erhält:

$$E\{\varepsilon^2\} = N \int_{A_n - \frac{\Delta A}{2}}^{A_n + \frac{\Delta A}{2}} \frac{(f - A_n)^2}{A} df = \frac{1}{\Delta A} \cdot \frac{(f - A_n)^3}{3} \Bigg|_{A_n - \frac{\Delta A}{2}}^{A_n + \frac{\Delta A}{2}} \quad 5.3-1$$

$$= \frac{\Delta A^2}{12} = \frac{1}{12} \cdot \frac{A^2}{N^2} \sim \frac{1}{N^2}.$$

Dies bedeutet, dass bei vorgegebenem Wertebereich A und gleichverteilter Signalamplitude der mittlere quadratische Fehler bei Erhöhung der Anzahl der Quantisierungsstufen N quadratisch proportional abnimmt.

Die bisherige Betrachtung verdeutlicht, dass der Quantisierungsfehler abhängig von der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Signalamplitude ist. Es ist daher allgemein möglich, eine Quantisierungskennlinie so zu wählen, dass der auftretende Fehler minimiert wird; wobei verschiedene Fehlermaße definiert werden können. Typische Fehlermaße sind Silben- oder Satzverständlichkeit bei Sprache oder der mittlere quadratische Fehler bei Daten. Eine solche Fehlerminimierung liefert meist eine nichtgleichmäßige Quantisierung. Neben A/D-Wandlern, die eine solche nichtgleichmäßige Quantisierung direkt vornehmen, werden häufig A/D-Wandler mit einer gleichmäßigen Quantisierung eingesetzt. Bei diesen Wandlern wird das Signal so vorgeformt, dass die anschließende gleichmäßige Quantisierung das gleiche Ergebnis liefert wie bei der ungleichmäßigen Quantisierung. Eine solche eindeutige Abbildung (Vorverformung) nennt man **Kompression**, die Umkehrabbildung die **Expansion** (Abb. 5.3-2).

Kompression

Expansion

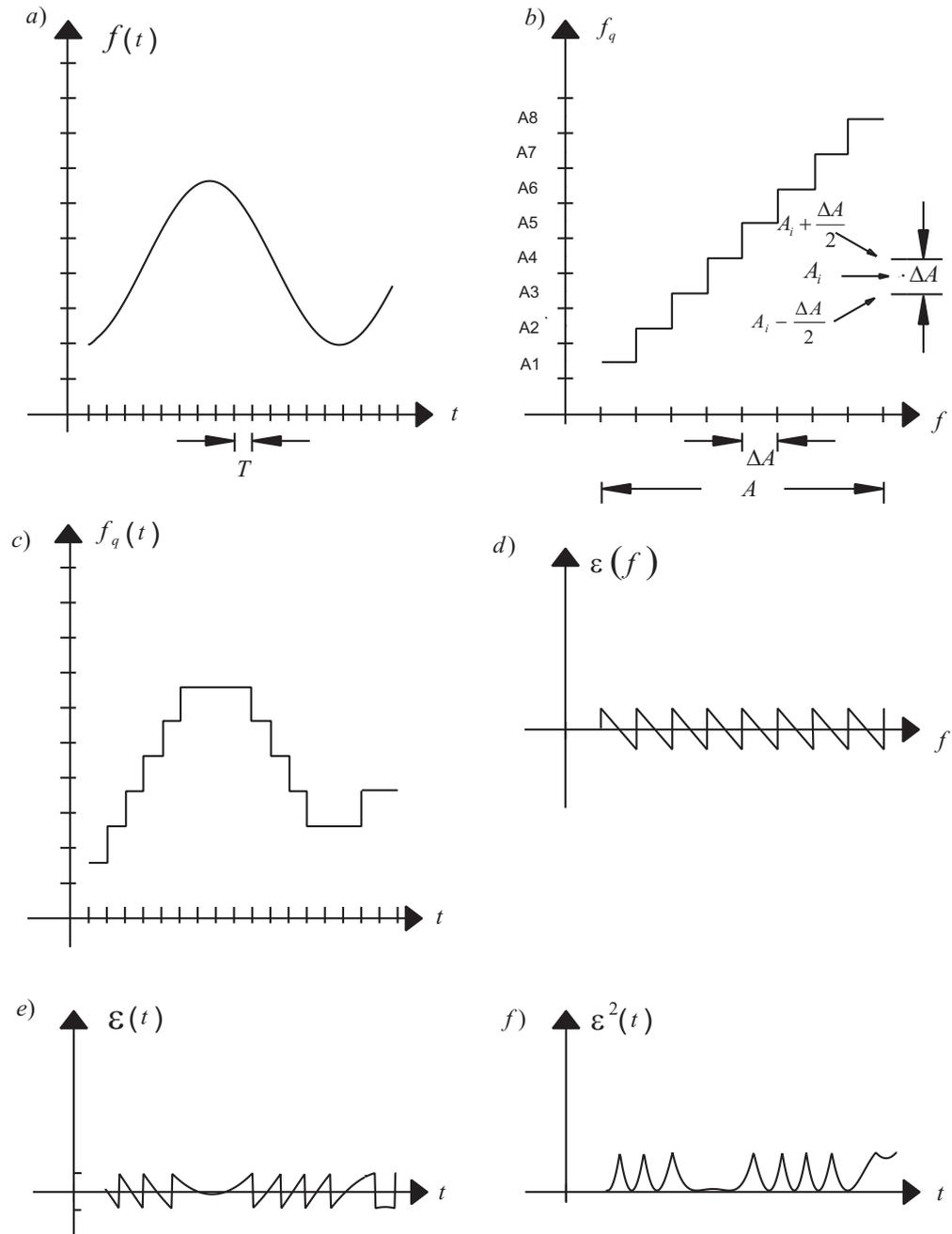


Abb. 5.3-1: a) Signal $f(t)$
 b) Quantisierungskennlinie
 c) Quantisiertes Signal
 d) Quantisierungsfehler in Abhängigkeit von f
 e) Fehler ε
 f) Fehlerquadrat ε^2 (Quantisierungsrauschen)

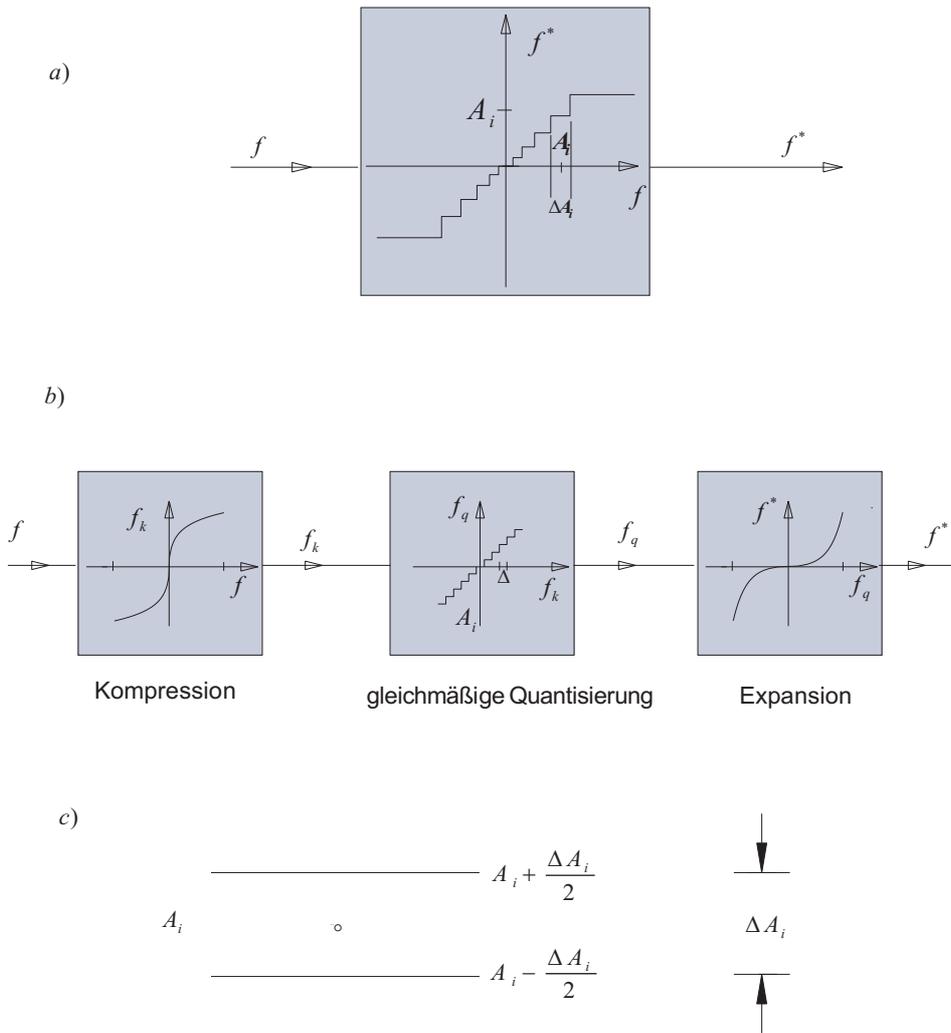
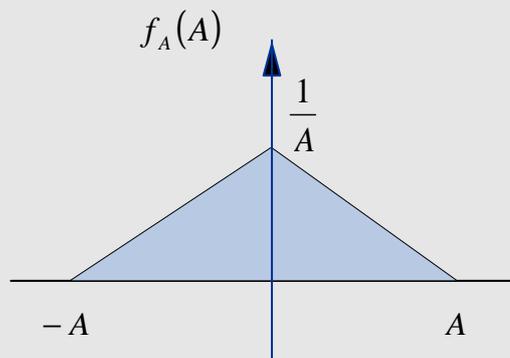


Abb. 5.3-2: a) ungleichmäßige Quantisierung
 b) äquivalente gleichmäßige Quantisierung mit Kompression und Expansion
 c) Quantisierungsintervall ΔA_i

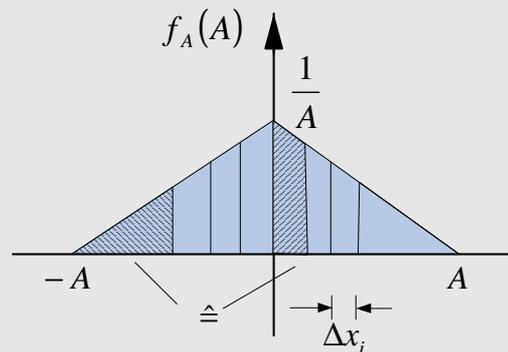
Beispiel 5.3-1:

Wir wollen eine Quantisierungskennlinie für ein Signal bestimmen, dessen Amplitude den folgenden Verlauf der Wahrscheinlichkeitsdichte aufweist:

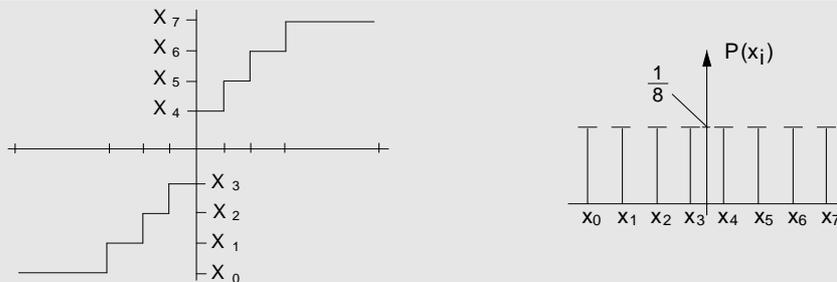


Es soll eine 8-Stufen-Quantisierung durchgeführt werden. Die Werte x_i dieser Quantisierung sollen gleichwahrscheinlich sein. Es muss also eine ungleichmäßige Quantisierung durchgeführt werden. Auf Grund der 8 Quantisierungsstufen soll also jeder Quantisierungswert mit der Wahrscheinlichkeit $P(x_i) = \frac{1}{8}$ auftreten.

Die Intervallbreiten Δx_i werden so bestimmt, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Wertebereich von $-A$ bis $+A$ durch die Intervalle in 8 gleichgroße Flächen aufgeteilt wird.



Wir erhalten damit die nachfolgend dargestellte Quantisierungskennlinie mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeitsdichte der Quantisierungswerte.



Wir betrachten nun eine nichtgleichmäßige Quantisierungskennlinie mit N Abschnitten ΔA_i und den Quantisierungswerten A_i . Der maximale Fehler im Intervall ΔA_i (Abb. 5.3-2 c) beträgt

$$\epsilon_{i \max} = \frac{\Delta A_i}{2},$$

mit dem Fehlerquadrat (\sim max. Rauschleistung N_i)

$$N_i \sim \epsilon_{i \max}^2 = \frac{\Delta A_i^2}{4}.$$

Entsprechend gilt für die Signalleistung nach der Quantisierung S_i ,

$$S_i \sim A_i^2.$$

Gewöhnlich erzielt man optimale Ergebnisse (wie z. B. optimale Verständlichkeit bei Sprache), wenn das Verhältnis N_i/S_i für alle Quantisierungsintervalle konstant gehalten wird, d. h. wenn gilt

$$\frac{\Delta A_i}{A_i} = K. \quad 5.3-2$$

Für die äquivalente gleichmäßige Quantisierung mit dem Quantisierungsintervall Δ nehmen wir an, dass die Kompression und die Expansion reziprok sind (Abb. 5.3-2). Ein festes Intervall ΔA_i der ungleichmäßigen Quantisierung wird auf das i -te Intervall Δ der gleichmäßigen Quantisierung abgebildet. Liegt f in diesem Intervall, d. h. $\Delta f = \Delta A_i$, so liegt f_k im i -ten Intervall Δ , d. h. $\Delta f_k = \Delta$. Wir erhalten somit

$$\frac{\Delta f_k}{\Delta f} = \frac{\Delta}{\Delta A_i}.$$

Wegen (Gl. 5.3-2) wird hieraus

$$\frac{\Delta f_k}{\Delta f} = \frac{\Delta}{K \cdot A_i} = \frac{C}{A_i}, \quad 5.3-3$$

wobei wir eine neue Konstante $C = \frac{\Delta}{K}$ eingeführt haben. Werden alle Intervalle Δ sehr klein, und somit i sehr groß, so erhalten wir aus (Gl. 5.3-3)

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta f_k}{\Delta f} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{C}{A_i}$$

oder

$$\frac{df_k}{df} = \frac{C}{f},$$

was zu einer logarithmischen Kompanierungskennlinie

$$f_k = A + C \log f \quad 5.3-4$$

führt.

Aus Gl. 5.3-2 ist ersichtlich, dass die Forderung N_i/S_i für alle Quantisierungsintervalle konstant zu halten dazu führt, dass für kleinere Signalwerte A_i immer kleinere Intervalle ΔA_i erforderlich werden. In der Praxis approximiert man die logarithmische Kennlinie (Gl. 5.3-4) abschnittsweise durch Geraden. Entsprechend der ITU-T Empfehlung G.711 wird bei der Puls Code Modulation (PCM) in USA die 15-Segment-Approximation der **μ -Kennlinie** und in Europa die 13-Segment-Approximation der **A-Kennlinie** verwendet (Abb. 5.3-3 und Abb. 5.3-4).

μ -Kennlinie
A-Kennlinie

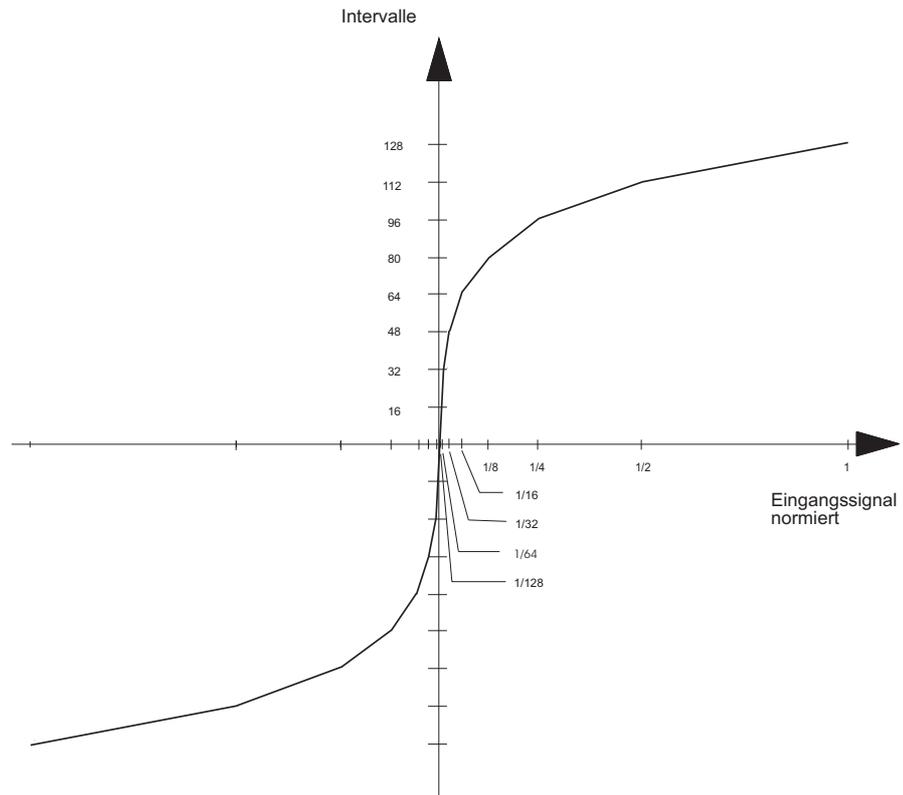


Abb. 5.3-3: 15-Segment-Approximation der μ -Kennlinie entsprechend ITU-T Empfehlung G.711

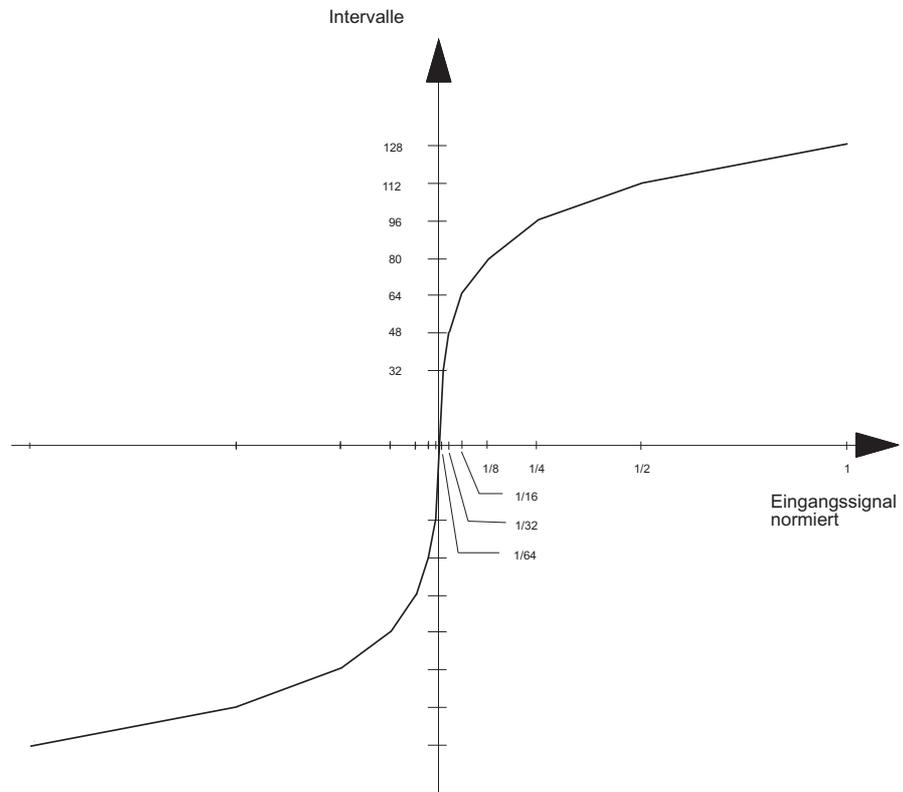


Abb. 5.3-4: 13-Segment-Approximation der A-Kennlinie entsprechend ITU-T Empfehlung G.711

Selbsttestaufgabe 5.3-1:

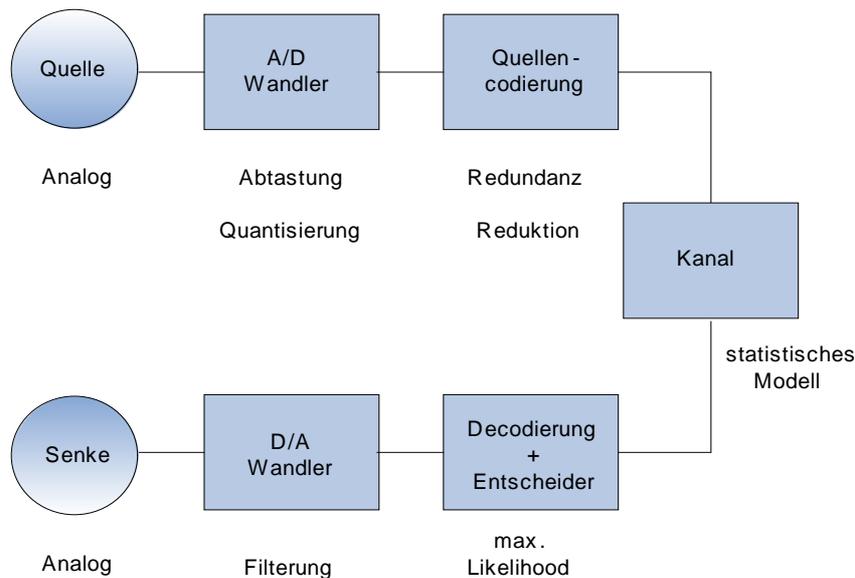
Der Quantisierungsfehler eines Signals soll durch das Quantisierungsverfahren minimiert werden.

- a. Welches Quantisierungsverfahren wird hierbei in der Regel angewendet?*
- b. Beschreiben Sie zwei Möglichkeiten zur Realisierung dieses Verfahrens.*

6 Quellencodierung

In diesem Kapitel werden zunächst die Grundbegriffe der Codierung als Abbildung eingeführt und im weiteren die Quellencodierung - also Codierung zur Reduktion von Redundanz - behandelt. Der Begriff der Decodierbarkeit führt zur notwendigen Bedingung von Kraft-McMillan, welche wiederum die Existenz von gleichwertigen Präfix-Codes nach sich zieht. Der Huffman-Algorithmus für optimale Präfix-Codes, der nun eingeführt wird, liefert damit auch einen optimalen decodierbaren Code. Der Fundamentalsatz der Quellencodierung, der als nächstes bewiesen wird, zeigt die Existenz eines optimalen Codes auf, dessen Codewortlänge im Mittel beliebig nahe der Quellenentropie gebracht werden kann.

Im letzten Abschnitt werden Quellencodes, die insbesondere zustandsabhängige Codierungen vornehmen und sich bei Anwendungen bewährt haben, vorgestellt. Bei der ganzen Abhandlung habe ich versucht, die Möglichkeiten und Grenzen der Quellencodierung anzusprechen und dabei anwendungsnah zu bleiben. Die Kommunikationsstrecke, wie sie hier behandelt wird, hat nunmehr folgende Gestalt:



6.1 Grundbegriffe der Codierung

Wir betrachten im Folgenden eine stationäre, gedächtnislose Quelle mit dem Alphabet $A = \{x_1, \dots, x_q\}$ und den Symbolwahrscheinlichkeiten $P(x_i)$. Für die Entropie der Quelle gilt somit

$$H(X) = - \sum_i P(x_i) \cdot \log_2 P(x_i).$$

$B = \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$ sei ein weiteres Alphabet, w ein Wort dieses Alphabets, d. h. $w \in B \times B \times \dots = B^i$. c sei eine injektive Abbildung von A in

$$B_m = \bigcup_{i=1}^m B^i,$$

wobei m die maximale Wortlänge ist. Für eine injektive Abbildung gilt: Für alle $x \in A$ existiert ein $w \in B_m$ mit $c(x) = w$ und aus $c(x_1) = c(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$. Die Menge aller Wörter, die Bild von $x \in A$ sind, nennt man **Codewörter**, abkürzend auch **Code** (Abb. 6.1-1).

Codewörter
Code

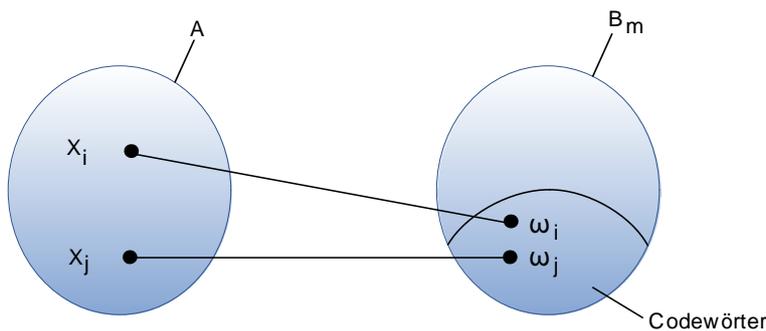


Abb. 6.1-1: Codierung als injektive Abbildung von A in B_m

Eine Einrichtung, die die beschriebene Abbildung vornimmt, nennt man einen **Codierer**. Fasst man die Quelle samt dem Codierer als eine neue Quelle auf, so ist im Allgemeinen zu erwarten, dass sowohl der Informationsgehalt pro Symbol als auch die Anzahl der Symbole pro Zeiteinheit anders als bei der ursprünglichen Quelle ausfallen. Codierer werden insbesondere eingesetzt, um solche Anpassungen zwischen Quellen und Kanälen oder Speichermedien vorzunehmen. Setzt man einen Codierer ein, um die Symbolentropie zu erhöhen (d. h. Redundanz zu reduzieren), so spricht man von der **Quellencodierung**; setzt man ihn ein, um die Kanaleigenschaften besser zu nutzen (z. B. durch geschickte Erhöhung der Redundanz, um Störungen des Kanals bzw. Verfälschungen im Speicher auszugleichen), so spricht man von der **Kanalcodierung**. Oft werden beide Ziele mit einem Codiervorgang angestrebt, und man kann lediglich schwerpunktmäßig von Quellen- oder Kanalcodierung sprechen. Im Allgemeinen werden, wie wir noch sehen werden, weitere Bedingungen an einen Codierer gestellt.

Codierer

Quellencodierung

Kanalcodierung

ASCII-Code

Einer der bekanntesten Codes dürfte der Morse-Code sein, der das lateinische Alphabet (und ein paar Steuerzeichen wie "neues Zeichen", "neues Wort" usw.) in Punkte ("di"), Striche ("da") und Pausen (z. B. 1 Pause zwischen "di" und "da", 3x Pausen zwischen Zeichen, 6x Pausen zwischen Wörtern usw.) umsetzt. Ein weiteres Beispiel ist der 7-Bit **ASCII-Code** (Abb. 6.1-2), der in vielen Computeranwendungen vorkommt und oft um 1 Bit zur Fehlererkennung ("Parity Bit") oder für andere Zwecke erweitert wird. Die Teletexcodierung, die wir im Kapitel 2 (Abb. 2.3-10) kennenlernten, basiert z. B. auf dem ASCII-Code. Auch Beispiele wie der optisch lesbare Strichcode für Artikelnumerierung, dem man häufig in Kaufhäusern begegnet, oder der ISBN-Code für Bücher, fallen unter unsere Definition der Codierung und können unter denselben Gesichtspunkten, wie wir sie hier behandeln, betrachtet werden.

					b ₇								
					0	0	0	0	1	1	1	1	
					b ₆	0	0	1	1	0	0	1	1
					b ₅	0	1	0	1	0	1	0	1
						0	1	2	3	4	5	6	7
b ₄	b ₃	b ₂	b ₁										
0	0	0	0	0	NUL	DLE	SP	0	@	P	`	p	
0	0	0	1	1	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q	
0	0	1	0	2	STX	DC2	”	2	B	R	b	r	
0	0	1	1	3	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s	
0	1	0	0	4	EOT	DC4	○	4	D	T	d	t	
0	1	0	1	5	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u	
0	1	1	0	6	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v	
0	1	1	1	7	BEL	ETB	!	7	G	W	g	w	
1	0	0	0	8	BS	CAN	(8	H	X	h	x	
1	0	0	1	9	HT	EM)	9	I	Y	i	y	
1	0	1	0	10	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z	
1	0	1	1	11	VT	ESC	+	;	K	[k	{	
1	1	0	0	12	FF	IS4	,	<	L	\	l		
1	1	0	1	13	CR	IS3	-	=	M]	m	}	
1	1	1	0	14	SO	IS2	.	>	N	^	n	~	
1	1	1	1	15	SI	IS1	/	?	O	_	o	DEL	

← C0 set *
G0 set →

Abb. 6.1-2: Der ASCII-Code nach ITU-T T.50

Eine weitere wichtige Bedingung, die an einen Code gestellt wird, ist die **Decodierbarkeit**. Beliebige Aneinanderreihen der Quellensymbole führt zu einer Kette von Codesymbolen. Diese muss eindeutig wieder in Codewörter zerlegt werden können, so dass die Folge der Quellensymbole wiedergewonnen werden kann.

Decodierbarkeit

Für die **mittlere Wortlänge** am Ausgang eines Codierers gilt

mittlere Wortlänge

$$l_m = E\{l(w)\} = \sum_i P(w_i) \cdot l(w_i), \quad 6.1-1$$

wobei $l(w_i)$ die Länge des Codewortes w_i bedeutet.

Als **Effizienz** eines Codes bezüglich einer Quelle wird das Verhältnis

Effizienz

$$E = \frac{H(X)}{l_m} \cdot \frac{1}{ld(r)} \quad 6.1-2$$

definiert. $\frac{H(X)}{l_m}$ entspricht dem Bruchteil der Quellenentropie pro Ausgangssymbol. r ist die Anzahl der Symbole im Codealphabet. $ld(r)$ ist die maximale Entropie einer Quelle mit r Symbolen (Gl. 4.1-9). Da bei decodierbaren Codes die gesamte Quelleninformation erhalten bleibt, ist stets

$$\frac{H(X)}{l_m} \leq ld(r) \text{ bzw. } E \leq 1 \quad 6.1-3$$

oder

$$\frac{H(X)}{ld(r)} \leq l_m. \quad 6.1-4$$

Einen decodierbaren Code mit $E = 1$ nennt man **idealen Code**. Für ihn gilt

idealer Code

$$\frac{H(X)}{ldr} = l_m. \quad 6.1-5$$

Gilt für einen Code, dass er optimal ist in dem Sinne, dass es keinen anderen decodierbaren Code mit dem selben Codealphabet für die gegebene Quelle gibt, der eine kleinere mittlere Länge l_m hat, so nennt man ihn **optimal** oder **kompakt**. Ideale Codes sind trivialerweise kompakt.

optimaler Code
kompakter Code**Beispiel 6.1-1:**

Mit dem 2-aus-5-Code werden die Dezimalzahlen 0 – 9 wie folgt binär codiert:

1 → 11000	6 → 00110
2 → 10100	7 → 10001
3 → 01100	8 → 01001
4 → 10010	9 → 00101
5 → 01010	0 → 00011.

Das Eingangsalphabet hat 10 Symbole, die wir als gleichwahrscheinlich voraussetzen. Das Ausgangsalphabet hat die beiden Symbole 0 und 1, und der Code besteht aus den angegebenen 10 Codewörtern (aus den insgesamt möglichen $2^5 = 32$ Wörtern der Länge 5). Er ist eindeutig decodierbar, denn ausgehend

von dem ersten Symbol kann man fünf Symbole abzählen, die genau ein Wort ergeben; die Abbildung ist außerdem injektiv.

Für die Quellenentropie erhalten wir

$$H(X) = 10 \cdot [-0,1 \text{ ld } 0,1] = 3,322 \text{ Bit/Symbol},$$

während für die maximale Entropie am Ausgang gilt

$$H_{\max}(Y) = \text{ld } 2 = 1 \text{ Bit/Symbol}.$$

Die Codewörter haben die gleiche Länge $l_m = 5$. Der Code ist so geartet, dass genau zwei Einsen pro Codewort vorkommen, so dass ein einfacher Fehler (Fehler in einem Symbol) erkannt werden kann.

Beispiel 6.1-2:

Wir betrachten eine stationäre Quelle ohne Gedächtnis mit dem Alphabet

$A = \{x_1, x_2, x_3\}$ und den Symbolwahrscheinlichkeiten

$P(x_1) = 0,5$, $P(x_2) = 0,25$ und $P(x_3) = 0,25$, die alle T Sekunden ein Symbol erzeugt. Ein Codierer mit dem Alphabet $B = \{0,1\}$ bildet die Quellsymbole wie folgt ab:

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow 1 \\ x_2 &\rightarrow 01 \\ x_3 &\rightarrow 00. \end{aligned}$$

Die Symbolentropie der Quelle errechnet sich zu

$$H(X) = -0,5 \cdot \text{ld } 0,5 - 0,25 \cdot \text{ld } 0,25 - 0,25 \cdot \text{ld } 0,25 = 1,5 \text{ Bit/Symbol}.$$

Für die Entropie pro Zeiteinheit gilt somit

$$H_t(X) = 1,5 \text{ Bit/Symbol} \times \frac{1}{T} \text{ Symbole/s} = \frac{1,5}{T} \text{ Bit/s}$$

Für die mittlere Wortlänge am Ausgang gilt

$$l_m = 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,25 = 1,5$$

Ausgangssymbole pro Wort bzw. pro Eingangssymbol.

Für die Effizienz gilt somit

$$E = 1.$$

Der betrachtete Codierer hat die Eigenschaft, dass an seinem Ausgang die beiden Symbole 0 und 1 jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 auftreten. Für die Symbolentropie am Ausgang gilt somit

$$H(Y) = -0,5 \cdot \lg 0,5 - 0,5 \cdot \lg 0,5 = 1 \text{ Bit/Symbol.}$$

Da nunmehr im Mittel alle T Sekunden 1,5 Symbole vorliegen, gilt für die Entropie pro Zeiteinheit

$$H_t(Y) = \frac{1,5}{T} \text{ Bit/s} = H_t(X),$$

wie zu erwarten war.

Da das Eingangsalphabet aus 3 Symbolen bestand, wäre die maximale Entropie

$$H_{max}(X) = -3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \lg \frac{1}{3} = 1,5850 \text{ Bit/Symbol}$$

möglich. Am Eingang ist also eine Redundanz

$$R = H_{max}(X) - H(X) = 0,0850 \text{ Bit/Symbol}$$

vorhanden. Am Ausgang ist $H_{max}(Y) = \lg 2 = H(Y)$, und somit ist hier keine Redundanz mehr vorhanden. Somit ist der Code optimal bzw. ideal.

Das Beispiel zeigt, wie durch die Verwendung eines Quellencodierers die Anzahl der verwendeten Symbole von 3 auf 2 heruntersetzt und die Redundanz der Quelle eliminiert wurde, dabei wurde die Zeichengeschwindigkeit (Symbole pro Zeiteinheit) erhöht, wobei die Quellenentropie pro Zeiteinheit konstant blieb.

Codebäume sind ein Hilfsmittel zur optischen Verdeutlichung einiger Codeeigenschaften. Die Kanten eines Codebaumes sind mit einem Symbol des Codealphabets gewichtet. Die Gewichtung des Weges vom Ursprungsknoten des Codebaumes zu einem Knoten wird als das Produkt (Hintereinanderreihung) der Gewichtung der Kanten des eindeutigen Weges dorthin definiert. Sie wird auch als die Gewichtung des Knotens bezeichnet. Die Knoten eines Codebaumes sind mit einem Kreis markiert, falls die Gewichtung des Knotens ein Codewort ist, und mit einem Punkt, falls sie kein Codewort ist, aber den Anfang eines Codewortes bildet. Der Codebaum enthält nur Knoten, die mit einem Punkt oder einem Kreis markiert sind. Beginnend mit einem Ursprungsknoten, den man mit einem Punkt markiert, konstruiert man einen Codebaum für einen vorgegebenen Code, indem man für jeden Knoten des Codebaumes sukzessiv folgende Schritte durchführt.

Codebäume

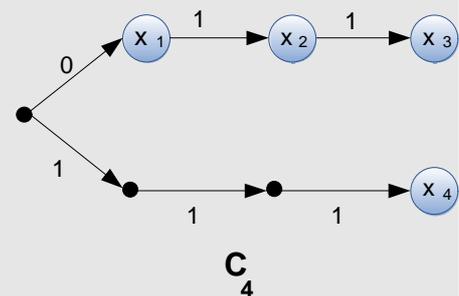
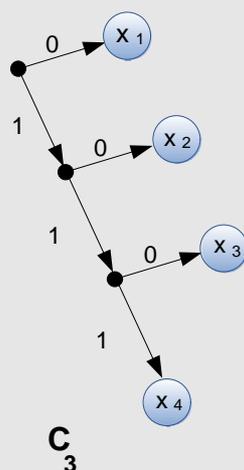
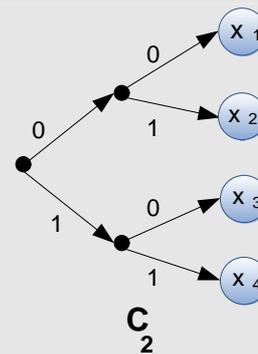
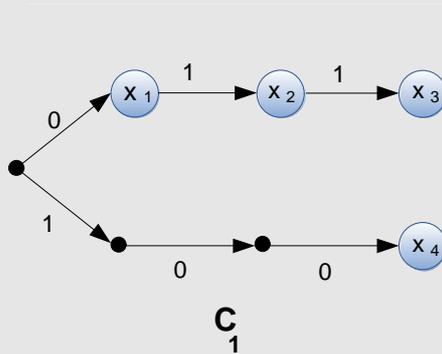
Man betrachtet für den Knoten das Gewicht, das entsteht, wenn der (bis dahin konstruierte) Baum durch einen an dem betrachteten Knoten angeführten Zweig mit dem Gewicht eines Symbols des Codealphabets erweitert würde. Führt der neue Zweig zu einem Knoten mit dem Gewicht, das ein Codewort ist oder den Anfang eines Codewortes bildet, so nimmt man den Zweig in den Baum auf und kennzeich-

net ihn entsprechend mit einem Kreis oder einem Punkt. Man verfährt entsprechend mit dem nächsten Symbol. Auf diese Weise erhält man an dem Knoten maximal soviele Zweige, wie Symbole im Codealphabet. Man betrachtet nun den nächsten Knoten. Der Algorithmus bricht nach einer endlichen Anzahl von Schritten ab, denn die betrachteten Codes sollen eine endliche Länge und das Codealphabet eine endliche Anzahl von Symbolen haben.

Beispiel 6.1-3:

Wir betrachten folgende vier Codes und die zugehörigen Codebäume:

	C_1	C_2	C_3	C_4
$x_1 \rightarrow$	0	00	0	0
$x_2 \rightarrow$	01	01	10	01
$x_3 \rightarrow$	011	10	110	011
$x_4 \rightarrow$	100	11	111	111



Der Code C_1 ist nicht decodierbar, denn die Folge 01100 könnte $01100 = x_2x_4$ aber auch $01100 = x_3x_1x_1$ sein. Der Code C_2 hat Wörter gleicher Länge. Man nennt solche Codes Blockcodes. C_2 ist decodierbar, wenn bekannt ist, welche

zwei Symbole zusammen gehören. Diese Synchronisationsinformation kann aus dem Beginn der Symbolkette abgeleitet werden. Der Code C_3 ist decodierbar, denn kein Codewort bildet den Anfang eines anderen Codewortes. Immer wenn (vom Anfang der Folge her gesehen) ein gültiges Codewort vorliegt, kann er vom Rest der Folge abgespalten werden. Diese Eigenschaft nennt man die Präfix-Eigenschaft; den Code einen Präfixcode. Bei C_3 enden darüberhinaus die Codewörter (bis auf das längste Wort) immer, wenn eine Null auftritt. Die Null wirkt als Trennzeichen (Komma). Ein neues Wort beginnt nach einer Null oder nach dem längsten Wort. Der Code C_4 ist nur für jede endliche Folge decodierbar; der Decodiervorgang muss lediglich von hinten (d. h. vom Ende der Folge aus) aufgerollt werden. Man spaltet von hinten jeweils ein Codewort ab, wenn eine Null auftritt oder drei Einsen vorkommen. Für praktische Anwendung ist der Code C_4 nicht geeignet, denn eine Folge von Symbolen muss jeweils solange gespeichert werden, bis entweder eine Null oder drei Einsen auftreten, bevor sie decodiert werden kann. Bei ungünstigen Fällen benötigt man also einen sehr großen Speicher. Welche der decodierbaren Codes im Sinne der Effizienz am besten geeignet sind, hängt außer vom Code selbst auch von der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Codewörter, d. h. der Quellensymbole, ab. Bei Gleichverteilung der Symbolwahrscheinlichkeiten ist C_2 mit $l_m = 2$ ideal, während für die Verteilung $P(x_1) = \frac{1}{2}$, $P(x_2) = \frac{1}{4}$, $P(x_3) = \frac{1}{8}$, $P(x_4) = \frac{1}{8}$ der Code C_3 mit $l_m = 1,75$ ideal ist.

Wir wollen nun einige Definitionen, die wir in den Beispielen kennengelernt haben, zusammenstellen.

Codes mit Codewörtern gleicher Länge nennt man **Blockcodes**. Codes mit der Eigenschaft, dass kein Codewort den Anfang eines anderen Codewortes bildet, nennt man **Präfixcodes**. Symbolketten, die aus Codewörtern eines Präfixcodes bestehen, sind stets Wort für Wort vom Anfang der Symbolkette aus decodierbar. Im Codebaum äußert sich die Präfixeigenschaft darin, dass alle Codewörter genau am Ende des Codebaumes, d. h. an den "Blättern" (Endknoten) liegen. Codes, bei denen ein Symbol genau am Ende eines jeden Wortes (mit der eventuellen Ausnahme des längsten Wortes) auftritt und somit als Trennzeichen dient, nennt man **Kommacodes**. Sie ermöglichen stets die Wort-für-Wort Decodierung der laufenden Symbolkette.

Blockcodes**Präfixcodes****Kommacodes**

6.2 Die Kraft-McMillan-Ungleichung

Für jeden (eindeutig) decodierbaren Code gilt die **Ungleichung von Kraft-McMillan**

$$\sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}} \leq 1, \quad 6.2-1$$

Ungleichung von Kraft-McMillan

wobei r die Anzahl der Symbole im Codealphabet, q die Anzahl der Codewörter und l_i die Länge des Wortes w_i ist.

Beispiel 6.2-1:

Für alle im Beispiel 6.1-3 aufgeführten Codes errechnet sich für die "Kraftsumme" $K = \left(\sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}} \right)$, $K \leq 1$. Es wird deutlich, dass auch für einen nicht decodierbaren Code wie C_1 die Kraftungleichung gelten kann. Die Kraftungleichung ist also eine notwendige Bedingung für die Decodierbarkeit. Ferner spielen die Codewörter selbst keine Rolle, nur ihre Länge wird berücksichtigt.

Um den Satz von Kraft-McMillan zu beweisen, betrachten wir einen Code mit r Symbolen im Codealphabet und q Codewörtern w_i mit den Längen $l(w_i) = l_i$, wobei wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit l_i als geordnet betrachten, d. h. $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_q$.

Wir betrachten nun für ein beliebiges m , die m -te Potenz der Kraftsumme K

$$K^m = \left[\sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}} \right]^m.$$

Wenn wir die Summe in den Klammern ausmultiplizieren, erhalten wir eine Summe mit verschiedenen Exponenten von r , beginnend mit ml_1 , dem kleinstmöglichen, bis ml_q , dem größtmöglichen; wir können den Ausdruck entsprechend wie folgt schreiben

$$K^m = \sum_{k=ml_1}^{ml_q} \frac{N_k}{r^k},$$

wobei N_k die Anzahl der Möglichkeiten ist, aus m Codewörtern, durch Aneinanderfügen, eine Kette von k Symbolen zu erhalten; dabei ist auch $N_k = 0$ möglich. Da der Code decodierbar ist, ist N_k stets $\leq r^k$, der Anzahl der eindeutigen Folgen der Länge k .

Somit haben wir

$$K^m = \sum_{k=ml_1}^{ml_q} \frac{N_k}{r^k} \leq \sum_{k=ml_1}^{ml_q} \frac{r^k}{r^k} = ml_q - ml_1 + 1 \leq m \cdot l_q$$

und daraus

$$K \leq m^{\frac{1}{m}} \cdot l_q^{\frac{1}{m}}$$

oder, da m beliebig ist,

$$K \leq \lim_{m \rightarrow \infty} m^{\frac{1}{m}} \cdot l_q^{\frac{1}{m}} = 1,$$

womit wir den Satz von Kraft-McMillan bewiesen haben.

Wir wollen nun zeigen, dass, wenn wir ein Codealphabet B mit r Symbolen und q natürlichen Zahlen l_i haben, und die Kraftungleichung dafür erfüllt ist, ein Präfixcode, dessen Wörter w_i die Länge $l(w_i) = l_i$ haben, existiert. Wir führen den Beweis konstruktiv.

Wir setzen wieder ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraus, dass die Längen und somit die Wörter geordnet sind, d. h. $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_q$. Wir wählen nun der Reihenfolge nach für $i = 1, 2, \dots, q$ jeweils ein Wort $w_i \in B^{l_i}$, das weder mit einem der vorhergewählten Wörter w_1, w_2, \dots, w_{i-1} übereinstimmt, noch eines dieser Wörter als Präfix besitzt. Die Ungleichung von Kraft-McMillan garantiert die Möglichkeit dieser Wahl; unter den r^{l_i} Wörtern aus B^{l_i} stimmen genau

$$\sum_{k=1}^{i-1} r^{l_i - l_k}$$

Wörter mit einem der Wörter w_1, \dots, w_{i-1} überein oder haben ein solches als Präfix; wegen

$$\sum_{k=1}^{i-1} r^{l_i - l_k} < r^{l_i} \cdot \sum_{k=1}^q \frac{1}{r^{l_k}} \leq r^{l_i}$$

besteht damit stets die Möglichkeit der Wahlen von $w_i \in B^{l_i}$.

Der eben bewiesene Sachverhalt eröffnet nunmehr folgende Möglichkeit. Hat man einen decodierbaren Code, so ist die Kraft-McMillan-Ungleichung erfüllt. Mit dem Alphabet dieses Codes und den entsprechenden Längen können wir nun stets einen Präfixcode angeben, der die Kraft-McMillan-Ungleichung erfüllt. Die beiden Codes sind äquivalent, indem sie dasselbe Alphabet und dieselbe Anzahl von Codewörtern und Codewortlängen aufweisen.

Beispiel 6.2-2:

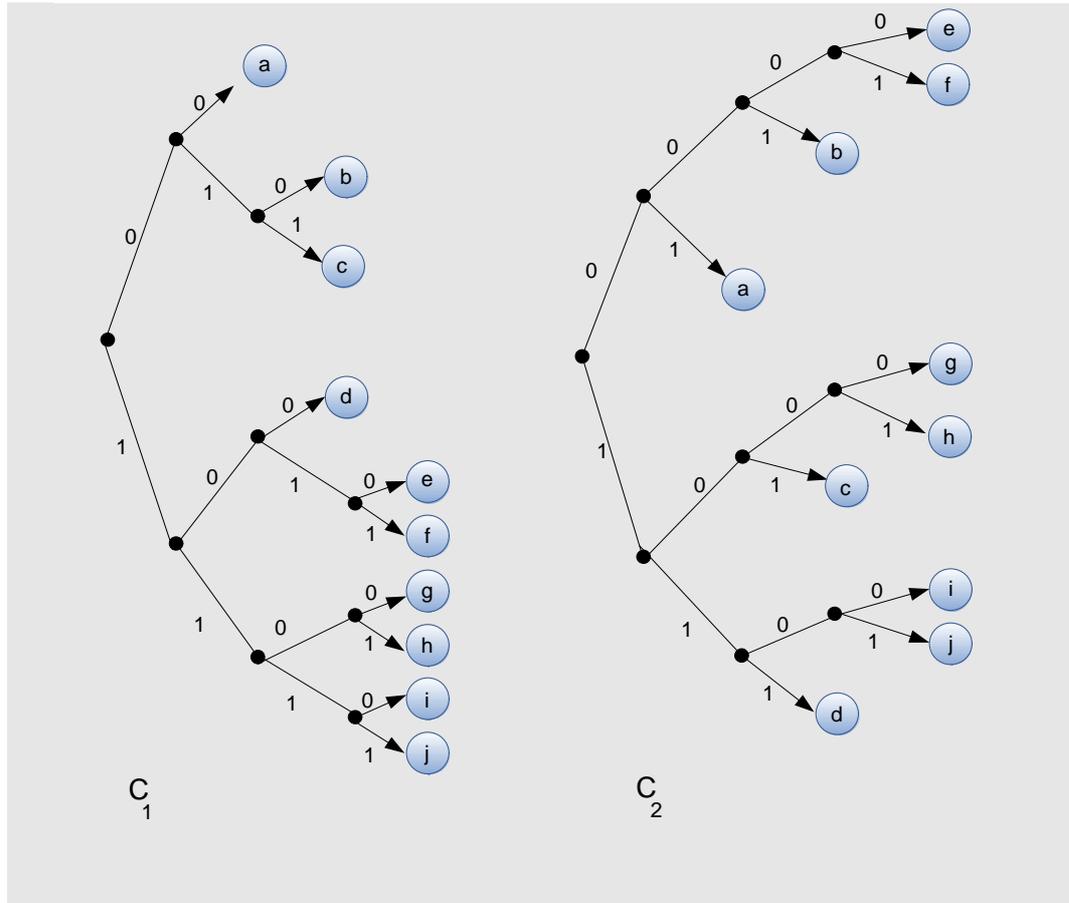
Ein binäres Alphabet sei gegeben. Gesucht ist ein decodierbarer Code mit 1 Wort der Länge 2, 3 Wörtern der Länge 3 und 6 Wörtern der Länge 4.

Die Kraftsumme ist

$$K = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{6}{2^4} = 1.$$

Es existiert also ein decodierbarer, sogar ein Präfixcode. Zwei Präfixcodes sind:

	C_1	C_2
a	00	01
b	010	001
c	011	101
d	100	111
e	1010	0000
f	1011	0001
g	1100	1000
h	1101	1001
i	1110	1100
j	1111	1101



Selbsttestaufgabe 6.2-1:

Wir betrachten eine stationäre, gedächtnislose Quelle mit dem Alphabet $A = \{x_1, x_2, \dots, x_q\}$. Die einzelnen Symbolwahrscheinlichkeiten $P(x_i), i = 1, \dots, q$ sind bekannt. Das Alphabet $B = \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$ ist ein Codealphabet. A wird injektiv in B_m abgebildet. Diese Abbildung wird Codierung genannt.

a. Erklären Sie die folgenden Begriffe:

- *decodierbarer Code.* Wie lautet eine notwendige Bedingung für einen decodierbaren Code?
- *idealer Code*
- *optimaler Code.*

b. Ist der im Beispiel 6.1-1 vorgestellte 2-aus-5 Code ein idealer Code? Begründen Sie Ihre Aussage.

6.3 Der Huffman-Code

Huffman-Code

Wir wenden uns nun der Aufgabe zu, einen optimalen Code, d. h. Code minimaler mittlerer Länge zu konstruieren. Wie wir im vorhergegangenen Abschnitt gesehen haben, gibt es zu jedem decodierbaren Code einen äquivalenten Präfixcode, so dass wir uns nunmehr auf Präfixcodes beschränken können. Zunächst wollen wir folgende drei Eigenschaften von optimalen Präfixcodes beweisen:

Seien $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \dots \geq p_q$ die Symbolwahrscheinlichkeiten der betrachteten Quelle, wobei wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit die Symbole nach fallenden Wahrscheinlichkeiten geordnet haben. w_1, w_2, \dots, w_q seien die entsprechenden Codewörter und l_1, l_2, \dots, l_q die entsprechenden Codewortlängen eines optimalen Präfixcodes.

1. Für zwei Wörter w_i und w_j mit $p_i > p_j$ folgt

$$l_i \leq l_j.$$

Wir führen den Beweis, indem wir das Gegenteil annehmen und zum Widerspruch führen. Es sei $p_i > p_j$ und $l_i > l_j$. Dann ist $(p_i - p_j)(l_i - l_j) > 0$ und damit $p_i l_i + p_j l_j > p_i l_j + p_j l_i$. Da die mittlere Wortlänge

$$l_m = \sum_k p_k \cdot l_k$$

ist, heißt dies, dass wir durch Vertauschen der Wörter w_i und w_j l_m verkleinern können. Damit ist der vorgegebene Code nicht optimal; was der Annahme widerspricht

2. Mindestens zwei Codewörter haben die maximale Länge.

Auch hier führen wir den Beweis, indem wir das Gegenteil behaupten und zum Widerspruch führen. w_q sei das einzige Codewort mit der maximalen Länge l_q . a sei das letzte Symbol von w_q , d. h. $w_q = w'a$. Da C Präfixcode ist, ist w' kein Codewort, und kein anderes Codewort ist Präfix von w' . w' ist auch nicht Präfix eines anderen Codewortes, da w_q das einzige Codewort maximaler Länge war. Wir können somit w_q durch w' ersetzen und damit l_m verringern, ohne die Präfixeigenschaft zu verletzen, was der Annahme widerspricht.

3. Von den Codewörtern maximaler Länge l_q stimmen mindestens zwei in den ersten $(l_q - 1)$ Symbolen überein.

Würden sich alle Codewörter maximaler Länge l_q schon in den ersten $(l_q - 1)$ Symbolen unterscheiden, könnte ja das letzte Symbol weggelassen werden, was wiederum der Annahme widerspricht.

Wir wollen nun die **Codiervorschrift für binäre Huffman-Codierung** zunächst angeben:

**Codiervorschrift für
binäre
Huffman-Codierung**

Schritt 1:

Die Symbole der vorgegebenen Quelle werden in einer Tabelle nach fallenden Wahrscheinlichkeiten aufgelistet und die Wahrscheinlichkeiten in die Tabelle eingetragen.

Schritt 2:

Die beiden kleinstwahrscheinlichen Symbole x, y werden zur Unterscheidung mit 0 und 1 codiert und in der Tabelle entsprechend gekennzeichnet.

Schritt 3:

Die beiden Symbole x und y werden nun als ein neues Symbol xy zusammengefasst. Dem neuen Symbol wird die Summe der Wahrscheinlichkeiten der beiden ursprünglichen Symbole zugeordnet. Die so entstandene Quelle hat nun ein Symbol weniger. Falls die neue Quelle nur noch ein Symbol enthält, fährt man mit Schritt 4 weiter, sonst wiederholt man den Algorithmus ab Schritt 1 mit der neuen Quelle

Schritt 4:

Man beginnt mit der letzten Tabelle, arbeitet sich bis zur ersten Tabelle vor und stellt den Codebaum auf. Pro Tabelle erhält man eine Codierentscheidung, d. h. zwei Zweige des Codebaumes. Die Endknoten liefern die gewünschte Codierung.

Beispiel 6.3-1:

Gegeben sind die Symbole x_1 bis x_{10} mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1 = 0,25, p_2 = 0,15, p_3 = 0,2, p_4 = 0,2, p_5 = 0,05, p_6 = 0,07, p_7 = 0,025, p_8 = 0,02, p_9 = 0,025, p_{10} = 0,01$. Wir erhalten die folgenden Tabellen durch wiederholtes Anwenden der Schritte 1 bis 3:

Q_1	Q_2	Q_3
x_1 0,25	x_1 0,25	x_1 0,25
x_3 0,2	x_3 0,2	x_3 0,2
x_4 0,2	x_4 0,2	x_4 0,2
x_2 0,15	x_2 0,15	x_2 0,15
x_6 0,07	x_6 0,07	x_6 0,07
x_5 0,05	x_5 0,05	x_5 0,05
x_7 0,025	x_8x_{10} 0,03	x_7x_9 0,05 } 0
x_9 0,025	x_7 0,025 } 0	x_8x_{10} 0,03 } 1
x_8 0,02 } 0	x_9 0,025 } 1	
x_{10} 0,01 } 1		

Q_4		Q_5		Q_6	
x_1	0,25	x_1	0,25	x_1	0,25
x_3	0,2	x_3	0,2	x_3	0,2
x_4	0,2	x_4	0,2	x_4	0,2
x_2	0,15	x_2	0,15	$x_6x_5x_7x_9x_8x_{10}$	0,2 } 0
$x_7x_9x_8x_{10}$	0,08	x_6x_5	0,12 } 0	x_2	0,15 } 1
x_6	0,07 } 0	$x_7x_9x_8x_{10}$	0,08 } 1		
x_5	0,05 } 1				

Q_7		Q_8	
$x_6x_5x_7x_9x_8x_{10}x_2$	0,35	x_3x_4	0,4
x_1	0,25	$x_6x_5x_7x_9x_8x_{10}x_2$	0,35 } 0
x_3	0,2 } 0	x_1	0,25 } 1
x_4	0,2 } 1		

Q_9	
$x_6x_5x_7x_9x_8x_{10}x_2x_1$	0,6 } 0
x_3x_4	0,4 } 1

Der Schritt 4 liefert sukzessiv folgenden Codebaum. Um die Zwischenschritte im Algorithmus zu verdeutlichen, haben wir im Codebaum an Stelle eines Punktes einen Kreis und an Stelle eines Kreises einen Doppelkreis gezeichnet. In den Kreisen haben wir die Symbole der Quellen in den Zwischenschritten eingetragen; in den Doppelkreisen die Symbole der vorgegebenen Quelle.

Induktionsanfang. Wir haben mit l_{mi} die mittlere Länge der Huffman-Codierung der Quelle i bezeichnet.

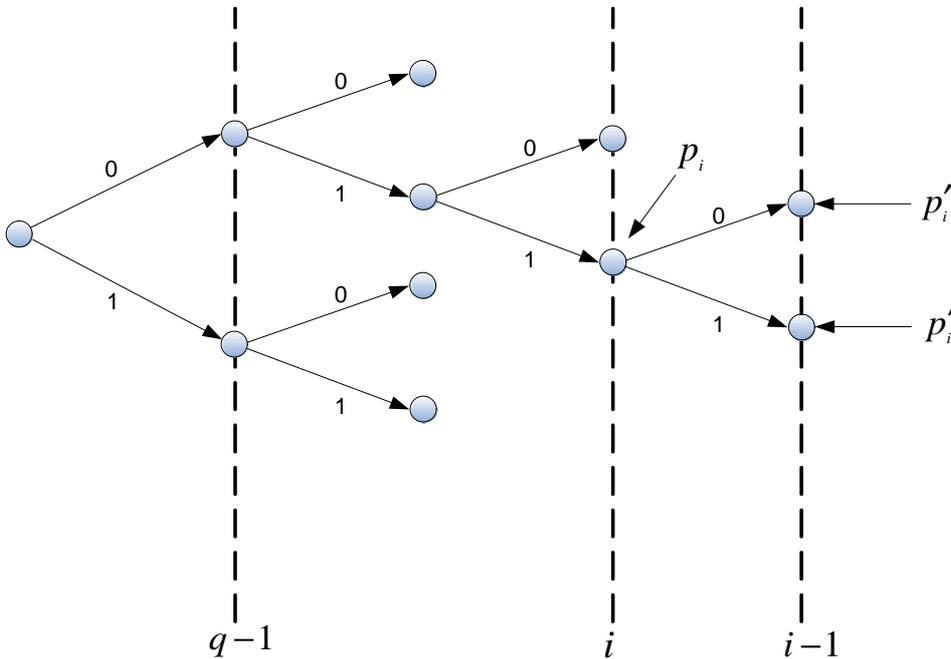


Abb. 6.3-1: Schritte des Huffman-Algorithmus

Sei der Huffman-Code der Quelle Q_i für ein $i \leq q - 1$ optimal. Die einzelnen Schritte des Algorithmus sind in Abb. 6.3-1 angedeutet.

Für die mittleren Längen des Huffman-Codes für die Quellen Q_i und Q_{i-1} gilt

$$l_{m(i-1)} = l_{mi} + p_i$$

mit $p_i = p'_i + p''_i$, wobei p'_i und p''_i die minimalen Symbolwahrscheinlichkeiten der Quelle Q_{i-1} sind. Wir nehmen an, es gäbe einen Präfixcode C' mit $l'_{m(i-1)}$ für die Quelle Q_{i-1} mit $l'_{m(i-1)} < l_{m(i-1)}$; dieser sei optimal. Wir bringen zunächst C' in eine Form, auf die wir die Huffman-Codierung anwenden können, um eine Codierung der Quelle Q_i zu erhalten. Die beiden Codewörter mit den niedrigsten Wahrscheinlichkeiten in Q_{i-1} haben auch die maximale Länge l_q . Außerdem gibt es in C' zwei Codewörter maximaler Länge l_q , die in den ersten $(l_q - 1)$ Symbolen übereinstimmen. Sind diese nicht die Codewörter mit den Wahrscheinlichkeiten p' und p'' , so können wir sie mit ihnen tauschen, ohne die mittlere Codewortlänge $l'_{m(i-1)}$ zu verändern. Ein Schritt des Huffman-Algorithmus auf den so erhaltenen Codebaum ergibt eine Codierung der Quelle Q_i mit der mittleren Codewortlänge

$$l'_{mi} = l'_{m(i-1)} - p_i,$$

da die beiden Codewörter um ein Symbol gekürzt werden und dies mit der Wahrscheinlichkeit $p_i = p'_i + p''_i$ geschieht. Damit wird

$$l'_{mi} = l'_{m(i-1)} - p_i < l_{m(i-1)} - p_i = l_{mi}.$$

Dies widerspricht der Annahme, dass l_{mi} minimal war; somit ist $l_{m(i-1)}$ minimal, was zu beweisen war.

Es dürfte dem aufmerksamen Leser nicht entgangen sein, dass gewisse Freiheitsgrade bei der Codierungsvorschrift enthalten sind bzw. vom Beweis her nicht verwendet werden. So können die Symbole 0 und 1 bei jeder Verzweigung vertauscht werden, und bei mehreren gleichwahrscheinlichen Symbolen geringster Wahrscheinlichkeit können beliebig zwei Symbole zusammengefasst werden. Alle so erhaltenen Codes sind optimal.

Der Huffman-Algorithmus kann für ein Codealphabet mit r Symbolen erweitert werden. Als erster Schritt werden soviele Symbole mit der Wahrscheinlichkeit Null zu den Quellensymbolen hinzugenommen, dass der Codieralgorithmus genau aufgeht. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass jeweils die neue Quelle $(r - 1)$ Symbole weniger als die vorherige Quelle hat, während die letzte Quelle genau r Symbole hat, da pro Entscheidungsschritt r Symbole der niedrigsten Wahrscheinlichkeiten jeweils zu einer Quelle zusammengefasst werden. Der Beweis des Algorithmus läuft dem Beweis oben analog, nachdem die Symbole mit der Wahrscheinlichkeit Null hinzugefügt wurden.

Beispiel 6.3-2:

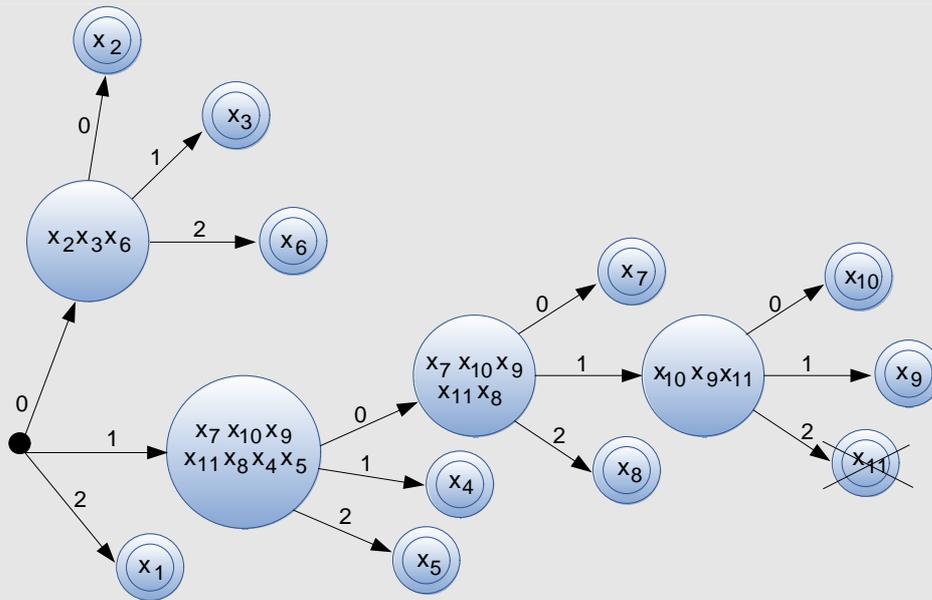
Es sei eine Quelle mit 10 Symbolen und den Symbolwahrscheinlichkeiten $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,2$, $p_3 = 0,15$, $p_4 = 0,1$, $p_5 = 0,1$, $p_6 = 0,15$, $p_7 = 0,05$, $p_8 = 0,02$, $p_9 = 0,01$, $p_{10} = 0,02$ gegeben. Gesucht ist eine optimale ternäre Präfixcodierung. Wir wenden den Huffman-Algorithmus an.

Da pro neue Quelle 2 Symbole abgebaut werden, hat man nach 4 Entscheidungsschritten noch 2 Symbole übrig. Im letzten Schritt werden jedoch 3 Symbole codiert, so dass ein Symbol x_{11} mit der Symbolwahrscheinlichkeit Null hinzugefügt werden muss. Die einzelnen Quellen sind:

Q_1	Q_2	Q_3
x_1 0,2	x_1 0,2	x_1 0,2
x_2 0,2	x_2 0,2	x_2 0,2
x_3 0,15	x_3 0,15	x_3 0,15
x_6 0,15	x_6 0,15	x_6 0,15
x_4 0,1	x_4 0,1	$x_7x_{10}x_9x_{11}x_8$ 0,1 } 0
x_5 0,1	x_5 0,1	x_4 0,1 } 1
x_7 0,05	x_7 0,05 } 0	x_5 0,1 } 2
x_8 0,02	$x_{10}x_9x_{11}$ 0,03 } 1	
x_{10} 0,02 } 0	x_8 0,02 } 2	
x_9 0,01 } 1		
x_{11} 0 } 2		

Q_4		Q_5	
$x_7x_{10}x_9x_{11}x_8x_4x_5$	0,3	$x_2x_3x_6$	0,5 } 0
x_1	0,2	$x_7x_{10}x_9x_{11}x_8x_4x_5$	0,3 } 1
x_2	0,2 } 0	x_1	0,2 } 2
x_3	0,15 } 1		
x_6	0,15 } 2		

Als Codebaum erhält man:



Die Codierung lautet:

Symbol	x_1	x_2	x_3	x_6	x_4	x_5	x_7	x_8	x_{10}	x_9
Codewort	2	00	01	02	11	12	100	102	1010	1011

6.4 Der Fundamentalsatz der Quellencodierung

Wir zeigen zunächst, dass für die betrachtete Quelle Q mit der Quellenentropie $H(X)$ und dem Codealphabet B mit r Symbolen ein Präfix-Code mit

$$\frac{H(X)}{\log r} \leq l_m < \frac{H(X)}{\log r} + 1 \quad 6.4-1$$

existiert, wobei l_m die mittlere Codewortlänge entsprechend Gl. 6.1-1 ist.

Wir betrachten die Wahrscheinlichkeit p_i des Quellensymbols x_i ($1 \leq i \leq q$) bzw. des Codewortes w_i . Für jedes p_i können wir ein l_i angeben, mit

$$\frac{-\log p_i}{\log r} \leq l_i < \frac{-\log p_i}{\log r} + 1. \quad 6.4-2$$

Die linke Gl. 6.4-2 liefert

$$p_i \geq \frac{1}{r^{l_i}}$$

oder

$$1 \geq \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}}.$$

Somit ist die Kraft-McMillan-Ungleichung erfüllt, und es existiert ein Präfixcode mit den Längen l_i . Wir multiplizieren nun Gl. 6.4-2 mit p_i , summieren über i und erhalten:

$$\sum_{i=1}^q \frac{-p_i \cdot \log p_i}{\log r} \leq \sum_{i=1}^q p_i l_i < \frac{\sum_{i=1}^q -p_i \cdot \log p_i}{\log r} + \sum_{i=1}^q p_i$$

oder

$$\frac{H(X)}{\log r} \leq l_m < \frac{H(X)}{\log r} + 1,$$

was zu zeigen war.

Wir können nun leicht den Fundamentalsatz der Quellencodierung, auch Shannons 1. Satz genannt, ableiten. Hierzu verwenden wir die n -te Erweiterung der Quelle, die analog zur n -ten Erweiterung des Kanals ist (Abschnitt 4.3). Wir fassen jeweils n Quellensymbole zu einem neuen Symbol zusammen und erhalten die neue Quelle Q^n . Die Wahrscheinlichkeit dieses Symbols ist das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten, da wir es mit unabhängigen (stationären, gedächtnislosen) Quellen zu tun haben. Für die Entropie der Quelle Q^n erhalten wir

$$H(X^n) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^q -p_{i_1} \dots p_{i_n} \log(p_{i_1} \dots p_{i_n}).$$

Wegen

$$\sum_{i_r=1}^q p_{i_r} = 1 \quad \text{mit} \quad H(X) = \sum_{i_r=1}^q -p_{i_r} \cdot \log p_{i_r} \quad (1 \leq r \leq n)$$

erhalten wir (vgl. Gl. 4.3-2 bis Gl. 4.3-6)

$$\begin{aligned} H(X^n) &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^q -p_{i_1} \dots p_{i_n} (\log p_{i_1} + \dots + \log p_{i_n}) & 6.4-3 \\ &= H(X) + H(X) + \dots + H(X) \\ &= n \cdot H(X). \end{aligned}$$

Nun gilt für die erweiterte Quelle auch, dass ein Präfixcode existiert, der Gl. 6.4-1 erfüllt, d. h. wir haben

$$\frac{n \cdot H(X)}{\log r} \leq l_m^{(n)} < \frac{n \cdot H(X)}{\log r} + 1,$$

wobei $l_m^{(n)}$ die mittlere Codewortlänge des Codes der erweiterten Quelle darstellt. Somit haben wir

$$\frac{H(X)}{\log r} \leq \frac{l_m^{(n)}}{n} < \frac{H(X)}{\log r} + \frac{1}{n} \quad 6.4-4$$

oder

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_m^{(n)}}{n} = \frac{H(X)}{\log r}. \quad 6.4-5$$

$l_m^{(n)}$ ist die mittlere Codewortlänge der n -fach erweiterten Quelle. Ein Symbol der n -fach erweiterten Quelle besteht aus n Symbolen der einfachen Quelle. $\frac{l_m^{(n)}}{n}$ ist somit der Anteil der mittleren Codewortlänge der n -fach erweiterten Quelle pro Symbol der einfachen Quelle - sie entspräche also der mittleren Codewortlänge der einfachen Quelle.

Der Quellencodierungssatz besagt somit, dass es für eine stationäre, gedächtnislose Quelle und ein Codealphabet aus r Symbolen Präfixcodierungen der n -fach erweiterten Quelle gibt, so dass im Mittel die Codewortlänge (genauer, der ihr entsprechende Ausdruck $\frac{l_m^{(n)}}{n}$) beliebig nahe dem Optimum $\frac{H(X)}{\log r}$ gebracht werden kann.

Beispiel 6.4-1:

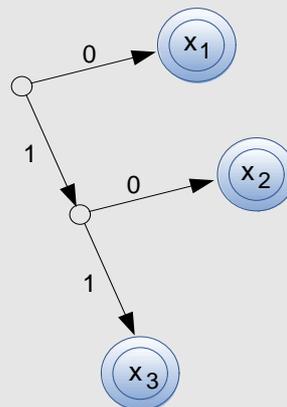
Wir betrachten eine Quelle mit drei Symbolen und den Symbolwahrscheinlichkeiten $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{3}, p_3 = \frac{1}{6}$.

Für die Quellenentropie gilt

$$H(X) = 0,5 + 0,528 + 0,431 = 1,459 \text{ Bit/Symbol.}$$

Der Huffman-Algorithmus liefert

Q_1		Q_2	
x_1	$\frac{1}{2}$	x_1	$\frac{1}{2}$ }0
x_2	$\frac{1}{3}$ }0	x_2x_3	$\frac{1}{2}$ }1
x_3	$\frac{1}{6}$ }1		



mit der Codierung

$$x_1 = 0, x_2 = 10, x_3 = 11$$

und der mittleren Codewortlänge

$$l_m = 1,5 > \frac{H(X)}{\log 2} = 1,459.$$

Fassen wir jeweils zwei Symbole zusammen, so haben wir für die erweiterte Quelle Q^2 die Symbole

$$\begin{array}{ll}
 S_1 = x_1x_1 & \text{mit } p_1 = \frac{1}{4} \\
 S_2 = x_1x_2 & p_2 = \frac{1}{6} \\
 S_3 = x_1x_3 & p_3 = \frac{1}{12} \\
 S_4 = x_2x_1 & p_4 = \frac{1}{6} \\
 S_5 = x_2x_2 & p_5 = \frac{1}{9} \\
 S_6 = x_2x_3 & p_6 = \frac{1}{18} \\
 S_7 = x_3x_1 & p_7 = \frac{1}{12} \\
 S_8 = x_3x_2 & p_8 = \frac{1}{18} \\
 S_9 = x_3x_3 & p_9 = \frac{1}{36}
 \end{array}$$

Der Huffman-Algorithmus liefert nun:

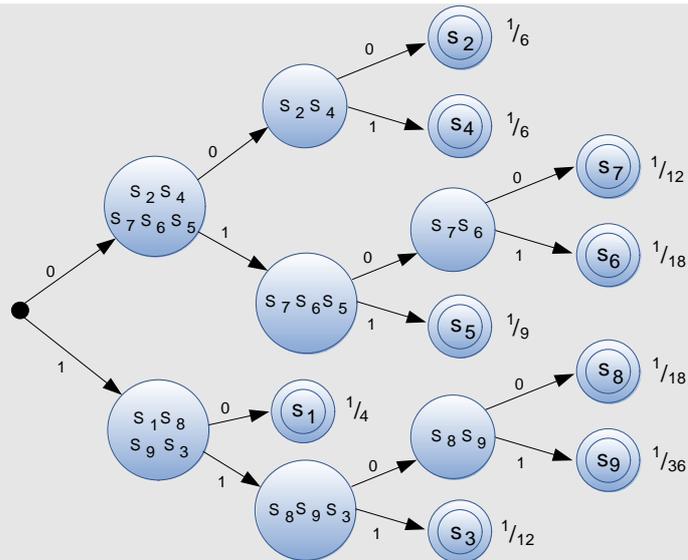
Q_1^2		Q_2^2	
S_1	$\frac{1}{4}$	S_1	$\frac{1}{4}$
S_2	$\frac{1}{6}$	S_2	$\frac{1}{6}$
S_4	$\frac{1}{6}$	S_4	$\frac{1}{6}$
S_5	$\frac{1}{9}$	S_5	$\frac{1}{9}$
S_3	$\frac{1}{12}$	$S_8 S_9$	$\frac{1}{12}$
S_7	$\frac{1}{12}$	S_3	$\frac{1}{12}$
S_6	$\frac{1}{18}$	S_7	$\frac{1}{12}$ }0
S_8	$\frac{1}{18}$ }0	S_6	$\frac{1}{18}$ }1
S_9	$\frac{1}{36}$ }1		

Q_3^2		Q_4^2	
S_1	$\frac{1}{4}$	S_1	$\frac{1}{4}$
S_2	$\frac{1}{6}$	$S_8 S_9 S_3$	$\frac{1}{6}$
S_4	$\frac{1}{6}$	S_2	$\frac{1}{6}$
$S_7 S_6$	$\frac{5}{36}$	S_4	$\frac{1}{6}$
S_5	$\frac{1}{9}$	$S_7 S_6$	$\frac{5}{36}$ }0
$S_8 S_9$	$\frac{1}{12}$ }0	S_5	$\frac{1}{9}$ }1
S_3	$\frac{1}{12}$ }1		

Q_5^2		Q_6^2	
$S_7 S_6 S_5$	$\frac{1}{4}$	$S_2 S_4$	$\frac{1}{3}$
S_1	$\frac{1}{4}$	$S_7 S_6 S_5$	$\frac{1}{4}$
$S_8 S_9 S_3$	$\frac{1}{6}$	S_1	$\frac{1}{4}$ }0
S_2	$\frac{1}{6}$ }0	$S_8 S_9 S_3$	$\frac{1}{6}$ }1
S_4	$\frac{1}{6}$ }1		

Q_7^2		Q_8^2	
$S_1 S_8 S_9 S_3$	$\frac{5}{12}$	$S_2 S_4 S_7 S_6 S_5$	$\frac{7}{12}$ }0
$S_2 S_4$	$\frac{1}{3}$ }0	$S_1 S_8 S_9 S_3$	$\frac{5}{12}$ }1
$S_7 S_6 S_5$	$\frac{1}{4}$ }1		

Hieraus ergibt sich folgender Codebaum:



Für die mittlere Länge erhalten wir

$$l_m^{(2)} = \sum l_i p_i = 2,9722$$

und

$$L_m = \frac{l_m^{(2)}}{2} = 1,4861 \text{ Bit/Symbol},$$

d. h.

$$l_m = 1,5 > L_m = 1,486 > \frac{H(X)}{\log_2} = 1,459.$$

Selbsttestaufgabe 6.4-1:

Gegeben sind die Symbole x_1 bis x_5 und die Wahrscheinlichkeiten

$$P(x_1) = 0,1, \quad P(x_2) = 0,25, \quad P(x_3) = 0,4,$$

$$P(x_4) = 0,05 \text{ und } P(x_5) = 0,2.$$

a. Konstruieren Sie nach dem Huffman-Algorithmus einen binären Code.

b. Geben Sie einen äquivalenten Kommacode an.

c. Erfüllt der Huffman-Code die folgende Ungleichung

$$\frac{H(X)}{\log_2} \leq l_m < \frac{H(X)}{\log_2} + 1?$$

Überprüfen Sie dieses zahlenmäßig.

6.5 Weitere Quellencodes

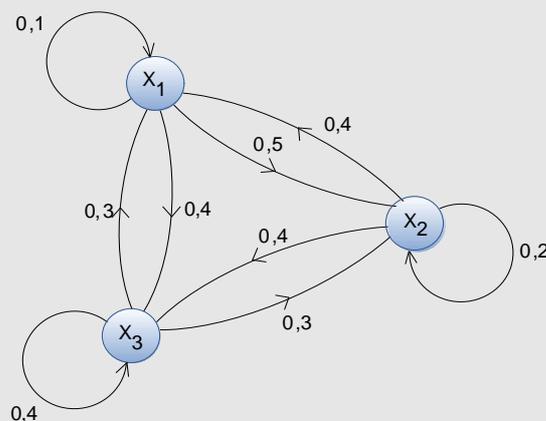
Wir betrachten nun eine Markoff-Quelle 1. Ordnung, für die sowohl Übergangswahrscheinlichkeiten im stationären Fall als auch die jeweiligen Symbolwahrscheinlichkeiten bekannt sind. Wir haben nunmehr die Möglichkeit, entweder den Huffman Code entsprechend den Symbolwahrscheinlichkeiten oder der jeweils bedingten Wahrscheinlichkeiten aufzustellen. Die Verbesserung, die man hierdurch bewirkt, erfordert einen Mehraufwand für die Codierung und Decodierung, denn nun wird pro Zustand jeweils eine Codierung angewandt. Wegen der erreichbaren Verkürzung der mittleren Codewortlänge, werden solche Codes durchaus in der Praxis angewandt.

Beispiel 6.5-1:

Wir betrachten die Markoff-Quelle des Beispiel 4.1-2 mit den Symbolwahrscheinlichkeiten

$$P(x_1) = \frac{18}{65}, \quad P(x_2) = \frac{21}{65}, \quad P(x_3) = \frac{26}{65}$$

und dem folgenden Zustandsgraphen:



Die Huffman-Codierung ergibt:

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow 01 \\ x_2 &\rightarrow 00 \\ x_3 &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

mit der mittleren Codewortlänge

$$l_m = 2 \cdot \frac{18}{65} + 2 \cdot \frac{21}{65} + 1 \cdot \frac{26}{65} = 1,6.$$

Codiert man jeweils nach dem momentanen Zustand, erhält man:

1. Für den Zustand x_1

$$\begin{array}{ll} P(x_1 | x_1) = 0,1 & \text{die Codierung } x_1 \rightarrow 11 \\ P(x_2 | x_1) = 0,5 & x_2 \rightarrow 0 \\ P(x_3 | x_1) = 0,4 & x_3 \rightarrow 10 \end{array}$$

mit der mittleren Länge

$$l_1 = 2 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,4 = 1,5.$$

2. Für den Zustand x_2

$$\begin{array}{ll} P(x_1 | x_2) = 0,4 & \text{die Codierung } x_1 \rightarrow 1 \\ P(x_2 | x_2) = 0,2 & x_2 \rightarrow 01 \\ P(x_3 | x_2) = 0,4 & x_3 \rightarrow 00 \end{array}$$

mit der mittleren Länge

$$l_2 = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,4 = 1,6.$$

3. Für den Zustand x_3

$$\begin{array}{ll} P(x_1 | x_3) = 0,3 & \text{die Codierung } x_1 \rightarrow 00 \\ P(x_2 | x_3) = 0,3 & x_2 \rightarrow 01 \\ P(x_3 | x_3) = 0,4 & x_3 \rightarrow 1 \end{array}$$

mit der mittleren Länge

$$l_3 = 2 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,4 = 1,6.$$

Betrachtet man die mittlere Codewortlänge l_m über alle Zustände hinweg, so erhält man unter Berücksichtigung der einzelnen Zustandswahrscheinlichkeiten für die Zustandskodierung

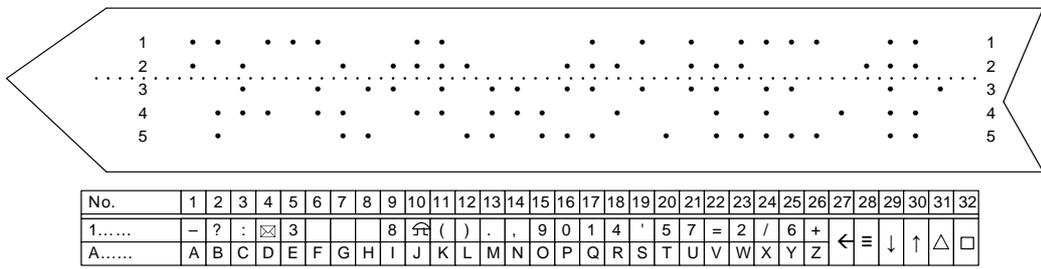
$$l_m = 1,5 \cdot \frac{18}{65} + 1,6 \cdot \frac{21}{65} + 1,6 \cdot \frac{26}{65} = 1,572.$$

**Zustandsabhängige
Codierung**
Codeumschaltung
Telegraphenalphabet

Zustandsabhängige Codierung wird in der Praxis oft angewandt. Je nach dem augenblicklichen Zustand der Quelle wird eine andere Codetabelle angewandt, deshalb spricht man auch von **Codeumschaltung**. In der einfachsten Form liegt ein solches Codierungsverfahren beim internationalen **Telegraphenalphabet** (IA NR.

2 CCITT⁹ F.1) vor. Es sind Großbuchstaben und einige Satzzeichen, Sonderzeichen und Ziffern zu codieren. Für die Codierung der 26 Buchstaben sind mindestens 5 Bit ($\hat{=}$ 32 Zeichen) erforderlich. Für die Ziffern, Satz- und Sonderzeichen wäre mindestens ein weiteres Bit erforderlich. Das IA Nr. 2 kommt durch die Codeumschaltung zwischen Buchstabencode und Zifferncode jedoch mit 5 Bit aus. Die Codewörter Nr. 29 und 30 (siehe Abb. 6.5-1) werden verwendet, um die Umschaltung zu erwirken. Im Mittel kommen 30 Buchstaben auf ein Satzzeichen oder eine Zahl, so dass mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{31}$ umgeschaltet werden muss.

Sowohl die ASCII-Codierung (Abb. 6.1-2) als auch die Teletex-Codierung (Abb. 2.3-10) sehen verschiedene Codeumschaltmöglichkeiten vor (z. B. **ESC** (*Escape*), **SI** (*Shift-In*), **SO** (*Shift-Out*), **LS1**, **LS2** (*Locking Shift*) usw.).



- Represents a perforation in the paper tape (Z condition or stop polarity)
- 1... Figure case
- A... Letter case
- ☒ or ☞ *Who are you?* In the international telex and gentex services. The combinations Nos. 6, 7 and 8 in the figure case are available for national usage.
- ☞ Audible sign (bell)
- ← Carriage return
- ≡ Line feed
- ↓ Letter-shift
- ↑ Figure-shift
- △ or → Space
- Space only or blank (not normally used)

Abb. 6.5-1: Das internationale Telegraphenalphabet IA Nr. 2.

Beim Fernkopieren (Faksimile) wird die **Laufängencodierung** angewandt. Da beim Schwarz/Weiß-Kopieren bei einer feinen Auflösung die Farbe von Punkt zu Punkt (z. B. in einer Zeile) selten wechselt, codiert man Punktfolgen anstatt einzelner Punkte. Jede Punktfolge bestimmter Farbe und Länge wird als ein Wort codiert. Hierzu wird eine **modifizierte Huffman-Codierung** angewandt (CCITT T4 für Group 3 Faksimile), die einerseits Auftrittswahrscheinlichkeiten der Punktfolgen berücksichtigt, andererseits Codeumschaltungen vornimmt.

Laufängencodierung

modifizierte Huffman-Codierung

9 Comité Consultatif International Télégraphique et Téléphonique. Internationales Normungsgremium, zuständig für öffentliche Netze. Seit 1993: ITU-T International Telecommunication Union -Telecommunication Standardisation Sector.

Bei der Abtastung einer Fax-Vorlage werden in einer Zeile 1728 Punkte erfasst, die nur schwarz (s) oder weiß (w) sein können. Bei einer einfachen Codierung mit „0“ für schwarz und „1“ für weiß, müssten pro Zeile 1728 Bit aufgewendet werden. Bei der modifizierten Huffman-Codierung wird eine Reduktion um 80 bis 95% gegenüber einer Punkt-zu-Punkt Codierung erreicht.

Benachbarte Punkte gleicher Farbe werden in einem ersten Schritt zusammengefasst. w130, s2, w192, s1, w1400 würde in dieser Phase bedeuten, dass erst 130 weiße Punkte, anschließend 2 schwarze, danach wieder 192 weiße Punkte vorkommen usw. Anschließend wird diese Darstellung mit einem Huffman-Code in eine binäre Folge umgesetzt. Hierbei werden wieder häufig auftretende Symbole mit kurzen Codewörtern dargestellt und seltenere mit entsprechend längeren Codewörtern. Die Häufigkeiten hierfür sind anhand typischer Fax-Vorlagen, wie Geschäftsbriefen, ermittelt worden. Da die Häufigkeiten für weiße und schwarze Punktfolgen unterschiedlich sind, gibt es auch unterschiedliche Codewörter. Zusätzlich besteht das Problem, dass 1728 Codewörter für jede Farbe eine große Tabelle erforderlich machen würde. Daher werden die Zahlen mit $N = 64 \cdot m + n$ mit $m = 0, \dots, 27$ und $n = 0, \dots, 27$ in zwei Werte aufgeteilt, für die dann jeweils eine Codierung festgelegt ist. Das Codewort für $64 \cdot m$ wird mit *Make-up* Codewort bezeichnet und das für n mit *Terminating* Codewort.

In Abb. 6.5-2 sind einige Codewörter getrennt für schwarz und weiß aufgeführt.

Lauflänge	weiß (w)	schwarz (s)
Terminating Codewort(n)		
0	00110101	0000110111
1	000111	010
2	0111	11
3	1000	10
4	1011	011
...
59	01001010	000000101011
60	01001011	000000101100
61	00110010	000001011010
62	00110011	000001100110
63	00110100	000001100111
Make-up Codewort (64 m)		
64	11011	0000001111
128	10010	000011001000
192	010111	000011001001
...
1600	010011010	0000001011011
1664	011000	0000001100100
1728	010011011	0000001100101
EOL	000000000001	00000000001

Abb. 6.5-2: Codetabelle für den modifizierten Huffman-Code.

Zeilen RL und CL innerhalb von ± 3 Pixeln liegen, wird der *Vertical Mode* gewählt. Die möglichen Codierungen im *Vertical Mode* sind in Abb. 6.5-4 zusammengestellt.

	Links			Rechts			
Position des zu codierenden Pixels	-3	-2	-1	0	1	2	3
Codierung	0000010	000010	010	1	001	000011	0000011

Abb. 6.5-4: Vertical Mode der modifizierten Read-Codierung.

Wenn ein Farbwechsel nicht innerhalb der ± 3 Pixel-Begrenzung liegt, wird einer der beiden anderen Modi eingesetzt. Der *Pass Mode* mit der Codierung (0001) wird verwendet, um zwei Farbwechsel der RL zu überspringen, wenn die CL bis unterhalb des zweiten Farbwechsels der RL oder weiter rechts mit der gleichen Farbe fortgesetzt wird. Der *Horizontal Mode* wird verwendet, wenn die nächsten beiden Farbwechsel nur in der CL vorkommen. Die Codierung erfolgt mit (001) und angehängter modifizierter Huffman-Codierung der Abstände bis zu den beiden Farbwechseln.

Problematisch ist diese Art der Codierung, wenn bei der Übertragung Fehler auftreten, da sich diese immer weiter fortpflanzen. Aus diesem Grund wird bei der modifizierten Read-Codierung in regelmäßigen Abständen eine Zeile mit der modifizierten Huffman-Codierung durchgeführt. In der ITU-T Empfehlung T.4 für Faxgeräte der Gruppe 3 wird für die normale Zeilenauflösung alle zwei Zeilen eine modifizierte Huffman-Codierung durchgeführt. Bei der feineren Auflösung alle vier Zeilen.

modifizierte modifizierte Read-Codierung

Die **modifizierte modifizierte Read-Codierung (MMR)** ist im Wesentlichen identisch mit der modifizierten Read-Codierung, allerdings wird gar keine Zeile mehr mit der modifizierten Huffman-Codierung verwendet. In der ITU-T Empfehlung T.6 wird die modifizierte modifizierte Read-Codierung für Faxgeräte der Gruppe 4 empfohlen.

Lempel-Ziv 77

Wörterbuch basierte Verfahren

Das Kompressionsverfahren von A. Lempel und J. Ziv basiert auf einer Veröffentlichung der beiden Autoren von 1977 und wird oft als LZ77 bezeichnet [ZL77]. Es gehört zu der Klasse der Kompressionsverfahren, die mit einem **Wörterbuch** arbeiten. Eine Folge von Symbolen wird dann über einen Verweis auf das Wörterbuch codiert, das sowohl dem Sender als auch dem Empfänger vorliegen muss. Da sich für unterschiedliche Quellen auch unterschiedliche Wörterbücher empfehlen, ist ein weiterer Schritt, dieses Wörterbuch adaptiv aufzubauen. Bei LZ77 ist das Wörterbuch einfach ein Teil der bereits codierten Sequenz. Bei der Codierung wird ein Fenster über der Symbolfolge betrachtet, das aus zwei Bereichen besteht. Der linke Bereich enthält bereits codierte Symbole und wird als *Search Buffer* bezeichnet. Der rechte Teil heißt *Look-Ahead Buffer* und enthält die zunächst zu codierenden Symbole. Hierzu sucht der Codierer in dem *Search Buffer* eine möglichst lange Symbolfolge, die mit der Folge in dem *Look-Ahead Buffer* übereinstimmt. Anschließend

wird diese Folge durch ein Tripel $\langle d, l, c(Z) \rangle$ codiert, in dem die Distanz d zu der gefundenen Folge (d. h. die Anzahl der Zeichen zwischen den beiden Folgen), deren Länge l und das nächste zu codierende Zeichen $c(Z)$ enthalten sind.

Im folgendem Beispiel ist der *Search Buffer* 7 und der *Look-Ahead Buffer* 6 Symbole lang (s. Abb. 6.5-5).

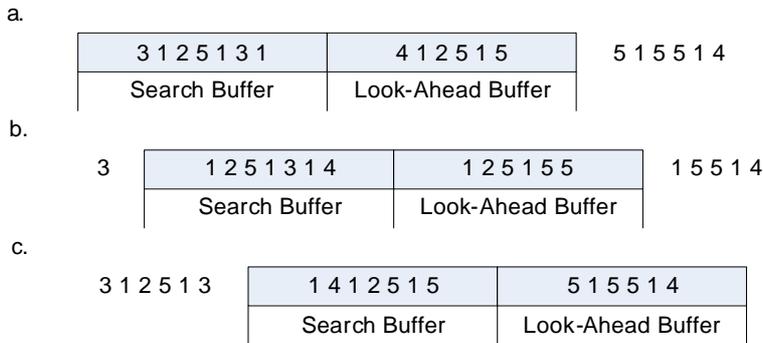


Abb. 6.5-5: Der LZ77 Algorithmus.

In dem Fall a) ist das erste Symbol eine "4", die in dem *Search Buffer* nicht vorkommt und die Codierung lautet $\langle 0, 0, c(4) \rangle$. In dem Fall b) hat die längste übereinstimmende Folge die Länge vier und das erste nicht mehr übereinstimmende Symbol ist eine 5. Die Codierung ist $\langle 7, 4, c(5) \rangle$. Der Fall c) zeigt abschließend, dass eine gefundene Folge durchaus auch in den *Look-Ahead Buffer* hineinlaufen darf. Die Codierung lautet $\langle 3, 5, c(4) \rangle$. Die Decodierung für diesen Algorithmus erfolgt einfach durch Auswertung des Tripels. Das Verfahren benötigt keine Vorabinformationen über die statistischen Eigenschaften der Quelle und das Wörterbuch wird automatisch aufgebaut.

Eine Verbesserungen des Verfahrens kann erreicht werden, wenn das Tripel nicht mit fester Länge codiert wird, sondern mit einer variablen Länge. Dabei werden wieder häufig auftretende Tripel möglichst kurz codiert. Einige bekannte Kompressionsverfahren wie **PKZip**, **Zip**, **LHarc** und **ARJ** (*Archive Robert Jung*) basieren auf dem LZ77 Algorithmus. Andere Optimierungsstrategien beziehen sich auf die Größe von *Search-* und *Look-Ahead Buffer*. Allerdings müssen bei großen Suchbereichen auch geeignete Suchalgorithmen gefunden werden. Eine einfache Verbesserungsmöglichkeit ist, ein Bit zu reservieren, mit dem angezeigt wird, ob ein einzelnes Symbol folgt, das nicht in dem *Search Buffer* vorhanden ist (entsprechend Fall Abb. 6.5-5 a). Dann ist es auch nicht mehr notwendig, die dritte Komponente des Tripels anzugeben. Die Distanz zu der gefundenen Folge und die Länge der Folge sind ausreichend.

**Varianten von
Lempel-Ziv 77**

Lempel-Ziv 78 Bei dem Algorithmus **LZ78** wird kein gleitendes Fenster als Wörterbuch verwendet, sondern alle verarbeiteten Symbole und Symbolfolgen werden zum Aufbau des Wörterbuchs benutzt [ZL78]. Damit können auch lange zurückliegende Symbolfolgen effizient codiert werden. Die Symbolfolgen werden mit zwei Komponenten $\langle i, c(Z) \rangle$ codiert, wobei i der Index im Wörterbuch ist, der auf die längste übereinstimmende Folge verweist und $i = 0$ bedeutet, dass keine übereinstimmende Folge gefunden werden konnte. $c(Z)$ ist dann der Code für das erste nachfolgende Symbol. Anschließend wird das Wörterbuch um diese neue Folge ergänzt. Ein Beispiel für die Codierung der Symbolfolge

"5|1|2|21|0|51|22|10|512|210|5122|105|3|30|53|305|33|"

ist in Tabelle 6.5-1 dargestellt. Die senkrechten Striche "|" gehören nicht zu der Symbolfolge, sondern deuten die Codierung der Teilfolgen an. Dem Vorteil von LZ78, auch lange zurückliegende Folgen zu berücksichtigen, steht natürlich gegenüber, dass das Wörterbuch immer größer wird und daher Vorkehrungen für eine Begrenzung notwendig sind.

Tab. 6.5-1: Der LZ78-Algorithmus.

Wörterbuch		
Codierte Folge	Index	Eintrag
$\langle 0, c(5) \rangle$	1	5
$\langle 0, c(1) \rangle$	2	1
$\langle 0, c(2) \rangle$	3	2
$\langle 3, c(1) \rangle$	4	21
$\langle 0, c(0) \rangle$	5	0
$\langle 1, c(1) \rangle$	6	51
$\langle 3, c(2) \rangle$	7	22
$\langle 2, c(0) \rangle$	8	10
$\langle 6, c(2) \rangle$	9	512
$\langle 4, c(0) \rangle$	10	210
$\langle 9, c(2) \rangle$	11	5122
$\langle 8, c(5) \rangle$	12	105
$\langle 0, c(3) \rangle$	13	3
$\langle 13, c(0) \rangle$	14	30
$\langle 1, c(3) \rangle$	15	53
$\langle 14, c(5) \rangle$	16	305
$\langle 13, c(3) \rangle$	17	33

Lempel-Ziv-Welch Eine Erweiterung des LZ78-Algorithmus ist von T. Welch entwickelt worden und wird oft als **LZW** bezeichnet [Wel84]. Der Hauptunterschied zu LZ78 ist, dass anstelle der zwei Komponenten $\langle i, c(Z) \rangle$ nur noch der Index i benötigt wird. Hierfür wird das Wörterbuch zunächst mit allen Einzelsymbolen der Quelle vorbelegt. Bei der Codierung wird die zu komprimierende Folge mit übereinstimmenden

Symbolfolgen in dem Wörterbuch verglichen. Die längste Symbolfolge wird einfach mit $\langle i \rangle$ codiert. Im Wörterbuch wird allerdings diese Symbolfolge zusammen mit dem ersten nicht übereinstimmenden Symbol eingetragen. Dieses Symbol ist dann das erste der nächsten zu codierenden Symbolfolge. Abb. 6.5-6 zeigt die codierte Folge und den Aufbau des Wörterbuches wieder anhand der Folge

"5|1|2|21|0|51|22|10|512|210|5122|105|3|30|53|305|33|"

Wörterbuch		
Codierte Folge	Index	Eintrag
Vorbelegung des Wörterbuches	1	0
	2	1
	3	2
	4	3
	5	5
$\langle 5 \rangle$	6	51
$\langle 2 \rangle$	7	12
$\langle 3 \rangle$	8	22
$\langle 3 \rangle$	9	21
$\langle 2 \rangle$	10	10
$\langle 1 \rangle$	11	05
$\langle 6 \rangle$	12	512
$\langle 8 \rangle$	13	221
$\langle 10 \rangle$	14	105
$\langle 12 \rangle$	15	5122
$\langle 9 \rangle$	16	210
$\langle 11 \rangle$	17	051
$\langle 7 \rangle$	18	122
$\langle 16 \rangle$	19	2105
$\langle 5 \rangle$	20	53
$\langle 4 \rangle$	21	33
$\langle 4 \rangle$	22	30
$\langle 11 \rangle$	23	053
$\langle 21 \rangle$	24	330
$\langle 23 \rangle$	25	0533
$\langle 4 \rangle$

Abb. 6.5-6: Der LZW-Algorithmus.

Zur Decodierung benötigt der Empfänger die exakte Vorbelegung des Wörterbuches, die auch zur Codierung verwendet worden ist. Daran anschließend kann die ursprüngliche Folge wieder aus der codierten Folge zurückgewonnen werden. Sukzessive muss dabei auch das Wörterbuch berechnet werden, das abschließend identisch mit dem Wörterbuch auf der Seite des Codierers ist.

Die Varianten des LZ78-Algorithmus und besonders der LZW-Algorithmus gehören zu den bekanntesten Kompressionsverfahren. Im weiteren wird kurz auf die Anwendungen UNIX compress und GIF eingegangen.

UNIX compress *UNIX compress* wird zur Kompression von Dateien eingesetzt und basiert auf dem LZW-Algorithmus. Die Größe des Wörterbuches ist dabei variabel. Ausgehend von zunächst 512 Einträgen können die Indizes mit 9 Bit codiert werden. Wenn alle Einträge belegt sind, wird die Größe um den Faktor 2 erhöht. Für die Codierung der Indizes werden dann 10 Bit benötigt usw. Die Obergrenze kann zwischen 9 Bit und 16 Bit eingestellt werden, so dass maximal $2^{16} = 65.536$ Einträge möglich sind. Anschließend wird das Wörterbuch als statisches Wörterbuch verwendet, d. h. es kommen keine weiteren Einträge hinzu. Allerdings wird der Kompressionsgrad ermittelt und bei unterschreiten eines Schwellwertes wird das Wörterbuch geleert. Dadurch wird eine Anpassung an die Quelle erreicht.

Graphics Interchange Format (GIF) Das **GIF** (*Graphics Interchange Format*) ist eine Implementierung des LZW-Algorithmus zur Kompression von Bilddateien in einem einheitlichen Format. Eine GIF-Datei beginnt mit der GIF SIGNATURE, z. B. GIF87a, die Informationen über die Versionsnummer enthält. Der folgende SCREEN DESCRIPTOR beschreibt allgemeingültige Parameter aller in der Datei enthaltenen GIF-Bilder. Die Informationen der (optionalen) GLOBAL COLOR MAP dienen der Farbanpassung für unterschiedliche Displays. Die weiteren Elemente werden für jedes Bild innerhalb der Datei verwendet. Der IMAGE DESCRIPTOR enthält u. a. Angaben über die genaue Position des Bildes und darüber in welcher (Zeilen)-Reihenfolge ein Bild aufgebaut werden soll. Der LOCAL COLOR MAP ist optional und für zukünftige Anwendungen vorgesehen. RASTER DATA enthält dann die eigentlichen Bildinformationen, die mit einer LZW-Variante komprimiert sind. GIF89a ist eine Erweiterung der Spezifikation GIF87a.

7 Kanalcodierung

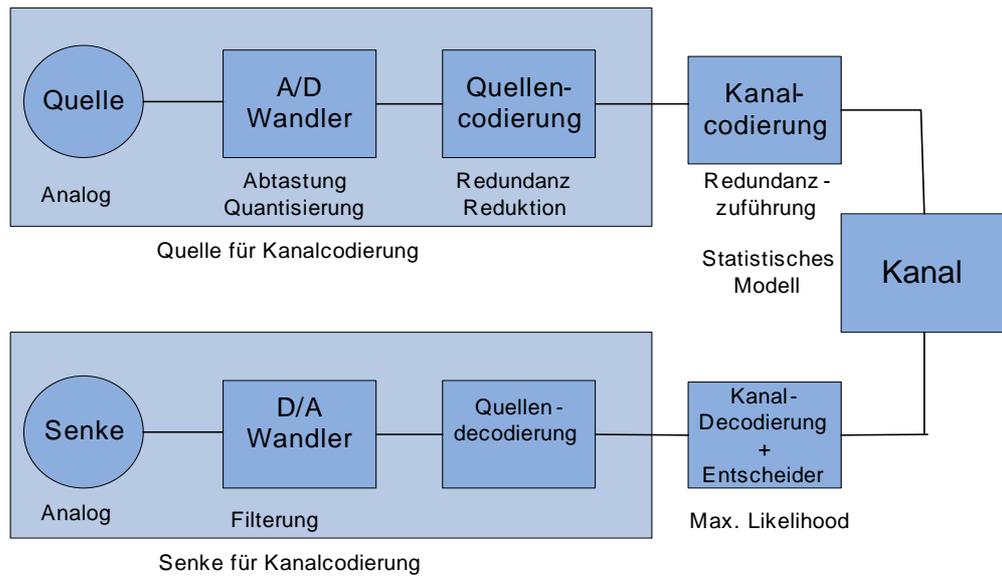
In dem vorliegenden Kapitel wird die Kanalcodierung – d. h. die Codierung zur Erkennung und Korrektur von Fehlern – behandelt. Im ersten Abschnitt wird anhand einfacher, in der Praxis üblicher Verfahren aufgezeigt, wie die einfache Wiederholung und die Paritätsprüfung zur Fehlererkennung angewandt werden. Der Begriff der Hamming-Distanz wird eingeführt und die Möglichkeit, Bündelfehler zu korrigieren, erörtert. Im nächsten Abschnitt werden lineare Codes behandelt. Es werden die Erzeugung und die Prüfung von linearen Codes anhand von Matrizen dargestellt, die Eigenschaften der Matrizen diskutiert und der Hamming-Code sowie der erweiterte Hamming-Code behandelt. Für das Verständnis dieses Abschnittes ist erforderlich, dass der Student genügend Umgang mit der linearen Algebra hatte - insbesondere, dass er mit Begriffen wie Vektorraum, Basis, Dimension, lineare Unabhängigkeit vertraut ist. Die verwendeten Begriffe und Sätze sind im Anhang C.2 zusammengestellt.

Der Anhang C.1 enthält die axiomatischen Grundlagen von Körpern, Ringen und Gruppen. Im Anhang C.3 sind die Eigenschaften von Polynomringen zusammengestellt, die erst in der nächsten Kurseinheit bei der Betrachtung zyklischer Codes relevant werden.

Um die Übersichtlichkeit zu gewähren, werden im Kurs einige Variablen weitgehend einheitlich verwendet. Diese sind:

Variable	Bedeutung
n	Anzahl der Informationssymbole (Rang der Generatormatrix G)
k	Anzahl der Prüfsymbole (Rang der Prüfmatrix)
r	Anzahl der Symbole im Codealphabet
$q = r^n$	Anzahl der Codewörter (Anzahl der Nachrichten)
$m = n + k$	Blocklänge.

Die Kommunikationsstrecke, wie sie hier behandelt wird, hat nunmehr folgende Gestalt:



7.1 Fehlererkennung und Fehlerkorrektur

Bei der Kanalcodierung werden wir unsere Betrachtungen auf Blockcodes, also auf Codes mit Codewörtern gleicher Länge, beschränken. Dies liegt einerseits daran, dass Blockcodes technisch gut handhabbar sind und sich in vielen Anwendungen durchgesetzt haben, zum anderen aber auch daran, dass diese Einschränkung nicht gravierend ist. Wir werden im Abschnitt 7.5 sehen, dass stets Blockcodes existieren, die eine Informationsübertragungsrate ermöglichen, die beliebig nahe bei der Kanalkapazität liegt (also in diesem Sinne optimal ist) und es dabei gestattet, die Fehlerwahrscheinlichkeit unter einer gewünschten Schranke zu halten. Allerdings kann dabei die Blocklänge ungünstig lang ausfallen. Wir wollen zunächst an einigen Beispielen einfache Möglichkeiten für die Fehlererkennung und die Fehlerkorrektur, die sich durch geschicktes Hinzufügen von Redundanz ergeben, kennenlernen.

Wir betrachten eine aus k Symbolen bestehende Nachricht, die über einen gedächtnislosen Kanal mit der (Symbol-) Fehlerwahrscheinlichkeit p übertragen wird. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Symbol richtig übertragen wird, ist $(1 - p)$, dass die ganze Nachricht richtig übertragen wird, $(1 - p)^k$, dass sie fehlerhaft ist also $1 - (1 - p)^k$. Will man nun die Wahrscheinlichkeit, dass die Nachricht verfälscht wird, herunterdrücken, so wiederholt man sie einmal und vergleicht die empfangenen Nachrichten (Abb. 7.1-1 a). Sind die empfangenen Nachrichten identisch, so nimmt man an, dass die Übertragung fehlerfrei war. Sind die Nachrichten verschieden, so verwirft man sie und veranlasst eine **direkte Wiederholung** (negative Quittierung) oder eine **indirekte Wiederholung** (fehlende Quittierung). Alle Fehler bis auf identische Fehler in beiden Nachrichten werden bei diesem Verfahren entdeckt. Technisch günstig ist eine symbolweise Wiederholung und Vergleich der Nachricht, so dass im Fehlerfall unmittelbar eine Wiederholung veranlasst werden kann (Abb. 7.1-1 b).

Wiederholung zur Herabsetzung der Fehlerwahrscheinlichkeit

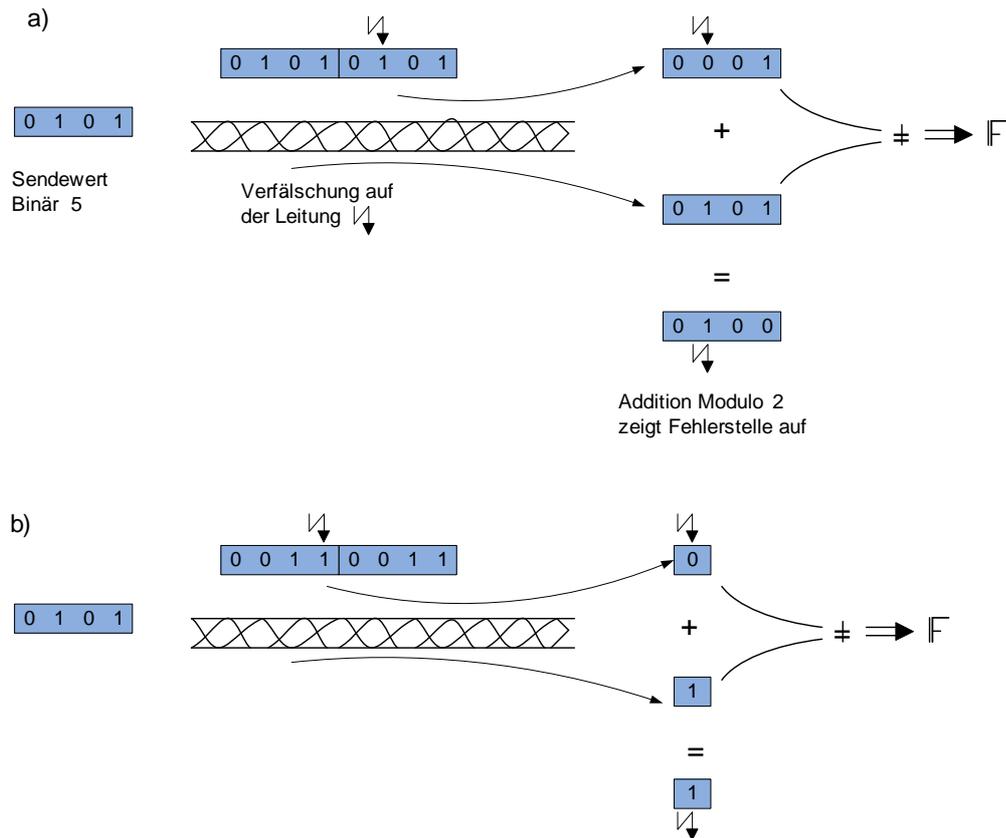


Abb. 7.1-1: Senden mit einmaliger Wiederholung
 a. Wortweise Übertragung
 b. Symbolweise Übertragung.

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Nachrichten in j bestimmten Stellen (d. h. j bestimmten Symbolen) verfälscht werden, ist $p^{2j}(1-p)^{2(k-j)}$, dass sie in j beliebigen, jedoch identischen Stellen verfälscht werden gleich

$$\binom{k}{j} p^{2j}(1-p)^{2(k-j)}. \quad 7.1-1$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass unentdeckte Fehler auftreten, ist somit

$$\sum_{j=1}^k \binom{k}{j} p^{2j}(1-p)^{2(k-j)}. \quad 7.1-2$$

Im Allgemeinen ist p klein, $(1-p)$ also nahe bei 1, so dass nur die ersten Werte zur Summe wesentlich beitragen. Der Preis, den man für die Erniedrigung der Wahrscheinlichkeit für unbemerkte Fehler bezahlt, besteht aus:

- Verdoppelung der Nachrichtenlänge (und damit verbundenem längerem Verzug)
- schlechter Kanalausnutzung (d. h. niedrigere Informationsrate) und
- technischem Aufwand (für den Vergleich der Nachrichten und die Anforderung zur Wiederholung).

Eine dreifache Wiederholung ermöglicht es, die Fehlerwahrscheinlichkeit unbemerkter Fehler noch weiter herunterzudrücken. Die Entscheidungsregel lautet nun:

Sind mindestens zwei der drei Nachrichten identisch, so werden diese als richtig bewertet, sonst verworfen. Im zweiten Fall wird eine Wiederholung veranlasst.

Beispiel 7.1-1:

Wir betrachten die Übertragung einer Nachricht mit 10 Symbolen über einen gedächtnislosen Kanal mit der Fehlerwahrscheinlichkeit $p = 10^{-3}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Nachricht mit $k = 10$ Symbolen unverfälscht ankommt, ist gleich $p^0(1-p)^k \approx 1 - kp = 1 - 10 \cdot 10^{-3} = 0,99$. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie falsch ankommt, ist also 10^{-2} .

Überträgt man nun mit einer Wiederholung, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Nachrichten unverfälscht ankommen, geringer, nämlich $p^0(1-p)^{2k} \approx 1 - 2kp = 1 - 20 \cdot 10^{-3} = 0,98$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein unentdeckter Fehler vorliegt, ist

$$\sum_{j=1}^k \binom{k}{j} p^{2j} (1-p)^{2(k-j)}.$$

Mit $p = 10^{-3}$ und $k = 10$ erhalten wir im einzelnen:

$$\begin{aligned} j & \binom{k}{j} p^{2j} (1-p)^{2(k-j)} \\ 1 & \approx 9,82 \cdot 10^{-6} \\ 2 & \approx 4,43 \cdot 10^{-11} \\ 3 & \approx 1,18 \cdot 10^{-16} \\ 4 & \approx 2,07 \cdot 10^{-22} \\ 5 & \approx 2,49 \cdot 10^{-28} \\ 6 & \approx 2,08 \cdot 10^{-34} \\ 7 & \approx 1,19 \cdot 10^{-40} \\ 8 & \approx 4,48 \cdot 10^{-47} \\ 9 & \approx 9,98 \cdot 10^{-54} \\ 10 & \approx 1,00 \cdot 10^{-60} \end{aligned}$$

und somit

$$\sum \approx 9,82 \cdot 10^{-6}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass unbemerkte Fehler vorliegen, konnte also um mehrere Zehnerpotenzen erniedrigt werden.

Das bei der Datenübertragung am häufigsten angewandte Verfahren ist die **Paritätsprüfung**. Zu einer vorgegebenen Anzahl von binären Codezeichen (z. B. einem Wort) wird ein Binärzeichen hinzugefügt, um ein Codewort mit gerader oder ungerader Parität (Quersumme Modulo 2) zu ergeben. Treten nun eine ungerade Anzahl

von Verfälschungen im Codewort auf, so wird die Parität verletzt und der Fehler erkannt (Abb. 7.1-2).

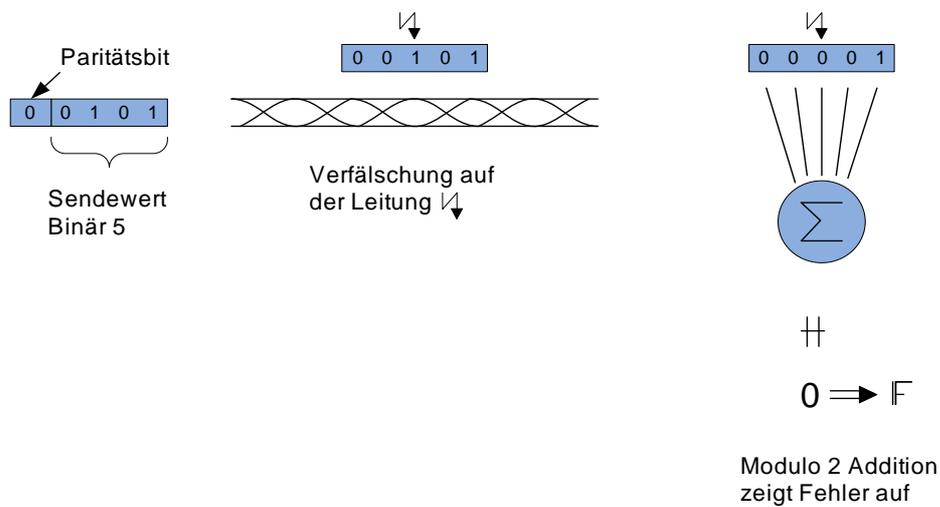


Abb. 7.1-2: Senden mit gerader Parität

Beispiel 7.1-2:

Der folgende 2-aus-5 Code (siehe auch Beispiel 6.1-1)

1 \rightarrow 11000	6 \rightarrow 00110
2 \rightarrow 10100	7 \rightarrow 10001
3 \rightarrow 01100	8 \rightarrow 01001
4 \rightarrow 10010	9 \rightarrow 00101
5 \rightarrow 01010	10 \rightarrow 00011

hat eine gerade Parität, denn jedes Codewort hat genau zwei Einsen. Tritt ein einfacher Fehler auf, z. B. an der zweiten Stelle der codierten Ziffer 5, so wird aus $5 \hat{=} 01010$ ein unzulässiges Codewort 00010 mit ungerader Parität. Tritt jedoch ein weiterer Fehler z. B. an der dritten Stelle auf, so wird nun hieraus $00110 \hat{=} 3$. Der Fehler ist nun nicht mehr erkennbar, denn es entsteht wieder ein zulässiges Codewort.

Das Paritätsprüfungsverfahren unterteilt alle möglichen Symbolkombinationen auf einfache Weise in zwei Klassen: unzulässige Symbolkombination mit ungerader Parität und (zulässige) Codewörter mit gerader Parität. Stets, wenn Fehler zu einer neuen Symbolfolge führen, die unzulässig ist, wird der Fehler erkannt. Führen sie zu einem (zulässigen) Codewort, ist eine Fehlererkennung nicht möglich.

Abstand zwischen zwei Codewörtern

Der **Abstand zwischen zwei Codewörtern** ist definiert als die Anzahl der Stellen, in denen sich die Codewörter unterscheiden. Wir betrachten nun einen Code mit nur zwei Codewörtern, die sich in a Stellen unterscheiden. Genau a Fehler an den entsprechenden Stellen führen das eine Codewort in das andere Codewort über. $(a - 1)$ Fehler können also stets erkannt werden, denn sie führen zu unzulässigen Kombinationen. Treten f Fehler auf, wobei

$$f \leq \frac{a - 1}{2}$$

ist, so ist es möglich, eindeutig auf das gesendete Wort zu schließen, denn der Abstand zwischen dem anderen Codewort und der entstandenen Symbolkombination muss (wegen $2f \leq a - 1$) größer als f sein (Abb. 7.1-3).

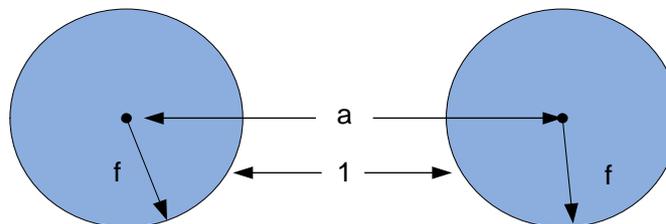


Abb. 7.1-3: Sphären mit Radius f um Codewörter A und B im Abstand $a = 2f + 1$. f Fehler sind noch korrigierbar.

Die Überlegungen sind auf mehrere Codewörter übertragbar, wobei an Stelle des Abstandes a nunmehr der Abstand $d = \min a$ über alle Paare von Codewörtern gebildet wird.

Hamming-Distanz

Die **Hamming-Distanz** eines Codes ist definiert als der Mindestabstand zwischen zwei Codewörtern - sie ist gleich der Mindestanzahl der unterschiedlichen Symbole zweier Codewörter eines Codes. Bei einem Code mit der Hamming-Distanz d können $d - 1$ Fehler erkannt oder

$$t \leq \frac{d - 1}{2}$$

Fehler korrigiert werden.

Beispiel 7.1-3:

Wir betrachten den folgenden 4-aus-7 Code, mit 8 Codewörtern und der Blocklänge 7.

$$\begin{array}{ll} A \rightarrow 0000000 & E \rightarrow 1001110 \\ B \rightarrow 1110100 & F \rightarrow 0100111 \\ C \rightarrow 0111010 & G \rightarrow 1010011 \\ D \rightarrow 0011101 & H \rightarrow 1101001 \end{array}$$

Die Hamming-Distanz ist gleich 4. Es können 3 Fehler stets erkannt oder 1 Fehler stets korrigiert werden. Dies schließt nicht aus, dass im Einzelfall auch mehr Fehler erkannt bzw. korrigiert werden können. Tritt z. B. bei jedem Symbol des Codewortes D ein Fehler auf, so resultiert das Komplementärwort $\bar{D} \equiv 1100010$, also eine unzulässige Kombination - obwohl 7 Verfälschungen vorlagen, wird der Fehler erkannt. Werden lediglich das erste, dritte, sechste und siebte Symbol verfälscht, so erhalten wir statt D das (zulässige) Codewort $E \equiv 1001110$, vier Fehler werden also nicht erkannt. Tritt ein Fehler z. B. an der zweiten Stelle auf, so erhält man die unzulässige Kombination 0111101 . Diese hat den Abstand ≥ 3 von jedem Codewort $\neq D$ und den Abstand 1 von D , so dass bei maximal einem Fehler sicher auf D zurückgeschlossen werden kann. Das Maximum-Likelihood-Verfahren verwendet das Kriterium "geringste Fehlerwahrscheinlichkeit bei gleichverteilten Symbolen"; dies liefert dieselben Ergebnisse wie das Kriterium "minimaler Abstand", denn beide sind einander proportional - je größer der Abstand, den ein unzulässiges Wort von einem Codewort hat, desto geringer die Wahrscheinlichkeit, dass das unzulässige Wort aus dem Codewort hervorging.

Die bisherigen Überlegungen zeigen: je weiter Codewörter auseinanderliegen, bzw. je mehr unzulässige Kombinationen zwischen zwei Codewörtern liegen, desto besser kann die Redundanz für die Fehlererkennung bzw. -korrektur ausgenutzt werden. Bei einem Blockcode der Länge m hat man insgesamt r^m Symbolkombinationen. Hat man q Codewörter, so sind $(r^m - q)$ redundante Kombinationen vorhanden. Es gilt, die q Codewörter so zu wählen, dass der Abstand zwischen zwei beliebigen Codewörtern möglichst groß wird. Eine triviale Folgerung dieser Aussage für die Benennung von Dateien oder Variablen bei der Programmierung ist z. B., dass die Bezeichnungen so gewählt werden, dass sie sich in möglichst vielen Stellen unterscheiden.

Eine weitere Folgerung für die Codierung von Daten ist z. B., dass sie nicht geordnet, sondern besser zufällig codiert werden. Hat man z. B. 100 gleichwahrscheinliche Nachrichten und 8 binäre Symbole (d. h. 256 Wörter insgesamt) für ihre Codierung, so sollten sie nicht von binär 1 (00000001) bis binär 100 (01100100) durchcodiert, sondern möglichst gleich verteilt werden. Eine Zufallscodierung gewährleistet dies annähernd.

Beispiel 7.1-4:

Es werden 4096 gleichwahrscheinliche Nachrichten in Codewörter der Länge 16 binär codiert. Die geordnete Codierung liefert Codewörter von binär 0 bis binär 0000111111111111. Tritt nun ein Fehler auf, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass dies unerkannt bleibt, gleich

$$\frac{12}{16} = 0,75.$$

Tritt bei der zufälligen Codierung ein Fehler auf, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kombination ein Codewort ist und damit als unerkannter Fehler bleibt, ungefähr gleich $2^{12}/2^{16} = 0,0625$.

Fordern wir bei einem Blockcode der Länge m mit r -närem Alphabet und r^n vielen Codewörtern, dass t Fehler pro Wort korrigiert werden können, so können wir die erforderliche Redundanz leicht abschätzen. Im Abstand i von einem r -närem Wort der Länge m liegen

$$\binom{m}{i} (r-1)^i$$

Wörter. In der Kugel (vom Abstand t) liegen also

$$\sum_{i=0}^t \binom{m}{i} (r-1)^i$$

Wörter. Für die Korrekturfähigkeit müssen alle Kugeln um die Codewörter disjunkt sein, m also so groß gewählt werden, dass mindestens die Anzahl aller Kombinationen größer oder gleich ist als die Anzahl aller Wörter in den disjunkten Kugeln, d. h.

$$r^m \geq \sum_{i=0}^t \binom{m}{i} (r-1)^i \cdot r^n,$$

oder

$$r^{m-n} \geq \sum_{i=0}^t \binom{m}{i} (r-1)^i. \quad 7.1-3$$

Bedingung für die Korrekturfähigkeit von t Fehlern

Gl. 7.1-3 stellt eine notwendige **Bedingung** dar um die **Korrekturfähigkeit von t Fehlern** zu gewährleisten.

Beispiel 7.1-5:

Ein Quellenalphabet mit 2^3 Symbolen wird binär codiert. Es wird die Korrekturfähigkeit von $t = 3$ Fehlern pro Wort gefordert. Mit einem binären Blockcode mit $m = 10$ Symbolen pro Codewort ist wegen

$$2^7 = 128 \not\geq \sum_{i=0}^3 \binom{10}{i} = 1 + 10 + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 176$$

diese Forderung nicht erfüllbar. Mit $m = 11$ Symbolen ist sie wegen

$$2^8 = 256 \geq \sum_{i=0}^3 \binom{11}{i} = 1 + 11 + \frac{11 \cdot 10}{1 \cdot 2} + \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 232$$

möglicherweise erfüllbar.

Bisher haben wir unsere Betrachtungen oft unter die Prämisse geringer Fehlerwahrscheinlichkeit bzw. von Einfach- oder wenigen Fehlern pro Codewort gestellt. In der Praxis ist es oft so, dass im Allgemeinen die Fehlerwahrscheinlichkeit zwar gering ist, Fehler jedoch meist in Form von Bündelfehlern ("*Bursts*") auftreten. Pro Codewort treten dann Mehrfachfehler auf, und die einfache, wortweise Paritätsprüfung versagt. Eine einfache Abhilfe besteht darin, mehrere Wörter durch Untereinanderschreiben zu einem Block zusammenzufassen und diesen statt zeilenweise (bzw. wortweise) spaltenweise zu sichern, um damit eine Verteilung der Fehler auf die Paritätsbits zu erreichen. Verwendet man sowohl zeilen- als auch spaltenweise Paritätssicherung, so wird es möglich, bei Einfachfehlern (d. h. ein Fehler pro Zeile bzw. Spalte) die genaue Fehlerstelle anzugeben und damit zu korrigieren.

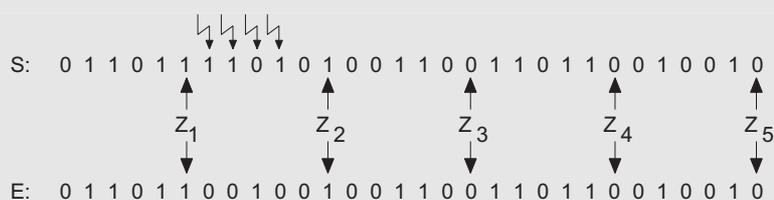
Beispiel 7.1-6:

Eine Nachricht besteht aus folgenden fünf Sendewörtern, SW1 bis SW5, wobei die Zeilen- und Spaltenparitätsbits eingetragen sind:

Sendewort		Zeilenparität
SW1	01101	1
SW2	11010	1
SW3	00110	0
SW4	11011	0
SW5	01001	0
Spaltenparität	00011	

Bei der Übertragung tritt ein Bündelfehler der Länge 4 Bit ab dem 7. Symbol auf.

Wird eine wortweise (Zeilen-) Parität verwendet, so lautet die Sendefolge (S) und die empfangene Folge (E):



Der Fehler wird nicht erkannt, da die Paritäten alle stimmen, im Sendewort SW2 liegt jedoch eine vierfache Verfälschung vor!

Wird eine spaltenweise Parität verwendet, so lautet die Sendefolge (S) und die empfangene Folge(E):



Der Fehler wird nun erkannt, die Parität wird 4mal, nämlich bei $S_2S_3S_4S_5$ verletzt, so dass erkannt wird, dass vier Fehler vorliegen.

Hätte anstatt eines Bündelfehlers lediglich ein Einfachfehler am 7. Symbol vorgelegen, und wären sowohl Zeilen- als auch Spaltenparität geprüft worden, so wäre die Parität in der 2. Zeile und 2. Spalte verletzt, der Fehler hierdurch lokalisierbar und somit korrigierbar gewesen.

Anstatt nun die Parität über alle Symbole eines Wortes zu bilden, können wir auch differenzierter vorgehen und über ausgewählte Symbole die Parität bilden. Als Hilfsmittel zur Kennzeichnung der Stellen, die in der Paritätsprüfung einbezogen werden, verwenden wir ein Prüfwort, das aus 0 und 1 besteht: durch 1 an einer Stelle wird angegeben, dass diese Stelle in die Prüfung einbezogen wird, durch 0, dass sie in die Prüfung nicht einbezogen wird. Liegt ein Wort vor, so bildet man die Parität über die Symbole, an deren Stelle im Prüfwort eine Eins steht - ist die Parität erfüllt, handelt es sich möglicherweise um ein Codewort, sonst sicher um eine unzulässige Kombination.

Beispiel 7.1-7:

Wir möchten die Paritätsprüfung über jeweils gerade und ungerade Symbole eines Wortes mit 8 Symbolen bilden. Die beiden Prüfwörter lauten:

$$10101010 = P_1 \quad \text{für die geraden und}$$

$$01010101 = P_2 \quad \text{für die ungeraden Symbole.}$$

Das empfangene Wort $w = 00101011$ bildet mit P_1 multipliziert die (Modulo 2) Quersumme

$$0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 1,$$

verletzt also die Parität. Mit P_2 bildet es die Summe

$$0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 = 1,$$

verletzt wiederum die Parität.

Wir schließen daraus, dass sowohl in den geraden Stellen als auch in den ungeraden Stellen Fehler vorliegen.

Wir haben für die Quersummenbildung die Modulo 2 Addition, bei der differenzierten Auswahl der Stellen, die in eine Prüfung einbezogen werden, die Modulo 2 Multiplikation mit anschließender Modulo 2 Addition für Paritätsbildung verwendet. Es wird hier ersichtlich, dass einige Codes auf algebraischen Strukturen basieren - diese werden algebraische Codes genannt. Wir werden Codes, die auf linearen Räumen basieren, im nächsten Abschnitt behandeln - sie werden lineare Codes genannt. Hierzu werden wir einige mathematische Begriffe der linearen Algebra heranziehen. Diese sind im Anhang C.1 und Anhang C.2 zusammengestellt.

Selbsttestaufgabe 7.1-1:

- a. Was versteht man unter dem "Abstand zwischen zwei Codewörtern", und welcher Zusammenhang ergibt sich mit dem Begriff "Hamming-Distanz" eines Codes?
- b. Bestimmen Sie für die nachfolgend aufgeführten Codewörter die Hamming-Distanz und machen Sie eine Aussage, wie viele Fehler stets erkannt werden können.

A	00000
B	11010
C	01101
D	10110

7.2 Lineare Codes

Wir nehmen an, dass dem zu betrachtenden Code gewisse algebraische Strukturen zugrunde liegen. Wir gehen von der Definition eines Codes im Abschnitt 6.1 aus. Da wir Blockcodes betrachten, sind die Wörter w nun Elemente aus B^m . Wir setzen zusätzlich voraus, dass die Menge $B = \{x_1, \dots, x_r\}$, die wir als Alphabet des Codes bezeichnet haben, einen endlichen Körper bildet. Dies bedeutet, dass für die Elemente der Menge eine Addition (+) und eine Multiplikation (\cdot) so definiert sind, dass die Axiome der Addition $A1 - A3$, der Multiplikation $M1 - M3$ und die Distributivgesetze D (siehe Anhang C 1.1) gelten. Wir fassen ferner B^m (die Menge aller m -Tupel über B) als einen Vektorraum über dem Körper $(B, +, \cdot)$ auf; dies setzt voraus, dass die Addition von Vektoren und deren Multiplikation mit Elementen des Körpers so definiert sind, dass die Axiome $V1 - V4$ (siehe Anhang C 2.1) gelten.

linearer Code Ein **linearer Code** C (genauer die Codewörter des Codes C) wird nun als Untervektorraum der Dimension n des Vektorraumes B^m definiert. Da wir ein Alphabet mit r Elementen für die Codierung angenommen haben, hat der Code $q = r^n$ Codewörter. Man spricht auch von einem (m, n) -Code, wobei m die Blocklänge und n die Ordnung des Untervektorraumes ist, die später als die Anzahl der (r -nären) Informationssymbole interpretiert wird.

Eine Basis des Untervektorraumes der Dimension n hat n Elemente, und wir können alle Codewörter aus Linearkombinationen der Basisvektoren erzeugen (Anhang C 2.7). Hierin liegt ein erheblicher Vorteil von linearen Codes: bei der Überprüfung, ob eine beliebige Kombination der Symbole ein zulässiges Codewort ist, braucht man nicht alle Codewörter gespeichert vorliegen zu haben, um einen Vergleich durchführen zu können; eine Überprüfung, ob sie als Linearkombination der Basisvektoren zusammengestellt werden kann, genügt. Wir wollen dies weiter formalisieren und führen eine Matrizen-Darstellung von Codes ein.

C sei ein (m, n) -Code, $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ eine Basis von C . Dann heißt

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \quad 7.2-1$$

Basismatrix eine **Basismatrix** oder eine **Generatormatrix** des linearen Codes C . G ist eine **Generatormatrix** (n, m) -Matrix vom Rang n . Jedes Codewort (Vektor aus C) ist eindeutig darstellbar als Linearkombination aus den Basisvektoren g_1, \dots, g_n :

$$w = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i, \quad \alpha_i \in B. \quad 7.2-2$$

Die Vektoren g_i werden wir auch in der Schreibweise

$$g_i = (g_{i1}g_{i2} \dots g_{im})$$

darstellen, so dass G als Matrix geschrieben wird:

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & \dots & g_{1m} \\ g_{21} & & \vdots \\ \vdots & & \\ g_{n1} & \dots & g_{nm} \end{bmatrix}.$$

Beispiel 7.2-1:

Das binäre Alphabet $B = \{0, 1\}$ mit der Addition (+) und der Multiplikation (\cdot) entsprechend den Tabellen

+	0	1	·	0	1
0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1

bildet den Körper $F_2 = (B, +, \cdot)$.

Die 2^m m -Tupel $v_i = (a_{i1}a_{i2} \dots a_{im})$ ($a_{ij} \in B$) bilden den Vektorraum B^m . Für $m = 7$ bildet die Basis

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

einen Untervektorraum der Dimension 3. Er besteht aus den $2^3 = 8$ Codewörtern des Beispiel 7.1-3. Die Basis besteht aus den Codewörtern B , C und D . Jedes der anderen Codewörter kann als eine Linearkombination der Basis dargestellt werden. So ist z. B. $H = 1 \cdot B + 0 \cdot C + 1 \cdot D = B + D$. Die Koeffizienten der Basisvektoren (101) legen H eindeutig fest. Die Codewörter B, C, H bilden auch eine Basis G' von C :

$$G' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Koeffizienten (001) der Basis G' legen nun H eindeutig fest.

Da jedes Codewort eine Nachricht darstellt, können wir mit dem Code genau r^n Nachrichten übertragen. Wir können dabei die Nachrichten jeweils durch ein n -Tupel $a = (a_1 a_2 \dots a_n)$ mit $a_i \in B$ festlegen. Wir gehen stets davon aus, dass die **Zuordnung von Codewörtern zu den Informations- n -Tupeln** (d. h. Nachrichten) durch eine lineare Abbildung $\varphi : B^n \rightarrow B^m$ mit

$$\varphi(a) = a \cdot G = \sum_{i=1}^n a_i g_i \tag{7.2-3}$$

beschrieben wird.

**Zuordnung von
Nachrichten zu
Codewörtern**

Beispiel 7.2-2:

Der lineare Code mit der Generatormatrix G' aus Beispiel 7.2-1 ermöglicht $2^3 = 8$ Nachrichten zu codieren bzw. zu übertragen. Seien diese Nachrichten binär durchnummeriert:

$$\begin{aligned} N_1 & 0 0 0 \\ N_2 & 0 0 1 \\ N_3 & 0 1 0 \\ N_4 & 0 1 1 \\ N_5 & 1 0 0 \\ N_6 & 1 0 1 \\ N_7 & 1 1 0 \\ N_8 & 1 1 1. \end{aligned}$$

Legt man die Abbildung $\varphi(a) = a \cdot G'$ für die Zuordnung der Nachrichten zu den Codewörtern fest, so erhält man für die Nachricht N_4 das Codewort

$$\varphi = [011] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1010011]$$

Definieren wir das Skalarprodukt von Vektoren in der üblichen Weise, so können wir den zu C orthogonalen Vektorraum C^d definieren:

$$C^d = \{v \in B^m \mid v \cdot w = 0 \text{ für alle } w \in C\}. \quad 7.2-4$$

dualer Code C^d ist wieder Untervektorraum von B^m und wird deshalb der zu C **duale Code** genannt. Für die Dimension von C^d gilt (Anhang C 2.12)

$$\dim C + \dim C^d = m. \quad 7.2-5$$

Es kann gezeigt werden, dass $(C^d)^d = C$ ist, und somit ist C auch der duale Code von C^d .

Sei H eine Basismatrix von C^d :

$$H = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{m-n} \end{bmatrix} \quad 7.2-6$$

Kontrollmatrix H wird eine **Kontrollmatrix** (oder Paritätsmatrix) von C genannt. Wegen Gleichung Gl. 7.2-5 hat sie den Rang $(m - n)$.

Da durch die Basismatrix ein Vektorraum eindeutig bestimmt ist, ist durch die Generatormatrix der Code C , durch die Kontrollmatrix der Code C^d eindeutig bestimmt. Umgekehrt ist durch den Coderaum die Generator- oder Kontrollmatrix nicht eindeutig bestimmt.

Wegen Gl. 7.2-4 gilt die Beziehung

$$GH^T = 0 \quad \text{bzw.} \quad HG^T = 0. \quad 7.2-7$$

Ist $v \in B^m$ und H eine Kontrollmatrix des linearen Codes C , so gilt die folgende, für die Paritätsprüfung wichtige Äquivalenz:

$$(v \in C) \Leftrightarrow (vH^T = 0) \Leftrightarrow (Hv^T = 0). \quad 7.2-8$$

Wir wollen diese beweisen.

Beweis: Es sei $v \in C$. Da C^d orthogonal zu C ist, gilt $v \cdot v' = 0$ für jeden Basisvektor v' jeder Basis von C^d . Es ist deshalb $vH^T = 0$. Umgekehrt sei $vH^T = 0$, dann gilt $vv' = 0$ für jeden Vektor v' einer Basis von C^d . v ist also orthogonal zu jedem Vektor aus C^d , v gehört zum Dualcode von C^d , also $v \in C$. Somit haben wir die erste Äquivalenz. Die zweite Äquivalenz gilt wegen $vH^T = 0 \Leftrightarrow (vH^T)^T = 0 \Leftrightarrow Hv^T = 0$.

Gl. 7.2-8 liefert uns nun die Möglichkeit zu überprüfen, ob eine Kombination aus B^m ein Codewort ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn das Produkt mit einer Kontrollmatrix $Hv^T = 0$ liefert. Hierin ist auch der Name Kontrollmatrix begründet.

Tritt bei der Übertragung eines Codewortes $v \in C$ ein Fehler auf, so erhält man beim Empfang eine Kombination $k \in B^m$. Der Fehler kann als Vektor $e = (k-v) \in B^m$ dargestellt werden. Ist $e \notin C$, so kann der Fehler erkannt werden, denn es ist

$$s = kH^T = (v + e)H^T = vH^T + eH^T \neq 0. \quad 7.2-9$$

s nennt man das **Syndrom** des Vektors k bzw. e bezüglich der Kontrollmatrix H . Wir werden sehen, dass bei einer geschickten Wahl der Kontrollmatrix oft aus dem Syndrom noch weitere Hinweise abgeleitet werden können, z. B. über die Stelle, wo der Fehler im Codewort aufgetreten ist; somit erhält man die Möglichkeit, den Fehler zu korrigieren.

Beispiel 7.2-3:

Die Kontrollmatrix

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix}$$

hat die Dimension 4 und bildet eine Basis des zu C von Beispiel 7.2-1 dualen Codes C^d . C^d hat $2^4 = 16$ Codewörter. Wie man sieht, können Basisvektoren der Kontrollmatrix Codewörter von C sein (wie $h_2 = F$) oder auch nicht (wie h_1). Um zu entscheiden, ob ein m -Tupel $v = (0010110) \in B^7$ ein Codewort von C bildet, braucht man es nicht mit allen 8 Codewörtern von C zu vergleichen. Es genügt die Probe, ob $H \cdot v^T = 0$ ist. Da bereits $h_1v \neq 0$ ist, ist v kein Codewort von C .

Hamming-Gewicht Das **Hamming-Gewicht** eines Vektors $v = (v_1 \dots v_m)$ aus B^m ist definiert als

$$W(v) = \sum_{i=1}^m \rho(v_i), \quad 7.2-10$$

wobei

$$\rho(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{falls } v_i \text{ das Nullelement von } B \text{ ist} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$W(v)$ ist damit genau die Anzahl der von Null verschiedenen Komponenten von v .

Abstand zwischen zwei Vektoren Mit Hilfe von W können wir den **Abstand zwischen zwei Vektoren** $v, w \in B^m$ als

$$d(v, w) = W(v - w) \quad 7.2-11$$

definieren. Der Abstand $d(v, w)$ ist damit genau die Anzahl der Komponenten, in denen sich v und w unterscheiden, wie wir es in Abschnitt 7.1 bereits definierten. Der Abstand $d()$ ist eine Metrik auf dem Vektorraum, denn es gilt

$$\begin{aligned} d(w, w) &= 0 \quad \text{für alle } w \in B^m \\ d(w, v) &= d(v, w) \quad \text{für alle } w, v \in B^m \text{ und} \\ d(v, w) &> 0 \quad \text{für } v \neq w. \end{aligned}$$

Wegen $W(x) + W(y) \geq W(x + y)$ gilt

$$d(u, v) + d(v, w) = W(u - v) + W(v - w) \geq W(u - w) = d(u, w). \quad 7.2-12$$

Hamming-Distanz Wir können nun die **Hamming-Distanz**, die wir als den Mindestabstand zwischen zwei Codewörtern eines Codes definierten, für einen linearen Code einfacher angeben. Sie ist genau gleich dem minimalen Hamming-Gewicht, d. h.

$$\min_{\substack{v, w \in C \\ v \neq w}} \{d(v, w)\} = \min_{\substack{u \in C \\ u \neq 0}} \{W(u)\}. \quad 7.2-13$$

Denn ist für ein Paar v, w $d(v, w) = \text{Min}$, so existiert ein Codewort $u = (v - w) \in C$ mit $W(u) = W_{\min}$. Umgekehrt: ist für ein Codewort u $W(u) = W_{\min}$, so ergibt sich mit dem Nullwort das Paar mit $d(u, 0) = \text{Min}$.

Beispiel 7.2-4:

Wir betrachten den $(6, 4)$ Code, der durch die Generatormatrix

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix}$$

erzeugt wird. Er hat $2^4 = 16$ Codewörter, die man durch Linearkombinationen von g_1, \dots, g_4 erhält.

$$C = \begin{bmatrix} \{0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & g_1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & g_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & g_1 + g_2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & g_3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & g_3 + g_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & g_3 + g_2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & g_3 + g_2 + g_1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & g_4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & g_4 + g_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & g_4 + g_2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & g_4 + g_2 + g_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & g_4 + g_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & g_4 + g_3 + g_1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & g_4 + g_3 + g_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \} & g_4 + g_3 + g_2 + g_1 \end{bmatrix}$$

Die Hamming-Distanz ist gleich $d = 2$.

Da für

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gilt

$$GH^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und $\text{Rang } H = 2$, ist H eine Prüfmatrix.

H hat den Rang 2, der duale Code C^d hat somit 4 Codewörter:

$$C^d = \left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\}$$

C^d hat die Hamming-Distanz $d^d = 3$.

Spalten einer Kontrollmatrix

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen dem Hamming-Gewicht und den **Spalten einer Kontrollmatrix** näher untersuchen.

Hat ein Codewort eines linearen Codes das Hamming-Gewicht W , so gibt es ein Codewort v mit W Elementen $\neq 0$. Wir können symbolisch das Codewort wie folgt schreiben

$$c = (00C_10 \dots 0C_200 \dots C_w0),$$

wobei wir die (beliebig verteilten) W Symbole $\neq 0$ durch C_1, C_2, \dots, C_w gekennzeichnet haben. Wegen $Hv^T = 0$, ausführlich

$$\begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{m-n,1} & \dots & h_{m-n,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_1 \\ 0 \\ \vdots \\ C_2 \\ \vdots \\ C_w \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

bedeutet dies, dass W Spalten (nämlich die zu den Koeffizienten C_i gehörenden Spalten) linear abhängig sind. Umgekehrt: ergibt die Summe von k Spalten mit den Koeffizienten $C_i \neq 0$ Null, so kann man ein Codewort mit dem Hamming-Gewicht k angeben. Wir stellen somit fest, dass ein linearer Code nur dann die Hamming-Distanz W bzw. das Minimal-Gewicht W haben kann, wenn jede Kombination von $W - 1$ oder weniger Spalten von H linear unabhängig ist. Dies eröffnet uns eine Möglichkeit, Codes mit einer gewünschten Hamming-Distanz zu konstruieren.

Beispiel 7.2-5:

Wir betrachten den Code des Beispiel 7.2-4. Das Codewort $g_3 + g_2 = (001010)$ hat das Hamming-Gewicht 2. Die Spalten 3 und 5 von H sind linear abhängig, denn es gilt

$$1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Umgekehrt sind die Spalten 2 und 4 abhängig. Deswegen können wir ein Codewort $C = (010100)$ mit dem Gewicht 2 angeben.

Wir wollen uns nun linearen Codes widmen, die eine Generatormatrix mit einer sehr einfachen Form haben:

$$G = [E_n \dot{ : } P]. \quad 7.2-14$$

E_n ist dabei eine $(n \times n)$ Einheitsmatrix (d. h. Diagonalmatrix mit Eins aus dem Körper B als Diagonalelemente) und P eine beliebige $n \times (m - n)$ Matrix ohne Nullspalte. Man nennt einen Code mit einer solchen kanonischen Generatormatrix einen **systematischen Code**.

systematischer Code

Ist eine Basis eines Vektorraumes gegeben, so erhält man durch Elementaroperationen (Anhang C 2.11) an den Basisvektoren wieder eine neue Basis desselben Raumes. Für die Generatormatrix bedeutet dies, dass Elementaroperationen an den Zeilen der Generatormatrix wieder eine Generatormatrix desselben Codes liefern. Eine Vertauschung der Spalten einer Generatormatrix entspricht der Vertauschung von Symbolen bei der Codierung der Nachrichten. Diese spielt bei der Fehlererkennung bzw. Fehlerkorrektur und der Nachrichtenübermittlung oder -speicherung keine Rolle, wenn Symbolstörungen voneinander unabhängig sind. Codes, die Generatormatrizen haben, die durch elementare Zeilenoperationen und Spaltenvertauschungen ineinander überführt werden können, nennt man (kombinatorisch) äquivalent. Es kann nun gezeigt werden, dass jeder lineare Code einen äquivalenten systematischen Code besitzt. In diesem Sinne ist die Betrachtung von systematischen Codes keine Einschränkung. Wir wollen den Beweis jedoch nicht weiter ausführen.

Es sei $G = [E_n \dot{ : } P]$ eine Generatormatrix eines systematischen Codes. Dann ist

$$H = [-P^T \dot{ : } E_{m-n}] \quad 7.2-15$$

eine Prüfmatrix¹⁰, denn es gilt

$$GH^T = [E_n \dot{ : } P] \begin{bmatrix} -P \\ \dots \\ E_{m-n} \end{bmatrix} = -E_n P + P E_{m-n} = 0.$$

Gl. 7.2-15 nennt man die **kanonische Form der Prüfmatrix**.

kanonische Form der Prüfmatrix

In der kanonischen Form der Matrizen nennt man die ersten n Stellen der Codewörter die Informationsstellen, die restlichen $(m - n)$ Stellen die Prüf- oder Kontrollstellen. Sind die Informationsstellen einer Nachricht vorgegeben, so können wegen der einfachen Form der Generatormatrix die Prüfstellen unmittelbar als Linearkombination der Zeilen von P (entsprechend Gleichung Gl. 7.2-3) angegeben werden.

10 – bedeutet hierbei die Bildung des Inversen bezüglich der Addition; T bezeichnet die transponierte Matrix (d. h. die Matrix, in der die Zeilen und Spalten vertauscht wurden).

Beispiel 7.2-6:

Wir greifen wieder das Beispiel 7.2-4 auf. Die Generatormatrix in der kanonischen Form lautet:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

somit ist

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}.$$

Da bei der Modulo 2 Addition $-1 = +1$, haben wir

$$H = \begin{bmatrix} -P^T; E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

und es gilt

$$\begin{aligned} GH^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dots & \dots \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sind die Informationsstellen einer Nachricht v vorgegeben, $v = (1001xy)$, so errechnen sich die Prüfbits zu

$$(xy) = (p_1) + (p_4) = (10) + (01) = (11).$$

Wir haben bereits gesehen, dass wir, um einen linearen Code mit der Hamming-Distanz W zu erhalten, lediglich dafür zu sorgen brauchen, dass die Kontrollmatrix H so gewählt wird, dass jede Kombination von $(W - 1)$ oder weniger Spalten von H linear unabhängig ist. Dies ist im Allgemeinen nicht einfach. Für einen linearen binären Code, dessen Kontrollmatrix k Zeilen haben soll, ist es jedoch besonders einfach, die Spalten von H so zu bestimmen, dass sie alle verschieden und somit paarweise unabhängig werden. Man braucht lediglich alle möglichen $2^k - 1$ von Null verschiedenen Kombinationen mit k Elementen aus $\{0, 1\}$ zu bilden und sie als Spalten zu nehmen. Durch eine geeignete Reihenfolge der Spalten kann man die Matrix in die kanonische Form bringen. Den so gewonnenen Code C_k nennt man den **binären Hamming-Code**. Er hat die Hamming-Distanz $d = 3$, denn 2 Spalten von H sind stets linear unabhängig, während es 3 Spalten gibt, die linear abhängig sind.

**binärer
Hamming-Code**

Beispiel 7.2-7:

Wir erhalten C_4 , den Hamming-Code mit 4 Kontrollzeilen, indem wir alle $2^4 - 1 = 15$ von Null verschiedenen Kombinationen mit 4 Elementen aus $\{0, 1\}$ bilden und die so gewonnenen Spalten in die kanonische Form bringen:

$$H_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Somit ist

$$G_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

und der Code hat 2^{11} Codewörter.

Es sei an dieser Stelle davor gewarnt, für ein r -näres Alphabet den **Hamming-Code** durch alle $r^k - 1$ Kombinationen der Elemente angeben zu wollen. Für jeden Spaltenvektor erhält man nämlich durch die Multiplikation mit den $(r - 1)$ von Null

**r-närer
Hamming-Code**

verschiedenen Elementen des Alphabetes ($r - 1$) verschiedene, jedoch abhängige Elemente, so dass insgesamt

$$\frac{r^k - 1}{r - 1}$$

linear unabhängige Spalten übrig bleiben. Der Hamming-Code hat dann die Länge

$$m = \frac{r^k - 1}{r - 1}. \quad 7.2-16$$

Beispiel 7.2-8:

Wir wollen eine Prüfmatrix des Hamming-Codes mit dem Alphabet aus 3 Elementen $\{0, 1, 2\}$, der Modulo 3 Addition und Multiplikation, und 3 Prüfstellen aufstellen. Wir bilden alle Kombinationen mit drei Elementen aus $\{0, 1, 2\}$ und streichen die von den vorhergehenden linear abhängigen Kombinationen und erhalten im Einzelnen:

000	100	200
001	101	201
002	102	202
010	110	210
011	111	211
012	112	212
020	120	220
021	121	221
022	122	222.

