ANDRÉ WEIL

Sur les origines de la géométrie algébrique

Compositio Mathematica, tome 44, nº 1-3 (1981), p. 395-406
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1981__44_1-3_395_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 44, Fasc. 1-3, 1981, pag. 395–406

SUR LES ORIGINES DE LA GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

André Weil

Alla Cara Memoria
di Aldo Andreotti

Traditionnellement on fait dériver la géométrie algébrique de la géométrie analytique et de la géométrie projective. La géométrie analytique (comme on disait naguère), c'est-à-dire "l'application de l'algèbre à la géométrie" (comme on disait autrefois) fut fondée presque simultanément par Descartes dans sa *Géométrie* de 1637 et par Fermat dans son *Isagoge* qui semble avoir été de peu antérieure; presque au même moment Desargues créait la géométrie projective par son *Brouillon Project* de 1639, mais ce travail, ainsi que les écrits de Pascal et de Ph. de La Hire qui lui firent suite, tomba bientôt dans l'oubli le plus profond. Il est vrai que Newton toucha au même sujet par son concept d'ombre (équivalent à celui de transformée projective) qu'il introduisit au passage dans son célèbre travail sur les cubiques planes, *Enumeratio linearum tertii ordinis*, publié en 1706 mais dont la substance remonte sans doute à ses cours de Cambridge entre 1670 et 1680, et dont le but était avant tout de continuer Descartes. Mais c'est seulement au XIX^e siècle que ces germes donnèrent naissance à l'abondante floraison que l'on sait, et dont nous n'avons pas fini de recueillir les fruits.

On doit à Madame Bashmakova d'avoir reconnu que la géométrie algébrique possède des lettres de noblesse bien plus anciennes (v. [1] et [5]; cf. [16]). C'est de l'antiquité grecque, et plus précisément de Diophante, qu'elle les fait dater. Mon propos ici est de serrer cette

0010-437X/81/09395-12$00.20/0

thèse de plus près à la lumière de quelques textes qui marquent la filiation des idées depuis Diophante jusqu'à notre époque. Mais d'abord il convient de s'entendre sur ce qui constitue la géométrie algébrique, faute de quoi on risquerait, en disant que Diophante "faisait de la géométrie algébrique", de suggérer des idées aussi fausses que lorsqu'on dit qu'Apollonius et Pappus "faisaient de la géométrie analytique", ou bien encore qu'Archimède "faisait du calcul intégral (ou différentiel)". Assurément l'oeuvre d'Archimède a fourni l'indispensable point de départ des fondateurs du calcul infinitésimal au XVII^e siècle; mais ce que cherchaient ceux-ci et que réalisèrent finalement Newton et surtout Leibniz diffère trop de ce que se proposait Archimède pour qu'on puisse, sans fausser toute l'histoire du sujet, assimiler l'un à l'autre. Est-il besoin de dire qu'il en est de même de Diophante en face de la géométrie algébrique telle que nous la connaissons?

En bref, et en gros, il est permis de dire que la géométrie algébrique est l'étude des équations ou systèmes d'équations algébriques à plusieurs variables lorsque les ensembles ainsi déterminés (dits aussi "variétés") ne se réduisent pas à des points isolés. Typiquement le problème est posé relativement à un corps de base qui peut ou non être spécifié; lorsque ce corps est choisi en raison de ses propriétés arithmétiques, ou à plus forte raison lorsqu'on se place sur tel ou tel anneau plutôt que sur un corps, on touche de si près à la frontière assez floue entre théorie des nombres et géométrie algébrique qu'à peine on s'aperçoit si on l'a franchie; et d'ailleurs peu importe si on l'a franchie en effet.

Ainsi définie, la géométrie algébrique est inséparable de la théorie des fonctions algébriques d'une ou plusieurs variables, qui, depuis le XIX^e siècle, en constitue un important chapitre; à celle-ci il convient de joindre la théorie des intégrales de différentielles algébriques (du moins si l'on se place sur le corps des complexes, comme il était d'usage pendant tout le XIX^e siècle et au-delà), ou en tout cas la théorie de ces différentielles, ce qui conserve un sens quel que soit le corps de base.

