

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 15
(1876), p. 30-48

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__30_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 1070

(voir 2^e série, t. XIII, p. 143),

PAR M. C. MOREAU,

Capitaine d'Artillerie, à Calais.

L'équation $\frac{du}{dx} = \sqrt{1 + au^2 + bu^4}$ définit une fonction u , si l'on donne la condition $u = 0$ pour $x = 0$.

C'est une fonction impaire de x , et, dans son développement suivant les puissances de x , le coefficient de

$\frac{x^{2n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n+1)}$ est de la forme

$$a^n + \lambda_1 a^{n-2} b + \lambda_2 a^{n-4} b^2 + \lambda_3 a^{n-6} b^3 + \dots$$

On a

$$\lambda_1 = \frac{3^{2n+1} - 3}{16} - \frac{3}{2} n,$$

$$\lambda_2 = \frac{5^{2n+1} - 5}{256} + \frac{3^{2n+3} - 3^3}{64} + \frac{9}{8} n^2 - \left(\frac{3^{2n+2}}{32} + \frac{39}{16} \right) n$$

Tous ces nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ sont entiers. Démontrer les résultats précédents. (F. DIDON.)

De l'équation donnée on tire $\frac{d^2 u}{dx^2} = au + 2bu^3$, et l'on reconnaît facilement, par différentiations successives, que les coefficients du développement

$$u = x + a \frac{x^3}{1.2.3} + (a^2 + 12b) \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \dots$$

ont la forme annoncée, et que tous les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ sont entiers. Pour chercher à déterminer ces nombres, posons

$$u = u_0 + u_1 b + u_2 b^2 + u_3 b^3 + \dots;$$

l'équation $\frac{d^2 u}{dx^2} = au + 2bu^3$ nous donnera

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2 u_0}{dx^2} - au_0 \right) + \left(\frac{d^2 u_1}{dx^2} - au_1 \right) b \\ & + \left(\frac{d^2 u_2}{dx^2} - au_2 \right) b^2 + \left(\frac{d^2 u_3}{dx^2} - au_3 \right) b^3 + \dots \\ & = 2b(u_0 + u_1 b + u_2 b^2 + \dots)^3 \\ & = 2u_0^3 b + 6u_0^2 u_1 b^2 + 6(u_0^2 u_2 + u_0 u_1^2) b^3 + \dots, \end{aligned}$$

et il en résulte les relations suivantes :

$$(1) \quad \frac{d^2 u_0}{dx^2} = au_0,$$

$$(2) \quad \frac{d^2 u_1}{dx^2} = au_1 + 2u_0^3,$$

$$(3) \quad \frac{d^2 u_2}{dx^2} = au_2 + 6u_0^2 u_1,$$

$$(4) \quad \frac{d^2 u_3}{dx^2} = au_3 + 6(u_0^3 u_2 + u_0 u_1^2).$$

On pourrait intégrer ces équations, et, connaissant les différentes fonctions u_0, u_1, \dots , la question serait résolue; mais on peut procéder de la manière suivante, en déterminant seulement, dans chacune de ces fonctions,

(32)

le coefficient de $\frac{x^{2n+1}}{1.2.3\dots(2n+1)}$, que nous appellerons dans tous les cas P_n .

1° L'équation (1) donne

$$\frac{d^{2n+1}u_0}{dx^{2n+1}} = a \frac{d^{2n-1}u_0}{dx^{2n-1}};$$

donc

$$P_n = a P_{n-1},$$

et, comme $P_0 = 1$, il s'ensuit

$$P^n = a^n.$$

2° On tire de même de l'équation (2) la relation

$$P_n = a P_{n-1} + 2 \left[\frac{d^{2n-1}(u_0^3)}{dx^{2n-1}} \right]_{x=0}.$$

Or, à cause des équations

$$\left(\frac{du_0}{dx} \right)^2 = 1 + au_0^2 \quad \text{et} \quad \frac{d^2u_0}{dx^2} = au_0,$$