Der Code besteht somit aus Codewörtern der Länge

$$m = \frac{3^3 - 1}{3 - 1} = 13,$$

und die Prüfmatrix in der kanonischen Form lautet:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Der Hamming-Code hat die Hamming-Distanz $d = 3$, 3 Paritätsstellen und 10 Informationssymbole.

Effizienz der Kanalcodierung

Den Begriff der **Effizienz**, den wir für die Quellencodierung eingeführt haben (Gl. 6.1-2), können wir auch für die Kanalcodierung anwenden. Für die Effizienz des binären Hamming-Codes mit k Prüfstellen und der Blocklänge $m = 2^k - 1$ erhalten wir für eine Quelle mit 2^n gleichverteilten Nachrichten (Quelle mit maximaler Entropie $H(X) = H_{\max}(X) = n$)

$$E = \frac{H(X)}{l_m} \cdot \frac{1}{ld(r)} = \frac{n}{m} = \frac{m - k}{m} = 1 - \frac{k}{2^k - 1}. \quad 7.2-17$$

Die Effizienz steigt somit für große k auf 1.

Für den r -nären Hamming-Code mit k Prüfstellen und der Blocklänge m gilt entsprechend (siehe Gl. 7.2-16)

$$E = 1 - \frac{k(r-1)}{r^k - 1}. \quad 7.2-18$$

Wir hatten bereits in Abschnitt 7.1 gesehen, dass, um t Fehler pro Wort korrigieren zu können, die Ungleichung Gl. 7.1-3

$$r^{m-n} \geq \sum_{i=0}^t \binom{m}{i} (r-1)^i$$

gelten muss. Für Hamming-Codes gilt diese Ungleichung mit Gleichheitszeichen, denn für $t = 1$ erhalten wir daraus

$$r^{m-n} \geq 1 + m(r-1)$$

oder

$$r^k \geq 1 + m(r-1)$$

bzw.

$$\frac{r^k - 1}{r - 1} \geq m.$$

Wie wir gesehen haben, gilt Gl. 7.2-16

$$\frac{r^k - 1}{r - 1} = m.$$

Da wir einzelne Spalten der Kontrollmatrix weglassen können, ohne die Hamming-Distanz zu verringern, können wir bei der Suche nach einem Code mit $d \geq 3$ (bzw. $t \geq 1$) für die Codierung von n Informationssymbolen wie folgt verfahren:

Zunächst bestimmen wir $k = m - n$ bei vorgegebenem n , so dass die Ungleichung Gl. 7.1-3 mit $t = \frac{d-1}{2} = 1$ erfüllt wird. Dann bestimmen wir den Hamming-Code C_k . Anschließend streichen wir so viele Spalten der Kontrollmatrix H_k , bis n Informationssymbole verbleiben. Der so erhaltene Code wird als **verkürzter Hamming-Code** bezeichnet.

**verkürzter
Hamming-Code**

Beispiel 7.2-9:

Es ist eine binäre Codierung für 10-Informationbits (d. h. 2^{10} Nachrichten) mit der Hamming-Distanz $d \geq 3$ gesucht. Für verschiedene k und $m = k + n$ sowie $d = 3$ erhalten wir:

k	m	2^k	$m + 1$
1	11	2	12
2	12	4	13
3	13	8	14
4	14	16	15

Beispiel 7.2-10:

Wir konstruieren den Hamming-Code mit drei Kontrollstellen C_3 und ordnen die Spalten der Kontrollmatrix H_3 nach deren binärer Wertigkeit.

$$H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$w = (1011010)$ ist ein Codewort, denn es gilt

$$w \cdot H_3^T = (1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (0 \ 0 \ 0).$$

Liegt ein Fehler an der 4-ten Stelle vor, d. h. $e = (0001000)$, bzw. $v = w + e = (1010010)$, so erhalten wir

$$s = v \cdot H^T = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (1 \ 0 \ 0).$$

Es wird also die Fehlerstelle binär $100 \equiv 4$ angezeigt.

Lägen zwei Fehler z. B. in der 4. und 5. Stelle vor, so erhielte man als Syndrom (001) . Der Fehler würde also erkannt. Falls man nicht weiß, dass ein Doppelfehler vorliegt, würde man schließen, dass ein Einfachfehler an der Stelle $001 = 1$ vorläge. Das zeigt deutlich, dass man bei Hamming-Codes nicht gleichzeitig einen Fehler korrigieren und zwei Fehler erkennen kann, sondern man kann nur alternativ entweder zwei Fehler erkennen oder einen Fehler korrigieren - wobei im zweiten Fall schon vorher festliegen muss, dass mehr als ein Fehler nicht auftreten darf.

Ist ein binärer Hamming-Code mit $d \geq 3$ bekannt, so ist es einfach, einen erweiterten Code, den **erweiterten** binären **Hamming-Code** C'_H mit $d \geq 4$ anzugeben. Man erweitere den Hamming-Code um eine Paritätsstelle und bilde H' , indem man

**erweiterter
Hamming-Code**

H eine Spalte mit Nullen und eine weitere Zeile mit Einsen hinzufügt. Der Code C'_H mit der Kontrollmatrix

$$H' = \begin{bmatrix} & & & & \vdots & 0 \\ & & & & \vdots & 0 \\ & & H & & \vdots & 0 \\ & & & & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix}$$

hat wegen der Konstruktionsvorschrift stets $d \geq 4$. Denn wie bisher sind zwei Spalten von H' stets unabhängig. Wegen der Einsen an der letzten Stelle bei allen Spalten sind auch 3 Spalten stets unabhängig.

Beispiel 7.2-11:

Wir betrachten H_3 und erweitern es zu H'_3 .

$$H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H'_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wir können nun auch die Kontrollmatrix in der kanonischen Form angeben

$$\tilde{H}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und erhalten als Generatormatrix

$$\tilde{G}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selbsttestaufgabe 7.2-1:

- a. Geben Sie die Generatormatrix G und die Prüfmatrix H eines systematischen Codes in der kanonischen Form an, und zeigen Sie den Zusammenhang zwischen ihnen auf.
- b. Stellen Sie an einem Beispiel dar, wie sich ein Codewort aus einem gegebenen Informationswort und der Generatormatrix des Codes ergibt.

7.3 Zyklische Codes

C sei ein linearer Code. C heißt genau dann ein **zyklischer Code**, wenn aus $a = (a_{m-1}a_{m-2} \dots a_1a_0) \in C$ folgt $a' = (a_{m-2}a_{m-3} \dots a_0a_{m-1}) \in C$ ¹¹. Die Abbildung $Z : B^m \rightarrow B^m$ mit $a' = Z(a)$ nennt man **zyklische Verschiebung**.

zyklischer Code

zyklische Verschiebung

Wir fassen nun ein m -Tupel des Vektorraumes B^m als die Folge der Koeffizienten eines Polynoms vom Grad $(m-1)$ über dem Körper B mit q Elementen auf. Dem m -Tupel $a = (a_{m-1} \dots a_1a_0)$ entspricht also eindeutig ein Polynom

$$a(x) = a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x^1 + a_0$$

in einem unbestimmten x .

Die Menge $B(x)$ der Polynome vom Grad $\leq (m-1)$ ist ein Vektorraum und gleichzeitig ein Ring mit der gewöhnlichen Definition von Addition und Multiplikation von Polynomen Modulo $(x^m - 1)$. Dies bedeutet, dass die Rechenregeln des Körpers für die Körperelemente gelten, während für die Potenzen von x gilt $x^m = 1$. Die Vektorräume B^m und $B(x)$ sind isomorph, d. h. sie können eindeutig aufeinander abgebildet werden. Einige Eigenschaften von Polynomringen über endlichen Körpern sind im Anhang C.3 zusammengestellt.

Gegenüber linearen Codes haben wir eine weitere algebraische Struktur, nämlich dass das zyklische Vertauschen von Symbolen eines Codewortes wieder ein Codewort ergibt, eingeführt. Wie wir sehen werden, ermöglicht dies eine weitere erhebliche Vereinfachung der Codierung und der Decodierung.

11 Wir haben die Indizierung der n -Tupel umgedreht und zählen ab 0, um später n -Tupel und Polynome einheitlich indizieren zu können.

Beispiel 7.3-1:

Wir betrachten ein Codewort aus binärem Alphabet und mit sieben Symbolen $w_0 = (0001011)$. Das entsprechende Polynom lautet $w_0(x) = x^3 + x + 1$. Die zyklische Vertauschung ergibt nacheinander die Codewörter:

$$\begin{aligned}
 w_0 &= (0001011) & w_0(x) &= x^3 + x + 1 \\
 w_1 &= (0010110) & w_1(x) &= x \cdot w_0(x) = x^4 + x^2 + x \\
 w_2 &= (0101100) & w_2(x) &= x \cdot w_1(x) = x^5 + x^3 + x^2 \\
 w_3 &= (1011000) & w_3(x) &= x \cdot w_2(x) = x^6 + x^4 + x^3 \\
 w_4 &= (0110001) & w_4(x) &= x \cdot w_3(x) = x^7 + x^5 + x^4 \doteq x^5 + x^4 + 1 \\
 w_5 &= (1100010) & w_5(x) &= x \cdot w_4(x) = x^6 + x^5 + x \\
 w_6 &= (1000101) & w_6(x) &= x \cdot w_5(x) = x^7 + x^6 + x^2 \doteq x^6 + x^2 + 1 \\
 w_7 &= w_0 & w_7(x) &= x \cdot w_6(x) = x^7 + x^3 + x \doteq x^3 + x + 1
 \end{aligned}$$

Stellen, an denen sich die Modulo $(x^7 - 1)$ -Rechnung besonders auswirkt, sind mit \doteq gekennzeichnet.

Es sei $g(x)$ ein normiertes Polynom vom Grad k , d. h.

$$g(x) = x^k + g_{k-1}x^{k-1} + \dots + g_1x + g_0. \quad 7.3-1$$

Es sei $g(x)|(x^m - 1)$, d. h. $(x^m - 1)$ sei teilbar durch $g(x)$, und es sei Grad $g(x) = k < m$. G sei die (n, m) -Matrix (mit $n = m - k$)

$$G = \begin{bmatrix} 1 & g_{k-1} & \cdot & \cdot & \cdot & g_1 & g_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & g_{k-1} & \cdot & \cdot & \cdot & g_1 & g_0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ & & & 1 & g_{k-1} & \cdot & \cdot & \cdot & g_1 & g_0 & \end{bmatrix}. \quad 7.3-2$$

Sie entspricht den Spaltenvektoren der untereinanderbeschriebenen Polynome

$$G(x) = \begin{bmatrix} x^{n-1} \cdot g(x) \\ \vdots \\ x \cdot g(x) \\ g(x) \end{bmatrix}. \quad 7.3-3$$

Aus dem Aufbau der Matrix G ist ersichtlich, dass die n Zeilen von G linear unabhängig sind. G ist deshalb eine Generatormatrix eines (m, n) -Linearcodes. Das Polynom $g(x)$ wird deshalb **Generatorpolynom** und das einem Codewort $w \in C$ entsprechende Polynom $w(x)$ ein **Codepolynom** genannt.

Generatorpolynom
Codepolynom

Wir zeigen nun, dass für alle Polynome $v(x) \in B(x)$ bzw. Vektoren $v \in B^m$ die Äquivalenz gilt

$$v \in C \iff g(x)|v(x). \quad 7.3-4$$

Ist $v \in C$, so ist v eine Linearkombination der Zeilen von G . Wir können $v(x)$ also wie folgt schreiben

$$\begin{aligned} v(x) &= a_{n-1}x^{n-1}g(x) + \dots + a_1x \cdot g(x) + a_0g(x) \\ &= f(x) \cdot g(x), \end{aligned} \quad 7.3-5$$

also gilt

$$g(x)|v(x).$$

Umgekehrt, ist $g(x)|v(x)$, so folgt aus der Definition der Teilbarkeit (siehe Anhang C.3), dass es ein $f(x)$ gibt mit

$$v(x) = f(x) \cdot g(x)$$

und

$$\text{Grad } f(x) + \text{Grad } g(x) = \text{Grad } v(x) < m,$$

d. h.

$$\text{Grad } f(x) < m - k = n.$$

Wir können also schreiben

$$v(x) = a_{n-1}x^{n-1}g(x) + \dots + a_1xg(x) + a_0g(x).$$

Somit ist v eine Linearkombination der Zeilen von G .

Nun ist es unter Verwendung der Modulo $(x^m - 1)$ -Rechnung einfach zu zeigen, dass der durch das Generatorpolynom beschriebene Code ein zyklischer Code ist, denn ist $w \in C$, so gilt für das zyklisch verschobene w' , dass $w'(x)$ Modulo $(x^m - 1)$ gleich $xw(x)$ ist, d. h.

$$w'(x) = xw(x) + u(x) \cdot (x^m - 1). \quad 7.3-6$$

Wie oben gezeigt, ist $g(x)|w(x)$, außerdem $g(x)|(x^m - 1)$. Somit ist auch $g(x)|w'(x)$, nach Gl. 7.3-4 also $w' \in C$.

Wir haben somit gezeigt, wie wir durch die Wahl eines Generatorpolynoms zyklische Codes konstruieren können.

Beispiel 7.3-2:

Das Generatorpolynom $g(x) = x^3 + x + 1$ mit $m = 7$ führt zum Code von Beispiel 7.3-1. Die Generatormatrix lautet

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_4 \\ g_3 \\ g_2 \\ g_1 \end{bmatrix}$$

und entspricht

$$G(x) = \begin{bmatrix} x^3 g(x) \\ x^2 g(x) \\ x g(x) \\ g(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^6 + x^4 + x^3 \\ x^5 + x^3 + x^2 \\ x^4 + x^2 + x \\ x^3 + x + 1 \end{bmatrix}.$$

Das Codewort $w_5 = [1100010]$ entspricht dem Codepolynom $w_5(x) = x^6 + x^5 + x$. Es lässt sich als Linearkombination der Basisvektoren darstellen,

$$w_5 = g_4 + g_3 + g_2$$

und somit

$$w_5(x) = x^3 \cdot g(x) + x^2 \cdot g(x) + x \cdot g(x)$$

oder

$$w_5(x) = (x^3 + x^2 + x) \cdot g(x).$$

Es ist also $g(x) | w_5(x)$.

Ein zyklischer Code C sei durch sein Generatorpolynom $g(x) \in B(x)$ und die Blocklänge m gegeben. Da $g(x) | (x^m - 1)$ ist, gilt

$$h(x) = \frac{x^m - 1}{g(x)} \tag{7.3-7}$$

Kontrollpolynom $h(x)$ ist auch ein Generatorpolynom eines zyklischen Codes. $h(x)$ wird **Kontrollpolynom** des zyklischen Codes C mit dem Generatorpolynom $g(x)$ genannt, denn es gilt

$$v \in C \iff v(x) \cdot h(x) = 0 \text{ Modulo } (x^m - 1). \tag{7.3-8}$$

Wir wollen dies kurz zeigen.

Beweis: Sei $v \in C$, dann gilt $v(x) = f(x) \cdot g(x)$ und

$$v(x) \cdot h(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) = f(x) \cdot (x^m - 1) = 0 \text{ Modulo } (x^m - 1).$$

Umgekehrt, ist $v(x) \cdot h(x) = 0 \text{ Modulo } (x^m - 1)$, so gibt es ein $f(x) \in B(x)$ mit

$$v(x) \cdot h(x) = f(x) \cdot (x^m - 1)$$

bzw.

$$v(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Es ist somit $g(x)|v(x)$, also $v \in C$.

Beispiel 7.3-3:

Mit $g(x) = x^3 + x + 1$ und $m = 7$ erhalten wir das Kontrollpolynom

$$h(x) = \frac{x^7 - 1}{x^3 + x + 1} = x^4 + x^2 + x + 1.$$

Mit $w_5(x) = x^6 + x^5 + x$ und $h(x) = x^4 + x^2 + x + 1$ erhalten wir

$$g(x)|w_5(x),$$

denn

$$w_5(x) = (x^3 + x^2 + x) \cdot g(x)$$

und

$$\begin{aligned} w_5(x) \cdot h(x) &= (x^6 + x^5 + x)(x^4 + x^2 + x + 1) \\ &= x^{10} + x^8 + x^7 + x^6 + x^9 + x^7 \\ &\quad + x^6 + x^5 + x^5 + x^3 + x^2 + x \\ &= x^3 + x + 1 + x^6 + x^2 + 1 + x^6 + x^5 \\ &\quad + x^5 + x^3 + x^2 + x = 0. \end{aligned}$$

Wir wollen uns kurz der Frage zuwenden, wie aus dem Polynom $g(x)$ die **kanonische Form der Basismatrix** Gl. 7.2-14 abgeleitet werden kann. Mit $g(x)$ stellt man $G(x)$ entsprechend Gl. 7.3-3 auf und erhält somit G entsprechend Gl. 7.3-2. Die Struktur von G legt es nahe, dass man durch entsprechende lineare Kombinationen die kanonische Form ableitet. Wir wollen dies an einem Beispiel aufzeigen.

Kanonische Form der Basismatrix für zyklische Codes

Beispiel 7.3-4:

Mit dem Polynom $g(x) = x^3 + x + 1$, das Teiler von $x^7 - 1$ ist, erhalten wir G wie im Beispiel 7.3-2 zu

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_4 \\ g_3 \\ g_2 \\ g_1 \end{bmatrix}.$$

In der kanonischen Form lautet die Generatormatrix

$$G' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_4 + g_2 + g_1 \\ g_3 + g_1 \\ g_2 \\ g_1 \end{bmatrix}.$$

Die entsprechende Kontrollmatrix lautet

$$H' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Codierung und
Decodierung
zyklischer Codes**

Insgesamt haben wir für zyklische Codes folgende **Vorschrift für die Codierung bzw. für die Decodierung**. Entsprechend Gl. 7.2-2 können wir für eine zu codierende Nachricht, die durch ein n -Tupel $a = (a_{n-1} \dots a_0)$ ($a_i \in B$) vorgegeben ist, das Codewort wie folgt ermitteln. Aus a bilden wir das entsprechende Polynom $a(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$. Das zugeordnete Codewort ergibt sich aus Gl. 7.2-3 als

$$v(x) = a(x) \cdot g(x), \quad 7.3-9$$

wobei $g(x)$ das Generatorpolynom ist. Anstatt der Multiplikation mit $g(x)$ kann die Codiervorschrift auch auf eine Division mit $h(x)$ zurückgeführt werden, denn es gilt

$$g(x) = \frac{x^m - 1}{h(x)}. \quad 7.3-10$$

Man dividiert $x^m \cdot a(x)$ durch $h(x)$ und addiert (was der binären Subtraktion äquivalent ist) den Rest hinzu:

$$v(x) = \frac{x^m \cdot a(x)}{h(x)} + \frac{a(x)}{h(x)}. \quad 7.3-11$$

Auf der Empfangsseite sei $w(x)$ das zur empfangenen Nachricht gehörende Polynom. Die Prüfvorschrift lautet dann Gl. 7.3-8

$$w(x) \cdot h(x) = 0 \text{ Modulo } (x^m - 1), \quad 7.3-12$$

wobei $h(x)$ das Prüfpolynom ist. Ist Gl. 7.3-12 erfüllt, so schließt man, dass w gesendet wurde, andernfalls liegt ein Übertragungsfehler vor.

Der Vorteil der zyklischen Codes liegt darin, dass die Codier- und die Prüfvorschrift auf Polynom-Multiplikationen bzw. -Division beruhen und diese sich technisch leicht realisieren lassen. Das Rechnen mit dem Polynom $g(x)$ und $h(x)$ entspricht genau dem Rechnen mit den zugehörigen Matrizen G und H und ist in der Darstellung übersichtlicher.

Beispiel 7.3-5:

Die mit dem Code des Beispiel 7.3-4 zu übertragende Nachricht sei durch das n -Tupel $a = (1010)$ dargestellt. Das entsprechende Polynom $a(x)$ lautet

$$a(x) = x^3 + x.$$

Das Codepolynom lautet

$$\begin{aligned} v(x) &= (x^3 + x) \cdot (x^3 + x + 1) \\ &= x^6 + x^4 + x^3 + x^4 + x^2 + x \\ &= x^6 + x^3 + x^2 + x. \end{aligned}$$

Das gesendete Codewort lautet (1001110).

Die Division entsprechend Gl. 7.3-11 liefert

$$\begin{aligned} v(x) &= x^6 + x^3 + x^2 + x + \frac{x^3 + x}{h(x)} + \frac{x^3 + x}{h(x)} \\ &= x^6 + x^3 + x^2 + x, \end{aligned}$$

so dass wir wieder als Codewort (1001110) erhalten.

Empfängt man (1001110), so liefert die Prüfvorschrift

$$\begin{aligned} (x^6 + x^3 + x^2 + x) \cdot h(x) &= (x^6 + x^3 + x^2 + x)(x^4 + x^2 + x + 1) \\ &= x^{10} + x^7 + x^6 + x^5 + x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + \\ &\quad x^7 + x^4 + x^3 + x^2 + x^6 + x^3 + x^2 + x \\ &\doteq x^{10} + x^8 + x^3 + x = x^3 + x + x^3 + x = 0. \end{aligned}$$

Hätte man (1001111) empfangen, so wäre

$$(x^6 + x^3 + x^2 + x + 1)h(x) = x^4 + x^2 + x + 1 \neq 0$$

und somit die empfangene Kombination kein gültiges Codewort.

Es sei $e = (00 \dots 0a0 \dots 0)$ ein Einfachfehler, $a \in B, a \neq 0$. In der Polynomdarstellung erhalten wir $e(x) = x^i \cdot a$, wobei i die Fehlerstelle $m - 1 \geq i \geq 0$ anzeigt. Für **Fehlerbündel** der Länge $l \leq m$ schreiben wir entsprechend

$$e_l(x) = x^i(a_{l-1}x^{l-1} + \dots + a_0) = x^i \cdot b(x), \quad a_{l-1} \neq 0 \neq a_0, \quad 7.3-13$$

wenn der Fehler sich von $i + l - 1$ bis i erstreckt. $b(x)$ ist also ein Polynom vom Grad $l - 1$.

Wir wollen nun zeigen, dass für einen zyklischen (m, n) -Code gilt, dass jedes Fehlerbündel einer Länge $l \leq m - n$ erkannt wird.

Sei $g(x)$ das Generatorpolynom. Sei w das empfangene Wort, mit $w = v + e_l$, $v \in C$, dann gilt

$$\begin{aligned} w(x) \cdot h(x) &= v(x) \cdot h(x) + e_l(x) \cdot h(x) \\ &= e_l(x) \cdot h(x) = x^i b(x) \cdot h(x). \end{aligned}$$

Wäre der Fehler nicht erkennbar, d. h. $w(x) \cdot h(x) = 0$, also $w \in C$, so wäre auch $x^i b(x) \cdot h(x) = 0$, d. h. $x^i \cdot b(x)$ entspräche einem Codewort, und da wir einen zyklischen Code haben, wäre auch $b(x)$ ein Codepolynom entsprechend (Gl. 7.3-6), d. h.

$$g(x) | b(x)$$

oder

$$\begin{aligned} \text{Grad } g(x) &\leq \text{Grad } b(x), \\ m - n &\leq l - 1, \end{aligned}$$

was zum Widerspruch führt. Somit wird der Fehler erkannt.

Beispiel 7.3-6:

$w = (1001110)$ ist ein Codewort des Codes vom Beispiel 7.3-2 mit dem Generatorpolynom $g(x) = x^3 + x + 1$.

Ein Bündelfehler der Länge 3, $e = (0001010)$ ergibt

$$\begin{aligned} e(x) \cdot h(x) &= (x^2 + 1) \cdot (x^4 + x^2 + x + 1) \\ &= x^6 + x^4 + x^3 + x^2 \\ &\quad + x^4 + x^2 + x + 1 \\ &= x^6 + x^3 + x + 1 \neq 0 \pmod{x^7 - 1}. \end{aligned}$$

Selbsttestaufgabe 7.3-1:

Ein zyklischer Code C ist durch sein Generatorpolynom $g(x)$ und die Blocklänge m festgelegt. Es sei

$$g(x) = x^4 + x + 1 \text{ und } m = 15$$

vorgegeben.

a. Stellen Sie die Generatormatrix G auf.

- b. Wie lang ist ein Codewort aus dem Code C ?
- c. Wie viele Informationsstellen und wie viele Prüfstellen hat ein Codewort?
- d. Codieren Sie die folgende Nachricht a ,

$$a = (10010111000).$$

7.4 Weitere Codes zur Fehlererkennung und Fehlerkorrektur

Im Folgenden wollen wir zunächst einige zyklische binäre Codes durch deren Generatorpolynome angeben und einige ihrer Eigenschaften ohne Beweis aufzählen. Für weitere Details sei auf die angegebene Literatur hingewiesen.

Wählt man als Generatorpolynom $g(x)$ des zyklischen Codes ein primitives Polynom (siehe Anhang C 3.10 und C 3.12) vom Grad k , so ist der erzeugte Code der Blocklänge $m = 2^k - 1$ ein **zyklischer Hamming-Code**, d. h. er hat die Hamming-Distanz $d = 3$.

**zyklischer
Hamming-Code**

Beispiel 7.4-1:

Das primitive Polynom

$$g(x) = x^{32} + x^{26} + x^{23} + x^{22} + x^{16} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$$

liefert einen Hamming-Code mit der Blocklänge

$$m = 2^{32} - 1 = 4\,294\,967\,295.$$

Es können also gut 4 Milliarden Informationsstellen durch 32 Kontrollstellen so geschützt werden, dass ein Fehler korrigiert oder zwei Fehler erkannt werden können. Wichtiger ist jedoch, dass entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 7.3 ein Fehlerbündel der Länge $l \leq 32$ erkannt wird. Der Code wird deshalb häufig bei Datenübertragungsverfahren mit 32-Bit Sicherheit (z. B. Lokalen Netzen wie Ethernet) angewandt. Bei Codes mit großer Blocklänge wird der Vorteil von zyklischen Codes besonders deutlich. Die Prüfmatrix des linearen Codes hat $k \times m \approx 137$ Milliarden Elemente, die für eine Decodierung gespeichert werden müssten. Die Codierung und Decodierung mit dem Generatorpolynom entsprechend Gl. 7.3-9 lässt sich wesentlich einfacher gestalten. Liegt eine Nachricht zur Codierung vor, so betrachtet man das entsprechende Polynom und bildet den Rest Modulo 2 bezüglich $g(x)$ und fügt ihn der Nachricht als 32 Kontrollbits hinzu. Falls die Nachrichtenlänge geringer als n ist, füllt man die restlichen Informationsstellen nicht mehr mit Nullen auf, d. h. man ver-

wendet den gekürzten Hamming-Code. Beim Decodieren dividiert man mit $g(x)$ durch; geht die Division nicht auf, so verwirft man die Nachricht. Die Restbildung bzw. Division mit $g(x)$ lässt sich hardwaremäßig einfach implementieren.

Wählt man als Generatorpolynom

$$g(x) = g_1(x) \cdot (x + 1), \quad 7.4-1$$

Abramson-Code

wobei $g_1(x)$ ein primitives Polynom vom Grad k_1 ist, so erhält man mit der Blocklänge $m = 2^{k_1} - 1$ den **Abramson-Code** mit der Hamming-Distanz $d = 4$. Wir haben dem Generatorpolynom $g_1(x)$ des Hamming-Codes den Faktor $(x + 1)$ hinzugefügt, dadurch den Grad des Generatorpolynoms um Eins erhöht ($k = k_1 + 1$) und gleichzeitig auch die Hamming-Distanz um Eins auf $d = 4$ erhöht.

Beispiel 7.4-2:

Bei der Datenübertragung mit 16 Bit-Sicherung (z. B. X.25, ISDN D-Kanal) werden die beiden Abramson-Codes häufig verwendet:

$$\begin{aligned} \text{CRC-16 mit } g(x) &= (x^{15} + x + 1)(x + 1) \\ &= x^{16} + x^{15} + x^2 + 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{CCITT-16 mit } g(x) &= (x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^4 + x^3 + x^2 \\ &\quad + x + 1)(x + 1) \\ &= x^{16} + x^{12} + x^5 + 1. \end{aligned}$$

BCH-Codes Man erhält einen Code aus der großen Klasse der **BCH-Codes**¹², indem man als Generatorpolynom

$$g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot \dots \cdot g_t(x) \quad 7.4-2$$

wählt. $g_1(x)$ ist ein primitives Polynom vom Grad k_1 . Die Blocklänge m des BCH-Codes ist nach wie vor $m = 2^{k_1} - 1$. t ist die Mindestanzahl der Fehler, die durch den Code korrigiert werden sollen (man beachte als grobe Schranke bei der Wahl von t , dass bei einem Code der Länge m , d maximal gleich m , d. h. t maximal gleich $\frac{m-1}{2}$ sein kann!). $g_1(x)$ hat k_1 Wurzeln, die in $GF(2^{k_1})$ liegen (siehe Anhang C 3.8). α sei eine beliebige Wurzel von $g_1(x)$. Die Polynome $g_2(x), g_3(x), \dots, g_t(x)$

werden nun so gewählt, dass die Elemente $\alpha^3, \alpha^5, \dots, \alpha^{2^t-1}$ von $GF(2^{k_1})$ jeweils ihre Wurzel sind, d. h. es gilt

$$\begin{aligned} g_1(\alpha) &= 0, \\ g_2(\alpha^3) &= 0, \\ g_3(\alpha^5) &= 0, \\ &\vdots \\ g_t(\alpha^{2^t-1}) &= 0. \end{aligned}$$

Um den Grad des Generatorpolynoms möglichst niedrig zu halten, wählt man für $g_2(x), g_3(x), \dots, g_t(x)$ jeweils die Minimalpolynome (Polynome vom kleinsten Grad) der Elemente $\alpha^3, \alpha^5, \dots, \alpha^{2^t-1}$. Der Grad der einzelnen Minimalpolynome ist k_1 oder geringer und somit $\text{Grad}(g(x)) = k \leq tk_1$. BCH-Codes bieten eine Möglichkeit, zyklische Codes mit mindestens der vorgegebenen Korrekturfähigkeit t anzugeben. Die Vorschrift zur Bestimmung von BCH-Codes ist kompliziert, die tatsächliche Bestimmung des Generatorpolynoms und die praktische Handhabung sind jedoch einfach.

Beispiel 7.4-3:

Wir betrachten das primitive Polynom

$$g_1(x) = x^4 + x + 1.$$

Setzen wir $g(x) = g_1(x) = x^4 + x + 1$, und $m = 2^4 - 1 = 15$, so haben wir einen Hamming-Code mit $d = 3$ bzw. die Fähigkeit, einen Fehler zu korrigieren.

Um die Korrekturfähigkeit auf mindestens zwei Fehler heraufzusetzen, verwenden wir das Generatorpolynom

$$g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x).$$

$g_1(x)$ hat den Grad 4, und somit 4 Nullstellen. Das Element $\alpha \in GF(2^4)$ sei eine Nullstelle von $g_1(x)$, d. h. es gilt

$$g_1(\alpha) = \alpha^4 + \alpha + 1 = 0.$$

Wir bestimmen nun $g_2(x)$ mit $g_2(\alpha^3) = 0$. Mit dem Ansatz

$$g_2(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

und

$$g_2(\alpha^3) = 0$$

erhalten wir

$$g_2(\alpha^3) = a\alpha^{12} + b\alpha^9 + c\alpha^6 + d\alpha^3 + e = 0.$$

Wegen

$$\begin{aligned}\alpha^6 &= \alpha^4 \cdot \alpha^2 = (\alpha + 1) \cdot \alpha^2 = \alpha^3 + \alpha^2 \\ \alpha^9 &= \alpha^6 \cdot \alpha^3 = (\alpha^3 + \alpha^2) \cdot \alpha^3 = \alpha^6 + \alpha^5 = (\alpha^3 + \alpha^2) + \alpha \cdot (\alpha + 1) \\ &= \alpha^3 + \alpha \\ \alpha^{12} &= (\alpha^3 + \alpha) \cdot \alpha^3 = \alpha^6 + \alpha^4 = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1\end{aligned}$$

erhalten wir

$$g_2(\alpha^3) = a(\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) + b(\alpha^3 + \alpha) + c(\alpha^3 + \alpha^2) + d\alpha^3 + e = 0$$

oder

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ a + c = 0 \\ a + b = 0 \\ a + e = 0 \end{cases}$$

d. h., die nichttriviale Lösung $a = b = c = d = e = 1$ bzw. das Minimalpolynom

$$g_2(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Somit haben wir das Generatorpolynom

$$g(x) = (x^4 + x + 1) \cdot (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1).$$

Der entsprechende Code garantiert eine Mindestkorrekturfähigkeit von $t = 2$ bzw. $d \geq 5$.

Um die Korrekturfähigkeit auf mindestens drei Fehler heraufzusetzen, wählen wir

$$g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot g_3(x).$$

Wir suchen also $g_3(x)$ mit $g_3(\alpha^5) = 0$. Mit dem Ansatz

$$g_3(x) = ax^2 + bx + c$$

und

$$g_3(\alpha^5) = 0$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}g_3(\alpha^5) &= a \cdot \alpha^{10} + b\alpha^5 + c \\ &= a(\alpha + 1)^2 \cdot \alpha^2 + b \cdot (\alpha + 1)\alpha + c \\ &= a(\alpha^2 + \alpha + \alpha + 1)\alpha^2 + b(\alpha^2 + \alpha) + c \\ &= a(\alpha^4 + \alpha^2) + b(\alpha^2 + \alpha) + c = 0\end{aligned}$$

oder

$$a = 1, b = 1, c = 1$$

und somit das Minimalpolynom

$$g_3(x) = x^2 + x + 1.$$

Als Generatorpolynom haben wir somit

$$g(x) = (x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1)$$

und die Hamming-Distanz $d \geq 7$.

In der Praxis kommen häufig **Codeverkettungen** (*Concatenated Codes*), d. h. eine Hintereinanderschaltung von Codierungen und Decodierungen entsprechend Abb. 7.4-1, vor. Oft liegt es daran, dass diese Codes jeweils für verschiedene Zwecke konzipiert wurden. Ein solches Beispiel haben wir bereits bei der Quellen- und der Kanalcodierung kennengelernt. Ein weiteres, häufig vorkommendes Beispiel liefert die In-House Kommunikation, wenn gleichzeitig die wortweise Paritätssicherung gegen zufällige Einzelfehler und blockweise Sicherung mit zyklischen Codes (CRC-Prüfung) gegen Bündelfehler vorgenommen wird. Codeverkettungen kommen auch vor, wenn mehrere Dienste unterschiedlicher Sicherheitsanforderungen auf gemeinsamen Strecken bzw. Netzen mit einer Basissicherung angeboten werden. Nachrichten der Dienste höherer Anforderung werden dann zusätzlich (meist Ende-zu-Ende) gesichert. Eine Hintereinanderschaltung von Codes wird manchmal auch verwendet, um besonders lange Blockcodes zu erhalten.

Codeverkettungen

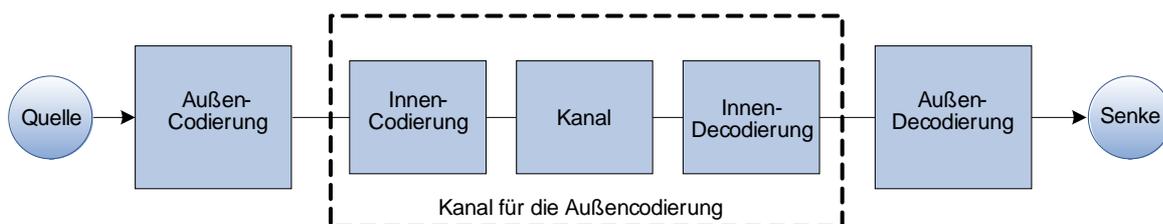


Abb. 7.4-1: Codeverkettung

Im Allgemeinen ist die theoretische Bewertung von verketteten Codes schwierig, und man verlässt sich auf praktische Erfahrungen. Bei linearen Codes, bei denen die Blocklänge des äußeren Codes gleich der Anzahl der Informationssymbole des inneren Codes ist und jeweils dasselbe Codealphabet verwendet wird, entspricht die Hintereinanderschaltung lediglich der Multiplikation der Generatormatrizen der beiden Codes.

Code-Einbettung

Ein weiterer gelegentlich angewandter Fall ergibt sich, wenn die Blocklänge und Alphabete der beiden Codes aufeinander abgestimmt sind, so dass die Synchronisation beider Codes einfach wird. Der Code mit der kleineren Blocklänge m , dem q -nären Alphabet und mit k Prüfsymbolen wird als innerer Code verwendet; während der äußere Code die Blocklänge M , ein q^n -nären Alphabet und K Prüfbits hat. Der Kanal mit dem inneren Code ergibt nun einen q^n -nären Kanal für den äußeren Code. Man spricht in diesem Fall von **Code-Einbettung** (*Nesting*). Man versteht den Codevorgang am einfachsten, wenn man einen Block von $n \times N$ zu codierenden q -nären Informationen ansieht (Abb. 7.4-2). Er wird jeweils in N Zeilen von nq -nären Symbolen (als Spalten gesehen) aufgeteilt. Jede Spalte ist dann ein q^n -näres Symbol, die N Zeilen ein Informationswort, dem bei der äußeren Codierung K Prüfsymbole hinzugefügt werden. Der innere Code fügt dann jeder Zeile kq -näre Prüfsymbole hinzu.

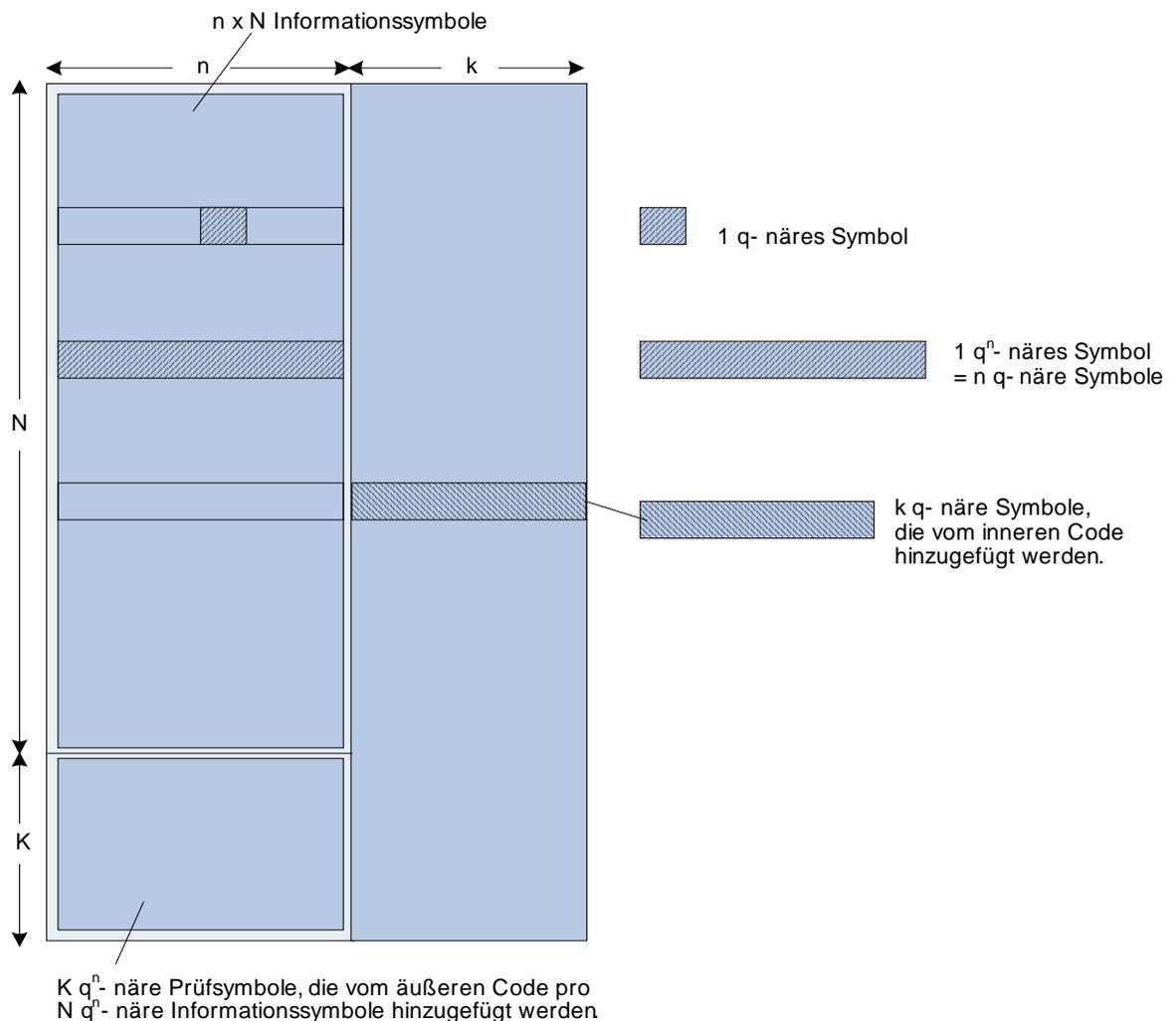


Abb. 7.4-2: Schema der Codeeinbettung

Bei der Codeeinbettung wird häufig als innerer Code ein binärer Code (z. B. ein Hamming-Code), der sich gut gegen Einzelfehler eignet, und als äußerer Code ein q ($= 2^n$)-närer Reed-Solomon-Code verwendet. Ein **Reed-Solomon-Code** ist ein

q -närer BCH-Code, dessen Generatorpolynom durch

$$g(x) = (x - \alpha)(x - \alpha^2)(x - \alpha^3) \dots (x - \alpha^{2t}) \quad 7.4-3$$

gegeben ist, wobei α ein primitives Element von $GF(q)$ ist. Der Code hat die Blocklänge $m = q - 1$ und ermöglicht die Korrektur von t Fehlern. Da $\text{Grad}(g(x)) = 2t$ ist, hat er $k = 2t$ Prüfsymbole. Der Reed-Solomon-Code eignet sich besonders gegen Bündelfehler. In Tabelle 7.4-1 sind alle Elemente des $GF(2^4)$ in verschiedenen Darstellungen zusammengestellt, man kann daraus entsprechend Gl. 7.4-3 2^4 -näre Reed-Solomon-Codes aufstellen.

Beispiel 7.4-4:

Wir berechnen das Generatorpolynom des 2^4 -nären Reed-Solomon-Codes, der 2 Fehler korrigieren kann. Es ist dann $t = 2$, d. h. $d = 5$ und $k = 4$, wobei die Blocklänge $m = 16 - 1 = 15$ bzw. $n = 11$. Wir haben also einen linearen $(15, 11)$ -Code gewählt. Aus Tabelle 7.4-1 ergibt sich mit α^1 als primitives Element

$$\begin{aligned} g(x) &= (x - \alpha)(x - \alpha^2)(x - \alpha^3)(x - \alpha^4) \\ &= x^4 + (\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4)x^3 + (\alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^7)x^2 + \\ &\quad (\alpha^6 + \alpha^7 + \alpha^8 + \alpha^9)x + \alpha^{10} \\ &= x^4 + \alpha^{13}x^3 + \alpha^6x^2 + \alpha^3x + \alpha^{10} \end{aligned}$$

Die letzte Zeile erhalten wir, indem wir die (binäre) Addition mit Hilfe der Tabelle 7.4-1 auswerten.

Tab. 7.4-1: Das Galois Feld $GF(2^4)$

Exponentielle Darstellung	Polynomiale Darstellung	Binäre Darstellung	Dezimale Darstellung
0	0	0000	0
α^0	1	0001	1
α^1	x	0010	2
α^2	x^2	0100	4
α^3	x^3	1000	8
α^4	$x + 1$	0011	3
α^5	$x^2 + x$	0110	6
α^6	$x^3 + x^2$	1100	12
α^7	$x^3 + x + 1$	1011	11
α^8	$x^2 + 1$	0101	5
α^9	$x^3 + x$	1010	10
α^{10}	$x^2 + x + 1$	0111	7
α^{11}	$x^3 + x^2 + x$	1110	14
α^{12}	$x^3 + x^2 + x + 1$	1111	15
α^{13}	$x^3 + x^2 + 1$	1101	13
α^{14}	$x^3 + 1$	1001	9

Die 16 Elemente des $GF(16)$ sind in verschiedenen Darstellungen zusammengestellt. Die einzelnen Elemente können mit dem primitiven Polynom $g(x) = x^4 + x + 1$ erzeugt werden.

Faltungs-Codes Wir wenden uns nun einer anderen Art von Codes, den **Faltungs-Codes** (*Convolutional Codes*) zu. Hierzu betrachten wir zunächst eine Codierschaltung, die aus einem Schieberegister, Multiplizierer mit den Koeffizienten g_j^i und Addierer besteht (Abb. 7.4-3).

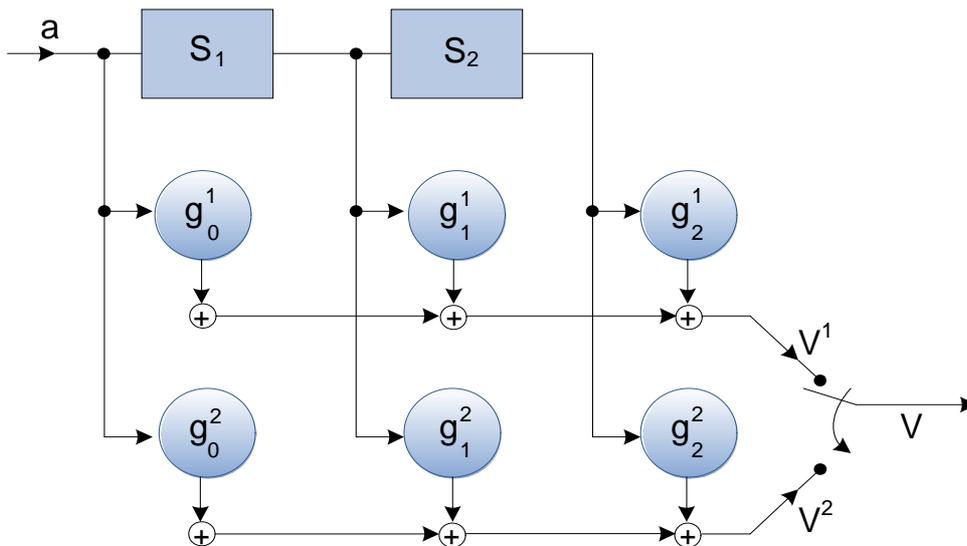


Abb. 7.4-3: Ein Faltungscodierer mit $K = 3$ und $R = 2$

Eine binäre Informationsfolge $a = (a_0 a_1 a_2 a_j \dots a_m)$ wird durch ein Schieberegister, Modulo-2-Multiplizierer mit den Koeffizienten aus $\{0, 1\}$ und Modulo-2-Addierer codiert. Im Allgemeinen haben wir $(K - 1)$ Speicher und R Ausgänge. Als Anfangswert hat das Schieberegister in den Speichern (S_1, S_2, \dots) die Werte Null gespeichert. Alle T Sekunden werden die gespeicherten Werte in der Speicherstelle um eine Stelle nach rechts verschoben, wobei der Wert im letzten Speicher herausfällt und in den ersten Speicher jeweils der nächste Eingangswert eingelesen wird. Am Ausgang werden bei jedem Takt die Werte v_i^1, v_i^2 (im allgemeinen Fall bis v_i^R) gebildet. Die Ausgangsfolge wird durch die Verschachtelung der Folgen v^1, v^2 (allgemein bis v^R) gebildet. Pro Taktperiode haben wir somit 2 (allgemein R) Ausgangswerte. Zu einem bestimmten Zeitpunkt, wenn a_j am Eingang vorliegt, liegen in den Speichern S_1, S_2, \dots, S_{K-1} jeweils die Werte $a_{j-1}, a_{j-2}, \dots, a_{j-K+1}$ vor. Die Folge $v^i = [v_0^i, v_1^i \dots v_j^i \dots v_m^i]$ ist durch

$$v_j^i = \sum_{k=0}^{K-1} a_{j-k} g_k^i \quad 7.4-4$$

angegeben, was einer Faltungssumme entspricht, weshalb auch die Bezeichnung Faltungs-Codes verwendet wird. Wir wollen die Matrix g

$$g = \begin{bmatrix} g_0^1 & g_1^1 & g_2^1 & \dots & g_K^1 \\ g_0^2 & & & & \\ \vdots & & & & \\ g_0^R & \dots & & & g_K^R \end{bmatrix}$$

als **Koeffizientenmatrix des Faltungs-Codes** bezeichnen. Jedes Element der Eingangsfolge beeinflusst maximal K Elemente jeder Ausgangsfolge v^i , bei R solchen Folgen also insgesamt $R \cdot K$ Elemente von v . Wir bezeichnen diese als **Einflusstiefe** (*Constraint length*) des Codes. Die Koeffizientenmatrix gibt die Codiervorschrift bis auf die Anfangswerte in den Speichern vollständig an. Diese beeinflussen lediglich die ersten RK Werte von v , sind also nach dieser Einschwingphase ohne Bedeutung.

**Koeffizientenmatrix
des Faltungs-Codes**

Einflusstiefe

Beispiel 7.4-5:

Wir betrachten den Faltungs-Code mit der folgenden Codierschaltung:

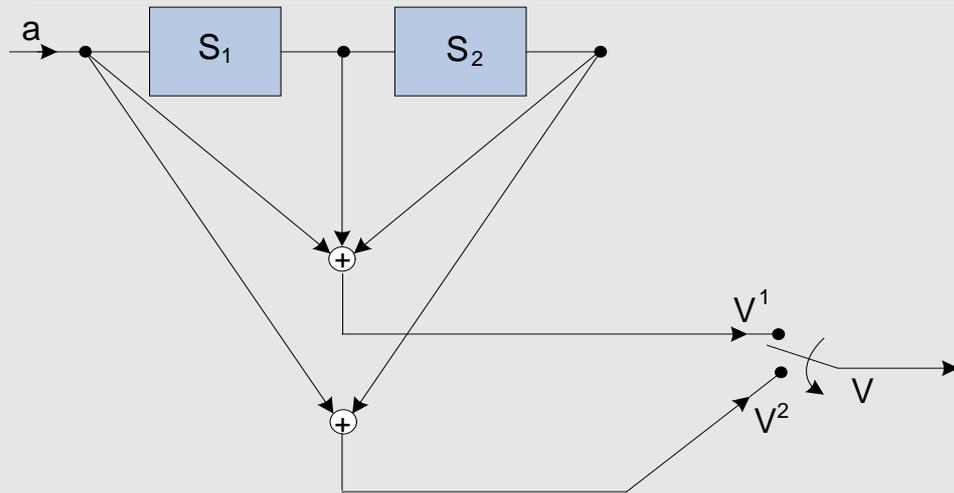


Abb. 7.4-4: Codierschaltung

Die Koeffizientenmatrix lautet

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^1 \\ g^2 \end{bmatrix}.$$

Für die Eingangsfolge mit 8 Werten $a = (10111000)$ haben wir jeweils folgende Werte:

Tab. 7.4-2: Werte der Codierschaltung

Takt	Eingang	Speicher	Speicher	Ausgang	Ausgang
T	a	S_1	S_2	v^1	v^2
0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	1	1	0	0	1
4	1	1	1	1	0
5	0	1	1	0	1
6	0	0	1	1	1
7	0	0	0	0	0

Wir haben den Zugang zu den Faltungs-Codes über die Codierschaltung und die Koeffizientenmatrix gewählt, weil diese anschaulich ist. Wir haben verschiedene Möglichkeiten, andere Darstellungen zu finden. So können wir z. B. in Anlehnung an die Blockcodes Eingangsfolgen a der Blocklänge m betrachten. Wir setzen dabei die letzten K Stellen gleich Null (haben also $n = m - K$ Informationsstellen),

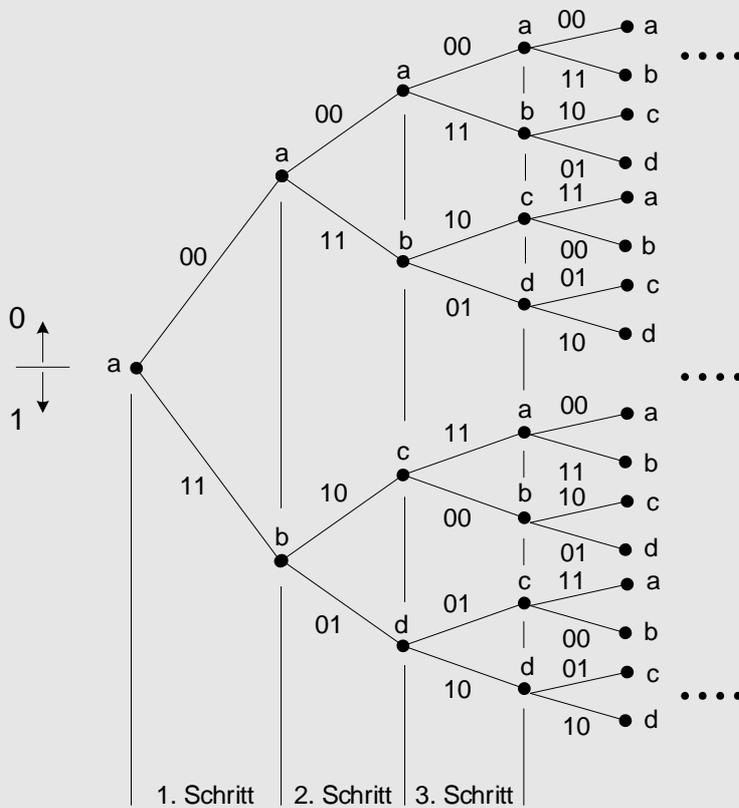
damit die Speicher nach der Übertragung der Folge a wieder alle Null sind und der nächste Block der Länge m eingegeben werden kann. Am Ausgang erhalten wir die Folge v . Wir können nun aus der Koeffizientenmatrix die entsprechende Generatormatrix, wie bei linearen Blockcodes, ermitteln. Wir wollen diese Darstellung nicht weiter verfolgen, werden sie jedoch bei der Decodierungsbetrachtung wieder kurz aufgreifen.

Wir wenden uns nun den algorithmischen Aspekten der Faltungs-Codes zu und wollen zunächst drei Darstellungen des Codierverfahrens eines Faltungs-Codes ansehen. In Anlehnung an Codebäume für lineare Codes stellen wir ein **Codediagramm** für einen Faltungs-Code auf, indem wir von einem Ursprungsknoten ausgehend, am betrachteten Knoten jeweils für jedes Symbol der Eingangsfolge (0 und 1) einen Zweig hinzunehmen. An dem Knoten tragen wir jeweils den Zustand der Speicher ein, während wir den Zweig mit den Ausgangssymbolen kennzeichnen.

Codediagramm

Beispiel 7.4-6:

Wir betrachten den Code des Beispiel 7.4-5. Wir haben zwei Speicher, so dass die Schaltung insgesamt vier Zustände $a = 00, b = 10, c = 01, d = 11$ haben kann (der Zustand $c = 01$ bedeutet 0 im ersten Speicher und 1 im zweiten Speicher). Beginnend mit dem Zustand $a = 00$ stellen wir folgendes Codediagramm auf. Die einzelnen Werte, z. B. Eingangssymbol 1 im Zustand (10) ergibt als Ausgang (01), entnehmen wir Tabelle 7.4-2.

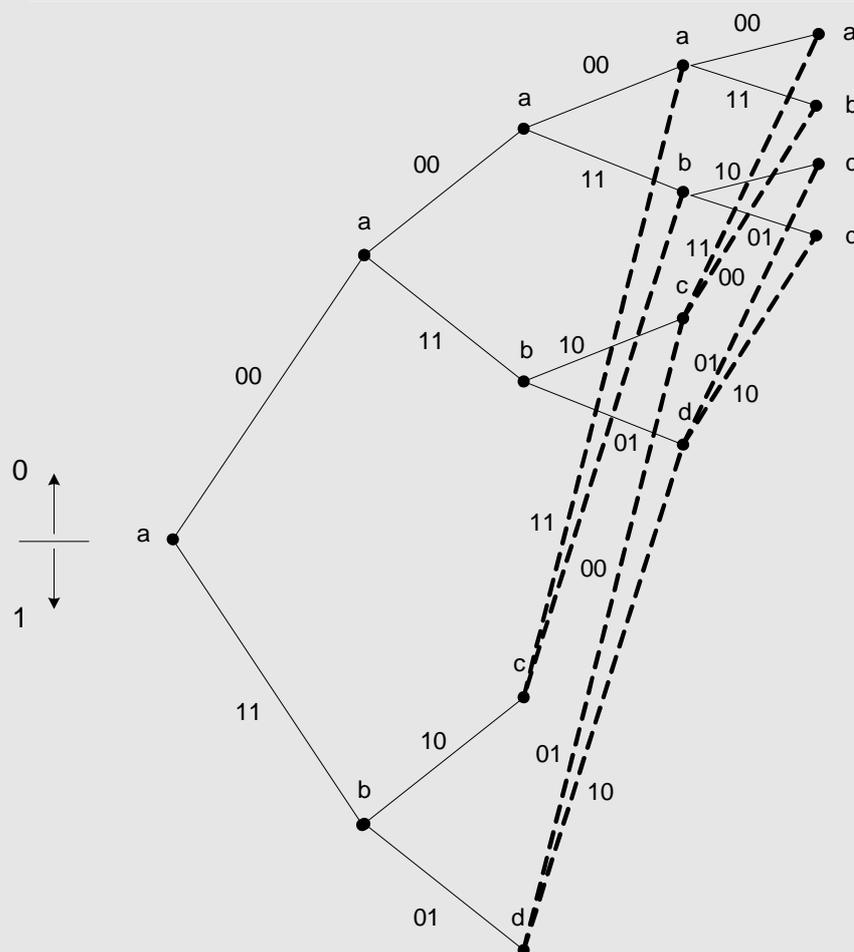


In Beispiel 7.4-6 wiederholt sich die Struktur des Codiagramms nach 3 Schritten; im Allgemeinen wiederholt sie sich nach K Schritten. Außerdem wird deutlich, dass wir zwei Knoten, die im selben Abstand vom Ursprungsknoten liegen und gleiche Zustände aufweisen, zusammenlegen können, denn ab dann ist deren Codiervorschrift identisch bzw. der weitere Verlauf des Codiagramms für die nachfolgenden Symbole ist identisch. Die Modifikation führt zu einer kompakteren Darstellung - das entstandene Diagramm wird als **Trellis-Diagramm** bezeichnet.

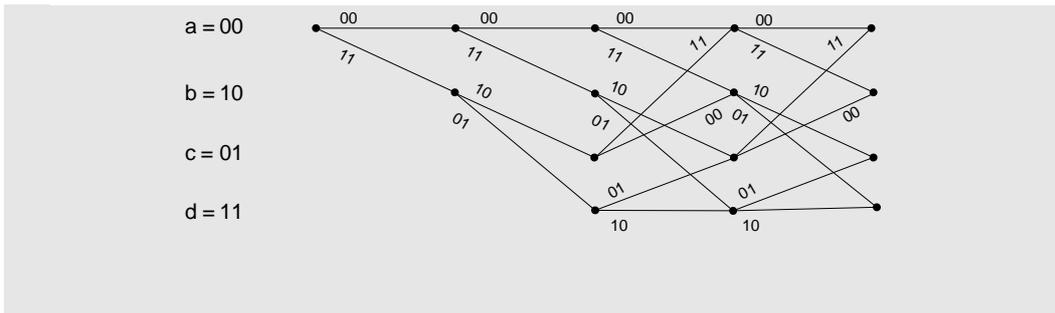
Trellis-Diagramm

Beispiel 7.4-7:

Wir leiten aus dem Codiagramm für Beispiel 7.4-6 das Trellis-Diagramm ab und erhalten:



Wir zeichnen das Trellis-Diagramm etwas um und stellen noch fest, dass die gesamte Codierinformation in dem letzten Abschnitt enthalten ist; dies und die Aussage, dass der Ausgangszustand a war, genügt, um die Codierfolge vollständig anzugeben.



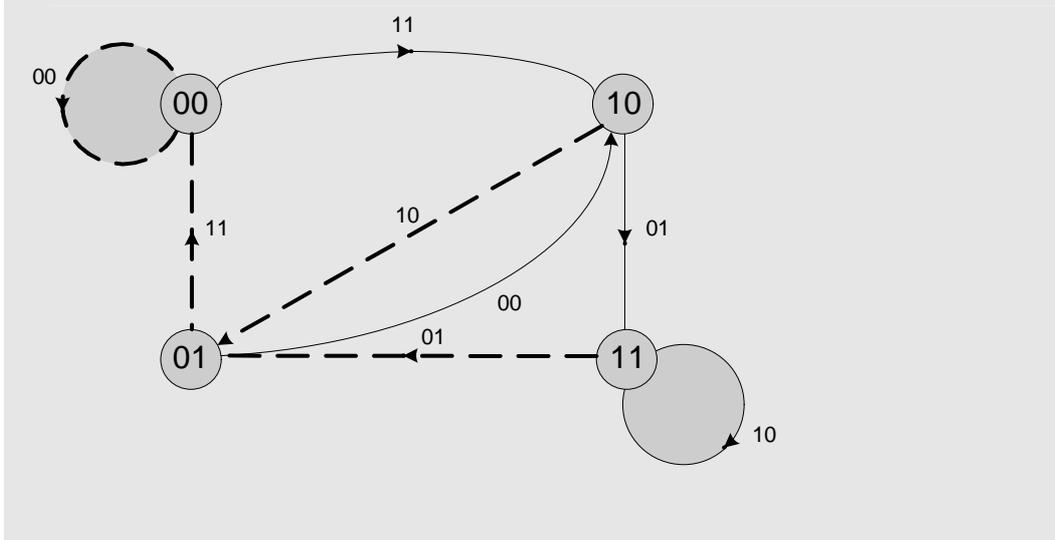
Eine weitere komprimierte Darstellung von Faltungs-Codes ergibt sich, wenn man lediglich den letzten Abschnitt der Trellis-Codierung berücksichtigt.

Die Zustände werden als Knoten dargestellt, gerichtete Zweige zeigen die Zustandsänderungen an, wobei diese nun für das Eingangssymbol 1 durchgezogen und für das Eingangssymbol 0 gestrichelt gezeichnet werden. Die Zweige werden außerdem mit den Ausgangsfolgen (wie bei Trellis-Diagrammen) markiert. Diese Darstellung bezeichnen wir als **Zustandsdarstellung** von Faltungs-Codes.

Zustandsdarstellung

Beispiel 7.4-8:

Wir geben die Zustandsdarstellung des Codes im Beispiel 7.4-7 an:



Zur Decodierung der Faltung-Codes können wir uns, wie bereits skizziert, auf die Betrachtung als Blockcodes zurückziehen. Wir können dann das Maximum-Likelihood-Verfahren anwenden. Das Konzept des Hamming-Abstandes ist wie bei Blockcodes anwendbar.

Wie wir bei der Codierung feststellten, können wir die Eigenschaften des Code-diagramms, dass sich die Struktur wiederholt, ausnutzen, um das Codierschema zu vereinfachen. Dies gilt auch für das Decodieren. So können wir bei der Maximum-Likelihood-Entscheidung anstatt des Codediagramms das Trellis-Diagramm verwenden. Dabei ergibt sich, dass immer, wenn zwei Pfade zusammenfallen, wir uns für den Pfad (d. h. Teilwort) entscheiden, der den geringeren Hamming-Abstand

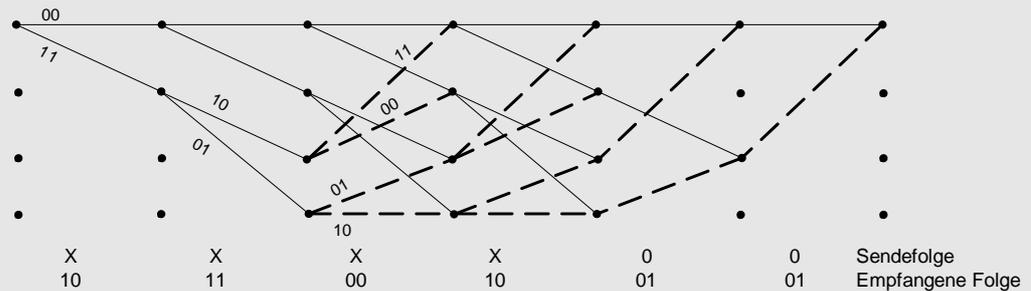
vom empfangenen Teilwort ergibt. Wir markieren jeweils die Knoten im Trellis-Diagramm mit dem Hamming-Abstand und entscheiden zum Schluss, welche Trellis-Folge die günstigere im Sinne des Maximum-Likelihood-Kriteriums ist. Bei der Decodierung der letzten Symbole kann die bekannte Tatsache, dass die letzten K Symbole, die gesendet werden, Null sind, verwendet werden oder auch nicht. Im zweiten Fall ist bei langen Folgen der Fehler vernachlässigbar. Das beschriebene Verfahren bildet den Kern des **Viterbi-Algorithmus** für Faltungs-Codes.

Viterbi-Algorithmus

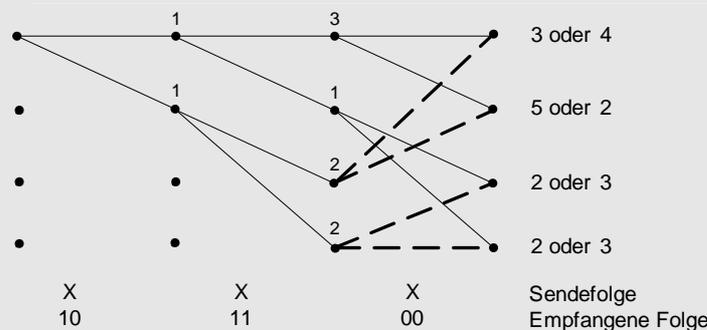
Beispiel 7.4-9:

Wir wollen nun die Decodierung für den Faltungs-Code des Beispiel 7.4-7 ansehen. Wir nehmen an, dass die aus 12 Symbolen bestehende Folge $v = (101100100101)$ empfangen wurde. Gesucht ist die Sendefolge. Es wird das Maximum-Likelihood-Verfahren angewandt, wobei der Viterbi-Algorithmus verwendet wird.

Das Trellis-Diagramm unter der Annahme, dass vom Zustand (00) begonnen wurde und die letzten 2 gesendeten Symbole Null waren, sieht wie folgt aus:



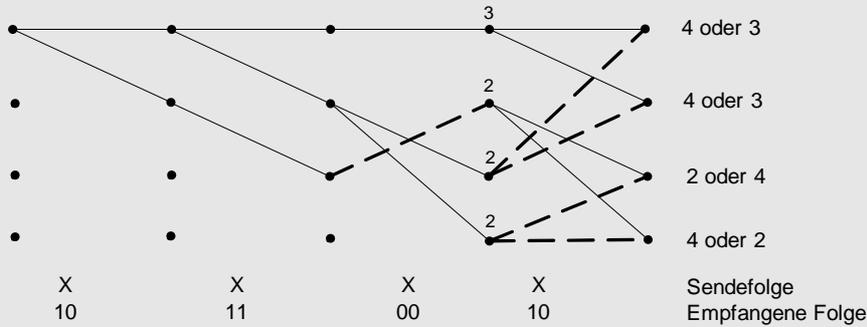
Nach drei Schritten sieht das Trellis-Diagramm wie folgt aus:



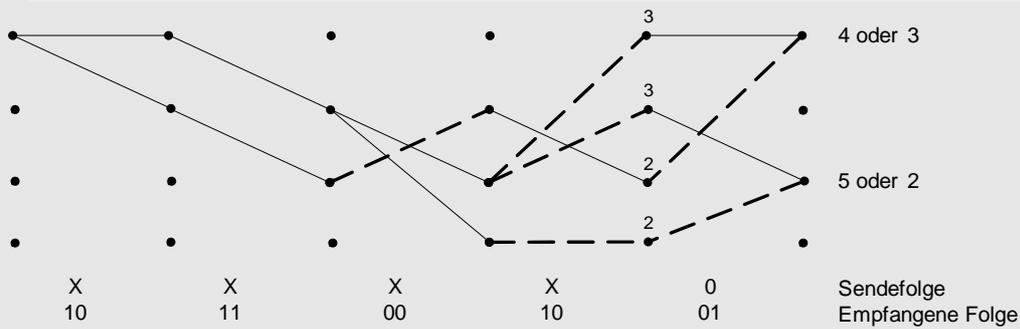
An den jeweiligen Knoten sind die Abstände zwischen der Trellis-Folge (gezeichneter Teilpfad) und der Empfangsfolge eingetragen. In der letzten Spalte entspricht die erste Zahl dem durchgezogenen, die zweite Zahl dem

gestrichelten Pfad. Wir wählen jeweils die Folge mit dem kleinsten Abstand, bei Gleichheit willkürlich den durchgezogenen Pfad.

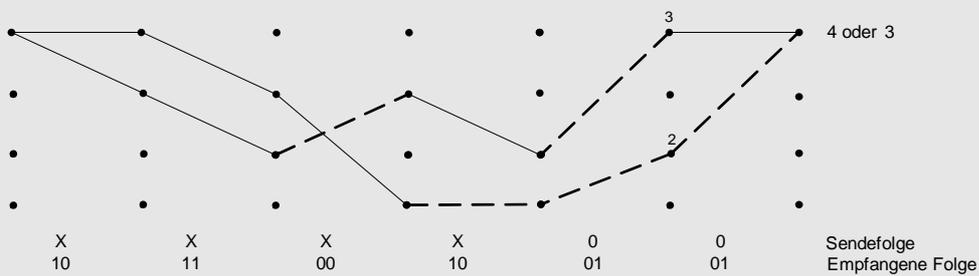
Nach vier Schritten haben wir:



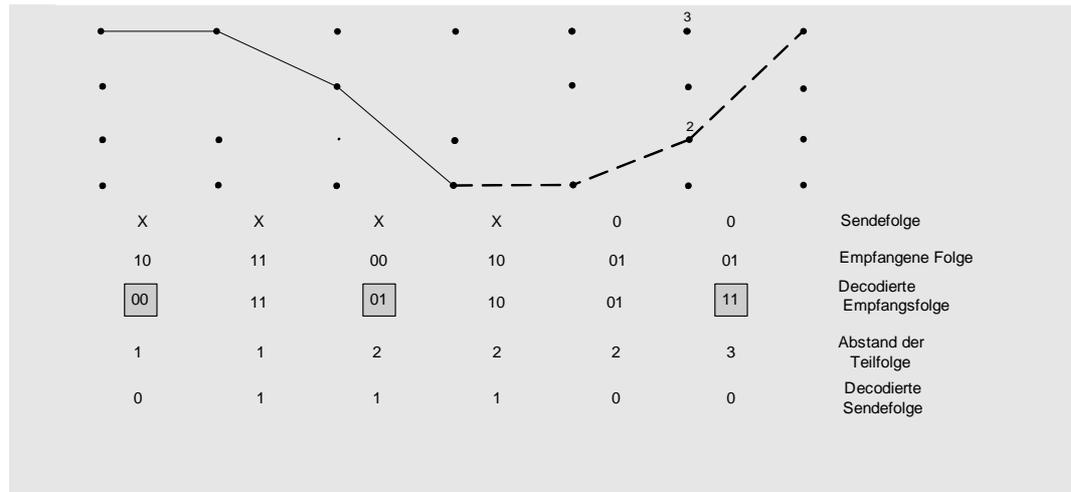
Nach fünf Schritten erhalten wir:



Nach sechs Schritten erhalten wir:



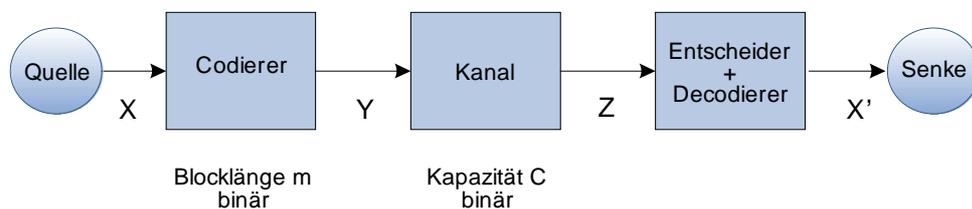
Nach dem letzten Schritt haben wir:



Faltungs-Codes sind besonders günstig für die Codierung von langen Nachrichtenfolgen; sie werden häufig bei der Satellitenübertragung angewandt. Für die Decodierung wird nicht die ganze Nachricht abgewartet, sondern bereits nach wenigen Symbolen begonnen. Man verwendet dabei das Maximum-Likelihood-Verfahren jedoch mit einer sequentiellen Decodierungsstrategie, bei der man, falls man sich für eine falsche Folge entscheidet und die Fehler sich häufen, einige Stellen wieder zurückgeht, um eine andere Folge zu nehmen. Der Fortschritt der Mikroelektronik hat wesentlich dazu beigetragen, dass solche Algorithmen implementiert werden können, und trägt somit wesentlich zu ihrer Verbreitung bei.

7.5 Der Kanalcodierungssatz

Kanalcodierungssatz Wir wenden uns nun dem **Kanalcodierungssatz** zu. Er wird oft der Fundamentalsatz der Kanalcodierung genannt oder als Shannons 2. Satz bezeichnet. Wir betrachten folgende Anordnung.



Das Quellenalphabet besteht aus gleichwahrscheinlichen Symbolen. Der Codierer codiert die Quellenausgänge in q binäre Codewörter der Länge m . Diese werden Symbol für Symbol über einen (binären) gedächtnislosen Kanal mit der Kanalkapazität C übertragen. Da wir annehmen, dass die einzelnen Übertragungen statistisch unabhängig sind, können wir auch anstatt symbolweiser Übertragung über den Kanal die codewortweise Übertragung über die m -te Erweiterung des Kanals betrachten (siehe Abb. 4.3-2). Betrachten wir den Codierer und den Kanal als einen

neuen Kanal, so haben wir am Kanaleingang die Entropie $H(X) = ldq$. Am Kanalausgang haben wir 2^m -näre Symbole Z . Die Entropie am Kanalausgang sei $H(Z)$, die Transinformation $H(X; Z)$. Wir bezeichnen den Ausdruck

$$R = \frac{H(X)}{m} = \frac{ldq}{m} \quad 7.5-1$$

als **Informationsübertragungsrate** (vgl. auch mit Effizienz Gl. 6.1-2). Bei vernachlässigbarer Fehlerwahrscheinlichkeit, d. h. $H(X|Z) = 0$ ist wegen Gl. 4.2-13

**Informations-
übertragungsrate**

$$H(X; Z) = H(X) - H(X|Z) = H(X)$$

und somit

$$R = \frac{H(X; Z)}{m},$$

d. h. R kann in diesem Falle als Transinformation pro Symbol des Codewortes angesehen werden. Wir können die Informationsrate unserer Anordnung erhöhen, indem wir q und somit ldq bzw. $H(X)$ heraufsetzen oder m herabsetzen.

Wir verlangen nun vom Codierer/Decodierer und Entscheider, dass X und X' möglichst übereinstimmen, die Fehlerwahrscheinlichkeit P_f über die gesamte Strecke also unter einer beliebig vorgegebenen Schranke δ bleibt. Wir fragen: Gibt es eine Codier/Decodier-Einrichtung (und Entscheider), die unsere Forderung erfüllt? Der **Kanalcodierungssatz** gibt uns die Antwort auf unsere Frage. Es existiert stets eine Codierung, die eine beliebig niedrige Fehlerwahrscheinlichkeit und eine Informationsübertragungsrate beliebig nahe unter der Kanalkapazität des fehlerbehafteten Kanals ermöglicht.

Kanalcodierungssatz

Wir werden im Folgenden den Satz für den binären symmetrischen Kanal genauer ansehen und beweisen. Für den Beweis werden wir eine binomiale Abschätzung verwenden, die mit Hilfe der Stirling'sche Approximation für $n!$ abgeleitet wird. Diese ist im Anhang D wiedergegeben. Einführend betrachten wir die für den Beweis relevanten Aspekte der Zufallscodierung und des binären symmetrischen Kanals.

Für die Codierung von q gleichwahrscheinlichen Nachrichten betrachten wir die **Zufallscodierung**, d. h. wir bestimmen unseren Code bzw. die Codewörter zufällig. Insgesamt gibt es 2^m binäre Wörter der Länge m . Wir greifen zufällig eines dieser Wörter heraus und bestimmen es zum Codewort. Wir wiederholen dies q -fach, wobei wir jedesmal alle 2^m Wörter in Betracht ziehen, d. h. Wiederholungen zulassen. Auf diese Weise erhalten wir q Codewörter bzw. unseren Code. Ist m groß gegenüber q , so ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir für die Codierung von zwei Nachrichten dasselbe Codewort erhalten, gering. Passiert dies jedoch, so erhalten wir eine höhere Fehlerwahrscheinlichkeit P_f . Wir lassen dieses zu, weil es unsere späteren Abschätzungen wesentlich vereinfacht. Da wir q unabhängige Wahlen zur Bestimmung unserer Codierung haben, sind insgesamt $(2^m)^q = 2^{mq}$ Codierungen möglich. Die Wahrscheinlichkeit, dass wir eine bestimmte Codierung auswählen ist somit $\frac{1}{2^{mq}}$.

Zufallscodierung

Wir betrachten nun den binären symmetrischen Kanal (siehe Gl. 4.2-1). Seine Kanalkapazität C (siehe Beispiel 4.3-3) errechnet sich zu

$$C = 1 + [(1-p) \log(1-p) + p \cdot \log p] \quad 7.5-2$$

$$C = 1 - H(p). \quad 7.5-3$$

Wir haben die Klammer mit $-H(p)$ bezeichnet, weil $H(p)$ die Entropie einer Quelle mit zwei Symbolen, die mit der Wahrscheinlichkeit p und $(1-p)$ auftreten, darstellt. y_0 sei ein gesendetes Codewort. Es ist eines der q Codewörter. z_0 sei das empfangene Wort. Es ist eines der 2^m möglichen Wörter. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zeichen verfälscht wird, ist p . Im Mittel werden bei der Übertragung eines Codewortes (d. h. von m Zeichen) mp Zeichen verfälscht, d. h. der Erwartungswert des Abstandes zwischen y_0 und z_0 liegt bei mp .

Zur Entscheidung, welches Codewort gesendet wurde, verwenden wir eine einfache Regel. Wir betrachten dazu eine Kugel $K(r)$ vom Radius r um z_0 in dem Vektorraum B^m , wobei B aus zwei Elementen z. B. $\{0, 1\}$ besteht. Den Radius der Kugel legen wir etwas größer aus als der Erwartungswert des Abstandes zwischen y_0 und z_0 , genauer, wir setzen

$$r = m(p + \varepsilon_1). \quad 7.5-4$$

Wir entscheiden nun, dass y'_0 gesendet wurde, wenn genau ein y'_0 innerhalb der Kugel $K(r)$ liegt.

Wir betrachten nun die Fehlerwahrscheinlichkeit P_f , die bei der zufälligen Codierung und der beschriebenen Entscheidungsstrategie auftritt. Wir merken dazu an, dass ein Fehler genau dann auftritt, wenn

1. y_0 nicht innerhalb von $K(r)$ liegt oder
2. y_0 innerhalb $K(r)$ liegt und mindestens ein anderes $y_i \neq y_0$ innerhalb von $K(r)$ liegt.

Die Fehlerwahrscheinlichkeit P_f ergibt sich zu

$$P_f = P(\{y_0 \notin K(r)\}) + P(\{y_0 \in K(r)\}) \cdot P(\{\text{Es gibt mindestens ein } y_i \neq y_0, \text{ mit } y_i \in K(r)\}).$$

Wir haben hierbei jeweils in geschweiften Klammern die Ereignisse, die zu P_f beitragen, angegeben und mit P davor die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse bezeichnet. Beim zweiten Term können wir statt der Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Auftretens der beiden Ereignisse das Produkt schreiben, weil sie statistisch unabhängig sind. Da $P(\{y_0 \in K(r)\}) \leq 1$ ist, haben wir ferner die Abschätzung

$$P_f \leq P(\{y_0 \notin K(r)\}) + P(\{\text{es gibt ein } y_i \neq y_0, \text{ mit } y_i \in K(r)\}).$$

Wegen

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

(siehe Gl. 3.1-9) folgt nun

$$\leq P(\{y_0 \notin K(r)\}) + \sum_{\substack{i \\ y_i \neq y_0}} P(\{y_i \in K(r)\}). \quad 7.5-5$$

Das Ereignis $\{y_0 \notin K(r)\}$ ist identisch mit dem Ereignis, dass der Abstand zwischen y_0 und z_0 größer als $m(p + \varepsilon_1)$ ist, der Mittelwert mp also um mehr als $m\varepsilon_1$ überschritten wird. Wir wollen nun zeigen, dass durch die Wahl von m für ein vorgegebenes ε_1 die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses kleiner als ein vorgegebenes δ_1 gemacht werden kann, d. h. $P(\{y_0 \notin K(r)\}) \leq \delta_1$.

Wir verwenden hierzu die Bernoullische Ungleichung (schwaches Gesetz der großen Zahlen Gl. 3.6-4), die wir in der komplementären Form wie folgt schreiben:

$$P(\{|\bar{x}_n - P_a| > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Wir verwenden diese auf unser Experiment: das Senden eines Zeichens, das mit der Wahrscheinlichkeit p verfälscht wird. Wir wiederholen das Experiment m mal. Wir beziehen uns nun auf die Symbole, die wir in der Abhandlung von Gl. 3.6-4 verwendeten und zeigen die Korrespondenzen mit unserem Experiment auf. A entspricht dem Ereignis, dass das Zeichen verfälscht wird. \mathbf{k} entspricht der Zufallsvariablen, die angibt, wie viele Fehler bei m -facher Wiederholung auftreten, d. h. wie viele Fehler ein Codewort enthält. $P(\{|\bar{x} - P_a| > \varepsilon\})$ bzw. $P(\{|\frac{\mathbf{k}}{m} - p| > \varepsilon_1\}) = P(\{|\mathbf{k} - mp| > m\varepsilon_1\})$ gibt an, wie oft die Anzahl der Fehler in einem Codewort um mehr als $m\varepsilon_1$ vom Mittelwert abweicht, d. h. das Codewort in einer Entfernung größer als $m\varepsilon_1$ von der Oberfläche der Kugel $K(mp)$ liegt. $P(\{|\mathbf{k} - mp| > m\varepsilon_1\})$ ist also größer als $P(\{y_0 \notin K(r)\})$. Die Bernoullische Ungleichung liefert uns nun

$$P(\{|\mathbf{k} - mp| > m\varepsilon_1\}) \leq \frac{1}{4m\varepsilon_1^2} = \delta_1.$$

Für die Fehlerwahrscheinlichkeit P_f haben wir somit die Abschätzung

$$P_f \leq \delta_1 + \sum_{\substack{i \\ y_i \neq y_0}} P(\{y_i \in K(r)\}). \quad 7.5-6$$

Wir merken noch an, dass δ_1 unabhängig vom tatsächlich gewählten Code ist. Demgegenüber sind die einzelnen Wahrscheinlichkeiten unter dem Summenzeichen abhängig vom gewählten Code, denn die Wahrscheinlichkeit, dass ein $y_i \neq y_0$ innerhalb der Kugel $K(r)$ um z_0 liegt, ist wohl abhängig von der Wahl der Codewörter. P_f kann deshalb als eine Zufallsvariable aufgefasst werden, die abhängig von der Wahl des Codes ist. Wir können deshalb den Erwartungswert von \mathbf{P}_f bilden und erhalten

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{P}_f\} &\leq \delta_1 + E\left\{\sum_{\substack{i \\ y_i \neq y_0}} \mathbf{P}(\{y_i \in K(r)\})\right\} & 7.5-7 \\ &= \delta_1 + (q-1)E\{\mathbf{P}(\{y_i \in K(r)\})\} \\ &\leq \delta_1 + q \cdot E\{\mathbf{P}(y_i \in K(r))\}. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun über alle Codierungen hinweg das Ereignis $\{y_i \in K(r)\}$. Wir haben bei der Wahl jeder Codierung 2^m Möglichkeiten für die Wahl jedes Codewortes. Die mittlere Wahrscheinlichkeit (bzw. der Erwartungswert der Wahrscheinlichkeit), dass wir ein y_i wählen, das in der Kugel liegt, ist deshalb gleich dem Verhältnis der Anzahl der Wörter, die in der Kugel liegen, zu der Gesamtanzahl 2^m aller Wörter. Bezeichnen wir die Anzahl der Wörter, die in der Kugel liegen, mit $N(m)$, so haben wir

$$E\{\mathbf{P}(\{y_i \in K(r)\})\} = \frac{N(m)}{2^m}. \quad 7.5-8$$

Die Anzahl der Wörter, die in der Kugel liegen, ist gleich der Anzahl der Wörter, die in einem Abstand $\leq r = m(p + \varepsilon_1) = mp_\varepsilon$ vom Mittelpunkt z_0 liegen. Betrachten wir z_0 , so gibt es genau $\binom{m}{k}$ Wörter im Abstand k von z_0 (dies ist genau die Anzahl der Möglichkeiten, k Zeichen aus m auszuwählen), d. h.

$$\begin{aligned} N(m) &= \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \dots + \binom{m}{[mp_\varepsilon]} \\ &= \sum_{i=0}^{[mp_\varepsilon]} \binom{m}{i}, \end{aligned} \quad 7.5-9$$

wobei $[mp_\varepsilon]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich mp_ε ist.

Wir wollen nun diesen Ausdruck abschätzen und verwenden hierzu die im Anhang D abgeleitete binäre Schranke

$$\sum_{i=0}^{[mp_\varepsilon]} \binom{m}{i} \leq 2^{mH(p_\varepsilon)} \text{ für } p_\varepsilon < \frac{1}{2}, \quad 7.5-10$$

wobei

$$H(p_\varepsilon) = -p_\varepsilon \log p_\varepsilon - (1 - p_\varepsilon) \log(1 - p_\varepsilon) \quad 7.5-11$$

und $m >$ einem Mindestwert m_0 ist. Die Voraussetzung $m > m_0$ ist erforderlich, damit Gl. 7.5-6 erfüllt wird. Wir nehmen im Folgenden an, es sei $m > m_0$. Insgesamt haben wir somit für den Erwartungswert der Fehlerwahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{P}_f\} &\leq \delta_1 + q \cdot \frac{2^{mH(p_\varepsilon)}}{2^m} \\ E\{\mathbf{P}_f\} &\leq \delta_1 + q \cdot 2^{-m(1-H(p_\varepsilon))}. \end{aligned} \quad 7.5-12$$

Nun gilt

$$1 - H(p_\varepsilon) = 1 - H(p + \varepsilon_1) < 1 - H(p) = C, \quad 7.5-13$$

da $H(p)$ eine konvexe Funktion ist und wir ohne Einschränkung annehmen, dass $p \leq \frac{1}{2}$ ist. Wählen wir ε_1 klein genug, so können wir $H(p + \varepsilon_1)$ beliebig nahe an $H(p)$ bringen.

Wir setzen nun voraus, dass

$$R = \frac{ldq}{m} < 1 - H(p_\varepsilon)$$

ist, d. h.

$$R = \frac{ldq}{m} < 1 - H(p + \varepsilon_1) < 1 - H(p) = C. \quad 7.5-14$$

Wegen Gl. 7.5-14 können wir den zweiten Term in Gl.7.5-12

$$2^{mR} \cdot 2^{-m(1-H(p_\varepsilon))}$$

durch geeignete Wahl von ε_1 , und m groß genug stets, kleiner als eine vorgegebene Schranke δ_2 halten. Wir haben somit gezeigt, dass der Erwartungswert von P_f bei $R < C$, durch eine geeignete Wahl von ε_1 und m , unter einer vorgegebenen Schranke gehalten werden kann. Da diese Aussage für den Erwartungswert von P_f über alle zufälligen Codierungen hinweg gilt, muss es mindestens einen Code geben, für den sie gilt. Somit haben wir die Existenz eines Codes, der unsere Forderung erfüllt, nachgewiesen.

Wir wollen unseren Beweisgang noch einmal zusammenfassen. Wir haben mit einer Betrachtung der Zufallscodierung begonnen und festgelegt, wie diese jeweils durchgeführt wird. Wir haben dann eine einfache Decodierungsstrategie angegeben. Für einen zufällig gewählten Code haben wir dann die Fehlerwahrscheinlichkeit P_f in Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeiten bestimmter Ereignisse aufgestellt. Diese bestand aus zwei Termen. Den ersten Term konnten wir nach oben abschätzen. Wir bildeten dann den Erwartungswert der Fehlerwahrscheinlichkeit P_f über alle Codierungen hinweg und zeigten, dass es mindestens eine zufällige Codierung geben muss, für die diese Abschätzung gilt. Somit zeigten wir, dass wenn die Informationsrate kleiner als die Kanalkapazität gewählt wird, es einen Code gibt, der die Fehlerwahrscheinlichkeit unter einer gewünschten Schranke hält. Je geringer wir die Fehlerwahrscheinlichkeit haben wollen, desto höher müssen wir die Länge des Blockcodes wählen, wobei wir die Kugel für unsere Entscheidungsstrategie entsprechend wählen.

Der Kanalcodierungssatz gibt nicht den gewünschten Code explizit an, sondern besagt nur, dass dieser existiert. Seine Aussage ist jedoch überraschend und zugleich bedeutend, denn sie zeigt die Möglichkeiten und Grenzen der Kanalcodierung.

Beispiel 7.5-1:

Wir betrachten den binären symmetrischen Kanal mit der Fehlerwahrscheinlichkeit $p = 0,99$. Aus Beispiel 4.3-3 haben wir

$$\begin{aligned} C &= 1 + (1 - p)ld(1 - p) + pldp \\ &= 1 - H(p) = 0,9192. \end{aligned}$$

Wir wählen $R = 0,91$ und erhalten

$$C - R = 0,0092.$$

Wir wollen $\delta_2 = 0,001$ haben, d. h.

$$0,001 \geq q \cdot 2^{-mC_\varepsilon}$$

$$0,001 \geq 2^{mR} \cdot 2^{-mC_\varepsilon} = 2^{-m(C_\varepsilon - R)}$$

$$\text{ld } 0,001 \geq -m(C_\varepsilon - R)$$

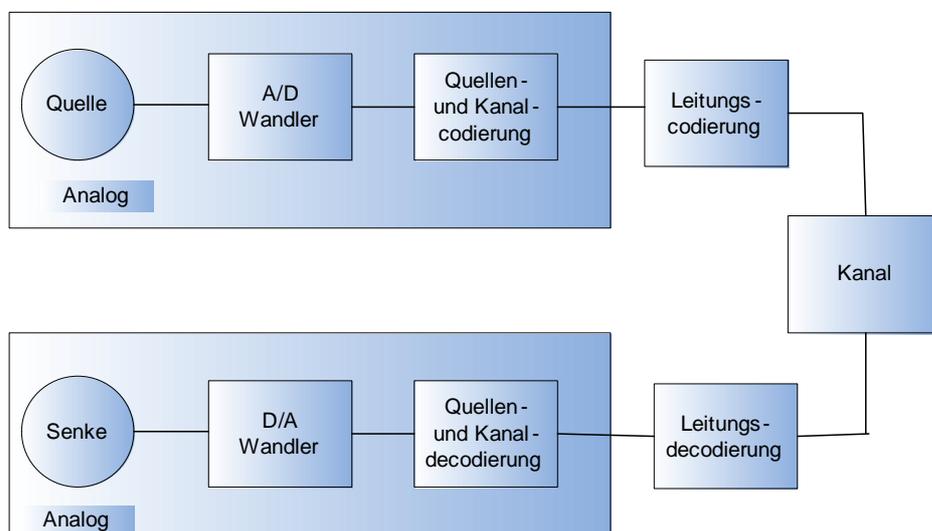
$$\frac{9,9658}{m} \leq C_\varepsilon - R = C_\varepsilon - 0,091.$$

Wir können nun C_ε maximal gegen C gehen lassen, d. h. die rechte Seite maximal gleich 0,0092 machen. Dies bedeutet, dass wir m mindestens gleich 1083 wählen müssen, um unsere Forderung zu erfüllen.

8 Leitungscodierung

Die Umwandlung der Quellensymbole einer diskreten Nachrichtenquelle in Signale, die über den physikalischen Kanal übertragen werden, führt in das Gebiet der analogen Übertragungstechnik. Wir wenden uns deshalb lediglich dem Umwandeln der Quellensymbole in zwei oder mehrstufige Impulse für die Übertragung auf der Leitung, der sogenannten "Leitungscodierung", zu. Wir wollen somit insbesondere die Modulation mit einem sinusförmigen Träger nicht näher betrachten.

Die Kommunikationsstrecke, die wir nunmehr betrachten, hat somit folgende Gestalt:



8.1 Anforderungen an Leitungscodes

Bisher haben wir den Kanal lediglich über seine statistischen Eigenschaften modelliert. Tatsächlich werden die Symbole des Codealphabets in Form von physikalischen Größen als Signale auf dem Kanal übertragen. Diese werden an die physikalischen Eigenschaften des Kanals (wie Bandbreite, Frequenzverlauf usw.) angepasst.

Modulation

Eine solche Anpassung wird allgemein als **Modulation** bezeichnet. Häufig verwendet man sinusförmige oder pulsförmige Signale, deren charakteristische Parameter (wie z. B. Amplitude, Frequenz, Dauer usw.) entsprechend dem jeweils vorliegenden Symbol des Codealphabets variiert werden; man spricht dann von Modulation mit einem Träger. Typische Beispiele solcher Modulationsverfahren, die dem Leser aus den Grundvorlesungen her bekannt sein dürften, sind Pulsamplitudenmodulation, Frequenzmodulation, Pulsdauermodulation usw. Sind die physikalischen Eigenschaften eines Kanals bekannt, so kann der Kanal, wie in der klassischen Nachrichtentechnik durch deterministische, systemtheoretische Modelle nachgebildet werden. Je nachdem, welche Eigenschaften der Kanal besitzt, bzw. welche Eigenschaften des Kanals bekannt sind (wie z. B. Verzerrungen, Einkopplung von Störungen oder Echos usw.), können entsprechende Maßnahmen (wie z. B. Entzerrung, Signalanpassung, Echokompensation usw.) zur optimalen Übertragung des Signals über den Kanal getroffen werden. Solche Betrachtungen führen unmittelbar in die analoge Signaltheorie. Wir wollen lediglich einen Aspekt, die Leitungscodierung, näher betrachten. Es handelt sich dabei um die Umformung der vorliegenden Symbole des Codealphabets in (zwei- oder dreistufige) Impulsfolgen. Dies wird häufig als **Basisbandübertragung** (genauer binäre oder ternäre Pulsamplitudenmodulation) bezeichnet, weil keine ausgesprochene Frequenzumsetzung vorgenommen wird.

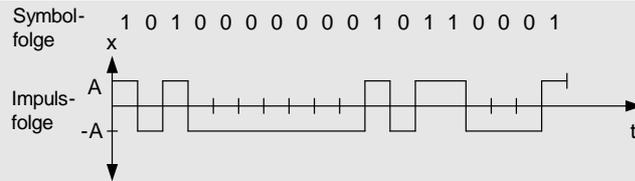
Basisbandübertragung

Bei dieser Art der Leitungscodierung ist es möglich, solange die Störungen eine gewisse Schwelle nicht überschreiten, die Signale vollständig zu regenerieren. Dieses bildet auch einen der wesentlichen Vorteile der digitalen Übertragungstechnik überhaupt. Auf langen Übermittlungstrecken werden, sobald das Signal-zu-Rausch-Verhältnis einen gewissen Wert unterschreitet, die Signale regeneriert. Einrichtungen, die dies vornehmen, werden **Signalregeneratoren** (*repeater*) genannt. Sie bestehen im Wesentlichen aus einem Verstärker, einem Entzerrer, einer Taktrückgewinnungsschaltung und einem Entscheider. Im Folgenden wollen wir zunächst die Anforderungen an Leitungscodes zusammenstellen, einige binäre und ternäre Leitungscodes näher ansehen und anschließend die gegenseitige Störung, die Impulse verursachen (Symbolinterferenz), betrachten.

Signalregeneratoren

Beispiel 8.1-1:

Die Ausgänge einer binären gleichverteilten Quelle ohne Gedächtnis werden mit einem binären Leitungscodiercode mit der Amplitude $\pm A$ codiert. Für die angegebene Symbolfolge erhält man die folgende Impulsfolge:



Für die Erwartungswerte der Signalamplitude x gilt:

$$E\{x(t)\} = A \cdot \frac{1}{2} - A \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$E\{x^2(t)\} = A^2 \cdot \frac{1}{2} + A^2 \cdot \frac{1}{2} = A^2.$$

Für die Berechnung der Autokorrelationsfunktion $R(\tau) = E\{x(t) \cdot x(t + \tau)\}$ beschränken wir uns auf positive τ (denn es gilt $R(\tau) = R(-\tau)$).

Ist $\tau = 0$, so ist $R(0) = E\{x^2(t)\} = A^2$. Ist $\tau > T$, so sind $x(t)$ und $x(t + \tau)$ statistisch unabhängig, so dass

$$R(\tau) = E\{x(t) \cdot x(t + \tau)\}$$

$$= E\{x(t)\} \cdot E\{x(t + \tau)\} = 0.$$

Für $0 \leq \tau \leq T$ haben wir die vier Fälle aus der Kombination von $x(t) = \pm A$ und $x(t + \tau) = \pm A$ zu betrachten, wobei gilt:

$$P\{x(t) = A, x(t + \tau) = A\} = P\{x(t) = A\} \cdot P\{x(t + \tau) = A | x(t) = A\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right)$$

$$P\{x(t) = A, x(t + \tau) = -A\} = P\{x(t) = A\} \cdot P\{x(t + \tau) = -A | x(t) = A\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau}{2T}$$

$$P\{x(t) = -A, x(t + \tau) = -A\} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right)$$

$$P\{x(t) = -A, x(t + \tau) = +A\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau}{2T}$$

Somit haben wir

$$R(\tau) = E\{x(t) \cdot x(t + \tau)\} = \frac{A^2}{2} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) - \frac{A^2}{2} \frac{\tau}{2T}$$

$$+ \frac{A^2}{2} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) - \frac{A^2}{2} \frac{\tau}{2T}$$

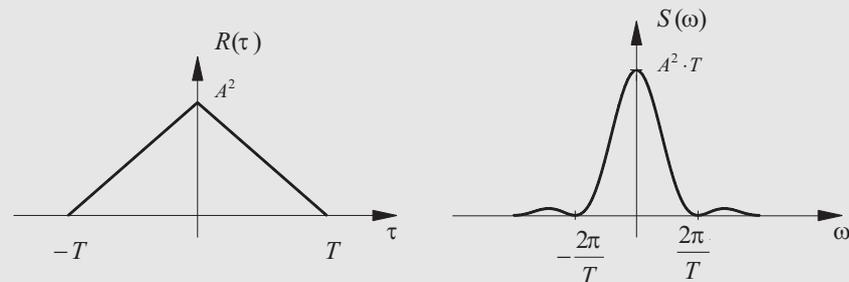
$$= A^2 \left(1 - \frac{\tau}{T}\right).$$

Insgesamt ist damit

$$R(\tau) = \begin{cases} A^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) & \text{für } |\tau| \leq T \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Entsprechend (Gl. 3.7-19) erhalten wir das Leistungsdichtespektrum, indem wir die Fouriertransformierte bilden (Anhang B.3):

$$S(\omega) = A^2 \cdot 4 \frac{\sin^2 \omega \frac{T}{2}}{\omega^2 T}.$$



Anforderungen an Leitungscodes

Häufig werden folgende **Anforderungen an Leitungscodes** gestellt:

- geringer Implementierungsaufwand
- Gleichstromfreiheit
- hoher Taktgehalt
- Transparenz
- hohe Effizienz
- geringe Störempfindlichkeit.

Gerade im privaten Bereich (lokale Netze, Nebenstellenanlagen) ist es erforderlich und wegen der geringeren Reichweite auch möglich, den Implementierungsaufwand möglichst niedrig zu halten. Bereits die Tatsache, dass häufig eine Basisbandübertragung gewählt wird und ein einfacher binärer oder ternärer Code verwendet wird, trägt der Forderung nach geringem Implementierungsaufwand Rechnung. Sollen Endgeräte oder Signalregeneratoren über dieselben Übertragungsmedien, über die Datensignale übertragen werden, ferngespeist werden, so muss eine Entkopplung zwischen dem Speisestrom und dem Datensignal vorgenommen werden. Bei der gleichstrommäßigen Fernspeisung ist dann erforderlich, dass der Leitungscode **gleichstromfrei** ist, d. h. keinen Gleichstromanteil aufweist bzw. im unteren Frequenzbereich keine Information überträgt. Dies ist z. B. im herkömmlichen Fernsprechnet, aber auch im ISDN stets erforderlich. Gewöhnlich werden niedrige Frequenzen wegen nichtlinearer Charakteristiken der Übertragungsmedien in diesem Bereich vermieden. So haben z. B. magnetische Speichermedien und Systeme mit Übertragerkopplungen eine geringe Empfindlichkeit für niedrige Frequenzen. Auch hohe Frequenzen werden wegen erhöhtem Nah- und Fernnebensprechen und

Gleichstromfreier Leitungscode

erhöhter Störung anderer Systeme (elektromagnetische Verträglichkeit) gewöhnlich vermieden.

Bei einigen Leitungscodes ist die **laufende digitale Summe** (*running digital sum*), d. h. die Summe der auftretenden binären (+1, -1 codierten) bzw. ternären (+1, 0, -1 codierten) Signalwerte begrenzt. Dies bedeutet, dass bei beliebigen Symbolfolgen der maximale Gleichstromanteil den entsprechenden begrenzten Wert nicht überschreitet.

laufende digitale Summe (running digital sum)

Die **Bitsynchronisation** (bzw. Symbolsynchronisation) gibt den Zeitpunkt an, zu dem ein Bit (bzw. Symbol) endet und ein neues beginnt. Sie wird sowohl auf der Sendeseite als auch auf der Empfangsseite für die Signalverarbeitung, insbesondere für die Codierung, Decodierung und A/D- bzw. D/A-Wandlung benötigt. Auf der Sendeseite wird meist ein konstanter Bittakt über einen sehr genauen Oszillator erzeugt, oder von extern eingegeben und verteilt. Man kann ihn von der Sendeseite über einen getrennten Kanal zur Empfangsseite übertragen oder aber auch auf der Empfangsseite aus dem Datenstrom ableiten. Im zweiten Fall wird erforderlich, dass das empfangene Signal möglichst häufig zwischen den diskreten Signalwerten wechselt, das Signal also einen hohen Taktgehalt aufweist. Spezielle Schaltungen **PLL (Phase Locked Loops)** leiten dann den Takt vom einlaufenden Datensignal ab. Leitungscodes, die es bei beliebigen Symbolfolgen (insbesondere auch bei Folgen, die lange Symbolwiederholungen beinhalten) gestatten, den Bittakt zurückzugewinnen, nennt man selbsttaktend.

Bitsynchronisation

Phase Locked Loops

Häufig werden zusätzliche Maßnahmen zur Erhöhung des Taktgehaltes ergriffen. Zwei solche Maßnahmen sind Codeverletzung und Verwürfelung. Bei der **Codeverletzung** wird beim Überschreiten einer gewissen Anzahl von Symbolwiederholungen, wenn kein Taktgehalt vorhanden ist, die Regel zur Bildung des Leitungscodes bewusst verletzt, Sprünge erzeugt und damit der Taktgehalt erhöht. Auf der Empfangsseite wird die Codeverletzung wieder rückgängig gemacht. Bei der **Verwürfelung** (*scrambling*) wird die zu übertragende Symbolfolge bzw. das zugehörige Polynom durch ein Generatorpolynom *modulo 2* dividiert, um eine Pseudozufallsfolge mit einem hohen Taktgehalt zu erzeugen. Auf der Empfangsseite wird die Verwürfelung durch die *modulo 2* Multiplikation mit dem Generatorpolynom rückgängig gemacht. Häufig verwendete und von ITU-T empfohlene Polynome sind:

Codeverletzung

Verwürfelung

$$\begin{aligned}
 &x^{-7} + x^{-6} + 1 \\
 &x^{-17} + x^{-14} + 1 \\
 &x^{-23} + x^{-5} + 1 \text{ und} \\
 &x^{-23} + x^{-18} + 1.
 \end{aligned}$$

In Abb. 8.1-1 ist eine Schieberegisteranordnung für die Codierung und Decodierung mit dem Polynom $x^{-7} + x^{-6} + 1$ angegeben. Die Schaltung ist selbstsynchronisierend, d. h. es sind keine besonderen Maßnahmen zur Synchronisierung erforderlich, denn nach dem Durchgang der ersten sieben Bits haben beide Schieberegister denselben Inhalt.

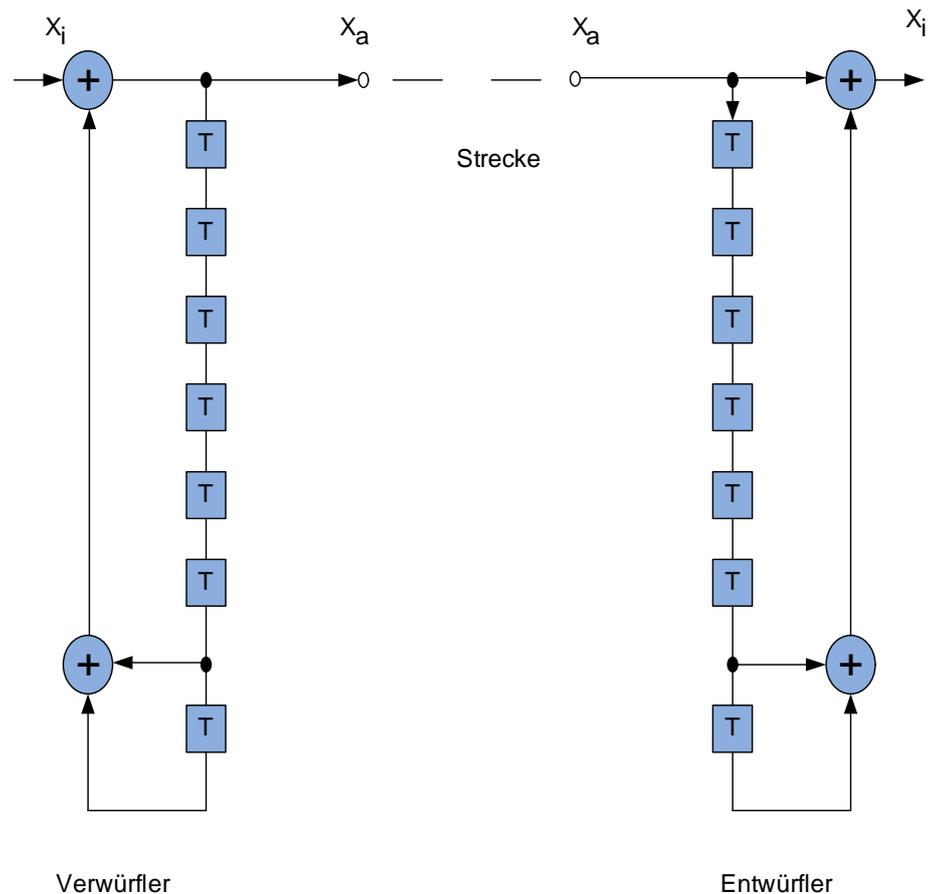


Abb. 8.1-1: Verwürfler und Entwürfler für das vom ITU-T empfohlene (V.27/V.29) Polynom $X^{-7} + X^{-6} + 1$.

Bei besonders ungünstigen Eingangsfolgen können jedoch auch die verwürfelten Daten unerwünschte Binärfolgen (z. B. Eins-Folgen) aufweisen. Um dies zu verhindern, enthalten Verwürfler und Entwürfler Überwachungseinrichtungen, die gegebenenfalls zusätzliche Umpolungen vornehmen.

Beispiel 8.1-2:

Die Eingangsfolge 11011000, d. h. $x_i = 1 + x^{-1} + x^{-3} + x^{-4}$ wird mit dem ITU-T Polynom $g(x) = 1 + x^{-6} + x^{-7}$ verwürfelt. Wir bilden $x_i / (1 + x^{-6} + x^{-7})$ um die Ausgangsfolge zu erhalten:

$$\begin{array}{r}
 1 + x^{-1} + x^{-3} + x^{-4} + x^{-6} + x^{-8} \dots\dots \\
 \underline{1 + x^{-1} + x^{-3} + x^{-4} \mid 1 + x^{-6} + x^{-7}} \\
 1 + x^{-1} + x^{-3} + x^{-4} \\
 \underline{1 + x^{-6} + x^{-7}} \\
 x^{-1} + x^{-3} + x^{-4} + x^{-6} + x^{-7} \\
 \underline{x^{-1} + x^{-7} + x^{-8}} \\
 x^{-3} + x^{-4} + x^{-6} + x^{-8} \\
 \underline{x^{-3} + x^{-9} + x^{-10}} \\
 x^{-4} + x^{-6} + x^{-8} + x^{-9} + x^{-10} \\
 \underline{x^{-4} + x^{-10} + x^{-11}} \\
 x^{-6} + x^{-8} + x^{-9} + x^{-11} \\
 \underline{x^{-6} + x^{-12} + x^{-13}} \\
 x^{-8} + x^{-9} + x^{-11} + x^{-12} + x^{-13} \\
 \underline{x^{-8} + x^{-14} + x^{-15}} \\
 x^{-9} + x^{-11} + x^{-12} + x^{-13} + x^{-14} + x^{-15}
 \end{array}$$

Die Ausgangsfolge lautet somit

$$\times_a = 1 + x^{-1} + x^{-3} + x^{-4} + x^{-6} + x^{-8},$$

d. h. 110110101...

Unter der **Transparenz eines Codes** versteht man, dass der Code es erlaubt, jede beliebige Kombination der Codesymbole (für die Nutzinformation) zu verwenden. Dies bedeutet insbesondere, dass der Anwender alle Symbolkombinationen anwenden darf - auch solche, die lange Symbolwiederholungen enthalten oder die für die Signalisierung oder (Wort- oder Rahmen-) Synchronisation verwendet werden. Wir werden in einem späteren Abschnitt sehen, wie dies gewährleistet werden kann.

Transparenz eines Codes

Die Forderung nach hoher Effizienz und geringer Störempfindlichkeit wollen wir nicht quantitativ angeben, denn dafür ist es erforderlich, den analogen Kanal genauer zu modellieren. Wir könnten dann fordern, dass der Leitungscodes so gewählt wird, dass er die zur Verfügung stehende Bandbreite nutzt, um bei Einhaltung der geforderten Fehlerrate die maximale Informationsübertragungsrate zu gewährleisten; meist wird dabei als Randbedingung die maximal zulässige Signalamplitude oder Signalleistung begrenzt. Mehrstufige Codes erlauben bei einer solchen Fragestellung eine Bandbreitenanpassung bzw. ermöglichen den Austausch von Bandbreite gegen Signalleistung. Wir erkennen dies, wenn wir einen binären Impuls mit einer Dauer, die dem Schritttakt entspricht betrachten. Da ein mehrstu-

figer Code mehr Information pro Symbol enthält (bei r -stufigem Code ldr), können wir den Schritttakt entsprechend erhöhen; dies führt zur Reduktion der benötigten Bandbreite (vgl. Anhang B.3 Transformationspaar 1). Um bei dem Entscheider die Fehlerrate konstant zu halten, müssen wir allerdings die maximal verwendete Signalamplitude erhöhen, d. h. mehr Leistung aufwenden. Wie wir bei der Betrachtung der einzelnen Codes sehen werden, bieten verschiedene Leitungscodes eine einfache Fehlererkennungsmöglichkeit oder sind gegen einen Polaritätswechsel unempfindlich. Insofern sind sie störunempfindlicher.

Selbsttestaufgabe 8.1-1:

Bei der Beurteilung, welcher Leitungscodierung für ein bestimmtes Übertragungssystem verwendet werden soll, wird das Leistungsdichtespektrum als ein Auswahlkriterium herangezogen. Beschreiben Sie eine mögliche Auswirkung, wenn ein großer Teil der spektralen Leistungsdichte des Codes bei hohen Frequenzen auftritt.

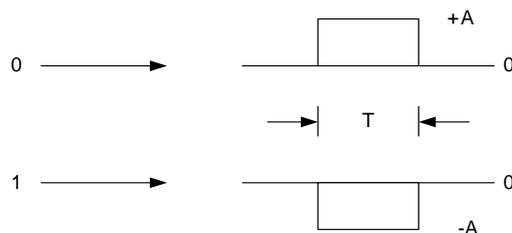
8.2 Binäre Leitungscodes

Binäre NRZ-Codes

Binäre NRZ-Codes

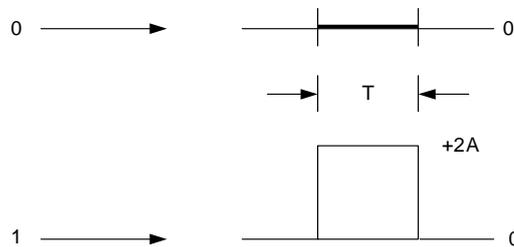
Als NRZ-Codes (*Non Return to Zero*) bezeichnet man Codes, die bei Wiederholung eines Symbols ihren Signalwert beibehalten, d. h. nicht zur Null zurückkehren. Der **NRZ-L** (L steht für *Level*, d. h. Signalamplitude) wird auch einfach als **binärer Code** bezeichnet und hat die Codierungsvorschrift (Abb. 8.2-1):

NRZ-L
binärer Code



Er findet verbreiteten Einsatz in digitalen Logikschaltungen und Datenverarbeitungsgeräten. Wie aus Abb. 8.2-2 zu ersehen ist, hat er einen hohen Gleichstromanteil. Sein Taktgehalt (Abb. 8.2-1) ist niedrig (Null Übergänge bei Symbolwiederholung, maximal 1 Übergang pro Bit bei einer 01 Folge). Wegen des geringen Taktgehalts ist er ohne Verwürfelung, getrennte Taktzuführung oder anderen entsprechenden Maßnahmen für digitale Übertragung nicht geeignet. Auch sein hoher Gleichstromanteil unterbindet eine Fernspeisung.

Als Alternative kann der NRZ-L als



codiert werden. Er erhält somit einen zusätzlichen Gleichstromanteil.

In dieser Form kann er in Glasfasersystemen angewandt werden, da er nun keine negativen Amplitudenwerte enthält. In dieser Form wird er auch für Datenübertragung im Start-Stop-Betrieb verwendet.

Es gibt zwei differentielle Versionen des binären NRZ-Codes. Den **NRZ-M** (M steht für *Mark*, d. h. eine Eins) erhält man, wenn man stets eine Eins mit einem Sprung am Anfang des entsprechenden Intervalles und eine Null ohne Sprung codiert (Abb. 8.2-1). Den **NRZ-S** (S steht für *Space*, d. h. eine Null) erhält man, wenn man stets eine Null mit einem Sprung am Anfang des entsprechenden Intervalles und eine Eins ohne Sprung codiert (Abb. 8.2-1). Die differentiellen Versionen haben den Vorteil, dass ein Polaritätswechsel bei Störung oft besser identifizierbar ist als die Amplitude. Sie haben den weiteren Vorteil, dass eine Vertauschung der Polarität keine Rolle spielt, d. h. keinen Fehler verursacht.

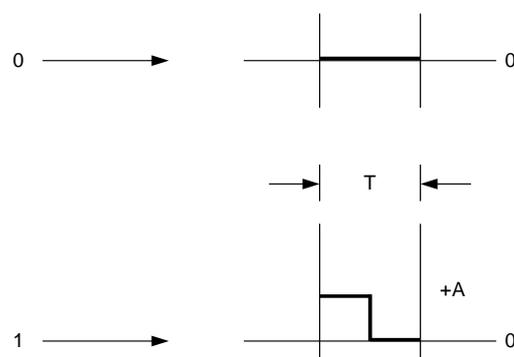
NRZ-M

NRZ-S

Binärer RZ-Code

Binärer RZ-Code

Die Codiervorschrift des RZ-Codes (*Return to Zero*) lautet (Abb. 8.2-1):



Er ist, wie der NRZ-Code, einfach zu implementieren, hat jedoch den doppelten Takt, was allerdings bei Nullfolgen für die Taktgewinnung keinen Vorteil bietet. Er wird deshalb selten verwendet.

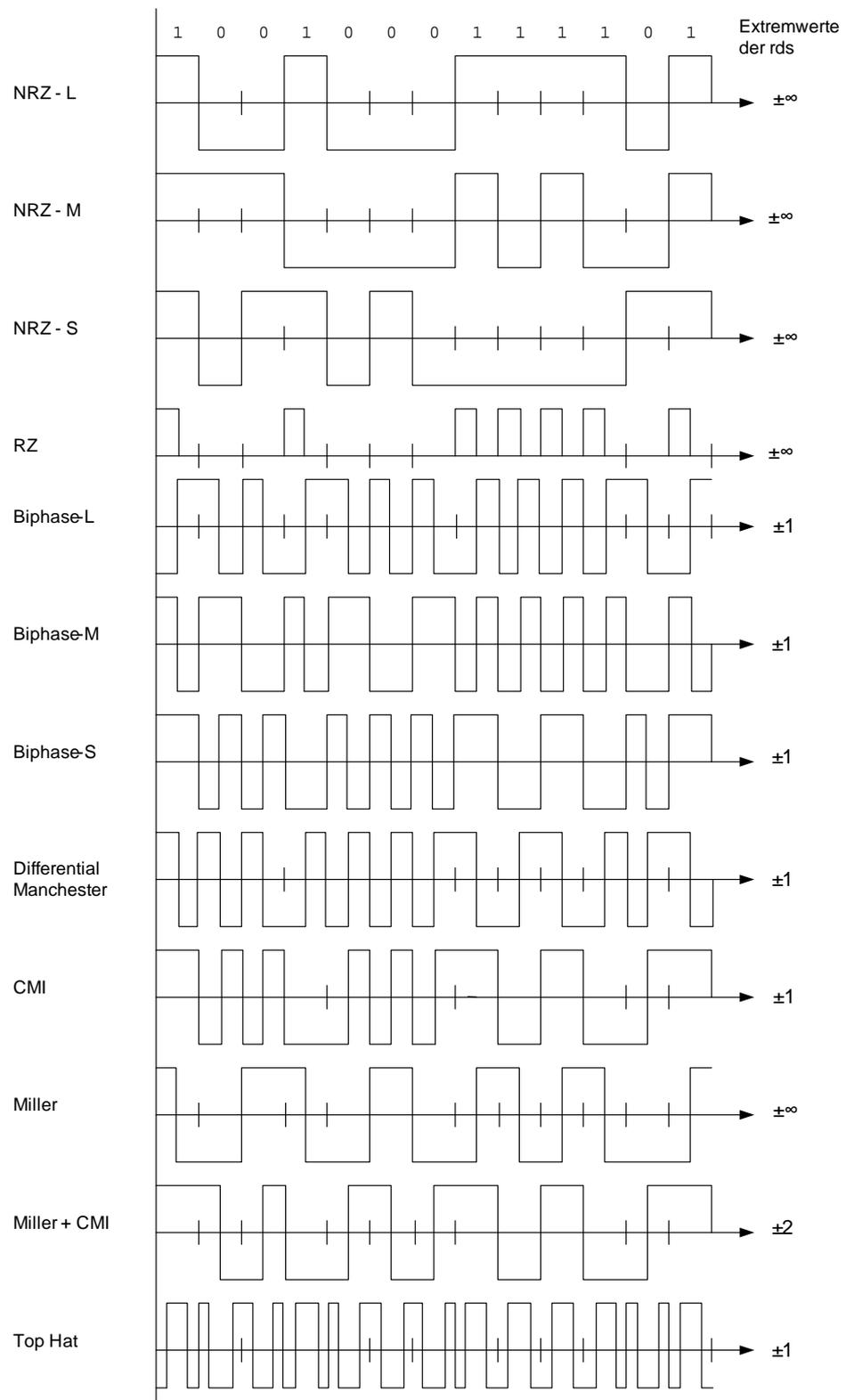


Abb. 8.2-1: Beispiele für binäre Leitungscodes.
 $\hat{rds} \hat{=} \text{running digital sum}$

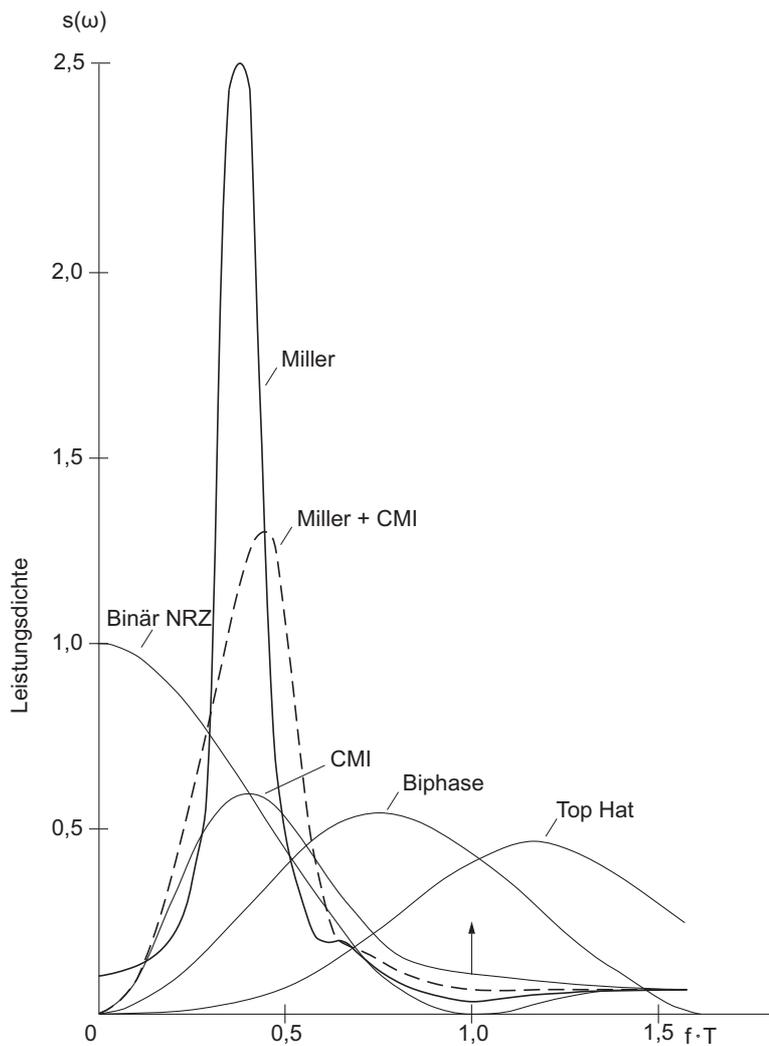


Abb. 8.2-2: Leistungsdichtespektren einiger binärer Leitungscodes.

Die Amplitude des binären Signals in Abb. 8.2-2 ist auf $A = \frac{1}{\sqrt{T}}$ mit T als Schrittdauer genormt.

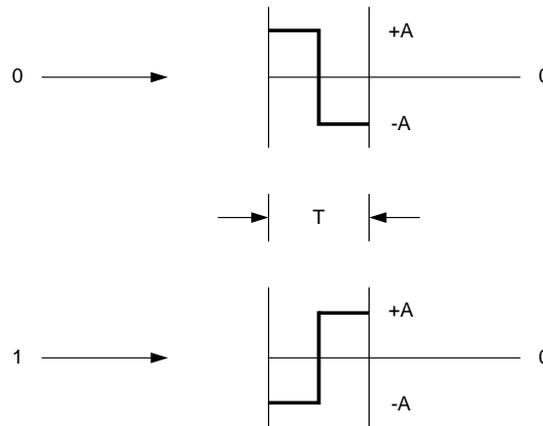
Biphase-Code

Biphase-Code

Es gibt mehrere Varianten des Biphase-Codes, wobei sie in der Literatur oft unterschiedlich bezeichnet und häufig verwechselt werden. Die Bezeichnung Biphase (zwei Phasen) bezieht sich darauf, dass die Information als Phasensprünge codiert wird. Wir wollen zunächst drei Grundformen des Biphase-Codes kennenlernen.

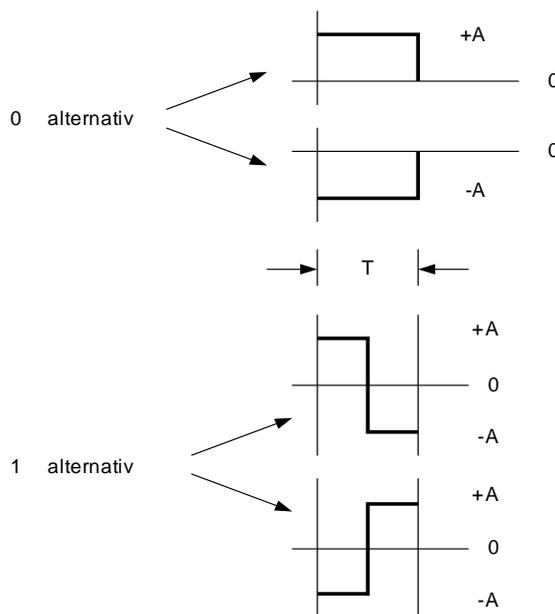
Die Codiervorschrift des **Biphase-L** (L steht für *Level* - sowohl die Null als auch die Eins wird jeweils durch einen Phasensprung markiert) lautet (Abb. 8.2-1):

Biphase-L



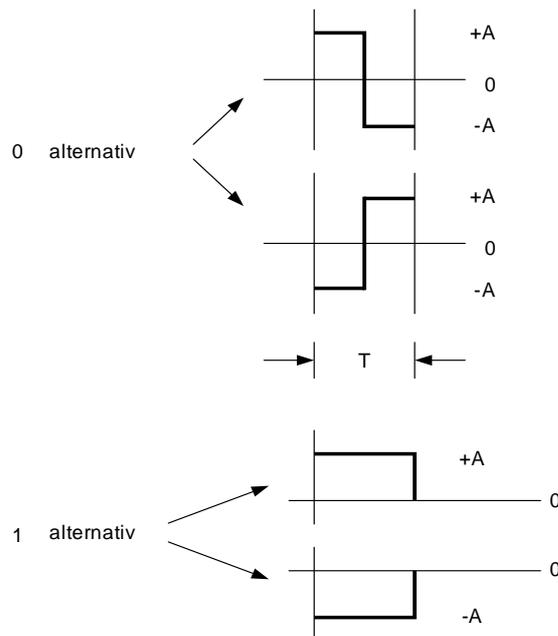
Manchester Code
Biphase-M

Biphase-L wird verschiedentlich auch als Biphase, Diphase, Dipulse, Split-Phase oder Wal 1 (Walsh 1) bezeichnet. Die geläufigste Bezeichnung ist jedoch **Manchester Code**, unter der er auch Anwendung bei Ethernet (LAN) findet. Die Codiervorschrift des **Biphase-M** (M steht für *Mark* - die Eins wird durch einen Phasenübergang markiert) lautet (Abb. 8.2-1):



Biphase-S

Die Wahl bei der Alternative wird so getroffen, dass stets ein Sprung am Bitanfang entsteht. Die Codiervorschrift des **Biphase-S** (S steht für *Space* - die Null wird durch einen Phasenübergang markiert) lautet entsprechend (Abb. 8.2-1):

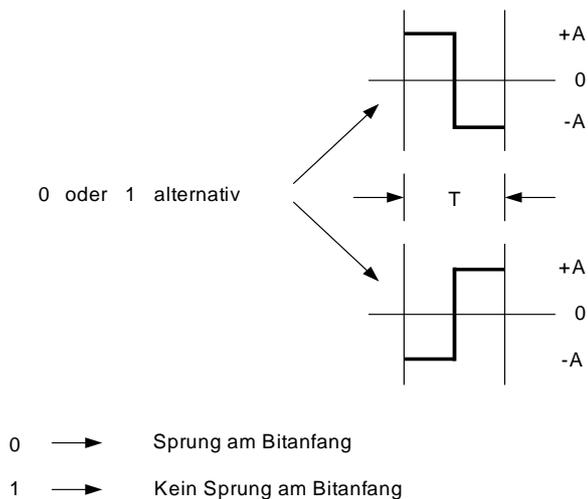


Auch hier wird bei der Alternative die Wahl so getroffen, dass stets ein Sprung am Bitanfang entsteht.

Biphase-M und Biphase-S werden auch als Diphase, *conditioned Diphase* (d. h. Diphase mit einer Nebenbedingung) oder auch als *coded Diphase* bezeichnet. Sie werden auch gelegentlich als differentielle Codes bezeichnet, da jeweils eine Eins oder eine Null durch einen Sprung gekennzeichnet wird - eine versehentliche Polaritätsvertauschung führt daher zu keinem Fehler (was beim Biphase-L nicht der Fall ist).

Die Sprünge in der Bitmitte durch die Markierung bzw. durch die Nebenbedingung am Bitanfang führt dazu, dass mindestens ein Übergang pro Bit garantiert wird - das Leistungsdichtespektrum ist entsprechend zu höheren Frequenzen verschoben (Abb. 8.2-2) - es ist gleichstromfrei bzw. hat eine geringe Leistungsdichte bei niedrigen Frequenzen. Biphase-Codes bieten auch eine einfache Fehlererkennungsmöglichkeit, nämlich wenn die garantierten Sprünge (in der Mitte des Bits bei Biphase-L, am Anfang bei Biphase-M und S) fehlen. Sie sind einfach zu implementieren und finden zunehmend Anwendung bei lokalen Netzen und bei magnetischer Speicherung.

Zwei weitere Formen der differentiellen Biphase-Codierung ergeben sich, wenn die Randbedingung "Übergang stets am Anfang des Bits" durch die Randbedingung "Übergang stets in der Mitte des Bits" ersetzt wird und die Markierung (*Mark* bzw. *Space*) am Anfang des Bits gesetzt wird. Die so entstandene Markversion mit der Codiervorschrift:



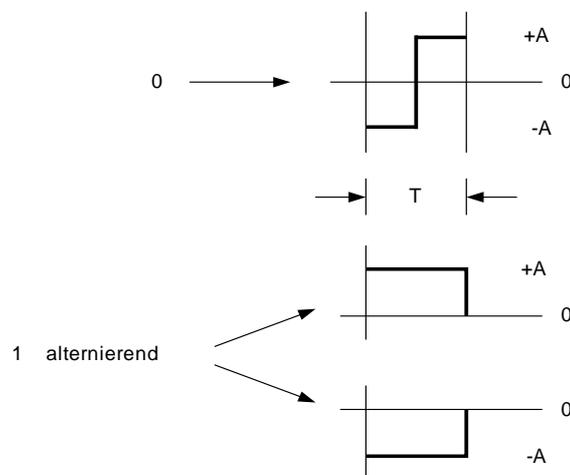
Differential Manchester Code

wird als **Differential Manchester Code** bezeichnet und im Token-Ring (LAN) verwendet.

Coded Mark Inversion

Coded Mark Inversion (CMI)

Der CMI-Code ist den differentiellen Biphasen-Codes ähnlich, seine Codiervorschrift jedoch einfacher. Sie lautet (Abb. 8.2-1):

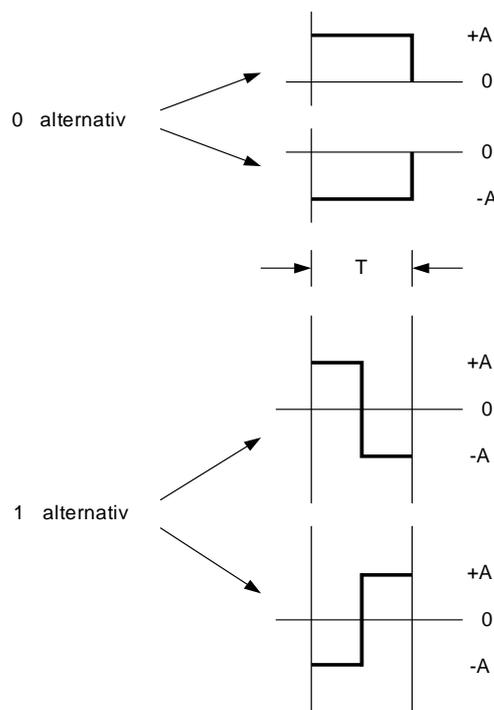


Die Eins wird ohne irgendeine Nebenbedingung, d. h. beginnend mit $+A$, fest alternierend codiert. Nach der Codiervorschrift wird also die Null durch einen Sprung in der Bitmitte markiert, die Eins nicht. Es handelt sich also um einen differentiellen Code. Eine versehentliche Polaritätsvertauschung führt daher zu keinem Fehler. Er ist außerdem gleichstromfrei, hat jedoch ein etwas niedrigeres Spektrum und benötigt eine größere Bandbreite als die Biphasen-Codes. Er wird häufig für 140 Mbit/s PCM-Systeme verwendet. Außerdem findet er bei Glasfasersystemen mit hohen Bitraten Verwendung, hierbei wird er um die Amplitude A angehoben, um negative Amplituden zu vermeiden.

Miller-Code

Miller-Code

Auch der Miller-Code, der gelegentlich als *Delay Modulation* bezeichnet wird, ist den differentiellen Biphasen-Codes ähnlich. Seine Codiervorschrift lautet (Abb. 8.2-1):

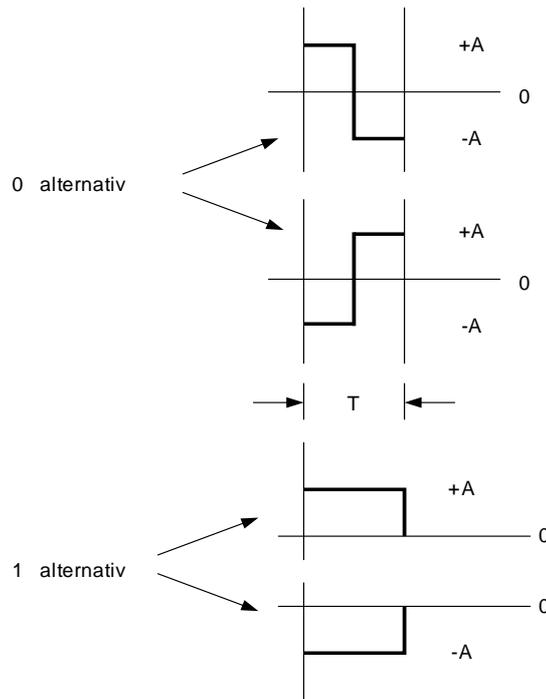


Die Wahl bei den Alternativen wird so getroffen, dass ein Sprung am Bitanfang genau dann entsteht, wenn das zu codierende Bit und sein Vorgänger beide Null sind.

Der Miller-Code hat ein schmales Spektrum (Abb. 8.2-2), d. h. er benötigt eine geringere Bandbreite als z. B. die Biphasen-Codes. Er hat einen ausreichenden Taktgehalt; er hat nämlich nie mehr als einen Sprung pro Symbol, aber mindestens einen Sprung pro zwei Symbolen. Leider ist er nicht gleichstromfrei, was sich z. B. bei einer wiederholten Signalfolge von 101 zeigt.

Man kann den Miller-Code modifizieren, um die Gleichstromfreiheit zu erreichen. Eine solche Modifizierung besteht in der Kombination des Miller und des CMI Codes. Die Codiervorschrift des **Miller + CMI Codes** lautet (Abb. 8.2-1):

Miller + CMI Codes

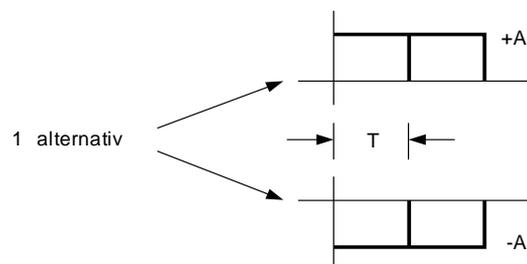


Dabei wird die Wahl bei den Alternativen stets so getroffen, dass die Eins (beginnend mit $+A$) fest alterniert, während die 0 stets so gewählt wird, dass kein Sprung am Anfang auftritt. Das Leistungsdichtespektrum des Miller + CMI kombinierten Codes ist wiederum schmal und nun auch gleichstromfrei.

modifizierter Miller-Code

Eine weitere Form des **modifizierten Miller-Codes**, die gleichstromfrei ist, ergibt sich, wenn man eine Codeverletzung einführt, die garantiert, dass die laufende Digitalsumme (rds) auf ± 3 begrenzt wird. Die Codiervorschrift ist etwas kompliziert und lautet:

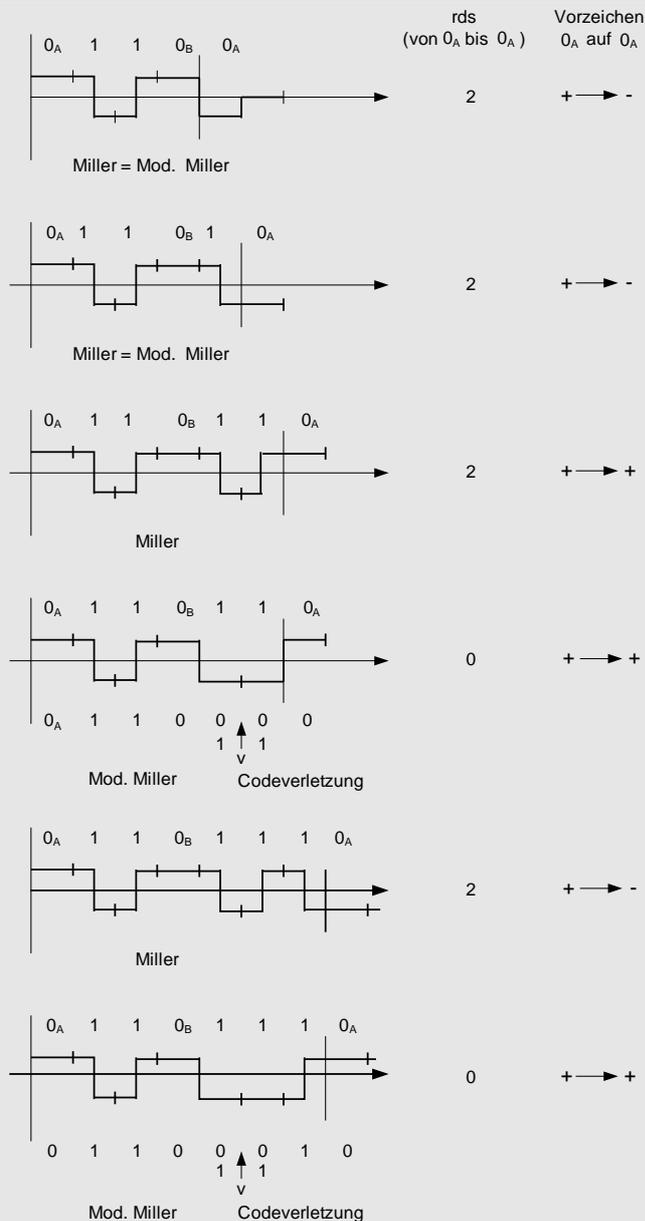
Man kennzeichne die Nullen abwechselnd mit 0_A und 0_B . Zwischen 0_A und 0_B codiere man entsprechend dem Miller-Code. Zwischen 0_B und 0_A auftretende Einsen werden zu Paaren zusammengefasst und als



codiert. Die Wahl bei den Alternativen wird so getroffen, dass falls die letzte 0_B als $-A$ codiert wurde, mit $\square\square$ begonnen wird, falls sie als $+A$ codiert wurde, mit $\square\square$ begonnen wird und die Wahl dann fest alterniert. Bei einer ungeraden Anzahl von Einsen zwischen 0_B und 0_A wird die letzte Eins wieder entsprechend dem Miller-Code codiert.

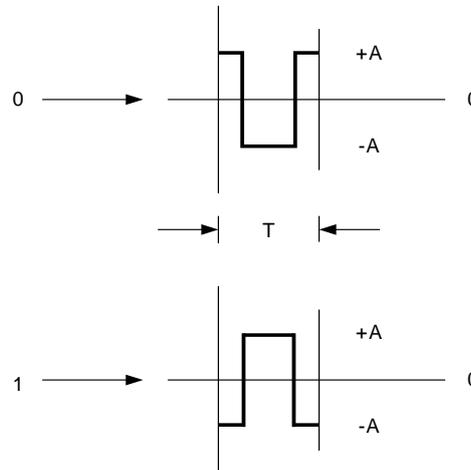
Beispiel 8.2-1:

Wir betrachten im Folgenden vier Beispiele für den Miller-Code und den nach der Regel der Codeverletzung modifizierten Miller-Code. Wir kennzeichnen die in den vorgegebenen Symbolfolgen auftretenden Nullen abwechselnd als 0_A und 0_B . Wir betrachten jeweils die laufende digitale Summe (rds) von 0_A bis einschließlich 0_B und das Vorzeichen der 0_A . Für den modifizierten Miller-Code ist die jeweilige Decodierfolge angegeben, wobei die Codeverletzungen durch $\uparrow v$ gekennzeichnet sind. Die Vorzeichenänderungen und rds ändern sich in den Beispielen nicht, wenn anstatt zweier Einsen sich eine gerade Anzahl von Einsen zwischen 0_A und 0_B befinden. Es kann gezeigt werden, dass beim modifizierten Miller-Code Vorzeichenwechsel $+ \rightarrow -$ zur rds $+2$ und $- \rightarrow +$ zur rds -2 beitragen.



Top-Hat-Code Top-Hat-Code

Der Top-Hat-Code, auch Wal 2 (Walsh 2) genannt, ist dem Biphase-L ähnlich. Seine Codiervorschrift lautet (Abb. 8.2-1):



Man kann ihn auch genau umgekehrt codieren. Er hat die Eigenschaft, dass jedes Symbol für sich gleichstromfrei codiert wird. Da jedes Bit zwei Sprünge aufweist, hat er einen hohen Taktgehalt (Abb. 8.2-1) und weist fast keine niederfrequente Komponente unter $fT = 0,2$ (Abb. 8.2-2) auf, so dass man ihn gut für Anwendungen, bei denen Daten über dem Sprachband (*Data over Voice*) übertragen werden, oder bei denen die Codemultiplextechnik angewandt wird (z. B. gemeinsam mit CMI), einsetzen kann.

Selbsttestaufgabe 8.2-1:

Es gibt verschiedene Arten von binären Leitungscodes.

Erläutern Sie, welcher Art diejenigen Codes sind, die wie folgt bezeichnet werden:

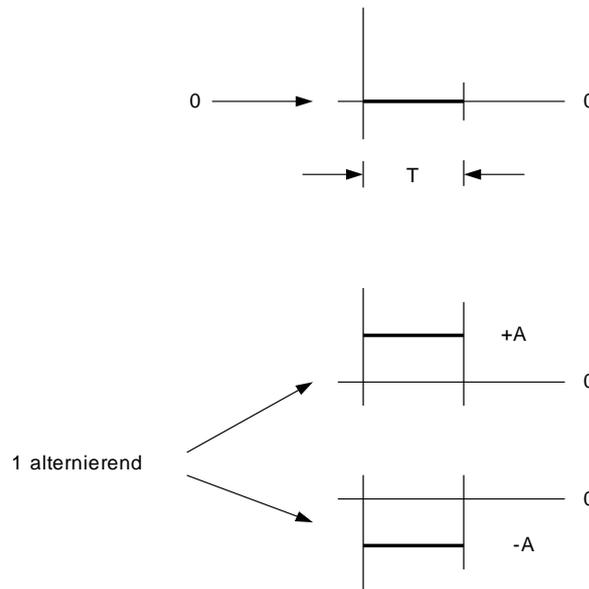
- a. NRZ-Code
- b. RZ-Code
- c. Biphase-Code

8.3 Ternäre Leitungscodes

AMI-Code

AMI-Code

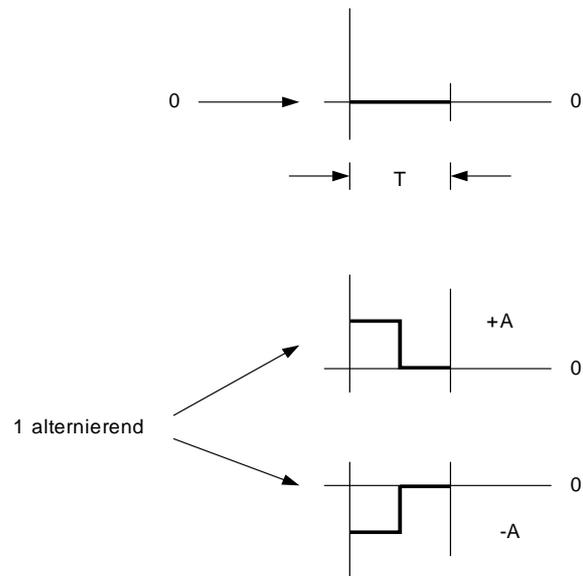
Der AMI-Code (*Alternate Mark Inversion*), auch AMI-NRZ genannt, hat die Codiervorschrift (Abb. 8.3-1):



Er gehört zu der Klasse der pseudoternären Codes, d. h. Codes, die dreistufige (ternäre) Signale verwenden, um binäre Signale zu codieren. Sie weisen deshalb stets Redundanz auf, denn ein ternärer Code bietet die Möglichkeit, $\lg 3$ Bit pro Zeichen zu codieren, während z. B. beim AMI-Code lediglich 1 Bit pro Zeichen codiert wird. Seine Effizienz (wir übernehmen den Begriff entsprechend Gl. 6.1-2, wobei eine optimale Binärquelle vorausgesetzt wird) ist lediglich

$$\frac{1}{\lg 3} \times 100 = 63\%.$$

Die Redundanz kann häufig verwendet werden, um auftretende Fehler zu erkennen. Beim AMI-Code wird die Eins alternierend als $+A$ und $-A$ codiert, es treten also nie $+A, +A$ oder $-A, -A$ (gegebenenfalls mit Nullen dazwischen) auf. Ein Fehler, der $+A$ in $-A$ oder umgekehrt verwandelt, kann deshalb stets erkannt werden. Der AMI-Code hat keine Gleichstromkomponente und hat im Allgemeinen einen ausreichenden Taktgehalt, wenn Nullfolgen vermieden werden. Er wird deshalb häufig mit einem Verwürfler (*scrambler*) verwendet. Er wird gelegentlich auch als RZ-Signal codiert - d. h. die Codiervorschrift lautet (Abb. 8.3-1):



AMI-RZ Er wird dann als **AMI-RZ** oder *half banded AMI* bezeichnet. Sein Leistungsspektrum wird durch die RZ-Codierung nach höheren Frequenzen hin verschoben.

Der AMI-Code wird bei PCM-Systemen, insbesondere PCM 24 und PCM 30, häufig angewandt. Auch im ISDN wird er auf der S-Schnittstelle (mit umgekehrter Polarität, damit bei logischer Null, z. B. Sprachpausen, stets $\pm A$ gesendet wird) und als AMI-RZ mit Verwürfler auf der U_{P0} -Schnittstelle (Ping-Pong-Verfahren des ZVEI) eingesetzt.

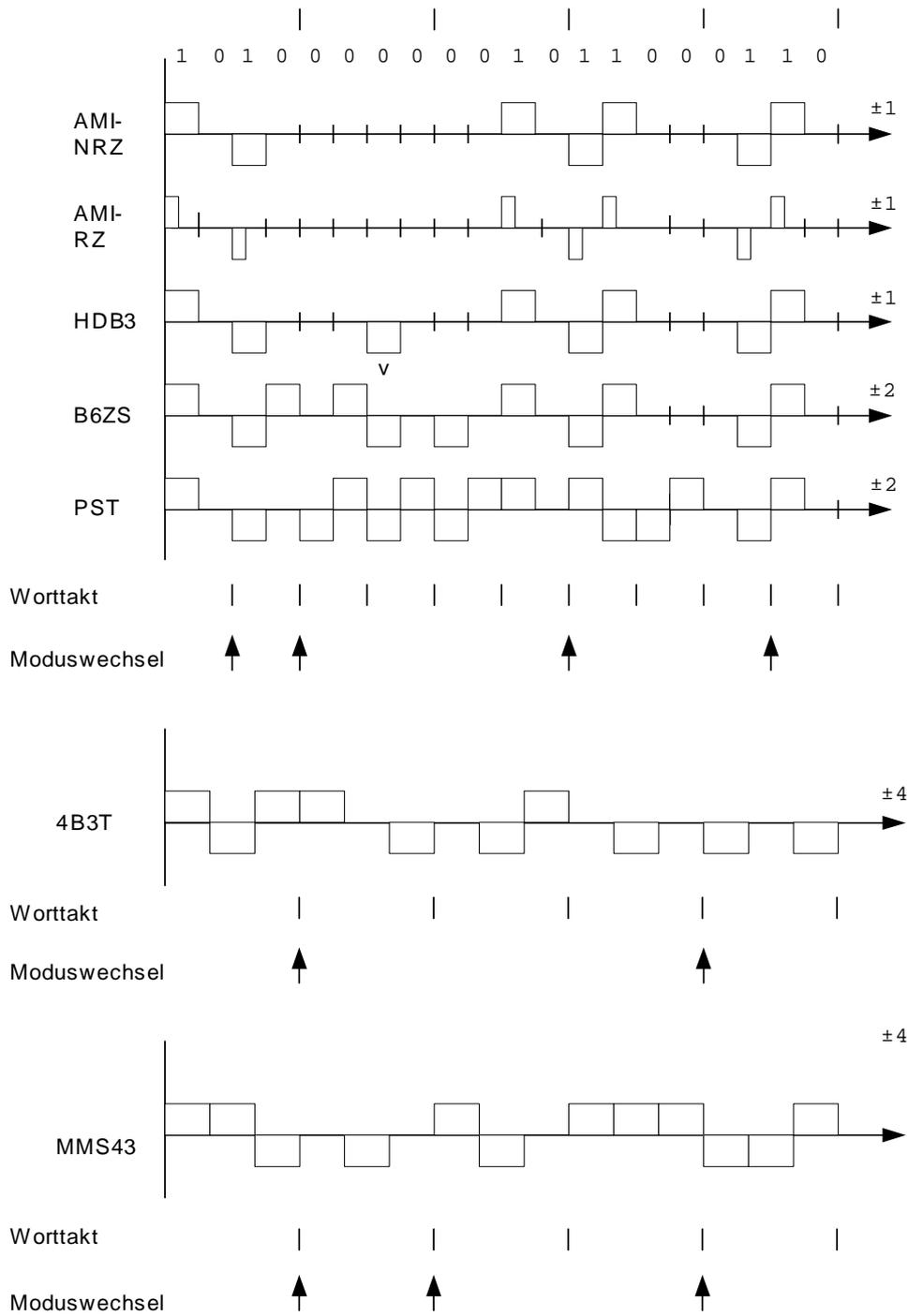


Abb. 8.3-1: Beispiele für ternäre Leitungscodes.
 rds $\hat{=}$ running digital sum

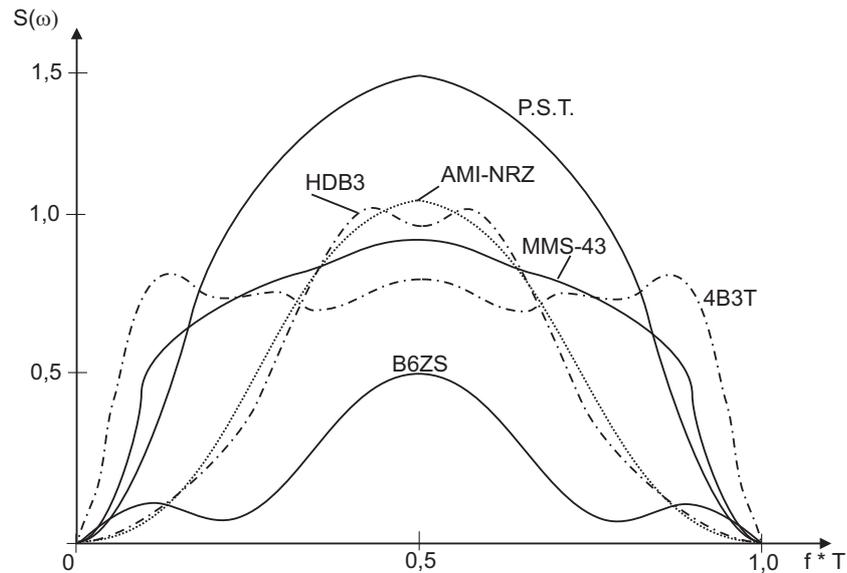


Abb. 8.3-2: Leitungsdichtespektren einiger ternärer Leitungscodes.