Bien entendu, une discipline mathématique ne se caractérise pas moins par ses méthodes que par son objet. A cet égard, ce qui importe avant tout pour la pratique de la géométrie algébrique telle que nous l'entendons, c'est l'usage des transformations rationnelles et plus spécialement des transformations birationnelles, dont les transformations affines et projectives ne constituent qu'un cas particulier. En second lieu c'est la classification des objets étudiés vis-à-vis des transformations en question, par exemple (lorsqu'il s'agit de courbes algébriques) au moyen du degré d'abord, puis surtout au moyen du genre. Quant au langage géométrique, on a pu s'en passer parfois par l'étude directe des corps de fonctions algébrique, mais, faute de ce langage et des liens ou du moins des analogies qu'il fait apparaître avec la topologie et la géométrie différentielle, il est à croire que le sujet se serait desséché depuis longtemps.

C'est justement le langage géométrique qui fait défaut chez Diophante. Son oeuvre, ou pour mieux dire sa collection telle qu'elle nous est parvenue, rassemble près de deux cent problèmes dont chacun pose un système d'équations algébriques et en demande une solution en nombres rationnels positifs. "*L'art de résoudre ces sortes de questions*", nous dit d'Alembert dans l'article DIOPHANTE de l'*Encyclopédie* ([6], t.IV, p. 1014), "*consiste à employer et à manier tellement les inconnues ou l'inconnue, que le quarré et les plus hautes puissances de cette inconnue disparaissent de l'équation, et qu'il ne reste que l'inconnue au premier degré.*" A quoi il convient d'ajouter qu'il s'agit toujours de transformations rationnelles, parfois birationnelles, et que le fait que le corps de base est celui des rationnels ne joue le plus souvent aucun rôle. C'est ce qu'avait vu Fermat lorsqu'il écrivait, dans son fameux défi de 1657 ([8], t.II, p. 334):

"*Quaestiones pure Arithmeticas vix est qui proponat, vix qui intelligat. Annon quia Arithmetica fuit hactenus tractata Geometricè potius quam Arithmetice? Id sane innuunt pleraque et Veterum et Recentiorum volumina. Innuit et ipse Diophantus, qui licet a Geometria paulo magis quam caeteri discesserit, dum Analyticen numeris tantum rationalibus adstringit: Eam tamen partem Geometriâ non omnino vacare probant satis superque Zetetica Vietaea; in quibus Diophanti methodus ad quantitatem continuam, ideoque ad Geometriam porrigitur.*" ["A peine trouve-t-on qui pose des problèmes purement arithmétiques, ni qui les comprenne. N'est-ce pas parce que jusqu'ici l'Arithmétique a été traitée géométriquement plutôt qu'arithmétiquement? C'est là en effet ce qui ressort des écrits des anciens comme des modernes. C'est ce qui ressort de Diophante même; sans doute il s'est un peu plus que les autres écarté de la Géométrie, du fait qu'il restreint son Analyse aux seuls nombres rationnels; mais les *Zetetica* de Viète prouvent abondamment que la Géométrie n'en est pas tout à fait absente, puisque la méthode de Diophante y est étendue à la quantité continue, donc à la Géométrie."] Et en effet Viète dans ses *Zetetica* [15], traduisant en formules algébriques un bon nombre des solutions les plus caractéristiques de Diophante, a fait voir que celles-ci sont indépendantes du choix du corps de base et restent valables par exemple sur le corps des réels (la "quantité continue" de Fermat) qui est implicitement à la base de la géométrie des anciens et de l'algèbre de Viète.