on peut poser

$$(5) \quad \frac{d^{2n-1}(u_0^3)}{dx^{2n-1}} = A_{n-1} \frac{du_0}{dx} + B_{n-1} u_0^2 \frac{du_0}{dx};$$

et, en différenciant deux fois de suite, il vient

$$\frac{d^{2n+1}(u_0^3)}{dx^{2n+1}} = (a A_{n-1} + 2 B_{n-1}) \frac{du_0}{dx} + 9a B_{n-1} u_0^2 \frac{du_0}{dx},$$

donc

$$A_n = a A_{n-1} + 2 B_{n-1} \quad \text{et} \quad B_n = 9a B_{n-1}.$$

De plus

$$\frac{d(u_0^3)}{dx} = 3u_0^2 \frac{du_0}{dx}$$

montre que

$$A_0 = 0 \quad \text{et} \quad B_0 = 3,$$

et, comme

$$\left[\frac{d^{2n-1} (u_0^3)}{dx^{2n-1}} \right]_{x=0} = A_n .$$

ou a

$$P_n = a P_{n-1} + 2 A_{n-1} \quad \text{avec} \quad P_0 = 0$$

Si nous appelons respectivement $\varphi(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ les fonctions génératrices de P_n , A_n et B_n , les relations précédentes donnent les équations

$$\begin{aligned} (1-at)\varphi(t) &= 2t\varphi_1(t), \\ (1-at)\varphi_1(t) &= 2t\varphi_2(t), \\ (1-9at)\varphi_2(t) &= 3, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\varphi(t) = \frac{12t^2}{(1-at)^2(1-9at)} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{\frac{3}{16}}{1-9at} - \frac{\frac{3}{2}}{(1-at)^2} + \frac{\frac{21}{16}}{1-at} \right],$$

et le coefficient de t^n dans le développement de cette fonction sera

$$\begin{aligned} P_n &= a^{n-2} \left[\frac{3}{16} 9^n - \frac{3}{2} (n+1) + \frac{21}{16} \right] \\ &= a^{n-2} \left(\frac{3^{2n+1} - 3}{16} - \frac{3}{2} n \right) = \lambda_1 a^{n-2}. \end{aligned}$$

3° L'équation (2) équivaut à la suivante :

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} \frac{du_1}{dx} + \frac{du_0}{dx} \frac{d^2 u_1}{dx^2} = a \left(u_0 \frac{du_1}{dx} + u_1 \frac{du_0}{dx} \right) + 2u_0^3 \frac{du_0}{dx},$$

qui donne, par intégration directe,

$$\frac{du_0}{dx} \frac{du_1}{dx} = a u_0 u_1 + \frac{u_0^4}{2};$$

on tire de là

$$2a u_0 u_1 \frac{du_0}{dx} = -u_0^4 \frac{du_0}{dx} + 2 \frac{du_1}{dx} + 2a u_0^3 \frac{du_1}{dx},$$

qui servira à la réduction des dérivées successives de la fonction $u_0^2 u_1$.

Ici l'on peut poser

$$\begin{aligned} \frac{d^{2n-1}(u_0^2 u_1)}{dx^{2n-1}} &= A_{n-1} \frac{du_0}{dx} + B_{n-1} u_0^2 \frac{du_0}{dx} + C_{n-1} u_0^4 \frac{du_0}{dx} \\ &+ D_{n-1} \frac{du_1}{dx} + E_{n-1} u_0^2 \frac{du_1}{dx}, \end{aligned}$$

et, en différentiant deux fois de suite, on trouve les relations

$$\begin{aligned} A_n &= a A_{n-1} + 2 B_{n-1}, & B_n &= 9a B_{n-1} + 12 C_{n-1} + 6 D_{n-1}, \\ C_n &= 25a C_{n-1} + 12 E_{n-1}, & D_n &= a D_{n-1} + 6 E_{n-1}, \\ E_n &= 9a E_{n-1}; \end{aligned}$$

on a d'ailleurs

$$P_n = a P_{n-1} + 6 A_{n-1} \quad \text{avec} \quad P_0 = 0;$$

et, en prenant la première dérivée de $u_0^2 u_1$, on obtient les valeurs initiales

$$A_0 = 0, \quad B_0 = 0, \quad C_0 = -\frac{1}{a}, \quad D_0 = \frac{2}{a}, \quad E_0 = 3.$$