Die Amplitude des ternären Signals in Abb. 8.3-2 ist auf $A = \frac{1}{\sqrt{T}}$ mit T als Schrittdauer genormt.

HDB_n-Codes HDB_n-Codes

High Density Bipolar n -Codes (HDB_n) entstehen aus dem AMI-Code durch Codeverletzung. Wenn eine Folge von $(n + 1)$ Nullen auftritt, wird diese durch eine Codeverletzung (der Regel, dass ± 1 abwechselnd auftreten) an der Stelle der $(n + 1)$ -ten Null in der Nullfolge angezeigt. Nun kann es jedoch vorkommen, dass die Codeverletzung die Gleichstromfreiheit des AMI-Codes vernichtet. Die Stelle, an der die erste Null (der Nullfolge) auftrat, wird deshalb als Ausgleichsbit verwendet (ohne an dieser Stelle die Coderegeln zu verletzen). Die Codiervorschrift lautet dann (Abb. 8.3-1):

Zunächst wie beim AMI-Code codieren. Beim Auftreten von $(n + 1)$ Nullen in der Nullfolge die erste Null durch

$$\begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ersetzen, falls die laufende digitale Summe gleich } \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist. Anschließend die $(n + 1)$ -te Null so codieren, dass die Coderegeln (\pm alternierend) hier verletzt wird.

Wegen der Codiervorschrift zur Substitution von Nullfolgen im AMI-Code werden HDB_n-Codes auch als Substitutionscodes (*zero substitution codes*) bezeichnet.

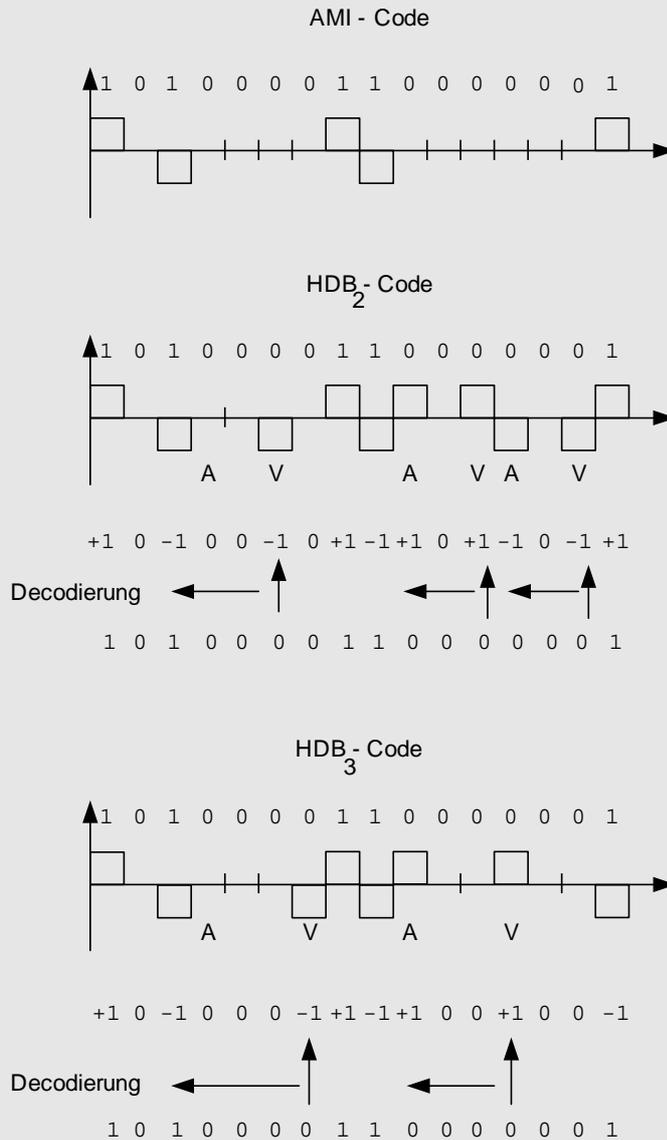
Für die Decodierung ist es erforderlich, $(n + 1)$ Stellen zu speichern bzw. vorzumerken, mit welcher Polarität und an welcher Stelle die letzte Eins auftrat. Das Ausgleichsbit wird mitkorrigiert, falls zwischen den coderegelnverletzenden Bits $(n - 1)$ Nullen liegen.

Der HDB₃-Code hat ein Leistungsdichtespektrum, das dem AMI-Code ähnlich ist (Abb. 8.3-2). Die Codier- bzw. Decodiervorschrift ist etwas aufwendiger, ein Ver-

würfler und Entwürfler wird dafür eingespart. Der HDB_3 -Code findet deshalb alternativ zum AMI-Code bei vielen PCM-Systemen Anwendung.

Beispiel 8.3-1:

Wir codieren die Folge 1010000110000001 nach den AMI, HDB_2 und HDB_3 -Codes.



B6ZS-Code

B6ZS-Code

Ein weiterer Substitutionscode ist der *Bipolar 6 Zero Substitution (B6ZS)-Code*. Er entsteht aus dem AMI-Code durch die Substitution von sechs Nullen (Abb. 8.3-1) durch

- 0 - + 0 + falls die letzte Eins eine + 1 war

+ 0 + - 0 - falls die letzte Eins eine - 1 war.

(Wir haben dabei wegen der Übersichtlichkeit +1 durch + und -1 durch - gekennzeichnet.) Auch er hat ein dem AMI-Code ähnliches Leistungsdichtespektrum (Abb. 8.3-2), ist gleichstromfrei und wird bei 6 Mbit/s PCM-Systemen eingesetzt.

PST-Code PST-Code

Der *Pair Selected Ternary-Code* (**PST**) gehört zu den Blockcodes, denn bei ihm werden paarweise binäre Zeichen in ternäre Zeichen umgesetzt. Ein Paar binäre Zeichen hat den Informationsgehalt von 2 Bit. Dieser wird in zwei ternäre Zeichen umgesetzt; die Effizienz ist also wie beim AMI-Code 63%. Für die Codierung wird zwischen zwei Modi (Codetabellen) umgeschaltet; die Umschaltung findet nach jeder Kombination 10 oder 01 statt. Die Codiervorschrift lautet (Abb. 8.3-1):

$$\begin{array}{l}
 00 \rightarrow -+ \\
 01 \rightarrow 0+ / 0- \\
 10 \rightarrow +0 / -0 \\
 11 \rightarrow +-
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Moduswechsel nach jeder} \\ \text{10 oder 01} \end{array}$$

Gegenüber dem AMI oder HDB_3 -Code hat er eine etwas größere spektrale Leistungsdichte bei niedrigen Frequenzen. Sein Hauptnachteil jedoch ist, dass ein Worttakt (Identifizierung der Paare) erforderlich wird. In Abb. 8.3-3 ist die Zustandsdarstellung des PST-Codes angegeben.

4B3T 4B3T

Der "*4 Bipolar 3 Ternary*"-Code (**4B3T**) ist auch ein Blockcode, bei dem 4 Binärzeichen in 3 Ternärzeichen umgesetzt werden. Auch hier wird zwischen zwei Codetabellen umgeschaltet, wenn die laufende digitale Summe (rds) positiv bzw. negativ wird. In einer Variante lautet die Codetabelle:

Binär	Mode A	Mode B	rds
0000	+ 0 -	+ 0 -	0
0001	- + 0	- + 0	0
0010	0 - +	0 - +	0
0011	+ - 0	+ - 0	0
0100	+ + 0	- - 0	±2
0101	0 + +	0 - -	±2
0110	+ 0 +	- 0 -	±2
0111	+ + +	- - -	±3
1000	+ + -	- - +	±1
1001	- + +	+ - -	±1
1010	+ - +	- + -	±1
1011	+ 0 0	- 0 0	±1
1100	0 + 0	0 - 0	±1
1101	0 0 +	0 0 -	±1
1110	0 + -	0 + -	0
1111	- 0 +	- 0 +	0

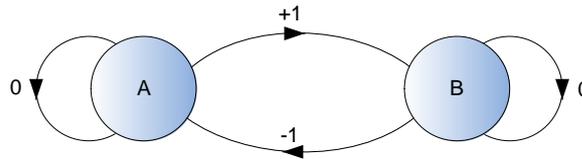


Abb. 8.3-3: Zustandsdarstellung des PST - Codes. Die Übergänge sind mit der Änderung der laufenden digitalen Summe (rds) markiert.

Das Leistungsdichtespektrum des 4B3T ist annähernd gleichmäßig aufgeteilt. Da 4 Bit auf 3 ternäre Symbole codiert werden, ist seine Effizienz (Gl. 6.1-2)

$$\frac{4}{3 \log 3} \times 100 = 84\%.$$

Er wird gelegentlich bei PCM-Systemen (z. B. bei 6 Mbit/s) eingesetzt.

MMS43

MMS43

Der **MMS43** (*Modified Monitored Sum 43*) ist auch ein 4B3T Blockcode, bei dem zwischen vier Codetabellen ($S_1 - S_4$) umgeschaltet wird (Abb. 8.3-1). In einer Variante lauten die Codetabellen:

	S_1			S_2			S_3			S_4						
$t \rightarrow$			S			S			S			S				
0001	0	-	+	1	0	-	+	2	0	-	+	3	0	-	+	4
0111	-	0	+	1	-	0	+	2	-	0	+	3	-	0	+	4
0100	-	+	0	1	-	+	0	2	-	+	0	3	-	+	0	4
0010	+	-	0	1	+	-	0	2	+	-	0	3	+	-	0	4
1011	+	0	-	1	+	0	-	2	+	0	-	3	+	0	-	4
1110	0	+	-	1	0	+	-	2	0	+	-	3	0	+	-	4
1001	+	-	+	2	+	-	+	3	+	-	+	4	-	-	-	1
0011	0	0	+	2	0	0	+	3	0	0	+	4	-	-	0	2
1101	0	+	0	2	0	+	0	3	0	+	0	4	-	0	-	2
1000	+	0	0	2	+	0	0	3	+	0	0	4	0	-	-	2
0110	-	+	+	2	-	+	+	3	-	-	+	2	-	-	+	3
1010	+	+	-	2	+	+	-	3	+	-	-	2	+	-	-	3
1111	+	+	0	3	0	0	-	1	0	0	-	2	0	0	-	3
0000	+	0	+	3	0	-	0	1	0	-	0	2	0	-	0	3
0101	0	+	+	3	-	0	0	1	-	0	0	2	-	0	0	3
1100	+	+	+	4	-	+	-	1	-	+	-	2	-	+	-	3

Nach dem jeweiligen Codewort ist die Codetabelle(S) angegeben, die als nächste verwendet wird. Da alle Codewörter unterschiedlich sind, ist es bei der Decodierung nicht erforderlich zu wissen, in welchem Zustand der Code sich befindet (d. h. welche Codetabelle verwendet wird). Auch das Nullwort 000 wird nicht verwendet, damit der Taktgehalt erhalten bleibt. In Abb. 8.3-4 ist der MMS43 in seiner Zustandsdarstellung angegeben. Wir haben dabei die Zustände durch die verwendete Codetabelle und die Übergänge durch die Änderung der laufenden digitalen

Summe (rds) gekennzeichnet. Man sieht, dass beginnend mit $rds = 0$ und der Codetabelle S_1 die rds (stets nach jeweils einem Codewort betrachtet) maximal 3 werden kann, und sie bleibt stets positiv. Der MMS43-Code ist gleichstromfrei (Abb. 8.3-2), hat einen guten Taktgehalt und eine spektrale Leistungsdichte, die annähernd gleichmäßig aufgeteilt ist. Seine Effizienz liegt (wie bei 4B3T-Codes) bei 83%. Er wird häufiger eingesetzt, seitdem digitale Schaltungen für die Codierung verfügbar werden. Er findet unter anderem Anwendung auf der ISDN U_{K0} -Schnittstelle (Kompensationsverfahren).

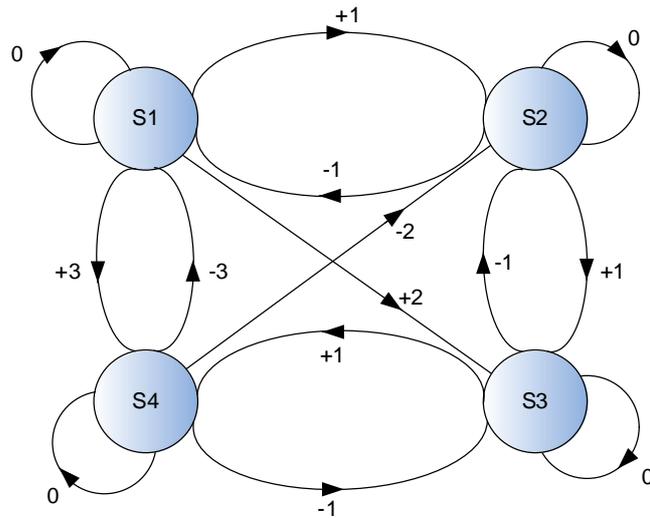


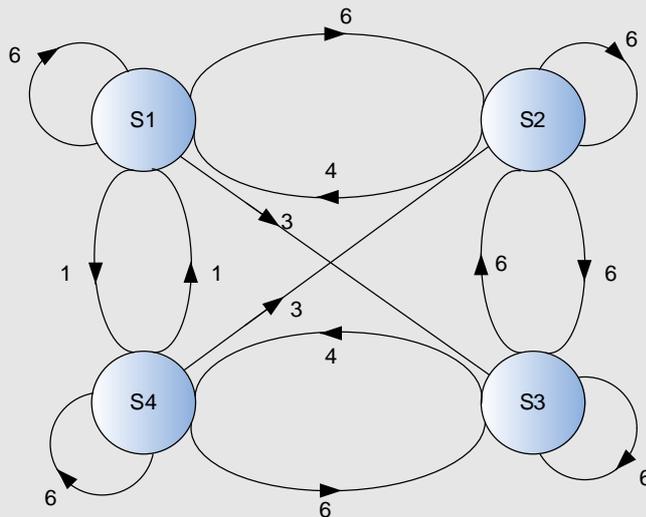
Abb. 8.3-4: Zustandsdarstellung des MMS43 - Codes. Die Übergänge sind mit der Änderung der laufenden digitalen Summe (rds) markiert.

Beispiel 8.3-2:

Wir betrachten die Zustandswahrscheinlichkeiten des MMS43-Code unter der Annahme, dass die zu codierenden Symbole alle gleichwahrscheinlich sind. Aus der Codetabelle zählen wir die jeweils möglichen Übergänge und ermitteln daraus folgende Matrix der (bedingten) Übergangswahrscheinlichkeiten.

$$P(y|x) = \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{6}{16} & \frac{6}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{4}{16} & \frac{6}{16} & \frac{6}{16} & 0 \\ 0 & \frac{6}{16} & \frac{6}{16} & \frac{4}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{6}{16} & \frac{6}{16} \end{bmatrix}$$

Wir vergewissern uns, dass die Zeilen der Matrix sich zu Eins aufaddieren, um das sichere Ereignis zu ergeben. Das entsprechende Zustandsdiagramm mit den (auf 16 normierten) Übergangswahrscheinlichkeiten sieht wie folgt aus:



Es seien P_1, P_2, P_3, P_4 die Wahrscheinlichkeiten der Zustände S_1, S_2, S_3, S_4 im stationären Fall. Wir haben dann:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{6}{16}P_1 + \frac{4}{16}P_2 + 0 \cdot P_3 + \frac{1}{16} \cdot P_4 \\
 P_2 &= \frac{6}{16}P_1 + \frac{6}{16}P_2 + \frac{6}{16}P_3 + \frac{3}{16} \cdot P_4 \\
 P_3 &= \frac{3}{16}P_1 + \frac{6}{16}P_2 + \frac{6}{16}P_3 + \frac{6}{16} \cdot P_4 \quad \text{und} \\
 1 &= P_1 + P_2 + P_3 + P_4.
 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{bmatrix}
 -\frac{10}{16} & \frac{4}{16} & 0 & \frac{1}{16} \\
 \frac{6}{16} & -\frac{10}{16} & \frac{6}{16} & \frac{3}{16} \\
 \frac{3}{16} & \frac{6}{16} & -\frac{10}{16} & \frac{6}{16} \\
 1 & 1 & 1 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 P_1 \\
 P_2 \\
 P_3 \\
 P_4
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 1
 \end{bmatrix}$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet

$$P_1 = \frac{4}{26}, P_2 = \frac{9}{26}, P_3 = \frac{9}{26}, P_4 = \frac{4}{26}.$$

Selbsttestaufgabe 8.3-1:

Über eine ISDN- U_{K0} -Schnittstelle (MMS43) soll die Binärfolge 101001100101 übertragen werden. Bestimmen Sie für die gegebene Folge die entsprechenden ternären Codewörter, und berechnen Sie die laufende digitale Summe (rds). Die ersten 4 Bit sollen hierbei mit dem Alphabet S1 codiert werden.

8.4 Symbolinterferenz (Intersymbol Interference)

Wir betrachten jetzt eine Impulsfolge, die über einen Kanal gesendet wird (Abb. 8.4-1). Der Einzelimpuls wird, wie in Abb. 8.4-1a gezeigt, verzerrt. Sendet man nun eine Impulsfolge, wie in Abb. 8.4-1b, so stören die einzelnen Impulsantworten sich gegenseitig. Insbesondere erhält man zu den Abtastzeitpunkten iT Beiträge von vorangegangenen Symbolen. Sind \mathbf{x}_i die einzelnen zu übertragenden Codesymbole, so lautet das entsprechende zu übertragende Signal

$$\mathbf{x}(t) = \sum_i \mathbf{x}_i \cdot h(t - iT) \quad 8.4-1$$

mit

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad 8.4-2$$

Wir können dies auch als

$$\mathbf{x}(t) = \left[\sum_i \mathbf{x}_i \delta(t - iT) \right] * h(t) \quad 8.4-3$$

darstellen. Die Fouriertransformierte von $h(t)$ lautet:

$$H(\omega) = \frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega}{2}}. \quad 8.4-4$$

In Abb. 8.4-2 ist ein Basisbandübertragungssystem dargestellt. Am Eingang des Sendefilters haben wir eine Folge entsprechend (Gl. 8.4-1) bzw. (Gl. 8.4-3). Am Eingang des Entscheiders haben wir eine Folge $\mathbf{y}(t)$ mit

$$\mathbf{y}(t) = \left[\sum_i \mathbf{x}_i \delta(t - iT) \right] * h_{st}(t), \quad 8.4-5$$

wobei

$$h_{st} = h(t) * h_s(t) * h_k(t) * h_e(t)$$

oder

$$H_{st}(\omega) = H(\omega) \cdot H_s(\omega) \cdot H_k(\omega) \cdot H_e(\omega). \quad 8.4-6$$

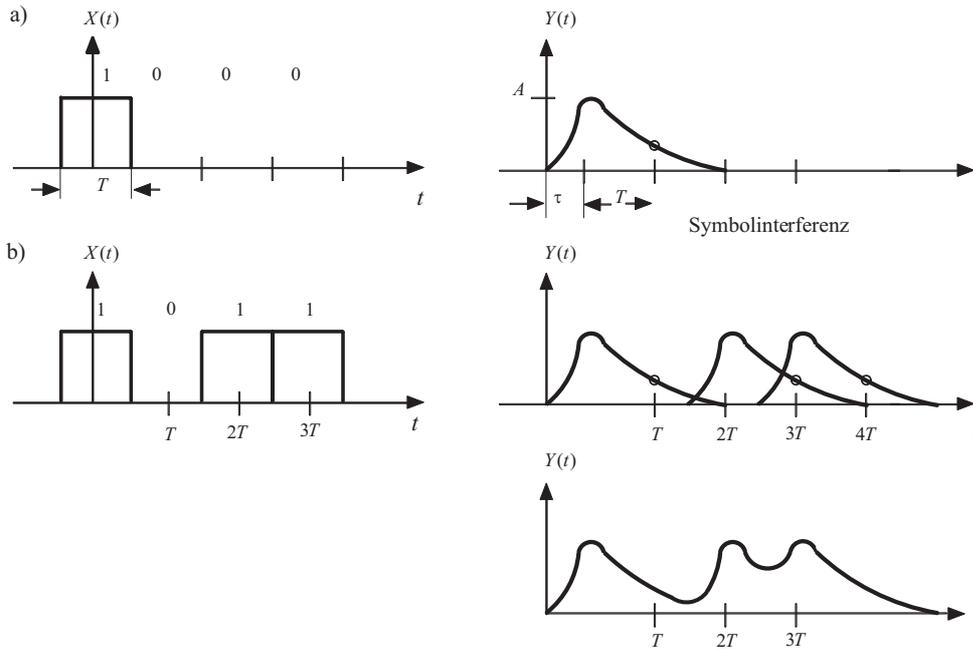


Abb. 8.4-1: Symbolinterferenz (Intersymbol Interference) bei binärer Übertragung.
 Links gesendetes Signal
 Rechts jeweils empfangenes Signal
 a) Einzelimpuls
 b) Impulsfolge erzeugt Symbolinterferenz

Ist der Kanal und der Sendefilter vorgegeben, so besteht die Aufgabe, das Empfangsfilter so zu konstruieren, dass die Symbolinterferenz (die über der gesamten Strecke für $y(t)$ auftritt) minimiert wird. Das symbolinterferenzminimierende Filter, ein **Entzerrer**, wird auch **Equalizer** genannt.

Entzerrer
Equalizer

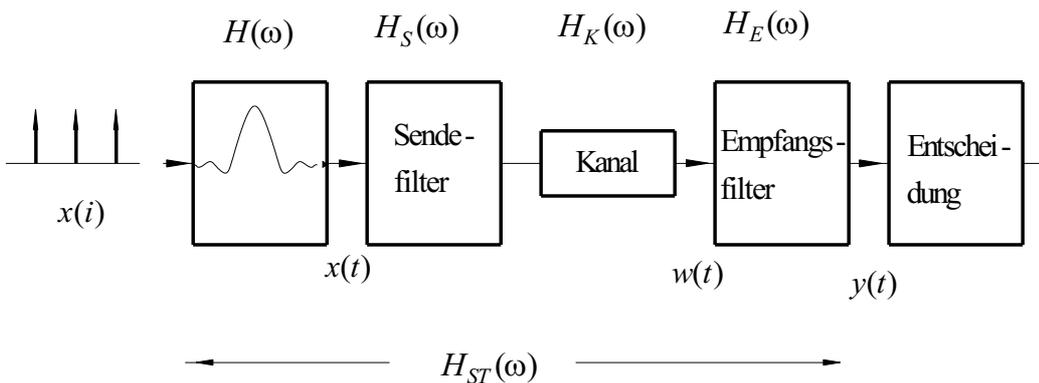


Abb. 8.4-2: Basisbandübertragungssystem.

Wir schreiben Gl. 8.4-5 um und erhalten für $y(t)$,

$$y(t) = \sum_i x_i h_{st}(t - iT). \tag{8.4-7}$$

Eine hinreichende Bedingung (die **erste Nyquist-Bedingung**), dass keine Sym-

1. Nyquist-Bedingung

bolinterferenz vorhanden ist, lautet (für $\tau = 0$ in Abb. 8.4-1a)

$$h_{st}(kT) = \begin{cases} C & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(Vergleich Abb. 8.4-1b).

Wie wir im Abschnitt 5.2 gesehen haben, erfüllt die Funktion

$$h_{st}(t) = C \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t}$$

diese Bedingung (Abb. 5.2-1d), wobei

$$\omega_0 = \frac{\pi}{T}$$

ist. Somit fordern wir, dass $H_{st}(\omega)$ ein idealer Tiefpass mit der Grenzfrequenz ω_0 ist.

Nun ist einerseits der ideale Tiefpass nicht kausal, andererseits müssen wir das empfangene Signal $y(t)$ genau zu den Zeitpunkten kT abtasten, denn die Überschwinger der $\frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t}$ Funktion sind bei einem Versatz Δt nicht klein genug, um vernachlässigt zu werden.

Die Funktion (Abb. 8.4-3)

$$h_{st}(t) = C \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t} \cdot \frac{\cos \omega_0 t}{1 - 4r^2 \frac{t^2}{T^2}} \quad 8.4-8$$

hat ebenfalls die gewünschten Nullstellen bei kT , $k \neq 0$ (wobei $T = \frac{\pi}{\omega_0}$ ist), die von dem $\frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t}$ Term stammen. Der zweite Term drückt den Fehler bei nicht genauer Abtastung weiter herunter und drückt dann auch die Interferenz durch weiter zurückliegende Impulse erheblich herunter (konvergiert mit $\frac{1}{t^2}$ gegen Null). Der Faktor r wird der Roll-Off Faktor genannt und bestimmt die Flanke des Filters (Abb. 8.4-3). Dieser Tiefpass erfüllt also auch die erste Nyquist-Bedingung und hat eine geringere Symbolinterferenz (für $r > 0$) als der ideale Tiefpass. Allerdings benötigt er auch eine größere Bandbreite.

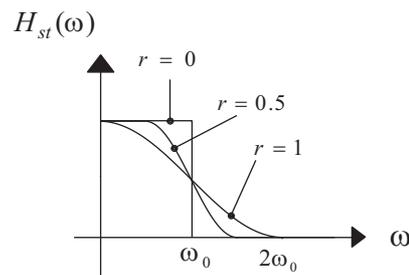
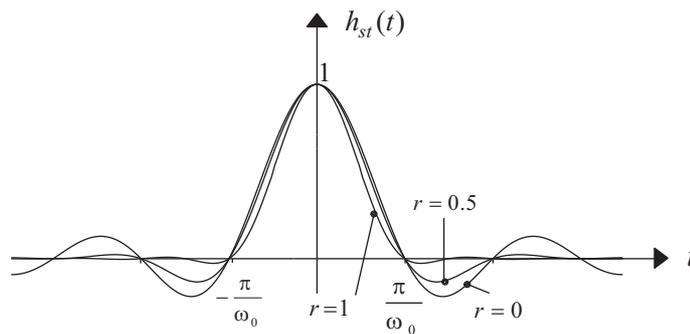


Abb. 8.4-3: Tiefpass mit verschiedenen Roll - off Faktoren erfüllt auch die 1. Nyquist-Bedingung.

Beispiel 8.4-1:

Wir wollen zeigen, dass es eine weite Klasse von Funktionen gibt, zu der auch der Tiefpass mit Roll-Off gehört, die die 1. Nyquist-Bedingung erfüllen. Sie werden Nyquist Filter genannt und sind charakterisiert durch eine Fouriertransformierte der Form (s. Abb. 8.4-3):

$$H_{st}(\omega) = \begin{cases} p_{\omega_0}(\omega) + G(\omega) \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (*)$$

wobei p_{ω_0} als Rechteckfunktion definiert ist (Anhang B.3):

$$p_{\omega_0}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega \leq \omega_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$G(\omega)$ ist dabei eine reelle gerade Funktion (d. h. symmetrisch um $\omega = 0$) und antisymmetrisch um ω_0 (d. h. $G(-\omega + \omega_0) = -G(\omega + \omega_0)$ für $|\omega| < \omega_0$). Außerdem ist sie Null für $\omega > 2\omega_0$.

Wir wollen somit zeigen, dass $h_{st}(t)$ für $H_{st}(\omega)$ entsprechend Gl. 8.4-8 Nullstellen bei kT aufweist, $k \neq 0$, wobei $T = \frac{\pi}{\omega_0}$ ist. Wir bilden die Fouriertransformierte von $H_{st}(\omega)$ und erhalten

$$\begin{aligned} h_{st}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\omega_0}^{-\omega_0} G(\omega) e^{+j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} [1 + G(\omega)] e^{j\omega t} d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{+\omega_0}^{2\omega_0} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-2\omega_0}^0 G(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\omega_0} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Wir rechnen das erste Integral aus, setzen $\omega' = \omega + \omega_0$ in das zweite Integral und $\omega' = \omega - \omega_0$ in das dritte Integral ein und erhalten:

$$\begin{aligned} h_{st}(t) &= \frac{\sin\omega_0 t}{\pi t} + \frac{1}{2\pi} e^{-j\omega_0 t} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} G(\omega' - \omega_0) e^{j\omega' t} d\omega' \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} e^{+j\omega_0 t} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} G(\omega + \omega_0) e^{j\omega' t} d\omega' \end{aligned}$$

Wegen $G(\omega' - \omega_0) = -G(\omega' + \omega_0)$ erhalten wir

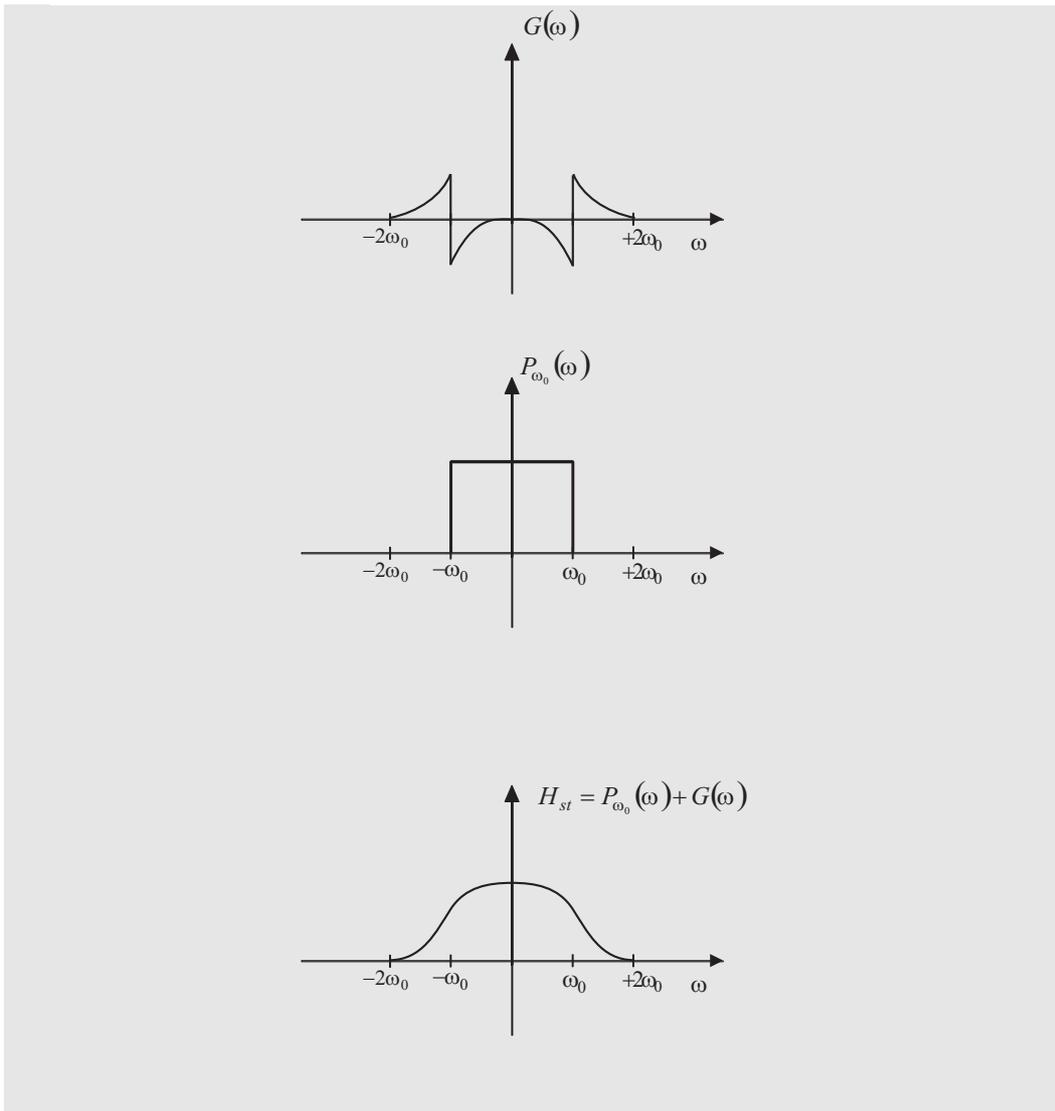
$$\begin{aligned} h_{st}(t) &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t} + \frac{1}{2\pi} e^{-j\omega_0 t} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} -G(\omega + \omega_0) e^{j\omega' t} d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} e^{+j\omega_0 t} \cdot \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} G(\omega + \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

$$h_{st}(t) = \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t} + \frac{j}{\pi} \sin\omega_0 t \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} G(\omega + \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \quad (**)$$

Da $H_{st}(\omega)$ eine reelle gerade Funktion ist (d. h. $H_{st}(\omega) = H_{st}^*(\omega)$), wobei $*$ die konjugiertkomplexe Funktion darstellt, ist auch $h_{st}(t)$ eine reelle Funktion.

Außerdem folgt aus (**), dass $h_{st}(t)$ die gewünschten Nullstellen besitzt bzw. die erste Nyquist-Bedingung erfüllt.

Auch ein Filter mit der Charakteristik (*) ist nicht kausal. Durch Hinzufügen einer linearen Phase kann es annähernd kausal gemacht werden.



Transversalfilter (Abb. 8.4-4) bieten eine einfache Möglichkeit, symbolinterferenzminimierende Empfangsfilter $H_E(\omega)$ zu realisieren. Die Koeffizienten des Filters werden so eingestellt, dass die erste Nyquist-Bedingung für die gesamte Strecke erfüllt ist. Insbesondere bei der Datenübertragung über vermittelte Verbindungen werden bei Verwendung eines Transversalfilters die Koeffizienten unmittelbar nach der Verbindungsaufbauphase neu eingestellt. Hierzu wird eine Trainingsfolge, d. h. eine Probefolge zur Einstellung der Koeffizienten gesendet. Filter, die in der Lage sind, laufend während der Datenübertragungsphase die Koeffizienten nachzustellen, werden als **adaptive Entzerrer (adaptive Equalizer)** bezeichnet. In der Praxis werden häufig solche adaptive Entzerrer eingesetzt, die anstatt die Symbolinterferenz nach der ersten Nyquist-Bedingung den mittleren quadratischen Fehler minimieren. Für ein weiteres Studium der adaptiven Entzerrer sei auf die Literatur verwiesen.

Eine hinreichende Bedingung (**die zweite Nyquist -Bedingung**), dass Symbolinter-

Transversalfilter

**adaptive Entzerrer
adaptive Equalizer**

**die zweite
Nyquist-Bedingung**

ferenz genau zwischen zwei benachbarten Impulsen vorhanden ist und bei Bekanntsein des vorangegangenen Impulses abgezogen werden kann, lautet:

$$h_{st}(kT + \tau) = \begin{cases} C & \text{für } k = 0 \\ C & \text{für } k = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad 8.4-9$$

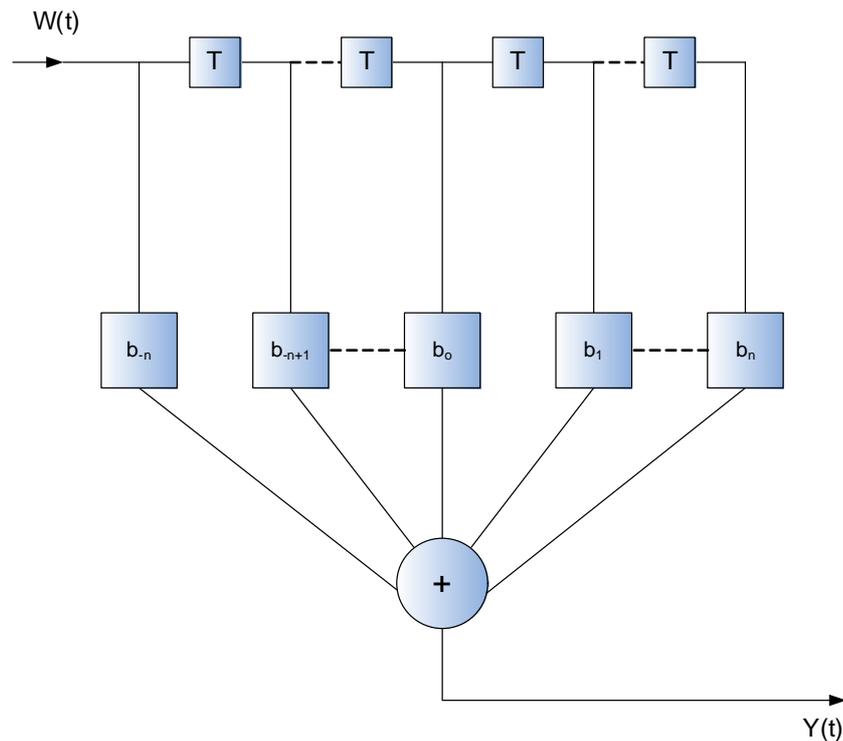


Abb. 8.4-4: Transversalfilter als Entzerrer (Equalizer).

Beispiel 8.4-2:

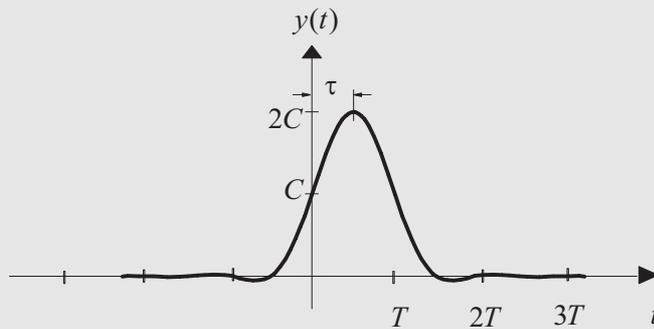
Der Tiefpass mit dem Roll-off Faktor $r = 1$ erfüllt die zweite Nyquist-Bedingung, wenn die Verzögerung $\tau = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2\omega_0}$ beträgt, denn es gilt dann

$$h_{st}(0) = C \quad \text{für } k = 0$$

$$h_{st}(kT) = C \quad \text{für } k = 1$$

und

$$h_{st}(kT) = 0 \quad \text{für andere } k\text{-Werte.}$$



Man beachte, dass nun nicht beim maximalen Wert von $h(t)$ abgetastet wird, sondern beim halben Wert.

Für die möglichen Kombinationen der gesendeten Folge erhält man die Abtastwerte als:

Gesendeter Wert	Vorangegangener Wert	Empfangener Wert
0	0	0
1	0	C
0	1	C
1	1	$2C$

Ist der jeweils vorangegangene Wert bekannt, so kann man aus dem empfangenen Wert auf das gesendete Signal zurückschließen. Es wird auch aus der Wertetabelle deutlich, dass es sich um ein pseudoternäres Empfangssignal mit den Amplituden 0 , C , $2C$ handelt.

Verfahren, bei denen die Symbolinterferenz kontrolliert zugelassen wird, nennt man **Korrelations-Codierung** oder *partial response Coding*. Es gibt eine Vielfalt solcher Verfahren, die Symbolinterferenz zwischen mehreren hintereinander gesendeten Impulsen zulassen. Wir wollen lediglich zwei solche Verfahren angeben.

Korrelations-Codierung
partial response Coding

Duobinäre Codierung Bei der **Duobinären Codierung** wird der Impuls

$$h_{st}(t) = \pi \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - (\omega_0 t)^2} \quad 8.4-10$$

mit der Fouriertransformierten

$$H_{st}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_0} \cos\left(\frac{\pi\omega}{2\omega_0}\right) & \text{für } |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad 8.4-11$$

verwendet (Abb. 8.4-5). Der Impuls der duobinären Codierung erfüllt (mit $T = \frac{\pi}{\omega_0}$) die zweite Nyquist-Bedingung.

modifizierte duobinäre Codierung Bei der **modifizierten duobinären Codierung** wird der Impuls

$$h_{st}(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 \cdot t} \cdot \frac{2T}{2T - t} \quad 8.4-12$$

mit der Fouriertransformierten

$$H_{st}(\omega) = \begin{cases} (2je^{-j\omega T}) \cdot \frac{1}{\omega_0} \sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega_0}\right) & \text{für } |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad 8.4-13$$

verwendet (Abb. 8.4-6). Der modifizierte duobinäre Code hat keine Gleichstromkomponente. Ein Impuls wird durch seinen Vorgänger nicht beeinflusst, dafür aber durch seinen Vorgänger, wie aus Abb. 8.4-6 zu entnehmen ist.

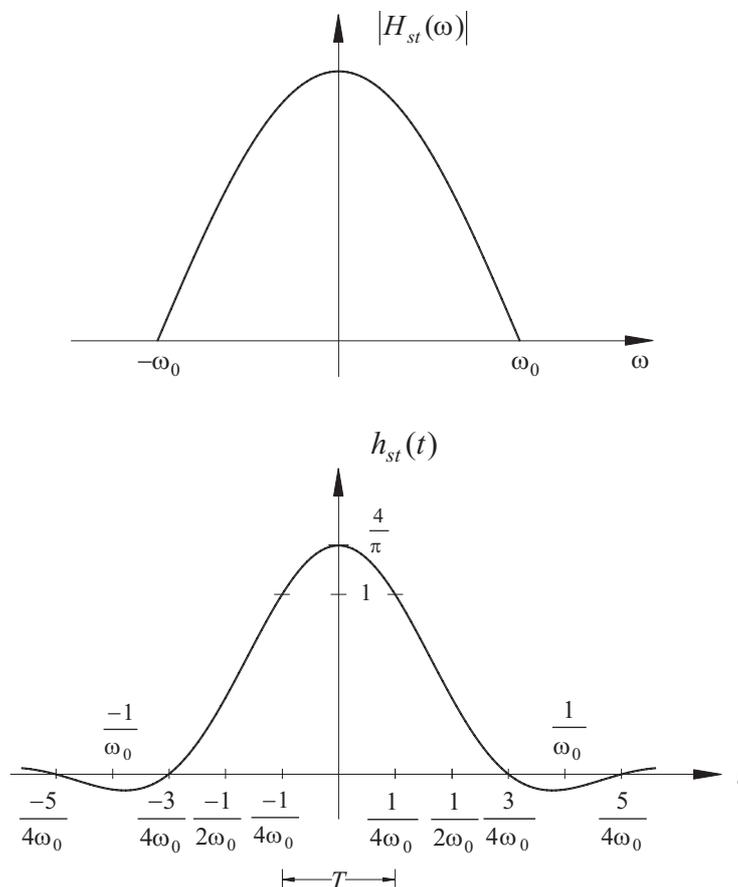


Abb. 8.4-5: Duobinäre Partial Response Signale.

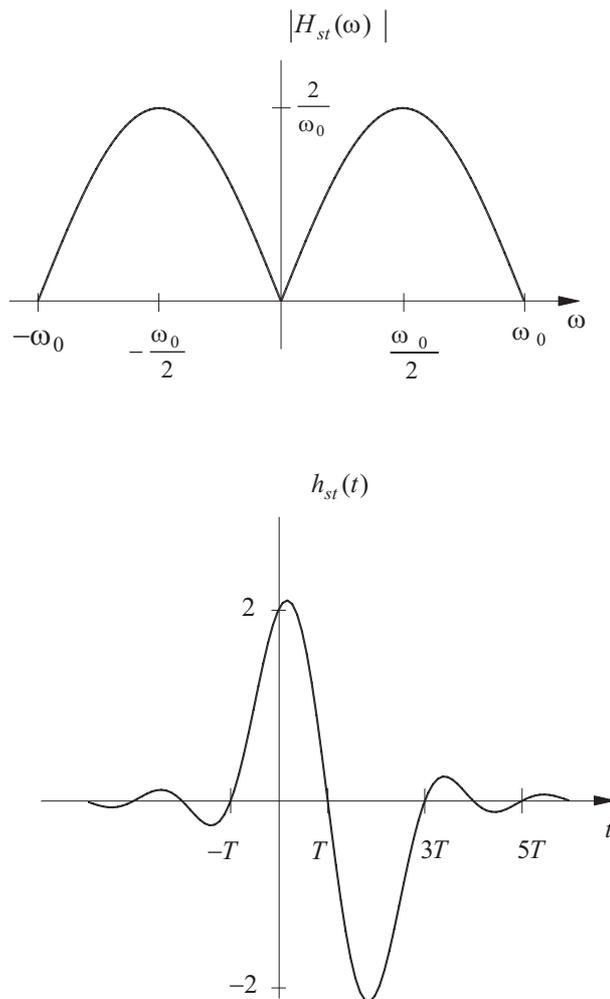


Abb. 8.4-6: Modifizierte Duobinäre Partial Response Signale.

Selbsttestaufgabe 8.4-1:

In einem Übertragungssystem treten beim Empfang einer Impulsfolge aufgrund der Impulsantworten Störungen durch Beeinflussungen der Symbole untereinander auf. Zur Minimierung dieser Störungen werden Empfangsfilter eingesetzt.

- Wie werden diese Beeinflussungen bezeichnet?
- Nennen Sie ein Beispiel für ein Empfangsfilter, und nennen Sie eine Bedingung, die es erfüllen soll.
- Geben Sie darüberhinaus ein Verfahren an, bei dem eine gegenseitige Beeinflussung aufeinanderfolgender Symbole kontrolliert zugelassen wird.

9 Verkehrs- und Bedientheorie

9.1 Einführung

Im Folgenden behandeln wir das Aufkommen von Anforderungen an ein System (d. h. das **Verkehrsaufkommen**) und wie gut das System diesen Anforderungen gerecht wird, d. h. wie viele dieser Anforderungen und mit welchem Zeitverzug es diese erfüllen kann oder zurückweist (Abb. 9.1-1). Als typisches Beispiel betrachten wir die Verbindungswünsche, die an eine Vermittlungsanlage gestellt werden und wie diese erfüllt werden. In Abb. 9.1-2 sind typische Verkehrsaufkommen an einer Ortsvermittlungsanlage für einen Tag, eine Woche und ein Jahr dargestellt. Die einzelnen Werte sind erheblichen Schwankungen unterlegen. Für die Strukturierung und die Dimensionierung eines Systems kommt es jedoch meist nur auf die Spitzenbelastung an, so dass für diesen Zweck häufig nur die **Hauptverkehrsstunde** (HVStd.), d. h. die zusammenhängende Stunde mit dem höchsten Verkehrsaufkommen am Tage, betrachtet wird. Auch unter dieser Einschränkung ist es kaum möglich, zu struktur- oder dimensionierungsbestimmenden Aussagen zu kommen. Hierzu müssen noch weitere vereinfachende Annahmen sowohl über das Verkehrsaufkommen als auch über das Systemverhalten gemacht werden. Die Stationarität der interessierenden statistischen Eigenschaften ist häufig eine solche Annahme.

Die ankommenden, abgewiesenen und erfüllten Anforderungen können jeweils als stochastische Prozesse aufgefasst werden, deren interessierende charakteristische Größen jeweils betrachtet werden. Der Prozess, der die ankommenden Anforderungen darstellt, wird als der **Ankunftsprozess**, in unserem Beispiel auch als der **Anrufprozess**, bezeichnet. Es wird davon ausgegangen, dass seine statistischen Eigenschaften durch Messungen ermittelt wurden und daher bekannt sind. Die Zeitspanne zwischen zwei Ankünften in einer Musterfunktion eines Ankunftsprozesses bezeichnet man als den **Ankunftsabstand** oder auch **Anrufabstand** T_A . Der Erwartungswert der Anzahl der Ankünfte pro Zeiteinheit wird als die **Ankunftsrate** oder auch **Anrufrate** bezeichnet. Es gilt

$$\lambda = E\left\{\frac{\text{Anzahl der Anrufe}}{\text{Zeiteinheit}}\right\} = \frac{1}{E\{T_A\}}. \quad 9.1-1$$

Häufig wird der Ankunftsprozess durch die Verteilungsfunktion oder die Verteilungsdichte der Anforderungsankünfte oder der Ankunftsabstände modelliert.

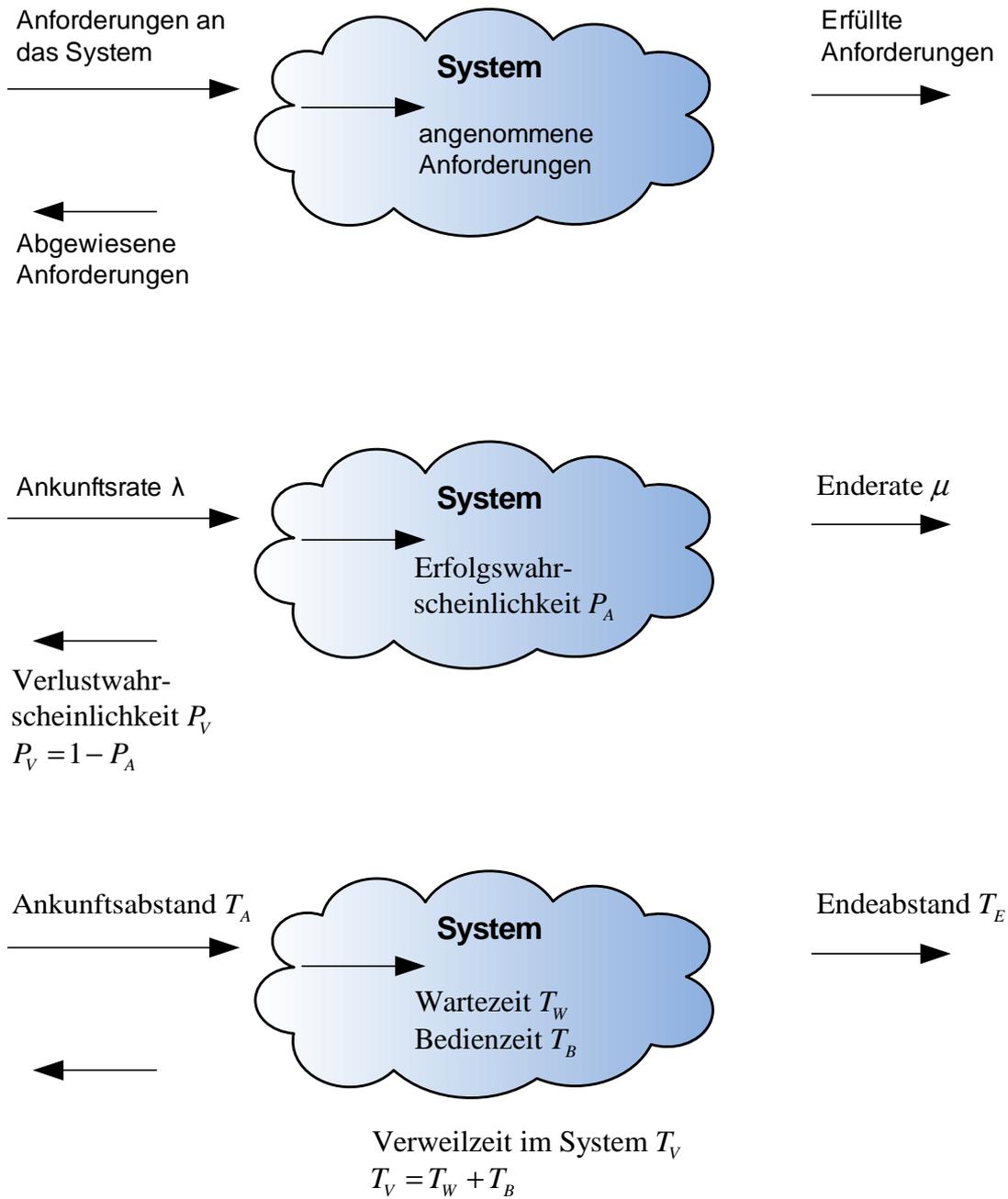


Abb. 9.1-1: Behandlung von Anforderungen durch ein System

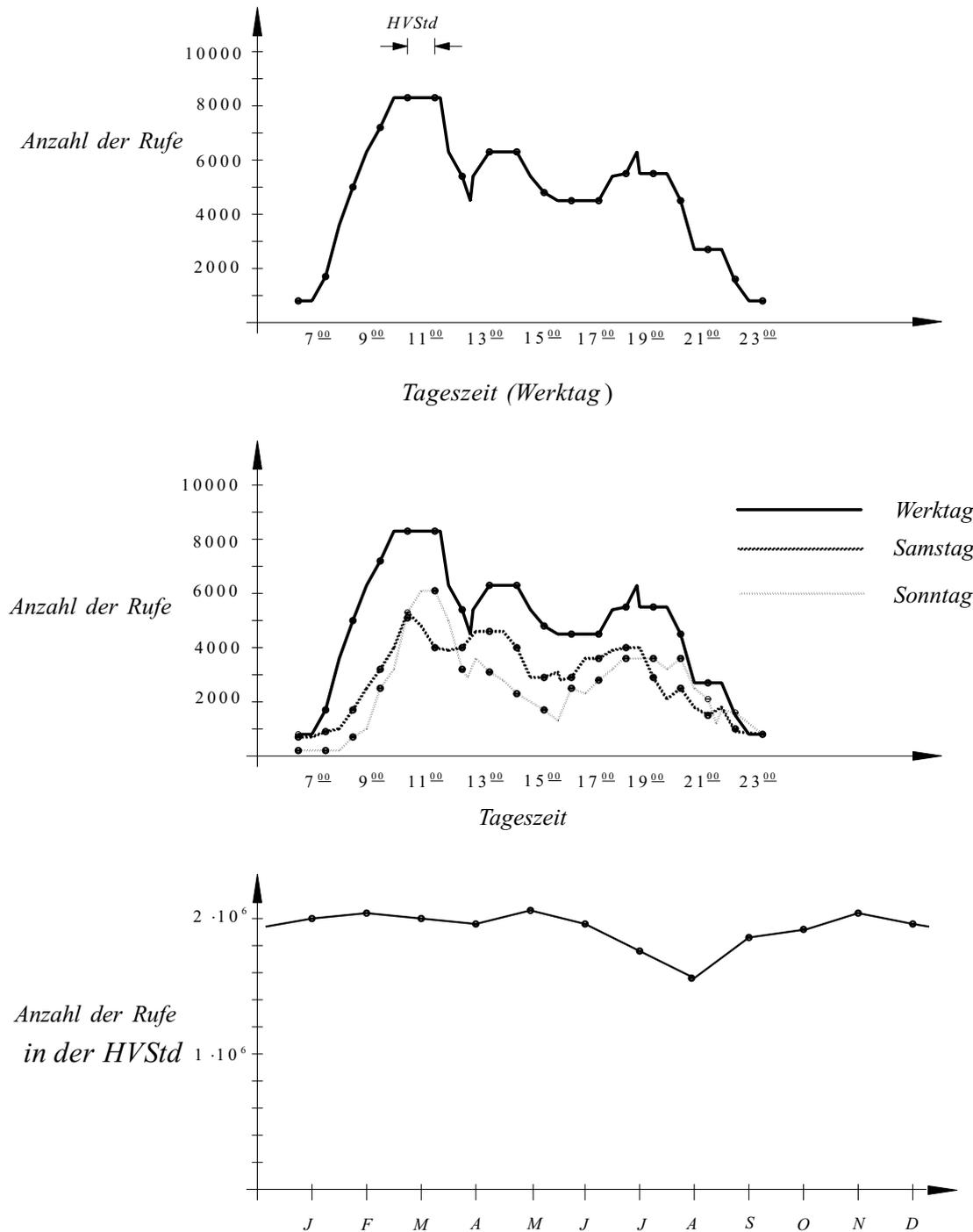


Abb. 9.1-2: Verkehrsaufkommen in einer Ortsvermittlungsstelle

Je besser die statistischen Eigenschaften des stochastischen Modells den relevanten gemessenen Daten entsprechen, desto besser werden die Ergebnisse, die unter Verwendung des Modells abgeleitet werden, die tatsächlichen Verläufe wiedergeben. Meist führt jedoch eine genaue Modellierung auf komplexe Prozesse, die z. B. auch Abhängigkeiten zwischen den Ankünften der einzelnen Anforderungen berücksichtigen. Diese sind dann wiederum schwer zu handhaben. Eine wesentliche Aufgabe ist es deshalb, einfache, aber der gestellten Aufgabe gerecht werdende Modelle zu finden. Im nächsten Abschnitt werden wir einige solche Modelle kennenlernen. Zunächst wollen wir unsere allgemeinen Betrachtungen fortsetzen.

Ist P_V die **Verlustwahrscheinlichkeit**, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass eine ankommende Anforderung abgelehnt wird, so gilt für die **Erfolgswahrscheinlichkeit** P_E , d.h. für die Wahrscheinlichkeit, dass die Anforderung angenommen wird,

$$P_E = 1 - P_V. \quad 9.1-2$$

Einfache (einstufige) Systeme bestehen aus **Bedieneinheiten**, die die Anforderungen abarbeiten und **Warteschlangen** mit **Warteplätzen** (Speicher), in denen die Anforderungen warten, bis die Bearbeitung beginnen kann. In Abb. 9.1-3 sind einige einfache Systeme dargestellt. Man unterscheidet zwischen Systemen ohne Wartemöglichkeit, den **Verlustsystemen**, und Systemen mit Wartemöglichkeiten, den **Wartesystemen**.

Bei Verlustsystemen wird eine Anforderung sofort abgewiesen, wenn keine Bedieneinheit frei ist; bei Wartesystemen wird die Anforderung gespeichert, bis sie abgearbeitet werden kann. Bei den Wartesystemen unterscheidet man wiederum zwischen Wartesystemen mit einer endlichen Anzahl von Warteplätzen (Warte - Verlustsysteme) und Wartesystemen mit unendlich vielen Warteplätzen (reine Wartesysteme). In der Praxis hat man stets mit Wartesystemen mit endlich vielen Warteplätzen zu tun; häufig sind jedoch Systeme mit unendlich vielen Warteplätzen einfacher zu behandeln - sie können dann für Grenzwertbetrachtungen herangezogen werden. Im Allgemeinen besteht die **Verweilzeit** T_V einer Anforderung im System aus der **Wartezeit** T_W und der **Bedienzeit** T_B , d. h.

$$T_V = T_W + T_B. \quad 9.1-3$$

Verlustwahrscheinlichkeit

Erfolgswahrscheinlichkeit

Bedieneinheiten

Warteschlangen

Warteplätze

Verlustsysteme

Wartesysteme

Verweilzeit

Wartezeit

Bedienzeit

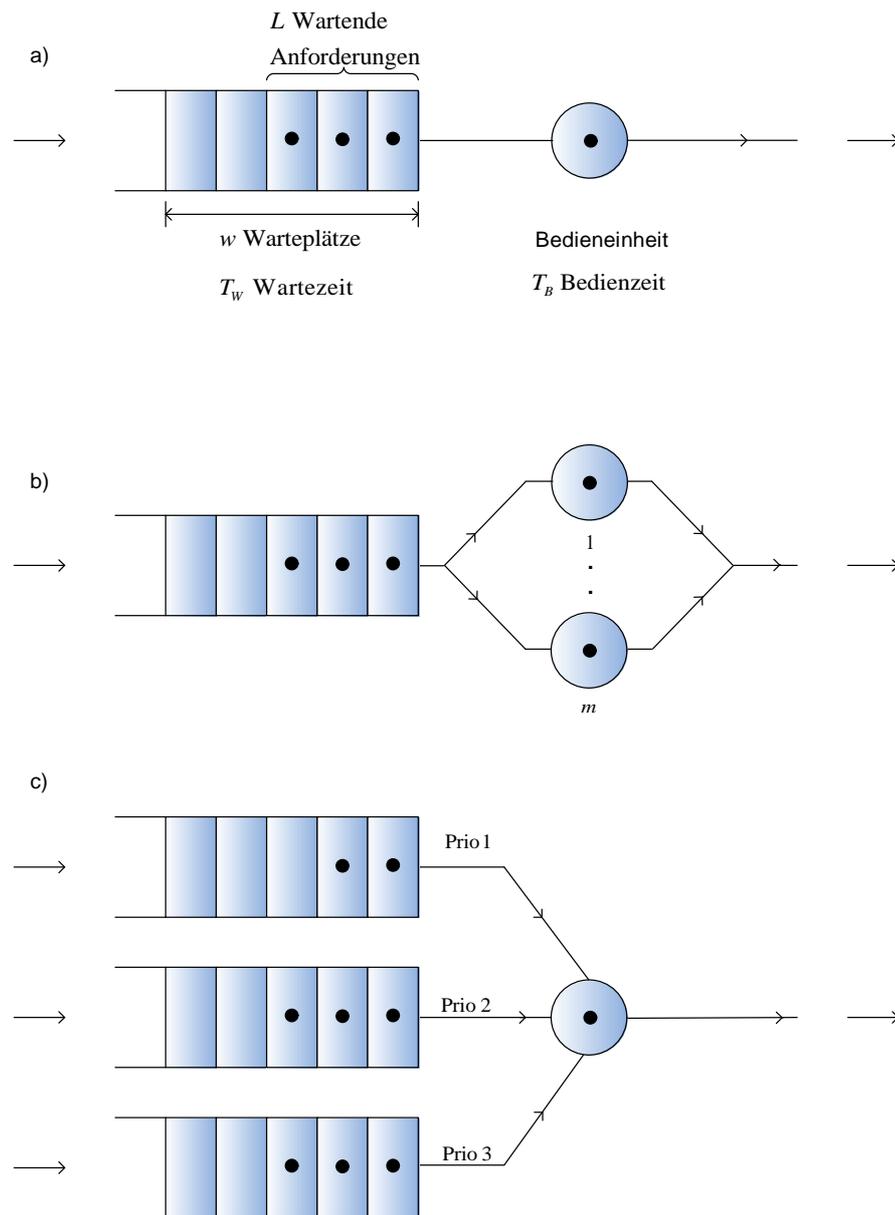


Abb. 9.1-3: Einige einfache (einstufige) Systeme
 a) System mit einer Warteschlange und einer Bedieneinheit
 b) System mit einer Warteschlange und m Bedieneinheiten
 c) System mit drei Warteschlangen und einer Bedieneinheit (Prioritätssystem)

Komplexe Systeme bestehen aus einer Zusammenschaltung von mehreren einfachen Systemen. In Abb. 9.1-4 ist ein zweistufiges gekoppeltes System dargestellt. Das Verhalten komplexer Systeme ist u. a. von der Systemstruktur abhängig. Auch die Betriebsorganisation von Systemen, d. h. die Betriebsmittelzuteilungs- und Verwaltungsstrategien und Prioritätszuteilungen spielen dabei eine Rolle.

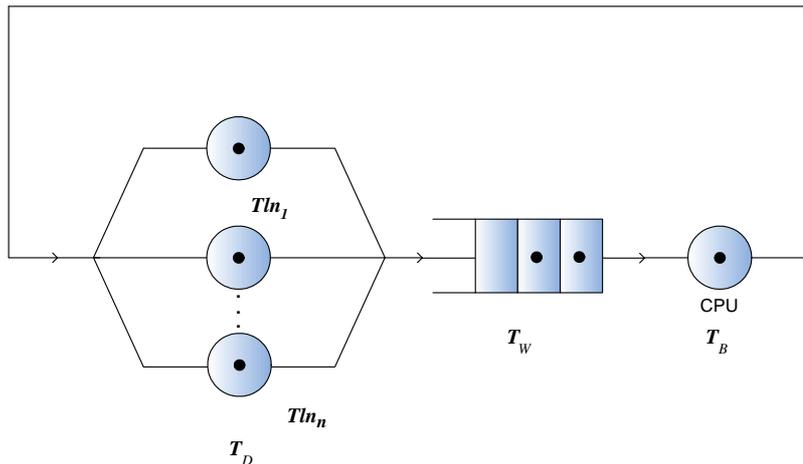


Abb. 9.1-4: Ein gekoppeltes System

Die typischen interessierenden Größen eines Systems sind sowohl die mittleren Warte-, Bedien- und Verweilzeiten, als auch die Anzahl der im System befindlichen (wartenden bzw. in Bedienung befindlichen) Anforderungen. Es ist auch häufig interessant zu wissen, wie die einzelnen Bedieneinheiten ausgelastet sind bzw. wie viele Bedieneinheiten im Mittel belegt sind. Häufig wird das Verhalten einer Bedieneinheit durch einen **Bedienprozess**, der auf der Wahrscheinlichkeitsverteilung bzw. Wahrscheinlichkeitsdichte der Bedienzeit T_B basiert, modelliert. Systeme mit mehreren Bedienplätzen oder mehreren Warteplätzen werden meist durch **Zustandsprozesse** modelliert. Schließlich werden die erfüllten Anforderungen ähnlich wie die Anforderungskünfte als ein stochastischer Prozess, der **Ausgangsprozess** oder der **Endeprozess**, dargestellt. Die interessierenden Größen sind dabei nun der Abstand zwischen zwei erfüllten Anforderungen T_E (der **Endeabstand**) und die **Enderate** μ , d. h. der Erwartungswert der Anzahl der abgefertigten Anforderungen pro Zeiteinheit. Die bisher angesprochenen statistischen Größen und auch die Prozesse sind teilweise voneinander abhängig. In den folgenden Abschnitten werden wir diese Abhängigkeiten für typische Systeme untersuchen.

- Bedienprozess**
- Zustandsprozess**
- Ausgangsprozess**
- Endeprozess**
- Endeabstand**
- Enderate μ**

9.2 Ankunfts- und Bedienprozesse

Der am häufigsten angewandte Ankunftsprozess wird durch die negativ-exponentielle Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ankunftsabstände beschrieben:

$$F_{T_A}(t) = 1 - e^{-ct}, \tag{9.2-1}$$

wobei c eine positive Konstante und $t \geq 0$ ist.

Laut Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilung Gl. 3.3-1 gilt

$$F_{T_A}(t) = P(\{\eta_i | T_A(\eta_i) \leq t\}),$$

das wir im Folgenden abkürzend als

$$F_{T_A}(t) = P(\{T_A \leq t\})$$

schreiben werden. $F_{\mathbf{T}_A}(t)$ ist nach Definition also die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Zeitintervall der Länge t eine Anforderung auftritt. Für $t = 0$ ist $F_{\mathbf{T}_A}(t) = 0$. Mit Größerwerden des Intervalls nimmt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Anforderung in dem betrachteten Intervall liegt, exponentiell zu.

Durch Differenzieren der Gl. 9.2-1 erhalten wir für die Wahrscheinlichkeitsdichte (s. Gl. 3.3-2)

$$f_{\mathbf{T}_A}(t) = ce^{-ct}. \quad 9.2-2$$

Der Erwartungswert von \mathbf{T}_A errechnet sich somit zu

$$E\{\mathbf{T}_A\} = \int_0^{\infty} t \cdot ce^{-ct} dt.$$

Die partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{T}_A\} &= c \left[-\frac{t}{c} e^{-ct} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{c} e^{-ct} dt \right] \\ &= -\frac{1}{c} e^{-ct} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{c}. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit Gl. 9.1-1 ergibt

$$c = \lambda, \quad 9.2-3$$

d. h. die Konstante c ist gleich der Ankunftsrate λ .

Für die negativ-exponentielle Wahrscheinlichkeitsverteilung $F_{\mathbf{T}_A}(t)$ und Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathbf{T}_A}(t)$ erhalten wir somit (Abb. 9.2-1)

$$F_{\mathbf{T}_A}(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad 9.2-4$$

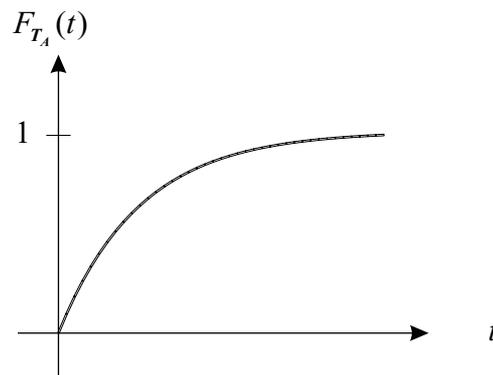
und

$$f_{\mathbf{T}_A}(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \quad 9.2-5$$

Für den quadratischen Mittelwert gilt

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{T}_A^2\} &= \int_0^{\infty} t^2 \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt \quad 9.2-6 \\ &= -t^2 e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot 2t dt \\ &= \frac{2t}{-\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} + 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} dt \\ &= \frac{2e^{-\lambda t}}{-\lambda^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

a)



b)

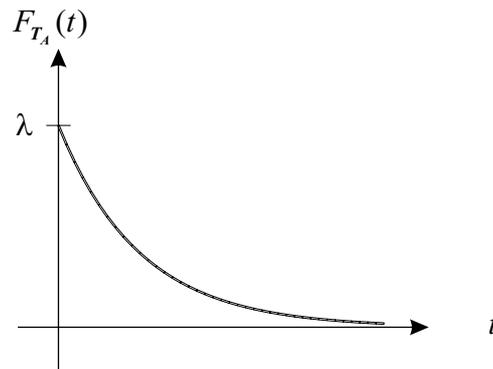


Abb. 9.2-1: Der negativ-exponentielle Ankunftsprozess

a) Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ankunftsabstände T_A

b) Wahrscheinlichkeitsdichte der Ankunftsabstände T_A

Für die Varianz (s. Gl. 3.4-6) erhalten wir

$$\begin{aligned}\sigma_{T_A}^2 &= E\{T_A^2\} - (E\{T_A\})^2 \\ &= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

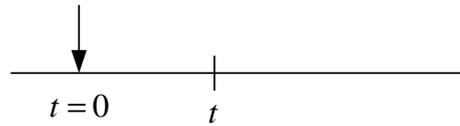
Wir haben somit

$$E\{T_A\} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{und} \quad \sigma_{T_A}^2 = \frac{1}{\lambda^2}. \quad 9.2-7$$

Wir wollen nun überprüfen, ob der durch die negativ-exponentielle Wahrscheinlichkeitsverteilung beschriebene Prozess gedächtnislos, d. h. ein Markoff-Prozess ist. Hierzu betrachten wir einen Ankunftsprozess, bei dem bei $t = 0$ eine Anforderung antraf und seitdem bis $t = t_1$ keine weitere Anforderung kam (Abb. 9.2-2). Wir betrachten nun die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass für $t > t_1$ eine Anforderung antrifft und erhalten mit Gl. 3.2-1

a) Beobachtung ab $t = 0$

$$P(\{\mathbf{T}_A \leq t\}) = 1 - e^{-\lambda t}$$



b) Von $t = 0$ bis $t = t_1$ trat keine Anforderung ein.
Wie geht es weiter ab t_1 ?

$$P(\{\mathbf{T}_A \leq t + t_1 | \mathbf{T}_A > t_1\}) = ?$$

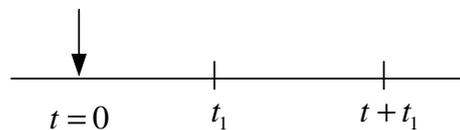


Abb. 9.2-2: Zur Veranschaulichung der Fragestellung, wie sich die Vergangenheit eines Prozesses auf seine Zukunft auswirkt.

$$\begin{aligned} P(\{\mathbf{T}_A \leq t_1 + t | \mathbf{T}_A > t_1\}) &= \frac{P(\{\mathbf{T}_A \leq t_1 + t\} \cap \{\mathbf{T}_A > t_1\})}{P(\{\mathbf{T}_A > t_1\})} \\ &= \frac{P(\{t_1 < \mathbf{T}_A \leq t + t_1\})}{P(\{\mathbf{T}_A > t_1\})} \end{aligned}$$

Mit Gl. 9.2-4 erhalten wir hieraus

$$\begin{aligned} P(\{\mathbf{T}_A \leq t_1 + t | \mathbf{T}_A > t_1\}) &= \frac{(1 - e^{-\lambda(t_1+t)}) - (1 - e^{-\lambda t_1})}{1 - (1 - e^{-\lambda t_1})} \\ &= \frac{e^{-\lambda t_1}(1 - e^{-\lambda t})}{e^{-\lambda t_1}} = 1 - e^{-\lambda t} \\ &= P(\{\mathbf{T}_A \leq t\}). \end{aligned} \tag{9.2-8}$$

Dies bedeutet, dass die Vergangenheit des Prozesses auf seine Zukunft keinen Einfluss nimmt. Es handelt sich also um einen **Markoff-Prozess**.

Markoff-Prozess

Wir wollen nun weitere Eigenschaften des negativ-exponentiellen Ankunftsprozesses untersuchen. Wir betrachten hierzu ein kleines Intervall Δt . Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Anforderung in diesem Intervall auftritt, ist

$$p_1 = P(\{\mathbf{T}_A \leq \Delta t\}) = 1 - e^{-\lambda \Delta t}. \tag{9.2-9}$$

Mit der Reihenentwicklung für die Exponentialfunktion

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots$$

erhält man

$$p_1 = 1 - \left[1 - \lambda\Delta t + \frac{(\lambda\Delta t)^2}{2!} - \frac{(\lambda\Delta t)^3}{3!} + \dots \right]$$

d. h.

$$p_1 = \lambda\Delta t + o(\Delta t), \quad 9.2-10$$

wobei wir mit $o(\Delta t)$ alle Terme, die schneller gegen Null gehen als Δt , bezeichnet haben, d. h. es gilt

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0. \quad 9.2-11$$

Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine Anforderung im Intervall Δt auftritt, gleich

$$p_0 = 1 - \lambda\Delta t - o(\Delta t), \quad 9.2-12$$

während die Wahrscheinlichkeit, dass $n > 1$ Anforderungen im Intervall Δt auftreten, gleich

$$p_n = o(\Delta t) \quad 9.2-13$$

ist.

Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit, dass k Anforderungen in einem größeren Intervall T auftreten, betrachten. Wir teilen es in m kleine Intervalle Δt , d. h.

$$T = m \cdot \Delta t. \quad 9.2-14$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass k Anforderungen im Intervall $T = m\Delta t$ auftreten, ist somit gleich

$$\begin{aligned} p(k) &= \binom{m}{k} p_1^k \cdot p_0^{m-k} + o(\Delta t) & 9.2-15 \\ &= \frac{m!}{(m-k)!k!} (\lambda \cdot \Delta t)^k \cdot (1 - \lambda \cdot \Delta t)^{m-k} + o(\Delta t) \\ p(k) &= \frac{\lambda^k \cdot T^k}{k!} \frac{m!}{m^k(m-k)!} \cdot (1 - \lambda\Delta t)^{m-k} + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Wir lassen nun $\Delta t \rightarrow 0$, d. h. $m \rightarrow \infty$ gehen, wobei $m \cdot \Delta t = T$ fest bleibt. Für $m \gg k$ können wir

$$\frac{m!}{(m-k)!} = m(m-1) \dots (m-k+1) \approx m^k$$

setzen. Ferner gilt für $\Delta t \rightarrow 0$ bzw. $m \rightarrow \infty$

$$(1 - \lambda\Delta t)^{m-k} \approx (1 - \lambda\Delta t)^m = (1 - \lambda\Delta t)^{\frac{T}{\Delta t}}$$

und laut Definition der Exponentialfunktion

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + at)^{\frac{k}{t}} = e^{ak}$$

ist

$$(1 - \lambda \Delta t)^{m-k} \approx e^{-\lambda T}.$$

Insgesamt ergibt der Grenzübergang somit

$$p(k) = \frac{\lambda^k T^k}{k!} e^{-\lambda T}, \quad 9.2-16$$

Poisson-Verteilung

wobei $p(k)$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass k Anforderungen in einem Zeitintervall T ankommen. Die Verteilung nach Gl. 9.2-16 ist als **Poisson-Verteilung** bekannt. Der Ansatz, der zur Poisson-Verteilung führte (Gl. 9.2-14 - Gl. 9.2-15) impliziert, dass die einzelnen Ankünfte voneinander unabhängig sind.

Beispiel 9.2-1:

Das Verkehrsaufkommen eines PCM-30-Konzentrators mit 120 Teilnehmern lässt sich mit einem Poisson Prozess gut modellieren, denn die einzelnen Anrufe können unabhängig voneinander vorausgesetzt werden. Treffen im Mittel 6 Gespräche pro Minute ein, so ist $\lambda = 6$ Anrufe pro Minute oder $\lambda = 0,1$ Anrufe pro Sekunde. Somit ist der Erwartungswert der Anrufabstände

$$E\{\mathbf{T}_A\} = \frac{1}{\lambda} = 10 \text{ Sekunden.}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Anrufabstand größer als 30 Sekunden wird, ist

$$P(\{T > 30\}) = 1 - P(\{T \leq 30\}) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\frac{30}{10}} = 0,0498.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb von 2 Minuten 30 Anrufe ankommen, liegt bei

$$P(k) = \frac{\lambda^k T^k}{k!} e^{-\lambda T} \text{ mit } T = 120 \text{ sec., } k = 30$$

d. h.

$$\begin{aligned} P(30) &= \left(\frac{120}{10}\right)^{30} \frac{1}{30!} \cdot e^{-\frac{120}{10}} \\ &= \frac{12^{30}}{30!} e^{-12} = 5,498 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Die exponentiellen und Poisson-Verteilungen bzw. Markoff-Prozesse werden sowohl für Ankunftsprozesse als auch für Bedienprozesse häufig angewandt, da sie einerseits die tatsächlichen Vorgänge gut wiedergeben, andererseits aber auch analytisch und simulationsmäßig recht einfach handhabbar sind. Als Bedienprozess formuliert lautet Gl. 9.2-1

$$F_{\mathbf{T}_B}(t) = 1 - e^{-\mu t} \quad 9.2-17$$

und Gl. 9.2-7 wird zu

$$E\{\mathbf{T}_B\} = \frac{1}{\mu}. \quad 9.2-18$$

% der Dauer t

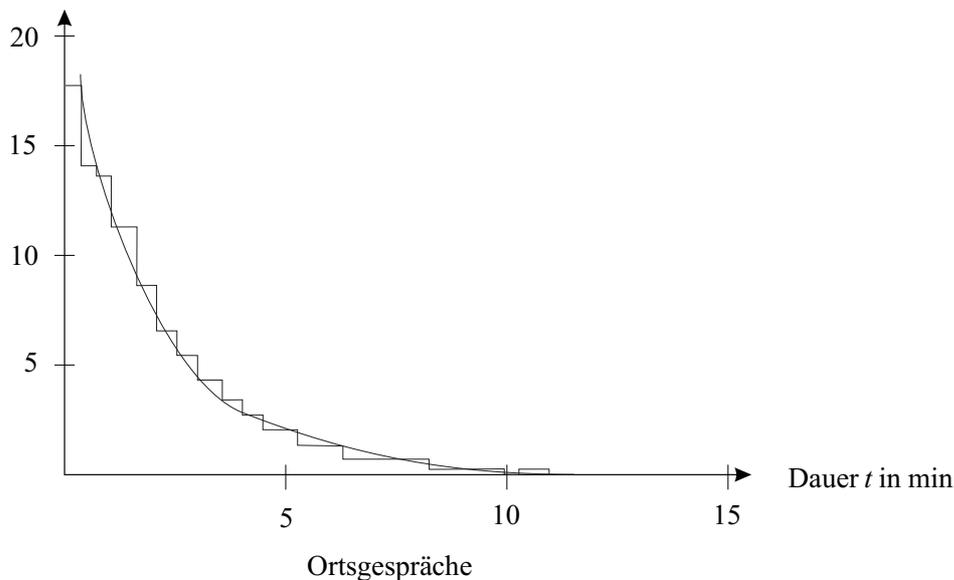


Abb. 9.2-3: Typische Gesprächsdauer von Telefonverbindungen

In Abb. 9.2-3 sind typische Gesprächsdauern von Telefonverbindungen, wie sie in einer Ortsvermittlungsstelle gemessen wurden, wiedergegeben. Sie lassen sich gut durch eine exponentielle Wahrscheinlichkeitsdichte approximieren. Obwohl die Gesprächsdauer von den Teilnehmern bestimmt wird, kann sie als die Bediendauer des Systems aufgefasst werden. Dies zeigt, dass die Modellbildung nicht immer einen physikalischen Bezug zum System haben muss, obwohl dies häufig der Fall ist. Die Tatsache, dass das Modell das Teilnehmerverhalten gut wiedergibt, ist u. a. darauf zurückzuführen, dass die einzelnen Gesprächsdauern als voneinander statistisch unabhängig angenommen werden können.

Wir wollen nun weitere Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die in verkehrstheoretischen Betrachtungen oft auftreten, kennenlernen. Wir haben sie im Folgenden als Bedienprozesse formuliert.

Die **konstante Wahrscheinlichkeitsverteilung** beschreibt

konstante Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$F_{\mathbf{T}_B}(t) = P(\{\mathbf{T}_B \leq t\}) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < b \\ 1 & \text{für } t \geq b \end{cases} \quad 9.2-19$$

Vorgänge mit konstanter Bedienzeit, wie z. B. das Abarbeiten gleichlanger Datenpakete. Für den Erwartungswert der Bedienzeit und seine Varianz erhält man

$$E\{\mathbf{T}_B\} = b \quad \text{und} \quad \sigma_{\mathbf{T}_B}^2 = 0. \quad 9.2-20$$

**hyperexponentielle
Wahrscheinlichkeits-
verteilung**

Die **hyperexponentielle Wahrscheinlichkeitsverteilung** k -ter Ordnung
(Abb. 9.2-4)

$$F_{\mathbf{T}_B}(t) = P(\{\mathbf{T}_B \leq t\}) = 1 - \sum_{i=1}^k P_i \cdot e^{-\mu_i t} \quad 9.2-21$$

$$\text{für } t \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^k P_i = 1, \quad k \in \{1, 2, \dots\}$$

beschreibt einen Bedienprozess, dessen Anforderungen in k Klassen eingeteilt werden können. Die einzelnen Klassen haben eine exponentiell verteilte Bediendauer. Innerhalb einer Bedienphase hat man somit die Markoff-Eigenschaft, insgesamt ist der Prozess allerdings von der Vorgeschichte (Anforderung, aus welcher Klasse bedient wird) abhängig. Der Erwartungswert der Bediendauer T_B und die Varianz errechnen sich zu

$$E\{\mathbf{T}_B\} = \sum_{i=1}^k \frac{P_i}{\mu_i}, \quad \sigma_{\mathbf{T}_B}^2 = 2 \sum_{i=1}^k P_i / \mu_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k P_i / \mu_i \right)^2. \quad 9.2-22$$

Erlang-k Verteilung

Die **Erlang- k Verteilung** (Abb. 9.2-5)

$$F_{\mathbf{T}_B}(t) = P(\{\mathbf{T}_B \leq t\}) = 1 - e^{-\mu t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\mu t)^i}{i!} \quad 9.2-23$$

$$\text{für } t \geq 0, \quad k \in \{1, 2, \dots\}$$

beschreibt Vorgänge, bei denen die Bedienphase aus k hintereinander ausgeführten Bedienphasen besteht, wobei alle Bedienphasen eine exponentielle Bediendauer mit dem gleichen Mittelwert $1/\mu$ haben. Der Mittelwert und die Varianz der Bediendauer insgesamt errechnen sich zu

$$E\{\mathbf{T}_B\} = \frac{k}{\mu}, \quad \sigma_{\mathbf{T}_B}^2 = \frac{k}{\mu^2}. \quad 9.2-24$$

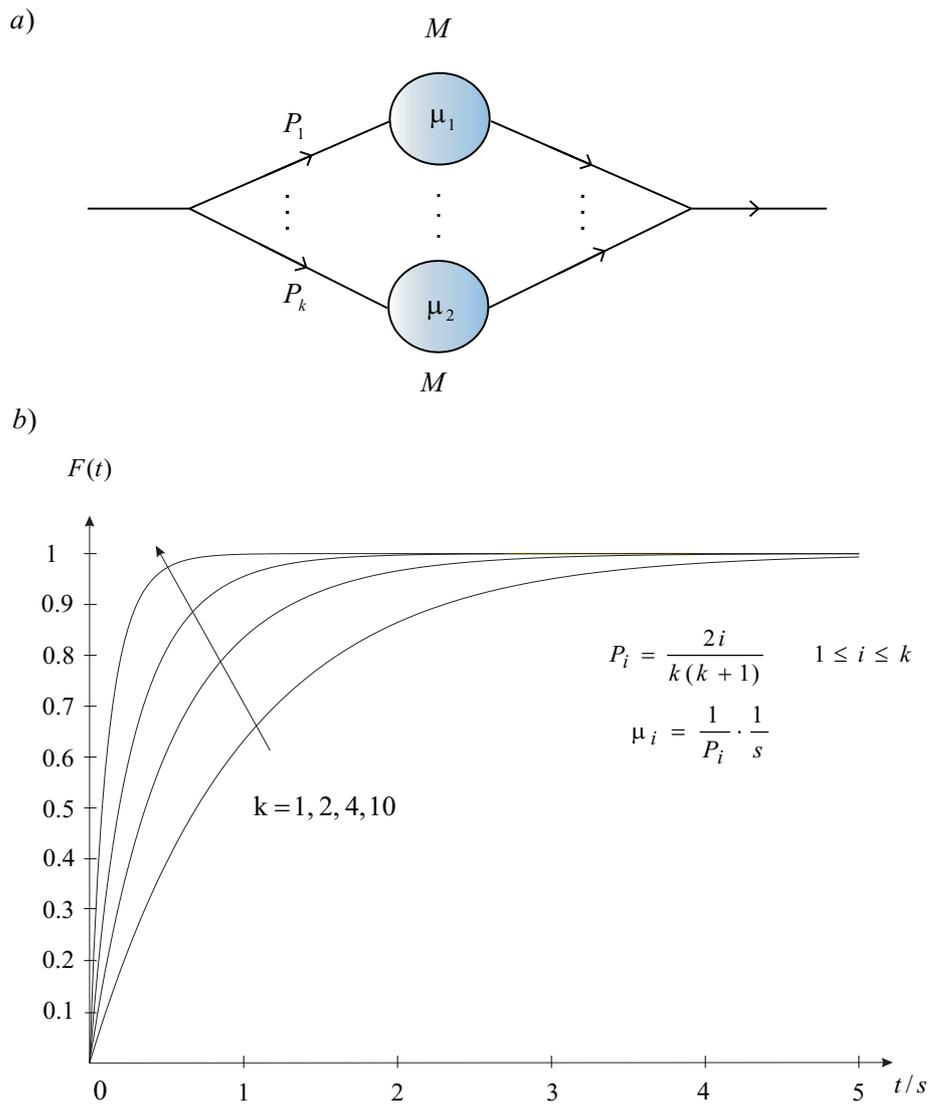


Abb. 9.2-4: Bediensysteme mit hyperexponentiell verteilten Bedienzeiten
a) Systemmodell, das zur hyperexponentiellen Wahrscheinlichkeitsverteilung der Bedienzeiten führt.
(Alternativwahl von Bedieneinheiten)
b) Die hyperexponentielle Wahrscheinlichkeitsverteilung

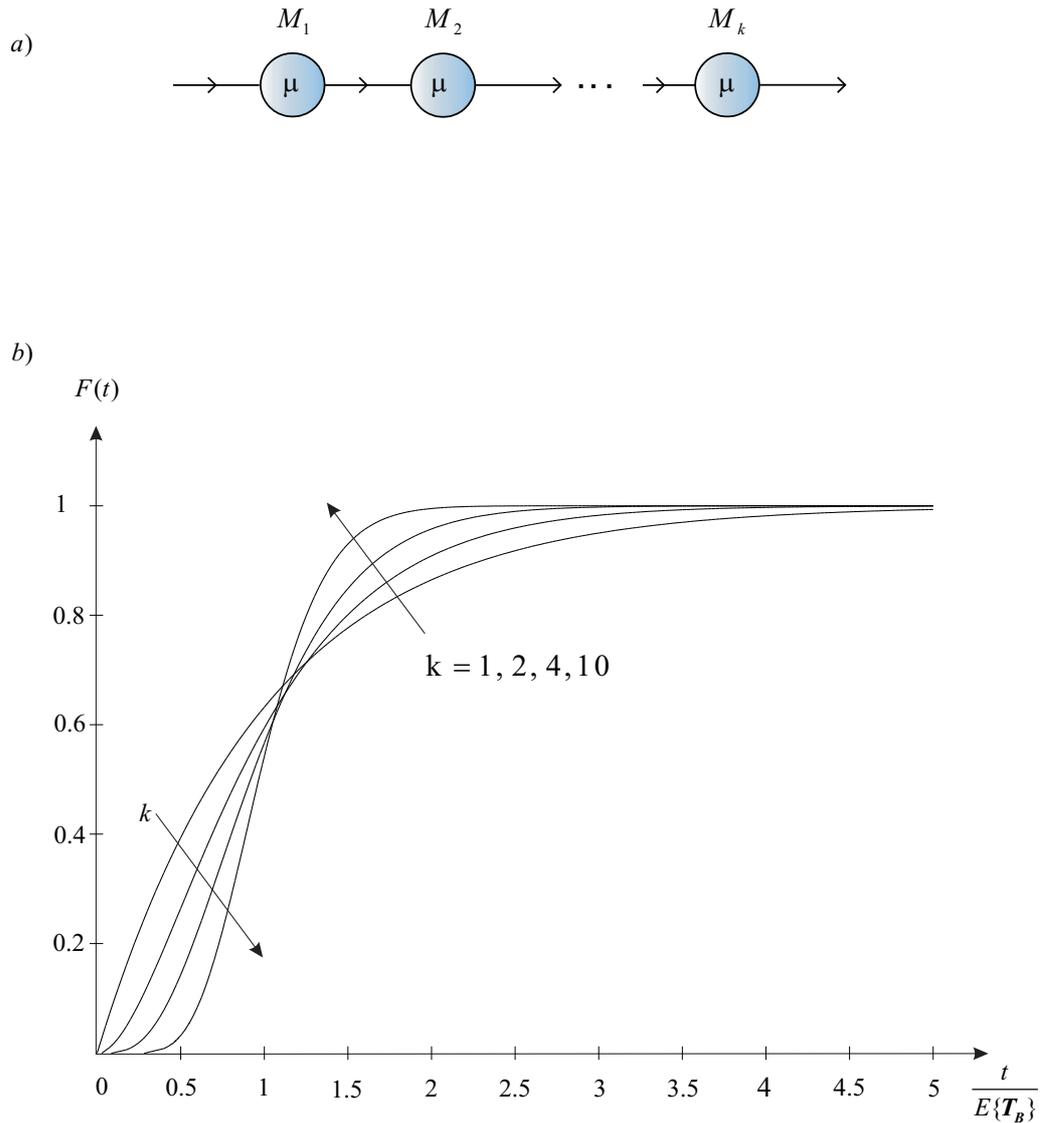


Abb. 9.2-5: Bediensysteme mit Erlang- k verteilten Bedienzeiten
a) Systemmodell, das zur Erlang- k Wahrscheinlichkeitsverteilung der Bedienzeiten führt.
b) Die Erlang- k Wahrscheinlichkeitsverteilung

Cox-Verteilung Die **Cox-Verteilung** (Abb. 9.2-6) ist eine Verallgemeinerung der Erlang- k Verteilung. Bei ihr wird mit der Wahrscheinlichkeit $(1 - d_i)$ nach Beendigung der i -ten Bedienphase die Bedienung beendet, mit der Wahrscheinlichkeit d_i die nächste Bedienphase eingeleitet. Die einzelnen Bedienungsdauern haben eine exponentielle Verteilung mit möglicherweise unterschiedlichen mittleren Bediendauern. Mit der Cox-Verteilung können beliebige Verteilungen approximiert werden.

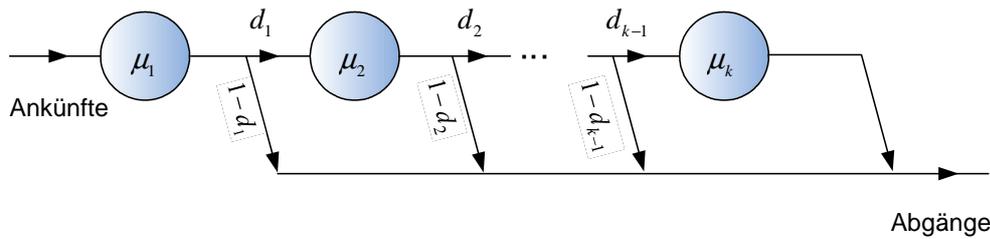


Abb. 9.2-6: Zur Cox-Verteilung

Die einzelnen exponentiellen Bedienphasen in Abb. 9.2-6 können die unterschiedliche mittlere Bediendauer $\frac{1}{\mu_i}$ haben. Die jeweiligen Verzweigungswahrscheinlichkeiten sind d_i und $(1 - d_i)$.

In den folgenden Abschnitten werden wir Modelle, die aus einem Ankunfts- und einem Bedienprozess bestehen, untersuchen. Für die Bezeichnung solcher Systeme hat sich die **Kendall'sche Notation** durchgesetzt. Sie setzt sich wie folgt zusammen

Kendall'sche Notation

$$AP/BP/BE - OPT.$$

Dabei bezeichnet

AP	den Ankunftsprozess
BP	den Bedienprozess
BE	die Anzahl der Bedieneinheiten
OPT	die Optionen, z. B. Anzahl der Warteplätze

So bedeutet z. B. $M/G/m-w$: Markoff-Ankunftsprozess, beliebiger Bedienprozess (*General*) mit m Bedieneinheiten und einem Warteraum mit w Warteplätzen

Selbsttestaufgabe 9.2-1:

Welches System beschreibt die Kendall'sche Bezeichnung $H_2/G/1$? Skizzieren Sie das zugehörige Warteschlangenmodell.

9.3 Das Warte- und Verlustsystem M/M/1

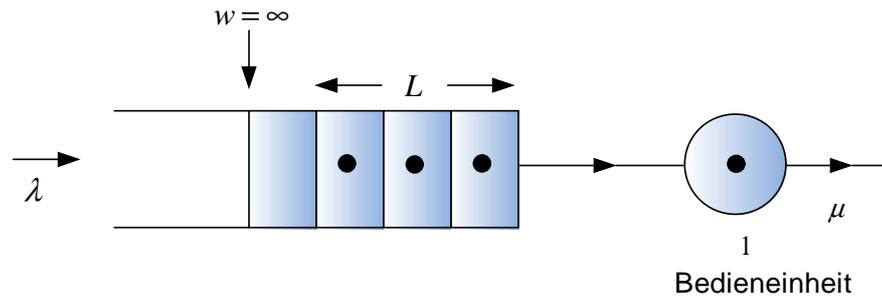
Wir betrachten zunächst das **M/M/1-Wartesystem**, d. h. ein System mit Markoff'schen Ankünften mit der Ankunftsrate λ , einer Markoff'schen Bedieneinheit mit der Bedienrate μ und einem Warteraum mit unendlich vielen Warteplätzen (Abb. 9.3-1). Mit der Zufallsvariablen k bezeichnen wir die Anzahl der im System (einschließlich in der Bedieneinheit) befindlichen Anforderungen zu einem Zeitpunkt t . k kann also auch als eine Zustandsvariable, d. h. eine Variable, die den Zustand des Systems zu einem Zeitpunkt t wiedergibt, verstanden werden. Es sei

M/M/1-Wartesystem

$p_k(t)$ die Wahrscheinlichkeit, dass sich zum Zeitpunkt t das System im Zustand k befindet. Es gilt dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1, \quad 9.3-1$$

wenn wir annehmen, dass sich das System zu jedem Zeitpunkt in einem definierten Zustand befindet.



w Anzahl der Warteplätze = ∞

λ Ankunftsrate

μ Bedienrate

$L+1$ Anzahl der Anforderungen im System

Abb. 9.3-1: Das M/M/1-Wartesystem

Wir betrachten nun das System zu einem Zeitpunkt $(t + \Delta t)$. Wir nehmen an, dass es sich zu diesem Zeitpunkt im Zustand k befindet ($k \neq 0$). Sowohl für den Ankunftsprozess als auch für den Bedienprozess gelten die Gl. 9.2-9 bis Gl. 9.2-13. Dies bedeutet insbesondere, dass die Wahrscheinlichkeit $p_j(t)$, $j \neq k, k + 1$ oder $k - 1$ von der Ordnung $o(\Delta t)$ ist, d. h. zum Zeitpunkt t können nur die Zustände $k, k + 1$ oder $k - 1$ eine Wahrscheinlichkeit größer als $o(\Delta t)$ haben. Wir können nun mit den Gleichungen Gl. 9.2-9 bis Gl. 9.2-13 die Wahrscheinlichkeit, dass der Zustand k zum Zeitpunkt $(t + \Delta t)$ erreicht wird, zusammenstellen:

$$\begin{aligned} p_k(t + \Delta t) = & p_k(t) \cdot [(1 - \lambda \cdot \Delta t)(1 - \mu \cdot \Delta t) + \mu \cdot \Delta t \cdot \lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t)] \\ & + p_{k-1}(t)[\lambda \cdot \Delta t(1 - \mu \cdot \Delta t) + o(\Delta t)] \\ & + p_{k+1}(t)[\mu \cdot \Delta t(1 - \lambda \cdot \Delta t) + o(\Delta t)] \\ & + o(\Delta t). \end{aligned} \quad 9.3-2$$

Wir haben bei der Zusammenstellung von Gl. 9.3-2 z. B. berücksichtigt, dass der Zustand k erhalten bleibt, wenn entweder im Intervall Δt weder eine Anforderung ankommt noch eine Bedienung zu Ende geht (erster Term in der ersten Klammer) oder eine Anforderung ankommt und eine Bedienung zu Ende geht (zweiter Term in

der ersten Klammer) usw. Wir vereinfachen Gl. 9.3-2, indem wir alle Terme höherer Ordnung in Δt in $o(\Delta t)$ zusammenfassen und erhalten für $k \neq 0$

$$p_k(t + \Delta t) = [1 - (\lambda + \mu) \cdot \Delta t] \cdot p_k(t) + \lambda \cdot \Delta t \cdot p_{k-1}(t) + \mu \cdot \Delta t \cdot p_{k+1}(t) + o(\Delta t). \quad 9.3-3$$

Entsprechend erhalten wir für $k = 0$

$$p_0(t + \Delta t) = [1 - \lambda \cdot \Delta t] \cdot p_0(t) + \mu \cdot \Delta t \cdot p_1(t) + o(\Delta t). \quad 9.3-4$$

Die Gleichungen Gl. 9.3-3 - Gl. 9.3-4 unter Einbeziehung von Gl. 9.3-1 ermöglichen es, alle Zustandswahrscheinlichkeiten aus einem Anfangszustand iterativ zu berechnen. Alternativ haben wir aus Gl. 9.3-3

$$\begin{aligned} \frac{p_k(t + \Delta t) - p_k(t)}{\Delta t} &= -(\lambda + \mu) \cdot p_k(t) + \lambda \cdot p_{k-1}(t) \\ &\quad + \mu \cdot p_{k+1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \quad \text{für } k \neq 0. \end{aligned}$$

Wir machen den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ und erhalten hieraus für $k \neq 0$

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = -(\lambda + \mu) \cdot p_k(t) + \lambda \cdot p_{k-1}(t) + \mu \cdot p_{k+1}(t) \quad 9.3-5$$

und entsprechend aus Gl. 9.3-4

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t). \quad 9.3-6$$

Gesucht ist nun die Lösung der Differentialgleichungen Gl. 9.3-5 - Gl. 9.3-6 unter Einbeziehung von Gl. 9.3-1, um den zeitlichen Ablauf von $p_k(t)$ aus vorgegebenen Anfangswerten zu erhalten.

Unter der Annahme, dass der betrachtete Prozess einen stationären Zustand erreicht, ist die zeitliche Veränderung von $p_k(t)$ gleich Null. Mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t) = p_k$$

erhalten wir aus Gl. 9.3-5 - Gl. 9.3-6 wegen

$$\begin{aligned} \frac{dp_k(t)}{dt} &= 0 \\ (\lambda + \mu)p_k &= \lambda \cdot p_{k-1} + \mu \cdot p_{k+1} \quad \text{für } k \neq 0 \end{aligned} \quad 9.3-7$$

und

$$\lambda \cdot p_0 = \mu \cdot p_1 \quad \text{für } k = 0. \quad 9.3-8$$

Rekursives Auflösen der Gleichungen Gl. 9.3-7 - Gl. 9.3-8 ergibt

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_0 \\ p_2 &= \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_1 \end{aligned}$$

$$p_3 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_2$$

$$p_k = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_{k-1} \quad 9.3-9$$

oder

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot p_0. \quad 9.3-10$$

Für die Summe

$$S_n = p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_k + \dots + p_n$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} S_n &= p_0 + \frac{\lambda}{\mu} p_0 + \dots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot p_0 \\ &= p_0 \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right). \end{aligned}$$

Die Summe der geometrischen Reihe ist

$$S_n = p_0 \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}. \quad 9.3-11$$

Die unendliche Reihe konvergiert nur für $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, d.h. wenn die Ankunftsrate geringer als die Bedienrate ist. In diesem Fall ergibt sich aus Gl. 9.3-11 wegen $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} \rightarrow 0$ und $\lim S_n = 1$ für $n \rightarrow \infty$

$$p_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

und aus Gl. 9.3-10

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right). \quad 9.3-12$$

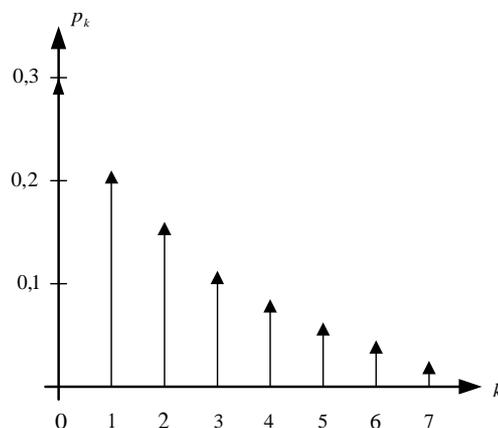


Abb. 9.3-2: Zustandswahrscheinlichkeiten des $M/M/1$ -Wartesystems für die Auslastung $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.7$

Bezeichnen wir mit ρ die Auslastung der Bedieneinheit, so haben wir

ρ = Wahrscheinlichkeit, dass die Bedieneinheit besetzt ist,

$$\rho = 1 - p_0 = 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu}. \quad 9.3-13$$

Für den Erwartungswert der Anzahl der Anforderungen im System haben wir

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{k}\} &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \rho^k \cdot (1 - \rho) \\ &= (1 - \rho) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \rho^k \\ E\{\mathbf{k}\} &= (1 - \rho) \cdot \frac{\rho}{(1 - \rho)^2} = \frac{\rho}{1 - \rho}. \end{aligned} \quad 9.3-14$$

Der Verlauf von $E\{\mathbf{k}\}$ ist in Abb. 9.3-4 dargestellt.

Entsprechend haben wir für die Anzahl der Anforderungen in der Warteschlange

$$\begin{aligned} E\{\text{Anforderungen in der Warteschlange}\} &= E\{\mathbf{L}\} \\ &= 0 \cdot p_0 + 0 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + \dots + (k - 1) \cdot p_k + \dots + (n - 1) \cdot p_n \\ &= \rho^2(1 - \rho) + \dots + (k - 1) \cdot \rho^k \cdot (1 - \rho) + \dots + (n - 1) \cdot \rho^n \cdot (1 - \rho) \\ &= (1 - \rho) \cdot \rho \cdot [\rho + \dots + (k - 1) \cdot \rho^{k-1} + \dots + (n - 1) \cdot \rho^{n-1}] \\ E\{\mathbf{L}\} &= (1 - \rho) \cdot \rho \cdot \frac{\rho}{(1 - \rho)^2} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}. \end{aligned} \quad 9.3-15$$

Der Verlauf von $E\{\mathbf{L}\}$ ist in Abb. 9.3-5 dargestellt.

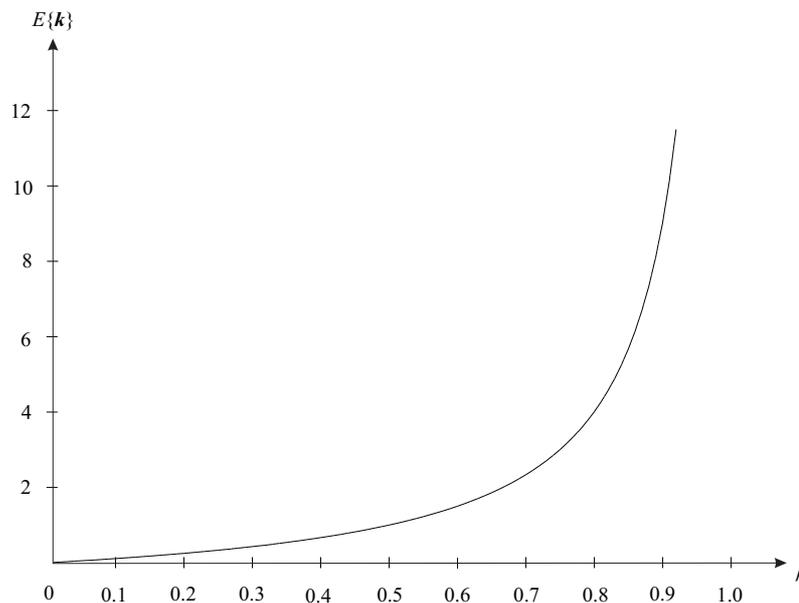


Abb. 9.3-4: Erwartungswert der Anzahl der Anforderungen im System in Abhängigkeit der Auslastung ρ

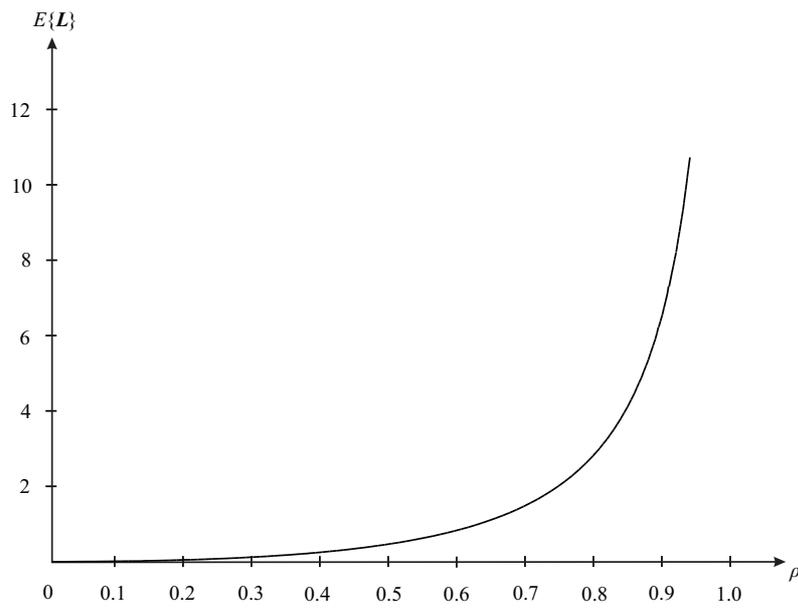


Abb. 9.3-5: Erwartungswert der Anzahl der Anforderungen in der Warteschleife in Abhängigkeit der Auslastung ρ

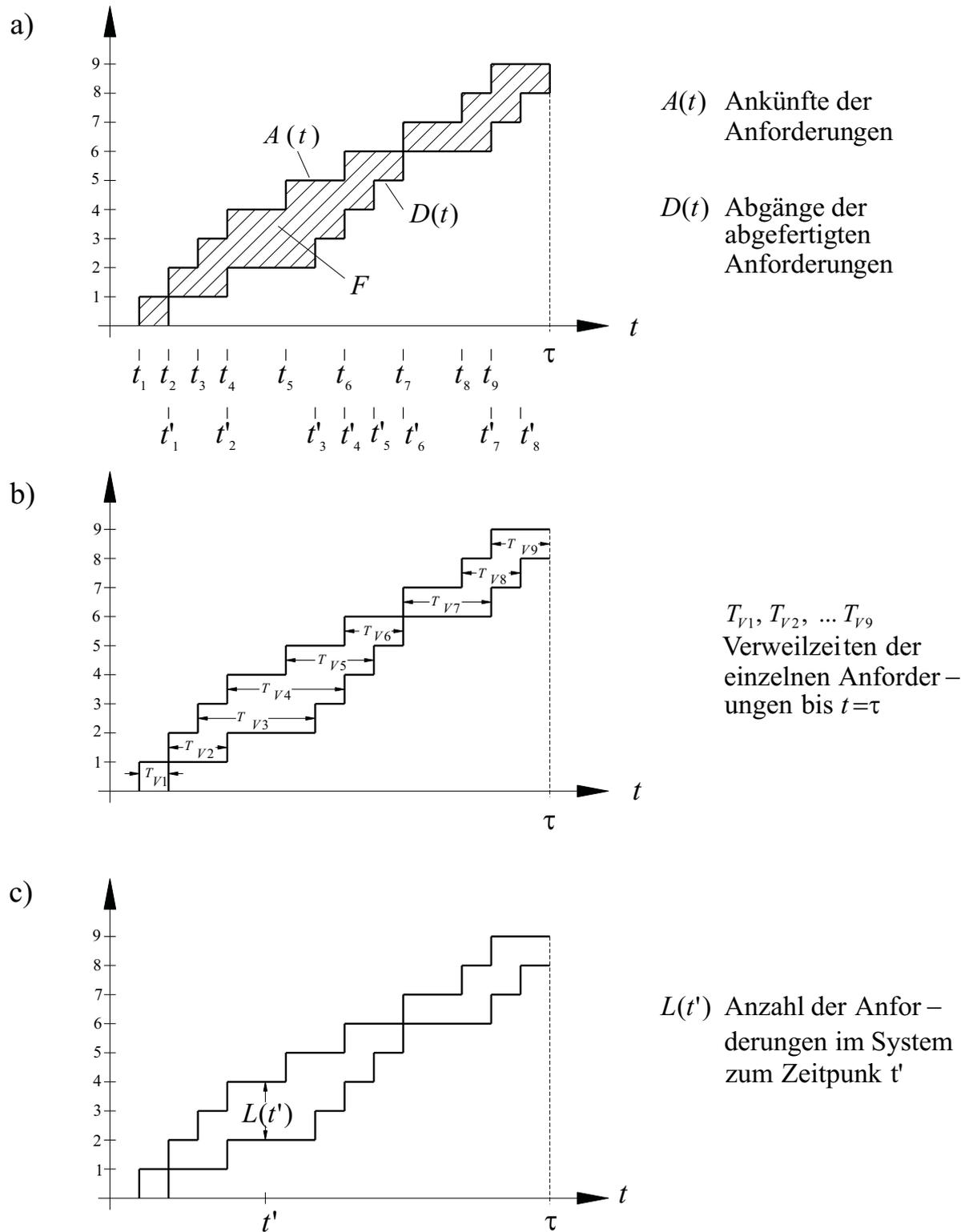


Abb. 9.3-6: Zur Ableitung des Gesetzes von Little

Wir wenden uns nun der Berechnung der mittleren Verweildauer $E\{T_V\}$ im System zu. Hierzu leiten wir ein recht allgemeines Gesetz für Wartesysteme ab, das 1961 von Little bewiesen wurde und als das **Gesetz von Little** bekannt ist [Lit61]. Für die Ableitung betrachten wir zunächst Zeitmittelwerte und werden dann die Ergodizität (Abschnitt 3.7) voraussetzen, um das Gesetz für Scharmittelwerte zu beweisen.

Gesetz von Little

Wir betrachten ein Wartesystem, dessen Anforderungskünfte als $A(t)$ (*Arrivals*) und deren Abgänge, d. h. abgefertigte Anforderungen als $D(t)$ (*Departures*) in Abb. 9.3-6a gezeichnet sind. Die schraffierte Fläche zwischen den beiden Kurven wird mit F bezeichnet. Das Gesetz von Little kann aus Abb. 9.3-6 abgeleitet werden, in dem wir die mittlere Verweildauer \tilde{T}_V und die mittlere Anzahl der Anforderungen im System \tilde{k} bis zum Zeitpunkt τ zusammenstellen. Es gilt

$$\tilde{T}_V(\tau) = \frac{\sum_{i=0}^{A(\tau)} T_{V_i}}{A(\tau)} = \frac{F}{A(\tau)} \quad 9.3-16$$

und

$$\tilde{k}(\tau) = \frac{\int_0^{\tau} L(t) dt}{\tau} = \frac{F}{\tau}. \quad 9.3-17$$

Aus den beiden Gleichungen erhalten wir

$$\tilde{T}_V(\tau) \cdot A(\tau) = F = \tilde{k}(\tau) \cdot \tau$$

oder

$$\tilde{T}_V(\tau) \cdot \frac{A(\tau)}{\tau} = \tilde{k}(\tau). \quad 9.3-18$$

Wir nehmen nun an, dass für $\tau \rightarrow \infty$ der stationäre Zustand erreicht wird und setzen hierfür

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tilde{T}_V(\tau) = \tilde{T}_V, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tilde{k}(\tau) = \tilde{k}$$

und

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A(\tau)}{\tau} = \tilde{\lambda}. \quad 9.3-19$$

Aus Gl. 9.3-18 erhalten wir somit

$$\tilde{T}_V \cdot \tilde{\lambda} = \tilde{k}. \quad 9.3-20$$

Aus der Ergodizitätsannahme erhalten wir mit

$$\begin{aligned} \tilde{T}_V &= \tilde{m}_{\mathbf{T}_V} \doteq E\{\mathbf{T}_V\} \\ \tilde{\lambda} &= \tilde{m}_\lambda \doteq E\{\text{Anzahl der Anrufe pro Zeiteinheit}\} = \lambda \\ \tilde{k} &= \tilde{m}_k \doteq E\{\mathbf{k}\} \end{aligned}$$

wobei \doteq die Gleichheit mit der Wahrscheinlichkeit 1 bedeutet, das **Gesetz von Little**

$$E\{\mathbf{T}_V\} \cdot \lambda = E\{\mathbf{k}\}. \quad 9.3-21$$

Es besagt, dass der Erwartungswert der Verweilzeit mal die Ankunftsrate gleich der mittleren Anzahl der Anforderungen im System ist.

Es sei hier betont, dass wir für die Ableitung des Gesetzes von Little keine Voraussetzungen für den Ankunfts- oder den Bedienprozess gemacht haben. Lediglich das Erreichen des stationären Zustandes und die Ergodizität wurden verwendet. Die Voraussetzung, dass von der Bedieneinheit die Abarbeitung in der Reihenfolge der Ankünfte vorgenommen wurde, diente lediglich, um den Sachverhalt etwas zu vereinfachen. Wegen

$$\sum_i T_{V_i} = \sum_i (t_i - t'_i) = \sum_i t_i - \sum_i t'_i$$

gilt Gl. 9.3-16 auch für beliebige Abarbeitungsstrategien.

Das Gesetz von Little ist recht allgemein. So lässt es sich ohne wesentliche Änderungen z. B. anstatt für das System auch für die Warteschlange beweisen. Es heißt dann: [Mittlere Wartezeit in der Warteschlange \times Ankünfte in die Warteschlange = mittlere Warteschlangenlänge], d. h.

$$E\{\mathbf{T}_w\} \cdot \lambda = E\{\mathbf{L}\}. \quad 9.3-22$$

Das Gesetz gilt auch für Verlustsysteme mit der Modifizierung, dass anstatt der Ankunftsrate nun die Rate der angenommenen Anforderungen verwendet wird.

Mit dem Gesetz vom Little Gl. 9.3-21 und Gl. 9.3-14 erhalten wir für das $M/M/1$ -Wartesystem

$$E\{\mathbf{T}_v\} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{1}{\mu - \lambda}. \quad 9.3-23$$

Aus Gl. 9.3-23 erhalten wir für die mit λ genormte Verweildauer

$$\lambda \cdot E\{\mathbf{T}_v\} = \frac{\rho}{1 - \rho},$$

ihr Verlauf ist identisch mit dem Verlauf von $E\{\mathbf{k}\}$ (s. Abb. 9.3-4).

Mit dem Gesetz von Little für die Warteschlange Gl. 9.3-22 und Gl. 9.3-15 erhalten wir

$$E\{\mathbf{T}_w\} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\rho^2}{1 - \rho}. \quad 9.3-24$$

Die mit λ genormte Wartezeit $\lambda \cdot E\{\mathbf{T}_w\}$ verläuft wie $E\{\mathbf{L}\}$ (s. Abb. 9.3-5).

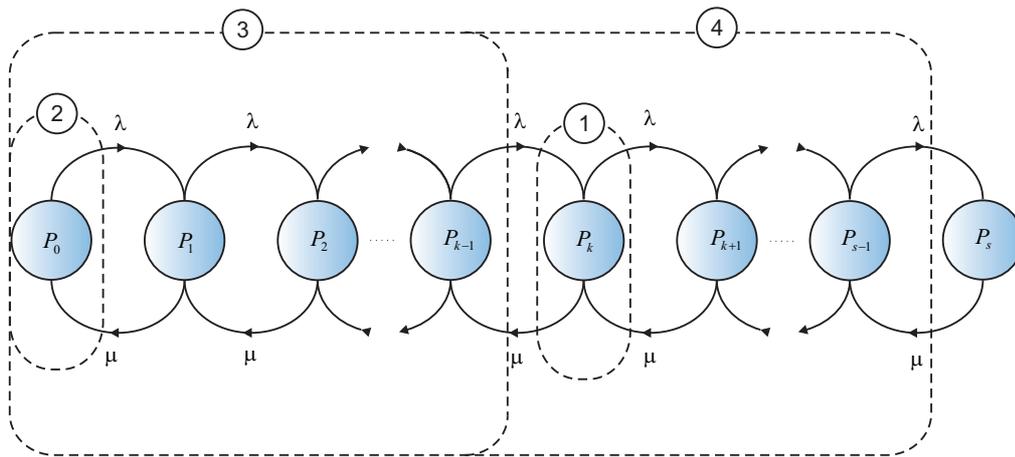


Abb. 9.3-7: Zustandsdiagramm des M/M/1 – w-Verlustsystems mit $w = s - 1$ Warteplätzen

Aus den für das M/M/1-Wartesystem vorliegenden Ergebnissen können wir unmittelbar die charakteristischen Größen für das **M/M/1-Verlustsystem**, d. h. ein System mit begrenzten Warteplätzen ableiten. Das M/M/1-w-Verlustsystem hat insgesamt $s = w + 1$ Plätze (w Warteplätze und 1 Platz in der Bedieneinheit). Das System kann somit einen der $k = 0, \dots, s$ Zustände annehmen. Die Gleichungen (Gl. 9.3-7 bis Gl. 9.3-9) modifizieren sich geringfügig, indem nun nur $s + 1$ Zustände berücksichtigt werden. Aus dem Zustandsdiagramm (Abb. 9.3-7) erhalten wir wieder

M/M/1-
Verlustsystem

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot p_{k-1} \quad \text{für } k \neq 0 \tag{9.3-25}$$

und

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot p_0. \tag{9.3-26}$$

Mit der modifizierten Form der Gl. 9.3-1

$$\sum_{k=0}^s p_k = 1$$

erhalten wir entsprechend Gl. 9.3-11

$$p_0 = \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+1}} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{s+1}}$$

und mit Gl. 9.3-26

$$p_k = \rho^k \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{s+1}}, \quad k \leq s, \tag{9.3-27}$$

wobei

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Insbesondere erhalten wir für $k = s$

$$p_s = \rho^s \cdot \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{s+1}}. \tag{9.3-28}$$

Verlustwahrscheinlichkeit

p_s ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle s Plätze im System (einschließlich der Bedienplatz) besetzt sind; sie ist also die Wahrscheinlichkeit P_B , dass das System blockiert ist. Zwischen ihr und der **Verlustwahrscheinlichkeit** P_V , dass eine ankommende Anforderung abgewiesen wird, besteht ein einfacher Zusammenhang. Wir betrachten zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass das System blockiert ist und eine Anforderung ankommt, $P(\{\text{Blockiert und Anknunft}\})$. Diese kann in zwei äquivalente Ausdrücke umgewandelt werden, nämlich

$$P(\text{Blockiert und Anknunft}) = P(\text{Blockiert} \mid \text{Anknunft}) \cdot P(\text{Anknunft})$$

und

$$P(\text{Blockiert und Anknunft}) = P(\text{Anknunft} \mid \text{Blockiert}) \cdot P(\text{Blockiert}).$$

Da $P_V = P(\text{Blockiert} \mid \text{Anknunft})$ ist, haben wir

$$P_V \cdot P(\text{Anknunft}) = P(\text{Anknunft} \mid \text{Blockiert}) \cdot P_B$$

oder

$$P_V = \frac{P(\text{Anknunft} \mid \text{Blockiert})}{P(\text{Anknunft})} \cdot P_B. \quad 9.3-29$$

Ist die Ankunfts-wahrscheinlichkeit unabhängig vom Systemzustand, so erhalten wir $P(\text{Anknunft} \mid \text{Blockiert}) = P(\text{Anknunft})$ und die Verlustwahrscheinlichkeit und die Blockierungswahrscheinlichkeit sind gleich. Dies ist beim betrachteten $M/M/1$ -System gegeben, so dass gilt

$$P_V = P_B = p_s = \rho^s \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{s+1}}. \quad 9.3-30$$

In Abb. 9.3-8 ist die Verlustwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von s und ρ dargestellt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine ankommende Anforderung angenommen wird, ist $(1 - P_V)$. Da die Anforderungen mit der Ankunftsrate λ ankommen, ist unter der Annahme, dass allmählich alle ankommenden Anforderungen auch abgearbeitet werden, der Durchsatz

$$D = \lambda(1 - P_V) = \lambda \cdot \frac{1 - \rho^s}{1 - \rho^{s+1}}. \quad 9.3-31$$

Der auf λ normierte Durchsatz $\frac{D}{\lambda}$ ist in Abb. 9.3-9 für verschiedene ρ und s dargestellt. Man sieht, dass bei konstant gehaltener Ankunftsrate mit wachsendem ρ , d. h. abnehmender Bedienrate der Durchsatz geringer wird.

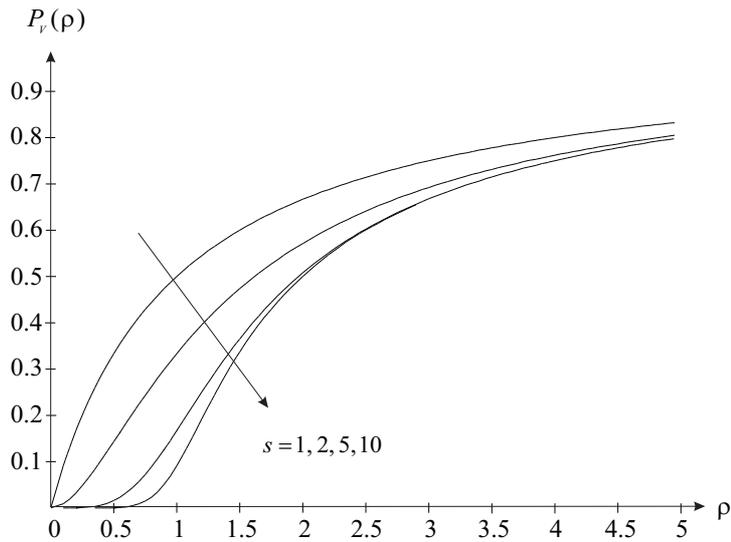


Abb. 9.3-8: Verlustwahrscheinlichkeit des $M/M/1-w$ -Verlustsystems in Abhängigkeit von $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ und $s = w + 1$, Anzahl der Plätze im System

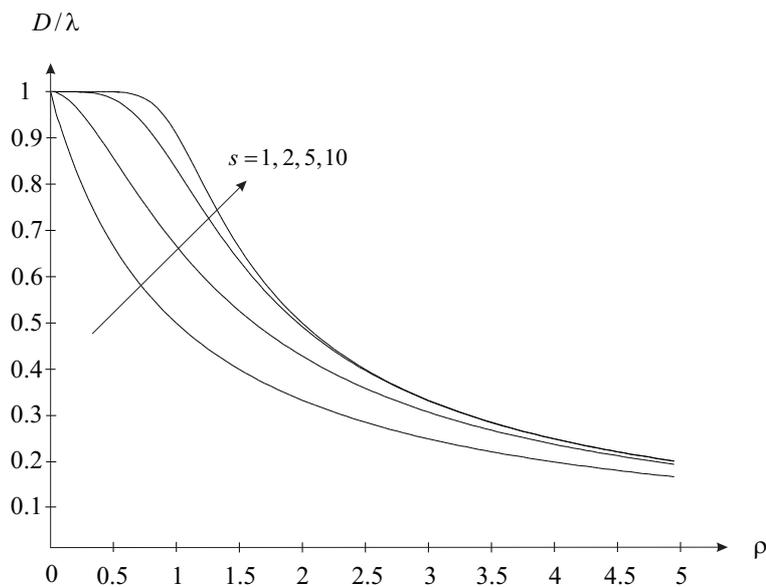


Abb. 9.3-9: Der auf die Ankunftsrate normierte Durchsatz des $M/M/1-w$ -Verlustsystems in Abhängigkeit von $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ und $s = w + 1$, Anzahl der Plätze im System

In Abb. 9.3-10 ist der auf μ normierte Durchsatz $\frac{D}{\mu}$ in Abhängigkeit von ρ und s dargestellt. Man sieht nun, dass bei konstanter Bedienrate und wachsender Ankunftsrate der Durchsatz erhöht wird.

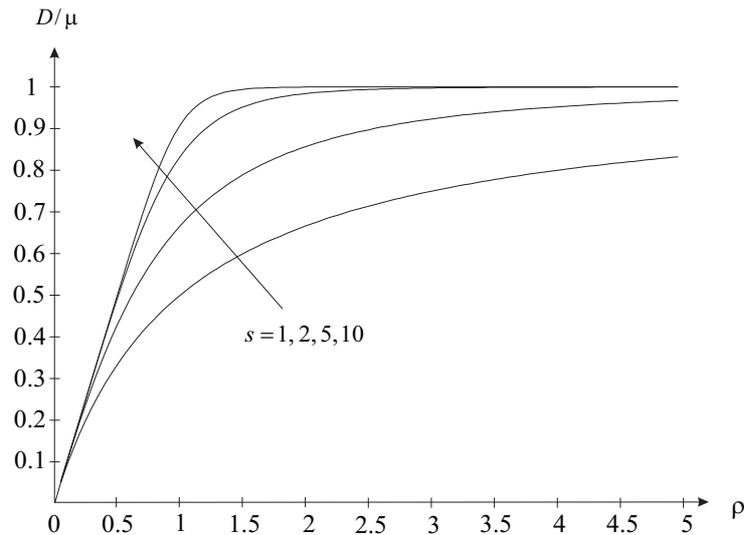


Abb. 9.3-10: Der auf die Bedienrate normierte Durchsatz des $M/M/1-w$ -Verlustsystems in Abhängigkeit von $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ und $s = w + 1$, Anzahl der Plätze im System

Selbsttestaufgabe 9.3-1:

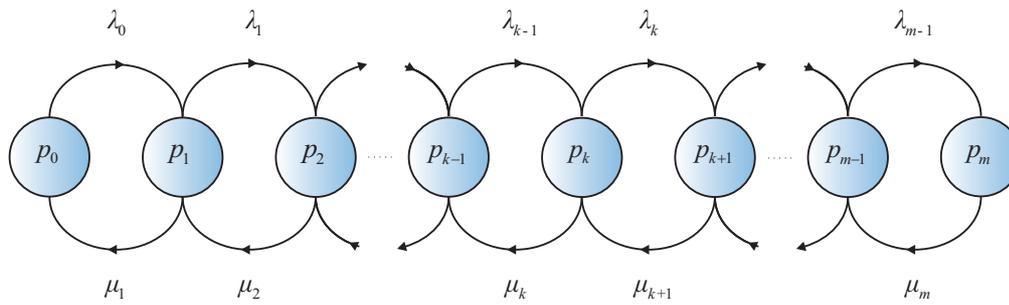
Es sei das $M/M/1-8$ -System gegeben. Berechnen Sie die Verlustwahrscheinlichkeit, die mittlere Warteschlangenlänge und den Durchsatz des Systems für die Ankunftsrate $\lambda = 0,3/s$ und die Bedienrate $\mu = 0,6/s$.

9.4 Das Warte- und Verlustsystem $M/M/m$

Die im vorigen Abschnitt ausführlich dargestellten Verfahren und Ergebnisse können auf einfache Weise auf Systeme mit m Bedieneinheiten erweitert werden. $M/M/m$ -Systeme werden häufig für die Verkehrsanalyse von Kommunikationssystemen und -netzen herangezogen. In der Regel wird davon ausgegangen, dass ein stationärer Zustand erreicht wird. Im Wesentlichen läuft die Analyse dann auf die Betrachtung der Zustandsdiagramme, die Aufstellung der Zustandsgleichungen und die Ableitung der Zustandswahrscheinlichkeiten hinaus, aus denen die einzelnen interessierenden Verkehrsgrößen berechnet werden. Häufig ist eine exakte Berechnung der Werte nicht möglich, so dass man sich auf Näherungswerte beschränkt.

Wie bei den bisher betrachteten Systemen sind häufig Zustandsübergänge von einem Zustand nur zu den beiden benachbarten Zuständen zulässig. Die Übergangsraten sind im Allgemeinen allerdings durchaus von den einzelnen Zuständen abhängig (Abb. 9.4-1). Solche Prozesse werden als **Geburts- und Sterbeprozesse** bezeichnet, weil sie das klassische Beispiel des Geburts- und Sterbeverlaufs einer Bevölkerung geeignet widerspiegeln. Im Folgenden betrachten wir verschiedene solche Prozesse, wobei die Komplexität der betrachteten Systeme jeweils etwas erhöht wird.

Geburts- und Sterbeprozesse



$\lambda_k =$ Geburtsrate im Zustand k
 $\mu_k =$ Sterberate im Zustand k

Abb. 9.4-1: Das Zustandsdiagramm eines Geburts- und Sterbeprozesses

Wir beginnen mit einem reinen M/M/m-Verlustsystem, d. h. einem System mit m Bedieneinheiten und keinen Warteplätzen (Abb. 9.4-2). Da die Ankunftsrate der Anforderungen unabhängig vom Zustand des Systems gleich λ ist, finden die Übergänge von einem Zustand in den nächsten aufwärts alle mit der Übergangsrate λ statt. Die Situation in der anderen Richtung ist entsprechend anders. Im Zustand k wird in k Bedieneinheiten jeweils eine Anforderung bearbeitet. Die Wahrscheinlichkeit, dass in der Zeit Δt eine bestimmte Bedieneinheit eine Anforderung beendet, ist entsprechend Gl. 9.2-9

M/M/m-
Verlustsystem

$$p_1 = 1 - e^{-\mu\Delta t}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sie keine Anforderung beendet, ist somit

$$p_0 = e^{-\mu\Delta t}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass keine der k Bedieneinheiten eine Anforderung beendet, lässt sich als das Produkt

$$p_{k0} = e^{-\mu\Delta t} \cdot e^{-\mu\Delta t} \cdot \dots = e^{-k\mu\Delta t}$$

darstellen, denn nach Voraussetzung arbeiten die Bedieneinheiten unabhängig voneinander.

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der k Bedieneinheiten eine Anforderung beendet, ist dann

$$p_{k1} = 1 - e^{-k\mu\Delta t}.$$

Ein Vergleich mit Gl. 9.2-9 zeigt, dass es sich wiederum um eine exponentielle Verteilung mit der Bedienrate $k\mu$ handelt. $k\mu$ ist somit die Übergangsrate, mit der der Zustand k nach $(k - 1)$ verlassen wird. Damit erhalten wir das Zustandsdiagramm von Abb. 9.4-2b für das reine M/M/m-Verlustsystem. Es handelt sich hierbei um eine spezielle Form des Geburts- und Sterbeprozesses (vgl. Abb. 9.4-1). Die Flussgleichungen an den Flächen (1), (2) und (3) in Abb. 9.4-2b lauten

$$(\lambda + k\mu) \cdot p_k = \lambda p_{k-1} + (k + 1) \cdot \mu p_{k+1}, \tag{9.4-1}$$

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \quad 9.4-2$$

und

$$p_k = \frac{\lambda}{k\mu} \cdot p_{k-1}. \quad 9.4-3$$

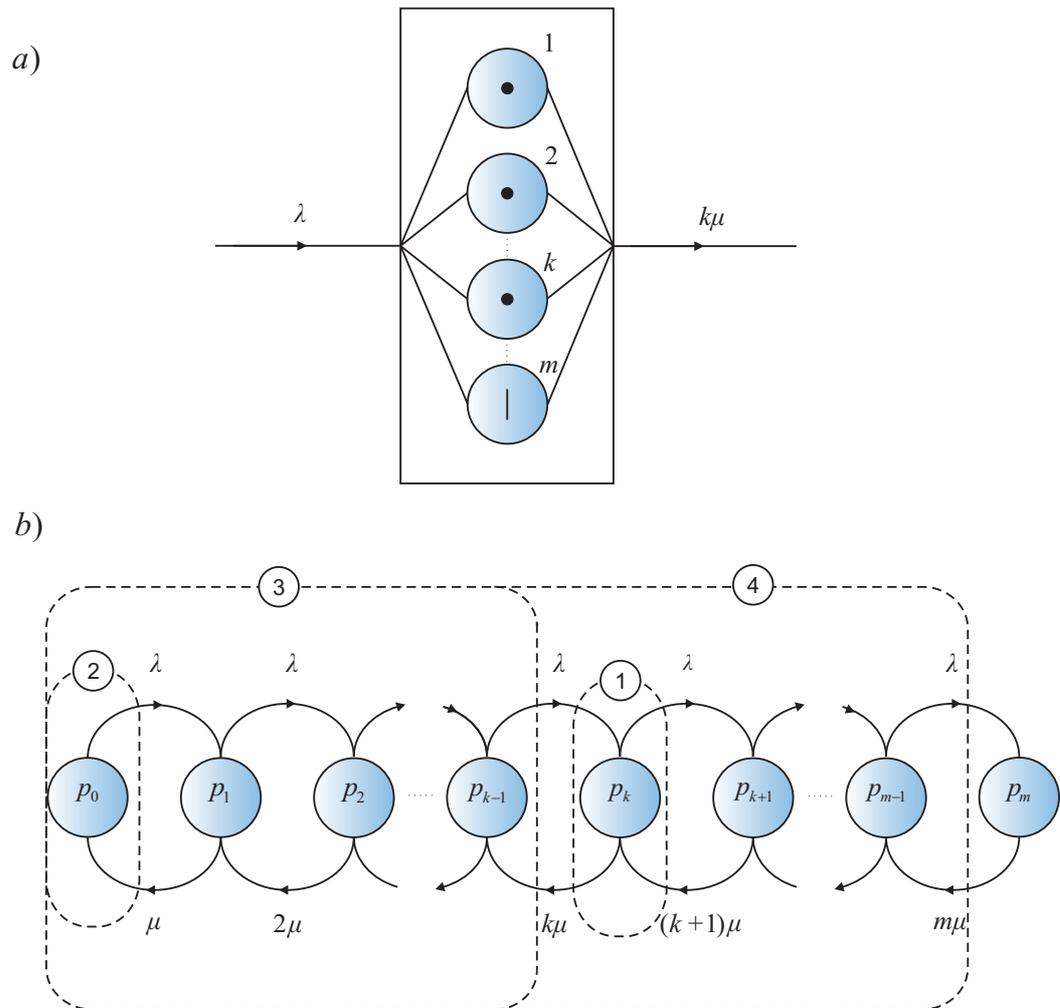


Abb. 9.4-2: Das $M/M/m$ -Verlustsystem
 a) Symbolische Darstellung im Zustand k
 b) Das Zustandsdiagramm des $M/M/m$ -Verlustsystems

Hieraus erhalten wir

$$p_k = \frac{\lambda}{k\mu} \cdot \frac{\lambda}{(k-1)\mu} \cdots \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_0$$

oder

$$p_k = \frac{\lambda^k}{\mu^k k!} p_0. \quad 9.4-4$$

Wegen

$$\sum_{i=0}^m p_i = 1$$

erhalten wir aus Gl. 9.4-4

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^m \frac{\lambda^i}{\mu^i i!}}$$

und damit

$$p_k = \frac{\frac{\lambda^k}{\mu^k k!}}{\sum_{i=0}^m \frac{\lambda^i}{\mu^i i!}}. \quad 9.4-5$$

Da λ die Ankunftsrate der Anforderungen und $\frac{1}{\mu}$ die mittlere Bediendauer einer Anforderung ist, wird $\lambda \cdot \frac{1}{\mu}$ als das **Verkehrsangebot** bezeichnet und mit

Verkehrsangebot

$$A = \frac{\lambda}{\mu} \quad 9.4-6$$

abgekürzt. Für $k = m$ erhalten wir aus Gl. 9.4-5 die Verlustwahrscheinlichkeit $P_V = p_m$.

$$P_V = \frac{\frac{A^m}{m!}}{\sum_{i=0}^m \frac{A^i}{i!}}. \quad 9.4-7$$

Gl. 9.4-7 wird nach A. K. Erlang die **Erlang'sche Verlustformel** oder die **erste Erlang'sche Formel** genannt und die Verlustwahrscheinlichkeit P_V mit $E_{1,m}(A)$ oder B (**B**locking) bezeichnet:

**Erlang'sche
Verlustformel
erste Erlang'sche
Formel**

$$E_{1,m}(A) = B = \frac{\frac{A^m}{m!}}{\sum_{i=0}^m \frac{A^i}{i!}}. \quad 9.4-8$$

Für die Erfolgswahrscheinlichkeit, d. h. für die Wahrscheinlichkeit, dass eine ankommende Anforderung angenommen wird, gilt wieder (Gl. 9.1-2)

$$P_E = (1 - P_V).$$

Als **Verkehr** V bezeichnet man

Verkehr

$$V = A \cdot P_E = A(1 - P_V). \quad 9.4-9$$

Wir wollen kurz zeigen, dass

$$V = E\{\mathbf{k}\}, \quad 9.4-10$$

d. h. der Verkehr gleich der Anzahl der im Mittel belegten Bedieneinheiten ist. Es gilt

$$E\{\mathbf{k}\} = \sum_{i=0}^m i \cdot p_i = \sum_{i=1}^m i \cdot p_i.$$

Mit Gl. 9.4-3 erhalten wir

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{k}\} &= \sum_{i=1}^m i \cdot \frac{\lambda}{i \cdot \mu} \cdot p_{i-1} = \sum_{i=1}^m A \cdot p_{i-1} \\ &= A \cdot \sum_{i=0}^m p_i - A \cdot p_m \\ &= A(1 - p_m) = A(1 - P_V) = V, \end{aligned}$$

was wir zeigen wollten.

Verkehrsrest Der Teil des Verkehrs, der nicht bedient werden kann, wird als der **Verkehrsrest** R bezeichnet. Für ihn gilt

$$R = A - V \quad 9.4-11$$

bzw.

$$R = A \cdot P_V. \quad 9.4-12$$

Die Werte A , R und V sind dimensionslos. Um aufzuzeigen, dass es sich um Verkehrswerte handelt, werden sie in der Pseudoeinheit **Erlang** angegeben.

Beispiel 9.4-1:

Wir betrachten ein PCM 30 System, das als Verkehrskonzentrator im Vorfeld eingesetzt wird und an dem 120 Teilnehmer mit jeweils 0,17 Erlang Verkehrsaufkommen angeschlossen sind.

Das Verkehrsangebot wird als

$$A = 120 \times 0,17 = 20,4 \text{ Erlang}$$

angenommen werden. Für die Verlustwahrscheinlichkeit ergibt sich aus Gl. 9.4-7

$$B = \frac{(20,4)^{30}}{30!} \cdot \frac{1}{\sum_{i=0}^{30} \frac{(20,4)^i}{i!}}$$

Der Ausdruck für den Verlust kann entweder durch Näherungsbetrachtungen für die Exponentialfunktion und die Fakultäten oder durch einen Rechenalgorithmus ausgewertet werden. Alternativ kann man auch Verkehrstabellen z. B. der Firma Siemens heranziehen. Man erhält $B \approx 0,01$. Somit ist der Verkehr

$$V = 20,4 \times 0,99 = 20,196 \text{ Erlang}$$

und der Verkehrsrest

$$R = 0,204 \text{ Erlang.}$$

Wir wenden uns nun einem $M/M/m$ -Verlustsystem zu, bei dem das Verkehrsaufkommen abhängig vom Zustand des Systems ist. Ein solches System ergibt sich, wenn das Verkehrsaufkommen von einer begrenzten Anzahl von Verkehrsquellen stammt. Warten nun einige dieser Quellen im System, so erzeugen sie keinen Verkehr. Man bezeichnet solche Systeme als $M/M/m$ -**Verlustsysteme mit endlicher Quellenzahl**. Wir betrachten im Folgenden ein solches System mit q Quellen, $q > m$. Die Ankunftsrate einer freien, d. h. nicht wartenden Quelle sei λ , die Quellen seien voneinander unabhängig. Befindet sich das System im Zustand k , so sind k Bedieneinheiten aktiv, die Bedienrate ist also wie bisher $k\mu$, während nun nur noch $(q - k)$ Quellen den Verkehr erzeugen, die Ankunftsrate ist daher $(q - k) \cdot \lambda$. In Abb. 9.4-3 ist das Zustandsdiagramm des Systems dargestellt. Daraus ergeben sich unmittelbar durch Flussgleichheit an den in der Abbildung als (1), (2) und (3) gekennzeichneten Flächen

Verlustsysteme mit endlicher Quellenzahl

$$k\mu p_k + (q - k)\lambda p_k = (q - k + 1)\lambda p_{k-1} + (k + 1)\mu \cdot p_{k+1}, \quad 9.4-13$$

$$q \cdot \lambda p_0 = \mu p_1 \quad 9.4-14$$

und

$$p_k = \frac{\lambda(q - k + 1)}{\mu \cdot k} \cdot p_{k-1}. \quad 9.4-15$$

Hieraus erhalten wir

$$p_k = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{(q - k + 1)}{k} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{(q - k + 2)}{k - 1} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{(q - k + 3)}{k - 2} \dots \frac{\lambda q}{\mu} \cdot p_0$$

oder

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot \frac{q!}{k! \cdot (q - k)!} \cdot p_0,$$

d. h.

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot \binom{q}{k} \cdot p_0. \quad 9.4-16$$

Wegen

$$\sum_{i=0}^m p_i = 1$$

erhalten wir aus Gl. 9.4-16

$$p_0 \cdot \sum_{i=0}^m \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot \binom{q}{i} = 1$$

bzw.

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^m \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot \binom{q}{i}}$$

und damit

$$p_k = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot \binom{q}{k}}{\sum_{i=0}^m \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \binom{q}{i}}. \tag{9.4-17}$$

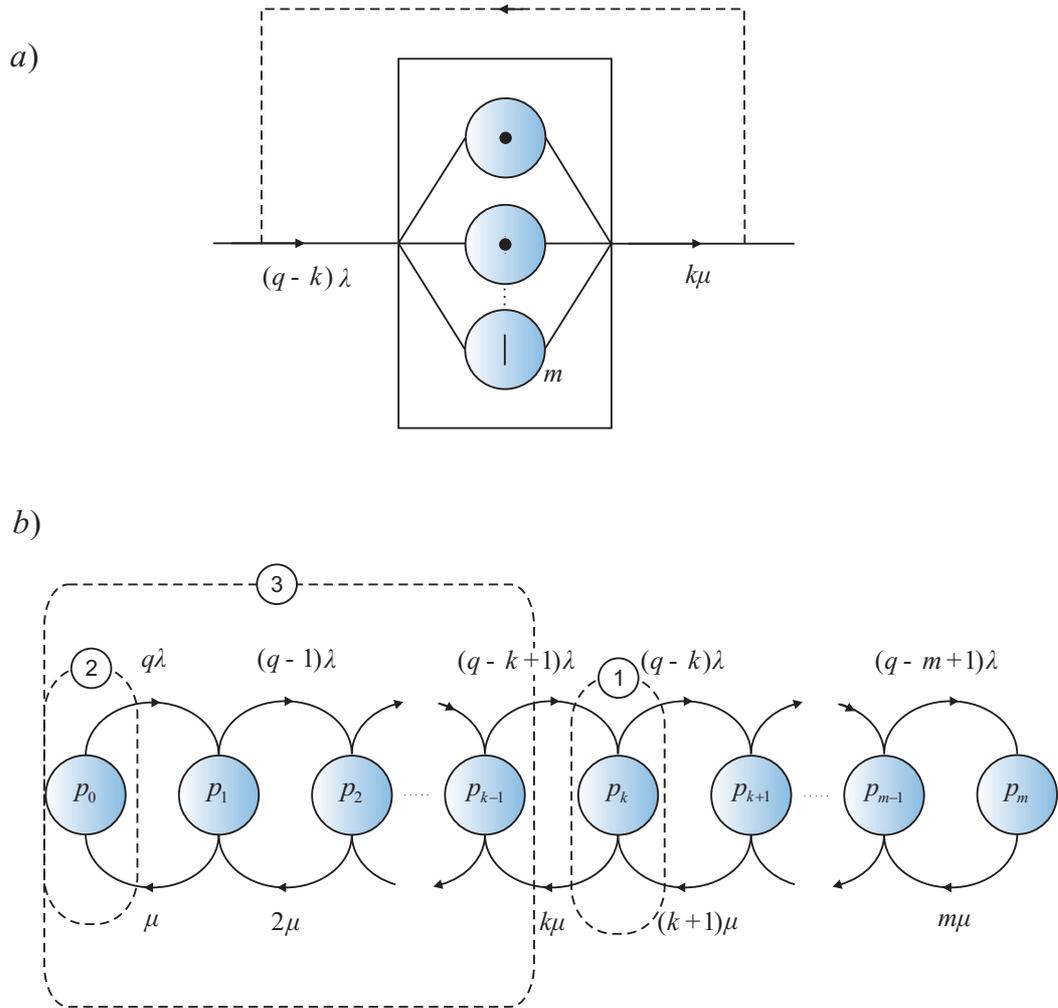


Abb. 9.4-3: Das $M/M/m$ -Verlustsystem mit q Verkehrsquellen, $q > m$
 a) Symbolische Darstellung des $M/M/m$ -Verlustsystems im Zustand k
 b) Zustandsdiagramm des $M/M/m$ -Verlustsystems

Setzen wir $\beta = \frac{\lambda}{\mu}$, d. h. β ist das Verkehrsaufkommen einer freien Quelle, so erhalten wir aus Gl. 9.4-17

$$p_k = \frac{\beta^k \binom{q}{k}}{\sum_{i=0}^m \beta^i \binom{q}{i}}. \tag{9.4-18}$$

Engset-Formel, Erlang-Bernoulli-Formel Gl. 9.4-18 wird als **Engset-Formel** oder **Erlang-Bernoulli-Formel** bezeichnet. Aus ihr können die anderen interessierenden Größen des $M/M/m$ -Verlustsystems mit q Quellen abgeleitet werden.

Beispiel 9.4-2:

Betrachten wir nun das PCM 30 System aus dem Beispiel 9.4-1 genauer, nämlich als $M/M/m$ -Verlustsystem mit endlicher Quellenzahl. Es seien 120 Teilnehmer mit 0,17 Erlang Verkehrsaufkommen pro freiem Teilnehmer angeschlossen. Die Blockierungswahrscheinlichkeit des Systems errechnet sich nach der Engset-Formel zu:

$$p_m = \frac{(0,17)^{30} \cdot \binom{120}{30}}{\sum_{i=0}^{30} (0,17)^i \binom{120}{i}} = 0,00091.$$

Wir wenden uns nun dem $M/M/m$ -Wartesystem, d.h. einem System mit m Bedieneinheiten und unendlich vielen Warteplätzen (Abb. 9.4-4a) zu. Wir setzen voraus, dass der Verkehr aus vielen Quellen stammt, d.h. dass die Ankunftsrate λ unabhängig vom Zustand ist. Ist μ die Bediendauer einer Bedieneinheit, so haben wir entsprechend unserer vorangegangenen Überlegung die Endrate $k\mu$ im Zustand $k < m$. Für $k \geq m$ bleibt die Endrate bei $m\mu$, denn es können maximal m Anforderungen bedient werden. Somit erhalten wir das Zustandsdiagramm von Abb. 9.4-4b,c. Die Zustandsgleichungen lauten

$M/M/m$ -
Wartesystem

$$\begin{aligned} (k\mu + \lambda)p_k &= \lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1} && \text{für } k < m, \\ (m\mu + \lambda)p_k &= \lambda p_{k-1} + m\mu p_{k+1} && \text{für } k \geq m, \\ \lambda p_0 &= \mu p_1 \end{aligned} \quad 9.4-19$$

und

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\lambda}{\mu k} p_{k-1} && \text{für } k < m, \\ p_k &= \frac{\lambda}{\mu \cdot m} p_{k-1} && \text{für } k \geq m. \end{aligned} \quad 9.4-20$$

Aus Gl. 9.4-19 bis Gl. 9.4-20 erhalten wir

$$p_k = \frac{\lambda}{\mu k} \cdot \frac{\lambda}{\mu(k-1)} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_0 \quad \text{für } k < m$$

und

$$p_k = \frac{\lambda}{\mu m} \cdot \frac{\lambda}{\mu m} \cdot \frac{\lambda}{\mu m} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda}{\mu(m-1)} \cdot \frac{\lambda}{\mu(m-2)} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_0 \quad \text{für } k \geq m$$

oder mit $\frac{\lambda}{\mu} = A$ für das Angebot

$$p_k = \frac{A^k}{k!} p_0 \quad \text{für } k < m$$

und

$$p_k = \frac{A^k}{m!} \cdot \frac{1}{m^{k-m}} p_0 \quad \text{für } k \geq m. \quad 9.4-21$$

Wegen

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$$

erhalten wir

$$1 = \left[\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} + \sum_{i=m}^{\infty} \frac{A^i}{m^{i-m}} \cdot \frac{1}{m!} \right] p_0.$$

Wir setzen $j = i - m$ im zweiten Summanden und erhalten

$$\begin{aligned} 1 &= \left[\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^{j+m}}{m^j} \cdot \frac{1}{m!} \right] p_0 \\ &= \left[\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^m}{m!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{A}{m}\right)^j \right] p_0. \end{aligned} \quad 9.4-22$$

Für $\frac{A}{m} < 1$ bzw. $\frac{\lambda}{m\mu} < 1$, d. h. wenn die Ankunftsrate geringer ist als die maximale Bedienrate, erhalten wir für die geometrische Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{A}{m}\right)^j = \frac{1}{1 - \frac{A}{m}} = \frac{m}{m - A}.$$

Somit erhalten wir aus Gl. 9.4-22

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^m}{m!} \frac{m}{m - A}}.$$

Damit wird aus Gl. 9.4-21

$$p_k = \frac{\frac{A^k}{k!}}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^m}{m!} \cdot \frac{m}{m - A}} \quad \text{für } k < m \quad 9.4-23$$

und

$$p_k = \frac{\frac{A^k}{m!} \frac{1}{m^{k-m}}}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^m}{m!} \cdot \frac{m}{m - A}} \quad \text{für } k \geq m. \quad 9.4-24$$

Aus den Zustandswahrscheinlichkeiten Gl. 9.4-23 und Gl. 9.4-24 können nun die interessierenden Größen abgeleitet werden.

