Einsteins Relativitätstheorie...

...relativ einfach erklärt

Volkshochschule Rapperswil-Jona

8. November 2005

Arthur Ruh

Autor:
Dr. Arthur Ruh
Säntisweg 4
CH-8630 Rüti ZH
Switzerland

Korrigierte und erweiterte Version

August 2007

Korrekturen

Seite 18: ... in der Strömungsrichtung des Aether**s** für die...

Seite 25: Mit de**r** Aussage, dass...
Nach drei Halbwertszeiten, d.h. zur Zeit $t = 3\,T$**,** ist noch...

Seite 27: Verglichen mit einer fiktiven Uhr, die sich im Weltraum mit der Erde mitbewegt, ohne jedoch die Erddrehung mitzumachen, bewegt sich daher die **Uhr** auf der Erde schneller als die Uhr im Flugzeug.

Seite 28, Fussnote 10: Ein dritter, sehr sch**w**acher Stern...

Seite 29: Da eine Kommunikation über eine Distanz von 4 Lichtjahren sowieso nicht einfach **ist**,

Seite 46: ... bei sonst gleichen Maschinenparametern **wie diejenigen des** LHC...

Seite 50, Tabelle 5: Δm 0.188**8**3

Seite 50: Bei der Fusion von total 5.030151 amu „D-T-Brennstoff" wird also eine Massendifferenz von 0.0188**8**3 amu in Energie umgesetzt.

Bei der Fusion von 5.03**0**151 kg D-T-Brennstoff wird eine Massendifferenz von 0.0188**8**3 kg in Energie umgesetzt.

$$H = \frac{E}{\Delta m} = \frac{1.679 \cdot 10^{15}}{5.03\mathbf{0}151} = 3.374 \cdot 10^{14}\,,$$

Seite 60, neu Seite 61: Einsetzen der G**le**ichung für s liefert

Seite 66, neu Seite 67:

$$\text{Statt } \vec{F} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = m\,a\,, \text{ neu: } \vec{F} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = m\,\vec{a}\,.$$

Erweiterung

Seite 52, neuer Abschnitt: Raumschiff im interstellaren Medium

September 2010

Korrekturen

Seite 12, Fussnote 1: ... sind zusätzlich **drei** Winkelangaben erforderlich.

Seite 36: Mit Nuklear**r**aketen können Aus**s**trömgeschwindigkeiten...

Seite 57: Es werden zwei gleiche Massen m_1 und ${m_2}'$ betrachtet...

Seite 57, Abbildung 50: ${m_2}'$

Seite 60: Da jedoch nach Voraussetzung keine äusseren Kräfte a**u**f den Zylinder wirken,...

Vorwort

Dieses Skript ist eine etwas erweiterte und leicht modifizierte Fassung des Vortrags

„Einsteins Relativitätstheorie...
...relativ einfach erklärt“,

den ich am 8. November 2005 an der Volkshochschule Rapperswil-Jona gehalten habe.

Das Skript soll interessierten Hörerinnen und Hörern die Möglichkeit geben, den einen oder anderen Gedankengang nochmals nachzuvollziehen.

Das Skript enthält einige Ergänzungen, die im Vortrag aus Zeitgründen nicht behandelt wurden, insbesondere die Ausführungen über Galilei- und Lorentz-Transformationen. Andererseits fehlen die vielleicht spontanen Bemerkungen im Vortrag, da dieser frei gehalten wurde, ohne dieses Manuskript zu verwenden.

Ferner enthält das Skript einige einfache physikalische Gleichungen. Leserinnen und Leser, die nicht über die entsprechenden mathematischen Kenntnisse verfügen, können ohne weiteres über diese Formelzeilen hinweglesen. Alles Wesentliche ist auch in Worten ausgedrückt.

Die wichtigsten mathematischen und physikalischen Begriffe und Gesetze, die in diesem Skript verwendet werden, sind im Anhang kurz und einfach erklärt.

Rüti ZH, November 2005

Arthur Ruh

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

In und nach diesem Jahr wird es wohl kaum noch jemand geben, der nicht schon eines der folgenden Bilder gesehen hätte (Abbildungen 1 bis 4).

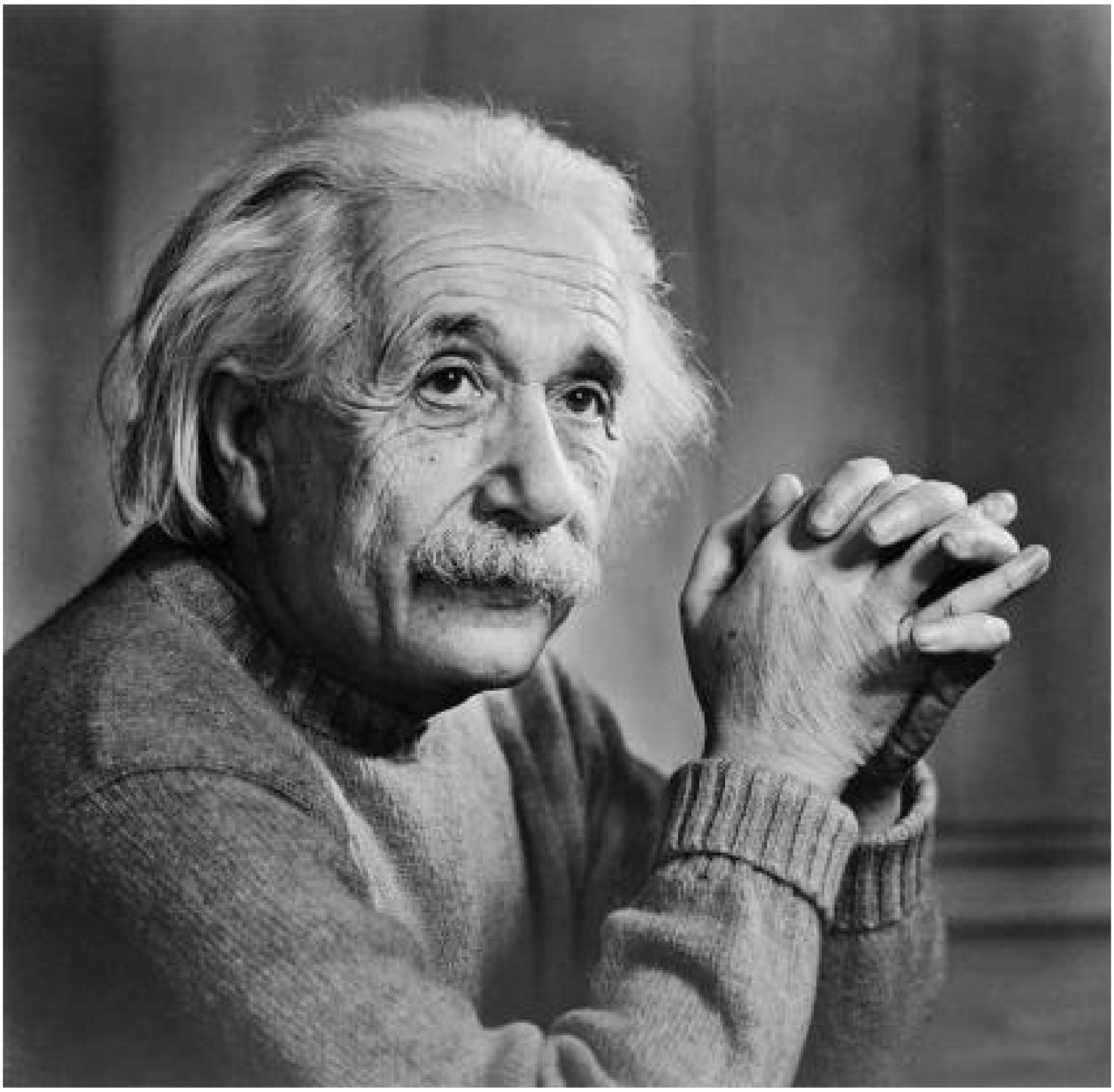

Abbildung 1:

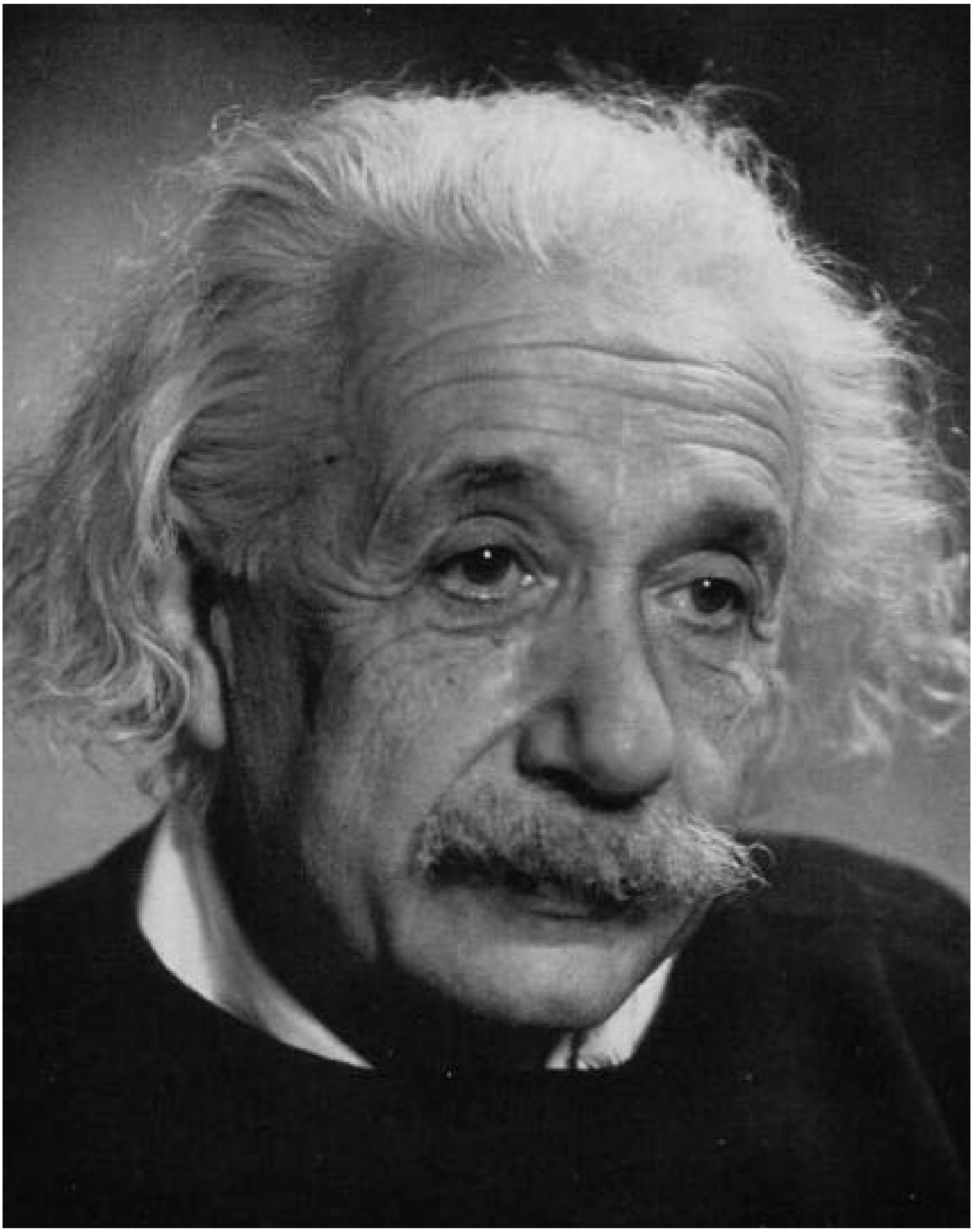

Abbildung 2:

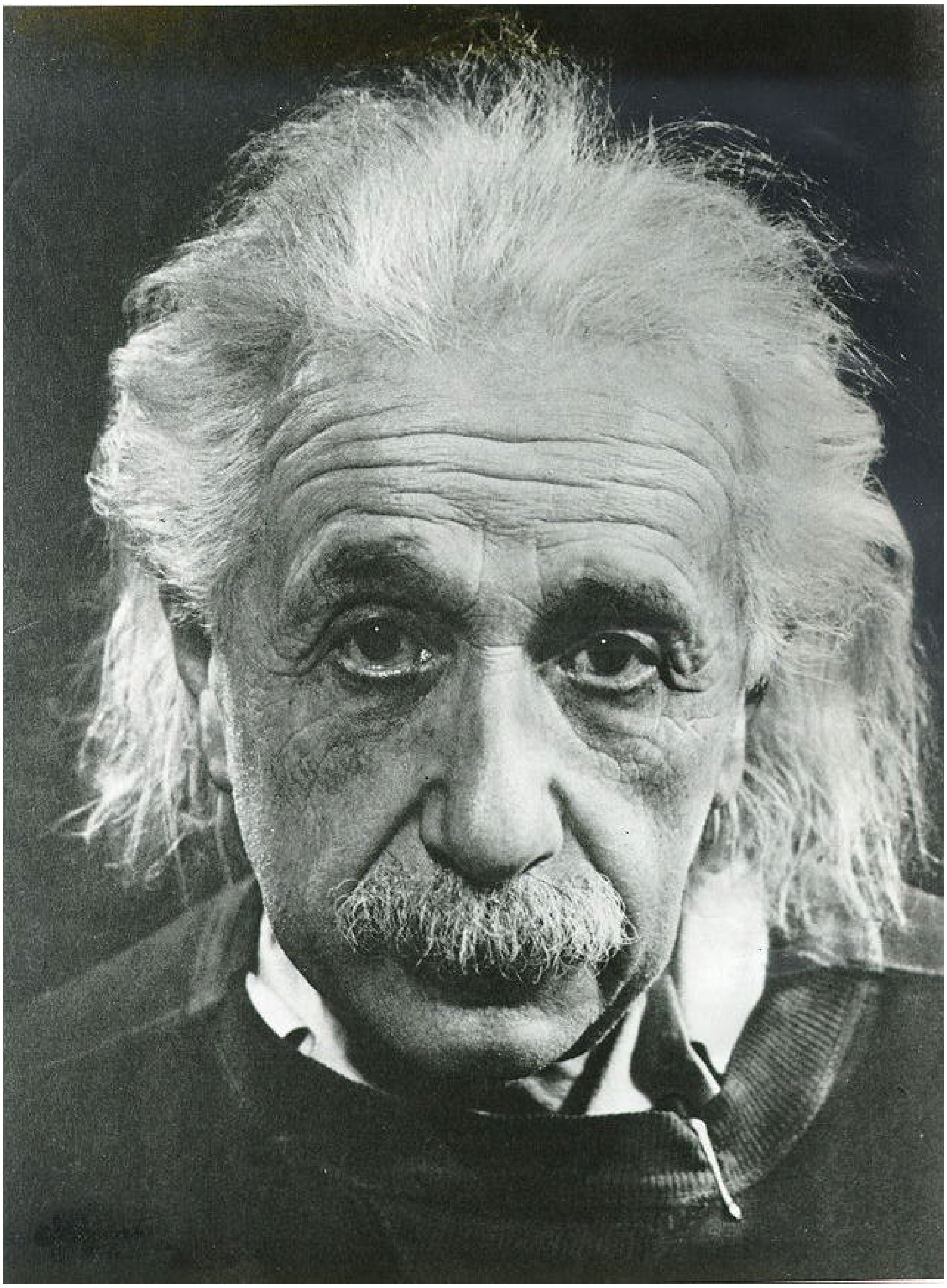

Abbildung 3:

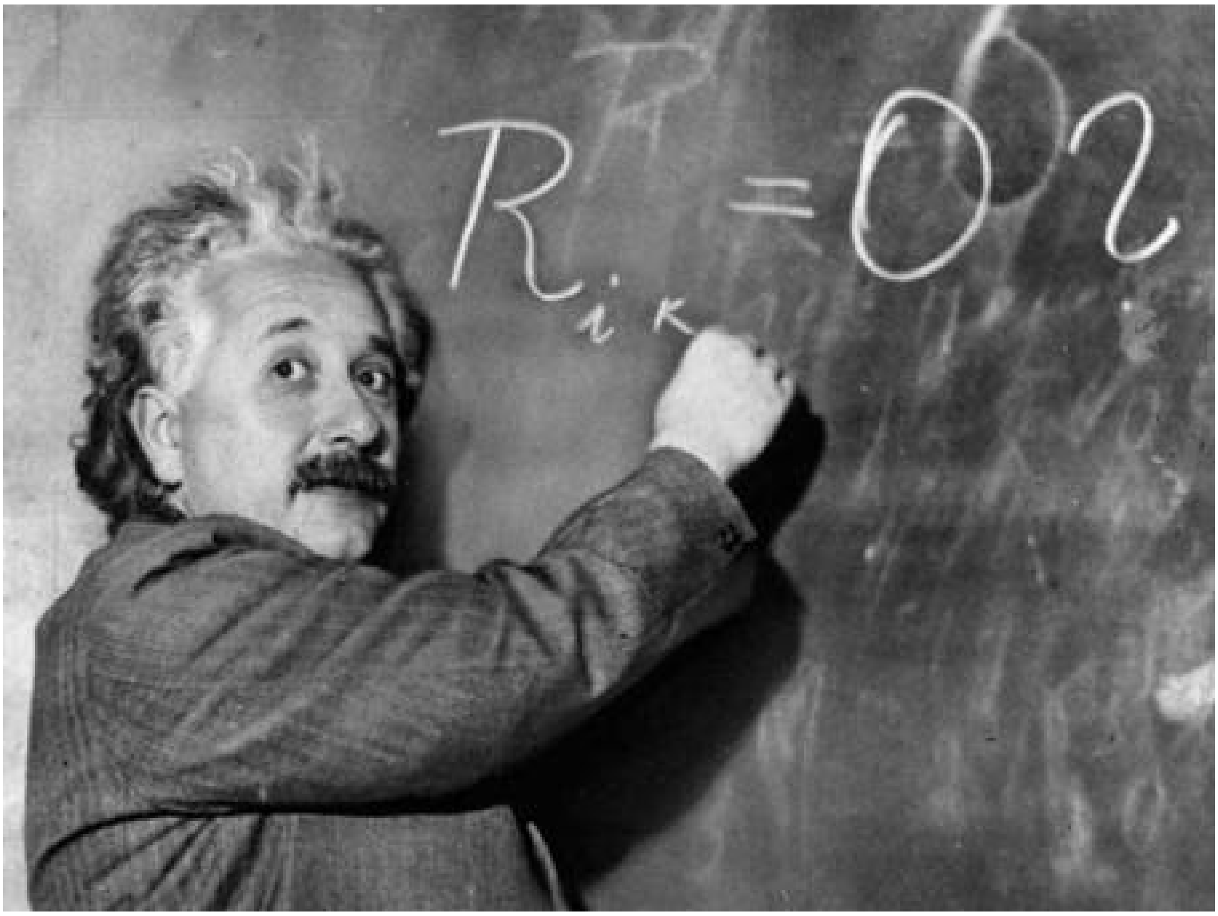

Abbildung 4:

Was man jedoch eher selten zu sehen bekommt, ist das Bild von Einstein zu der Zeit, als er seine fünf berühmten Arbeiten verfasste.

Abbildung 5:

Ebenfalls selten zu sehen ist das Bild von Einstein mit seiner ersten Frau, Mileva Einstein-Marić, die wie Einstein im Wintersemester 1896 das Studium an der Abteilung für Mathematik und Physik der ETH begonnen hatte. Sie war eine hochbegabte Studentin. Es ist sehr umstritten, ob und wieviel sie an der Herleitung der Relativitätstheorie beteiligt war. Immerhin gibt es eine Reihe von Indizien, die diese Frage zumindest als nicht völlig unbegründet erscheinen lassen.

Abbildung 6:

Schon vor dem Einsteinjahr waren die typischen Bilder von Einstein sehr häufig zu sehen und wurden vor allem in der Werbung in allen möglichen und unmöglichen Zusammenhängen verwendet oder, besser gesagt, missbraucht. Abbildung 6 zeigt ein Beispiel, das zudem gleich zwei Missverständnisse enthält.

Abbildung 7:

Schon der Titel ist falsch. Unsere „Raumschiffe“ erreichten bisher maximale Geschwindigkeiten von etwa 30 km/s. Diese Geschwindigkeiten sind verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit (300’000 km/s) so klein, dass es absolut nicht notwendig ist, für die Bahnberechnungen die Relativitätstheorie zu verwenden. Die wesentlich einfacheren Beziehungen der klassischen Newtonschen Mechanik sind bei weitem genau genug.

Im Text auf der linken Seite des Bildes (Abbildung 8) heisst es „Noch heute werden nach seinen Gleichungen die Flugbahnen von Raumschiffen und -sonden programmiert.“ Richtig wäre: „In ferner Zukunft werden vielleicht die Flugbahnen von Raumschiffen nach seinen Gleichungen berechnet.“ Dann nämlich, wenn unsere Raumschiffe Geschwindigkeiten erreichen, die mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar sind.

Der Text enthält ein noch weiteres Missverständnis, das besonders weit verbreitet ist.

Albert Einstein
1879–1955
Die ETH in Zürich absolvierte er mit mässigem Erfolg. Bis auf die Mathematik natürlich. So musste er sich mit einer Anstellung beim Berner Patentamt bescheiden, die ihn allerdings so wenig forderte, dass er viel Zeit für seine Theorien hatte. Und diese revolutionierten die seit Isaac Newton gültigen Auffassungen von Zeit und Raum völlig.
Noch heute werden nach seinen Berechnungen die Flugbahnen von Raumschiffen und -sonden programmiert. Seine Gleichung $E = mc^2$ schuf die Grundlage für den Bau der Atombombe.

Zu allen Zeiten suchten geniale Köpfe nach Geräten und Systemen, welche Arbeit erleichtern und Kommunikation verbessern sollten. Und so manch verblüffende Erfindung brachte echten Fortschritt. Manchmal sofort, manchmal erst später...

Abbildung 8:

„Seine Gleichung $E = mc^2$ schuf die Grundlage für den Bau der Atombombe.“ Diese Aussage ist häufig zu lesen oder zu hören. Trotzdem ist sie schlicht falsch. Für den Bau der Atombombe wurde die Gleichung $E = mc^2$ nicht benötigt. Zur Entwicklung der Atombombe wäre es auch gekommen, wenn diese Gleichung nicht bekannt gewesen wäre.

1.1 2005, das Einsteinjahr

Das Jahr 2005 wurde aus zwei Gründen zum Einsteinjahr: Der 50. Todestag Albert Einsteins und der 100. Jahrestag von Einsteins „Wunderjahr“.

Albert Einstein wurde am 14. März 1879 in Ulm geboren, und er starb am 18. April 1955 in Princeton (New Jersey).

1905, in seinem „Wunderjahr“ („annus mirabilis“), veröffentlichte er fünf fundamentale Arbeiten:

1. Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen.
2. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen.
3. Zur Elektrodynamik bewegter Körper.
4. Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?

5. Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt.

In er ersten Arbeit zeigte Einstein, wie aus gemessenen Eigenschaften von Flüssigkeiten und Lösungen, wie Zähigkeit und Diffusionsgeschwindigkeit, die Grössen und Anzahlen von Molekülen bstimmt werden können.

In der zweiten Arbeit untersuchte Einstein die Brownsche Bewegung. 1828 veröffentlichte der Botaniker Robert Brown seine sorgfältigen Beobachtungen über die unregelmässigen Bewegungen mikroskopisch kleiner, in einer Flüssigkeit schwebender Teilchen. Brown konnte zeigen, dass diese bereits seit langem bekannte Bewegung allgegenwärtig ist und keine Lebenserscheinung darstellt. Bis zum Ende des 19. Jahrhunderts konnten eine Reihe von Erklärungsversuchen widerlegt werden, aber die richtigen Lösungsansätze, die Brownsche Bewegung auf die kinetische Wärmetheorie zurückzuführen, konnten nicht bestätigt werden. Erst Einstein gelang es, die Brownsche Bewegung qualitativ und quantitativ richtig auf die Wärmebewegung der Moleküle zurückzuführen. Einsteins Arbeit lieferte zudem ein starkes Indiz für die Richtigkeit der Vorstellung, dass die Materie aus Atomen und Molekülen besteht.

Die dritte Arbeit enthält die Grundlagen der Speziellen Relativitätstheorie. Einstein zeigte, dass sich das Relativitätsprinzip der klassischen Mechanik auf alle physikalischen Gesetze verallgemeinern lässt. Das Relativitätsprinzip besagt, dass alle relativ zueinander geradlinig gleichförmig bewegten Bezugssysteme „gleichwertig“ sind, das heisst, dass keines davon als „ruhend“ ausgezeichnet werden kann.

In der vierten Arbeit bewies Einstein, dass die Erhaltungssätze für Masse und Energie zu einem Masse-Energie-Erhaltungssatz vereinigt werden müssen. Diese Erkenntnis wird oft durch die vielzitierte Formel $E = mc^2$ ausgedrückt.

In der fünften Arbeit befasste sich Einstein mit dem erst teilweise gelösten Problem der Schwarzkörperstrahlung. Er zeigte, dass Licht nicht kontinuierlich emittiert und absorbiert wird, sondern im Form von kleinen „Energiepaketen“, den sogenannten „Lichtquanten“ oder „Photonen“. Diese Arbeit wird als die tiefgreifendste der fünf Arbeiten von 1905 betrachtet. Es war auch diese Arbeit und nicht etwa die Relativitätstheorie, für die Einstein 1921 den Nobelpreis erhielt.

1.2 Relativitätstheorie.... relativ einfach erklärt

Relativitätstheorie...