Quant aux questions de classification, Diophante n'en dit mot; Viète non plus, ni Fermat, ni même Euler lorsqu'ils traitent de problèmes diophantiens. Mais on ne peut manquer d'être frappé, déjà chez Diophante (cf. [1]), de la fréquence avec laquelle reviennent les équations qui définissent des courbes de genre 0 et 1, et du fait que ce sont toujours les mêmes méthodes que Diophante met en oeuvre pour les résoudre. Traduites en langage moderne, celles-ci reviennent, lorsqu'il s'agit du genre 0, à obtenir un second point rationnel sur une courbe qui possède déjà un point rationnel visible (celui-ci pouvant, de notre point de vue à nous, se trouver à l'infini, ou bien correspondre à une valeur négative de l'inconnue, ce qui, pour Diophante, n'est pas une solution). Le plus souvent l'équation est celle d'une conique, et la méthode s'interprète en disant qu'on prend le second point d'intersection de la conique avec une droite passant par le point "visible". De même s'il s'agit du genre 1; si par exemple on a affaire à l'équation d'une cubique plane possédant un point rationnel, on en trouve un autre en prenant la tangente en ce point et la coupant avec la cubique. Plus souvent on est en présence d'une "double équation" du type

$$ax^2 + bx + c = y^2, \quad a'x^2 + b'x + c' = z^2$$

(une quartique gauche dans notre langage), les données étant telles qu'il y ait sur la courbe des points rationnels visibles, à nos yeux du moins; il en est ainsi par exemple si a et a' sont des carrés (les points "visibles" étant alors à l'infini). Les procédés systématiques dont fait usage Diophante pour traiter ces problèmes impliquent évidemment dans l'esprit de leur auteur un début de classification.

Chez Fermat les choses sont encore plus nettes, grâce surtout au jésuite Jacques de Billy, qui, d'après sa correspondance avec Fermat, rédigea un recueil de problèmes que Samuel, fils aîné de Fermat, joignit au volume de 1670 où il publia le Diophante annoté par son père. Cet écrit, pompeusement intitulé *Doctrinae Analyticae Inventum Novum* ([4], pp. 1–36; cf. [8], t.III, pp. 325–398), est entièrement consacré à des équations qui, dans notre langage, définissent, soit des quartiques gauches, soit des cubiques planes, soit des droites doubles de la forme

$$y^2 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e. \qquad \text{(I)}$$

Peut-être, tout en communiquant au Père de Billy les méthodes inspirées de Diophante qu'il appliquait à ces problèmes, Fermat ne l'avait-il pas cru capable de comprendre la "descente infinie" dont il se servait le cas échéant pour en démontrer l'impossibilité. La descente est, au sens de Fermat, une méthode purement arithmétique; Billy n'y fait aucune allusion, et tout ce qui se trouve dans son *Inventum Novum* reste valable sur un corps quelconque; c'est de la géométrie au sens de Fermat, de la géométrie algébrique pour nous.

On peut se demander si Fermat a jamais songé à une interprétation géométrique; s'il y a pensé, son oeuvre n'en a gardé nulle trace. Dans ses écrits sur ce que nous appelons le calcul différentiel, il enseigne à trouver la tangente en un point d'une courbe donnée par son équation (par exemple les cubiques $ay^2 = x^3$, $x(x^2 + y^2) = ay^2$, etc.). A-t-il remarqué que la "méthode de Diophante" appliquée aux cubiques revient à prendre l'intersection de la courbe avec sa tangente en un point connu? On trouve en tout cas cette observation dans un fragment longtemps inédit de Newton ([14], pp. 110–114; cf. [16], p. 341) peut-être inspiré justement par l'*Inventum Novum*. Dans cet écrit, presque le seul où Newton ait jamais touché aux problèmes diophantiens et qui doit remonter à ses cours de Cambridge, non seulement Newton interprète la méthode diophantienne traditionnelle au moyen de l'intersection d'une conique avec une droite ou bien d'une cubique avec l'une de ses tangentes, mais il dépasse notablement ses devanciers en indiquant qu'on peut tout aussi bien prendre l'intersection d'une cubique avec une droite passant par deux points connus sur celle-ci. S'il est dans Diophante quelques rares exemples qu'on peut à la rigueur rattacher à ce procédé, ni lui ni Viète ni Fermat ne paraissent en avoir aperçu la portée. On n'en trouve même pas trace, semble-t-il, chez Euler, qui pourtant s'intéressa toute sa vie aux problèmes diophantiens et finit par en faire son passe-temps favori. Encore en 1777, lorsque Lagrange mentionne l'intersection avec la tangente comme une méthode pour trouver des points sur une cubique ([11], t.IV, p. 396), il la présente, sinon comme une idée originale, du moins comme une interprétation nouvelle.