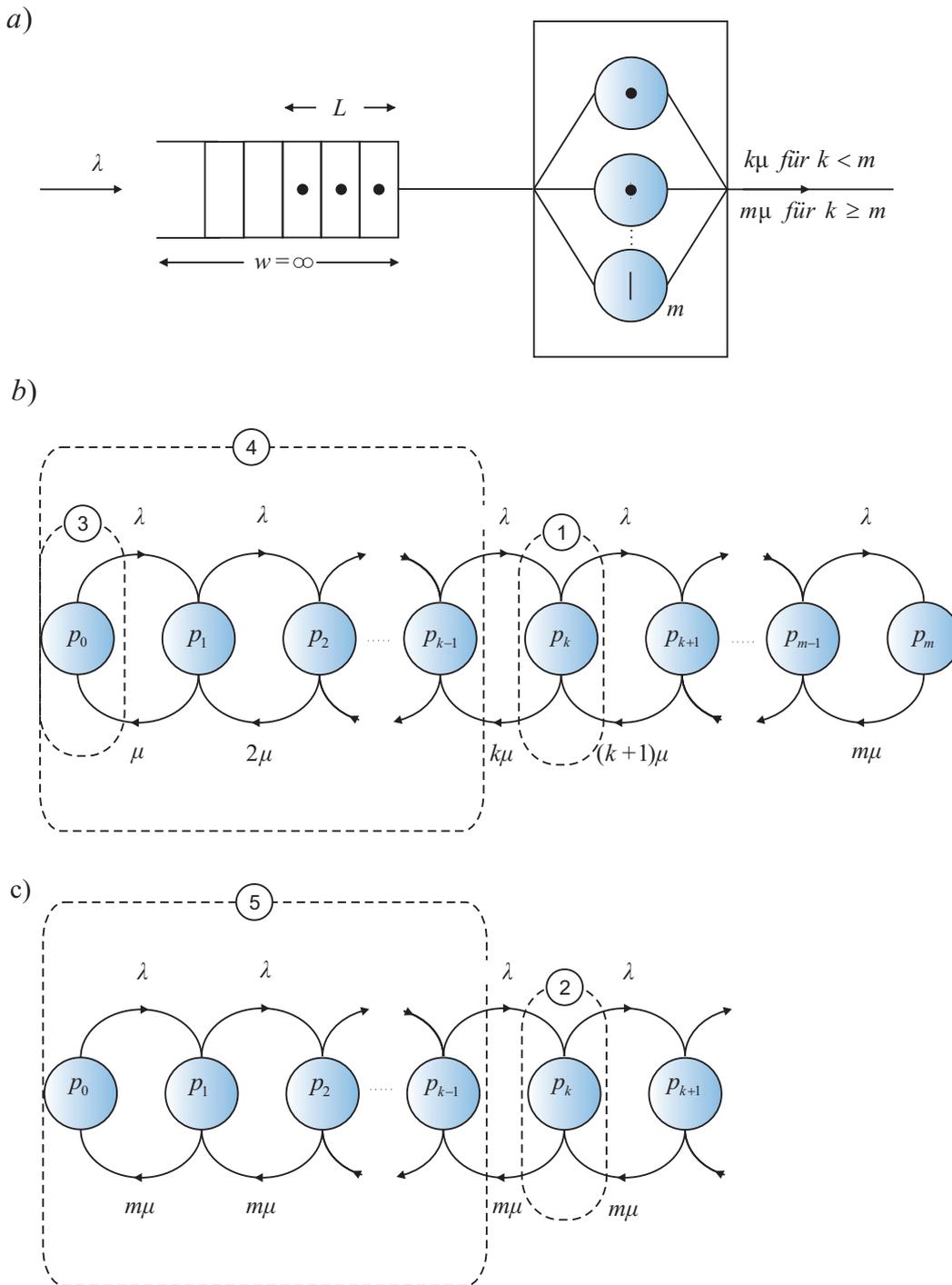


Abb. 9.4-4: Das M/M/m-Wartesystem

- a) Symbolische Darstellung des M/M/m-Wartesystems im Zustand k
- b) Das Zustandsdiagramm des M/M/m-Wartesystems mit $k < m$
- c) Das Zustandsdiagramm des M/M/m-Wartesystems mit $k \geq m$

Für die Wartewahrscheinlichkeit P_W erhalten wir

$$\begin{aligned} P_W &= \sum_{i=m}^{\infty} p_i \\ &= \frac{\sum_{i=m}^{\infty} \frac{A^i}{m!} \cdot \frac{1}{m^{i-m}}}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^m}{m!} \frac{m}{m-A}} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^{j+m}}{m! \cdot m^j}}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^m}{m!} \frac{m}{m-A}}. \end{aligned}$$

Wir verwenden wieder die Summation der unendlichen Reihe im Zähler für $(\frac{A}{m}) < 1$ und erhalten

$$P_W = \frac{\frac{A^m}{m!} \frac{m}{m-A}}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^m}{m!} \frac{m}{m-A}}. \quad 9.4-25$$

Erlang'sche Wartewahrscheinlichkeit
Zweite Erlang'sche Formel

Der Ausdruck in Gl. 9.4-25 wird als die **Erlang'sche Wartewahrscheinlichkeit** oder als die **zweite Erlang'sche Formel** bezeichnet und mit $E_{2,m}(A)$ abgekürzt,

$$E_{2,m}(A) = P_W = \frac{\frac{A^m}{m!} \frac{m}{m-A}}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^m}{m!} \frac{m}{m-A}}. \quad 9.4-26$$

Für die mittlere Warteschlangenlänge $E\{\mathbf{L}\}$ erhalten wir unter Verwendung von Gl. 9.4-24

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{L}\} &= 1 \cdot p_{m+1} + 2 \cdot p_{m+2} + \dots + n \cdot p_{m+n} + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} i p_{m+i} = \sum_{j=m}^{\infty} (j-m) p_j \\ &= \frac{\sum_{j=m}^{\infty} (j-m) \cdot \frac{A^j}{m!} \cdot \frac{1}{m^{j-m}}}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^m}{m!} \frac{m}{m-A}}. \end{aligned}$$

Für den Zähler erhalten wir

$$Z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i \cdot A^{i+m}}{m! m^i} = \frac{A^m}{m!} \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \left(\frac{A}{m}\right)^i.$$

Wir summieren wieder für $\frac{A}{m} < 1$ und erhalten

$$Z = \frac{A^m}{m!} \frac{\frac{A}{m}}{\left(1 - \frac{A}{m}\right)^2}$$

und somit

$$E\{\mathbf{L}\} = \frac{\frac{A^m}{m!} \frac{mA}{(m-A)^2}}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^m}{m!} \frac{m}{m-A}}. \quad 9.4-27$$

Ein Vergleich mit Gl. 9.4-25 ergibt

$$E\{\mathbf{L}\} = P_W \cdot \frac{A}{m-A}. \quad 9.4-28$$

Mit der Gleichung von Little (9.45) erhalten wir für die Wartezeit

$$E\{\mathbf{T}_W\} \cdot \lambda = P_W \cdot \frac{A}{m-A}$$

$$E\{\mathbf{T}_W\} = \frac{P_W}{\lambda} \cdot \frac{A}{m-A}. \quad 9.4-29$$

Für die Verweilzeit im System gilt somit

$$E\{\mathbf{T}_V\} = \frac{P_W}{\lambda} \frac{A}{m-A} + \frac{1}{\mu}. \quad 9.4-30$$

Da im Wartesystem $P_V = 0$ ist, gilt $P_E = 1$ und für den Verkehr V nach Gl. 9.4-9

$$V = A \cdot P_E = A(1 - P_V) = A, \quad 9.4-31$$

d. h. der Verkehr ist gleich dem Angebot.

Entsprechend den Ausführungen nach Gl. 9.4-10 gilt wieder, dass der Verkehr gleich der Anzahl der im Mittel belegten Bedieneinheiten ist.

Für das **M/M/m-Verlustsystem** mit m Bedieneinheiten und w Warteplätzen geht man ähnlich wie bei dem $M/M/m$ -Wartesystem vor und erhält entsprechend Gl. 9.4-21

$$p_k = \frac{A^k}{k!} p_0 \quad \text{für } k < m,$$

$$p_k = \frac{A^k}{m!} \cdot \frac{p_0}{m^{k-m}} \quad \text{für } m \leq k \leq m + w. \quad 9.4-32$$

Wegen

$$\sum_{i=0}^{m+w} p_i = 1$$

erhalten wir

$$1 = \left[\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} + \sum_{j=0}^w \frac{A^{j+m}}{m^j} \frac{1}{m!} \right] p_0$$

oder

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^m}{m!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{A}{m}\right)^{w+1}}{1 - \frac{A}{m}}}. \quad 9.4-33$$

Setzt man p_0 aus Gl. 9.4-33 in Gl. 9.4-32 ein, so erhält man die Zustandswahrscheinlichkeit p_k .

Aus den Zustandswahrscheinlichkeiten können wir wieder die interessierenden Größen berechnen. Wir wollen uns nur auf einige Wesentliche beschränken. Für die Wartewahrscheinlichkeit P_W erhält man:

$$P_W = \sum_{j=m}^{w+m-1} \frac{A^j}{m!} \cdot \frac{p_0}{m^{j-m}},$$

$$P_W = \sum_{j=0}^{w-1} \frac{A^m}{m!} \cdot \frac{A^j}{m^j} \cdot p_0 = \frac{A^m}{m!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{A}{m}\right)^w}{1 - \left(\frac{A}{m}\right)} \cdot p_0. \quad 9.4-34$$

Für die Verlustwahrscheinlichkeit erhält man aus Gl. 9.4-32

$$P_v = \frac{A^m}{m!} \cdot \frac{A^w}{m^w} \cdot p_0. \quad 9.4-35$$

Für die mittleren Warteschlangenlängen erhalten wir

$$E\{\mathbf{L}\} = 1 \cdot p_{m+1} + 2 \cdot p_{m+2} + \dots + w \cdot p_{m+w}$$

$$= \frac{A^m}{m!} \sum_{i=0}^w i \cdot \left(\frac{A}{m}\right)^i \cdot p_0. \quad 9.4-36$$

Hieraus können wir mit Gl. 9.3-22 wiederum die mittlere Wartezeit errechnen.

Selbsttestaufgabe 9.4-1:

Zeigen Sie, dass bei einem M/M/m-Wartesystem der Verkehr gleich der Anzahl der im Mittel belegten Bedieneinheiten ist.

9.5 Das M/G/1-Wartesystem

M/G/1-Wartesystem Wir betrachten nun ein **M/G/1-Wartesystem**, d. h. ein Wartesystem mit einem Markoff-Prozess am Eingang, unendlich vielen Warteplätzen und einer Bedieneinheit mit einer beliebigen (general) Verteilung der Bedienzeiten (Abb. 9.5-1). Vereinfachend nehmen wir zunächst an, dass die Anforderungen in der Reihenfolge, in der sie ankommen, abgearbeitet werden.

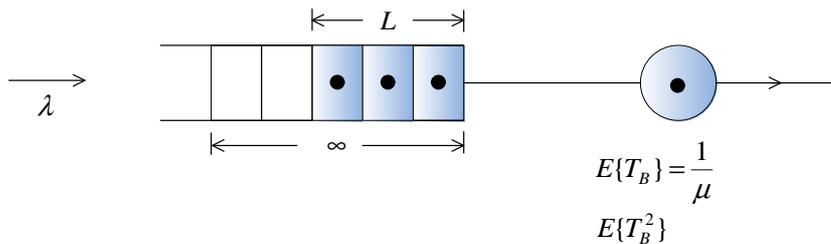


Abb. 9.5-1: Das M/G/1-Wartesystem

Wir setzen ferner voraus, dass die mittlere Bediendauer

$$E\{\mathbf{T}_B\} = \frac{1}{\mu}$$

und ihre Streuung

$$\sigma_{T_B}^2 = E\{\mathbf{T}_B^2\} - (E\{\mathbf{T}_B\})^2,$$

die wir abkürzend mit σ^2 bezeichnen, bekannt und zeitunabhängig sind. Wir betrachten nun die Ankunft einer bestimmten Anforderung, der i -ten Anforderung zum Zeitpunkt t_i . R_i sei die Restbedienzeit der zu diesem Zeitpunkt in Bedienung befindlichen Anforderung (gegebenenfalls ist keine Anforderung in der Bedienung und $R_i = 0$). L_i sei die Länge der Warteschlange und T_{W_i} die Wartezeit in der Schlange der betrachteten i -ten Anforderung. Wir haben dann

$$T_{W_i} = R_i + \sum_{j=i-L_i}^{i-1} T_{B_j}, \quad 9.5-1$$

wobei T_{B_j} die Bedienzeit der j -ten Anforderung ist und die Summe sich über alle in der Warteschlange befindlichen L_i vielen Anforderungen erstreckt.

Wir können nun die Warte-, Rest- und Bedienzeiten als Zufallsvariablen auffassen und den Erwartungswert der Gleichung Gl. 9.5-1 bilden, wobei wir beachten, dass im Mittel die Summe in Gl. 9.5-1 $E\{\mathbf{L}\}$ Terme enthält, und erhalten

$$E\{\mathbf{T}_W\} = E\{\mathbf{R}\} + E\{\mathbf{L}\} \cdot E\{\mathbf{T}_B\}, \quad 9.5-2$$

d. h.

$$E\{\mathbf{T}_W\} = E\{\mathbf{R}\} + \frac{1}{\mu} \cdot E\{\mathbf{L}\}. \quad 9.5-3$$

Wir wenden nun das Gesetz von Little (Gl. 9.3-22) auf die Warteschlange an

$$E\{\mathbf{L}\} = \lambda \cdot E\{\mathbf{T}_W\}$$

und erhalten aus Gl. 9.5-3

$$E\{\mathbf{T}_W\} = E\{\mathbf{R}\} + \frac{\lambda}{\mu} \cdot E\{\mathbf{T}_W\}$$

oder

$$E\{\mathbf{T}_W\} = \frac{E\{\mathbf{R}\}}{1 - \rho} \quad 9.5-4$$

mit $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Es sei hier darauf hingewiesen, dass wir den eingeschwungenen Zustand zum Zeitpunkt t_i betrachtet und vorausgesetzt haben, dass die Erwartungswerte in Gl. 9.5-2 stationär sind. Hierdurch wurde insbesondere impliziert, dass die Erwartungswerte der Bedienzeiten zu den Zeitpunkten $t_i, t_{i+1}, \dots, t_{L_i-1}$ alle identisch gleich $E\{T_B\}$ waren. Dieses ist erfüllt, wenn die Bediendauern sowohl voneinander als auch von den Ankunftsabständen unabhängig sind.

Für die Auswertung von $E\{R\}$ betrachten wir Abb. 9.5-2, in dem die Restbedienzeiten in Abhängigkeit von der (laufenden) Zeit aufgetragen sind. Bis zum Zeitpunkt t_i sind i Anforderungen bedient worden. Für den Zeitmittelwert der Restbedienzeit gilt

$$\begin{aligned}\tilde{m}_R &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t R(\tau) d\tau \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} F(t),\end{aligned}\tag{9.5-5}$$

wobei $F(t)$ die schraffierte Fläche in Abb. 9.5-2 darstellt. Für sie gilt:

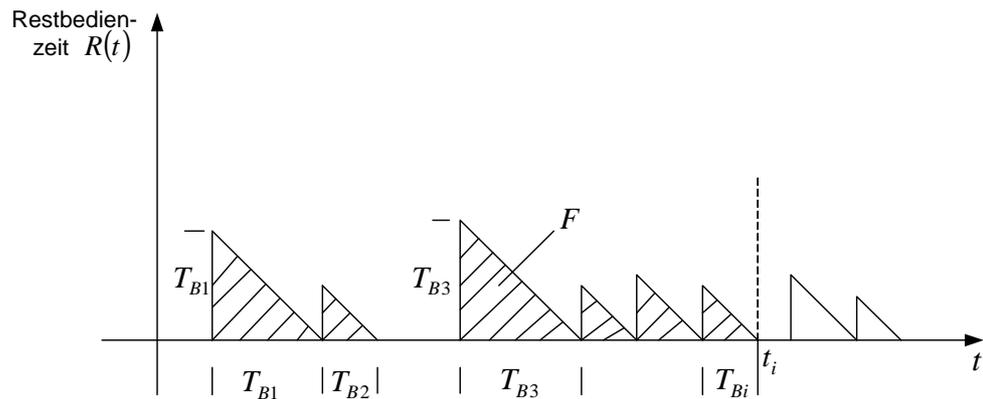


Abb. 9.5-2: Restbedienzeit $R(t)$ in Abhängigkeit von der (laufenden) Zeit t

$$F(t_i) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i T_{B_j}^2.\tag{9.5-6}$$

Somit haben wir aus Gleichung Gl. 9.5-5

$$\tilde{m}_R = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{i}{t} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i T_{B_j}^2.\tag{9.5-7}$$

Für $t \rightarrow \infty$ bzw. $i \rightarrow \infty$ ist im stationären Zustand die Enderate gleich der Ankunftsrate, d. h.

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{i}{t},\tag{9.5-8}$$

während

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i T_{B_j}^2 \doteq E\{\mathbf{T}_B^2\}, \quad 9.5-9$$

und

$$\tilde{m}_R \doteq E\{\mathbf{R}\}, \quad 9.5-10$$

wobei wir nun die Ergodizität voraussetzen.

Aus Gl. 9.5-7 - Gl. 9.5-10 erhalten wir somit

$$E\{\mathbf{R}\} = \frac{\lambda}{2} \cdot E\{\mathbf{T}_B^2\}, \quad 9.5-11$$

und mit Gl. 9.5-4 haben wir dann

$$E\{\mathbf{T}_W\} = \frac{\lambda \cdot E\{\mathbf{T}_B^2\}}{2(1 - \rho)} \quad 9.5-12$$

und aus (Gl. 9.3-22)

$$E\{\mathbf{L}\} = \frac{\lambda^2 \cdot E\{\mathbf{T}_B^2\}}{2(1 - \rho)}. \quad 9.5-13$$

Wegen

$$\mathbf{T}_V = \mathbf{T}_B + \mathbf{T}_W$$

haben wir

$$E\{\mathbf{T}_V\} = \frac{1}{\mu} + E\{\mathbf{T}_W\}$$

oder

$$E\{\mathbf{T}_V\} = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda \cdot E\{\mathbf{T}_B^2\}}{2(1 - \rho)}. \quad 9.5-14$$

Ferner haben wir mit der Gleichung von Little (Gl. 9.3-22) für das System

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{k}\} &= \lambda \cdot E\{\mathbf{T}_V\}, \\ E\{\mathbf{k}\} &= \rho + \frac{\lambda^2 \cdot E\{\mathbf{T}_B^2\}}{2(1 - \rho)}. \end{aligned} \quad 9.5-15$$

Mit

$$\sigma^2 = E\{\mathbf{T}_B^2\} - (E\{\mathbf{T}_B\})^2,$$

d. h.

$$E\{\mathbf{T}_B^2\} = \sigma^2 + \frac{1}{\mu^2},$$

erhalten wir aus Gl. 9.5-14.

$$E\{\mathbf{T}_v\} = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda(\sigma^2 + \frac{1}{\mu^2})}{2(1-\rho)}$$

bzw.

$$E\{\mathbf{T}_v\} = \frac{1}{\mu} \cdot \left[1 - \frac{\rho}{2}(1 - \mu^2\sigma^2)\right] \quad 9.5-16$$

und entsprechend

$$E\{\mathbf{k}\} = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \left[1 - \frac{\rho}{2}(1 - \mu^2\sigma^2)\right]. \quad 9.5-17$$

Diese Gleichungen werden nach den russischen Mathematikern Pollaczek und Kinchin die **Pollaczek-Kinchin-Gleichungen** genannt.

Pollaczek-Kinchin-Gleichungen

Für den Poisson Bedienprozess mit $\sigma^2 = \frac{1}{\mu^2}$ (Gl. 9.2-7) erhalten wir aus Gl. 9.5-16 und Gl. 9.5-17

$$E\{\mathbf{T}_v\} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad 9.5-18$$

und

$$E\{\mathbf{k}\} = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad 9.5-19$$

wie zu erwarten war. Mit Höherwerden der Streuung werden die Wartezeiten und die Anzahl der Anforderungen im System größer.

Das Minimum erhält man für $\sigma^2 = 0$.

M/D/1-Wartesystem

Dies ist bei dem deterministischen Bedienprozess, d.h. für das **M/D/1-Wartesystem** (vgl. Gl. 9.2-18) gegeben. Hierfür erhält man aus Gl. 9.5-16 und Gl. 9.5-17

$$E\{\mathbf{T}_v\} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(1 - \frac{\rho}{2}\right) \quad 9.5-20$$

und

$$E\{\mathbf{k}\} = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \left(1 - \frac{\rho}{2}\right). \quad 9.5-21$$

Wir haben bei der Betrachtung des *M/G/1*-Wartesystems zunächst vorausgesetzt, dass die Anforderungen in der Reihe, in der sie ankommen, bedient werden. Es ist leicht zu zeigen, dass die Betrachtungen für beliebige Bedienstrategien gelten, solange die bei der Ableitung verwendeten anderen Annahmen weiter gelten. Um dies zu beweisen, braucht man nur die Reihenfolge der wartenden Anforderungen

in der Warteschlange zu vertauschen. Die Wartezeiten der einzelnen Anforderungen werden hierdurch vertauscht. Solange jedoch die Erwartungswerte der einzelnen Wartezeiten bei der Ableitung der Gl. 9.5-2 aus Gl. 9.5-1 konstant bleiben, spielt dies keine Rolle. Falls jedoch eine Strategie wie "Anforderungen mit kurzen Bedienzeiten werden bevorzugt behandelt" angewandt wird, ist diese Voraussetzung verletzt, und Gl. 9.5-2 kann nicht mehr aus Gl. 9.5-1 abgeleitet werden.

Selbsttestaufgabe 9.5-1:

Wie sieht die Pollaczek-Kinchin-Gleichung für das Wartesystem $M/E_2/1$ aus?

9.6 Warteschlangenorganisation und Prioritätsbearbeitung

Wir wollen uns nun einige Verfahren zur Warteschlangenorganisation und Prioritätsbehandlung, die in Kommunikationssystemen häufig angewandt werden, ansehen.

Am häufigsten werden Warteschlangen nach der **FIFO-(First In First Out) Strategie**, auch **FCFS-(First Come First Serve) Strategie** genannt, angelegt. Die ankommenden Anforderungen werden in der Schlange hinten eingereiht und von vorne abgerufen. Die Strategie wird als eine faire Strategie angesehen.

FIFO Strategie
FCFS Strategie

Die **LIFO-(Last In First Out) Strategie**, auch **LCFS-(Last Come First Serve) Strategie** genannt, wird dann angewandt, wenn die Bedeutung der Anforderungen mit der Zeit abnimmt. Die zuletzt angekommene Anforderung wird deshalb als erste behandelt. Die Warteschlange wird so angelegt, dass die ankommende Anforderung vorne eingereiht wird und wiederum von vorne abgerufen wird. Da die mittleren Bedien- und Wartezeiten durch diese Warteschlangenorganisation nicht beeinflusst werden, gelten unsere bisherigen Überlegungen auch für die LCFS-Strategie.

LIFO Strategie
LCFS Strategie

In realen Systemen wird häufig eine unterschiedliche Speicherkapazität für die Speicherung der einzelnen Anforderungen erforderlich. Die Anforderungen werden in zufälliger Anordnung - gerade wo der Speicherplatz ausreicht - abgelegt. Diese zufällige Strategie - **Random Queue** genannt - hat wiederum keinen Einfluss auf die mittleren Wartezeiten, und unsere bisherigen Ergebnisse gelten hier ebenfalls.

Random Queue

Häufig werden Warteschlangen nach bestimmten Kriterien organisiert und in der so entstehenden Reihenfolge abgearbeitet. Man spricht dann von **Prioritätsorganisation** oder einfach von Prioritäten. Diese Art von Prioritäten beeinflussen jeweils die Wahl der zu bearbeitenden Anforderung; sobald die Wahl getroffen wurde, fängt die Bearbeitung an und wird bis zu Ende durchgeführt, anschließend steht die nächste Anforderung der höchsten Priorität zur Bearbeitung an. Man spricht deshalb hier auch von **nichtverdrängender Priorität (nonpreemptive)**. Im Gegensatz dazu spricht man von **verdrängender Priorität (preemptive)**, wenn bei der Ankunft

Prioritätsorganisation

**nichtverdrängende
Priorität**
verdrängende Priorität

einer höher priorisierten Anforderung die Bearbeitung unterbrochen wird, um die neue Anforderung zunächst zu bearbeiten. Anschließend wird die unterbrochene Bearbeitung wieder fortgesetzt. Dieser Vorgang kann nun mehrfach verschachtelt vorkommen. In der Praxis wird die Anzahl der gleichzeitig unterbrochenen Anforderungen auf ein Maximum begrenzt.

Die Prioritätsorganisation mit nichtverdrängender Priorität wird in Kommunikationssystemen häufig angewandt. Die Prioritäten der einzelnen Anforderungen können fest vorgegeben sein oder dynamisch in Abhängigkeit vom Systemzustand festgelegt werden. Ein Beispiel von fest vorgegebener Priorität tritt bei der Paketvermittlung auf, wo Pakete mit Steuerinformation bevorzugt gegenüber den Datenpaketen mit Nutzinformation behandelt werden. Beispiele mit zustandsabhängigen Prioritäten treten eventuell bei der Überlastabwehr (wo z. B. gewisse Anforderungen nicht mehr angenommen werden) auf, aber auch bei Strategien wie der bevorzugten Behandlung von Anforderungen mit kurzen Bedienzeiten (z. B. *Shortest Job First* - **SJF-Strategie**). Die Bearbeitung mit verdrängender Priorität dürfte dem Leser von der Interruptbehandlung bei Mikrorechnern bekannt sein.

SJF-Strategie

System mit nichtverdrängenden Prioritäten

Wir betrachten nun ein **System mit nichtverdrängenden Prioritäten** und unendlich vielen Warteplätzen. Die Anforderungen seien in n Klassen eingeteilt, wobei die Klasse k die Priorität k hat. Wir nehmen an, dass die Markoffankünfte der Klasse k die Ankunftsrate λ_k haben und die Anforderung mit einer von der Prioritätsklasse k abhängigen Bediendauer $\frac{1}{\mu_k}$ abgeführt werden, wenn sie an der Reihe sind. Das zweite Moment der Bedienzeiten $E\{T_{B_i}^2\}$ sei bekannt. Das System ist in Abb. 9.6-1 skizziert. Es handelt sich also um ein $M/G/1$ -Prioritätssystem mit n Ankunftsklassen.

Wir verwenden die bisherige Bezeichnung, wobei wir mit dem Index k die k -te Prioritätsklasse andeuten. Wir gehen davon aus, dass der stationäre Zustand erreicht ist und insbesondere

$$\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n < 1 \quad 9.6-1$$

ist, wobei

$$\rho_k = \frac{\lambda_k}{\mu_k}.$$

Wir betrachten nun die Anforderungen der ersten Klasse. R ist wie bisher die Restzeit einer Bedienung zum Zeitpunkt einer neuen Anforderung. Wie bei der Überlegung des $M/G/1$ -Systems, haben wir für die Anforderungen der Klasse 1

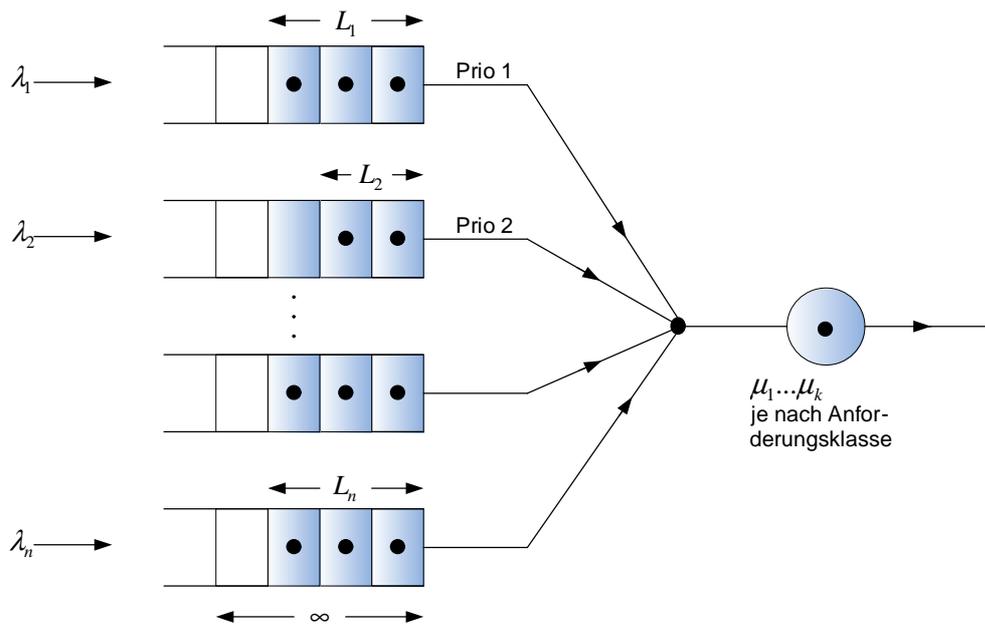


Abb. 9.6-1: System mit nichtverdrängenden Prioritäten und unendlich vielen Warteplätzen

$$E\{\mathbf{T}_{W_1}\} = E\{\mathbf{R}\} + \frac{1}{\mu_1} E\{\mathbf{L}_1\}, \tag{9.6-2}$$

denn eine beliebige Anforderung muss zunächst die Restzeit und anschließend die Abarbeitung der Warteschlange der Klasse 1 abwarten. Das Gesetz von Little liefert ferner

$$E\{\mathbf{L}_1\} = \lambda_1 E\{\mathbf{T}_{W_1}\}. \tag{9.6-3}$$

Wir haben somit

$$E\{\mathbf{T}_{W_1}\} = E\{\mathbf{R}\} + \frac{1}{\mu_1} \cdot \lambda_1 E\{\mathbf{T}_{W_1}\}$$

bzw.

$$E\{\mathbf{T}_{W_1}\} = \frac{E\{\mathbf{R}\}}{(1 - \rho_1)}. \tag{9.6-4}$$

Eine Anforderung der zweiten Klasse muss die Restbedienzeit, alle Anforderungen der ersten und zweiten Klasse, die bei der Ankunft warten, und zusätzlich die Bedienung aller Anforderungen der ersten Klasse, die während der Wartezeit auftraten, abwarten. Für sie gilt

$$E\{\mathbf{T}_{W_2}\} = E\{\mathbf{R}\} + \frac{1}{\mu_1} \cdot E\{\mathbf{L}_1\} + \frac{1}{\mu_2} E\{\mathbf{L}_2\} + \frac{1}{\mu_1} \lambda_1 \cdot E\{\mathbf{T}_{W_2}\}. \tag{9.6-5}$$

Das Gesetz von Little gilt auch entsprechend Gl. 9.6-3 für die zweite Klasse, so dass wir aus Gl. 9.6-5

$$E\{\mathbf{T}_{W_2}\} = E\{\mathbf{R}\} + \frac{\lambda_1}{\mu_1} \cdot E\{\mathbf{T}_{W_1}\} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} E\{\mathbf{T}_{W_2}\} + \frac{\lambda_1}{\mu_1} \cdot E\{\mathbf{T}_{W_2}\}$$

erhalten, d. h.

$$E\{\mathbf{T}_{\mathbf{W}_2}\} = \frac{E\{\mathbf{R}\} + \rho_1 E\{\mathbf{T}_{\mathbf{W}_1}\}}{(1 - \rho_1 - \rho_2)}.$$

$E\{\mathbf{T}_{\mathbf{W}_1}\}$ aus Gl. 9.6-4 hierin eingesetzt liefert

$$E\{\mathbf{T}_{\mathbf{W}_2}\} = \frac{E\{\mathbf{R}\}}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)}. \quad 9.6-6$$

Die Berechnung kann entsprechend fortgesetzt werden, und für die Wartezeit der k -ten Klasse erhalten wir

$$E\{\mathbf{T}_{\mathbf{W}_k}\} = \frac{E\{\mathbf{R}\}}{(1 - \rho_1 - \rho_2 - \dots - \rho_{k-1}) \cdot (1 - \rho_1 - \rho_2 - \dots - \rho_k)}. \quad 9.6-7$$

Wir berechnen nun den Erwartungswert der Restzeit, die für alle Prioritätsklassen gleich ist. Dafür verwenden wir dieselbe Argumentation wie bei der Ableitung von Gl. 9.5-11. Die Ankunftsrate ist nun $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$, und wir haben

$$E\{\mathbf{R}\} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot E\{\mathbf{T}_{\mathbf{B}_i}^2\}. \quad 9.6-8$$

Das zweite Moment ist nun proportional der jeweiligen Ankunftsrate und den einzelnen zweiten Momenten, d. h.

$$E\{\mathbf{T}_{\mathbf{B}}^2\} = \frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \cdot E\{\mathbf{T}_{\mathbf{B}_1}^2\} + \frac{\lambda_2}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} E\{\mathbf{T}_{\mathbf{B}_2}^2\} + \dots + \frac{\lambda_n}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \cdot E\{\mathbf{T}_{\mathbf{B}_n}^2\}. \quad 9.6-9$$

Somit haben wir

$$E\{\mathbf{R}\} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i E\{\mathbf{T}_{\mathbf{B}_i}^2\}. \quad 9.6-10$$

Dies eingesetzt in Gl. 9.6-7 liefert schließlich

$$E\{\mathbf{T}_{\mathbf{W}_k}\} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i E\{\mathbf{T}_{\mathbf{B}_i}^2\}}{2(1 - \rho_1 - \dots - \rho_{k-1})(1 - \rho_1 - \dots - \rho_k)}. \quad 9.6-11$$

Für die Verweildauer erhalten wir

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{T}_{\mathbf{V}}\} &= E\{\mathbf{T}_{\mathbf{W}_k}\} + E\{\mathbf{T}_{\mathbf{B}_k}\} \\ E\{\mathbf{T}_{\mathbf{V}}\} &= E\{\mathbf{T}_{\mathbf{W}_k}\} + \frac{1}{\mu_k}, \end{aligned} \quad 9.6-12$$

während für die Warteschlangenlänge

$$E\{\mathbf{L}_k\} = \lambda_k \cdot E\{\mathbf{T}_{\mathbf{W}_k}\} \quad 9.6-13$$

gilt. Für die Berechnung von $E\{\mathbf{T}_{\mathbf{V}}\}$ und $E\{\mathbf{L}_k\}$ setzt man $E\{\mathbf{T}_{\mathbf{W}_k}\}$ aus Gl. 9.6-11 in Gl. 9.6-12 bzw. Gl. 9.6-13 ein.

Wir betrachten nun das bisherige **System**, jedoch mit **verdrängender Priorität**. Dies bedeutet, dass wenn eine Anforderung einer bestimmten Priorität ankommt und eine Anforderung einer niedrigeren Priorität gerade bearbeitet wird, diese Bearbeitung unterbrochen und die Bearbeitung der Anforderung der höheren Priorität begonnen wird. Nach Beendigung dieser Bearbeitung wird die unterbrochene Bearbeitung wieder fortgesetzt. Für eine ankommende Anforderung besteht die Verweildauer im System aus drei Anteilen:

**System mit
verdrängender
Priorität**

$$E\{\mathbf{T}_{v_k}\} = E\{\mathbf{P}\} + E\{\mathbf{Q}\} + \frac{1}{\mu_k}. \quad 9.6-14$$

Hierin ist P die Zeit, die erforderlich ist, alle bei der Ankunft der Anforderung wartenden Anforderungen der Priorität höher gleich k abzuarbeiten und Q die Zeit, die erforderlich ist, die während der Verweildauer ankommenden Anforderungen der Priorität größer k abzuarbeiten. Der letzte Term entspricht der Zeit für die Abarbeitung der betrachteten Anforderung. $E\{\mathbf{P}\}$ können wir sofort angeben, wenn wir beachten, dass es sich hier um ein äquivalentes $M/G/1$ -System ohne Priorität handelt. Man erkennt, dass die Priorität der wartenden Anforderungen (höherer oder gleicher Priorität) keine Rolle spielt, da ein Vertauschen dieser wartenden Anforderungen die Wartezeit nicht verändert.

Für die Berechnung von $E\{\mathbf{P}\}$ können wir Gl. 9.5-12

$$E\{\mathbf{P}\} = \frac{\lambda E\{\mathbf{T}_B^2\}}{2(1 - \rho)} \quad 9.6-15$$

heranziehen, wobei für die Ankunftsrate

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k \quad 9.6-16$$

gilt. Für die Auslastung gilt

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_k, \quad 9.6-17$$

und für das zweite Moment der Wartezeit entsprechend Gl. 9.6-9 gilt

$$E\{\mathbf{T}_B^2\} = \frac{\lambda_1 E\{\mathbf{T}_{B1}^2\}}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} + \frac{\lambda_2 E\{\mathbf{T}_{B2}^2\}}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} + \dots + \frac{\lambda_k E\{\mathbf{T}_{Bk}^2\}}{\sum_{i=1}^k \lambda_i}. \quad 9.6-18$$

Aus Gl. 9.6-15 und Gl. 9.6-16 - Gl. 9.6-17 erhalten wir

$$E\{\mathbf{P}\} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i E\{\mathbf{T}_{Bi}^2\}}{(1 - \rho_1 - \rho_2 - \dots - \rho_k)}. \quad 9.6-19$$

Für $E\{\mathbf{Q}\}$ gilt

$$E\{\mathbf{Q}\} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\mu_i} \cdot \lambda_i \cdot E\{\mathbf{T}_{v_k}\} = \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i \cdot E\{\mathbf{T}_{v_k}\} \quad \text{für } k > 1 \quad 9.6-20$$

und $E\{\mathbf{Q}\} = 0$ für $k = 1$.

$$E\{\mathbf{T}_{\mathbf{V}_k}\} = \frac{\frac{2}{\mu_k}(1 - \rho_1 - \dots - \rho_k) + \sum_{i=1}^k \lambda_i E\{\mathbf{T}_{\mathbf{B}_i}^2\}}{2(1 - \rho_i - \dots - \rho_k)(1 - \rho_1 - \dots - \rho_{k-1})}. \quad 9.6-21$$

Es sei hier darauf hingewiesen, dass die Wartezeit bzw. Verweildauer der k -ten Klasse bei nichtverdrängender Priorität von der Ankunftsrate der Anforderungen niedriger Priorität beeinflusst wird (Gl. 9.6-11), dies ist bei verdrängender Priorität (Gl. 9.6-21) nicht der Fall.

Selbsttestaufgabe 9.6-1:

Nennen Sie zwei verschiedene Strategien zur Warteschlangenorganisation. Erklären Sie die zwei Strategien.

10 Multiplexbildung und Richtungstrennung

10.1 Verfahren zur Multiplexbildung

Gewöhnlich sind die Kapazitäten, die ein Kanal für die Informationsübertragung anbietet und die für eine Anwendung tatsächlich erforderlich sind, unterschiedlich. Es wird deshalb eine Anpassung derart erforderlich, dass entweder mehrere Quellen-Senken Paare einen Kanal gemeinsam nutzen, oder mehrere Kanäle gemeinsam für die Übermittlung der Information zwischen einem Quellen-Senken Paar genutzt werden. Beispielsweise werden bei der leitungsorientierten Datenübertragung mehrere Verbindungen mit niedrigen Bitraten (von 3 bis 9,6 kbit/s) auf einem 64 kbit/s Kanal übertragen (Abb. 2.2-13), oder im ISDN können mehrere 64 kbit/s Kanäle zusammengefasst werden, um eine Videoübertragung zu ermöglichen. Beide Anpassungen werden als Multiplexbildungen bezeichnet. Im engeren Sinne versteht man unter **Multiplexbildung** die Unterteilung eines Übertragungskanals für die Übermittlung von Informationen verschiedener Quellen-Senken Paare, wobei die Teilkanäle durchaus unterschiedliche, aber feste Kapazitäten haben (Abb. 10.1-1).

Multiplexbildung

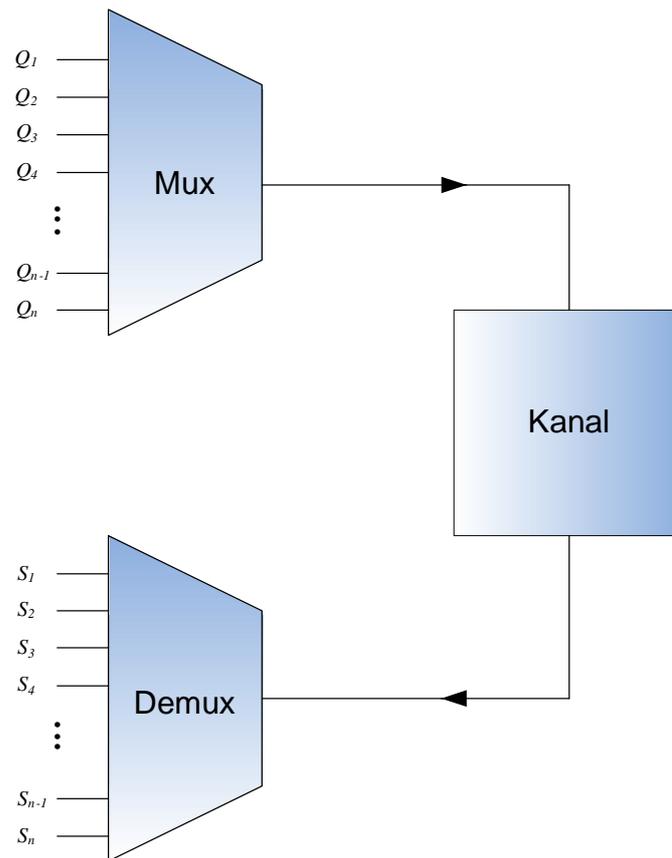
Prinzipiell ist es möglich, eine solche Adaption bereits bei der Auswahl des Codealphabets bzw. bei der Wahl des Modulationsverfahrens zu berücksichtigen; die Multiplexbildung somit auf die Code- bzw. Modulationsebene zu verlagern. Auf der Basis von Leitungscodes kann dies z. B. durch die Verwendung von orthogonalen (bzw. nahezu orthogonalen Signalen) realisiert werden, also mit Signalen, für die

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_i(t) \cdot x_j(t) dt = \begin{cases} k & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad 10.1-1$$

oder

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X_i(\omega) \cdot X_j(\omega) d\omega = \begin{cases} K & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad 10.1-2$$

gilt. Bei der Multiplexbildung ist wesentlich, dass sich die einzelnen Signale gegenseitig möglichst wenig stören. Am häufigsten wird die Aufteilung des Übertragungskanals in Teilkanäle auf Frequenz- oder Zeitbasis vorgenommen.



Mux Multiplexeinrichtung
Demux Demultiplexeinrichtung

Abb. 10.1-1: Multiplexbildung

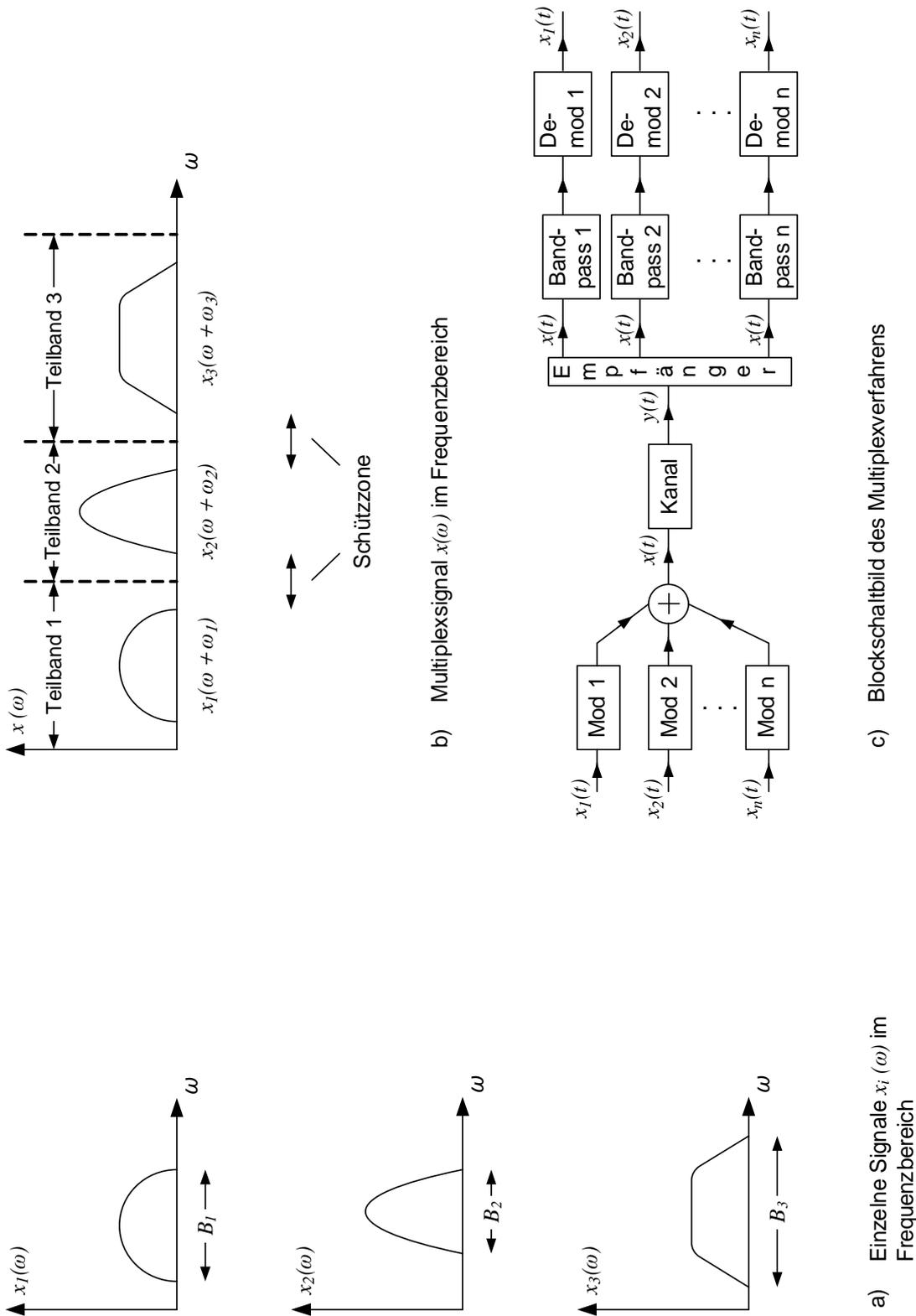


Abb. 10.1-2: Frequenzmultiplexverfahren

Beim **Frequenzmultiplex**verfahren wird das Frequenzband des Übertragungskanaals in Teilbänder unterteilt und für die Übertragung der Signale der einzelnen Quellen-Senken Paare genutzt. Es ist deshalb erforderlich, dass für die Übertragung der einzelnen Signale bandbegrenzte Teilkanäle, unter Berücksichtigung von Schützzonen zwischen ihnen, ausreichen (Abb. 10.1-2).

Frequenzmultiplex

In der Multiplexeinrichtung werden die einzelnen Signale in das entsprechende Frequenzband aufmoduliert. In der Demultiplexeinrichtung werden die Teilbänder jeweils herausgefiltert und die einzelnen Signale dann demoduliert. Die Frequenzmultiplextechnik ist eine ausgereifte Technik, die im Fernsprechnet auf verschiedenen Hierarchiestufen weit verbreitet ist.

Wellenlängenmultiplex

Auch bei der Übertragung auf Lichtwellenleitern findet das Frequenzmultiplexverfahren in Form von **Wellenlängenmultiplex**technik Anwendung; bei ihr werden für die Übertragung auf Glasfasern spektrale Bereiche mit günstigem Dämpfungsverhalten ausgenutzt. Wir wollen das Frequenzmultiplexverfahren nicht näher betrachten.

Zeitmultiplexverfahren (TDM)

Beim **Zeitmultiplexverfahren (TDM-*Time Division Multiplex*)** wird der Kanal (zeitlich) periodisch abwechselnd für die Übertragung der einzelnen Signale verwendet (Abb. 10.1-3). Verwenden n Quellen, die jeweils alle T Sekunden einen Signalwert erzeugen, einen Kanal im Zeitmultiplexverfahren, so muss der Kanal n/T Werte pro Sekunde übertragen. Die bisherigen Überlegungen zur Bandbegrenzung und Symbolinterferenz (Abschnitt 8.4) gelten nun für den Multiplexkanal entsprechend. Bei der Zeitmultiplexbildung wird die Periode T in n Intervalle unterteilt. Dies entspricht der Unterteilung des Kanals in n Zeitschlitz. Einem Quellen-Senken Paar steht periodisch alle T Sekunden (d. h. einmal pro Abtastperiode) ein Zeitschlitz zur Verfügung. Es ist auch möglich, einem Quellen-Senken Paar mehr als einen Zeitschlitz pro Periode zuzuteilen, um entsprechend höhere Bitraten zu übertragen. Wird pro Zeitschlitz jeweils lediglich ein Bit übertragen, so bezeichnet man die Multiplexbildung als **bitweise** Verschachtelung. Wird pro Zeitschlitz ein Symbol oder ein Wort übertragen, so bezeichnet man die Multiplexbildung als **wortweise** oder **symbolweise** Verschachtelung.

**bitweise wortweise
oder symbolweise
Verschachtelung**

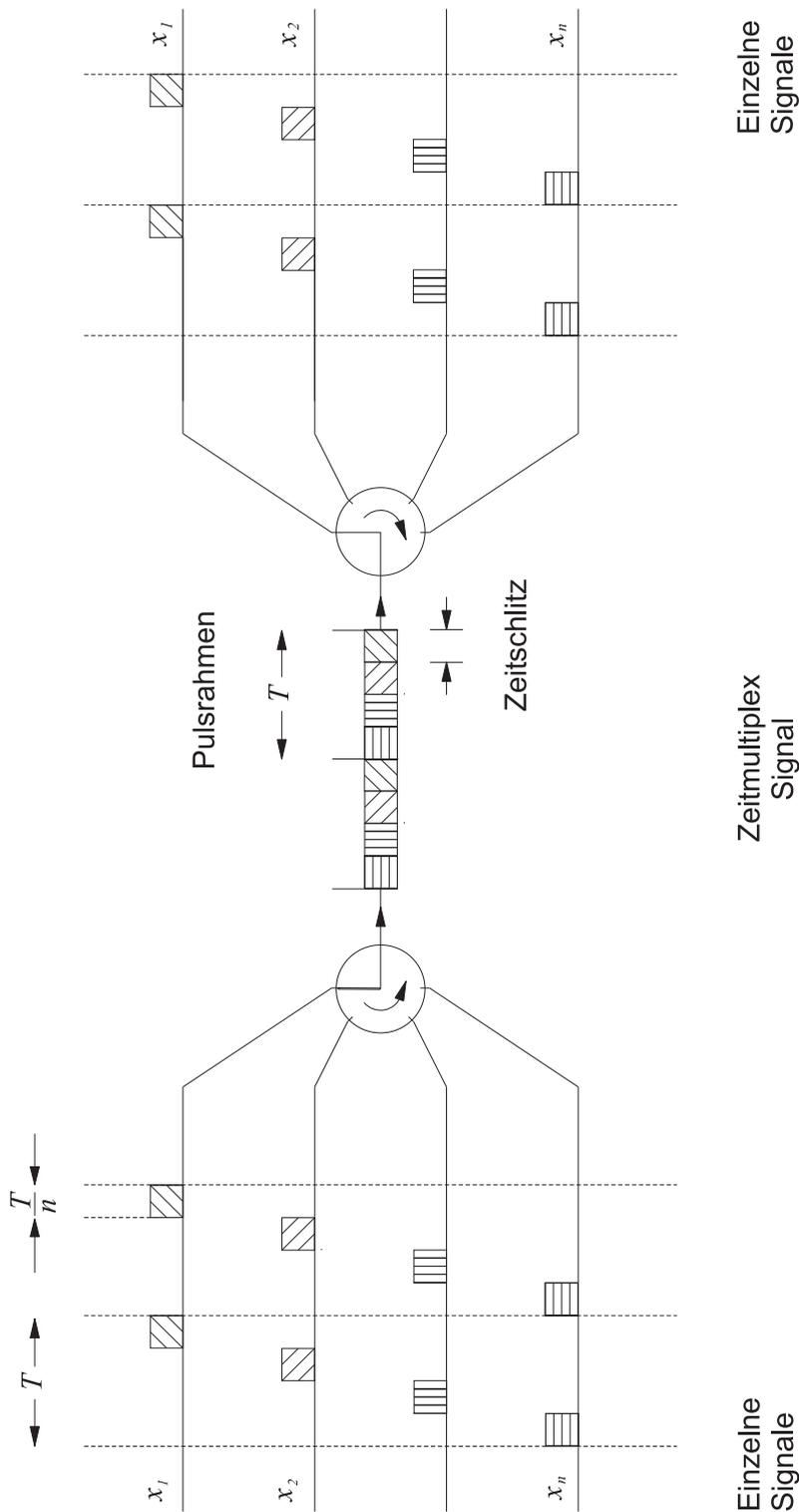


Abb. 10.1-3: Zeitmultiplexbildung

Das beschriebene Zeitmultiplexverfahren wird auch als synchrones Zeitmultiplexverfahren (*Synchronous Time Division Multiplex*) bezeichnet, weil die Zeitschlitze für ein Quellen-Senken Paar periodisch im selben Raster im Multiplexkanal (d. h. synchron) auftreten. Wir werden im nächsten Abschnitt das synchrone Zeitmultiplexverfahren näher betrachten und anschließend auch die asynchrone Variante kennenlernen.

Beispiel 10.1-1:

Beim PCM-Verfahren wird die Sprache auf 3,4 kHz bandbegrenzt und mit 8 kHz abgetastet. Die Abtastwerte werden als 8 Bit-Wörter codiert. Pro Sprachkanal erhält man auf diese Weise 64 kbit/s. Werden 30 Sprachkanäle und 2 weitere 64 kbit/s Kanäle für Signalisierung, Synchronisierung und Wartungsfunktionen im Zeitmultiplexverfahren übertragen, so hat man für die Übertragung pro Bit eine Dauer von

$$\frac{1}{32 \times 64000} \text{ s} \approx 0,488 \mu\text{s}.$$

- Codemultiplex** Eine Mischung von Frequenz- und Zeitmultiplexverfahren, auch **Codemultiplex**-verfahren genannt, ist in einer vereinfachten Form in Abb. 10.1-4c dargestellt. Hier wird einer Quelle in jedem Zeitschlitz ein anderes Teilfrequenzband zur Verfügung gestellt. Dieser Gedanke der Verwendung von orthogonalen Codes und der gleichzeitigen Nutzung verschiedener Teilfrequenzen für die Übertragung der Signale einer Quelle findet z. B. beim **spread spectrum frequency hopping** Verfahren Anwendung. Die Teilfrequenzen werden dabei pseudozufällig ausgewählt und die Sendezeitpunkte der Quellen sind nicht synchron.
- spread spectrum frequency hopping**

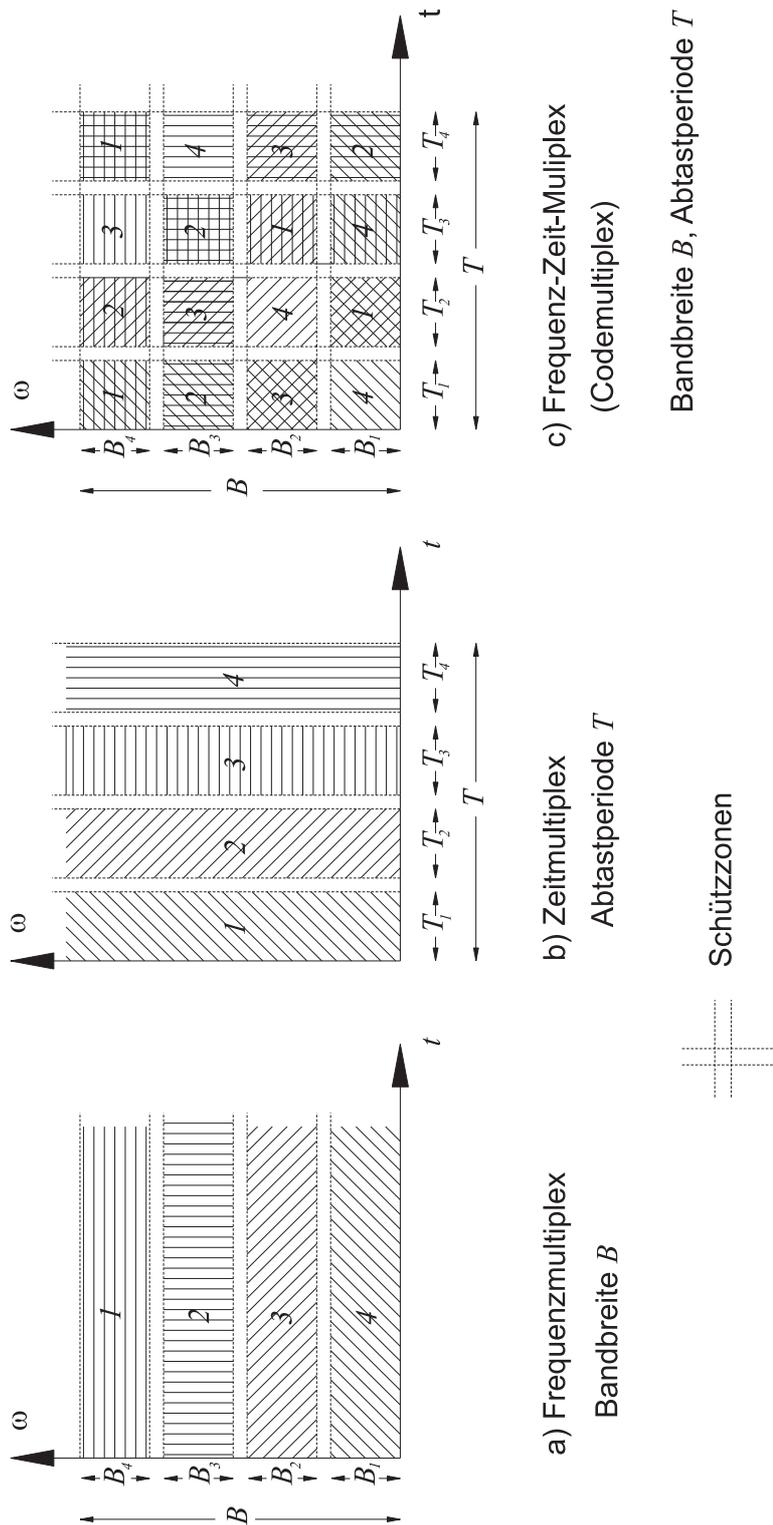


Abb. 10.1-4: Codemultiplexverfahren

Selbsttestaufgabe 10.1-1:

Erklären Sie das Prinzip des Frequenzmultiplexes und das des Zeitmultiplexes.

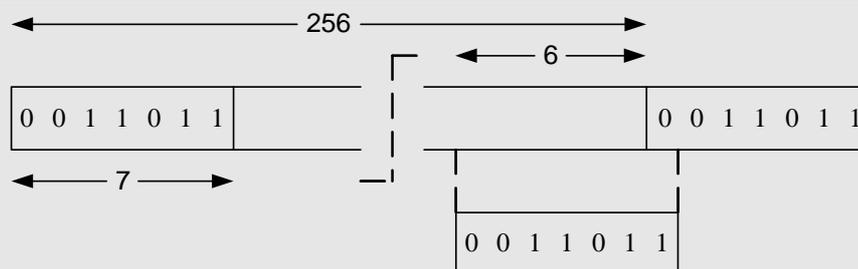
10.2 Zeitmultiplexverfahren

In Abb. 10.1-3 sind die einzelnen Zeitschlitz unterschiedlich schraffiert, um sie im Zeitmultiplexkanal wiederzuerkennen. Da der Bitstrom des Multiplexkanals meist keine ausgeprägte Struktur aufweist, muss dem Demultiplexer zusätzliche Information gegeben werden, damit die Rahmenstruktur erkannt und die einzelnen Bits zu den Wörtern bzw. Zeitschlitz und damit Quellen-Senken Paaren zugeordnet werden können. Um die **Wortsynchronisation** bzw. **Rahmensynchronisation** zu gewährleisten, wird häufig ein **Rahmenkennungswort** stets an der selben Stelle in jedem Rahmen gesendet. Dieses zeigt dann die Stelle an, ab der die einzelnen Bits durchgezählt werden, um sie in Wörter bzw. Zeitschlitz einzuteilen. Da Multiplexstrecken transparent betrieben werden, d. h. alle Bitkombinationen in den einzelnen Kanälen vorkommen dürfen, wird das Rahmenkennungswort im Nutzdatenstrom gelegentlich vorgetäuscht. Gewöhnlich wird für die Synchronisation folgendes Verfahren verwendet. Kommt die Demultiplexeinrichtung in den Zustand, dass keine Synchronisation vorhanden ist, so wird der einlaufende Bitstrom nach dem Rahmenkennungswort abgesucht. Ist ein Rahmenkennungswort gefunden, so wird genau eine Rahmenlänge weiter geschaut, ob dort wieder das Rahmenkennungswort vorliegt. Ist dies nicht der Fall, wird der Bitstrom sofort wieder nach dem nächsten Synchronwort abgesucht. Erst wenn auf diese Weise drei Synchronworte im Abstand der Rahmenlänge gefunden werden, wird angenommen, dass sich die Einrichtung im Synchronzustand befindet. In diesem Zustand wird in jedem Rahmen nur an der Stelle geschaut, wo das Synchronwort erwartet wird. Erst wenn mehrmals (meist viermal) hintereinander das Synchronwort fehlt, wird die Synchronisation als verloren angesehen, und der Suchlauf beginnt von vorne.

Wortsynchronisation
Rahmensynchronisation
Rahmenkennungswort

Beispiel 10.2-1:

Wir betrachten die Synchronisierung eines Rahmens der Länge 256 Bit mit dem 7-Bit Rahmenkennungswort 0011011.



Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von "1" und die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von "0" im Nutzbitstrom seien gleich, beide 0,5.

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Rahmenkennungswort an einer bestimmten Stelle im Nutzdatenstrom zufällig auftritt, ist

$$P = (0,5)^7 \approx 7,8 \cdot 10^{-3}.$$

Im Mittel tritt das Rahmenkennungswort zufällig annähernd

$$(256 - 7 - 6) \times 7,8 \cdot 10^{-3} \approx 1,9$$

mal in einem Rahmen auf.

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Rahmenkennungswort an zwei bestimmten Stellen im Nutzstrom zufällig auftritt (z. B. an einer bestimmten Stelle im Nutzstrom und dann genau einen Rahmen später wieder) ist

$$(0,5)^{14} \approx 6,1 \cdot 10^{-5}.$$

Im Mittel passiert dies

$$243 \times 6,1 \cdot 10^{-5} \approx 1,5 \cdot 10^{-2}$$

mal pro Rahmen, d. h. 1,5 mal alle hundert Rahmen.

In der Praxis sind die Wahrscheinlichkeiten wesentlich geringer, da Rahmenkennungsworte so gewählt werden, dass sie bei Nutzdaten selten oder gar nicht vorkommen.

In unseren bisherigen Ausführungen haben wir unterstellt, dass die einzelnen Signale, die zur Multiplexbildung vorliegen, den gleichen festen Takt (mit der Periode T) haben. Wir wollen im Folgenden diese Forderung abschwächen.

Signale mit gleichem festen Takt nennt man **synchrone Signale**. Sie können lediglich Phasendifferenzen aufweisen, so dass nur ein Phasenausgleich (z. B. durch Zwischenspeicherung) erforderlich wird, bevor eine Multiplexbildung vorgenommen werden kann.

synchrone Signale

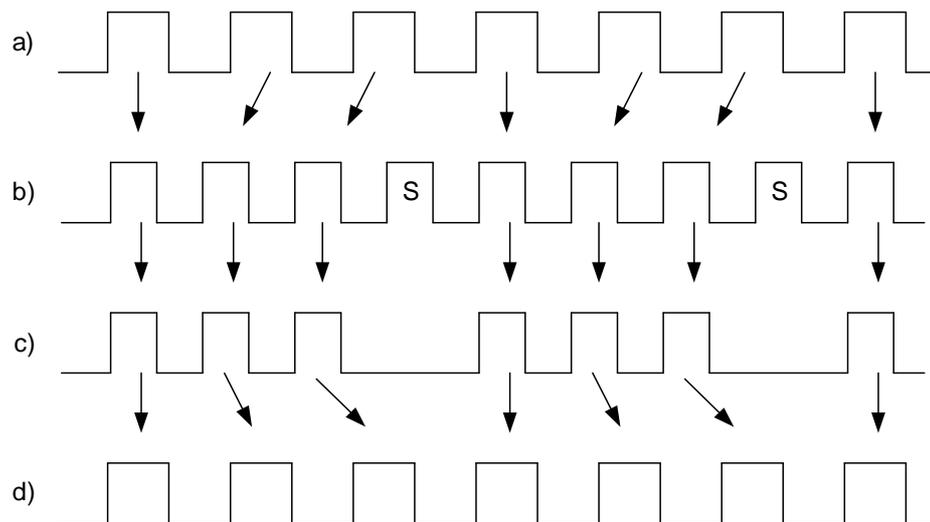
Taktgeneratoren können stets nur innerhalb gewisser Toleranzen realisiert werden. Signale, bei deren Erzeugung verschiedene Taktgeneratoren verwendet wurden, sind deshalb selten synchron. Signale, die nominell den gleichen Takt haben, d. h. deren Takt innerhalb vorgeschriebenen Toleranzen liegt, nennt man **plesiochrone Signale**. Bei der Multiplexbildung von plesiochronen Signalen kann es vorkommen, dass sich der Takt der Multiplexeinrichtung und eines Signals geringfügig unterscheiden. Über längere Zeit können die Takte soweit auseinanderwandern, dass sie sich um eine ganze Taktperiode unterscheiden. Ist der Takt der Multiplexeinrichtung schneller als der Takt des Signals, so wird ein Bit doppelt übertragen; ist es umgekehrt, so wird ein Bit nicht übertragen. Eine derartige Einfügung oder Auslassung von Bits in einem digitalen Signal wird als **Schlupf (Bitslip)** bezeichnet. Bei digitalen Signalen mit einer Rahmenstruktur führt ein Schlupf zum Verlust der Synchronisierung. Um bei der Multiplexbildung von plesiochronen Signalen diese

plesiochrone Signale

Schlupf (Bitslip)

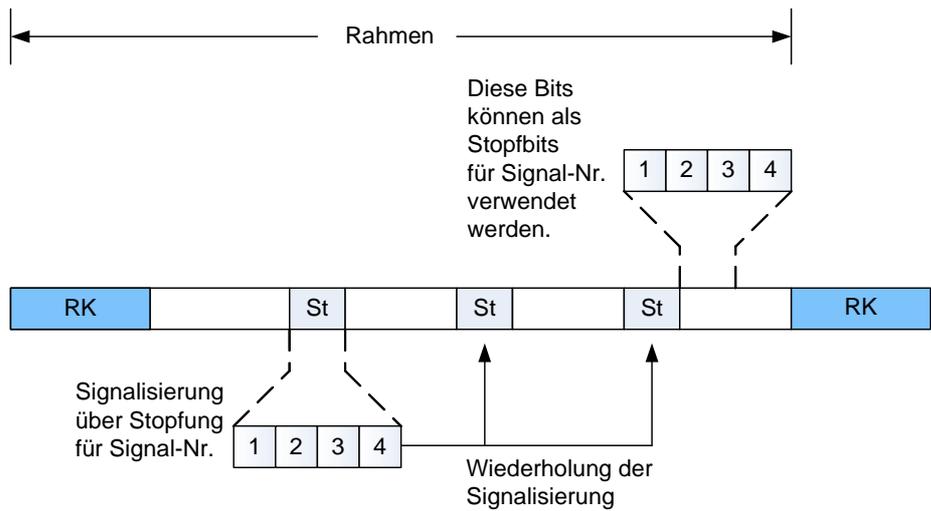
gravierende Folge von Schlupf zu vermeiden, wird eine besondere Maßnahme, **Bitstopfen (Bitstuffing)** genannt, vorgenommen.

Alle Bitstopf-Verfahren gehen davon aus, dass die Bitrate des Multiplexkanals größer gewählt wird als die Summe der Bitraten und Toleranzen der einzelnen Kanäle; somit müssen gelegentlich beliebige Bits (Stopfbits) hinzugefügt werden, um zu vermeiden, dass Bits doppelt übertragen werden (Abb. 10.2-1). Die Stopfbits werden an bestimmten Stellen des Rahmens vorgesehen, und es werden weitere Bits für die Signalisierung, dass ein Stopfbit verwendet wurde, benutzt, damit am Empfänger die Stopfbits wieder herausgenommen werden können. Da ein falsch erkanntes Stopfbit zum Verlust der Synchronisierung führt, werden pro Stopfbit mehrere Signalisierbits aufgewandt (meist 3). In Abb. 10.2-2 ist eine Stopftechnik für die Multiplexbildung von vier Kanälen aufgezeigt. Pro Rahmen sind 3 Gruppen von je 4 Bits für die Signalisierung und eine Gruppe von 4 Bits als Stopfbits vorgesehen. Pro Gruppe steht jeweils das erste Bit für das erste Signal, das zweite Bit für das zweite Signal usw.



- a) Eingangssignal zum Multiplexer
- b) übertragenes Signal mit Stopfbits
- c) Signal ohne Stopfbits
- d) Ausgangssignal nach Glättung

Abb. 10.2-1: Bitstopfen



0 ≙ Bit zum Stopfen verwendet
 1 ≙ Bit nicht zum Stopfen verwendet

RK Rahmenkennung
 St Stopfinformation

Abb. 10.2-2: Bitstopf-Verfahren für vier Signale

Selbsttestaufgabe 10.2-1:

Im vorangegangenen Abschnitt wurde ein Verfahren zur Synchronisierung des Demultiplexers bei Zeitmultiplexverfahren erläutert. Stellen Sie ein Flussdiagramm für das Verfahren auf (möglichst ein SDL-Diagramm).

10.3 Die PCM-Multiplex-Hierarchien

Wie bei der PCM-Codierung haben sich auch bei der PCM-Multiplexbildung zwei unterschiedliche Verfahren durchgesetzt (siehe Abschnitt 5.3, μ - und A-Kennlinien). In Europa basiert die Multiplex-Hierarchie auf einem Grundsystem PCM 30, bei dem 30 Nutzsingale je 64 kbit/s in einem 2,048 Mbit/s Multiplexkanal zusammengefasst werden. Die nächst höheren Hierarchiestufen ergeben sich jeweils durch Multiplexbildung von 4 Signalen der jeweilig darunterliegenden Stufe. Im einzelnen ergeben sich somit folgende Systeme:

Multiplex-Hierarchien

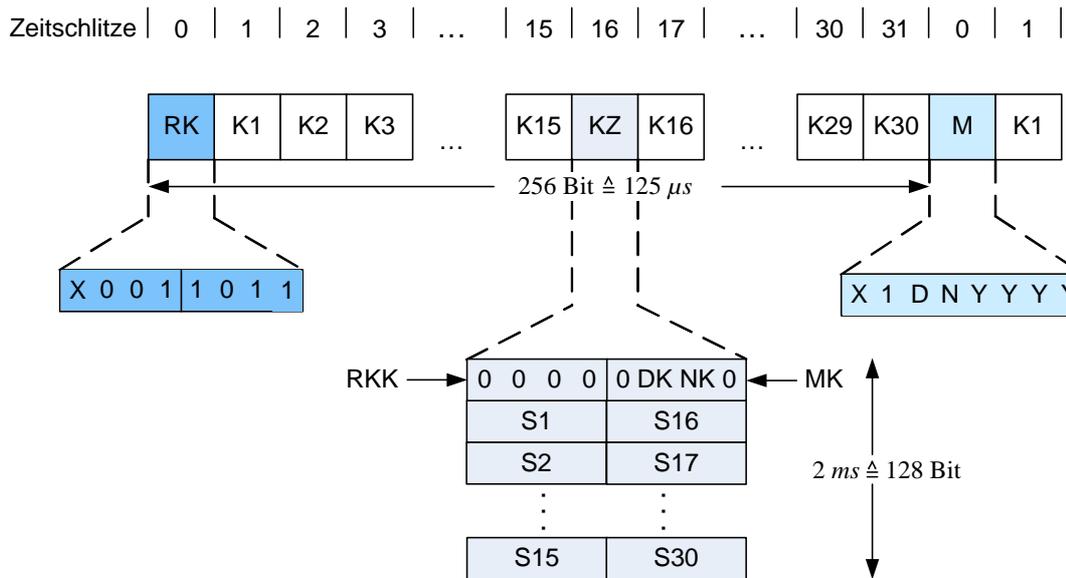
PCM-Typ	Anzahl der 64 kbit/s Nutzsingale	Bitrate in kbit/s
PCM 30	30	2048
PCM 120	120	8448
PCM 480	480	34368
PCM 1920	1920	139264
PCM 7680	7680	564992

In den USA bzw. in Japan basiert die Hierarchie auf einem Grundsystem DS-1 mit 24 PCM Nutzsignalen je 64 kbit/s. Insbesondere haben wir in USA folgende Systeme:

DS-Typ	Anzahl der 64 kbit/s Nutzsignale	Bitrate in kbit/s
DS-1	24	1544
DS-1c	48	3152
DS-2	96	6312
DS-3	672	44736
DS-4	4032	274176

PCM 30 Beim **PCM 30** System (Abb. 10.3-1) besteht der Rahmen aus 256 Bit (32 Zeitschlitz je 8 bit) mit einer Rahmendauer von $125 \mu s$ (entsprechend einer Abtastrate von 8 kHz), so dass das Multiplexsignal eine Bitrate von 2048 kbit/s hat. Die Zeitschlitz werden von 0 bis 31 durchgezählt. Im nullten Zeitschlitz wird abwechselnd ein Rahmenkennungswort $RK = X0011011$ und ein Meldewort $M = X1DNYYYY$ übertragen; hierbei sind die Bits X für nationale und Y für internationale Anwendung reserviert, während D für dringenden und N für nicht dringenden Alarm verwendet werden. Der 16. Zeitschlitz wird für die **Kennzeichenübertragung** (Zeichengabe bzw. Signalisierinformation) verwendet. Hierbei wird wiederum ein Überrahmen, bestehend aus 16 8-Bitwörtern (bzw. 32 4-Bitwörtern), gebildet. Im ersten 8-Bitwort wird die Überrahmenkennung (4 Bit) und das Meldewort gesendet. Es verbleibt somit je ein 4-Bitwort pro Überrahmen für die Zeichengabe pro Kanal. Dies entspricht 2 kbit/s Signalisierungskapazität pro 64 kbit/s Nutzkanal.

Kennzeichenübertragung

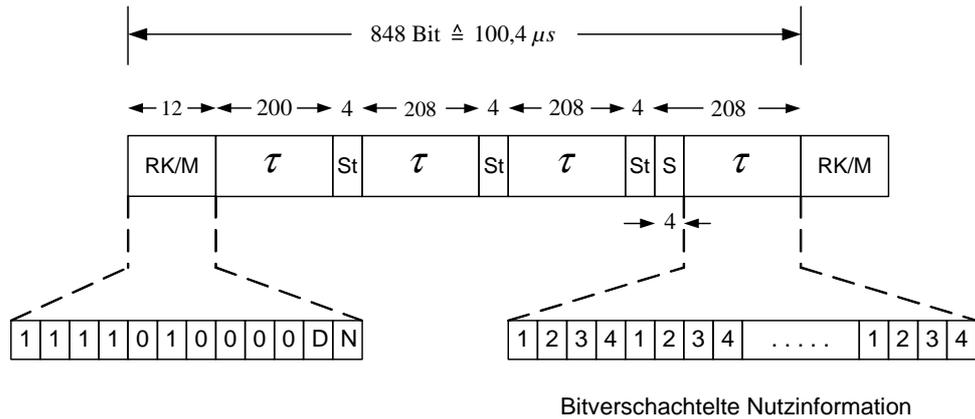


D	Bit für dringenden Alarm	NK	Bit für nicht dringenden Alarm (Kennzeichen)
DK	Bit für dringenden Alarm (Kennzeichen)	RK	Rahmenkennung
K1, ..., K30	Kanal 1 bis 30 je 64 kbit/s für Nutzinformation	RKK	Überrahmenkennung (Kennzeichen)
KZ	Zeichengabekanal (64 kbit/s)	S1, ..., S30	Signalisierinformation (je 4 Bit = 2 kbit/s) für Kanäle 1 bis 30
M	Meldewort	X	Bit reserviert für nationale Anwendung
MK	Meldewort (Kennzeichen)	Y	Bit reserviert für internationale Anwendung
N	Bit für nicht dringenden Alarm		

Abb. 10.3-1: PCM 30 Rahmen und Überrahmenbildung (2 Mbit/s System)

Beim **PCM 120** System (Abb. 10.3-2) werden vier PCM 30 Signale bitweise verschachtelt. Es wird dabei davon ausgegangen, dass die einzelnen Signale plesiochron sind, so dass Stopfen erforderlich wird. Das Stopfverfahren wurde bereits in Abschnitt 10.2 (Abb. 10.2-2) erläutert. Der Rahmen besteht aus 848 Bit (4 Teilrahmen je 212 Bit). Bei einer Bitrate von 8448 kbit/s entspricht dies einer Rahmendauer von ca. $100,4 \mu s$. Als Rahmenkennung und Meldewort wird das 12-Bitwort 1111010000DN verwendet, wobei die Bits *D* für dringenden Alarm und *N* für nicht dringenden Alarm genutzt werden.

PCM 120



- D Bit für dringenden Alarm
- τ Bitverschachtelte Nutzinformation
- M Meldewort
- N Bit für nicht dringenden Alarm
- RK Rahmenkennung
- S Stopfbit
- St Bits für Stopfinformation

Abb. 10.3-2: PCM 120 Rahmenaufbau (8 Mbit/s System)

Beispiel 10.3-1:

Das PCM 30 System hat eine nominelle Bitrate von $2,048 \cdot (1 \pm 5 \cdot 10^{-5})$ Mbit/s. Das PCM 120 System hat eine nominelle Bitrate von $8,448 \cdot (1 \pm 3 \cdot 10^{-5})$ Mbit/s. Im PCM 120 System steht 1 Stopfbit pro Rahmen von 848 Bit pro PCM 30 System zur Verfügung. Die maximal mögliche Stopfbitrate liegt somit bei

$$St_{\max} = \frac{1 + 3 \cdot 10^{-5} \text{ Bit}}{100,4 \mu\text{s}}$$

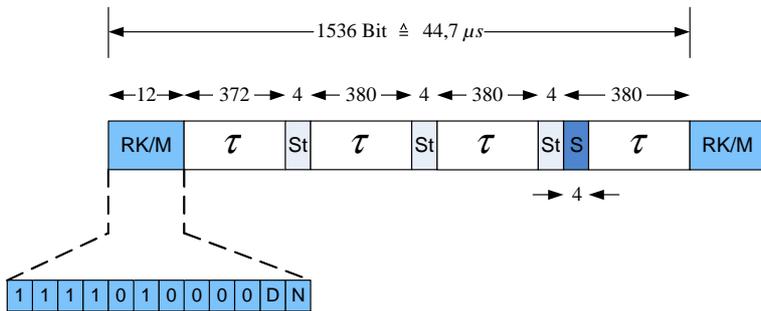
$$\approx 9,963 \text{ kbit/s.}$$

Die tatsächliche Stopfbitrate liegt bei

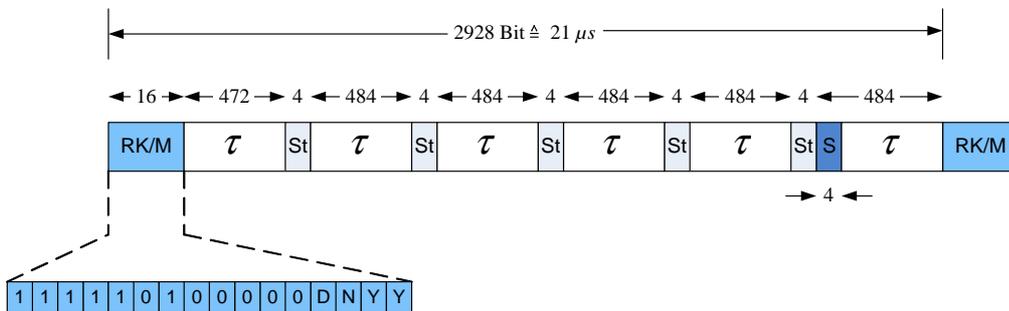
$$St = \frac{8448 \cdot (1 \pm 3 \cdot 10^{-5})}{848} \cdot 206 = 2048(1 \pm 5 \cdot 10^{-5}) \text{ kbit/s}$$

$$= 4,390 \dots \text{ bis } \dots 4,062 \text{ kbit/s.}$$

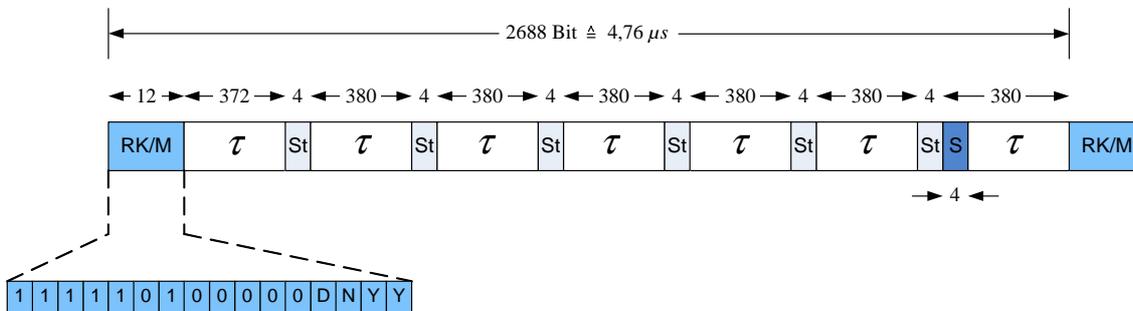
a) PCM 480 Rahmenaufbau (34 Mbit/s System)



b) PCM 1920 Rahmenaufbau (140 Mbit/s System)



c) PCM 7680 Rahmenaufbau (565 Mbit/s System)



- D Bit für dringenden Alarm
- τ Bitverschachtelte Nutzinformation
- M Meldewort
- N Bit für nicht dringenden Alarm
- RK Rahmenkennung
- S Stopfbits
- St Bits für Stopfinformation
- Y Bit reserviert für internationale Anwendung

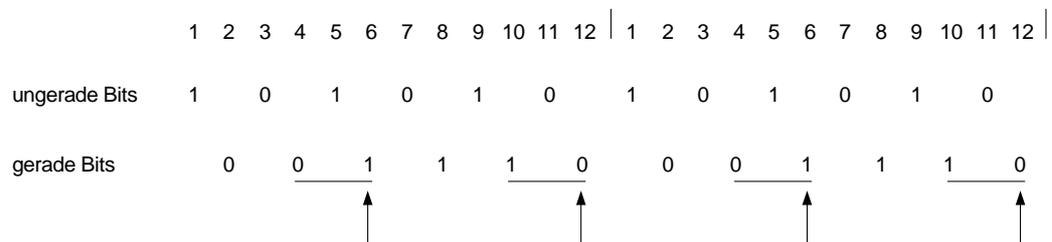
Abb. 10.3-3: Rahmenaufbau der höheren PCM Systeme in Europa

Bei den PCM Systemen der höheren Hierarchie (**PCM 480**, **PCM 1920** und **PCM 7680**) werden vier Kanäle der jeweils niedrigen Hierarchiestufe bitweise verschach-

PCM 480
PCM 1920
PCM 7680

telt. Die Einzelheiten der Multiplexbildung sind in Abb. 10.3-3 dargestellt.

PCM 24 Im **PCM 24** System der amerikanisch-japanischen PCM-Hierarchie (DS-1) werden 24 synchrone je 64 kbit/s Signale zu einem 1,544 Mbit/s Multiplexsignal zusammengefasst (Abb. 10.3-4). Der Multiplexrahmen besteht aus 193 Bits (ein Bit für die Synchronisation und 24 Zeitschlitze je 8 Bit) mit einer Rahmendauer von $125 \mu\text{s}$. Es handelt sich bei der Multiplexbildung somit um eine wortweise Verschachtelung mit einem verteilten Rahmenkennungswort. Dies ist so gewählt, dass es sowohl die Rahmen- als auch die Überraumensynchronisation von 6 und 12 Rahmen ermöglicht. Das 12 Bit Rahmenkennungswort lautet $RK = 100011011100$. Um den Synchronisationsvorgang zu erläutern, trennen wir das Wort in gerade und ungerade Bits wie folgt.



Es wird nun ersichtlich, dass die ungeraden Bits eine alternierende Eins-Null-Folge bilden. Für die Rahmensynchronisierung genügt es, diese alternierende Folge im laufenden Bitstrom zu finden und ab dem jeweiligen Synchronisationsbit 24 Zeitschlitze je 8 Bit abzuzählen. Bei den geraden Bits hat man jeweils einen Übergang von 0 auf 1 zwischen dem vierten und dem sechsten Bit und von 1 auf 0 zwischen dem zehnten und dem zwölften Bit. Diese Übergänge werden verwendet, um Überrahmen aus 6 und/oder 12 Rahmen zu bilden. Für die Zeichengabe (Signalisierung) wird bei jedem sechsten Rahmen das achte (d. h. niederwertigste) Bit jedes Zeitschlitzes verwendet - dieses steht deshalb für die Nutzsignalübertragung nicht zur Verfügung. Pro 64 kbit/s Signal stehen somit ca. 1,3 kbit/s für die Zeichengabe zur Verfügung. Dieses Verfahren für die Zeichengabe wird als **Bit Stealing** (d. h. Entwendung eines Nutzbits für die Signalisierung) bezeichnet. Bei der Sprachübertragung, für die das PCM 24 System ursprünglich konzipiert wurde, führt das Bit Stealing Verfahren zu einer geringen, akzeptablen Verschlechterung der Sprachqualität. Bei der Datenübertragung wäre der Verlust des achten Bits in jedem sechsten Byte nicht akzeptabel. Häufig wird deshalb bei der Datenübertragung lediglich ein 7-Bitwort verwendet, das zu der Datenübertragungsrate von 56 kbit/s führt.

Bit Stealing

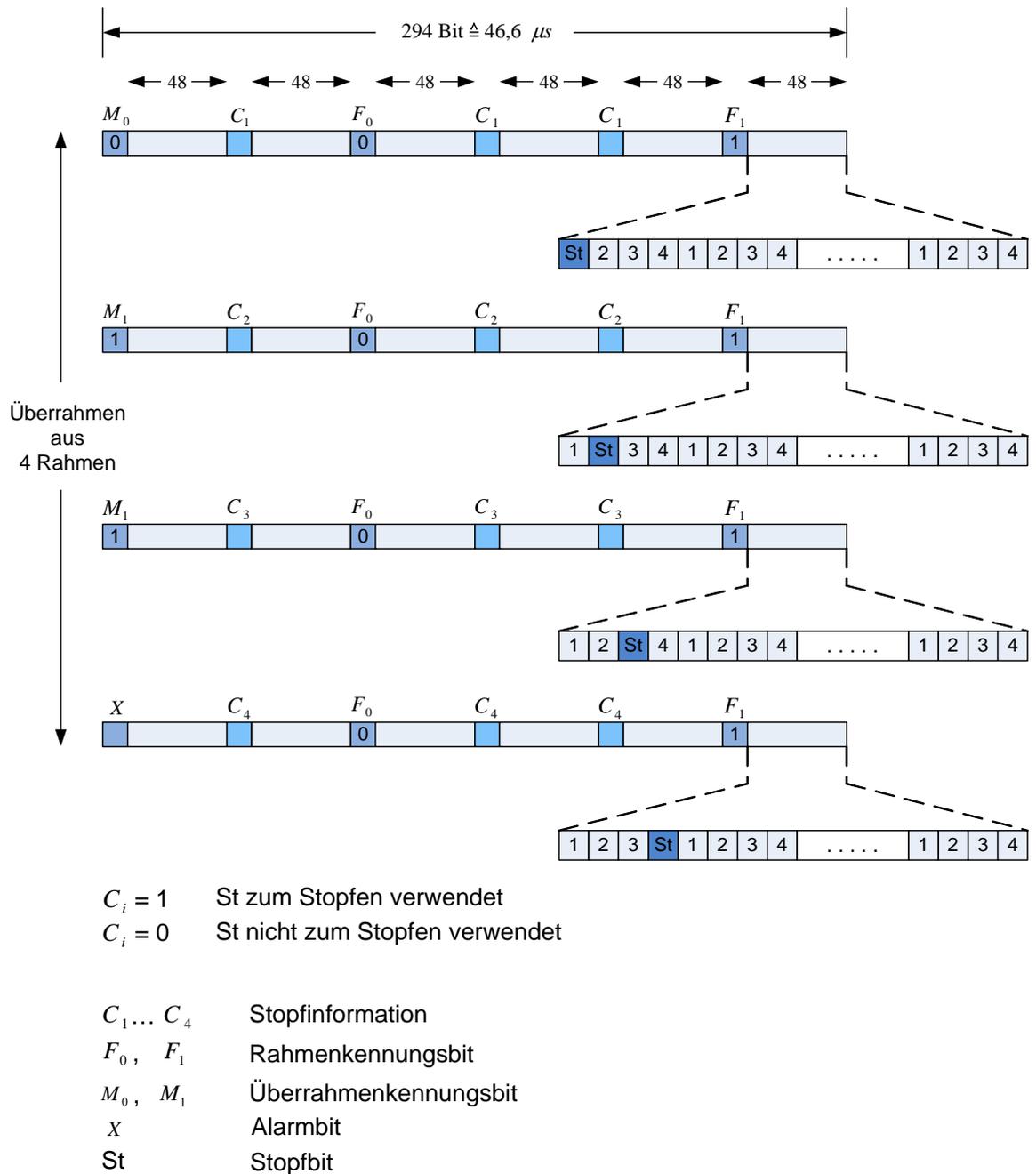


Abb. 10.3-5: PCM 96 Rahmenbildung und Stopfverfahren (6 Mbit/s)

PCM 672 Beim **PCM 672** System (DS-3) werden 7 PCM 96 plesiochrone Signale und beim **PCM 4032** **PCM 4032** (DS-4) werden 6 PCM 672 plesiochrone Signale zu einem Multiplexsignal zusammengefasst. Die Rahmenbildung und das Stopfverfahren sind ähnlich wie beim PCM 96 System; hinzu kommt nun, dass über den gesamten Überrahmen auch eine Paritätsprüfung zur Fehlererkennung durchgeführt wird.

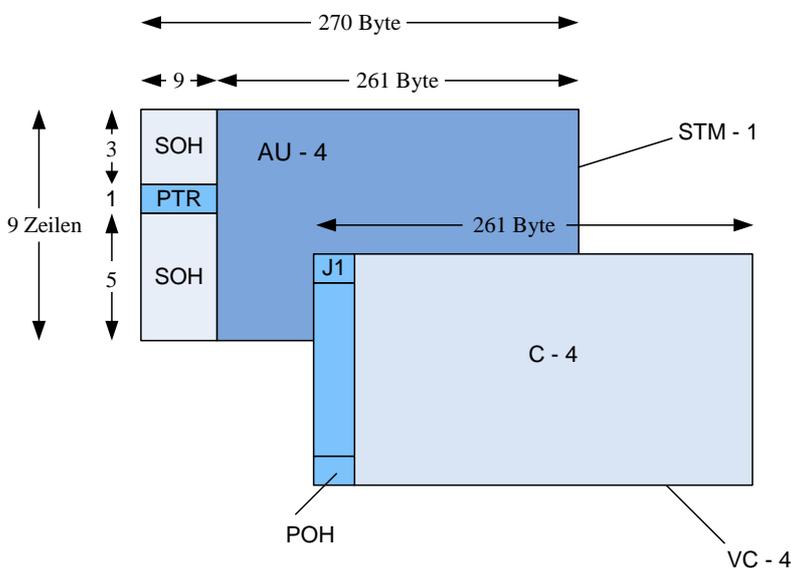
synchrone Multiplexhierarchie

Die Multiplexbildung plesiochrone Signale ist wegen des erforderlichen Stopfens recht aufwendig. In der CCITT Periode 1985-88 wurde deshalb eine neue **synchrone Multiplexhierarchie** erarbeitet. Im Mittelpunkt stand dabei die Multiplexbildung von synchronen Signalen verschiedener Bitraten an beliebigen Knoten in einem Netz. Als Randbedingung wurde die Anbindung der plesiochrone Multi-

plexsignale existierender Hierarchien vorgesehen - was allerdings zu erheblichem Stopfaufwand führt. Das Grundsystem der synchronen Multiplexhierarchie bildet das als **STM-1** (*Synchronous Transport Module-1*) Element bezeichnete Signal mit einer Bitrate von 155,250 Mbit/s. Multiplexsignale höherer Hierarchiestufen lassen sich direkt durch das byteweise Verschachteln mehrerer (z. B. 4, 8, 12, 16) synchroner STM-1 Elemente bilden. Diese werden dann als STM-N ($N = 4, 8, 12, 16$) Elemente bezeichnet. Ein STM-1 Element besteht aus einem Rahmen aus 9 Zeilen mit je 270 Byte und einer Rahmendauer von $125 \mu s$ (Abb. 10.3-6). Die ersten 9 Bytes in jeder Zeile werden als SOH (*Section Overhead*) bezeichnet und werden für die Synchronisation und Verwaltungsaufgaben verwendet. Hier werden auch *Pointer* (Zeiger) angelegt, deren Verwendung noch erläutert wird. Werden mehrere STM-1 Signale zu einem STM-N Signal zusammengefasst, so werden die einzelnen Signale in dem Kopfteil gekennzeichnet.

STM-1

Die synchrone Multiplexhierarchie unterhalb des STM-1 Elementes besteht aus verschiedenen Multiplexelementen, die durch Buchstaben- und Zifferngruppen gekennzeichnet werden (Abb. 10.3-7). Sie sind byteorientiert und haben eine Rahmendauer von $125 \mu s$ (bei Bitraten wesentlich größer als 8 Mbit/s) oder $500 \mu s$ (bei niedrigeren Bitraten). Verschiedene Elemente können entsprechend Abb. 10.3-8 zusammengesetzt werden, um ein STM-1 Element zu bilden. So können z. B. 4 TU-31 oder ein $C - 4$ in einem $VC - 4$ untergebracht werden, um ein STM-1 Element zu ergeben.



AU-4	Administrative Unit - 4	SOH	Section Overhead
C-4	Container - 4	VC-4	Virtual Container - 4
POH	Path Overhead	J1	Erstes Byte von VC - 4
PTR	Pointer		

Abb. 10.3-6: STM-1 Rahmenaufbau mit virtuellem Container VC-4

Multiplexelement					Übertragungskapazität in Mbit/s
TU	VC	C	11		1,6 bis 1,7
TU	VC	C	12		2,2 bis 2,3
TUG	TU	VC	C	21	6,8 bis 6,9
TUG	TU	VC	C	22	9,1 bis 9,2
AU	TU	VC	C	31	37
AU	TU	VC	C	32	48 bis 50
AU		VC	C	4	150 bis 151

AU	Administrative Unit	TUG	Tributary Unit Group
C	Container	VC	Virtual Container
TU	Tributary Unit		

Abb. 10.3-7: Multiplexelemente der synchronen Multiplexhierarchie und deren Übertragungskapazität

- Container** Die unterste Stufe der synchronen Multiplexhierarchie bilden **Container**, in denen herkömmliche plesiochrone Signale unter Verwendung von festgelegten Stopfverfahren eingepackt werden (z. B. PCM 30 in $C - 12$). Dem Container wird eine Spalte von Bytes, die POH (**Path Overhead**) genannt werden, hinzugefügt, um einen **virtuellen Container** (VC) zu bilden. Im POH werden verschiedene Steuerungs- und Verwaltungsinformationen übertragen. Insbesondere enthält das POH Synchronisations- und Stopfinformationen, Paritätsbits usw. Virtuelle Container dienen als transparente Kanäle über Netzknoten hinweg. Hierzu wird jedem virtuellen Container ein Pointer (Zeiger) zugeordnet. Der *Pointer* hat die Aufgabe, den Rahmenanfang des betreffenden virtuellen Containers zu kennzeichnen. In Abb. 10.3-6 ist die Einbettung des $VC - 4$ in einem STM-1 Element dargestellt. Der *Pointer* PTR im *Section Overhead* zeigt die Stelle an, an der das erste Byte ($J1$) von $VC - 4$ beginnt. Auf diese Weise wird es möglich, den Rahmen des virtuellen Containers vom Rahmen des STM-1 Elementes unabhängig zu machen. Bei einer Umbettung bzw. einem Stopfvorgang muss lediglich der *Pointer* umcodiert werden.
- Path Overhead virtueller Container** Dieses Verfahren wird als **Pointertechnik** bezeichnet und ermöglicht, die virtuellen Container an Netzknoten als transparente Kanäle zu behandeln. Das bedeutet, dass jeweils nach Bedarf PCM-Multiplex-Kanäle an den Netzknoten durchgeschaltet werden können. Man spricht in diesem Zusammenhang von **Bündeldurchschaltung (Cross Connect)** in der synchronen Multiplextechnik (SMT), insbesondere, wenn diese durch die Managementinstanz eingeleitet wird.
- Pointertechnik**
- Bündeldurchschaltung (Cross Connect)**

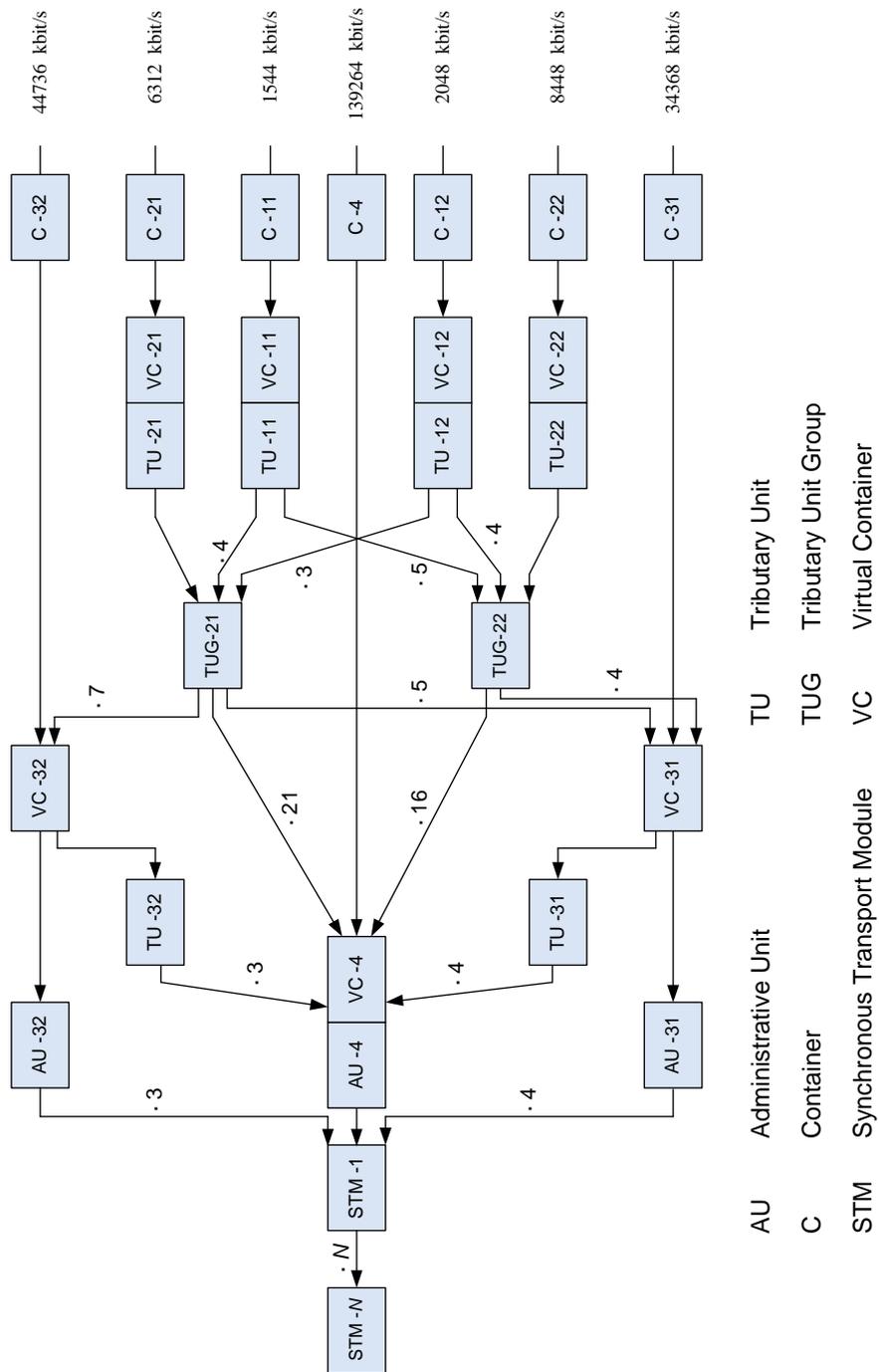


Abb. 10.3-8: Zusammensetzung der Multiplexelemente in der synchronen Multiplexhierarchie

Selbsttestaufgabe 10.3-1:

Nennen Sie die beiden Grundsysteme der PCM-Multiplexhierarchien. Erklären Sie kurz diese beiden Grundsysteme in Bezug auf die Rahmenstruktur, die Teilkanäle und die Bitrate.

10.4 Richtungstrennungsverfahren

Häufig ist es erforderlich, auf Zweidrahtleitungen (d. h. auf einem Adernpaar) eine Datenübertragung im Duplexverkehr abzuwickeln. Hierzu werden besondere Multiplexverfahren, die man als **Richtungstrennungsverfahren** oder Verfahren zur **Zweidraht-Vierdraht-Umwandlung** bezeichnet, angewandt.

Das Frequenzmultiplexverfahren kann, wie bei der Multiplexbildung, ohne Veränderung auch für die Richtungstrennung angewandt werden. Es wird dann als **Frequenzgetrenntlageverfahren** oder **Frequenzgabel** (Abb. 10.4-1) bezeichnet.

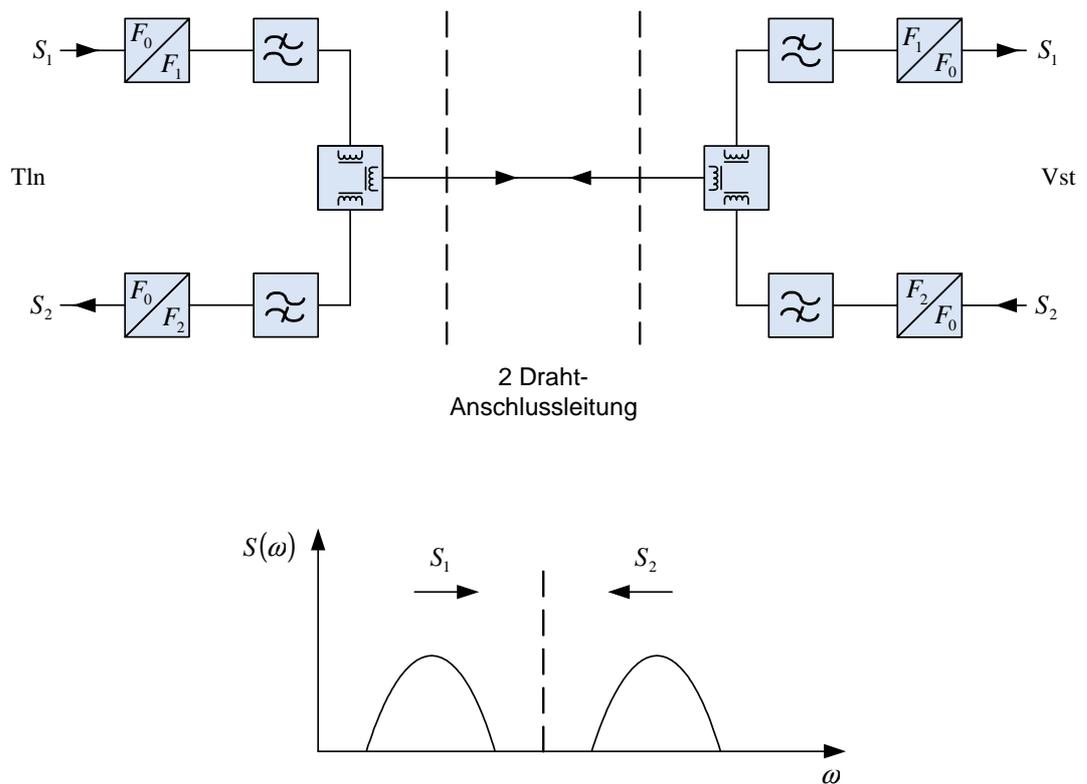


Abb. 10.4-1: Frequenzgetrenntlageverfahren

Auch das Zeitmultiplexverfahren wird für die Richtungstrennung, insbesondere im Teilnehmeranschlussbereich von Nebenstellenanlagen, eingesetzt. Es wird auch als **Zeitgetrenntlageverfahren**, **Ping-Pong Technik** oder **Zeitgabel** bezeichnet (Abb. 10.4-2, Abb. 10.4-3). Signale in beiden Richtungen werden im gleichen Frequenzbereich, jedoch zeitlich nacheinander, als Datenpakete (*Bursts*) übertragen. Zwischen den Datenpaketen wird eine genügend große Pause für den Übertragungsvorgang (Signallaufzeit) und eine Schutzzeit eingelegt. Meist übernimmt eine der Stationen die Taktsteuerung (*Master-Funktion*) und die Gegenstation (*Slave*) schickt sein Datenpaket nach einer kurzen Schutzzeit nach dem Empfang des ankommenden Datenpakets ab. Das Zeitgetrenntlageverfahren ist relativ einfach zu realisieren, denn es wird lediglich eine Speicherung und eine Steuerung mit Taktung

Richtungstrennungs-
verfahren
Zweidraht-Vierdraht-
Umwandlung
Frequenzgetrenntlage-
verfahren
Frequenzgabel

Zeitgetrenntlagever-
fahren
Ping-Pong Technik
Zeitgabel

erforderlich. Beide können digital ausgelegt werden. Der Hauptnachteil des Verfahrens ist, dass eine sehr hohe Bitrate (größer als die doppelte Bitrate des ursprünglichen Signals) erforderlich wird. Die Reichweite des Verfahrens ist im Wesentlichen durch die Signallaufzeit begrenzt.

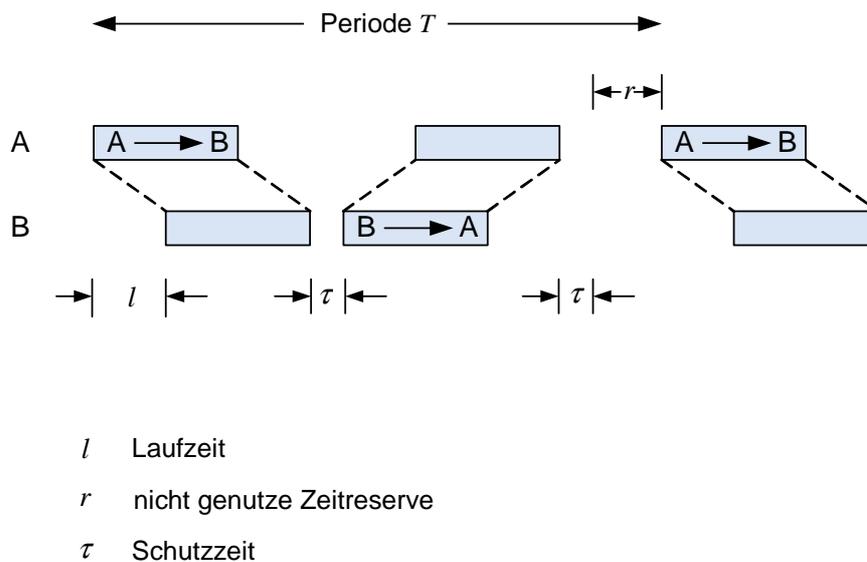
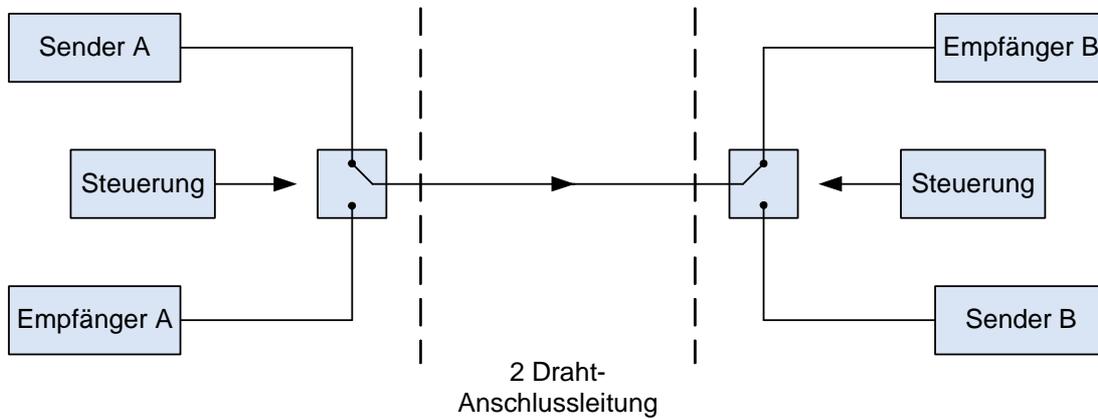


Abb. 10.4-2: Prinzip des Zeitgetrenntageverfahrens

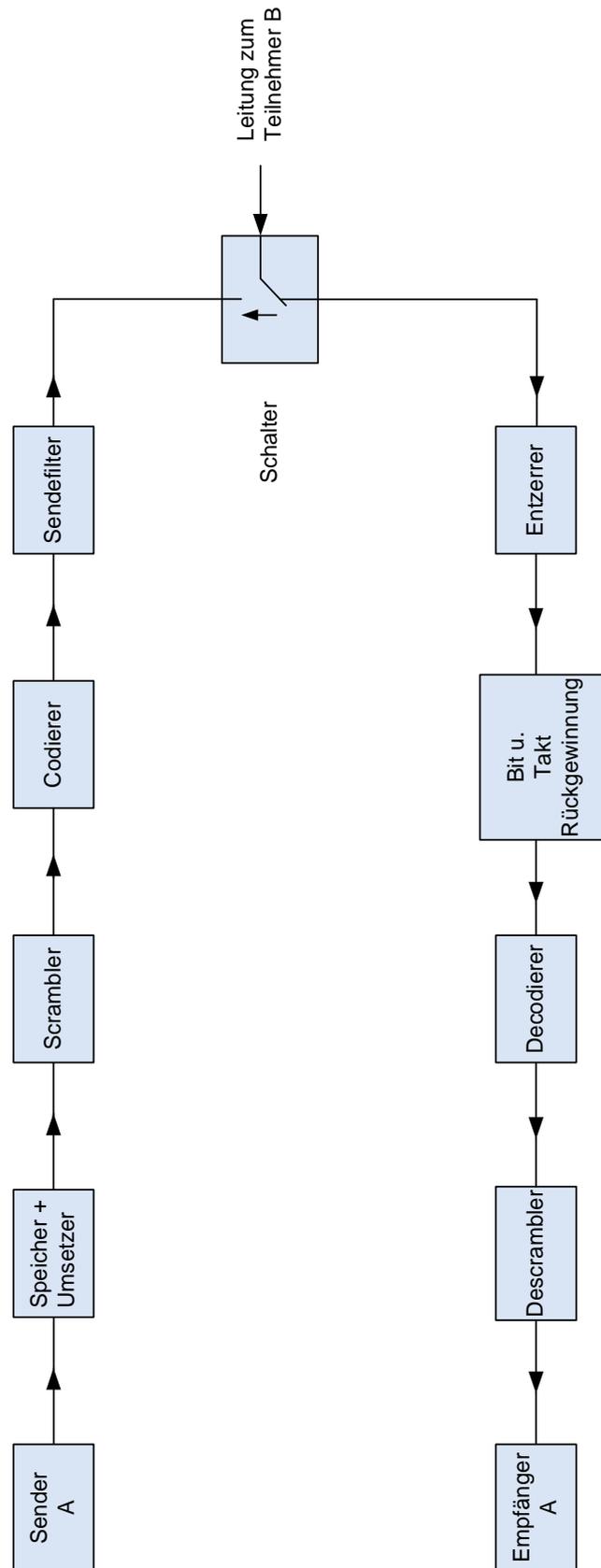


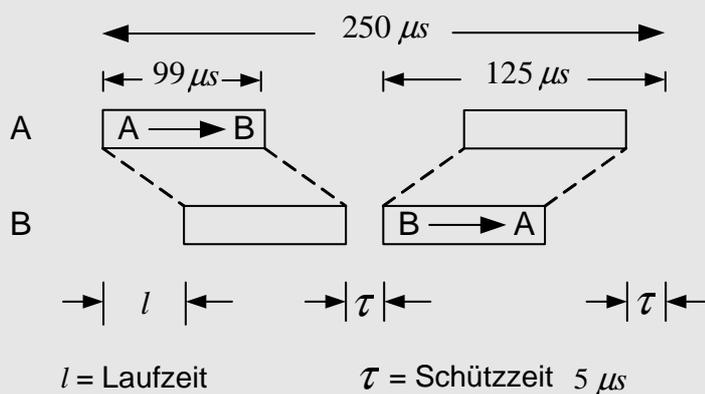
Abb. 10.4-3: Blockschaltbild des Zeitgetrenntlageverfahrens

Beispiel 10.4-1:

Für die Duplexübertragung auf einer Teilnehmeranschlussleitung mit dem Zeitgetrenntlageverfahren werden Datenpakete von 38 Bits gebildet. Diese bestehen aus zwei Startbits für Synchronisation und Wartungsfunktionen und 36 Nutzbits. Die Stationen liefern diese 36 Bits alle $250 \mu s$, d. h. die Nutzdatenrate pro Station beträgt $(36/250 \mu s) = 144 \text{ kbit/s}$.

Mit den Startbits stehen somit pro Station $(38/36) \times 144 \text{ kbit/s} = 152 \text{ kbit/s}$ für die Übertragung in jede Richtung an.

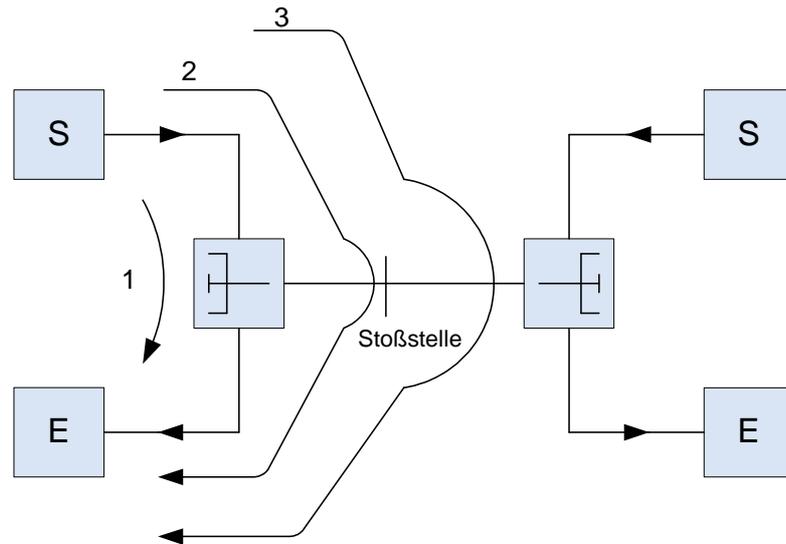
Für die Übertragung auf der Anschlussleitung wird eine Bitrate von 384 kbit/s gewählt. Für die Übertragung eines Datenpakets aus 38 Bit benötigt man $(38 \text{ Bit}/384 \text{ kbit/s}) = 99 \mu s$. Als Schutzzeit werden $5 \mu s$ nach jedem Datenpaket angesetzt.



Somit verbleiben für die Signallaufzeit $(125 - 104) \mu s = 21 \mu s$. Bei einer Signallaufzeit von $6 \mu s$ pro km können somit 3,5 km überbrückt werden.

Beim **Echokompensationsverfahren**, auch **adaptive Gabel** genannt, wird für die Ein- und Auskopplung der Sende- und Empfangssignale eine Gabelschaltung, wie sie auch beim analogen Telefon angewandt wird, eingesetzt. Die Gabel ist auf die Übertragungsfrequenz der digitalen Bitströme abgestimmt, reicht aber für die erforderliche Entkopplung gewöhnlich nicht aus. In Abb. 10.4-4 sind die Echos, die bei der Verwendung einer Gabel auftreten, aufgezeigt. Es ist einmal die unzureichende Entkopplung zwischen der Sende- und Empfangsrichtung in der Gabel, dann sind es die Reflexionen an Stoßstellen in der Anschlussleitung und letztlich auch das Fernecho an der Empfängergabel, die die Störungen verursachen. Alle diese Störungen sind mit dem entsprechenden Sendesignal direkt korreliert, so dass man sie unter Verwendung von Korrelationsverfahren auf der Empfangsseite kompensieren kann.

**Echokompensations-
verfahren
adaptive Gabel**



1. Nahecho
2. Echo durch Reflexion an einer Stoßstelle
3. Fernecho durch Reflexion an der Empfängergabel

Abb. 10.4-4: Echos bei der Verwendung einer Gabel zur Richtungstrennung

In Abb. 10.4-5 ist das Prinzip des Verfahrens dargestellt. Das empfangene Signal \tilde{S} an der Station A besteht aus dem gedämpften Signal S_B der Station B und den Echos E , die mit dem eigenen Sendesignal S_A korreliert sind. Ein Regelalgorithmus stellt die Koeffizienten des Transversalfilters so ein, dass die Signale S_A und E_A möglichst unkorreliert sind bzw. \hat{E} möglichst gleich E und somit E_A gleich S_B wird. In der einfachsten Version wird am Anfang der Übertragung eine Trainingsphase eingelegt. In dieser Phase sendet die Station B kein Signal, so dass \tilde{S} gleich E wird. Die Filterkoeffizienten werden nun so gewählt, dass \hat{E} gleich E wird und am Regler E_A gleich Null anliegt. Da die Echoeigenschaften auf Anschlussleitungen über längere Zeit konstant bleiben, ist meist eine Trainingsphase nicht erforderlich - die Adaption wird im laufenden Betrieb durchgeführt. Das Verfahren hängt entscheidend davon ab, dass die Folgen S_A und S_B statistisch unabhängig sind. Da dies bei Nutzdaten, insbesondere auch bei Sprache, häufig nicht der Fall ist, werden bei beiden Stationen unterschiedliche Verwürfler eingesetzt, um die statistische Unabhängigkeit zu gewährleisten (Abb. 10.4-6).

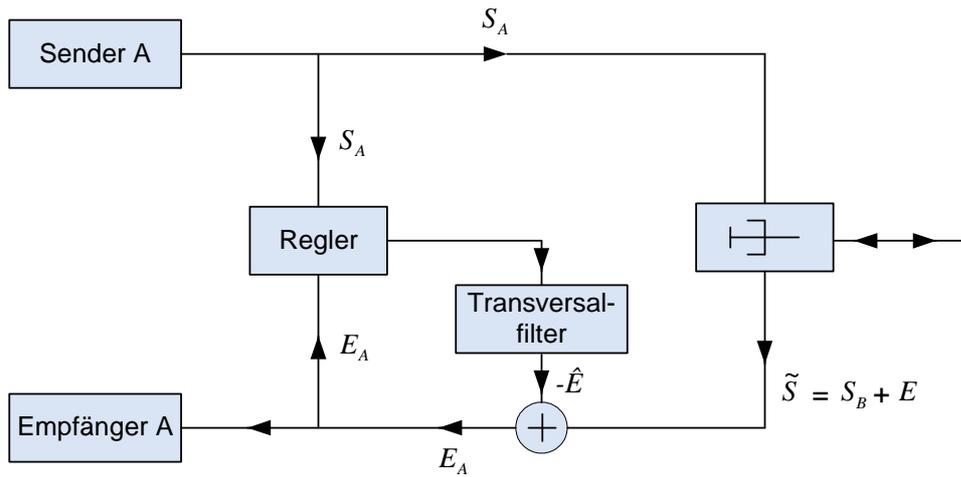


Abb. 10.4-5: Prinzip des Echokompensationsverfahrens

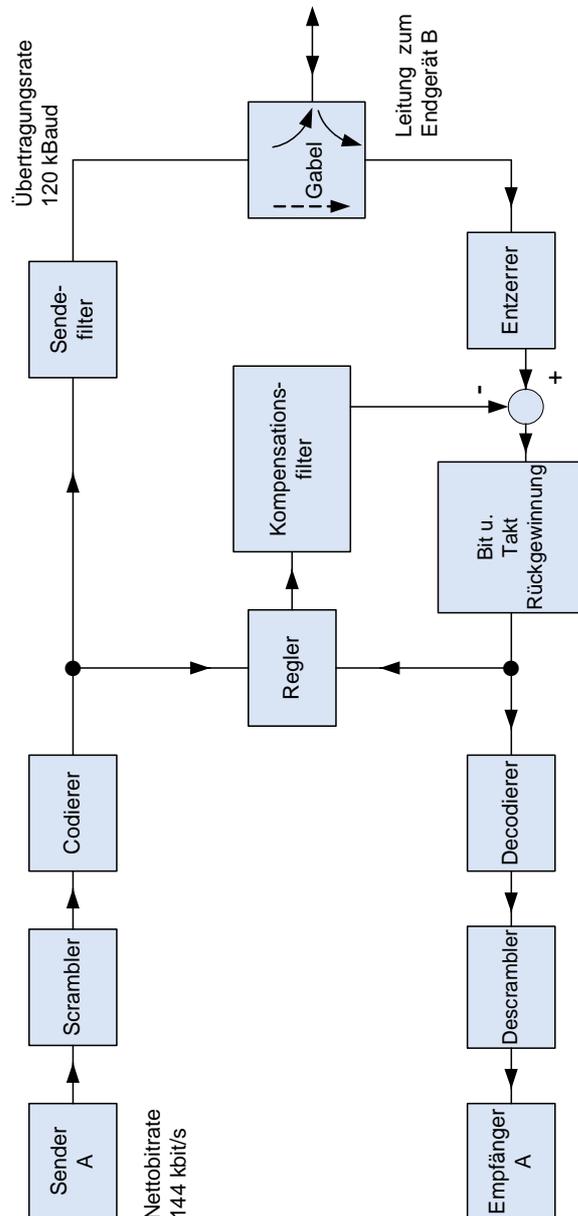


Abb. 10.4-6: Blockschaltbild des Echokompensationsverfahrens

Das Echokompensationsverfahren wird sowohl bei der Modemübertragung (meist in der Trainingsfolgeversion) als auch (in der adaptiven Version) bei der digitalen Übertragung im öffentlichen Netz (ISDN Anschluss) angewandt. Der Realisierungsaufwand ist wegen der erforderlichen Signalverarbeitung erheblich. Die Güte des Verfahrens hängt außer vom Regelalgorithmus entscheidend von der Genauigkeit des Transversalfilters und dem Zeitfenster, in dem eine Kompensation durchgeführt wird, ab. Im Gegensatz zum Zeitgetrenntlageverfahren gibt es hier keine harte physikalische Grenze für die Reichweite des Verfahrens. Theoretisch kann bei einem entsprechend hohen Aufwand für die Kompensation die Reichweite einer Vierdrahtübertragung erreicht werden. Der wesentliche Vorteil des Verfahrens liegt darin, dass die Übertragungsrate auf der Leitung nicht erhöht wird und daher auch die Störeeigenschaften des Systems nicht verschlechtert werden.

Selbsttestaufgabe 10.4-1:

Welche Echos treten bei der Verwendung einer Gabel zur Richtungstrennung auf?

Wodurch wird die Reichweite des Signals bei dem Ping-Pong-Verfahren im Wesentlichen begrenzt?

11 Durchschalte- und Speichervermittlung

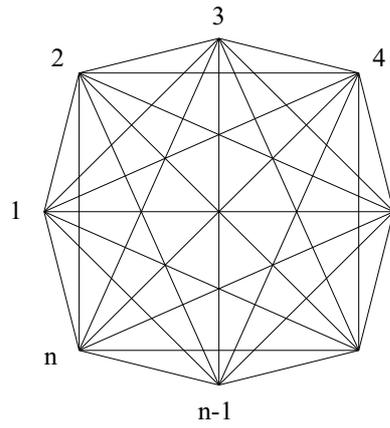
11.1 Einführung

Bisher haben wir die Kommunikation zwischen zwei Partnern betrachtet. Meist sind es jedoch mehrere Teilnehmer, die miteinander eine Kommunikationsbeziehung unterhalten, d. h. miteinander Nachrichten austauschen. Unterhält man pro solcher Kommunikationsbeziehung zwischen n Teilnehmern jeweils eine Leitung für die Nachrichtenübertragung, so sind $n \cdot \frac{(n-1)}{2}$ Leitungen erforderlich (Abb. 11.1-1a). Hat man pro Teilnehmer $(n - 1)$ Endgeräte, so kann jeder Teilnehmer simultan mit jedem anderen Teilnehmer kommunizieren. Gewöhnlich hat man jedoch ein Endgerät pro Teilnehmer, so dass nunmehr im einfachsten Fall bei jedem Teilnehmer $(n - 1)$ Leitungen an einer Steckerleiste enden und bei Bedarf das Endgerät entsprechend eingesetzt werden kann. Der Vermittlungsvorgang besteht nun daraus, beim Wunsch des Teilnehmers A , mit dem Teilnehmer B Nachrichten auszutauschen, das Endgerät des Teilnehmers A an die Leitung zum Teilnehmer B zu stecken und dem Teilnehmer B durch Ton- oder Lichtsignal den Kommunikationswunsch kenntlich zu machen. Der Teilnehmer B muss dann sein Endgerät entsprechend am anderen Leitungsende einstecken, bevor der Informationsaustausch beginnen kann. Anstatt manuell zu stöpseln, kann man auch mechanische oder elektronische Schalter verwenden, um zwischen zwei Leitungen wahlweise eine Verbindung herzustellen. Schaltmittel, die es ermöglichen, eine Verbindung zwischen zwei Leitungen herzustellen und wieder zu trennen, nennt man **Koppelpunkte**. Da pro Kommunikationsrichtung meist zwei Adern für die Signalübertragung verwendet werden, hat man pro Koppelpunkt zwei (bei Simplexübertragung) oder vier (bei Duplexübertragung) Kontakte, die gleichzeitig betätigt werden, um die Verbindung durchzuschalten oder zu trennen. Man spricht entsprechend von zwei- oder vieradriger Durchschaltung. Einrichtungen, die eine Durchschaltung von Verbindungen zwischen mehreren Teilnehmern oder Leitungen ermöglichen, nennt man **Koppelanordnungen**. Eine Reihe aus Koppelpunkten, mit denen man eine Leitung wahlweise mit mehreren Leitungen verbinden kann, nennt man eine **Koppelreihe** (Abb. 11.1-2). In unserem Beispiel ist pro Teilnehmer eine solche Koppelreihe mit $(n - 1)$ Koppelpunkten erforderlich. Insgesamt benötigt man also $n \cdot (n - 1)$ Koppelpunkte.

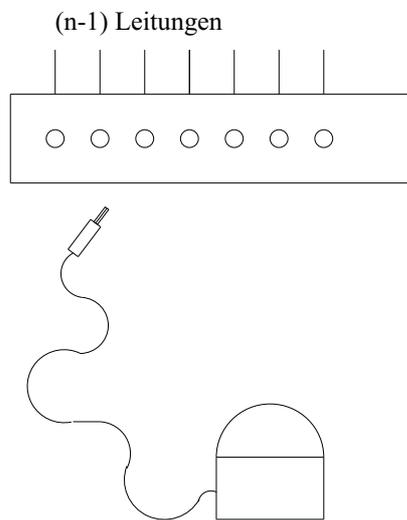
Koppelpunkte

Koppelanordnungen

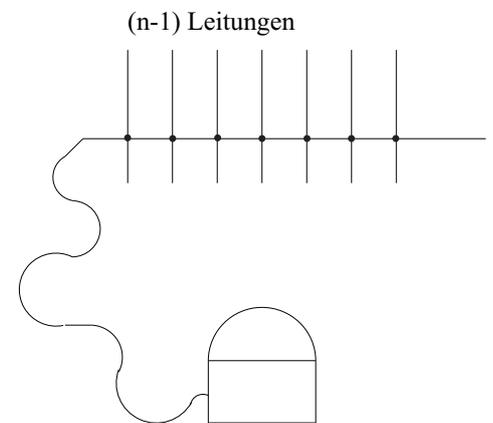
Koppelreihe



a) Die Vollvermaschung

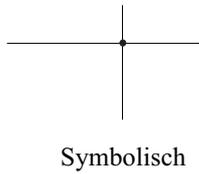
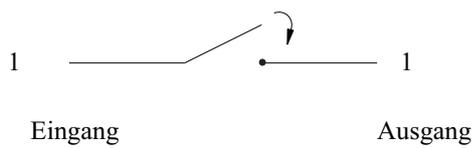


b) Steckerleiste bei jedem Teilnehmer

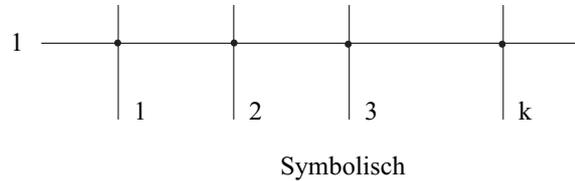
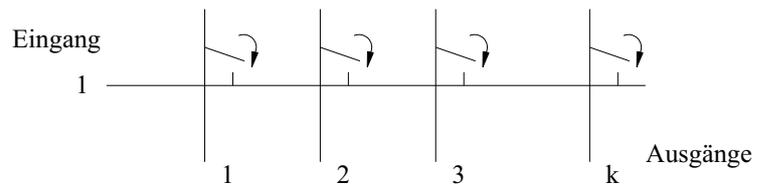


c) Schaltmittel bei jedem Teilnehmer

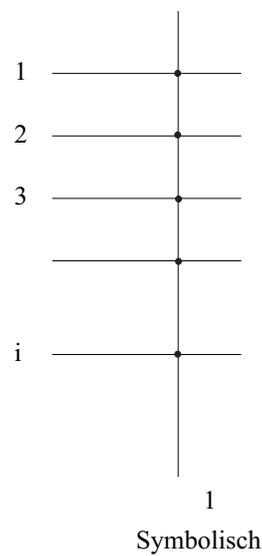
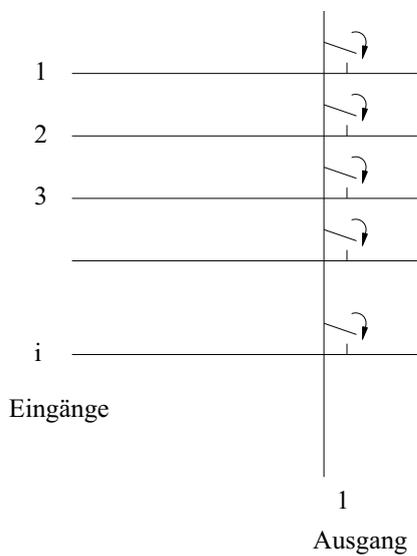
Abb. 11.1-1: Kommunikation zwischen n Partnern mit einer Leitung zwischen je zwei Partnern



a) Koppelpunkt



b) Koppelreihe mit einem Eingang und k Ausgängen



c) Koppelreihe mit i Eingängen und einem Ausgang

Abb. 11.1-2: Koppelpunkt und Koppelreihen

Man kann nun den Aufwand für die Durchschaltung und gleichzeitig die erforderliche gesamte Leitungslänge verringern, indem man die Koppelpunkte zentral anordnet (Abb. 11.1-3). Hierzu verwendet man eine matrixartige Anordnung von Koppelpunkten, die **Koppelvielfach** oder **Koppelmatrix** genannt wird. Diese ermöglicht es, i Eingänge mit k Ausgängen wahlweise zu verbinden (Abb. 11.1-4).

Koppelvielfach
Koppelmatrix

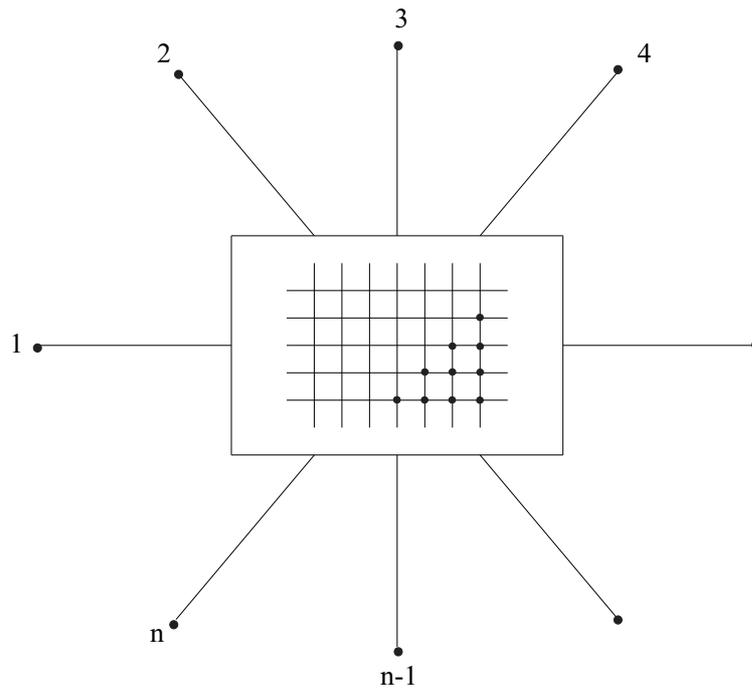


Abb. 11.1-3: Kommunikation zwischen n Partnern über eine Koppelanordnung

In unserem Beispiel können wir eine solche Koppelmatrix verwenden, wobei wir jeden Teilnehmer sowohl am Eingang als auch am Ausgang der Koppelmatrix anschalten.

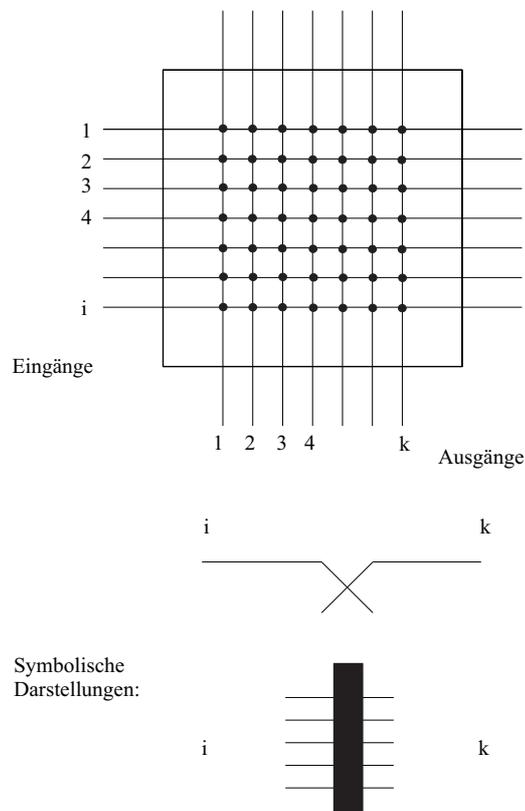


Abb. 11.1-4: Koppelvielfach (Koppelmatrix) aus $i \cdot k$ Koppelpunkten

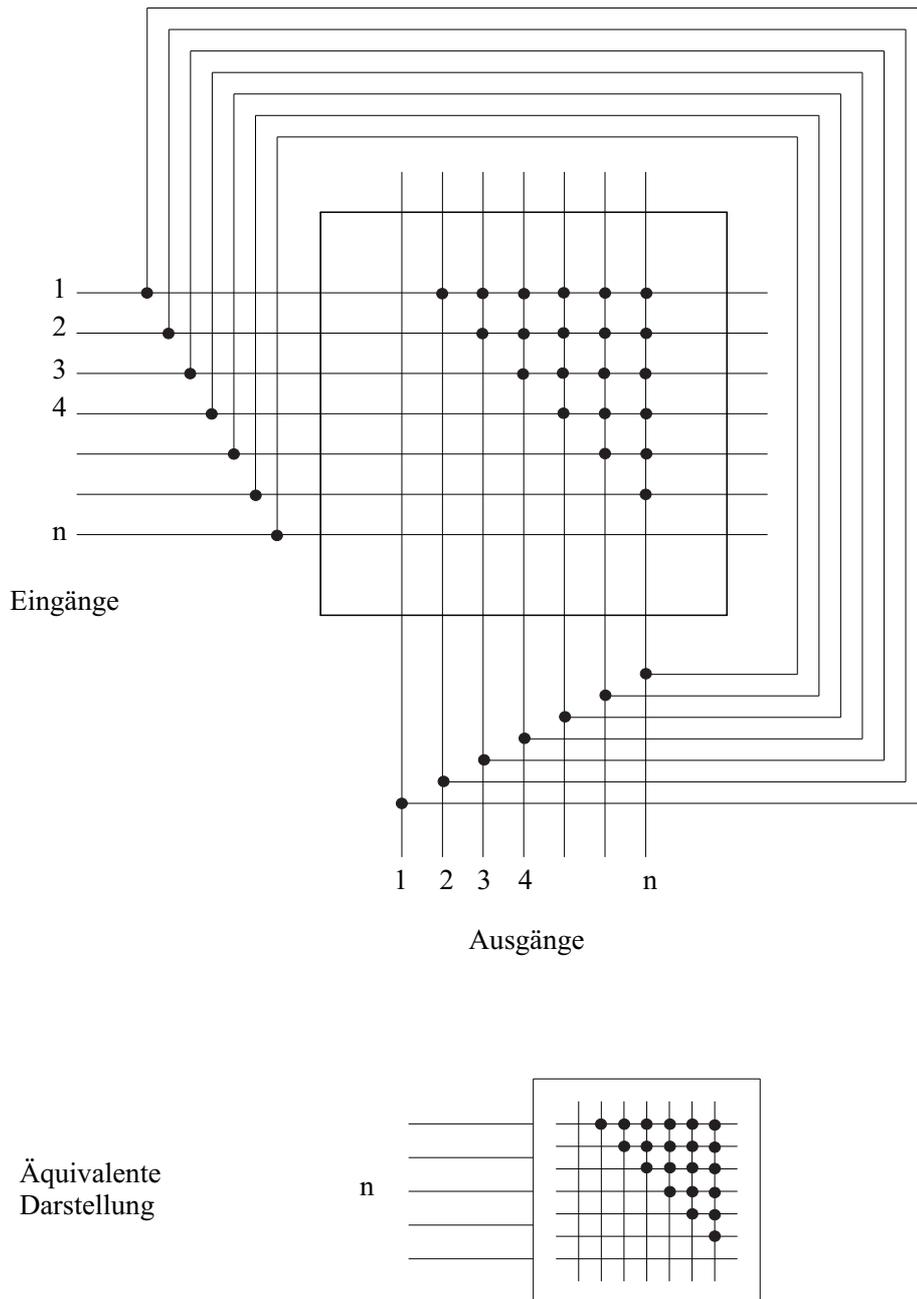


Abb. 11.1-5: Eine blockierungsfreie Koppelanordnung mit $n \cdot \frac{n-1}{2}$ Koppelpunkten und n Ein- und Ausgängen

Da wir pro Teilnehmerpaar nur eine Verbindung durch die Koppelmatrix und zwischen dem Eingang und dem Ausgang eines Teilnehmers gar keine Verbindung benötigen, können wir die Anzahl der Koppelpunkte auf $n \cdot \frac{(n-1)}{2}$ reduzieren (Abb. 11.1-5). Mit dieser Koppelanordnung können bei n Teilnehmern maximal $\frac{n}{2}$ Verbindungen bei n gerade (bzw. $\frac{(n-1)}{2}$ Verbindungen bei n ungerade) gleichzeitig geführt werden, wobei pro Verbindung genau ein Koppelpunkt verwendet wird. Die Koppelanordnung hat die Eigenschaft, dass stets, wenn ein Teilnehmer A eine Verbindung mit einem Teilnehmer B wünscht und der Teilnehmer B frei ist (d. h. nicht bereits an einer anderen Verbindung beteiligt ist), die Verbindung auch durchgeschaltet werden kann. Man nennt eine Koppelanordnung mit dieser Eigenschaft **blockierungsfrei**. Verzichtet man auf die Blockierungsfreiheit, so kommt man mit

Blockierungsfreiheit

wesentlich weniger Koppelpunkten aus, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden. Dies ist besonders wichtig bei einer großen Anzahl von Teilnehmern, denn die Anzahl der Koppelpunkte wächst in unserem Beispiel quadratisch mit der Teilnehmerzahl. Bei 1000 Teilnehmern benötigt man bei der Anordnung in Abb. 11.1-5 ca. $5 \cdot 10^5$ Koppelpunkte, d. h. etwa 500 Koppelpunkte pro Teilnehmer!

Wie wir in Kapitel 10 bereits gesehen haben, wird bei der Multiplexbildung von Signalen nicht die ganze Leitung für eine Verbindung zur Verfügung gestellt, sondern es werden hierfür lediglich Teilkanäle verwendet. Die Verfahren zur Durchschaltung solcher Teilkanäle werden wir im nächsten Abschnitt kennenlernen.

Durchschaltevermittlung Von der **Durchschaltevermittlung** spricht man, wenn Leitungen oder Zeitmultiplexkanäle in Koppelanordnungen durchgeschaltet werden, um eine Verbindung zwischen den Teilnehmern zu verwirklichen. Man unterscheidet beim Vermittlungsvorgang zwischen drei Phasen, wie wir sie im Abschnitt 1.2 kennengelernt haben. In der **Verbindungsaufbauphase** wird der Verbindungswunsch eines Teilnehmers *A*, mit dem Teilnehmer *B* zu kommunizieren, der Vermittlungszentrale angezeigt. Diese zeigt den Wunsch dem Teilnehmer *B* an. Bei einer Annahme des Wunsches durch den Teilnehmer *B* wird die **Verbindungsphase** eingeleitet, in der zwischen den Teilnehmern Nutzinformationen über die durchgeschaltete Verbindung ausgetauscht werden. Gewöhnlich können beide Teilnehmer die **Verbindungsabbauphase** durch entsprechende Signale an die Vermittlungssteuerung einleiten. Diese leitet die **Ruhephase** ein, indem sie die Verbindung durch die Koppelanordnung wieder trennt.

Bei einer genauen Betrachtung der Kommunikationsvorgänge bei der Durchschaltevermittlung erkennen wir, dass einerseits Nutzinformationen zwischen den Teilnehmern ausgetauscht werden, andererseits auch Steuerinformationen zwischen den Teilnehmern und der Vermittlungsstelle, gelegentlich auch zwischen den Teilnehmern selbst, ausgetauscht werden. Es ist nicht zwingend erforderlich, dass Nutzinformationen und Steuerinformationen über dieselben Leitungen oder dieselben Teilkanäle übertragen werden. Je nach Aufgabenstellung und Zweckmäßigkeit kann das ISO-Modell, wie wir es im Kapitel 1 kennengelernt haben, insgesamt auf die Kommunikation zwischen den Teilnehmern (d. h. einschließlich der Steuerungsaufgaben) oder aber auch getrennt für die Kommunikation zwischen den Teilnehmern und zwischen den Teilnehmern und der Vermittlungsstelle angewandt werden. Die letztere Betrachtungsweise ist häufig hilfreich, wenn für Nutz- und Steuerinformationen getrennte Kanäle verwendet werden. Bisher haben wir angenommen, dass alle Teilnehmer an derselben Vermittlungsstelle angeschaltet sind. Meist sind die Teilnehmer jedoch an verschiedenen Vermittlungsstellen angeschaltet, die wiederum auch miteinander verbunden sind. Bei der Durchschaltevermittlung in solchen Netzen ist der Vermittlungsvorgang ähnlich wie bisher beschrieben. Die Verbindungsaufbau- und Verbindungsabbauphasen sind etwas länger. Steuerinformationen müssen nun zwischen verschiedenen Vermittlungsstellen ausgetauscht werden, und die Durchschaltevermittlung wird nach festgelegten Verfahren über mehrere Vermittlungsstellen aufgebaut. Wesentliches Merkmal der Durchschaltevermittlung ist, dass zwischen den Teilnehmern ein physikalischer Weg (über Leitungen bzw. Zeitmulti-

plexkanäle) während der Verbindungsphase über alle beteiligten Vermittlungsstellen vorhanden ist.

Im Gegensatz zur Durchschaltvermittlung spricht man von der **Speichervermittlung**, **Speichervermittlung** wenn zwischen den Teilnehmern einer Verbindung kein durchgeschalteter Weg (aus Leitungen bzw. Zeitmultiplexkanälen) vorhanden ist, sondern die Nachrichten zwischengespeichert werden. Bei der Speichervermittlung im engeren Sinne (**Sendungsvermittlung**, **Message Switching** oder *Store and Forward*) wird die ganze von einem Teilnehmer *A* zu einem Teilnehmer *B* zu übermittelnde Nachricht mit Adressen und Steuerinformationen versehen, in der Vermittlungsanlage zwischengespeichert und gegebenenfalls über mehrere Zwischenspeicherungen in verschiedenen Vermittlungsstellen an den Empfänger ausgehändigt.

**Sendungsvermittlung,
Message Switching**

Bei der **Paketvermittlung** wird die vom Teilnehmer *A* zum Teilnehmer *B* zu übermittelnde Nachricht in Teilnachrichten (Pakete) zerlegt und wie beim *Message Switching* - Verfahren in der Vermittlungsanlage zwischengespeichert und gegebenenfalls über mehrere Zwischenspeicherungen in verschiedenen Vermittlungsstellen bis zum Empfänger geleitet. Man unterscheidet bei der Paketvermittlung zwischen zwei Verfahren. Bei dem Datagrammverfahren werden die einzelnen Pakete (**Datagramme**) soweit mit Steuerinformationen versehen, dass sie unabhängig voneinander durch das Netz bis zum Empfänger geleitet werden können und dort wieder zur ursprünglichen Nachricht zusammengesetzt werden können. Es kann bei Datagrammen vorkommen, dass sie über unterschiedliche Wege in beliebiger Reihenfolge beim Empfänger ankommen und dort wieder richtig zusammengesetzt werden müssen. Es handelt sich hierbei um eine verbindungslose Übermittlung (siehe Abschnitt 1.2). Bei dem virtuellen Verbindungsverfahren wird dagegen zunächst über Steuerinformationen eine Route (**virtuelle Verbindung**) durch die Vermittlung bzw. das Netz festgelegt. Alle Pakete werden über diese Route in der richtigen Reihenfolge mit Zwischenspeicherungen zum Teilnehmer *B* geleitet. Es handelt sich hierbei um eine verbindungsorientierte Übermittlung (siehe Abschnitt 1.2.), und man unterscheidet, wie auch bei der Durchschaltvermittlung, zwischen den Verbindungsaufbau-, Verbindungs- und Verbindungsabbauphasen. Die Festlegung der Route bedeutet nicht, dass eine Verbindung durchgeschaltet wird, sondern lediglich, dass der Weg, den jedes Paket in der Verbindungsphase durchläuft, festgelegt wird. Wir werden weitere Details über die Paketvermittlung im Abschnitt 11.3 kennenlernen.

Paketvermittlung

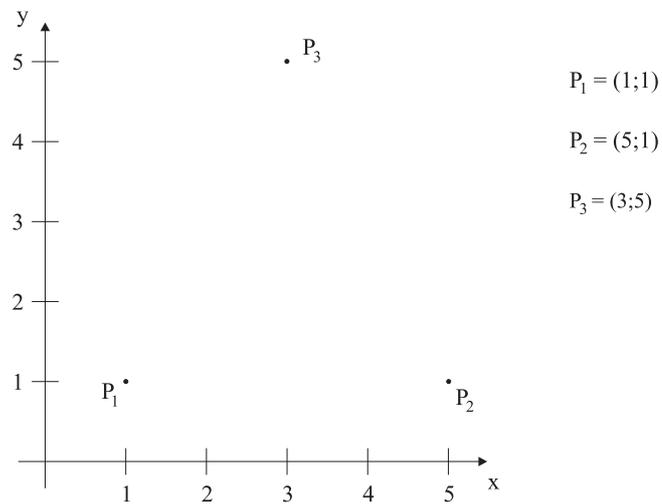
Datagramme

virtuelle Verbindung

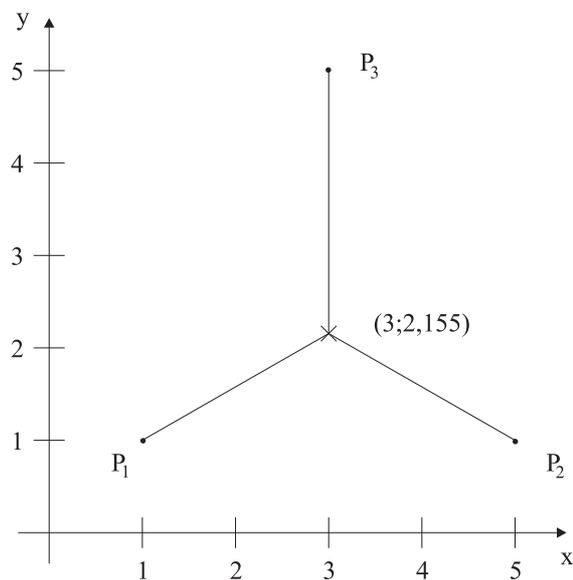
Selbsttestaufgabe 11.1-1:

Für drei Teilnehmer wird ein zentraler Vermittlungsknoten geplant. Planungsziel ist, den Vermittlungsknoten dorthin zu setzen, wo die Anschlussleitungen insgesamt minimal werden.

a. Bestimmen Sie in dem folgenden Lageplan, bei dem näherungsweise davon ausgegangen wird, dass sich alle Teilnehmer auf einer ebenen Fläche befinden, diesen Ort.



b. Ist bei der gewählten Anordnung die Leitungslänge für jede Verbindung zwischen zwei Teilnehmern minimal?



11.2 Durchschaltevermittlung

Im Abschnitt 11.1 haben wir bereits Koppelpunkte, Koppelreihen und Koppelmatrizen zum Durchschalten von Verbindungen kennengelernt. Wir betrachten nun ein Zeitmultiplexsignal, wie wir es im Kapitel 10 kennen gelernt haben, das auf den Eingang eines Koppelpunktes gelegt wird. Durch periodisches Schalten des Koppelpunktes können wir wahlweise die einzelnen Signale während der Dauer ihrer Zeitschlitze durchschalten. Wir verwenden auf diese Weise den Koppelpunkt mehrfach. Besteht unser Multiplexsignal aus r einzelnen Signalen, so entspricht der im Zeitmultiplexverfahren genutzte Koppelpunkt r einfachen Koppelpunkten insofern, dass er r Signale schalten kann (Abb. 11.2-1).