Welche Relativitätstheorie? Es gibt nämlich zwei Relativitätstheorien.

1. Spezielle Relativitätstheorie

   Die Spezielle Relativitätstheorie befasst sich mit den physikalischen Gesetzen und Transformationsgleichungen, die für geradlinig gleichförmig bewegte Bezugssysteme gelten.

   Einstein schuf die Grundlagen der Speziellen Relativitätstheorie in der dritten und vierten Arbeit, die er 1905, in seinem „Wunderjahr“, veröffentlichte.

2. Allgemeine Relativitätstheorie

   Die Allgemeine Relativitätstheorie befasst sich mit beschleunigt bewegten Bezugssystemen und ist zugleich eine Theorie der Gravitation.

Einstein publizerte die Allgemeine Relativitätstheorie im Jahr 1915.

In diesem Vortrag werden mit einer Ausnahme nur Resultate der Speziellen Relativitätstheorie diskutiert.

...relativ einfach erklärt

Kann man überhaupt ohne Mathematik eine physikalische Theorie wirklich verstehen?

Das hängt davon ab, was mit „verstehen“ gemeint wird.

Wenn „verstehen“ meint, die Aussagen und Resultate einer Theorie zu verstehen, so ist das grösstenteils möglich.

Wenn dagegen gemeint ist, auch die Herleitungen und Beweise zu verstehen, so ist das nur sehr beschränkt möglich.

Wird mit „verstehen“ gemeint, die Aussagen und Resultate sich *vorstellen* zu können, so ist das im Bereich der klassischen Physik noch weitgehend möglich, in den Bereichen der Relativitätstheorie und der Quantenmechanik aber kaum. Unsere Vorstellungen haben sich in unserer alltäglichen Umwelt entwickelt. Es ist daher verständlich, dass bei Geschwindigkeiten, die völlig jenseits unserer Erfahrungen sind, Phänomene auftreten, die nicht diesen Vorstellungen entsprechen. Auch die Objekte des Mikrokosmos entsprechen nicht diesen Vorstellungen. Ein Atom, ein Atomkern, ein Proton oder ein Elektron ist etwas völlig anderes als ein kleines Stahlkügelchen.

In diesem Vortrag geht es also nur darum, einige Aussagen und Resultate der Speziellen Relativitätstheorie zu beschreiben. Auf Herleitungen und Beweise wird völlig verzichtet. Hingegen werden einige konkrete Beispiele durchgerechnet.

2 Bezugssysteme und Relativitätsprinzip

2.1 Bezugssysteme

In der Mechanik geht es (unter anderem) um die Beschreibung und Erklärung der Bewegungen von Körpern unter dem Einfluss von Kräften. Beispielsweise kann die Bahn eines Planeten um die Sonne beschrieben werden und die Erklärung gegeben werden, warum der Planet diese Bahn durchläuft.

Damit eine Bewegung eines Körpers beschrieben werden kann, muss der momentane Ort des Körpers bestimmt werden können. Dazu braucht es ein sogenanntes Bezugssystem.

Ein Bezugssystem verfügt einerseits über ein Koordinatensystem, relativ zu dem die Bewegungen der betrachteten Körper beschrieben werden, und andererseits über ein System von Uhren, mit denen die Zeitpunkte von Ereignissen bestimmt werden können.

Es gibt viele verschiedene Koordinatensysteme. Am einfachsten ist das kartesische Koordinatensystem. Es besteht aus drei Geraden, die paarweise zueinander senkrecht stehen und die man sich mit Längenskalen versehen denken kann. Diese Geraden werden Koordinatenachsen genannt und in der Regel mit x, y und z bezeichnet (Abbildung 9).

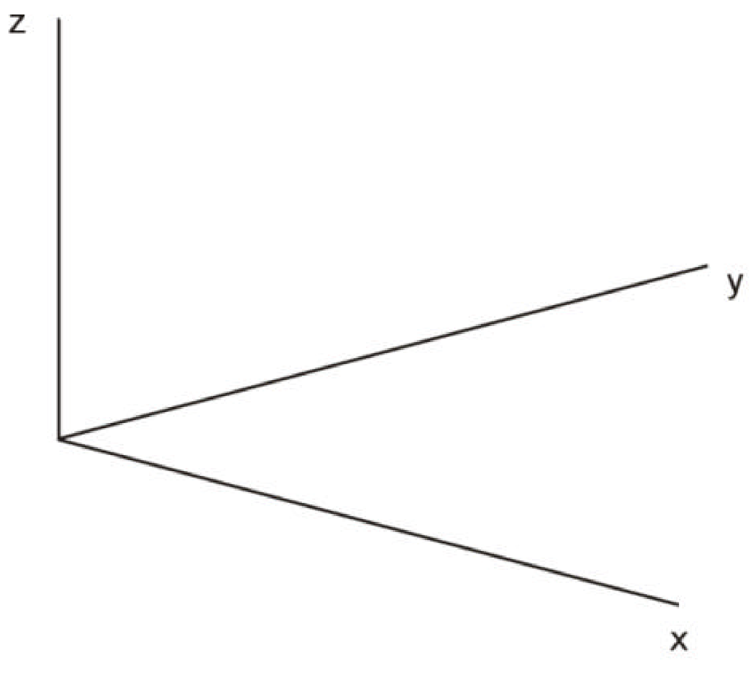

Abbildung 9: Kartesisches Koordinatensystem

Die Koordinaten eines Punktes P im Raum können dann beispielsweise folgendermassen bestimmt werden. Vom Punkt P wird das Lot (eine Senkrechte) auf die xy-Ebene gefällt. Die Höhe des Punktes über der xy-Ebene ist seine z-Koordinate. Falls sich der Punkt unterhalb der xy-Ebene (in Bezug auf die Richtung der z-Achse) befindet, hat er eine negative z-Koordinate. Werden nun vom Fusspunkt dieses Lotes Senkrechten zu den Achsen x und y gezeichnet, so ergeben sich in analoger Weise die x- und y-Koordinaten des Punktes P (Abbildung 10)[1].

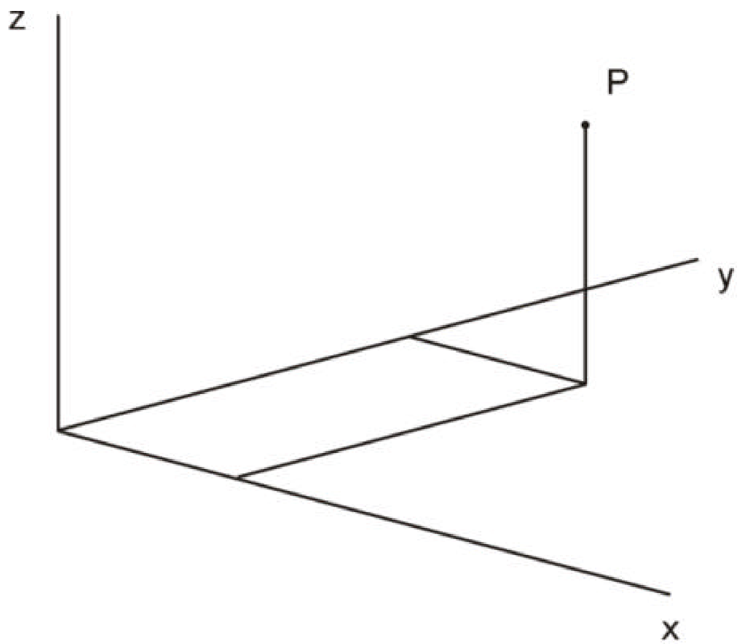

Abbildung 10: x-, y- und z-Koordinaten des Punktes P

Die Position eines Punktes im Raum kann also durch die drei Zahlen x, y und z beschrieben werden. In der Regel werden diese drei Zahlen noch eine Längenmasseinheit tragen, z.B. cm, m oder km.

Soll ein *Ereignis* im Raum beschrieben werden, so ist zusätzlich noch eine Zeitangabe t erforderlich. Ein Ereignis wird also durch vier Zahlen beschrieben: x, y, z und t.

Auch die Zeit t kann nun in einem Diagramm als zusätzliche „Koordinate“ eingetragen werden. Für die Betrachtungen in der Relativitätstheorie ist es dabei oft sehr zweckmässig, nicht t, sondern ct auf der Zeitkoordinatenachse aufzutragen, d.h. die Zeit t wird mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 300'000$ km/s multipliziert. Die Zeit wird also gewissermassen in Zentimetern, Metern oder Kilometern (oder in irgendeiner anderen Längeneinheit) gemessen[2].

Da in einem (nichtperspektivischen) Diagramm nur zwei Achsen gezeichnet werden können, lässt sich ausser der Zeitkoordinate nur noch eine räumliche Koordinate, z.B. die x-Achse, eintragen, was aber für viele Zwecke völlig ausreichend ist. Abbildung 11 zeigt ein Beispiel eines solchen

[1] Falls auch die Orientierung des Körpers im Raum von Bedeutung ist, sind zusätzlich drei Winkelangaben erforderlich. In manchen Problemstellungen spielt die Orientierung des Körpers keine Rolle. Zur Vereinfachung kann in einem solchen Fall der Körper als punktförmig betrachtet werden. Er wird dann als sogenannter „Massenpunkt“ angesehen, d.h. er hat eine Masse, aber keine Ausdehnung. Für die oben erwähnte Bahnbewegung eines Planeten um die Sonne spielt die Form und die Orientierung des Planeten praktisch keine Rolle, d.h. er kann als Massenpunkt betrachtet werden. Wird dagegen die Bewegung eines Satelliten auf niedriger Umlaufbahn um die Erde untersucht, spielt die Form und die Massenverteilung der Erde eine wesentliche Rolle, d.h. in diesem Fall kann die Erde nicht als Massenpunkt betrachtet werden.

[2] Bekannter ist die umgekehrte Operation, die darin besteht, dass eine Länge durch die Lichtgeschwindigkeit dividiert wird, wobei sich eine Zeit ergibt. Grosse Distanzen können auf diese Weise als „Lichtjahre“ angegeben werden. Ein „Lichtjahr“ ist also nicht etwa eine Zeitspanne (wie manchmal irrtümlich geglaubt wird), sondern die Distanz, die das Licht in einem Jahr zurücklegt.

Raum-Zeit-Diagramms.

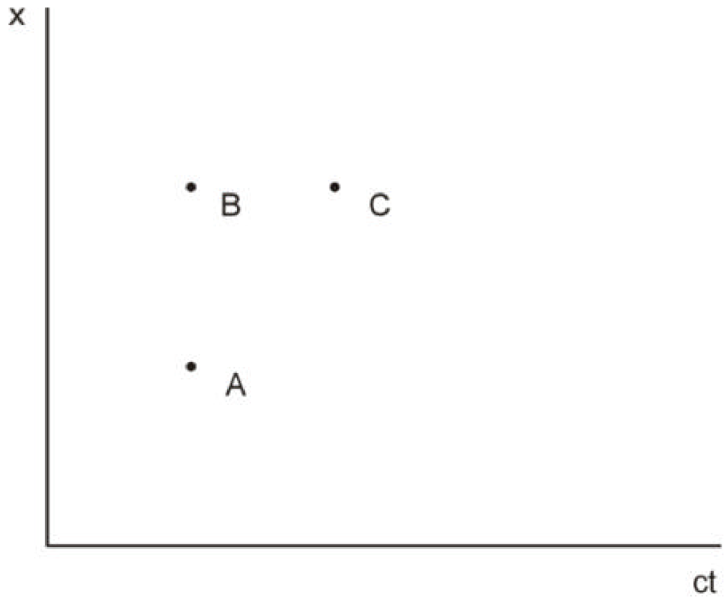

Abbildung 11: Raum-Zeit-Diagramm

Es ist leicht zu sehen, dass die Ereignisse B und C die gleiche x-Koordinate haben, d.h. sie finden am gleichen Ort statt (angenommen, dass auch die y- und z-Koordinaten übereinstimmen). Da das Ereignis C jedoch eine grössere ct-Koordinate als das Ereignis B hat, findet offenbar das Ereignis C nach dem Ereignis B statt.

Ebenso leicht ersichtlich ist, dass die Ereignisse A und B die gleiche ct-Koordinate haben. Die Ereignisse A und B finden also gleichzeitig statt. Das Ereignis B ist jedoch vom Koordinatennullpunkt weiter entfernt, weil seine x-Koordinate grösser ist als diejenige des Ereignisses A.

2.2 Geradlinig gleichförmig bewegte Bezugssysteme

Bei der Betrachtung der Grundgesetze der Mechanik wird zunächst gewissermassen stillschweigend vorausgesetzt, dass sich das Laboratorium in Ruhe befindet. In Wirklichkeit bewegt sich ein Labor auf 47° nördlicher Breite allein schon auf Grund der Erddrehung mit einer Geschwindigkeit von 316 m/s auf einer Kreisbahn um die Erdachse. Die Erde ihrerseits läuft mit einer Geschwindigkeit von 29.8 km/s auf der Erdbahn um die Sonne, und diese wiederum bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von rund 250 km/s um das Zentrum der Galaxis.

Es drängt sich also die Frage auf, wie sich die physikalischen Gesetze ändern, wenn physikalische Vorgänge in einem bewegten Bezugssystem beobachtet werden.

Die einfachste Bewegung ist die geradlinig gleichförmige Bewegung. Das bewegte Bezugssystem bewege sich also gegenüber dem ruhenden Bezugssystem auf einer Geraden mit konstanter Geschwindigkeit. Konkret kann man sich einen Eisenbahnzug vorstellen, der idealerweise auf einem perfekt geraden Geleise mit konstanter Geschwindigkeit erschütterungsfrei und lautlos fährt (Abbildung 12). Diese ideale Situation lässt sich am ehesten durch eine Magnetschienenbahn realisieren.

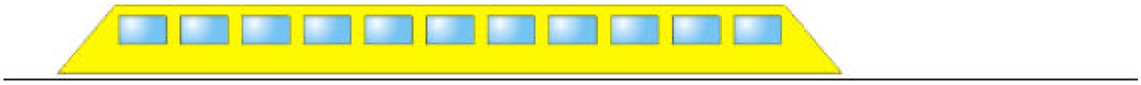

Abbildung 12: Geradling gleichförmig bewegter Eisenbahnzug

In einem Wagen dieses Eisenbahnzuges möge nun ein ganzes physikalisches Laboratorium mit allen nur wünschbaren Apparaten eingerichtet werden (Abbildung 13).

Abbildung 13: Geradling gleichförmig bewegtes Labor

Ein Physiker[3] soll nun in diesem bewegten Labor Experimente durchführen und versuchen festzustellen, ob der Zug sich bewegt oder stillsteht. Damit er das nicht einfach dadurch erkennen kann, indem er aus dem Fenster schaut, sind alle Fenster mit undurchsichtigen Folien zugeklebt. Wie vorausgesetzt, bewege sich der Zug absolut erschütterungsfrei und geräuschlos[4].

Kann der Physiker unter diesen Voraussetzungen feststellen, ober der Zug fährt oder stillsteht?

Das einfachste Experiment, das man sich denken kann und das praktisch jeder Eisenbahnpassagier schon einmal durchgeführt hat, besteht darin, dass man im Eisenbahnwagen marschiert. Wenn der Zug wirklich gleichförmig auf einer geraden Strecke fährt, merkt der Passagier beim Gehen nicht den geringsten Unterschied gegenüber dem Gehen auf einer Strasse.

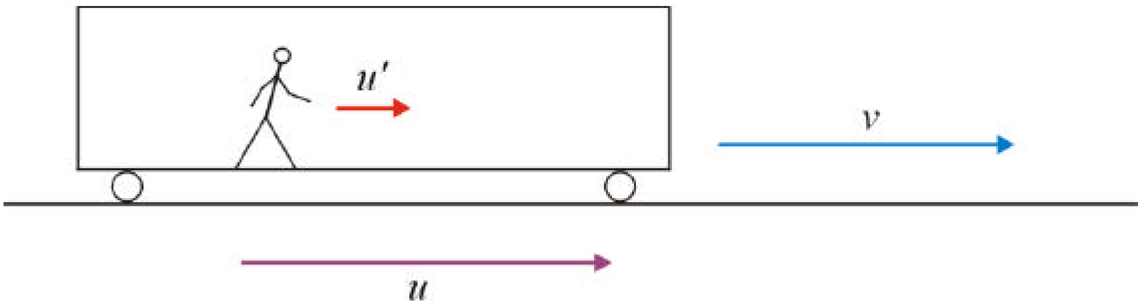

Abbildung 14: Addition von Geschwindigkeiten

[3] Selbstverständlich sind hier und im folgenden immer sowohl männliche als auch weibliche Personen gemeint. Sprachliche Schwerfälligkeiten wie „ein Physiker oder eine Physikerin“ und sprachliche Ungeheuerlichkeiten wie „PhysikerIn“ werden hier vermieden.

[4] Eine wirklich erschütterungsfreie und geräuschlose Bewegung liesse sich tatsächlich mit einem Raumschiff realisieren, das antriebslos im Weltraum treibt. Das Beispiel mit dem Eisenbahnzug ist aber vielleicht etwas anschaulicher.

Wenn der Passagier in Fahrtrichtung marschiert, addiert sich offenbar seine Geschwindigkeit zu der Geschwindigkeit des Zuges. Wenn der Zug mit der Geschwindigkeit v fährt und der Passagier mit der Geschwindigkeit u' in Fahrtrichtung marschiert, würde ein ruhender Beobachter auf dem Bahndamm feststellen[5], dass sich der Passagier mit der Geschwindigkeit $u = v + u'$ vorbeibewegt (Abbildung 14).

Wie schon dieses Beispiel zeigt, genügt es im allgemeinen nicht, den Betrag einer Geschwindigkeit zu kennen, es muss auch die Richtung der Geschwindigkeit bekannt sein. Dass die Richtung einer Geschwindigkeit entscheidend sein kann, kann durch folgendes Beispiel veranschaulicht werden (s. Abbildung 15).

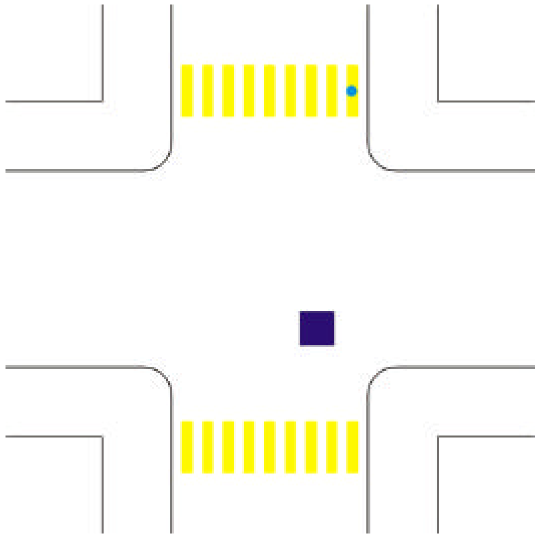

Abbildung 15: Fussgänger und Auto auf einer Kreuzung

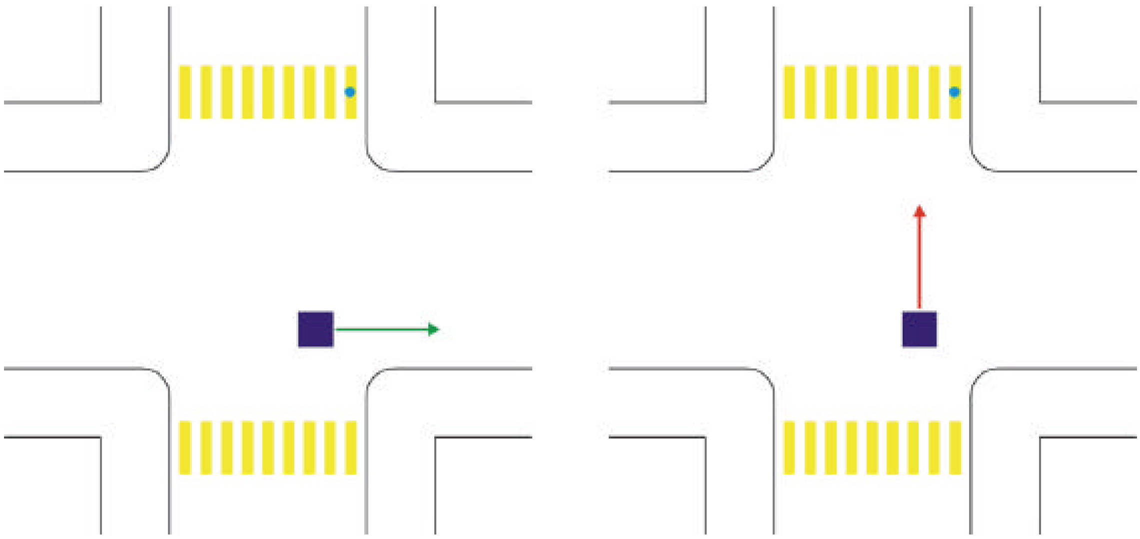

Abbildung 16: Verschiedene Fahrtrichtungen des Autos

[5] Für dieses Experiment seien ausnahmsweise die Fenster nicht zugeklebt oder noch besser, der Zug sei völlig durchsichtig.

Wenn jemand (blauer Punkt) im Begriff ist, eine Strasse zu überqueren und gleichzeitig fährt auf der Kreuzung ein Auto (schwarzes Quadrat) mit 50 km/h, so ist diese Information offensichtlich nicht ganz hinreichend.

Nämlich je nach dem, in welcher Richtung das Auto fährt, ist die Situation harmlos (Abbildung 16, links) oder bedrohlich (Abbildung 16, rechts).

Zur vollständigen Bestimmung einer Geschwindigkeit braucht es also einen Betrag (d.h. einen Zahlenwert) und eine Richtung.

Physikalische Grössen, die durch einen Betrag und eine Richtung charakterisiert sind, können graphisch durch einen Pfeil symbolisiert werden. Die meisten (aber nicht alle) dieser Grössen lassen sich mathematisch durch sogenannte „Vektoren“ darstellen. Beispiele für solche Grössen sind: Kräfte, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Mit Hilfe der Geschwindigkeitsvektoren lassen sich die Additionen von Geschwindigkeiten sehr anschaulich darstellen.

Falls der Passagier in Fahrtrichtung des Zuges geht, addiert sich seine Geschwindigkeit zu derjenigen des Zuges (Abbildung 17). Der Passagier marschiere mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h. Damit die Addition der Geschwindigkeiten besser sichtbar ist, wurde für den Zug die etwas niedrige Geschwindigkeit von 20 km/h angenommen. Gegenüber dem Bahndamm bewegt sich der Passagiere dann mit der Geschwindigkeit 25 km/h.

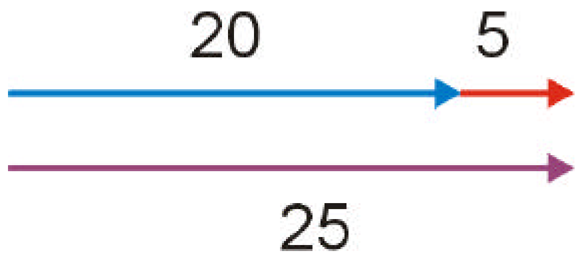

Abbildung 17: Passagier geht in Fahrtrichtung

Falls der Passagier entgegengesetzt zur Fahrtrichtung marschiert, subtrahiert sich seine Geschwindigkeit von der Zugsgeschwindigkeit, und er hat relativ zum Bahndamm eine Geschwindigkeit von 15 km/h (Abbildung 18).

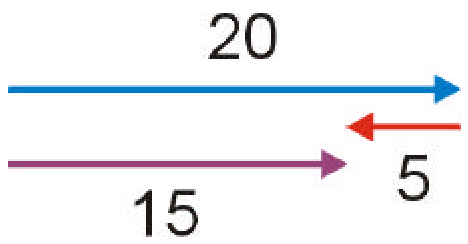

Abbildung 18: Passagier geht entgegengesetzt zur Fahrtrichtung

Falls schliesslich der Passagier genau quer zur Fahrtrichtung marschiert, ergibt sich bei der Addition der Geschwindigkeiten ein rechtwinkliges Dreieck. Nach dem Satz von Pythagoras gilt für die

Dreiecksseiten die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$. Die resultierende Geschwindigkeit wird somit[6]:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

In diesem Beispiel ist $a = v$, $b = u'$ und $c = u$. Es ergibt sich (Abbildung 19):

$$u = \sqrt{v^2 + u'^2} = \sqrt{20^2 + 5^2} = \sqrt{400 + 25} = \sqrt{425} = 20.6\,.$$

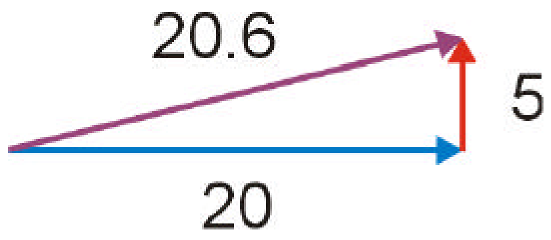

Abbildung 19: Passagier geht quer zur Fahrtrichtung

Die Addition von Geschwindigkeiten wurde hier so ausführlich diskutiert, weil sie später gebraucht wird.

Wie gesagt, bemerkt der Passagier beim Gehen während geradliniger gleichförmiger Fahrt des Zuges nichts von der Bewegung des Zuges.

Das Gleiche gilt nun tatsächlich auch für beliebige Experimente, die der vorhin erwähnte Physiker in seinem fahrenden Labor anstellen kann (Abbildung 20).

