Stefan Klein

Wie berechenbar ist das Schachspiel?

Eine kurze Betrachtung im Hinblick auf die finitistische Erkenntnistheorie von Dr. Alfred Gierer

Es war ein langjähriger Vereinskollege, der die Frage im vergangenen Jahr in die Runde warf. Rein theoretisch, so seine Überlegung, müsste die Anzahl bzw. der Verlauf aller möglichen Schachpartien vollständig berechenbar sein; schließlich beruhe das Schachspiel auf streng logischen Regeln ohne Zufallsfaktor. Sofern man alle theoretisch möglichen Partien erfasst und durchgerechnet hätte, könnte man diese in einer riesigen Datenbank abspeichern. Infolgedessen müsste jede denkbare Partiestellung, die man in der Turnierpraxis aufs Brett bekommen kann, irgendwo in dieser „Mega-Datenbank" abgespeichert sein, so dass man genau angeben könnte, ob eine bestimmte Stellung objektiv gewonnen, verloren oder remis ist. Das Schachspiel würde irgendwann in ferner Zukunft seinen Reiz verlieren.

Ich fand diese Gedanken spannend und ernüchternd zugleich. Doch wie realistisch ist ein solches Zukunftsszenario? Lässt sich das Schachspiel mit seinen Myriaden von denkbaren Kombinationen tatsächlich eines Tages vollständig durchrechnen, so dass es nichts Neues, nichts Überraschendes mehr bieten kann? Auf der Suche nach Antworten stieß ich zunächst auf Fakten, die man praktisch überall nachlesen kann. Laut Spieltheorie zählt das Schachspiel zu den so genannten *„Nullsummenspielen"* mit *„perfekter Information"*. Als *„Nullsummenspiele"* bezeichnet man Spiele, bei denen die theoretischen Gewinnchancen für beide Seiten annähernd gleich sind – also zusammen genommen Null ergeben. *„Perfekte Information"* bedeutet, dass das Spiel keinerlei Zufallsfaktoren beinhaltet und somit – im Prinzip – vollständig ausrechenbar ist.

Das Postulat mit den beiderseitig gleichen Gewinnchancen mag in der Theorie stimmen, die Praxis ergibt sich jedoch ein etwas anderes Bild. Die Datenbank von *ChessBase* enthält in ihrer aktuellen Version von 2010 fast 4,5 Millionen gespeicherte Partien aus der gesamten Schachgeschichte. Demnach ergibt sich ein leichter Gewinnvorteil für Weiß: In etwa 39% aller gespielten Partien ging Weiß als Sieger hervor, 30% endeten mit einem Remis und in 31% aller Begegnungen gewann Schwarz. Diese nicht zu übersehende Chancenungleichheit zwischen Weiß und Schwarz wird auf den weißen Anzugsvorteil zurückgeführt, aber darum soll es hier nicht gehen. Viel wichtiger zur Beantwortung unserer Frage ist der Aspekt der *„perfekten Information"*. Schach ist in der Tat ein Spiel, das nach streng logischen Regeln funktioniert und keinerlei Zufallsfaktoren enthält. Insofern müsste es tatsächlich möglich sein, alle denkbaren Kombinationen und Spielverläufe vollständig auszurechnen, zumindest *theoretisch*. Will man klären, ob das Schachspiel auch *praktisch* vollständig berechenbar ist, muss man zunächst wissen, wie viele mögliche Partieverläufe es überhaupt geben kann.

Wie viele mögliche Partien gibt es?

Die möglichen Variationen und Verzweigungen beim Schach sind – entsprechend der Komplexität des Spiels – ungeheuer vielfältig und schon nach wenigen Zügen kaum noch überschaubar. Nach dem ersten Zug *(jeweils ein Halbzug von Weiß und Schwarz)* ist es noch einfach. Hier können maximal 400 verschiedene Stellungen entstehen; nämlich 20 weiße Anfangszüge (16 Bauern- und 4 Springerzüge) multipliziert mit 20 möglichen Antwortzügen von Schwarz; also 20 x 20 = 400 mögliche Stellungen.

