Sur L'Expression Du Produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1)$ Par Une Fonction Entière

Par M. J. Hadamard

On sait former une fonction entière qui, pour une suite donnée de valeurs (isolées)

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, \tag{1}$$

attribuées à la varaible, prenne des valeurs également données $b_1, b_2, .., b_n, \ldots$

On doit, à cet effet, partir d'une fonction $\varphi(x)$ admettant les a pour zéros et la multiplier par une autre $\psi(x)$ qui présente, en ces mêmes points, des pôles avec les valeurs correspondantes de $\frac{b_n}{\varphi' a_n}$ pour résidus.

Si la suite (1) n'est autre que la suite naturelle des nombres, on peut prendre

$$\varphi(x) = \Gamma(x) \sin \pi x = \frac{\pi}{\Gamma\,(1-x)},$$

ce qui, pour n entier et positif, donne

$$\varphi'(n) = (-1)^n \, \pi \Gamma(n).$$

Si donc on cherche une fonction entière qui coïncide avec la fonction Γ pour les valeurs entières et positives de la variable, la fonction $\psi(x)$ sera

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-2n} + \frac{1}{2n} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-2n+1} + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \log \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{x}{2}\right)}. \end{aligned} \tag{2}$$

On voit que le développement de $\psi(x)$ constitue une moitié du développement de coséc πx, de même que celui de $\frac{d}{dx} \log \Gamma\, x$ est la moitié du développement de $\cot \pi x$.

La fonction cherchée s'obtient en multipliant $\varphi(x)$ par $\psi(x)$. Les principes connus relatifs à la fonction Γ montrent qu'elle peut se mettre sous la forme

$$\mathrm{F}(x) = \sqrt{\pi} \left(\mathrm{U}'\, \mathrm{V} - \mathrm{U}\, \mathrm{V}' \right),$$

où U et V sont les deux fonctions entières

$$\begin{aligned} \mathrm{U} &= \frac{2^{x/2}}{\Gamma\left(1 - \frac{x}{2}\right)} = 2^{x/2} \frac{\sin\left(\pi x/2\right)}{\pi} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right), \\ \mathrm{V} &= \frac{2^{x/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right)} = 2^{x/2} \frac{\cos\left(\pi x/2\right)}{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Quant à l'équation aux différences à laquelle satisfait la fonction $\mathrm{F}(x)$, elle est

$$\mathrm{F}(x+1) = x\, \mathrm{F}(x) + \frac{1}{\pi} \varphi(x) = x\, \mathrm{F}(x) + \frac{1}{\Gamma\,(1-x)}.$$