Geschichte der geometrischen Konstruktionsprobleme I

(Vorlesung, gehalten an der Universität zu Köln im WS 06/07 von Klaus Volkert)

1. Einleitung

Unter geometrischen Konstruktionsproblemen im engeren Sinn des Wortes versteht man heute vier klassische Aufgabenstellungen, deren Bewältigung allein mit Zirkel und Lineal erfolgen soll. Diese sind in der Reihenfolge, in der wir sie behandeln werden: die Konstruktion regelmäßiger Vielecke, die Quadratur des Kreises, die Dreiteilung des Winkels und die Verdopplung des Würfels. Die genannten Probleme gehören zu den ältesten uns überlieferten mathematischen Fragestellungen; sie traten anscheinend im Verlauf des 5. Jahrhunderts vor Christus bei den Griechen auf. Eine der ersten Anspielungen auf die Quadratur des Kreises findet sich bei Aristophanes, der sich in seiner Komödie *Die Vögel* über jene Leute lustig macht, die den Kreis viereckig machen wollen. Versteht man unter Quadratur des Kreises die Frage nach einer näherungsweisen Bestimmung der Kreisfläche, so ist dieses Problem natürlich noch viel älter; entsprechende Näherungswerte für die Kreiszahl π finden sich schon in der alten ägyptischen, babylonischen und chinesischen Mathematik. Gerade bei diesem Problem ist die Beschränkung auf die Konstruktionsmittel Zirkel und Lineal ganz entscheidend. Heute wird im Deutschen die Bezeichnung Quadratur des Kreises fast nur noch im eben genannten Sinn gebraucht; in früheren Zeiten hingegen (etwa bei Leibniz und seinen Zeitgenossen) bedeutete allgemein Quadratur die Bestimmung des Flächeninhaltes einer meist krummlinig begrenzten Figur. Dieser weite Sinn hat sich bis heute z. B. im Französischen gehalten. Man muss sich also hier vor sprachlich bedingten Missverständnissen hüten.

Die Frage, warum die Griechen auf die Idee verfallen sind, sich auf Zirkel und Lineal zu beschränken, lässt sich in Ermangelung entsprechender Quellen nicht abschließend beantworten. Folgende Argumente wurden für eine derartige Beschränkung vorgebracht:

- In der griechischen Naturphilosophie spielten die geradlinige und die Kreisbewegung eine ganz besondere Rolle. Paradigma für die geradlinige Bewegung war der freie Fall, während die vollkommene Kreisbewegung bei den Himmelskörpern angenommen wurde.
- Zirkel und Lineal sind relativ präzise arbeitende Konstruktionswerkzeuge, die einigermaßen einfach hergestellt werden können. Ihre ausschließliche Verwendung könnte mit einem Bestreben nach Strenge zusammenhängen.

Es muss allerdings beachtet werden, dass schon in der Antike die Rede von Zirkel und Lineal eher metaphorischen Charakter hatte, insofern schon damals klar war, dass die Gegenstände der Mathematik ideale Entitäten sind. Von diesen kann man mit Instrumenten lediglich Zeichen erzeugen; Konstruktionen mit Zirkel und Lineal sind damit nichts anderes, als in systematischer Art und Weise Kreise mit Kreisen, Kreise mit Geraden und Geraden mit Geraden zum Schnitt zu bringen. Ganz deutlich hat Platon in seinem Dialog *Der Staat* den idealen Charakter der mathematischen Gegenstände ausgesprochen:

Und also wohl auch, daß sie [die Geometer; K.V.] sich der sichtbaren Gestalten bedienen und immer von diesen reden, während den eigentlichen Gegenstand ihres Denkens diese nicht bilden, sondern jene, deren bloße Abbilder diese sind. Denn das Quadrat an sich ist es und die Diagonale an sich, um derentwillen sie ihre Erörterungen anstellen, nicht aber dasjenige, welches sie durch Zeichnung entwerfen, und so auch in den weiteren Fällen; eben die Figuren selbst, die sie bildend oder zeichnend herstellen, von denen es auch wieder Schatten und Bilder im Wasser gibt, dienen ihnen als Bilder, mit deren Hilfe sie eben das zu erkennen *suchen, was niemand auf andere Weise erkennen kann als durch den denkenden Verstand.* (Platon, 510d - 511a)

• Didaktische Rücksichten könnten eine Rolle gespielt haben: Gerade durch die Beschränkung auf zwei leicht zu beschaffende Instrumente werden die genannten Probleme übersichtlich und einfacher verständlich.

Ebenso wenig ist klar, wann sich die entsprechende Beschränkung wirklich durchgesetzt hat. Im folgenden werden wir sehen, dass in der Antike zahlreiche Lösungen vorgeschlagen wurden, die nicht mit Zirkel und Lineal allein auskommen. Die Vermutung liegt nahe, dass sich die fragliche Beschränkung erst im Laufe der Zeit etabliert hat - in dem Maße, wie man Erfahrungen mit den genannten Problemen sammelte und sich Material anhäufte. Wir werden sehen, dass sich eine solche Einschränkung bei Euklid (etwa um 300 v. Chr.) andeutet, ohne explizit zu werden; deutlichere Ausführungen findet man aber erst viel später bei Pappos (Anfang des 4. Jh. n. Chr.). Dieser unterscheidet drei Arten von Konstruktionen, nämlich die Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen, die so genannten räumlichen und die linearen. Dabei bezieht sich die Bezeichnung „räumlich" auf die Verwendung von Kegelschnitten, die, wie ihr Name schon sagt, im Raum erzeugt werden. Dagegen bezeichnet linear alle übrigen Konstruktionen, wobei „linear" mit „Linie" zusammenhängt. Bei Pappos wird das Bestreben deutlich, ein vorhandenes Material zu sichten und zu ordnen.

Diejenigen Probleme, welche man mit Hilfe einer Geraden und einer Kreislinie lösen kann, heißen mit Recht ebene, weil diejenigen Linien, mit denen diese Probleme gelöst werden, ihren Ursprung in der Ebene haben. Jene jedoch, zu deren Lösung ein oder mehrere Kegelschnitte verwandt werden, wurden räumlich genannt, da ihre Konstruktion die Verwendung von Oberflächen räumlicher Figuren erfordert, nämlich derjenigen von Kegeln. Es verbleibt eine dritte Art von Problemen, welche linear genannt wird, weil andere als die bereits geannten Linien zur Konstruktion erforderlich sind, deren Ursprung komplizierter und weniger natürlich ist, da sie durch unregelmäßigere Oberflächen und verwickelte Bewegungen erzeugt werden. (Pappos, 270 - Übersetzung K. V.)

Eine andere Klassifikation der Konstruktionen wurde viel später von R. Descartes in seiner *Géométrie* (1637) gegeben, auf die wir im zweiten Teil dieser Vorlesung noch zu sprechen kommen werden.

Zu den hier angesprochenen Fragen vergleiche man die ausführliche und sehr kenntnisreiche Diskussion in Bos 2002.

2. Einige grundlegende Bemerkungen zur antiken Geometrie

Generell kann man sagen, dass die Quellenlage bezüglich der antiken Mathematik vor Euklids *Elementen*, welche ca. 300 v. Chr. entstanden sind, sehr ungünstig ist. Es gibt so gut wie keine Texte aus dieser Zeit, welche im Wortlaut erhalten wären; das, was wir wissen, stützt sich in der Regel auf spätere Kommentare, insbesondere auf denjenigen von Proklos (411 - 485) zum ersten Buch von Euklids *Elementen*.