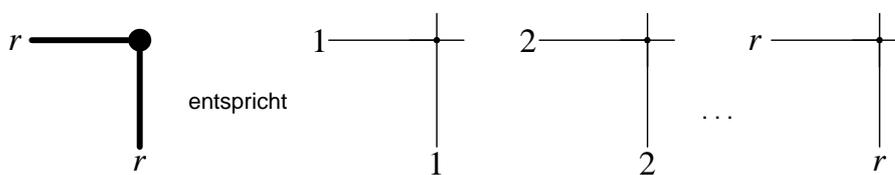


Abb. 11.2-1: Koppelpunkt für eine Zeitmultiplexleitung mit r Signalen (entspricht r Koppelpunkten)

Bauen wir mit solchen in Zeitmultiplexverfahren genutzten Koppelpunkten eine $i \times k$ -Matrix auf, und sind alle i ankommenden Zeitmultiplexsignale synchron und haben jeweils r Zeitlagen, so weist diese als **Raumkoppelfeld** bezeichnete Koppelanordnung folgende Eigenschaft auf. Zu jedem Zeitpunkt können wir die an den i Eingängen vorliegenden Signale wahlweise auf die k Ausgänge schalten. Mit dieser Koppelanordnung können wir Signale, die in einer bestimmten Zeitlage an den Eingängen liegen, in dieselbe Zeitlage an den Ausgängen schalten - ein Wechsel der Zeitlage ist nicht möglich. Eine so aufgebaute Koppelmatrix, die im Zeitmultiplexverfahren genutzt wird, entspricht r einfachen Koppelmatrizen, wobei r die Anzahl der Signale pro Zeitmultiplexsignal ist (Abb. 11.2-2).

Raumkoppelfeld

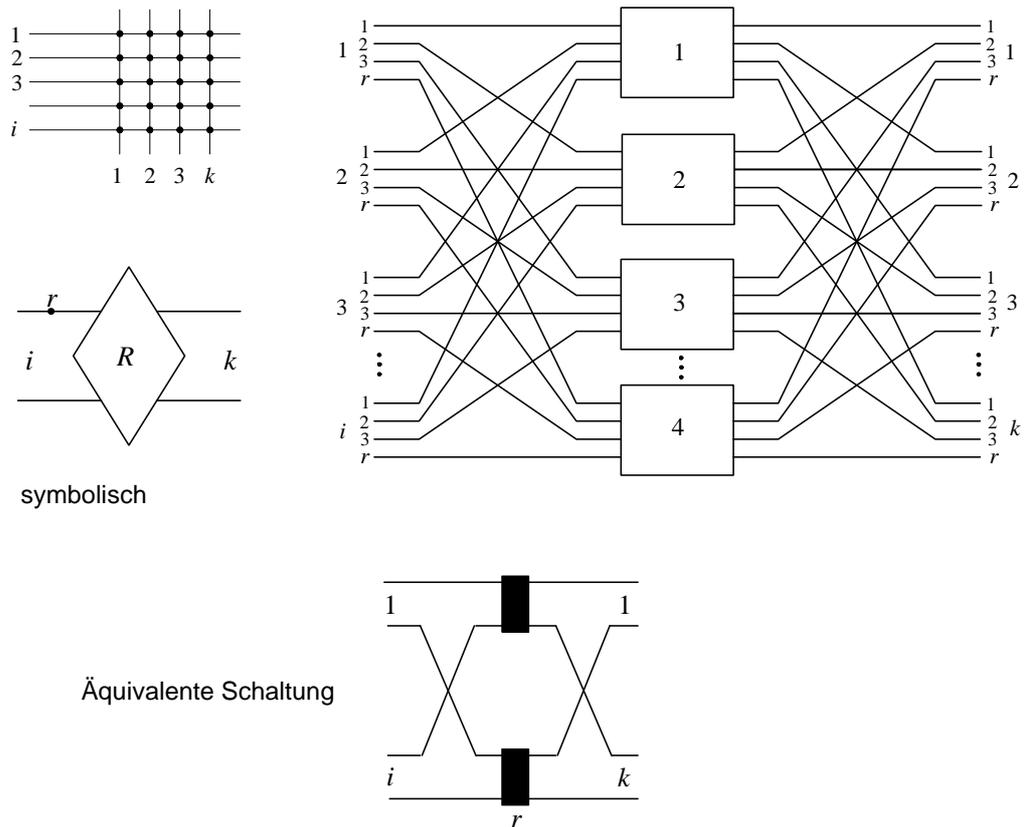


Abb. 11.2-2: Koppelmatrix (Raumstufe) aus Zeitmultiplexleitungen mit r Signalen (entspricht r Koppelmatrizen)

Es wird hier deutlich, welche Kostenvorteile die Zeitmultiplextechnik besitzt. Sie erfordert allerdings, dass schnelle Schaltmittel verfügbar sind. Bei PCM-30-Zeitmultiplexbildung müssen die Zeitschlitze periodisch für die Dauer von weniger als $3,9\mu\text{s}$ geschaltet werden, was heute kein Problem bereitet. Tatsächlich werden häufig Raumstufen mit 4×4 , 8×8 und 16×16 Ein-/Ausgängen mit jeweils 32 bis 128 Kanälen je 64 kbit/s verwendet.

Die im Kapitel 10, Abb. 10.1-3, betrachtete Anordnung für die Multiplexbildung kann leicht zur Durchschaltung von Zeitlagen erweitert werden, indem am Ausgang (alternativ am Eingang) eine Speicherung der digitalen Signale vorgenommen und ein wahlfreier Zugriff ermöglicht wird (Abb. 11.2-3). Die am Ausgang ankommenden Signale werden für die Dauer eines Pulsrahmens gespeichert und im nächsten Rahmen in der gewünschten Reihenfolge herausgelesen. Hierdurch ist es möglich, Eingangssignale aus einer beliebigen Zeitlage in die gewünschte Zeitlage des Ausgangsmultiplexsignals durchzuschalten. Diese Anordnung entspricht deshalb einer $r \times r$ -Matrix aus einfachen Koppelpunkten, wenn die Zeitmultiplexsignale jeweils aus r einzelnen Signalen zusammengesetzt sind. Betrachtet man Abb. 11.2-3 genauer, so stellt man fest, dass die Multiplexbildung am Eingang und am Ausgang durch die Speicherung zeitlich entkoppelt wird. Dies ermöglicht z. B., dass solange die Rahmendauer des Eingangs- und des Ausgangsmultiplexsignals übereinstimmen, das Ausgangsmultiplexsignal eine andere Anzahl von Signalen erfasst als das Eingangsmultiplexsignal. Die Anordnung entspricht einer $r_1 \times r_2$ -Koppelmatrix, wenn r_1 die Anzahl der Zeitschlitze im Eingangsmultiplexsignal und r_2 die Anzahl

der Zeitschlitz im Ausgangsmultiplexsignal jeweils für die gleiche Pulsrahmendauer ist. Eine solche Anordnung bezeichnet man als ein **Zeitkoppelfeld**.

Zeitkoppelfeld

Gewöhnlich werden digitale Koppelanordnungen aus einer Zusammenschaltung von mehreren Raum- und Zeitkoppelfeldern aufgebaut, wobei die einzelnen Koppelfelder auch als Koppelstufen bezeichnet werden. Häufig auftretende Strukturen sind die Raum-Zeit (R-Z), Zeit-Raum (Z-R), Raum-Zeit-Raum (R-Z-R) und Zeit-Raum-Zeit (Z-R-Z)-Koppelanordnungen. Sie sind in Abb. 11.2-4 mit ihren symbolischen Darstellungen und äquivalenten Schaltungen angegeben.

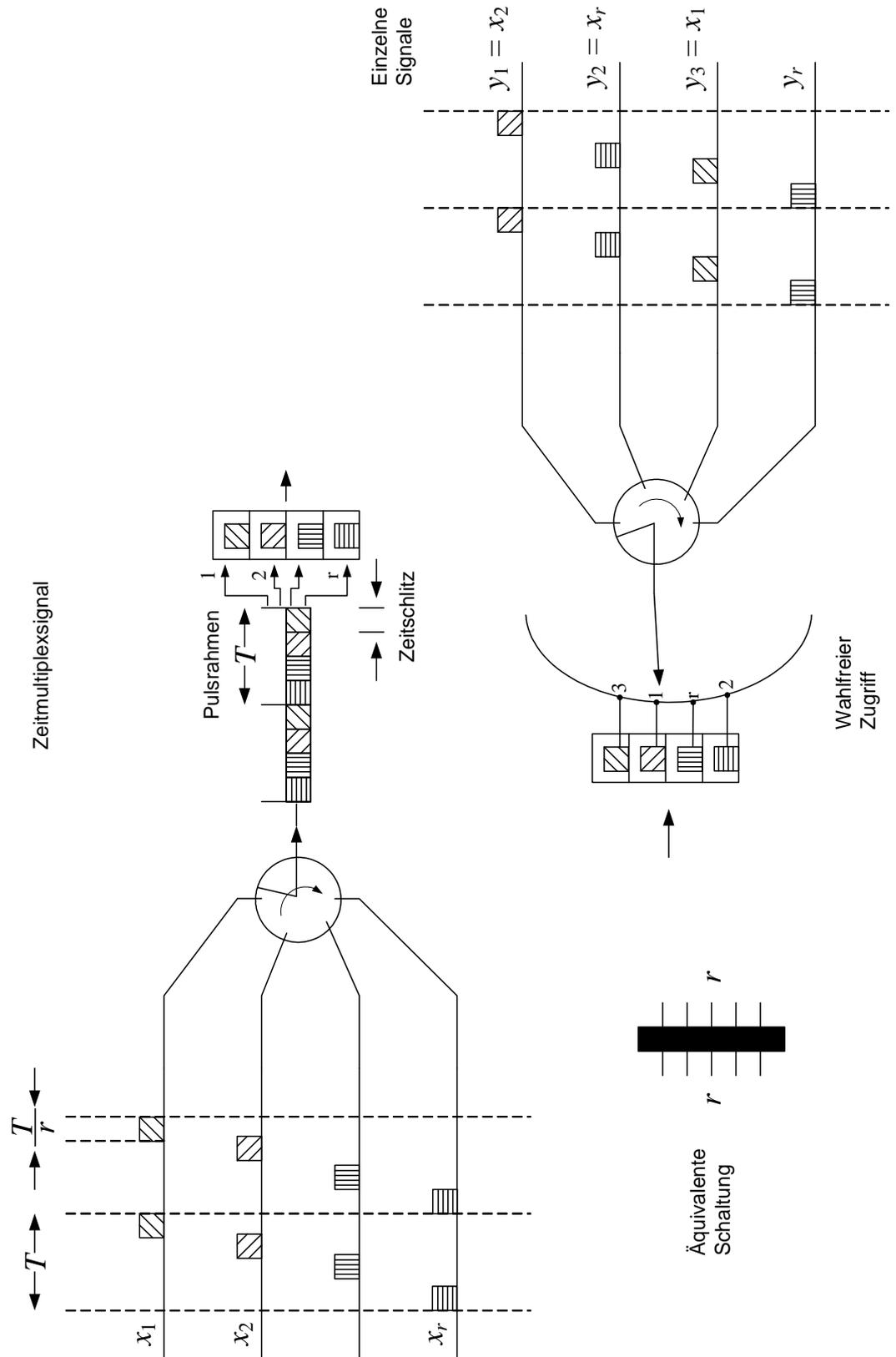


Abb. 11.2-3: Erweiterung der Zeitmultiplexbildung zum Zeitkoppelfeld durch Speicherung und wahlfreien Zugriff

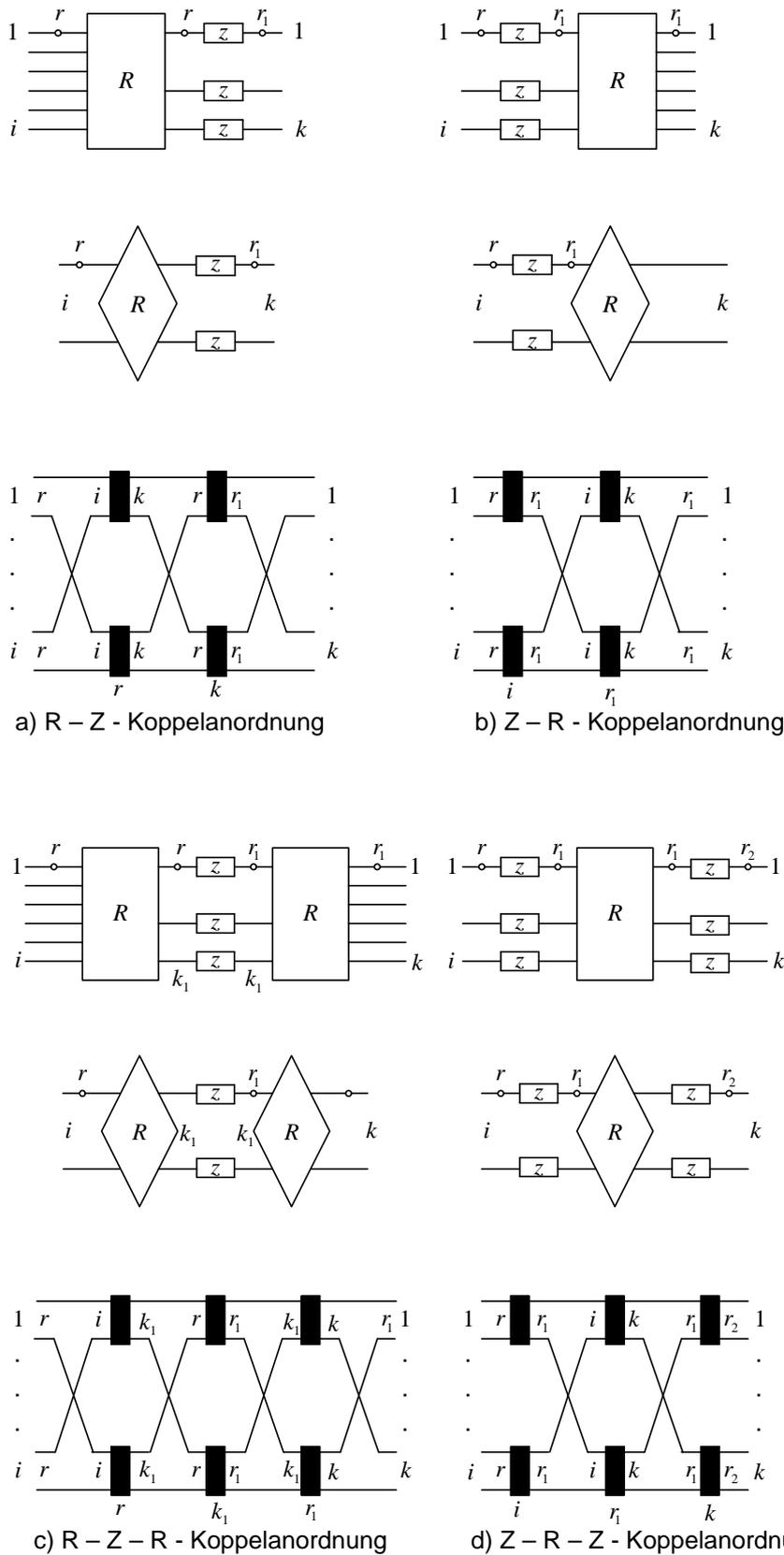


Abb. 11.2-4: Häufig verwendete Strukturen für Koppelanordnungen und ihre äquivalenten Darstellungen

In Abb. 11.2-5 ist die Durchschaltung einer Verbindung zwischen dem zweiten Teilnehmer des ersten PCM-30-Systems und dem 22. Teilnehmer des zweiten PCM-30-Systems in einer **Z-R-Koppelanordnung** dargestellt, wobei es sich um eine sym-

Z-R-Koppelanordnung

metrische Duplexverbindung handelt. In der Zeitstufe des ersten Systems wird der Inhalt des Kanals 2 in den Kanal 22 geschrieben, während in der Zeitstufe des zweiten Systems der Inhalt des 22. Kanals in den Kanal 2 geschrieben wird. Die hierbei auftretende Zeitverzögerung kann maximal einen Zeitrahmen, d. h. $125\mu s$ betragen. In der Raumstufe wird der 22. Zeitschlitz des ersten Systems auf den 22. Zeitschlitz des zweiten Systems und der 2. Zeitschlitz des zweiten Systems auf den 2. Zeitschlitz des ersten Systems geschaltet. Wollte man nun außerdem den 18. Teilnehmer des zweiten Systems mit dem 2. Teilnehmer desselben Systems verbinden, wäre das in der Zeitstufe der Z-R-Koppelanordnung nicht mehr möglich. Die Anordnung ist also nicht blockierungsfrei.

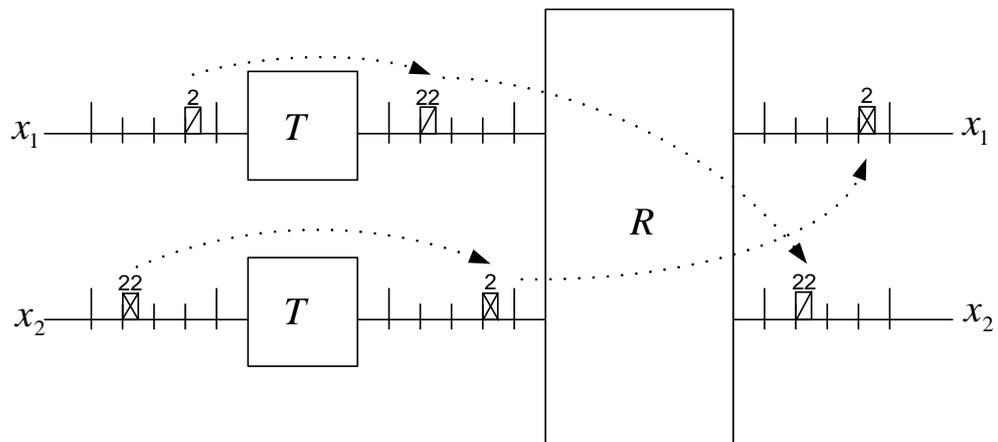


Abb. 11.2-5: Durchschaltung einer Verbindung $2x_1 - 22x_2$ im Z-R-Koppelfeld

Z-R-Z-Koppelanordnung

In Abb. 11.2-6 ist die Anordnung um eine Zeitstufe erweitert, um eine **Z-R-Z-Koppelanordnung** zu ergeben. Eine mögliche Durchschaltung für die beiden gewünschten Verbindungen ist in Abb. 11.2-6 dargestellt. Während es in der Z-R-Stufe genau eine Möglichkeit für eine Verbindung gibt, hat man in der Z-R-Z-Struktur mehrere Möglichkeiten, eine Verbindung durchzuschalten - anstatt den Zeitschlitz 24 für die Durchschaltung in der Raumstufe hätte man z. B. auch den Zeitschlitz 20 nehmen können.

Für Zeitkoppelstufen und Raumkoppelstufen können stets äquivalente, einfache Raumkoppelanordnungen angegeben werden. Für die Analyse von Verkehrseigenschaften von Zeitmultiplexkoppelanordnungen ist es deshalb hinreichend, die entsprechenden äquivalenten Raumkoppelanordnungen zu betrachten. Wir werden dies im Folgenden tun.

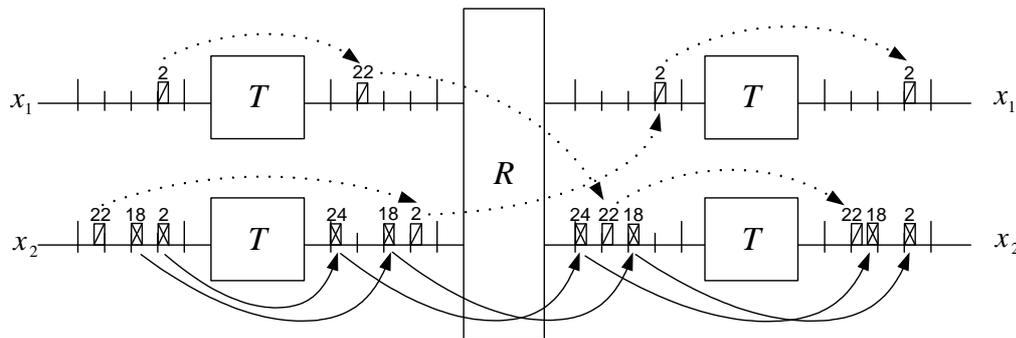


Abb. 11.2-6: Durchschaltung zweier Verbindungen $2x_1 - 22x_2$ und $18x_2 - 2x_2$ im Z-R-Z-Koppelfeld

Die **Komplexität einer Koppelanordnung** wird häufig an der Anzahl ihrer Koppelpunkte gemessen. Für Koppelanordnungen, die aus Zeit- und Raumkoppelstufen aufgebaut sind, hat man als Aufwand einerseits die Koppelpunkte in der Raumstufe und die Speicherung der Inhalte der Zeitschlitze in der Zeitstufe. Andererseits hat man aber als Aufwand auch die Realisierung des wahlfreien Zugriffs, die mit einer Speicherung der Adressen der Zeitschlitze (in der Reihenfolge, in der sie je nach Realisierung der Zeitstufe ein- bzw. ausgelesen werden) verbunden ist. Im Zuge des Fortschritts der Mikroelektronik ist es möglich, immer mehr Koppelpunkte pro Halbleiterbauelement zu realisieren, so dass die Anzahl der Koppelpunkte in einer Koppelanordnung als ein Maß für den Aufwand an Bedeutung verliert. Die physikalischen Abmessungen der Anschlüsse, deren Funktionsfähigkeit bzw. deren richtige Anschaltung setzen der Realisierbarkeit eine Grenze. Da die Zeitmultiplexbildung auch die Anzahl der erforderlichen Anschlüsse herabsetzt, weil diese auch im Zeitvielfach genutzt werden, ist sie in dieser Situation besonders günstig. Die Grenze der Realisierbarkeit von Zeitkoppelstufen wird durch die Zeit, die für das Ein- und Auslesen der Inhalte der Zeitschlitze erforderlich ist (d. h. von der Speicherzugriffszeit), bestimmt. Große Koppelanordnungen werden auch deshalb aus mehreren Koppelstufen zusammengesetzt. Da pro Zeitstufe ein maximaler Verzögerung bis zu der Rahmendauer des Multiplexsignals auftreten kann, muss bei mehrstufigen Anordnungen darauf geachtet werden, dass pro Verbindung die maximal zulässige Verzögerung nicht überschritten wird. Als typisches Beispiel einer mehrstufigen Koppelanordnung sei die für das System EWSD (Elektronisches Wählsystem Digital) von Siemens realisierte Z-R-R-R-Z-Koppelanordnung für 100.000 Teilnehmeranschlüsse genannt.

Komplexität einer Koppelanordnung

Beispiel 11.2-1:

Die Rahmendauer des Multiplexsignals einer Zeitstufe beträgt $125\mu s$. Pro Zeitschlitze wird ein Lese- und ein Schreibvorgang durchgeführt. Beträgt die Speicherzugriffszeit $500 ns$ so können

$$n = \frac{125\mu s}{2 \times 500, ns} = 125$$

Zeitschlitze pro Rahmen implementiert werden. Somit kann die Zeitstufe maximal 125 Simplex- oder 62 Duplexverbindungen durchschalten.

Kann die Speicherzugriffszeit auf 50 ns herabgesetzt werden, so können 1250 Simplexverbindungen durchgeschaltet werden.

Beispiel 11.2-2:

Im Folgenden betrachten wir den Realisierungsaufwand für verschiedene Koppelmatrizen mit je 128 Ein- und Ausgängen bzw. je 4 PCM-30-Ein- und Ausgängen.

Eine Koppelmatrix mit 128 Ein- und 128 Ausgängen hat $128 \times 128 = 16384$ Koppelpunkte.

Eine dreistufige Raumkoppelanordnung, die entsprechend dem Ersatzschaltbild der R-Z-R-Koppelanordnung (Abb. 11.2-4c mit $r = r_1 = 32$; $i = k = k_1 = 4$) aufgebaut ist, hat $32 \times 4 \times 4 + 32 \times 32 \times 4 + 4 \times 4 \times 32 = 5120$ Koppelpunkte.

Eine dreistufige Raumkoppelanordnung, die entsprechend dem Ersatzschaltbild der Z-R-Z-Koppelanordnung (Abb. 11.2-4d mit $r = r_1 = 32$; $i = k = 4$) aufgebaut ist, hat $32 \times 32 \times 4 + 4 \times 4 \times 32 + 32 \times 32 \times 4 = 8704$ Koppelpunkte.

Eine R-Z-R-Koppelanordnung mit 4 PCM-30-Ein- und Ausgängen hat in jeder Raumstufe $4 \times 4 = 16$ Koppelpunkte - insgesamt also 32 Koppelpunkte, die im Zeitmultiplex genutzt werden. Da jede Raumstufe zyklisch geschaltet werden muss, legt man für die Durchschaltung je Raumstufe eine Schalttabelle an, für deren Speicherung $32 \times 4 \times \log_2 4 = 256$ Bit (RAM) erforderlich sind. In jedem Zeitkoppelfeld benötigt man 32×8 Bit für die Speicherung der Nutzinformation und $32 \times \log_2 32$ Bit für die Speicherung der Adressen für die Zeitschlitzzuordnung. Für die Zeitstufe sind also $(4 \times 32 \times 8 + 4 \times 32 \times 5) = 1664$ Bit RAM erforderlich. Insgesamt haben wir für die Realisierung der R-Z-R-Koppelanordnung einen Aufwand von 32 Koppelpunkten und 2176 Bit RAM-Speicher abgeschätzt. Wird die Realisierung eines Koppelpunktes gleich 100 Bit RAM-Speicher gesetzt, so haben wir für die R-Z-R-Koppelanordnung eine äquivalente Aufwendung von 54 Koppelpunkten.

Eine Abschätzung für den Aufwand der Z-R-Z-Koppelanordnung ergibt für die Raumstufe 16 Koppelpunkte und 256 Bit RAM-Speicher, während für die Zeitstufe jeweils 1664 Bit RAM erforderlich sind - insgesamt 3584 Bit RAM. Der äquivalente Koppelfeldaufwand beläuft sich auf 52 Koppelpunkte.

Wir haben in unserer Betrachtung den Aufwand für die eigentliche Steuerung nicht berücksichtigt, dieser ist für die Koppelanordnung, die im Zeitmultiplex betrieben wird, natürlich höher. Auch müssen für die Zeitmultiplexkoppelanordnungen die Signale, falls sie einzeln vorliegen, zu Multiplexsignalen zusammengefasst werden. Desweiteren haben wir die Verkehrseigenschaften der einzelnen Anordnungen bisher nicht betrachtet. Trotzdem kann gesagt werden, dass die Z-

R-Z-Koppelanordnung häufig Anwendung findet und es gerade bei großen Koppelanordnungen stets angestrebt wird, möglichst viele Verbindungen in Zeitstufen durchzuschalten.

Multiplexeinrichtungen, wie wir sie im Kapitel 10 kennengelernt haben, werden auch im Vorfeld von Vermittlungseinrichtungen eingesetzt, um eine Verkehrskonzentration zu erzielen. In Abb. 11.2-7 ist ein PCM-Konzentrator dargestellt. Für die 120 angeschlossenen Teilnehmer stehen lediglich 30 (Duplex) Kanäle zur Verfügung. Die Steuerung des Konzentratoren und somit die Verteilung der verfügbaren Kanäle auf die Anschlüsse nach Bedarf wird je nach Ausführung des Konzentratoren vollständig oder teilweise durch die Steuerung der Vermittlung übernommen. Alle Verbindungen, die geschaltet werden, auch die zwischen zwei Teilnehmern an einem Konzentratoren, führen über die Vermittlung, wie in Abb. 11.2-7 dargestellt. Der Konzentratoren übernimmt somit lediglich die Konzentration des Verkehrs, um eine bessere Auslastung der Multiplexleitung zu erzielen. Man beachte, dass bei einem zeitvielfachen Koppelfeld eine Verkehrsexpansion vor der Einleitung in die Vermittlung nicht erforderlich ist und dies somit zur Kostenersparnis führt.

Konzentrator

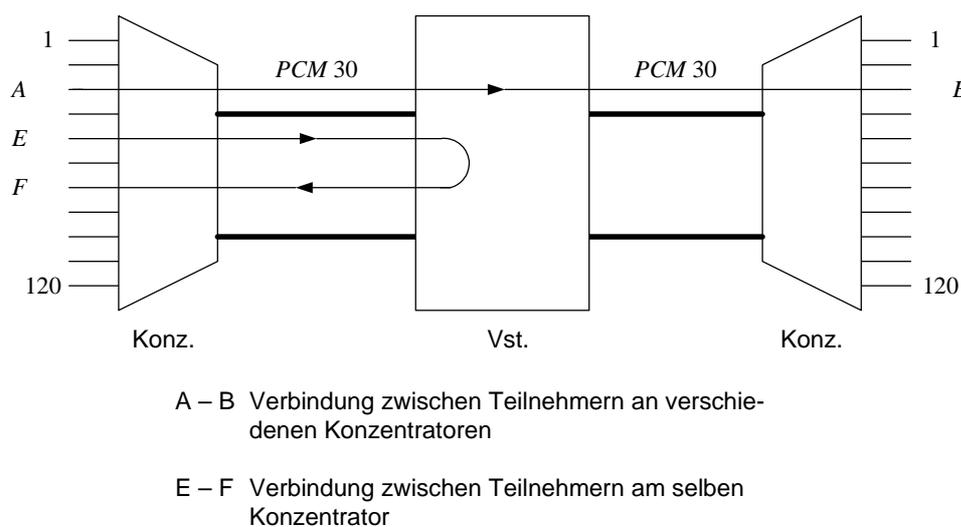
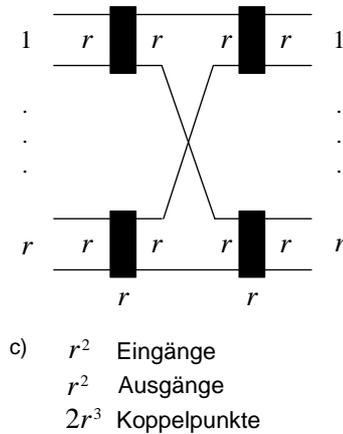
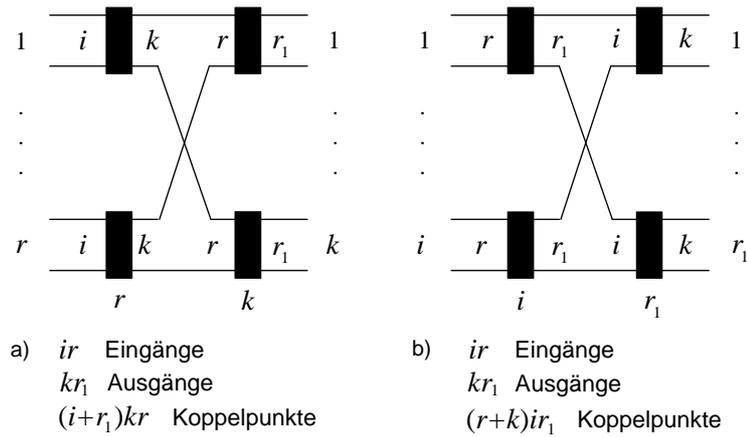


Abb. 11.2-7: PCM-Konzentratoren an einer Zeitvielfachvermittlungsanlage

Wir wollen uns nun mehrstufige Koppelanordnungen näher ansehen. Zunächst betrachten wir die **zweistufige Koppelanordnungen** von Abb. 11.2-4a und b. Solche Koppelanordnungen werden im Vorfeld von Vermittlungen angewandt. So stellt z. B. die Anordnung nach Abb. 11.2-4b für $i = 4$, $r = 32$ die Eingangsstufe für 4 PCM-30-Leitungen dar. Die beiden Ersatzschaltbilder von Abb. 11.2-4a und b können geringfügig vereinfacht werden, wenn man die Anschlüsse umgruppiert. Man erhält dann die Ersatzschaltbilder von Abb. 11.2-8a und b.

zweistufige Koppelanordnungen



- a) R – Z - Koppelanordnung nach Umgruppierung
- b) Z – R - Koppelanordnung nach Umgruppierung
- c) Symmetrische Koppelanordnung (Sonderfall von a) oder b)

Abb. 11.2-8: Zweistufige Koppelanordnungen

In Abb. 11.2-8c ist der Sonderfall einer zweistufigen Koppelanordnung mit je r^2 Ein- und Ausgängen dargestellt, die aus quadratischen $r \times r$ Matrizen aufgebaut ist. Obwohl die einzelnen Koppelmatrizen für sich betrachtet blockierungsfrei sind, ist es die aus ihnen aufgebaute Koppelanordnung nicht. Von jeder der r Matrizen der ersten Stufe führt genau ein Weg zu jeder der r Matrizen der zweiten Stufe. Ist dieser Weg besetzt, kann keine weitere Verbindung zwischen den an den beiden Matrizen angeschlossenen Teilnehmern geschaltet werden. Diese Koppelanordnung hat den wesentlichen Nachteil, dass der Verkehr sich nicht mischt, d. h. über eine Zwischenleitung wird jeweils nur der Verkehr zwischen zwei bestimmten Ein- und Ausgangsgruppen geführt. In Abb. 11.2-9a ist eine symmetrische **dreistufige Koppelanordnung** für je $i \times r$ Ein- und Ausgänge dargestellt. Die erste Stufe ist aus $r(i \times k)$ Koppelmatrizen, die zweite Stufe aus $k(r \times r)$ Koppelmatrizen und die dritte Stufe aus $r(k \times i)$ Koppelmatrizen aufgebaut. Insgesamt hat man somit

$$K = 2rik + r^2k$$

Koppelpunkte. Beim näheren Betrachten der Abb. 11.2-9b, in der die einzelnen Verbindungen detailliert dargestellt sind, stellt man fest, dass zwischen zwei belie-

dreistufige Koppelanordnung

bigen Ein- und Ausgängen es genau k verschiedene Wege durch die Koppelanordnung gibt - nämlich genau einen Weg über jeder der k Koppelmatrizen in der Zwischenstufe. In einer **mehrstufigen Koppelanordnung** kann eine **Blockierung** auftreten, wenn es keinen Weg zwischen einem Ein- und einem Ausgang mehr gibt, obwohl beide frei sind. Liegt dies daran, dass in der Eingangsstufe pro Koppelmatrix mehr Eingänge als Ausgänge vorhanden sind (d. h. $i > k$ in der Eingangsstufe in Abb. 11.2-9), so spricht man von der **Eingangsblockierung**. Sind Teilnehmer an einer Vermittlungsstelle angeschlossen, so wählt man $i > k$ in der Eingangsstufe, um eine **Verkehrskonzentration** zu erreichen, denn Teilnehmer erbringen gewöhnlich einen geringen Verkehr. Durch die Verkehrskonzentration werden die Zwischenstufen der Koppelanordnung besser ausgenutzt. Sind Leitungen an einer Vermittlungsstelle angeschlossen, dann wählt man häufig $i < k$, um eine **Verkehrsexpansion** zu erreichen, denn Leitungen erbringen gewöhnlich einen hohen Verkehr. Durch die Verkehrsexpansion wird ermöglicht, dass es mehr Wege durch die Zwischenstufen der Koppelanordnung gibt und der Verkehr gleichmäßiger aufgeteilt wird bzw. sich besser mischt. Eine Eingangsblockierung kann nur auftreten, wenn eine Verkehrskonzentration vorgenommen wird. Hat man in der Ausgangsstufe mehr Ausgänge als Eingänge (d. h. $i > k$ in der Ausgangsstufe in Abb. 11.2-9), so kann es vorkommen, dass deshalb eine Verbindung durch die Koppelanordnung nicht durchgeschaltet werden kann. Man spricht dann von **Ausgangsblockierung**. Eine Ausgangsblockierung kann nur auftreten, wenn in der Ausgangsstufe eine Verkehrsexpansion vorgenommen wird. Kann für eine Verbindung kein Weg durch das Koppelfeld gefunden werden, obwohl weder eine Eingangs- noch Ausgangsblockierung vorliegt, so spricht man von der **Zwischenleitungsblockierung**. Die Zwischenleitungsblockierung ist häufig von der Strategie der Belegung der einzelnen Wege abhängig. Eine ungeschickte Belegung kann zu einer Zwischenleitungsblockierung führen, obwohl diese vermeidbar wäre.

**Blockierung bei
mehrstufigen
Koppelanordnungen**

Eingangsblockierung

Verkehrskonzentration

Verkehrsexpansion

Ausgangsblockierung

Zwischenleitungsblockierung

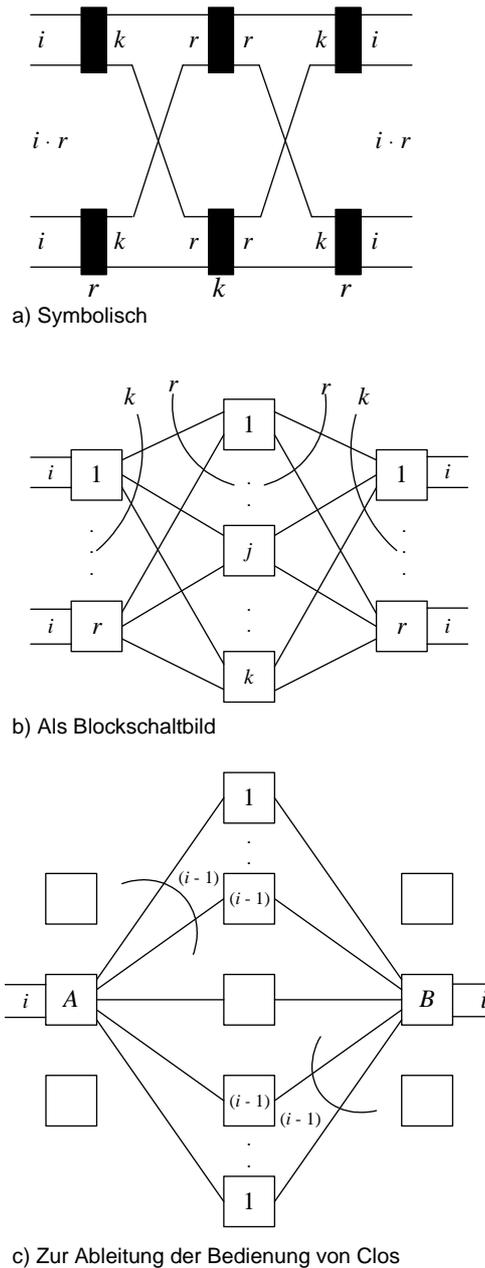


Abb. 11.2-9: Dreistufige Koppelanordnung

Wir betrachten nun eine Koppelmatrix A (Abb. 11.2-9c), von der ein Teilnehmer eine Verbindung mit einem Teilnehmer, der an der Koppelmatrix B angeschlossen ist, aufnehmen möchte. Im ungünstigsten Fall sind alle anderen $(i - 1)$ Eingänge der Koppelmatrix A belegt, und die Verbindungen führen alle zu unterschiedlichen Matrizen in der Zwischenstufe. An der Ausgangsmatrix B liegt der ungünstigste Fall wiederum vor, wenn alle anderen $(i - 1)$ Ausgänge der Koppelmatrix B blockiert sind und alle Verbindungen von unterschiedlichen Matrizen der Zwischenstufe kommen. Hat man nun k Matrizen in der Zwischenstufe mit

$$k = 2(i - 1) + 1 = 2i - 1, \tag{11.2-1}$$

dann bleibt immer ein Weg für die gewünschte Verbindung frei. Gl. 11.2-1 stellt eine hinreichende Bedingung für die Blockierungsfreiheit einer dreistufigen Koppelanordnung. Sie wird als **Clos-Bedingung**, nach ihr entworfene blockierungsfreie Koppelanordnungen als **Clos-Systeme**, bezeichnet.

Clos-Bedingung
Clos-Systeme

Die betrachtete dreistufige Koppelanordnung für je $n = i \times r$ Ein- und Ausgänge hat K Koppelpunkte mit

$$\begin{aligned} K &= 2irk + kr^2 & 11.2-2 \\ &= 2n(2i - 1) + (2i - 1)\left(\frac{n}{i}\right)^2. \end{aligned}$$

Für ein festes n und $i \gg 1$ liegt das Minimum der Gl. 11.2-2 bei $i = \sqrt{\frac{n}{2}}$, d. h. $k = \sqrt{2n} - 1$. Die minimale Anzahl der Koppelpunkte liegt bei

$$K_{opt} = 4n(\sqrt{2n} - 1). \quad 11.2-3$$

Das Ergebnis ist in Abb. 11.2-10 dargestellt. Natürlich ist $\sqrt{\frac{n}{2}}$ meist keine ganze Zahl; da die Kurve im Minimum jedoch flach verläuft, kann hierfür die nächstliegende ganze Zahl genommen werden. Während die Anzahl der Koppelpunkte in einer blockierungsfreien Koppelmatrix quadratisch mit der Anzahl der Anschlüsse n wächst (d. h. $K \sim n^2$), wächst sie bei der dreistufigen optimalen Clos-Anordnung proportional $n^{\frac{3}{2}}$ (s. Gl. 11.2-3).

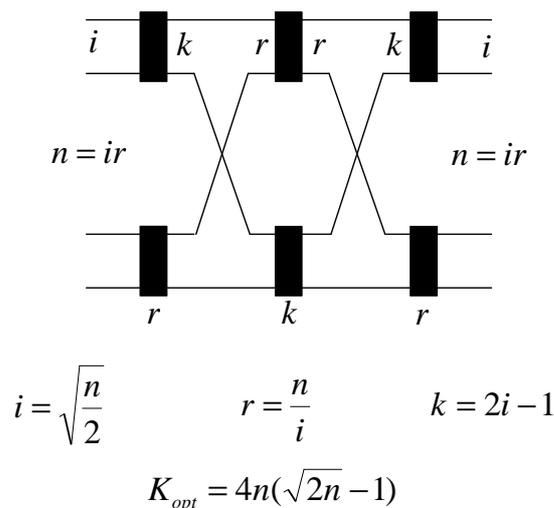


Abb. 11.2-10: Optimale dreistufige Koppelanordnung nach Clos

Das Verfahren von Clos kann rekursiv verwendet werden, um mehrstufige blockierungsfreie Koppelanordnungen zu konstruieren. Hat man eine dreistufige blockierungsfreie Koppelanordnung nach Clos bestimmt und ist die Zwischenstufe groß genug, so kann sie wiederum in eine dreistufige Koppelanordnung nach Clos zerpalten werden, um eine fünfstufige blockierungsfreie Koppelanordnung zu ergeben.

Beispiel 11.2-3:

Wir bestimmen die optimale Anzahl der Koppelpunkte für eine dreistufige blockierungsfreie Koppelanordnung nach Clos, indem wir Gl. 11.2-2 nach i differenzieren und gleich Null setzen:

$$K = 2n(2i - 1) + (2i - 1)\left(\frac{n}{i}\right)^2$$

$$\frac{dK}{di} = 4n + 2\left(\frac{n}{i}\right)^2 + (2i - 1) \cdot n^2(-2) \cdot i^{-3} = 0$$

$$\text{d.h. } 2i^3 = n(i - 1).$$

Für $i \gg 1$ gilt $2i^3 \approx ni$ bzw. $i \approx \sqrt{\frac{n}{2}}$ und $K_{opt} \approx 4n(\sqrt{2n} - 1)$.

In der folgenden Tabelle sind einige Werte für n , n^2 und K_{opt} eingetragen. Wir haben dabei n so gewählt, dass es ein Vielfaches von 32 (d. h. PCM-30-Systemen) ist.

Anzahl der Ein- und Ausgänge n	Erforderliche Koppelpunkte für eine einstufige blockierungsfreie Koppelmatrix n^2	Optimale Anzahl der Koppelpunkte für eine dreistufige Clos-Koppelanordnung $K_{opt} \sim n^{\frac{3}{2}}$
128	$1,6 \cdot 10^4$	$7,6 \cdot 10^3$
512	$2,6 \cdot 10^5$	$6,3 \cdot 10^4$
2048	$4,1 \cdot 10^6$	$5,2 \cdot 10^5$
8192	$6,7 \cdot 10^7$	$4,2 \cdot 10^6$
32768	$1,1 \cdot 10^9$	$3,3 \cdot 10^7$
131072	$1,7 \cdot 10^{10}$	$2,7 \cdot 10^8$

Verbindungsgraph
Lee Graph

Um eine erste Analyse der Blockierungseigenschaften einer Koppelanordnung durchzuführen, wird häufig ein **Verbindungsgraph**, auch **Lee Graph** genannt, verwendet. Er veranschaulicht die Wege zwischen einem Eingang und einem Ausgang der betrachteten Koppelanordnung. Im Verbindungsgraphen werden die Koppelmatrizen, über die mindestens einer der Wege führt, als Knoten, die verwendeten Zwischenleitungen als Kanten dargestellt (Abb. 11.2-11). Meist ist es nicht erforderlich, alle Kombinationen der Ein- und Ausgänge einer Koppelanordnung zu betrachten, denn die Koppelanordnungen werden meist symmetrisch aufgebaut. So braucht man z. B. für die Koppelanordnungen in Abb. 11.2-11 jeweils lediglich einen Verbindungsgraphen zu betrachten.

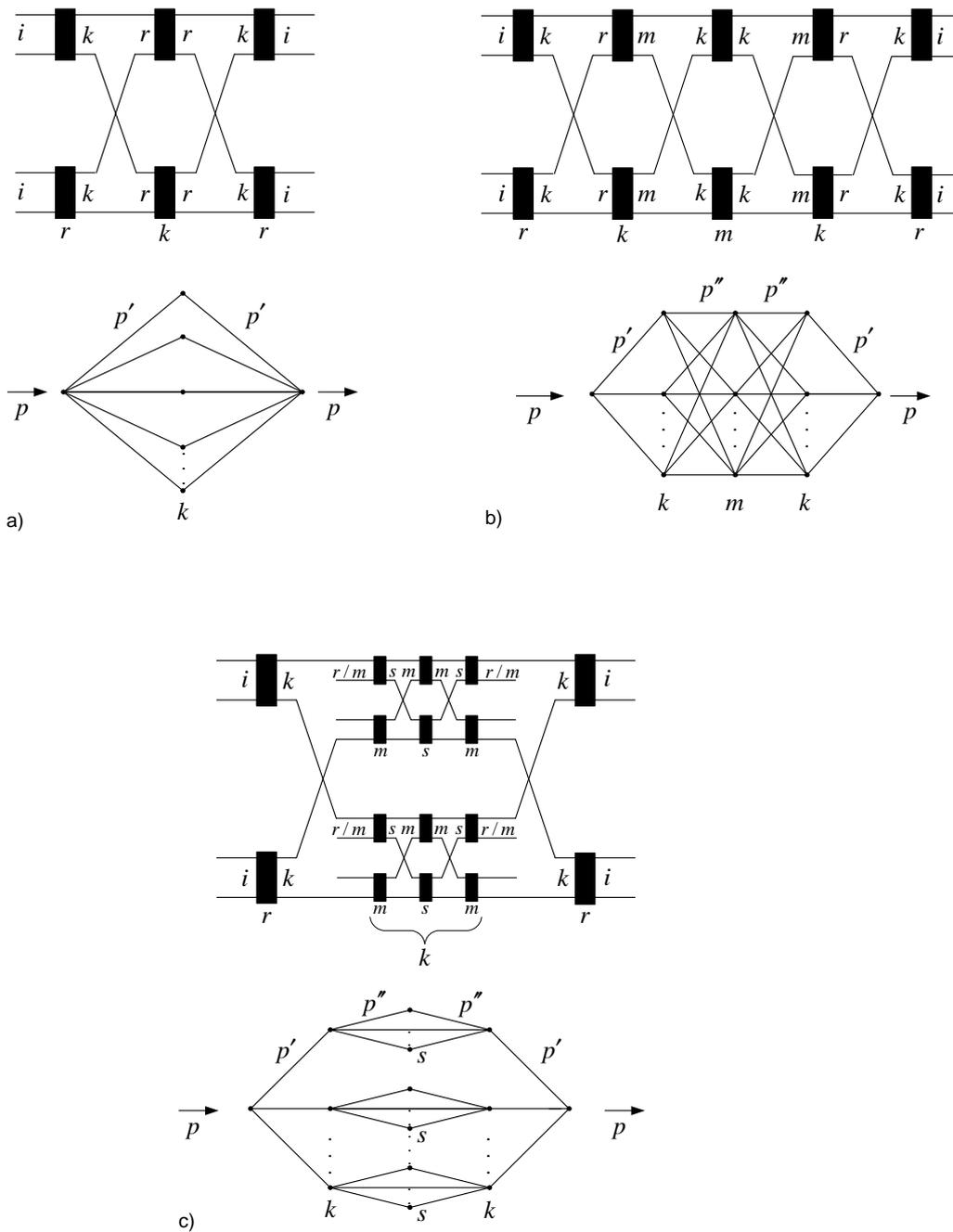


Abb. 11.2-11: Mehrstufige Koppelanordnungen und deren Wegegraphen

Zunächst zeigt der Verbindungsgraph nur die Möglichkeiten, wie Verbindungen zwischen einem Eingang und einem Ausgang durchgeschaltet werden können, auf. Die Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit einer Koppelanordnung ist im Allgemeinen eine schwierige Aufgabe. Unter einigen vereinfachenden Annahmen kann der Verbindungsgraph jedoch verwendet werden, um eine erste Annäherung der Blockierungswahrscheinlichkeit zu erhalten. Wir wollen dies für die Koppelanordnung in Abb. 11.2-11a durchführen.

Wir nehmen zunächst an, dass die Belegungswahrscheinlichkeit der Ein- und Ausgänge homogen (d. h. für alle Anschlüsse gleich) und bekannt ist. Sie sei p . Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Anschluss nicht belegt ist, ist somit $q = 1 - p$. Wir nehmen ferner an, dass die Belegungswahrscheinlichkeiten der einzelnen Kanten

bekannt und unabhängig von den belegten Wegen ist. Die Bestimmung der Belegungswahrscheinlichkeiten der einzelnen Kanten erfordert meist weitere Annahmen oder Symmetrieüberlegungen. In unserem Beispiel setzen wir alle Belegungswahrscheinlichkeiten der Kanten aus Symmetriegründen gleich p' . Ist nun $k > i$, so kann keine Eingangsblockierung und keine Ausgangsblockierung auftreten. In diesem Fall können wir annehmen, dass

$$p' = \frac{p \cdot i}{k} \quad 11.2-4$$

ist, d. h. alle ankommenden Rufe werden gleichmäßig über die k Kanten verteilt. Ist $k < i$, so können Eingangs- und Ausgangsblockierungen auftreten. Berechnungen solcher Blockierungen werden bereits im Kapitel 9 behandelt. Ist jedoch der Teilnehmerverkehr gering, so kann diese Blockierung vernachlässigt werden. Es kann dann angenommen werden, dass alle ankommenden Rufe bedient werden und wieder Gl. 11.2-4 gilt. Sind die Belegungswahrscheinlichkeiten der einzelnen Kanten bekannt, so besteht nun die Aufgabe, die Wahrscheinlichkeit, dass alle Wege belegt sind, auszurechnen. Am einfachsten ist es, wenn, wie in der Koppelanordnung der Abb. 11.2-11a und Abb. 11.2-11c, der Verbindungsgraph aus seriellen, d. h. hintereinander geschalteten und parallelen Kanten besteht. Für diesen Fall können die Blockierungswahrscheinlichkeiten unmittelbar ausgerechnet werden. Manchmal müssen weitere Annahmen über die Unabhängigkeit einzelner Wege gemacht werden. Es ist auch möglich, die Blockierungswahrscheinlichkeiten über Simulationen zu bestimmen. Für den Verbindungsgraphen der Abb. 11.2-11a gilt:

$$\begin{aligned} B &= \text{Wahrscheinlichkeit, dass alle Wege belegt sind} \\ &= (\text{Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiger Weg belegt ist})^k \\ &= (\text{Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Kante in dem Weg belegt ist})^k \\ &= (1 - q'^2)^k \end{aligned}$$

wobei

$$q' = 1 - p'.$$

Blockierungswahrscheinlichkeit

Mit Gl. 11.2-4 erhalten wir für die **Blockierungswahrscheinlichkeit** der dreistufigen Koppelanordnung von Abb. 11.2-11a

$$B = \left(1 - \left(1 - \frac{p \cdot i}{k}\right)^2\right)^k. \quad 11.2-5$$

Nimmt man eine geringfügige Blockierungswahrscheinlichkeit in Kauf, so kann die Anzahl der erforderlichen Koppelpunkte gewöhnlich wesentlich heruntergedrückt werden. Wir wissen, dass Clos-Systeme auch für $p = 1$ blockierungsfrei sind. Setzen wir jedoch $k = 2i - 1$ und $p = 1$ in Gl. 11.2-5 ein, so ist $B \neq 0$. Für $i = 32$ erhalten wir z. B. $B = 2,6 \cdot 10^{-8}$. Diese geringe Abweichung ist auf die Mittelwertbetrachtung mit der Annahme über die gleichmäßige Verteilung der Belegungen über alle Wege zurückzuführen. Tatsächlich bleibt bei Clos-Systemen jedoch stets ein Weg frei.

Die Aufgabe der Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit bei vorgegebenen Belegungswahrscheinlichkeiten der einzelnen Kanten des Verbindungsgraphen ist identisch mit einer anderen Aufgabe, die bei Kommunikationsnetzen gelegentlich auftritt. Hier sind die Knoten Kommunikationssysteme und die Kanten Nachrichtenverbindungen zwischen ihnen. Die Kantenwahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Verbindung ausfällt. Die Aufgabe besteht nun darin, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass zwei Systeme über das Netz nicht mehr kommunizieren können.

Beispiel 11.2-4:

Wir bestimmen nun die Koppellersparnisse, die sich durch eine Annahme von einer Blockierungswahrscheinlichkeit von etwa 0,002 erreichen lassen. Wir nehmen zunächst an, dass es sich um eine Vermittlung handelt, an der Leitungen mit einer hohen Belegungswahrscheinlichkeit von 0,7 angeschlossen sind. Als Vergleich nehmen wir die Werte von Beispiel 11.2-3. In der Eingangsstufe haben wir stets $k > i$ gewählt, um eine Verkehrsexpansion zu erhalten.

n	r	i	k	k'	K_{opt}	K_b	B
128	16	8	15	14	$7,6 \cdot 10^3$	$7,2 \cdot 10^3$	0,0019
512	32	16	31	22	$6,3 \cdot 10^4$	$4,5 \cdot 10^4$	0,0023
2048	64	32	63	37	$5,2 \cdot 10^5$	$3,0 \cdot 10^5$	0,0019
8192	128	64	127	64	$4,2 \cdot 10^6$	$2,1 \cdot 10^6$	0,0024
32768	256	128	255	116	$3,3 \cdot 10^7$	$1,5 \cdot 10^7$	0,0021
131072	512	256	511	215	$2,7 \cdot 10^8$	$1,1 \cdot 10^8$	0,0024

n Anzahl der Anschlüsse

r, i, k Kennwerte der 3-stufigen Clos-Anordnung

k' Anzahl der Koppelmatrizen in der Zwischenstufe bei Zulassung von Blockierung

K_{opt} Optimale Anzahl der Koppelpunkte bei Clos-Anordnung

K_b Anzahl der Koppelpunkte bei Zulassung der Blockierung

B Blockierungswahrscheinlichkeit bei Belegungswahrscheinlichkeit $p = 0,7$

Die Ergebnisse zeigen, dass erhebliche Ersparnisse mit recht geringen Blockierungswahrscheinlichkeiten erzielt werden können. So haben wir bei 8192 Leitungen die Anzahl der Koppelpunkte um die Hälfte auf 2,1 Mio. reduziert, obwohl wir eine recht hohe Belegungswahrscheinlichkeit gewählt haben. Falls es sich um eine Vermittlung mit Teilnehmeranschlüssen handelt, so können wir mit einer geringeren Belegungswahrscheinlichkeit von z. B. 0,1 rechnen. Hier wählen wir bei Zulassung von geringen Blockierungswahrscheinlichkeiten

$k' < i$, um in der Eingangsstufe eine Verkehrskonzentration zu erhalten. Die Ersparnisse fallen jetzt noch drastischer aus.

n	r	i	k	k'	K_{opt}	K_b	B
128	16	8	15	5	$7,6 \cdot 10^3$	$2,5 \cdot 10^3$	0,0022
512	32	16	31	7	$6,3 \cdot 10^4$	$1,4 \cdot 10^4$	0,0018
2048	64	32	63	10	$5,2 \cdot 10^5$	$8,2 \cdot 10^4$	0,0020
8192	128	64	127	15	$4,2 \cdot 10^6$	$4,9 \cdot 10^5$	0,0025
32768	256	128	255	24	$3,3 \cdot 10^7$	$3,1 \cdot 10^6$	0,0028
131072	512	256	511	41	$2,7 \cdot 10^8$	$2,1 \cdot 10^7$	0,0020

- n Anzahl der Anschlüsse
 r, i, k Kennwerte der 3-stufigen Clos-Anordnung
 k' Anzahl der Koppelmatrizen in der Zwischenstufe bei Zulassung von Blockierung
 K_{opt} Optimale Anzahl der Koppelpunkte bei Clos-Anordnung
 K_b Anzahl der Koppelpunkte bei Zulassung der Blockierung
 B Blockierungswahrscheinlichkeit bei Belegungswahrscheinlichkeit $p = 0, 1$

Wir haben die Einführung von mehrstufigen Koppelanordnungen durch die Möglichkeit, große Vermittlungen zu realisieren, und durch die Ersparnisse von Koppelpunkten begründet. Die Ersparnis von Koppelpunkten ist auf die Mehrfachnutzung einzelner Koppelpunkte für verschiedene Verbindungen und auf die Zulassung von geringen Blockierungswahrscheinlichkeiten zurückzuführen. Da es in mehrstufigen Koppelanordnungen gewöhnlich mehrere Wege zwischen einem Eingang und einem Ausgang gibt, sind sie gegenüber Ausfällen einzelner Komponenten weniger anfällig, d. h. sie haben eine bessere Ausfallsicherheit. Durch ihren modularen Aufbau sind sie auch modular erweiterungsfähig. Dies ist besonders wichtig, denn die Größe einer Vermittlung verändert sich mit der Zeit. Bei der Betrachtung der Blockierungseigenschaften haben wir die Blockierungswahrscheinlichkeit hervorgehoben und gefordert, dass diese niedrig bleibt. Im Einzelfall kann die berechnete Blockierungswahrscheinlichkeit sehr niedrig, die tatsächliche aber inakzeptabel sein, denn die Berechnungen basieren auf mittleren Belegungsannahmen, die im Einzelfall nicht stimmen. Häufig wird deshalb darauf geachtet, dass in Teilnehmeranschlussgruppen Geschäftsanschlüsse, die viel Verkehr erzeugen, und Privatan Anschlüsse mit wenig Verkehr gemeinsam geführt werden, um im Mittel akzeptable Bedingungen zu erzeugen.

Bei Koppelmatrizen gibt es genau einen Koppelpunkt, der geschaltet werden muss, um eine Verbindung zwischen zwei bestimmten Anschlüssen durchzuschalten. Bei mehrstufigen Koppelanordnungen können gewöhnlich zwei Anschlüsse über verschiedene Wege durch die Koppelanordnung durchgeschaltet werden. Man hat

somit die zusätzliche Aufgabe, aus den verschiedenen möglichen Wegen einen freien herauszusuchen. Verfahren hierzu werden **Wegesuchverfahren** genannt. Es ist sinnvoll, nicht immer denselben Weg durch die Koppelanordnung für eine Verbindung zwischen zwei Anschlüssen zu wählen. Im Falle einer Störung bzw. nicht ausreichender Güte der Verbindung besteht dann eine hohe Wahrscheinlichkeit, beim nächsten Versuch einen anderen Weg zu finden. Häufig werden deshalb zufällige oder zyklische Wegesuchstrategien angewandt. Unter gewissen Annahmen ist es möglich, die Zeit, die erforderlich ist, um einen freien Weg durch die Koppelanordnung zu finden, abzuschätzen.

Wegesuchverfahren

Wir nehmen an, dass es k Wege zwischen zwei Anschlüssen einer Koppelanordnung gibt, diese sind bekannt und werden hintereinander abgeprüft, ob sie frei sind. Wir nehmen ferner an, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Weg belegt ist, gleich p ist, und dass dies für alle Wege unabhängig voneinander gilt. Die Wahrscheinlichkeit, dass wenn i Versuche durchgeführt werden, die ersten $(i - 1)$ Wege belegt sind und der i -te Weg frei ist, sei p_i . Dann gilt

$$p_i = p^{(i-1)} \cdot (1 - p). \quad 11.2-6$$

Der Erwartungswert für die Anzahl der Versuche bis ein freier Weg gefunden wird oder die Suche erfolglos verläuft, ergibt sich hieraus als

$$E\{\text{Anzahl der Versuche}\} = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \dots + i \cdot p_i + \dots + k \cdot p_k + k \cdot p^k. \quad 11.2-7$$

Der letzte Term in Gl. 11.2-7 entspricht der erfolglosen Suche. p_i aus Gl. 11.2-6 eingesetzt in Gl. 11.2-7 liefert

$$\begin{aligned} E\{\text{Anzahl der Versuche}\} &= 1 \cdot (1 - p) + 2p(1 - p) + \dots \\ &\quad + ip^{i-1} \cdot (1 - p) + \dots \\ &\quad + kp^{k-1}(1 - p) + kp^k \\ &= 1 + p + \dots + p^i + \dots + p^{k-1}. \end{aligned}$$

Die Summation der geometrischen Reihe ergibt

$$E\{\text{Anzahl der Versuche}\} = \frac{1 - p^k}{1 - p}. \quad 11.2-8$$

Benötigt man für die Überprüfung eines Weges die Zeit t , so ist der Erwartungswert der Zeit bis zu einer erfolgreichen Suche oder Abbruch T gegeben durch

$$E\{T\} = \frac{1 - p^k}{1 - p} \cdot t. \quad 11.2-9$$

Beispiel 11.2-5:

Wir betrachten die dreistufige Koppelanordnung des Beispiel 11.2-4, mit $n = 8192$ Leitungsanschlüssen, $k' = 64$ und $i = 64$, mit der Blockierungswahrscheinlichkeit von 0,0024 und einer Belegungswahrscheinlichkeit der

Anschlüsse von 0,7. Für die Belegungswahrscheinlichkeit der Kanten haben wir $p' = 0,7 \times \frac{i}{k'} = 0,7 \times \frac{64}{64} = 0,7$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Weg frei ist, ist

$$q = 0,3 \times 0,3 = 0,09,$$

dass er belegt ist somit

$$p = 0,91.$$

Somit haben wir

$$E\{\mathbf{A}\} = \frac{1 - (0.91)^{64}}{1 - 0,91} \approx 11.$$

Es müssen also im Mittel 11 Wege abgesucht werden, bevor ein freier Weg gefunden wird oder feststeht, dass kein Weg frei ist.

**schrittweise
Durchschaltung**

In elektromechanischen Systemen wird die Wegesuche in der jeweiligen Koppelstufe unabhängig von den danach folgenden Koppelvielfachen durchgeführt. Man spricht dann von der direkten Wahl oder der **schrittweisen Durchschaltung**. Hier kann es vorkommen, dass der durch eine Koppelstufe aufgebaute Weg in den danach folgenden Stufen nicht mehr erfolgreich weitergeführt werden kann. In Vermittlungsanlagen mit Rechnersteuerung wird dagegen meist eine Belegungsabbildung in der Steuerung abgelegt. Bei einem Belegungswunsch wird zunächst ein Weg in der Abbildung durch die gesamte Koppelanordnung aufgesucht und erst dann durchgeschaltet. Man spricht nun von indirekter Wahl oder **konjugierter Durchschaltung**.

**konjugierte
Durchschaltung**

Es sei hier erwähnt, dass auch eine Variante der direkten Durchschaltung im System 12 der Firma Alcatel (ehemals SEL) angewandt wird. Hierfür wurde ein kundenspezifischer LSI-Baustein entwickelt, in dem schrittweise durchgeschaltet wird, wobei bei ungünstiger Wegeführung die Belegung rückgängig gemacht bzw. anders geführt werden kann. Die verwendete Technologie und Auslegung der Koppelanordnung mit der implementierten Wegesuchstrategie garantiert praktisch eine blockierungsfreie Durchschaltung, verbunden mit modularer Erweiterbarkeit.

**Umordnung der
Belegung
(rearrangement)**

Wie wir gesehen haben, kann bei blockierungsfreien Systemen bei jeder Belegung in der Koppelanordnung ein freier Weg gefunden werden, solange die entsprechenden Ein- und Ausgänge frei sind. Bei nichtblockierungsfreien Koppelanordnungen kann es vorkommen, dass eine Verbindung zunächst bei der vorliegenden Belegung der einzelnen Wege nicht durchgeschaltet werden kann; eine **Umordnung der Belegung (rearrangement)** jedoch eine Durchschaltung ermöglicht. Systeme, die durch Umordnungsstrategien blockierungsfrei gemacht werden können, nennt man auch **Benes-Systeme** [Ben65].

Benes-Systeme

Wie wir bereits im Kapitel 2 gesehen haben, werden Durchschaltensetze gewöhnlich hierarchisch aufgebaut. Man unterscheidet zwischen Vermittlungsstellen, an denen

Teilnehmer angeschlossen werden, und reinen Transitvermittlungsstellen, die als Zwischenknoten dienen. Entsprechend unterscheidet man (s. Abb. 11.2-12) in der Koppelanordnung zwischen dem Verkehr, der zwischen den an der Koppelanordnung angeschlossenen Teilnehmern abgewickelt wird (**Internverkehr**), dem Verkehr, der zwischen einem an der Koppelanordnung angeschlossenen und einem fernen Teilnehmer abgewickelt wird (**Externverkehr**) und zwischen dem Verkehr, der zwischen zwei fernen Teilnehmern abgewickelt wird (**Transitverkehr**).

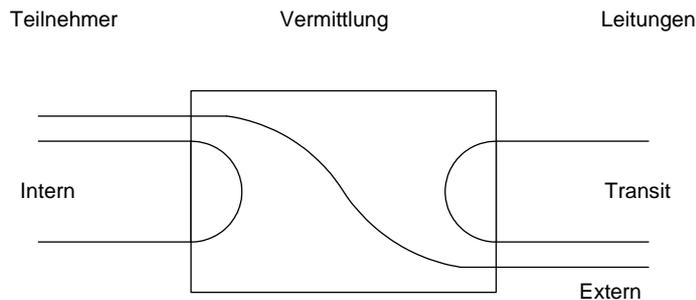
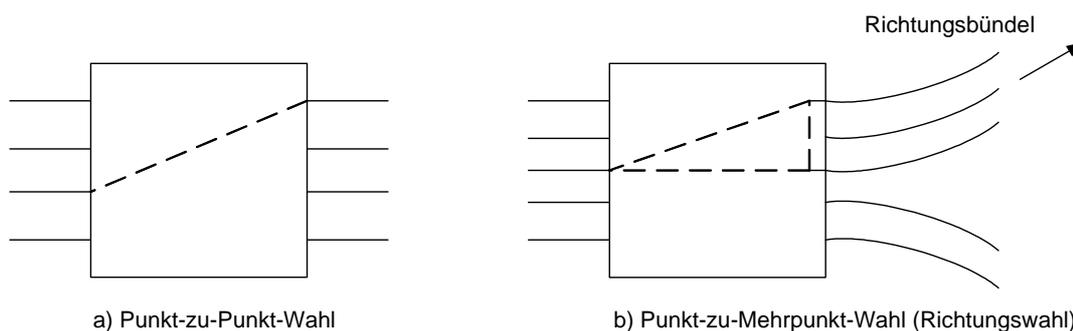
Internverkehr**Externverkehr****Transitverkehr**

Abb. 11.2-12: Verkehrsarten in einer Vermittlung

Beim Internverkehr muss ein freier Weg zwischen einem Eingang und einem Ausgang gefunden werden (Abb. 11.2-13). Man spricht in diesem Fall von **Punkt-zu-Punkt-Wahl**. Bei Extern- und Transitverkehr braucht man lediglich einen freien Ausgang aus mehreren, die in eine Richtung führen, auszuwählen. Man bezeichnet dies als **Punkt-zu-Mehrpunkt-Wahl**. Die Blockierungswahrscheinlichkeit von Punkt-zu-Mehrpunkt-Wahl in einer Koppelanordnung ist geringer als die Blockierungswahrscheinlichkeit für Punkt-zu-Punkt-Wahl - die Wegesuche ist entsprechend einfacher bei Punkt-zu-Mehrpunkt-Wahl.

Punkt-zu-Punkt-Wahl**Punkt-zu-Mehrpunkt-Wahl**

a) Punkt-zu-Punkt-Wahl

b) Punkt-zu-Mehrpunkt-Wahl (Richtungswahl)

Abb. 11.2-13: Wahlarten in einer Vermittlung

Selbsttestaufgabe 11.2-1:

Erläutern Sie die folgenden Begriffe und zeigen Sie jeweils die Unterschiede auf.

- a. Schrittweise Durchschaltung und konjugierte Durchschaltung
- b. Konzentration und Expansion in einer Koppelanordnung.

Selbsttestaufgabe 11.2-2:

Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, wenn die Belegungswahrscheinlichkeit nach Gl. 11.2-5

$$B = \left(1 - \left(1 - \frac{p \cdot i}{k}\right)^2\right)^k$$

berechnet werden soll?

11.3 Speichervermittlung

Speichervermittlung
Sendungsvermittlung
(message switching)

Bei der **Speichervermittlung** im engeren Sinne (**Sendungsvermittlung** oder **message switching**) werden Nachrichten, wie bei der Briefpost, mit Adressen versehen von einem Teilnehmer A über verschiedene Zwischenknoten im Kommunikationsnetz an den Empfänger B ausgehändigt. Das Verfahren wurde bereits beim Telegraphendienst angewandt, wo die Nachrichten von Station zu Station übermittelt, in den einzelnen Stationen auf Richtigkeit überprüft, soweit erforderlich zwischengespeichert und weitergeleitet wurden. Heute werden als Speichervermittlungen Rechner eingesetzt, die ankommende Nachrichten aufnehmen, auf Fehlerfreiheit (z. B. durch Anwendung von zyklischen Fehlererkennungsverfahren) überprüfen, fehlerhafte Nachrichten neu anfordern, die Nachricht in einer Warteschlange in die gewünschte Richtung zwischenspeichern und dann weiterleiten. Als Adresse ist lediglich die Zieladresse erforderlich, häufig wird jedoch auch die Anfangsadresse mitgeteilt. Eine wesentlichemittlungsaufgabe, die der Schicht 3 zugeordnet wird, besteht darin, einen Weg (genauer Route) durch das Netz vom Sender bis zum Empfänger zu finden. Hier kommen verschiedene Verfahren zur Anwendung: von apriori festgelegten Routen bis auf dynamische Routensuche nach verschiedenen Kriterien wie Auslastung einzelner Knoten und Warteschlangenlängen in einzelnen Richtungen. Es ist auch möglich, bei der Behandlung der Nachrichten den einzelnen Nachrichten verschiedene Prioritäten einzuräumen. Wesentliche Eigenschaften der Speichervermittlung im engeren Sinne (Sendungsvermittlung oder *message switching*) sind:

- Es wird eine bessere Ausnutzung der Übertragungskapazitäten der Teilstrecken ermöglicht, denn diese werden durch mehrere Teilnehmer genutzt, wobei durch die Warteschlangenbildung vor jeder Teilstrecke die Nutzung optimiert wird.

- Eine gleichzeitige Verfügbarkeit von Sender und Empfänger und auch der Zwischeneinrichtungen ist nicht erforderlich, da es sich im Gegensatz zur Durchschaltevermittlung hier um eine verbindungslose Übermittlung handelt.
- Es tritt keine Blockierung wie bei der Durchschaltevermittlung ein; dafür können lange Wartezeiten entstehen.
- Den Nachrichten können verschiedene Prioritäten zugeordnet werden, um z. B. dringende Nachrichten bevorzugt zu übermitteln oder Nachrichten mit niedrigen Prioritäten in verkehrsarmen Zeiten zu übermitteln, um dadurch die Kapazitäten besser zu nutzen.
- Die Fehlerbehandlung erstreckt sich auf ganze Nachrichten. Sie kann individuell gestaltet werden.
- Häufig werden die Nachrichten zwischen zwei Stationen durchgezählt, damit keine Nachrichten auf Teilstrecken verlorengehen.
- Die Routensuche kann so ausgelegt werden, dass Störungen im Netz umgangen werden. Dies führt zu einer besseren Ausfallsicherheit.
- Durch die Speicherung der Nachricht ist eine unmittelbare Geschwindigkeitsanpassung möglich. Auch eine Codeanpassung kann leicht realisiert werden. Dies ermöglicht, Nachrichten zwischen unterschiedlichen Endgeräten auszutauschen.
- Eine Duplizierung einer Nachricht in Zwischenstationen ist leicht möglich, um eine Rundsendung (Punkt-zu-Mehrpunktübermittlung) zu erzielen.
- Es kann auch eine längere Speicherung im Netz vorgenommen werden, so dass verschiedene Leistungsmerkmale, wie Warten auf den Empfänger, Auslieferung nach Zeit, Archivierung im Netz u.s.w. möglich werden.
- Eine Mitteilung an den Sender, wenn die Nachricht an den Empfänger ausgehändigt wird, ist möglich.

Trotz der vielen vorteilhaften Eigenschaften der Sendungsvermittlung (*message switching*) darf nicht übersehen werden, dass ein Nachteil gravierend ist. Die Nachrichten werden jeweils hintereinander (sequentiell) übermittelt und können daher erhebliche Wartezeiten im Netz erfahren. Die Wartezeiten sind nicht konstant, sondern hängen von der momentanen Netzbelastung ab.

Wir wenden uns nun kurz wieder der Zeitmultiplexbildung bei der Durchschaltevermittlung zu und fragen nach der Ausnutzung der zugeteilten Kanäle in der jeweiligen Verbindungsphase, d. h. in der Phase, in der Nutzdaten übertragen werden. Liegen bei einer Verbindung in dieser Phase keine Daten vor, so laufen die jeweiligen Teilkanäle leer - es wird bei der PCM Sprachübertragung z. B. das Nullwort gesendet (Abb. 11.3-1a). In Abb. 11.3-1b bis d sind verschiedene Strategien, die alle als **statistische Zeitmultiplexverfahren** oder **asynchrone Zeitmultiplexverfahren** bezeichnet werden, dargestellt. Asynchron bezieht sich hier darauf, dass die zu einer Verbindung gehörenden Zeitschlitze nicht mehr kontinuierlich bzw. zyklisch ankommen. Der Zeitmultiplexkanal selbst wird nach wie vor synchron betrieben,

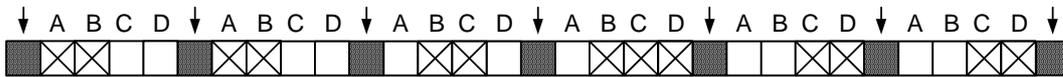
statistische Zeitmultiplexverfahren
asynchrone Zeitmultiplexverfahren

d. h. das Rahmensynchronwort kommt zyklisch an. In der in Abb. 11.3-1b dargestellten Strategie wird die Rahmeninformation immer, wenn eine Verbindung inaktiv oder aktiv wird, neu herausgegeben. Bei häufig ändernder Nutzung einzelner Verbindungen (d. h. bei büschelartigem Datenaufkommen innerhalb einzelner Verbindungen) muss im ungünstigsten Fall bei jedem Rahmen die Rahmenezusammensetzung der Demultiplexeinrichtung neu mitgeteilt werden. In der in Abb. 11.3-1c dargestellten Strategie wird jedem Zeitschlitz eine Adressinformation hinzugefügt. Der Demultiplexer weiß also unmittelbar vor dem Zeitschlitz, zu welchem Kanal die darin enthaltene Information gehört. In der in Abb. 11.3-1d dargestellten Strategie wird für jeden Zeitschlitz anstatt der Adresse eine Inhaltsangabe gemacht. Die Demultiplexeinrichtung erfährt hierüber, ob der Zeitschlitz Nutzinformationen enthält und deshalb vorhanden ist, oder ob er leer war und deshalb weggelassen wurde. Die Strategien erbringen je nach Verkehrseigenschaften der Verbindungen unterschiedliche Ersparnisse gegenüber dem nichtstatistischen Zeitmultiplexverfahren. Es gibt zahlreiche Möglichkeiten, die Verfahren weiter zu optimieren, so z. B. durch relative Adressierung der Zeitschlitzze. Wir haben in Abb. 11.3-1 angenommen, dass das Synchronisationswort (häufig auch **Flag** genannt) stets mitgesendet wird, bei geringem Verkehrsaufkommen können auch einzelne Flags herausgelassen werden, um an der Übertragungskapazität weiter zu sparen. Es sei darauf hingewiesen, dass die beschriebenen Verfahren der statistischen Zeitmultiplexbildung keinen Vermittlungsvorgang darstellen. Die einzelnen Zeitschlitzze verschieben zwar ihre absoluten Lagen, ihre relativen Lagen bleiben erhalten; bei der Adressierung handelt es sich um die Schicht-2-Adressen.

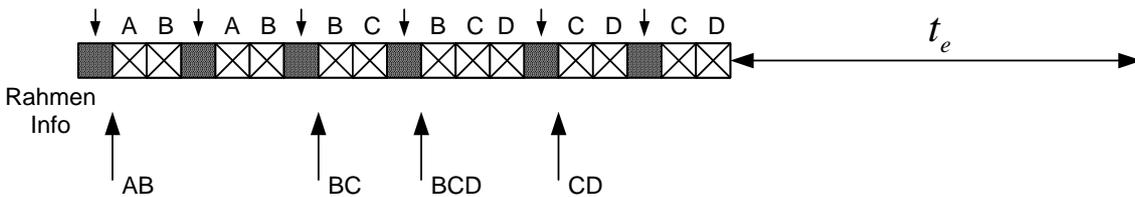
Wir haben in Anlehnung an die byteweise Zeitmultiplexbildung angenommen, dass es sich in Abb. 11.3-1 um Zeitschlitzze von je einem Byte handelt. Wir können die Ersparnis an Bandbreite in der Regel noch erhöhen, indem wir pro Zeitschlitz mehrere Bytes annehmen und somit das Verhältnis zwischen der Verwaltungsinformation (*Overhead* - wie Rahmeninformation oder Adresse) und der Nutzinformation weiter herabsetzen. Behalten wir dabei eine feste Paketlänge, so müssen wir gelegentlich Leerstellen stopfen bzw. mit Flags ausfüllen (Abb. 11.3-2a). Wir können auch die feste Paketlänge bzw. Zeitschlitzlänge zu Gunsten einer variablen Paketlänge aufgeben. Nun müssen wir eine Längeninformation dem Informationspaket voranstellen oder uns ganz auf die Flags (Synchronworte) verlassen, um im nachhinein das Ende eines Paketes zu erkennen (Abb. 11.3-2b). Wir haben damit die Voraussetzung in der Schicht 2 für die Implementierung der Paketvermittlung geschaffen. Es sei noch einmal festgehalten, dass die zu übermittelnde Nachricht in Paketen mit einer maximal zulässigen Größe vorliegt, die mit Schicht-2-Adressen versehen werden und eine Längenangabe oder Synchronisationsinformation, aus der die Länge ableitbar ist, enthalten. Wir haben implizit angenommen, dass die Zuteilung der verfügbaren Kapazität auf der Teilstrecke von der Schicht 2 des Multiplexers zentral festgelegt wird. Es gibt auch zahlreiche dezentrale Zugriffsstrategien, die vor allem in lokalen Netzen angewandt werden. Die Schicht 2 kann über die erwähnten Aufgaben hinaus weitere Dienste anbieten. Hierzu gehören häufig: die Fehlersicherung über der Teilstrecke z. B. über zyklische Codes, ein Abzähl- und Quittierungsverfahren für die Flussregelung und Sicherung auf der Teilstrecke. Wir

haben einige Aufgaben der Schicht 2 bereits im Abschnitt 1.3.2 kennengelernt. Wir werden einige dieser Aufgaben in den nächsten Abschnitten noch näher betrachten.

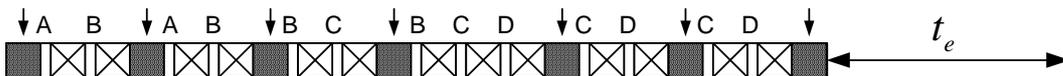
a) Synchrones Zeitmultiplexverfahren. Reihenfolge der Rahmen vorab festgelegt.



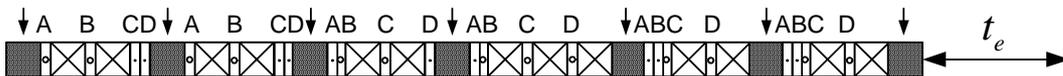
b) Statistisches Multiplexen mit gesonderter Angabe der Rahmeninformation.



c) Statistisches Multiplexen mit Adressangabe (Adressmultiplex).



d) Statistisches Multiplexen mit Inhaltsangabe. Reihenfolge der Rahmen vorab festgelegt.

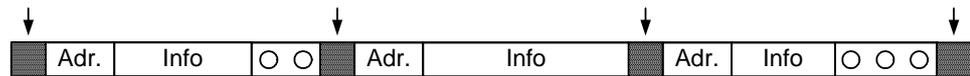


- | | | | |
|---|---------------------------------|---|----------------------------------|
|  | Synchronisationswort (flag) |  | Inhaltsangabe: Infocfeld besetzt |
|  | Zeitschlitz mit Nutzinformation | ABCD | Adressinformation |
|  | leerer Zeitschlitz | ↓ | Synchronisationsfolge |
|  | Inhaltsangabe: Infocfeld leer | t_e | Zeitersparnis gegenüber a) |

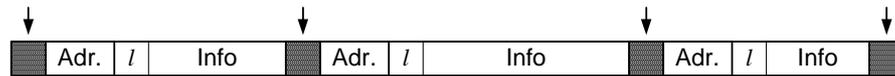
Abb. 11.3-1: Verfahren für synchrones und statistisches Multiplexen

Wir wenden uns nun den Schicht-3-Aspekten der Paketvermittlung zu. Wie wir bereits im einleitenden Abschnitt 11.1 gesehen haben, wird die Nachricht bei der Paketvermittlung in Teilnachrichten (Pakete) zerlegt.

a) Feste Paketlänge. Nichtverwendete Bytes werden gestopft.



b) Variable Paketlänge mit Längenangabe



c) Logischer Aufbau der Pakete

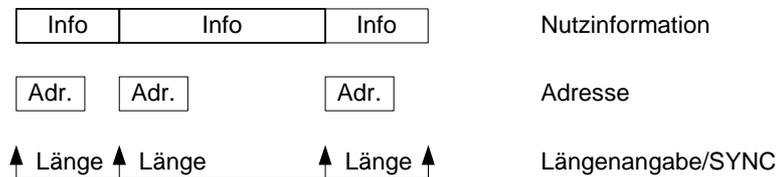


Abb. 11.3-2: Paketbildung mit variabler Informationslänge

Datagramm Beim **Datagramm**-Verfahren werden alle Pakete mit der Zieladresse versehen und einzeln durchnummeriert. Sie werden dann über das Netz mit Zwischenspeicherung an Vermittlungsknoten bis zum Empfänger geleitet. An den Vermittlungsknoten werden die Pakete unabhängig voneinander (wie bei der Sendungsvermittlung) wie eigenständige Nachrichten behandelt und nach den geltenden Routentabellen oder Routenvereinbarungen weitergeleitet. Sie können deshalb verschiedene Routen nehmen und sich dabei überholen. Beim Empfänger können die Pakete, da sie durchnummeriert sind, wieder zu der ursprünglichen Nachricht zusammengesetzt werden. Da der Zeitpunkt der Ankunft der einzelnen Pakete beim Empfänger nicht bekannt ist, weiß der Empfänger beim Fehlen eines Paketes nicht, ob es verlorengegangen ist oder ob es lediglich eine längere Verzögerung erfahren hat. Die Ende-zu-Ende Kontrolle muss deshalb auf einer Zeitangabe (*time out*) basieren.

virtuelle Verbindungen Bei der Paketvermittlung mit **virtuellen Verbindungen** wird zwischen dem Teilnehmer *A* und dem Teilnehmer *B* zunächst eine Route durch das Netz festgelegt. Alle nachfolgenden Pakete einer virtuellen Verbindung werden durch das Netz auf diese Route geleitet. Zwischen zwei Teilnehmern können über ein Netz verschiedene virtuelle Verbindungen gleichzeitig existieren. Sie werden in den Knoten wie

unterschiedliche Verbindungen behandelt. Die Übermittlung verläuft, wie alle verbindungsorientierten Übermittlungen, in drei Phasen. In der Verbindungsaufbauphase werden Steuerpakete von der Verbindungsaufbauenden Einrichtung gesendet. Diese enthalten die Sender- und Empfängeradresse, Prioritätsangaben und andere Steuerinformationen. Die Steuerpakete werden für die Festlegung der Route durch das Netz verwendet. Sobald die Route festgelegt und freigegeben ist, können die Datenpakete (Nachrichten) über die Route gesendet werden. Zwar kann jedes Paket auf der festgelegten Route an jedem Knoten unterschiedliche Verzögerungen erleiden, die Reihenfolge der Pakete bleibt jedoch erhalten. Eine Durchnummerierung der Pakete ist deshalb nicht erforderlich. Lediglich die Steuerpakete müssen die vollständigen Adressangaben enthalten. Die nachfolgenden Pakete können sich auf die virtuelle Verbindung beziehen; dies ermöglicht eine schnellere Abfertigung an den Vermittlungsknoten (Einsatz von lokaler Adressierung). Bei der virtuellen Verbindungstechnik hat man also zwei unterschiedliche Paketarten (die Steuer- und die Datenpakete), die mit verschiedenen Prioritäten abgearbeitet werden können.

Eine Variante des Verfahrens ist, dass feste virtuelle Verbindungen zwischen Teilnehmern aufgebaut werden und bei Beendigung der Übermittlung einer Nachricht nicht abgebaut werden, so dass sie für weitere Nachrichten unmittelbar bei Bedarf eingesetzt werden können, ohne die Verbindungsaufbauphase zu durchlaufen. Die Anzahl der gleichzeitig von einem Teilnehmer aufgebauten virtuellen Verbindungen wird bei dieser Variante beschränkt, um nicht zuviel Ressourcen im Netz zu binden.

Wir haben hier nur die Grundfunktionen, die bei der Paketvermittlung erforderlich sind, angesprochen. Wir werden uns in einem späteren Kapitel insbesondere die Routenfestlegung und Flussoptimierung näher ansehen.

Sieht man sich die einzelnen Abläufe der Abwicklung einer Verbindung näher an, so kann man sich ein globales Bild über den zu erwartenden Durchsatz bzw. Verzögerungen bei den einzelnen Verfahren machen. Hierzu betrachten wir Abb. 11.3-3 bis Abb. 11.3-12, in denen Nachrichten zwischen den Knoten *A* und *B* im dargestellten Netz entsprechend den zu betrachtenden Verfahren ausgetauscht werden.

Die tatsächliche Leistungsfähigkeit der einzelnen Verfahren ist pauschal kaum vorhersagbar und von den einzelnen Gegebenheiten stark abhängig. Zu nennen sind hierbei die Anzahl der Anschlüsse, die Netzstruktur, die Netzbelastung (die Länge und Anzahl der ausgetauschten Nachrichten), die Übertragungskapazität der Teilstrecken und die Verarbeitungsgeschwindigkeit der Knotenvermittlung. Einige allgemeine Aussagen sind jedoch möglich:

- Für den Austausch großer Nachrichtenmengen ist die Durchschaltvermittlung gut geeignet.
- Für sehr kurze, häufig auftretende Nachrichten sind Datagramme besonders geeignet.

- Für sporadische Nachrichten (interaktiver Dialog am Terminal) sind virtuelle Verbindungen gut geeignet.
- Für persönliche Mitteilungen (vor allem bei Abwesenheit) ist die Sendungsvermittlung (*message switching*) besonders geeignet.

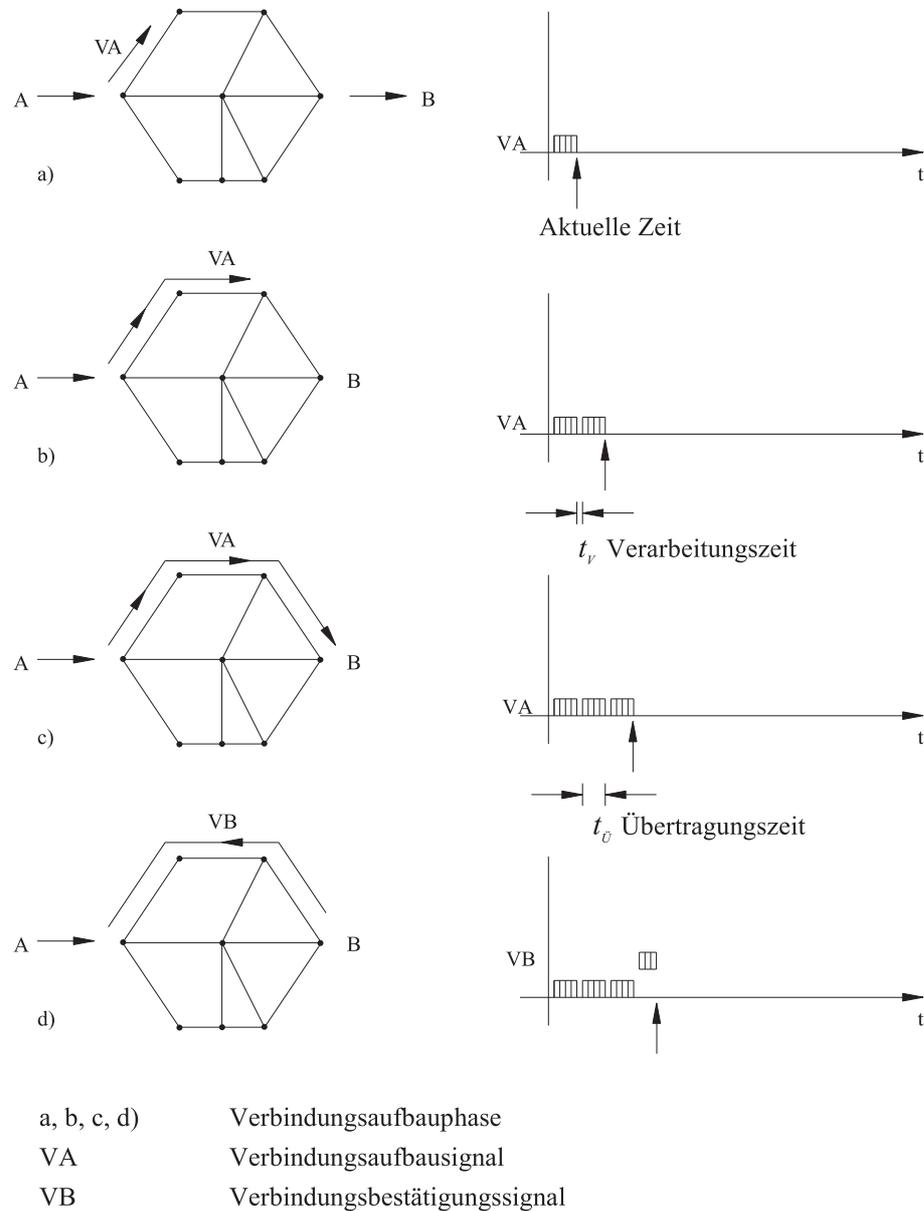


Abb. 11.3-3: Nachrichtenvermittlung über eine durchgeschaltete Verbindung

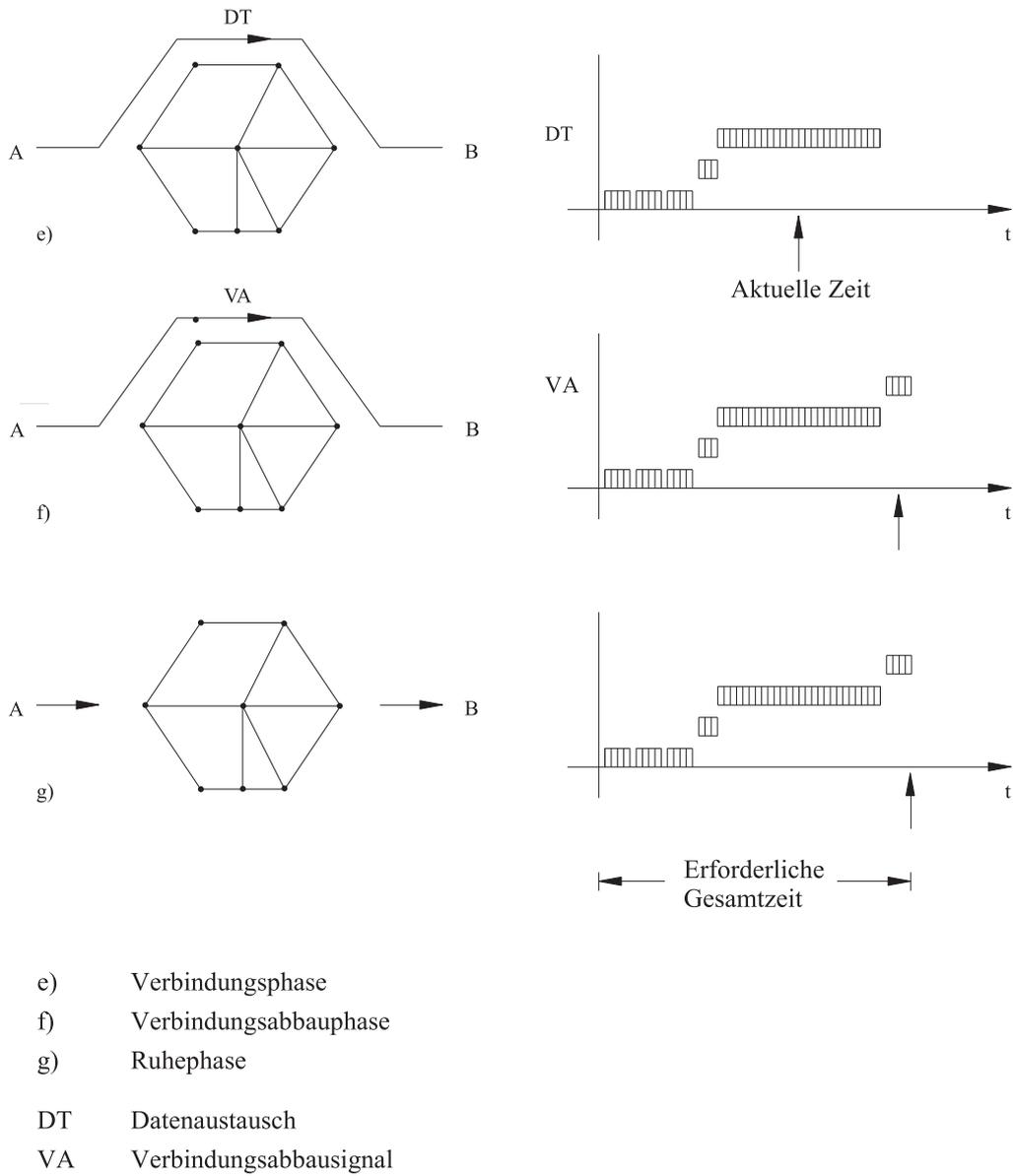


Abb. 11.3-4: Nachrichtenvermittlung über eine durchgeschaltete Verbindung (Fortsetzung)

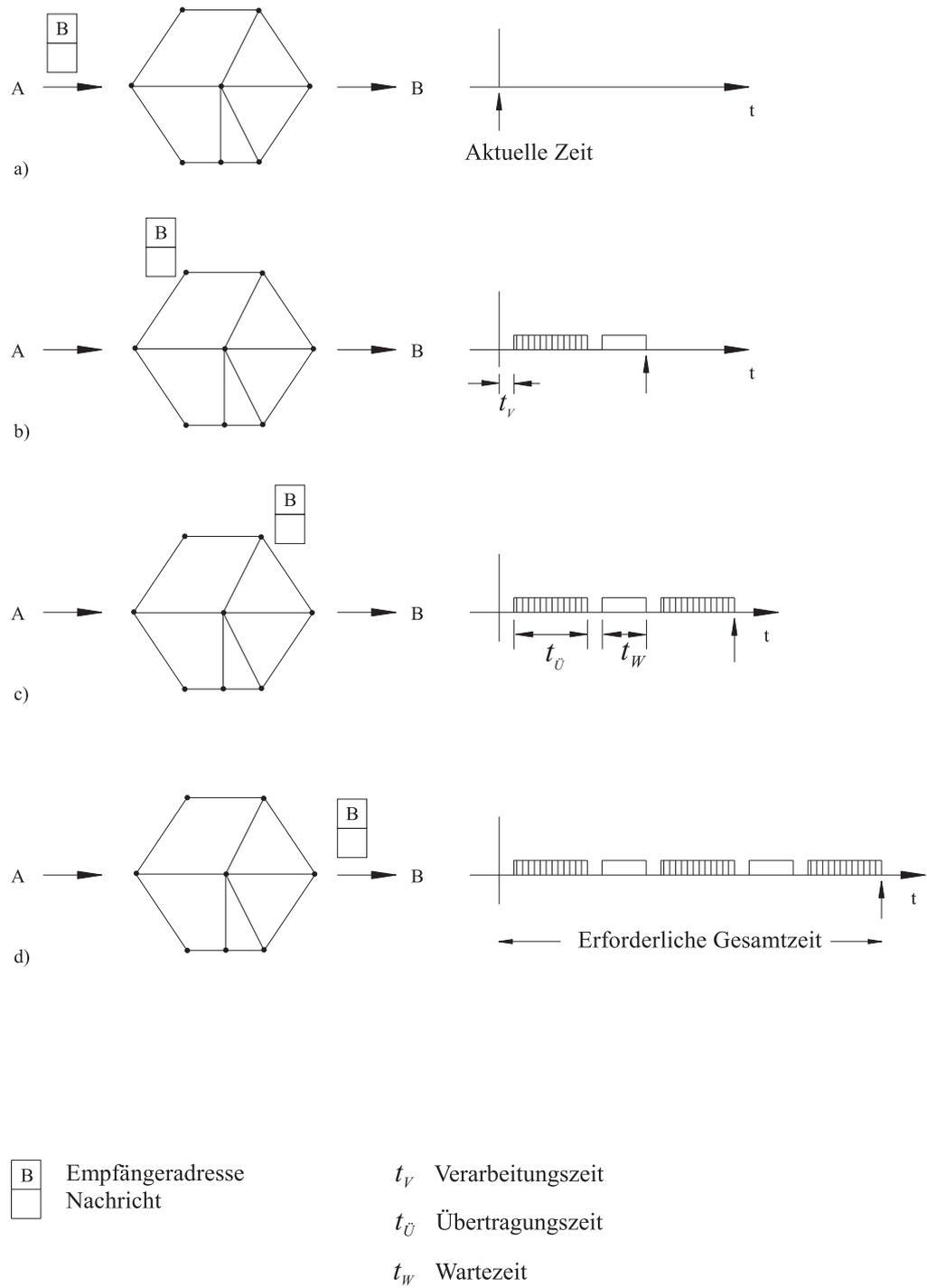


Abb. 11.3-5: Nachrichtenvermittlung mit Sendungsvermittlung (*message switching*)

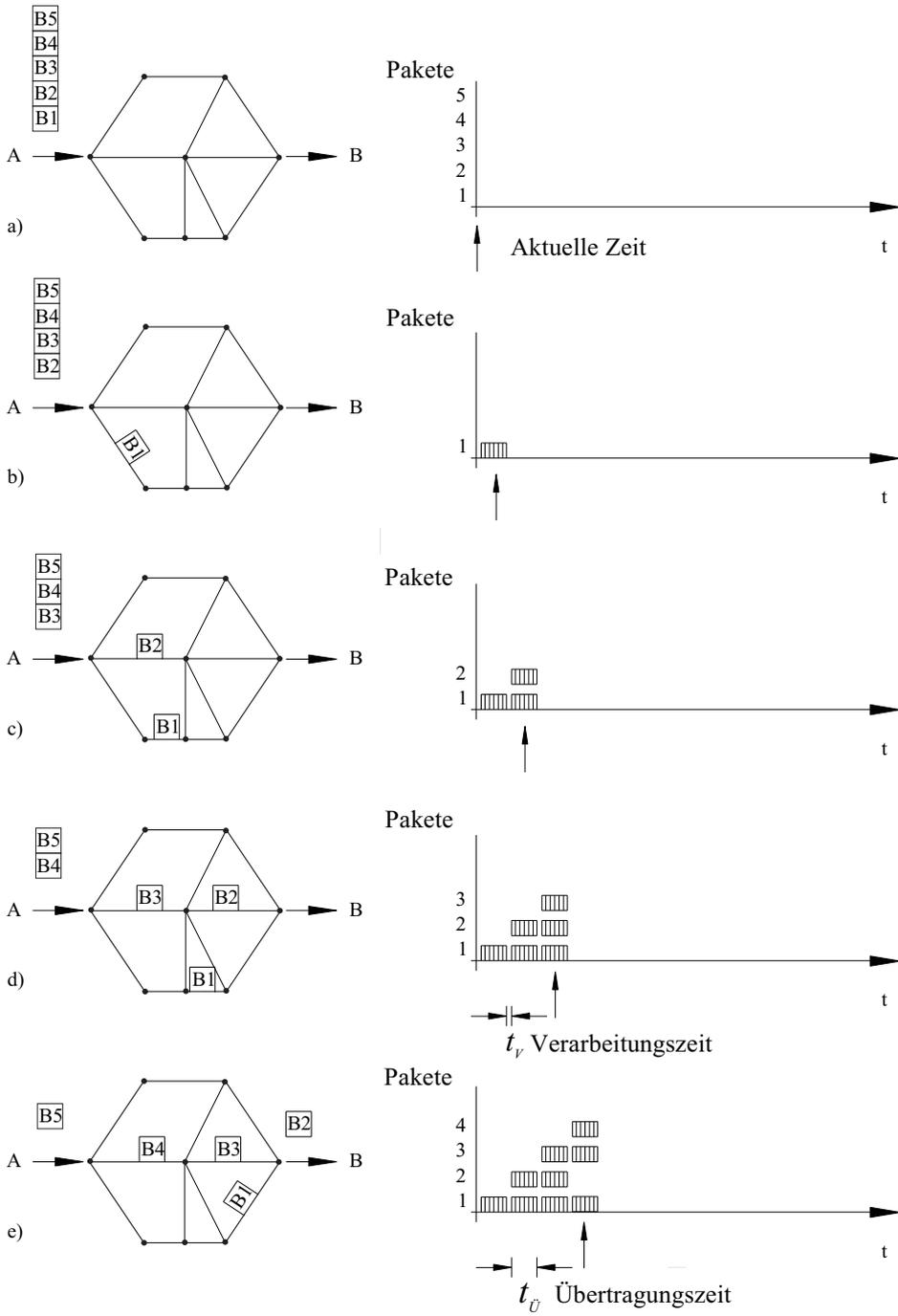


Abb. 11.3-6: Nachrichtenübermittlung mit Datagrammen

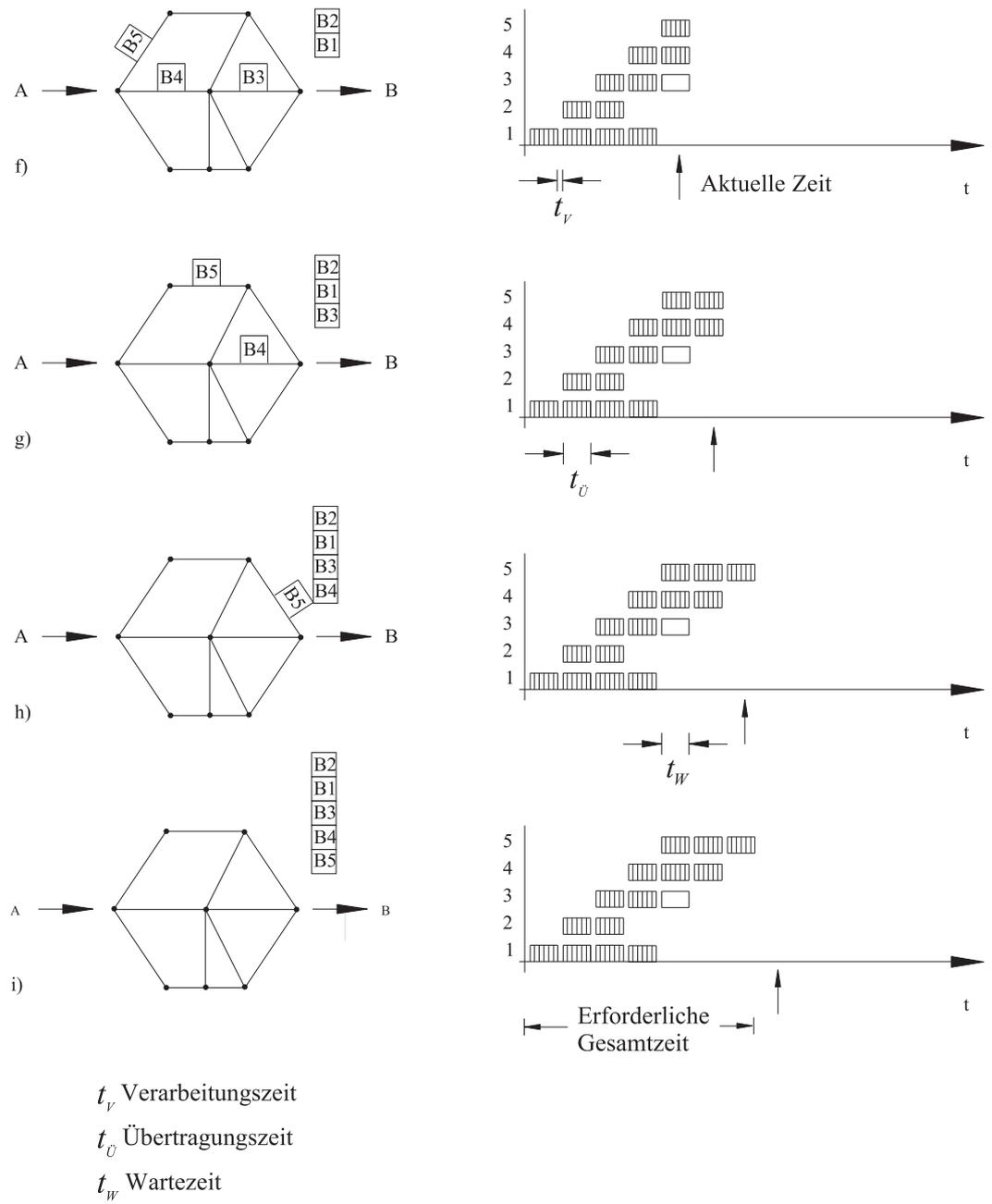


Abb. 11.3-7: Nachrichtenübermittlung mit Datagrammen (Fortsetzung)

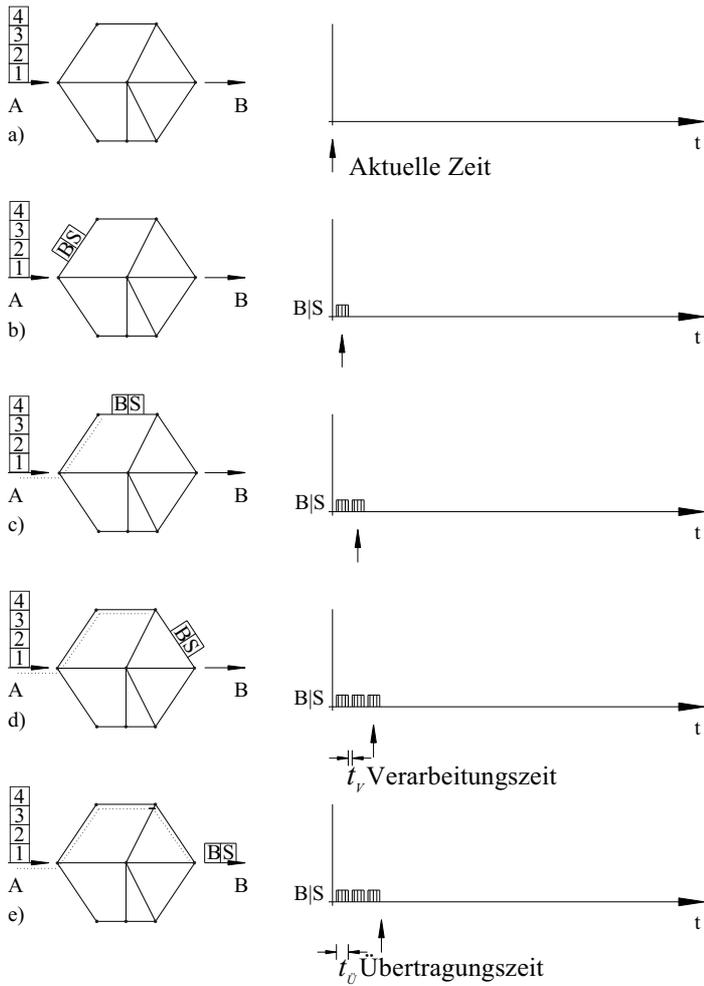
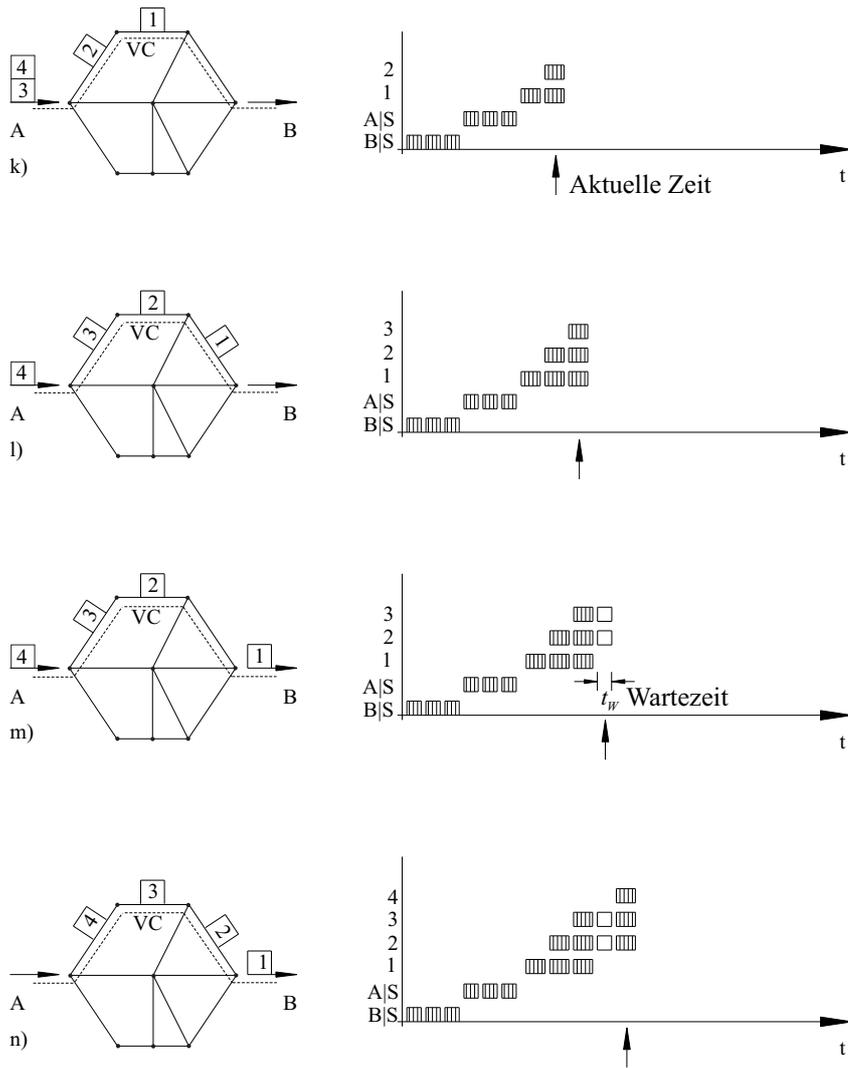


Abb. 11.3-8: Nachrichtenübermittlung mit virtueller Verbindung

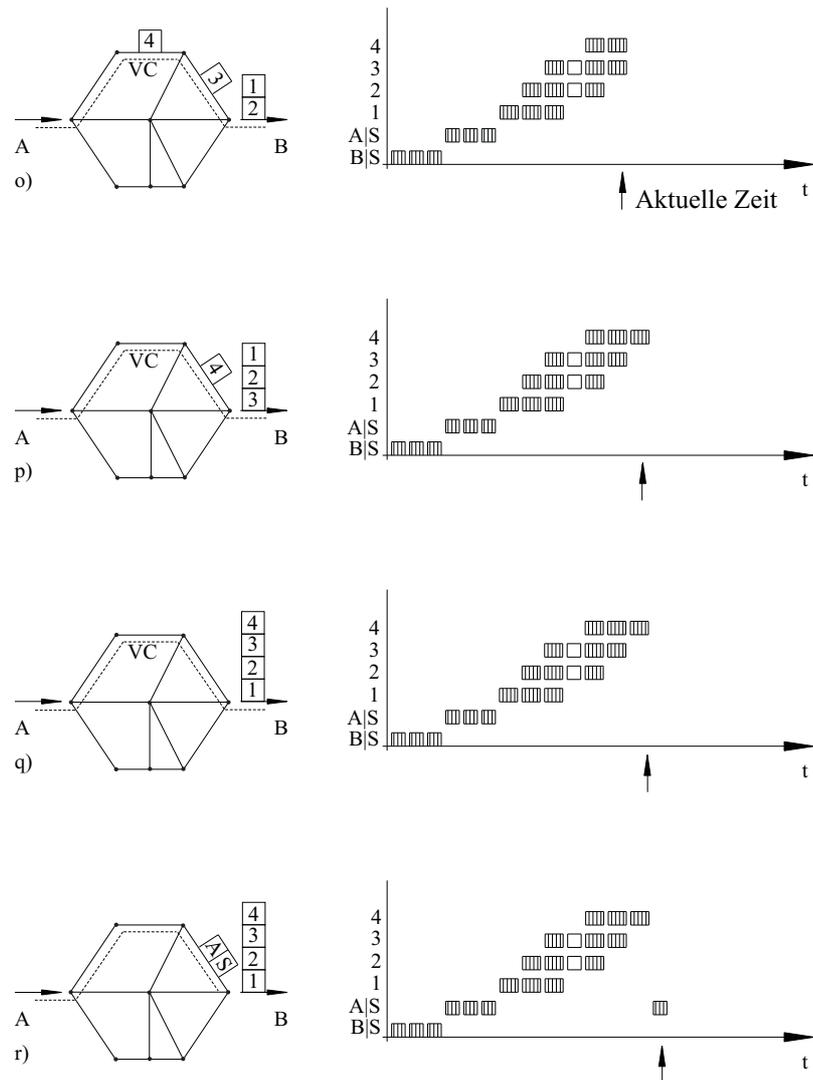


VC Virtuelle Verbindung (*virtual circuit*)

i)-q) Verbindungsphase

----- Bestätigte Route

Abb. 11.3-10: Nachrichtenübermittlung mit virtueller Verbindung (Fortsetzung)



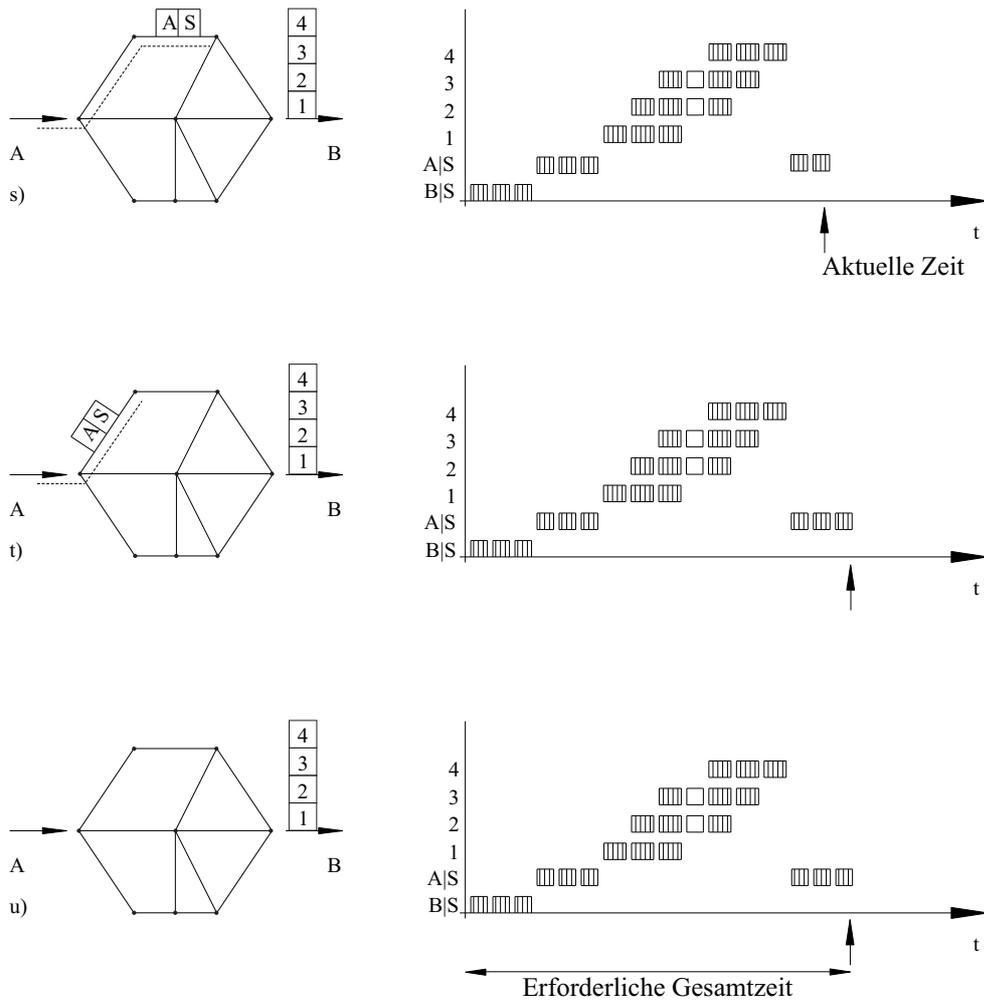
VC Virtuelle Verbindung (*virtual circuit*)

i)-q) Verbindungsphase

r)-t) Verbindungsabbauphase

..... Bestätigte Route

Abb. 11.3-11: Nachrichtenübermittlung mit virtueller Verbindung (Fortsetzung)



A S A Empfängeradresse
 S Steuerinformation

r)-t) Verbindungsabbauphase

u) Ruhephase

..... Bestätigte Route

Abb. 11.3-12: Nachrichtenübermittlung mit virtueller Verbindung (Fortsetzung)

Selbsttestaufgabe 11.3-1:

Erklären Sie, was man unter folgenden Vermittlungsprinzipien versteht:

- Durchschaltvermittlung
- Sendungsvermittlung (Message Switching)
- Paketvermittlung

Zeigen Sie insbesondere die Unterschiede auf.

Selbsttestaufgabe 11.3-2:

Bei der Paketvermittlung unterscheidet man zwei Vermittlungsverfahren. Wie werden diese Verfahren bezeichnet, und wie unterscheiden sie sich?

11.4 Integrierte Vermittlungsverfahren

Man unterscheidet zwischen verschiedenen Aspekten der Integration. Wir haben bereits in Kapitel 2 gesehen, dass die Digitalisierung des Fernsprechnetzes zum Einsatz gleicher Technologien und Verfahren für die Übertragung und die Vermittlung von Nachrichten führte. Diese technische Integration bezeichneten wir als digitale Übermittlung. Die digitale Übermittlung im Netz bis zum Teilnehmer führt dazu, dass durchgängige digitale Kanäle zwischen Teilnehmern verfügbar werden. Das Übermittlungsnetz unterscheidet nicht zwischen den verschiedenen Bitströmen für unterschiedliche Dienste, sondern behandelt alle gleich. Dieses, unterstützt durch einen starken, vom Nutzkanal unabhängigen Signalisierungskanal, führt zur Dienstintegration in einem digitalen Fernmeldenetz – dem **ISDN** (*Integrated Services Digital Network* – dienstintegrierendes Digitales Fernmeldenetz) (vgl. Abschnitt 2.2.1). Wir wollen diese Aspekte an dieser Stelle nicht weiter behandeln, sondern wollen uns lediglich die Möglichkeiten, verschiedene Vermittlungsverfahren technisch zu integrieren, näher ansehen. Dabei wird aus dem Zusammenhang deutlich, ob es sich um eine Integration in einer einzelnen Vermittlung handelt oder im gesamten Netz.

Im letzten Abschnitt haben wir die Vermittlungsverfahren mit ihren Vor- und Nachteilen gegenübergestellt. In einer integrierten Vermittlung wird angestrebt, die Vorteile der einzelnen Verfahren möglichst zu nutzen und die Nachteile zu vermeiden. Wir wollen uns zunächst die Möglichkeit, verschiedene Verfahren zu kombinieren, ansehen.

schnelle Durchschalte- vermittlung

Die Durchschaltevermittlung hat den wesentlichen Nachteil, dass bevor ein Austausch von Nutzinformationen stattfinden kann, die Verbindung aufgebaut werden muss. Bei der **schnellen Durchschaltevermittlung** wird angestrebt, die Verbindungsaufbauphase durch Verwendung schneller Technologien (schnellere Signalisierung, schnellere Verarbeitung der Steuerinformationen durch Parallelisierung usw.) abzukürzen. Beim herkömmlichen Fernsprechnetze dauert diese Phase etwa 10 Sekunden, im ISDN werden 1 bis 2 Sekunden erreicht. Man könnte bei einer Durchschaltevermittlung auch Prioritäten für bestimmte Verbindungen (z. B. Datenverbindungen) einführen und sie insbesondere bei der Signalisierung und Verarbeitung der Steuerinformationen bevorzugt behandeln – solche Ansätze wurden bisher in der Praxis kaum umgesetzt. Es ist auch möglich, für priorisierte Verbindungen bestimmte Wege durch die Vermittlung oder das gesamte Netz als permanente Verbindungen stets bereit zu halten – man spricht dann von festen Verbindungen.

Eine in der Praxis oft angewandte Integration ergibt sich, wenn Verbindungen in Durchschaltenetzen für das Paketvermittlungsnetz mitverwendet werden (Abb. 11.4-1). Hier werden Wählverbindungen aufgebaut und als permanente Verbindungen fürs Paketvermittlungsnetz verwendet. Die Vorteile dieser Lösung liegen auf der Hand. Bei Veränderungen des Verkehrsaufkommens des Paketvermittlungsnetzes können Verbindungen des Durchschaltenetzes hinzugenommen oder abgebaut werden.

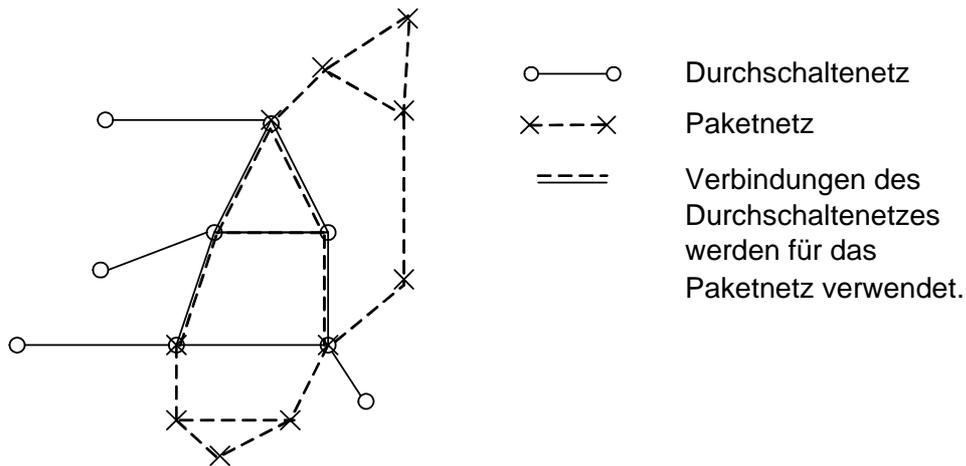


Abb. 11.4-1: Nutzung von festgeschalteten Verbindungen für ein Paketvermittlungsnetz

Es gibt auch Verfahren, die als **hybride Vermittlungsverfahren** bezeichnet werden, bei denen eine Integration der Durchschalte- und der Paketvermittlung im Kopfeld stattfindet. In Abb. 11.4-2a sind zwei Zeitrahmen einer Zeitstufe dargelegt. In einem Rahmen folgen nach dem Synchronwort eine feste Anzahl von Zeitschlitzen, die für die Durchschaltevermittlung zur Verfügung stehen.

**hybride
Vermittlungsverfahren**

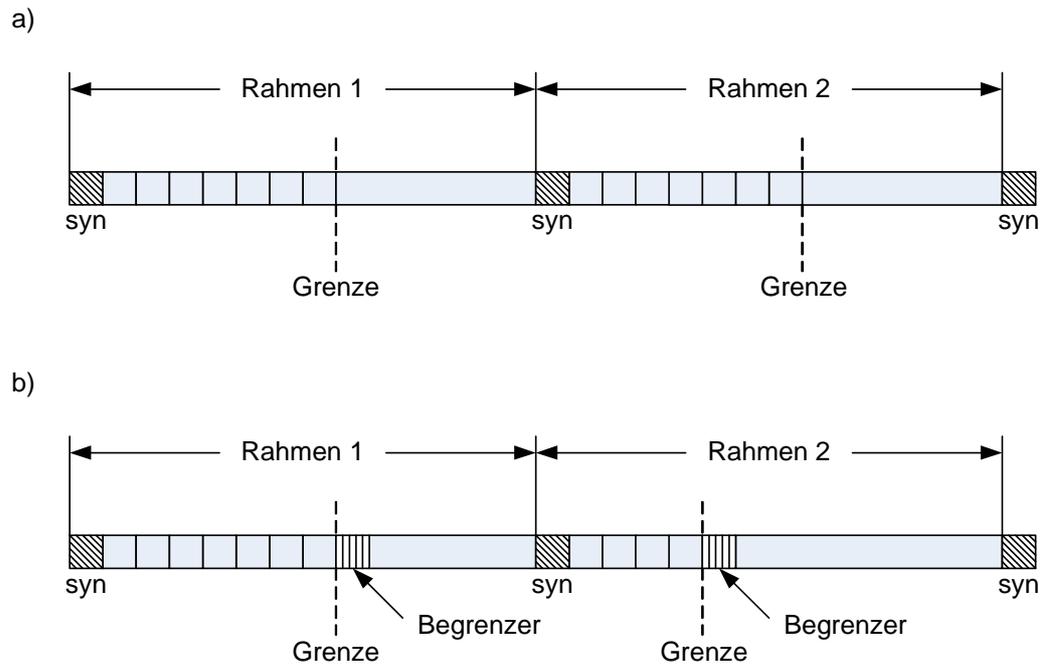


Abb. 11.4-2: Integration der Durchschalte- und Paketvermittlung im Koppelfeld - Hybride Vermittlungsverfahren
 a) Hybride Vermittlung mit fester Grenze zwischen Durchschalte- und Paketvermittlung
 b) Hybride Vermittlung mit dynamischer Grenze zwischen Durchschalte- und Paketvermittlung

Die restlichen Zeitschlitz im Rahmen werden für die Paketvermittlung verwendet. Das Verfahren wird flexibler, wenn die Grenze zwischen der Durchschalte- und der Paketvermittlung dynamisch nach Bedarf verschoben werden kann. Sie wird dann jedesmal, wenn eine Durchschalteverbindung hinzukommt oder abgebaut wird, verschoben. Es gibt verschiedene Verfahren, dies zu bewerkstelligen und die Grenze zu kennzeichnen. In Abb. 11.4-2b wird zur Kennzeichnung der Grenze ein Begrenzerbyte verwendet. Die Strategien zur Aufteilung der verfügbaren Bandbreite auf Durchschalte- und Speichervermittlung können verschieden ausgelegt sein. So kann im Extremfall z. B. durch die Zulassung von maximal so vielen Durchschalteanschlüssen, wie Zeitschlitz im Rahmen vorhanden sind und bevorzugter Zuteilung der Kapazität für Durchschalteverbindungen erreicht werden, dass alle Verbindungswünsche mit kontinuierlicher Bitrate (wie Sprache) wie bei der Durchschaltevermittlung behandelt werden; bei nicht erfolgter Ausnutzung der Bitrate für Durchschalteverbindungen steht diese für die Paketübermittlung zur Verfügung. Es können natürlich auch umgekehrt Strategien, die die Paketvermittlung bevorzugen, angegeben werden. Meist wird eine Kompromisslösung, die zwischen den beiden Extremfällen liegt, realisiert.

Wir haben bereits im letzten Abschnitt gesehen, dass die beiden Paketvermittlungsverfahren, Datagramme und virtuelle Verbindungen, sich nur geringfügig im Aufbau der Pakete und deren Behandlung unterscheiden. Es ist ohne weiteres möglich, dass in einem Netz sowohl Datagramme als auch virtuelle Verbindungen unterstützt werden. Hierdurch besteht für den Anwender die Möglichkeit kurze Nachrichten schnell und ohne große Zusatzaufwendung (*Overhead*) im Netz zu übermit-

teln, während längere Nachrichten ohne Sequenzierungsaufwendungen über virtuelle Verbindungen ausgetauscht werden können. Auch die Zusammenschaltung von Netzen mit reinen Datagrammen oder virtuellen Verbindungen ist möglich, obwohl nicht immer sinnvoll. So kann eine Datagramminsel in einem Netz mit virtuellen Verbindungen sinnvoll eingebettet werden (Abb. 11.4-3). An den Übergängen zwischen den Netzen muss eine Speicherung und Sequenzierung vorgenommen werden. Hierdurch wird gewährleistet, dass Nachrichten, die in fester Reihenfolge abgegeben werden, auch in dieser Reihenfolge wieder ankommen. Umgekehrt ist eine Einbettung einer Insel mit virtuellen Verbindungen in einem Datagrammnetz nicht sinnvoll, denn dem Teilnehmer kommen die Vorteile der virtuellen Verbindung nicht zugute. Insbesondere wird dies deutlich, wenn man betrachtet, wie ein Netz betrieben wird und welche Dienste es dem Teilnehmer anbietet. Ein Netz kann nämlich intern durchaus nur mit Datagrammen arbeiten, dem Teilnehmer aber virtuelle Verbindungen anbieten, indem es an der Schnittstelle zum Teilnehmer entsprechende Speicherung und Verarbeitung vornimmt.

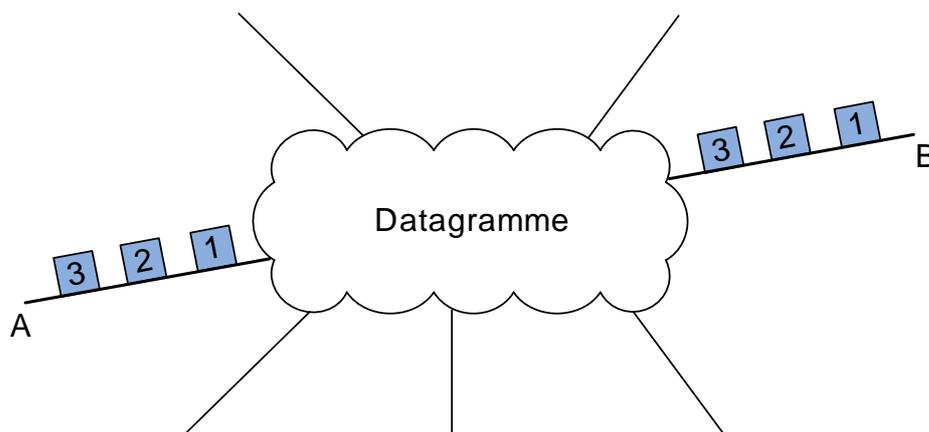


Abb. 11.4-3: Datagramminsel im Paketnetz mit virtuellen Verbindungen

Es gibt verschiedene Ansätze, ein Netz mit Paketvermittlung schneller zu machen, um ihm möglichst Eigenschaften wie bei einem Durchschaltenetz zu verleihen. Global werden solche Netze als **schnelle Paketvermittlungsnetze (Fast Packet Switching Networks)** bezeichnet. Einige solcher Ansätze sind:

- Die abschnittsweise zyklische Fehlerüberprüfung (**CRC - Cyclic Redundancy Check**) wird weggelassen, evtl. wird stattdessen eine Ende-zu-Ende Fehlerüberprüfung eingeführt.
- Auf die abschnittsweise Flusskontrolle wird verzichtet.
- Es wird eine kurze (für die Anwendungen möglichst optimale) feste Paketlänge verwendet.
- Die Adressen, Längeninformation und Synchronisationsworte werden parallel verarbeitet.

**schnelle
Paketvermittlung
Fast Packet Switching**

Cut Through Switching

- Durch den Einsatz neuerer und schnellerer Technologien und paralleler Verarbeitungsmethoden, wird eine schnellere Verarbeitung der Pakete erzielt. Insbesondere wird die virtuelle Adresse so angelegt, dass sie vom Koppelfeld direkt (dezentral) oder zentral schneller ausgewertet werden kann. So wird z. B. bei dem **Cut Through Switching** der Paketkopf bei der Ankunft am Vermittlungsknoten unmittelbar ausgewertet und die im Paket enthaltene Nutzinformation direkt (ohne Speicherung) durchgeschaltet.
- Die Pakete mit der Signalisierungsinformation werden als solche gekennzeichnet und bevorzugt abgefertigt. Alternativ wird ein getrennter unabhängiger Zeichengabekanal oder Zeichengabernetz verwendet.
- Dem Teilnehmer werden je Verbindung (diensteabhängig) maximale Bitraten zugeteilt und deren Einhaltung wird überwacht. Hierdurch wird versucht eine Überlast zu vermeiden. Solche Verfahren werden als Nutzungsüberwachung, *Policing* oder *Usage Parameter Control* bezeichnet.
- Alle mit der reinen Übermittlung im Netz verbundenen Aufgaben werden in die Schicht 2 verlagert. Hierdurch wird eine schnelle und einheitliche Behandlung der Pakete auf der Basis von Schicht-2-Rahmen möglich.

In der 1988 abgeschlossenen Studienperiode des **CCITT** (*Comité Consultatif International Télégraphique et Téléphonique*) wurden diese Vorschläge diskutiert und unter I.121: "Breitbandaspekte des ISDN" verabschiedet. Das für die schnelle Paketvermittlung empfohlene Verfahren wird als **ATM - Asynchronous Transfer Mode** bezeichnet. Asynchron bezieht sich hierbei, wie beim statistischen Multiplexen, darauf, dass die Zeitspanne zwischen den Ankünften der einzelnen Pakete einer Verbindung an einem Zwischenknoten nicht konstant ist. *Transfer mode*, manchmal auch **Frame Switching** genannt, bezieht sich darauf, dass alle Funktionen, die für den Transport der Pakete benötigt werden, in eine Schicht (Schicht 2) verlagert werden; es findet also eine Vermittlung der Schicht 2 Rahmen durch das Netz statt. Typische Merkmale des ATM-Verfahrens sind:

ATM Asynchronous Transfer Mode Frame Switching

- Kurze Nachrichtenpakete konstanter Länge (Zellen genannt),
- Bildung von virtuellen Verbindungen,
- Verlagerung aller Funktionen für den Transport von Zellen durch das Netz in Schicht 2.

Die Zellen sind 53 Byte lang und bestehen aus einem Kopf aus 5 Byte und einem Informationsteil aus 48 Byte. Auf Transportstrecken werden die Zellen lückenlos aneinander gereiht. Leerzellen werden zur Synchronisation verwendet (Abb. 11.4-4).

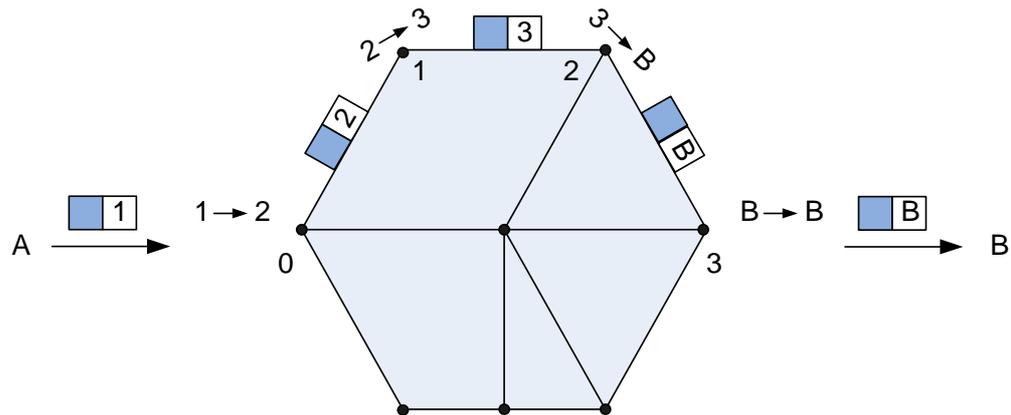


Abb. 11.4-6: Virtuelle Adressierung beim ATM-Verfahren

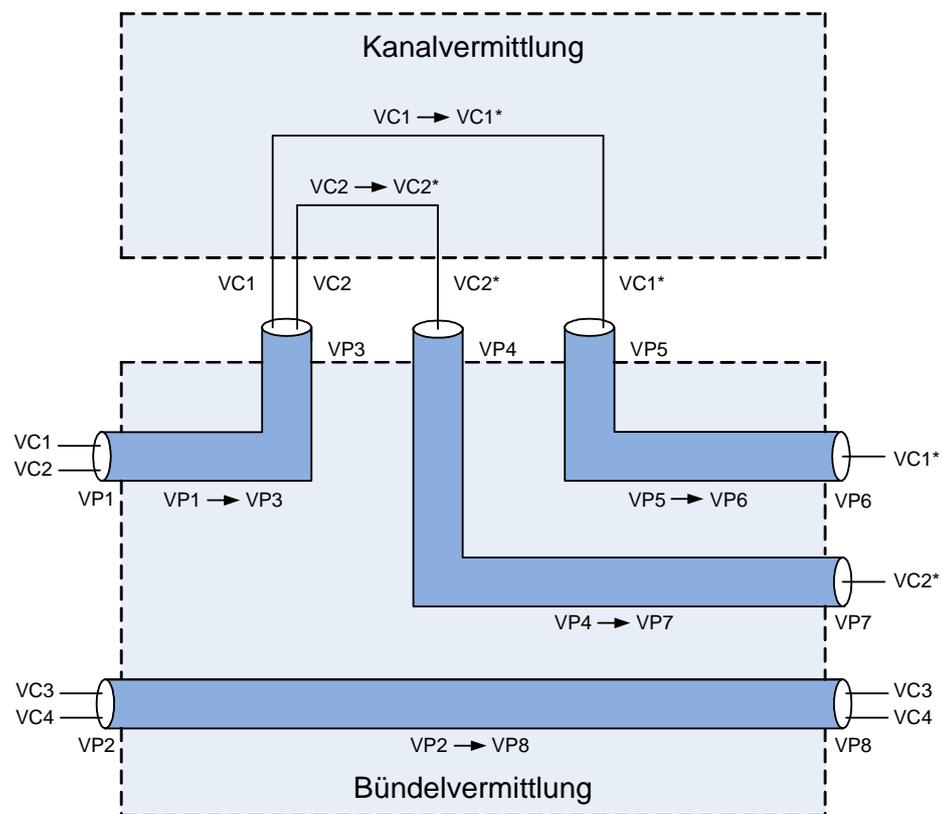


Abb. 11.4-7: Vermittlung virtueller Kanäle (VC switching)

In Abb. 11.4-8 sind die beiden Formate für ATM-Zellen wiedergegeben, auf die man sich bei ITU-T geeinigt hat. Beim Teilnehmeranschluss sind vier Bit für die Flusskontrolle vorgesehen. Der VPI besteht hier aus 8 Bit. Im Netzinneren ist keine Flusskontrolle vorgesehen. Der VPI wird dafür auf 12 Bit erweitert. Alle anderen Formate sind in beiden Netzteilen identisch. So besteht der VCI aus 16 Bit. Für die Kennzeichnung der Nutzinformation sind drei Bit vorgesehen. Ein weiteres Bit dient der Angabe der Zellpriorität. Dies ermöglicht z. B., dass beim Speicherüberlauf im Vermittlungsknoten zunächst die Zellen mit niedriger Priorität verworfen werden. Die Information im Zellkopf ist für die richtige Übermittlung der Zelle

äußerst wichtig. Sie wird deshalb durch Fehlererkennungs- und Fehlerkorrekturmaßnahmen geschützt. Hierfür ist ein Oktett vorgesehen. Das Informationsfeld der ATM-Zelle wird nicht geschützt.

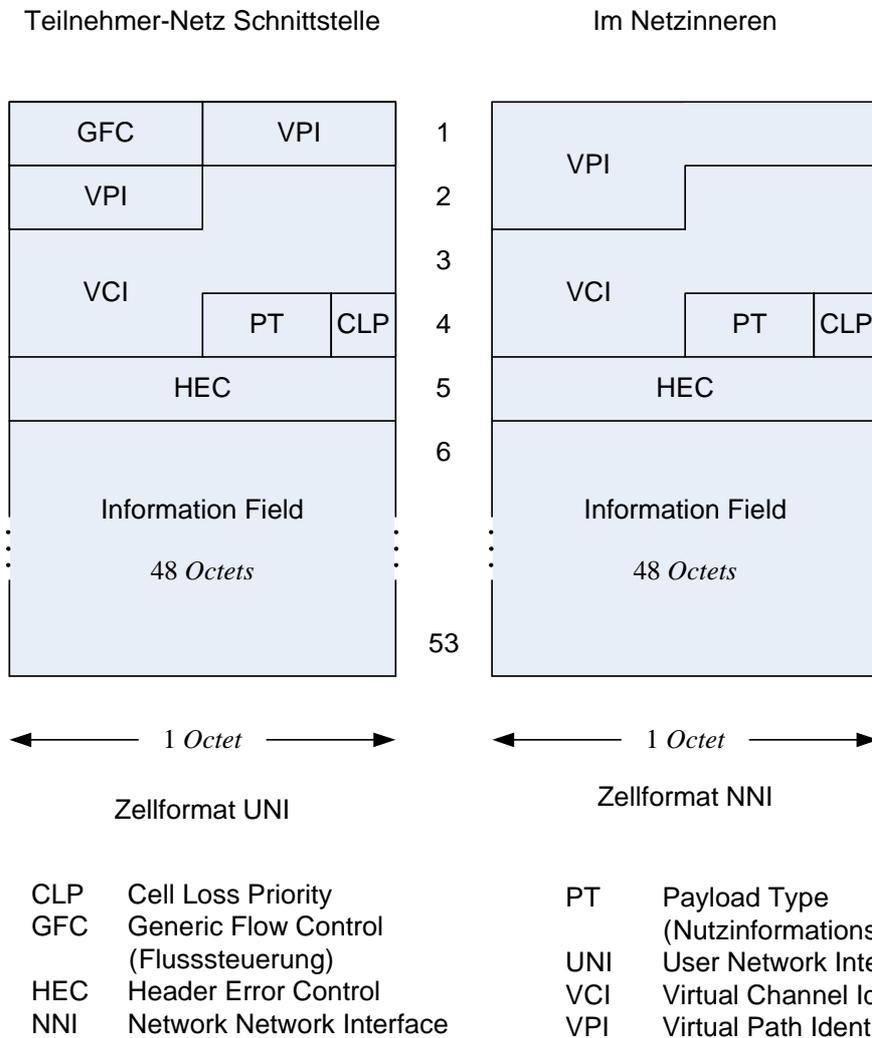


Abb. 11.4-8: ATM-Zellenformate an der Teilnehmer-Netz-Schnittstelle und im Netzinneren

Die **Anpassungsschicht** hat die Aufgabe, eine Anpassung zwischen der ATM-Schicht und den Anforderungen der höheren Schichten in der Anwender- und der Kontrollebene vorzunehmen. Sie übernimmt die Segmentierung und Speicherung am Eingang zum ATM-Netz, Behandlung der teilweise gefüllten Zellen, Erzeugung des Synchronisationssignals usw. Am Ausgang werden die Nachrichten wieder zusammengesetzt, gespeichert, um die variable Verzögerung der Zellen auszugleichen, und weitergeleitet. Auch die Behandlung der Fehler, insbesondere der Zellverluste, gehört zu den Aufgaben der Anpassungsschicht.

Anpassungsschicht

Kommunikationsprotokolle oberhalb der Anpassungsschicht werden im ATM-Referenzmodell als **höhere Schichten** bezeichnet. Man unterscheidet zwischen Funktionen der **Kontrollebene** und der **Anwenderebene**. In der **Kontrollebene** werden die restlichen Steuerungsaufgaben, wie die Zeichengabe und die Ende-zu-Ende Signalisierung, behandelt. Die **Anwenderebene** umfasst die diensterelevanten Aspekte an der Teilnehmer-ATM Schnittstelle (**UNI - User Network Interface**), bzw. am ATM-Netz-Eingang und -Ausgang.

Das ATM-Verfahren wurde für das Breitband-(Glasfaser-)Netz konzipiert, ist aber allgemein anwendbar. Es bietet die Möglichkeit, am Netzanschluss verschiedene Dienste zur Verfügung zu stellen. Diese Universalität wird durch Unterteilung der gesamten verfügbaren Kapazität in kleine Zellen, die nach Bedarf virtuellen Kanälen zugeteilt werden, möglich. Die Zellen haben eine feste Länge (5 Byte Kopf, 48 Byte Informationsfeld). Die gesamte für die Zellenlenkung im Netz erforderliche Information ist in einer Schicht (ATM-Schicht) im Kopf verfügbar. Hierdurch wird eine schnelle Übermittlung durch das Netz möglich. Pro Zwischenvermittlung wird eine Verzögerung einer Zelle von $5 - 10 \mu s$ erwartet. Das Verfahren ermöglicht daher eine Integration verschiedener Dienste. Das Netz bietet Eigenschaften sowohl der Durchschaltevermittlung als auch der Paketvermittlung nach Bedarf. Es sei hier an die Ziele bei der Festlegung der synchronen Multiplexhierarchie (Abschnitt 10.3) erinnert. Dort wurde eine Strategie, die es ermöglicht, Netze synchron zu betreiben, entwickelt. Das ATM-Verfahren ermöglicht gerade das Gegenteil. Durch die Vermittlung von Zellen über verschiedene Netzknoten hinweg, lediglich mit Änderung des Kopfes in den Zwischenvermittlungen, wird eine asynchrone Betriebsmöglichkeit eröffnet.

Selbsttestaufgabe 11.4-1:

Wie viele virtuelle Pfade und virtuelle Kanäle können nach dem ITU-T Zellenformat (Abb. 11.3-10) für ATM adressiert werden?

Selbsttestaufgabe 11.4-2:

Eine PCM-Fernsprechverbindung wird über ein ATM-Netz übermittelt. Wie viele PCM-Wörter werden in einer Zelle entsprechend dem ITU-T Zellenformat verpackt? Welche Verzögerung entsteht hierdurch?

12 Mehrfach-Zugriffsverfahren / Lokale Netze

12.1 Polling (Sendeaufruf)

Bisher haben wir uns häufig auf die Kommunikation zwischen zwei Partnern beschränkt. Ein Übertragungskanal stand zur Verfügung, der gegebenenfalls in Multiplextechnik genutzt wurde. Im Abschnitt 10.4 lernten wir Richtungstrennungsvorgänge kennen, die es ermöglichen, einen Übertragungskanal im Duplexbetrieb (d. h. für die Übertragung von Informationen in beiden Richtungen) einzusetzen. Wir wenden uns nun dem allgemeineren Fall zu, dass ein Übertragungsmedium mehreren Partnern zur Verfügung steht. Wir begegnen diesem Fall bereits bei der Multiplexbildung, insbesondere in einer komplexeren Form bei der statistischen Multiplexbildung im Abschnitt 11.3. Hierbei wurde die Prozedur zur Zuteilung des Kanals an die jeweiligen Kommunikationspartner allerdings nicht näher betrachtet. Bei der Paketvermittlung (auch im Abschnitt 11.3) tritt ein ähnlicher Fall auf, dabei wird im Vermittlungsknoten eine Warteschlange gebildet, und die Zuteilung des Kanals wird zentral geregelt. Wir wenden uns nun einigen allgemeinen Fällen zur Zuteilung des Übertragungsmediums zu, wie sie insbesondere in Lokalen Netzen (LAN) vorkommen.

Häufig tritt der Fall auf, dass mehrere Kommunikationspartner mit einer zentralen Einheit Informationen austauschen. Ein solches Beispiel ist die Kommunikation zwischen Peripherieeinheiten und einem zentralen Prozessor. Meistens wird in diesen Fällen ein als **Polling** oder **Sendeaufruf** bezeichnetes Verfahren angewandt. Wir wollen zwei Varianten des Polling-Verfahrens kennenlernen.

In der einfachen Variante, die als **Sequential Polling (sequentieller Sendeaufwurf)** bezeichnet wird, ruft die zentrale Einheit die einzelnen Stationen durch das Senden eines adressierten Sendeaufwurfs auf. Dieser wird als *Poll* bezeichnet. Die aufgerufene Peripherieeinheit (Station) sendet hierauf die zu übertragenden Daten oder sendet eine Meldung, dass keine Daten vorhanden sind. Hat die zentrale Einheit Daten an die Peripherie zu übertragen, so schickt sie anstatt des Sendeaufwurfs (*Poll*) eine adressierte **Auswahl-Meldung**, die als **Selection** bezeichnet wird, an die Peripherie. Diese antwortet mit der Meldung *RR (Receive Ready)*, falls sie bereit ist, die Daten aufzunehmen oder *RNR (Receive Not Ready)* im anderen Fall. In Abb. 12.1-1 ist ein typischer Ablauf des *Sequential Polling* mit den ausgetauschten Meldungen dargestellt. Wegen der Übersichtlichkeit sind die jeweiligen Adressen in den Meldungen im Bild nicht dargestellt. Meist wird auch eine Fehlersicherung der Meldungen und Quittierung der Daten vorgenommen.

Bei der Variante **Hub Polling (Aufrufweiterleitung)**, die in Abb. 12.1-2 dargestellt ist, wird der Sendeaufwurf (*Poll*) von einer Einheit zur nächsten weitergeleitet. Hat eine Station eine Nachricht zu senden, so tut sie dieses, wenn sie den Sendeaufwurf erhält. Hat sie keine Daten zu übertragen, so gibt sie den Sendeaufwurf weiter an die nächste Station. Auch hier kann eine Fehlersicherung und Quittierung implemen-

Polling
Sendeaufruf

Sequential Polling
sequentieller
Sendeaufruf

Auswahl-Meldung
Selection
Receive Ready
Receive Not Ready

Hub Polling
Aufrufweiterleitung

tiert werden. Das Hub Polling-Verfahren stellt den ersten Schritt zur Dezentralisierung der Kommunikationsprozedur dar. Die zentrale Einheit ist die Datensinke. Sie hat lediglich die Überwachung des Kommunikationsablaufes als zusätzliche Aufgabe. Die Generierung des Aufrufes wird dezentral von den einzelnen Stationen vorgenommen. Diese müssen nun größere "Intelligenz" aufweisen. Wir werden weitere dezentrale Zugriffsverfahren in Kürze kennenlernen, wollen jedoch eine Zeitanalyse der beiden Polling-Verfahren voranstellen.