Si maintenant on désigne respectivement par $\varphi(t)$, $\varphi_1(t), \dots, \varphi_5(t)$ les fonctions génératrices des quantités $P_n, A_n, B_n, \dots, E_n$, on arrive aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} (1 - at) \varphi(t) &= 6t \varphi_1(t), \\ (1 - at) \varphi_1(t) &= 2t \varphi_2(t), \\ (1 - 9at) \varphi_2(t) &= 12t \varphi_3(t) + 6t \varphi_4(t), \\ (1 - 25at) \varphi_3(t) &= 12t \varphi_5(t) - \frac{1}{a}, \\ (1 - at) \varphi_4(t) &= 6t \varphi_5(t) + \frac{2}{a}, \\ (1 - 9at) \varphi_5(t) &= 3, \end{aligned}$$

et, en les résolvant, on trouve enfin

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{432t^4(7-15at)}{(1-at)^3(1-9at)^2(1-25at)} \\ &= \frac{1}{a^4} \left[\frac{5}{256} \frac{1}{1-25at} + \frac{45}{64} \frac{1}{1-9at} - \frac{9}{32} \frac{1}{(1-9at)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{799}{256} \frac{1}{1-at} - \frac{9^3}{16} \frac{1}{(1-at)^2} + \frac{9}{4} \frac{1}{(1-at)^3} \right]; \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} P_n &= a^{n-4} \left[\frac{5}{256} 25^n + \frac{45}{64} 9^n - \frac{9}{32} (n+1) 9^n + \frac{799}{256} \right. \\ &\quad \left. - \frac{9^3}{16} (n+1) + \frac{9}{4} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right] \\ &= a^{n-4} \left[\frac{5^{2n+1}-5}{256} + \frac{3^{2n+3}-3^3}{64} + \frac{9}{8} n^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{3^{2n+2}}{32} + \frac{39}{16} \right) n \right] = \lambda_2 a^{n-4}. \end{aligned}$$

4° En appliquant la même méthode à l'équation (4), on arrive à la formule

$$\varphi(t) = \frac{5184t^6(847-15533at+44845a^2t^2-39375a^3t^3)}{(1-at)^4(1-9at)^3(1-25at)^2(1-49at)},$$

ou, en décomposant en fractions simples,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{a^6} \left[\frac{7}{4096} \frac{1}{1-49t} + \frac{125}{1024} \frac{1}{1-25at} - \frac{15}{512} \frac{1}{(1-25at)^2} + \frac{5121}{2048} \frac{1}{1-9at} \right. \\ &\quad - \frac{909}{512} \frac{1}{(1-9at)^2} + \frac{27}{64} \frac{1}{(1-9at)^3} + \frac{36291}{4096} \frac{1}{1-at} \\ &\quad \left. - \frac{2175}{128} \frac{1}{(1-at)^2} + \frac{927}{64} \frac{1}{(1-at)^3} - \frac{27}{8} \frac{1}{(1-at)^4} \right], \end{aligned}$$

et l'on tire de là

$$P_n = \lambda_3 a^{n-6} = a^{n-6} \left[7 \frac{7^{2n+1} - 7}{4096} + 19 \frac{5^{2n+1} - 5}{1024} + 29 \frac{3^{2n+1} - 3^4}{2048} \right. \\ \left. - \frac{9}{16} n^3 + \left(\frac{3^{2n+3}}{128} + \frac{495}{128} \right) n^2 \right. \\ \left. - \left(3 \frac{5^{2n+1}}{512} + 65 \frac{3^{2n+2}}{512} + \frac{363}{64} \right) n \right].$$

Question 1152

(voir 2^e série, t. XIII, p. 400),

PAR M. MORET-BLANC.