Im folgenden möchte ich kurz die Grundlegung, die Euklid seinen *Elementen* gibt, vorstellen. Diese beschreibt in etwa den Rahmen, in dem sich die antiken Überlegungen zu den Konstruktionsproblemen bewegten. Es steht im übrigen fest, dass der Inhalt der in dreizehn Bücher gegliederten *Elemente* keineswegs von Euklid erstmals formuliert wurde; sein wesentlicher Beitrag bestand in der Strukturierung des überkommenen Materials. Anders gesagt ist es Euklid gewesen, der erstmals (nach gewissen Vorarbeiten anderer) konsequent einen axiomatisch - deduktiven Aufbau der Mathematik vollzogen hat. Seine Methode blieb bis auf den heutigen Tag verbindlich für die Mathematiker. Deutlich wird dies in dem nachfolgenden Zitat von Hermann Hankel ausgesprochen:

Noch mehr aber als für den Inhalt ist Euclid's Werk für die Form der Geometrie das klassische Vorbild gewesen. Man kennt diese einfache strenge Form der Darstellung, welche *von wenigen, der Anschauung entnommenen Definitionen und Grundsätzen durch streng logische Schlüsse von Stufe zu Stufe fortschreitet. In Bezug auf die Reinheit dieses logischen Verfahrens ist Euclid immer und mit Recht als ein klassisches, fast unerreichbares Muster anerkannt worden und hat früher vielfach zur Exemplification des sogenannten formalen Logik dienen müssen.* (zitiert nach Volkert 1986, 12)

Ziemlich sicher ist auch, dass die *Elemente* manchen Originalbeitrag von Euklid enthalten, etwa den Beweis des Satzes des Pythagoras (Satz 47 des ersten Buches; in Zukunft zitiert als I, 47). Das wird ausdrücklich von Proklos bezeugt, weshalb die gelegentlich zu hörende Meinung, Euklid sei ein reiner Kompilator gewesen, als überzogen zurückgewiesen werden muss. Zur Überlieferungsgeschichte der Euklidischen *Elemente* vergleiche man neben den entsprechenden Anmerkungen in den Ausgaben von Cl. Thaer und Sir Th. Heath den Aufsatz Schönbeck 1984. Darüber hinaus gibt Heath sehr ausführliche Hinweise zu fast allen Definitionen, Axiomen, Postulaten und Sätzen der *Elemente*; seine Anfang letzten Jahrhunderts erstmals erschienene Ausgabe ist bis heute der Referenztext schlechthin für die *Elemente.*

Die *Elemente* des Euklid beginnen mit Definitionen, Postulaten und Sätzen. In Hinblick auf die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal sind die drei ersten Postulate von besonderer Bedeutung. In der Übersetzung von Clemens Thaer lauten diese:

Gefordert soll sein:
1. Daß man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,
2. Daß man stets eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,
3. Daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann.

Diese Forderungen, die man heute zu den Axiomen rechnen würde (Euklids Axiome sind überwiegend arithmetischer Natur und beschreiben das Rechnen mit Größen; Beispiel: *Axiom 1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.*), formulieren deutlich das, was man mit Zirkel und Lineal machen kann: Zu zwei Punkten kann man stets die Verbindungsstrecke konstruieren; eine Strecke lässt sich über einen ihrer Endpunkte hinaus verlängern (wie weit, wird nicht gesagt) und zu einem Punkt nebst gegebenen Radius (dieser muss in Gestalt einer Strecke, welche im Mittelpunkt anliegt, oder eines weiteren Punktes gegeben sein) lässt sich der entsprechende Kreis konstruieren. Das in der Schule gängige Verfahren, dass man den Radius in den Zirkel nimmt, dann im Punkt einsticht und den Kreis zeichnet, ist bei Euklid vorerst nicht vorgesehen. Sein Zirkel kollabiert, wenn man ihn hochhebt; er war also eher eine Schnur. Das Schulverfahren wird von Euklid später durch einen entsprechenden Beweis in I,2 gerechtfertigt.

Man beachte ferner, dass das Lineal keine Graduierung trägt, es ist nur eine Kante, welche das ziehen gerader Linien erlaubt. anders gesagt: Ein Messen ist nicht möglich. Während das moderne Deutsche hierfür keinen Terminus kennt (in der Dürer-Zeit gab es noch den Ausdruck *Richtscheidt* hierfür), ist eine Unterscheidung etwa im Englischen (*straightedge* im Unterschied zu *ruler)* möglich.

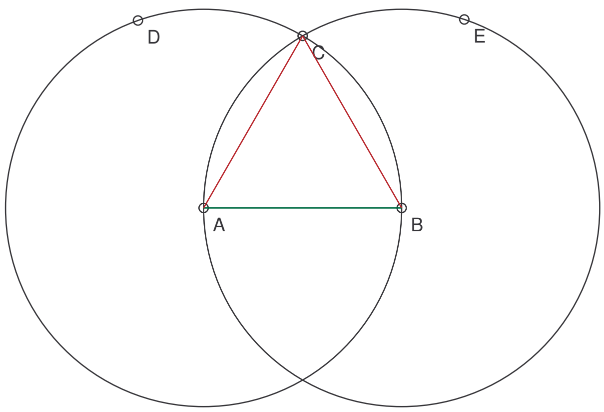
Das Ziel Euklids bestand darin, sämtliche Sätze, die in seinen *Elementen* auftreten (das sind einige Hundert) aus seinen Axiomen, Postulaten und Definitionen abzuleiten, ohne auf andere Argumente - etwa der Anschauung entnommene - zurückzugreifen. Postulate gibt es nur im ersten Buch, Axiome und Definitionen dagegen auch in andern. Wie das konkret funktioniert, werden wir gleich sehen.

3. Die Konstruktion regulärer Vielecke

Unter einem regulären Vieleck versteht man ein nicht - überschlagenes Vieleck, dessen Kanten und Kantenwinkel sämtlich kongruent sind. Euklid sprich davon, dass das Vieleck gleichseitig und gleichwinklig sei. Ein reguläres n-Eck lässt sich in n gleichschenklige Dreiecke zerlegen, die alle kongruent sind. Folglich besitzt ein derartiges Vieleck stets einen Umkreis und einen Inkreis. Anstatt die Eckenzahl vorzugeben, kann man auch die Kantenzahl angeben: Jedes n-Eck ist ein n-Kant und umgekehrt; der Bezug auf die Kanten steckt übrigens in dem Begriff Polygon, was soviel wie Vielkant bedeutet. Die einfachsten regulären Vielecke sind das gleichseitige Dreieck und das Quadrat. Es folgen dann reguläres Fünfeck (hier ist erstmals eine nicht-konvexe Variante möglich, woran man sieht, dass man die Bedingung der Gleichwinkligkeit wirklich braucht) und Sechseck.

3.1 Die Grundlegung der Konstruktionslehre und die Konstruktion regulärer Vielecke bei Euklid

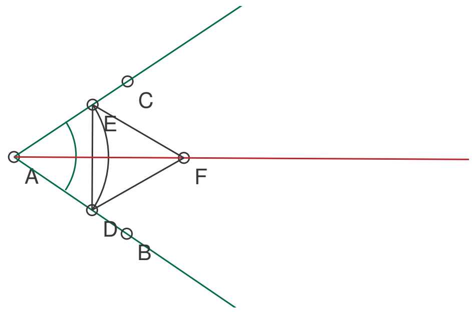
Bereits der erste Satz des ersten Buches enthält die Konstruktion eines regelmäßigen Vielecks, nämlich diejenige des gleichseitigen Dreiecks. Sätze, die Konstruktionsaufgaben behandeln, wurden in der Tradition auch Probleme (wörtlich etwa Aufgaben) genannt im Unterschied zu den Theoremen, die einen Beweis erfordern. Satz 1 lautet:
Über einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu errichten.
Die Lösung verläuft folgendermaßen:
Die gegebene Strecke sei AB. Man soll über der Strecke AB ein gleichseitiges Dreieck errichten.



