Hans Walser, [20080326a], [20160627]

1 Die Summe ungerader Zahlen

Zunächst die ersten Beispiele:

$$1 = 1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$$

Die Summe s_n der n ersten ungeraden Zahlen ist $s_n = n^2$.

2 Rechnerischer Beweis

Die ungeraden Zahlen bilden eine arithmetische Folge. Für eine arithmetische Folge a_k gilt allgemein:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = n \tfrac{a_1 + a_n}{2}$$

In unserem Fall also:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n \tfrac{1 + (2n-1)}{2} = n^2$$

Es gibt aber auch schöne geometrische Beweise.

3 Beweis mit Quadraten

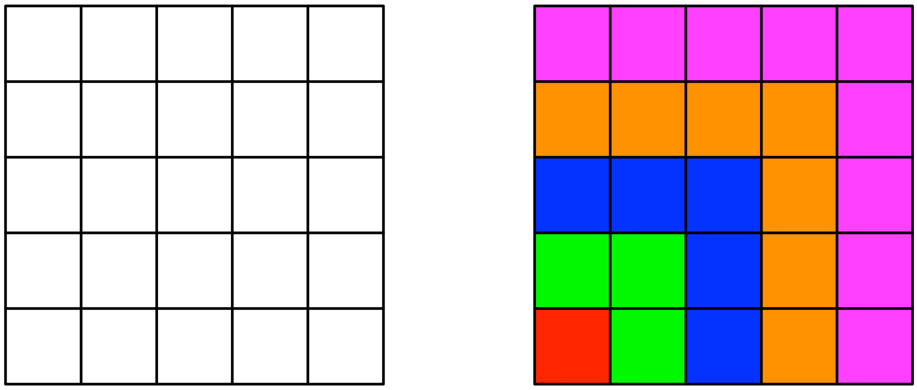


Abb. 1: 25 Quadrate

Das große Quadrat enthält 25 kleine Quadrate. Aus der Figur rechts lesen wir ab:

$$1+3+5+7+9=5^2$$

4 Beweis mit Dreiecken

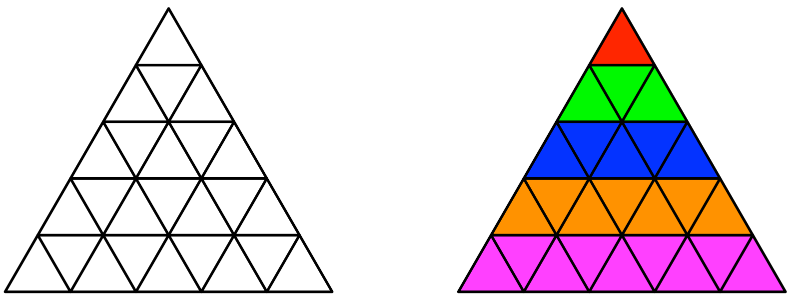


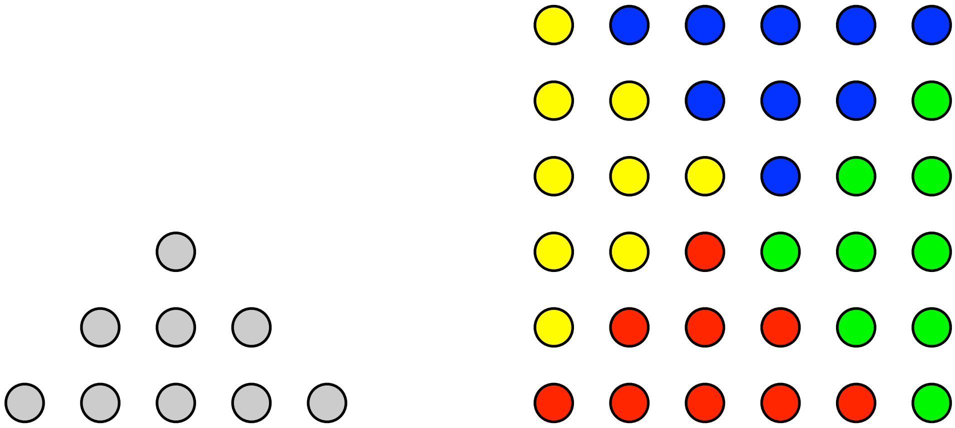
Abb. 2: 25 Dreiecke

Das große Dreieck enthält 25 kleine Dreiecke. Aus der Figur rechts lesen wir ab:

$$1+3+5+7+9=5^2$$

5 Anordnen

Die Abbildung 3a zeigt eine Stapelanordnung der ersten n ungeraden Zahlen. Die Basislinie hat die Länge $2n-1$. In der Abbildung 3b sind vier solche Stapel in einem Quadrat der Seitenlänge $2n$ angeordnet.



a) b)

Abb. 3: Stapel und Quadrat

Somit ist:

$$4s_n = (2n)^2 = 4n^2$$
$$s_n = n^2$$