Deux surfaces gauches S_1 et S_2 ont une génératrice commune A. Déterminer leurs points de contact sur A.

S_1 restant fixe, on donne à S_2 un double mouvement de translation parallèlement à A et de rotation autour de cette droite : quelle sera la position des points de contact au bout d'un temps donné t ?

(ED. DEWULF.)

1^o Je prends la droite A pour axe des z , les coordonnées étant rectangulaires.

Les équations des plans tangents aux surfaces S_1 et S_2 en un point de la droite A seront

$$\gamma = \alpha x,$$

$$\gamma = \alpha_1 x,$$

α et α_1 étant des fonctions déterminées de l'ordonnée z du point du contact.

Soient

$$\alpha = \varphi(z),$$

$$\alpha_1 = \psi(z).$$

Pour les points de contact des deux surfaces situées sur

A, on aura

$$\varphi(z) - \psi(z) = 0,$$

équation qui fera connaître ces points.

2° Je suppose, pour fixer les idées, que les deux mouvements de translation et de rotation imprimés à la surface S_2 soient des mouvements uniformes dont les vitesses sont ν et ω .

Soient z l'ordonnée d'un point de contact des surfaces au bout du temps t . Ce point, considéré comme appartenant à S_2 , avait, à l'origine du mouvement, pour ordonnée $z - \nu t$, et la trace du plan tangent en ce point sur le plan xy faisait avec la trace du plan tangent commun au bout du temps t l'angle ωt . On a donc

$$\text{tang } \omega t = \frac{\varphi(z) - \psi(z - \nu t)}{1 + \varphi(z)\psi(z - \nu t)}.$$

Telle est l'équation qui fera connaître les ordonnées des points de contact au bout du temps t .

Si les mouvements n'étaient pas uniformes, il faudrait, dans l'équation précédente, remplacer νt et ωt par les expressions de la translation et de la rotation en fonction du temps.

Question 1153

(voir 2^e série, t. XIII, p. 448),

PAR M. MORET-BLANC.

Un point pesant est placé au pôle d'une spirale logarithmique sans masse ayant avec une droite horizontale assez d'adhérence pour y rouler sans glissement sous l'action du poids de son pôle. On demande d'étudier : la loi du mouvement de la spirale en le décomposant en translation avec le pôle et rotation autour de ce pôle ; l'enveloppe des diverses spires de la spirale, de sa dé-

veloppée, de la développée de cette développée et généralement de la développée d'ordre n ; la loi de succession avec le temps de leurs points de contact avec leurs enveloppes, le lieu des centres de courbure de chacune d'elles correspondant à tout instant sur ces développées successives au point d'appui de la spirale roulante et leur loi de succession avec le temps.

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

Soient O la position initiale du pôle, M le point initial de contact, MH l'horizontale sur laquelle roule la spirale, OH perpendiculaire à OM et rencontrant l'horizontale au point H, μ l'angle de la spirale, dont l'équation polaire est

$$r = ae^{m\theta},$$

OH étant l'axe polaire.

Mouvement de translation. — La normale à la trajectoire du pôle passant constamment par le point de contact et faisant avec l'horizontale un angle constant μ , cette trajectoire est une droite perpendiculaire à OM: c'est OH. Le mouvement du pôle est donc celui d'un point pesant sur un plan incliné: *c'est un mouvement uniformément accéléré, dont l'accélération est $g \cos \mu$, la vitesse est $v = gt \cos \mu$, et le chemin parcouru est $x = \frac{1}{2}gt^2 \cos \mu$.*