Mit A als Mittelpunkt und AB als Abstand zeichne man den Kreis BCD (Post. 3), ebenso mit B als Mittelpunkt und BA als Abstand den Kreis ACE: ferner ziehe man vom Punkt C, in dem die Kreise einander schneiden, nach den Punkten A, B die Strecken CA, CB (Post. 1).
[Damit ist die Konstruktion abgeschlossen, es folgt jetzt der Nachweis, dass diese tatsächlich zum gewünschten Ergebnis führt, die Verifikation, wie man heute gerne sagt.]
Da Punkt A Mittelpunkt des Kreises CDB ist, ist AC = AB (I, Def. 15 [das ist die Definition des Kreises: *Ein Kreis ist eine ebene, von einer einzigen Linie umfaßte Figur mit der Eigenschaft, daß alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkte bis zur Linie*

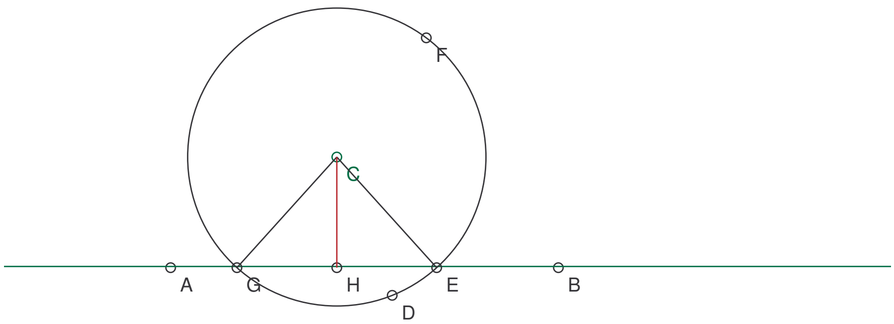
laufenden Strecken einander gleich sind.]*; ebenso ist, da Punkt B Mittelpunkt des Kreises CAE ist, BC = BA. Wie oben bewiesen, ist auch CA = AB; also sind CA und CB beide = AB. Was aber demselben gleich ist, ist auch untereinander gleich (Ax. 1); also ist auch CA = CB; also sind CA, AB, BC alle einander gleich.*
[Es folgt die Schlussfolgerung.]
Also ist das Dreieck ABC gleichseitig (I, Def. 20); und es ist über der gegebenen Strecke AB errichtet - dies hatte man ausführen sollen. Quod erat faciendum - was zu leisten war, wie die typische Schlussbemerkung Euklids bei Problemen lautet (bei Theoremen heißt sie quod erat demonstrandum - was zu beweisen war).
Untersucht man Euklids Konstruktion genauer, so fallen aus unserer modernen Sicht zwei Schwachpunkte auf. Zum einen verwendet er stillschweigend die Tatsache, dass die Länge der Strecke AB (wir werden diese notationell von der Strecke selbst durch Betragsstriche unterscheiden) gleich ist derjenigen der Strecke BA (|AB| = |BA| wäre somit Euklids Behauptung). Dies könnte er vielleicht durch einen Hinweis auf sein Axiom 7 rechtfertigen: *Was sich deckt, ist einander gleich.* Das ist eher eine Definition denn ein Axiom; was definiert wird, ist modern betrachtet die Kongruenz. (Modern gesehen ergibt sich Euklids Behauptung aus entsprechenden Eigenschaften der Streckenkongruenz oder der Abstandsfunktion; vgl. Hilbert 1972 und Filler 1993).
Schwerwiegender ist der zweite Kritikpunkt: Woher weiß man, dass sich die beiden Kreise um A bzw. B tatsächlich schneiden? Es gibt nur ein einziges Postulat bei Euklid, das eine Aussage über die Existenz von Schnittpunkten macht, nämlich das bekannte **Parallelenpostulat,** welches später auch häufig als Parallelenaxiom oder elftes Axiom bezeichnet wurde. In diesem geht es um die Existenz des Schnittpunktes zweier Geraden: *Und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.*
Bezüglich Schnittpunkten von Kreisen mit Geraden oder von Kreisen miteinander schweigt sich Euklid aus - es sei denn, man liest Euklids Festlegung (in der bereits zitierten Definition des Kreises), der Kreis sei *eine einzige Linie* im Sinne einer Stetigkeitsaussage. Diese recht anfechtbare Lesart wurde von H. Zeuthen vorgeschlagen im Zusammenhang mit seiner Interpretation der Postulate als existenzsichernde Aussagen (vgl. Zeuthen 1896). Ein verwandtes Problem taucht bei der Konstruktion des Dreiecks aus seinen drei Seiten auf (I,22), wo es allerdings um eine etwas allgemeinere Situation geht, da die beiden Kreise, welche auftreten, nicht notwendig gleichen Radius haben.
Den bemerkten Mangel versuchte man bereits zu Beginn des 19. Jahrhunderts zu beheben, indem man ein weiteres Axiom sinngemäß etwa so einführte: *Zieht man um die beiden Endpunkte einer Strecke Kreise, die durch den jeweils anderen Endpunkt dieser Strecke gehen, so schneiden sich diese Kreise in genau zwei Punkten* (vgl. Struve 1994, 161). Der erste derartige Versuch, welcher mir bekannt ist, findet sich in dem im 19. Jahrhundert recht verbreiteten Geometrielehrbuch des Holländers van Swinden. Heute bezeichnet man Axiome dieser Art (es gibt hierfür viele Möglichkeiten) als Zirkelaxiome. Zu bemerken ist, dass in den meisten modernen Aufbauten der Geometrie der Kreis seine herausgehobene Stellung verloren hat; so kommt dieser etwa in Hilberts *Grundlagen der Geometrie* fast gar nicht mehr vor. Damit werden Zirkelaxiome überflüssig; was man aber braucht, ist ein Ersatz für die Schnittpunkte von Kreisen mit Geraden. Diesen findet man in der Gruppe der Kongruenz- oder auch in der Gruppe der Anordnungsaxiome, wo beispielsweise bei Filler 1993, 80 gefordert wird, dass es auf jeder Halbgeraden und zu jeder positiven reellen Zahl einen Punkt gibt, der vom Anfangspunkt der Halbgeraden genau einen Abstand gleich dieser reellen Zahl besitzt.

Der zweite Satz des ersten Buches behandelt das Antragen einer gegebenen Strecke in einem vorgegebenen Punkt; das Hilfsmittel der Wahl ist bei Euklid das gleichseitige Dreieck. Mit welchen Feinheiten man bei einem derartig einfach erscheinenden Sachverhalt zu kämpfen hat, insbesondere wenn man ein entsprechendes Computerprogramm schreiben will, kann man in dem sehr instruktiven Artikel Toussaint 1993 nachlesen. Im nachfolgenden dritten Satz wird das Problem, auf einer längeren Strecke eine kürzere abzutragen, gelöst.
Bezüglich der Theorie der Konstruktionen interessant und grundlegend sind die so genannten Grundkonstruktionen, welche Euklid in den Sätzen 9 bis 12 behandelt. Im einzelnen geht es um die Konstruktion der Winkelhalbierenden (I, 9), der Mittelsenkrechten (I, 10), der Senkrechten auf einer Strecke in einem vorgegebenen Punkt (I, 11) sowie des Lotes von einem Punkt auf eine Gerade (I, 12). Dieses Inventar bestimmt noch heute die Schulgeometrie. Betrachten wir einmal die Konstruktion der Winkelhalbierenden im neunten Satz.
Der gegebene geradlinige Winkel sei BAC. Ihn soll man halbieren.