Mit keinem Experiment kann er entscheiden, ob der Zug fährt oder stillsteht. Alle relativ zueinander geradlinig gleichförmig bewegten Bezugssysteme sind daher physikalisch gleichwertig, und es ist physikalisch sinnlos, von einem „ruhenden“ Bezugssystem zu sprechen. Wenn von einem „ruhenden Bezugssystem“ gesprochen wird, ist damit meist ein Bezugssystem gemeint, das sich relativ zu einem bestimmten Punkt der Erde nicht bewegt. Wie bereits erläutert, bewegt sich ja aber dieser Punkt in recht komplizierter Weise. In vielen (aber nicht in allen) Fällen kann jedoch diese Bewegung unberücksichtigt bleiben, so dass der Begriff „ruhendes System“ für den alltäglichen Sprachgebrauch (auch in der Physik) gerechtfertigt ist.

In einem „ruhenden“ Bezugssystem gilt das erste Newtonsche Gesetz, das auch „Trägheitsgesetz“ genannt wird:

> Ein Körper, auf den keine Kräfte wirken, verharrt im Zustand der Ruhe oder bewegt sich geradlinig gleichförmig.

Wenn in einem bestimmten Bezugssystem das Trägheitsgesetz gilt, dann gilt es auch in jedem relativ dazu geradlinig gleichförmig bewegten Bezugssystem. Keines dieser Bezugssysteme ist in irgendeiner Weise gegenüber den anderen ausgezeichnet, alle Systeme sind gleichwertig. Diese Bezugssysteme werden „Inertialsysteme“ genannt[7].

[6] Für die Erklärung des Quadrats (a^2) und der Wurzel ($\sqrt{a^2 + b^2}$) einer Zahl siehe Anhang.

[7] Das lateinische Wort „inertia“ bedeutet „Trägheit“, „Untätigkeit“, „Ungeschicklichkeit“.

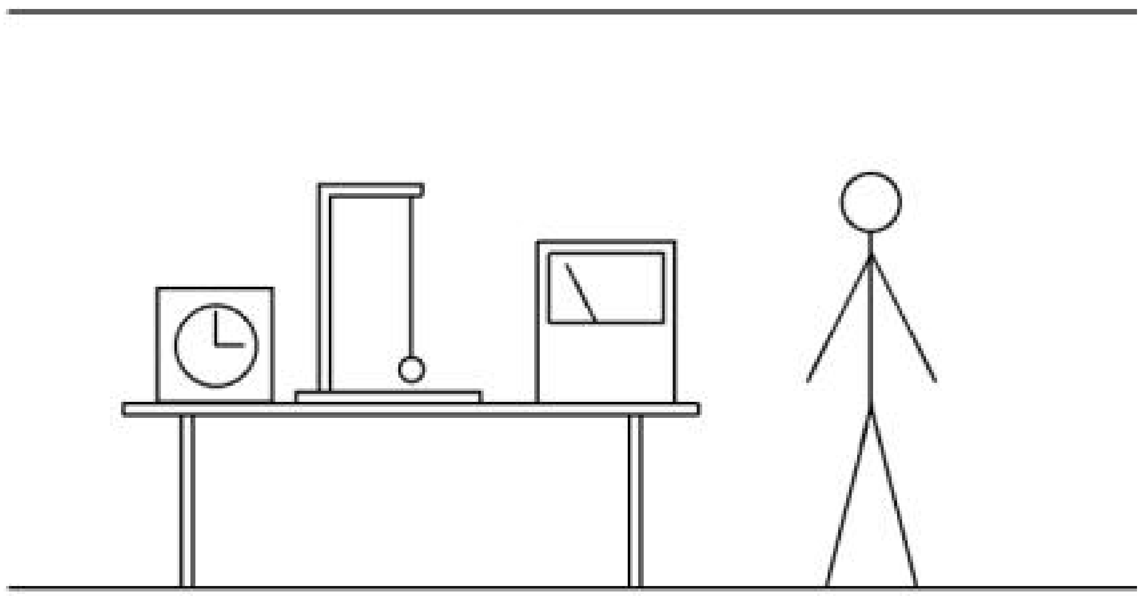

Abbildung 20: Geradlinig gleichförmig bewegtes Labor

2.3 Das Michelson-Morley-Experiment

Seit Anfang des 19. Jahrhunderts war bekannt, dass Licht Wellencharakter hat. Zunächst fasste man die Lichtwellen als elastische Wellen auf. Das Medium, in dem sich die Lichtwellen fortpflanzen, nannte man „Aether“. Da bekannt war, dass sich das Licht auch im leeren Raum ausbreiten kann (sonst könnte das Licht ja nicht von der Sonne zur Erde gelangen), musste man annehmen, dass auch der leere Raum von diesem seltsamen Medium Aether erfüllt war. Wenn nun aber die Erde auf ihrem Umlauf um die Sonne sich durch diesen Aether bewegt, müsste doch diese Bewegung feststellbar sein.

Falls der Aether nicht selber bewegt ist, bewegt sich die Erde auf ihrem Umlauf um die Sonne mit der Geschwindigkeit $v = 29.8$ km/s durch den Aether (Abbildung 21).

Von der Erde aus gesehen, strömt der Aether mit der (entgegengesetzt gerichteten) Geschwindigkeit v gegen die Erde (Abbildung 22).

1887 versuchten Michelson und Morley diesen „Aetherwind“ mit Hilfe eines raffinierten Experiments zu messen [6, 7, 10]. Wenn sich das Licht im Aether mit der Geschwindigkeit c fortpflanzt, müsste in der Strömungsrichtung des Aethers für die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes der Wert $c + v$ und in der entgegengesetzten Richtung der Wert $c - v$ gemessen werden. Senkrecht zur Bewegungsrichtung ergäbe sich (wieder nach Pythagoras) die Geschwindigkeit $\sqrt{c^2 - v^2}$ (Abbildung 23).

Das Resultat des immer wieder und mit steigender Genauigkeit durchgeführten Experiments war überraschend: Die Geschwindigkeit des Lichtes war in allen Richtungen stets gleich gross (Abbildung 24).

Alle Versuche, dieses erstaunliche Resultat im Rahmen der klassischen Physik zu erklären, schlugen fehl. Zum Beispiel wurde die Vermutung, dass die Erde in ihrer unmittelbaren Umgebung den

Aether mitschleppen könnte, sehr bald durch weitere Experimente widerlegt. Auch elektrische Experimente, mit denen auf Grund der klassischen Vorstellungen sich die Bewegung der Erde nachweisen lassen müsste, ergaben ein negatives Resultat.

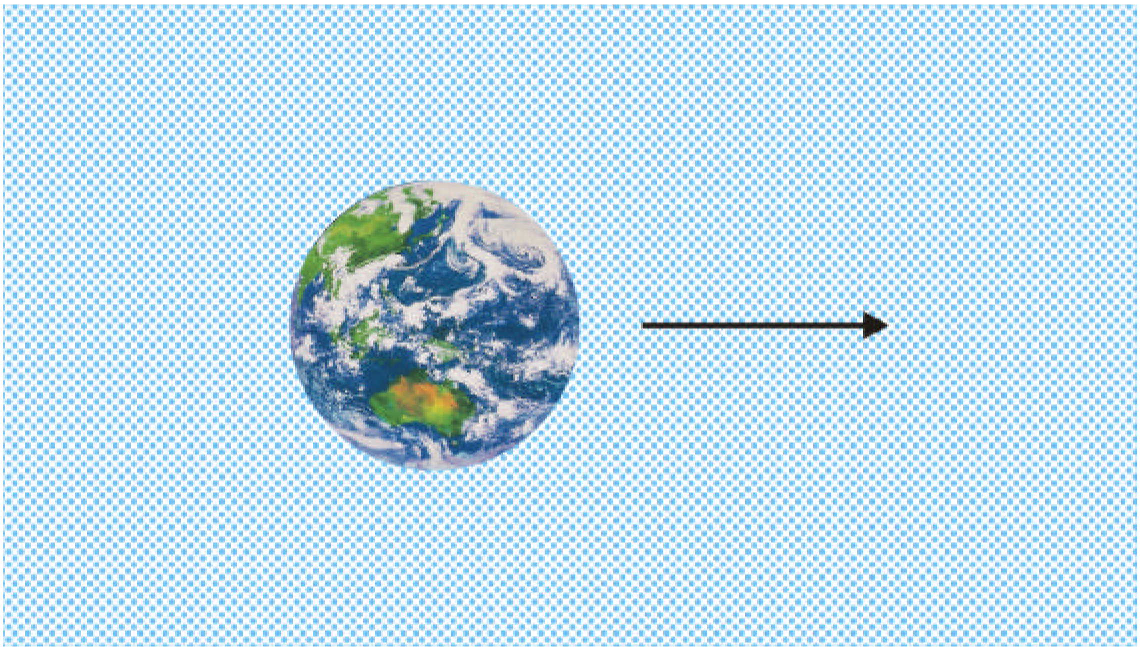

Abbildung 21: Bewegung der Erde durch den Aether

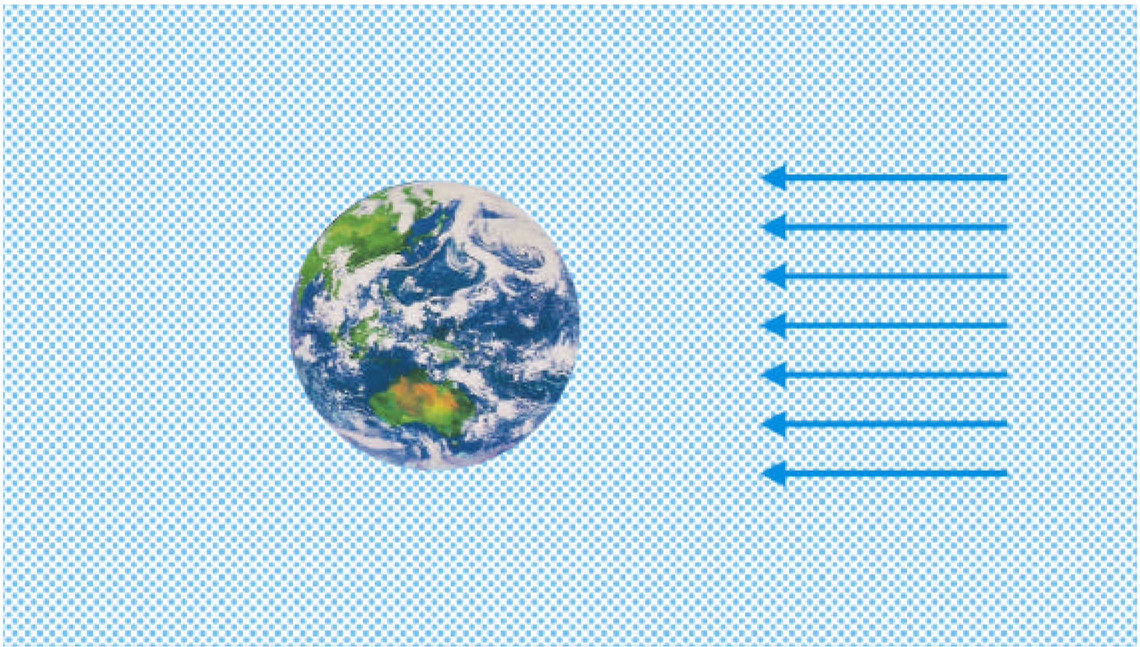

Abbildung 22: Aetherwind

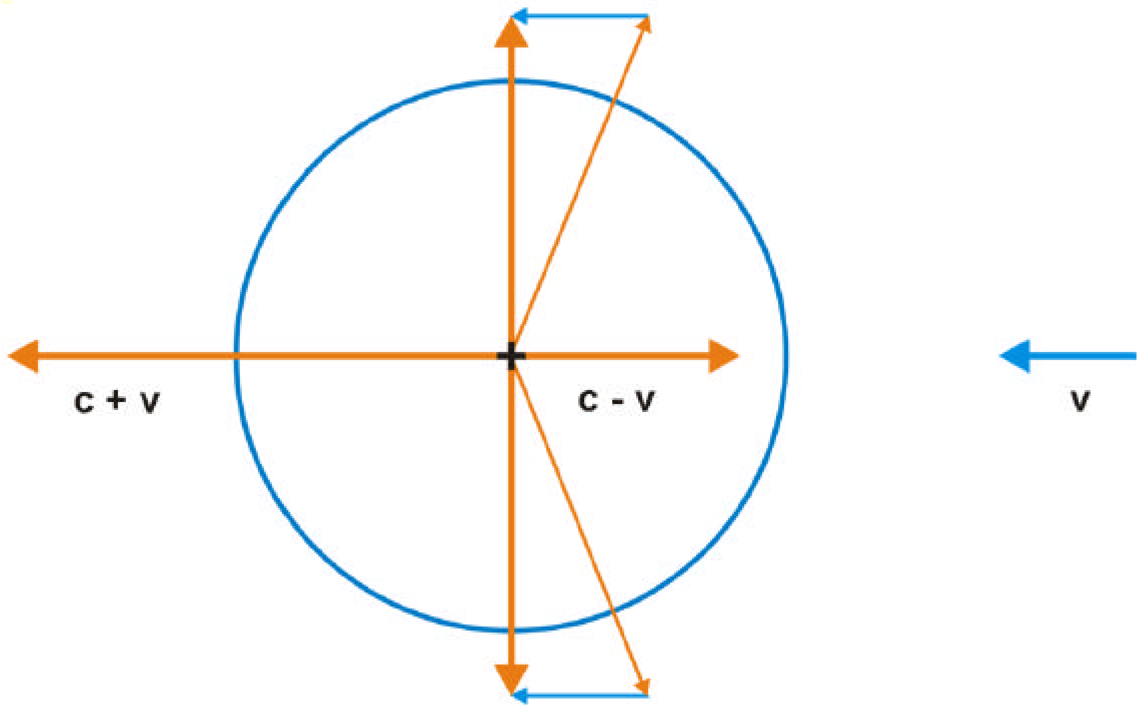

Abbildung 23: Erwartetes Resultat des Michelson-Morley-Experiments

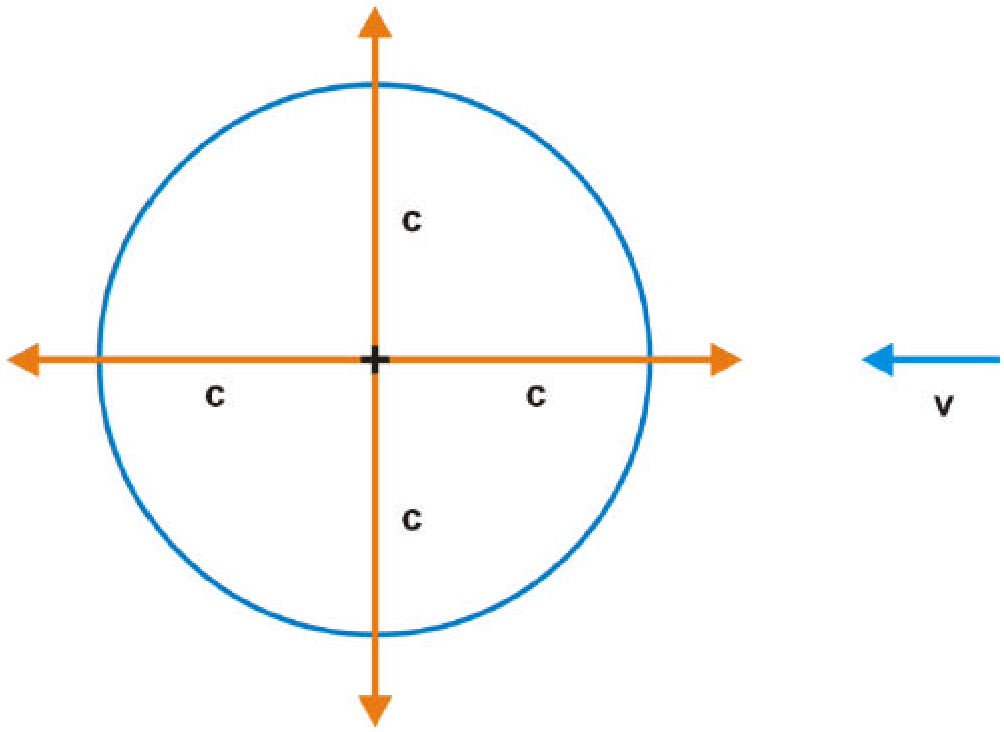

Abbildung 24: Resultat des Michelson-Morley-Experiments

2.4 Relativitätsprinzip

Es stellte sich somit heraus, dass eine geradlinig gleichförmige Bewegung[8] nicht nur mit mechanischen, sondern auch mit elektrischen und optischen Experimenten nicht festgestellt werden kann. Alle Inertialsysteme sind somit tatsächlich gleichwertig. Wenn in allen Inertialsystemen die physikalischen Vorgänge genau gleich ablaufen, müssen auch die physikalischen Gesetze gleich lauten.

Diese Erkenntnis führt auf das

Relativitätsprinzip:

Die physikalischen Gesetze haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form.

Einstein konnte zeigen, dass die bisherigen Vorstellungen über Raum und Zeit revidiert werden mussten, damit es zu keinem Widerspruch mit dem Relativitätsprinzip kommt.

2.5 Galilei-Transfomation

Relativ zu einem Bezugssystem S mit den Koordinatenachsen x, y, z bewege sich ein Bezugssystem S$'$ mit der Geschwindigkeit v. Die Koordinatenachsen x', y' und z' des Systems S$'$ seien parallel zu den Achsen x, y und z und die Achsen x' und x sollen zusammenfallen. Die Geschwindigkeit v sei parallel zu den x-Achsen und in Richtung der x-Achsen gerichtet (Abbildung 25). Der Deutlichkeit halber sind die beiden Achsen x und x' nebeneinander gezeichnet, obwohl sie zusammenfallen. Zur Zeit $t = 0$ sollen die beiden Koordiantenursprünge zusammenfallen.

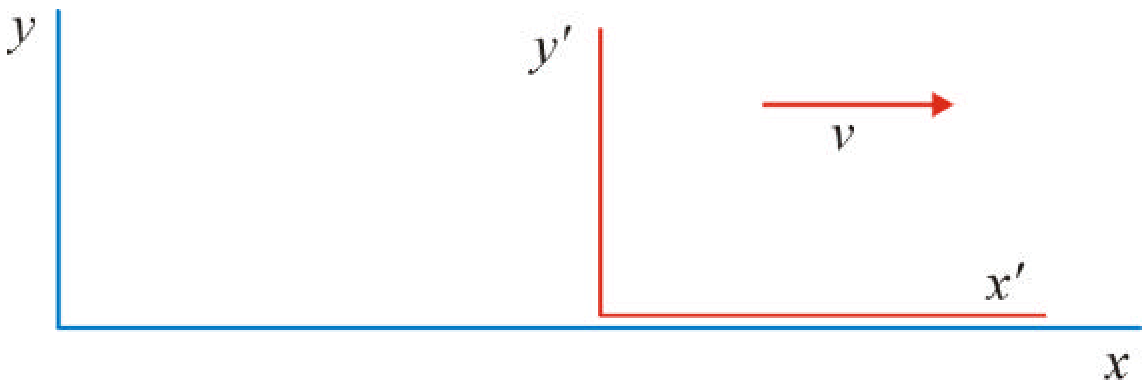

Abbildung 25: Koordinatensysteme S und S$'$

[8] Da die Erde auf einer nahezu kreisförmigen Bahn um die Sonne läuft, ist die Bewegung der Erde natürlich genau genommen keine geradlinig gleichförmige Bewegung. Weil die Bahnkrümmung jedoch gering ist, spielt sie für diese Betrachtungen keine Rolle.

Die Beziehungen zwischen den beiden Koordinatensystemen liefert die sogenannte

Galilei-Transformation:

$$\begin{aligned} x &= x' + v\,t' && (1)\\ y &= y' && (2)\\ z &= z' && (3)\\ t &= t' && (4) \end{aligned}$$

Die ersten drei dieser Gleichungen sind evident, während die letzte Gleichung, die Gleichung $t = t'$, in der klassischen Physik als geradezu selbstverständlich erschien.

Bewegt sich nun ein Körper im Bezugssystem S$'$ mit der Geschwindigkeit u' parallel zur x'-Achse, so folgt aus der Galilei-Transformation für die Geschwindigkeit des Körpers im Bezugssystem S die Beziehung

$$u = v + u'\,, \tag{5}$$

die bereits beim Beispiel des Passagiers im Eisenbahnzug verwendet worden war. Diese Gleichung steht nun aber im Widerspruch zu der Tatsache, dass in beiden Bezugssystemen S und S$'$ für die Lichtgeschwindigkeit der gleiche Wert gemessen wird. Um diesen und andere Widersprüche zu vermeiden, müssen die Transformationsgleichungen geändert werden.

2.6 Lorentz-Transformation

Die richtigen Transformationsgleichungen liefert die sogenannte

Lorentz-Transformation:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + v\,t'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} && (6)\\ y &= y' && (7)\\ z &= z' && (8)\\ t &= \frac{t' + \dfrac{v}{c^2}\,x'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,. && (9) \end{aligned}$$

Falls $v \ll c$, d.h. wenn die Geschwindigkeit, mit der sich System S$'$ relativ zum System S bewegt, viel kleiner ist als die Lichtgeschwindigkeit c, wird der zweite Term unter der Wurzel klein gegenüber eins und die Wurzel geht gegen eins. Ferner wird auch der zweite Term im Zähler der rechten Seite der Gleichung (9) klein gegenüber t' und ist (für nicht allzu grosse x') vernachlässigbar. Damit gehen die Gleichungen der Lorentz-Transformation offensichtlich in die Gleichungen der Galilei-Transformation über. Die Galilei-Transformation ist der klassische Grenzfall der Lorentz-Transformation für Geschwindigkeiten, die klein sind verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit.

Es ist bemerkenswert, dass drei einfache Symmetriebedingungen genügen, um die Lorentz-Transformation herzuleiten, nämlich die drei folgenden Voraussetzungen:

1. Raum und Zeit sind homogen, d.h. es ist kein Ort und kein Zeitpunkt vor andern ausgezeichnet.
2. Der Raum ist isotrop, d.h. es ist keine Richtung im Raum vor anderen ausgezeichnet.
3. Es gilt das universelle Relativitätsprinzip, d.h. alle Inertialsysteme sind gleichwertig.

Für die Addition zweier Geschwindigkeiten ergibt sich nun statt der Beziehung (5) aus der Lorentz-Transformation nach kurzer Rechnung das

relativistische Geschwindigkeitsadditionstheorem:

$$u = \frac{v + u'}{1 + \frac{v\,u'}{c^2}}\,. \qquad (10)$$

Diese Beziehung liefert recht erstaunliche Resultate. Das kann mit folgendem Beispiel gezeigt werden.

Ein Raumschiff fliege mit der Geschwindigkeit $v = \frac{3}{4}\,c$ (relativ zu einem Asteroiden) und feuere nach vorne einen Raumtorpedo ab, das relativ zum Raumschiff die Geschwindigkeit $u' = \frac{3}{4}\,c$ habe (Abbildung 26).

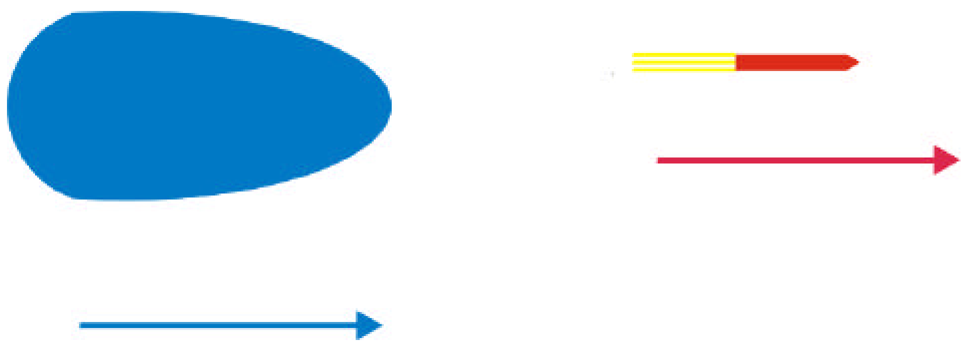

Abbildung 26: Raumschiff und Torpedo

Nach der klassischen Physik hätte dann der Torpedo relativ zum Asteroiden die Geschwindigkeit

$$u = v + u' = \frac{3}{4}\,c + \frac{3}{4}\,c = 1\frac{1}{2}\,c\,,$$

also anderthalbfache Lichtgeschwindigkeit.

Nach dem relativistischen Geschwindigkeitsadditionstheorem ergibt sich jedoch

$$u = \frac{v + u'}{1 + \frac{v\,u'}{c^2}} = \frac{\frac{3}{4}\,c + \frac{3}{4}\,c}{1 + \frac{9\,c^2}{16\,c^2}} = \frac{6}{4\,\frac{16+9}{16}}\,c = \frac{6}{\frac{25}{4}}\,c = \frac{24}{25}\,c\,,$$

also eine Geschwindigkeit, die immer noch kleiner ist als die Lichtgeschwindigkeit. Auch wenn die beiden Geschwindigkeiten v und u' beliebig nahe an die Lichtgeschwindigkeit herankommen, bleibt die resultierende Geschwindigkeit u stets kleiner als die Lichtgeschwindigkeit, obwohl sich nach der klassischen Physik eigentlich nahezu $u = 2\,c$ ergeben würde.