Ainsi, peu à peu, les méthodes dites diophantiennes rejoignaient le grand courant de la géométrie analytique cartésienne. Mais en même temps se dessinait un courant d'idées bien différent, issu de la création leibnizienne du calcul infinitésimal et destiné à jouer un rôle capital dans le développement de la géométrie algébrique. Là aussi, bien que plus souterrainement, l'"analyse diophantienne" apporta sa contribution. C'est ce qu'il s'agit de faire voir à présent.

Déjà en 1691 le jeune Johann Bernoulli, écrivant de Paris à son frère aîné Jakob, s'exprimait ainsi ([3], p. 105):

"... *n'est-ce donc pas le plus grand tort que nous avons fait à ces questions Diophantiques en disant qu'elles ne servent que pour les spéculations inutiles, car tant s'en faut qu'elles n'aient point d'usage, qu'au contraire elles en obtiennent le plus remarquable*..."

Dans ses leçons de calcul intégral à l'usage du marquis de l'Hôpital ([2], p. 393), il était plus explicite:

"*Tota itaque illius praxis consistit in hoc, ut quantitates irrationales in rationales convertantur*... *Non parum ergo conducunt ad hoc Quaestiones Diophanteae, quae in hujusmodi occasionibus insignem opem ferunt*... *Sit ex.gr. ex* $a^2dx : x\sqrt{(ax - xx)}$ *sumendum integrale*... *sit* $ax - xx = aaxx : mm$..." ["Tout revient donc à rendre rationnelles des expressions irrationnelles... à quoi les questions diophantiennes sont d'un grand usage... Par exemple, qu'on veuille intégrer

$$\frac{a^2dx}{x\sqrt{ax - x^2}};$$

on fera le changement de variable $ax - x^2 = a^2x^2t^{-2}$..."].

En somme, il s'agit là de faire voir que la courbe $y^2 = ax - x^2$ est "unicursale" comme on disait jadis, c'est-à-dire de genre 0; or, en posant $y = ax/t$, on obtient $x = at^2(a^2 + t^2)^{-1}$, ce qui sert aussi bien à trouver des points rationnels sur la courbe, a étant supposé rationnel, qu'à ramener l'intégration proposée à celle d'une différentielle rationnelle. Nous retrouvons plus tard la même idée reprise par Daniel, fils de Johann Bernoulli, dans une lettre de 1723 à Goldbach ([9], t.II, p. 190):

"*Problemata hujusmodi Diophantea saepe magnum usum obtinent pro integrandis quantitatibus differentialibus, et iis saepius in diversis problematibus integrationem postulantibus usus sum, unde miror illa adeo inexculta jacere. Olim a Robervallo, Wallisio, Fermatio etc. vel nimio fervore agitata fuerunt, etsi usus eorum ipsis lateret.*" ["Ces problèmes diophantiens sont souvent d'un grand usage dans l'intégration des expressions différentielles, et je m'en suis souvent servi dans des problèmes d'intégration, de sorte que je m'étonne qu'on les ait si peu cultivés. Autrefois ils ont été discutés par Roberval, Wallis, Fermat, etc., et même avec une ardeur excessive, bien qu'ils n'en connussent pas l'usage."]