Zykluszeit Als **Zykluszeit** t_c eines Polling-Verfahrens (**cycle time**) bezeichnen wir die Zeit, die erforderlich ist, bis einmal alle Stationen aufgerufen werden, ihre Daten übertragen haben und der Aufruf an die Anfangsstelle zurückkehrt. Diese ist von Zyklus zu Zyklus unterschiedlich und kann als eine Zufallsvariable aufgefasst werden.

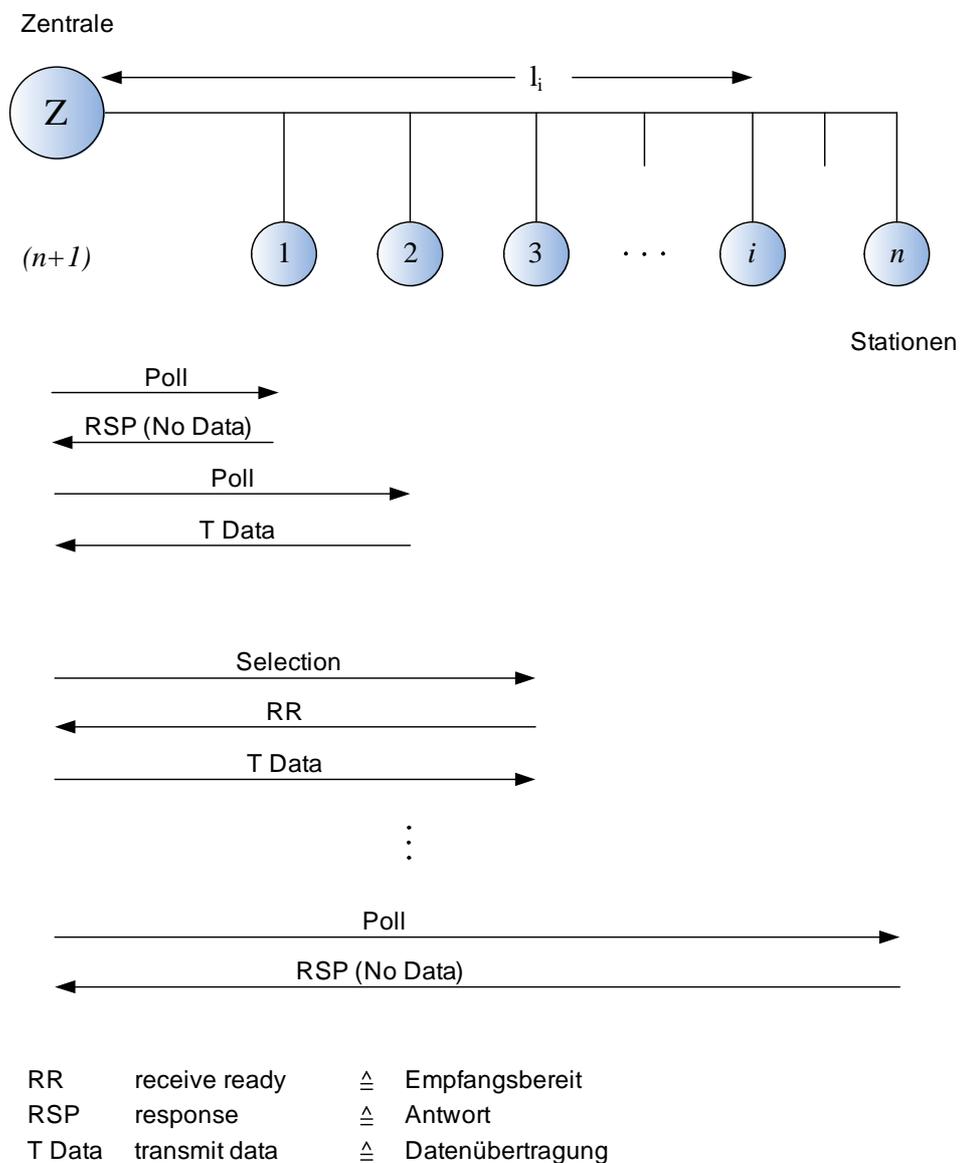


Abb. 12.1-1: Sendeaufruf (Sequential Polling)

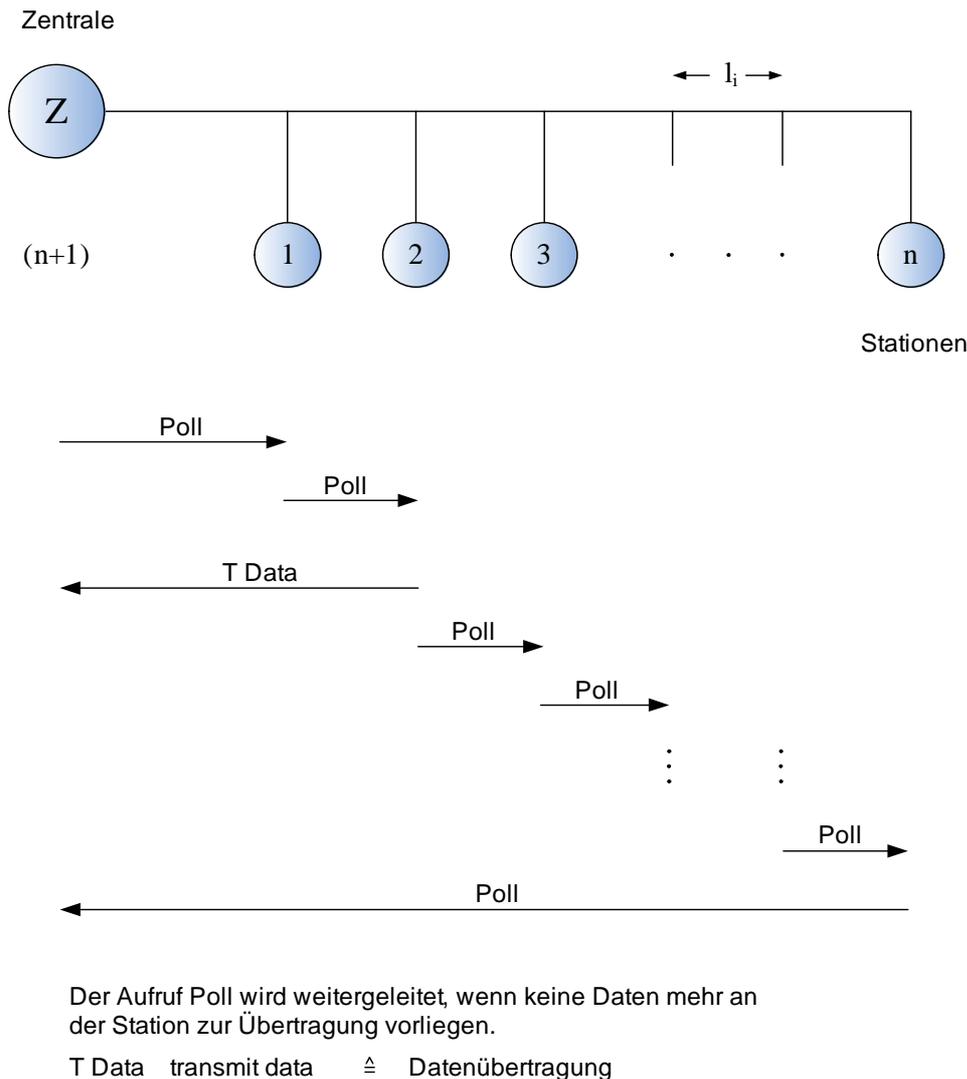


Abb. 12.1-2: Sendeaufruf (Hub Polling)

Für das Sequential Polling-Verfahren besteht die Zykluszeit aus drei Komponenten: der Reaktionszeit der Zentrale, der Reaktionszeit der Peripheriestationen und der Übertragungszeit. Die Reaktionszeit der Zentrale t_z ist die Zeit, die die Zentrale benötigt, um nach einer Meldungsankunft zu erkennen, dass die Peripheriestation keine Daten zu übertragen und sie die Generierung des nächsten Sendeaufrufs zu beginnen hat. Die Reaktionszeit einer Peripheriestation t_p ist die Zeit, die eine Peripheriestation benötigt, um nach einer Meldungsankunft zu erkennen, dass sie aufgerufen wurde (Adressidentifizierung) und hierauf mit der Generierung einer Meldung zu reagieren. Gewöhnlich ist diese Zeit etwas größer als die Reaktionszeit der Zentrale. Wir nehmen an, dass alle Peripheriestationen die gleiche Reaktionszeit t_p haben. Die Übertragungszeit t besteht aus der Signallaufzeit l_i , die ein Signal benötigt, um die Strecke von der Zentralstation zu der i -ten Station und zurück zu durchlaufen, und der Datenübertragungszeit d_i . Bei Kabelnetzen beträgt l_i einige μs , während sie bei Satelliten- und Funkübertragung einige ms betragen kann. Die Datenübertragungszeit d_i , die für die i -te Station aufgewandt wird, besteht aus zwei Komponenten, t_{ni} und t_{do} . t_{ni} ist die Zeit, die benötigt wird, um die Nutzinformation zu übertragen, während t_{do} die Zeit ist, die benötigt wird, um Steuerinformationen (wie Synchronisationswort, Adressierung, Sicherung, Quittierung, Signalisierung

usw.) pro Station in jeweils eine Richtung zu übertragen. Wir nehmen vereinfachend an, dass diese Zeit für alle Peripheriestationen konstant ist, und erhalten für den Fall, dass Nutzdaten nur von den Peripheriestationen zur Zentrale gesendet werden:

$$t_c = nt_z + nt_p + \sum_{i=1}^n l_i + 2nt_{do} + \sum_{i=1}^n t_{n_i}. \quad 12.1-1$$

Für ein vorgegebenes System sind die ersten vier Terme in Gl. 12.1-1 konstant. Wir fassen diese zu t_{co} zusammen und erhalten

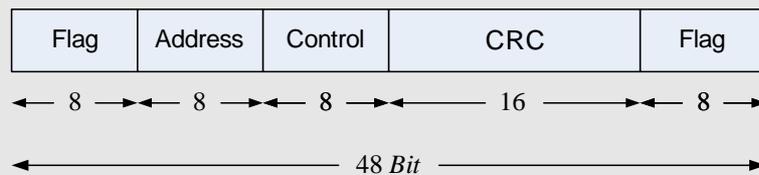
$$t_c = t_{co} + \sum_{i=1}^n t_{n_i}. \quad 12.1-2$$

Betrachtet man die Ankunft einer Meldung an einer Station, so kann man vereinfachend ansetzen, dass diese im Mittel die halbe mittlere Zyklusdauer $\frac{1}{2}E\{t_c\}$ warten muss. Bei geringem Datenverkehr liegt diese nahe bei $\frac{1}{2}t_{co}$ – diese stellt die minimale Wartezeit dar. Für eine genauere Analyse sind Zustandsbetrachtungen, wie wir sie im Kapitel 9 angestellt haben, erforderlich.

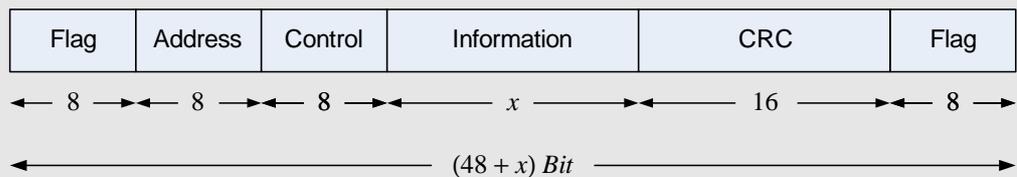
Beispiel 12.1-1:

Wir betrachten ein sequentielles Poll-System mit 10 Peripheriestationen, die sich jeweils im Abstand von 10, 20, 30 ... 100 km von der zentralen Einheit entfernt befinden. Die Reaktionszeit der Zentrale sei 0,5 ms, die der Stationen jeweils 1 ms. Die Signallaufzeit sei 10 μ s pro km.

Die Poll- und RSP (*Response - No Data*)-Meldungen haben das Format:



Die Transmit Data-Meldungen haben das Format:



Hierbei ist x die Länge der Nutzinformation. Es werden pro Meldung jeweils 48 Bit als Steuerinformation erforderlich. Bei einer Übertragungsrate von 64 kbit/s benötigt man hierfür jeweils

$$t_{do} = \frac{48 \text{ bit}}{64 \text{ kbit/s}} = 0,75 \text{ ms.}$$

Wenn keine Meldungen vorliegen, beträgt die Zyklusdauer

$$\begin{aligned} t_{co} &= 10t_z + 10t_p + \sum_{i=1}^{10} l_i + 2n \cdot t_{do} \\ &= 10 \times 0,5 \text{ ms} + 10 \times 1 \text{ ms} + 2 \cdot \frac{10 \mu\text{s}}{\text{km}} \cdot \sum_{i=1}^{10} 10 \cdot i \cdot \text{km} \\ &\quad + 2 \times 10 \times 0,75 \text{ ms} \\ &= 15 \text{ ms} + 200 \cdot \frac{10 \times 11}{2} \mu\text{s} + 15 \text{ ms} \\ &= 15 \text{ ms} + 11 \text{ ms} + 15 \text{ ms} = 41 \text{ ms.} \end{aligned}$$

Ist der Durchsatz pro Peripheriestation 80 bit/s im Mittel, so fallen pro Zyklus und Station Nutzdaten im Umfang von

$$\frac{80 \text{ bit}}{s} \cdot t_c$$

an, für deren Übertragung bei 64 kbit/s die Zeit

$$\frac{80 \text{ bit}}{s} \cdot \frac{t_c s}{64 \text{ kbit}} = 1,25 \cdot 10^{-3} t_c$$

erforderlich ist.

Somit erhält man aus Gl. 12.1-2

$$E\{\mathbf{t}_c\} = t_{co} + n \cdot 1,25 \cdot 10^{-3} \cdot E\{\mathbf{t}_c\}$$

oder mit $n = 10$

$$\begin{aligned} 0,9875 E\{\mathbf{t}_c\} &= 41 \text{ ms} \\ \underline{E\{\mathbf{t}_c\}} &= \underline{41,52 \text{ ms.}} \end{aligned}$$

Somit wartet eine Meldung im Mittel

$$\frac{1}{2} \cdot E\{\mathbf{t}_c\} = 20,76 \text{ ms}$$

an einer Station.

Die Zeitanalyse beim Hub Polling-Verfahren kann analog zum Sequential Polling-Verfahren durchgeführt werden. Man erhält

$$t_c = t_z + nt_p + \sum_{i=1}^{n+1} l_i + \sum_{i=1}^{n+1} t_{d_i} + \sum_{i=1}^n t_{n_i}. \quad 12.1-3$$

Die Zyklusdauer t_c setzt sich aus ähnlichen Komponenten wie bei Gl. 12.1-2 zusammen, wobei nun die einzelnen Symbole geringfügig anders interpretiert werden. So ist t_{n_i} und t_{d_i} die Zeit für die Übertragung der Nutz- bzw. der Steuerdaten der i -ten Station.

Beispiel 12.1-2:

Analog zum Beispiel 12.1-1 betrachten wir ein Hub-Poll-System mit 10 Peripheriestationen im Abstand von 10, 20, 30 ... 100 km von der zentralen Einheit entfernt. Die Reaktionszeit der Zentrale sei wieder 0,5 ms. Die Reaktionszeit der Stationen sei jeweils 1,2 ms. Sie ist etwas größer als beim Sequential Polling-Verfahren, da nun die Stationen jeweils ein Poll mit der Adresse der nächsten Station generieren. Liegen keine Daten zur Übertragung vor, so ist die Laufzeit

$$\sum_{i=1}^{n+1} l_i = 2L,$$

wobei L die Laufzeit von der Zentrale zur letzten Station ist – in unserem Beispiel ist $L = 100 \text{ km} \times 10 \frac{\mu\text{s}}{\text{km}} = 1 \text{ ms}$. Liegen wiederum keine Daten vor und verwenden wir Poll Meldungen mit 48 Bit und eine Bitrate von 64 kbit/s, so erhalten wir

$$t_{do} = \frac{48 \text{ bit}}{64 \text{ kbit/s}} = 0,75 \text{ ms}.$$

Wir haben hierbei berücksichtigt, dass eine RSP (*No Data*) nicht verwendet wird. Da auch die Zentrale eine Poll-Meldung generiert, haben wir pro Zyklus $(n + 1)$ solche Meldungen. Die Zykluszeit, wenn keine Daten zur Übertragung vorliegen, ist damit

$$\begin{aligned} t_{co} &= t_z + n \cdot t_p + 2L + (n + 1)t_{do} \\ &= 0,5 \text{ ms} + 10 \times 1,2 \text{ ms} + 2 \text{ ms} + 11 \cdot 0,75 \text{ ms} \\ &= 12,5 \text{ ms} + 2 \text{ ms} + 8,25 \text{ ms} \\ &= 22,75 \text{ ms}. \end{aligned}$$

Wenn keine Daten zur Übertragung vorliegen, so ist die Zykluszeit beim *Hub Polling* in der Regel wesentlich kürzer als beim Sequential Polling-Verfahren.

Selbsttestaufgabe 12.1-1:

Wir betrachten ein sequentielles Poll-System mit 10 Peripheriestationen, die sich jeweils im Abstand von 10, 20, 30, . . . , 100 km von der zentralen Einheit entfernt befinden. Die Reaktionszeit der Zentrale sei $t_z = 0,5$ ms. Die Reaktionszeit t_p der Peripheriestationen sei 1 ms. Die Signallaufzeit sei $10 \mu\text{s}$ pro km. Wir betrachten den Grenzfall, dass so viel Verkehr vorhanden ist, dass pro Zyklus und Station stets eine Meldung vorliegt.

Die Nutzinformation pro Meldung umfasst 256 Bit und sei an allen Stationen gleich groß. Es sind pro Meldung jeweils 48 Bit als Steuerinformation erforderlich. Die Übertragungsrate beträgt 64 kbit/s.

- Berechnen Sie die Zeit t_{d_0} , die für die Übertragung der Steuerinformation aufgewendet wird.
- Berechnen Sie die Zeit t_{n_i} , die für die Übertragung der Nutzinformation verbleibt.
- Wie viel ms beträgt die Zyklusdauer t_c ?
- Berechnen Sie den Durchsatz.

12.2 CSMA-Verfahren

Wir wenden uns nun **dezentralen Zugriffsverfahren** zu. Es handelt sich hierbei um den Fall, dass mehrere Stationen, die an einem Medium angeschlossen sind, miteinander Nachrichten austauschen können und dezentral auf das Medium zugreifen. Beispiele hierzu sind Lokale Netze und Mehrfachzugriff-Verfahren auf Funk- und Satellitenkanälen. Dezentrale Zugriffsverfahren können grob in zwei Klassen eingeteilt werden. Bei **stochastischen Zugriffsverfahren (random access)** greifen die Stationen auf das Medium zu, wenn Nachrichten zur Übertragung vorliegen, wobei verschiedene Vereinbarungen getroffen werden können, um beim gleichzeitigen Zugriff von mehreren Stationen einen geregelten Ablauf zu gewährleisten. Bei **deterministischen Zugriffsverfahren (token access)** wird der Zugriff über eine Sendeberechtigung geregelt – wer diese hat, darf auf das Medium zugreifen. Auch hier können verschiedene Vereinbarungen getroffen werden, nach denen das Token (die Sendeberechtigung) an einzelne Stationen übergeben wird. Wir wollen sowohl stochastische als auch deterministische Verfahren etwas näher ansehen.

**dezentrale
Zugriffsverfahren**

**stochastische
Zugriffsverfahren
random access**

**deterministische
Zugriffsverfahren
token access**

Das erste stochastische Zugriffsverfahren (*random access*) wurde 1970 an der University of Hawaii implementiert und ist als **Aloha-System** bekannt. In der Grundversion (**pure Aloha**) greifen die Stationen auf das Übertragungsmedium zu, sobald eine zu übertragende Nachricht vorliegt. Es entsteht eine Situation, wie sie in Abb. 12.2-1 dargestellt ist, wobei wir vereinfachend angenommen haben, dass alle Nachrichten die gleiche Länge von P Bits aufweisen. Betrachtet man die i -te Nachricht, so sieht man (Abb. 12.2-1 b), dass eine Kollision genau dann eintritt,

**Aloha-System
pure Aloha**

wenn innerhalb des Intervalls $2P\tau$ (τ ist dabei die Dauer einer Bitübertragung) eine weitere Meldung ankommt. Nimmt man nun an, dass der Ankunftsprozess der Nachrichten ein Poisson-Prozess mit der Ankunftsrate λ ist, so sind die einzelnen Ankünfte voneinander unabhängig. Die Wahrscheinlichkeit, dass keine Ankunft in dem Intervall $2P\tau$ liegt, ist (vgl. Gl. 9.2-9)

$$1 - P\{t \leq 2P\tau\} = e^{-2\lambda P\tau}. \quad 12.2-1$$

Dies ist auch die Wahrscheinlichkeit, dass keine Kollision auftritt. Da die Ankunftsrate λ ist, ist der Durchsatz

$$D = \text{Ankunftsrate} \times \text{Wahrscheinlichkeit, dass keine Kollision auftritt}$$

$$D = \lambda e^{-2\lambda P\tau}. \quad 12.2-2$$

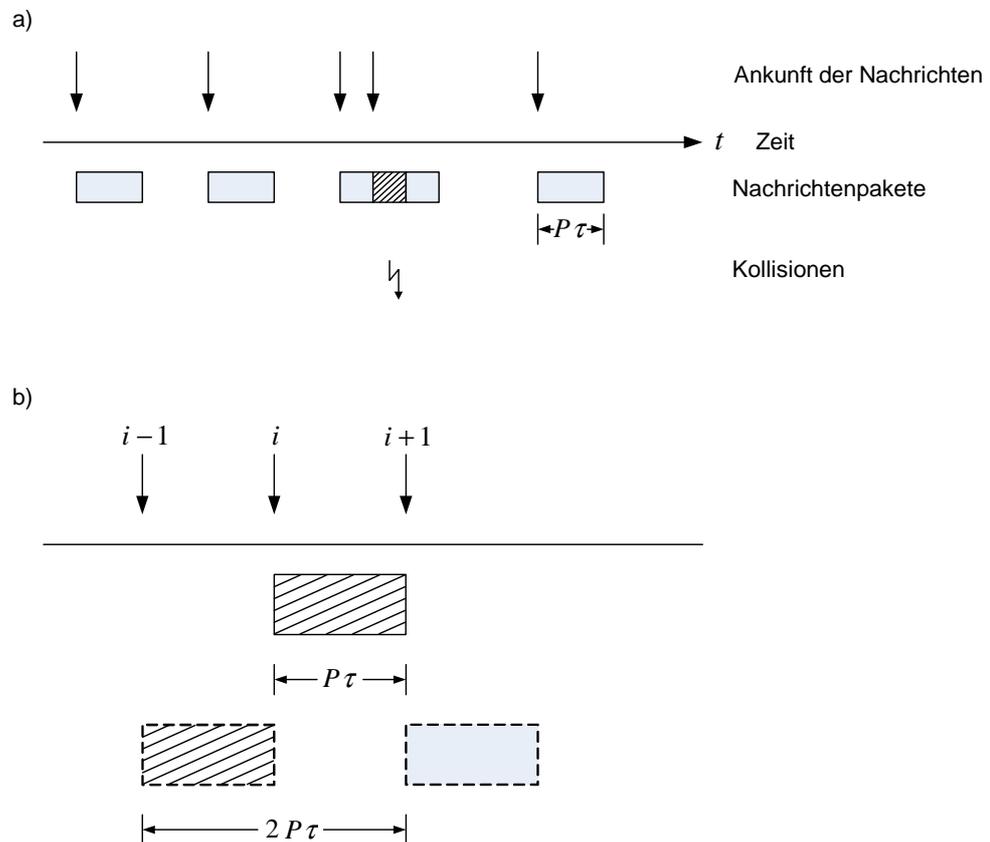


Abb. 12.2-1: Pure Aloha

a) Zufällig ankommende Nachrichten gleicher Länge

b) Kollisionsbereich $2P\tau$,

In Abb. 12.2-2 ist D in Abhängigkeit von λ (für $P\tau = 1$) dargestellt. Das Maximum ergibt sich für $\lambda = \frac{1}{2}$, d. h. für $E\{\mathbf{T}_B\} = \frac{1}{\lambda} = 2$, wie zu erwarten ist. Ist die Ankunftsrate niedriger als $\lambda = \frac{1}{2}$, so wird der Durchsatz geringer, weil im Wesentlichen nicht genügend Verkehr angeboten wird. Ist die Ankunftsrate größer als $\lambda = \frac{1}{2}$, so wird der Durchsatz wieder geringer, weil vermehrt Kollisionen auftreten. Der maximale Durchsatz von 18,4 % ist recht gering. Wir werden im Folgenden noch sehen, wie dieser erhöht werden kann.

In unseren bisherigen Betrachtungen haben wir angenommen, dass Kollisionen keine Rückwirkung auf die Ankunftsrate der Meldungen haben. Wir nehmen nun an, dass Kollisionen lediglich die Ankunftsrate auf λ' erhöhen. Wir haben dabei nicht betrachtet, wie diese Rückkopplung tatsächlich zustande kommt. Die Annahme ist erfüllt, wenn die Wiederholungen nach Kollisionen auch einen Poisson-Prozess bilden, der von dem ursprünglichen Ankunftsprozess unabhängig ist und die Wiederholrate nun größer als λ ist. Für den Fall, dass recht viele Stationen vorhanden sind und Kollisionen häufig vorkommen, dürfte unsere Annahme annähernd erfüllt sein. Wir erhalten für diesen Fall

$$D = \lambda' e^{-2\lambda' P\tau} \quad 12.2-3$$

mit $\lambda' > \lambda$.

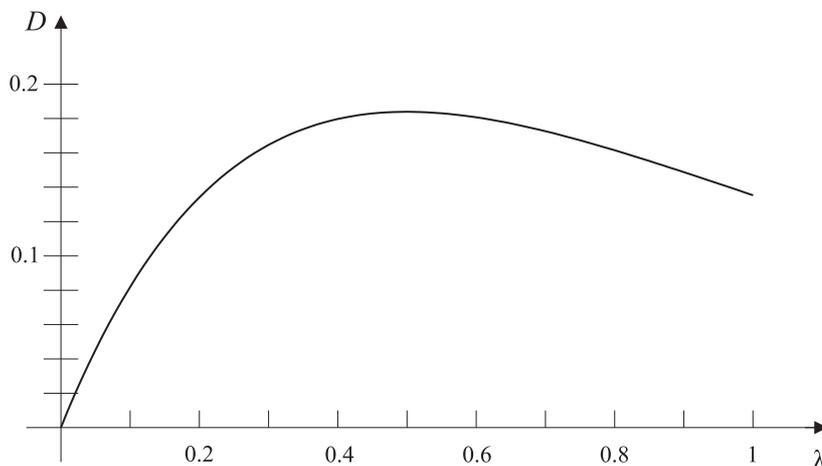


Abb. 12.2-2: Durchsatz D in Abhängigkeit der Ankunftsrate λ bei Aloha (für $P\tau = 1$)

Wir betrachten als nächstes den Fall, dass das Übertragungsmedium synchron betrieben wird, d. h., dass ein Takt vorhanden ist, zu dem die Stationen eine Meldung absetzen können. Dieser Takt sei so gewählt, dass die Nachrichten jeweils gerade in einer Taktperiode gesendet werden können, d. h.

$$T = P \cdot \tau. \quad 12.2-4$$

Die Ankünfte seien wieder Poisson verteilt. Die ankommenden Nachrichten werden nun an den Stationen gespeichert, bis die nächste Taktperiode beginnt. Da wir wieder von vielen Stationen ausgehen, können wir in unserem Modell stets annehmen, dass alle in einer Taktperiode ankommenden Nachrichten an verschiedenen Stationen vorliegen. Dieses **getaktete Aloha-System** ist als **slotted Aloha** bekannt. Durch die Taktung können Kollisionen jeweils nur am Anfang einer Taktperiode auftreten (Abb. 12.2-3) und nicht mehr über die ganze Nachricht, wie beim pure Aloha-Verfahren. Eine Kollision mit einer vorliegenden Nachricht tritt somit nicht auf, wenn in der vorangegangenen Taktperiode keine (weitere) Nachricht ankam, d. h. mit der Wahrscheinlichkeit

getaktetes
Aloha-System
slotted Aloha

$$1 - P\{t \leq P\tau\} = e^{-\lambda P\tau}. \quad 12.2-5$$

Für den Durchsatz gilt entsprechend

$$D = \lambda e^{-\lambda P\tau}$$

12.2-6

In Abb. 12.2-4 ist der Durchsatz des slotted Aloha-Verfahrens im Vergleich zum pure Aloha-Verfahren aufgezeichnet. Man sieht, dass durch die Taktung der maximale Durchsatz verdoppelt werden kann.

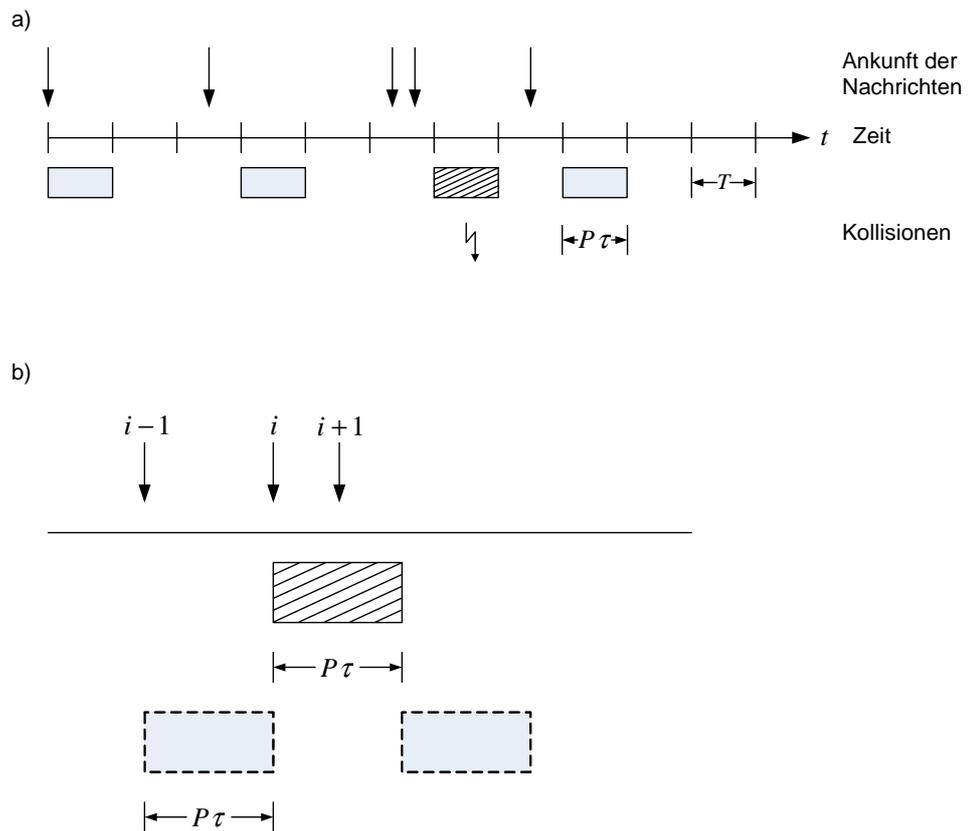


Abb. 12.2-3: Slotted Aloha ($P\tau = T$)

a) Zufällig ankommende Nachrichten gleicher Länge

b) Kollisionsbereich $P\tau$,

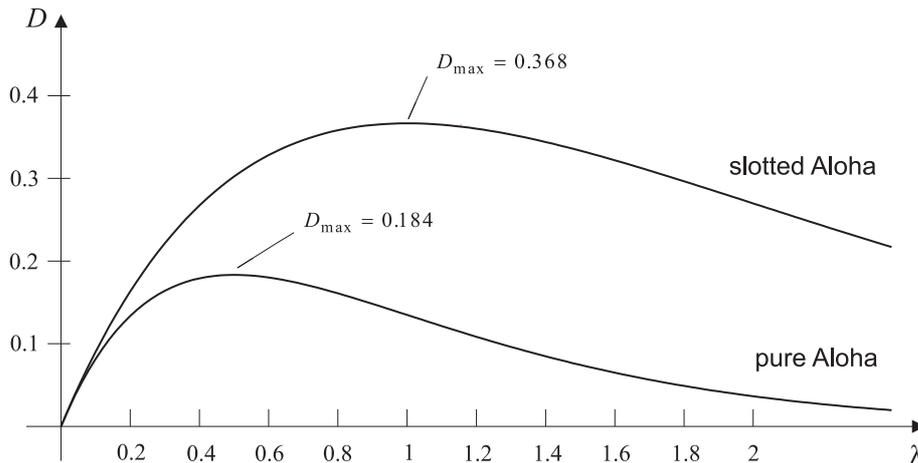


Abb. 12.2-4: Durchsatz D in Abhängigkeit von der Ankunftsrate λ bei pure und slotted Aloha
 ($P\tau = 1$)
 P = Paketlänge
 τ = Takt

Unsere bisherigen Betrachtungen zeigen, dass beide Aloha-Systeme instabil sind, indem eine Erhöhung der Ankunftsrate zu einer erheblichen Verringerung des Durchsatzes führen kann. Insbesondere kann das Wissen über den Zustand des Systems zur Optimierung des Durchsatzes verwendet werden, indem versucht wird, das Verkehrsangebot so zu gestalten, dass der maximale Durchsatz erreicht wird bzw. erhalten bleibt. Da die Sendestationen jedoch dezentral angeordnet sind, ist eine solche Optimierung nicht ohne weiteres möglich. Treten Kollisionen auf, so werden diese an den Empfangsstationen gewöhnlich über Sicherungsverfahren (meist CRC) erkannt, und die Nachrichten werden wieder angefordert. Dieses führt zu erhöhtem Verkehrsangebot und so wiederum zu mehr Kollisionen. Häufig ist es so, dass die sendende Station auch das Medium abhört, so dass sie beim Auftreten einer Kollision diese erkennt, falls die gesendete Nachricht verfälscht wird. Sie kann dieses Wissen zur Optimierung des Durchsatzes verwenden, wobei sie allerdings meist nur einen kleinen Anteil am gesamten Verkehrsaufkommen hat. Es gibt auch Varianten, bei denen eine Station, die eine Kollision erkennt, die Übertragung der Nachricht abbricht und eine Rundsendung (*Jam*) an alle schickt, dass eine Kollision aufgetreten ist. Somit können alle Stationen ihr Verkehrsangebot an die Häufigkeit der Kollisionen anpassen und so dynamisch eine Optimierung des Durchsatzes anstreben. Die räumliche Entfernung spielt hierbei eine gewisse Rolle, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 12.2-1:

Wir betrachten drei Stationen, die über ein Koaxkabel kommunizieren und wie folgt angeschlossen sind:



Nimmt man eine Signallaufzeit von $5 \mu\text{s}$ pro km für das Koaxkabel an, so benötigt ein Signal $5 \cdot 10^{-7}$ Sekunden, um 100 Meter zu überbrücken. Wird das System mit 10 Mbit/s betrieben, so benötigt man pro Bit die Übertragungszeit von 10^{-7} Sekunden. Nimmt A eine Kollision wahr und sendet eine Jam-Meldung ab, so könnte B bereits 5 Bit und C bereits 15 Bit abgesendet haben, bevor sie diese Meldung erreicht. Sind die Entfernungen 1 km (statt 100 m) und 2 km (statt 200 m), so könnte B bereits 50 Bit und C bereits 150 Bit in der Zwischenzeit abgesendet haben.

Wir betrachten nun das getaktete Aloha-Verfahren (*slotted Aloha*) für den Fall, dass eine Kollision von den an der Kollision beteiligten Stationen erkannt wird. Tritt nun eine Kollision auf, so würden die an ihr beteiligten Stationen in der nächsten Taktperiode versuchen, die Meldung wieder abzusetzen. Dies würde erneut zu einer Kollision führen. Um solche Kollisionswiederholungen zu vermeiden, ist es erforderlich, eine Strategie über das Verhalten der Stationen, die an einer Kollision beteiligt sind, zu vereinbaren. Solche Strategien werden **contention resolution** oder **Kollisionsauflösungs-Strategien** genannt. Die Kollisionsauflösungs-Strategien können wiederum stochastisch oder deterministisch sein. Wir wollen einige dieser Strategien kennenlernen. Die einfachste stochastische Strategie (**gleichverteilte Wiederholung zur Kollisionsauflösung**) besteht darin, dass jede an einer Kollision beteiligte Station eine ganze Zahl i mit $1 \leq i \leq n$ auswürfelt und die Nachricht in der i -ten Taktperiode sendet. Diese Strategie hat den Effekt, dass die kollidierten Nachrichten über n Taktperioden annähernd gleichmäßig verteilt werden.

contention resolution
Kollisionsauflösungs-Strategien

gleichverteilte
Wiederholung zur
Kollisionsauflösung

Wiederholung mit
fester
Wahrscheinlichkeit zur
Kollisionsauflösung

Bei der **Wiederholung mit einer festen Wahrscheinlichkeit zur Kollisionsauflösung** wird eine kollidierte Nachricht jeweils in der nächsten Taktperiode mit einer Wahrscheinlichkeit p_w wiederholt, bis sie erfolgreich abgesendet wird. Dies ist gleichwertig damit, dass eine Station nach einer Kollision eine Zahl i auswürfelt, die angibt, in welcher Taktperiode die Nachricht wieder gesendet wird. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Zahl i ausgewürfelt wird,

$$P\{\mathbf{i} = i\} = p_w(1 - p_w)^{i-1} \quad \text{für } i = \{1, 2, 3 \dots\}. \quad 12.2-7$$

Wir können die Methoden, die wir im Kapitel 9 kennengelernt haben, verwenden, um solche Verfahren zu analysieren. Wir wollen dies kurz skizzieren. Dazu betrachten wir ein **slotted Aloha-System mit einer endlichen Anzahl q von Quellen** (hier Stationen). Es sei β die Ankunftsrate einer freien Quelle. Wir nehmen an, dass eine Quelle, deren Nachricht an einer Kollision beteiligt war und die die Wiederholungsstrategie eingeleitet hat, keine neue Nachricht generiert, solange die vorliegende Nachricht nicht abgesendet werden konnte. Wir nennen sie eine wartende Quelle.

slotted Aloha mit
endlichen Quellen

Wir betrachten das getaktete Aloha System jeweils unmittelbar vor dem Beginn eines neuen Taktes. Wir sagen, dass das System sich im Zustand k befindet, wenn genau k der q Quellen warten. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine freie Quelle in einem Taktintervall eine Nachricht generiert, ist

$$p_f = 1 - e^{-\beta P\tau}, \quad 12.2-8$$

wenn wir Markoff-Ankünfte voraussetzen.

Wir betrachten nun die Situation unmittelbar vor dem Beginn einer Taktperiode. Das System befinde sich im Zustand k . In der bevorstehenden Taktperiode werden k Stationen versuchen, jeweils eine Nachricht mit der Wahrscheinlichkeit p_w abzusetzen. $Q_w(i, k)$ sei die Wahrscheinlichkeit, dass i der k Stationen eine Nachricht absenden, so gilt

$$Q_w(i, k) = \binom{k}{i} \cdot (1 - p_w)^{k-i} \cdot p_w^i. \quad 12.2-9$$

Von den $(q - k)$ freien Stationen, senden diejenigen eine Nachricht ab, die in der vorangegangenen Periode eine Nachricht generierten. $Q_f(i, k)$ sei die Wahrscheinlichkeit, dass i der $(q - k)$ freien Stationen eine Nachricht absenden, so gilt entsprechend

$$Q_f(i, k) = \binom{q-k}{i} \cdot (1 - p_f)^{q-k-i} \cdot p_f^i. \quad 12.2-10$$

Wir können das Zustandsdiagramm wie in Abb. 12.2-5 angeben. Wir können auch die Übergangswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von $Q_w(i, k)$ und $Q_f(i, k)$ angeben, wenn wir folgendes beachten. Von einer Takt-Periode zur nächsten erhöht sich die Anzahl der wartenden Stationen genau um die Anzahl der Ankünfte der freien Quellen weniger eins, falls eine Nachricht erfolgreich abgesendet werden konnte. Eine Nachricht kann allerdings nur erfolgreich abgesendet werden, wenn versucht wird, genau eine Nachricht abzusenden. Für die Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand k in den Zustand $k + i$ haben wir somit

$$P_{k,k+i} = \begin{cases} Q_f(0, k) \cdot Q_w(1, k) & \text{für } i = -1 \\ Q_f(1, k) \cdot Q_w(0, k) + Q_f(0, k)[1 - Q_w(1, k)] & \text{für } i = 0 \\ Q_f(1, k)[1 - Q_w(0, k)] & \text{für } i = 1 \\ Q_f(i, k) & \text{für } 2 \leq i \leq (q - k). \end{cases} \quad 12.2-11$$

Man sieht, dass die Zustandsänderung nach unten jeweils nur um eins möglich ist. Hierdurch können die Zustandsgleichungen iterativ gelöst werden, wie wir dies im Kapitel 9 für Geburts- und Sterbeprozesse bereits getan haben. Mit dem Gesetz von Little (Abschnitt 9.3) kann dann die mittlere Wartezeit berechnet werden.

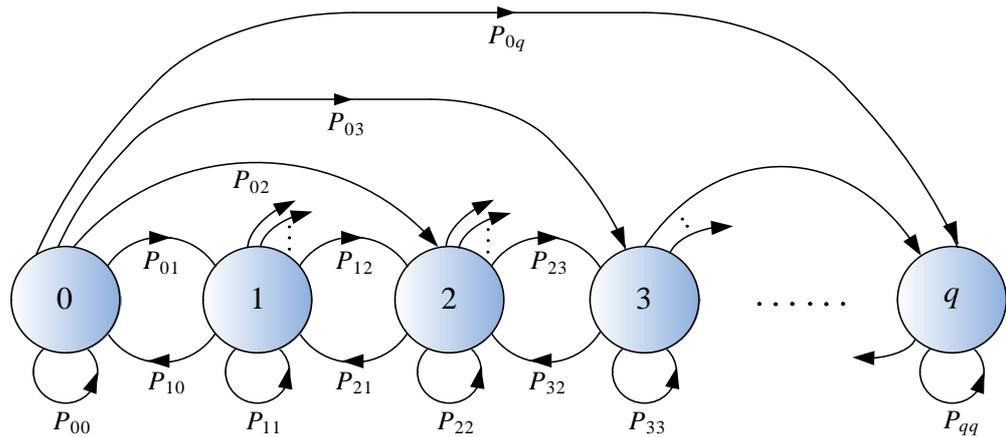


Abb. 12.2-5: Zustandsdiagramm für slotted Aloha mit einer endlichen Anzahl von Quellen q

Adressenpriorität für Kollisionauflösung

Wir wenden uns nun einer deterministischen Kollisionauflösungs-Strategie zu. Hierbei wird die **Adressenpriorität für die Kollisionauflösung** verwendet. Wir betrachten wieder das slotted Aloha-Verfahren und betrachten den Fall, dass das erste gesendete Wort eine Adresse ist (eigene oder die des Empfängers). Tritt nun eine Kollision auf, so werden die Bits auf dem Übertragungsmedium so verfälscht, dass bei binärer Übertragung eine physikalische Eins (Pegel auf der Leitung) gegenüber einer physikalischen Null (kein Pegel) sich durchsetzt (Abb. 12.2-6). Kann diese Verfälschung von der betroffenen Station vor dem Senden des nächsten Bits erkannt werden und gibt die Station das Senden sofort auf, so kann die andere Station ihre Nachricht ungestört weitersenden. Dieses Verfahren setzt voraus, dass eine unmittelbare Rückkopplung für die Stationen möglich ist und die Signallaufzeiten so klein sind, dass vor dem Senden des nächsten Bits der Nachricht eine Kollisionserkennung möglich ist. Dieses Verfahren wird im ISDN für den Zugriff auf den Signalisierkanal (D-Kanal) des Basisanschlusses angewandt.

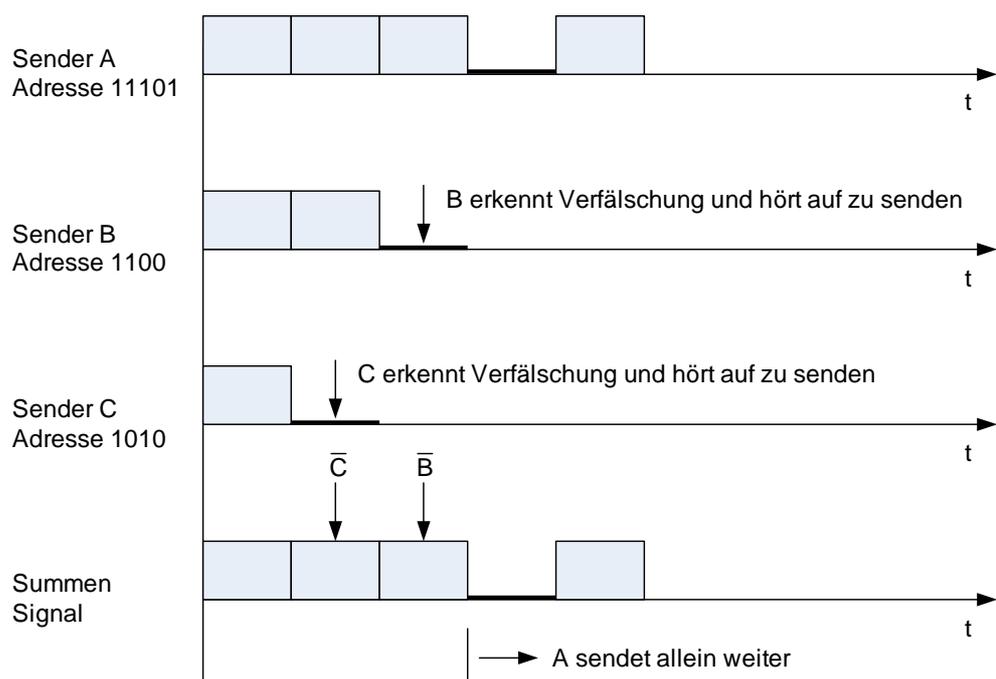


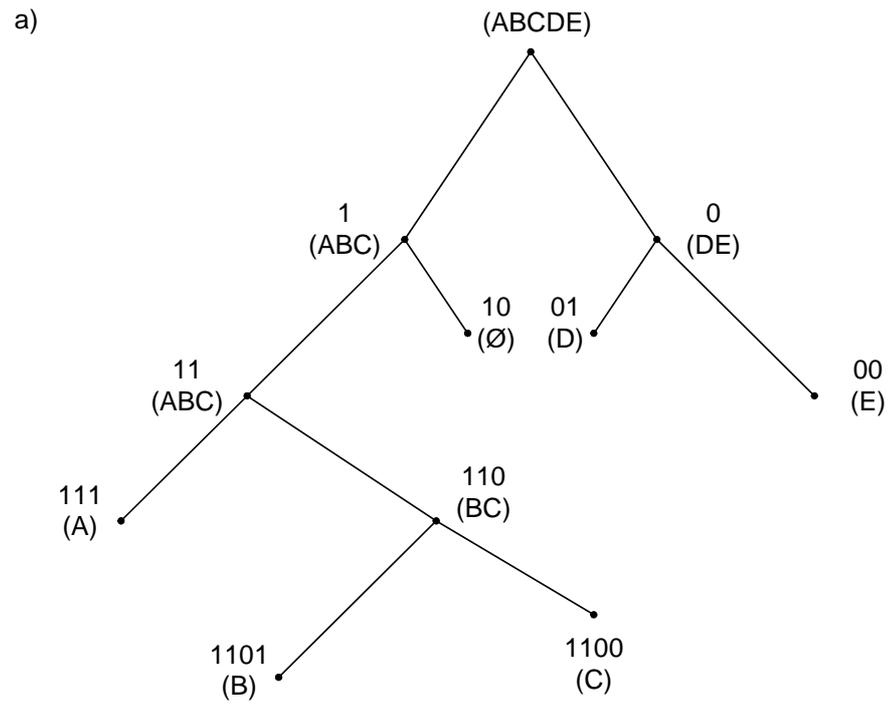
Abb. 12.2-6: Kollisionauflösung über Adressenpriorität

Es gibt eine Reihe von weiteren Verfahren, die als **splitting algorithms**, d. h. **Spaltungsalgorithmen für die Kollisionsauflösung** bezeichnet werden. Bei diesen Algorithmen teilen sich die an einer Kollision beteiligten Stationen in zwei Gruppen auf, wobei jeweils eine Gruppe wartet, während die andere Gruppe senden darf. Tritt wieder eine Kollision auf, so wird die sendende Gruppe weiter aufgespalten. Jede Station führt ein Bild über auftretende Kollisionen und ermittelt daraus, wann sie wieder senden darf.

splitting algorithms
Spaltungsalgorithmen
für die
Kollisionsauflösung

In Abb. 12.2-7 ist der Ablauf in einem konkreten Fall wiedergegeben. An einer Kollision sind fünf Stationen (A, B, C, D, E) beteiligt. Es wird angenommen, dass alle Stationen unmittelbar erfahren, ob in einer Taktperiode eine Nachricht erfolgreich abgesendet wurde (1), eine Kollision auftrat (K) oder gar keine Nachricht gesendet wurde (0). Die Stationen würfeln, A, B, C , dass sie senden und D und E , dass sie warten. In der zweiten Taktperiode tritt wieder eine Kollision auf, da A, B und C zu senden versuchen. Sie würfeln wieder. Unglücklicherweise würfeln alle drei, dass sie senden dürfen – in der wartenden Gruppe befindet sich daher keine Station. Den einzelnen Stationen wird lediglich die Rückkopplung 1, K oder 0 gegeben, so dass ihnen die Zusammensetzung der Gruppen nicht unmittelbar bekannt ist. In der dritten Taktperiode tritt nun wieder eine Kollision auf. Dieses Mal würfelt A , dass sie senden darf, B und C , dass sie warten. In der vierten Taktperiode sendet somit nun A erfolgreich. Es darf jetzt die nächste wartende Gruppe, in unserem Beispiel BC , den Kanal verwenden, und so tritt wieder eine Kollision in der fünften Taktperiode auf. Erneutes Würfeln führt dazu, dass B senden und C warten darf. In der siebten Taktperiode darf dann C senden. Die nächste Taktperiode läuft leer, da nicht bekannt war, dass diese Gruppe leer war. Als nächstes darf die Gruppe DE senden, was wiederum zu einer Kollision führt. Auswürfeln führt dazu, dass D in der zehnten Taktperiode senden darf. E sendet in der elften Taktperiode, und die ursprüngliche Kollision ist somit aufgelöst.

Wir haben in unserem Beispiel in der Tabelle die einzelnen wartenden Gruppen explizit aufgeführt. Den Stationen ist jedoch nur die Rückkopplung verfügbar, so dass sie lediglich annehmen, dass bei jeder Kollision sich zwei Gruppen bilden, die sie mit 1 (sendeberechtigte Gruppe) und 0 (wartende Gruppe) bezeichnen. Somit können sie den Baum mit den binären Bezeichnungen der Zwischenknoten bzw. Blätter aufstellen (Abb. 12.2-7a). Es genügt für die Stationen, jeweils lediglich einen Zähler zu haben, der bei der ersten Kollision auf Null gesetzt wird, falls sie senden darf, und auf Eins, falls sie warten muss. Zeigt die Rückkopplung eine Kollision, so wird der Zähler um Eins erhöht; zeigt sie 1 oder 0, so wird er um Eins herabgesetzt. Ist der Zähler bei Null, so darf die Station wieder senden.



b)

Taktperiode	Gruppe S (Senden)	Gruppe W (Warten)	Rückkopplung K = Kollision 1 = erfolgreiches Senden 0 = Leerlauf
1	A B C D E	-	K
2	A B C	DE	K
3	A B C	∅, DE	K
4	A	BC, ∅, DE	1
5	B C	∅, DE	K
6	B	C, ∅, DE	1
7	C	∅, DE	1
8	∅	DE	0
9	D E	-	K
10	D	E	1
11	E	-	1

Abb. 12.2-7: Beispiel eines Spaltungsalgorithmus für die Kollisionsauflösung

a) Spaltungsbau

b) Spaltungstabelle

Beispiel 12.2-2:

Wir betrachten Station *E* im Beispiel der Abb. 12.2-7. Nach der ersten Kollision wird ihr Zähler auf Eins gesetzt, da sie das Warten würfelt. Der weitere Verlauf ist:

- nach der 2. Taktperiode ist der Zählerstand 2,

- nach der 3. Taktperiode ist der Zählerstand 3,
- nach der 4. Taktperiode ist der Zählerstand 2,
- nach der 5. Taktperiode ist der Zählerstand 3,
- nach der 6. Taktperiode ist der Zählerstand 2,
- nach der 7. Taktperiode ist der Zählerstand 1,
- nach der 8. Taktperiode ist der Zählerstand 0.

In der 9. Taktperiode darf die Station E senden. Es tritt eine Kollision auf. Das Würfeln leitet wieder das Warten ein und der Zählerstand wird nach der 9. Taktperiode auf 1 gesetzt. Der weitere Verlauf ist somit:

- nach der 9. Taktperiode ist der Zählerstand 1,
- nach der 10. Taktperiode ist der Zählerstand 0.
- In der 11. Taktperiode sendet E nun erfolgreich ihre Nachricht ab.

Am vorangegangenen Beispiel dürfte deutlich geworden sein, dass viele Varianten zur Optimierung des vorgestellten Verfahrens denkbar sind. Tritt z. B. ein Leerlauf nach einer Kollision auf, so war die Spaltung nicht optimal, und eine weitere Kollision ist vorprogrammiert, wenn die entsprechende Gruppe an die Reihe kommt. Es ist deshalb sinnvoll, eine weitere Spaltung vorab vorzunehmen. Im Prinzip ist stets eine Strategie anzustreben, die es ermöglicht, eine Kollision in möglichst wenig Schritten aufzulösen. Die minimale Anzahl der erforderlichen Schritte ist gleich der Anzahl der Stationen, die an der Kollision beteiligt sind. In diesem Fall sendet in jeder Taktperiode eine Station ihre Nachricht erfolgreich ab. Mit dieser Überlegung können wir auch die Lösung eines weiteren Problems angehen. Während die Strategie zur Auflösung der Kollision angewandt wird (in unserem Beispiel 11 Taktperioden), dürften die an der Kollision nicht beteiligten Stationen weitere Ankünfte zu verzeichnen haben. Nimmt man an, dass diese sich – so lange die Kollision nicht aufgelöst ist – zurückhalten, so versuchen alle Stationen, die eine Meldung vorliegen haben, nun diese abzusetzen. Eine Kollision ist also wiederum vorprogrammiert. Hier kann folgende Strategie weiterhelfen. Ist die Ankunftsrate bekannt, so kann der Erwartungswert der Anzahl der neuen Ankünfte errechnet werden. Es werden so viele Teilgruppen aus den wartenden Stationen gebildet, dass pro Teilgruppe eine Ankunft zu erwarten ist. Die folgenden Taktperioden werden jeweils einer Teilgruppe zur Verfügung gestellt. Auch hierfür sind unterschiedliche Strategien denkbar.

Häufig sind die an einer Kollision nicht beteiligten Stationen nicht empfangsbereit. Sie haben dann auch keine Rückkopplung erhalten. Es ist deshalb auch üblich, diese gleich in die Gruppe der sendeberechtigten Stationen aufzunehmen. Sie setzen also ihre Zähler zunächst auf Null und können sich unmittelbar in den Spaltungsalgorithmus einbinden.

CSMA-Verfahren
Carrier Sense Multiple
Access

Heute werden häufig Zugriffsverfahren implementiert, die voraussetzen, dass bevor eine Station auf das Übertragungsmedium zugreift, sie das Medium abhört, um festzustellen, ob es frei ist. Solche Verfahren werden als **CSMA-Verfahren** bezeichnet. CSMA ist die Abkürzung für **Carrier Sense Multiple Access**, d. h. Mehrfachzugriff mit dem Abhören des Trägers; das Übertragungsmedium wird dabei als Träger bezeichnet, und das Abhören bezieht sich auf das Feststellen, ob das Medium frei ist. Man unterscheidet manchmal zwischen Verfahren, bei denen nur vor dem Senden abgehört wird (**LBT** - *Listen Before Talking*) und Verfahren, bei denen während des Sendens abgehört wird, um Kollisionen zu erkennen (**LWT** - *Listen While Talking*). Verfahren, bei denen abgehört wird und Kollisionen erkannt werden, werden auch als **CSMA/CD-Verfahren** bezeichnet (*Carrier Sense Multiple Access with Collision Detection*). Manchmal wird auch von **CSMA/CR-Verfahren** gesprochen (*Carrier Sense Multiple Access with Collision Resolution*), um zu betonen, dass eine Strategie zur Kollisionsauflösung angewendet wird. Ein Verfahren, bei dem die ständig abhörende Station senden darf, sobald das Medium frei ist, wird als **persistent CSMA** bezeichnet. Bei **non-persistent CSMA** hört eine Station das Medium unmittelbar vor dem Senden einer Nachricht ab; ist das Medium besetzt, so leitet sie (für sich) die Kollisionsauflösungsstrategie (wie wir sie bereits kennengelernt haben, z. B. würfeln, wann sie wieder senden darf) ein. Beim persistent CSMA-Verfahren besteht die Gefahr, dass beim Freiwerden des Mediums mehrere wartende Stationen gleichzeitig das Senden beginnen und somit eine Kollision verursachen. Beim non-persistent CSMA-Verfahren besteht die Gefahr, dass das Medium, obwohl es frei ist, nicht verwendet wird. Beim **p-persistent CSMA**-Verfahren hört eine Station, die eine Nachricht übertragen möchte, das Medium ab und sendet die Nachricht mit der Wahrscheinlichkeit p ab, wenn das Medium frei wird. Mit der Wahrscheinlichkeit $(1 - p)$ sendet sie also die Nachricht nicht ab, sondern wartet bis zum nächsten Zeitschlitz und wiederholt die Prozedur.

persistent CSMA
non-persistent CSMA

p-persistent CSMA

Wir wollen im Folgenden den Durchsatz eines synchronisierten non-persistent CSMA-Verfahrens (slotted CSMA) unter vereinfachenden Bedingungen berechnen. Wir nehmen wieder an, dass es sich bei den Ankünften der Nachrichten um einen Poisson-Prozess mit der Gesamtankunftsrate (d. h. einschließlich der Wiederholversuche) λ handelt. Alle Pakete haben die Länge $P\tau$, wobei τ der Zeittakt ist. Das Abhören soll unmittelbar möglich sein, d. h. wir vernachlässigen Laufzeiten und Verarbeitungszeiten. Wenn eine Nachricht ankommt, sind folgende Fälle möglich (Abb. 12.2-8):

1. Ist das Medium besetzt, so wird die Nachricht zurückgestellt und entsprechend der non-persistent Strategie der Versuch wiederholt. Dies ist in der Ankunftsrate λ in unserem Modell enthalten.
2. Ist das Medium frei, so wird bis zum Anfang der nächsten Taktperiode gewartet und dann die Nachricht abgesandt. War dies die einzige Nachricht, die während der letzten Taktperiode ankam, wird sie erfolgreich gesendet und belegt den Kanal für die nächsten P Taktperioden. Waren mehrere Nachrichten während der letzten Taktperiode angekommen, so entsteht eine Kollision. Wir wollen annehmen, dass die gestörten Nachrichten bis zum Ende gesen-

det werden und dann entsprechend der Kollisionsauflösungsstrategie wieder gesendet werden. Auch diese Wiederholungen sind in unserem Modell in der Ankunftsrate λ enthalten.

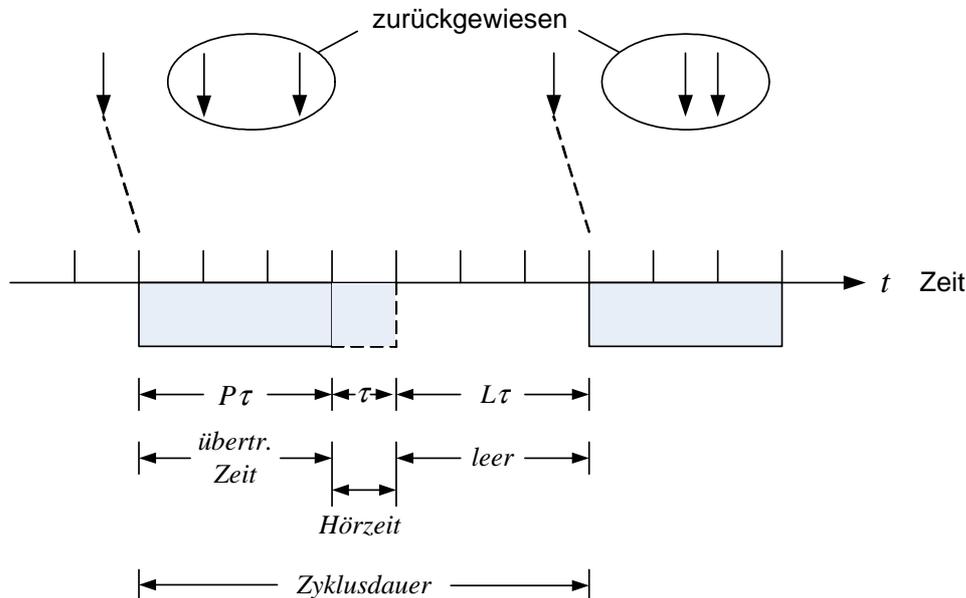


Abb. 12.2-8: Slotted - CSMA
Nachrichten gleicher Länge $P\tau$
Hörzeit = Taktdauer = τ

Die Vereinfachungen, die wir angenommen haben, entsprechen in etwa den Annahmen, die wir bei Ableitungen der Gl. 12.2-2 und Gl. 12.2-3 bzw. Gl. 12.2-6 machten. Die Ergebnisse sind prinzipiell vergleichbar und spiegeln die Eigenschaften der Verfahren wider.

Zunächst sei bemerkt, dass jede gesendete Nachricht einen Zyklus (dessen Länge t_c eine Zufallsvariable ist) einleitet, der beim Beginn der nächsten gesendeten Nachricht endet. Die ersten P Zeittakte dieses Zyklus werden für die Übertragung der ungestörten oder der gestörten Nachricht verwendet. Weitere Nachrichten, die während dieser Zeit ankommen, werden abgewiesen. Der nächste Zeittakt (Hörtakt bzw. Hörzeit genannt) enthält stets keine Nachricht, denn alle in der vorangegangenen Taktperiode angekommenen Nachrichten werden abgewiesen. Es folgen nun L Taktperioden, in denen keine Nachrichten gesendet werden (wobei $L = 0$ sein kann). In der letzten Taktperiode des Zyklus kam mindestens eine Nachricht an, denn in der nächsten Taktperiode wird wieder eine gestörte oder ungestörte Nachricht gesendet.

Wir wollen nun den Erwartungswert der Zykluslänge t_c errechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} E\{t_c\} &= E\{P\tau + \tau + \mathbf{L}\tau\} & 12.2-12 \\ &= P\tau + \tau + \tau E\{\mathbf{L}\}. \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$E\{\mathbf{L}\} = 0 \cdot P\{0\} + 1 \cdot P\{1\} + 2 \cdot P\{2\} + \dots + i \cdot P\{i\} + \dots \quad 12.2-13$$

wobei $P\{i\}$ die Wahrscheinlichkeit, dass $L = i$ ist darstellt. Wir können nun die einzelnen Wahrscheinlichkeiten wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} P\{0\} &= P\{\text{mindestens 1 Ankunft in der Taktperiode } \tau\} & 12.2-14 \\ &= 1 - e^{-\lambda\tau}. \end{aligned}$$

Wir wollen diese Wahrscheinlichkeit mit q abkürzen

$$q = P\{0\} = 1 - e^{-\lambda\tau}. \quad 12.2-15$$

$$\begin{aligned} P\{1\} &= P\{\text{keine Ankunft in der Periode } \tau\} \cdot P\{0\} & 12.2-16 \\ &= e^{-\lambda\tau} \cdot P\{0\} = (1 - q) \cdot q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{2\} &= P\{\text{keine Ankunft in der Periode } \tau\} \cdot P\{1\} \\ &= (1 - q)^2 \cdot q \end{aligned}$$

⋮

$$P\{i\} = (1 - q)^i \cdot q.$$

Somit bildet $E\{\mathbf{L}\}$ eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $\rho = (1 - q)$ und der Summe $S = \frac{\rho}{1 - \rho}$, d. h.

$$E\{\mathbf{L}\} = S = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{1 - q}{q} = \frac{e^{-\lambda\tau}}{1 - e^{-\lambda\tau}}. \quad 12.2-17$$

In Gl. 12.2-12 eingesetzt ergibt dies

$$\begin{aligned} E\{t_c\} &= P\tau + \tau + \frac{\tau e^{-\lambda\tau}}{1 - e^{-\lambda\tau}} \\ E\{t_c\} &= \frac{P\tau - P\tau e^{-\lambda\tau} + \tau}{1 - e^{-\lambda\tau}}. & 12.2-18 \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Zyklen, insbesondere das Verhältnis der Erwartungswerte der Zeit, in der erfolgreich gesendet wird (im Folgenden als "erfolgreiche Zeit" bezeichnet), zur Gesamtzeit. Hierfür gilt:

$$\begin{aligned} \frac{E\{\text{erfolgreiche Zeit}\}}{E\{\text{Gesamtzeit}\}} &= \frac{E\{\text{erfolgreiche Zeit}\}}{P\tau} \cdot \frac{P\tau}{E\{\text{Gesamtzeit}\}} \\ &= \frac{E\{\text{Anzahl der erfolgreichen Ankünfte}\}}{E\{\text{Gesamtzeit}\}} \cdot P\tau \\ &= D \cdot P\tau, & 12.2-19 \end{aligned}$$

wobei D wie bisher der Durchsatz ist.

Da wir Zyklen betrachten, ist

$$E\{\text{Gesamtzeit}\} = E\{t_c\} \quad 12.2-20$$

die mittlere Zyklusdauer, während für $E\{\text{erfolgreiche Zeit}\}$ gilt:

$$\begin{aligned} E\{\text{erfolgreiche Zeit}\} &= P_\tau \cdot P\{\text{eine erfolgreiche Ankunft in } \tau\} \\ &= P_\tau \cdot P\{\text{eine Ankunft in } \tau \mid \text{überhaupt Ankünfte in } \tau\}. \end{aligned}$$

Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit Gl. 3.2-1 erhalten wir

$$\begin{aligned} E\{\text{erfolgreiche Zeit}\} &= P_\tau \cdot \frac{P\{\text{eine Ankunft in } \tau \cap \text{Ankünfte in } \tau\}}{P\{\text{Ankünfte in } \tau\}} \\ &= P_\tau \cdot \frac{P\{\text{eine Ankunft in } \tau\}}{P\{\text{Ankünfte in } \tau\}}. \end{aligned}$$

Mit $P\{\text{eine Ankunft in } \tau\} = \lambda\tau e^{-\lambda\tau}$ und $P\{\text{Ankünfte in } \tau\} = 1 - e^{-\lambda\tau}$ entsprechend Gl. 12.2-14 haben wir

$$E\{\text{erfolgreiche Zeit}\} = \frac{P_\tau \cdot \lambda\tau e^{-\lambda\tau}}{1 - e^{-\lambda\tau}}. \quad 12.2-21$$

Gl. 12.2-20, Gl. 12.2-21 und Gl. 12.2-18 eingesetzt in Gl.12.2-19 ergeben

$$D = \frac{\lambda e^{-\lambda\tau}}{1 + P - P e^{-\lambda\tau}}. \quad 12.2-22$$

Wie zu erwarten, ist der Durchsatz abhängig von der Ankunftsrate, der Paketlänge und der Taktdauer. Setzen wir das Verhältnis der Taktdauer zu Paketdauer gleich a , d. h.

$$a = \frac{\tau}{P_\tau} = \frac{1}{P} \quad 12.2-23$$

und normieren P_τ auf 1, d. h. $P_\tau = 1$, so erhalten wir

$$D = \frac{a\lambda e^{-a\lambda}}{a + 1 - e^{-a\lambda}}. \quad 12.2-24$$

In Abb. 12.2-9 ist der Durchsatz für verschiedene Werte von a in Abhängigkeit von λ aufgezeichnet. Die Extremwerte liegen bei

$$D = \frac{\lambda}{1 + \lambda} \text{ für } a = 0$$

und

$$D = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2 - e^{-\lambda}} \text{ für } a = 1.$$

In Abb. 12.2-10 sind die Durchsätze der drei betrachteten Verfahren (pure Aloha, slotted Aloha und non-persistent slotted CSMA) im Vergleich dargestellt.

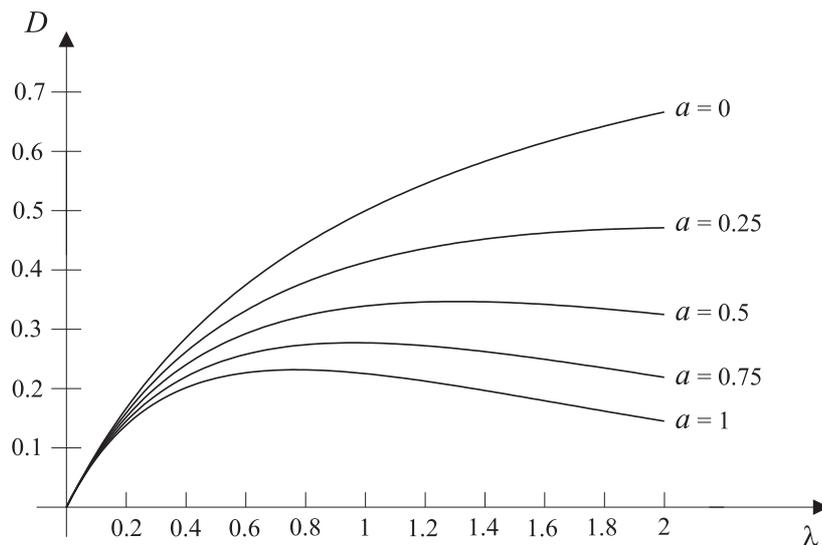


Abb. 12.2-9: Durchsatz D in Abhängigkeit der Ankunftsrate λ bei non-persistent slotted CSMA für $P\tau = 1$
 $a = \frac{1}{P}$ als Parameter
 P = Paketlänge
 τ = Takt

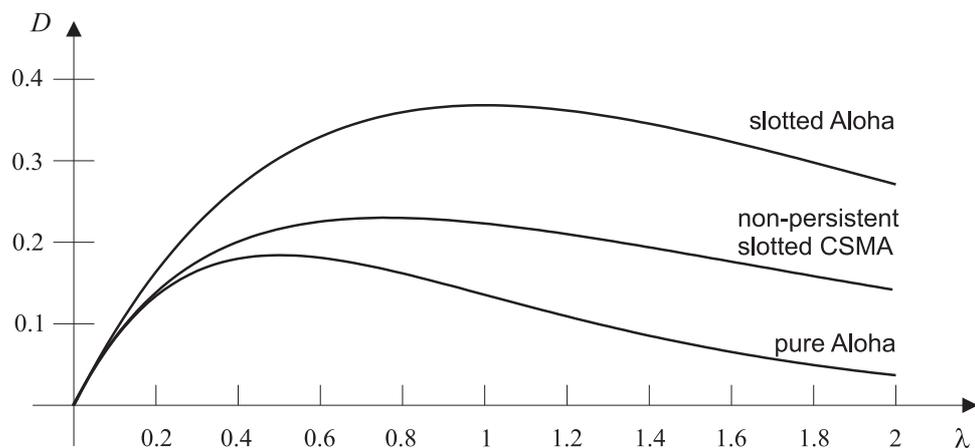


Abb. 12.2-10: Durchsatz D in Abhängigkeit der Ankunftsrate λ bei pure Aloha, slotted Aloha und non-persistent slotted CSMA ($a = 1$)

Die erste Realisierung des CSMA/CD-Verfahrens wurde für interne Anwendung bei Xerox Paloalto Research Labs in Kalifornien entwickelt und 1976 vorgestellt. DEC, Intel und Xerox entwickelten das Verfahren weiter zum heute meistverwendeten Lokalen Netz, dem **Ethernet**. Der **IEEE** (*Institute of Electrical and Electronics Engineers*) Standard 802.3 für CSMA/CD basiert auf dieser Entwicklung.

Selbsttestaufgabe 12.2-1:

Wie groß muss der zeitliche Abstand zwischen 2 Medienzugriffen bei CSMA/CD-Systemen mindestens sein, damit Kollisionen sicher erkannt werden können?

12.3 Token-Verfahren

Wir betrachten nun deterministische Zugriffsverfahren, d. h. Zugriffsverfahren mit Sendeberechtigung (**token access**). Wie bereits erwähnt, sind diese Verfahren dem *Hub Polling* verwandt – der Unterschied besteht lediglich darin, dass die Meldungen zwischen beliebigen Stationen ausgetauscht werden, und der Zugriff dezentral verwaltet wird. Wir wollen die Grundzüge der token access-Verfahren an Abb. 12.3-1 illustrieren. n Stationen sind an ein Übertragungsmedium (Netz) angeschlossen. Die Sendeberechtigung (*Token*) wird nach der Initialisierung in der Reihenfolge $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow A$ übergeben. Die letzte Station übergibt also die Berechtigung wieder an die erste Station – man spricht deshalb auch von einem logischen Ring (nicht zu verwechseln mit der physikalischen Struktur des Netzes). Die Station, die die Sendeberechtigung (*Token*) besitzt, darf für eine befristete Zeit (*Token Holding Time*) das Medium für die Datenübertragung verwenden. Hat die Station keine Daten zu übertragen, oder ist die Zeit abgelaufen, so reicht die Station die Sendeberechtigung weiter. Systeme mit token access-Verfahren unterscheiden sich unter anderem in ihrer physikalischen Struktur (z. B. Bus oder Ring), in dem Verfahren zur Festlegung der logischen Reihenfolge und in der Implementierung der Verwaltungsaufgaben (z. B. Überwachung der Sendeberechtigung, Aufnahme neuer Stationen, Verhalten im Fehlerfall). In Abb. 12.3-2 ist die typische Rahmenstruktur einer Meldung eines Systems mit token access-Verfahren dargestellt. Die Rahmensteuerung (FC) enthält u. a. die Information, ob es sich um eine Sendeberechtigung (*Token*) oder um einen Informationsrahmen handelt. Als Ziel können gewöhnlich einzelne oder alle Stationen, manchmal auch Gruppen von Stationen adressiert werden.

token access

Token-Verfahren werden als deterministisch bezeichnet, weil die Reihenfolge, in der die Stationen die Sendeberechtigung erhalten, vorab festliegt. Sie sind insofern fair, dass jede Station pro Zyklus die Sendeberechtigung erhält und die Zyklusdauer (*Token Rotation Time*) in der Regel begrenzt ist, da auch die Sendedauer (*Token Holding Time*) der Stationen in der Regel begrenzt ist. Es ist recht einfach bei Token-Verfahren den Sendern und/oder den einzelnen Meldungen Prioritäten einzuräumen. Es besteht auch die Möglichkeit die Sendedauer abhängig von der Priorität der Meldung und/oder der tatsächlich beim letzten Umlauf aufgetretene Zyklusdauer (und damit der Auslastung des Systems) zu machen.

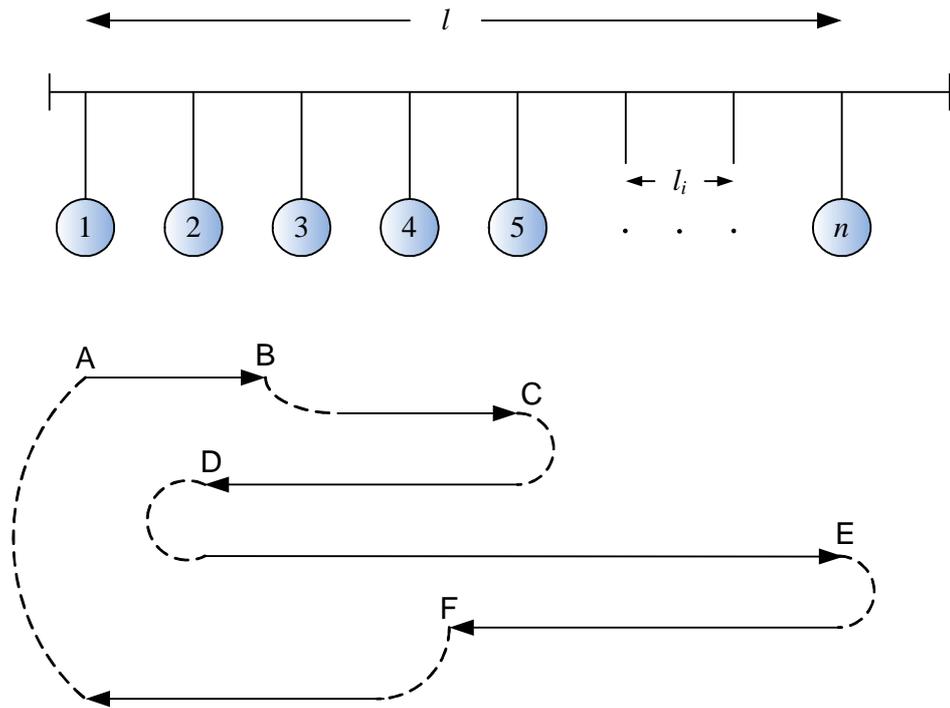
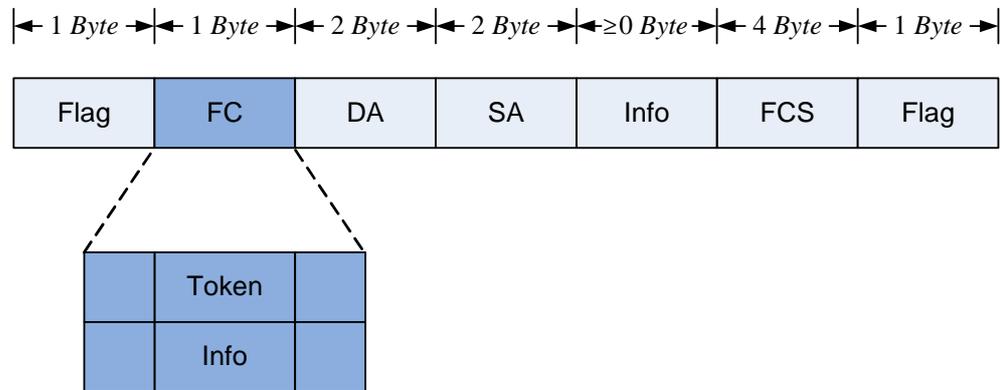


Abb. 12.3-1: Token Access-Verfahren

Die Reihenfolge der Tokenübergabe ist stets geschlossen.



- | | | | |
|------|----------------------|---|---------------------------------|
| DA | Destination Address | ≙ | Zieladresse |
| FC | Frame Control | ≙ | Information für Rahmensteuerung |
| FCS | Frame Check Sequence | ≙ | Fehler Überprüfungssequenz |
| Flag | | ≙ | Rahmenerkennung |
| Info | Information | ≙ | Nutzinformation |
| SA | Source Address | ≙ | Ursprungsadresse |

Abb. 12.3-2: Rahmenstruktur einer Meldung eines Systems mit token access-Verfahren

Für die Analyse der Zyklusdauer (d. h. die Dauer, in der die Sendeberechtigung den logischen Ring einmal durchläuft) des token access-Verfahrens erhalten wir analog zur Gl. 12.1-3 für *Hub Polling*

$$t_c = t_z + nt_p + \sum_{i=1}^n l_i + \sum_{i=1}^n t_{d_i} + \sum_{i=1}^n t_{n_i}. \quad 12.3-1$$

Wir haben dabei angenommen, dass eine der Stationen gewisse Verwaltungsaufgaben übernimmt und hierfür pro Zyklus die Zeit t_z benötigt. t_p ist wie bisher die Reaktionszeit der Peripherie. l_i ist die Laufzeit der Meldung der i -ten Station (bei mehreren Meldungen an einer Station nehmen wir an, dass diese unmittelbar hintereinander gesendet werden). t_{d_i} ist die Zeit, die für die Übertragung der Steuerinformationen benötigt wird. Sie ist nun abhängig von der Anzahl der Meldungen pro Station und somit eine Zufallsvariable. t_{n_i} ist die Zeit für die Übertragung der Nutzinformationen und somit auch eine Zufallsvariable. Für den Erwartungswert der Zyklusdauer erhalten wir für eine physikalische Busstruktur

$$E\{t_c\} = t_z + nt_p + \frac{nl}{3} + \sum_{i=1}^n E\{t_{d_i} + t_{n_i}\} \quad 12.3-2$$

und für eine physikalische Ringstruktur

$$E\{t_c\} = t_z + nt_p + \frac{nl}{4} + \sum_{i=1}^n E\{t_{d_i} + t_{n_i}\}. \quad 12.3-3$$

Beispiel 12.3-1:

Wir leiten nun Gl. 12.3-2 und Gl. 12.3-3 ab, indem wir zeigen, dass bei einer zufälligen Verteilung der Stationen an einem Lokalen Netz der Länge l der mittlere Abstand zwischen zwei Stationen $E\{l_i\}$ für eine Busstruktur $\frac{l}{3}$ und für eine Ringstruktur $\frac{l}{4}$ beträgt.

Zunächst betrachten wir zwei Stationen x_1 und x_2 an einem Bus.



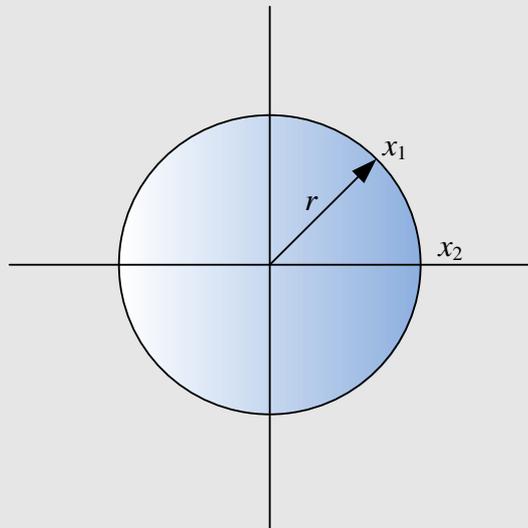
Für ein festes x_1 gilt

$$\begin{aligned}
 E\{| \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 |\} &= \int_0^l |x_1 - x_2| \cdot \frac{1}{l} \cdot dx_2 \\
 &= \int_0^{x_1} (x_1 - x_2) \cdot \frac{1}{l} \cdot dx_2 + \int_{x_1}^l (x_1 - x_2) \cdot \frac{1}{l} \cdot dx_2 \\
 &= \frac{1}{l} \left(x_1 x_2 - \frac{x_2^2}{2} \right) \Big|_0^{x_1} + \frac{1}{l} \left(\frac{x_2^2}{2} - x_1 x_2 \right) \Big|_{x_1}^l \\
 &= \frac{1}{l} \left(\frac{l^2}{2} - x_1 l + x_1^2 \right).
 \end{aligned}$$

Da der Erwartungswert von x_1 abhängig ist, mitteln wir über alle x_1 und erhalten

$$\begin{aligned}
 E\{| \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 |\} &= \int_0^l \frac{1}{l} \left(\frac{l^2}{2} - x_1 l + x_1^2 \right) \frac{1}{l} \cdot dx_1 \\
 &= \frac{1}{l^2} \cdot \left(\frac{l^2 x_1}{2} - \frac{x_1^2 l}{2} + \frac{x_1^3}{3} \right) \Big|_0^l \\
 &= \frac{l}{3}.
 \end{aligned}$$

Für zwei Stationen an einem Ring gilt für ein festes x_1



$$E\{| \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 |\} = \frac{\pi r}{2} = \frac{l}{4}$$

Der Erwartungswert ist unabhängig von x_1 und gilt somit allgemein.

Token-Verfahren werden physikalisch als Bus oder Ring implementiert. Beide Realisierungen sind von IEEE standardisiert.

Der **Token Bus** wird im IEEE 802.4 Standard spezifiziert. Für die Realisierung können verschiedene Medien, Geschwindigkeiten und Modulationsverfahren verwendet werden. Beispiele sind 1, 5 oder 10 Mbit/s Einkanal-Bus mit *Frequency Shift Keying (FSK)*-Modulation oder gerichteter Breitband-Bus mit kombinierter Amplituden- und Phasen-Modulation.

Token Bus

Der **Token Ring** wird im IEEE 802.5 Standard spezifiziert. Er wurde vor allem von IBM für die Vernetzung ihrer Rechner konzipiert und weiterentwickelt.

Token Ring

Die physikalische Struktur des Ringes ist in Abb. 12.3-3 dargestellt. Wesentlich ist, dass es sich um eine gerichtete Übertragung handelt und die Stationen aktiv in dem Ring eingebunden sind, d. h. dass sie die Signale regenerieren. Dies hat den Vorteil, dass im Vergleich zu einer passiven Struktur wesentlich größere Entfernungen überbrückt werden können. Auch der Einsatz von Lichtwellenleitern für die Verbindung zwischen den Stationen ist einfach möglich. Nachteil dieser Struktur ist, dass der Ausfall einer Station den Ring unterbricht. Deshalb wird eine Anschluss-technik verwendet, die es ermöglicht eine Station im Störfall zu umgehen bzw. den Ring kurz zu schließen und somit ihn zu heilen (*bypass technique*). Als Übertragungsmedium werden verdrehte Doppeladern verwendet. Die Übertragungsgeschwindigkeit beträgt 1, 4, gelegentlich auch 16 Mbit/s. Bei 4 Mbit/s können auf verdrehten, geschirmten Doppeladern bis zu 260 Stationen an einem Ring angeschlossen werden, dessen Gesamtlänge dann etwa 50 km betragen kann.

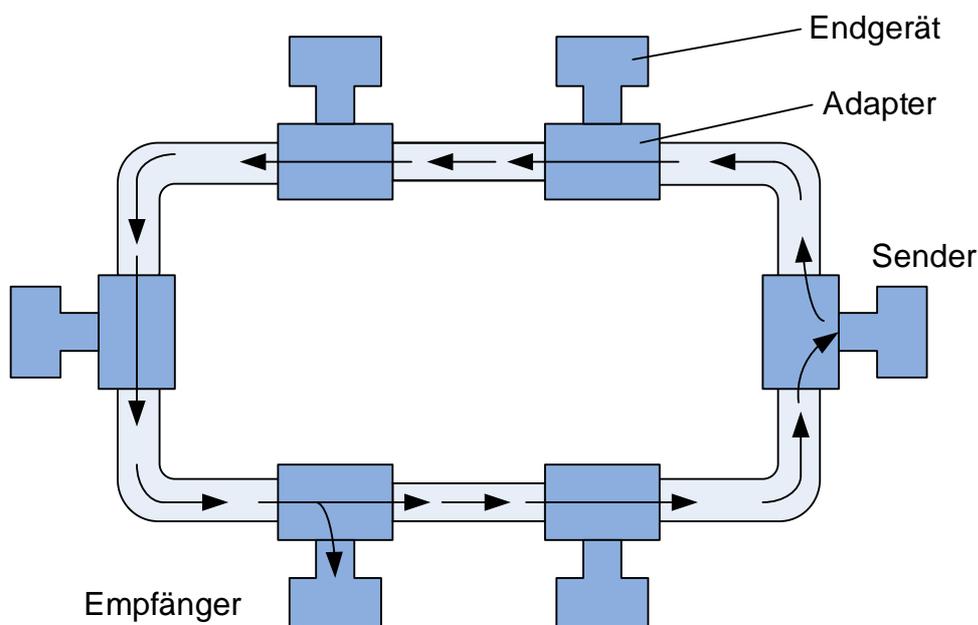


Abb. 12.3-3: Physikalische Struktur des Token Rings

Selbsttestaufgabe 12.3-1:

Ein Token Ring-Netz ist 10 km lang und wird mit 4Mbit/s betrieben. Die Signallaufzeit beträgt $4,2 \frac{\mu\text{s}}{\text{km}}$. Es sind 100 Stationen am Ring angeschaltet, die jeweils eine Verzögerung von 1 Bit verursachen. Eine dieser Stationen übernimmt die sogenannte Monitorfunktion und verursacht eine zusätzliche Verzögerung um 24 Bit.

- a. Wie groß ist die Token-Umlaufzeit auf dem Ring, wenn sonst kein Verkehr auf dem Ring vorhanden ist ?

(Umlaufzeit = Verzögerungszeit + Signallaufzeit)

- b. Wie lange verweilt eine Nachricht mit 1024 Byte Nutzdaten und 21 Byte Steuerrinformationen auf dem Ring ?

(Verweildauer = Umlaufzeit + Übertragungszeit)

Anhang

Anhang A: Verallgemeinerte Funktionen

1. Eine Funktion heißt **Grundfunktion**, wenn sie beliebig oft differenzierbar ist und zusammen mit allen Ableitungen für alle N eine Funktion der Ordnung $O(|x|^{-N})$ für $|x| \rightarrow \infty$ ist.¹ **Grundfunktion**
2. Eine Funktion heißt **schwach wachsende Funktion**, wenn sie beliebig oft differenzierbar ist und wenn sie und alle ihre Ableitungen für ein geeignetes N (das vom Grad der Ableitung abhängen kann) Funktionen der Ordnung $O(|x|^N)$ sind. **schwachwachsende Funktion**
3. Die Ableitung einer Grundfunktion ist eine Grundfunktion. Die Summe zweier Grundfunktionen ist eine Grundfunktion. Das Produkt einer schwachwachsenden Funktion mit einer Grundfunktion ist eine Grundfunktion.
4. Eine Folge $f_n(x)$ von Grundfunktionen heißt regulär, wenn für jede beliebige Grundfunktion $F(x)$ der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \cdot F(x) dx \quad (1)$$

existiert.

5. Zwei reguläre Folgen von Grundfunktionen heißen äquivalent, wenn für jede Grundfunktion $F(x)$ der Grenzwert (1) in beiden Fällen der gleiche ist.
6. Eine **verallgemeinerte Funktion** ist eine reguläre Folge $f_n(x)$ von Grundfunktionen. Zwei verallgemeinerte Funktionen heißen gleich, wenn die entsprechenden regulären Folgen äquivalent sind. **verallgemeinerte Funktion**
Eine verallgemeinerte Funktion ist somit eine Klasse äquivalenter regulärer Folgen. Das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot F(x) dx$$

über das Produkt einer verallgemeinerten Funktion $f(x)$ mit einer Grundfunktion $F(x)$ wird durch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \cdot F(x) dx$$

definiert.

¹ Eine Funktion $f(x)$ ist eine Funktion der Ordnung $O(g(x))$ für $|x| \rightarrow \infty$, wenn folgendes gilt: es gibt Konstanten K, L , so dass für $|x| \geq L$ stets $f(x) \leq K \cdot g(x)$ ist.

7. Die δ -Funktion ist eine verallgemeinerte Funktion, die durch das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \cdot F(x) dx = F(0) \quad (2)$$

definiert ist, d. h. die δ -Funktion ist eine reguläre Folge von Grundfunktionen, die für jede Grundfunktion $F(x)$ den gleichen Grenzwert $F(0)$ liefert.

Anhang B: Fouriertransformation

B.1 Fourierintegrale

Für eine Funktion (wir verstehen nunmehr hierunter auch verallgemeinerte Funktionen) $f(t)$ ist die Fouriertransformierte $F(\omega)$ definiert als

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3a)$$

falls das Integral $F(\omega)$ existiert.

Für die ursprüngliche Funktion $f(t)$ gilt dann die Rücktransformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{+j\omega t} d\omega. \quad (3b)$$

Wir verwenden das Zeichen $f(t) \text{ --- } F(\omega)$, um zu kennzeichnen, dass $f(t)$ und $F(\omega)$ ein Fouriertransformationspaar entsprechend Gleichung (3 a) und (3 b) bilden.

B.2 Einige Eigenschaften der Fouriertransformation

a. **Linearität:** Es seien $f_1(t) \text{ --- } F_1(\omega)$ und $f_2(t) \text{ --- } F_2(\omega)$ zwei Transformationspaare, dann gilt

$$f_1(t) + f_2(t) \text{ --- } F_1(\omega) + F_2(\omega) \quad (4)$$

b. **Symmetrie:** Es sei $f(t) \text{ --- } F(\omega)$, so gilt

$$F(t) \text{ --- } 2\pi f(-\omega). \quad (5)$$

c. **Gewichtung:** A sei eine reelle Konstante, $f(t) \text{ --- } F(\omega)$ ein Transformationspaar, so gilt

$$f(At) \text{ --- } \frac{1}{|A|} F\left(\frac{\omega}{A}\right) \quad (6)$$

d. **Zeitverschiebung:** Es sei $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$, so gilt

$$f(t - t_0) \longleftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0}. \quad (7)$$

e. **Frequenzverschiebung:** Es sei $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$, so gilt

$$f(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow F(\omega - \omega_0). \quad (8)$$

f. **Ableitung im Zeitbereich:** Es sei $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$, falls die n te Ableitung von $f(t)$ existiert, so gilt

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \longleftrightarrow (j\omega)^n F(\omega). \quad (9)$$

g. **Ableitung im Frequenzbereich:** Es sei $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$, falls die n -te Ableitung von $F(\omega)$ existiert, so gilt

$$(-jt)^n \cdot f(t) \longleftrightarrow \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}. \quad (10)$$

h. **Multiplikation im Zeitbereich:** Es sei $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\omega)$ und $f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\omega)$, so gilt

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\tilde{\omega}) \cdot F_2(\omega - \tilde{\omega}) d\tilde{\omega}. \quad (11 a)$$

Abkürzend schreiben wir

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\tilde{\omega}) \cdot F_2(\omega - \tilde{\omega}) d\tilde{\omega} = F_1(\omega) * F_2(\omega) \quad (12 a)$$

und bezeichnen die Operation als Faltung im Frequenzbereich. Somit erhalten wir das Transformationspaar

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \longleftrightarrow F_1(\omega) * F_2(\omega). \quad (11 b)$$

i. **Multiplikation im Frequenzbereich:** Es sei $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\omega)$ und $f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\omega)$, so gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau \longleftrightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega); \quad (13 a)$$

Abkürzend schreiben wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau = f_1(t) * f_2(t); \quad (12 b)$$

und bezeichnen die Operation als Faltung im Zeitbereich. Somit erhalten wir das Transformationspaar

$$f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega); \quad (13b)$$

**Parseval'sche
Gleichung**

j. **Parseval'sche Gleichung:** Es sei $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\omega)$ und $f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\omega)$, so gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \cdot f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) \cdot F_2^*(\omega) d\omega; \quad (14 a)$$

wobei $F_2^*(\omega) = F_2(-\omega)$.

Für $f_1(t) = f_2(t)$ gilt insbesondere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_1(\omega)|^2 d\omega; \quad (14 b)$$

Das Integral auf der linken Seite kann als Signalenergie im Zeitbereich, das Integral auf der rechten Seite als Signalenergie im Spektralbereich interpretiert werden. Die Parseval'sche Gleichung für diesen Fall besagt, dass die Signalenergie im Zeitbereich gleich der Signalenergie im Spektralbereich ist.

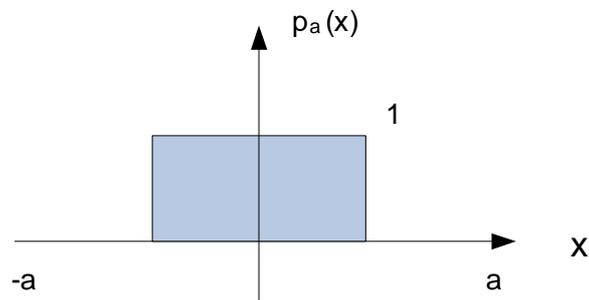
**Fourier-
transformationspaare**

B.3 Einige Fouriertransformationspaare

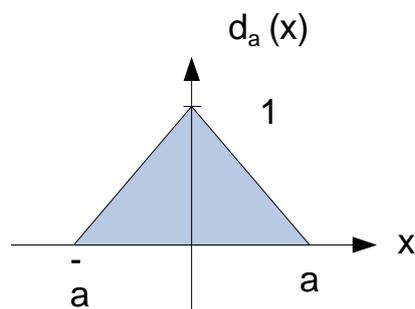
In der nachfolgenden Tabelle werden folgende Abkürzungen für besondere Funktionen verwendet.

a. Rechteck

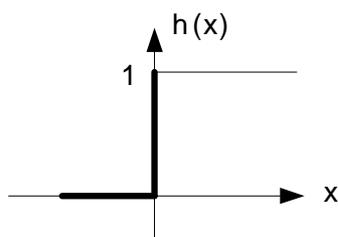
$$p_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq a \\ 0 & \text{für } |x| > a \end{cases}$$

b. Dreieck

$$d_a(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a} & \text{für } |x| \leq a \\ 0 & \text{für } |x| > a \end{cases}$$

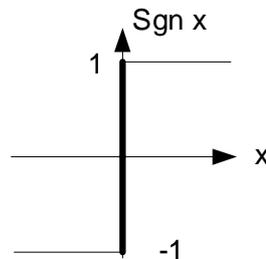
c. Sprung

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$



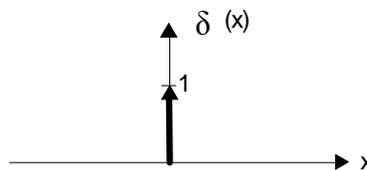
d. Signum

$$\text{Sgn } x = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

e. δ - **Funktion** Verallgemeinerte Funktion mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \cdot F(x) dx = F(0)$$

für alle Grundfunktionen $F(x)$.

f. Abtastfunktion

$$S_a(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - na)$$

δ wie oben definiert.

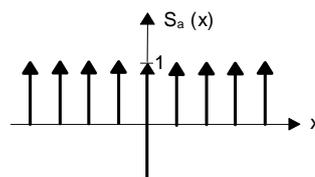
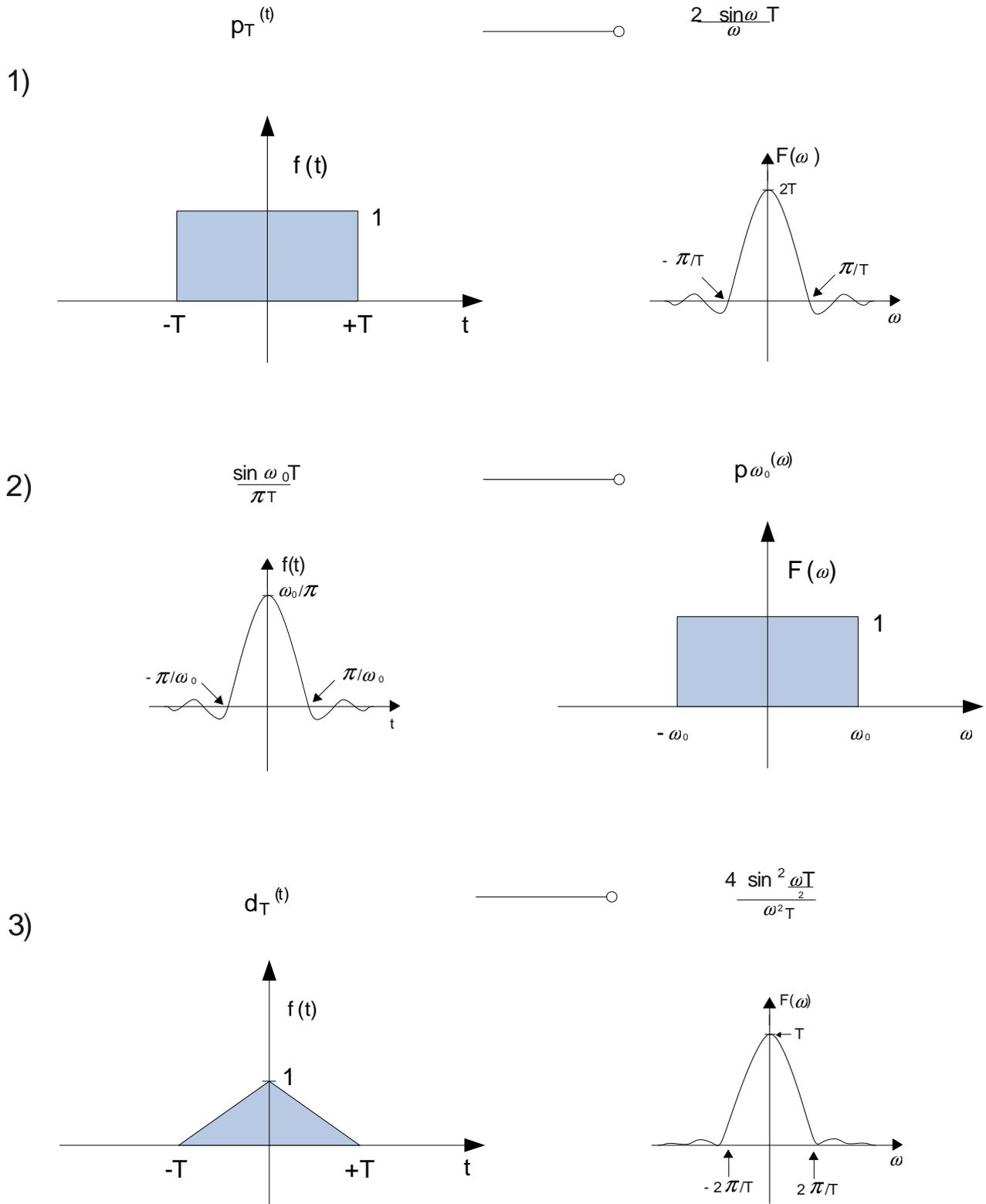
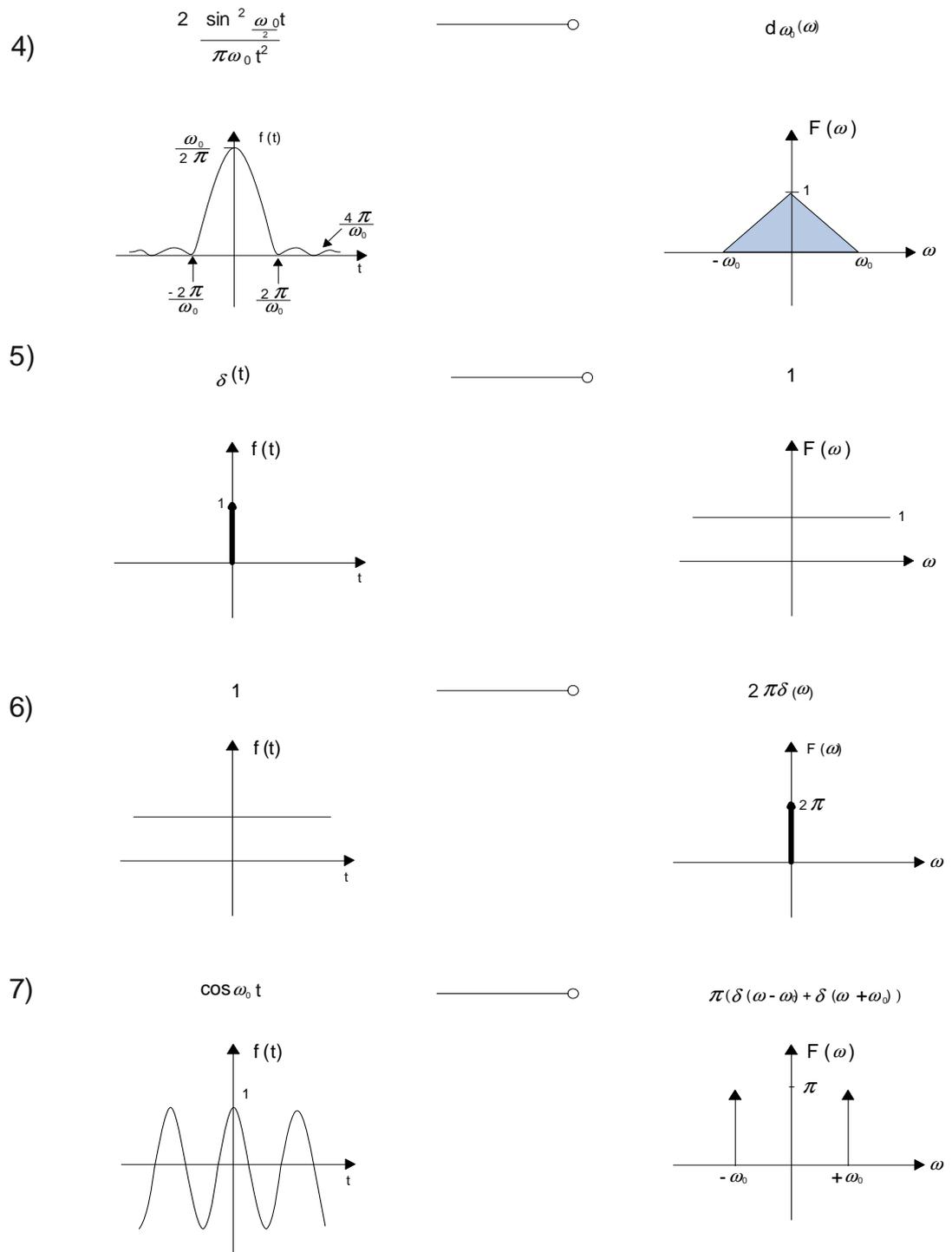


Tabelle: Fouriertransformationspaare



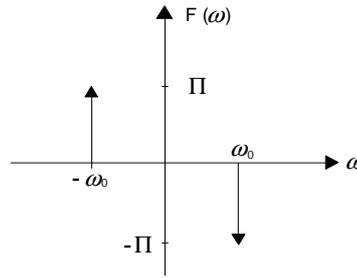
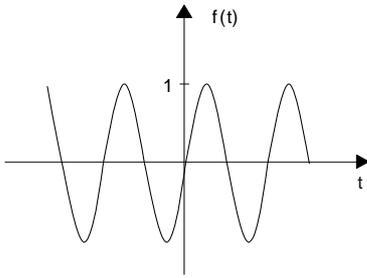


$\sin \omega_0 t$



$$j\Pi[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

8)

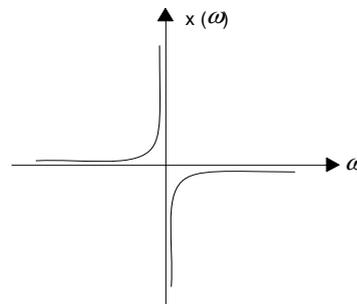
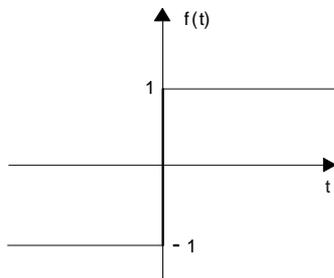


$\text{sgn } t$



$$-j \frac{2}{\omega}$$

9)

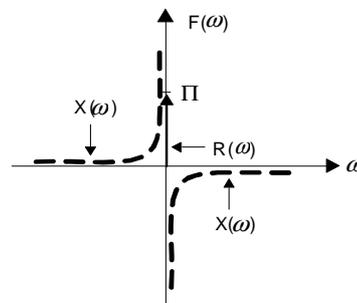
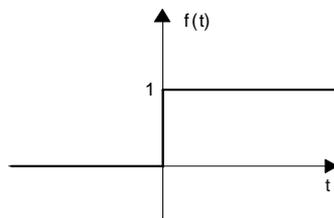


$h(x)$



$$H(\omega) = \Pi \delta(\omega) - \frac{j}{\omega} \\ = R(x) + j X(\omega)$$

10)

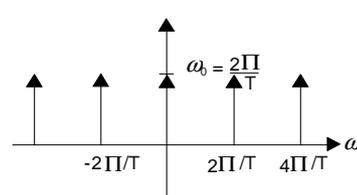
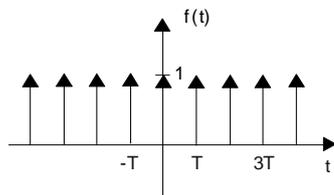


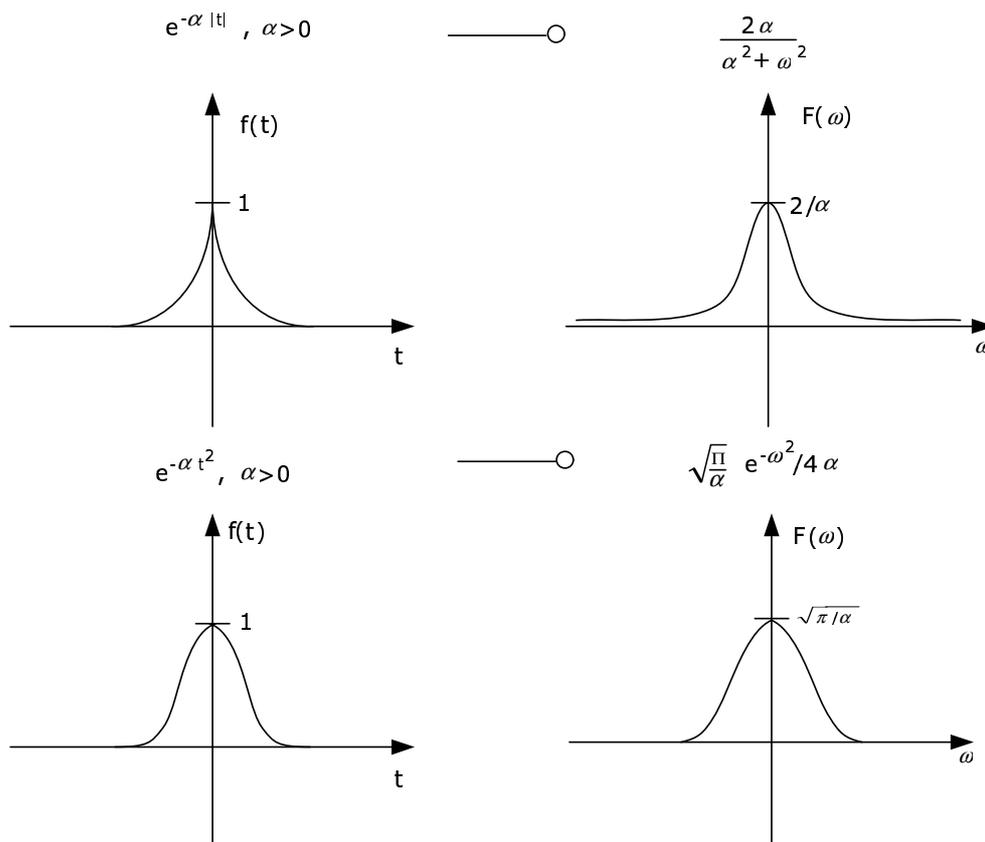
11)

$$S_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$



$$S_{\omega_0}(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{2\Pi n}{T})$$





Anhang C: Lineare Algebra

C.1 Körper, Ringe, Gruppen

Es sei K eine Menge mit mindestens zwei Elementen, und $+$ und \cdot zwei Abbildungen ($K \times K \rightarrow K$), die wir Addition und Multiplikation nennen.

Körper 1. Ein **Körper** ist ein Tripel $(K, +, \cdot)$, für das folgende sieben Axiome gelten:

Für die Addition:

A1 Das Assoziativgesetz:

$\forall a, b, c \in K$ gilt

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

A2 Das Kommutativgesetz:

$\forall a, b \in K$ gilt

$$a + b = b + a.$$

A3 Existenz von Null und Inversen:

Es gibt ein $n \in K$ mit

a. n ist ein neutrales Element (Null),

d. h. $\forall a \in K$ gilt

$$a + n = n + a = a,$$

und

b. $\forall a \in K$ existiert ein inverses Element,

d. h. $\forall a \in K \exists -a \in K$ mit

$$a + (-a) = (-a) + a = n.$$

Für die Multiplikation:

M1 Das Assoziativgesetz:

$\forall a, b, c \in K$ gilt

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

M2 Das Kommutativgesetz:

$\forall a, b \in K$ gilt

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

M3 Existenz von Eins und Inversen:

Es gibt ein $e \in K$ mit

a. e ist ein neutrales Element (Eins),

d. h. $\forall a \in K$ gilt

$$a \cdot e = e \cdot a = a,$$

und

b. $\forall a \in K, a \neq n, \exists a^{-1} \in K$ mit

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1}a = e.$$

Für die Addition und Multiplikation:

D Das Distributivgesetz:

$\forall a, b, c \in K$ gilt

a. $(a + b)c = ac + bc,$

b. $a \cdot (b + c) = ab + ac.$ ²

2. Ein **Ring** ist ein Tripel $(R, +, \cdot)$, für das die fünf Axiome $A1 - A3$ und $M1$ und D gelten. Gilt zusätzlich $M2$, so spricht man von einem kommutativen Ring. **Ring**
3. Eine **Gruppe** ist ein Paar $(M, +)$ (additive Gruppe) oder (M, \cdot) (multiplikative Gruppe), für das die beiden Axiome $A1, A3$ (additive Gruppe) bzw. $M1, M3$ (multiplikative Gruppe) gelten. Gilt zusätzlich $A2$ bzw. $M2$, so spricht man von einer kommutativen Gruppe. **Gruppe**
4. K sei ein Körper mit q Elementen.

2 (b) folgt aus $M2$ und $D(a)$, bräuchte also nicht getrennt gefordert zu werden.

K ist bis auf Isomorphie durch q bestimmt.

Galoisfeld Man nennt K **Galoisfeld** q -ter Ordnung und schreibt auch $GF(q)$.

Charakteristik Es gibt eine Primzahl p und ein $m \in \mathbb{N}$, mit $q = p^m$.
 p heißt **Charakteristik** von K .

Unterkörper 5. Ein Körper (K, \oplus, \odot) heißt **Unterkörper** des Körpers $(L, +, \cdot)$, wenn $\forall a, b \in K$ gilt

$$\begin{aligned} a. \quad & K \subset L \\ b. \quad & a \oplus b = a + b \\ & a \odot b = a \cdot b \end{aligned}$$

6. $GF(p)$ ist ein Unterkörper von $GF(q)$ genau dann, wenn

$$q = p^m \text{ für ein } m \in \mathbb{N}.$$

Ordnung eines Elements 7. Die **Ordnung eines Elements** α des Körpers K ist definiert als

$$\text{Ordnung}(\alpha) = \text{Min}\{\gamma \in \mathbb{N} \mid \alpha^\gamma = 1\}.$$

Für einen endlichen Körper mit q Elementen gilt $\alpha^{q-1} = 1$.

primitives Element Ein Element der Ordnung $(q - 1)$ nennt man ein **primitives Element**.

C.2 Vektorräume

K sei ein beliebiger Körper.

Vektorraum 1. Ein **Vektorraum** über K ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$, wobei V eine nichtleere Menge und $+$ und \cdot zwei Abbildungen sind,

$$\begin{aligned} + : \quad & V \times V \rightarrow V \quad \text{Addition von Vektoren,} \\ \cdot : \quad & K \times V \rightarrow V \quad \text{Skalare Multiplikation,} \end{aligned}$$

für die folgende vier Axiome gelten:

V1 Das Paar $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe, d. h. es gelten $A1, A2, A3$ für $(V, +)$.

V2 $\forall a, b \in V$ und $\alpha \in K$ gelten die Distributiv-Gesetze:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)a &= \alpha a + \beta a \\ \alpha(a + b) &= \alpha a + \alpha b \end{aligned}$$

V3 $\forall \alpha, \beta \in K, a \in V$ gilt das Assoziativgesetz

$$\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a.$$

V4 Für das Einselement $e_K \in K$ und jedes $a \in V$ ist

$$e_K \cdot a = a.$$

2. $(V, +, \cdot)$ und (U, \oplus, \odot) seien Vektorräume über einem beliebigen Körper K .
 U heißt **Untervektorraum** von V , wenn gilt:

Untervektorraum

U1 $U \subset V$

U2 $a \oplus b = a + b \quad \forall a, b \in U$

$\alpha \odot a = \alpha \cdot a \quad \forall a \in U, \alpha \in K$

3. Sei V ein Vektorraum, I eine Indexmenge, $(v_i | i \in I)$ eine Familie von Vektoren aus V . Es sei

$$\langle v_i | i \in I \rangle := \left\{ \begin{array}{l} x | x \in V \text{ und es gibt eine endliche Teilmenge} \\ I' \subset I, \text{ sowie } \alpha_i \in K \text{ für } i \in I' \text{ mit} \\ x = \sum_{i \in I'} \alpha_i v_i \end{array} \right\}.$$

Es kann gezeigt werden, dass $\langle v_i | i \in I \rangle$ ein Untervektorraum von V ist. $\langle \rangle$ wird deshalb der von $(v_i | i \in I)$ erzeugte Untervektorraum genannt und $(v_i | i \in I)$ das **erzeugende System** von U .

erzeugendes System

4. V sei ein Vektorraum, I eine Indexmenge, $(v_i | i \in I)$ eine Familie von Vektoren aus V . Unter einer **Linearkombination** versteht man jede endliche Summe der Form

Linearkombination

$$\sum_{i \in I'} \alpha_i v_i$$

mit $I' \subset I$ endlich und $\alpha_i \in K$ für $i \in I'$.

5. Eine Familie $(v_i | i \in I)$ von Vektoren aus V heißt **linear unabhängig** genau dann, wenn sich kein $v_i (i \in I)$ als Linearkombination der Familie $(v_j | j \in I \setminus \{i\})$ darstellen lässt.

linear unabhängig

6. Eine Familie $(v_i | i \in I)$ von Vektoren aus V heißt eine **Basis** des Vektorraumes V genau dann, wenn $(v_i | i \in I)$ ein erzeugendes System von V ist und $(v_i | i \in I)$ linear unabhängig ist.

Basis

7. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- a. $(v_i | i \in I)$ ist eine Basis.

b. Jedes $a \in V$ lässt sich eindeutig als Linearkombination der Familie $(v_i | i \in I)$ darstellen.

8. Jeder endlich erzeugte Vektorraum besitzt eine Basis.

9. Ist $V \neq \{0_V\}$ (Nullelement von V) ein endlich erzeugter Vektorraum über K , und ist (v_1, \dots, v_n) eine Basis von V , so definiert man

$$\dim_K V := n$$

Dimension

als die **Dimension** von V bezüglich K .

10. Sei V ein Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$.

Es ist $\dim V = n$ genau dann, wenn es n linear unabhängige Vektoren in V gibt, $n + 1$ Vektoren aus V aber immer abhängig sind.

Elementaroperationen

11. Ist eine Basis eines Vektorraumes gegeben, so erhält man durch **Elementaroperationen** an einer Basis eine neue Basis des Vektorraumes. Elementaroperationen sind: Vertauschen von Basisvektoren, Multiplikation eines Basisvektors mit einem Körperelement $\alpha \in K, \alpha \neq 0_K$, Addition eines mit einem Körperelement multiplizierten Basisvektors zu einem anderen Basisvektor.

12. Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum, in dem zusätzlich ein **Skalarprodukt** $u \cdot v \in K$ für beliebige Elemente $u, v \in V$ definiert ist, U ein Untervektorraum von U . Den Vektorraum

$$U^d = \{v \in V | v \cdot u = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

orthogonaler Vektorraum

nennt man den zu U (bezüglich V) **orthogonalen Vektorraum**. Es gilt

$$\dim U + \dim U^d = \dim V.$$

C.3 Polynome über endliche Körper

Polynom

1. Ein **Polynom** ist definiert durch

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

wobei $a_i \in K$ und x eine Unbekannte ist.

normiertes Polynom

Ist $a_n = e_K$ (Einselement des Körpers), so nennt man $p(x)$ ein **normiertes Polynom**.

Grad eines Polynoms

Ist $a_n \neq n_K$ (Nullelement des Körpers) der Koeffizient der höchsten Potenz von x , so nennt man n den **Grad des Polynoms** $p(x)$ und schreibt

$$\text{Grad } p(x) = n.$$

2. $F_q[x]$ ist die **Menge aller Polynome** über einem endlichen Körper mit q Elementen ($GF(q)$). Die Addition und Multiplikation von Polynomen ist wie üblich definiert. **Menge aller Polynome**

$F_q[x]$ mit der so definierten Addition und Multiplikation bildet einen Ring - den **Polynomring** über $GF(q)$. **Polynomring**

3. **Teiler eines Polynoms.** **Teiler eines Polynoms**

Es seien $f(x), g(x) \in F_q[x]$.

Wir sagen, $g(x)$ teilt $f(x)$ und schreiben dafür $g(x)|f(x)$ genau dann, wenn es ein $q(x) \in F_q[x]$ gibt mit

$$f(x) = q(x) \cdot g(x).$$

4. **Division eines Polynoms.** **Division eines Polynoms**

Es seien $f(x), g(x) \in F_q[x], g(x) \neq 0$.

Es gibt genau ein $q(x) \in F_q[x]$ und ein $r(x) \in F_q[x]$ mit

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$$

und

$$\text{Grad } r(x) < \text{Grad } g(x).$$

5. Es seien $f(x), g(x) \in F_q[x], f(x) \cdot g(x) \neq 0$.

Es gibt genau ein normiertes Polynom $h(x) \in F_q[x]$ vom maximalen Grad, so dass

$$h(x)|f(x) \quad \text{und} \quad h(x)|g(x).$$

Wir nennen $h(x)$ den **größten gemeinsamen Teiler** (ggT) von $f(x)$ und $g(x)$. **größter gemeinsamer Teiler zweier Polynome**

Es gibt $a(x), b(x) \in F_q[x]$, so dass

$$ggT(f(x), g(x)) = a(x) \cdot f(x) + b(x) \cdot g(x).$$

6. Wir nennen ein Polynom $p(x) \in F_q[x], p(x) \neq 0$, **irreduzibel** über $GF(q)$ genau dann, wenn für alle $f(x) \in F_q[x]$ aus **irreduzibles Polynom**

$$f(x)|p(x) \text{ folgt, dass } \text{Grad } f(x) = 0$$

oder

$$\text{Grad } f(x) = \text{Grad } p(x) \text{ ist.}$$

$F_q[x]$ enthält irreduzible Polynome von jedem Grad $n \in \mathbb{N}$.

Polynomring modulo $p(x)$

7. Für ein normiertes Polynom $p(x)$ über einem Körper $GF(q)$ mit $\text{Grad } p(x) \neq 0$ ist der **Polynomring modulo $p(x)$** die Menge aller Polynome vom Grad $< \text{Grad } p(x)$, für die Addition und Multiplikation modulo $p(x)$ wie üblich definiert sind. Der Polynomring modulo $p(x)$ wird mit $F_q[x]/p(x)$ bezeichnet. Für ihn gelten 3. - 6. entsprechende Definitionen und Eigenschaften.

Der Polynomring $F_q[x]$ modulo $p(x)$ ist ein Körper genau dann, wenn $p(x)$ irreduzibel über $F_q[x]$ ist. Wir werden stets annehmen, dass $p(x)$ außerdem normiert ist, um Mehrdeutigkeiten auszuschliessen

8. Sei $p(x) \in F_q[x]$ irreduzibel über $F_q[x]$, $\text{Grad } p(x) = k$. Dann gilt

$$p(x) \mid (x^{q^k} - x).$$

Es gibt k Elemente $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in GF(q^k)$, so dass $p(\alpha_i) = 0$ ($1 \leq i \leq k$), d. h. die Wurzeln von $p(x)$ liegen im Erweiterungskörper $GF(q^k)$ von $GF(q)$.

Minimalpolynom

9. Sei $\alpha \in GF(q^k)$. Das normierte Polynom $p(x) \in F_q[x]$ mit dem kleinsten Grad und mit $p(\alpha) = 0$ heißt **Minimalpolynom** über $GF(q)$ von α .

primitives Polynom

10. Sei $\alpha \in GF(q^k)$ ein primitives Element. Das Minimalpolynom über $GF(q)$ von α heißt **primitives Polynom**.

11. $p(x) \in F_q[x]$ ist ein primitives Polynom genau dann, wenn

$$p(x) \mid (x^{q^k-1} - 1)$$

und $p(x)$ teilt $x^i - 1$ nicht für $1 \leq i < q^k - 1$.

12. Einige primitive Polynome aus $F_2(x)$ sind:

Grad	Polynom
1	$x + 1$
2	$x^2 + x + 1$
3	$x^3 + x + 1$
4	$x^4 + x + 1$
5	$x^5 + x^2 + 1$
6	$x^6 + x + 1$
7	$x^7 + x^3 + 1$
	$x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$
8	$x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$
9	$x^9 + x^4 + 1$
10	$x^{10} + x^3 + 1$
11	$x^{11} + x^2 + 1$
12	$x^{12} + x^6 + x^4 + x + 1$
13	$x^{13} + x^4 + x^3 + x + 1$
14	$x^{14} + x^{10} + x^6 + x + 1$
15	$x^{15} + x + 1$
	$x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
31	$x^{32} + x^{26} + x^{23} + x^{22} + x^{16} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$

Anhang D: Die Stirling'sche Formel und eine binomiale Abschätzung

Die **Stirling'sche Formel**³ lautet

Stirling'sche Formel

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{1}{4n}}.$$

Wir verwenden die Stirling'sche Formel, um eine Abschätzung für die Summe S der Binomialkoeffizienten

$$S = \sum_{i=0}^{m\lambda} \binom{m}{i} \text{ für } \lambda < \frac{1}{2}$$

abzuleiten. Wir nehmen an, dass $m\lambda$ eine ganze Zahl ist, andernfalls berechnen wir die Summe bis $[m\lambda]$, der größten ganzen Zahl kleiner oder gleich $m\lambda$. Auch in diesem Fall gilt die folgende Abschätzung. Wir setzen $\lambda > 0$ an. Für $\lambda = 0$ kann die Gültigkeit der Abschätzung direkt gezeigt werden. Es sind

$$\begin{aligned} S &= 1 + \binom{m}{1} + \dots + \binom{m}{m\lambda} \\ &= S_0 + S_1 + \dots + S_{m\lambda} \end{aligned}$$

3 siehe Duschek, A., Höhere Mathematik, Bd. 1, S. 246 für einen Beweis

mit

$$S_i = \binom{m}{i}.$$

Wegen $\lambda < \frac{1}{2}$, sind die Terme monoton wachsend, so dass der größte Term $S_{m\lambda}$ ist. Für ihn gilt

$$S_{m\lambda} = \frac{m!}{(\lambda m)!(m - \lambda m)!}$$

oder mit der Stirling'schen Formel

$$S_{m\lambda} \leq \frac{m^m \cdot e^{-m} \sqrt{2\pi m} \cdot e^{+\frac{1}{4m}}}{(\lambda m)^{\lambda m} e^{-\lambda m} \sqrt{2\pi \lambda m} (m - \lambda m)^{m - \lambda m} \cdot e^{-(m - \lambda m)} \cdot \sqrt{2\pi (m - \lambda m)}}.$$

Wir fassen die Terme wie folgt zusammen

$$S_{m\lambda} \leq \left[\frac{m^m}{m^{\lambda m} \cdot m^{m - \lambda m}} \right] \cdot \left[\frac{1}{\lambda^{\lambda m} (1 - \lambda)^{(1 - \lambda)m}} \right] \cdot \left[\frac{e^{-m}}{e^{-\lambda m} \cdot e^{-(m - \lambda m)}} \right] \\ \cdot \left[\frac{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{m}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{m} \cdot \sqrt{2\pi} \sqrt{(1 - \lambda)m}} \right] \cdot e^{+\frac{1}{4m}}.$$

Wir haben die Terme so zusammengefasst, dass die erste und dritte Klammer genau 1 ergeben. Nehmen wir den dualen Logarithmus des Nenners der zweiten Klammer, so erhalten wir

$$m\lambda \cdot \text{ld}\lambda + m(1 - \lambda) \cdot \text{ld}(1 - \lambda) = -mH(\lambda),$$

wobei

$$H(\lambda) = -\lambda \text{ld}\lambda - (1 - \lambda) \text{ld}(1 - \lambda)$$

ist; die zweite Klammer wird somit $2^{+mH(\lambda)}$. Mit

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}\sqrt{1-\lambda}},$$

wird die letzte Klammer gleich

$$C \cdot m^{-\frac{1}{2}}.$$

Wir haben insgesamt nun

$$S_{m\lambda} \leq C \cdot m^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{+\frac{1}{4m}} \cdot 2^{mH(\lambda)}.$$

Wir schreiben nun

$$S = S_{m\lambda} + \dots + S_i + \dots + S_1 + 1$$

und wollen S abschätzen, indem wir die Reihe durch eine geometrische Reihe von oben einschränken. Da für die Binomialkoeffizienten

$$\binom{m}{k} = \frac{m - k + 1}{k} \binom{m}{k - 1}$$

gilt, lässt sich unsere Reihe S beginnend mit $S_{m\lambda}$ Term für Term durch Multiplikation mit den Faktoren

$$\frac{m\lambda}{m - m\lambda + 1}, \dots, \frac{3}{m - 3 + 1}, \frac{2}{m - 2 + 1}, \frac{1}{m - 1 + 1}$$

berechnen. Als geometrische Reihe wählen wir eine, die mit $S_{m\lambda}$ beginnt und mit dem Faktor

$$q = \frac{m\lambda}{m - m\lambda} = \frac{\lambda}{1 - \lambda}$$

abnimmt. Sie hat stets Koeffizienten, die größer sind als die von S . Ihre Summe ist gleich

$$S_{m\lambda} \cdot \frac{1}{1 - q} = S_{m\lambda} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{1 - \lambda}} = S_{m\lambda} \cdot \frac{1 - \lambda}{1 - 2\lambda}.$$

Wir haben somit

$$S \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda}} \cdot m^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{+\frac{1}{4m}} \cdot \frac{1 - \lambda}{1 - 2\lambda} \cdot 2^{mH(\lambda)}.$$

Für $m >$ einem Mindestwert m_0 ist der Faktor vor der Zweierpotenz < 1 , so dass für m genügend groß gilt

$$\sum_{i=0}^{m\lambda} \binom{m}{i} \leq 2^{mH(\lambda)},$$

wobei

$$\lambda < \frac{1}{2}.$$

Anhang E: Zusammenfassung der Ergebnisse der Verkehrs- und Bedientheorie

E.1 Abkürzungsverzeichnis

A	Verkehrsangebot
B	Blockierungswahrscheinlichkeit
D	Durchsatz
D	Gleichverteilung (deterministisch)
E_k	Erlang- k Verteilung
$E_{1,m}(A)$	Erlang'sche Verlustformel
$F_{\mathbf{T}}(t)$	Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen T
$f_{\mathbf{T}}(t)$	Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen T
$FIFO$	First In First Out
$FCFS$	First Come First Serve

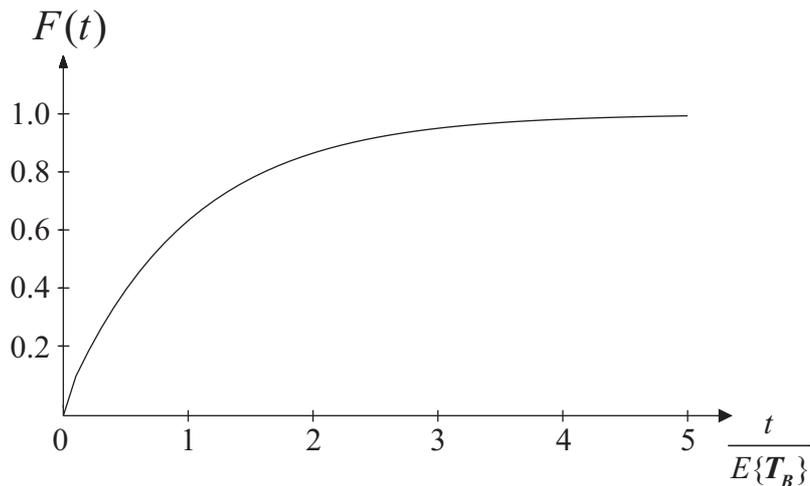
G	beliebige Verteilung (general)
GI	beliebige Verteilung mit unabhängigen Ankünften
H_k	hyperexponentielle Verteilung k -ter Ordnung
$HVStd$	Hauptverkehrsstunde
k	Anzahl der Anforderungen im System
L	Anzahl der wartenden Anforderungen
$FCFS$	Last Come First Serve
$LIFO$	Last In Last Out
m	Anzahl der Bedieneinheiten
M	Markoff-Prozess, negativ exponentielle Verteilung
P_E	Erfolgswahrscheinlichkeit
P_V	Verlustwahrscheinlichkeit
P_W	Wartewahrscheinlichkeit, zweite Erlang'sche Formel
p_k	Zustandswahrscheinlichkeit
q	endliche Quellenzahl
R	Restbedienzeit (Zufallsvariable)
R	Verkehrsrest
s	Anzahl der Plätze im System (Warte- und Bedienplätze)
SJF	Shortest Job First
T_A	Ankunftsabstand
T_B	Bediendauer
T_E	Endeabstand
T_V	Verweilzeit, Verweildauer
T_W	Wartezeit
V	Verkehr
ω	Anzahl der Warteplätze
β	Verkehrsaufkommen einer freien Quelle
λ	Ankunftsrate
μ	Enderate, Bedienrate
ρ	Auslastung der Bedieneinheit

E.2 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

E.2.1 Negativ exponentielle Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$F_{\mathbf{T}}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$E\{\mathbf{T}\} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{und} \quad \sigma_{\mathbf{T}}^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$



E.2.2 Konstante Wahrscheinlichkeitsverteilung

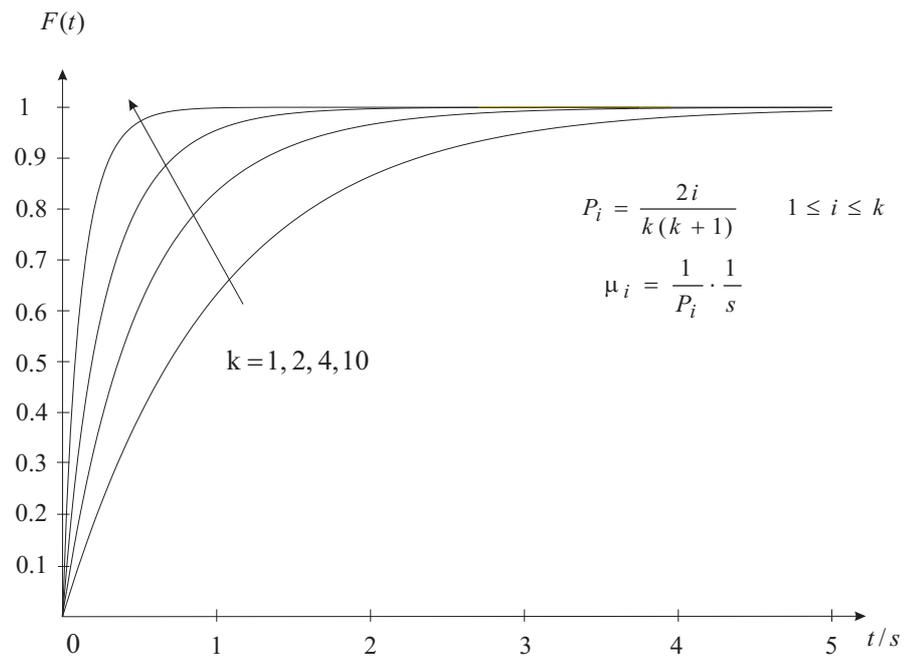
$$F_{\mathbf{T}_B}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < b \\ 1 & \text{für } t \geq b, \end{cases}$$

$$E\{\mathbf{T}_B\} = b \quad \text{und} \quad \sigma_{\mathbf{T}_B}^2 = 0.$$

E.2.3 Hyperexponentielle Wahrscheinlichkeitsverteilung k-ter Ordnung, $k \in \{1, 2, \dots\}$

$$F_{\mathbf{T}_B}(t) = 1 - \sum_{i=1}^k p_i \cdot e^{-\mu_i t} \quad \text{für } t \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^k p_i = 1,$$

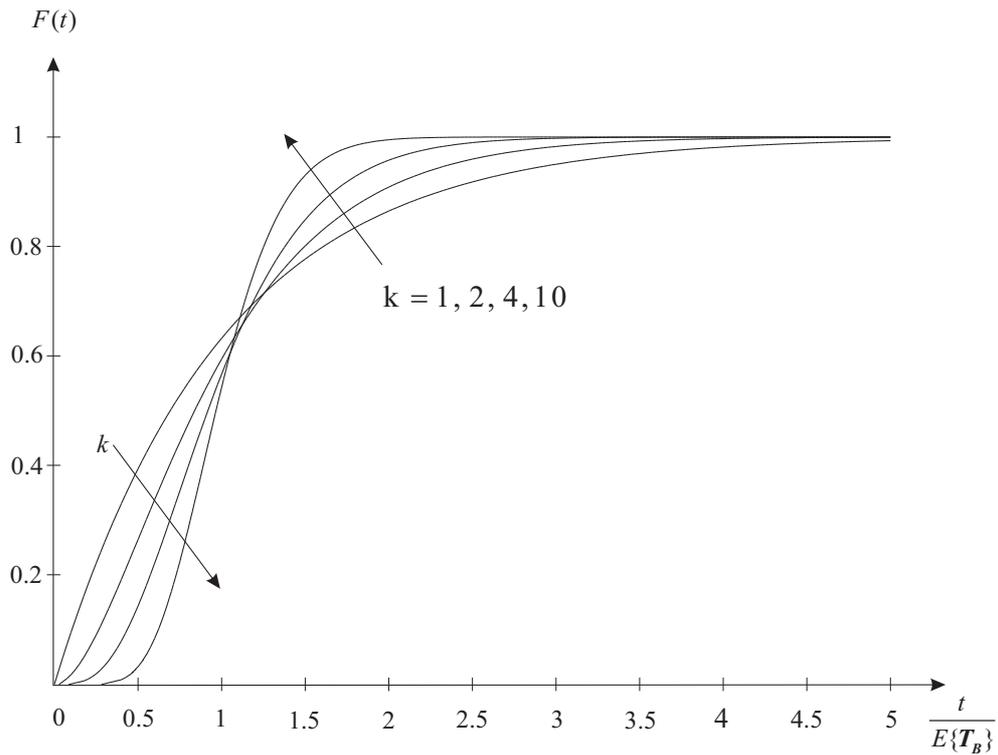
$$E\{\mathbf{T}_B\} = \sum_{i=1}^k \frac{p_i}{\mu_i} \quad \text{und} \quad \sigma_{\mathbf{T}_B}^2 = 2 \sum_{i=1}^k \frac{p_i}{\mu_i^2} - \left(\sum_{i=1}^k \frac{p_i}{\mu_i} \right)^2.$$



E.2.4 Erlang-k Wahrscheinlichkeitsverteilung, $k \in \{1, 2, \dots\}$

$$F_{\mathbf{T}_B} = 1 - e^{-\mu t} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\mu t)^i}{i!} \quad \text{für } t \geq 0,$$

$$E\{\mathbf{T}_B\} = \frac{k}{\mu} \quad \text{und} \quad \sigma_{\mathbf{T}_B}^2 = \frac{k}{\mu^2}$$



E.3 Warte- und Verlustsysteme

E.3.1 Das Wartesystem M/M/1

$$E\{\mathbf{k}\} = \frac{\rho}{1 - \rho}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$E\{\mathbf{L}\} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

$$E\{\mathbf{T}_v\} = \frac{1}{\lambda} \cdot E\{\mathbf{k}\}$$

$$E\{\mathbf{T}_w\} = \frac{1}{\lambda} \cdot E\{\mathbf{L}\}$$

$$P_V = 0$$

$$D = \lambda$$

E.3.2 Das Verlustsystem M/M/1 - w

$$P_V = \rho^s \cdot \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{s+1}}$$

$$D = \lambda \cdot (1 - P_V)$$

E.3.3 Das Verlustsystem M/M/m

$$P_V = \frac{\frac{A^m}{m!}}{\sum_{i=0}^m \frac{A^i}{i!}} \quad \text{mit} \quad A = \frac{\lambda}{\mu} \quad \text{Erlang'sche Verlustformel}$$

$$P_E = 1 - P_V$$

$$E\{\mathbf{k}\} = V = A \cdot (1 - P_V)$$

$$R = A \cdot P_V$$

E.3.4 Das Verlustsystem M/M/m mit endlicher Quellenzahl q

$$p_k = \frac{\beta^k \binom{q}{k}}{\sum_{i=0}^m \beta^i \binom{q}{i}} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{\lambda}{\mu} \quad \text{Engset-Formel}$$

E.3.5 Das Wartesystem M/M/m

$$P_W = \frac{\frac{A^m}{m!} \frac{m}{m-A}}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^m}{m!} \frac{m}{m-A}} \quad \text{Erlang'sche Wartewahrscheinlichkeit}$$

$$E\{\mathbf{L}\} = P_W \cdot \frac{A}{m-A}$$

$$E\{\mathbf{T}_W\} = \frac{1}{\lambda} \cdot E\{\mathbf{L}\} = \frac{P_W}{\lambda} \cdot \frac{A}{m-A}$$

$$E\{\mathbf{T}_V\} = \frac{P_W}{\lambda} \cdot \frac{A}{m-A} + \frac{1}{\mu}$$

$$E\{\mathbf{k}\} = \lambda \cdot E\{\mathbf{T}_V\}$$

E.3.6 Das Verlustsystem M/M/m - w

$$P_W = \frac{A^m}{m!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{A}{m}\right)^w}{1 - \frac{A}{m}} \cdot p_0$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^m}{m!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{A}{m}\right)^{w+1}}{1 - \frac{A}{m}}}$$

$$P_V = \frac{A^m}{m!} \cdot \frac{A^w}{m^w} \cdot p_0$$

$$E\{\mathbf{L}\} = \frac{A^m}{m!} \sum_{i=0}^w i \cdot \left(\frac{A}{m}\right)^i \cdot p_0$$

E.3.7 Das Wartesystem M/G/1

$$E\{\mathbf{R}\} = \frac{\lambda}{2} \cdot E\{\mathbf{T}_B^2\}$$

$$E\{\mathbf{T}_w\} = \frac{\lambda \cdot E\{\mathbf{T}_B^2\}}{2 \cdot (1 - \rho)}$$

$$E\{\mathbf{L}\} = \frac{\lambda^2 \cdot E\{\mathbf{T}_B^2\}}{2 \cdot (1 - \rho)}$$

$$E\{\mathbf{T}_v\} = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda \cdot E\{\mathbf{T}_B^2\}}{2 \cdot (1 - \rho)}$$

$$E\{\mathbf{k}\} = \rho + \frac{\lambda^2 \cdot E\{\mathbf{T}_B^2\}}{2 \cdot (1 - \rho)}$$

E.3.8 Das Wartesystem M/D/1

$$E\{\mathbf{T}_v\} = \frac{1}{\frac{\mu}{1 - \rho}} \left(1 - \frac{\rho}{2}\right)$$

$$E\{\mathbf{k}\} = \frac{\rho}{1 - \rho} \left(1 - \frac{\rho}{2}\right)$$

$$E\{\mathbf{T}_w\} = E\{\mathbf{T}_v\} - \frac{1}{\mu}$$

$$E\{\mathbf{L}\} = \lambda \cdot E\{\mathbf{T}_w\}$$

E.3.9 Das Prioritätssystem M/G/1 mit n Ankunftsclassen nichtverdrängender Priorität

$$E\{\mathbf{R}\} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot E\{\mathbf{T}_B^2\}$$

$$E\{\mathbf{T}_{\mathbf{W}_k}\} = \frac{E\{\mathbf{R}\}}{(1 - \rho_1 - \rho_2 - \dots - \rho - k - 1) \cdot (1 - \rho_1 - \rho_2 - \dots - \rho_k)}$$

$$E\{\mathbf{T}_{\mathbf{V}}\} = E\{\mathbf{T}_{\mathbf{W}_k}\} + \frac{1}{\mu_k}$$

$$E\{\mathbf{L}_k\} = \lambda_k \cdot E\{\mathbf{T}_{\mathbf{W}_k}\}$$

E.3.10 Das Prioritätssystem M/G/1 mit n Ankunftsclassen verdrängender Priorität

$$E\{\mathbf{P}\} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i E\{\mathbf{T}_{\mathbf{B}_i}^2\}}{(1 - \rho_1 - \rho_2 - \dots - \rho_k)}$$

$$E\{\mathbf{Q}\} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\mu_i} \cdot \lambda_i \cdot E\{\mathbf{T}_{\mathbf{V}_k}\} = \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i \cdot E\{\mathbf{T}_{\mathbf{V}_k}\} \quad \text{für } k > 1$$

$$E\{\mathbf{Q}\} = 0 \quad \text{für } k = 1$$

$$E\{\mathbf{T}_{\mathbf{V}_k}\} = E\{\mathbf{P}\} + E\{\mathbf{Q}\} + \frac{1}{\mu_k}$$

$$E\{\mathbf{T}_{\mathbf{V}_k}\} = \frac{\frac{2}{\mu_k}(1 - \rho_1 - \dots - \rho_k) + \sum_{i=1}^k \lambda_i E\{\mathbf{T}_{\mathbf{B}_i}^2\}}{2(1 - \rho_i - \dots - \rho_k)(1 - \rho_1 - \dots - \rho_{k-1})}$$

Lösungshinweise zu Selbsttestaufgaben

Lösung zu Selbsttestaufgabe 1.1-1:

- a. In offenen Systemen sind die Produkte unterschiedlicher Hersteller nach dem ISO - Modell konzipiert und deshalb zueinander annähernd kompatibel, d. h. eine freizügige Kommunikation ist möglich.
- b. Eine Schicht stellt eine Gruppe von Kommunikationsaufgaben eines Kommunikationssystems dar.
- c. Ein Protokoll besteht aus den Regeln (einschließlich den zeitlichen Bedingungen), nach denen der logische Meldungs austausch zwischen zwei gleichen Schichten von Kommunikationssystemen abgewickelt wird.
- d. Primärmeldungen sind Meldungen, die zwischen zwei benachbarten Schichten ausgetauscht werden.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 1.3-1:

Schicht 1: Bitsynchronisation auf Teilübertragungsstrecken.

Schicht 2: Flussregelung beim Verbindungsaufbau zwischen einem Endgerät und der Vermittlungsstelle.

Schicht 3: Wegesuche für den Verbindungsaufbau zwischen zwei Teilnehmern.

Schicht 4: Flussregelung für einen Drucker, dessen Druckgeschwindigkeit geringer als die Übertragungsgeschwindigkeit des Systems ist.

Schicht 5: Dialogverwaltung für zwei Datenendgeräte, die z. B. über ein System mit Halbduplexübertragung Nachrichten austauschen wollen.

Schicht 6: Bei der Datenübertragung zwischen zwei PC's mit unterschiedlicher Codierung für die Bildschirmdarstellung wird die Umsetzung für ein globales Darstellungsformat durchgeführt.

Schicht 7: Bei der Benutzung einer Datenbank wird zu Beginn die Identifikation und Autorisierung des Benutzers überprüft.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 2.1-1:

Kommunikationsnetze bestehen aus Übertragungswegen, -einrichtungen und Vermittlungseinrichtungen und ermöglichen Nutzinformationen auszutauschen. Dienste sind Kommunikationsmöglichkeiten mit festgelegten Eigenschaften, die den Anwendern von Netzen angeboten werden. Im Gegensatz zu früher, wo Dienste unmittelbar mit Netzen gekoppelt waren, werden heute zahlreiche Dienste in verschiedenen Netzen angeboten.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 2.2-1:

Öffentlich	Privat
Fernsprechnetze (z. B. ISDN)	Nebenstellenanlagen (z. B. der Fernuni Hagen)
Datenetze (z. B. Datenpaketvermittlungsnetze)	Datenetze auf Paketvermittlungsbasis
Rundfunk und Fernsehnetz (z. B. Satellitenfunk)	Lokale Netze (z. B. Ethernet, Tokenring, WLAN)

Lösung zu Selbsttestaufgabe 2.2-2:

- Es wird ein asynchrones (Start-Stop) Verfahren mit 7,5 Schritten je Zeichen benutzt.
- Schrittgeschwindigkeit: $50 \text{ Bd} = 50 \frac{\text{Schritte}}{\text{s}}$
 Zeichengeschwindigkeit: $50 \frac{\text{Schritte}}{\text{s}} \cdot \frac{1 \frac{\text{Zeichen}}{\text{s}}}{7,5 \text{ Schritte}} = 6\frac{2}{3} \frac{\text{Zeichen}}{\text{s}}$
- [Bitübertragungsrate] = [Schrittgeschwindigkeit] * [Anzahl der Bit je Schritt] = $\frac{\text{Schritte}}{\text{s}} \cdot \frac{\text{bit}}{\text{Schritte}}$
- Je Zeichen werden 5 Nutzbit übertragen, d. h. $6\frac{2}{3} \cdot 5 \text{ bit} = 33,33 \text{ bit}$ werden in einer Sekunde maximal gesendet.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 2.3-1:

Die eigentliche Übertragungsgeschwindigkeit erhöht sich, da zusätzliche Bits für Synchronisierung und Zustandsanzeige der Datenverbindung mit übertragen werden; im Netz der DBP Telekom sind dies 2 zusätzliche Bits pro 8 Nutzbits.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 2.3-2:

DNS Auflösung:

Domainnamen	IP
yahoo.de	217.12.3.11
lycos.de	212.78.220.236
web.de	217.72.195.42
gmx.de	213.165.64.215

Inverse Auflösung:

IP	Domainnamen
132.176.12.30	ks.fernuni-hagen.de
213.165.64.215	www.gmx.net
129.217.128.2	dx1.HRZ.Uni-Dortmund.de
132.176.12.10	bitburger.fernuni-hagen.de

Lösung zu Selbsttestaufgabe 2.3-3:

Ja, Sprache kann als ON/OFF-Quelle modelliert werden. Dabei werden die aktiven Phasen (z. B. im Laufe eines Gesprächs) dem Zustand "ON" und die Pausen dem Zustand "OFF" zugeordnet. Im Zustand "ON" werden Spachpakete mit der maximalen Datenrate übertragen während im Off-Zustand gar keine Pakete übertragen werden.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 3.1-1:

- a. Ein Ereignisfeld E ist eine nicht leere Menge von Teilmengen der Ausgänge eines Experiments und erfüllt die folgenden Eigenschaften:
 - Wenn A ein Element von E ist, ist sein Komplement \bar{A} auch ein Element von E .
 - Eine Vereinigung von (endlich oder abzählbar unendlich vielen) Elementen von E ist ein Element von E .
- b. Ein Ereignis ist Element aus dem Ereignisfeld E .
- c. • Das sichere Ereignis ist ein Ereignis, das bei jeder Durchführung des Experiments eintritt - es ist identisch mit der Menge der Ausgänge des Experiments H . Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses ist 1. Es muss jedoch nicht jedes Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit 1 das sichere Ereignis sein.

- Das unmögliche Ereignis ist ein Ereignis, das bei keiner Durchführung des Experiments eintritt - es ist identisch mit \overline{H} , oder der leeren Menge \emptyset . Die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses ist Null.
- Ein Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit Null ist ein Ereignis, das fast nie auftritt. Es muss nicht immer identisch \overline{H} oder t sein, sondern es gilt lediglich $P(A) = 0$.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 3.2-1:

- a. A und B seien zwei Ereignisse. Die erforderliche Bedingung für die statistische Unabhängigkeit ist

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

- b.

