

## **Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 16  
(1877), p. 429-432

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1877\\_2\\_16\\_\\_429\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__429_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS  
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

---

*Question 1180*

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XIV, p. 336);

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

*Une pile de boulets à base carrée ne contient un nombre de boulets égal au carré d'un nombre entier que lorsqu'elle en contient vingt-quatre sur le côté de la base.* (ÉDOUARD LUCAS.)

On sait, en effet, que la somme des carrés des  $x$  premiers nombres entiers a pour expression

$$\frac{x(x+1)(2x+1)}{6};$$

on doit donc poser

$$x(x+1)(2x+1) = 6y^2;$$

mais les facteurs  $x$ ,  $x+1$  et  $2x+1$  sont premiers entre eux, et l'équation précédente donne les neuf décompositions suivantes :

I. . . . .	$x = 6u^2,$	$x+1 = v^2,$	$2x+1 = w^2;$
II. . . . .	$x = 3u^2,$	$x+1 = 2v^2,$	$2x+1 = w^2;$
III. . . .	$x = 3u^2,$	$x+1 = v^2,$	$2x+1 = 2w^2;$
IV. . . . .	$x = 2u^2,$	$x+1 = 3v^2,$	$2x+1 = w^2;$
V. . . . .	$x = 2u^2,$	$x+1 = v^2,$	$2x+1 = 3w^2;$
VI. . . . .	$x = u^2,$	$x+1 = 6v^2,$	$2x+1 = w^2;$
VII. . . .	$x = u^2,$	$x+1 = 3v^2,$	$2x+1 = 2w^2;$
VIII. . . .	$x = u^2,$	$x+1 = 2v^2,$	$2x+1 = 3w^2;$
IX. . . . .	$x = u^2,$	$x+1 = v^2,$	$2x+1 = 6w^2.$

Nous allons examiner successivement ces neuf hypothèses.

I. On a

$$(1) \quad w^2 - 1 = 12u^2,$$

et, par suite, puisque les facteurs  $w+1$  et  $w-1$  ont leur plus grand commun diviseur égal à 2, on en déduit, en admettant les valeurs négatives de  $w$ ,

$$(2) \quad w - 1 = 2x^2;$$

mais, d'autre part,

$$(3) \quad w^2 + 1 = 2v^2.$$

Les équations (2) et (3) doivent être vérifiées en même temps. Le système de ces deux équations a été traité complètement par M. Gerono (\*); il n'admet pour solu-

---

(\*) Voir même tome, p. 231.

tions entières que les valeurs  $w = \pm 1$  et  $w = \pm 7$ . Ces valeurs vérifient d'ailleurs l'équation (1); on en déduit  $x = 0$  et  $x = 24$ . Ainsi

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 24^2 = \frac{24 \cdot 25 \cdot 49}{6} = 4900.$$

II. Cette hypothèse conduit à l'équation

$$2v^2 - 3u^2 = 1,$$

impossible suivant le module 3.

III. On déduit de cette décomposition l'équation

$$2w^2 - 6u^2 = 1,$$

impossible suivant le module 2.

IV. On obtient aisément

$$w^2 + 1 = 6v^2,$$

équation impossible suivant le module 3.

V. Cette hypothèse donne l'équation

$$4u^2 + 1 = 3w^2,$$

impossible suivant le module 3 ou le module 4.

VI. On trouve l'équation, impossible suivant le module 3,

$$6v^2 = u^2 + 1.$$

VII. On trouve de même l'impossibilité

$$3v^2 = u^2 + 1.$$

VIII. Cette hypothèse ne donne que la solution  $x = 1$ , d'après la remarque qui termine l'article précédent.

IX. On est conduit à l'impossibilité

$$2u^2 + 1 = 6w^2.$$

( 432 )

Ainsi, en résumé, la somme des carrés des  $x$  premiers nombres entiers n'est jamais égale à un carré parfait, excepté pour  $x = 24$ .