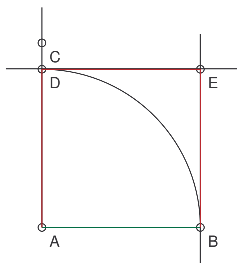
Auf AB wähle man einen Punkt D beliebig, trage AE = AD [wir würden schreiben: |AE| = |AD|; im folgenden unterbleibt dieser Hinweis bei allen Originalzitaten aus Euklid] *auf AC ab, ziehe DE, errichte über DE das gleichseitige Dreieck DEF (I, 1) und ziehe AF; ich behaupte, daß ∠BAC durch die gerade Linie AF halbiert wird.*
[Es folgt die Verifikation der Konstruktion; der sogleich zitierte Satz I,8 ist der Kongruenzsatz SSS.]
Da nämlich AD = AE ist und AF gemeinsam, so sind die Seiten DA, AF zwei Seiten EA, AF entsprechend gleich; ferner Grdl. DF = Grdl. EF [Grdl. bedeutet Grundlinie]; *also ist ∠DAF = ∠EAF (I, 8).*
Der gegebene geradlinige Winkel BAC wird also durch die gerade Linie AF halbiert - dies hatte man ausführen sollen.
Genau genommen muss man Winkel und Winkelbreiten unterscheiden, was Euklid aber nicht tut. Vom heutigen Standpunkt aus müsste man schreiben |∠ DAF| = |∠ EAF| oder aber über die Kongruenz dieser Winkel sprechen, was man heute so ausdrückt: ∠ DAF ≡ ∠ EAF; analog, kann man von Strecken aussagen, sie seien gleichlang oder sie seien kongruent. Was man bezüglich der Strecken als Grundbegriff wählt (Streckenlänge oder Streckenkongruenz) hängt vom Axiomensystem ab, in dem man arbeitet, ist also freigestellt. Bei Winkel liegen die Verhältnisse allerdings schwieriger; Möglichkeiten, wie man vorgehen kann, findet man bei Hilbert und bei Filler.
Man könnte im Anschluss an Euklid die Frage stellen, woher man weiß, dass es auf der Halbgeraden AB überhaupt einen Punkt D gibt. Das führt bei genauerem Hinsehen zu Problemen, wie wir sie im Anschluss an den ersten Satz schon besprochen haben, denn man könnte den fraglichen Punkt D erzeugen, indem man um den Scheitel A des vorgegebenen Winkels einen Kreis zieht mit einem beliebigen Radius, der allerdings in Form einer bereits konstruierten Strecke verfügbar sein muss. Der Punkt D wäre dann der Schnittpunkt von Kreis und Halbgerade. Man bemerkt, dass man letztlich auf die Kernfrage geführt wird:

Welche Strecken sind überhaupt konstruierbar? Darüber schweigt sich Euklid aus; wir werden ihr ausführlich nachzugehen haben.
Die von Euklid angegebene Konstruktion unterscheidet sich nur geringfügig von der gängigen Schulkonstruktion; was man in der Schule dadurch erreicht, dass um zwei geeignete, vom Scheitel gleichweit entfernte Punkte der Schenkel Kreise mit dem gleichen Radius zieht, erledigt Euklid durch sein gleichseitiges Dreieck. Letztlich läuft das nur darauf hinaus, für den Kreisradius den Abstand der fraglichen Punkte zu nehmen; der Vorteil von Euklids Vorgehen liegt darin, dass es erstens keine Wahl verlangt und dass es zweitens garantiert zu Schnittpunkten führt (bei der Schulkonstruktion kann man den Radius zu klein wählen, so dass sich die Kreise nicht mehr schneiden!).
Die Vorzüge des gleichseitigen Dreiecks zeigen sich deutlich bei der Konstruktion der Mittelsenkrechten in Satz 10. Dort ist gefordert: *Eine gegebene Strecke zu halbieren.* Die Lösung besteht darin, über der gegebenen Strecke das gleichseitige Dreieck zu errichten und dann den Winkel, der der Strecke gegenüberliegt, zu halbieren. Die Verifikation läuft wie immer über kongruente Dreiecke. Satz 11, in dem es um die Senkrechte auf einer Geraden in einem vorgegebenen Punkt C geht, wird auf Satz 10 zurückgeführt. Man verschaffe sich einen Punkt D auf der fraglichen Geraden, der nicht mit C zusammenfällt, trage von C die Strecke DC in die Richtung ab, in der von C gesehen, D nicht liegt. Der Endpunkt sei E. Dann errichte man über DE das gleichseitige Dreieck DEF und verbinde FC. Verifikation wie üblich. Interessanter ist Satz 12:
Auf eine gegebene unbegrenzte gerade Linie von einem gegebenen Punkte, der nicht auf ihr liegt, aus das Lot zu fällen.
Die Konstruktion sieht so aus: *Man wähle auf der anderen Seite der geraden Linie AB Punkt D beliebig, zeichne mit C* [das ist der gegebene Punkt, der nicht auf AB liegen soll] *als Mittelpunkt und CD als Abstand den Kreis EFG, halbiere die Strecke EG in H (I, 10) und ziehe die Strecken CG, CH, CE; ich behaupte, daß man auf die gegebene unbegrenzte gerade Linie AB von dem gegebenen Punkte C, der nicht auf ihr liegt, aus das Lot gefällt hat, nämlich CH.*



Die Verifikation beruht im Nachweis der Kongruenz der Dreiecke CGH und CHE. Dabei muss man natürlich wissen, was ein rechter Winkel ist - nämlich ein Winkel, der seinem Nebenwinkel kongruent ist (Euklid sagt *gleich* in seiner Definition 10).
In diesem Satz und seinem Beweis sind gleich mehrere Dinge bemerkenswert. Zuerst einmal sollte man festhalten, dass Euklid schon in der Formulierung des Satzes ausdrücklich die