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{für } P(B) > 0$$

- c. Der Bayes'sche Satz für paarweise disjunkte Ereignisse mit $\bigcup A_i = H$ lautet

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B | A_i) \cdot P(A_i)}.$$

Er gestattet, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $(A_i | B)$ aus den Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $(B | A_i)$ und A_i auszurechnen.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 3.3-1:

- a. A ist die Menge aller Ausgänge, die die Bedingung erfüllen, dass die Zufallsvariable x einen Wert $\leq x_0$ annimmt.

- b.

$$F_{\mathbf{x}}(x) = P(\{\eta_i | \mathbf{x}(\eta_i) \leq x\}), \quad x \in \mathbb{R}$$

- c.

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \frac{d F_{\mathbf{x}}(x)}{d x}$$

Lösung zu Selbsttestaufgabe 3.4-1:

a. Sei \mathbf{x} eine Zufallsvariable. Eine Funktion $g(\mathbf{x})$ ordnet der reellen Zahl $\mathbf{x}(\eta_i)$ für jedes η_i einen Funktionswert $\mathbf{y}(\eta_i) = g(\mathbf{x}(\eta_i))$ zu. Wenn $\mathbf{y}(\eta_i)$ auch die beiden Eigenschaften erfüllt:

- Die Menge $\{\eta_i \mid \mathbf{y}(\eta_i) \leq y\}$ ist ein Ereignis für alle $y \in \mathbb{R}$
- $P\{\eta_i \mid \mathbf{y}(\eta_i) = +\infty\} = 0$ und $P\{\eta_i \mid \mathbf{y}(\eta_i) = -\infty\} = 0$, bezeichnet man \mathbf{y} als Funktion der Zufallsvariablen \mathbf{x} . Man fasst \mathbf{y} als eine neue Variable auf:

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

mit der reellen Abbildung

$$y = g(x) \text{ .}$$

b. Der Erwartungswert von \mathbf{y} ergibt sich:

$$E\{\mathbf{y}\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_{\mathbf{x}}(x) dx \text{ .}$$

Lösung zu Selbsttestaufgabe 3.5-1:

a.

$$F_{\mathbf{xy}}(x, y) = P(\{\eta_i \mid \mathbf{x}(\eta_i) \leq x\} \cap \{\eta_i \mid \mathbf{y}(\eta_i) \leq y\})$$

ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Ereignisse $\{\eta_i \mid \mathbf{x}(\eta_i) \leq x\}$ und $\{\eta_i \mid \mathbf{y}(\eta_i) \leq y\}$ gemeinsam eintreten.

b. Zwei linear unabhängige Variablen \mathbf{x} und \mathbf{y} erfüllen die Bedingung

$$E\{\mathbf{xy}\} = E\{\mathbf{x}\} \cdot E\{\mathbf{y}\}$$

c. Der Korrelationskoeffizient ist ein Maß für die Korreliertheit zweier Zufallsvariablen, z. B.

$\rho_{\mathbf{xy}} = 0$ heisst, dass \mathbf{x} und \mathbf{y} nicht korreliert sind;

$\rho_{\mathbf{xy}} = \pm 1$ heisst, dass \mathbf{x} und \mathbf{y} vollständig korreliert sind;

$\rho_{\mathbf{xy}} = 0, 2$ heisst, dass \mathbf{x} und \mathbf{y} weniger korreliert sind als

bei $\rho_{\mathbf{xy}} = \pm 1$

Lösung zu Selbsttestaufgabe 3.7-1:

- a. $\mathbf{x}(\eta, t)$ stellt einen stochastischen Prozess dar. Für jedes feste η_i ("Muster") ist $x(\eta_i, t)$ eine Zeitfunktion. Eine derartige Zeitfunktion eines stochastischen Prozesses wird als Musterfunktion bezeichnet.
- b. Der Ausdruck $R_{\mathbf{xx}}(t_1, t_2)$ steht für die Autokorrelationsfunktion des Prozesses $\mathbf{x}(\eta, t)$; sie wird definiert als

$$R_{\mathbf{xx}}(t_1, t_2) = E\{\mathbf{x}(\eta, t_1)\mathbf{x}(\eta, t_2)\}$$

- c. Ein streng stationärer Prozess ist ein Prozess, dessen Statistiken invariant gegenüber einer Zeitverschiebung sind.
Ein schwach stationärer Prozess weist lediglich die Zeitinvarianz seines linearen Mittelwertes auf, und dessen Autokorrelationsfunktion hängt nur noch von der Zeitverschiebung ab.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 4.1-1:

- a. Der Informationsgehalt des Symbols x_i beträgt

$$I(x_i) = -\log P(x_i) .$$

- b. Die Symbolentropie H der Quelle wird definiert als

$$H = E\{I(\mathbf{x})\} = \sum_{i=1}^n I(x_i) \cdot P(x_i) = - \sum_{i=1}^n P(x_i) \cdot \log P(x_i) .$$

Die Symbolentropie H stellt den Informationsgehalt dar, den ein Symbol der Quelle im Mittel enthält.

H erreicht das Maximum H_{\max} , wenn die Symbole x_i gleichverteilt sind.

- c. Die Redundanz R der Quelle ist definiert als

$$R = H_{\max} - H .$$

Lösung zu Selbsttestaufgabe 4.2-1:

a. Bei einem stationären gedächtnislosen Kanal sind die Ausgangswahrscheinlichkeiten $P(y_i)$ durch die Wahrscheinlichkeiten $P(x_i)$ und die bedingte Wahrscheinlichkeitsmatrix $P(Y | X)$ festgelegt.

b. Die jeweiligen Definitionen sind die

i. Verbundentropie:

$$H(X, Y) = - \sum_{i,j} P(x_i, y_j) \cdot \log P(x_i, y_j),$$

ii. die Äquivokation oder Rückschlussentropie:

$$H(X | Y) = - \sum_{i,j} P(x_i, y_j) \cdot \log P(x_i | y_j),$$

iii. die Streuentropie oder Irrelevanz:

$$H(Y | X) = - \sum_{i,j} P(x_i, y_j) \cdot \log P(y_j | x_i),$$

iv. die Transinformation:

$$H(X; Y) = - \sum_{i,j} P(x_i, y_j) \cdot \log \frac{P(x_i) \cdot P(y_j)}{P(x_i, y_j)}.$$

c. Der vorgegebene Kanal ist verlust- und rauschbehaftet.

Für das Symbol x_1 gibt es nicht nur ein Ausgangssymbol von Y , weil die Übergangswahrscheinlichkeiten $P(y_i | x_1)$ ungleich Null sind. Das besagt, dass der Kanal rauschbehaftet ist.

Für das Symbol x_1 ist die Untermenge

$$Y_{x_1} = \{y_1, y_2, y_3\},$$

während die zu x_2 gehörige Untermenge

$$Y_{x_2} = \{y_1, y_2, y_3\}$$

ist, d. h. es gilt nicht, dass

$$Y_{x_1} \cap Y_{x_2} = \emptyset \quad \text{für } x_1, x_2 \in X.$$

Laut Definition ist der Kanal also auch verlustbehaftet.

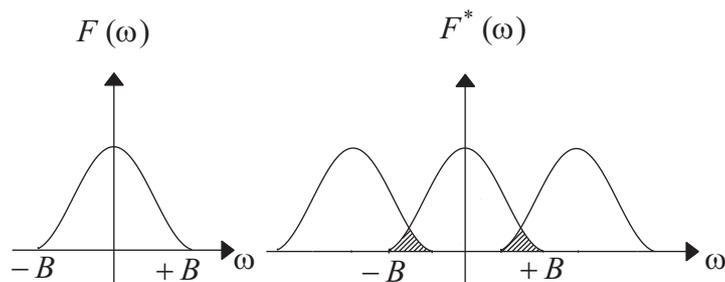
Lösung zu Selbsttestaufgabe 4.3-1:

- a. Die Transinformation über die Kaskadierung der beiden Kanäle ist kleiner als über den ersten Kanal. Dies bedeutet wiederum, dass die im ersten Kanal als Äquivokation verlorene Information durch die Verarbeitung im zweiten Kanal nicht wiedergewonnen werden kann.
- b. Die Kanalkapazität stellt ein Maß für den Informationsgehalt pro Symbol dar, den ein Kanal maximal übertragen kann. Sie ist definiert als das Maximum der Transinformation über alle zulässigen Eingangswahrscheinlichkeiten, d. h. $C = \max_{P(X)} H(X; Y)$.
- c. Die Kanalkapazität eines solchen symmetrischen Kanals errechnet sich zu (siehe Beispiel 4.3-3):

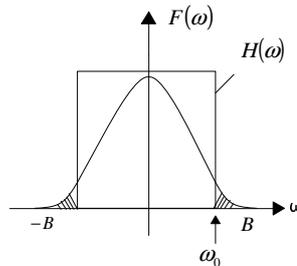
$$\begin{aligned} C &= \text{ld } q + [(1-p) \cdot \text{ld}(1-p) + p \cdot \text{ld} \frac{p}{q-1}] \\ &= 2,5850 + [-0,02856 - 0,15932] \\ &= 2,3971 \text{ Bit/Symbol} \end{aligned}$$

Lösung zu Selbsttestaufgabe 5.2-1:

1. Das Abtasttheorem war nicht erfüllt, d. h. die Abtastfrequenz $\omega' = \frac{2\pi}{T}$ war kleiner als die zweifache Grenzfrequenz $2B$ des bandbegrenzten Signals $f(t)$, z. B. $\omega' = \frac{3}{2}B$



Die Grenzfrequenz ω_0 des für die Rekonstruktion verwendeten Tiefpasses war kleiner als die Bandgrenzfrequenz B .



Lösung zu Selbsttestaufgabe 5.3-1:

- Es wird in der Regel eine ungleichmäßige Quantisierung verwendet.
- Ein A/D-Wandler führt die ungleichmäßige Quantisierung direkt durch.
Es wird eine Kompanierung angewendet. Das Signal wird durch einen Kompressor mit nichtlinearer Kennlinie komprimiert, anschließend gleichmäßig quantisiert und dann mit einem Expander, dessen Kennlinie invers zu der des Kompressors ist, expandiert.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 6.2-1:

- Ein Code wird decodierbar genannt, wenn Codierung eines beliebigen Aneinanderreihens der Quellensymbole eine Kette von Codesymbolen ergibt, die eindeutig wieder in Codewörter zerlegt werden kann, so dass die Folge der Quellensymbole wiedergewonnen werden kann.

Eine notwendige Bedingung für einen decodierbaren Code ist die Gültigkeit der Kraft-McMillan-Ungleichung

$$K = \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}} \leq 1,$$

wobei l_i die Länge des Codewortes w_i ist.

- Als idealer Code bezeichnet man einen decodierbaren Code mit $E = 1$, wobei E die Effizienz des Codes darstellt

$$E = \frac{H(X)}{l_m} \frac{1}{\log(r)}.$$

l_m ist dabei die mittlere Länge der Codewörter und $H(X)$ die Quellenentropie.

- Unter einem optimalen Code versteht man einen Code, für den gilt, dass es keinen anderen decodierbaren Code mit demselben Codealphabet für die gegebene Quelle gibt, der eine kleinere mittlere Codelänge als dieser aufweist.

Der Code lautet

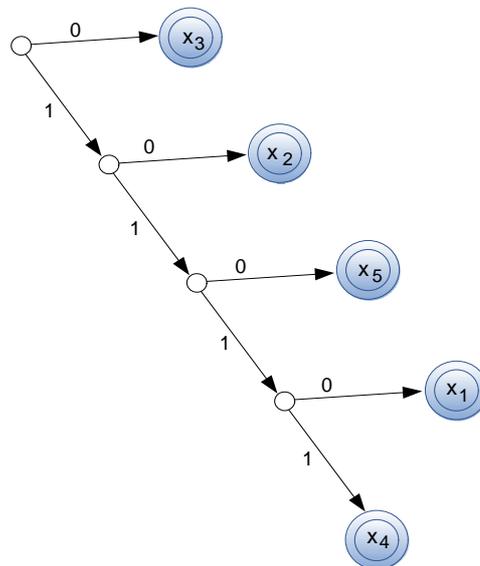
Quellensymbol	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Code	0010	01	1	0011	000

- b. Für die Konstruktion eines äquivalenten Kommacodes können wir den Huffman-Algorithmus einsetzen, wobei wir den jeweiligen zusammengefassten Symbolen das Codesymbol "1" und den abgespaltenen Quellensymbolen das Codesymbol "0" bis auf die letzte Abspaltung des zusammengefassten Symbols zuordnen. Diese Vorgänge werden im Folgenden dargestellt.

Q_1		Q_2	
x_3	0,4	x_3	0,4
x_2	0,25	x_2	0,25
x_5	0,20	x_5	0,2 }0
x_1	0,1 }0	x_1x_4	0,15 }1
x_4	0,05 }1		

Q_3		Q_4	
x_3	0,4	$x_5x_1x_4x_2$	0,6 }1
$x_5x_1x_4$	0,35 }1	x_3	0,4 }0
x_2	0,25 }0		

Der Codebaum sieht so aus:



Der Code lautet

Quellensymbol	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Code	1110	10	0	1111	110

Das Symbol "0" wirkt als Trennzeichen.

c. Die Quellenentropie liegt bei

$$\begin{aligned}
 H(X) &= - \sum_{i=1}^5 P(x_i) \cdot \lg P(x_i) \\
 &= -[0,1 \cdot \lg 0,1 + 0,25 \cdot \lg 0,25 + 0,4 \cdot \lg 0,4 \\
 &\quad + 0,05 \cdot \lg 0,05 + 0,2 \cdot \lg 0,2] \\
 &= 2,0414 \text{ Bit/Symbol.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l_m &= \sum_{i=1}^5 P(w_i) \cdot l(w_i) \\
 &= 0,1 \cdot 4 + 0,25 \cdot 2 + 0,4 \cdot 1 + 0,05 \cdot 4 + 0,2 \cdot 3 \\
 &= 2,1 \text{ Bit/Symbol.}
 \end{aligned}$$

Die Zahlenwerte von $H(X)$ und l_m zeigen, dass der Code die Ungleichung erfüllt.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 7.1-1:

- Unter dem Abstand zwischen zwei Codewörtern versteht man die Anzahl der Stellen, in denen sich die beiden Codewörter unterscheiden. Die Hamming-Distanz d wird ermittelt, indem man den minimalen Abstand $d = \min d(u, v)$ über alle Paare von Codewörtern (u, v) bestimmt.
- Die Codewörter B und D können mit Veränderungen an zwei Stellen ineinander überführt werden, bei den anderen Codewörterpaaren benötigt man drei Veränderungen. Somit ist der Mindestabstand = Hamming-Distanz = 2. Damit ist wiederum ein Fehler stets erkennbar.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 7.2-1:

a. Zwischen den Matrizen

$$G = [E_n \mid P]$$

und

$$H = [-P^T \mid E_{m-n}]$$

besteht folgender Zusammenhang

$$\begin{aligned} GH^T &= [E_n \mid P] \begin{bmatrix} -P \\ \dots \\ E_{m-n} \end{bmatrix} \\ &= -E_n \cdot P + P \cdot E_{m-n} = 0. \end{aligned}$$

E_n ist hierbei eine $(n \times n)$ Einheitsmatrix und P eine beliebige $n \times (m - n)$ Matrix.

b. Es gilt

$$w = \sum_{i=1}^n a_i g_i.$$

Als Beispiel ergibt sich für den Buchstaben e aus dem Teletex-Schriftsatz folgendes Informationswort

01100101 (8 Stellen),

dieses wird mit der folgenden Generatormatrix

$$G = \left[\begin{array}{cccccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

multipliziert und ergibt somit das 12-stellige Codewort:

$$w = (01100101|0111).$$

Lösung zu Selbsttestaufgabe 7.3-1:

- a. Wir haben $k = 4$, $m = 15$ und $n = m - k = 11$. Die Generatormatrix G ist eine (11×15) -Matrix.

$$G = \begin{bmatrix} x^{n-1} & \cdot & g(x) \\ \vdots & & \vdots \\ x & \cdot & g(x) \\ & & g(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{10} & \cdot & g(x) \\ \vdots & & \vdots \\ x & \cdot & g(x) \\ & & g(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- b. Ein Codewort aus C ist 15 Bit lang.
- c. Ein Codewort hat 11 Informationsstellen und 4 Prüfstellen.
- d. Aus $a = (10010111000)$ ergibt sich das Polynom $a(x)$:

$$a(x) = x^{10} + x^7 + x^5 + x^4 + x^3.$$

Nach der Codierungsvorschrift (Gl. 7.3-9) erhält man das Codepolynom $v(x)$:

$$\begin{aligned} v(x) &= a(x) \cdot g(x) \\ &= (x^{10} + x^7 + x^5 + x^4 + x^3) \cdot (x^4 + x + 1) \\ &= x^{14} + x^{11} + x^9 + x^8 + x^7 \\ &\quad + x^{11} + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 \\ &\quad + x^{10} + x^7 + x^5 + x^4 + x^3 \\ &= x^{14} + x^{10} + x^9 + x^6 + x^3, \end{aligned}$$

das zugehörige Codewort lautet (100011001001000).

Lösung zu Selbsttestaufgabe 8.1-1:

Bedingt durch den hohen Frequenzanteil ist die Reichweite stark eingeschränkt, da sich hier im Wesentlichen die Frequenzabhängigkeit der Leitungsdämpfung auswirkt.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 8.2-1:

- Beim NRZ-Code behält das Signal bei unmittelbarer Wiederholung eines Symbols den gleichen Wert für die ganze Dauer.
- Beim RZ-Code kehrt das Signal in jedem Intervall zu Null zurück.
- Beim Biphas-Code werden Symbole als Phasensprünge codiert.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 8.3-1:

Bit 0 - Bit 3 werden mit $S1$ codiert:

$$1010 \rightarrow + + - rds = +1$$

Bit 4 - Bit 7 müssen mit $S2$ codiert werden:

$$0110 \rightarrow - + + rds = +2$$

Bit 8 - Bit 11 müssen mit $S3$ codiert werden:

$$0101 \rightarrow - 0 0 rds = +1$$

Die laufende digitale Summe:

$$rds = +1$$

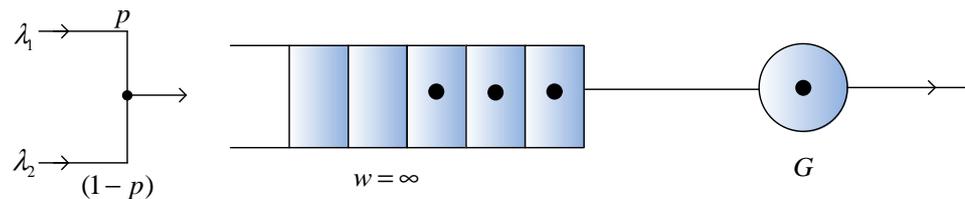
Lösung zu Selbsttestaufgabe 8.4-1:

- Die Beeinflussungen werden als Symbolinterferenzen bezeichnet.
- Als Empfangsfilter werden z.B. Transversalfilter eingesetzt, deren Koeffizienten so eingestellt werden, dass die 1. Nyquist-Bedingung erfüllt wird.
- Eine kontrollierte Symbolinterferenz aufeinanderfolgender Symbole wird zugelassen, wenn als Codierung für den Leitungscode eine Korrelations-Codierung oder *partial response coding* angewendet wird.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 9.2-1:

Die Kendall'sche Bezeichnung $H_2/G/1$ beschreibt ein System mit einem Ankunftsprozess, der die hyperexponentielle Wahrscheinlichkeitsverteilung zweiter Ordnung der Ankunftsabstände hat, und einem Bedienprozess mit einer beliebigen Wahrscheinlichkeitsverteilung der Bedienzeiten. Das System hat eine Bedieneinheit und unendlich viele Warteplätze.

Das System kann wie folgt dargestellt werden:

**Lösung zu Selbsttestaufgabe 9.3-1:**

Mit $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0,5$ erhält man

$$\text{die Verlustwahrscheinlichkeit: } P_V = \rho^s \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{s+1}} = \rho^9 \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{10}} = 0,0978,$$

$$\text{die mittlere Warteschlangenlänge: } E\{\mathbf{k}\} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = 0,5$$

und den Durchsatz:

$$\begin{aligned} D &= \lambda \cdot (1 - P_V) = 0,3/s \cdot (1 - 0,0978) \\ &= 0,2998/s. \end{aligned}$$

Lösung zu Selbsttestaufgabe 9.4-1:

Die Anzahl der im Mittel belegten Bedieneinheiten $E\{\mathbf{N}_B\}$ errechnet sich zu

$$E\{\mathbf{N}_B\} = E\{\mathbf{k}\} - E\{\mathbf{L}\}.$$

Es gilt (Gl. 9.4-28)

$$E\{\mathbf{L}\} = P_W \cdot \frac{A}{m - A},$$

bzw. (Gl. 9.4-30)

$$E\{\mathbf{T}_V\} = \frac{P_W}{\lambda} \cdot \frac{A}{m - A} + \frac{1}{\mu}.$$

Mit dem Gesetz von Little

$$E\{\mathbf{T}_V\} \cdot \lambda = E\{\mathbf{k}\}$$

erhält man

$$E\{\mathbf{N}_B\} = E\{\mathbf{T}_V\} \cdot \lambda - E\{\mathbf{L}\} = \frac{\lambda}{\mu} = A.$$

Weil die Verlustwahrscheinlichkeit des $M/M/m$ -Wartesystems Null ist, ergibt sich der Verkehr V (Gl. 9.4-31):

$$V = A = E\{\mathbf{N}_B\},$$

was zu zeigen war.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 9.5-1:

Die Pollaczek-Kinchin-Gleichung (Gl. 9.5-16) für das $M/G/1$ -System lautet

$$E\{\mathbf{T}_V\} = \frac{E\{\mathbf{T}_B\}}{1 - \lambda E\{\mathbf{T}_B\}} \cdot \left[1 - \frac{\lambda}{2} \cdot E\{\mathbf{T}_B\} \cdot \left(1 - \frac{\sigma_{\mathbf{T}_B}^2}{(E\{\mathbf{T}_B\})^2} \right) \right]$$

$$E\{\mathbf{T}_B\} = \frac{2}{\mu} \quad \text{und} \quad \sigma_{\mathbf{T}_B}^2 = \frac{2}{\mu^2}.$$

Damit ergibt sich für das $M/E_2/1$ -System

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{T}_V\} &= \frac{\frac{2}{\mu}}{1 - \rho'} \left[1 - \frac{\rho'}{2} \left(1 - \left(\frac{\mu}{2} \right)^2 \cdot \frac{2}{\mu^2} \right) \right], \quad \text{wobei} \quad \rho' = \frac{2\lambda}{\mu} \\ &= \frac{\frac{2}{\mu}}{1 - \rho'} \left[1 - \frac{\rho'}{4} \right] \end{aligned}$$

Lösung zu Selbsttestaufgabe 9.6-1:

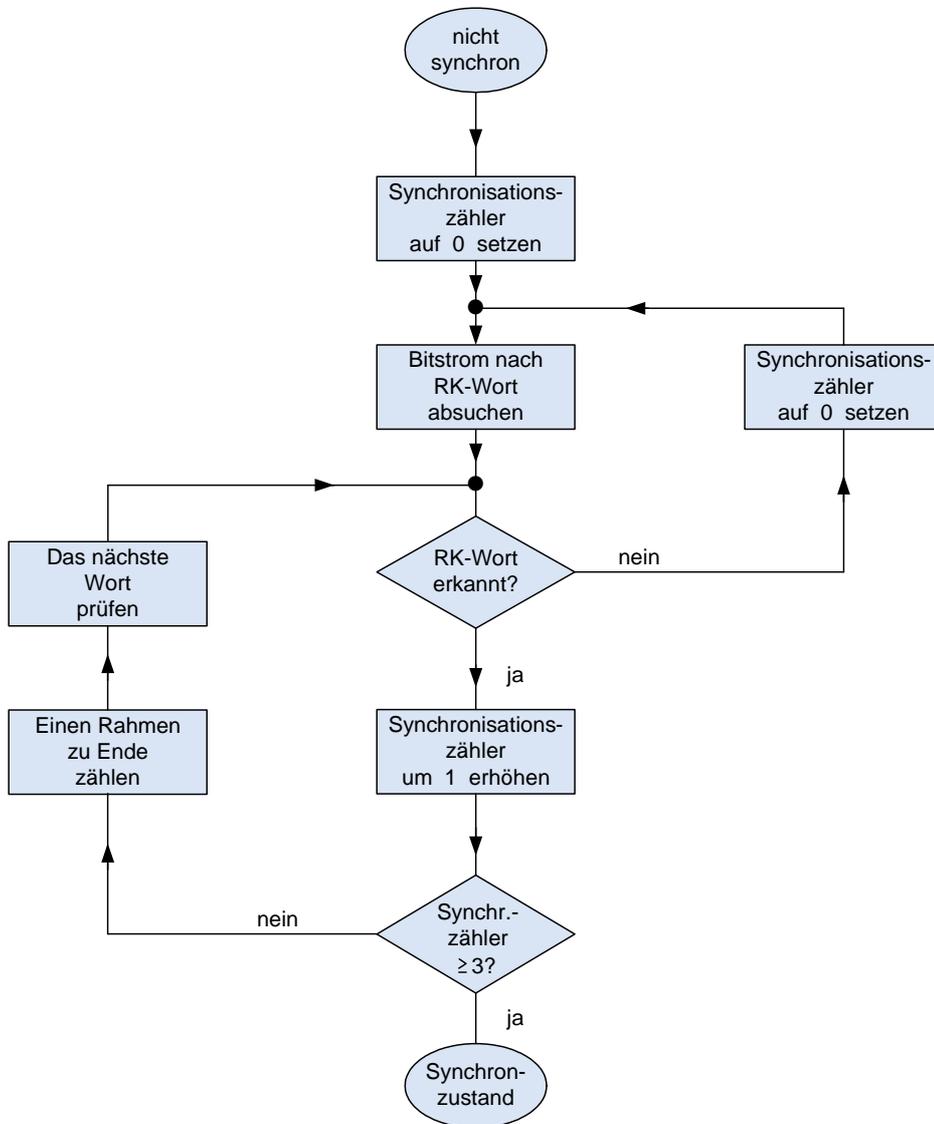
Es sind FIFO- und LIFO-Strategien zu nennen. Die Strategie FIFO organisiert die Warteschlange so, dass die ankommenden Anforderungen in der Warteschlange hinten angereiht und von vorne abgerufen werden, während bei der LIFO-Strategie die ankommenden Anforderungen vorne in der Warteschlange eingereiht und wiederum von vorne abgerufen werden.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 10.1-1:

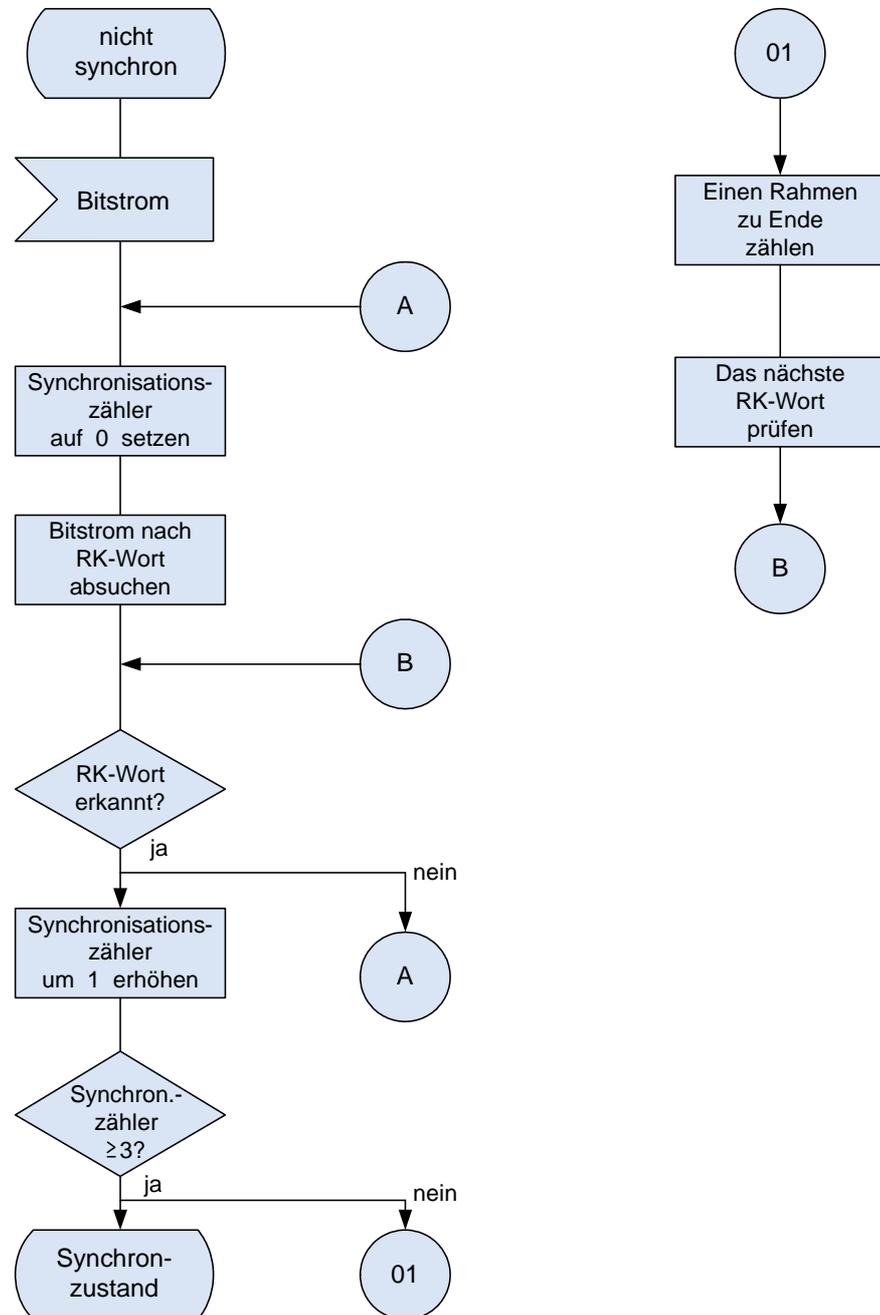
Beim Frequenzmultiplex wird das Frequenzband des Übertragungskanals in Teilbänder unterteilt. Die einzelnen Teilbänder werden den einzelnen Quellen-Senken Paaren für die Übertragung der Signale zugeordnet.

Beim Zeitmultiplex wird der Übertragungskanal (zeitlich) periodisch abwechselnd für die Übertragung der einzelnen Signale genutzt.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 10.2-1:



Das SDL-Diagramm sieht wie folgt aus.



Lösung zu Selbsttestaufgabe 10.3-1:

Das Grundsystem PCM 30 wird in Europa verwendet; das PCM 24 (DS-1) wird in den USA bzw. in Japan eingesetzt.

Das System PCM 30 hat eine Rahmenlänge von 256 Bit und eine Rahmendauer von $125 \mu\text{s}$. Die Rahmendauer wird in 32 Zeitschlitze je 8 Bit unterteilt, so ergibt sich das Multiplexsignal mit einer Bitrate von 2048 kbit/s.

Beim PCM 24 (DS-1) besteht ein Rahmen aus 193 Bit, die Rahmendauer beträgt $125 \mu\text{s}$. Der Rahmen enthält ein Synchronisationsbit und 24 8-Bitwörter (24 Zeitschlitze je 8 Bit). Die Bitrate des Multiplexsignals beträgt 1544 kbit/s.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 10.4-1:

Es treten folgende Echos auf:

- a. Nahecho an der Gabel
- b. Echo durch Reflexion an einer Stoßstelle;
- c. Fernecho durch Reflexion an der Empfängergabel.

Die Reichweite wird im Wesentlichen durch die Signallaufzeit und die Dämpfung auf der Leitung begrenzt.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 11.1-1:

- a. Koordinaten des Vermittlungsknotens

x : Da die dargestellte Konfiguration symmetrisch zur Achse $x = 3$ ist, muss der Vermittlungsknoten auf dieser Achse angesiedelt werden.

y : Die Summe der Abstände zu den Vermittlungsknoten soll minimal werden.

$$f(y) = 5 - y + 2 \cdot \sqrt{(y - 1)^2 + 2^2}$$

Ein Minimum muss $\frac{df(y)}{dy} = 0$ erfüllen.

$$\begin{aligned}\frac{df(y)}{dy} &= -1 + \frac{2(y-1)}{\sqrt{(y-1)^2 + 2^2}} \\ (2y-2)^2 &= (y-1)^2 + 4 \\ 4y^2 - 8y + 4 &= y^2 + 1 + 4 \\ y^2 - 2y - \frac{1}{3} &= 0 \\ y &= +1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{3}} \\ y &\approx 2,155.\end{aligned}$$

Dass es sich bei dem Punkt (3; 2,155) um ein lokales Minimum handelt, zeigt sich z. B. daran, dass beim Einsetzen von $y = 3$ ein größerer Wert für $f(y)$ herauskommt.

- b. Nein. Eine direkte Leitung zwischen zwei Teilnehmern führt stets zu einer kürzeren oder höchstens gleichen Leitungslänge.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 11.2-1:

- a. Bei der schrittweisen Durchschaltung bzw. direkten Wahl wird der Weg in der jeweiligen Koppelstufe unabhängig von den folgenden Koppelstufen gesucht. Bei der konjugierten Durchschaltung bzw. indirekten Wahl wird der Weg erst dann durchgeschaltet, wenn die Steuerung einen Weg durch die gesamte Koppelanordnung über ein Belegungsabbild gefunden hat.
- b. Bei der Konzentration hat die Koppelanordnung mehr Eingänge als Ausgänge. Bei der Expansion liegen demgegenüber mehr Ausgänge als Eingänge vor.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 11.2-2:

Voraussetzung ist, dass die Belegungswahrscheinlichkeit für alle Anschlüsse gleich und bekannt ist (homogener Verkehr). Außerdem muss die Belegungswahrscheinlichkeit der einzelnen Kanten bekannt und unabhängig vom belegten Weg sein. Des Weiteren müssen die ankommenden Rufe gleichmäßig verteilt sein.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 11.3-1:

- Bei der Durchschaltevermittlung wird zwischen zwei Teilnehmern eine physikalische Verbindung (Leitungen oder Zeitmultiplexkanäle) durchgeschaltet.
- Bei der Sendungsvermittlung erfolgt diese physikalische Durchschaltung nicht, sondern die zu übertragende Nachricht wird in den Vermittlungsstellen zwischengespeichert und dann weitergereicht. Hierzu wird die Nachricht mit Adress- und Steuerinformationen versehen.
- Bei der Paketvermittlung wird die gesamte Nachricht in Pakete zerlegt, die dann, wie bei der Sendungsvermittlung, in den Vermittlungsstellen bis zum Empfänger weitergeleitet werden.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 11.3-2:

Bei der Paketvermittlung gibt es zum einen das Datagrammverfahren und zum anderen das Verfahren der virtuellen Verbindung. Beim Datagrammverfahren erhält jedes Paket die Adresse des Empfängers und die Sequenzierungsinformation. Bei einer virtuellen Verbindung wird zunächst über Steuerinformationen eine Route aufgebaut. Alle Pakete einer Verbindung werden über diese Route geleitet. Hierzu werden sie mit einer lokalen Adresse gekennzeichnet. Eine Sequenzierung ist nicht erforderlich, da sich die Reihenfolge der Pakete durch die Übertragung nicht ändert.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 11.4-1:

Anzahl der virtuellen Pfade im Teilnehmeranschluss $2^8 = 256$

Anzahl der virtuellen Pfade im ATM Netzinneren $2^{12} = 4096$

Anzahl der virtuellen Kanäle in beiden Netzen $2^{16} = 65536$

Lösung zu Selbsttestaufgabe 11.4-2:

Pro Zelle können 48 Nutzbytes (PCM-Wörter) übertragen werden. Dieses bedeutet eine Verzögerung von $48 \cdot 125 \mu s = 6 ms$.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 12.1-1:

a.

$$t_{d_0} = \frac{48 \text{ bit}}{64 \text{ kbit/s}} = 0,75 \text{ ms.}$$

b.

$$t_{n1} = \frac{256 \text{ bit}}{64 \text{ kbit/s}} = 4 \text{ ms}$$

Also $t_{n1} = t_{n2} = \dots = t_{n10} = 4 \text{ ms}$.

c. Da pro Zyklus und Station stets eine Meldung vorliegt, wird die Zyklusdauer mit der Formel

$$t_c = n \cdot t_z + n \cdot t_p + \sum_{i=1}^n l_i + 2nt_{d_0} + \sum_{i=1}^n t_{n_i}$$

ausgerechnet.

Durch Einsetzen der Werte n , t_z , t_p , t_{d_0} und t_n in die obige Formel erhalten wir

$$\begin{aligned} t_c &= 10 \times 0,5 \text{ ms} + 10 \times 1 \text{ ms} + 2 \cdot \frac{10 \mu\text{s}}{\text{km}} \cdot \sum_{i=1}^{10} 10 \cdot i \text{ km} \\ &+ 2 \times 10 \times 0,75 \text{ ms} + \sum_{i=1}^{10} 4 \text{ ms} \\ &= 5 \text{ ms} + 10 \text{ ms} + 200 \cdot \frac{10 \times 11}{2} \mu\text{s} + 15 \text{ ms} + 40 \text{ ms} \\ &= 5 \text{ ms} + 10 \text{ ms} + 11 \text{ ms} + 15 \text{ ms} + 40 \text{ ms} \\ &= 81 \text{ ms} \end{aligned}$$

d.

$$\text{Durchsatz} = \frac{\text{Nutzinformation}}{\text{Zyklusdauer}} = \frac{256 \text{ bit}}{0,081 \text{ s}} = 3160 \frac{\text{bit}}{\text{s}}$$

pro Station, d. h. normierter Gesamtdurchsatz

$$\bar{D} = 10 \times 3160 \frac{\text{bit}}{\text{s}} \cdot \frac{\text{s}}{64000 \text{ bit}} = 0,49$$

Lösung zu Selbsttestaufgabe 12.2-1:

Der zeitliche Abstand zwischen zwei Medienzugriffen, der notwendig ist, um Kollisionen sicher erkennen zu können, wird von der Signallaufzeit auf dem Medium zwischen den zwei am weitesten voneinander entfernten Stationen bestimmt.

Die Stationen A und B seien die Stationen mit der maximalen Entfernung in einem Netz. Die Laufzeit zwischen diesen Stationen sei T . Wenn Station A zum Zeitpunkt T_1 eine Nachricht aussendet, erkennt die Station B erst zum Zeitpunkt $T_1 + T$, dass das Medium belegt ist. Wenn nun die Station B kurz vor $T_1 + T$ eine Nachricht ausgesendet hat, kommt es zur Kollision. Diese wird von der Station A erst erkannt, wenn die kollidierte Nachricht die Station erreicht, im schlimmsten Fall also erst zum Zeitpunkt $T_1 + 2T$, nach dem Doppelten der Signallaufzeit T .

Damit Kollisionen in CSMA/CD-Systemen sicher erkannt werden können, muss der zeitliche Abstand zwischen zwei Medienzugriffen also mindestens das Doppelte der maximalen Signallaufzeit auf dem Medium betragen.

Lösung zu Selbsttestaufgabe 12.3-1:

- a. Die Token-Umlaufzeit beim Ring ohne Verkehr ergibt sich aus der Verzögerung, die die einzelnen Stationen und der Monitor verursachen, zuzüglich der Signallaufzeit des Tokens auf dem Ring:

Jede Station verursacht eine Verzögerung von 1 Bit, d. h. $0,25 \mu s$. Bei 100 Stationen erhält man zusammen $25 \mu s$. Der Monitor fügt eine Verzögerung von 24 Bit, d. h. $6 \mu s$ hinzu. Die Signallaufzeit auf dem Ring beträgt

$$10 \text{ km} * 4,2 \mu s/\text{km} = 42 \mu s.$$

Die Tokenumlaufzeit beim Ring ohne Verkehr beträgt somit

$$(25 + 6 + 42) \mu s = 73 \mu s.$$

- b. Eine Meldung mit 1024 Byte Daten und 21 Byte Steuerinformation besteht insgesamt aus $(1024 + 21) = 1045$ Byte.

Ihre Verweildauer auf dem Ring setzt sich aus der Übertragungszeit für die Nachricht, der Verzögerungszeit durch die Stationen und der Signallaufzeit zusammen. Die Verzögerungszeit und die Signallaufzeit entsprechen der in a) berechneten Token-Umlaufzeit.

Die Nachricht verweilt also $(\frac{1045 \times 8}{4} + 73) \mu s = 2,163 \text{ ms}$ auf dem Ring.

Übungsaufgaben

ÜBUNGSAUFGABEN ZU KAPITEL 1

Aufgabe 1.1: Welche der folgenden Aussagen treffen bei der OSI-Modellierung zu?

1. Die Modellierung nach OSI von ISO ist
 - a. die einzige logische Möglichkeit zur Strukturierung eines Systems,
 - b. eine logische Möglichkeit zur Strukturierung eines Systems.
2. Nach der ISO-Norm kann eine Aufgabe (z. B. die Fehlersicherung bei der Datenübertragung)
 - a. genau in einer Schicht wahrgenommen werden,
 - b. in verschiedenen Schichten wahrgenommen werden.
3. Die Tatsache, dass bei der OSI-Modellierung jede Schicht genau zwei benachbarte Schichten hat, mit denen sie kommunizieren kann, ist eine Eigenschaft
 - a. der Systeme, die modelliert werden,
 - b. des OSI-Modells.
4. Die Anzahl der Schichten der OSI-Modellierung
 - a. folgt unmittelbar aus systemtheoretischen Überlegungen zu Kommunikationssystemen.
 - b. ist willkürlich und ein Kompromiss zwischen zu hohem und zu niedrigem Detaillierungsgrad.
5. Die Einführung von Schichten, in denen bestimmte logisch zusammengehörige Aufgaben in einem Kommunikationssystem zusammengefasst werden
 - a. ist ein naheliegendes Vorgehen und erfolgte in Anlehnung an bereits vorhandene Modellierungen.
 - b. ist eine völlig neue Errungenschaft der OSI-Modellierung.

Aufgabe 1.2: Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

1. Bei der verbindungsorientierten Kommunikation muss eine physikalische Verbindung zwischen Sender und Empfänger während der gesamten Dauer der Kommunikation vorhanden sein.

2. Bei der verbindungsorientierten Kommunikation bleibt die Reihenfolge der Datenpakete erhalten. Ein Überholen ist daher unmöglich.
3. Eins der wesentlichen Merkmale der verbindungsorientierten Kommunikation ist die Tatsache, dass die eingesetzten Protokolle Mechanismen der Fehlerkontrolle implementieren.
4. Obwohl UDP keine zuverlässige Kommunikation garantieren kann, kann es dennoch zur zuverlässigen Kommunikation herangezogen werden, wenn die Protokolle der Anwendungsschicht die notwendige Zuverlässigkeit bereitstellen.

Aufgabe 1.3: Für die nachstehend aufgelisteten Kommunikationsbeispiele sind die Aufgaben so in Schichten aufzuteilen, dass sie dem OSI-Modell entsprechen, bzw. analog zu diesem sind. Für jedes Beispiel ist ein Schichtenmodell zu entwerfen und graphisch (d. h. für jede Schicht einen Block mit Kennzeichnung der Kommunikationsbeziehung) darzustellen.

- Ein japanischer Philosoph telefoniert mit einem deutschen Philosoph. Jeder Philosoph hat einen Übersetzer, der außer der Sprache seines Philosophen Englisch beherrscht.
- Ein chinesischer Philosoph telefoniert mit einem deutschen Philosophen, welchem ein Übersetzer für Englisch zur Verfügung steht. Der chinesische Philosoph hingegen hat einen Übersetzer für Chinesisch-Japanisch und einen für Japanisch-Englisch
- Es soll eine Nachricht über den ISDN B-Kanal zwischen zwei PC's ausgetauscht werden. Auf dem einen PC wird der Text mit 40 Zeichen/Zeile und dem anderen mit 80 Zeichen/Zeile editiert.

Aufgabe 1.4: Es sollen zwei Internet-Anwendungen betrachtet werden:

1. E-Mail
2. Videostreaming (die Übertragung von Videodaten in Echtzeit).

Beantworten Sie die folgenden Fragen:

1. Ergänzen Sie die folgende Tabelle, indem Sie den folgenden Diensten und Funktionen die richtige Schicht im TCP/IP Modell zuordnen:

	Netz- Interface Schicht	Internet- Schicht	Transport- Schicht		Anwendungs- Schicht
			TCP	UDP	
Routing der E-Mail					
E-Mail Client					
Display des Videostreams					
Ende-zu-Ende Verbindung (E-Mail)					
Ende-zu-Ende Verbindung (Videostream)					

2. Stellen Sie die E-Mail Kommunikation anhand des TCP/IP-Modells graphisch dar (Datenfluss zwischen den Schichten).
3. Welches Transportprotokoll würden Sie zur Übertragung der jeweiligen Anwendung einsetzen? Nennen Sie jeweils zwei Ihnen bekannten Anwendungen, die TCP beziehungsweise UDP nutzen.
4. Wie viele IP-Datagramme werden zur Übertragung der jeweiligen Anwendung benötigt? Gehen Sie von den folgenden Annahmen aus:
 - Größe der E-Mail = 6000 Bytes (Nutzdaten), Größe des Videostreams = 10.000 Bytes (Nutzdaten)
 - IP setzt jeweils auf Ethernet auf
 - Die maximale Nutzdatengröße, (*Maximum Transfer Unit - MTU*) beträgt 1500 Bytes (Ohne Ethernet-Header)
 - TCP-Header = 20 Bytes, UDP-Header = 8 Bytes, IP-Header = 20 Bytes. Vernachlässigen Sie jeweils den Applikationsheader.

ÜBUNGSAUFGABEN ZU KAPITEL 2

Aufgabe 2.1: Berechnen Sie für die gegebenen Bitfehlerhäufigkeiten von 10^{-5} und 10^{-8} nach wie vielen

- a. SMSs mit ca. 160 Zeichen/SMS
- b. vollen Bildschirmseiten (25 Zeilen/Seite à 80 Zeichen/Zeile)

- c. Dateien (20 KByte)
- d. Bildern (720 KByte)
- e. Videotrailern (1,44 MByte)

mit dem Auftreten eines Fehlers zu rechnen ist und ergänzen Sie Tabelle 1.

$1 \text{ KByte} = 1024 \text{ Byte}$; $1 \text{ MByte} = 1024 \cdot 1024 \text{ Byte}$

Tab. 1:

Anwendung	Bitfehlerhäufigkeit 10^{-5}	Bitfehlerhäufigkeit 10^{-8}
SMS		
Bildschirmseiten		
Dateien		
Bilder		
Videotrailer		

Aufgabe 2.2: Ein Bild in hoher Qualität mit der Datenmenge von 2,5 Mbit soll über ein Kommunikationsnetz übertragen werden. Berechnen Sie die Übertragungszeiten für alle aufgeführten Übertragungsnetze und ergänzen Sie Tabelle 2.

Tab. 2:

Netz	Dauer
GSM 13 kbit/s	
ISDN 64 kbit/s	
ISDN 2*64 kbit/s	
UMTS 384 kbit/s	
ADSL 1024 kbit/s	
ADSL 2048 kbit/s	
Ethernet 10 Mbit/s	
Fast Ethernet 100 Mbit/s	
Gigabit Ethernet 1Gbit/s	
TV Kabelmodem 4 Mbit/s	

Aufgabe 2.3: Ausfallsicherheit, Skalierbarkeit, Verfügbarkeit, Erweiterbarkeit, Fehlertoleranz, usw. sind wichtige, meist topologieabhängige Anforderungen in Zusammenhang mit Kommunikationsnetzen. In der folgenden Übung sollen unterschiedliche Netz-Topologien miteinander verglichen und Ausfallwahrscheinlichkeiten berechnet werden (Linkausfälle sind statistisch voneinander unabhängige Ereignisse). Der Einfachheit halber soll das Hauptaugenmerk nur auf Streckenausfälle (Linkausfälle) gerichtet werden, da die Ausfallwahrscheinlichkeit von Netzkomponenten eine viel komplexere Angelegenheit darstellt (z. B. die der in den einzelnen Knoten laufenden Prozesse).

Im Folgenden betrachten wir ein Kommunikationsnetz mit n Knoten.

- a. 1. Nennen Sie einige Vor- und Nachteile der folgenden Topologien:
- vollvermaschtes Netz
 - Bus
 - Stern
 - Ring
 - linienförmige-Topologie.
2. Berechnen Sie für jede der oben genannten Topologien jeweils die Anzahl der benötigten Links $K(n)$. Welche Zahlenwerte ergeben sich für $n = 6$. Listen Sie das Ergebnis in einer Tabelle auf.
- b. • Berechnen Sie die Ausfallwahrscheinlichkeit der Strecke zwischen den Knoten 1 und 4 (siehe Abb. 1).

Linienförmig



Abb. 1: Linienförmige-Topologie mit 4 Knoten.

Welche Ausfallwahrscheinlichkeit ergibt sich bei n Knoten (siehe Abb. 2)?



Abb. 2: Linienförmige-Topologie mit n Knoten.

- Sei P die Ausfallwahrscheinlichkeit einer Strecke, die Ausfallsicherheit kann vereinfachend als $S = 1 - P$ dargestellt werden. Welche Ausfallsicherheit ergibt sich für beide Strecken ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \cdots n - 1 \rightarrow n$) und ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$) für $p = 0.2$?

- Die Ausfallsicherheit der Strecke $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \cdots n-1 \rightarrow n$ soll nun erhöht werden, in dem die einzelnen Links redundant ausgelegt werden (siehe Abb. 3). Um welchen Faktor bessert sich die Ausfallsicherheit? Bestimmen Sie die Knotenanzahl für $S = 0.8, p = 0.2$.

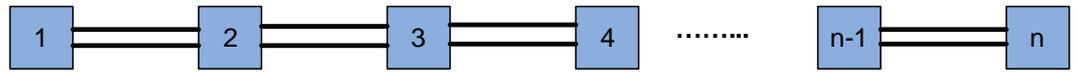


Abb. 3: Linienförmige-Topologie mit redundant ausgelegten Strecken.

- c. Berechnen Sie für die Ring-Topologie (s. Abb. 4) die Wahrscheinlichkeit, dass zwei beliebige Stationen immer miteinander kommunizieren können. Vereinfachend gehen wir hier davon aus, dass die Knoten miteinander kommunizieren können solange zwischen zwei Knoten kein Linkausfall zu verzeichnen ist. Wie hoch ist diese Wahrscheinlichkeit für $p = 0.2$? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für den kompletten Ringausfall im Kontext der Aufgabenstellung?

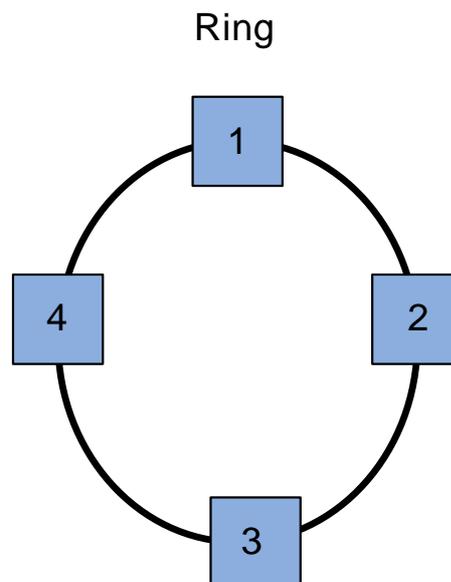


Abb. 4: Ring-Topologie

Hinweis: Die Eintrittswahrscheinlichkeit statistisch voneinander unabhängiger Ereignisse ist $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Ziehen Sie die unten angegebene Formel zur Lösung der Frage c heran.

$${}_n C_r = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

${}_n C_r$ ist eine bekannte Formel aus der Kombinatorik, wenn es um eine Auswahl von r Dingen aus n ohne Berücksichtigung der Reihenfolge geht. Es geht im Wesentlichen darum zu bestimmen auf wie viele Arten eine

bestimmte Auswahl aus einer Ereignismenge gebildet werden kann. Soll beispielsweise bestimmt werden wie viele 2er-Gruppen aus 3 Personen gebildet werden können, so ist das Ergebnis einleuchtend, es sind genau ${}_3C_2 = 3$. In Kapitel 3 dieses Kurses wird ausführlicher auf die Wahrscheinlichkeitstheorie eingegangen.

- d. Berechnen Sie die Ausfallwahrscheinlichkeit des Netzes mit der Stern-Topologie (siehe Abb. 5). Wie hoch ist sie für $p = 0.2$?

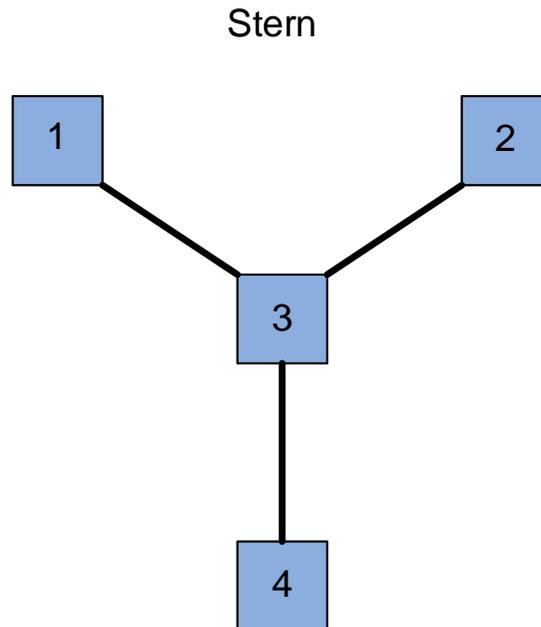


Abb. 5: Stern-Topologie

- e. Diskutieren Sie die erhaltenen Ergebnisse.

Aufgabe 2.4: Eine DIN-A4 Seite (210 mm × 297 mm) soll mit einem Telefax-Gerät übertragen werden.

- Wie viele Bildpunkte ergeben sich bei einem Gerät der Gruppe 3 bei Feinauflösung und der Gruppe 4 mit 400×400 dpi (1dpi = 1 dot per inch, 1 inch = 2,54 cm)?
- Wie lange dauert die Übertragung der jeweiligen Vorlage mit einem 9.600 bit/s Gruppe 3 Fax-Gerät bzw. einem Gruppe 4 Fax-Gerät, wenn je ein Bildpunkt mit einem Bit codiert wird und man jeweils die höchstmögliche Übertragungsgeschwindigkeit ansetzt, d. h. Protokolloverhead vernachlässigt?

- c. Gruppe 3 Geräte verwenden die Lauflängen-Codierung und benötigen für die Übertragung einer fein aufgelösten DIN-A4 Seite bei einer Übertragungsrate von 14,4 kbit/s insgesamt etwa 60 Sekunden. Bestimmen Sie die Zeitdauer für organisatorische Maßnahmen (Wahlvorgang, Aushandeln der Verbindungsparameter, Training,...) unter der Annahme, dass ein Kompressionsfaktor (Datenmenge vor/nach der Codierung) von 10 erreicht wird.

Aufgabe 2.5: Beim Videotextdienst werden die Daten in je zwei Zeilen pro Halbbild übertragen. Die Codierung der Zeichen wird dabei mit dem 8 Bit ASCII Code vorgenommen. In jeder zu einem sichtbaren Teil einer Fernsehzeile korrespondierenden Videotextzeile sind 45 Byte untergebracht. Davon werden 3 Byte zur Synchronisation und 2 Byte zur Numerierung benötigt.

In der ersten Zeile einer Videotextseite ("Header") werden zusätzlich 2 Steuerbyte sowie 6 Byte für die aktuelle Uhrzeit samt Fehlersicherung benötigt.

Ein Magazin besteht aus 100 Seiten Videotext wobei 24 Zeilen pro Seite untergebracht sind. Alle Seiten werden zyklisch wiederholt übertragen.

- a. Wie hoch ist die maximale Zugriffszeit auf eine Seite eines Magazins, wenn nur eine Seite gespeichert werden kann?
- b. Wie hoch ist der maximale Nutzdatenumfang (ohne Steuerzeichen, Zeitsignale) eines Magazins?
- c. Wie viel Speicherkapazität braucht man, um 5 Videotextseiten vollständig zu speichern?
- d. Wie groß ist das Verhältnis aus Bittaktfrequenz und Zeilenfrequenz der vollen Fernsehzeile?

Aufgabe 2.6: Im Folgenden soll *Video/Audio Streaming* im Internet betrachtet werden.

- a. Nennen Sie einige Vor- und Nachteile von *Streaming* und *Downloading* und einige Einsatzmöglichkeiten der Streaming-Technik.
- b. 1. Zur Bereitstellung von Audio/Video im Internet gibt es drei Hauptkonfigurationsmöglichkeiten (siehe 2.3.2.9). Welche Transportprotokolle werden in der jeweiligen Konfiguration eingesetzt? Warum ist eine Interaktion nur in der dritten Konfiguration möglich? Welche der drei Konfigurationen wird bei Live-Übertragungen und on-Demand-Anwendungen eingesetzt?
- c. 1. Bei der Übertragung von Multimedia-Inhalten müssen die sogenannten QoS-Parameter eingehalten werden. Einer dieser Parameter ist der *Jitter*. Wie entsteht er und wie kann er seitens des *Client* beseitigt werden?

2. Beim *Streaming* mit geringerer Bandbreite bekommt man oft die Meldung "*Buffering*" angezeigt. Was ist der Hintergrund?
- d. Sie betreiben einen Videosever dessen Übertragungsrate 100 Mbps beträgt. Zu Ihren Kunden gehören Anwender mit Modems (28,8 kbps), ISDN (*single channel* 64 kbps) und ADSL (*downstream* 2048 kbps). Bei der Codierung der Videoinhalte wurden die unterschiedlichen Anwenderkategorien berücksichtigt.
1. In der Praxis steht nicht die gesamte Übertragungsrate zur Verfügung. Bei Modems beispielsweise wird der Datenstrom mit 22 kbps anstatt 28,8 kbps codiert. Was ist der Hintergrund?
 2. Berechnen Sie für die Konfiguration in (Abb. 6) die benötigten Übertragungsraten für die Übermittlung von MPEG-2 codierten Videodaten mit 4 Mbps. Welche Zahlenwerte ergeben sich für $n=$ $m=9$?

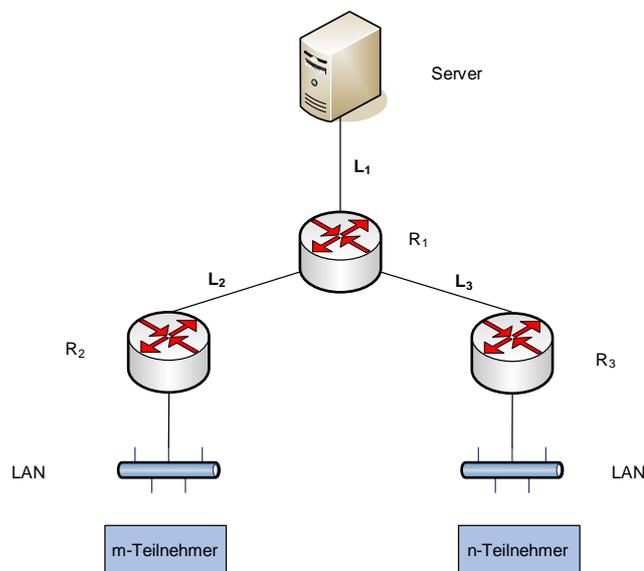


Abb. 6: Konfiguration

3. Zur Optimierung der Übertragungsrate werden die Router R_1 , R_2 und R_3 um eine zusätzliche Funktionalität erweitert, welche ihnen erlaubt Pakete gemäß der Anzahl der abgehenden Pfade zu vervielfältigen (*IP-Multicast*). Das heißt Router R_1 erhält Pakete mit Videoinhalten vom *Server* dupliziert sie und leitet sie weiter an R_2 und R_3 . Welche Übertragungsraten ergeben sich für das Multicast-Szenario? Welche Zahlenwerte ergeben sich für $m = n = 9$. Vergleichen Sie beide Formen der Übertragung bezüglich Effizienz in der Bandbreitennutzung.

Hinweis: *IP-Unicast*: jedem Anwender wird ein eigener Datenstrom zugewiesen (Abb. 7). Bei drei Teilnehmern wird der Datenstrom dreimal übertragen.

IP-Multicast: Der Datenstrom wird vom *Server* ein einziges Mal übertragen (Abb. 8).

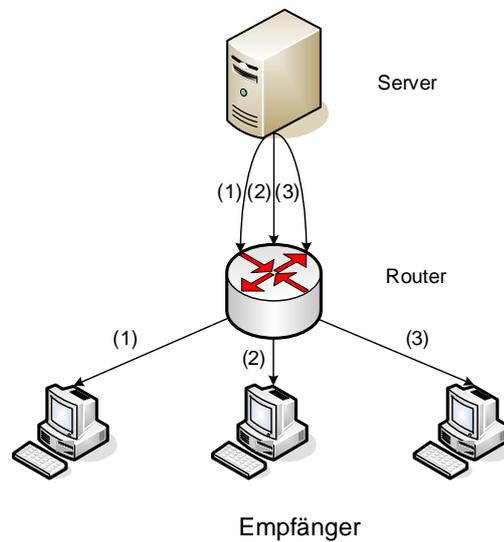


Abb. 7: IP-Unicast

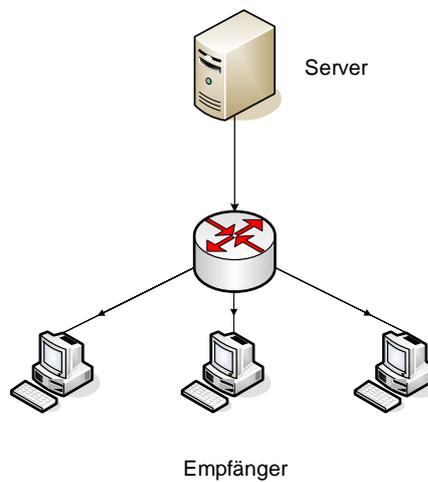


Abb. 8: IP-Multicast

ÜBUNGSAUFGABEN ZU KAPITEL 3

Aufgabe 3.1:

- Ist es möglich, dass zwei Ereignisse gleichzeitig statistisch unabhängig und disjunkt sind? Begründen Sie Ihre Aussage.

b. Man stelle fest, welches der folgenden Ereignisse die größere Wahrscheinlichkeit hat:

1. bei einem gleichzeitigem Wurf mit vier Würfeln auf wenigstens einem Würfel die Augenzahl *Eins* zu erhalten.
2. bei 26 Würfeln mit gleichzeitig zwei Würfeln, wenigstens einmal genau zwei Augen, d. h. einen sogenannten Einerpasch, zu haben.

Dabei sei vorausgesetzt, dass jeder Ausgang eines Würfelvorgangs gleichwahrscheinlich ist.

c. $n \geq 2$ Personen werden zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(A_n)$ dafür, dass mindestens zwei der ausgewählten Personen am gleichen Tag Geburtstag haben? Man nehme an, dass ein Jahr 365 Tage hat, die als Geburtstag für jede Person gleichwahrscheinlich sind.

Ab wieviel Personen ist $P(A_n) > 0,5$?

Aufgabe 3.2: Die Erlang- k Verteilung beschreibt die Bediendauer \mathbf{T} bei Bediensystemen, die aus k hintereinander ausgeführten Bedienphasen bestehen. Alle Bedienphasen haben eine exponentielle Bediendauer mit dem gleichen Mittelwert $\frac{1}{\mu}$. Die Verteilungsfunktion der Erlang- k Verteilung mit Parameter $\mu > 0$ lautet:

$$F_{\mathbf{T}}(t) = P(\{\mathbf{T} \leq t\}) = 1 - e^{-\mu t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\mu t)^i}{i!}, \quad t \geq 0$$

Hinweis:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}, \quad a > 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

- a. Bestimmen Sie die Dichtefunktion $f_{\mathbf{T}}(t)$.
- b. Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz.
- c. Berechnen Sie für die Erlang-4 Verteilung mit $\mu = 2$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Bedienzeit $\mathbf{T} \leq 4$ ist. Vergleichen Sie diesen Wert mit der Abschätzung der Tschebyscheff'schen Ungleichung.

Aufgabe 3.3: Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte von zwei Zufallsvariablen r und φ ist vorgegeben:

$$f_{\mathbf{r}\varphi}(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{r}{\sigma^2} \sigma^2$$

mit

$$r \in [0, \infty) \quad \text{und} \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten f_r und f_φ .
- Bestimmen Sie weiter den Mittelwert und die Varianz von r .
- Ermitteln Sie den Korrelationskoeffizienten $\rho_{r\varphi}$.

Aufgabe 3.4: $\mathbf{x}(\eta)$ sei eine Zufallsvariable mit der Dichtefunktion

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \frac{1}{2\pi}, 0 \leq x \leq 2\pi$$

Wir bilden nun mittels dieser Zufallsvariablen den Zufallsprozess

$$\mathbf{y}(\eta, t) = \sin(t + \mathbf{x}(\eta)), t \in \mathbb{R}$$

Hinweise:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \pi$$

Bei Zufallsprozessen, die nur von einer Zufallsvariablen $\mathbf{x}(\eta)$ abhängen, gilt für die Autokorrelationsfunktion:

$$R_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{y}(x, t_1) \mathbf{y}(x, t_2) f_{\mathbf{x}}(x) dx$$

- Geben Sie 3 Musterfunktionen des Prozesses $\mathbf{y}(\eta, t)$ an.
- Berechnen Sie den Mittelwert $m_{\mathbf{y}}(t)$ und die Autokorrelationsfunktion $R_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(t_1, t_2)$.
- Ist der Prozess (schwach) stationär?
- Prüfen Sie anhand der Musterfunktion

$$y(t) = \sin(t)$$

ob für den Mittelwert und für die Autokorrelationsfunktion die Zeitmittelwerte mit den Scharmittelwerten übereinstimmen.

Aufgabe 3.5: Ein binäres on-off-Signal $\mathbf{x}(t)$ wird über einen rauschbehafteten Kanal übertragen. Das übertragene Signal am Eingang des Empfängers hat die Form,

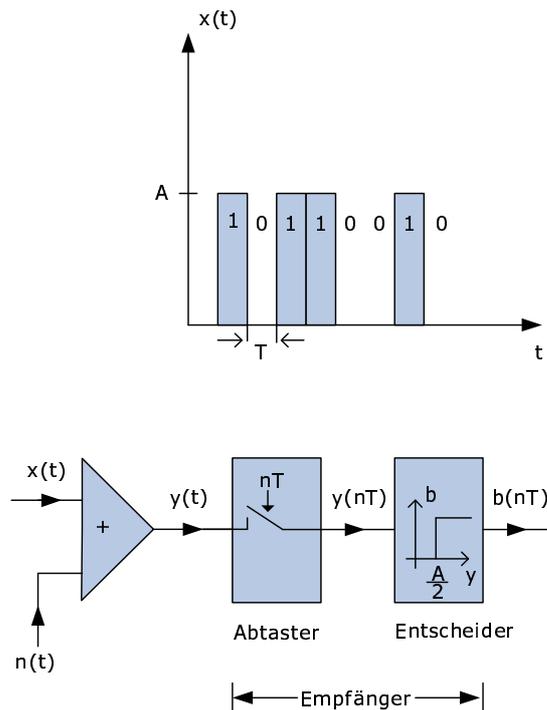
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t),$$

wobei $\mathbf{n}(t)$ weißes Rauschen darstellt, d. h. für die Wahrscheinlichkeitsdichte f_n gilt

$$f_n(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma^2}\right).$$

Es wird angenommen, dass Bits "1" und "0" in $\mathbf{x}(t)$ gleich wahrscheinlich sind.

Eine vereinfachte Übertragungsstrecke mit einem Empfänger, bestehend aus einem Abtaster und einem Entscheider, kann wie folgt dargestellt werden.



Im Empfänger wird der Schwellwert von $A/2$ festgelegt, d. h.

$$\begin{cases} b(nT) = 1, & \text{wenn } y(nT) > \frac{A}{2} \\ b(nT) = 0, & \text{wenn } y(nT) \leq \frac{A}{2}. \end{cases}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte von y lautet:

$$\begin{cases} f_{y0}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right), & \text{"0" gesendet} \\ f_{y1}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(y-A)^2}{2\sigma^2}\right), & \text{"1" gesendet.} \end{cases}$$

Geben Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit an, die bei der Übertragung des Bits "0" und der Übertragung des Bits "1" eintritt.

Hinweis: Die Fehlerwahrscheinlichkeit der Übertragung des Bits "0" wird definiert als

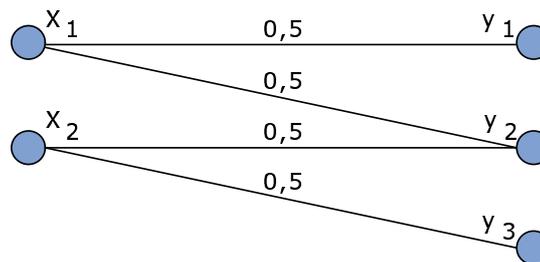
$$P_{e0} = P\left\{y > \frac{A}{2} \mid \text{es wurde "0" gesendet}\right\}.$$

ÜBUNGSAUFGABEN ZU KAPITEL 4

Aufgabe 4.1: Gegeben ist die Tabelle der Häufigkeiten der einzelnen Buchstaben in Beispiel 4.1-3 der Kurseinheit 5. Berechnen Sie die Informationsgehalte der folgenden Buchstaben der deutschen Schrift:

- a. A
- b. T
- c. M
- d. Ermitteln Sie den Buchstaben im Alphabet, dessen Informationsgehalt am größten ist, und den Buchstaben, dessen Informationsgehalt am geringsten ist.

Aufgabe 4.2: Das Kanaldiagramm und die einzelnen Wahrscheinlichkeiten der Eingangssymbole sind wie folgt vorgegeben:



$$P(x_1) = 0,5 \quad \text{und} \quad P(x_2) = 0,5.$$

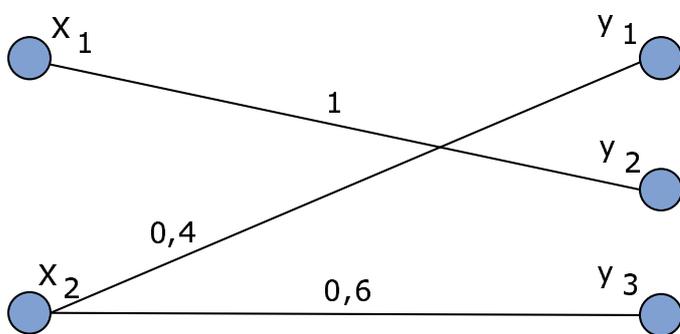
- a. Geben Sie die Kanalmatrix $P(Y|X)$ an.
- b. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(y_i)$ für $i = 1, 2, 3$.
- c. Bestimmen Sie die folgenden Entropien:
 - i. Entropie am Kanaleingang
 - ii. Entropie am Kanalausgang
 - iii. Streuentropie
 - iv. Rückschlussentropie
 - v. Verbundentropie
 - vi. Transinformation

d. Welchen Kanaltyp stellt dieser Kanal dar? Begründen Sie Ihre Aussage.

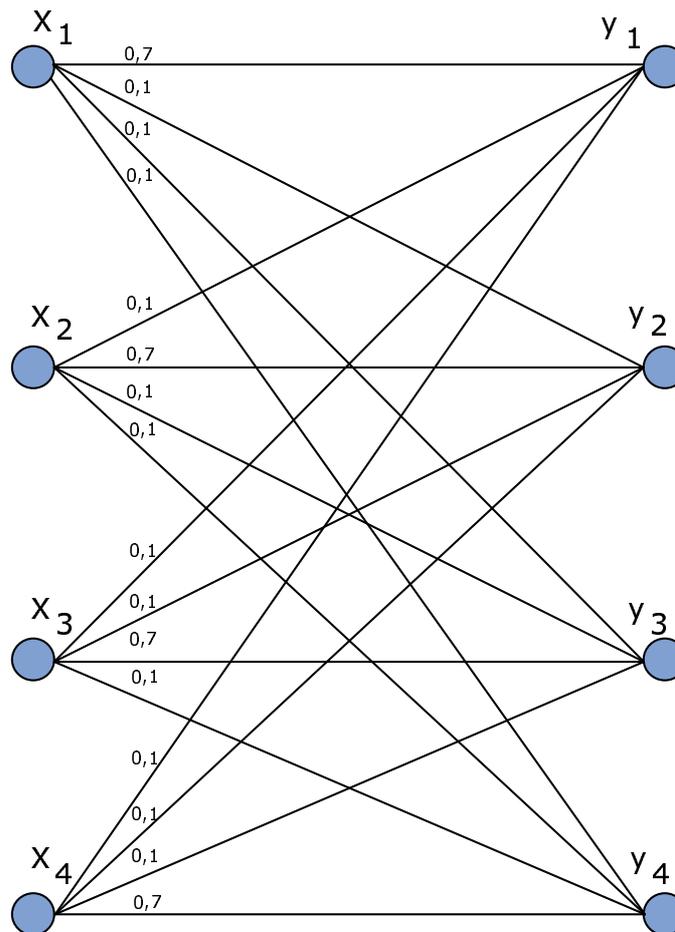
Aufgabe 4.3: Ein Kanal ist durch die nachstehende Kanalmatrix vorgegeben.

$$P(Y|X) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \end{bmatrix}$$

- Ist der Kanal rauschfrei, verlustfrei oder beides?
- Bestimmen Sie die Kanalkapazität.



Aufgabe 4.4: Ein Kanal ist durch das folgende Kanaldiagramm vorgegeben:



Bestimmen Sie die Kanalkapazität.

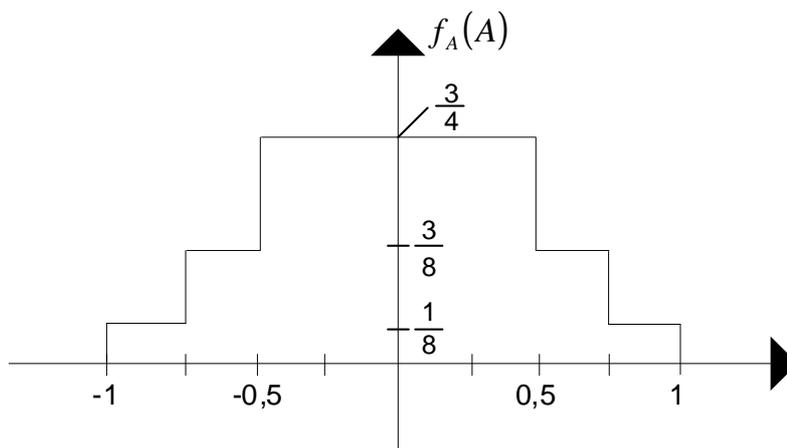
ÜBUNGSAUFGABEN ZU KAPITEL 5

Aufgabe 5.1: Wir betrachten zunächst das Signal $f(t) = \cos(t)$.

- Mit welcher Kreisfrequenz ω' muss dieses Signal mindestens abgetastet werden, um eine fehlerfreie Rekonstruktion aus den Abtastwerten mit einem Tiefpaß zu ermöglichen?
- Berechnen Sie die Abtastwerte des Signals $\cos(t)$ an den Stellen $t = n \cdot \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Ist mit diesen Werten eine fehlerfreie Rekonstruktion des ursprünglichen Signals möglich? Begründen Sie Ihre Aussage.
- Berechnen und skizzieren Sie das Spektrum der abgetasteten Funktion. Aus welchem Intervall muss der Betrag der Grenzkreisfrequenz ω_0 eines idealen Rekonstruktionstiefpasses gewählt werden, damit eine fehlerfreie Rekonstruktion des Signals möglich wird?

- d. Berechnen Sie aus den Abtastwerten mit Hilfe von Gl. 5.2-5 einen Näherungswert für $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ bei einer Tiefpaßgrenzfrequenz von $\omega_0 = 2$. Wählen Sie $n \in \{-5, \dots, 5\}$.
- e. Wir betrachten nun ein Sprachsignal, das digital und bitseriell übertragen werden soll. Es stehen A/D-Wandler mit einer Abtastfrequenz von 8 kHz und 8 Bit -Quantisierung sowie Parallel/Seriell-Wandler zur Verfügung. Zeichnen Sie das ideale Blockschaltbild für eine fehlerfreie Übertragungsstrecke. Welche Grenzfrequenzen dürfen die eingesetzten Filter haben? Welche Übertragungsgeschwindigkeit wird auf der seriellen Strecke benötigt?

Aufgabe 5.2: Für ein normiertes Signal $A(t)$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte seiner Amplitude nachfolgend dargestellt. Das Signal $A(t)$ soll gleichmäßig quantisiert werden, und jeder Quantisierungswert soll mit 4 Bit codiert werden.



- a. Bestimmen Sie die Anzahl n der Quantisierungsstufen, und geben Sie die Breite ΔA_i ($i = 1, \dots, 16$) der Quantisierungsintervalle an.
- b. Ermitteln Sie den Wert für die Signalleistung (Erwartungswert von A^2) des normierten Signals $A(t)$.
- c. Ermitteln Sie die Störleistung (Erwartungswert des Fehlerquadrats), die sich durch die in Punkt a) gewählte Quantisierung ergibt und bestimmen Sie das Signal-/Störleistungsverhältnis.
- d. Um welchen Faktor vergrößert sich das Signal-/Störleistungsverhältnis bei einer Quantisierung mit k zusätzlichen Bit?

ÜBUNGSAUFGABEN ZU KAPITEL 6

Aufgabe 6.1: Es sind zwei Codes, ein decodierbarer und ein nicht decodierbarer, für $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ wie folgt vorgegeben:

	C_1	C_2
x_1	110	110
x_2	11	01
x_3	100	100
x_4	00	00
x_5	10	10

- Berechnen Sie die "Kraft-Summe" für beide Codes. Ist die Ungleichung von Kraft-McMillan für diese Codes erfüllt?
- Welcher der beiden Codes ist nicht decodierbar?
- Geben Sie für den nicht decodierbaren Code eine Codesymbolfolge an, die nicht eindeutig in Codewörter zerlegt werden kann.
- Geben Sie einen Präfixcode mit demselben Codealphabet und den entsprechenden Codelängen an.

Aufgabe 6.2: Wir betrachten eine stationäre Quelle ohne Gedächtnis mit dem Alphabet $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Die Symbolwahrscheinlichkeiten sind bekannt:

$$P(x_1) = 0,5, \quad P(x_2) = 0,25, \quad P(x_3) = 0,125,$$

$$P(x_4) = 0,06 \quad \text{und} \quad P(x_5) = 0,065.$$

- Konstruieren Sie nach dem Huffman-Algorithmus einen binären Code.
- Ermitteln Sie die mittlere Codelänge l_m .
- Ist dieser Code ein idealer Code? Begründen Sie Ihre Aussage.

ÜBUNGSAUFGABEN ZU KAPITEL 7

Aufgabe 7.1:

- a. Codieren Sie das Wort **FernUniversität** mit dem Teletex-Schriftzeichensatz (Abb. 2.3-10, verwenden Sie "11110001" für das "ä" und die Reihenfolge der Bits b1-b8). Listen Sie die Codewörter untereinander auf. Bilden Sie zeilenweise die Quersumme Modulo 2 und fügen Sie ein Bit hinzu, um eine gerade Parität zu erhalten. Bestimmen Sie ebenfalls das zusätzliche Codewort, das sich bei der spaltenweisen Bildung von gerader Parität ergibt.
- b. Bei der Übertragung des Wortes aus a) treten 4 Fehler auf. Das Codewort des ersten Buchstaben e wird in der 5. und 6. Stelle und das Codewort des Buchstaben n in der 7. und 8. Stelle verfälscht.
 - i. Wie lautet die fehlerhaft empfangene Nachricht? Zeigen Sie die Stellen auf, an denen die Parität verletzt wird.
 - ii. Bis zu wieviele Fehler können mit diesem Sicherungsverfahren stets erkannt oder stets korrigiert werden ?
- c. Wie lautet die Generatormatrix des Codes, der dem Zeilenparitätsverfahren entsprechend codiert ?

Aufgabe 7.2: Der binäre $(23, 12)$ -Golay-Code ist ein perfekter Code. Dies bedeutet, dass die Korrekturkugeln um die gültigen Codewörter so dicht gepackt sind, dass der gesamte Vektorraum B^m ausgefüllt wird wobei sich die Kugeln weder überschneiden noch berühren.

- a. Wieviele Vektoren enthält jede Korrekturkugel?
- b. Wieviele Fehler können mit dem Golay-Code korrigiert werden bzw. welches ist der maximale Abstand zwischen gültigen Codewörtern und benachbarten Wörtern, die noch innerhalb der Kugeln liegen?
- c. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten für ein fehlerhaft übertragenes Informationswort von 12 Bit bei einer Bitfehlerwahrscheinlichkeit von $p = 10^{-2}$ auf dem Übertragungsweg mit und ohne Codierung mit dem Golay-Code?

Aufgabe 7.3: Wir betrachten den Hamming - Code aus Beispiel 7.2-8.

- a. Bestimmen Sie die Generatormatrix G aus der Prüfmatrix H .
- b. Wie lautet das Codewort w für das Informationswort $a = (1002001012)$?
- c. Auf der Übertragungsstrecke wird das 7. Symbol zu einer "2" verfälscht. Wie lautet dann das Syndrom s und wie kann damit der Fehler korrigiert werden?

Aufgabe 7.4: Ein zyklischer Code C mit dem Generatorpolynom

$$g(x) = x^4 + x + 1$$

und der Blocklänge $m = 15$ ist vorgegeben.

- Ermitteln Sie das entsprechende Kontrollpolynom $h(x)$.
- Codieren Sie die Nachricht $a = (10100000001)$.
- Es wurde beim Empfänger das Wort

$$w = (110101000000000)$$

empfangen. Ist w ein Codewort? Falls ja, decodieren Sie es.

Aufgabe 7.5: Im Beispiel 7.4-3 der Kurseinheit 8 sind für das vorgegebene Polynom $g_1(x)$ die Polynome $g_2(x)$ und $g_3(x)$ für eine Korrekturfähigkeit $t = 3$ bestimmt.

$$g_1(x) = x^4 + x + 1$$

$$g_2(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$g_3(x) = x^2 + x + 1$$

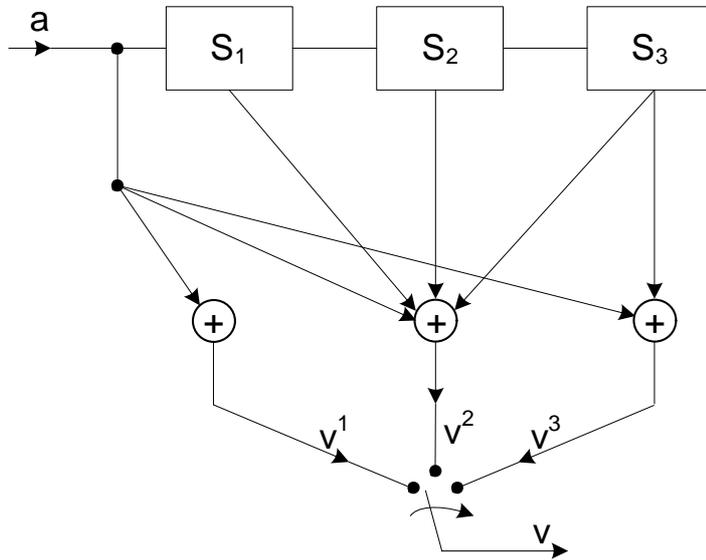
- Bestimmen Sie nun für eine Korrekturfähigkeit $t = 4$ das Polynom $g_4(x)$.
- Stellen Sie jeweils die Anzahl der Codewörter und die Effizienz für die folgenden Generatorpolynome auf.
 - $g(x) = g_1(x)$
 - $g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$
 - $g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot g_3(x)$
 - $g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot g_3(x) \cdot g_4(x)$
- Das Generatorpolynom $g(x)$ lautet

$$\begin{aligned} g(x) &= (x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \\ &\quad (x^2 + x + 1)(x^4 + x^3 + 1) \\ &= x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 \\ &\quad + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

Die Generatormatrix ist eine $(1, 15)$ -Matrix. Somit erhalten wir nur zwei Codewörter (000000000000000) und (111111111111111) .

- Der Wert t ist als Mindestkorrekturfähigkeit des Codes zu verstehen. Bestimmen Sie aus c) die tatsächliche Korrekturfähigkeit.

Aufgabe 7.6: Es sei die folgende Codierschaltung für einen Faltungscodier vorgegeben.



Tab. 3: Die Tabelle zu (b)

Eingang	Zustand $S_1S_2S_3$	Ausgang $v^1v^2v^3$	neuer Zustand $S_1S_2S_3$
0	$a = 000$	000	$a = 000$
1	$a = 000$	111	$b = 100$
0	$b = 100$	010	
1	$b = 100$		
0	$c = 010$		
1	$c = 010$		
0	$d = 110$		
1	$d = 110$		
0	$e = 001$		
1	$e = 001$		
0	$f = 101$		
1	$f = 101$		
0	$g = 011$		
1	$g = 011$		
0	$h = 111$		
1	$h = 111$		

- Stellen Sie die Koeffizientenmatrix g auf und ermitteln Sie alle Speicherzustände.
- Vervollständigen Sie Tabelle 3.

- c. Erstellen Sie das Codediagramm bis zum Abstand 4 von dem Ursprungsknoten.
- d. Erstellen Sie das entsprechende Trellis-Diagramm.
- e. Geben Sie die Zustandsdarstellung des Codes an.
- f. Decodieren Sie gemäß dem Viterbi-Algorithmus die empfangene Bitfolge $v = (101001110111001110011)$, wobei es bekannt ist, dass die letzten drei gesendeten Symbole Null sind.

ÜBUNGSAUFGABEN ZU KAPITEL 8

Aufgabe 8.1: Es werde ein unipolarer Code (NRZ) für die Leitungscodierung einer binären, gleichverteilten Quelle eingesetzt. Die Impulsdauer betrage eine Taktlänge.

- a. Stellen Sie die Impulsfolge, die sich für die binäre Sendefolge 1001101 ergibt graphisch dar.
- b. Bestimmen Sie die Autokorrelationsfunktion (AKF) dieses Codes und skizzieren Sie diese.
- c. Bestimmen Sie aus der Autokorrelationsfunktion das Leistungsdichtespektrum.

Aufgabe 8.2: Mit einem Verwürfler, der durch das Polynom $x^{-7} + x^{-6} + 1$ (siehe Abb. 8.1-1 in der KE 9) beschrieben wird, soll die Bitfolge $a_n = 11100101$ in eine Pseudozufallsfolge b_n umgewandelt werden. Die Reihenfolge der zu verwürfeln- den Folge ist hierbei von rechts nach links zu sehen. Nach der Übertragung soll diese Folge dann durch einen Entwürfler in die Empfangsfolge c_n zurückgewandelt werden.

Bestimmen Sie ausgehend von der Bitfolge a_n die Bitfolgen b_n und c_n jeweils bis zum 10. Bit (d. h. für je 10 Taktschritte) und geben Sie ebenfalls die entsprechenden Zählerstände der Schieberegister an.

Zum Startzeitpunkt sind alle Speicherplätze der Schieberegister mit "0" vorbesetzt.

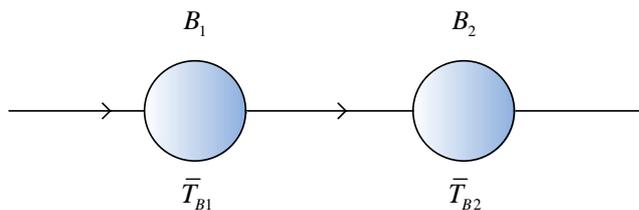
Aufgabe 8.3: Gegeben ist eine zufällige Binärfolge $a_n = 1110\ 0001\ 0101$, die am Eingang eines Leitungscodierers als NRZ-Signal vorliegt. Stellen Sie ausgehend von der Eingangsfolge die Ausgangsfolgen graphisch dar, wenn es sich um einen

- a. AMI-Codierer
- b. CMI-Codierer

c. MMS43-Codierer (beginnend mit S1) handelt.

ÜBUNGSAUFGABEN ZU KAPITEL 9

Aufgabe 9.1: Es sei das folgende Bedienmodell gegeben.



Die zwei Bedieneinheiten B_1 und B_2 weisen negativ exponentiell verteilte Bedienzeiten mit den mittleren Bediendauern \bar{T}_{B_1} und \bar{T}_{B_2} , $\bar{T}_{B_1} = \bar{T}_{B_2} = 5 \text{ s}$ auf.

- Durch welche Verteilungsfunktion in Bezug auf die Bedienzeiten kann man am besten das Bedienmodell beschreiben?
- Ermitteln Sie den Mittelwert und die Streuung der Bedienzeiten des in a) identifizierten Bedienprozesses.
- Zum Vergleich wird ein Markoff'scher Bedienprozess mit dem doppelten Mittelwert der Bedienzeiten betrachtet. Zeichnen Sie die zwei Verteilungsfunktionen in einem Diagramm auf.

Aufgabe 9.2: Ein Bediensystem wird durch den H_3 -Bedienprozess charakterisiert. Die Parameter sind wie folgt angegeben.

$$\begin{aligned} p_1 &= 0,70, & \bar{T}_{B_1} &= 5 \text{ s} \\ p_2 &= 0,25, & \bar{T}_{B_2} &= 20 \text{ s} \\ p_3 &= 0,05, & \bar{T}_{B_3} &= 120 \text{ s} \end{aligned}$$

Ermitteln Sie den Mittelwert und die Streuung der Bedienzeiten. Zeichnen Sie diese Verteilungsfunktion und die negativ exponentielle Verteilungsfunktion mit dem selben Mittelwert in einem Diagramm auf.

Aufgabe 9.3: Das $M/M/1$ -Wartesystem wird betrachtet. Die Ankunftsrate der Anforderungen beträgt $0,05/s$, während die mittlere Bediendauer der Anforderungen gleich 10 Sekunden ist. Ermitteln Sie die folgenden Größen:

- a. Die mittlere Wartezeit;
- b. Die mittlere Verweildauer;
- c. Die mittlere Warteschlangenlänge;
- d. Die mittlere Anzahl der Anforderungen im System.

Aufgabe 9.4: Wir betrachten den Basisanschluß im ISDN. 8 Endgeräte sind daran angeschlossen. Jedes Endgerät erbringt einen Nutzverkehr von 0,05 Erlang. Die mittleren Bedienzeiten für alle Endgeräte sind $\bar{T}_B = 100$ s. Der Ankunftsprozess an jedem Endgerät ist ein Poisson-Prozess.

- a. Berechnen Sie die Blockierungswahrscheinlichkeit.
- b. Ermitteln Sie den Durchsatz in den beiden B -Kanälen.
- c. Ermitteln Sie die mittlere Anzahl der Anrufe im System.

Aufgabe 9.5: Wir betrachten ein nichtverdrängendes Prioritätssystem mit der FIFO-Strategie für jede Warteschlange. Das System hat zwei Prioritätsklassen von Ankünften und eine Bedieneinheit. Für jede Klasse wird eine Warteschlange mit unendlich vielen Plätzen angelegt. Die Ankunftsprozesse sind Poisson-Prozesse mit den jeweiligen Ankunftsraten

$$\lambda_1 = 0,05/s \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 0,2/s.$$

Die Bediendauern der beiden Klassen werden je für sich negativ exponentiell mit μ_1 und μ_2 verteilt.

Ermitteln Sie die mittleren Wartezeiten der beiden Klassen für die folgenden Fälle:

a.

$$\mu_1 = 0,5/s \quad \text{und} \quad \mu_2 = 0,4/s;$$

b.

$$\mu_1 = 0,2/s \quad \text{und} \quad \mu_2 = 0,4/s.$$

ÜBUNGSAUFGABEN ZU KAPITEL 10

Aufgabe 10.1: Wir betrachten die Synchronisierung eines Rahmens der Länge 256 Bit mit einem 7-Bit Rahmenkennungswort RK in dem h Bit gesetzt sind. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von "1" und "0" im Nutzbitstrom sei 0,6 bzw. 0,4, wobei die einzelnen Bits als unabhängig voneinander betrachtet werden.

- a. Berechnen Sie für alle möglichen h die mittlere Anzahl des Auftretens des Rahmenkennungswortes im Nutzbitstrom pro Rahmen.
- b. Wie oft passiert es im Mittel pro Rahmen in Abhängigkeit von h , dass das Rahmenkennungswort zufällig im Nutzdatenstrom auftritt und genau eine Rahmenlänge weiter erneut?
(Zahlenwerte bitte angeben)

Aufgabe 10.2:

- a. Eine Uhr, die für die Multiplexbildung von PCM 30 verwendet wird, hat eine Genauigkeit von 10^{-6} . Bis zu wie viel übertragenen Rahmen kann man sicher sein, dass höchstens ein Schlupf gegenüber einem Bitstrom mit der Nennbitrate auftritt?
- b. Bis zu wie viel Rahmen tritt ein Schlupf höchstens auf, wenn die Uhr für die Multiplexbildung von PCM 1920 verwendet wird?
- c. Wie genau muss die Uhr sein, damit bei der Multiplexbildung von PCM 30 maximal ein Schlupf pro Minute auftreten kann?

Aufgabe 10.3: Berechnen Sie für die in Europa verwendeten PCM Systeme der höheren Hierarchie jeweils auf das eingebettete System bezogen, die mittlere mögliche und tatsächliche Stopfbitrate und bilden Sie das Verhältnis aus beiden. Wie sehen die entsprechenden Raten und das Verhältnis beim PCM 96 System aus?

Aufgabe 10.4: Wir betrachten den Einsatz des Ping-Pong-Verfahrens bei der PCM-Sprachübertragung. Die Pakete bestehen aus einem Startbit, $n \times (8 \text{ Sprachbits} + 2 \text{ Signalisierbits})$ und einem Ausgleichsbit, d. h. insgesamt aus $(2 + 10n)$ Bits, die jeweils in eine Richtung pro $n \cdot 125 \mu\text{s}$ anfallen. Die Schutzzeit zwischen den Paketen wird auf $5 \mu\text{s}$ festgelegt. Die Signallaufzeit beträgt $6 \mu\text{s}/\text{km}$, und die Pakete werden mit 256 kbit/s übertragen.

- a. Geben Sie die Leitungslänge l in Abhängigkeit von n an, und zeichnen Sie den Zusammenhang für $n \leq 8$.
- b. Berechnen Sie die maximal überbrückbare Länge, falls eine Periodendauer (Verzögerung) von $0,5 \text{ ms}$ bei der Sprachübertragung noch zulässig ist.

ÜBUNGSAUFGABEN ZU KAPITEL 11

Aufgabe 11.1: In einer Büroumgebung sollen 150 ISDN-Basisanschlüsse (mit je 2 B-Kanälen) an einen Primärmultiplexanschluss (30 B-Kanäle) angeschaltet werden.

- a. Entwerfen und skizzieren Sie hierfür ein Koppelnetz, das aus einem dreistufigen System bestehen soll. Die B-Kanäle sollen jeweils in Gruppen zu 50 an die ersten Koppelvielfache angeschlossen werden, in denen eine Konzentration um den Faktor 2, 5 erfolgt. Für die letzte Stufe werden 3 Koppelvielfache gefordert.
- b. Wie viele Koppelpunkte sind für ein Koppelvielfach in den drei Stufen jeweils erforderlich? Wie viele Koppelpunkte benötigt die gewählte Konfiguration insgesamt, und wie viele Koppelpunkte sind damit je Basisanschluss erforderlich?
- c. Entwerfen Sie das Koppelnetz unter den Randbedingungen aus a) für den Fall, dass nun jeweils 30 B-Kanäle an die Koppelvielfache der 1. Stufe angeschlossen werden sollen. Wie viele Koppelpunkte sind in diesem Fall pro Basisanschluss erforderlich?

Aufgabe 11.2: Für eine Vermittlungsstelle mit 10.000 Teilnehmeranschlüssen ist eine Koppelanordnung als blockierungsfreies System nach Clos zu entwerfen.

- a. Entwerfen und skizzieren Sie ein dreistufiges System. Berechnen Sie die gesamte Anzahl der erforderlichen Koppelpunkte, und bestimmen Sie die Koppelpunktzahl je Teilnehmer. Wie viele Koppelpunkte wären demgegenüber je Teilnehmer erforderlich, wenn es sich um eine blockierungsfreie einstufige Koppelanordnung handeln würde?
- b. Berechnen Sie mit Hilfe des Verbindungsgraphen näherungsweise die Blockierungswahrscheinlichkeit für den Fall, dass in dem System aus a) die Anzahl der mittleren Koppелеlemente auf $k = 71$ herabgesetzt wird. Nehmen Sie dabei an, dass
 - i. die Belegungswahrscheinlichkeit p aller Anschlüsse gleich ist ($p = 0,7$),
 - ii. die Belegungswahrscheinlichkeit p' aller Kanten, die vom Eingangspunkt und Ausgangspunkt ankommen, gleich ist.

Wie viele Koppelpunkte sind in diesem Fall je Teilnehmer erforderlich ?

- c. Erweitern Sie die Koppelanordnung aus a) so, dass ein 5-stufiges Clos-System entsteht, indem Sie die mittleren Koppelvielfache entsprechend erweitern.

- d. Bestimmen Sie für das 5-stufige Clos-System die Anzahl der Koppelpunkte, und berechnen Sie den Faktor, der dem Gewinn an Koppelpunkten entspricht.
- e. Stellen Sie die 5-stufige Koppelanordnung aus c) als Verbindungsgraph dar.
- f. Berechnen Sie allgemein die Blockierungswahrscheinlichkeit der 5-stufigen Koppelanordnung aus c). Hierbei gelten folgende Voraussetzungen für die Belegungswahrscheinlichkeiten.
 - i. Belegungswahrscheinlichkeit p aller Anschlüsse ist gleich.
 - ii. Belegungswahrscheinlichkeit p' aller Kanten, die vom Eingangspunkt ausgehen und am Ausgangspunkt ankommen, ist gleich.
 - iii. Belegungswahrscheinlichkeit p'' aller mittleren Kanten ist gleich.
- g. Berechnen Sie für die Koppelanordnung aus c) unter den Voraussetzungen von f) die Blockierungswahrscheinlichkeit, wenn die Belegungswahrscheinlichkeit der Anschlüsse $p = 0,2$ beträgt.

ÜBUNGSAUFGABEN ZU KAPITEL 12

Aufgabe 12.1: Wir betrachten ein sequentielles Poll-System mit 15 Peripheriestationen, die 15, 30, 45, . . . , 225 km von der zentralen Einheit entfernt sind. Die Reaktionszeit der Zentrale sei $t_z = 0,6$ ms. Die Reaktionszeit t_p der Peripheriestationen sei 1,3 ms. Die Signallaufzeit sei $10 \mu\text{s}$ pro km.

Es sind pro Meldung jeweils 48 Bit als Steuerinformation erforderlich. Die Übertragungsrate beträgt 64 kbit/s . Es liegen keine Meldungen vor.

- a. Berechnen Sie die Zeit t_{d_0} .
- b. Wie viel ms beträgt die Zyklusdauer t_{c_0} ?
- c. Wenn der Durchsatz pro Peripheriestation 80 bit/s im Mittel beträgt, so fallen pro Zyklus und Station Nutzdaten im Umfang von $80 \text{ bit/s} \cdot t_c$ an. Berechnen Sie, welche Zeit für die Übertragung der Nutzdaten bei 64 kbit/s erforderlich ist und rechnen Sie aus, wie viel ms eine Meldung im Mittel an einer Station wartet.
- d. Wir betrachten den Grenzfall, dass so viel Verkehr vorhanden ist, dass pro Zyklus und Station stets eine Meldung vorliegt. Die Nutzinformation umfasst 256 Bit und sei an allen Stationen gleich groß. Berechnen Sie die Zeit t_{n_i} , die Zyklusdauer t_c mit t_{d_0} entsprechend Aufgabenteil a), und n , t_z , t_p entsprechend der Aufgabenstellung und den Durchsatz.
- e. Welche Konsequenzen ergeben sich für den Durchsatz, wenn die Anzahl der Stationen erhöht wird?

Aufgabe 12.2: Zwei unabhängige, als Markoff-Prozess modellierbare Quellen teilen sich einen slotted Aloha-Kanal mit einer Übertragungsgeschwindigkeit von 64 kbit/s . Beide Quellen senden im Mittel alle 40 ms Datenpakete der Länge $P = 1024 \text{ bit}$ aus. Wenn Kollisionen auftreten, wiederholen sie ein Paket mit der Wahrscheinlichkeit $p_w = \frac{1}{2}$ in der nächsten Taktperiode.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_f , dass eine freie Quelle in einer Taktperiode eine Nachricht generiert?
- Zeichnen Sie das Zustandsübergangsdiagramm und berechnen Sie alle Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten. Nähern Sie den Wert für p_f aus a) durch $p_f = \frac{1}{3}$ an!
- Berechnen Sie die Zustandswahrscheinlichkeiten des Systems im statistischen Gleichgewicht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Quellen warten müssen?

Hinweis: Für die Zustandswahrscheinlichkeiten π_i gilt hier

$$\sum_{i=0}^2 \pi_i = 1 \text{ und}$$

$$\pi_j = \sum_{i=0}^2 \pi_i P_{ij} \quad j = 0, 1, 2$$

bzw.

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (\pi_0, \pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12.3: Erstellen Sie Signalflussgraphen (möglichst SDL-Diagramme) für eine Sendestation die folgende CSMA-Strategie bei der lokalen Kommunikation anwendet:

- persistent CSMA (slotted)
- non-persistent CSMA (slotted)
- p-persistent CSMA (slotted)

Lösungen zu Übungsaufgaben

Lösung zu Aufgabe 1.1:

Da die Alternativen (a) und (b) einander ausschließen, genügt es, die zutreffenden zu nennen:

1. (b)
2. (b) - z. B. die Fehlersicherung kann in Schicht 2 (auf Teilstrecken) alternativ in Schicht 4 (Ende-zu-Ende) realisiert werden
3. (b)
4. (b)
5. (a) - z. B. SNA oder DEC NET.

Lösung zu Aufgabe 1.2:

1. falsch
2. falsch
3. wahr
4. wahr

Lösung zu Aufgabe 1.3:

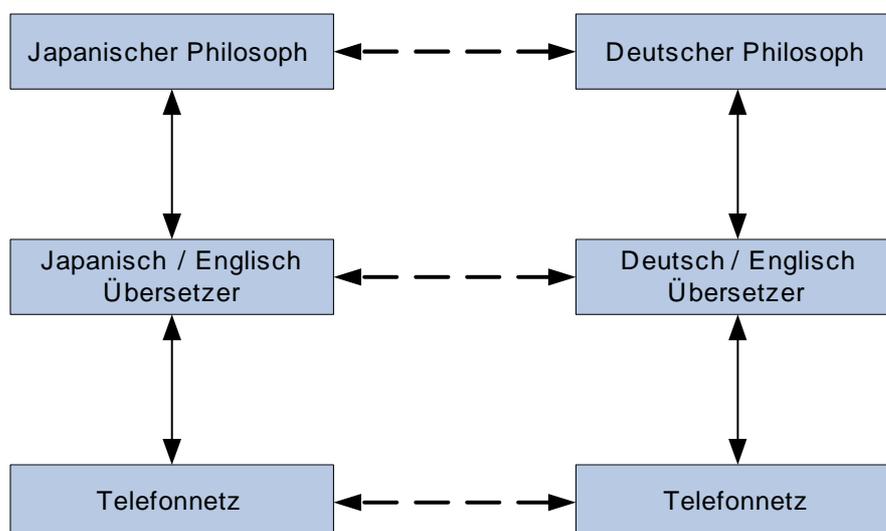


Abb. 9: Japanischer Philosoph und Deutscher Philosoph

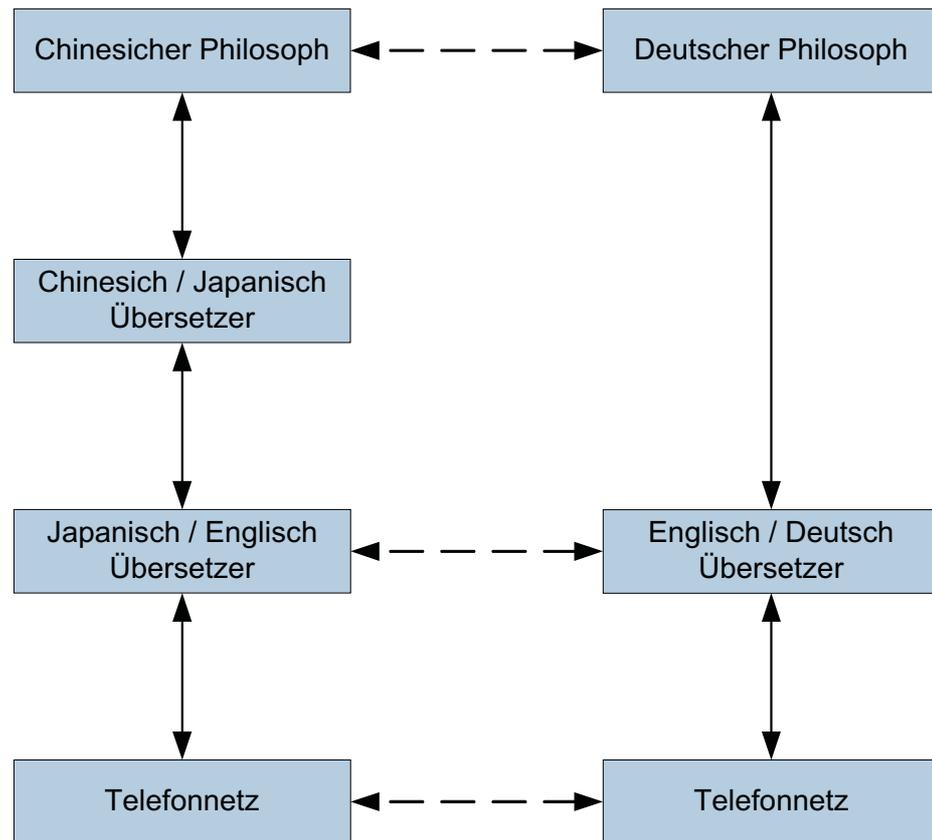


Abb. 10: Chinesischer Philosoph und Deutscher Philosoph

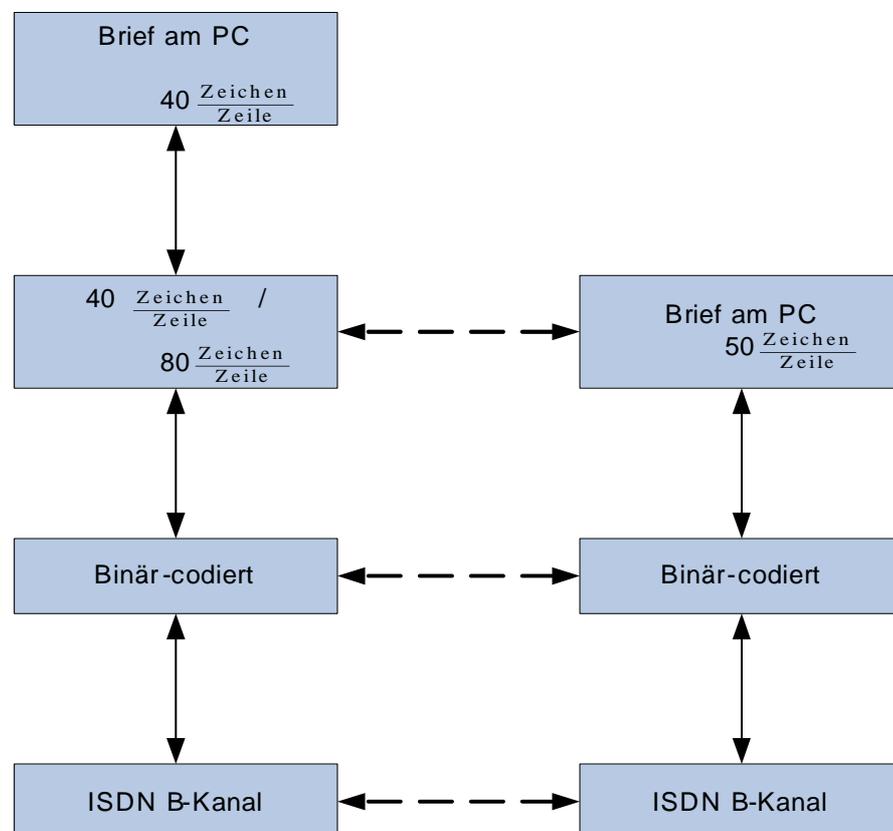


Abb. 11: Brief am PC

Lösung zu Aufgabe 1.4:

1. Zuordnung der Dienste und Funktionen im TCP/IP-Schichtenmodell (Abb. 12)

	Netz-Interface Schicht	Internet-Schicht	Transport-Schicht		Anwendungs-Schicht
			TCP	UDP	
Routing der E-Mail		X			
E-Mail Client					X
Display des Videostreams					X
Ende-zu-Ende Verbindung (E-Mail)			X		
Ende-zu-Ende Verbindung (Videostream)				X	

Abb. 12: Zuordnung der Dienste bzw. Funktionen

2. In Abb. 13 ist eine E-Mail Kommunikation anhand des TCP/IP-Modells graphisch dargestellt. Das Videostreaming gestaltet sich ähnlich nur mit dem Unterschied, dass hier als Transportprotokoll UDP eingesetzt wird.

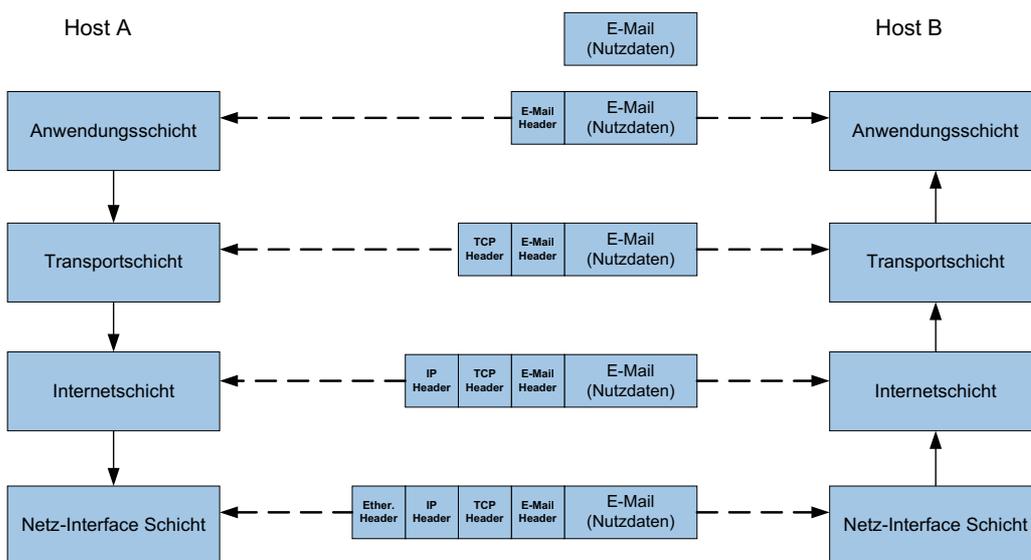


Abb. 13: Datenfluss zwischen den Schichten

3. a. Zur Übertragung der E-Mail wird das TCP-Protokoll und zur Übertragung der Videodaten das UDP-Protokoll eingesetzt.
Bei der Übertragung von Videodaten werden einzuhaltende zeitliche Anforderungen an den zu übertragenden Datenstrom gestellt. Fehlerhaft übertragene oder verlorengegangene Pakete können meist nicht mehr verwertet werden. Eine Wiederholung derselben (wie dies bei TCP der Fall ist) wäre dann sinnlos (ausserdem sind bei der Übertragung von Videodaten Verluste tolerierbar (siehe Kap. 6)). Obwohl das UDP-Protokoll keine Zuverlässigkeit hinsichtlich der Datenübertragung garantieren kann, eignet es sich dennoch besser für die Übertragung von Daten, die mit einer zeitlichen Restriktion versehen sind. Unter Zuhilfenahme anderer Protokolle und/oder darüberliegender Applikationsschichten, können die Echtzeitbedingungen erfüllt werden.
- b. Zwei Applikationen, die TCP nutzen: HyperText Transfer Protocol (HTTP), File Transfer Protocol (FTP).
Zwei Applikationen, die UDP nutzen: Domain Name Service (DNS), Simple Network Management Protocol (SNMP).
4. Die Größe der MTU beträgt 1500 Bytes (ohne Ethernet-Header). Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:
- a. E-Mail Kommunikation: Für die E-Mail Kommunikation wird TCP als Transportprotokoll eingesetzt: Der E-Mail Header soll vernachlässigt werden, daraus folgt es können maximal 1500 Bytes - 20 Bytes (TCP-Header) - 20 Bytes (IP-Header) = 1460 Bytes Nutzdaten übertragen werden. Die Anzahl der Datagramme beträgt demnach:

$$6000/1460 = 4,109$$

Es werden 5 Datagramme übertragen.

- b. Videostreaming: Es können maximal 1500 Bytes - 20 Bytes - 8 Bytes = 1472 Bytes Nutzdaten pro Datagramm übertragen werden. Die Anzahl der Datagramme beträgt:

$$10.000/1472 = 6,793$$

Es werden 7 Datagramme übertragen.

Lösung zu Aufgabe 2.1:

Die Bitfehlerhäufigkeiten für die einzelnen Anwendungen sind in Tabelle 4 aufgelistet.

Tab. 4: Bitfehlerhäufigkeiten der einzelnen Anwendungen.

Anwendung	Bitfehlerhäufigkeit 10^{-5}	Bitfehlerhäufigkeit 10^{-8}
SMSs	Ein Fehler pro 89,28 SMS	Ein Fehler pro 89280 SMS
Bildschirmseiten	Ein Fehler pro 6,25 Bildschirmseiten	Ein Fehler pro 6250 Bildschirmseiten
Dateien	Ein Fehler in der ersten Datei	Ein Fehler pro 610,4 Dateien
Bilder	Ein Fehler im ersten Bild	Ein Fehler pro 17 Bilder
Videotrailer	Ein Fehler im ersten Videotrailer	Ein Fehler pro 8,3 Videotrailer

Lösung zu Aufgabe 2.2:

- a. GSM 13 kbit /s Nutzbitrate ergibt $\frac{2,5 \text{ Mbit}}{13 \text{ kbit}} \text{ s} = 192,3 \text{ s}$
- b. ISDN 64 kbit/s Nutzbitrate ergibt $\frac{2,5 \text{ Mbit}}{64 \text{ kbit}} \text{ s} = 39,06 \text{ s}$, usw. (siehe Tabelle 5).

Tab. 5: Übertragungszeiten.

Netz	Dauer
GSM 13 kbit /s	192,3 s
ISDN 64 kbit/s	39,06 s
ISDN 2*64 kbit/s	19,53 s
UMTS 384 kbit/s	6,51 s
ADSL 1024 kbit/s	2,44 s
ADSL 2048 kbit/s	1,22 s
Ethernet 10 Mbit/s	250 ms
Fast Ethernet 100 Mbit/s	25 ms
Gigabit Ethernet 1Gbit/s	2,5 ms
TV Kabelmodem 4 Mbit/s	0,625 s

Die Berechnungen sind grob, da die Signalverarbeitungszeiten vernachlässigt wurden. Diese fallen bei schneller Übertragung im Verhältnis hoch aus!

Lösung zu Aufgabe 2.3:

- a. 1. Bei der Auflistung der Vor- und Nachteile einzelner Topologien wurde insbesondere auf die folgenden Eigenschaften geachtet: Ausfallsicherheit, geographische Ausdehnung, Kosten, Fehlerlokalisierung, Erweiterbarkeit (s. Tabelle 6).

Tab. 6: Vor- und Nachteile einzelner Topologien.

Topologie	Vorteile	Nachteile
Vollvermascht (alle Stationen sind miteinander vernetzt).	Hohe Ausfallsicherheit, große Ausdehnung, direkte Verbindung.	Teuer, Administration kann sehr aufwendig werden, ressourcenintensiv.
Bus (Alle Stationen teilen sich ein Medium).	Ökonomisch, einfache Erweiterbarkeit, einfache Installation, Ausfall eines Teilnehmers hat keinen Einfluss auf den Bus.	Geringere Ausdehnung, Beeinträchtigung des Busses bedeutet, dass die gesamte Kommunikation zusammenbricht. Alle Teilnehmer müssen sich den Durchsatz teilen, Kollisionen, Fehler können nicht so schnell lokalisiert werden.
Stern (mehrere Stationen sind mit einem zentralen Knoten verbunden).	Einfache Erweiterbarkeit, hohe Ausfallsicherheit (bei Kabelbruch ist nur die entsprechende Strecke betroffen). Statusüberwachung einzelner Knoten → Fehler können schnell eingegrenzt werden. Einfache Installation, hohe Übertragungsraten können erzielt werden.	Single point of failure, bei Ausfall des Knotens in der Mitte (Server) bricht die gesamte Kommunikation zusammen. Ausfallsicherheit des Servers sollte sehr hoch sein oder der Server sollte redundant angelegt werden.
Ring (Jede Station ist mit ihren beiden Nachbarstationen verbunden).	Große Ausdehnung, hohe Ausfallsicherheit bei modifizierter Ringstruktur und Rekonfigurationsmöglichkeiten im Betrieb. Fehler können mit wenig Aufwand lokalisiert werden.	Teuer, bei einfachen Ringstrukturen führt ein Fehler im Ring dazu, dass gar keine Kommunikation mehr stattfinden kann. Daher wird in der Praxis meist eine modifizierte Ringstruktur eingesetzt (Doppelring bei FDDI). Bei vielen Knoten können lange Übertragungszeiten entstehen.
Linienförmig (Außer der Anfangs- und Endstation ist jede Zwischenstation mit ihren beiden Nachbarstationen verbunden).	Ökonomisch, einfache Erweiterbarkeit.	Geringe Ausfallsicherheit, unterschiedliche Auslastung der einzelnen Strecken.

2. In Tabelle 7 ist die Anzahl der benötigten Leitungen aufgelistet.

Tab. 7: Anzahl der Leitungen.

Topologie	Anzahl der Leitungen	Zahlenwerte
Vollvermascht	$\frac{n \cdot (n-1)}{2}$	15
Bus	1	1
Stern	$n - 1$	5
Ring	n	6
Linienförmig	$n - 1$	5

- b. 1. • Ausfallwahrscheinlichkeit der Strecke zwischen 1 und 4.

Es sei X_{ij} das Ereignis $Link_{ij}$ ist ausgefallen $P(X_{ij}) = p, \forall i, j$. Die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall der linienförmigen Strecke ist demnach die Wahrscheinlichkeit, dass es keine Verbindung zwischen 1 und 4 gibt. Dies ist aber genau dann der Fall falls eins, zwei oder alle drei Ereignisse der Ereignismenge $\Omega = \{X_{12}, X_{23}, X_{34}\}$ auftreten (siehe Abb. 14).

Linienförmig

**Abb. 14:** Linienförmige-Topologie mit 4 Knoten.

Sei X_{aus} das gesuchte Ereignis. Dessen Eintrittswahrscheinlichkeit lautet:

$$P(X_{aus}) = 1 - P(\text{keine Teilstrecke ausgefallen}).$$

Also

$$P(X_{aus}) = 1 - (1 - P(X_{12}))(1 - P(X_{13}))(1 - P(X_{14})) = 1 - (1 - p)^3.$$

Bei n Knoten haben wir $n - 1$ Teilstrecken, daher ist

$$P(X_{aus}) = 1 - (1 - p)^{n-1}.$$

- Die Ausfallsicherheit beträgt

$$S = 1 - (1 - (1 - p)^{n-1}) = (1 - p)^{n-1}.$$

Für $p = 0.2$ ergibt sich

$$S = 0.8^{n-1}.$$

und für $n = 4$ ist $S = 0.8^3 = 0,512 \rightarrow P(X_{aus}) = 0,488$.

- Anstatt p haben wir jetzt zwischen zwei Nachbarsknoten eine Ausfallwahrscheinlichkeit von p^2 (siehe Abb. 15) \rightarrow die Ausfallwahrscheinlichkeit $S = (1 - p^2)^{n-1}$. Es ist eine Verbesserung um den Faktor

$$f = \frac{(1 - p^2)^{n-1}}{(1 - p)^{n-1}} = (1 + p)^{n-1}$$

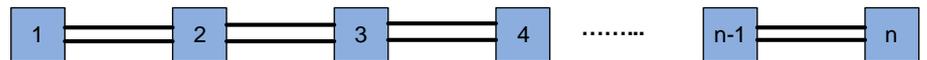


Abb. 15: Redundant ausgelegte Links.

$$n = \frac{\ln(S)}{\ln(1-p^2)} + 1 = \frac{\ln(0.8)}{\ln 0.96} + 1, n = 6 \text{ Knoten.}$$

- c. a. Zwei beliebige Teilnehmer können nur dann immer miteinander kommunizieren, wenn höchstens eine Leitung ausfällt.

Sei X_{0aus} das Ereignis "keine Leitung fällt aus" und X_{1aus} das Ereignis "eine beliebige von 4 Leitungen fällt aus" (siehe Abb. 16). Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Teilnehmer immer miteinander kommunizieren können ist :

$$P(X_{0aus}) + P(X_{1aus})$$

mit

$$P(X_{0aus}) = {}_4C_0 \cdot (1 - p)^4 \text{ und } P(X_{1aus}) = {}_4C_1 \cdot (1 - p)^3 \cdot p$$

Sei P_{Ring} die gesuchte Wahrscheinlichkeit,

$$P_{Ring} = {}_4C_0 \cdot (1 - p)^4 + {}_4C_1 \cdot (1 - p)^3 \cdot p = (1 - p)^3(1 + 3p).$$

Für $p = 0.2$ ist $P_{Ring} \approx 0,82$. Die Wahrscheinlichkeit für den kompletten Ringausfall ist $p^4 = 16 \cdot 10^{-4} = 0.0016$.

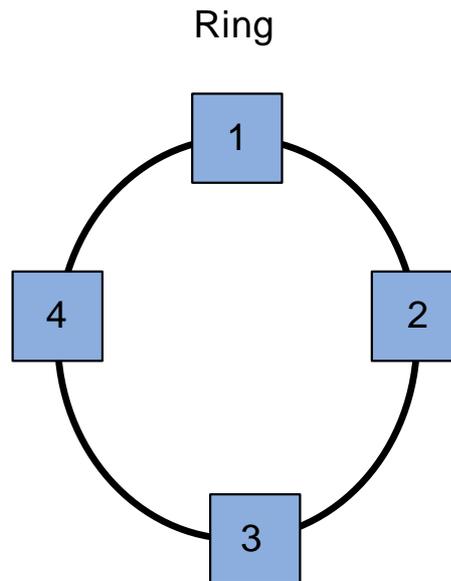


Abb. 16: Ring-Topologie

- d. a. Damit das Netz komplett ausfällt, müssen alle Strecken ausfallen. Sei $P_{SternAus}$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P_{SternAus} = p^3.$$

Für $p = 0.2$ ist $P_{SternAus} = 0.008$.

- e. In Tabelle 8 sind alle Ausfallwahrscheinlichkeiten aufgelistet.

Tab. 8: Ausfallwahrscheinlichkeiten.

Topologie	Ausfallwahrscheinlichkeit $p = 0.2$
Linienförmig (Strecke), sehr hohe Ausfallwahrscheinlichkeit. Durch Redundanz kann die Ausfallsicherheit verbessert werden. Diese Topologie hat inzwischen kaum Praxisrelevanz.	$1 - (1 - p)^3 = 0.488$
Ring (unter den in dieser Aufgabe gemachten Annahmen ist $P_{RingAus} = p^n$). Wenn keine weiteren technischen Maßnahmen getroffen werden ist die Ausfallwahrscheinlichkeit erheblich größer. Denn wie vorhin schon erwähnt, führt eine einzige Bruchstelle im Ring zum Ausfall der gesamten Kommunikation.	$p^4 = 16 \cdot 10^{-4} = 0.0016$
Stern (wie zu erwarten eine niedrige Ausfallwahrscheinlichkeit). Aber es darf nicht vergessen werden, dass den im zentralen Knoten laufenden Prozessen besonderes Augenmerk gewidmet werden sollte.	$p^3 = 0.008$

Lösung zu Aufgabe 2.4:

- a. Gruppe 3:

Feinauflösung: 7,7 Punkte/mm vertikal und 8 Punkte/mm horizontal.

Damit ergibt sich die Anzahl der Punkte:

$$8/mm \cdot 210 mm \cdot 7,7/mm \cdot 297 mm = 3.841.992$$

Gruppe 4:

Auflösung: 400 Punkte/25,4 mm vertikal und 400 Punkte/25,4 mm horizontal.

Damit ergibt sich die Anzahl der Punkte:

$$\left(\frac{400}{25,4}/mm\right)^2 \cdot 210 mm \cdot 297 mm = 15.467.791$$

b. Übertragungsdauer

Gruppe 3:

$$\frac{3.841.992}{9.600} s = 400,21 s = 6,67 min$$

Gruppe 4:

$$\frac{15.467.791}{64.000} s = 241,68 s = 4,03 min$$

c. Es gilt: Gesuchte Zeit = 60s - T, (T ist die Übertragungszeit), wobei

$$T = \frac{\frac{1}{10} \cdot 3.841.992}{14.400} s \approx 27 s$$

Es werden also etwa 33 Sekunden für organisatorische Maßnahmen verwendet.

Lösung zu Aufgabe 2.5:

a. Da eine Videotextseite 24 Fernsehzeilen umfasst und pro Halbbild 2 entsprechende Zeilen übertragen werden, benötigt man 12 Halbbilder pro Videotextseite. Die Halbbilddauer beträgt $\frac{1}{50}$ s. Im schlechtesten Fall müssen 100 Videotextseiten eines Magazins neu empfangen werden. Das ergibt eine maximale Zugriffszeit von:

$$100 \text{ Seiten} \cdot \frac{12 \text{ Halbbilder}}{\text{Seite}} \cdot \frac{1}{50 \text{ Halbbilder}} s = 24s.$$

b. Nutzdaten einer Videotextseite (24 Zeilen): 23 Zeilen zu je 40 Byte = 920 Byte + 1 Zeile zu 32 Byte ergibt insgesamt 952 Byte Nutzinformation pro Videotextseite, also 95.200 Byte = 92,97 KByte pro Magazin.

c. Für die vollständige Speicherung von 5 Videotextseiten benötigt man $5 \cdot 24 \cdot 45 \text{ Byte} = 5.400 \text{ Byte} = 5,27 \text{ KByte}$.

- d. Aus Abb. 17 entnimmt man die Dauer einer sichtbaren Zeile zu $(64 - 12 = 52)$ μs . Ein Bit einer Videotextzeile dauert also $\frac{52}{45.8} \mu s$. Die zugehörige Frequenz ist $\frac{45.8}{52}$ MHz.

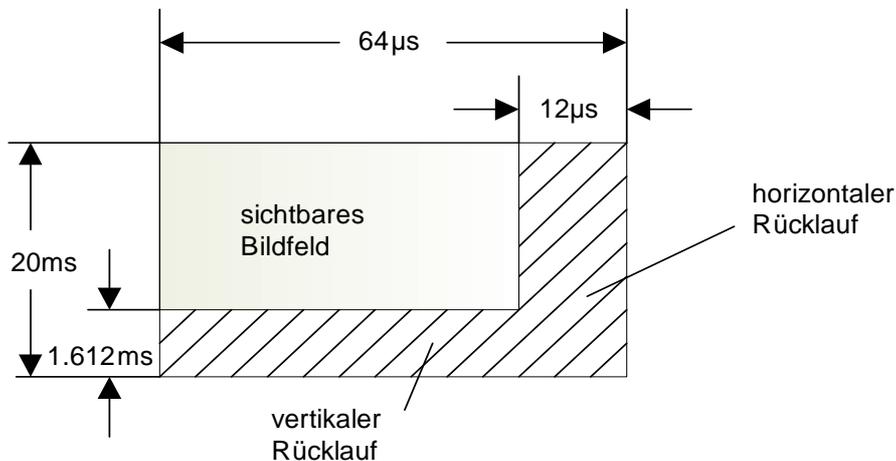


Abb. 17: Videotext

Die Zeilenfrequenz einer vollen Zeile ist $\frac{1}{64}$ MHz.

Damit ergibt sich der gesuchte Quotient aus Bittaktfrequenz und Zeilenfrequenz einer vollen Zeile zu $\frac{45.8}{52} \cdot 64 \approx 443$.

Lösung zu Aufgabe 2.6:

- a. Die Vor- und Nachteile sind in Tabelle 9 aufgelistet.

Einsatzmöglichkeiten der Streaming-Technik: Unterhaltung, Bildung, Video-Konferenzen, *Video-on-Demand*, Live-Übertragungen, usw.

Tab. 9: Vor- und Nachteile von Streaming und Download

Downloading	Streaming
(+) Die Qualität der abgespielten Inhalte ist unabhängig von der verfügbaren Bandbreite.	(+) Die Inhalte werden während der Übertragung abgespielt → geringere Wartezeiten.
(+) Die Inhalte sind nachhaltig verfügbar.	(+) Es eröffnet die Möglichkeit der Einführung neuer Dienste (Live-Übertragungen und on-Demand-Dienste können realisiert werden).
(+) Verzögerungen, Jitter und Verluste werden umgangen.	(+) Der Speicherplatz auf der Festplatte kann gespart werden.
(-) Lange Wartezeiten, vor allem bei geringerer Bandbreite.	(-) Die Qualität der Wiedergabe ist abhängig von den QoS-Parametern. Vor allem bei Internet-Übertragungen.
(-) Es können weder Echtzeit noch on-Demand-Anwendungen realisiert werden.	

- b. 1. Bei den ersten beiden Konfigurationen, werden die Daten über HTTP port 80 (standard) übertragen. Das HTTP-Protokoll nutzt TCP als Transport-Protokoll. Bei der letzten Konfiguration handelt es sich um einen echten *Streaming Server*. Zum Einsatz kommen UDP, RTP und RTCP.

Eine Interaktion ist nur in der dritten Konfiguration gegeben, weil der Befehlssatz des HTTP-Protokolls keine Interaktion mit dem *Web Server* vorsieht. Mit anderen Worten, HTTP wurde im Gegensatz zu RSTP nicht für solche Aufgaben konzipiert. Viele *Streaming Server* setzen auf RSTP als Anwendungsprotokoll. Im RTSP-Befehlssatz ist eine klare Interaktion mit dem *Streaming Server* ähnlich wie beim *Video-* oder *DVD-Recorder* vorgesehen.

- c. 1. Der *Jitter* entsteht durch die Variabilität der Zwischenankunftszeit beim Empfänger. Idealerweise sollte die Zwischenankunftszeit der Pakete beispielsweise bei Sprache immer gleich sein. Da die Pakete auf dem Weg vom Sender zum Empfänger unterschiedliche Wege nehmen und sich sogar überholen dürfen entsteht ein variabler burstartiger Datenstrom, der durch den Einsatz eines Puffers beim *Client* geglättet werden kann.
2. Dieser Vorgang ist auch unter dem Namen *Progressive Streaming* bekannt. Bei geringer Bandbreite ist es für den *Client* vorteilhaft einen Teildatenstrom zu puffern um so einen gewissen Vorsprung auf den eigentlichen Datenstrom zu erzielen. Die Größe des Puffers ist abhängig von der Anwendung. Während sie bei Live-Übertragungen klein gehalten werden muss (Zugriffszeit wächst mit der Größe des Speichers), kann sie bei on-Demand-Anwendungen, bei denen eine Verzögerung von bis zu 15 s toleriert werden kann, durchaus größer gewählt werden.
- d. 1. Es wird meist nicht mit der maximalen Bitrate codiert, damit den Anwendern Bandbreite zur Kommunikation mit dem *Server* übrig bleibt.

$$2. L_1 = (n + m) \cdot 4 \text{ Mbps}, L_2 = m \cdot 4 \text{ Mbps} \text{ und } L_3 = n \cdot 4 \text{ Mbps}$$

Für $m=n=9$ ist $L_1 = 72 \text{ Mbps}$, $L_2 = 36 \text{ Mbps}$ und $L_3 = 36 \text{ Mbps}$. Die benötigte Gesamtübertragungsrate beträgt 144 Mbps .

3. Jeweils 4 Mbps für die einzelnen Strecken $\forall(m, n)$. Die benötigte Gesamtübertragungsrate für das Multicast-Szenario beträgt 12 Mbps .

$$B_{unicast} = 12 \cdot B_{multicast}.$$

Die Multicast-Übertragung ist wesentlich effizienter in der Bandbreitennutzung.

Lösung zu Aufgabe 3.1:

- a. Für statistisch unabhängige Ereignisse A und B gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Sind A und B disjunkt, so gilt $A \cap B = \emptyset$ und somit

$$P(\emptyset) = P(A) \cdot P(B) = 0.$$

Dies ist nur erfüllt, wenn entweder $P(A) = 0$ oder $P(B) = 0$ ist.

Zwei Ereignisse können somit dann sowohl statistisch unabhängig als auch disjunkt sein, wenn eines der beiden Ereignisse die Wahrscheinlichkeit Null hat.

- b. 1. Wir betrachten das zugehörige komplementäre Ereignis $\bar{A} = \{\text{Würfe} \mid \text{Alle vier Würfel liefern keine Eins}\}$
Es gilt:

$$P(\bar{A}) = \frac{\text{Zahl der für } \bar{A} \text{ günstigen Ausgänge}}{\text{Gesamtzahl der Ausgänge}} = \frac{5^4}{6^4} = \left(\frac{5}{6}\right)^4.$$

Damit ergibt sich für das gesuchte Ereignis $A = \{\text{Würfe} \mid \text{Mindestens ein Würfel liefert eine Eins}\}$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 51,77\%$$

2. Wir betrachten wieder das zugehörige komplementäre Ereignis $\bar{B} = \{\text{Würfe} \mid \text{Es lag kein Einerpasch in 26 Würfeln zweier Würfel vor}\}$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} P(\bar{B}) &= \frac{\text{Zahl der für } \bar{B} \text{ günstigen Ausgänge}}{\text{Gesamtzahl der Ausgänge}} \\ &= \frac{(6 \cdot 6 - 1)^{26}}{(6 \cdot 6)^{26}} = \left(\frac{35}{36}\right)^{26}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das gesuchte Ereignis

$B = \{\text{Würfe} \mid \text{Es gibt mindestens einen Einerpasch in 26 Würfeln zweier Würfel}\}$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{26} = 51,93\%.$$

Das Ereignis 2) hat also eine etwas höhere Wahrscheinlichkeit.

- c. Betrachtung des zugehörigen komplementären Ereignisses $\bar{A}_n = \{\text{Versammlungen von } n \text{ Personen} \mid \text{Es gibt keine zwei Personen, die am gleichen Tag Geburtstag haben}\}$.

Die Gesamtzahl der Fälle ist: 365^n .

Die Zahl der günstigen Fälle für \overline{A}_n ergibt sich folgendermaßen:

Jede Person erhalte eine Rangfolge. Der Geburtstag der ersten Person kann auf jeden der 365 Tage des Jahres fallen.

Für die zweite Person bleiben dann noch 364 mögliche Termine. Die dritte hat dann noch 363 u.s.w., die n -te noch $(365 - n + 1)$ Möglichkeiten für einen nicht kollidierenden Tag. Also ergeben sich insgesamt:

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365 - n + 1) \text{ günstige Ausgänge für } \overline{A}_n.$$

Damit ist:

$$P(\overline{A}_n) = \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n} = \frac{365!}{365^n \cdot (365 - n)!}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann:

$$P(A_n) = 1 - P(\overline{A}_n) = 1 - \frac{365!}{365^n \cdot (365 - n)!}.$$

Es gilt:

$$P(A_{22}) = 0,476,$$

$$P(A_{23}) = 0,507.$$

D.h. ab 23 Personen ist $P(A_n) > 0,5$.

Lösung zu Aufgabe 3.2:

a.

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{T}}(t) &= 1 - e^{-\mu t} \left(1 + \mu t + \frac{(\mu t)^2}{2} + \cdots + \frac{(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!} \right) \\ f_{\mathbf{T}}(t) &= \frac{dF_{\mathbf{T}}(t)}{dt} \\ &= \mu e^{-\mu t} \left(1 + \mu t + \cdots + \frac{(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!} \right) \\ &\quad - e^{-\mu t} \left(\mu + \frac{2\mu^2 t}{2} + \cdots + \frac{\mu^{k-1} t^{k-2}}{(k-2)!} \right) \\ &= \mu e^{-\mu t} \left(1 + \mu t + \cdots + \frac{(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!} \right) \\ &\quad - \mu e^{-\mu t} \left(1 + \mu t + \cdots + \frac{(\mu t)^{k-2}}{(k-2)!} \right) \\ &= \mu e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \frac{\mu^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\mu t} \end{aligned}$$

b. Man erhält für den Mittelwert und die Varianz:

$$\begin{aligned}
 m_{\mathbf{T}} &= \int_0^{\infty} t f_{\mathbf{T}}(t) dt = \frac{\mu^k}{(k-1)!} \int_0^{\infty} t^k e^{-\mu t} dt \\
 &= \frac{\mu^k}{(k-1)!} \frac{k!}{\mu^{k+1}} = \frac{k}{\mu} \\
 m_{\mathbf{T}}^{(2)} &= \int_0^{\infty} t^2 f_{\mathbf{T}}(t) dt = \frac{\mu^k}{(k-1)!} \int_0^{\infty} t^{k+1} e^{-\mu t} dt \\
 &= \frac{\mu^k}{(k-1)!} \frac{(k+1)!}{\mu^{k+2}} = \frac{k(k+1)}{\mu^2} \\
 &= \frac{k^2}{\mu^2} + \frac{k}{\mu^2} \\
 \sigma_{\mathbf{T}}^2 &= m_{\mathbf{T}}^{(2)} - m_{\mathbf{T}}^2 = \frac{k^2}{\mu^2} + \frac{k}{\mu^2} - \frac{k^2}{\mu^2} = \frac{k}{\mu^2}
 \end{aligned}$$

c. Für $k = 4$ und $\mu = 2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 P(\{\mathbf{T} \leq 4\}) &= F_{\mathbf{T}}(4) = 1 - e^{-2 \cdot 4} \left(1 + 2 \cdot 4 + \frac{(2 \cdot 4)^2}{2} + \frac{(2 \cdot 4)^3}{6} \right) \\
 &= 0,9576
 \end{aligned}$$

Aus der Tschebyscheff'schen Ungleichung ergibt sich mit

$$m_{\mathbf{T}} = \frac{k}{\mu} = \frac{4}{2} = 2, \quad \sigma_{\mathbf{T}}^2 = \frac{k}{\mu^2} = \frac{4}{4} = 1 \text{ und } \epsilon = 2$$

$$P(\{\mathbf{T} \leq 4\}) = P(|x - 2| < 2) \geq 1 - \frac{1}{4} = 0.75.$$

Dieser Wert stellt nur eine sehr grobe Abschätzung des wahren Wertes dar.

Lösung zu Aufgabe 3.3:

a. Ausgehend von Gl. 3.5-4 und Gl. 3.5-5 ergeben sich:

$$\begin{aligned}
 f_{\mathbf{r}}(r) &= \int_0^{2\pi} f_{\mathbf{r}\varphi}(r, \varphi) d\varphi = \frac{r}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \\
 f_{\varphi}(\varphi) &= \int_0^{\infty} f_{\mathbf{r}\varphi}(r, \varphi) dr = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{2r}{2\sigma^2} dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \cdot d\left(\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(- \left[\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \right]_0^{\infty} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} (-[0 - 1]) = \frac{1}{2\pi}
 \end{aligned}$$

b. Der Mittelwert beträgt

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{r}\} &= \int_0^{\infty} r \cdot f_{\mathbf{r}}(r) dr = \int_0^{\infty} r \cdot \frac{r}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \cdot dr \\ &= - \left(\left[r \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \cdot dr \right) \\ &= 0 + \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \cdot dr . \end{aligned}$$

Durch die Substitution

$$\eta = \frac{r}{\sqrt{2}\sigma} \quad \Longrightarrow \quad dr = \sqrt{2} \cdot \sigma \cdot d\eta$$

erhalten wir

$$E\{\mathbf{r}\} = \sqrt{2} \cdot \sigma \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} \cdot d\eta .$$

Es gilt (vgl. Beispiel 3.4-3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} \cdot d\eta = \sqrt{\pi} .$$

Weil die Funktion $f(\eta) = e^{-\eta^2}$ eine gerade Funktion ist, ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} \cdot d\eta = 2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} \cdot d\eta = \sqrt{\pi}$$

oder

$$\int_0^{\infty} e^{-\eta^2} \cdot d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

Somit beträgt

$$E\{\mathbf{r}\} = \sqrt{2} \cdot \sigma \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sigma .$$

Für die Varianz gilt (vgl. (3.4.6))

$$\sigma_{\mathbf{r}}^2 = m_{\mathbf{r}}^{(2)} - m_{\mathbf{r}}^2 ,$$

wobei gilt

$$\begin{aligned}
 m_{\mathbf{r}}^{(2)} &= \int_0^{\infty} r^2 \cdot f_{\mathbf{r}}(r) \cdot dr \\
 &= \int_0^{\infty} r^2 \cdot \frac{r}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \cdot dr \\
 &= - \left(\left[r^2 \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2 \cdot r \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \cdot dr \right) \\
 &= 2 \cdot \sigma^2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{r}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \cdot dr . \\
 &= 2 \cdot \sigma^2 \cdot \int_0^{\infty} f_{\mathbf{r}}(r) \cdot dr = 2 \cdot \sigma^2 .
 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\sigma_{\mathbf{r}}^2 = 2\sigma^2 - \frac{\pi}{2}\sigma^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sigma^2 .$$

c. Wegen (siehe (a))

$$f_{\mathbf{r}\varphi}(r, \varphi) = f_{\mathbf{r}}(r) \cdot f_{\varphi}(\varphi)$$

sind rund φ statistisch unabhängig. Daraus folgt direkt

$$\rho_{\mathbf{r}\varphi} = 0.$$

Lösung zu Aufgabe 3.4:

- a. Musterfunktionen sind alle auf der Zeitachse beliebig verschobene Sinusfunktionen, z. B.:

$$y_1(t) = \sin(t)$$

$$y_2(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y_3(t) = \sin(t + 1)$$

- b. Für den Mittelwert erhält man:

$$\begin{aligned} m_{\mathbf{y}}(t) &= \int_0^{2\pi} \mathbf{y}(x, t) f_{\mathbf{x}}(x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \sin(t+x) \frac{1}{2\pi} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2\pi} \cos(t+x)\right]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{1}{2\pi} (\cos(t+2\pi) - \cos(t)) = 0 \end{aligned}$$

aufgrund der Periodizität der Cosinus-Funktion.

Die Autokorrelationsfunktion lautet:

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{y}(x, t_1) \mathbf{y}(x, t_2) f_{\mathbf{x}}(x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \sin(t_1+x) \sin(t_2+x) \frac{1}{2\pi} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin(t_1) \cos(x) \\ &\quad + \cos(t_1) \sin(x)) (\sin(t_2) \cos(x) + \cos(t_2) \sin(x)) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} [\sin(t_1)\sin(t_2) \int_0^{2\pi} (\cos^2(x) dx \\
&\quad + (\sin(t_1)\cos(t_2) + \cos(t_1)\sin(t_2)) \int_0^{2\pi} \sin(x)\cos(x) dx \\
&\quad + \cos(t_1)\cos(t_2) \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx] \\
&= \frac{\pi}{2\pi} (\sin(t_1)\sin(t_2) + \cos(t_1)\cos(t_2)) \\
&= \frac{1}{2} \cos(t_2 - t_1)
\end{aligned}$$

$$\text{da } \int_0^{2\pi} \sin(x)\cos(x) dx = 0$$

- c. Der Prozess ist zumindest schwach stationär, da der Mittelwert von t unabhängig ist und die Autokorrelationsfunktion nur von der Zeitdifferenz $\tau = t_1 - t_2$ abhängt.
- d. Da die Musterfunktion $y(t) = \sin(t)$ periodisch ist, reicht zur Bestimmung des Zeitmittelwertes das Integral über eine Periode aus.

$$\begin{aligned}
m_y &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) dt = 0 \\
R_{yy} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t)\sin(t + \tau) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t)(\sin(t)\cos(\tau) + \cos(t)\sin(\tau)) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} [\cos(\tau) \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt \\
&\quad + \sin(\tau) \int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t) dt] \\
&= \frac{1}{2\pi} (\cos(\tau) \cdot \pi + \sin(\tau) \cdot 0) \\
&= \frac{1}{2} \cos(\tau)
\end{aligned}$$

Da dies (wie man zeigen kann) für alle Musterfunktionen gilt, ist der Prozess zumindest schwach ergodisch.

Lösung zu Aufgabe 3.5:

Der Empfänger entscheidet zum Abtastzeitpunkt nT , dass

$$\begin{cases} b(nT) = 1, & \text{wenn } y(nT) > \frac{A}{2} \\ b(nT) = 0, & \text{wenn } y(nT) \leq \frac{A}{2}. \end{cases}$$

Ein Bitfehler entsteht, wenn Bit "0" gesendet wurde, aber das empfangene Signal $y(nT)$ größer als $\frac{A}{2}$ ist; entsprechend, wenn Bit "1" gesendet wurde, aber das empfangene Signal $y(nT)$ kleiner oder gleich $\frac{A}{2}$ ist.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte von y lautet:

$$\begin{cases} f_{y0}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right), & \text{"0" gesendet} \\ f_{y1}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(y-A)^2}{2\sigma^2}\right), & \text{"1" gesendet.} \end{cases}$$

Für eine normalverteilte Zufallsvariable x gilt (vgl. Beispiel 3.6-1)

$$F(x) = \frac{1}{2} + \operatorname{erf}\left(\frac{x - m_x}{\sigma}\right),$$

wobei m_x der Mittelwert und σ die Varianz der Zufallsvariablen x ist.

Im Fall unserer Aufgabenstellung gelten

$$\begin{cases} F_{y0}(y) = \frac{1}{2} + \operatorname{erf}\left(\frac{y}{\sigma}\right) & \text{"0" gesendet} \\ F_{y1}(y) = \frac{1}{2} + \operatorname{erf}\left(\frac{y-A}{\sigma}\right) & \text{"1" gesendet.} \end{cases}$$

Die Fehlerwahrscheinlichkeit, die bei der Übertragung des Bits "0" eintritt, wird definiert als

$$\begin{aligned} P_{e0} &= P\left\{y0 > \frac{A}{2}\right\} = 1 - P\left\{y0 \leq \frac{A}{2}\right\} \\ &= 1 - F_{y0}(A/2) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} + \operatorname{erf}\left(\frac{A/2}{\sigma}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} - \operatorname{erf}\left(\frac{A}{2\sigma}\right). \end{aligned}$$

Die Fehlerwahrscheinlichkeit, die bei der Übertragung des Bits "1" eintritt, wird definiert als

$$\begin{aligned} P_{e1} &= P\left\{y1 \leq \frac{A}{2}\right\} = F_{y1}\left(\frac{A}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \operatorname{erf}\left(\frac{A/2 - A}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \operatorname{erf}\left(\frac{A}{2\sigma}\right). \end{aligned}$$

Anmerkung: Die Fehlerfunktion $\operatorname{erf}()$ wurde im Beispiel 3.6-1 angegeben.

Lösung zu Aufgabe 4.1:

- a. $I(A) = -\log_2 P(A) = -\log_2 0,0651 = 3,9412$ Bit
- b. $I(T) = -\log_2 P(T) = -\log_2 0,0674 = 3,8911$ Bit
- c. $I(M) = -\log_2 P(M) = -\log_2 0,0301 = 5,0541$ Bit
- d. Der Buchstabe X besitzt den größten Informationsgehalt, während der Buchstabe E den geringsten Informationsgehalt aufweist.

Lösung zu Aufgabe 4.2:

- a. Die Kanalmatrix lautet

$$P(Y|X) = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

- b. Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten $P(y_i)$ sind:

$$P(y_1) = \sum_{i=1}^2 P(x_i) \cdot P(y_1|x_i) = 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0 = 0,25$$

$$P(y_2) = \sum_{i=1}^2 P(x_i) \cdot P(y_2|x_i) = 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,5$$

$$P(y_3) = \sum_{i=1}^2 P(x_i) \cdot P(y_3|x_i) = 0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$$

- c. i. Entropie am Kanaleingang

$$\begin{aligned} H(X) &= -\sum P(x_i) \cdot \log_2 P(x_i) \\ &= -[0,5 \cdot \log_2 0,5 + 0,5 \cdot \log_2 0,5] = 1 \text{ Bit/Symbol} \end{aligned}$$

- ii. Entropie am Kanalausgang

$$\begin{aligned} H(Y) &= -\sum_{i=1}^3 P(y_i) \cdot \log_2 P(y_i) \\ &= -[0,25 \cdot \log_2 0,25 + 0,5 \cdot \log_2 0,5 + 0,25 \cdot \log_2 0,25] \\ &= 1,5 \text{ Bit/Symbol} \end{aligned}$$

iii. Streuentropie

$$\begin{aligned}
H(Y|X) &= - \sum_{i=1}^2 P(x_i) \cdot \sum_{j=1}^3 P(y_j|x_i) \cdot \text{ld}P(y_j|x_i) \\
&= -P(x_1)[P(y_1|x_1) \cdot \text{ld}P(y_1|x_1) \\
&\quad + P(y_2|x_1) \cdot \text{ld}P(y_2|x_1) + P(y_3|x_1) \cdot \text{ld}P(y_3|x_1)] \\
&\quad - P(x_2)[P(y_1|x_2) \cdot \text{ld}P(y_1|x_2) \\
&\quad + P(y_2|x_2) \cdot \text{ld}P(y_2|x_2) + P(y_3|x_2) \cdot \text{ld}P(y_3|x_2)] \\
&= -0,5[0,5 \cdot \text{ld}0,5 + 0,5 \cdot \text{ld}0,5 + 0] \\
&\quad - 0,5[0 + 0,5 \cdot \text{ld}0,5 + 0,5 \cdot \text{ld}0,5] \\
&= 1 \text{ Bit/Symbolpaar}
\end{aligned}$$

iv. Rückschlusstropie

$$\begin{aligned}
H(X|Y) &= H(X) + H(Y|X) - H(Y) \\
&= 1 + 1 - 1,5 \\
&= 0,5 \text{ Bit/Symbolpaar}
\end{aligned}$$

v. Verbundentropie

$$\begin{aligned}
H(X, Y) &= H(Y|X) + H(X) \\
&= 1 + 1 \\
&= 2 \text{ Bit/Symbolpaar}
\end{aligned}$$

vi. Transinformation

$$\begin{aligned}
H(X; Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\
&= 1,5 - 1 \\
&= 0,5 \text{ Bit/Symbolpaar}
\end{aligned}$$

- d. Das ist ein rausch- und verlustbehafteter Kanal, da $H(X|Y)$ und $H(Y|X)$ nicht gleich Null sind.