Daniel Bernoulli s'était en effet initié de bonne heure aux problèmes diophantiens, non seulement ceux de genre 0, mais aussi ceux de genre 1 (cf. [9], t.II, pp. 190, 202–203, 356–357.) Ce sont les notations mêmes de son père qu'il reprend pour en faire voir l'usage à Goldbach (loc. cit. p. 203) en faisant le substitution $ax - xx = aaxx/mm$ pour intégrer la différentielle

$$\frac{a^3\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{(ax - xx)}}.$$

De même encore d'Alembert, qui s'exprime sur ce sujet avec sa lucidité habituelle dans l'article déjà cité de l'*Encyclopédie*:

"*Remarquons en passant que cette méthode de réduire à des quantités rationnelles les quantités irrationnelles est fort utile dans le calcul intégral pour réduire une différentielle donnée en fraction rationnelle.*"

Visiblement c'est aux équations de genre 0 que pensent d'Alembert et les Bernoulli dans les passages que nous venons de citer. Leibniz, comme toujours, prenait les choses de plus haut quand il écrivait en 1702 ([12b], p. 360):

"*... ea spe fretus, fore qui latius spargant semina novae doctrinae uberioresque fructus colligant, praesertim si incumbatur diligentius quam factum est hactenus in amplificationem Algebrae Diophanteae, Cartesii discipulis fere neglectae, quod usum in Geometria parum perspexissent. Ego vero aliquoties innuere memini (quod mirum videri poterat) progressum Analyseos nostrae infinite simalis circa quadraturas pendere bona ex parte ab incrementis ejus Arithmeticae quam primus, qui nobis quidem notus sit, professa opera tractavit Diophantus.*" ["... il viendra [des mathématiciens], je l'espère, pour répandre plus largement les semences de la nouvelle théorie et en récolter des fruits plus abondants, ce qui sera surtout le cas s'ils s'appliquent, plus qu'il n'a été fait jusqu'ici, à l'avancement de l'Algèbre Diophantienne, presque entièrement négligée par les disciples de Descartes faute d'en avoir vu l'usage en géométrie. Moi au contraire, je me souviens d'avoir à plusieurs reprises (ce qu'on a pu trouver étonnant) indiqué que pour une bonne part les progrès de notre calcul intégral dépendent de l'extension de la sorte d'Arithmétique dont Diophante a été le premier à notre connaissance à traiter systématiquement."]

Comme on le voit par ces lignes prophétiques, non seulement Leibniz avait aperçu dans les intégrales de différentielles algébriques (celles mêmes que plus tard on nomma abéliennes) un champ privilégié pour le développement futur du calcul intégral, mais il avait vu clairement le lien étroit entre ce sujet et la classique "algèbre diophantienne", c'est-à-dire en somme la géométrie algébrique. Quant aux questions de classification des intégrales, il y avait longtemps que

Leibniz s'y intéressait, comme on le voit par sa lettre de 1677 à Oldenburg ([13], p. 249):

"... *deest nobis circa quadraturas, ut scire certe possimus, annon quadratura figurae alicujus propositae reducatur ad quadraturam Circuli aut Hyperbolae. Nam pleraeque figurae, hactenus tractatae, ope alterutrius quadrari potuerunt. Quod si demonstrari potest (ut arbitror) quasdam figuras non esse quadrabiles nec per Circulum nec per Hyperbolam, restat ut alias quasdam figuras primarias altiores constituamus, ad quarum quadraturam reducantur caeterae omnes... Crediderat Gregorius*[1], *dimensionem curvarum Hyperbolae et Ellipseos non pendere a quadratura Circuli aut Hyperbolae...*" ["Il nous manque de savoir reconnaître si la quadrature d'une figure donnée peut se ramener à celle du cercle ou de l'hyperbole. Car la plupart des figures traitées jusqu'ici ont pu se quarrer ainsi. Mais si, comme je le crois, on peut démontrer que cela n'est pas toujours possible, alors il reste à trouver des figures d'un genre plus élevé, aux quadratures desquelles toutes les autres puissent se ramener... Gregory pensait que la rectification de l'hyperbole et de l'ellipse ne dépend pas de la quadrature du Cercle ou de l'Hyperbole..."].