Wenn dagegen die Geschwindigkeit $u' = c$ ist, wenn also das Raumschiff einen Lichtstrahl in Fahrtrichtung aussendet, ergibt sich für die die Geschwindigkeit, die der Lichtstrahl relativ zum Asteroiden hat, wieder gerade die Lichtgeschwindigkeit:

$$u = \frac{v + c}{1 + \dfrac{v\,c}{c^2}} = \frac{v + c}{\dfrac{c^2 + v\,c}{c^2}} = \frac{v + c}{\dfrac{c\,(v + c)}{c^2}} = c\,.$$

3 Zeitdilatation und Zwillingsparadoxon

3.1 Zeitdilatation

Wohl eine der erstaunlichsten Eigenschaften der Lorentz-Transformation ist, dass die Zeit in den beiden Bezugssystemen S und S′ verschieden schnell läuft. Wird im Bezugssystem S′ ein Zeitintervall $\Delta t'$ gemessen, so ergibt sich für das entsprechende Zeitintervall Δt im Bezugssystem S aus der vierten Gleichung der Lorentz-Transformation (Gleichung (9)) die Beziehung

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \tag{11}$$

Da die Wurzel im Nenner immer kleiner ist als eins, ist das im System S gemessene Zeitintervall Δt stets grösser als das im relativ zu S bewegten System S′ gemessene Zeitintervall $\Delta t'$. Dieser Effekt wird *Zeitdilatation* genannt.

Wenn beispielsweise ein Raumschiff sich relativ zur Erde mit der Geschwindigkeit $v = 0.8\,c$ bewegt, ergibt sich

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - 0.8^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - 0.64}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{0.36}} = \frac{\Delta t'}{0.6} = \frac{5}{3}\,\Delta t' . \tag{12}$$

Während also an Bord des Raumschiffes 3 Sekunden vergehen, verstreichen auf der Erde 5 Sekunden.

Da ein solcher Effekt so weit ausserhalb der alltäglichen Erfahrung liegt, drängt sich natürlich sofort die Frage auf, ob das alles nicht nur Theorie sei, ob so etwas wirklich auch beobachtet werden könne. Tatsächlich gibt es eine Reihe von Beobachtungen und Experimenten, welche die Zeitdilatation bestätigen.

Durch die kosmische Strahlung werden in den hohen Atmosphärenschichten Myonen erzeugt. Myonen sind Elementarteilchen, die mit einer Halbwertszeit von 1.5 Mikrosekunden (1.5 Millionstel Sekunden) zerfallen.

Mit der Aussage, dass ein radioaktives Atom oder ein instabiles Elementarteilchen eine Halbwertszeit T habe, ist folgendes gemeint. Wenn zur Zeit $t = 0$ die Zahl N_0 dieser Atome oder Teilchen vorhanden sind, dann sind nach einer Halbwertszeit, d.h. zur Zeit $t = T$, die Hälfte davon zerfallen, es sind nur noch $N = 0.5\,N_0$ vorhanden. Nach einer weiteren Halbwertszeit sind nicht etwa die andere Hälfte auch zerfallen, sondern von den verbleibenden Teilchen sind wieder nur die Hälfte zerfallen, es verbleiben zur Zeit $t = 2\,T$ noch $N = 0.25\,N_0$ Teilchen. Nach drei Halbwertszeiten, zur Zeit $t = 3\,T$ ist noch ein Achtel der ursprünglichen Teilchen vorhanden, es ist $N = 0.125\,N_0$.

Die durch die kosmische Strahlung erzeugten Myonen haben eine grosse Geschwindigkeit, nämlich $v = 0.9997\,c$, d.h. ihre Geschwindigkeit ist nahezu gleich der Lichtgeschwindigkeit. In einer Halbwertszeit legen sie den Weg

$$s = v\,T \approx c\,T$$

zurück. Mit $c = 3 \cdot 10^8$ m/s und $T = 1.5 \cdot 10^{-6}$ s ergibt sich

$$s \approx 3 \cdot 10^8 \cdot 1.5 \cdot 10^{-6} = 450\,.$$

In einer Halbwertszeit legen die Myonen einen Weg von 450 m zurück. Wird nun die Zahl der Myonen in der Höhe 3500 m über Meer und in der Höhe 800 m über Meer gemessen, so ist die Höhendifferenz von 2700 m gleich dem Weg, den die Myonen in 6 Halbwertszeiten zurücklegen. In 6 Halbwertszeiten reduziert sich die Zahl der Myonen um den Faktor

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}\,.$$

Wenn also in der Höhe 3700 m zum Beispiel 500 Myonen pro Stunde gemessen werden, so sind in der Höhe 800 m nur noch rund $500/64 = 8$ Myonen pro Stunde zu erwarten. Gemessen werden aber tatsächlich 450 Myonen pro Stunde (Abbildung 27).

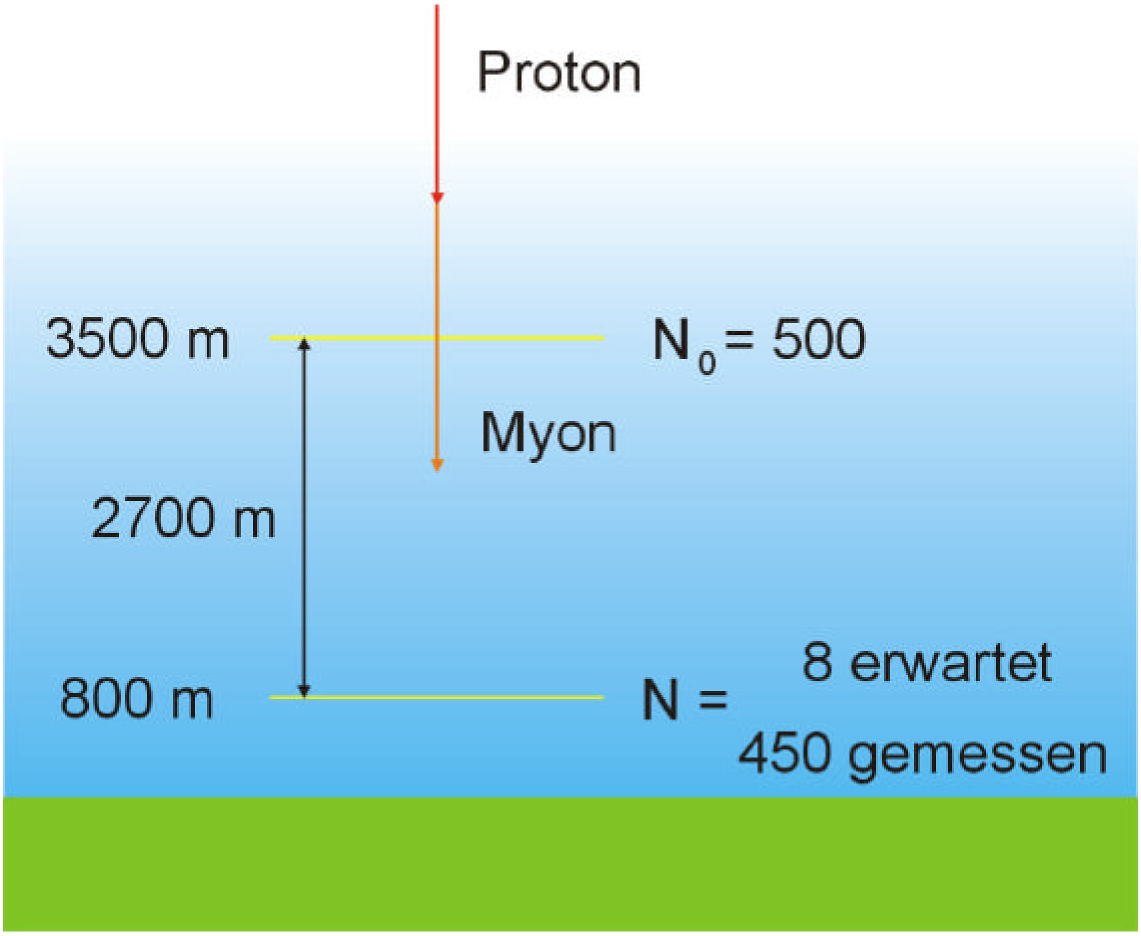

Abbildung 27: Myonenzerfall

Diese Diskrepanz ist auf Grund der Zeitdilatation leicht erklärbar. Dem auf der Erde gemessenen Zeitintervall $\Delta t = 6 \cdot 1.5 \cdot 10^{-6}$ s $= 9 \cdot 10^{-6}$ s entspricht in dem mit dem Myon mitbewegten

Bezugssystem S$'$ das Zeitintervall

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, \Delta t = \sqrt{1 - 0.9997^2} \cdot 9 \cdot 10^{-6} = 2.20 \cdot 10^{-7}\,,$$

also 0.22 Mikrosekunden. Da

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{0.22/1.5} = 0.903\,,$$

sind in der Höhe 800 m über Meer tatsächlich immer noch $N = 0.903 \cdot 500 = 451$ Myonen pro Stunde zu erwarten.

Der nächste Einwand, der sich eventuell aufdrängt, ist der, dass ein solcher Effekt mit Elementarteilchen vielleicht denkbar sei, aber sicher würden doch Uhren immer die gleiche Zeit zeigen, unabhängig davon, ob sie bewegt sind oder nicht. Tatsächlich konnte jedoch der Zeitdilatationseffekt auch mit Uhren nachgewiesen werden.

Ein Physiker, Joseph Hafele, und ein Astronom, Richard Keating, hatten die Entwicklung der Atomuhren genau verfolgt. 1971 erreichte die Ganggenauigkeit der Atomuhren einen so hohen Wert, dass Hafele und Keating der Ansicht waren, die Zeitdilatation müsste nachgewiesen werden können. Im Oktober 1971 flogen Hafele und Keating in gewöhnlichen Verkehrsflugzeugen einmal in östlicher und einmal in westlicher Richtung rund um die Erde.

Bei einem Flug in westlicher Richtung bewegt sich das Flugzeug entgegengesetzt zur Erddrehung. Die Geschwindigkeit des Flugzeuge subtrahiert sich von der Geschwindigkeit, die eine Uhr auf der Erde infolge der Erddrehung hat. Verglichen mit einer fiktiven Uhr, die sich im Weltraum mit der Erde mitbewegt, ohne jedoch die Erddrehung mitzumachen, bewegt sich daher die Uhr auf der Erde schneller als die Uhr im Flugzeug. Somit läuft die Uhr auf der Erde langsamer als die Uhr im Flugzeug, mit andern Worten, die Uhr im Flugzeug geht vor (gegenüber der Uhr auf der Erde).

Beim Flug in östlicher Richtung addiert sich die Fluggeschwindigkeit zur Geschwindigkeit infolge der Erddrehung. Relativ zu der fiktiven Uhr im Weltraum bewegt sich daher die Uhr im Flugzeug schneller als die Uhr auf der Erde und geht somit langsamer als diese. Die Uhr im Flugzeug geht nach.

Hinzu kommt noch ein weiterer Effekt, der aber nicht auf die spezielle, sondern auf die allgemeine Relativitätstheorie zurückzuführen ist. Aus der allgemeinen Relativitätstheorie folgt, dass die Zeit in einem Gravitationsfeld langsamer vergeht als ausserhalb des Feldes und zwar umso langsamer, je stärker das Feld ist. Da das Flugzeug in seiner Flughöhe sich in einem etwas schwächeren Gravitationsfeld befindet als die Uhr auf der Erdoberfläche, läuft die Uhr im Flugzeug generell etwas schneller als die Uhr auf der Erde. Die Uhr im Flugzeug geht also etwas vor.

Beim Flug in westlicher Richtung addieren sich somit der Geschwindigkeits- und der Gravitations-Effekt, während beim Flug in östlicher Richtung die beiden Effekte sich voneinander subtrahieren.

In Tabelle 1 sind die theoretisch berechneten Zeitdifferenzen wiedergegeben und mit den gemessenen Zeitdifferenzen verglichen.

Die Zeitdifferenzen sind in Nanosekunden (ns) angegeben (1 ns = 10^{-9} s).

Sowohl die theoretischen als auch die die experimentellen Werte sind mit Unsicherheiten behaftet, die einerseits auf die begrenzte Genauigkeit, mit der die Flughöhe und die Fluggeschwindigkeit

Zeitunterschiede	Ostflug	Westflug
gerechnet	ns	ns
Geschwindigkeit	-184 ± 18	$+96 \pm 10$
Gravitation	144 ± 14	$+179 \pm 18$
Gesamteffekt	-40 ± 23	$+275 \pm 21$
gemessen		
Uhr 1	-57	$+277$
Uhr 2	-74	$+284$
Uhr 3	-55	$+266$
Uhr 4	-51	$+266$
Mittelwerte	-59 ± 10	$+273 \pm 7$

Tabelle 1: Hafele-Keating-Experiment

bekannt waren, und andererseits auf die begrenzte Ganggenauigkeit der Atomuhren zurückzuführen sind.

Die gemessenen Werte stimmen innerhalb der Fehlergrenzen ausgezeichnet mit den theoretischen Werten überein.

Das Resultat dieses und analoger Experimente darf übrigens nicht in dem Sinne missverstanden werden, dass die Uhren, die Atome oder die Elementarteilchen durch die Geschwindigkeit oder das Gravitationsfeld irgendwie beeinflusst würden. Es ist tatsächlich die Zeit selber, die verschieden schnell vergeht.

3.2 Zwillingsparadoxon

Während Albert zu Hause auf der Erde bleibt, fliegt sein Zwillingsbruder Eugen[9] in einem Raumschiff mit der Geschwindigkeit $v = 0.8\,c$ von der Erde fort.

Zur Vereinfachung wird die Beschleunigungsphase des Raumschiffs nicht betrachtet, sondern es wird die (völlig unrealistische) Annahme gemacht, das Schiff könnte instantan auf $v = 0.8\,c$ beschleunigt und ebenso instantan abgebremst werden. Das Wesentliche der folgenden Argumente bleibt trotzdem richtig.

Der Zielstern sei 4 Lichtjahre entfernt[10]. Die Reisezeit beträgt

$$t = \frac{s}{v} = \frac{4 \text{ Jahre} \cdot c}{0.8\,c} = 5 \text{ Jahre}.$$

Von der Erde aus gesehen, ist das Raumschiff somit 5 Jahre unterwegs.

[9] Während bei „Albert“ die Assoziation nahe liegt, muss der Name „Eugen“ vielleicht erklärt werden. Prof. Dr. Eugen Sänger (1905 - 1964), Leiter des Forschungsinstituts für Strahlantriebe in Stuttgart, dürfte der Erste gewesen sein, der relativistische Reisen durchgerechnet hatte.

[10] Um die Rechnungen zu vereinfachen, wurde eine fiktive Entfernung von 4 Lichtjahren gewählt. In Wirklichkeit ist der nächste Stern, Alpha Centauri, 4.3 Lichtjahre von der Erde entfernt. Der Hauptstern im Sternbild Centaurus, Alpha Centauri, besteht aus 3 Komponenten. Zwei Sterne umkreisen sich in rund 80 Jahren. Der eine Stern ist genauso hell wie die Sonne, während der andere nur etwa einen Viertel der Leuchtkraft der Sonne hat. Ein dritter, sehr schwacher Stern in einem Abstand von $1.54 \cdot 10^{12}$ km umkreist dieses Doppelsternsystem in etwa 1 Million Jahren.

Aus Gleichung (12) folgt sofort

$$t' = \frac{3}{5}\,t\,.$$

Somit ist die Reisezeit an Bord des Raumschiffes nur 3 Jahre.

Von Eugens Bezugssystem aus gesehen, ist es die Erde, die sich von seinem Raumschiff mit $v = 0.8\,c$ entfernt, während er sich in seinem System in Ruhe befindet. Er kann daher mit genau gleichem Recht wie Albert schliessen, dass im (von ihm aus gesehen) bewegten System der Erde die Zeit um den Faktor 3/5 langsamer läuft. Er wird also bei seiner Ankunft beim Zielstern schliessen, dass inzwischen auf der Erde nicht 3 Jahre, wie seine Kalenderuhr anzeigt, vergangen sind, sondern nur $3/5 \cdot 3 = 1.8$ Jahre.

Albert liest also im Moment von Eugens Ankunft beim Zielstern an seiner Kalenderuhr ab, dass seit dem Start 5 Jahre vergangen sind, während Eugen berechnet, dass bei Albert 1.8 Jahre vergangen seien. Da eine Kommunikation über eine Distanz von 4 Lichtjahre sowieso nicht einfach ist und die Übermittlung einer Nachricht 4 Jahre braucht, ist diese Diskrepanz zunächst nicht allzu sehr beunruhigend.

Dramatisch wird die Angelegenheit jedoch, wenn Eugen sofort nach seiner Ankunft beim Zielstern umkehrt und wieder nach Hause fliegt. Wenn er auf der Erde wieder ankommt, sind für ihn zweimal 3 Jahre, also 6 Jahre vergangen. Für Albert sind jedoch zweimal 5 Jahre, also 10 Jahre vergangen. Albert ist plötzlich 4 Jahre älter als sein Zwillingsbruder!

Vor allem verwirrend ist jedoch, dass nach Eugens (völlig richtigen) Rechnungen für Albert nur zweimal 1.8 Jahre, also 3.6 Jahre, vergangen sein sollten. Albert sollte also 2.4 Jahre jünger sein als Eugen. Statt dessen ist er 4 Jahre älter als Eugen. Wie kommt es zu dieser Diskrepanz von 6.4 Jahren?

3.3 Relativität der Gleichzeitigkeit

Dieser scheinbare Widerspruch ist darauf zurückzuführen, dass es keine absolute Gleichzeitigkeit gibt. Um das einzusehen, muss zunächst ein Weg-Zeit-Diagramm betrachtet werden. In Abbildung 28 ist die Bewegung eines Körpers entlang einer Geraden aufgetragen. Wenn die Gerade als x-Achse gewählt wird, kann die Position des Körpers auf der Geraden durch die x-Koordinate gegeben werden.

Das Weg-Zeit-Diagramm zeigt für jeden Zeitpunkt t den Ort x des Körpers. Wenn die Kurve im Diagramm steil verläuft, bewegt sich der Körper offenbar schnell, da in einem kleinen Zeitintervall Δt ein grosses Wegstück Δx zurückgelegt wird. Dort, wo die Kurve flach verläuft, bewegt sich der Körper langsam. Wenn die Kurve horizontal verläuft, steht der Körper still, da sich die Koordinate x im horizontalen Kurvenstück nicht ändert. Daher kann die Zeitachse auch als die „Kurve" des Punktes $x = 0$ aufgefasst werden, denn für alle Punkte auf der Zeitachse ist $x = 0$.

Im übrigen ist für alle Punkte auf der x-Achse die Zeit $t = 0$.

Wird nun ein Koordinatensystem S$'$ betrachtet, dessen Achsen zur Zeit $t = 0$ mit den Achsen des Systems S zusammenfallen und das sich mit der Geschwindigkeit v in Richtung der x-Achse bewegt (Abbildung 29), so ist das Weg-Zeit-Diagramm des Koordinatennullpunkts des Systems S$'$ eine Gerade, deren Steigung durch die Geschwindigkeit v bestimmt ist. Aus den vorangehenden Überlegungen folgt, dass diese Gerade nichts anderes als die t'-Achse des Systems S$'$ ist. Abbildung 30

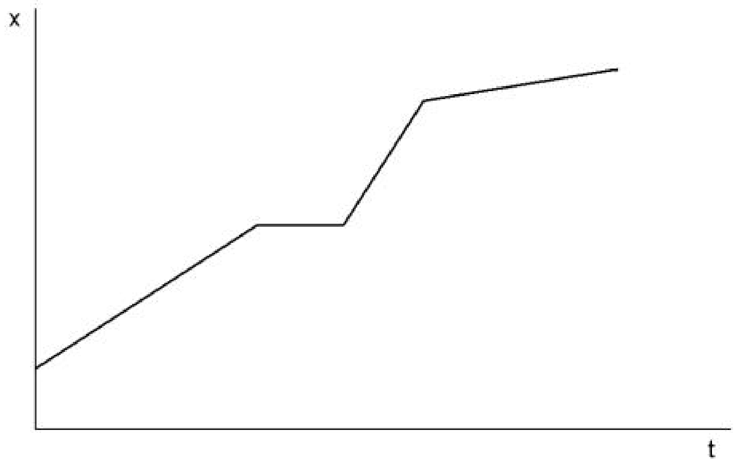

Abbildung 28: Weg-Zeit-Diagramm

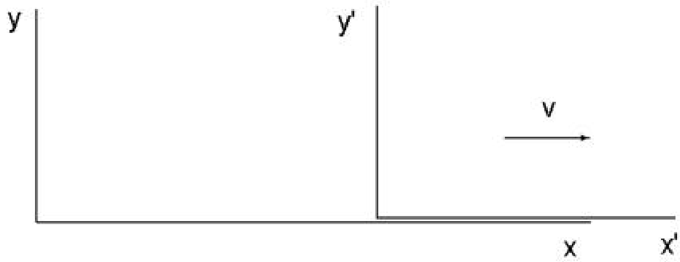

Abbildung 29: Koordiantensysteme S und S$'$

zeigt diese Gerade für den Fall $v = 1/6\,c = 0.167\,c$. Dabei wurden wieder zweckmässigerweise statt der Zeiten t und t' die mit der Lichtgeschwindigkeit multiplizierten Zeiten $c\,t$ und $c\,t'$ verwendet.

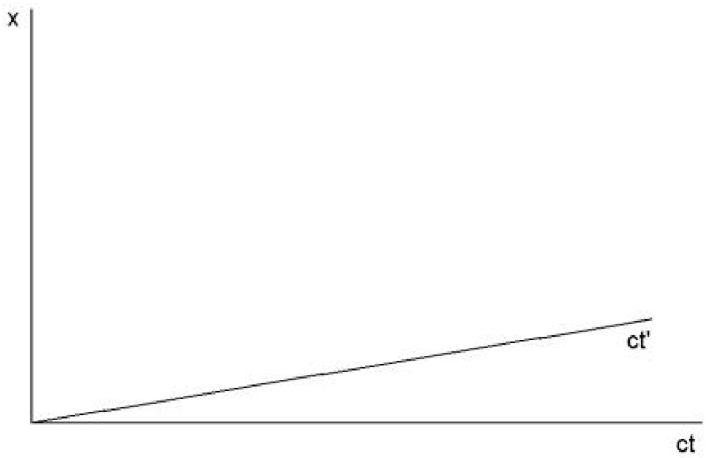

Abbildung 30: Zeitachsen $c\,t$ und $c\,t'$ für $v = 0.167\,c$

Dieses Resultat ist nicht überraschend. Das Diagramm würde auch in der klassischen Physik bei Verwendung der Galilei-Transfomation genau gleich aussehen (abgesehen von den Maßstäben auf den Achsen, die hier nicht betrachtet werden).

Hingegen folgt nun aus der Lorentz-Transformation, dass im Gegensatz zur klassischen Physik die beiden Achsen x und x' nicht mehr zusammenfallen, sondern einen Winkel bilden, der umso grösser ist, je grösser die Geschwindigkeit v ist. Abbildung 31 zeigt die Lage der Achsen für $v = 1/6\,c = 0.167\,c$.

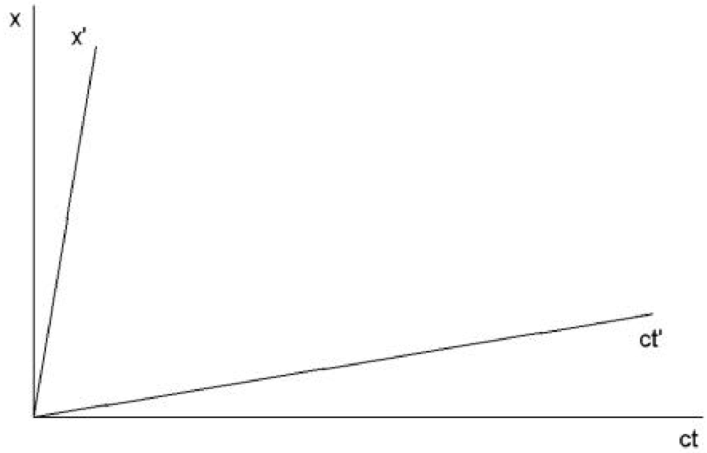

Abbildung 31: Koordinatenachsen für $v = 0.167\,c$

In Abbildung 32 sind die Achsen für $v = 0.8\,c$ dargestellt.

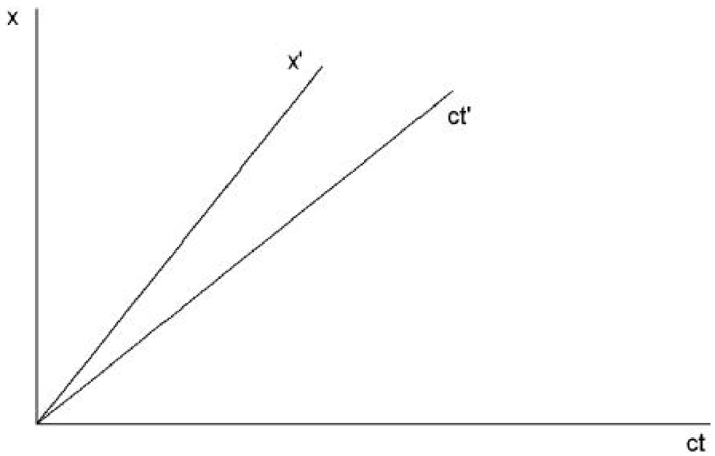

Abbildung 32: Koordinatenachsen für $v = 0.8\,c$

Auf der x-Achse liegen alle Ereignisse, für die $t = 0$ ist, und auf der x'-Achse liegen alle Ereignisse, für die $t' = 0$ ist. Da die beiden Achsen nicht mehr zusammenfallen, sind Ereignisse, die im System S gleichzeitig sind, im System S$'$ nicht gleichzeitig. Ebenso sind Ereignisse, die im System S$'$ gleichzeitig sind, im System S nicht gleichzeitig.