Lösung zu Aufgabe 4.3:

- a. Der angegebene Kanal ist verlustfrei und rauschbehaftet.
b. Wir setzen $P(x_1) = p$ und erhalten $P(x_2) = 1 - p$. Daraus folgt ferner

$$P(y_1) = 0,4 \cdot (1 - p), \quad P(y_2) = p \quad \text{und} \quad P(y_3) = 0,6 \cdot (1 - p).$$

$$\begin{aligned}
-H(Y) &= \sum_{i=1}^3 P(y_i) \cdot \text{ld}P(y_i) \\
&= 0,4 \cdot (1-p) \cdot \text{ld}(0,4 \cdot (1-p)) + p \cdot \text{ld}p \\
&\quad + 0,6 \cdot (1-p) \cdot \text{ld}(0,6 \cdot (1-p)) \\
-H(Y|X) &= \sum_{i=1}^2 P(x_i) \cdot \sum_{j=1}^3 P(y_j|x_i) \cdot \text{ld}P(y_j|x_i) \\
&= p \cdot \text{ld}1 + (1-p) \cdot 0,4 \cdot \text{ld}0,4 \\
&\quad + (1-p) \cdot 0,6 \cdot \text{ld}0,6 \\
&= (1-p)(0,4 \cdot \text{ld}0,4 + 0,6 \cdot \text{ld}0,6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(Y) - H(Y|X) &= -0,4(1-p) \cdot \text{ld}(0,4 \cdot (1-p)) - p \cdot \text{ld}p \\
&\quad - 0,6 \cdot (1-p) \cdot \text{ld}(0,6 \cdot (1-p)) \\
&\quad + (1-p)(0,4 \cdot \text{ld}0,4 + 0,6 \cdot \text{ld}0,6) \\
&= -(1-p) \cdot \text{ld}(1-p) - p \cdot \text{ld}p.
\end{aligned}$$

Die Ableitung der letzten Gleichung ergibt

$$\frac{d}{dp}(H(Y) - H(Y|X)) = \left(+\frac{1-p}{1-p} + \ln(1-p) - \frac{p}{p} - \ln p \right) \cdot \frac{1}{\ln 2} \stackrel{!}{=} 0.$$

Daraus folgt

$$p = \frac{1}{2}.$$

Man kann leicht überprüfen, dass die zweite Ableitung stets kleiner Null ist.

Für $p = \frac{1}{2}$ erhält man das Maximum:

$$\begin{aligned}
C &= \max_{P(X)}(H(Y) - H(Y|X)) = \max_{P(X)}[-(1-p) \cdot \text{ld}(1-p) - p \cdot \text{ld}p] \\
&= -(1 - \frac{1}{2}) \cdot \text{ld}(1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \cdot \text{ld}\frac{1}{2} = 1 \text{Bit/Symbol}.
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4.4:

Die Kanalmatrix lautet:

$$P(Y|X) = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,7 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,7 \end{bmatrix}$$

Dies ist ein symmetrischer Kanal mit $q = 4$ Ein- und Ausgangssymbolen und mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0,3$.

Nach Beispiel 4.3-3 errechnet sich die Kapazität dieses Kanals zu:

$$\begin{aligned} C &= ld\ q + \left[(1-p) \cdot ld(1-p) + p \cdot ld\left(\frac{p}{q-1}\right) \right] \\ &= ld\ 4 + [0,7 \cdot ld\ 0,7 + 0,3 \cdot ld\ 0,1] \\ &= 0,6432 \text{ Bit/Symbol} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 5.1:

- a. $\cos(t)$ ist eine periodische Funktion mit der Periode $T^* = 2\pi$. Daraus ergibt sich die Grenzkreisfrequenz zu $B = \frac{2\pi}{T^*} = 1$. Damit die Voraussetzungen des Abtasttheorems erfüllt sind, muss gelten: $\omega' \geq 2B = 2$.
- b. Die Abtastwerte von $\cos(t)$ bei $t = n \cdot \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ ergeben sich zu

$$\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k & \text{falls } n = 2k \\ 0 & \text{falls } n = 2k - 1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Es wird also mit einer Abtastperiodendauer von $T = \frac{\pi}{2}$ abgetastet. Aus diesen Werten ist eine fehlerfreie Rekonstruktion möglich, da die zugehörige Abtastkreisfrequenz ω' die Voraussetzungen des Abtasttheorems erfüllt:

$$\omega' = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 > 2B = 2.$$

- c. Für das Spektrum von $\cos(t)$ erhält man (vgl. KE 4, Anhang B):

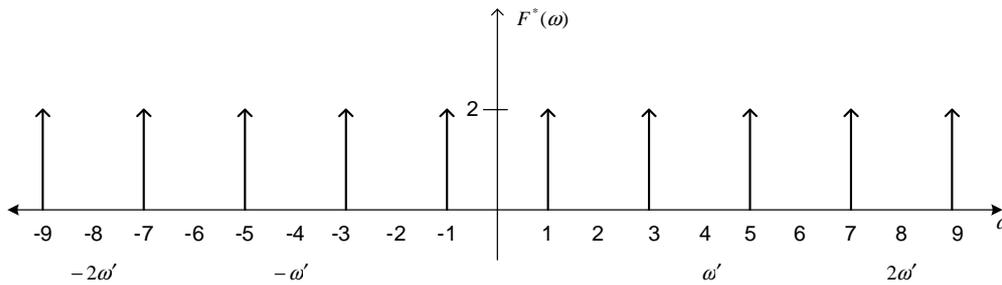
$$f(t) = \cos(t) \longrightarrow F(\omega) = \pi[\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)].$$

Das Spektrum der Abtastfunktion (Gl. 5.2-4) ergibt sich für $\omega' = 4$ zu

$$S(\omega) = \omega' \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega') = 4 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 4n).$$

Damit erhält man für das Spektrum der abgetasteten Funktion:

$$\begin{aligned} F^*(\omega) &= F(\omega) * S(\omega) \\ &= \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega') \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi[\delta(\omega - 4n - 1) + \delta(\omega - 4n + 1)] \\ &= 2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - 4n - 1) + \delta(\omega - 4n + 1)] \\ &= 2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2n + 1) \end{aligned}$$



Das ursprüngliche Signal $\cos(t)$ kann rekonstruiert werden, wenn für die Grenzfrequenz ω_0 des idealen Tiefpasses gilt: $1 \leq |\omega_0| < 3$.

d. Nach Gl. 5.2-5 gilt für $f(t) = \cos(t)$, $t = \frac{\pi}{3}$, $T = \frac{\pi}{2}$ und $\omega_0 = 2$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin\left(2\left(\frac{\pi}{3} - n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right)}{2\left(\frac{\pi}{3} - n \cdot \frac{\pi}{2}\right)}$$

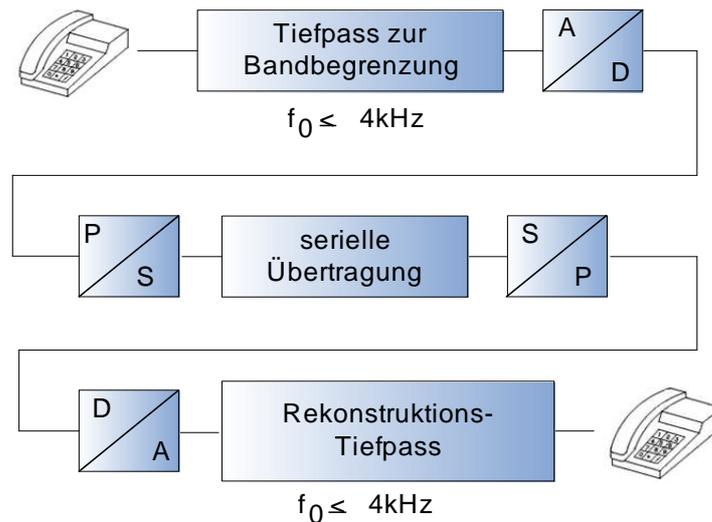
Daraus erhält man als Näherung:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx C_k = \sum_{n=-k}^k \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin\left(2\left(\frac{\pi}{3} - n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right)}{2\left(\frac{\pi}{3} - n \cdot \frac{\pi}{2}\right)}$$

k	C_k
1	0,41350
5	0,49324
10	0,50150
100	0,49998

Der exakte Wert lautet $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0,5$.

e. Das ideale Blockschaltbild der Übertragungsstrecke:



Um ein rekonstruierbares Signal zu erhalten, muss es auf $f_0 \leq \frac{f'}{2} = \frac{8\text{kHz}}{2} = 4\text{kHz}$ bandbegrenzt werden. Die Übertragungsgeschwindigkeit auf der Strecke muss mindestens $8\text{ bit} \cdot 8000 \cdot \frac{1}{s} = 64000\text{ bit/s}$ betragen.

Lösung zu Aufgabe 5.2:

a. $4\text{ Bit} \rightarrow N = 16$ Quantisierungsstufen

$$\Delta A_i = \frac{\text{Wertebereich}}{N} = \frac{2}{16} = 0,125, \quad i \in \{1, \dots, 16\}$$

b. Signalleistung:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\infty}^{\infty} A^2 f_A(A) dA \\ &= 2 \cdot \int_0^{0,5} A^2 \cdot \frac{3}{4} dA + 2 \cdot \int_{0,5}^{0,75} A^2 \cdot \frac{3}{8} dA + 2 \cdot \int_{0,75}^1 A^2 \cdot \frac{1}{8} dA \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{3}{4} A^3 \Big|_0^{0,5} + \frac{3}{8} A^3 \Big|_{0,5}^{0,75} + \frac{1}{8} A^3 \Big|_{0,75}^1 \right] \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{3}{4} \cdot 0,5^3 + \frac{3}{8} \cdot (0,75^3 - 0,5^3) + \frac{1}{8} \cdot (1 - 0,75^3) \right] = \frac{71}{384} \\ &\approx 0,1849. \end{aligned}$$

- c. Störleistung: Für Signale mit konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte der Amplitude über den ganzen Wertebereich gilt für den mittleren quadratischen Fehler (Gl. 5.3-1):

$$R = E[\epsilon^2] = N \cdot \int_{A_i - \frac{\Delta A_i}{2}}^{A_i + \frac{\Delta A_i}{2}} (A - A_i)^2 f_A dA$$

Im vorliegenden Fall ist die Wahrscheinlichkeitsdichte nur über Teilabschnitte des Wertebereiches konstant, deshalb muss über die Beiträge der N Quantisierungsintervalle summiert werden. Wegen $f_A(A) = \text{const} = f_A(A_i) \forall A \in [A_i - \frac{\Delta A_i}{2}, A_i + \frac{\Delta A_i}{2}]$ gilt hier ($N = 16$):

$$\begin{aligned} E[\epsilon^2] &= \sum_{i=1}^{16} \int_{A_i - \frac{\Delta A_i}{2}}^{A_i + \frac{\Delta A_i}{2}} (A - A_i)^2 \cdot f_A(A_i) dA \\ &= \sum_{i=1}^{16} \left[f_A(A_i) \frac{(A - A_i)^3}{3} \right]_{A_i - \frac{\Delta A_i}{2}}^{A_i + \frac{\Delta A_i}{2}} \\ &= \sum_{i=1}^{16} f_A(A_i) \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{\Delta A_i}{2} \right)^3 \\ &= \sum_{i=1}^{16} f_A(A_i) \cdot \frac{1}{12} (\Delta A_i)^3 \\ &= 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{(0,125)^3}{12} + 4 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{(0,125)^3}{12} + 8 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{(0,125)^3}{12} = \frac{1}{768} \\ &\approx 1,302 \cdot 10^{-3} \\ &\Rightarrow \frac{S}{R} = 142. \end{aligned}$$

- d. Die Signalleistung S ist unabhängig von der Quantisierung und bleibt somit gleich.

Für die Störleistung gilt hier (vgl. c)):

$$R = \sum_{i=1}^N f_A(A_i) \cdot \frac{1}{12} \cdot (\Delta A_i)^3$$

Bei der Erhöhung der Quantisierung um k Bit erhöht sich die Anzahl der Quantisierungsintervalle von N auf $N \cdot 2^k$, ΔA_i sinkt entsprechend von $\Delta A_i = \frac{1}{8}$ auf $\frac{1}{8 \cdot 2^k}$. Die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_A(A_i)$ bleibt weiterhin in jedem Quantisierungsintervall konstant.

Man erhält dann für die Störleistung bei k zusätzlichen Bit

$$\begin{aligned}
 R_k &= \sum_{i=1}^{N \cdot 2^k} f_A(A_i) \cdot \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{8 \cdot 2^k} \right)^3 \\
 &= 2^k \cdot \sum_{i=1}^N f_A(A_i) \cdot \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{8 \cdot 2^k} \right)^3 \\
 &= 2^{-2k} \sum_{i=1}^N f_A(A_i) \cdot \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^3 \\
 &= 2^{-2k} \cdot R \\
 \Rightarrow \frac{S}{R_k} &= \frac{S}{2^{-2k} \cdot R} = 2^{2k} \cdot \frac{S}{R}
 \end{aligned}$$

Das Signal-/Störleistungsverhältnis vergrößert sich um den Faktor 2^{2k} .

Lösung zu Aufgabe 6.1:

- Für beide Codes gilt: $\sum_{i=1}^q \frac{1}{r^i} = \sum_{i=1}^5 \frac{1}{2^i} = 2 \cdot \frac{1}{2^3} + 3 \cdot \frac{1}{2^2} = 1$. Die Kraft-McMillan-Ungleichung ist für beide Codes erfüllt.
- Der Code C_2 ist nicht decodierbar, während der Code C_1 decodierbar ist.
- Eine Codefolge vom Code C_2 lautet z. B.

110100100100.

Es kann entweder

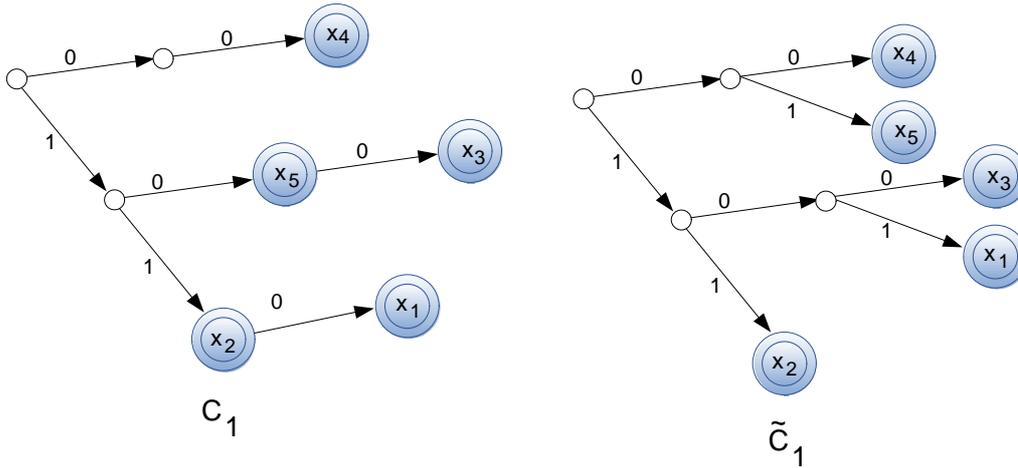
$$110100100100 \hat{=} x_1 x_3 x_3 x_3$$

oder

$$110100100100 \hat{=} x_1 x_5 x_2 x_4 x_3$$

sein.

- Der Codebaum für den Code C_1 sieht wie folgt (links) aus:



Ein Präfixcode \tilde{C}_1 (Codebaum siehe neben C_1) mit demselben Codealphabet und den entsprechenden Codelängen lautet:

Quellensymbol	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Code \tilde{C}_1	101	11	100	00	01

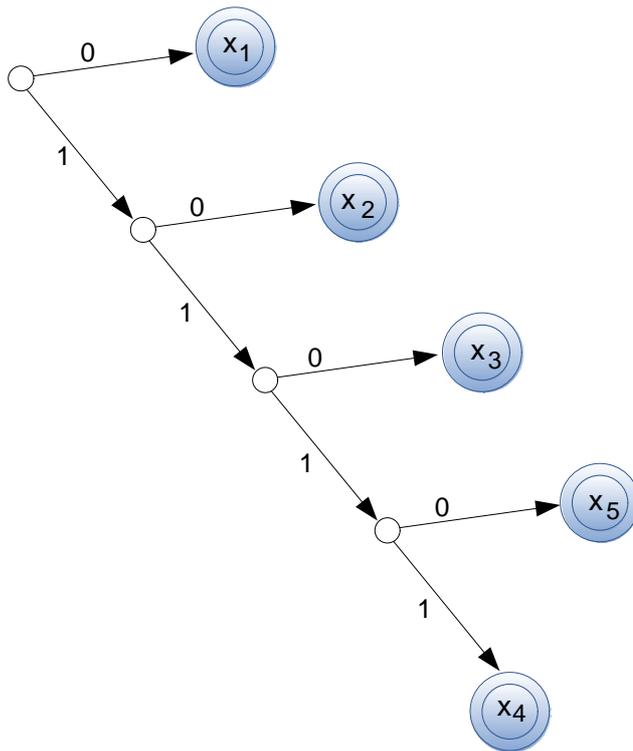
Lösung zu Aufgabe 6.2:

a. Der Huffman-Algorithmus liefert die folgenden Codierungsvorgänge:

Q_1		Q_2	
x_1	0,5	x_1	0,5
x_2	0,25	x_2	0,25
x_3	0,125	x_3	0,125 }0
x_5	0,065 }0	$x_5 x_4$	0,125 }1
x_4	0,06 }1		

Q_3		Q_4	
x_1	0,5	x_1	0,5 }0
x_2	0,25 }0	$x_5 x_4 x_3 x_2$	0,5 }1
$x_5 x_4 x_3$	0,25 }1		

Der Codebaum sieht so aus:



Die Codierungsvorschrift lautet:

Quellsymbol	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Code \tilde{C}_1	0	10	110	1111	1110

b. Die mittlere Codelänge beträgt

$$\begin{aligned}
 l_m &= \sum_{i=1}^5 P(w_i) \cdot l(w_i) \\
 &= 0,5 \cdot 1 + 0,25 \cdot 2 + 0,125 \cdot 3 + 0,06 \cdot 4 + 0,065 \cdot 4 \\
 &= 1,875 \text{ Bit/Symbol.}
 \end{aligned}$$

c. Die Quellenentropie liegt bei

$$\begin{aligned}
 H(X) &= - \sum_{i=1}^5 P(x_i) \cdot \lg P(x_i) \\
 &= -[0,5 \cdot \lg 0,5 + 0,25 \cdot \lg 0,25 + 0,125 \cdot \lg 0,125 \\
 &\quad + 0,06 \cdot \lg 0,06 + 0,065 \cdot \lg 0,065] \\
 &= 0,5 \cdot 1 + 0,25 \cdot 2 + 0,125 \cdot 3 \\
 &\quad - 0,06 \cdot \lg 0,06 - 0,065 \cdot \lg 0,065,
 \end{aligned}$$

und man erhält hieraus bei genauer Rechnung und anschließender Rundung auf 4 Stellen hinter dem Komma

$$H(X) \approx 1,8749.$$

Es ergibt sich also $H(X) < l_m$ bzw.

$$E = \frac{H(X)}{l_m} < 1,$$

der Code ist folglich nicht ideal (obwohl optimal).

Lösung zu Aufgabe 7.1:

a. Codierung des Wortes **FernUniversität**

		Zeilenparität
F	01000110	1
e	01100101	0
r	01110010	0
n	01101110	1
U	01010101	0
n	01101110	1
i	01101001	0
v	01110110	1
e	01100101	0
r	01110010	0
s	01110011	1
i	01101001	0
t	01110100	0
ä	11110001	1
t	01110100	0
	11100111	0 ← Spaltenparität

b. i.

		Zeilenparität
e'	0 1 1 0 1 0 0 1	0
n'	0 1 1 0 1 1 0 1	1
	1 1 1 0 1 0 0 0	Änderung in der Spaltenparität

Aus e wird i und aus n wird m.

Empfangene Nachricht: **FirmUniversität**

- ii. Mit dem verwendeten Sicherungsverfahren können stets bis zu drei Fehler erkannt oder ein Fehler korrigiert werden.

c.

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 7.2:

- a. Es gibt insgesamt 2^{12} Codewörter von 2^{23} Wörtern. Jede Korrekturkugel enthält also aufgrund der Ausfüllbedingung:

$$\frac{2^{23}}{2^{12}} = 2^{11} = 2048 \text{ Wörter}$$

- b. In der Kugel mit Radius t um ein gewähltes Codewort der Länge 23 Bit liegen

$$\sum_{i=0}^t \binom{23}{i} \text{ Wörter,}$$

die höchstens den Abstand t haben. t ist die Zahl korrigierbarer Fehler. Mit der Perfektheitsbedingung ergibt sich:

$$\sum_{i=0}^t \binom{23}{i} \stackrel{!}{=} 2048$$

Damit folgt $t = 3$. Es können also 3 Fehler korrigiert werden.

- c. Im Fall ohne Sicherung bedeutet jeder Bitfehler in den 12 Bit des Informationswortes ein fehlerhaftes Wort. Damit folgt, Unabhängigkeit der Fehler vorausgesetzt:

$$P\{\text{fehlerhaftes Wort}\} = 1 - P\{\text{alle Bit korrekt}\} = 1 - (1 - p)^{12} = 1 - 0.99^{12} = 0,1136.$$

Mit Wahrscheinlichkeit 0,1136 tritt ein Fehler auf, wenn keine Sicherung stattfindet.

Im Fall mit Sicherung tritt genau dann ein fehlerhaftes Wort auf, wenn mehr als 3 Bit der 23 übertragenen Bit falsch sind, denn dann kann nicht erfolgreich korrigiert werden. Das bedeutet:

$$P\{\text{fehlerhaftes Wort}\} = \sum_{i=4}^{23} \binom{23}{i} p^i (1 - p)^{23-i}$$

$$\begin{array}{r}
 \underline{x^{11} + x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1} \\
 x^4 + x + 1 \mid x^{15} - 1 \\
 \underline{x^{15} + x^{12} + x^{11}} \\
 x^{12} + x^{11} - 1 \\
 \underline{x^{12} + x^9 + x^8} \\
 x^{11} + x^9 + x^8 - 1 \\
 \underline{x^{11} + x^8 + x^7} \\
 x^9 + x^7 - 1 \\
 \underline{x^9 + x^6 + x^5} \\
 x^7 + x^6 + x^5 - 1 \\
 \underline{x^7 + x^4 + x^3} \\
 x^6 + x^5 + x^4 + x^3 - 1 \\
 \underline{x^6 + x^3 + x^2} \\
 x^5 + x^4 + x^2 - 1 \\
 \underline{x^5 + x^2 + x} \\
 x^4 + x - 1 \\
 \underline{x^4 + x + 1} \\
 0
 \end{array}$$

b. Das zugehörige Polynom $a(x)$ lautet

$$a(x) = x^{10} + x^8 + 1.$$

Das Codepolynom ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 v(x) &= a(x) \cdot g(x) = (x^{10} + x^8 + 1) \cdot (x^4 + x + 1) \\
 &= x^{14} + x^{12} + x^4 \\
 &\quad + x^{11} + x^9 + x \\
 &\quad + x^{10} + x^8 + 1 \\
 &= x^{14} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^4 + x + 1.
 \end{aligned}$$

Das Codewort lautet (101111100010011).

c. Man überprüft das Wort w mit Hilfe des Kontrollpolynoms $h(x)$. Aus

$$w = (110101000000000)$$

folgt

$$w(x) = x^{14} + x^{13} + x^{11} + x^9.$$

Die Multiplikation von $w(x)$ mit $h(x)$ liefert

$$\begin{aligned} w(x) \cdot h(x) &= (x^{14} + x^{13} + x^{11} + x^9) \cdot (x^{11} + x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1) \\ &= x^{25} + x^{22} + x^{21} + x^{19} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + \\ &\quad x^{24} + x^{21} + x^{20} + x^{18} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + \\ &\quad x^{22} + x^{19} + x^{18} + x^{16} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + \\ &\quad x^{20} + x^{17} + x^{16} + x^{14} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 \\ &= x^{25} + x^{24} + x^{10} + x^9 \\ &= x^{10} + x^9 + x^{10} + x^9 = 0. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass w ein Codewort ist. Um es zu decodieren, dividiert man $w(x)$ durch das Generatorpolynom $g(x)$,

$$\begin{aligned} \frac{w(x)}{g(x)} &= \frac{x^{14} + x^{13} + x^{11} + x^9}{x^4 + x + 1} \\ &= x^{10} + x^9 \end{aligned}$$

und erhält die Nachricht

$$(11000000000).$$

Der Rechengang ist wie folgt dargestellt.

$$\begin{array}{r} \underline{x^{10} + x^9} \\ x^4 + x + 1 \mid x^{14} + x^{13} + x^{11} + x^9 \\ \underline{x^{14} + x^{11} + x^{10}} \\ \quad x^{13} + x^{10} + x^9 \\ \quad \underline{x^{13} + x^{10} + x^9} \\ \qquad \qquad \qquad 0 \end{array}$$

Lösung zu Aufgabe 7.5:

a. Wir bestimmen $g_4(x)$ mit dem Ansatz

$$g_4(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

Wir erhalten für $g_4(\alpha^7) = 0$

$$g_4(\alpha^7) = a\alpha^{28} + b\alpha^{21} + c\alpha^{14} + d\alpha^7 + e = 0,$$

wobei

$$\begin{aligned}
 \alpha^7 &= \alpha^7 = \alpha^4 \cdot \alpha^3 = (\alpha + 1)\alpha^3 \\
 &= \alpha^4 + \alpha^3 = \alpha^3 + \alpha + 1, \\
 \alpha^{14} &= (\alpha^7)^2 = (\alpha + 1)^2 \cdot \alpha^6 = (\alpha^2 + 1)(\alpha^3 + \alpha^2), \\
 &= \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 = (\alpha^2 + \alpha) + (\alpha + 1) + \alpha^3 + \alpha^2 \\
 &= \alpha^3 + 1, \\
 \alpha^{21} &= \alpha^{14} \cdot \alpha^7 = (\alpha^3 + 1)(\alpha^3 + \alpha + 1) \\
 &= \alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^3 + \alpha + 1 \\
 &= (\alpha^3 + \alpha^2) + (\alpha + 1) + \alpha + 1 = \alpha^3 + \alpha^2, \\
 \alpha^{28} &= \alpha^{14} \cdot \alpha^{14} = (\alpha^3 + 1) \cdot (\alpha^3 + 1) = \alpha^6 + 1 = \alpha^3 + \alpha^2 + 1.
 \end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}
 g_4(\alpha^7) &= a(\alpha^3 + \alpha^2 + 1) + b(\alpha^3 + \alpha^2) + c(\alpha^3 + 1) + d(\alpha^3 + \alpha + 1) + e \\
 &= (a + b + c + d)\alpha^3 + (a + b)\alpha^2 + d\alpha + (a + c + d + e) \\
 &\stackrel{!}{=} 0
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ a + b = 0 \\ d = 0 \\ a + c + d + e = 0. \end{cases}$$

Die nichttriviale Lösung lautet

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ e = 1. \end{cases}$$

Das Polynom $g_4(x)$ ergibt sich zu

$$g_4(x) = x^4 + x^3 + 1.$$

b. Die Anzahl der Codewörter und die Effizienz

	Polynom	k_1	k	$m = 2^{k_1} - 1$	$n = m - k$	Effizienz $\frac{n}{m}$	Anzahl der Codewörter
(a)	$g_1(x)$	4	4	15	11	$\frac{11}{15}$	2^{11}
(b)	$g_1(x) \cdot g_2(x)$	4	8	15	7	$\frac{7}{15}$	2^7
(c)	$g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot g_3(x)$	4	10	15	5	$\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$	2^5
(d)	$g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot g_3(x) \cdot g_4(x)$	4	14	15	1	$\frac{1}{15}$	2^1

c. Das Generatorpolynom $g(x)$ lautet

$$\begin{aligned} g(x) &= (x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \\ &\quad (x^2 + x + 1)(x^4 + x^3 + 1) \\ &= x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 \\ &\quad + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

Die Generatormatrix ist eine $(1, 15)$ -Matrix. Somit erhalten wir nur zwei Codewörter (000000000000000) und (111111111111111) .

d. Die Distanz der einzigen beiden Codewörter ist $d = 15$. Damit lassen sich sogar exakt $= \frac{d-1}{2} = 7$ Fehler korrigieren.

Lösung zu Aufgabe 7.6:

a. Mit $K = 4$ und $R = 3$, erhalten wir für die Koeffizientenmatrix

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

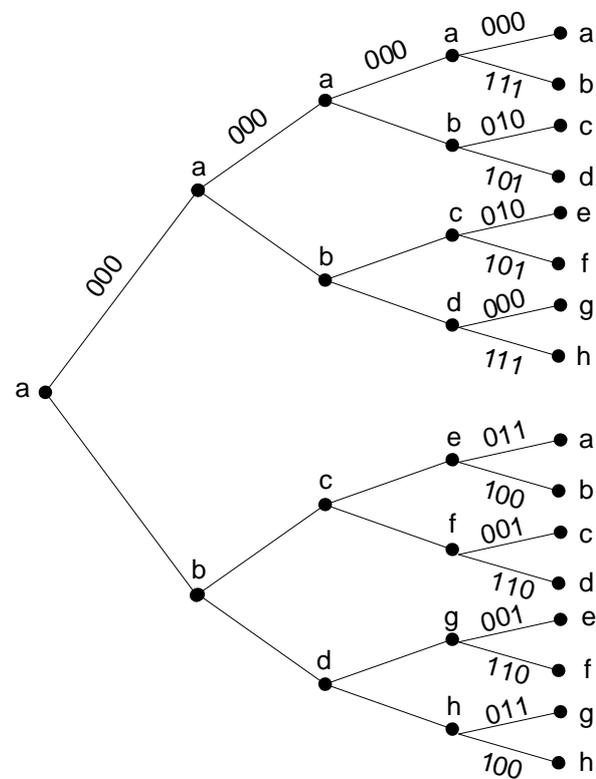
Die Anzahl der Speicherzustände beträgt insgesamt $8 (= 2^3)$.

a	000	e	001
b	100	f	101
c	010	g	011
d	110	h	111

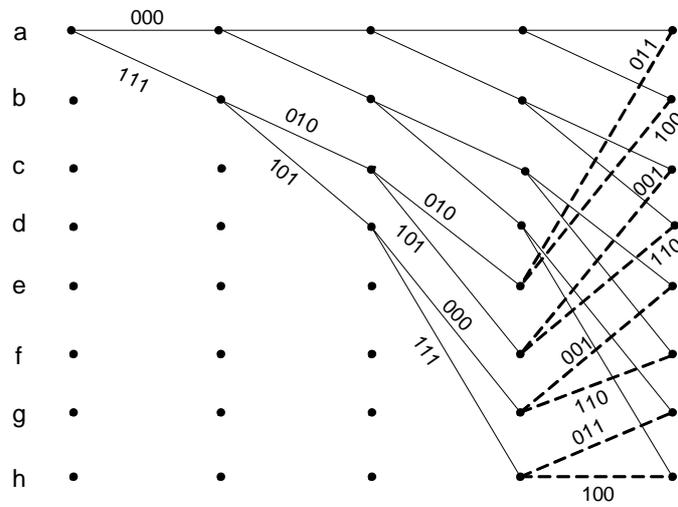
b. Die vollständige Tabelle

Eingang	Zustand $S_1S_2S_3$	Ausgang $v^1v^2v^3$	neuer Zustand $S_1S_2S_3$
0	$a = 000$	000	$a = 000$
1	$a = 000$	111	$b = 100$
0	$b = 100$	010	$c = 010$
1	$b = 100$	101	$d = 110$
0	$c = 010$	010	$e = 001$
1	$c = 010$	101	$f = 101$
0	$d = 110$	000	$g = 011$
1	$d = 110$	111	$h = 111$
0	$e = 001$	011	$a = 000$
1	$e = 001$	100	$b = 100$
0	$f = 101$	001	$c = 010$
1	$f = 101$	110	$d = 110$
0	$g = 011$	001	$e = 001$
1	$g = 011$	110	$f = 101$
0	$h = 111$	011	$g = 011$
1	$h = 111$	100	$h = 111$

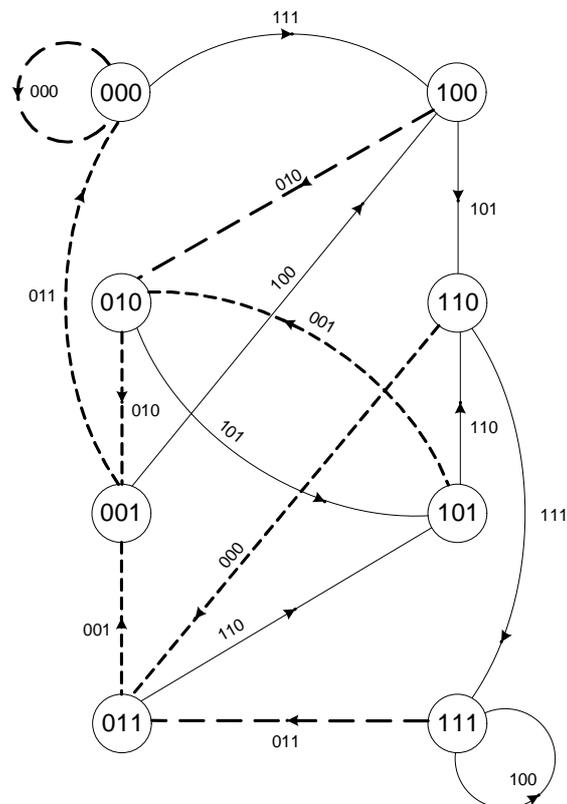
c. Das Codediagramm sieht so aus:



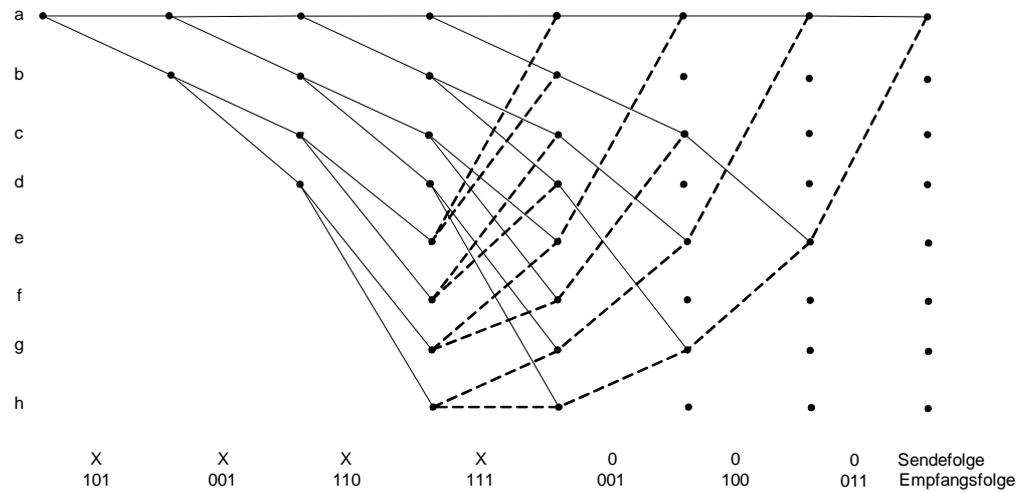
d. Das entsprechende Trellis-Diagramm:



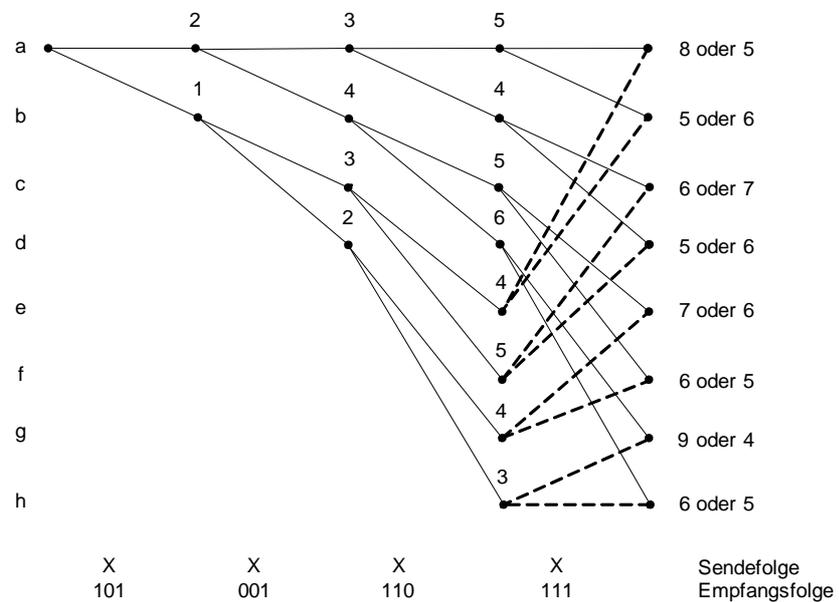
e. Das Zustandsdiagramm sieht wie folgt aus:



- f. Das Trellis-Diagramm unter der Annahme, dass vom Zustand (000) begonnen wurde und die letzten drei gesendeten Symbole Null waren, sieht wie folgt aus:

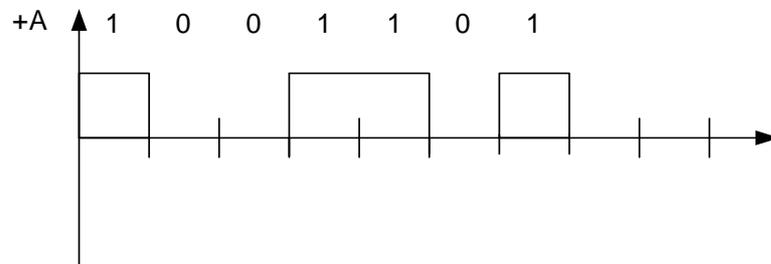


Nach dem 4. Schritt des Viterbi-Algorithmus sieht das Trellis-Diagramm so aus:



Lösung zu Aufgabe 8.1:

a.

b. AKF: $R(\tau) = E\{\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t + \tau)\}$

$$p\{x(t) = A\} = \frac{1}{2}$$

$$p\{x(t) = 0\} = \frac{1}{2}$$

$$E\{\mathbf{x}(t)\} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}0 = \frac{A}{2}$$

$$E\{\mathbf{x}^2(t)\} = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}0^2 = \frac{A^2}{2}$$

$$\text{Für } \tau = 0 : R(\tau) = E\{\mathbf{x}^2(t)\} = \frac{A^2}{2}$$

$$\text{Für } \tau > T : R(\tau) = E\{\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t + \tau)\} = E^2\{\mathbf{x}(t)\} = \frac{1}{4}A^2$$

Für $0 < \tau < T$ treten vier verschiedene Fälle auf:

$$x(t) = \begin{cases} +A \\ 0 \end{cases} \quad x(t + \tau) = \begin{cases} +A \\ 0 \end{cases}$$

Da nur der Fall $x(t) = +A$ und $x(t + \tau) = +A$ zu einem von 0 verschiedenen Ergebnis führt und

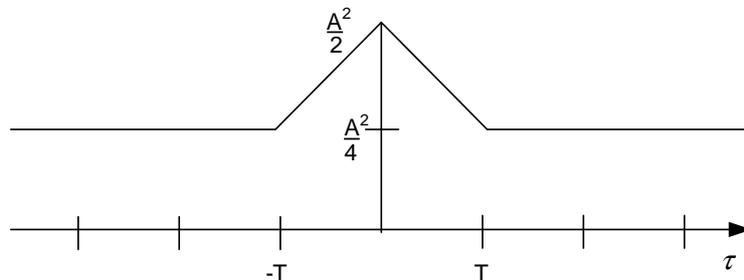
$$p\{x(t) = A, x(t + \tau) = A\} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\tau}{2T}\right)$$

gilt, hat man hier

$$\begin{aligned} R(\tau) &= A \cdot A \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) \\ &= \frac{A^2}{2}\left(1 - \frac{\tau}{2T}\right). \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich somit:

$$R(\tau) = \begin{cases} \frac{A^2}{2} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) & \text{für } 0 \leq \tau \leq T \\ \frac{A^2}{4} & \text{für } \tau > T \end{cases}$$



- c. Die AKF besteht aus einem Gleichanteil $R_1(\tau) = \frac{A^2}{4}$ und einer Dreiecksfunktion $R_2(\tau) = \frac{A^2}{4} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right)$ für $-T \leq \tau \leq T$.

Damit ergibt sich für die spektrale Leistungsdichte (s. Anhang B.3)

$$\begin{aligned} S(\omega) &= R_1(\omega) + R_2(\omega) \\ &= A^2 \left(\frac{\pi}{2} \delta(\omega) + \frac{\sin^2 \omega \frac{T}{2}}{\omega^2 T} \right). \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 8.2:

Eingangsfolge: $a_n : 11100101 \hat{=} x^{-7} + x^{-6} + x^{-5} + x^{-2} + 1$

Polynom: $x^{-7} + x^{-6} + 1$

$$\begin{array}{r} \frac{1 + x^{-2} + x^{-5} + x^{-8} + x^{-9} + \dots}{1 + x^{-2} + x^{-5} + x^{-6} + x^{-7} \mid 1 + x^{-6} + x^{-7}} \\ \underline{1 + x^{-6} + x^{-7}} \\ x^{-2} + x^{-5} \\ \underline{x^{-2} + x^{-8} + x^{-9}} \\ x^{-5} + x^{-8} + x^{-9} \\ \underline{x^{-5} + x^{-11} + x^{-12}} \\ x^{-8} + x^{-9} + x^{-11} + x^{-12} \\ \underline{x^{-8} + x^{-14} + x^{-15}} \\ x^{-9} + x^{-11} + x^{-12} + x^{-14} + x^{-15} \end{array}$$

Sendefolge: $\dots x^{-9} + x^{-8} + x^{-5} + x^{-2} + 1 \hat{=} \dots 1100100101$

Empfangsfolge c_n : 00011100101

Senderegister und Empfangsregister jeweils nach dem

6. Takt: 1001010

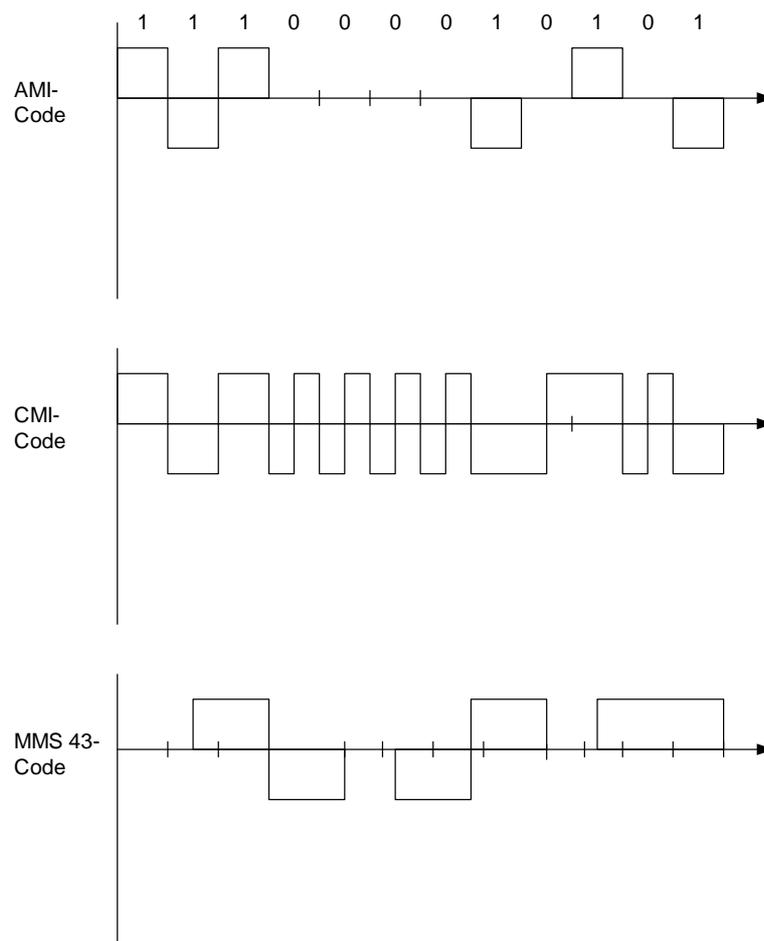
7. Takt: 0100101

8. Takt: 0010010

9. Takt: 1001001

10. Takt: 1100100

Lösung zu Aufgabe 8.3:



Lösung zu Aufgabe 9.1:

- a. Man kann das skizzierte System am besten mit der Erlang-2-Verteilungsfunktion in Bezug auf die Bedienzeiten beschreiben.
- b. Die jeweiligen Bedienraten errechnen sich zu

$$\mu = \frac{1}{\overline{T}_{B1}} = \frac{1}{\overline{T}_{B2}} = \frac{1}{5 \text{ s}}.$$

Dann lautet die Verteilungsfunktion

$$F_{\mathbf{T}_B}(t) = P(\{\mathbf{T}_B \leq t\}) = 1 - e^{-\frac{t}{5 \text{ s}}} \cdot \sum_{i=0}^1 \frac{\left(\frac{t}{5 \text{ s}}\right)^i}{i!} = 1 - e^{-\frac{t}{5 \text{ s}}} \cdot \left(1 + \frac{t}{5 \text{ s}}\right).$$

Der Mittelwert der Bedienzeiten:

$$E\{\mathbf{T}_B\} = \frac{2}{\mu} = 10 \text{ s}.$$

Die Varianz der Bedienzeiten:

$$\sigma_{\mathbf{T}_B}^2 = \frac{2}{\mu^2} = \frac{2}{\left(\frac{1}{5 \text{ s}}\right)^2} = 50 \text{ s}^2,$$

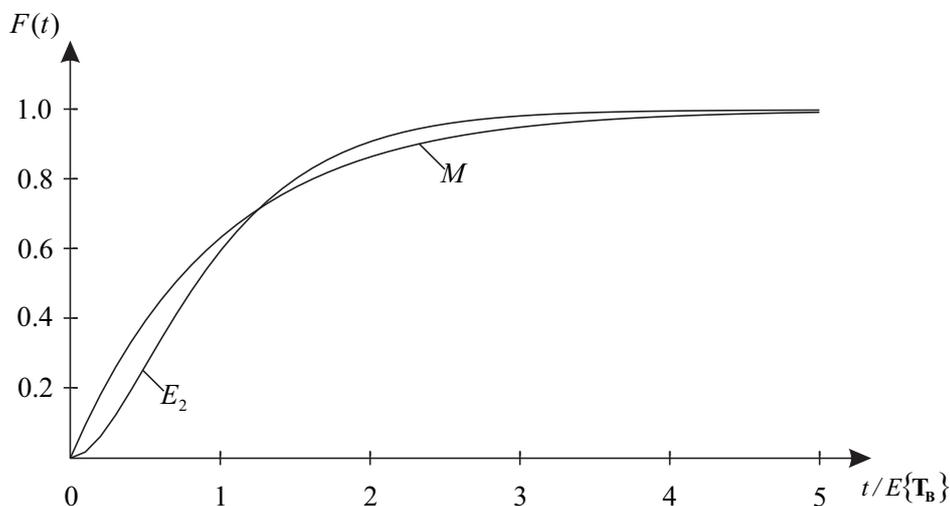
bzw. die Streuung:

$$\sigma_{\mathbf{T}_B} = \sqrt{50 \text{ s}^2} = 7,071 \text{ s}.$$

- c. Die Markoff'sche Verteilungsfunktion mit dem Mittelwert von 10 s lautet

$$F_{\mathbf{T}_B}(t) = 1 - e^{-\frac{t}{10 \text{ s}}}.$$

Die beiden Verteilungsfunktionen sind in dem nachstehenden Diagramm auf-gezeichnet. Dabei steht M für die Markoff'sche Verteilungsfunktion, E_2 für die Erlang-2-Verteilungsfunktion.



Lösung zu Aufgabe 9.2:

Der Mittelwert der Bedienzeiten:

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{T}_B\} &= \frac{1}{\mu} = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i}{\mu_i} = \sum_{i=0}^3 p_i \cdot \bar{T}_{Bi} \\ &= 0,7 \cdot 5s + 0,25 \cdot 20s + 0,05 \cdot 120s \\ &= 14,5s \end{aligned}$$

Die Varianz der Bedienzeiten:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{T}_B}^2 &= 2 \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{p_i}{\mu_i^2} - (E\{\mathbf{T}_B\})^2 \\ &= 2 \cdot (0,7 \cdot (5s)^2 + 0,25 \cdot (20s)^2 + 0,05 \cdot (120s)^2) - (14,5s)^2 \\ &= 1464,75s^2, \end{aligned}$$

bzw. die Streuung der Bedienzeiten:

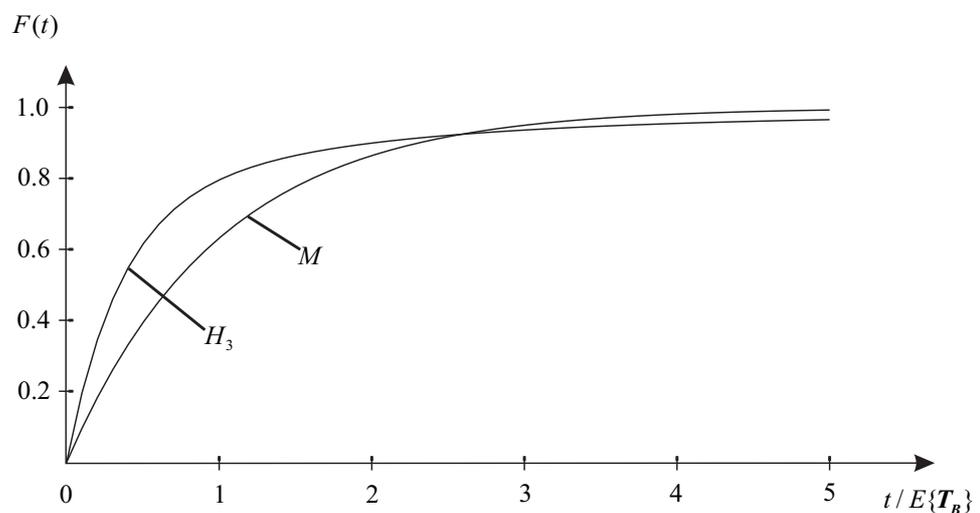
$$\sigma_{\mathbf{T}_B} = \sqrt{1464,75s^2} = 38,27s.$$

Die Hyperexponentielle Verteilungsfunktion 3-ter Ordnung lautet:

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{T}_B}(t) &= 1 - \sum_{i=1}^3 p_i \cdot e^{-\mu_i t} \\ &= 1 - (0,7 \cdot e^{-\frac{t}{5s}} + 0,25 \cdot e^{-\frac{t}{20s}} + 0,05 \cdot e^{-\frac{t}{120s}}). \end{aligned}$$

Die Markoff'sche Verteilungsfunktion mit dem Mittelwert von 14,5s ist

$$F_{\mathbf{T}_B}(t) = 1 - e^{-\frac{t}{14,5s}}.$$



Lösung zu Aufgabe 9.3:

Aus der Aufgabenstellung erhält man die Ankunftsrate

$$\lambda = 0,05/s$$

und die Bedienrate

$$\mu = \frac{1}{10\text{ s}} = 0,1/s.$$

Daraus ergibt sich die Auslastung

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0,5.$$

a. Die mittlere Wartezeit (vgl. Gl. 9.3-24):

$$E\{\mathbf{T}_W\} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{1}{0,05/s} \cdot \frac{(0,5)^2}{1-0,5} = 10\text{ s}.$$

b. Die mittlere Verweildauer:

$$E\{\mathbf{T}_V\} = E\{\mathbf{T}_W\} + \frac{1}{\mu} = 10\text{ s} + 10\text{ s} = 20\text{ s}.$$

c. Die mittlere Warteschlangenlänge:

$$E\{\mathbf{L}\} = E\{\mathbf{T}_W\} \cdot \lambda = 10\text{ s} \cdot 0,05/s = 0,5.$$

d. Die mittlere Anzahl der Anforderungen im System:

$$E\{\mathbf{k}\} = E\{\mathbf{T}_V\} \cdot \lambda = 20\text{ s} \cdot 0,05/s = 1.$$

Lösung zu Aufgabe 9.4:

a. Für die Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit kann man die Engset-Formel verwenden, wobei

$$\beta = 0,05\text{ Erlang}, \quad q = 8, \quad m = 2$$

gegeben sind.

$$p_m = \frac{\beta^m \binom{q}{m}}{\sum_{i=0}^2 \beta^i \binom{q}{i}} = \frac{0,05^2 \cdot \binom{8}{2}}{\sum_{i=0}^2 0,05^i \cdot \binom{8}{i}} = \frac{0,07}{1,47} = 0,04762.$$

- b. Der Durchsatz ist vom Systemzustand abhängig. Es gibt drei Systemzustände $k = 0, 1, 2$. Die Zustandswahrscheinlichkeiten sind

$$p_0 = \frac{1}{1,47}, \quad p_1 = \frac{0,4}{1,47}, \quad p_2 = \frac{0,07}{1,47}.$$

Die Ankunftsrate pro freie Quelle beträgt

$$\lambda = \beta \cdot \mu = \frac{\beta}{T_B}.$$

Die Gesamtankunftsrate in den einzelnen Zuständen $k = 0, 1, 2$:

$$\lambda_0 = 8\lambda, \quad \lambda_1 = 7\lambda, \quad \lambda_2 = 6\lambda.$$

Da nur die Zustände $k = 0$ und $k = 1$ zum Durchsatz beitragen ergibt sich:

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=0}^1 \lambda_i \cdot p_i = \lambda_0 \cdot p_0 + \lambda_1 \cdot p_1. \\ D &= 8 \cdot \frac{0,05}{100s} \cdot \frac{1}{1,47} + 7 \cdot \frac{0,05}{100s} \cdot \frac{0,4}{1,47} \\ &= 0,003673/s. \end{aligned}$$

- c. Die mittlere Anzahl der Anrufe im System:

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{k}\} &= \sum_{j=0}^2 j \cdot p_j = \sum_{j=0}^2 j \cdot \frac{0,05^j \cdot \binom{8}{j}}{\sum_{i=0}^2 0,05^i \cdot \binom{8}{i}} \\ &= \frac{0,05 \cdot \binom{8}{1}}{1,47} + \frac{2 \cdot 0,05^2 \cdot \binom{8}{2}}{1,47} \\ &= \frac{0,4 + 0,14}{1,47} = 0,3673. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 9.5:

- a. Die Aufgabenstellung ergibt:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{0,05/s}{0,5/s} = 0,1, \\ \rho_2 &= \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{0,2/s}{0,4/s} = 0,5, \end{aligned}$$

und aus der Gleichung

$$\sigma_{\mathbf{T}_B}^2 = E\{\mathbf{T}_B^2\} - E\{\mathbf{T}_B\}^2$$

erhalten wir

$$E\{\mathbf{T}_{B1}^2\} = \frac{2}{\mu_1^2} = \frac{2}{0,25} s^2,$$

$$E\{\mathbf{T}_{B2}^2\} = \frac{2}{\mu_2^2} = \frac{2}{0,16} s^2.$$

Die mittlere Wartezeit der Klasse 1:

$$E\{\mathbf{T}_{W1}\} = \frac{\sum_{i=1}^2 \lambda_i \cdot E\{\mathbf{T}_{Bi}^2\}}{2 \cdot 1 \cdot (1 - \rho_1)}$$

$$= \frac{0,05 \cdot \frac{2}{0,25} + 0,2 \cdot \frac{2}{0,16}}{2 \cdot 1 \cdot 0,9} s$$

$$= 1,611 s.$$

Die mittlere Wartezeit der Klasse 2:

$$E\{\mathbf{T}_{W2}\} = \frac{\sum_{i=1}^2 \lambda_i \cdot E\{\mathbf{T}_{Bi}^2\}}{2(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)}$$

$$= \frac{0,05 \cdot \frac{2}{0,25} + 0,2 \cdot \frac{2}{0,16}}{2 \cdot (1 - 0,1) \cdot (1 - 0,1 - 0,5)} s$$

$$= 4,0278 s.$$

b. Die Vorrechnung ergibt:

$$\rho_1 = 0,25,$$

$$\rho_2 = 0,5,$$

$$E\{\mathbf{T}_{B1}^2\} = \frac{2}{0,04} s^2,$$

$$E\{\mathbf{T}_{B2}^2\} = \frac{2}{0,16} s^2.$$

Die mittlere Wartezeit der Klasse 1:

$$E\{\mathbf{T}_{W1}\} = \frac{\sum_{i=1}^2 \lambda_i \cdot E\{\mathbf{T}_{Bi}^2\}}{2 \cdot 1 \cdot (1 - \rho_1)}$$

$$= \frac{0,05 \cdot \frac{2}{0,04} + 0,2 \cdot \frac{2}{0,16}}{2 \cdot 1 \cdot 0,75} s$$

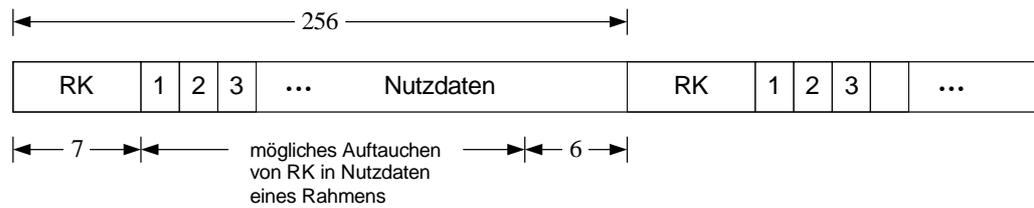
$$= 3,33 s.$$

Die mittlere Wartezeit der Klasse 2:

$$E\{\mathbf{T}_{w2}\} = \frac{0,05 \cdot \frac{2}{0,04} + 0,2 \cdot \frac{2}{0,16}}{2 \cdot 0,75 \cdot 0,25} s$$

$$= 13,33 s.$$

Lösung zu Aufgabe 10.1:



- a. Wir betrachten die Zufallsvariable \mathbf{X}_i , welche das Auftauchen des Musters RK ab Stelle i in den Nutzdaten beschreibt.

$$\mathbf{X}_i \in \{0, 1\} \quad \text{mit} \quad P(\mathbf{X}_i = 1) = 0,6^h \cdot 0,4^{7-h} \quad i \in \{1, 2, \dots, 243\}$$

$$P(\mathbf{X}_i = 0) = 1 - P(\mathbf{X}_i = 1),$$

$$\text{und} \quad E\{\mathbf{X}_i\} = P(\mathbf{X}_i = 1).$$

Die neue Zufallsvariable $\mathbf{n} = \sum_{i=1}^{243} \mathbf{X}_i$ beschreibt die gesuchte Häufigkeit per Konstruktion. Damit ist

$$E\{\mathbf{n}\} = E\left\{\sum_{i=1}^{243} \mathbf{X}_i\right\} = \sum_{i=1}^{243} E\{\mathbf{X}_i\} = \sum_{i=1}^{243} P(\mathbf{X}_i = 1)$$

$$= 243 \cdot 0,6^h \cdot 0,4^{7-h}.$$

Es ergibt sich folgende Tabelle:

h	0	1	2	3	4	5	6	7
$E\{n\}$	0,398	0,597	0,896	1,344	2,016	3,023	4,535	6,802

- b. Betrachtung der Zufallsvariablen Y_i , welche das Auftauchen des Musters RK ab der Stelle i in einem Rahmen und gleichzeitiges Erscheinen eine Rahmenlänge weiter beschreibt:

$$Y_i \in \{0, 1\} \text{ mit } P(Y_i = 1) = (P(X_i = 1))^2 = 0,6^{2h} \cdot 0,4^{2(7-h)}$$

$$P(Y_i = 0) = 1 - P(Y_i = 1),$$

$$\text{mit } i \in \{1, 2, \dots, 243\}$$

$$\text{und } E\{Y_i\} = P(Y_i = 1).$$

Die neue Zufallsvariable $N = \sum_{i=1}^{243} Y_i$ beschreibt die Anzahl des Auftretens von genau einer Rahmenlänge entfernten Rahmenkennungsworte im Nutzstrom pro Rahmen.

Der gesuchte Mittelwert ist somit:

$$E\{N\} = E\left\{\sum_{i=1}^{243} Y_i\right\} = \sum_{i=1}^{243} E\{Y_i\} = 243 \cdot P(Y_i = 1)$$

$$= 243 \cdot 0,6^{2h} \cdot 0,4^{2(7-h)}.$$

Also:

h	0	1	2	3	4	5	6	7
$E\{N\}$	$6,52 \cdot 10^{-4}$	$1,47 \cdot 10^{-3}$	$3,30 \cdot 10^{-3}$	$7,43 \cdot 10^{-3}$	$1,67 \cdot 10^{-2}$	$3,76 \cdot 10^{-2}$	$8,46 \cdot 10^{-2}$	0,190

Lösung zu Aufgabe 10.2:

- a. Das PCM 30 hat eine Rahmenlänge von 256 Bit. Die Genauigkeit von 10^{-6} entspricht 1 in 10^6 , d. h. ein Bitschlupf höchstens in 10^6 Bit.

10^6 Bit entsprechen

$$\frac{10^6 \text{ bit}}{256 \text{ bit/Rahmen}} = 3906,25 \text{ Rahmen.}$$

Bis zu 3906,25 Rahmen wird höchstens ein Schlupf auftreten.

- b. Beim PCM 1920 beträgt die Rahmenlänge 2928 Bit. Es tritt höchstens ein Schlupf bis zu

$$\frac{10^6 \text{ bit}}{2928 \text{ bit/Rahmen}} = 341,53 \text{ Rahmen,}$$

auf.

- c. Das PCM 30 überträgt in einer Minute

$$\frac{256 \text{ bit}}{125 \mu\text{s}} \cdot 60\text{s} = 1,2288 \cdot 10^8 \text{ bit.}$$

Ein Schlupf pro $1,2288 \cdot 10^8$ Bit entspricht

$$\frac{1}{1,2288 \cdot 10^8} = 8,138 \cdot 10^{-9},$$

- d. h. eine Genauigkeit von $8,138 \cdot 10^{-9}$ ist erforderlich.

Lösung zu Aufgabe 10.3:

Die mittlere mögliche Stopfbitrate eines PCM-Systems ergibt sich folgendermaßen. Sei

r_1	Bitrate des betrachteten Systems
s	Anzahl der Stopfbits pro Rahmen und eingebettetem Kanal
g	Gesamtzahl der Bits in einem Rahmen des betrachteten Systems

Dann ist:

$$St_{\text{mögl.}} = r_1 \cdot \frac{s}{g}.$$

Die mittlere tatsächliche Stopfbitrate eines Systems bezüglich seines eingebetteten Systems, ergibt sich wie folgt. Sei

r_1	Bitrate des betrachteten Systems
r_2	Bitrate des eingebetteten Systems
n	Zahl der Nutz- und Stopfbits pro Rahmen und eingebettetem Kanal
g	Gesamtzahl der Bits in einem Rahmen des betrachteten Systems

Dann ist:

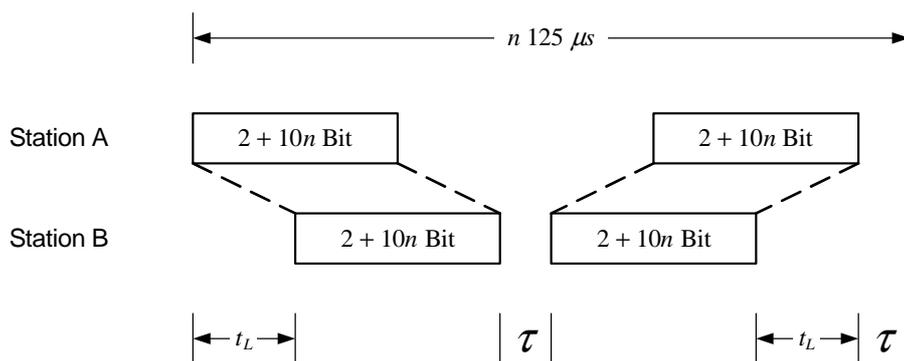
$$St_{\text{ist}} = r_1 \cdot \frac{n}{g} - r_2.$$

Es ergibt sich folgende Tabelle:

PCM	r_1 [kbit/s]	r_2 [kbit/s]	s [bit]	g [bit]	n [bit]	$St_{\text{mögl.}}$ [kbit/s]	St_{ist} [kbit/s]	Quotient
120	8448	2048	1	848	$\frac{200+3 \cdot 208}{4} = 206$	9,9623	4,2264	2,36
480	34368	8448	1	1536	$\frac{372+3 \cdot 380}{4} = 378$	22,3750	9,7500	2,29
1920	139264	34368	1	2928	$\frac{472+5 \cdot 484}{4} = 723$	47,5628	19,9344	2,39
7680	564992	139264	1	2688	$\frac{372+6 \cdot 380}{4} = 663$	210,1905	92,2857	2,28
96	6312	1544	1/4	294	$\frac{6 \cdot 48}{4} = 72$	5,3673	1,7959	2,99

Lösung zu Aufgabe 10.4:

a.



t_L ist die Laufzeit, τ die Schutzzeit.

Man kann aus der obigen Abbildung die folgende Gleichung ablesen

$$n \cdot 125 \mu s = 2 \cdot t_L + 2 \cdot \frac{(2 + 10n) \text{ bit}}{256 \text{ kbit/s}} + 2 \cdot \tau,$$

wobei $t_L = 6 \mu s/km \cdot l$, $\tau = 5 \mu s$.

$$n \cdot 125 = 2 \cdot 6 \cdot l/km + 2 \cdot \frac{2 + 10n}{256} \cdot 10^3 + 2 \cdot 5,$$

$$125n = 12 l/km + 78,125n + 25,625,$$

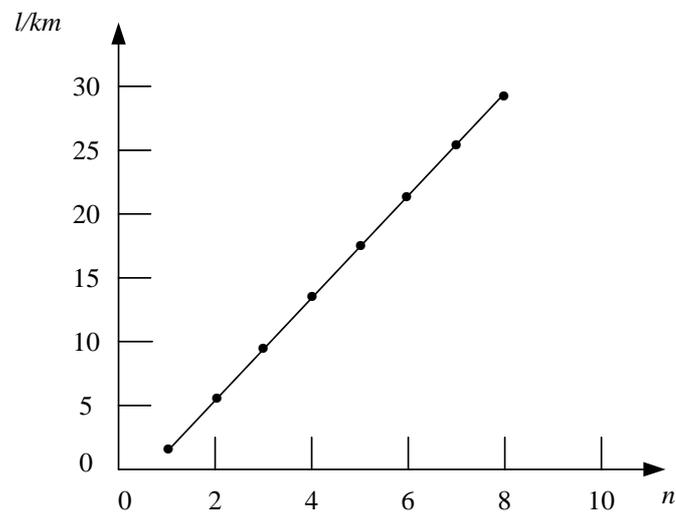
$$46,875n = 12 l/km + 25,625.$$

Man löst die letzte Gleichung nach l/km auf,

$$l/km = \frac{46,875}{12} \cdot n - \frac{25,625}{12}.$$

Es ergibt sich die folgende Wertetabelle:

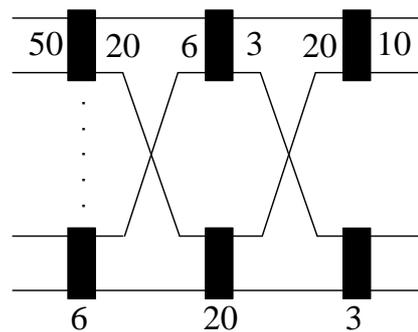
n	1	2	3	4	5	6	7	8
l/km	1,8	5,7	9,6	13,5	17,4	21,3	25,2	29,1



- b. Zu einer Periodendauer von $0,5 \text{ ms}$ gehört $n = 4$. Daraus ergibt sich die maximal überbrückbare Leitungslänge $l = 13,5 \text{ km}$.

Lösung zu Aufgabe 11.1:

a.



b.

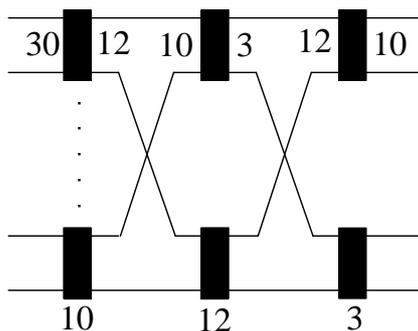
1. Stufe: $(50 \cdot 20) = 1000$ Koppelpunkte je Koppelvielfach

2. Stufe: $(6 \cdot 3) = 18$ Koppelpunkte je Koppelvielfach

3. Stufe: $(20 \cdot 10) = 200$ Koppelpunkte je Koppelvielfach

Insgesamt sind $6 \cdot 1000 + 20 \cdot 18 + 3 \cdot 200 = 6960$ Koppelpunkte erforderlich,
d. h. 46,4 je Basisanschluss.

c.



1. Stufe: $(30 \cdot 12) = 360$ Koppelpunkte je Koppelvielfach

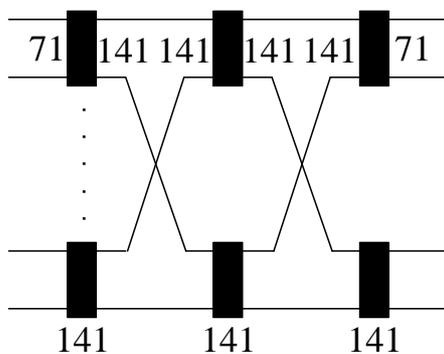
2. Stufe: $(10 \cdot 3) = 30$ Koppelpunkte je Koppelvielfach

3. Stufe: $(12 \cdot 10) = 120$ Koppelpunkte je Koppelvielfach

Insgesamt sind $10 \cdot 360 + 12 \cdot 30 + 3 \cdot 120 = 4320$ Koppelpunkte erforderlich,
d. h. 28,8 je Basisanschluss.

Lösung zu Aufgabe 11.2:

a.



$$i = \sqrt{\frac{n}{2}} = \sqrt{5000} = 70,71 \quad \text{Wahl: } i = 71$$

$$\text{Clos - Bedingung: } K = 2i - 1 \rightarrow k = 141$$

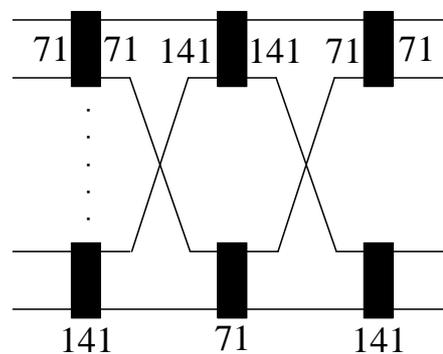
$$i \cdot r \geq 10000 \rightarrow r = 141$$

Koppelpunktzahl:

$$2 \cdot 71 \cdot 141^2 + 141^3 = 5,63 \cdot 10^6$$

Je Teilnehmer müssen somit 563 Koppelpunkte eingesetzt werden. Bei einer einstufigen blockierungsfreien Koppelanordnung sind demgegenüber 5000 Koppelpunkte je Teilnehmer erforderlich.

b. Wir betrachten nun folgendes System:

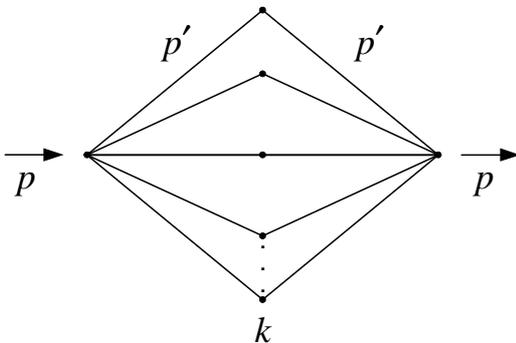


$$i = 71$$

$$k = 71$$

$$r = 141$$

Der zugehörige Verbindungsgraph sieht folgendermaßen aus:



unter der genannten Voraussetzungen gilt

$$p' = p \cdot \frac{i}{k} = 0.7$$

und nach Gl. 11.2-5 gilt für die Blockierungswahrscheinlichkeit

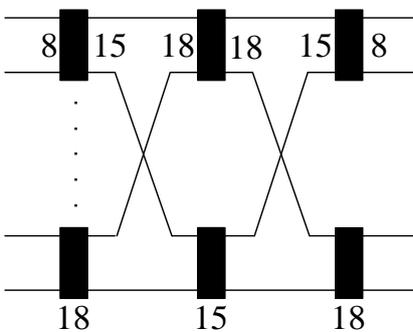
$$B = (1 - (1 - p')^2)^k \approx 1,24 \cdot 10^{-3}$$

Die Anzahl der benötigten Koppelpunkte beträgt nur noch

$$\begin{aligned} 2 \cdot ikr + kr^2 &= 2 \cdot 71 \cdot 71 \cdot 141 + 71 \cdot 141^2 \\ &\approx 2,83 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

bzw. ca. 283 Koppelpunkte/Tln.

- c. Die mittleren Koppelvielfache werden folgendermaßen erweitert (vgl. Abb. 11.2-11c):



$$\frac{r}{m} = \sqrt{\frac{141}{2}} = 8,396$$

$$\rightarrow i' = 8$$

Clos-Bed.: $s = 2 \cdot i' - 1 \rightarrow s = 15$

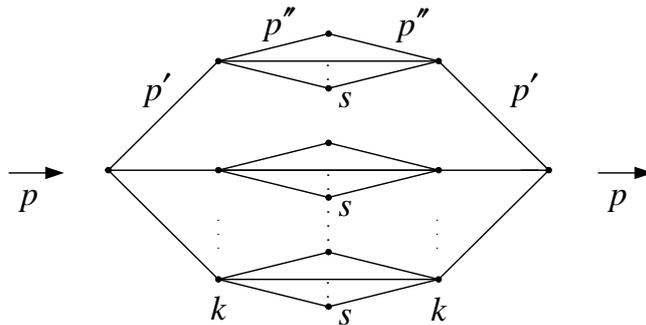
$i' \cdot m \geq 141 \rightarrow m = 18$

d. Koppelpunktzahl:

$$2 \cdot 141^2 \cdot 71 + 141 (2 \cdot 18 \cdot 15 \cdot 8 + 18 \cdot 18 \cdot 15) = 4,12 \cdot 10^6$$

Die Koppelpunktzahl verringert sich gegenüber dem Ergebnis aus a) mit dem Faktor $\frac{4,12}{5,63} = 0,732$.

e.



f. Wahrscheinlichkeit der Nichtbelegung:

$$q' = 1 - p' ; \quad q'' = 1 - p''$$

Blockierungswahrscheinlichkeit der mittleren Koppelanordnung:

$$B' = (1 - q''^2)^s$$

Gesamte Blockierungswahrscheinlichkeit:

$$B = (1 - q'^2(1 - B'))^k$$

$$B = \{1 - (1 - p')^2[1 - (1 - (1 - p'')^2)^s]\}^k$$

g.

$$p' = p \cdot \frac{i}{k} ; \quad p'' = p \cdot \left(\frac{i}{k}\right) \cdot \left(\frac{i'}{s}\right)$$

$$p' = 0,2 \cdot \frac{71}{141} \approx 0,1$$

$$p'' = p' \cdot \frac{8}{15} \approx 0,054$$

$$B = 0 \text{ (Clos - System !)}$$

Lösung zu Aufgabe 12.1:

a.

$$t_{d_0} = \frac{48 \text{ bit}}{64 \text{ kbit/s}} = 0,75 \text{ ms.}$$

b. Da keine Meldung vorliegt, wird die Zyklusdauer mit der Formel

$$t_{c0} = nt_z + nt_p + \sum_{i=1}^n l \cdot i + 2nt_{d_0}$$

ausgerechnet.

Durch Einsetzen der Werte n, t_z, t_p und t_{d_0} in die obige Formel erhalten wir

$$\begin{aligned} t_{c0} &= 15 \times 0,6 \text{ ms} + 15 \times 1,3 \text{ ms} + \sum_{i=1}^{15} 15 \cdot i \cdot \text{km} + 2 \times 15 \times 0,75 \text{ ms} = \\ &= 9 \text{ ms} + 19,5 \text{ ms} + 2 \cdot 10 \frac{\mu\text{s}}{\text{km}} \cdot \sum_{i=1}^{15} 15 \cdot i \cdot \text{km} + 22,5 \text{ ms} = \\ &= 9 \text{ ms} + 19,5 \text{ ms} + 2 \cdot 10 \cdot 15 \frac{15 \times 16}{2} \mu\text{s} + 22,5 \text{ ms} = \\ &= 9 \text{ ms} + 19,5 \text{ ms} + 36 \text{ ms} + 22,5 \text{ ms} = 87 \text{ ms.} \end{aligned}$$

c. Der Durchsatz ist pro Peripheriestation 80 bit/s im Mittel, so fallen pro Zyklus und Station Nutzdaten im Umfang von $80 \text{ bit/s} \cdot t_c$ an.Die Zeit, die für die Übertragung der Nutzdaten bei 64 kbit/s erforderlich ist, wird durch

$$\frac{80 \text{ bit}}{\text{s}} \cdot \frac{t_c \text{ s}}{64 \text{ kbit}} = 1,25 \cdot 10^{-3} t_c$$

erhalten. Aus der Gl. 12.1-2 erhalten wir den Mittelwert

$$E\{t_c\} = t_{c0} + n \cdot 1,25 \cdot 10^{-3} \cdot E\{t_c\}.$$

Wir setzen $n = 15$ und erhalten weiter

$$0,98125 \cdot E\{t_c\} = 87 \text{ ms} \Rightarrow \underline{E\{t_c\} = 88,66 \text{ ms.}}$$

somit wartet eine Meldung im Mittel

$$\frac{1}{2} \cdot E\{t_c\} = 44,33 \text{ ms}$$

an einer Station.

d.

$$t_{n1} = \frac{256 \text{ bit}}{64 \text{ kbit/s}} = 4 \text{ ms.}$$

Also $t_{n1} = t_{n2} = \dots = t_{n15} = 4 \text{ ms}$. Da pro Zyklus und Station stets eine Meldung vorliegt, wird die Zyklusdauer mit der Formel

$$t_c = n \cdot t_z + n \cdot t_p + \sum_{i=1}^n l \cdot i + 2nt_{d_0} + \sum_{i=1}^n t_{ni}$$

ausgerechnet.

Durch Einsetzen der Werte n, t_z, t_p, t_{d_0} und t_n in die obige Formel erhalten wir:

$$\begin{aligned} t_c &= 15 \times 0,6 \text{ ms} + 15 \times 1,3 \text{ ms} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{15} 15 \cdot i \cdot \text{km} + 2 \times 15 \times 0,75 \text{ ms} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{15} 4 \cdot i \text{ ms} \\ &= 9 \text{ ms} + 19,5 \text{ ms} + 2 \cdot 10 \frac{\mu\text{s}}{\text{km}} 15 \cdot i \cdot \text{km} + 22,5 \text{ ms} + \sum_{i=1}^{15} 4 \cdot i \text{ ms} \\ &= 9 \text{ ms} + 19,5 \text{ ms} + 2 \cdot 10 \cdot 15 \frac{15 \times 16}{2} \mu\text{s} + 22,5 \mu\text{s} + 4 \cdot 15 \mu\text{s} \\ &= 9 \text{ ms} + 19,5 \text{ ms} + 36 \text{ ms} + 22,5 \text{ ms} + 60 \text{ ms} \\ &= 147 \text{ ms} \end{aligned}$$

$$\text{Durchsatz} = \frac{\text{Nutzinformation}}{\text{Zyklusdauer}} = \frac{256 \text{ bit}}{0,147 \text{ sec}} = 1741,49 \frac{\text{bit}}{\text{sec}}.$$

e. Je mehr Stationen vorhanden sind, desto größer wird die Zyklusdauer t_c und desto geringer wird der Durchsatz.

Lösung zu Aufgabe 12.2:

a. Ankunftsrate einer freien Quelle: $\beta = \frac{1}{40 \text{ ms}} = 25 \frac{1}{\text{s}}$

Dauer einer Taktperiode: $P_T = \frac{1024 \text{ bit}}{64000 \text{ bit/s}} = 16 \text{ ms}$

Wahrscheinlichkeit, dass eine freie Quelle in einem Taktintervall eine Nachricht generiert:

$$p_f = 1 - e^{-\beta P_T} = 1 - e^{-0,4} \approx 0,33$$

b. Es gilt:

Anzahl der Quellen: $q = 2$

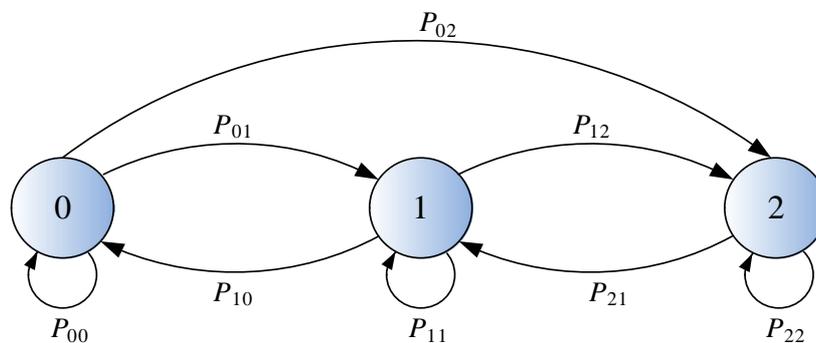
Wahrscheinlichkeit, dass eine freie Quelle eine Nachricht generiert:

$$p_f = \frac{1}{3}$$

Wahrscheinlichkeit, dass eine wartende Quelle eine Nachricht generiert:

$$p_w = \frac{1}{2}$$

Das Zustandsdiagramm lautet:



Die 3 Zustände $k = 0, 1, 2$ beschreiben die Anzahl der wartenden Quellen.

Für die Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{k,k+i}$

$i \in \{-1, 0, 1, 2\}$ erhält man:

Zustand 0: (beide Quellen sind frei)

$$P_{00} = 2p_f(1 - p_f) + (1 - p_f)^2 \quad (\text{eine der zwei Quellen sendet oder keine sendet})$$

$$P_{01} = 0 \quad (\text{nicht möglich})$$

$$P_{02} = p_f^2 \quad (\text{beide Quellen senden})$$

Zustand 1: (eine Quelle ist frei, eine Quelle wartet)

$$P_{10} = (1 - p_f) \cdot p_w \quad (\text{die freie Quelle sendet nicht und die wartende sendet})$$

$$P_{11} = (1 - p_w) \quad (\text{die wartende Quelle sendet nicht, es ist egal ob die freie sendet oder nicht})$$

$$P_{12} = p_f \cdot p_w \quad (\text{die freie und die wartende Quelle senden})$$

Zustand 2: (beide Quellen warten)

$$P_{21} = 2p_w(1 - p_w) \quad (\text{eine der zwei Quellen sendet})$$

$$P_{22} = p_w^2 + (1 - p_w)^2 \quad (\text{beide senden oder beide senden nicht})$$

Die gleichen Ergebnisse erhält man natürlich durch Einsetzen von k und i in die Gl. 12.2-11.

Durch Einsetzen von $p_f = \frac{1}{3}$ und $p_w = \frac{1}{2}$ erhält man :

$$P_{00} = \frac{8}{9} \quad P_{11} = \frac{1}{2}$$

$$P_{01} = 0 \quad P_{12} = \frac{1}{6}$$

$$P_{02} = \frac{1}{9} \quad P_{21} = \frac{1}{2}$$

$$P_{10} = \frac{1}{3} \quad P_{22} = \frac{1}{2}$$

c. Für das System gelten die Zustandsgleichungen

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (\pi_0, \pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \sum_{i=0}^2 \pi_i = 1$$

Durch Einsetzen der Werte aus b) erhält man:

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (\pi_0, \pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

Damit erhält man z. B. folgendes Gleichungssystem

$$\pi_0 = \frac{8}{9}\pi_0 + \frac{1}{3}\pi_1$$

$$\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

Aufgelöst:

$$\pi_2 = \pi_1 = \frac{1}{3}\pi_0$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{5}$$

also:

$$\pi_0 = \frac{3}{5}$$

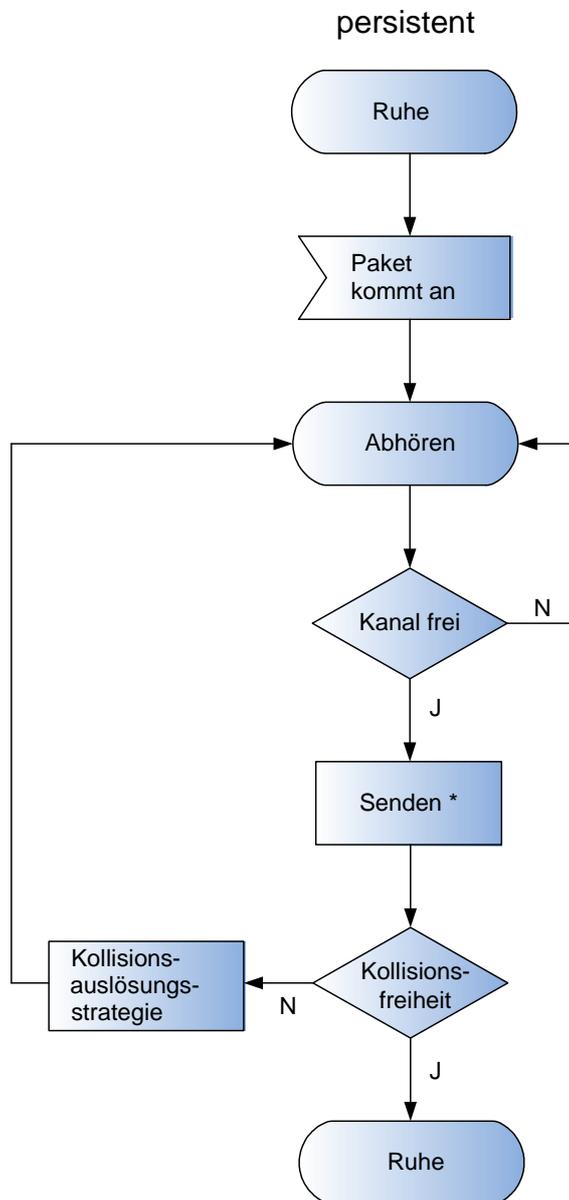
$$\pi_1 = \frac{1}{5}$$

$$\pi_2 = \frac{1}{5}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Quellen warten, beträgt $\pi_2 = 0,2$.

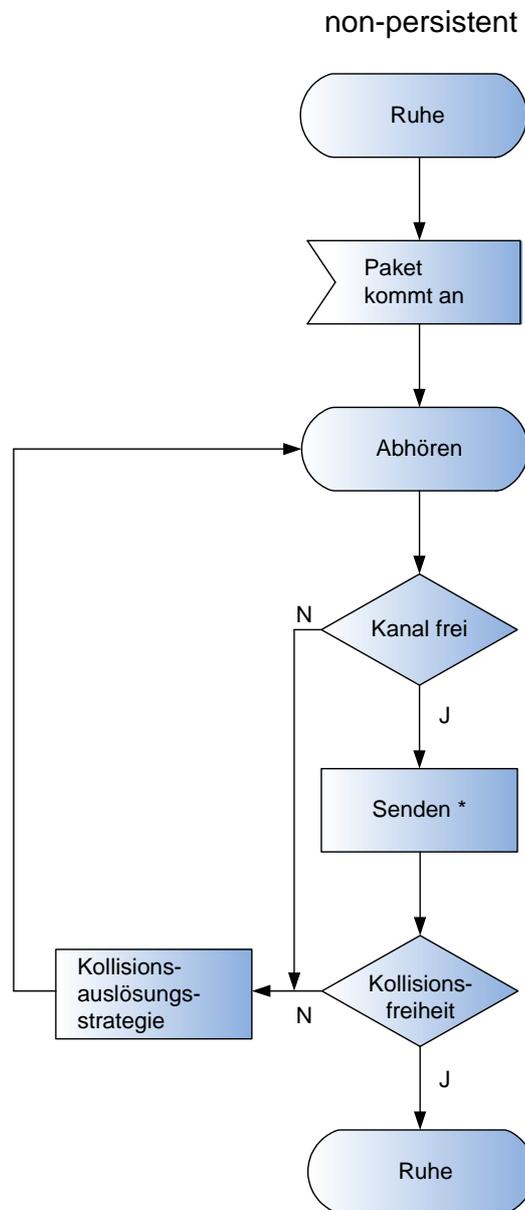
Lösung zu Aufgabe 12.3:

a.



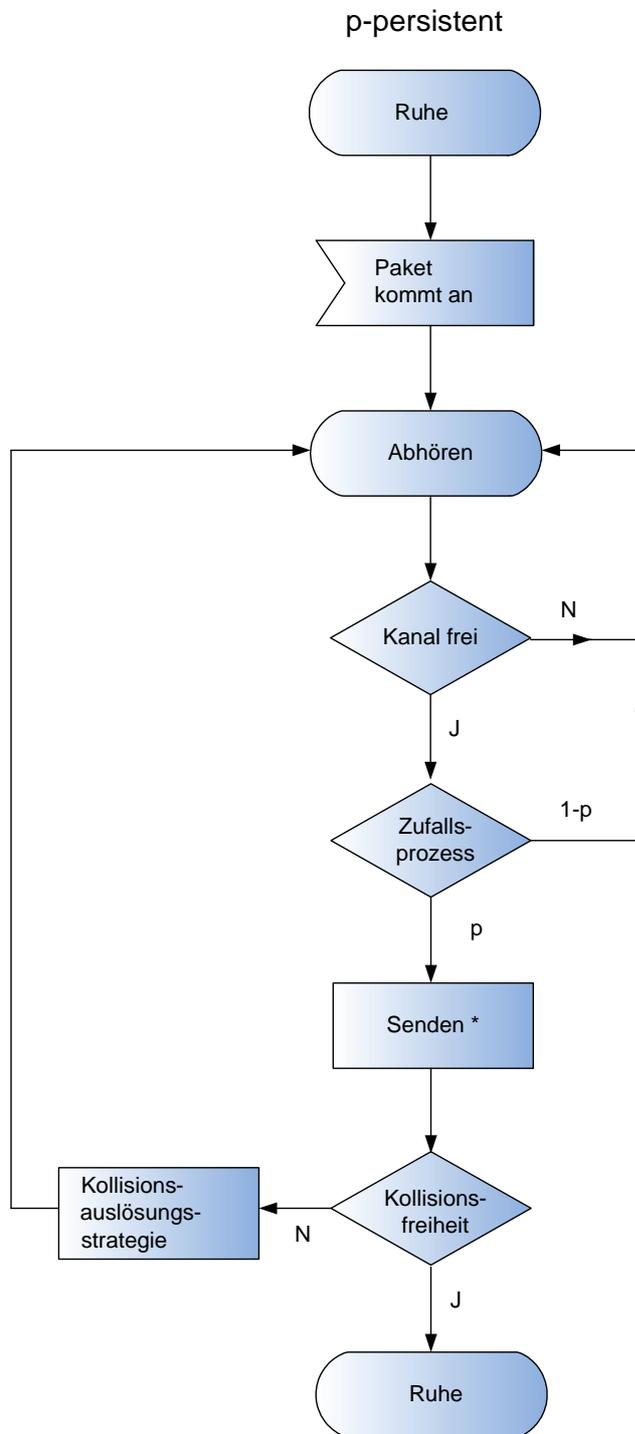
* Beim Anfang der nächsten Taktperiode

b.



* Beim Anfang der nächsten Taktperiode

c.



* Beim Anfang der nächsten Taktperiode

Abkürzungsverzeichnis

3GS	third generation Systems
AC	Authentication Center
ADSL	Asymmetric Digital Subscriber Line
AM	Amplitude Modulation
ANSI	America National Standards Institute
Appli/Com	Application/Communication Interface
ATM	Asynchronous Transfer Mode
ATSC	Advanced Television Systems Committee
BIGFERN	Breitband Integriertes Glasfaser FERNnetz
BIGFON	Breitband Integriertes Glasfaser Fernmelde Ortsnetz
BITKOM	Bundesverband Informationswirtschaft, Telekommunikation und neuen Medien
BNetzA	Die Bundesnetzagentur für Elektrizität, Gas, Telekommunikation, Post und Eisenbahnen, kurz Bundesnetzagentur
BSC	Base Station Controller
BSS	Base Station System
BTS	Base Transceiver Station
CAPI	Common ISDN Application Programmable Interface
CCITT	Comité Consultatif International Télégraphique et Téléphonique
CDM	Code Division Multiplex
CDMA	Code Division Multiple Access
CEPT	Conference Européennes des Administrations des Postes et des Telecommunications
CGI	Common Gateway Interface
CRMA	Cyclic Reservation Multiple Access
CSMA/CD	Carrier Sense Multiple Access with Collision Detection
DAB	Digital Audio Broadcast, ETSI 300401
DBP	Deutsche Bundespost
DEE	Datenendeinrichtung
DIGON	DIGitales OrtsNetz
DIN	Deutsches Institut für Normung e.V.
DNS	Domain Name System
DQDB	Distributed Queue Dual Bus
DSL	Digital Subscriber Line
Du	Datenumsetzer

DÜE	Datenübertragungseinrichtung
DVB	Digital Video Broadcast
EIR	Equipment Identification Register
EITO	European Information Technology Observatory
EMD	Edelmetall-Motor-Drehwähler
ERMES	European Radio Message System
ESMTP	Enhanced Simple Mail Transfer Protocol
ETSI	European Telecommunications Standards Institute
EVST	Endvermittlungsstelle
EWSO	Elektronisches Wählsystem für Ortsverkehr
FDDI	Fiber Distributed Data Interface
FM	Frequency Modulation
FS	Fernschreiber
FSK	Frequency Shift Keying
GEO	Geostationär
GSM	Global System for Mobile Communication oder Groupe Speciale Mobile
HLR	Home Location Register
HSLAN	High Speed LAN
HTML	Hypertext Markup Language
HTTP	Hypertext Transfer Protocol
HVSt	Hauptvermittlungsstelle
IDC	International Data Corporation
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers
IMAP	Internet Message Access Protocol
IP	Internet Protocol
ISDB	Integrated Services Digital Broadcasting
ISDN	Integrated Services Digital Network
ITU-T	International Telecommunication Union Telecommunication Standardisation Sector
KVSt	Knotenvermittlungsstelle
LAN	Local Area Network
LEO	Low Earth Orbit
MAN	Metropolitan Area Network
MAU	Medium Access Unit
MEO	Medium Earth Orbit

MHS	Message Handling System
MMS	Multimedia Messaging Service
MPEG	Moving Picture Experts Group
MS	Mobile Station
MSC	Mobile Switching Center
MTA	Mail Transfer Agent
MUA	Mail User Agent
NCSA	National Center for Supercomputing Applications
NNTP	Network News Transfer Protocol
NStA	Nebenstellenanlage
OSI	Open Systems Interconnection
OVSt	Ortvermittlungsstelle
PAD	Paket Assemblierer und Deassemblierer
PEP	Packet Ensemble Protocol
PCM	Pulse Code Modulation
PDN	Public Data Network
POP 3	Post Office Protocol Version 3
PTSN	Public Switched Telephone Network
QAM	Quadrature Amplitude Modulation
QPSK	Quadrature Phase Shift Keying
QPSX	Queued Packet and Synchronous Exchange
RegTP	Regulierungsbehörde für Telekommunikation und Post
RFC	Request For Comment
RFID	Radio Frequency Identification
RTCP	Real Time Transport Control Protocol
RTP	Real Time Transport Protocol
RTSP	Real Time Streaming Protocol
SMDS	Switched Multimegabit Data Services
S/MIME	Secure/Multipurpose Internet Mail Extensions
SMIL	Synchronized Multimedia Integration Language
SMPP	Short Message Peer-to-Peer Protocol
SMS	Short Message Service
SMTP	Simple Mail Transfer Protocol
SPAM	Spiced Pork And Meat
SS 7	Signalling System No. 7

SNA	Systems Network Architecture
TCP	Transmission Control Protocol
TDM	Time Division Multiplex
TETRA	Trans European Trunked Radio Access
Tln	Teilnehmer
UMTS	Universal Mobile Telecommunication System
URL	Uniform Ressource Locator
USB	Universal Serial Bus
Usenet	Unix User Network
UUCP	Unix-To-Unix Copy Protocol
VLR	Visitor Location Register
VoIP	Voice over IP
VSt	Vermittlungsstelle
WAN	Wide Area Network
WCDMA	Wideband Code Division Multiple Access
WIMAX	Wireless Microwave Access
WLAN	Wireless Local Area Network
WWW	World Wide Web
ZVSt	Zentralvermittlungsstelle

Literaturverzeichnis

Literaturliste zu Kapitel 1

- [AGG90] Aggarwal S., Sabnani K.: Application of formal techniques to the OSI Protocols, Special Issue Computer Networks and ISDN Systems, Vol. 18, Nr. 3, April 1990
- [COM00] Douglas E. Comer.: Internetworking with TCP/IP: Principles, Protocols, and Architectures, 4 edition, Prentice Hall, 2000
- [COM04] Douglas Comer.: Computer Netzwerke und Internets mit Internet-Anwendungen, 3. überarbeitete Auflage, Prentice Hall, 2004
- [FRE98] Freer J.: Computer Communications and Networks, IEEE Press, 1998
- [HAE00] H. Häckelmann, H.J. Petzold, S. Strahringer.: Kommunikationssysteme: Technik und Anwendungen, Springer Verlag, 2000
- [HAL96] Halsall F.: Data Communications, Computer Networks, Open Systems, Addison-Wesley, 4 edition, 1996
- [HEN92] Henshall J, Shaw S.: OSI praxisnah erklärt, Hanser Verlag, 1992
- [JAI90] Jain B.N., Agrawala A.K.: Open Systems Interconnection: Its Architecture and Protocols, Elsevier, 1990
- [KAD01] Firoz Kaderali.: Handbuch Unternehmensnetze: Zukunftssicherer Einsatz und Betrieb heterogener DV- und TK-Netze, Deutscher Wirtschaftsdienst, 2001
- [KAU97] Kauffels F. J.: Moderne Datenkommunikation: Eine strukturierte Einführung, WMI Buch AG 2. Auflage, 1997
- [KER95] Kerner H.: Rechnernetzwerke nach ISO, 3. Auflage, Addison-Wesley, 1995
- [KUR04a] F. Kurose and K. W. Ross. Computer Networking: A Top-Down Approach Featuring the Internet, Addison-Wesley, 3 edition, 2004. Online version <http://occ.awlonline.com/bookbind/pubbooks/kurose-ross1/#>
- [KUR04b] F. Kurose and K. W. Ross.: Computernetze: Ein Top-Down-Ansatz mit Schwerpunkt Internet, Addison-Wesley, 2004
- [MEU90] Meulen H., Schäfer W.: SNA: Systems Network Architecture, Datacom Verlag, 1990
- [MOD91] Modiri N.:The OSI Reference Model Entities, IEEE Network Magazine, Vol. 5, No. 4, p. 24 - 33, July 1991

- [OTF00] Otfried Georg.: Telekommunikationstechnik: Handbuch für Praxis und Lehre, Springer Verlag, 2000
- [PER03] Peterson Larry L., Davie Bruce S.: Computer Networks: A System Approach, 3rd Edition, Morgan Kaufmann, 2003
- [PER04] Peterson Larry L., Davie Bruce S.: Computernetze: eine systemorientierte Einführung, Deutsche Ausgabe der 3. amerikanischen Auflage, Dpunkt Verlag, 2004
- [PIS93] David M. Piscitello, A. Lyman Chapin.: Open Systems Networking: Tcp/Ip and Osi, Addison-Wesley, Professional Computing, 1993
- [SCH87] Schwartz M.: Telecommunication networks, Addison-Wesley Verlag, 1987
- [STA03] William Stallings.: Data & Computer Communication, 7 edition, Prentice Hall, 2003
- [TAN03] Tanenbaum A.S.: Computer-Netzwerke, 4. Auflage, Prentice Hall, 2003
- [WAL02] Walter E. Proebster.: Rechnernetze: Technik, Protokolle, Systeme, Anwendungen, 2 überarbeitete Auflage, Oldenbourg, 2002
- [WET01] Debra Wetteroth. OSI Refernce Model for telecommunications, McGraw-Hill Professional Publishing; 1st edition, 2001

Literaturliste zu Kapitel 2

- [Apo02] Apostolopoulos John G., Wai-tian T., Susie J. Wee: Video Streaming: Concepts, Algorithms, and Systems, HP Laboratories Palo Alto, 2002.
- [Bad94] Badach A: ISDN im Einsatz, Datacom Verlag, 1994.
- [Bla97] Black Uyles: Emerging Communications Technologies, second edition, Prentice Hall, 1997.
- [Boc01] Peter Bocker: ISDN, digitale Netze für Sprachkommunikation, Textkommunikation, Datenkommunikation, Videokommunikation und Multimedialkommunikation, Springer, 2001.
- [Bol94] Bolot J-C: A rate control mechanism for packet video in the Internet, INFOCOM '94. Networking for Global Communications., 13th Proceedings IEEE, vol.3. , p.1216-1223.
- [Con93] Conrads D.: Datenkommunikation, Vieweg Verlag, 1993.
- [Fur99] Furini M., Towsley D.: Realtime Traffic Transmission over the Internet, University of Massachussets, Technical Report, 1999.

- [Har02] Hardy D., Malleus G., Mereur J-N.: Networks - Internet, Telephony, Multimedia - Convergences and complementarities, Translated from the French by Michael Byrne and Michael Horne, De Boeck 2002.
- [Kad01] Firoz Kaderali.: Handbuch Unternehmensnetze: Zukunftssicherer Einsatz und Betrieb heterogener DV- und TK-Netze, Deutscher Wirtschaftsdienst, 2001.
- [Kah92] Kahl P.: ISDN - Das künftige Fernmeldenetz der DBP, Deckers Verlag, 1992.
- [Kan99] Andreas Kanbach, Andreas Körber: ISDN, die Technik, Schnittstellen - Protokolle - Dienste - Endsysteme, 3. neubearbeitete und erweiterte Auflage, Hüthig.
- [Kor03] Korhonen Juha: Introduction to 3G Mobile Communications, second edition, Artech House Boston-London, 2003.
- [Kos97] Koster R., Design of a Multimedia Player with advanced QoS Control, Master of Science, Oregon graduate Institut of Science and Technology, 1997.
- [Kru92] J. Kruse: Zellulärer Mobilfunk, Deckers Verlag, 1992.
- [Kur04a] F. Kurose and K. W. Ross. Computer Networking: A Top-Down Approach Featuring the Internet, Addison-Wesley, 3 edition, 2004. Online version <http://occ.awlonline.com/bookbind/pubbooks/kurose-ross1/#>
- [Kur04b] F. Kurose and K. W. Ross.: Computernetze: Ein Top-Down-Ansatz mit Schwerpunkt Internet, Addison-Wesley, 2004
- [Leo99] Leon-Garcia A., Widjaja I.: Communication Networks: Fundamental Concepts and Key Architectures, McGraw-Hill Professional Publishing, 1999.
- [Mul99] Muller N.J.: IP Convergence: The Next Revolution in Telecommunication, Artech House, Boston-London, 1999.
- [Nel99] Nellis John G., Gilbert Elliot M.: Understanding Modern Telecommunications and the Information Superhighway, Artech House, 1999.
- [Nic98] Nichols K., Jacobson V., Zhang L.: A Two-bit Differentiated Services Architecture for the Internet, Internet Draft 1998.
- [Otf00] Otfried Georg.: Telekommunikationstechnik: Handbuch für Praxis und Lehre, Springer Verlag, 2000.
- [Pla93] Planck K.L., Kaderali F.: Informations- und Kommunikationstechniken. Entwicklungstrends und Nutzungspotentiale, Vieweg Verlag, 1993.
- [RegTP] Jahresbericht 2004 der Regulierungsbehörde für Telekommunikation und Post.

-
- [Ros02] Rosengrant M. A.: Introduction to Telecommunications, Prentice Hall, 2002.
- [Sie02] Gerd Siegmund: Technik der Netze, 5. neubearbeitete und erweiterte Auflage, Hüthig 2002.
- [Sta03] William Stallings.: Data & Computer Communication, 7 edition, Prentice Hall, 2003.
- [TAN03] Tanenbaum A.S.: Computer-Netzwerke, 4. Auflage, Prentice Hall, 2003
- [Zit95] Zitterbart M.: Hochleistungskommunikation, Band 1: Technologie und Netze, Oldenbourg, 1995.

Relevante URLs zu Kapitel 2

- [GLoss] Glossar Netzwerkwelt
<http://www.network-projects.telekom.de/glossar.html>
- [Chr01] Chronik der Telekommunikationstechnik Teil 1
http://earth.prohosting.com/khdit/Tech/TK/TK_Chronik1.html
- [Chr02] Chronik der Telekommunikationstechnik Teil 2
http://earth.prohosting.com/khdit/Tech/TK/TK_Chronik2.html
- [EITO] European Information Technology Observatory
<http://www.eito.com/>
- [IDATE] IDATE Foundation
<http://www.idate.org/>
- [GSM] GSM World
<http://www.gsmworld.com/>
- [Hotspot] HOTSPOT: The Wireless Directory Locations
<http://www.hotspot-locations.com/>
- [IDC] International Data Corporation
<http://www.idc.com/>
- [IETF] The Internet Engineering Task Force
<http://www.ietf.org/>
- [ITU-T] International Telecommunication Union -Telecommunication Standardisation Sector
<http://www.itu.int/home/>
- [OECD] OECD, Telecommunications and Internet Policy
<http://www.oecd.org/>
- [UMTS] UMTS World

<http://www.umtsworld.com>

[W3C] W3C World Wide Web Consortium
<http://www.w3.org/>

Literaturliste zu Kapitel 3

- [Bos03] Bosch K.: Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung mit 82 Beispielen und 73 Übungsaufgaben mit vollständigem Lösungsweg, Vieweg, 2003.
- [Cat86] Cattermole, K.W: Statistical Analysis and Finite Structures, Pentech Press, 1986, Statistische Analyse und Struktur von Informationen, VCH Verlag, 1988.
- [Dav70] Davenport, W. B.: Probability and random processes, Mc-Graw-Hill, 1970.
- [Fel91] Feller, W. : An introduction to probability theory and its application, Vol. I., II., John Wiley, 1970, 1991.
- [Gar90] Gardner, W. A: Introduction to Random Processes: with Applications to Signals and Systems. 2nd ed. McGraw-Hill, 1990.
- [Gra86] Gray, R.; Davisson, L. D: Random processes: A mathematical approach for Engineers, Prentice-Hall, 1986.
- [Hän97] Hänsler, E.: Statistische Signale, Springer Verlag, 1997.
- [Hen04] N.Henze: Stochastik für Einsteiger. Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls, 5. überarb. Aufl., Vieweg, 2004.
- [Jon02] F. Jondral, A. Wiesler: Wahrscheinlichkeitsrechnung und stochastische Prozesse : Grundlagen für Ingenieure und Naturwissenschaftler Stuttgart: Teubner, 2002.
- [Kre00] Krenzel U.: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, 7. überarb. Aufl., Vieweg, 2003.
- [Kro196] Kroschel, K.: Statistische Nachrichtentheorie, Springer Verlag, 1996.
- [Mur90] M. R. Spiegel: Statistik: 2. überarbeitete und erweiterte Aufl., McGraw-Hill Book, 1990.
- [Pap02] A. Papoulis, S. U. Pillai, Probability, Random Variables and Stochastic Processes. McGraw-Hill, 4th ed., 2002.
- [Tho86] Thomas, J. B. Introduction to probability, Springer Verlag, 1986.
- [Tho88] Thomas, J. B. An Introduction to communication Theory and Systems, Springer Verlag, 1988.

Literaturliste zu Kapitel 4

- [Fei58] Feinstein A.: Foundations of information theory, McGraw Hill, New York 1958.
- [Gal71] Gallager R. G.: Information theory and reliable communication, John Wiley, New York 1968/1971.
- [Hei95] Heise W., Quattrocchi P.: Informations- und Codierungstheorie, 3. Aufl., Springer Verlag, 1995.
- [Joh92] Johannesson R.: Informationstheorie - Grundlagen der Tele- (Kommunikation), Addison-Wesley Studentlitteratur, 1992.
- [Kli03] Klimant H., Piotraschka D., Schönfeld D.: Informations- und Codierungstheorie, 2. Aufl., Teubner Verlag, 2003.
- [Küp54] Küpfmüller K.: Die Entropie der deutschen Sprache, FTZ 1954, S. 265.
- [Rai70] Raisbeck G.: Informationstheorie - Eine Einführung für Naturwissenschaftler und Ingenieure, Oldenbourg Verlag, 1970.
- [Roh95] Rohling H.: Einführung in die Informations- und Codierungstheorie, Teubner Verlag, 1995.
- [Sha99] Shannon C.E, Weaver W.: Mathematische Grundlagen der Informationstheorie, Oldenbourg 1976, The Mathematical Theory of Communication, Univ. of Illinois Press, Ill.1949, 1999
- [Sle74] Slepian, D.: Key papers in the development of information theory, IEEE Press, New York 1974.
- [Top74] Topsoe, F.: Informationstheorie, Teubner Verlag 1974.
- [Wer02] Werner M.: Information und Codierung: Grundlagen und Anwendungen, Vieweg Verlag, 2002.

Literaturliste zu Kapitel 5

- [Cou97] Couch L. W.: Digital and analog communication systems, MacMillan Publishing, 5th edition, 1997.
- [Hay01] Haykin, S.: Communication Systems, John Wiley, 4th edition, 2001.
- [Kam02] Kammeyer, K.-D., Kroschel K.: Digitale Signalverarbeitung, Teubner Verlag, 5. Auflage 2002.
- [Lük02] Ohm J.-R., Lücke H. D.: Signalübertragung - Grundlagen der digitalen und analogen Nachrichtenübertragungssysteme, Springer Verlag, 9. Auflage, 2002.

- [Pey87] Peyton Z., Peebles P.Z.: Digital communication systems, Prentice Hall, 1987.
- [Pro00] Proakis, J.G.: Digital communications, McGraw Hill, 4. Auflage, 2000.
- [Pro03] John G. Proakis / Masoud Salehi: Grundlagen der Kommunikationstechnik, 2. Auflage, Pearson Studium, 2003.
- [Rod95] Roden M.S.: Digital and Data Communication Systems, Prentice Hall, 1995.
- [Sin86] Sinnema W., McGovern T.: Digital, Analog and Data Communication, Prentice Hall, 1986.
- [Sk101] Sklar, B.: Digital Communications Fundamentals and Applications, Prentice Hall, 2001.
- [Söd85] Söder G., Tröndle K.: Digitale Übertragungssysteme, Springer Verlag, 1985.
- [Sta03] Stallings W.: Data & Computer Communication, 7th edition, Prentice Hall, 2003.
- [Str82] Stremler F. G.: Introduction to communication systems, Addison-Wesley, 3th edition, 1990.
- [Tau86] Taub H., Schilling D. L.: Principles of communication systems, McGraw Hill, 1986.
- [Woz90] Wozencraft J. M., Jacobs I. M.: Principles of communication engineering, Waveland Press, 1990.

Literaturliste zu Kapitel 6 und 7

- [Abr63] Abramson N. M.: Information theory and coding, McGraw Hill, 1963.
- [Amn74] Ammon U.V, Tröndle K.: Mathematische Grundlagen der Codierung, Oldenburg Verlag, 1974.
- [Bay98] Baylis J.: Error Correcting Codes: A Mathematical Introduction, Boca Raton, FL: CRC Press, 1998.
- [Ber74] Berlekamp E.R.: Key papers in the development of coding theory, IEEE PR VIII, New York, 1974.
- [Ber84] Berlekamp E.R.: Algebraic Coding Theory, Aegean Park Press, 1984.
- [Bla84] Blahut R.E.: Theory and practice of error control codes, Addison Wesley, 1984.
- [Bla90] Blahut R.E.: Digital Transmission of Information, Addison-Wesley, 1990.

-
- [Bos98] Bossert M.: Kanalcodierung, Teubner Verlag, 2. Auflage, 1998.
- [Fan66] Fano R.M.: Transmission of information, John Wiley, New York 1961, Informationsübertragung, Oldenburg Verlag, 1966.
- [Gra86] Grams T.: Codierungsverfahren, BI-Taschenbuch, 1986.
- [Ham80] Hamming R. W.: Coding and Information Theory, Prentice-Hall, 2nd edition, 1986.
- [Hei95] Heise W., Quattrocchi P.: Informations- und Codierungstheorie, 3. Auflage, Springer Verlag, 1995.
- [Lin98] Lint J.H.: Introduction to coding theory, Springer Verlag, 3th edition, 1998.
- [MBS92] K. R. McConnell, D. Bodson, R. Schaphorst, „FAX: Digital Facsimile Technology and Applications“, Artech House, Norwood, 1992
- [Mce02] R. McEliece: The Theory of Information and Coding, Cambridge University Press, second edition, 2002.
- [Mcw81] McWilliams F.J., Sloane N.J.A.: The Theory of Error-Correcting Codes, North Holland, 1981.
- [Sch03] Schulz R.-H.: Codierungstheorie - Eine Einführung, 2. Auflage, Vieweg, 2003.
- [Sha99] Shannon C.E, Weaver W.: Mathematische Grundlagen der Informationstheorie, Oldenbourg 1976, The Mathematical Theory of Communication, Univ. of Illinois Press, Ill.1949, 1999.
- [Slo75] Sloane N.J.A.: A short course on error correcting codes, Springer Verlag, 1975.
- [Swe92] Sweeney P.: Codierung zur Fehlererkennung und Fehlerkorrektur, Hanser Verlag, 1992.
- [Swo73] Swoboda J.: Codierung zur Fehlerkorrektur und Fehlererkennung, Oldenburg Verlag, 1973.
- [Vit78] Viterbi A., Omura I.: Principles of digital communication and coding, McGraw Hill, 1978.
- [Wel84] Welch T.A.: A Technique for High-Performance Data Compression, IEEE Computer, pp. 8-19, June 1984
- [Wer02] Werner M.: Information und Codierung - Grundlagen und Anwendungen, Vieweg, 2002.
- [Wol78] Wolfowitz I.: Coding theorems of information theory, Springer Verlag, 1978.
- [ZL77] Ziv J., Lempel A.: A Universal Algorithm for Data Compression, IEEE Transactions on Information Theory, IT23(3), pp. 337-343, May 1977

- [ZL78] Ziv J., Lempel A.: Compression of Individual Sequences via Variable-Rate Coding, IEEE Transactions on Information Theory, IT24(5), pp. 530-536, September 1978

Literaturliste zu Kapitel 8

- [Blu92] Bluschke A.: Digitale Leitungs- und Aufzeichnungs-codes, VDE Verlag, 1992.
- [Cat83] Cattermole K.W.: Principles of digital line coding, Int. J. Electronics, vol. 55, pp. 3-33, July 1983.
- [Kad01] Kaderali F.: Handbuch Unternehmensnetze: Zukunftssicherer Einsatz und Betrieb heterogener DV- und TK-Netze, Deutscher Wirtschaftsdienst, 2001.
- [Loc97] Lochmann D.: "Digitale Nachrichtentechnik: Signale, Codierung, Übertragungssysteme, Netze" mit Simulationsbeispielen auf Diskette, Verlag Technik, 1997.
- [Noc04] Nocker R.: Digitale Kommunikationssysteme 1: Grundlagen der Basisband-Übertragungstechnik, Vieweg, 2004.
- [Pro01] Proakis, J.G.: Digital Communications, fourth edition, McGraw Hill, 2001.
- [Qur82] Qureshi S.: Adaptive Equalization, IEEE. Communications Magazine, Vol. 20, Issue: 2, Pages: 9-16, Mar 1982.
- [Sk101] Sklar B.: Digital Communications: Fundamentals and Applications, second edition, Prentice Hall PTR, 2001.
- [Soe85] Söder G., Tröndle K.: Digitale Übertragungssysteme, Springer Verlag, 1985.
- [Sta03] William Stallings.: Data & Computer Communication, 7 edition, Prentice Hall, 2003.

Literaturliste zu Kapitel 9

- [Ber92] Bertsekas D., Gallager R.: Data Networks, 2nd Edition, Prentice Hall, 1992
- [Bol89] Bolch G.: Leistungsbewertung von Rechnersystemen, Teubner Verlag, 1989
- [Bos99] Bossert M., Breitbach M.: Digitale Netze, Teubner Verlag, 1999

- [Gri05] Grimm C., Schlüchtermann G.: Verkehrstheorie in IP-Netzen, Hüthig Telekommunikation, 2005
- [Heb87] Hébuterne G.: Traffic Flow in switching Systems, Artech House, 1987
- [Kle76] Kleinrock L.: Queueing Systems, John Wiley, Vol.1 (1975), Vol. 2 (1976)
- [Kle96] Kleinrock L., Gail R.: Queueing Systems - Problems and Solutions, John Wiley & Sons Inc, 1996
- [Kob81] Kobayashi H.: Modeling and Analysis: An introduction to system performance evaluation methodology, Addison-Wesley, 1981
- [Lit61] Little J.D.C.: A proof of the queueing formula $L = \lambda W$, Operations Res., Vol. 9, No. 3, 1961, Pages: 383 - 387
- [Phu06] Phuoc Tran-Gia: Einführung in die Leistungsbewertung und Verkehrstheorie, Oldenbourg, 2006
- [Sch87] Schwartz M.: Telecommunication Networks: Protocols, Modeling and Analysis, Addison-Wesley, 1987
- [Wer05] Werner M., Mildenerger O.: Netze, Protokolle, Schnittstellen und Nachrichtenverkehr Grundlagen und Anwendungen, Vieweg, 2005

Literaturliste zu Kapitel 10

- [Bel00] Bellamy I.C.: Digital Telephony, John Wiley, 3. Auflage 2000.
- [Ehr88] Ehrlich W., Eberspächer K.: Die neue synchrone digitale Hierarchie, NTZ, Band 41 (1988), Heft 10, S. 570 - 574.
- [Fre99] Freeman R. L.: Fundamentals of Telecommunications, Wiley 1999.
- [Göb99] Göbel J.: Kommunikationstechnik - Grundlagen und Anwendungen, Hüthig, 1999.
- [Her04] Herter E., Lörcher W.: Nachrichtentechnik - Übertragung, Vermittlung und Verarbeitung, Hanser Fachbuchverlag, 9. Auflage, 2004.
- [Hol81] Holte N., Stueflotten S.: A new digital echo canceler for two-wire subscriber lines, IEEE Transactions on Communications Vol. Com-29; Nr. 11, November 1981, S. 1553 - 1588.
- [Kad81] Kaderali F., Weston J.D.: Digital subscriber loops, El. Comm. 1.; 1981, S. 71 - 79.
- [Kah87] Kahl P.: Digitale Übertragungstechnik, Decker Verlag, 1987.
- [Lee94] Lee E. A., Messerschmitt D. G.: Digital Communication, first and second editon, 1988 and 1994.

- [Loc97] Lochmann D.: Digitale Nachrichtentechnik - Signale, Codierung, Übertragungssysteme, Netze - mit Simulationsbeispielen auf Diskette, 2. Auflage, 1997.
- [Pee87] Peebles R. Z.: Digital Communications Systems, Prentice Hall, 1987.
- [Win98] Winch R. G.: Telecommunication Transmission Systems, second edition, McGraw-Hill, 1998 .

Literaturliste zu Kapitel 11

- [Ben65] Benes V.: Mathematical theory of connecting networks and traffic, Academic Press, 1965.
- [Bel00] Bellamy I.C.: Digital Telephony, John Wiley, 3. Auflage 2000.
- [Ber86] Bergmann K., Slabon R.W.: Lehrbuch der Fernmeldetechnik, Fachverlag Schiele u. Schön, 1986.
- [Bes83] Besier H., Heuer P., Kettler G.: Digitale Vermittlungstechnik, Oldenbourg Verlag, 1983.
- [Clo53] Clos C.: A study of nonblocking switching networks, BSTI, Vol. 32, No. 2, March 1953, S. 406 - 424.
- [Don90] McDonald J.C.: Fundamentals of digital switching, 2 edition, Springer, 1990.
- [Gab88] Gabler H.: Text- und Datenvermittlungstechnik Bd 1: Leistungsvermittlungstechnik Bd 2 : Paketvermittlungstechnik, Decker's Verlag, 1987/88.
- [Ger02] Gerke P. R.: Digitale Kommunikationsnetze. Prinzipien, Einrichtungen, Systeme, Springer Verlag, 2002.
- [Hän91] Händel R., Huber M. N.: Integrated Broadband Networks, Addison-Wesley, 1991.
- [Her92] Herter E., Lörcher W.: Nachrichtentechnik, Übertragung - Vermittlung - Verarbeitung, Hanser, 1992.
- [Kya96] Kyas O.: ATM - Netzwerke. Aufbau, Funktion, Performance, Datacom-Verlag, 3. Auflage, 1996.
- [Noc05] Nocker R.: Digitale Kommunikationssysteme 2. Grundlagen der Vermittlungstechnik, Vieweg 2005.
- [Pla87] Plank K. L.: Vermittlungstechnik, Decker's Verlag, 1987.
- [Pry95] De Prycker M.: Asynchronous Transfer Mode - Solution for Broadband ISDN, Prentice Hall PTR, 1995.

- [Pry96] De Prycker M.: Asynchron Transfer Mode, deutsche Ausgabe, Prentice Hall, 1996.
- [Sie93] Siegmund G.: Grundlagen der Vermittlungstechnik, R. v. Decker's Verlag, 1993.
- [Sie02] Siegmund G.: Technik der Netze, 5. Auflage, Hüthig 2002.
- [Sie03] Siegmund G.: ATM die Technik - Grundlagen, Netze, Schnittstellen, Protokolle, 4. Auflage, Hüthig 2003.
- [Sta03] Stallings W.: Data & Computer Communication, 7 edition, Prentice Hall, 2003.

Literaturliste zu Kapitel 12

- [CLSW98] Carlo James T., Love Robert D., Siegel Michael S., Wilson Kenneth T.: Token Ring: Protocols and Standards, Artech House, 1998.
- [CON95] Conrads D.: Telekommunikation, Vieweg Verlag, 5. Auflage, 1995.
- [FRE96] Freer J.: Computer Communications and Networks, Plenum Press, 2. Auflage, 1996.
- [GAW04] Garcia Alberto L, Widjaja I.: Communication Networks: Fundamental Concepts and Key Architecture, McGraw-Hill, 2. Auflage, 2004.
- [HAL98] Hallshall Fred: Data Communications, Computer Networks and Open Systems, Addison-Wesley, 4. Auflage, 1998.
- [HAY04] Hayes J.F., Thimma V.J., Ganesh B.: Modeling and Analysis of Telecommunications Networks, Wiley, 2004.
- [HEL02] Held Gilbert: Understanding Data Communications, 7. Auflage, Addison-Wesley, 2002 .
- [PRO01] Proakis John: Digital Communications, McGraw-Hill, 4. Auflage, 2001.
- [PRY95] Prycker M.: ATM: Solution for Broadband ISDN, Prentice Hall PTR, 3. Auflage, 1995.
- [RGB92] Robert G., Bartsekas Dimitri P.: Data Networks, Prentice Hall, 2. Auflage, 1992.
- [SCW97] Schwartz M.: Telecommunication Networks Protocols, Modeling and Analysis, Addison-Wesley, 2. Auflage, 1997.
- [SHA03] Shay William A.: Understanding Data Communications and Networks, Course Technology, 3. Auflage, 2003.
- [SKL01] Sklar, Bernard: Digital Communications: Fundamentals and Applications, Prentice Hall, 2001.

- [STA03] Stallings William: Data and Computer Communications, Prentice Hall, 7. Auflage, 2003.
- [TAN03] Tanenbaum A. S.: Computernetzwerke, Prentice Hall, 4. Auflage, 2003.

Index

Symbole

HDB_3 -Code 284

HDB_n -Codes 284

$M/D/1$ -Wartesystem 344

$M/G/1$ -Wartesystem 340

$M/M/1$ -Verlustsystem 325

$M/M/1$ -Wartesystem 315, 319, 324,
325

$M/M/1$ -w-Verlustsystem 325

$M/M/m$ -Verlustsystem 339

$M/M/m$ -Wartesystem 335, 339

U_{K0} -Schnittstelle 288

μ -Kennlinie 171

$erf()$ 108

r -stufigem Code 270

Äquivokation 138

Übertragungsfunktion 162

äußerer Code 246

1 TR6 32

13-Segment-Approximation 171

15-Segment-Approximation 171

3GS 43

3GS 72

4B3T 287

625-50 Fernsehnorm 69

625-Zeilen-Norm 54

64-QAM 55

7-Bit Codierung 71

8-Stufen-Quantisierung 170

A

A-Kennlinie 171

A-Netz 38

A. Lempel 202

A.H. Reeves 31

A/D-, D/A-Wandlung 267

Abramson-Code 242

Abstand zwischen zwei Codewörtern
212

Abtastfunktion 161

Abtasttheorem 163, 164

Abtastung 31

adaptive Gabel 375

adaptive Entzerrer 295

Adressenpriorität für Kollisionsauflö-
sung 446

ADSL 27, 33, 43, 44, 55, 83

ADSL-Technologie 34

aliasing 165

Aloha-System 439

Alphabet 124, 175

AM 54

AMI-Code 281

AMI-RZ 282

Amplituden- und Frequenzmodulation
47

Ankunftsabstand 300

Ankunftsprozess 300

Ankunftsrate 300

Ankunftswahrscheinlichkeit 326

Anpassungsschicht 431

Anrufabstand 300

Anrufrate 300

ANSI 65

ANSI-Standardisierung 52

Anwenderebene 432

Appli/Com 59

- Appli/Com-Schnittstelle 60
 ARJ 203
 ASCII-Code 176
 ASCII-Codierung 199
 Assembler 37
 asynchrone Zeitmultiplexverfahren 409
 ATM 35, 37, 64
 ATM - Asynchronous Transfer Mode 428
 ATM-Ring 54
 ATM-Schicht 429
 ATM-Zellen 52
 ATSC 55
 Aufrufweiterleitung 433
 Ausdehnungsmaße 158
 Ausgangsalphabet 146
 Ausgangsblockierung 397
 Ausgangsprozess 305
 Auswahl-Meldung 433
 Autokorrelationsfunktion 115, 120, 265
 Axiom 89
 Axiome der Wahrscheinlichkeit 88
- B**
- B-ISDN 52
 B-Kanal 59
 B-Netz 38
 B6ZS-Code 285
 Bündeldurchschaltung 370
 Bündelfunknetzen 37
 Bandbegrenzung 162
 Basis 473
 Basisband 50
 Basisbandübertragung 264
 Basisbandübertragungssystem 290
 Basismatrix 218
 Baud 47
 Baud 49
 Bayes'scher Satz 93
 BCH-Codes 242
 bearer services 56
 Bedieneinheit 303
 Bedienprozess 305
 Bedienzeit 303
 bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung 97
 bedingte Wahrscheinlichkeit 91
 bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte 97
 Benutzerklassen 62
 Bernouilli 107
 Bernoulli'sche Ungleichung 111
 Bernoullische Ungleichung 259
 Betriebsfunk 37
 BIGFERN 35
 BIGFON 35
 Bildtelefonie 35
 binäre Pulsamplitudenmodulation 264
 binärer Code 270
 binärer Hamming-Code 227
 binärer Code 246
 Biphase-L 273
 Biphase-M 274
 Biphase-S 274
 Bit Stealing 366
 Bitfehlerrate 49
 Bitstopfen 360
 Bitsynchronisation 267

- Bittakt 267
Blockcode 214
Blockcodes 181, 208, 245
blockierungsfrei 383
Blockierungswahrscheinlichkeit 326, 402
Body 71, 75
BRD 69
Breitband-ISDN 35
Breitbandkabelmodem 27
Breitbandkanal 55
Bridge 51
Browser 76
BS 43
BSC 41
BSS 41, 42
BTS 41
Burstiness 35
Buskapazität 52
- C**
C 37
C-Netz 38
CAPI 59
Carrier Sense Multiple Access 450
CCITT 35, 65, 428
CCITT-Empfehlungen 32
CD-ROMs 79
CDM 54
CEPT 39
CERN 76
CGI 79
CGI-Skripte 77
charakteristische Funktion 102
Chill 37
Cityruf 37
Clos-Bedingung 398
Clos-Systeme 398
cluster 51
Code-Einbettung 246
Codealphabet 177, 190
Codebäume 179
Codediagramm 251
Codemultiplex 356
Codemultiplextechnik 280
Codepolynom 234
Coderegelverletzung 284
Codeumschaltung 198
Codeverkettungen 245
Codeverletzung 267
Codewörter 175
Codewortlänge 192
Codierer 175
Codierung 31
Codiervorschrift 238
Codiervorschrift für binäre Huffman-Codierung 185
Concatenated Codes 245
conditioned Diphase 275
Constraint length 249
Container 370
contention resolution 444
Controller 51
Convolutional Codes 248
Cox-Verteilung 314
CRC-Prüfung 245
CRMA 54
cross connect 429
CSMA-Verfahren 450

- CSMA/CD 50
 CSMA/CD - Verfahren 450
 CSMA/CR - Verfahren 450
 Cut Through Switching 428
 cycle time 434
- D**
- D-Kanal 57
 D-Netze 39, 41
 D1-Netz 39
 D2-Netz 39
 DÜE 60
 DAB 54
 DAB-Standard 54
 Datagramm 412
 Datagramme 385
 Datenübermittlungsdienste 58
 Datenformate 78
 Datenumsetzer 48
 Datex-L 47–49, 66
 Datex-L-Netz 56
 Datex-P 48, 49
 Datex-P-Netz 56
 DBP-Telekom 49
 Decodierbarkeit 177
 DEE 58
 Delay Modulation 277
 der Satz über die absolute Wahrscheinlichkeit 92
 deterministischen Zugriffsverfahren 439
 dezentralen Zugriffsverfahren 439
 Differential Manchester Code 276
 differentielle Codes 275
 Dimension 474
 DIN A4 70
 Diphase 275
 Direkttrufnetz 49
 Distribution 95
 DNS 75
 Doppel-Bus 52
 DQDB 52, 53, 65
 dreistufige Koppelanordnung 396
 DSL 27
 Dual Ring 52
 dualer Code 220
 Duobinäre Codierung 298
 Duplex 23
 duplex symmetrisch 56
 Durchsatz 326
 Durchschaltevermittlung 384
 DVB 55
 DVB-T 55
- E**
- E-Mail 66, 73
 E-Netze 41
 E-Plus 39, 43
 E1-Netz 39
 Echokompensation 264
 Echokompensationsverfahren 375
 EDS 47
 Effizienz 177, 228, 281
 Einflusstiefe 249
 Eingangsalphabet 147
 Eingangsalphabet 146
 Eingangsblockierung 397
 Eingangswahrscheinlichkeitsverteilungen 148

- elektromagnetische Verträglichkeit 267
- Elementaroperationen 474
- elliptische Bahnen 46
- EMD 47
- Empfehlung X.1 60
- Empfehlungsserien 39
- Endeabstand 305
- Endeprozess 305
- Enderate 305
- Engset-Formel 334
- Entropie 125
- Entzerrer 291
- Entzerrung 264
- Equalizer 291
- Ereignis 88
- Ereignisfeld 88
- Erfolgswahrscheinlichkeit 303
- Ergodizität 122
- Ergodizitätsannahme 323
- Erlang 332
- Erlang'sche Wartewahrscheinlichkeit 338
- Erlang'sche Verlustformel 331
- Erlang-Bernoulli-Formel 334
- Erlang-k Verteilung 312
- ERMES 37
- erste Erlang'sche Formel 331
- erste Nyquist-Bedingung 291
- Erwartungswert 99, 312
- erzeugendes System 473
- ESMTP 74
- Ethernet 27, 50, 241, 454
- ETSI 32, 37, 39
- Euro-ISDN 32
- Eurosignal 37
- EWS-P Technik 49
- EWSO 35
- Expansion 167
- Exponentialfunktion 308
- Externverkehr 407
- F**
- Faksimile 70
- Faltung 161
- Faltungs-Codes 248, 256
- Farbwechsel 201
- FCFS 345
- FDDI 52
- FDDI -II 52
- FDDI-Spezifikation 52
- Fehlerbündel 239
- Fehlerwahrscheinlichkeit 136, 259
- Fernkopieren 70
- Fernschreibnetz 47
- Fernsprechdienst 82
- Fernsprechen 56
- Fernsprechnetze 24
- FIFO 345
- Filetransfer 60
- Flag 410
- Fourierintegrale 462
- Fouriertransformation 462
- Fouriertransformation 157
- Fouriertransformationspaar 103
- Fouriertransformierte 161
- Frame Relay 65
- Frame Switching 428
- Frequenzökonomie 54

- Frequenzgabel 372
 Frequenzgetrenntlageverfahren 372
 Frequenzmodulation 54, 264
 Frequenzmultiplex 353
 Frequenzumtastung 38
 Frequenzverschiebung 463
 Fundamentalsatz der Quellencodierung 192
 Funketikett 45
 Funkrufdienste 37
 Funktion 98
 Funkzonenwechsel 42
- G**
- Gateway 51
 Geburts- und Sterbeprozesse 328
 gedächtnisloser Kanal 133
 gedächtnisloser Kanal 151
 gedächtnisloser Prozess 307
 gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte 104, 115
 gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung 103, 115
 gemeinsame Stationarität 119
 Generatormatrix 218
 Generatormatrix 234
 Generatorpolynom 234
 GEO 45–47
 GEO-Satelliten 46
 geometrische Reihe 318
 Geostationäre Satelliten 45
 Gesetz von Little 322
 Gesetz von Little 323
 getaktete Aloha System 441
 Gewichtung 462
- GIF 206
 GIF87a 206
 GIF89a 206
 Glasfasertechnik 52
 gleichstromfrei 266
 gleichverteilte Wiederholung zur Kollisionsauflösung 444
 globale Netze 51
 Globalstar 46
 google 79
 Grenzfrequenz 164
 Grenzkreisfrequenz 161
 Großbritannien 69
 Grundfunktion 96, 461
 Gruppe I Geräte 70
 Gruppe II Geräte 70
 GSM 24, 39, 71, 72
 GSM 1800 Standard 39
 GSM 900 Standard 39
 GSM-Netz 41
 GSM-Netzes 40
 GSM-Spezifikationen 41
 GSM-Standard 39
- H**
- höhere Schichten 432
 Halbduplex 23
 half banded AMI 282
 Half rate Codecs 41
 Hamming-Code 207, 231, 242, 246
 Hamming-Distanz 207, 212, 222, 242
 Hamming-Gewicht 222
 Handover 41, 42, 46
 Hardcopy 70
 Hauptsatz der Datenverarbeitung 148

- Hauptverkehrsstunde 300
HDTV 25
Header 71, 75
HLR 42
Horizontal Mode 202
Hotspots 44
HSLANs 52
HTML 77
HTTP 77, 79
HTTP-Protokoll 77
Hub Polling 433
Huffman Code 70
Huffman-Algorithmus 174, 190
Huffman-Code 188, 189
Huffman-Codierung 189
Hybrid Ring Control-Verfahrens 52
hybride Vermittlungsverfahren 425
hyperexponentielle Wahrscheinlichkeitsverteilung 312
Hyperlink 77
Hypermedia 78
Hypertext 76
- I**
I.233 65
IA NR. 2 CCITT 199
IBM 63
IBM (SNA) 24
idealer Code 177
idealer Tiefpass 292
IEEE 802.11-Familie 43
IEEE 802.6 52
IEEE802 64
IMAGE DESCRIPTOR 206
Immarsat 45
IMPS 74
Impulsantwort 162
Information 124
Informationsübertragungsrate 257, 269
Informationsgehalt 124
Inhouse Netze 24
innerer Code 246
Internetdienste 56
Internverkehr 407
IPv4 74, 83
Iridium 46
irrelevante Information 128
Irrelevanz 138
ISBN-Code 176
ISDB 55
ISDN 24, 32, 48, 56, 242, 266, 288
ISDN-Adapterkarten 59
Itelsat 45
ITU 56
ITU-T 60
ITU-T Empfehlung G.711 171
ITU-T Empfehlungen 60
ITU-T empfohlene Polynome 267
ITU-T-Empfehlung T.2 70
ITU-T-Empfehlung T.3 70
ITU-T-Empfehlung X.400 73
- J**
J. Ziv 202
Java Skript 78
Jitter 83
- K**
Kabelmodems 55

- Kanal mit einem Gedächtnis k -ter Ordnung 133
 Kanalcodierung 175
 Kanalcodierungssatz 256, 257, 261
 Kanalkapazität 148
 kanonische Form der Basismatrix 237
 kanonische Form der Prüfmatrix 225
 Kaskadierung von zwei Kanälen 148
 Kendall'sche Notation 315
 Kennzeichenübertragung 362
 Kinchin 344
 Koeffizientenmatrix des Faltungscodes 249
 Kollisionsauflösungs-Strategien 444
 Kommacodes 181
 kompakt 177
 Komplexität einer Koppelanordnung 393
 Kompression 167
 Kompressionsverfahren 54, 59
 konjugierte Durchschaltung 406
 konstante Wahrscheinlichkeitsverteilung 311
 Kontrollebene 432
 Kontrollmatrix 220
 Kontrollpolynom 236
 Konzentrator 395
 Koppelanordnungen 379
 Koppelmatrix 381
 Koppelpunkte 379
 Koppelreihe 379
 Koppelvielfach 381
 Korrekturfähigkeit 214
 Korrelations-Codierung 297
 Korrelationskoeffizient 106
 Kraft-McMillan 174, 182
 Kraft-McMillan-Ungleichung 183
 Kreuzkorrelationsfunktion 115
 Kreuzkorrelationsfunktion 119
 Kreuzleistungsdichtespektrum 120
 Kurzwellenbereich 54
- L**
- LAN 24, 36, 50
 Langwellenbereich 54
 Langzeitverzögerung 46
 laufende digitale Summe 267
 Lauflängencodierung 199
 Laufzeitverzögerungen 83
 LCFS 345
 Lee Graph 400
 Leistungsdichtespektrum 120, 275
 Leitungscodes 264
 Leitungscodierung 264
 Lempel-Ziv 77 202
 Lempel-Ziv 78 204
 Lempel-Ziv-Welch 206
 LEO 46
 LEO-Satelliten 46
 LHarc 203
 LIFO 345
 linear unabhängig 473
 linear unabhängig 104
 linearer Code 218
 linearer Mittelwert 99
 linearer Zeitmittelwert 117
 linearer Code 218
 linearer Mittelwert 112
 Linearität 462
 Linearkombination 473

- Lizenzfreien Frequenzbereichen 44
LOCAL COLOR MAP 206
logarithmische Kennlinie 171
logarithmische Kompondierungskennlinie 171
Look-Ahead Buffer 202
LZW 204
- M**
- Mailbox 73, 74
Mailboxdienste 73
MAN 52
Manchester Code 274
Mannesmann Mobilfunk 39
MANs 54
Markoff-Eigenschaft 312
Markoff-Prozess 307, 308, 310
Markoff-Quelle 127
Markoff-Quelle 1. Ordnung 128, 197
Markoff-Quelle k-ter Ordnung 127
MAU 51
maximale Wortlänge 175
maximale Entropie 126
Maximum-Likelihood-Verfahren 136, 253, 256
Mehrstufige Codes 269
mehrstufige Koppelanordnung 397
Menge der Ausgänge 87
MEO 47
MEO-Bahnen 46
message switching 408
Message Switching 385
MHS 73
Mikroelektronik 52, 256
Mikrorechner 35
Miller + CMI Codes 277
Minimalpolynome 243
Mittelwellenbereich 54
mittlere Wortlänge 177
mittlere Codewortlänge 193
MMS 73
MMS43 287
Mobilfunknetz 38
Mobilstationen 41
Mobilvermittlungsstelle 43
modifizierte Huffman-Codierung 199
modifizierte duobinäre Codierung 298
modifizierte modifizierte Read-Codierung 202
modifizierte Read-Codierung 201
modifizierter Miller-Code 278
Modulation 264
Modulatoren-Demulatoren 58
Morse-Code 176
MPEG 1 Audio Layer 2 54
MS 42
MSC 41–43
MTA 74
MUA 74, 75
Multiplexbildung 351
Multiprozessor-Vermittlungssystem SL 10 49
Musterfunktionen 112
- N**
- n-te Kanalerweiterung 153
n-te Erweiterung eines Kanals 151
Nachrichtenkanal 133
Nachrichtentechnik 163
NCSA 76

- Nebenstellenanlagen 30
 negativ-exponentielle Wahrscheinlichkeitsverteilung 305
 Netzlaufzeit 49
 Newsarticles 80
 Newsgroups 79
 NF-Bandbreite 54
 nichtgleichmäßige Quantisierungskennlinie 170
 nichtverdrängender Priorität 345
 Niederfrequenz (NF) 29
 NNTP 80
 non-persistent CSMA 450
 Northern Telecom 49
 NRZ-Codes 270
 NRZ-L 270
 NRZ-M 271
 NRZ-S 271
- O**
- o2 43
 optimal 177
 optimale Verständlichkeit 171
 Optimum 193
 orthogonal 106
 orthogonale Zufallsprozesse 117
 orthogonaler Vektorraum 474
 OSI 58
 OSI-Schichten 59
 Oszillator 267
- P**
- p-persistent CSMA 450
 PAD 63
 Paging 37
 Paketvermittlung 385
 Paritätsprüfung 210, 216
 Parseval'sche Gleichung 464
 Parsevalsche Gleichung 158, 159
 partial response Coding 297
 Path Overhead 370
 PCM 31, 171
 PCM 1920 365
 PCM 30 282
 PCM 120 363
 PCM 24 282, 366
 PCM 30 335, 362
 PCM 30 D 47
 PCM 4032 368
 PCM 480 365
 PCM 672 368
 PCM 7680 365
 PCM 96 367
 PCM-Codierung 31
 PCM-Systeme 276
 PCM-Zeitmultiplex 29
 persistent CSMA 450
 PGP 74
 Phasenmodulation 38
 Ping-Pong Technik 372
 Ping-Pong-Verfahren 282
 PKZip 203
 plesiochrone Signale 359
 plesiochronen Verkehr 53
 PLL 267
 Pointertechnik 370
 Poisson-Verteilung 310
 Pollaczek 344
 Pollaczek-Kinchin-Gleichungen 344
 Polling 433

POP3 74
Präfix-Codes 174
Präfix-Eigenschaft 181
Präfixcode 185, 193
Präfixcodes 181
Prüfpolynom 239
Prüfvorschrift 238
Prioritätsorganisation 345
Private Netze 30
pseudoternärer Code 281
PST-Codex 286
Pulsamplitudenmodulation 264
Pulsdauermodulation 264
Punkt-zu-Mehrpunkt-Wahl 407
Punkt-zu-Punkt-Wahl 407
pure Aloha 439
Push-Protokoll 74

Q
Q.922 65
Q.933 65
QAM 55
QPSK 55
QPSX 52
quadratischer Mittelwert 99, 113
quadratischer Zeitmittelwert 117
Quantisierung 31, 167
Quantisierungsfehler 167
Quantisierungsintervalle 167
Quantisierungskennlinie 169
Quantisierungswert 167
Quasi-Standard-Protokollen 50
Quelle 124
Quellencodierung 175
Quellencodierungssatz 193

R
Rückschlussentropie 138, 140
Radiowellen 45
Rahmenkennungswort 358
Rahmensynchronisation 358
random access 439
Random Queue 345
RASTER DATA 206
Raumkoppelfeld 387
rauschfreier Kanal 140
Receive Not Ready 433
Receive Ready 433
Redundanz 129
Redundanz einer Quelle 126
Reed-Solomon-Code 246
RegTP 30
relevante Information 128
Repeater 51
Reservierungsstrategien 53
RFC 80
RFID 45
RFID-Systeme 45
RFID-Technologie 45
Richtungstrennungsverfahren 372
Roaming 41, 42
Roll-Off Faktor 292
Roll-Off-Faktor r 164
RSB-AM-PM 70
RTCP 83
RTP 83
Ruhephase 384
running digital sum 267
RZ-Code 271
RZ-Signal 281

- S**
- S-Schnittstelle 282
 - S/MIME 74
 - Satz von Kraft-McMillan 182
 - Scall 37
 - Scharmittelwerte 117
 - Scheduling 54
 - Schieberegister 249, 267
 - Schlupf 359
 - Schmalbandkanal 55
 - schnelle Durchschaltvermittlung 424
 - schnelle Paketvermittlungsnetze
 - Fast Packet Switching Networks 427
 - Schriftzeichen 70
 - Schritten 49
 - Schrittgeschwindigkeit 47
 - schrittweise Durchschaltung 406
 - schwach stationär 119
 - schwach wachsende Funktion 461
 - schwaches Gesetz der großen Zahlen 259
 - Schwarzsche Ungleichung 158
 - scrambling 267
 - Search Engines 79
 - Search Buffer 202
 - SEL 35
 - Selection 433
 - Semantik 124
 - Sendungsvermittlung 385, 408
 - Sequential Polling 433
 - sequentieller Sendeaufruf 433
 - Shannons 1. Satz 192
 - sicheres Ereignis 88
 - Siemens 47, 49, 63
 - Signal-zu-Rausch-Verhältnis 264
 - Signalanpassung 264
 - Signale 157
 - Signalenergie 158
 - Signalisiersystem Nr. 7 42
 - Signalisierungskanal 32
 - Signalregeneratoren 264
 - Silben- bzw. Satzverständlichkeit 165
 - simplex 56
 - Simplex 23
 - Slots 52
 - slotted Aloha 441
 - slotted Aloha System mit einer endlichen Anzahl q von Quellen 444
 - SMDS 65
 - SMIL 73
 - SMPP 72
 - SMS 38, 56, 71, 72
 - SMS Interworking Unit 72
 - SMTP 73, 74
 - SNA 50
 - Spaltungsalgorithmen für die Kollisionauflösung 447
 - SPAM 73
 - Speichervermittlung 385, 408
 - Spektrum 157
 - Spektrumeffizienz 39
 - splitting algorithms 447
 - Sprachmailbox 82
 - spread spectrum frequency hopping 356
 - Sputnik I 45
 - SS 7 57

- Standard 50
- Start-Stop-Betrieb 47, 271
- stationäre Quelle 127
- stationäre Zufallsprozesse 121
- stationäre, gedächtnislose Quelle 175
- stationärer Prozess 317
- statistisch unabhängig 104
- statistisch unabhängig 91, 117
- statistische Zeitmultiplexverfahren
409
- STM-1 369
- stochastischen Zugriffsverfahren 439
- stochastischer Prozess 112
- streng stationär 119
- Streuentropy 138
- Streuung 100
- Strichcode 176
- Strichcodes 45
- Symbolentropy 175
- Symbolentropy 125
- Symbolinterferenz 264, 292
- Symbolsynchronisation 267
- Symbolwahrscheinlichkeit 175
- Symmetrie 462
- symmetrischer Kanal 135
- synchrone Multiplexhierarchie 368
- synchrone Signale 359
- Synchronisationsinformation 181
- Syndrom 221, 230
- Synentropy 129
- Syntax 124
- System 12 35
- System mit nichtverdrängender Priorität 346
- System mit verdrängender Priorität
349
- systematischer Code 225
- T**
- T-Mobile 39, 43
- T.611 60
- Tag 45
- Taktgehalt 287
- TCP/IP 50
- Telebox 73
- Teledienste 56
- Telefax 56, 70
- Telefax 66
- teleservices 56
- Teletex 48, 49, 66
- Teletext 68
- Telex 48, 49
- ternäre Pulsamplitudenmodulation
264
- TETRA 37
- Tiefpass 162
- token access 439, 455
- Token Bus 27, 459
- Token Ring 27, 459
- Tonrundfunkprogramme 54
- Top-Hat-Code 280
- total gestörten Kanal 146
- Trägerfrequenz (TF) 29
- Transinformation 138, 139, 147, 152
- Transitverkehr 407
- Transparenz eines Codes 269
- Transportdienste 56
- Transversalfilter 295
- Trellis-Diagramm 252, 253

- Tschebyscheff 107
Tschebyscheff'sche Ungleichung 108
- U**
- UDP 83
UdSSR 45
UKW 165
UKW-Bereich 54
Umbrella-Zellen 43
Umordnung der Belegung 406
UMTS 43, 72
unendliche Reihe 318
ungestörter Kanal 142
Ungleichung von Kraft-McMillan 181
UNIX compress 206
unkorrelierte Zufallsprozesse 117
unmögliches Ereignis 88
Unschärfebeziehung 158
URL 76
USA 80
USB-Adaptoren 43
Usenet 80
UUCP 80
- V**
- Varianz 99, 107, 113, 312
VBN 35
verallgemeinerte Funktion 95
verallgemeinerte Funktion 461
Verbindungsabbauphase 384
Verbindungsaufbauphase 384
Verbindungsaufbauzeit 49
Verbindungsgraph 400
Verbindungsphase 384
Verbundentropie 138
Verbundentropie 139
verdrängender Priorität 345
verkürzter Hamming-Code 229
Verkehr 331
Verkehrsangebot 331
Verkehrsaufkommen 300
Verkehrsexpansion 397
Verkehrskonzentration 397
Verkehrsrest 332
verlustfreier Kanal 142
Verlustsystem 303, 329
Verlustsysteme mit endlicher Quellen-
zahl 333
Verlustwahrscheinlichkeit 303, 326
Vertical Mode 202
Verwürfelung 267
Verweilzeit 303
Videokonferenzdienst 35
Videotext 68
Virtual Channel Identifier 429
Virtual Path Identifier 429
virtuelle Verbindung 385
virtuelle Verbindungen 412
virtueller Container 370
Viterbi-Algorithmus 254
VLR 42
Vodafone 39, 43
Voicemail 82
VoIP 83
- W**
- Wörterbuch 202
Wörterbuch basierte Verfahren 202
Wahrscheinlichkeit 88

- Wahrscheinlichkeitsdichte 95, 112, 306
- Wahrscheinlichkeitslehre 87
- Wahrscheinlichkeitsverteilung 94, 112, 305
- Wal 2 280
- Walsh 2 280
- WAN 36, 51
- Warteplatz 303
- Warteschlange 303
- Wartesystem 303
- Wartezeit 303
- WCDMA 43
- Wechselstromtelegrafie 47
- Wegesuchverfahren 405
- Wellenausbreitungsgeschwindigkeit 47
- Wellenlängenmultiplex 354
- Wiederholung
 direkt 208
 indirekt 208
- Wiederholung mit einer festen Wahrscheinlichkeit zur Kollisionsauflösung 444
- WIMAX 44, 45
- WIMAX-Geräte 45
- Winkelgeschwindigkeit 45
- WLAN 24, 27
- WLANs 27, 44
- World Wide Web 76
- Wortsynchronisation 358
- WWW-Server 77
- X**
- X.25 50, 65, 242
- X.25-Netze 24
- X.400 60, 73
- X.400 Protokoll 74
- X.400 Netzen 73
- XML 73
- Z**
- Z-R-Koppelanordnung 391
- Z-R-Z-Koppelanordnung 392
- Zeichengeschwindigkeit 47
- Zeitgabel 372
- Zeitgetrenntlageverfahren 372
- Zeitkoppelfeld 389
- Zeitmittelwerte 117
- Zeitmultiplexverfahren 354
- Zeitverschiebung 463
- Zellen 35
- Zellenstruktur 43
- Zellulare Netze 38
- zero substitution codes 284
- Zip 203
- Zufallscodierung 257
- Zufallsexperiment 87
- Zufallsprozess 112
- Zufallsvariable 94
- Zustandsabhängige Codierung 198
- Zustandsdarstellung 253
- Zustandsprozess 305
- ZVEI 282
- Zweidraht-Vierdraht-Umwandlung 372
- zweistufige Koppelanordnungen 395
- zweite Erlang'sche Formel 338
- zweite Nyquist -Bedingung 295
- Zwischenleitungsblockierung 397
- zyklische Verschiebung 233

zyklischer Hamming-Code 241

Zykluszeit 434

zyklischer Code 233, 235