Nach nur zwei Zügen wird die Sache schon sehr viel unübersichtlicher, denn hier gibt es nach jeweils zwei Halbzügen bereits 72.084 mögliche Stellungen. Nach dem jeweils 3. Zug von Weiß und Schwarz lassen sich selbst unter Mathematikern nur noch vage Angaben über die über die

Zahl der möglichen Stellungen machen. Die Zahl wird auf Werte zwischen $9{,}12 \times 10^6$ und $9{,}14 \times 10^6$ geschätzt (Bonsdorf/Fabel/Riihimaa, S.9). Insgesamt soll sich die Zahl der möglichen (legalen) Schachstellungen schätzungsweise 2×10^{43} belaufen (Bonsdorf/Fabel/Riihimaa, S.10). Spätestens hier versagt das menschliche Vorstellungsvermögen völlig.

Es lässt sich bereits erahnen, in welch unvorstellbare Dimensionen man vorstoßen muss, will man nicht nur alle denkbaren *Stellungen*, sondern die Zahl aller *Partieverläufe* berechnen, die theoretisch möglich sind – seien sie in ihrem Spielverlauf auch noch so absurd oder unwahrscheinlich. Die ersten halbwegs fundierten Schätzungen zu dieser Frage stammen aus der Mitte des vorigen Jahrhunderts. Der jugoslawische Problemschach-Experte Nenad Petrović (1907-1989) hat sich seinerzeit wohl am eingehendsten mit Fragen aus der Schachtheorie beschäftigt. Im Jahr 1948 berechnete er die Zahl der theoretisch möglichen Schachpartien auf die unvorstellbar große Zahl von 10^{18900} Partien (nach Bonsdorf/Fabel/Riihimaa, S.13). Der britische Mathematiker John E. Littlewood (1885-1977) kam wenig später (1953) auf den noch sehr viel höheren Wert von maximal [10 hoch-$10^{70,5}$] spielbaren Partien (Littlewood 1953 S. 109). Dimensionen also, bei denen das menschliche Vorstellungsvermögen vollständig kapitulieren muss.

Allein für die ersten 10 Züge soll es etwa 10^{29} mögliche Zugfolgen geben (Bonsdorf/Fabel/Riihimaa, S.10). Für für die ersten 40 Züge wurden Zahlen zwischen 10^{115} und 10^{120} möglichen Partieverläufen errechnet (Bonsdorf/Fabel/Riihimaa, S.13). Der russische Mathematiker Maurice Kraitchik (1882-1975) kam z. B. auf einen Wert von ungefähr $2{,}5 \times 10^{116}$ spielbare Partien für 40 Züge (Kraitchik 1944).

Schach und finitistische Erkenntnistheorie

Doch egal, wie hoch die Zahl konkret der möglichen Partien konkret auch ist: Allein für die ersten 40 Züge findet man in der Literatur keinen Wert, der die Zahl von 10^{120} nennenswert unterschreitet. Dieser Umstand ist deshalb so interessant, weil mir die Zahl 10^{120} zuvor bereits in einem Buch begegnet ist, das ich vor einigen Jahren gelesen habe. Nicht im Zusammenhang mit Schach, aber als theoretische Obergrenze im Rahmen einer wissenschaftstheoretischen Abhandlung. Der Biophysiker Alfred Gierer (Max-Planck-Institut für Entwicklungsbiologie) hat in den 80er-Jahren seine *„Finitistische Erkenntnistheorie“* entwickelt. In seinem Buch *„Die Physik, das Leben und die Seele“* aus dem Jahr 1985 beschriebt er diese Theorie. Sie hat in der Wissenschaft bislang wenig Beachtung gefunden, obwohl sie bemerkenswerte Überlegungen zur Endlichkeit unserer Welt enthält, die wissenschaftsphilosophisch von großer Tragweite sein dürften.

In seiner Theorie bezeichnet Gierer die Zahl *10^{120}* als eine *„kosmologische Obergrenze analytischer Operationen“.* (Gierer 1985, S. 54) Das bedeutet: Sämtliche Problemstellungen, zu deren Klärung mehr als *10^{120}* Rechenoperationen benötigt werden, sind aus erkenntnistheoretischen Gründen nicht berechenbar – und somit prinzipiell unentscheidbar. Gierer begründet diese Annahme mit zwei grundlegenden Naturkonstanten, nämlich der Anzahl der stabilen Elementarteilchen im bekannten Universum (ca. 10^{80}) und dem (aufgerundeten Alter) des Universums (20 Milliarden Jahre), gemessen in so genannten „Elementarzeiten“ (= 10^{40}), die er miteinander multipliziert. Die „Elementarzeit“ ist nach Gierer jenes Zeitintervall, das ein stabiles Elementarteilchen (aus denen auch jeder Computer besteht) nach den Gesetzen der Quantenmechanik *(Unschärferelation von Energie und Zeit)* mindestens benötigt, um eine verlässliche Rechenoperation durchzuführen.