Mouvement de rotation autour du pôle. — Soient M' le point de la spirale qui, au bout du temps t , sera le point de contact de la spirale avec MH, r et θ ses coordonnées, r_0 et θ_0 celles du point M. Au bout du temps t , la spirale aura tourné de l'angle $\omega = \text{MOM}' = \theta_0 - \theta$; mais on a

$$r_0 = ae^{m\theta_0}, \quad r = ae^{m\theta},$$

d'où l'on tire

$$\omega = \theta_0 - \theta = \frac{1}{m} l. \frac{r_0}{r}.$$

Mais, O' étant la position du pôle au bout du temps t ,

$$r = O'M' = r_0 - OO' \cot \mu = r_0 - mx;$$

donc

$$\omega = \frac{1}{m} l \cdot \frac{r_0}{r_0 - mx} = \frac{1}{m} l \cdot \frac{r_0}{r_0 - \frac{1}{2} mgt^2 \cos \mu}.$$

La vitesse de rotation au bout du temps t est

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{gt \cos \mu}{r_0 - \frac{1}{2} mgt^2 \cos \mu},$$

et l'accélération de rotation

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{g \cos \mu (r_0 + \frac{1}{2} gt^2 \cos \mu)}{(r_0 - \frac{1}{2} mgt^2 \cos \mu)^2}.$$

Enveloppes des spires de la spirale, de sa développée, etc. — On sait que, lorsqu'une courbe roule sur une autre, la normale commune à l'enveloppe et à l'enveloppée passe par le point de contact correspondant de la courbe roulante et de la courbe fixe.

Je rappellerai, en outre, cette propriété de la spirale logarithmique : si OM et ON sont deux rayons de la spirale, et que, sur un troisième rayon OM' comme homologue de OM , on construise le triangle $OM'N'$ semblable au triangle OMN , le point N' appartiendra à la spirale.

Cela posé, sur OM je construis un segment capable de l'angle $90^\circ + \mu$; il appartient à la circonférence décrite sur le diamètre MH et rencontre la spirale en des points N, P, Q, \dots . Les tangentes en ces points faisant l'angle μ avec les rayons vecteurs sont perpendiculaires aux droites MN, MP, MQ, \dots , et passent par conséquent par le point fixe H . Les points M, N, P, Q, \dots sont donc les points de contact des spires avec leurs enveloppes, et ces enveloppes sont des lignes droites passant par le point H .

Le point de contact étant en M' , on obtiendra de même le système de points $M', N', P', Q', \dots, O'$, homothétique au système M, N, P, Q, \dots, O , par rapport au centre H ; donc *les mouvements des points de contact des spires avec leurs enveloppes sont, comme celui du point O , des mouvements uniformément accélérés, et leurs accélérations sont entre elles comme les distances simultanées de ces points au point H , ou comme les sécantes des angles que leurs trajectoires font avec OH .*

On sait que la développée d'une spirale logarithmique est une spirale qui vient coïncider avec la première en la faisant tourner autour du pôle d'un angle $\alpha = \frac{\tau}{2} - \frac{l \cdot m}{m}$, dans le sens négatif.

Cela posé, du point O comme centre avec le rayon OM , décrivons une circonférence, et menons les rayons OM_1, OM_2, OM_3, \dots , faisant avec OM les angles $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots$. Sur l'un quelconque de ces rayons OM_n , décrivons un segment capable de l'angle $\frac{\pi}{2} + \mu$, qui coupe la spirale aux points n_n, p_n, q_n, \dots . Si l'on fait tourner ce système autour de O , de l'angle $n\alpha$, de manière à ramener OM_n sur OM , les points n_n, p_n, q_n, \dots viendront se placer en N_n, P_n, Q_n, \dots sur la circonférence de diamètre MH , et deviendront *les points de contact de la $n^{\text{ième}}$ développée avec son enveloppe; les trajectoires de ces points seront des lignes droites passant par H .* Les systèmes de points $M, N_n, P_n, Q_n, \dots, O$ et $M', N'_n, P'_n, Q'_n, \dots, O'$ correspondant à deux positions M, M' du point de contact seront encore homothétiques par rapport au point H , et, par suite, *ces points décriront leurs trajectoires d'un mouvement uniformément accéléré et arriveront en même temps au point H .*

Lieu des centres de courbure. — Le centre de cour-

bure de la spirale relatif au point M est en C à la rencontre de la normale en M avec HO prolongée : celui de la développée relatif au point C s'obtient en construisant le triangle OCC_1 semblable à OMC ; le centre de courbure correspondant de la seconde développée, en construisant OC_1C_2 semblable à OMC , et ainsi de suite.