Zur Veranschaulichung kann das Beispiel von Abbildung 11 noch einmal betrachtet werden (Abbildung 33).

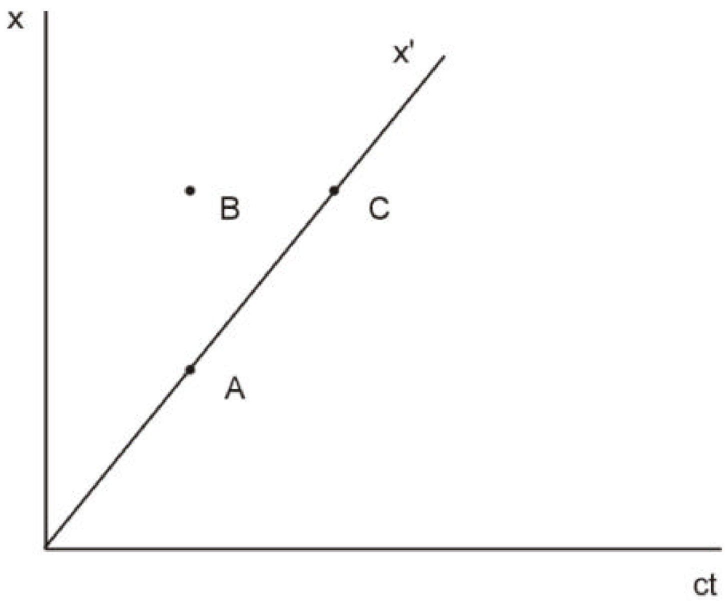

Abbildung 33: Gleichzeitigkeit von Ereignissen

Im System S sind die Ereignisse A und B gleichzeitig, da sie auf einer Senkrechten zur ct-Achse liegen. Im System S$'$, das sich relativ zum System S mit der Geschwindigkeit $v = 0.8\,c$ in Richtung der x-Achse bewegt, sind dagegen die Ereignisse A und C gleichzeitig, da sie auf der x'-Achse liegen. Generell sind im System S$'$ alle Ereignisse gleichzeitig, die auf Geraden liegen, die parallel zur x'-Achse sind.

Es gibt keine absolute Gleichzeitigkeit, der Begriff „gleichzeitig“ ist relativ. Zwei relativ zueinander bewegte Beobachter nehmen unterschiedliche Paare von Ereignissen als gleichzeitig wahr.

3.4 Das Zwillingsparadoxon – kein Paradoxon

Nun kann das Weg-Zeit-Diagramm von Eugen betrachtet werden (Abbildung 34).

Eugen startet zur Zeit $t = 0$ bei der Erde ($x = 0$), fliegt mit der Geschwindigkeit $v = 0.8\,c$, erreicht den 4 Lichtjahre entfernten Zielstern nach 5 Jahren Flugzeit, kehrt sofort um und fliegt mit der gleichen Geschwindigkeit zurück und ist nach 10 Jahren wieder zurück auf der Erde. Dabei wurden wieder zur Vereinfachung instantane Beschleunigungen und Abbremsungen vorausgesetzt. Während des Hinfluges befindet er sich im System S$'$ und damit sind für ihn Ereignisse, die auf Parallelen zur x'-Achse liegen, gleichzeitig. Unmittelbar vor seiner Ankunft, während er sich aber noch mit der Geschwindigkeit $v = 0.8\,c$ bewegt, ist für ihn alles gleichzeitig, was auf der im Zielpunkt eingezeichneten Parallele zur x'-Achse liegt (Abbildung 35).

Eine einfache Rechnung zeigt, dass diese Gerade die Zeitachse bei $t = 1.8$ Jahre schneidet. Aus Eugens Sicht sind also auf der Erde 1.8 Jahre vergangen, wenn er beim Zielstern ankommt.

In dem Moment, da er zum Rückflug gestartet ist, befindet er sich in einem Bezugsystem S", das sich mit der Geschwindigkeit $v = 0.8\,c$ entgegengesetzt zur Richtung der x-Achse bewegt. Daher ist

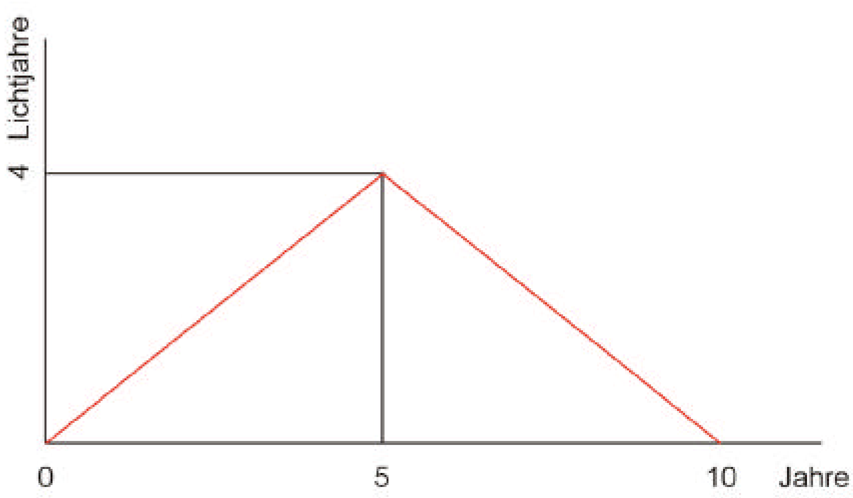

Abbildung 34: Weg-Zeit-Diagramm von Eugen

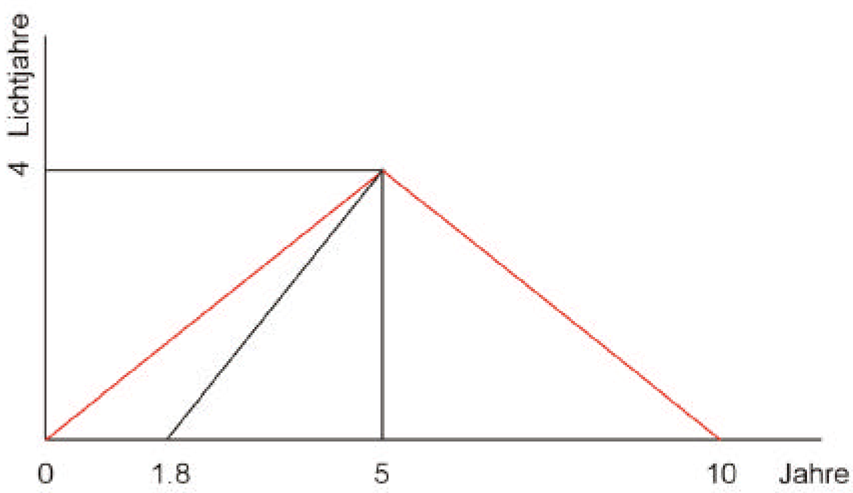

Abbildung 35: Eugens Gerade der Gleichzeitigkeit unmittelbar vor seiner Ankunft beim Zielstern

die x''-Achse und damit die Geraden der Gleichzeitigkeit im x-ct-Diagramm entgegengesetzt wie die x'-Achse geneigt (Abbildung 36).

Wieder ergibt eine einfache Rechnung den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Zeitachse an der Stelle $t = 8.2$ Jahre. Von Eugen aus gesehen, sind also auf der Erde 8.2 Jahre vergangen, wenn er beim Zielstern gestartet ist. Während Eugens (hier als instantan vorausgesetzten) Umkehr beim Zielstern vergehen von Eugen aus gesehen auf der Erde 6.4 Jahre. Das ist gerade die Zeitdifferenz, die sich bei den vorangegangenen Überlegungen ergeben hat. Tatsächlich wird also Albert während Eugens Reise auch aus der Sicht von Eugen 10 Jahre älter. Es ergibt sich somit kein Paradoxon.

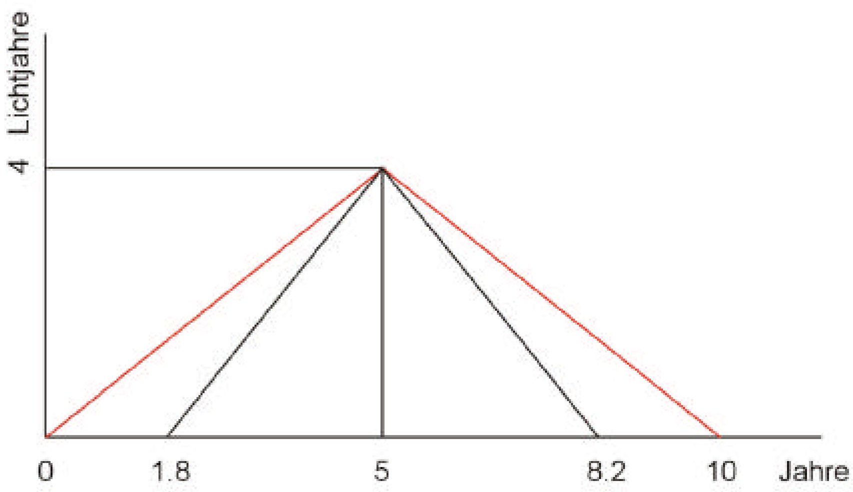

Abbildung 36: Eugens Gerade der Gleichzeitigkeit unmittelbar nach seinem Start beim Zielstern

3.5 Relativistische Reisen

Wie bereits erwähnt, ist eine instantane Beschleunigung oder Abbremsung natürlich völlig unrealistisch. Im folgenden werden die Reisezeiten betrachtet, die sich ergeben, wenn das Raumschiff auf der ersten Weghälfte ständig mit 10 m/s^2 beschleunigt und auf der zweiten Weghälfte ständig mit 10 m/s^2 wieder abgebremst wird. Gemeint ist dabei die Beschleunigung, die an Bord des Raumschiffes gemessen wird. Die Beschleunigung des Raumschiffs, die von der Erde aus gemessen wird, nimmt mit zunehmender Geschwindigkeit des Raumschiffs immer mehr ab und geht gegen null, wenn die Geschwindigkeit sich der Lichtgeschwindigkeit nähert.

Die Beschleunigung a ist die Zunahme der Geschwindigkeit dividiert mit dem dafür benötigten Zeitintervall:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}\,.$$

Genau genommen, ist die Beschleunigung ebenso wir die Geschwindigkeit ein Vektor. Da hier aber eine geradlinige Bewegung vorausgesetzt wird, ändert sich die Richtung der Geschwindigkeit nicht und es kann mit den Beträgen gerechnet werden.

Eine Beschleunigung von $a = 10$ m/s^2 bedeutet also

$$a = \frac{10 \text{ m/s}}{1 \text{ s}} = \frac{10 \text{ m}}{\text{s}^2} = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 10 \text{ m/s}^2\,,$$

d.h. die Geschwindigkeit nimmt in 1 Sekunde um 10 m/s zu, in jeder Sekunde wird die Geschwindigkeit um 10 m/s grösser.

10 m/s^2 ist (auf etwa 2 Prozent genau) gerade die Beschleunigung, mit der ein ohne Luftwiderstand frei fallender Körper auf der Erde beschleunigt wird.

Deshalb empfinden die Passagiere eines Raumschiffs, das (weit entfernt vom Gravitationsfeld eines Himmelskörpers) mit 10 m/s^2 beschleunigt wird, gerade ihr normales Gewicht. Unten ist dabei die Richtung zum Heck des Raumschiffs (Abbildung 37).

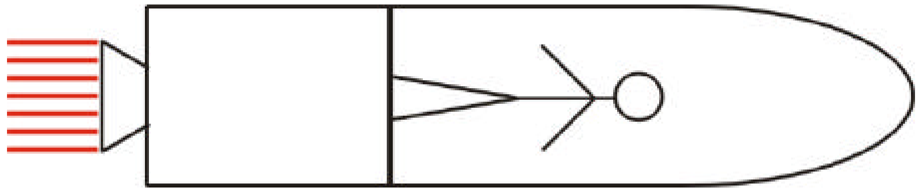

Abbildung 37: Beschleunigtes Raumschiff

Die Berechnung der Reisezeiten ist für die beschleunigte Bewegung etwas komplizierter als für die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit. In Tabelle 2 sind die Reisezeiten für einige Reiseziele aufgeführt.

	Distanz	Reisezeit in Jahren			
Zielstern	Licht-	Hinflug		Hin- und Rückflug	
	jahre	Erdzeit	Bordzeit	Erdzeit	Bordzeit
Alpha Centauri	4.3	5.90	3.52	11.8	7.04
Sirius	8.6	10.3	4.55	20.6	9.10
Wega	25	26.8	6.35	53.6	12.7
Aldebaran	62	63.9	8.00	128	16.0
Polarstern	400	402	11.5	804	23.0
Galaxiszentrum	28'000	28'002	19.6	56'004	39.6
Andromeda-Galaxie	$2.3 \cdot 10^6$	$2.3 \cdot 10^6$	27.9	$4.6 \cdot 10^6$	55.8

Tabelle 2: Reisezeiten für relativistische Reisen

Da wegen der ständig anhaltenden Beschleunigung die Geschwindigkeit des Raumschiffs sich immer mehr der Lichtgeschwindigkeit nähert und damit der Zeitdilatationseffekt immer grösser wird, wächst die Reisezeit an Bord mit zunehmender Reisedistanz immer langsamer . Während die Reisezeit zur Wega an Bord rund 6.5 Jahre dauert, braucht es für die 85'000 mal grössere Distanz zur Andromeda-Galaxie nur eine 4.3 mal längere Bordzeit.

Tatsächlich kann innerhalb eines Menschenlebens praktisch jeder beliebige Punkt im bekannten Teil des Universums erreicht werden. Vorausgesetzt wurde dabei, wie gesagt, dass auf der ersten Weghälfte andauernd mit 10 m/s^2 beschleunigt und auf der zweiten Weghälfte andauernd mit 10 m/s^2 gebremst wird. Es stellt sich jedoch die Frage, was für ein Antrieb dazu erforderlich ist.

3.6 Photonenraketen

Im leeren Raum kommt als Antrieb nur das Rückstossprinzip in Frage, d.h. wenn von exotischen Möglichkeiten wie Segel, die den Lichtdruck ausnützen, oder gar utopischen Antrieben wie ein

„Space Drive“ (was auch immer das sein mag), mal abgesehen wird, braucht das Raumschiff einen Raketenantrieb.

Die maximale Geschwindigkeit, die eine Rakete erreicht, wenn sie aus der Ruhe startet und sich in einem gravitationsfeldfreien Raum bewegt, ergibt sich in der klassischen Physik aus der Beziehung:

$$v = u \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) . \tag{13}$$

Dabei bedeuten:

v	=	Geschwindigkeit der Rakete
u	=	Ausströmgeschwindigkeit (Geschwindigkeit des aus der Düse ausströmenden Gasstrahls relativ zur Rakete)
m_0	=	Anfangsmasse der Rakete
m	=	Endmasse der Rakete

$\frac{m_0}{m}$ ist das sogenannte Massenverhältnis.

$\ln(x)$ ist eine Funktion von x, die mit zunehmendem x immer langsamer wächst. Dies kann durch ein paar Beispiele veranschaulicht werden. Die folgende Tabelle gibt die Endgeschwindigkeiten der Rakete für einige Massenverhältnisse.

$m_0/m = 10$	$v = 2.30\,u$
$m_0/m = 30$	$v = 3.40\,u$
$m_0/m = 10^3$	$v = 6.91\,u$
$m_0/m = 10^6$	$v = 13.8\,u$
$m_0/m = 10^{12}$	$v = 27.6\,u$

Auch mit mehrstufigen Raketen werden kaum Massenverhältnisse von wesentlich über 30 erreicht. Die besten chemischen Triebwerke liefern Ausströmgeschwindigkeiten von rund 4.5 km/s. Mit einem Massenverhältnis von 30 würde damit eine Rakete eine Endgeschwindkeit von 15.3 km/s erreichen. Selbst mit einem technisch absurden Massenverhältnis von 10^{12} wäre die Endgeschwindigkeit nicht grösser als 125 km/s, eine Geschwindigkeit, die immer noch sehr klein ist verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 300'000$ km/s.

Eine wesentliche Erhöhung der Endgeschwindigkeit lässt sich offenbar nur durch eine Vergrösserung der Ausströmgeschwindigkeit u realisieren.

Mit Nuklearraketen können Ausströmgeschwindigkeiten von etwa 10 km/s erreicht werden, während Ionentriebwerke Strahlgeschwindigkeiten bis etwa 250 km/s liefern können.

Die radikale Lösung besteht natürlich darin, $u = c$ zu wählen, d.h. als Treibstrahl wird ein Lichtstrahl verwendet. Da in diesem Fall die aus dem Triebwerk austretenden „Partikel“ Photonen sind, wird von einer „Photonenrakete“ gesprochen.

Es lässt sich nun leicht ausrechnen, welche Anforderungen dieses Photonentriebwerk erfüllen muss, damit es das Raumschiff mit einer Beschleunigung von 10 m/s^2 antreibt.

Nach dem Newtonschen Grundgesetz ist die Kraft F, die erforderlich ist, um der Masse m die Beschleunigung a zu erteilen, gegeben durch

$$F = m\,a . \tag{14}$$

Mit dem Impuls $p = m\,v$ kann das Newtonsche Gesetz auch in der Form

$$F = \frac{dp}{dt} \tag{15}$$

geschrieben werden. Photonen mit der Energie E haben den Impuls

$$p = \frac{E}{c}\,. \tag{16}$$

Die Leistung P des Triebwerks ist die pro Zeiteinheit abgegebene Energie:

$$P = \frac{dE}{dt}\,. \tag{17}$$

Einsetzen der Gleichungen (16) und (14) liefert

$$P = \frac{dp}{dt}\,c = m\,a\,c \tag{18}$$

und somit:

$$\frac{P}{m} = a\,c\,. \tag{19}$$

P/m ist die spezifische Leistung der Photonenrakete. Mit $a = 10$ m/s^2 und $c = 3 \cdot 10^8$ m/s ergibt sich

$$P/m = 10 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ W/kg}\,. \tag{20}$$

Die Photonenrakete müsste also eine spezifische Leistung von 3000 MW pro kg haben. Wenn das Raumschiff eine Gesamtmasse von 1000 Tonnen aufweist, müsste es die (thermische) Leistung einer Million grosser Kernkraftwerke in Form eines gebündelten Lichtstrahls abstrahlen, um eine Beschleunigung von 10 m/s^2 zu erreichen. So etwas ist offenbar auch mit einer noch so weit entwickelten Technik kaum denkbar.

Photonenraketen gibt es zwar schon längst, nur nicht mit einer genügend hohen Leistungsdichte. Jede Taschenlampe ist im Prinzip eine Photonenrakete. Eine schwere Taschenlampe habe eine Masse von 1 kg und eine Leistung von 2 W. Sie werde irgendwo in den Weltraum weit weg von störenden Gravitationsfeldern gebracht, eingeschaltet und ohne Relativgeschwindigkeit zu den umgebenden Sternen losgelassen. Dann ergibt sich für ihre Beschleunigung aus Gleichung (19) die Beziehung

$$a = \frac{P}{m\,c}\,. \tag{21}$$

Mit $P = 2$ W und $m = 1$ kg wird $a = 6.67 \cdot 10^{-9}$ m/s^2. Nach einem Jahr (angenommen, die Batterie würde so lange Strom liefern und das Glühlämpchen würde nicht vorher durchbrennen) hat die Taschenlampe eine Geschwindigkeit von 21 cm/s erreicht und sich vom Startort um 3320 km entfernt.

Für eine Photonenrakete, die relativistische Geschwindigkeiten erreicht, gilt statt der klassischen Raketengleichung (13) die Beziehung

$$\frac{m_0}{m} = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}. \tag{22}$$

Dabei ist v die Endgeschwindigkeit der Rakete.

Die Tabelle 3 gibt einige Beispiele von Massenverhältnissen.

v/c	m_0/m
0.9	4.36
0.99	14.1
0.999	44.1
0.9999	141
0.99999	441

Tabelle 3: Massenverhältnisse für Photonenraketen

Wenn das Massenverhältnis bestimmt werden soll, das für ein in der Tabelle 2 aufgeführtes Reiseziel erforderlich ist, muss zunächst die maximal erreichte Geschwindigkeit in der Wegmitte berechnet werden. Daraus ergibt sich mit Hilfe von Gleichung (22) ein Massenverhältnis μ_1. Da aber das Raumschiff von dieser Geschwindigkeit wieder bis zum Stillstand beim Ziel abgebremst werden muss, wird für das Abbremsen noch einmal das gleiche Massenverhältnis $\mu_2 = \mu_1$ gebraucht. Das für den Hinflug notwendige Massenverhältnis ist daher $\mu_H = \mu_1 \mu_2 = \mu_1^2$. Falls am Zielort nicht „nachgetankt" werden kann, quadriert sich dieses Massenverhältnis nochmals, d.h. das Massenverhältnis für Hin- und Rückflug ist $\mu_R = \mu_H^2 = \mu_1^4$.

In Tabelle 4 sind die für die Reiseziele der Tabelle 2 erforderlichen Massenverhältnisse aufgeführt.

Ziel	Distanz Lichtjahre	Massenverhältnis für Hinflug	Massenverhältnis für Hin- und Rückflug
Alpha Centauri	4.3	40.5	$1.64 \cdot 10^3$
Sirius	8.6	120	$1.44 \cdot 10^4$
Wega	25	799	$6.38 \cdot 10^5$
Aldebaran	62	4'544	$2.07 \cdot 10^7$
Polarstern	400	$1.78 \cdot 10^5$	$3.17 \cdot 10^{10}$
Galaxiszentrum	28'000	$8.64 \cdot 10^8$	$7.47 \cdot 10^{17}$
Andromeda-Galaxie	$2.3 \cdot 10^6$	$5.86 \cdot 10^{12}$	$3.43 \cdot 10^{25}$

Tabelle 4: Massenverhältniss für relativistische Reisen mit einer Photonenrakete

Offensichtlich überschreiten die für solche Reisen benötigten Massenverhältnisse schon für „kleine" Distanzen bald einmal die technischen realisierbaren Werte.

4 Masse bewegter Körper

4.1 Relativistische Massenveränderlichkeit

Während die für Elektrizität und Magnetismus gültigen Gesetze, die Maxwellschen Gleichungen, bei einer Lorentz-Transformation ihre Form beibehalten, so wie es das Relativitätsprinzip verlangt, ist das bei den Gesetzen der klassischen Mechanik, bei den Newtonschen Gesetzen, nicht der Fall. Die Gesetze der klassischen Mechanik müssen etwas modifiziert werden, damit sie bei einer Lorentz-Transformation ihre Form beibehalten. Eine Konsequenz dieser Modifikation, die in der populären Literatur über Relativittätstheorie häufig zitiert wird, besteht darin, dass die Masse eines Körpers nicht mehr konstant, sondern von seiner Geschwindigkeit abhängig ist. Dies wird durch die folgende Beziehung ausgedrückt:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \tag{23}$$

Dabei ist m_0 die sogenannte Ruhemasse, d.h. die Masse des Körpers, die in einem Bezugssystem gemessen wird, das sich momentan mit dem Körper mitbewegt, oder mit andern Worten, die Masse, die in dem Bezugssystem gemessen wird, in dem der Körper momentan ruht. m ist die Masse, die in dem Bezugssystem gemessen wird, relativ zu dem sich der Körper mit der Geschwindigkeit v bewegt.

4.2 Impuls

Die Gleichung (23) ist in vielen Schulbüchern zu finden. In Lehrbüchern der Hochschulstufe und in der Fachliteratur wird sie jedoch kaum noch verwendet. Die Masse m eines schnell bewegten Körpers lässt sich nur sehr indirekt bestimmen und ist daher ein eigentlich überflüssiger Begriff. Die Grösse, die sich bei physikalischen Prozessen mit Teilchen hoher Geschwindigkeit manifestiert, ist der Impuls, der klassisch durch die Gleichung

$$\vec{p} = m\,\vec{v} \tag{24}$$

definiert ist. Die Pfeile in den Symbolen $\vec{p}$ und $\vec{v}$ weisen darauf hin, dass die Geschwindigkeit und daher auch der Impuls im allgemeinen durch Vektoren darzustellen sind. In der Relativitätstheorie gilt für den Impuls die Beziehung

$$\vec{p} = \frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \tag{25}$$

Hier ist m die Ruhemasse. Es gibt nur noch diese eine Masse m, und es muss nicht mehr zwischen m und m_0 unterschieden werden.

Für Geschwindigkeiten, die klein sind verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit, $(v \ll c)$, geht die Wurzel im Nenner gegen eins, und der relativistische Impuls geht über in den Impuls der klassischen Mechanik.

4.3 Impulserhaltungssatz

Der Impuls ist deshalb eine wichtige physikalische Grösse, weil für ihn ein Erhaltungssatz, der Impulserhaltungssatz, gilt.

> Der Gesamtimpuls eines Systems von Massenpunkten, auf das keine äusseren Kräfte wirken, bleibt erhalten.

Der Impulserhaltungssatz kann vor allem bei Stossprozessen angewendet werden. Bei Stössen treten zwischen den Stosspartnern in der Regel so grosse Kräfte auf, dass verglichen mit ihnen die äusseren Kräfte vernachlässigt werden können.