Zur Ermittlung der „Elementarzeit“ hat Gierer die Massen von Elektron und Proton gemittelt (Gierer 1985, S.301) , wobei er gemäß der Heisenbergschen Unschärferelation von Energie und Zeit ($\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$) auf einen (gerundeten) Wert von 10^{-23} Sekunden kommt. Ein Computer, der weniger als diese „Elementarzeit“ für einen Rechenschritt benötigt, wäre physikalisch nicht möglich, weil die Quantenmechanik das nicht zulässt. Das heißt, auch der schnellste theoretisch vorstellbare Rechner *(oder genauer gesagt: jedes einzelne informationsverarbeitende Element eines solchen Rechners)* könnte höchstens 10^{23} Rechenoperation pro Sekunde ausführen.

Multipliziert man diese Zahl mit dem Alter des Universums in Sekunden (etwa 10^{17}) dann ergibt sich, dass selbst der schnellstmögliche Rechner, sofern er seit Beginn des Universums ununterbrochen gerechnet hätte, seit Anbeginn der Welt höchstens $10^{23} \times 10^{17} = 10^{40}$ Rechenschritte ausgeführt haben könnte – und das auch nur rein theoretisch unter niemals realisierbaren Bedingungen. Gierer beschreibt die Schlussfolgerungen, die sich daraus ergeben:

„Ein Computer, der so groß und so alt wäre wie das ganze Universum, der seit seinem Bestehen ununterbrochen rechnen würden und dessen Bauelemente einzelne langlebige Elementarteilchen wären, könnte bis heute höchstens 10^{120}

Operationen ausgeführt haben – nämlich die Anzahl der elementaren Bausteine (10^{80}) multipliziert mit dem Alter der Welt in Elementarzeiten (10^{40}). Das Alter der Welt geht deshalb in die Abschätzungen ein, weil jedes Bauelement – jedes Elementarteilchen also – nur an höchstens einer Operation pro Elementarzeit beteiligt sein kann; waren es mehr, so wäre die Stabilität des Bauelements in Frage gestellt, der Computer wäre nicht mehr verläßlich. Bei dieser Abschätzung der Größenordnung kommt es für die folgenden Betrachtungen auf einige Nullen mehr oder weniger vor dem Komma gar nicht an. Die Anzahl 10^{120} ist eine praktisch nie erreichbare Obergrenze kosmologisch möglicher Prozesse; die Anzahl der tatsächlich möglichen analytischen Operationen ist schon wegen der Kürze des menschlichen Lebens viel kleiner.“ (Gierer 1985, S. 54)

Gierers ausführliche Überlegungen sind in Kapitel II seines Buches nachzulesen. Inzwischen existiert auch eine frei zugängliche Online-Ausgabe; der Link dazu findet sich im Literaturverzeichnis. Ich finde Gierers Theorie deshalb so interessant, weil demnach auch das Schachspiel mit seinen unvorstellbar vielen Möglichkeiten niemals vollständig berechenbar wäre.

Prinzipielle Grenzen der Erkenntnis

Auch wenn sich die Fachliteratur nicht einig ist, wie hoch die Zahl der möglichen Partien tatsächlich ist, so findet man allein für die ersten 40 Züge keinen Wert, der die Zahl von 10^{120} nennenswert unterschreitet. Das reicht für die Feststellung, dass es allein für die ersten 40 Züge schon prinzipiell unmöglich sein wird, alle denkbaren Partien nacheinander durchrechnen, denn für annähernd *10^{120}* Möglichkeiten sind mindestens ebenso viele Rechenoperationen notwendig. Für alle Partien, die länger als 40 Züge dauern, wären es sogar noch sehr viel mehr.