aktuale Unendlichkeit der fraglichen Geraden erwähnt; an allen anderen Stellen des ersten Buches, insbesondere beim oben erwähnten Parallelenpostulat benötigt er nur Geraden, welche genügend lang sind. Der Unterschied, auf den es hier ankommt, wird vielleicht deutlicher in einem Vergleich mit den natürlichen Zahlen. Die Version genügend lang entspricht dann der Aussage "Es gibt eine genügend große natürliche Zahl" (etwa wenn es darum geht, eine bestimmte Schranke zu übertreffen), die unendlich lange Gerade dagegen der Aussage "Es gibt eine natürliche Zahl, die größer ist als alle anderen", was bekanntlich nicht zutrifft. Die hier angesprochene Unterscheidung wird gefasst durch die Begriffe potentiell Unendliches (es gibt beliebig großes) und aktual Unendliches (es gibt etwas, das größer ist); Aristoteles und nach ihm viele Grundlagentheoretiker der Mathematik haben sich hiermit befasst (vgl. Becker 1975). Euklid braucht seine aktual unendlich lange Gerade, um sicher zu sein, dass der Punkt C nicht in der Verlängerung derselben liegt.
Zweitens ist interessant, dass Euklid kommentarlos annimmt, dass eine Gerade die Ebene in zwei disjunkte Teile, heute offene Halbebenen genannt, zerlegt. In der modernen Grundlegung ist dies ein Axiom in der Gruppe der Anordnungsaxiome (vgl. Filler 1993, 80). Man wird gewiss zugeben, dass es sich hierbei um eine sehr anschauliche Aussage handelt, weshalb Euklid sie vielleicht übersehen haben könnte.
Schließlich ist darauf hinzuweisen, dass die Konstruktion des Lotes stets die Existenz des Lotfußpunktes garantiert. Man hat es hier mit einer Grundkonstruktion zu tun, die eine Existenzaussage beinhaltet. Das ist oft beweistechnisch von großem Nutzen.
Nach diesen ausführlichen Vorbereitungen wollen wir nun auf unser eigentliches Thema zurückkommen: die Konstruktion regelmäßiger Vielecke bei Euklid. Im ersten Buch kommt Euklid nur noch einmal hierauf zu sprechen, nämlich im Satz 46, wo gefordert wird: *Über einer gegebenen Strecke das Quadrat zu zeichnen.* Diese Forderung steht im Zusammenhang mit dem Satz des Pythagoras (I, 47), in dem ja Quadrate eine wichtige Rolle spielen, sowie mit dessen Umkehrung (I, 48).
Die Konstruktion verläuft folgendermaßen.
Die gegebene Strecke sei AB. Man soll über der Strecke AB das Quadrat zeichnen.
Man ziehe AC rechtwinklig zur geraden Linie AB vom Punkte A auf ihr aus (I, 11) und trage AD = AB ab; ferner ziehe man durch Punkt D DE parallel AB (I, 31) und durch Punkt B BE parallel AD. [I, 31 ist die Konstruktion der Parallelen durch einen vorgegebenen Punkt, der nicht auf der ebenfalls vorgegebenen Geraden liegt.]



Dann ist ADEB ein Parallelogramm; also AB = DE und AD = BE (I, 34) [dieser Satz formuliert die gängigen Eigenschaften des Parallelogramms, wobei dieses als Schnitt zweier Streifen (das sind Ebenenteile zwischen Parallelen) aufgefasst wird, was Euklid allerdings nirgends explizit sagt]. *Aber AB = AD, also sind BA, AD, DE, EB alle vier einander gleich (Ax. 1); das Parallelogramm ADEB ist also gleichseitig. Ich behaupte, daß es auch*

rechtwinklig ist. Da nämlich die Parallelen AB, DE von der geraden Linie AD geschnitten werden, so sind ∠ BAD + ADE = 2R (I, 29) [Satz über die Winkel an geschnittenen Parallelen]. *BAD ist aber ein Rechter; also ist auch ADE ein Rechter (Ax. 3). Im Parallelogramm sind aber die gegenüberliegenden Seiten sowohl als Winkel einander gleich (I, 34); auch die gegenüberliegenden Winkel ABE, BED sind also beide Rechte; also ist ADEB rechtwinklig. Die Gleichseitigkeit ist oben bewiesen.*
Grundsätzlich fällt auf, dass in dieser Konstruktion mehrfach direkt oder indirekt vom Parallelenpostulat Gebrauch gemacht wird. Das liegt daran, dass dieses Postulat in den Sätzen I, 29 und in gewisser Weise auch in I, 31 verwendet wird. Es ist in der Tat so, dass in einer Geometrie, in der nicht das Parallelenpostulat, sondern seine Negation gilt, keine Quadrate und auch keine Rechtecke existieren. Diese Geometrie ohne Quadrate und Rechtecke nennt man hyperbolische Geometrie. In der hyperbolischen Geometrie ist die Winkelsumme im Dreieck stets kleiner als zwei Rechte; gibt es aber Quadrate oder allgemeiner Rechtecke, so erhält man durch Ziehen der Diagonalen sofort zwei Dreiecke, in denen die Winkelsumme notwendig zwei Rechte betragen muss. Also folgt aus deren Existenz im Rahmen der hyperbolischen Geometrie ein Widerspruch, weshalb es solche Vierecke dort nicht geben kann. An die Stelle des Quadrates tritt das gleichseitige gleichwinklige Viereck, wobei aber dieser Winkel kleiner als ein Rechter sein muss.
Stillschweigend setzt Euklid in seiner Konstruktion voraus, dass sich die Parallele zu AB durch D und diejenige zu AD durch B in einem Punkt, den er E nennt, schneiden. Also auch hier eine gewisse Ungenauigkeit im Zusammenhang mit der Existenz von Schnittpunkten! Diese lässt sich aber relativ leicht beheben: Verbindet man D mit B, so entsteht das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck ABD. Da die Winkel bei B und D Rechte sein müssen nach I, 29 und die Winkel ∠ ADB sowie ∠ ABD jeweils 45° betragen (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck [I, 5] sowie Winkelsumme im Dreieck [I, 32]) werden die Parallelen durch B bzw. durch D von einer Geraden unter zwei Winkeln geschnitten, welche zusammen kleiner als zwei Rechte sind. Nach dem Parallelenpostulat muss es somit einen Schnittpunkt auf der entsprechenden Seite der Geraden durch B und D geben.

Auf die Konstruktion regulärer Vielecke kommt Euklid erst im vierten Buch seiner *Elemente* wieder zurück. Dem geht im zweiten Buch die so genannte geometrische Algebra und im dritten Buch die Kreislehre voraus; vor allem letztere findet im vierten Buch Verwendung. In diesem geht es unter anderem um die Konstruktion ein- und umbeschriebener regulärer Vielecke: Gegeben sei ein Kreis. In diesem ist ein gleichseitiges Dreieck (IV, 2), ein Quadrat (IV, 7), ein reguläres Fünfeck (IV, 11), ein reguläres Sechseck (IV, 15) und ein reguläres Fünfzehneck (IV, 16) einzubeschreiben. Einen Satz weiter erledigt dann Euklid immer das umgekehrte Problem, sprich: einem gegebenen Kreis das entsprechende reguläre Vieleck umzubeschreiben.
Über die Gründe, die Euklid dazu bewogen, die Problemstellung hinsichtlich der Konstruktion der regulären Vielecke im vierten Buch gegenüber dem ersten Buch zu verändern, kann man mangels Informationen nur spekulieren. Tatsache ist, dass einbeschriebene Vierecke auch in der alten indischen Mathematik, insbesondere bei Brahmagupta (598 - nach 665), eine große Rolle gespielt haben. Das mag zum einen ästhetische Gründe gehabt haben (man denke etwa an Leonardo da Vincis Studien zu den Proportionen des menschlichen Körpers [im Anschluss an Vitruv]), zum andern vielleicht auch kultische, da der Kreis wohl immer schon als Verkörperung des Idealen angesehen wurde. Gerade die kultische Wurzel der Geometrie tritt in der alten indischen Mathematik deutlich zutage, etwa in den *Salvasustras*, in denen es um die Konstruktion von Altären geht, bei der strengste Anforderungen an Präzision gestellt wurden, welche weit über das pragmatisch gesehen Interessante hinausgingen; man vergleiche etwa die entsprechenden Kapitel in Joseph 1992. (Die Legende schreibt ja auch dem Problem der Würfelverdopplung

einen solchen Ursprung zu!). Die kultische Wurzel der Geometrie wurde lange Zeit in der Mathematikgeschichtsschreibung kaum beachtet, unter anderem deshalb, weil antike Quellen (insbesondere Herodot) stark deren Wurzeln im Praktischen, hauptsächlich in der Vermessung, letztlich einseitig betonten. Für Einzelheiten sei hier auf die Arbeiten von Seidenberg verwiesen (siehe Literaturverzeichnis). Im Bereich der Schulgeometrie gibt es ja heute wieder starke Tendenzen, deren praktische Seite hervorzuheben. Man sollte sich aber bewusst sein, dass dies stets eine einseitige und deshalb gefährliche Sichtweise auf die Geometrie beinhaltet.