Les points C, C_1, C_2, \dots sont donc situés sur une spirale logarithmique égale à la première, de même pôle, les rayons égaux des deux spirales faisant l'angle α . Au bout du temps t , le système M, C, C_1, C_2, \dots, O sera remplacé par le système $M', C', C'_1, C'_2, \dots, O'$ homothétique au premier par rapport au centre H ; il en résulte que *les centres de courbure considérés décrivent d'un mouvement uniformément accéléré des trajectoires rectilignes aboutissant au point H , en restant à chaque instant sur une spirale logarithmique dont le mouvement est semblable à celui de la première.*

On a vu que *les points de contact des spires de la spirale, de sa développée, de la développée de cette développée, et, en général, de la développée d'ordre n avec leurs enveloppes sont, à chaque instant, sur une circonférence ayant pour diamètre la droite qui joint le point de contact de la spirale roulante avec MH au point H .*

Question 1158

(voir 2^e série, t. XIV, p. 95) :

PAR M. MORET-BLANC.

Étant donnée une masse quelconque dont chaque molécule attire suivant une loi qu'on suppose être représentée par une simple fonction de la distance au point attiré, on peut se proposer de trouver toutes les surfaces jouissant de cette propriété que les droites suivant lesquelles sont dirigées les attractions de la masse sur tous

les points matériels de l'une quelconque d'entre elles soient normales à une même surface. Démontrer que, pour chacune des surfaces cherchées, il existe une relation constante $f(R, V) = 0$ entre le potentiel de la masse relatif à chaque point de cette surface et la grandeur R de l'attraction de la masse sur ce point. Si la relation ne contient pas R , elle donne des surfaces de niveau ; si elle ne contient pas V , elle donne ce qu'on peut appeler des surfaces d'égale attraction.

(F. DIDON.)

Soient S une surface remplissant la condition de l'énoncé ; S_1 l'une des surfaces auxquelles les directions de l'attraction sur chaque point de S sont normales ; $M(x, y, z)$ un point quelconque de S ; $M_1(x_1, y_1, z_1)$ le point où la direction de l'attraction sur M rencontre S_1 ; $MM_1 = l$, valeur positive ou négative suivant que M_1 est la direction de l'attraction ou sur son prolongement ; $X = \frac{dV}{dx}$, $Y = \frac{dV}{dy}$, $Z = \frac{dV}{dz}$ les composantes de R parallèles à trois axes de coordonnées rectangulaires.

Les cosinus des angles de la direction de R avec les axes sont $\frac{X}{R}$, $\frac{Y}{R}$, $\frac{Z}{R}$, ceux de la tangente en M_1 à une courbe tracée sur S_1 sont $\frac{dx_1}{ds_1}$, $\frac{dy_1}{ds_1}$, $\frac{dz_1}{ds_1}$. Pour que la direction de R soit normale à S_1 , il faut que l'on ait

$$X dx_1 + Y dy_1 + Z dz_1 = 0.$$

Or

$$x_1 = x + \frac{X}{R} l,$$

$$y_1 = y + \frac{Y}{R} l,$$

$$z_1 = z + \frac{Z}{R} l;$$

d'où

$$dx_1 = dx + \frac{X}{R} dl + l d \frac{X}{R},$$

$$dy_1 = dy + \frac{Y}{R} dl + l d \frac{Y}{R},$$

$$dz_1 = dz + \frac{Z}{R} dl + l d \frac{Z}{R}.$$

Ajoutant ces équations multipliées respectivement par $\frac{X}{R}$, $\frac{Y}{R}$, $\frac{Z}{R}$, et ayant égard à la relation