Les quadratures du cercle et de l'hyperbole, ce sont les fonctions circulaires inverses et logarithmiques; les quadratures qui en dépendent, ce sont les intégrales de genre 0. La conjecture de Grégory était fondée; dans la rectification de l'ellipse et de l'hyperbole, il s'agit d'une intégrale "elliptique" de la forme

$$\int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx;$$

les géomètres du XVII^{e} siècle y joignirent bientôt l'arc de lemiscate

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}. \tag{II}$$

Leibniz, et à sa suite Joh. Bernoulli, ne perdirent jamais tout à fait l'espoir de ramener ces intégrales aux fonctions circulaires inverses et logarithmiques (cf. [12a], pp. 706–707 et 710–711). Même Euler n'y avait pas encore renoncé en 1730; du moins pose-t-il la question par deux fois dans des lettres à Goldbach ([9], t.I, pp. 47 et 51), et l'on peut voir là une première indication de l'intérêt passionné qu'il devait

[1] Comme me l'a fait remarquer le "referee", Monsieur H. Bos, (que j'ai plaisir à remercier ici pour cette observation), il s'agit là de J. Gregory et de sa *Geometriae Pars Universalis* de 1668; cf. *James Gregory Tercentenary Memorial Volume* (ed. E.W. Turnbull, London 1939), p. 502.

porter par la suite aux intégrales dites elliptiques. Y a-t-il eu un lien dans son esprit entre ce sujet et la théorie des équations diophantiennes de genre 1? Selon Jacobi, grand connaisseur et admirateur de l'oeuvre d'Euler, cela ne fait guère de doute. Dans une courte note [10] au titre significatif, et se référant particulièrement à des écrits posthumes d'Euler, récemment parus, sur l'équation diophantienne (I), il signale que les formules qui y figurent sont celles mêmes de la duplication des fonctions elliptiques, telles qu'Euler les avait exposées par exemple dans ses ouvrages de calcul intégral. Il n'est pas probable, ajoute-t-il, qu'une coïncidence si remarquable ("*consensum illum memorabilem*") entre les deux théories ait échappé à leur auteur. Il conclut en esquissant une généralisation au genre 2, et en recommandant l'étude de l'analyse diophantienne à ceux qui s'intéressent aux fonctions elliptiques et abéliennes.

L'oeuvre d'Euler est immense; j'y ai cherché en vain un passage où il se soit exprimé nettement sur ce point si intéressant pour nous. Mais il n'a pas seulement dit et répété, presque dans chacun de ses nombreux mémoires d'arithmétique, que les analystes ont tort de dédaigner comme inutiles les spéculations sur les nombres; parfois il s'est exprimé d'une manière plus précise. Ainsi dans son travail de 1754 sur ce que nous appellerions la rationalité de la surface $x^3 + y^3 + z^3 = v^3$ ([7c], p. 454):

"... *unde patet, quanta adhuc incrementa in Analysi DIOPHANTEA desiderentur. Ad quae si unquam penetrare contigerit, nullum est dubium, quin inde universa Analysis tam finitorum quam infinitorum haud contemnenda subsidia sit acceptura. Cum enim in calculo integrali praecipuum artificium in hoc versetur, ut formulas differentiales irrationales in rationales transformentur, hoc artificium uti ex Analysi DIOPHANTEA in hunc calculum est translatum, ita etiam indidem maiora auxilia merito expectantur; ex quo studium, quod in ista Analysi, utcunque sterilis alias in se spectata videatur, amplificanda impenditur, neutiquam inutiliter collocari est censendum.*" ["... d'où on peut voir combien il reste encore à faire en analyse diophantienne. Nul doute que, si l'on y parvient, toute l'analyse tant finie qu'infinitésimale en recevra de substantiels secours. En calcul intégral, en effet, la principale méthode consiste à rendre rationnelles les expressions différentielles irrationnelles; or cette méthode provient de l'analyse diophantienne, d'où elle a été transportée dans le calcul intégral; on est donc en droit d'en attendre encore plus. Si donc cette analyse, considérée en elle-même, peut paraître sans fruit, les efforts qu'on y consacre ne doivent en aucune manière être regardés comme dépensés inutilement."]