Schließlich sah man in der Antike Anwendungen in der Astronomie für ein reguläres Vieleck, nämlich für das Fünfzehneck. Hierüber berichtet Proklos (410 - 485) in seinem bereits erwähnten *Kommentar zum ersten Buch der Elemente*:

Und nicht bloß diesen [gemeint ist hier I, 7] *habe der Verfasser der "Elemente" als zweckdienlich für die Astronomie beiläufig bewiesen, sondern auch viele andere Lehrsätze und Probleme. Das letzte z. B. im 4. Buche, in welchem er die Seite des Fünfzehnecks dem Kreise einbeschreibt, warum legt er es wohl vor, wenn nicht wegen der Beziehung dieses Problems zur Astronomie? Beschreibt man nämlich in den durch die Pole gehenden Kreis das Fünfzehneck, so erhält man den Abstand der Pole vom Äquator und vom Tierkreis. Denn ihr Abstand voneinander beträgt die Seite des Fünfzehnecks. Es scheint also, der Verfasser der "Elemente" habe im Hinblick auf die Astronomie auf viele Beweise Vorbedacht genommen, um uns auf diese Wissenschaft vorzubereiten.* (Proklos, 353)

Ein weiterer Aspekt, der Euklid dazu bewogen haben könnte, ein- und umbeschreibene Vielecke zu betrachten, ist, dass diese bei der Behandlung der Kreisfläche (XII, 2) eine gewisse Rolle spielen: Dort geht Euklid vom einbeschriebenen Quadrat aus, aus welchem er das Achteck, das Sechszehneck und so weiter gewinnt. Archimedes hingegen startet später in seiner *Kreismessung* mit dem einbeschriebenen Sechseck, von dem er zum Zwölfeck und so weiter übergeht. Mehr dazu im Kapitel über die Quadratur des Kreises.

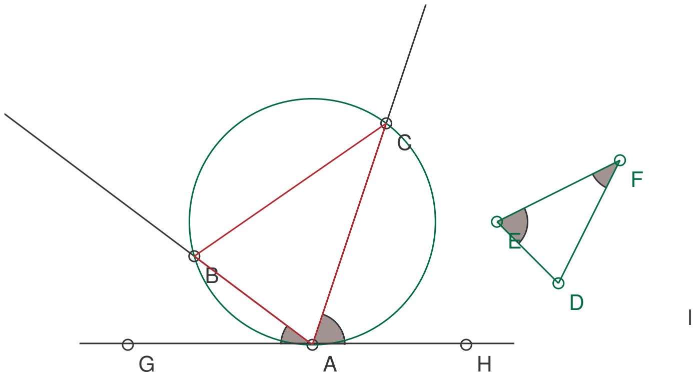
Wenden wir uns nun dem vierten Buch zu. Hierzu eine Vorbemerkung. Bei den nachfolgend besprochenen Konstruktionen einbeschriebener Vielecke spielt der Kreismittelpunkt eine wichtige Rolle. Euklid rechnet diesen aber nicht zu den Gegebenheiten des Kreises. Anders gesagt: Ist ein Kreis gegeben, so muss man sich dessen Mittelpunkt erst verschaffen. Wie man das macht, lehrt der Satz III, 1: Man ziehe im Kreis beliebig eine Sehne, errichte auf dieser die Mittelsenkrechte. Diese schneidet den Kreis in zwei Punkten; der Mittelpunkt der entsprechenden Strecke ist der gesuchte Mittelpunkt des Kreises. Verifikation erfolgt über Widerspruch. Leicht modifiziert kann man diese Konstruktion auch für einen Kreisbogen, also ein Stück des Kreises, verwenden (vgl. III, 25). Gängiger als Euklids Variante ist heute, zwei nicht parallele Sehnen zu ziehen und auf diesen die Mittelsenkrechten zu errichten. Deren Schnittpunkt ist dann der gesuchte Mittelpunkt. Diese Vorgehensweise ist der Auffassung des Kreises als Ortslinie besser angepasst. Für weitere Informationen zu diesem Thema vergleiche man Toepell 1989.

Kommen wir nun zu den einzelnen Konstruktionen. Das Problem, einem gegebenen Kreis ein gleichseitiges **Dreieck** einzubeschreiben, wird als Sonderfall durch den zweiten Satz des vierten Buches gelöst: *Einem gegebenen Kreis ein mit einem gegebenen Dreieck winkelgleiches Dreieck einzubeschreiben.* Da man ja zu einer gegebenen Strecke das gleichseitige Dreieck gemäß I, 1 konstruieren kann, kann man diesen Prototyp verwenden, um die Aufgabe für einen beliebigen Kreis zu lösen.

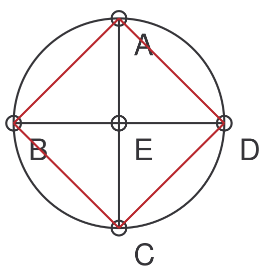
Euklids Konstruktion verläuft folgendermaßen:

Es sei ABC der gegebene Kreis (Euklid kennzeichnete Kreise in der Regel durch drei Punkte auf denselben) und DEF das gegebene Dreieck.

Man ziehe an den Kreis ABC in A die Tangente GH, trage an die gerade Linie AH im Punkte A auf ihr $\angle HAC = \angle DEF$ sowie an die gerade Linie AG im Punkte A auf ihr $\angle GAB = DFE$ an und ziehe BC.

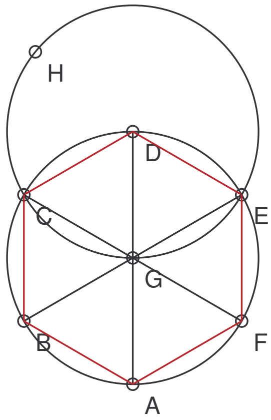


Das Dreieck ABC ist dann das gesuchte. Dies folgt aus dem Satz III, 31, der besagt, dass der Winkel ∠ HAC gleich breit ist dem Winkel ∠ ABC (Beweis mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes III, 21); analog ist |∠ GAB| = |∠ ACB|. Wegen der Winkelsumme im Dreieck muss der verbleibende Winkel ∠ CAB gleich dem dritten Winkel des Dreiecks sein, also gleich ∠ EDF. Q.E.F.
Der geschilderten Konstruktion kommt eine grundsätzliche Bedeutung zu, insofern sie es erlaubt, ähnliche (Euklid sagt hierfür winkelgleiche) Dreiecke zu erzeugen, ohne dass schon die Ähnlichkeitsgeometrie, insbesondere die Strahlensätze, zur Verfügung stehen. Im übrigen ist es kein Zufall, dass der Winkelsummensatz in der Konstruktion eine wichtige Rolle spielt. Ähnliche Dreiecke gibt es nämlich nicht in der hyperbolischen Geometrie. Anders gesagt: Die Ähnlichkeitsgeometie hängt direkt vom Parallelenpostulat ab.
Die nächste Konstruktion, die Euklid gibt, ist die des **Quadrates** (IV, 6). Man konstruiere in dem gegebenen Kreis zuerst dessen Mittelpunkt, dann zwei orthogonale (man sagt heute auch: konjugierte) Durchmesser. Deren Endpunkte sind die Eckpunkte eines Quadrates. Verifikation über kongruente Dreiecke.