$$\left(\frac{X}{R}\right)^2 + \left(\frac{Y}{R}\right)^2 + \left(\frac{Z}{R}\right)^2 = 1,$$

d'où

$$\frac{X}{R} d \frac{X}{R} + \frac{Y}{R} d \frac{Y}{R} + \frac{Z}{R} d \frac{Z}{R} = 0,$$

il vient

$$0 = \frac{X}{R} dx + \frac{Y}{R} dy + \frac{Z}{R} dz + dl;$$

d'où

$$dl = - \frac{X dx + Y dy + Z dz}{R} = - \frac{dV}{R}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que dl soit une différentielle exacte est qu'il existe entre R et V une relation

$$f(R, V) = 0,$$

en vertu de laquelle R sera une fonction de V , $R = \varphi(V)$, et l'on aura

$$l = - \int \frac{dV}{\varphi(V)} + C.$$

L'équation

$$f(R, V) = 0,$$

où R et V sont des fonctions de x, y, z , définit une surface S , lieu des points M , telle que les directions des

attractions de la masse attirante sur chaque point de cette surface seront normales à une même surface S_1 . Pour chaque surface S , il existe une infinité de surfaces S_1 , se déduisant toutes de l'une d'elles, en portant sur les normales, à partir de la surface, une longueur constante.

Si $f(R, V)$ ne contient pas R , on en tire, pour V , des valeurs constantes; $dV = X dx + Y dy + Z dz = 0$, et R est normale à S , qui est une surface de niveau $l = \text{const.}$

Si $f(R, V)$ ne contient pas V , on en tire pour R des valeurs constantes. Les surfaces S sont des *surfaces d'é-gale attraction*. On a alors

$$l = C - \frac{V}{R}.$$

Question 1175

(voir 2^e série, t. XIV, p. 288);

PAR M. MORET-BLANC.

Résoudre en nombres entiers et positifs l'équation

$$x^y = y^x + 1.$$

Cette équation est évidemment satisfaite par $y = 0$, quel que soit x .

Pour obtenir des solutions en nombres finis, remarquons d'abord que x et y doivent être peu différents l'un de l'autre, et que leur différence doit être un nombre impair.

1^o Supposons d'abord $x > y$, et soit $x = y + n$. On devra avoir

$$(y + n)^y - y^{y+n} = 1,$$

ou, en divisant par y^y ,

$$\left(1 + \frac{n}{y}\right)^y - y^n = \frac{1}{y^y}.$$

(45)

Or $\left(1 + \frac{n}{y}\right)^y$ est $< e^n < 3^n$; donc il ne peut surpasser 3^n .

Si l'on fait $y = 1$, on a

$$n = 1, \quad x = 2.$$

Pour $y = 2$,

$$\left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 - 2^n = \frac{1}{2^2}.$$

Cette équation est satisfaite par $n = 1$, d'où $x = 3$.

Pour $n = 3$, le premier membre devient négatif, et *a fortiori* pour $n > 3$.

On a ainsi les deux solutions

$$y = 1, \quad x = 2,$$

$$y = 2, \quad x = 3,$$

et il n'y en a pas d'autres avec $x > y$.

2° Soit $y > x$; posons $y = x + n$,

$$x^{x+n} - (x+n)^x = 1,$$

et, en divisant par x^x ,

$$x^n - \left(1 + \frac{n}{x}\right)^x = \frac{1}{x^x}.$$

x , d'après la discussion précédente, ne saurait être inférieur à 3; or, pour $x = 3$, le premier membre de-

vient $3^n - \left(1 + \frac{n}{3}\right)^3$, valeur qui, pour $n = 1$, surpasse

déjà le second membre, et *a fortiori* pour $n > 1$, car le terme positif croît avec n plus rapidement que le terme négatif. D'ailleurs, pour $x > 3$,

$$x^n - \left(1 + \frac{n}{x}\right)^x > 4^n - e^n > 4^n - 3^n > 1,$$

tandis que $\frac{1}{x^x}$ est < 1 .