Autrement dit, toute transformation rationnelle qui peut servir à la résolution d'équations diophantiennes a des chances de s'appliquer aussi aux différentielles algébriques, et réciproquement. Il est difficile de ne pas voir là une confirmation des vues de Jacobi.

A cet égard on notera aussi le parallélisme entre les recherches d'Euler, tout au long de sa carrière, sur les deux sujets en question. Nous avons vu que dès 1730 il s'intéressait à l'intégrale "lemniscatique" (II). En 1738 il rédigeait le mémoire publié en 1747 ([7b]) où il expose à sa manière, d'après Frenicle, la démonstration de Fermat sur l'impossibilité des équations $x^4 \pm y^4 = z^2$ en nombres entiers (ou $y^2 = 1 \pm x^4$ en nombres rationnels) et autres analogues. En 1751 il reçoit les deux volumes des écrits mathématiques de Fagnano et y prend connaissance, pour la première fois à ce qu'il paraît, des résultats de celui-ci sur la lemniscate; les formules en sont apparentées á celles qui figurent dans la démonstration du théorème de Fermat. Un mois après il lit à l'Académie de Berlin le premier de la longue série de mémoires où il allait démontrer en toute généralité les théorèmes d'addition et de multiplication pour les intégrales elliptiques $\int dx/y$, où y est donné par (I). En 1770 paraît en allemand son *Algèbre* ([7a]), déjà publiée et 1768 en traduction russe, et composée sans doute en 1767. "*Elle ne contient rien d'intéressant*", écrivait Lagrange à d'Alembert la même année ([11], t.XIII, p. 181) "*qu'un traité sur les questions de Diophante, qui est à la vérité excellent*"; ce "traité", c'est la dernière section (II$^{\text{ter}}$ Theil, II$^{\text{ter}}$ Abschnitt, "*Von der unbestimmten Analytic*") du volume en question; elle porte en grande partie sur les équations de genre 1, et le chapitre 9 traite plus particulièrement de l'équation (I); c'est là aussi le sujet des mémoires posthumes ([7d], pp. 82–181) auxquels faisait allusion Jacobi dans le passage cité plus haut.

Pour achever notre tableau, il ne reste qu'à faire mention des importants travaux de Lagrange lui-même, inspirés directement par l'oeuvre d'Euler, sur les équations diophantiennes $y^2 = \pm(x^4 - 2)$ d'une part ([11], t.IV, pp. 377–398), et sur les intégrales elliptiques de l'autre ([11], t.II, pp. 5–33 et 253–312). Dans ce dernier travail, publié en 1784, il découvre ou pour mieux dire redécouvre la transformation (dans notre langage, l'isogénie) d'ordre 2 pour les intégrales elliptiques, dite aussi "transformation de Landen" d'après son premier inventeur. Or la transformation d'ordre 2 est à la base des formules dont se servent Fermat, puis Euler, pour traiter des équations $y^2 = x^4 \pm 1$ et Lagrange pour résoudre $y^2 = \pm(x^4 - 2)$. Ici encore, pouvons-nous croire que Lagrange n'ait pas aperçu de lien entre les deux sujets?

Après lui, et pour près d'un siècle et demi, les équations diophantiennes subirent une éclipse à peu près totale, tandis que la géométrie algébrique prenait l'essor que l'on sait. Il est vrai qu'on ne conçoit pas celui-ci sans le développement préalable de la théorie des fonctions elliptiques aux mains de Jacobi et d'Abel. Mais le corps des complexes l'avait emporté sur tous ses concurrents; les équations diophantiennes devinrent un amusement pour mathématiciens amateurs et pour collaborateurs au *Sphinx-Oedipe* (dont les contributions ne sont pas toutes à dédaigner). Le reste de l'histoire est bien connu; après de timides essais de Hilbert et Hurwitz, puis de Poincaré, Mordell remit les équations diophantiennes en honneur en démontrant son célèbre théorème, après quoi l'"analyse de Diophante" est devenue une branche, et non des moindres, de la géométrie algébrique. Les rôles se sont renversés. A présent la mère a élu domicile chez sa fille.