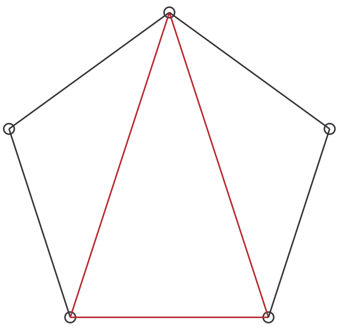


Ähnlich verläuft auch die Konstruktion des regulären **Sechsecks** (im weiteren soll, falls nicht ausdrücklich anders bemerkt, „n-Eck“ immer „reguläres n-Eck“ meinen) in IV, 15. Man verschaffe sich den Mittelpunkt des gegebenen Kreises und ziehe durch diesen einen Durchmesser. Um einen seiner Endpunkte ziehe man den Kreis durch den Kreismittelpunkt. Dieser schneidet den vorgegebenen Kreis in zwei Punkten. Zieht man zu diesen Punkten die

Durchmesser, so erhält man zwei weitere Punkte auf dem Kreis. Insgesamt hat man sechs Punkte, welche die Eckpunkte des gesuchten Sechsecks bilden. Verifikation wieder über kongruente Dreiecke. Weil die entstehenden sechs Dreiecke gleichseitig sind, folgt weiter, dass die Sechsecksseite gleich dem Radius des ursprünglichen Kreises ist, was wiederum die gängige Schulkonstruktion begründet. Indem man jeden zweiten Eckpunkt überspringt, erhält man aus der Sechseckskonstruktion direkt eine für das Dreieck.



Wesentlich schwieriger ist die Konstruktion des **Fünfecks**, die Euklid in IV, 11 gibt. Um diese besser nachvollziehen zu können, stellen wir eine Vorüberlegung - eine „Analyse“ - an. Zieht man in einem Fünfeck von einem Eckpunkt aus die Diagonalen zu den beiden Endpunkten der Gegenseite, so entsteht ein Dreieck, das man wegen seiner Beziehung zum so genannten goldenen Schnitt auch goldenes Dreieck nennt. Dieses gleichschenklige Dreieck ist dadurch charakterisiert, dass seine beiden Basiswinkel beide doppelt so groß sind wie der Winkel an der Spitze. Anders gesagt ist die Winkelsumme von 180° in fünf gleiche Teile aufgeteilt worden, von denen jeweils zwei für die Basiswinkel und der verbleibende fünfte Teil für den Winkel an der Spitze verbraucht wurde. Die Winkel sind also 72°, 72° und 36° breit. Um nachzuweisen, dass das aus dem Fünfeck gewonnene Dreieck tatsächlich diese Winkel besitzt, betrachtet man die beiden angrenzenden Dreiecke. Diese sind offenkundig gleichschenklig, während ihr Winkel an der Spitze gerade der Kantenwinkel des Fünfecks (also 108°) ist. Folglich sind diese beiden Dreiecke nach SWS kongruent. Jetzt kann man die Basiswinkel und damit die angrenzenden Winkel des fraglichen Dreiecks ausrechnen.



Man beachte im übrigen, dass der Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks den dritten Teil des Kantenwinkels des Fünfecks ausmacht; man hat es hier also mit einer Winkeldreiteilung zu tun: Der 108°- Winkel lässt sich mit Zirkel und Lineal dreiteilen (vgl. das entsprechende Kapitel dieser Vorlesung).

Nach dem, was wir in IV, 2 gelernt haben, genügt es, ein goldenes Dreieck zu konstruieren, das man anschließend auf die gewünschte Größe (sprich: in den vorgegebenen Kreis) bringt. Wie man das macht, lehrt Euklid in IV, 10. Diese Konstruktion benötigt diejenige des goldenen Schnittes, welche Euklid in II, 11 behandelt hat. Wegen der großen Wichtigkeit dieses Thema sei hier ein kurzer Exkurs erlaubt.

Der goldene Schnitt

Ist eine Strecke AB gegeben, so sagt man, diese werde durch den inneren Punkt C im Verhältnis des goldenen Schnittes geteilt, falls gilt:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|BC|} \text{ oder } |AB|*|BC| = |AC|^2$$

Dabei soll AC die größere der beiden Teilstrecken von AB bezeichnen; diese heißt auch Major, während die andere Minor genannt wird. Also: Die ganze Strecke verhält sich zum Major, wie der Major zum Minor. Es gibt daneben noch eine andere Möglichkeit der Teilung im goldenen Schnitt, indem man nämlich den Punkt C auf der Verlängerung von AB wählt. Diese spielt aber im weiteren keine Rolle.

|___________________________|______________|

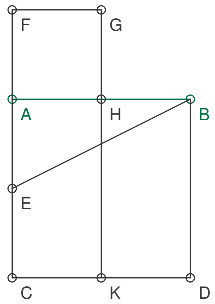
A C B

Die Bezeichnung goldener Schnitt ist erst im letzten Jahrhundert Allgemeingut geworden; Euklid selbst drückt sich in II, 11 wie immer im zweiten Buch in der Sprache der geometrischen Algebra aus: *Eine gegebene Strecke so zu teilen, daß das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist.* Anders gesagt interpretiert Euklid die obigen Produkte als Flächeninhalte von Rechtecken bzw. Quadraten. Eine andere Ausdrucksweise, die sich in Übersetzung bis heute im Französischen gehalten hat, war *proportio habens medium et duo extrema*, was J. Kepler (1571- 1630) übersetzte mit *Teilung im äußeren und mittleren Verhältnis* (vgl. Beutelspacher/Petri 1989, 10). 1509 schrieb der italienische Mathematiker Luca Pacioli (1445 - 1517) ein Buch über den goldenen Schnitt mit dem Titel *Divina proportione*, das nicht nur aufgrund seiner wissenschaftlichen Qualität sondern auch wegen seiner von Leonardo da Vinci angefertigten Illustrationen Berühmtheit erlangte. Der goldene Schnitt spielt in der bildenden Kunst, in der Architektur und auch in der Natur eine wichtige Rolle; in der Mathematik tritt er an verschiedenen Stellen auf - insbesondere beim Fünfeck und beim Dodekaeder (vgl. hierzu Beutelspacher/Petri 1989).

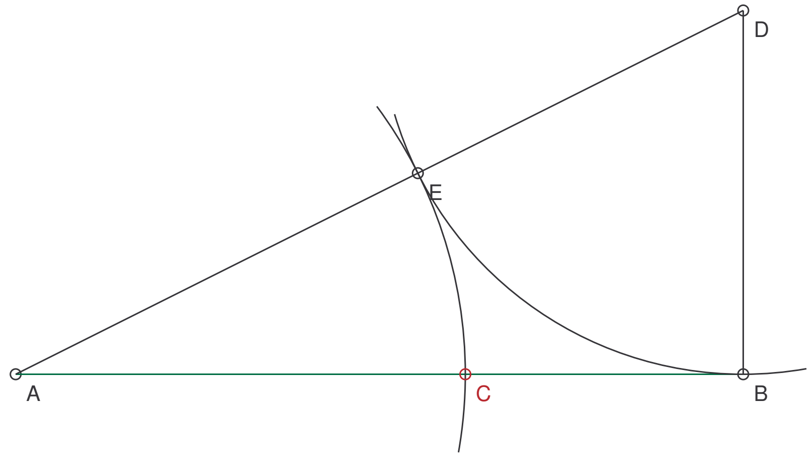
Die oben angegebene Proportion erlaubt es, das Verhältnis des goldenen Schnittes zahlenmäßig zu erfassen. Man rechnet aus: C teilt die Strecke AB genau dann im Verhältnis des goldenen Schnittes, wenn gilt: $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$. Dieses Verhältnis wird meist mit ϕ bezeichnet; ϕ ist eine Lösung der Gleichung $\phi^2 = \phi + 1$. Eine Kettenbruchentwicklung hierfür erhält man ganz einfach mit Hilfe der Kettenbruchentwicklung für $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. Diese Zahl ist Lösung der Gleichung $x^2+x-1 = 0$, welche man umschreiben kann zu $x = \frac{1}{1+x}$. Durch Iteration erhält man hieraus