4.4 Inelastischer Stoss

Als Beispiel werde eine Masse m_1 betrachtet, die mit der Geschwindigkeit v_1 gegen eine ruhende Masse m_2 pralle. Der Stoss sei völlig inelastisch, d.h. die beiden Massen trennen sich nach dem Stoss nicht mehr voneinander, sondern bleiben zusammen (Abbildung 38).

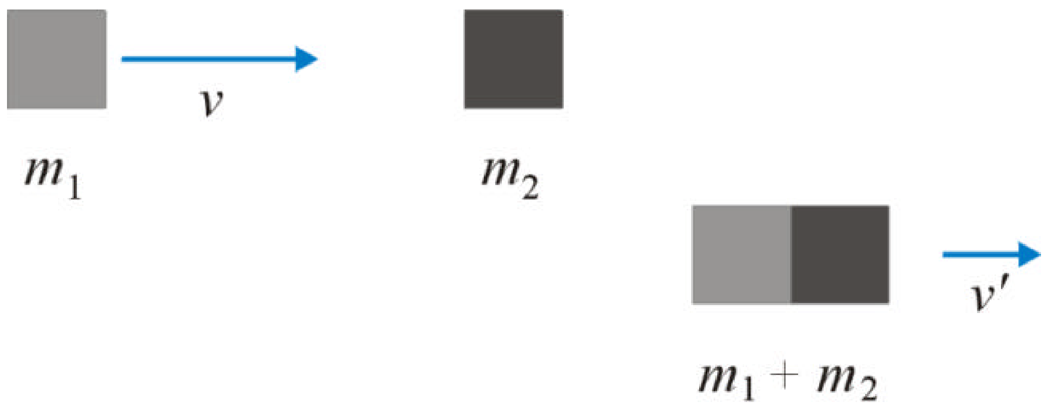

Abbildung 38: Inelastischer Stoss

Nach dem Stoss bewegen sich die beiden Massen mit der gemeinsamen Geschwindigkeit v'. Der Impulserhaltungssatz der klassischen Physik gibt:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v' \,. \tag{26}$$

Daraus lässt sich sofort die Geschwindigkeit der beiden Massen nach dem Stoss berechnen:

$$v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \,. \tag{27}$$

Die Energie, die in der mit der Geschwindigkeit v_1 bewegten Masse m_1 steckt, die sogenannte kinetische Energie, ist (klassisch) gegeben durch[11]

$$T = \frac{m_1\, v_1^2}{2}\,. \tag{28}$$

Die kinetische Energie nach dem Stoss ist:

$$T' = \frac{(m_1 + m_2)\, v'^2}{2}\,. \tag{29}$$

Die Differenz der kinetischen Energien vor dem Stoss und nach dem Stoss, $T - T'$, ist gleich der Arbeit, die bei der Deformation der beiden Körper verrichtet wurde. Für diese „Kollisionsenergie“ Q ergibt eine kurze Rechnung die Beziehung

$$Q = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, T\,. \tag{30}$$

Je grösser die Masse des ruhenden Körpers verglichen mit der Masse des bewegten Körpers ist, desto grösser ist der Bruchteil der kinetischen Energie, der beim Stoss in Deformationsarbeit umgesetzt wird. Dies kann durch das folgende Beispiel veranschaulicht werden.

Ein Personenwagen mit einer Masse von 1 Tonne pralle gegen einen Lastwagen mit einer Masse von 40 Tonnen (Abbildung 39).

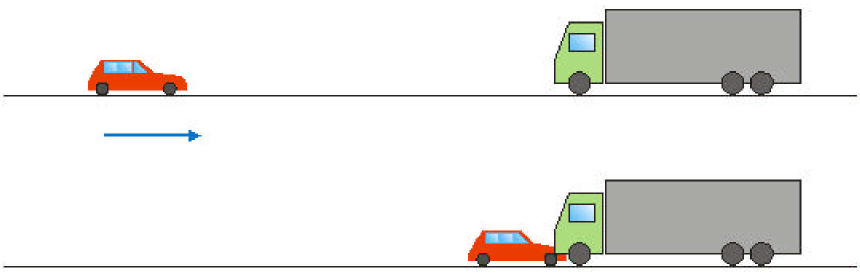

Abbildung 39: Inelastischer Stoss PW gegen LKW

Dann ist

$$Q_1 = \frac{40}{1 + 40}\, T_1 = 0.976\, T_1\,,$$

d.h. weil wegen der grossen Masse des LKW sich PW und LKW nach dem Zusammenprall nur noch mit einer kleinen Geschwindigkeit bewegen, wird nahezu 98 Prozent der kinetischen Energie des Personenwagens in Deformationsarbeit umgesetzt.

[11] Das Symbol T für die kinetische Energie ist selbstverständlich nicht zu verwechseln mit dem Symbol T für die Halbwertszeit, das vorher verwendet wurde. Da in der Physik so viele Grössen mit Symbolen zu bezeichnen sind, lässt es sich nicht vermeiden, dass manche Symbole zwei oder mehr verschiedene Bedeutungen haben. Aus dem Zusammenhang geht meistens hervor, welche Bedeutung gültig ist.

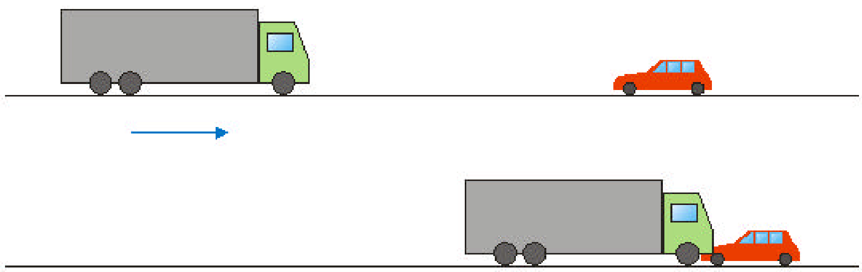

Abbildung 40: Inelastischer Stoss LKW gegen PW

Prallt dagegen umgekehrt der Lastwagen gegen den Personenwagen (Abbildung 40), gilt

$$Q_2 = \frac{1}{1+40} T_2 = 0.0244\, T_2 \,,$$

d.h. weil nach dem Zusammenprall PW und LKW sich noch mit grosser Geschwindigkeit weiterbewegen, wird nur etwa 2.4 Prozent der kinetischen Energie des Lastwagens in Deformationsarbeit umgesetzt.

Wenn im 2. Fall die kinetische Energie des LKW gleich gross war wie die kinetische Energie des PW im 1. Fall, ist $T_2 = T_1$, und es folgt $Q_2 = Q_1/40$.

Wenn jedoch die Geschwindigkeit des Lastwagens und des Personenwagens gleich gross waren, ist wegen der vierzigmal grösseren Masse des Lastwagens $T_2 = 40\, T_1$, und es folgt $Q_2 = Q_1$. Das muss ja auch so sein, denn wenn die Geschwindigkeit des PW und des LKW vor dem Stoss gleich gross waren, sind die beiden Situationen insofern gleich, als sie sich nur durch die Wahl des Bezugssystems unterscheiden. Also muss auch die Deformationsarbeit beim Stoss die gleiche sein.

4.5 Stösse von Elementarteilchen

Bei Autozusammenstössen sind die Deformationsarbeiten ein höchst unerwünschter Effekt. Bei der Kollison von Elementarteilchen ist man jedoch daran interessiert, dass die „Kollisionsenergie“ möglichst gross ist. Nur wenn die Kollisionsenergie genügend gross ist, können neue Teilchen mit grosser Masse erzeugt werden oder Reaktionen beobachtet werden, die bei hohen Energien stattfinden.

Werden zum Beispiel Protonen, die mit Hilfe eines Teilchenbeschleunigers auf die kinetische Energie T beschleunigt wurden, gegen ruhende Protonen (Kerne von Wasserstoffatomen) geschossen (Abbildung 41), so ist $m_1 = m_2 = m$ und aus Gleichung (30) folgt:

$$Q = \frac{m}{m+m} T = \frac{1}{2} T \,. \tag{31}$$

Die Reaktionsenergie Q ist also nur halb so gross wie die (mit hohem Aufwand) erzeugte kinetische Energie T. Dieser Faktor 1/2 wäre kein allzu grosser Verlust. Leider ist die Beziehung (30) und

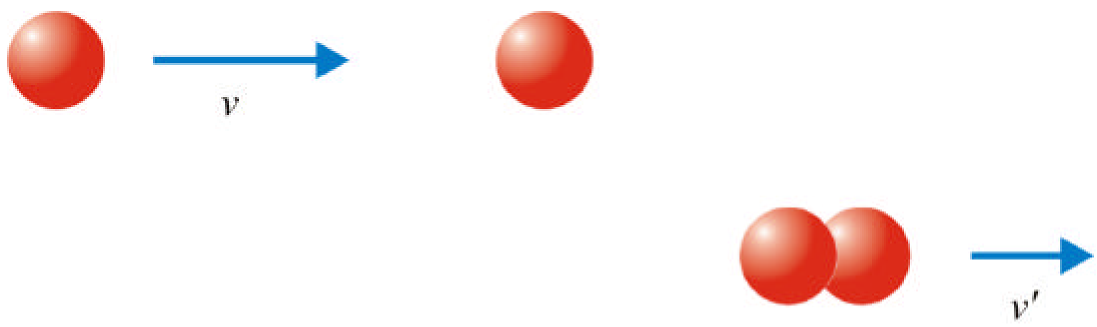

Abbildung 41: Inelastischer Stoss von Protonen

damit auch (31) nur in der klassischen Physik richtig. Bei hohen Teilchenenergien muss mit der relativistisch richtigen Beziehung gerechnet werden. Diese vereinfacht sich für sehr grosse Energien ($T \gg m\,c^2$) zu:

$$Q = \sqrt{2\,m\,c^2\,T}\,. \tag{32}$$

Diese Gesetzmässigkeit hat eine sehr unsympathische Konsequenz. Soll nämlich die Reaktionsenergie Q um einen Faktor 10 vergrössert werden (um z.B. ein von der Theorie vorhergesagtes neues Teilchen entdecken zu können), so müsste nach der klassischen Beziehung (31) ein zehnmal leistungsfähigerer Beschleuniger gebaut werden. Nach der relativistischen Gleichung (32) ist jedoch eine hundertmal grössere Maschine erforderlich. Für eine hundertmal grössere Reaktionsenergie müsste gar eine zehntausendmal grössere Maschine gebaut werden.

4.6 Collider

Dies hat zu der Idee der kollidierenden Strahlen geführt. Wird ein Proton statt gegen ein ruhendes Proton gegen ein Proton geschossen, das sich mit gleicher Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung bewegt, so sind die Impulse der beiden Protonen vor dem Stoss entgegengesetzt gleich gross und der Gesamtimpuls ist gleich null. Somit ist auch der Impuls nach dem Stoss gleich null (Abbildung 42).

Das bedeutet aber, das die beiden Protonen nach dem Stoss keine kinetische Energie mehr haben und somit die ganze anfängliche kinetische Energie als Reaktionsenergie zur Verfügung steht. Für kollidierende Strahlen gilt also;

$$Q = 2\,T\,. \tag{33}$$

Beschleuniger, die zwei gegenläufige Strahlen zur Kollision bringen, werden „Collider“ genannt. Am europäischen Teilchenforschungsinstitut CERN[12] werden Collider seit vielen Jahren mit Erfolg

[12] CERN steht für „Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire“. C steht für „Conseil“ und nicht etwa für „Centre“, wie vielfach gemeint wird.

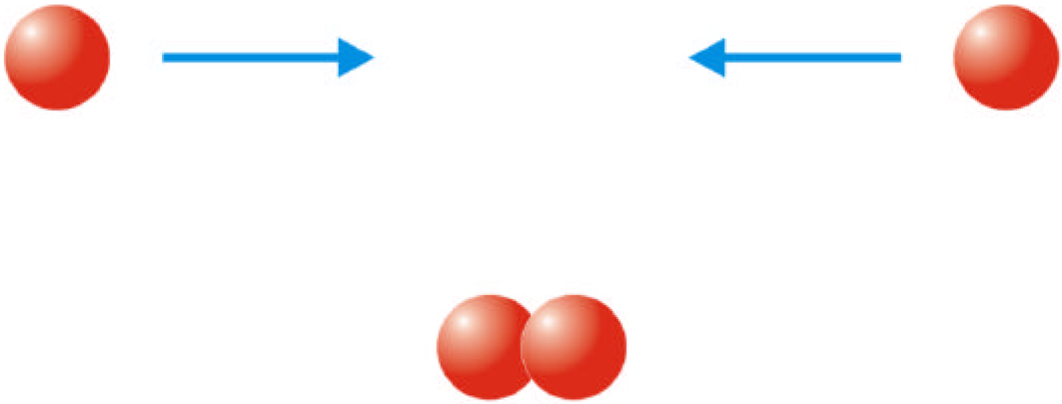

Abbildung 42: Kollidierende Strahlen von Protonen

eingesetzt. 1971 wurden die „Intersecting Storage Rings“ (ISR), der erste Proton-Proton-Collider der Welt, in Betrieb genommen. 1976 wurde das SPS, das Super-Protonen-Synchrotron so modifiziert, dass es als Proton-Antiproton-Collider betrieben werden konnte. Von 1989 bis Ende 2000 war der „Large Electron Positron Collider“ (LEP) im Betrieb (Abbildung 43).

Abbildung 43: Der LEP des CERN. Photo: CERN

Zur Zeit ist im Tunnel des ehemaligen LEP ein neuer Beschleuniger im Bau, der im Jahr 2007 in Betrieb gehen soll, der LHC (Large Hadron Collider). Der Tunnel hat einen Umfang von 27 km.

Abbildung 44 zeigt den Tunnel mit den ersten installierten Einheiten des LHC.

Abbildung 44: Innenansicht des LHC-Tunnels. Photo: CERN

Zwei gegenläufige Protonenstrahlen werden auf je 7 TeV beschleunigt und an vier Kollisionspunkten gegeneinander prallen gelassen. TeV bedeutet Terra Elektronvolt. Terra ist der Vorsatz für 10^{12} und Elektronvolt ist eine zweckmässige Energieeinheit in vielen Bereichen der Physik.

Wenn ein Teilchen mit einer Elementarladung, z.B. ein Elektron oder ein Proton eine Potentialdifferenz von 1 Volt durchläuft, so gewinnt es eine Energie von 1 Elektronvolt (Abbildung 45).

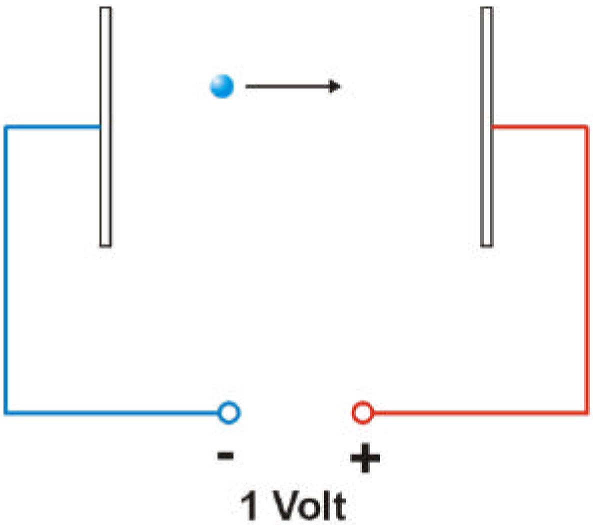

Abbildung 45: Definition des Elektronvolt

Die Umrechnung in die Energieeinheit Joule ist:

$$1\ \mathrm{eV} = 1.609 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}\,. \qquad (34)$$

Die beiden kollidierenden Protonenstrahlen mit je 7 TeV liefern also eine Reaktionsenergie von 14 TeV ($14 \cdot 10^{12}$ eV).

Würde man einen Protonenstrahl mit 7 TeV auf ruhende Protonen schiessen, ergäbe sich eine Kollisionsenergie von nur 0.113 TeV.

Wollte man eine Kollisionsenergie von 14 TeV beim Beschuss von ruhenden Protonen erreichen, müsste der Beschleuniger eine Protonenenergie von 105'000 TeV liefern. Ein solcher Beschleuniger hätte (bei sonst gleichen Maschinenparametern wie diejenigen des LHC) einen Durchmesser von 128'000 km, also ziemlich genau ein Drittel der Distanz von der Erde bis zum Mond.

5 $\mathbf{E = mc^2}$

5.1 Masse-Energie-Beziehungen

Die Formel

$$E = m\,c^2 \tag{35}$$

dürfte die am wohl besten bekannte Gleichung der Physik sein. Sie ist geradezu zu einem Symbol geworden. Häufig wird sie jedoch falsch interpretiert. Es wird etwa gesagt, dass „Materie und Energie dasselbe“ seien, oder dass „Materie in Energie umgewandelt“ würde.

Die Gleichung $E = m\,c^2$ kommt in Einsteins Arbeit von 1905 („Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?“) gar nicht vor. Einstein hatte als Resultat die Beziehung

$$K_0 - K_1 = \frac{L}{V^2}\,\frac{v^2}{2} \tag{36}$$

angegeben. Umgeschrieben auf die heute übliche Notation und etwas verallgemeinert, lautet diese Gleichung:

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}\,. \tag{37}$$

Diese Formel bedeutet, dass bei einer Energiezunahme eines Systems sich seine träge Masse vergrössert. So nimmt z.B. die Masse eines Akkumulators zu, wenn er aufgeladen wird. Ebenso nimmt die Masse einer (mechanischen) Armband- oder Taschenuhr zu, wenn sie aufgezogen wird. Natürlich sind die Massenänderungen bei derartigen Prozessen unmessbar klein.

Bei Annihilations-Prozessen, wenn ein Teilchen und sein Antiteilchen vernichtet werden, wird tatsächlich Materie in Energie umgewandelt. Wenn z.B. ein Elektron und ein Positron[13] zusammentreffen, werden sie vernichtet, und es entstehen zwei Gammaquanten. Der Paarerzeugungsprozess ist der umgekehrte Vorgang. Aus Energie kann Materie entstehen. Beispielsweise kann aus einem Gammaquant genügend hoher Energie unter bestimmten Voraussetzungen ein Elektron-Positron-Paar entstehen.

In allen anderen Fällen, in denen die Gleichung $E = m\,c^2$ angewendet werden kann, wird nicht etwa Materie in Energie umgewandelt, sondern durch die Energieaufnahme oder Energieabgabe eines Systems ändert sich nur dessen Masse.

Auch bei der Freisetzung von Kernenergie wird nicht Materie in Energie umgewandelt. Sowohl bei der Kernspaltung (Fission) als auch bei der Kernverschmelzung (Fusion) ist die Zahl der Protonen, Neutronen und Elektronen vor und nach der Fission oder Fusion die gleiche. Es ist also nicht richtig, dass „bei einer Atombombenexplosion Materie in Energie umgewandelt wird“, auch wenn man das immer wieder lesen oder hören kann. Richtig ist, dass die Gesamtmasse der Kerne vor der Fission oder Fusion grösser ist als nachher; aus der Massenabnahme ergibt sich mit der Gleichung (35) die freigesetzte Energie.

[13] Das Positron ist das Antiteilchen des Elektrons. Es unterscheidet sich nur dadurch vom Elektron, dass es eine positive statt eine negative Elementarladung trägt.

Und obwohl es immer wieder behauptet wird: Die Formel $E = m\,c^2$ ist *nicht* die Grundlage für die Atombombe, und Einstein ist *nicht* der „Vater“ der Atombombe[14]. Nachdem entdeckt worden war, dass Uran- und Plutonium-Kerne durch Einfang von Neutronen gespalten werden können und dass dabei grosse Energien freigesetzt und zudem 2 bis 3 Neutronen emittiert werden, hätte die Atombombe auch ohne die Kenntnis der Formel $E = m\,c^2$ entwickelt werden können.

Häufig wird auch in populären Darstellungen der Eindruck erweckt, die Beziehung $E = mc^2$ sei gewissermassen eine „Wunderformel“, aus der sich sozusagen die ganze moderne Physik herleiten lasse. Dies ist keineswegs der Fall. Es gibt tatsächlich physikalische Gleichungen, mit denen sich sehr viele Phänomene erklären lassen. Zum Beispiel können die vier Maxwellschen Gleichungen in der Relativitätstheorie in eine einzige (wunderschöne!) Gleichung zusammengefasst werden. Diese eine Gleichung erlaubt im Prinzip, alle elektrischen, magnetischen und optischen Phänomene zu erklären, und kann in diesem Sinn als „Wunderformel“ betrachtet werden. Die Gleichung $E = mc^2$ „erklärt“ dagegen eigentlich nichts, sondern ist „nur“ eine (jedoch sehr nützliche!) Bilanzgleichung, die Massen und Energien miteinander verknüpft.

Genau genommen ist die Formel $E = m\,c^2$ nicht einmal korrekt. Richtig ist die folgende Beziehung:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4\,. \tag{38}$$

p ist der Impuls des Teilchens. Nur wenn das Teilchen sich in Ruhe befindet und somit $p = 0$ ist, gilt $E = m\,c^2$. Konsequenterweise sollte dann aber

$$E_0 = m\,c^2 \tag{39}$$

geschrieben werden, indem der Index 0 andeutet, dass E_0 die Ruhe-Energie des Teilchens ist. Die Gesamtenergie E ist gleich der Summe von Ruhe-Energie E_0 und kinetischer Energie T:

$$E = m\,c^2 + T\,. \tag{40}$$

Ferner gilt:

$$E = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{41}$$

In der Teilchenphysik werden anstelle der berühmten Formel (35) stets die Gleichungen (38), (39), (40) und (41) verwendet.

Auf Grund des Zusammenhangs zwischen Masse und Energie gibt es in der relativistischen Physik nicht mehr separat einen Massenerhaltungssatz und einen Energieerhaltungssatz wie in der klassischen Physik, sondern nur noch einen kombinierten Massen-Energie-Erhaltungssatz, der allerdings oft einfach als Energie(erhaltungs)satz bezeichnet wird.

[14] Dass Einstein als „Vater der Atombombe“ betrachtet wird, ist vielleicht auch auf den Brief zurückzuführen, den er im Sommer 1939 an Präsident Roosevelt schrieb. Er warnte den Präsidenten, dass Nazi-Deutschland im Begriff sein könnte, eine Atombombe zu entwickeln. Diesen Brief schrieb er jedoch nicht aus eigener Initiative, sondern er wurde durch die drei ungarischen Physiker Leo Szilard, Edward Teller und Eugene Wigner dazu veranlasst.

5.2 Fusionsenergie

Wie mit dem relativistischen Energiesatz gerechnet werden kann, lässt sich am Beispiel der Fusionsreaktion D + T $\longrightarrow$ ^{4}He + n veranschaulichen. Ein Deuteriumkern D (ein Proton und ein Neutron) und ein Tritiumkern (ein Proton und zwei Neutronen) verschmelzen zu einem Heliumkern (zwei Protonen und zwei Neutronen) und einem freien Neutron (Abbildung 46).

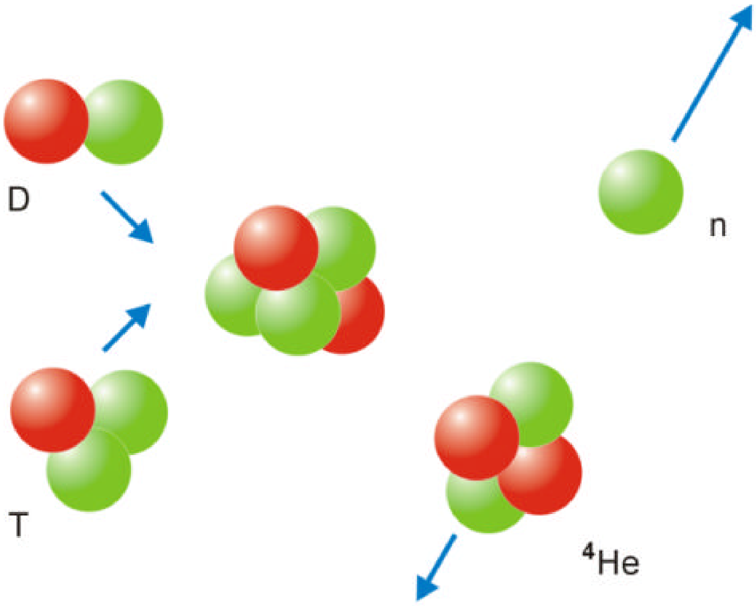

Abbildung 46: D-T-Fusion

Die Energiebilanzgleichung lautet:

$$E_D + E_T = E_{He} + E_n \,. \tag{42}$$

Einsetzen der Beziehung (40) liefert:

$$m_D\, c^2 + T_D + m_T\, c^2 + T_T = m_{He}\, c^2 + T_{He} + m_n\, c^2 + T_n \,. \tag{43}$$

Obwohl die Deuterium- und Tritiumkerne grosse Energien haben müssen, damit sie trotz ihrer elektrostatischen Abstossung so nahe zusammenkommen, dass die Fusionsreaktion überhaupt möglich wird, sind ihre Energien sehr klein verglichen mit den Energien des Heliumkerns und des Neutrons. Es ist T_D, $T_T \ll T_{He}$, T_n, d.h. T_D und T_T können gegenüber T_{He} und T_n vernachlässigt werden. Die bei der Fusionsreaktion freiwerdende Energie wird damit

$$E = T_{He} + T_n \,, \tag{44}$$

und aus Gleichung (43) ergibt sich:

$$E = (m_D + m_T - m_{He} - m_n)\, c^2 = \Delta m\, c^2 \,. \tag{45}$$

	amu		amu
D	2.014102	^{4}He	4.002603
T	3.016049	n	1.008665
D + T	5.030151	^{4}He + n	5.011268
	-5.011268		
Δm	0.018883		

Tabelle 5: Atommassen

In Tabelle 5 sind die Massen der Teilchen in atomaren Masseneinheiten (atomic mass unit, amu) aufgeführt.