RÉFÉRENCES

[1] I.G. Bashmakova: Diophante et Fermat, *Rev. Hist. Sc. 13* (1966) 289–306.

[2] Joh. Bernoulli: Lectiones Mathematicae de Methodo Integralium, aliisque, conscriptae in usum Ill. Marchionis Hospitalii cum Auctor Parisiis ageret Annis 1691 et 1692, in *Opera Omnia*, Laus. et Gen. 1742 (réimpr. Georg Olms Verlag, Hildesheim 1968), t.III, 386–558.

[3] Joh. Bernoulli: *Briefwechsel*, Bd. I, Birkhäuser, Basel 1955.

[4] Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex ... cum observationibus D.P. de Fermat ... Accessit Doctrinae Analyticae Inventum Novum, collectum ex variis eiusdem D. de Fermat Epistolis, Tolosae 1670.

[5] Diophante, trad. russe par I.N. Vesselovski, réd, et comm. de I.G. Bashmakova, Moscou, Nauka 1974.

[6] Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers, edd. Diderot et D'Alembert, Paris et Neuchâtel, 1751–1765, 17 vol.

[7] Euler, *Opera Omnia*: (a) Vollständige Anleitung zur Algebra, St Petersburg 1770 = *Op.* vol. I_1; (b) Demonstratio theorematum quorundam arithmeticorum, *Op.* vol. I_2, pp. 38–58; (c) Solutio generalis quorundam problematum Diophanteorum ..., *Op.* vol. I_2, pp. 428–458; (d) Mém. Acad. Sc. St-Pétersbourg 11 (1830), pp. 1–91 = *Op.* vol. I_5, pp. 82–181.

[8] Fermat, *Oeuvres*, ed. P. Tannery et Ch. Henry, Paris 1891–1912, 4 vol.

[9] P.-H. Fuss: *Correspondance Mathématique et Physique*, St. Pétersbourg 1843, 2 vol. (réimpr. Johnson Reprint Corp. 1968).

[10] C.G. Jacobi: De usu theoriae integralium ellipticorum et integralium abelianorum in analysi diophantea. *J. de Crelle* 13 (1835) 353–355 = *Gesammelte Werke*, vol. II, 53–55.

[11] Lagrange: *Oeuvres*, ed. J.A. Serret, Paris 1867–1892, 14 vol.

[12] Leibniz: *Math. Schriften*, ed. C.I. Gerhardt; (a) vol. I_3, Briefwechsel ..., Halle 1856; (b) vol. II_1 Halle 1858: no. XXIV, Specimen novum Analyseos pro scientia infiniti, ..., pp. 350–361.

[13] Leibniz: *Briefwechsel mit Mathematikern*, ed. C.I. Gerhardt, Berlin 1899, vol. I (réimpr. Georg Olms Verlag, Hildesheim 1962).

[14] NEWTON: De resolutione Quaestionum circa numeros, in *Mathematical Papers*, ed. D.T. Whiteside, vol. IV, Cambridge 1971.
[15] FR. VIÈTE: Zetetica, in *Opera Mathematica*, ed. F. Schooten, Lugd. Bat., Elzevir 1646 (réimpr. Georg Olms Verlag, Hildesheim 1970), pp. 42–80.
[16] A.P. YOUSCHKEVITCH, *Rev. Hist. Sc.* 30 (1977) 338–343.

(Oblatum 19-I-1981 & 3-IV-1981)

School of Mathematics
The Institute for Advanced Study
Princeton, N.J. 08540
U.S.A.