Ein angenommener „Supercomputer“, der in der Lage sein soll, die notwendigen 10^{120} Rechenoperationen auszuführen müsste sämtliche Materie des uns bekannten Universum enthalten (= *10^{80}* Elementarteilchen), wobei er selbst dann noch 20 Milliarden Jahre (= 10^{40} Elementarzeiten) rechnen müsste – eine in der Tat völlig utopische Vorstellung, die sich niemals realisieren lässt. Wobei ich hier der Einfachheit halber davon ausgehe, dass für jede der 10^{120} durchzurechnenden Partien nur jeweils ein einziger Rechenschritt erforderlich wäre. In der Praxis werden es noch sehr viel mehr sein, schließlich kann man nicht jede Partie mit nur einem einzigen Rechenschritt auf alle denkbaren Fortsetzungen prüfen. In der Praxis wären die Grenzen der Berechenbarkeit also vermutlich schon sehr viel früher erreicht.

Von daher kann man wohl mit Sicherheit davon ausgehen, dass die vollständige Berechnung aller theoretisch möglichen Schachpartien für immer außerhalb dessen liegt, was uns als Menschen jemals möglich sein wird. Gierers Theorie belegt das recht überzeugend, wie ich finde. Seine Veröffentlichungen liegen zwar schon mehr als 25 Jahre zurück, aber die Grundannahmen von Gierers finitistischer Erkenntnistheorie sind immer noch gültig. Lediglich das Alter das Universums (nach Gierer 20 Milliarden Jahre) wird von der Kosmologie mit 13,7 Milliarden Jahren heute etwas geringer eingeschätzt (Musser 2011). Gierers Obergrenze von 10^{120} analytischen Operationen müsste demnach eher sogar nach unten korrigiert werden, keinesfalls nach oben.

Vielleicht sind diese Schranken der möglichen Erkenntnis auch ganz gut so, denn ein vollständig ausrechenbares Schachspiel wäre nicht mehr das, was es heute ist. Dann doch lieber ein Schachspiel, das niemals vollständig berechenbar ist – dafür aber seine Faszination und Spannung behält, die dieses Spiel seit jeher ausgemacht haben. Das Schachspiel lebt von der unübersehbaren Vielfalt seiner Kombinationen, die immer wieder neu und einmalig sind. Diese Einmaligkeit der Schachkombinationen scheint auch naturwissenschaftlich begründbar zu sein. Zumindest dann, wenn sie aus einer hinreichend großen Zahl von Zügen entstanden ist , die in ihren Möglichkeiten nicht mehr einzeln durchgerechnet werden können. Dies scheint zumindest ab einer Zahl von 40 Zügen definitiv der Fall zu sein.

Die Schachpartie als einmaliges „Kunstwerk“

Auch wenn solche Gedankenexperimente jenseits aller Wirklichkeit liegen, so bekommt man erst durch sie einen Begriff davon, wie unvorstellbar groß die Zahl von (mindestens) 10^{120} möglichen Schachpartien überhaupt ist, denn wie wir gesehen haben, übersteigt diese Zahl alles, was im Universum real existiert. Daraus ergeben sich weit reichende praktische und auch philosophische Konsequenzen, die sich schon auf erstaunlich alltagsrelevante Situationen auswirken können, wie Alfred Gierer anschaulich beschreibt:

„Wenn man mehr als 10^{120} *Möglichkeiten innerhalb von drei Minuten eine beliebige, möglichst zufällige und unregelmäßige Folge von über 120 Ziffern auf ein Blatt Papier schreibt, so ist die sich ergebende Zahl ein einmaliges, originelles*

‚Kunstwerk´. Da es mehr als 10^{120} *Zahlen dieser Länge gibt, ist es beliebig unwahrscheinlich, daß die gleiche Zahl je wieder zufällig auftritt, solange die Welt besteht. Auch wäre es prinzipiell unmöglich, alle Zahlen dieser Größenordnung einzeln darauf zu überprüfen, ob sie eine bestimmte Eigenschaft haben oder nicht. Für Texte von der Länge einer Schreibmaschinenseite oder die Passagierliste eines Großraumflugzeugs gibt es ebenfalls viel mehr Möglichkeiten, als je einzeln geprüft oder realisiert werden können.“* (Gierer 1985, S. 55)