Il n'y a donc pas de solution pour $y > n$, et les seules

solutions en nombres entiers positifs sont

$$y = 0, \quad x \text{ arbitraire,}$$

$$y = 1, \quad x = 2,$$

$$y = 2, \quad x = 3.$$

Question 1180

(voir 2^e série, t. XIV, p. 240);

PAR M. MORET-BLANC.

Une pile de boulets à base carrée ne contient un nombre de boulets égal au carré d'un nombre entier que lorsqu'elle en contient 24 sur le côté de la base.

(É. LUCAS.)

Il faut que l'on ait

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = m^2$$

ou

$$n(n+1)(2n+1) = 6m^2.$$

Les trois facteurs n , $n+1$, $2n+1$ étant premiers entre eux, il faut que celui qui est pair soit le sextuple d'un carré, les deux autres étant des carrés impairs, ou bien que le nombre pair soit le double d'un carré, les deux nombres impairs étant l'un un carré, l'autre le triple d'un carré.

1^o Soit n pair : il faut aussi qu'il soit divisible par 3, sans quoi l'un des deux autres facteurs serait de la forme $3k+2$, incompatible avec celle d'un carré ou d'un triple carré. On aura donc

$$n = 6q^2, \quad n+1 = p^2, \quad 2n+1 = r^2,$$

ou

$$p^2 - 6q^2 = 1,$$

$$r^2 - 12q^2 = 1.$$

Les solutions entières de ces deux équations s'obtien-

ment, comme on sait, en développant $\sqrt{6}$ et $\sqrt{12}$ en fractions continues et prenant les termes des réduites correspondant aux quotients complets dont le dénominateur est égal à 1. Ce sont, dans les deux cas, les réduites de rang impair : on obtient ainsi les séries de valeurs

$$\begin{aligned} p &= 1, 5, 49, 485, 4801, 47525, \dots, \\ q &= 0, 2, 20, 198, 1960, 19402, \dots, \\ r &= 1, 7, 97, 1351, 18217, \dots, \\ q &= 0, 2, 28, 390, 7432, \dots \end{aligned}$$

q devant avoir la même valeur dans les deux équations, et ne pouvant être zéro, on n'a pas d'autre solution commune que

$$q = 2, p = 5, r = 7,$$

d'où

$$n = 24 \quad \text{et} \quad m^2 = 4 \cdot 25 \cdot 49 = 4900.$$

2° Soit n impair : $n + 1$ sera pair et de forme $3k + 2$, sans quoi l'un des nombres $n, 2n + 1$ serait de cette forme, incompatible avec celle d'un carré ou d'un triple carré; on aura alors

$$n = p^2, n + 1 = 2q^2, 2n + 1 = 3r^2,$$

d'où

$$\begin{aligned} p^2 - 2q^2 &= -1, \\ p'^2 - 6r^2 &= -2, \end{aligned}$$

en posant $2p = p'$.

Les solutions de ces équations sont données par les réduites de rang pair dans le développement de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{6}$ en fractions continues. On obtient ainsi les séries de valeurs

$$\begin{aligned} p &= 1, 7, 41, 239, 1393, 8119, \dots, \\ q &= 1, 5, 29, 169, 985, 5741, \dots, \\ p' &= 2p = 2, 22, 218, 1158, 12362, \end{aligned}$$

(48)

d'où

$$p = 1, 11, 109, 579, 6181, \dots,$$

$$r = 1, 9, 89, 881, 8721, \dots$$

La seule valeur commune de p est $p = 1$:

$$p = 1, q = 1, r = 1, \text{ d'où } n = 1$$

Donc, en écartant le cas d'un seul boulet, le nombre des boulets de la pile ne sera un carré que lorsqu'elle en aura 24 sur le côté de la base.