Bei der Fusion von total 5.030151 amu „D-T-Brennstoff" wird also eine Massendifferenz von 0.018883 amu in Energie umgesetzt. Da es nur auf das Verhältnis dieser beiden Massen ankommt, kann diese Beziehung auch in kg ausgedrückt werden: Bei der Fusion von 5.030151 kg D-T-Brennstoff wird eine Massendifferenz von 0.018883 kg in Energie umgesetzt. Für die Energie ergibt sich:

$$E = \Delta m\, c^2 = 0.01883 \cdot (2.9979 \cdot 10^8)^2 = 1.697 \cdot 10^{15} \,. \tag{46}$$

Somit liefern 5.03151 kg Brennstoff eine Energie von $1.697 \cdot 10^{15}$ Joule. Der „spezifischen Heizwert" des D-T-Brennstoffs ist

$$H = \frac{E}{\Delta m} = \frac{1.679 \cdot 10^{15}}{5.030151} = 3.374 \cdot 10^{14} \,, \tag{47}$$

also $3.374 \cdot 10^{14}$ J/kg.

1 kg D-T-Fusionsbrennstoff liefert somit eine Energie von $3.374 \cdot 10^{14}$ Joule oder 93'700 MWh. Mit andern Worten, mit 1 kg D-T-Brennstoff könnte ein Fusionskraftwerk mit 3000 MW thermischer Leistung während 31.2 Stunden betrieben werden.

5.3 Massenverlust der Sonne

Die am Ort der Erde ausserhalb der Erdatmosphäre pro Sekunde und Quadratmeter eingestrahlte Leistung der Sonnenstrahlung auf eine Fläche, die senkrecht zu den einfallenden Strahlen steht, wird „Solarkonstante" genannt (Abbildung 47). Der Wert der Solarkonstanten ist 1.37 kW/m^2.

Da angenommen werden kann, dass die Sonne isotrop, d.h. in alle Richtungen gleich stark, strahlt, ergibt sich die total von der Sonne abgestrahlte Leistung, die sogenannte „Leuchtkraft", durch Multiplikation der Solarkonstanten mit der Fläche der Kugel, deren Radius gleich dem dem Radius der Erdbahn ist:

$$L = 4\, \pi\, R^2\, S \,. \tag{48}$$

Der mittlere Radius der nahezu kreisförmigen Erdbahn beträgt 150 Millionen km, also $1.50 \cdot 10^{11}$ m. Für die Leuchtkraft ergibt sich somit:

$$L = 4 \cdot \pi \cdot (1.50 \cdot 10^{11})^2 \cdot 1.37 \cdot 10^3 = 3.87 \cdot 10^{26} \,. \tag{49}$$

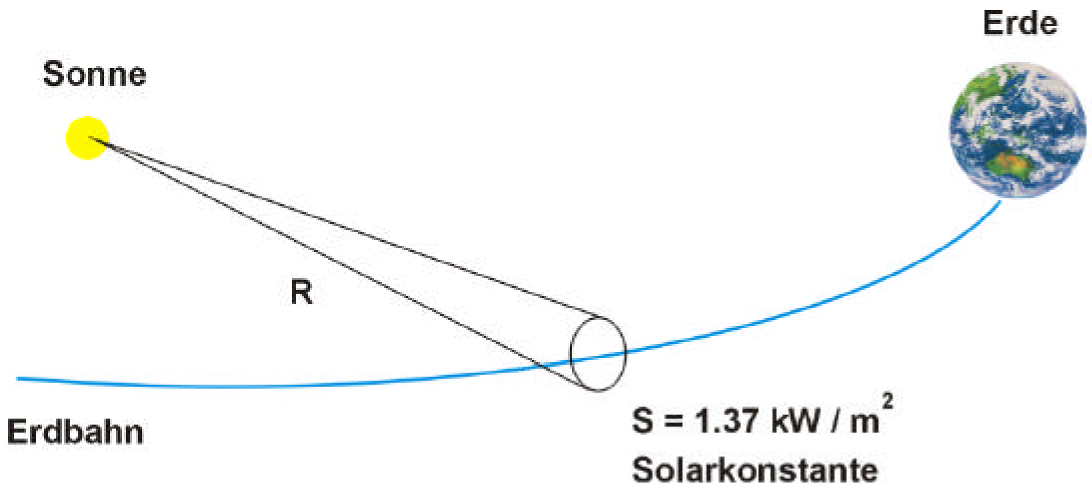

Abbildung 47: Solarkonstante

Die Leuchtkraft der Sonne beträgt also $3.87 \cdot 10^{26}$ Watt.

Aus der Gleichung (37) ergibt sich durch Division mit Δt die Beziehung

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta E}{\Delta t}}{c^2}\,. \tag{50}$$

$\Delta E/\Delta t$ ist die pro Zeiteinheit abgegebene Energie der Sonne, also gerade die abgestrahlte Leistung, d.h. die Leuchtkraft. $\Delta m/\Delta t$ ist der durch die abgegebene Leistung verursachte Massenverlust pro Zeiteinheit. Zur Abkürzung wird für $\Delta m/\Delta t$ oft auch $\dot{m}$ geschrieben. Also gilt:

$$\dot{m} = \frac{L}{c^2}\,. \tag{51}$$

Es ergibt sich

$$\dot{m} = \frac{3.87 \cdot 10^{26}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 4.30 \cdot 10^9\,. \tag{52}$$

Infolge der mit der Sonnenstrahlung abgegebenen Energie nimmt also die Masse der Sonne in jeder Sekunde um 4.3 Millionen Tonnen ab.

Wie bereits betont, ist es aber nicht etwa Materie, die in Energie umgewandelt wird. Die Sonne verliert durch die Sonnenstrahlung keine Materie, die Zahl der Protonen, Neutronen und Elektronen bleibt konstant, nur deren Masse ändert sich.

Tatsächlich verliert die Sonne Materie, aber nicht infolge der Sonnenstrahlung, sondern durch den „Sonnenwind“. Der Sonnenwind besteht aus freien Elektronen und Atomkernen, die aus der Sonnenkorona in den Weltraum strömen. Der Massenverlust infolge des Sonnenwindes beträgt etwa 1 Million Tonnen pro Sekunde.

Total beträgt also der Massenverlust der Sonne 5.3 Millionen Tonnen pro Sekunde.

Da drängt sich vielleicht die besorgte Frage auf, wie lange die Sonne denn mit diesem riesigen Massenverlust noch existieren kann. Die Masse der Sonne ist jedoch so gewaltig gross, dass die 5.3 Millionen Tonnen pro Sekunde lediglich einen Massenverlust von weniger als 1 Promille in 10 Milliarden Jahren bewirken würden. 10 Milliarden Jahre sind aber gerade etwa die gesamte Lebensdauer, die man für die Sonne auf Grund ihrer Masse, ihrer Zusammensetzung und den in ihr ablaufenden Fusionsreaktionen erwarten kann.

5.4 Raumschiff im interstellaren Medium

Der Raum zwischen den Sternen ist keineswegs vollkommen leer, sondern enthält interstellare Materie. Diese besteht hauptsächlich aus neutralem und ionisiertem Gas (vorwiegend Wasserstoff) und etwa zu 1 Prozent aus Staub. Die Materie ist sehr ungleichmässig verteilt und konzentriert sich in interstellaren Wolken. Die mittlere Teilchendichte n im Gas beträgt etwa 1 Atom pro cm^3.

Wenn sich ein Raumschiff mit der Geschwindigkeit v durch dieses interstellare Medium bewegt, dann strömt vom Bezugssystem des Raumschiffs aus gesehen das interstellare Medium mit der Geschwindigkeit v gegen das Raumschiff.

Aus den Gleichungen (40) und (41) folgt für die kinetische Energie eines Teilchens:

$$T = E - m\,c^2 = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - m\,c^2\,. \tag{53}$$

Mit der üblichen Abkürzung

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{54}$$

ergibt sich:

$$T = (\gamma - 1)\,m\,c^2\,. \tag{55}$$

Wenn nun ein Raumschiff, wie in Abschnitt 3.5 beschrieben, zur Wega fliegt, erreicht es in der Wegmitte eine Geschwindigkeit, für die $\gamma = 14.1$ ist. Damit wird

$$T = 13.1\,m\,c^2\,. \tag{56}$$

Die Ruhe-Energie $m\,c^2$ eines Wasserstoffatoms ist rund 0.939 GeV ($= 0.939 \cdot 10^9$ eV). Somit ist

$$T = 13.1 \cdot 0.939 \text{ GeV} = 12.3 \text{ GeV}\,. \tag{57}$$

Die Wasserstoffatome des interstellaren Mediums treffen also mit einer relativen kinetischen Energie von 12.3 GeV auf das Raumschiff.

Die Teilchendichte n ergibt bei der Geschwindigkeit $v \approx c$ den Teilchenstrom

$$\phi = n\,c\,. \tag{58}$$

Mit einer Teilchendichte von

$$n = 1\ \mathrm{cm}^{-3} = 10^6\ \mathrm{m}^{-3} \tag{59}$$

ergibt sich ein Teilchenstrom von

$$\phi = 10^6\ \mathrm{m}^{-3} \cdot 3 \cdot 10^8\ \mathrm{ms}^{-1} = 3 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m}^{-2}\mathrm{s}^{-1}\,. \tag{60}$$

Das Raumschiff wird also von einem Strom von $3 \cdot 10^{10}$ Wasserstoffatomen pro cm^2 und Sekunde mit einer Energie von je 12.3 GeV getroffen. Dies entspricht einer sehr durchdringenden Strahlung von tödlicher Intensität.

Wenn diese Strahlung durch eine Abschirmung absorbiert würde, wäre die aufgenommene Leistung gegeben durch die Beziehung

$$P = A\,\phi\,T\,, \tag{61}$$

wobei A die Querschnittsfläche der Abschirmung bedeutet. Für eine Querschnittsfläche $A = 100\ \mathrm{m}^2$ ergibt sich mit dem Umrechnungsfaktor (34) die Leistung:

$$P = 100 \cdot 3 \cdot 10^{14} \cdot 12.3 \cdot 10^9 \cdot 1.609 \cdot 10^{-19} = 5.94 \cdot 10^7\,. \tag{62}$$

Diese Abschirmung würde also durch den Aufprall der Wasserstoffatome des interstellaren Gases eine Leistung rund 60 Megawatt aufnehmen.

In einer interstellaren Wolke sind die Teilchendichten und damit auch die hier berechneten Werte noch um etliche Zehnerpotenzen grösser.

Epilog

Im Zusammenhang mit der Relativitätstheorie gibt es einige Missverständnisse, die sich hartnäckig halten.

- *Nur ganz wenige Leute verstehen die Relativitätstheorie.*

  Nicht nur jeder Physiker, der sich damit befasst, sondern auch jeder Laie, der sich die wichtigsten Mathematikkenntnisse aneignet, kann die Relativitätstheorie verstehen, wenn er sich genügend darin vertieft.

- *Alles ist relativ.*

  Eben nicht. Das Wesentliche der Relativitätstheorie besteht darin, dass die physikalischen Gesetze invariant sind gegenüber Lorentztransformationen. Mit andern Worten, die physikalischen Gesetze haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form.

- *Im Weltraum gehen die Uhren langsamer.*

  Meistens ist damit gemeint, dass in einem relativ zur Erde bewegten Raumschiff die Uhren langsamer gehen. Das Wesentliche dabei ist aber nicht, dass die Uhr sich im Weltraum befindet, sondern dass sie relativ zur Erde schnell bewegt ist.

  Tatsächlich geht auch eine Uhr, die sich im Weltraum befindet, aber sich relativ zur Erde nicht bewegt, anders als die Uhr, die sich auf der Erde befindet. Auf Grund der allgemeinen Relativitätstheorie geht sie aber schneller als die Uhr auf der Erde, weil diese sich in einem stärkeren Gravitationsfeld befindet. Zudem bewegt sich die Uhr auf der Erde infolge der Erddrehung und geht deshalb langsamer als die Uhr im Weltraum. Im Weltraum gehen also die (nicht bewegten) Uhren nicht langsamer, sondern schneller.

- *Das ist doch alles nur Theorie*

  Eben nicht. Die Relativitätstheorie hat sich in der Praxis bestens bewährt. Wenn die Relativitätstheorie falsch wäre, würde Verschiedenes nicht richtig funktionieren:

  - Grosse Teilchenbeschleuniger
    Zum Beispiel CERN, DESY, Fermilab
  - Navigationssysteme
    LORAN (Long Range Aid to Navigation)
    GPS (Global Positioning System)
  - Synchronisation des weltweiten Sytems von Atomuhren

Die spezielle Relativitätstheorie ist eine der am besten bestätigten Theorien der Physik.

A Anhang A Herleitungen

In diesem Anhang werden die Formeln für die Geschwindigkeitsaddition, Zeitdilatation, Massenzunahme und Massen-Energie-Beziehung in möglichst einfacher Weise hergeleitet.

A.1 Geschwindigkeitsaddition

Mit den üblichen Definitionen

$$\beta = \frac{v}{c} \tag{63}$$

und

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{64}$$

ergibt sich für die Lorentz-Transformation folgende Form:

$$x = \frac{x' + \beta\, c\, t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\,(x' + \beta\, c\, t') \tag{65}$$

$$y = y' \tag{66}$$

$$z = z' \tag{67}$$

$$c\,t = \frac{c\,t' + \beta\, x'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\,(c\,t' + \beta\, x')\,. \tag{68}$$

Bewegt sich ein Körper mit der Geschwindigkeit u' im System S$'$ parallel zur x-Achse (und damit parallel zur Geschwindigkeit v, mit der sich das System S$'$ relativ zum System S bewegt), ergibt sich für die im System S gemessene Geschwindigkeit u die Beziehung

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt'}\,\frac{dt'}{dt} = \frac{dx}{dt'}\,\frac{1}{\frac{dt}{dt'}} = \frac{\frac{d}{dt'}\,[\gamma\,(x' + \beta\, c\, t')]}{\frac{1}{c}\,\frac{d}{dt'}\,[\gamma\,(c\,t' + \beta\, x')]}\,. \tag{69}$$

Da v und damit auch γ konstant ist, kann γ herausgekürzt werden, und es folgt:

$$u = \frac{\frac{dx'}{dt'} + \beta\, c}{\frac{1}{c}\,(c + \beta\,\frac{dx'}{dt'})} = \frac{u' + v}{1 + \frac{v\,u'}{c^2}}\,. \tag{70}$$

Dies ist das relativistische Geschwindigkeitsadditionstheorem (Gleichung (10)).

A.2 Zeitdilatation

Die Beziehung für die Zeitdilatation (Gleichung (11)) kann direkt aus der Lorentz-Transforamtion hergeleitet werden. Sie kann aber auch mit Hilfe einer „Lichtuhr“ veranschaulicht werden.

Zwischen zwei perfekten parallelen Spiegeln werde ein kurzer Lichtimpuls verlustfrei hin und her reflektiert. Bei jeder Reflexion ergebe sich ein Zeitimpuls, der die Uhr steuert (Abbildung 48).

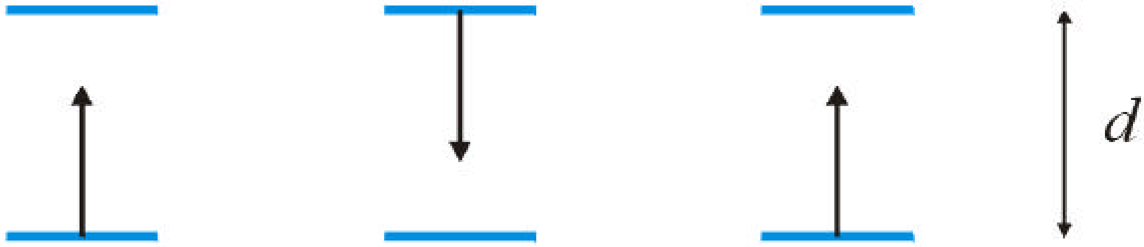

Abbildung 48: Lichtuhr

Wenn die beiden Spiegel einen Abstand von $d = 30$ cm haben, ist das Zeitintervall zwischen zwei Zeitimpulsen 1 ns [15].

Wenn sich nun die Lichtuhr relativ zu einem Beobachter mit der Geschwindigkeit v senkrecht zur Achse der Uhr bewegt (Abbildung 49), ist für diesen Beobachter wegen der Konstanz der Lich

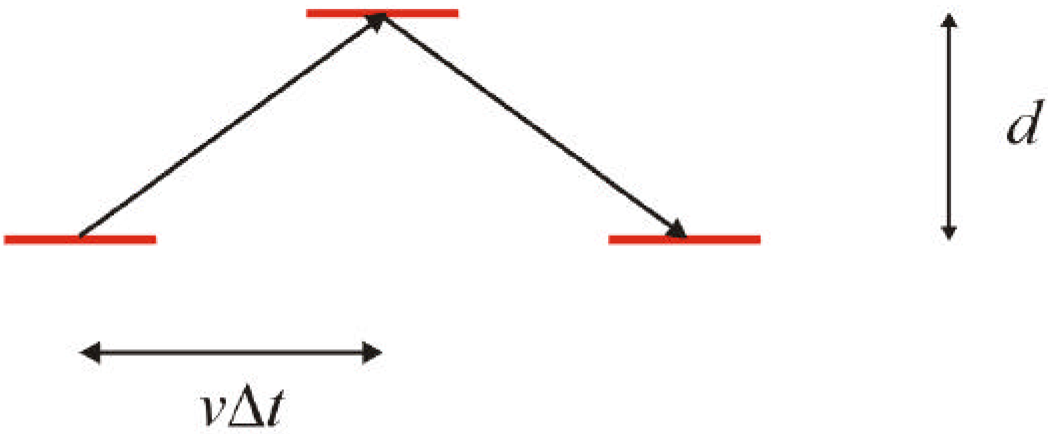

Abbildung 49: Bewegte Lichtuhr

$$\Delta t = \frac{\sqrt{v^2\,\Delta t^2 + d^2}}{c} \tag{71}$$

[15] Für die Lichtgeschwindigkeit wird hier der runde Wert 300’000 km/s verwendet. Der genaue Wert wäre 299’792’458 m/s.

Quadrieren dieser Gleichung, Multiplikation mit c^2 und Einsetzen von

$$d = c\,\Delta t' \tag{72}$$

liefert:

$$c^2\,\Delta t^2 = v^2\,\Delta t^2 + c^2\,\Delta t'^2\,. \tag{73}$$

Auflösen nach Δt ergibt schliesslich die Beziehung für die Zeitdilatation:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{74}$$

A.3 Massenzunahme

Es werden zwei gleiche Massen m_1 und $m_2{}'$ betrachtet, die sich relativ zueinander mit der Geschwindigkeit v bewegen und sich senkrecht zu der Richtung dieser Geschwindigkeit mit den Geschwindigkeiten $u_1 = u_2{}'$ so aufeinander zu bewegen, dass sie zusammenprallen (Abbildung 50).

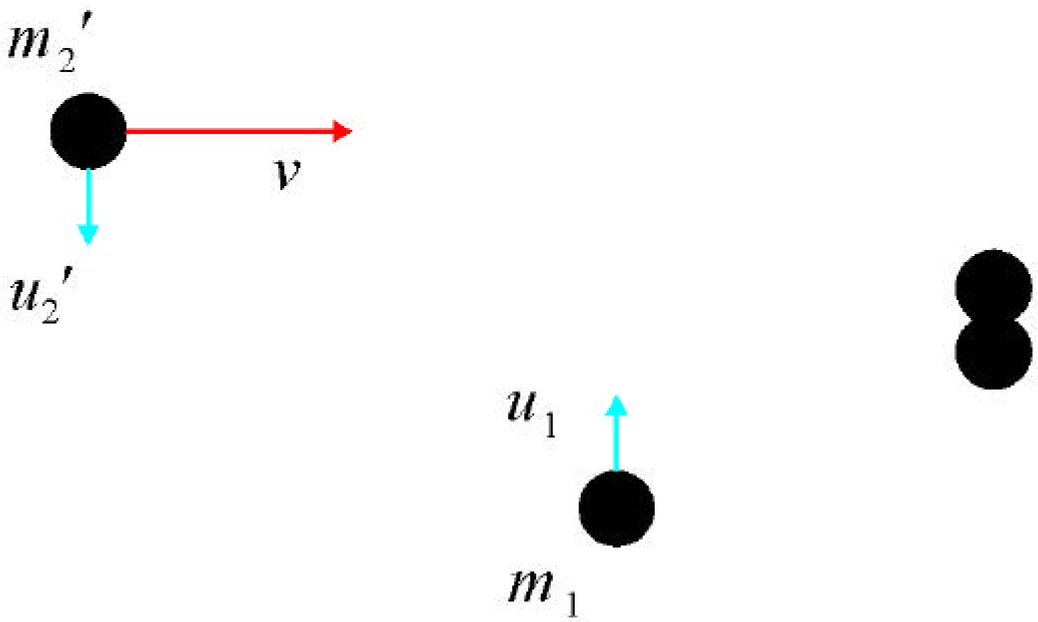

Abbildung 50: Zusammenstoss von zwei gleichen Massen

Die Geschwindigkeiten u_1 und $u_2{}'$ seien klein verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit. Nach Voraussetzung sind die beiden Impulse, die jeweils im System der betreffenden Masse gemessen werden, gleich gross. Aus Symmetriegründen bewegen sich die beiden Massen nach dem inelastischen Stoss senkrecht zur Richtung von $\vec{v}$ weder in der einen noch in der anderen Richtung. Der Impuls in dieser Richtung nach dem Stoss ist somit gleich null. Wenn vorausgesetzt wird, dass der Impulssatz auch in der relativistischen Mechanik gelten soll, muss der Gesamtimpuls in der Richung senkrecht zu $\vec{v}$ auch vor dem Stoss gleich null sein. Somit muss im System der Masse m_1 gelten:

$$p_2 = m_2\, u_2 = p_1 = m_1\, u_1\,. \tag{75}$$

Andererseits ist nach Voraussetzung

$$m_1\, u_1 = {m_2}'\, {u_2}'\,. \tag{76}$$

Für ${u_2}'$ ergibt sich aus der Beziehung für die Zeitdilatation:

$${u_2}' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dt'} = u_2\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{77}$$

Dabei wurde verwendet, dass $y' = y$ gilt. Aus den Gleichungen (75) und (76) folgt nun durch Einsetzen von (77)

$$m_2\, u_2 = m_1\, u_1 = {m_2}'\, {u_2}' = {m_2}'\, u_2\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{78}$$

und daher

$$m_2 = \frac{{m_2}'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{79}$$

${m_2}'$ ist die Masse, die in dem mit der Masse 2 mitbewegten System gemessen wird, und entspricht also der Ruhemasse m_0, während m_2 die Masse ist, die im System gemessen wird, gegenüber dem sich die Masse 2 mit der Geschwindigkeit v bewegt[16].

Somit gilt die Beziehung:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{80}$$

A.4 Masse-Energie-Beziehung

Ein langer Zylinder mit der Länge l und der Masse m schwebe bewegungslos (relativ zu einem Inertialsystem) in Weltraum so weit entfernt von Himmelskörpern, dass auf ihn (praktisch) keine Kräfte wirken.

Von einem Ende des Zylinders werde ein kurzer intensiver Lichtimpuls mit der Energie E entlang der Zylinderachse abgestrahlt (Abbildung 51).

[16] Dabei wurde jeweils die kleine Geschwindigkeit ${u_2}'$ nicht berücksichtigt.

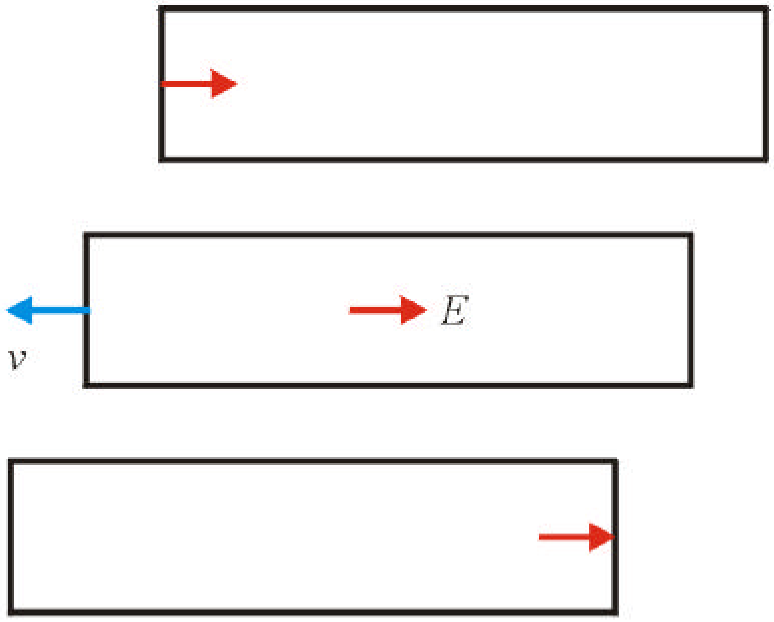

Abbildung 51: Lichtimpuls in einem Zylinder

Bereits aus der Maxwellschen Theorie war bekannt, dass eine elektromagnetische Welle der Energie E einen Impuls

$$p = \frac{E}{c} \tag{81}$$

mitführt. Durch die Emission des Lichtstrahls erhält der Zylinder einen Rückstoss und bewegt sich in entgegengesetzter Richtung wie der Lichtstrahl mit der Geschwindigkeit v. Auf Grund des Impulserhaltungssatzes gilt

$$m\,v = p = \frac{E}{c} \tag{82}$$

und somit

$$v = \frac{E}{m\,c}\,. \tag{83}$$

Der Lichtstrahl kommt nach der Zeit

$$t = \frac{l}{c} \tag{84}$$

am anderen Ende des Zylinders an und wird dort absorbiert. Dabei wird der gleiche Impuls p übertragen und der Zylinder kommt wieder zum Stillstand. Während der Zeit t hat er sich um die Strecke

$$s = v\,t \tag{85}$$

bewegt. Da jedoch nach Voraussetzung keine äusseren Kräfte auf den Zylinder wirken, kann sich der Schwerpunkt des Zylinders nicht verschoben haben. Wenn sich also der Zylinder um die Strecke s bewegt hat, muss sich ihn ihm eine Masse Δm so verlagert haben, dass sich sein Schwerpunkt nicht bewegt hat (Abbildung 52).