Das bedeutet: Auch eine 40 Züge lange Schachpartie (mit ihren annähernd 10^{120} Möglichkeiten) wäre demnach ein genauso *einmaliges* und *unverwechselbares* Kunstwerk, das kein zweites Mal zufällig wieder irgendwo auftauchen wird, solange dieses Universum existiert. Ist das nicht faszinierend? Da könnte man doch glatt in Ehrfurcht erstarren vor den eigenen Partien, denn im Grunde hat man damit etwas ganz einmaliges und unwiederbringliches geschaffen. Ich bin zwar ein mathematischer und physikalischer Laie, finde es aber ungeheuer faszinierend, das Schachspiel zur Abwechslung auch mal im Hinblick auf derartige Theorien zu betrachten.

Schach ist mehr als nur Mathematik

Allerdings kann man trefflich darüber streiten, inwieweit es mir der Turnierpraxis überhaupt hilft, wenn ich weiß, dass eine Stellung theoretisch gewonnen, verloren oder remis ist. Wir alle wissen, dass Theorie und Praxis zweierlei paar Schuhe sind. Eine theoretisch gewonnene Stellung ist in der Praxis noch lange nicht gewonnen, da hier noch ganz andere Faktoren hinzu kommen (Zeitnot, Nervosität, Konzentration usw.), die sich niemals vorhersagen lassen. Schachspielen ist eben nicht nur mathematische Theorie, sondern immer auch eine spontane *(und damit grundsätzlich unvorhersagbare)* Interaktion zwischen lebendigen Menschen.

Keine noch so umfassende mathematische Theorie kann alle denkbaren Eventualitäten vorherberechnen, die das menschliche Verhalten und Erleben mit sich bringt. Wer kann schon vorhersehen, ob ein Spieler gerade einen „schlechten Tag“ hat, an dem er während der Partie plötzlich unaufmerksam wird und ganz unerwartet eine Figur einstellt? Oder wer will vorausahnen, ob sich ein junger Spieler auf einem Turnier nicht ganz unerwartet in das hübsches Mädchen vom Nachbarbrett verliebt und deshalb seine volle Leistung nicht mehr abrufen kann?

Diese Fragen sind zwar rein rhetorischer Natur, aber sie veranschaulichen einen ganz entscheidenden Punkt: Schach kombiniert die streng berechenbare Welt der Logik mit der Lebendigkeit (und der Unberechenbarkeit) menschlichen Verhaltens. Gerade deshalb fasziniert es uns so sehr. Wer das Schachspiel auf seine mathematisch-abstrakten Aspekte reduziert, wird ihm in seiner vollen Bedeutung nicht gerecht.

Schach bringt Menschen miteinander in Kontakt, schafft Gemeinschaft und befriedigt soziale Bedürfnisse, z. B. nach Wettkampf, Zusammengehörigkeitsgefühl und gemeinsamen Erlebnissen. In dieser Hinsicht wird das Schachspiel immer lebendig und voller Überraschungen bleiben – selbst dann, wenn es mathematisch eines Tages vollständig ausgerechnet wäre. Das das aber mit Sicherheit niemals passieren wird, dürfen uns noch lange an diesem wunderbaren Spiel freuen, so wie es heute ist und wohl auch immer bleiben wird.

Adresse des Autors:
stef-k@t-online.de

Quellen:

- Bonsdorf E., Fabel K., Riihimaa O.: „*Schach und Zahl“*, Walter Rau Verlag, 3. Auflage, Düsseldorf 1978

- Chess Base GmbH: „*Mega Database 2010*“, Hamburg 2010

- Gierer A.: „*Die Physik, das Leben und die Seele“*, Piper-Verlag, München 1985

  Zu diesem Buch ist eine frei zugängliche Online-Ausgabe verfügbar, die neu formatiert wurde, so dass die angegeben Seitenzahlen leicht abweichen können:

  http://edoc.bbaw.de/volltexte/2006/105/pdf/20rGXUFzQvc.pdf

- Kraitchik M.: „*Mathematical recreations“*, George Allen & Unwin Ltd, London 1944

- Littlewood, J. E.: *„A Mathematican´s Miscellany“*, Methuen & Co. LTD. London 1953

- Musser G.: *„Kann die Zeit enden?*“, in: Spektrum der Wissenschaft 5/11, S. 36, 2011