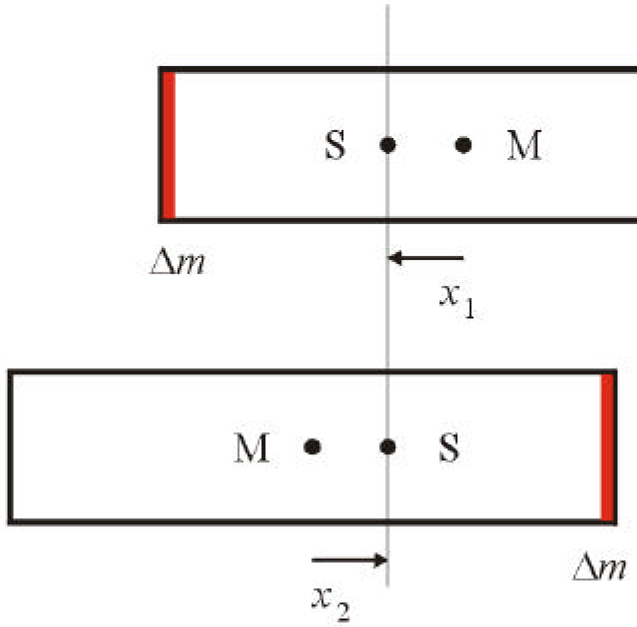

Abbildung 52: Massenverlagerung im Zylinder

Die Position des Schwerpunktes zweier Massen ergibt sich aus der Gleichung

$$x_S = \frac{m_1\, x_1 + m_2\, x_2}{m_1 + m_2}\,. \tag{86}$$

Vor der Emission des Lichtstrahls ist die Lage des Schwerpunkts, gemessen vom Mittelpunkt des Zylinders gegeben durch

$$x_{S1} = \frac{0\cdot m + \frac{l}{2}\,\Delta m}{m + \Delta m} = \frac{l}{2}\,\frac{\Delta m}{m + \Delta m}\,. \tag{87}$$

Nach der Absorption des Lichtstrahls ist der Schwerpunkt gegenüber dem Zylindermittelpunkt nach der anderen Seite verschoben um die Strecke

$$x_{S2} = \frac{0\cdot m + \frac{l}{2}\,\Delta m}{m + \Delta m} = \frac{l}{2}\,\frac{\Delta m}{m + \Delta m}\,. \tag{88}$$

Die Summe der Strecken x_{S1} und x_{S2} ist gleich der gesamten Verschiebung des Zylinders:

$$s = x_{S1} + x_{S2} = 2\,\frac{l}{2}\,\frac{\Delta m}{m + \Delta m} = \frac{l\,\Delta m}{m + \Delta m}\,. \tag{89}$$

Da die Masse Δm gegenüber der Masse des Zylinders vernachlässigbar klein ist, wird

$$s = \frac{l\,\Delta m}{m}\,. \tag{90}$$

Einsetzen der Gleichung für s liefert:

$$s = v\,t = \frac{E}{m\,c}\,\frac{l}{c} = \frac{l\,\Delta m}{m}\,. \tag{91}$$

Daraus ergibt sich schliesslich:

$$\Delta m = \frac{E}{c^2} \tag{92}$$

Der Lichtstrahl mit der Energie E hat eine träge Masse $\Delta m = E/c^2$.

B Anhang B
Mathematische und physikalische Begriffe und Gesetze

Dieser Anhang kann selbstverständlich weder ein Mathematik- noch ein Physik- Lehrbuch ersetzen. Es sollen lediglich die wichtigsten mathematischen und physikalischen Begriffe und Gesetze, die in diesem Manuskript verwendet werden, möglichst kurz und einfach erklärt werden. Auf Beweise und Herleitungen und auch auf mathematische Strenge wird verzichtet.

Die Erklärungen sollten hinreichend sein, dass die Gedankengänge im Skript nachvollzogen werden können. Falls jedoch die eine oder andere knappe Erklärung die Leserin oder den Leser veranlasst, sich anhand eines Lehrbuches genauer zu informieren, hat sie ihren Zweck ebenfalls erfüllt.

B.1 Beschleunigung

Die Beschleunigung ist die Geschwindigkeitsänderung pro Zeiteinheit:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \,.$$

Die so definierte Beschleunigung a ist die mittlere Beschleunigung während des Zeitintervalls Δt. Für die momentante Beschleunigung ergibt sich (vgl. Abschnitt „Geschwindigkeit“):

$$a = \frac{dv}{dt} \,.$$

Im Internationalen Einheitensystem ist die Einheit der Beschleunigung m/s^2.

Im allgemeinen Fall ist die Beschleunigung als Vektor darzustellen (vgl. Abschnitt „Geschwindigkeit“):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \,.$$

B.2 Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion ist die Funktion (vgl. Abschnitt „Funktion“)

$$y = a^x \,.$$

Die Konstante a ist die sogenannte Basis. Sie muss grösser als null sein ($a > 0$) und darf nicht gleich eins sein ($a \neq 1$). x ist beliebig.

Die Exponentialfunktion zur Basis $a = e = 2.718281828459045\ldots$ hat in der Physik eine besonders grosse Bedeutung.

$$y = e^x$$

wird als „natürliche Exponentialfunktion“ oder kurz als „e-Funktion“ bezeichnet. Ihre besondere Bedeutung beruht auf ihrer Eigenschaft, dass die Zunahme der Funktion gleich dem Funktionswert ist, d.h. es gilt

$$\frac{dy}{dx} = y\,.$$

Der Funktionswert y nimmt umso schneller zu, je grösser der Funktionswert schon ist.

B.3 Funktion

Eine Funktion

$$y = f(x)$$

ist eine „Vorschrift“, mit der jedem Wert der Variablen x ein Wert der Variablen y zugeordnet wird.

Einfache Beispiele von Funktionen:

$$\begin{aligned} y &= x + 3 \\ y &= 2\,x \\ y &= 3\,x - 5 \\ y &= x^2 \\ y &= 4\,x^3 + 2.3\,x^2 - 6.4\,x + 5.2 \end{aligned}$$

B.4 Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeit ist die zurückgelegte Wegstrecke pro Zeiteinheit:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}\,.$$

Wird ein endliches Zeitintervall Δt gewählt (z.B. 1 Sekunde, 1 Minute oder 1 Stunde), so ist v die *mittlere* Geschwindigkeit während dieses Zeitintervalls. Die *momentane* Geschwindigkeit ergibt sich, wenn das Zeitintervall Δt „unendlich klein“ gemacht wird. Die mathematische Operation, die erlaubt, Δt gegen null gehen zu lassen und dabei den sogenannten Grenzwert von $\Delta s/\Delta t$ zu berechnen, heisst *Differenzieren.* Im Grenzfall $\Delta t \to 0$ wird statt

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

dann

$$v = \frac{ds}{dt}$$

geschrieben. Im Internationalen Einheitensystem ist die Einheit der Gschwindigkeit m/s.

Im allgemeinen Fall müssen sowohl der Ort als auch die Geschwindigkeit durch einen Vektor dargestellt werden. Dann ist

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \, .$$

B.5 Gewicht

Das Gewicht oder die Gewichtskraft eines Körpers ist die Kraft, mit welcher der Körper von der Erde angezogen wird.

Die Maßeinheit für das Gewicht ist das Newton (N). Im Alltag wird das Gewicht eines Körpers meist fälschlicherweise in Kilogramm ausgedrückt.

Im Gegensatz zur Masse ist das Gewicht eines Körpers ortsabhängig. Das Gewicht eines Körpers ist auf einem hohen Berg kleiner als auf Meereshöhe und wegen der Abplattung der Erde an den Polen grösser als am Äquator. Ein Körper mit einer Masse von 1 kg wiegt fast überall in der Schweiz 9.81 N. Auf dem Mond dagegen hat ein Körper mit einer Masse von 1 kg nur noch ein Gewicht von 1.62 N.

Infolge der Erddrehung wird das tatsächlich gemessene Gewicht eines Körpers noch zusätzlich etwas beeinflusst. Einen weiteren noch kleineren Einfluss haben Mond und Sonne durch die Gezeitenwirkung.

B.6 Impuls

Der Impuls eines Körpers ist definiert als $\vec{p} = m\,\vec{v}$.

B.7 Impuls(erhaltungs)satz

Der Gesamtimpuls eines Systems von Körpern, auf das keine äusseren Kräfte wirken, bleibt konstant.

B.8 Inertialsystem

Ein Bezugssystem, in dem ein Körper, auf den keine äusseren Kräfte wirken, in Ruhe verharrt oder sich geradlinig gleichförmig bewegt, heisst Inertialsystem.

B.9 Logarithmus

Die Funktion

$$y = \ln x$$

heisst „natürlicher Logarithmus“. Sie ist die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion, d.h. wenn

$$y = \ln x\,,$$

dann gilt:

$$x = e^y\,.$$

Oft wird auch mit dem Zehnerlogarithmus gerechnet:

$$y = \log x$$

Der Zehnerlogarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion zur Basis 10, d.h. wenn

$$y = \log x\,,$$

dann gilt:

$$x = 10^y\,.$$

B.10 Masse

Die Masse eines Körpers ist eine fundamentale Eigenschaft des Körpers. Zunächst kann unterschieden werden zwischen *träger* und *schwerer* Masse.

Die träge Masse eines Körpers ist ein Maß für seine „Trägheit“ gegenüber einer Änderung seines Bewegungszustandes. Je grösser die träge Masse, desto grösser ist die Kraft, die für eine bestimmte Änderung der Geschwindigkeit erforderlich ist.

Die schwere Masse eines Körpers ist ein Maß für die Kraft, mit der Körper von einem anderen Körper (z.B. von der Erde) angezogen wird. Je grösser die schwere Masse eines Körpers, desto grösser ist sein Gewicht.

Da es sich herausgestellt hat, dass schwere und träge Masse stets streng proportional sind, kann der Proportionalitätsfaktor gleich eins gesetzt werden, und es muss zwischen schwerer und träger Masse nicht unterschieden werden. Es wird daher meist nur von *Masse* gesprochen. Dank der Proportionalität zwischen schwerer und träger Masse lassen sich Massen durch Wägen bestimmen. Ferner bildet die strenge Proportionalität zwischen schwerer und träger Masse die Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Die Maßeinheit für die Masse ist das Kilogramm (kg).

Im Gegensatz zum Gewicht ist die Masse eines Körpers ortsunabhängig. Ein Körper, der auf der Erde eine Masse von 1 kg aufweist, hat auch auf dem Mond eine Masse von 1 kg.

B.11 Multiplikation

In der Mathematik, in den Naturwissenschaften und in der Technik wird die Multiplikation von zwei Zahlen oder Symbolen mit einem Punkt ausgedrückt:

$$3 \cdot 5 = 15\,,$$

oder allgemein:

$$a \cdot b\,.$$

Das Malzeichen $\times$ bedeutet in der Mathematik eine allgemeinere Operation als die gewöhnliche Multiplikation.

Da als Symbole für mathematische oder physikalische Grössen in der Regel nur einzelne Buchstaben verwendet werden, kann ohne Gefahr von Missverständnissen bei der Multiplikation von Symbolen der Multiplikationspunkt auch weggelassen werden:

$$a \cdot b = a\,b\,,$$

was bei der Multiplikation von zwei Zahlen natürlich nicht möglich ist:

$$3 \cdot 5 \neq 3\,5\,.$$

Jedoch ist $3\,a$ eindeutig:

$$3\,a = 3 \cdot a\,.$$

B.12 Newton

1

Sir Isaac Newton (1643 - 1727): englischer Physiker, Mathematiker und Astronom.

2

Newton: Einheit der Kraft. 1 Newton ist die Kraft, die einer Masse von 1 kg eine Beschleunigung von 1 m/s^2 erteilt:

$$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg\ m\ s^{-2}}\ .$$

B.13 Newtonsche Gesetze

1. Newtonsches Gesetz

Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Das erste Newtonsche Gesetz wird auch als „Trägheitsgesetz“ bezeichnet.

2. Newtonsches Gesetz

Die Änderung der Bewegung [eines Körpers] ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

Dies kann auch kurz so ausgedrückt werden:

Die momentane zeitliche Änderung des Impulses ist gleich der einwirkenden Kraft.

Das entspricht der folgenden Beziehung:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}\,.$$

Dabei ist $\vec{F}$ die Kraft und $\vec{p}$ der Impuls. In der klassischen Mechanik ist die Masse m konstant und die Newtonsche Gleichung kann auch so geschrieben werden:

$$\vec{F} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = m\,\vec{a}\,.$$

Das zweite Newtonsche Gesetz wird auch als „dynamisches Grundgesetz“ oder als „Aktionsprinzip“ bezeichnet.

3. Newtonsches Gesetz

Die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

Dieses Gesetz kann durch die folgende Beziehung ausgedrückt werden:

$$\vec{F}_{BA} = -\,\vec{F}_{AB}\,.$$

Dabei ist $\vec{F}_{AB}$ die Kraft, mit der der Körper A auf den Körper B wirkt, und $\vec{F}_{BA}$ ist die Kraft, mit der der Körper B auf den Körper A wirkt.

Das dritte Newtonsche Gesetz wird auch als „Wechselwirkungsgesetz“ oder „Reaktionsprinzip“ bezeichnet. Häufig wird dafür auch die Formulierung in lateinischer Sprache verwendet:

„actio = reactio“ .

B.14 Potenzen

Die Multiplikation einer Zahl a mit sich selbst wird abgekürzt geschrieben als a^2:

$$a \cdot a = a\,a = a^2\,.$$

a^2 wird als „a Quadrat“, „a im Quadrat“ oder, seltener, „a hoch zwei“ ausgesprochen.

Entsprechend wird geschrieben:

$$\begin{aligned} a\,a\,a &= a^3 \\ a\,a\,a\,a &= a^4 \\ a\,a\,a\,a\,a &= a^5 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

a^3 wird als „a hoch 3“ ausgesprochen. Die hochgestellte Zahl wird als „Exponent“ bezeichnet.

Offensichtlich gilt z.B.:

$$a^2 \cdot a^3 = a^5 = a^{2+3}\,.$$

Diese Regel gilt ganz allgemein:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}\,.$$

Ferner ist

$$\frac{a^5}{a^3} = a^2\,,$$

oder, allgemein:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\,.$$

Damit diese Rechenregeln uneingeschränkt gelten, ist folgende Festlegung sinnvoll:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}\,.$$

Es ist auch leicht einzusehen, dass

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

gilt.

Zweckmässigerweise wird noch

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

definiert (s. Abschnitt „Wurzeln“). Dann können auch gebrochene Zahlen als Exponenten verwendet werden.

B.15 Relativitätsprinzip

Die physikalischen Gesetze haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form.

B.16 Variable

Die Oberfläche A einer Kugel mit dem Radius r wird mit Hilfe der Formel

$$A = 4\,\pi\,r^2$$

berechnet. Dabei sind 4 und $\pi = 3.1415926\ldots$ *Konstanten*, d.h. diese Zahlen sind für alle Kugeln gleich. Der Radius r und die Oberfläche A sind dagegen *Variablen*, d.h. r und A haben für verschiedene Kugeln verschiedene Zahlenwerte.

B.17 Vektoren

Vektoren sind – vereinfacht gesagt – mathematische Objekte, die (im dreidimensionalen Raum) durch einen Betrag (d.h. eine positive Zahl) und eine Richtung im Raum charakterisiert werden können und bestimmte Rechenregeln und gewisse Transformationsbedingungen beim Übergang von einem zu einem anderen Koordiantensystem erfüllen. Nicht alle Grössen, denen ein Betrag und eine Richtung zugeordnet werden kann, sind Vektoren. Als Symbol für einen Vektor wird häufig ein Buchstabe mit einem darübergestellten Pfeil verwendet: $\vec{a}$.

Viele Grössen in der Physik lassen sich durch Vektoren darstellen. Beispiele sind: Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Impuls und elektrische, magnetische oder gravitative Feldstärke.

B.18 Wurzeln

Die Quadratwurzel (oder kurz „Wurzel“) $\sqrt{a}$ bedeutet diejenige Zahl, die mit sich selbst multipliziert a ergibt. Wenn also

$$\sqrt{a} = b\,,$$

dann gilt:

$$b^2 = a\,.$$

Es ist z.B.

$$\sqrt{4} = 2\,, \qquad \sqrt{9} = 3\,, \qquad \sqrt{16} = 4 \quad \text{usw.}$$

Eine Wurzel lässt sich auch berechnen, wenn das Ergebnis nicht ganzzahlig ist. Es ist z.B.:

$$\sqrt{2} = 1.41421356\ldots \quad \text{und} \quad \sqrt{3} = 1.73205080\ldots\,.$$

$\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ sind Beispiele von sogenannten *irrationalen Zahlen*. Sie sind keine ganze Zahlen und können auch nicht als Brüche von ganzen Zahlen geschrieben werden. Der Dezimalbruch einer irrationalen Zahl ist „unendlich“ und nicht periodisch, d.h. die Folge der Ziffern hinter dem Dezimalpunkt bricht nie ab und die Ziffern sind nicht eine Gruppe von Ziffern, die sich immer wiederholt (wie z.B. bei $1/7 = 0.142857142857142857\ldots$).

Analog ist die dritte Wurzel $\sqrt[3]{a}$ definiert durch:

$$\sqrt[3]{a} = b \qquad b^3 = a\,.$$

Zum Beispiel ist $\sqrt[3]{64} = 4$, weil $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Genauso kann auch die n-te Wurzel definiert werden:

$$\sqrt[n]{a} = b \qquad b^n = a\,.$$

B.19 Zehnerpotenzen

Sehr grosse und sehr kleine Zahlen sind unhandlich zu schreiben und schwierig auszusprechen und es ist mühsam, damit zu rechnen, wenn sie ausgeschrieben werden. Zum Beispiel ist die Strahlungsleistung der Sonne

$$L = 387'000'000'000'000'000'000'000'000 \text{ Watt}\,,$$

also 387 Quadrillionen Watt. Wenn dies jemandem übermittelt werden soll, ist noch fraglich, ob der Empfänger dieser Information überhaupt weiss, was eine „Quadrillion“ ist. Wenn die Zahl geschrieben oder gelesen werden soll, müssen die Nullen (oder zumindest die Dreiergruppen der Nullen) jedesmal gezählt werden. Zudem beansprucht die geschriebene Zahl unsinnig viel Platz.

Zehnerpotenzen sind eine Schreibweise, die das Schreiben und Lesen solcher Zahlen und vor allem auch das Rechnen damit sehr erleichtern. Die folgende Tabelle erklärt sich gewissermassen selber.

10^1	=	10
10^2	=	100
10^3	=	1’000
10^4	=	10’000
10^5	=	100’000
10^6	=	1’000’000
10^7	=	10’000’000
10^8	=	100’000’000

Die hinter der Zehn hochgestellte Zahl gibt offenbar einfach die Zahl der Nullen, die hinter der Eins zu schreiben sind.

Der mittlere Radius der Erdbahn beträgt rund 150 Millionen km. Mit Zehnerpotenzen lässt sich diese Entfernung folgendermassen schreiben:

$150 \cdot 10^6$ km oder
$1.5 \cdot 100 \cdot 10^6 \text{ km} = 1.5 \cdot 10^8 \text{ km}$.

Der Punkt in etwa halber Höhe der Zeile ist ein Multiplikationszeichen. Die Zahl in der ersten Zeile bedeutet also 150 mal 1 Millionen. Das ist natürlich gleichviel, wie was in der zweiten Zeile steht, nämlich 1.5 mal 100 Millionen oder eben 1.5 mal 10^8.

Völlig analog werden negative Zehnerpotenzen verwendet:

$$\begin{aligned}
10^{-1} &= 0.1\\
10^{-2} &= 0.01\\
10^{-3} &= 0.001\\
10^{-4} &= 0.0001\\
10^{-5} &= 0.000'01\\
10^{-6} &= 0.000'001
\end{aligned}$$

Die Regel ist hier offenbar genauso einfach: Die hinter der Zehn hochgestellte negative Zahl zeigt, wieviele Nullen zu schreiben sind. Dabei muss die Null vor dem Dezimalpunkt mitgezählt werden.

Die folgenden Beispiele zeigen, wie einfach Zehnerpotenzen miteinander multpliziert werden können:

$10^1 \cdot 10^1 = 10^{1+1} = 10^2$
$10^1 \cdot 10^2 = 10^{1+2} = 10^3$
$10^2 \cdot 10^3 = 10^{2+3} = 10^5$
$10^6 \cdot 10^{-2} = 10^{6-2} = 10^4$
$10^3 \cdot 10^{-5} = 10^{3-5} = 10^{-2}$

Die hinter der Zehn hochgestellten Zahlen werden „Exponenten“ genannt. Wie leicht ersichtlich, werden zwei Zehnerpotenzen miteinander multipliziert, indem die Exponenten einfach addiert werden.

Genauso einfach wird die Division:

$10^6/10^4 = 10^{6-4} = 10^2$
$10^5/10^2 = 10^{5-2} = 10^3$
$10^3/10^6 = 10^{3-6} = 10^{-3}$
$10^2/10^{-5} = 10^{2-(-5)} = 10^{2+5} = 10^7$

Bei der Division werden die Exponenten voneinander subtrahiert.

Das Rechnen wird durch die Potenzschreibweise offenbar viel einfacher.

Da z.B. $100/100 = 1$ und andererseits $10^2/10^2 = 10^{2-2} = 10^0$ ist, wurde konsequenterweise definiert:

$$10^0 = 1\,.$$

Die Strahlungsleistung der Sonne lässt sich nun viel kürzer und übersichtlicher schreiben als

$$L = 387 \cdot 10^{24} \text{ Watt}$$

oder

$$L = 3.87 \cdot 10^{26} \text{ Watt}\,.$$

Literatur

[A] **Relativitätstheorie**

[1] Lewis C. Epstein
Relativitätstheorie anschaulich dargestellt
Birkhäuser, Basel 1988.

Mit vielen Zeichnungen und Diagrammen, ohne Formeln, trotzdem nicht ganz leicht zu lesen.

[2] Roman Sexl
Raum – Zeit – Relativität
Rowohlt, Reinbek bei Hamburg 1978.
Vergriffen, wird gelegentlich antiquarisch angeboten.

Sehr schöne und klare Darstellung mit wenigen und einfachen Formeln.

[3] Martin Gardner
Relativitätstheorie für alle
DuMont, Köln 2005.

Spezielle und allgemeine Relativitätstheorie. Nahezu ohne Formeln.

[4] Peter-Paul Manzel
Relativitätstheorie
Europäische Verlagsanstalt, Hamburg 2005.

Spezielle und allgemeine Relativitätstheorie. Kurze und einfache Darstellung.

[5] Domenico Giulini
Spezielle Relativitätstheorie
Fischer Taschenbuch Verlag, Frankfurt am Main 2004.

Etwas anspruchsvoller.

[6] Jürgen Freund
Spezielle Relativitätsthorie für Studienanfänger
vdf Hochschulverlag, Zürich 2004.

Ausführliche und klare Darstellung. Matrizen- und Differentialrechnung wird vorausgesetzt.

[7] Horst Melcher
Relativitätstheorie
Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974.

Spezielle und allgemeine Relativitätstheorie. Ausführliche und klare Darstellung. Differentialrechnung wird vorausgesetzt.

[8] Ulrich E. Schröder
Spezielle Relativitätstheorie
Verlag Harr Deutsch, Thun 1987.

Hochschulniveau. Ausgezeichnet.

[9] Torsten Fliessbach
Allgemeine Relativitätstheorie
Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin Oxford 1995.

Hochschulniveau. Ausgezeichnet.

[10] R.S. Shankland
The Michelson-Morley Experiment
Scientific American, Vol. 211, No. 5, November 1964.

Ausführliche Beschreibung des Michelson-Morley-Experiments.

[B] **Moderne Physik**

[11] Brian Greene
Der Stoff, aus dem der Kosmos ist
Siedler, Wolf Jobst, Verlag GmbH, Berlin 2004.

Einführung in die Grundprobleme der modernen Physik. Keine Formeln, trotzdem etwas anspruchsvolle Lektüre.

[12] Brian Greene
Das elegante Universum
Berliner Taschenbuch Verlag, Berlin 2002.

Beschreibung der Superstring-Theorien. Keine Formeln, jedoch leicht atemberaubend.