$$x = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ldots}}}$$

Diesen Kettenbruch schreibt man kurz als $[0;\overline{1}]$. Nun ist aber $\phi = (\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1))+1$, also $\phi = [0;\overline{1}]+1 = [1;\overline{1}]$. Übrigens stehen die Näherungsbrüche für $[0;\overline{1}]$ - das heißt, diejenigen Brüche, die man erhält, wenn man den unendlichen periodischen Kettenbruch nach endlich vielen Schritten abbricht - in enger Beziehung zur Fibonacci-Folge (vgl. Scheid 1991, 136f).
Doch mit diesen Rechnungen haben wir Euklid weit vorgegriffen. Betrachten wir nun dessen Konstruktion aus II, 11.
Es sei AB die Strecke, welche im Verhältnis des goldenen Schnittes zu teilen ist.
Man zeichne über AB das Quadrat ABDC, halbiere AC im Punkt E, ziehe BE, verlängere CA nach F, mache EF = BE, zeichne über AF das Quadrat FH [Euklid bezeichnet Vierecke oft durch zwei diagonal liegende Eckpunkte.] *und ziehe GH nach K durch; ich behaupte, daß man AB in H so geteilt hat, daß AB*BH = AH².*



Die Verifikation dieser Konstruktion ergibt sich durch Nachrechnen.
Am bekanntesten ist heute die nachfolgende Konstruktion. Es sei wieder die Strecke AB gegeben, welche im Verhältnis des goldenen Schnittes geteilt werden soll. Man errichte in B die Senkrechte auf AB und trage hierauf die Länge |AB|/2 ab; der entstehende Endpunkt sei D. Nun verbinde man A mit D und ziehe um D den Kreis mit Radius |AB|/2. Der Schnittpunkt mit AD sei E. Da das Dreieck ABD rechtwinklig in B ist, gilt |AD| > |AB|, weshalb der Schnittpunkt E tatsächlich zwischen A und D liegen muss. Schließlich ziehe man um A den Kreis mit Radius |AE|; sein Schnittpunkt mit AB heiße C. Dann ist C der gesuchte Teilungspunkt.



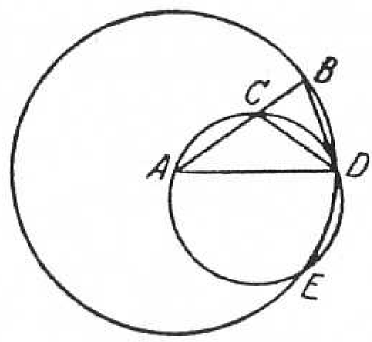
Die Verifikation besteht darin nachzurechnen, dass $\frac{|AC|}{|BC|} = \phi$ gilt. Nach dem Satz des Pythagoras ist $|AD| = \frac{1}{2}\sqrt{5}|AB|$. Folglich ist $|AE| = |AD| - \frac{1}{2}|AB| = (\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2})|AB| < |AB|$, weshalb der Punkt C tatsächlich zwischen A und B liegt. Weiter ist dann $|AC| = |AE| = (\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2})\ |AB|$ und damit $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Was zu beweisen war.

Weitere Konstruktionsmöglichkeiten findet man bei Beutelspacher/Petri 1989, 21 - 26. Dort wird auch (S. 26 - 29) ein **goldener Zirkel** vorgestellt, das heißt ein mechanisches Instrument, mit dessen Hilfe man eine gegebene Strecke im Verhältnis des goldenen Schnittes unterteilen kann. Mit diesem Hinweis wollen wir unseren Exkurs zum Thema goldener Schnitt beenden. ♦

Wir kommen nun zur Konstruktion des goldenen Dreiecks. Sei also die Strecke AB gegeben. Diese teile man durch C gemäß II, 11 im Verhältnis des goldenen Schnittes. Nun ziehe man um A den Kreis mit dem Radius |AB| und um B denjenigen mit Radius |AC|. Wir wählen einen der beiden Schnittpunkte dieser Kreise und nennen ihn D. Schließlich verbinden wir noch D mit A.

Beh. ABD ist ein goldenes Dreieck.

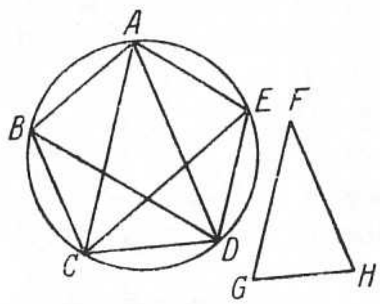
Beweis. Wir konstruieren zuerst den Umkreis zum Dreieck ACD. Nach Konstruktion ist |AD| = |AB|, denn die Punkte B und D liegen auf demselben Kreis um A. Folglich ist das Dreieck ABD gleichschenklig. Wir kommen nun zu den Winkeln. Nach Konstruktion war $|AB||BC| = |AC|^2$; wegen $|AC| = |BD|$ gilt auch $|AB||BC| = |BD|^2$. Nach der Umkehrung des Sekanten-Tangenten-Satz folgt hieraus, dass die Gerade durch B und D Tangente an den Umkreis des Dreiecks ACD ist. Folglich ist $|\angle BAD| = |\angle BDC|$ (nach III, 32: der Winkel zwischen Sehne und Tangente ist gleichgroß wie der Mittelpunktswinkel zu dieser Sehne).



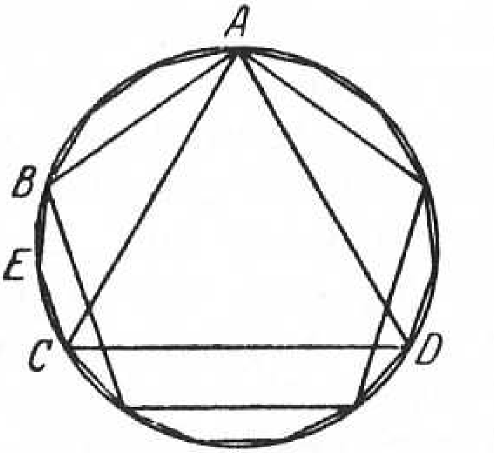
Nun addieren wir auf beiden Seiten dieser Gleichung |∠ CDA| und benutzen, dass ∠ BAD = ∠ CAD ist: |∠ CAD| + |∠ CDA| = |∠ BDC| + |∠ CDA| oder (*) |∠ CAD| + |∠ CDA| = |∠ BDA|. Andererseits gilt nach dem starken Außenwinkelsatz (I, 32) bezogen auf das Dreieck ACD:
(**) |∠ BCD| = |∠ DAC| + |∠ CDA|.
Gleichsetzen von (*) und (**) liefert: (+) |∠ BDA| = |∠ BCD|. Weil das Dreieck ABD gleichschenklig ist, folgt hieraus weiter |∠ BCD| = |∠ ABD|.
Nun müssen wir noch eine Beziehungen herstellen zwischen den Winkeln ∠ BCD und ∠ DAB. Nach der Umkehrung des Satzes über die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck (I, 6) folgt aus der Gleichheit der Winkelbreiten |∠ BCD| und |∠ CBD| = |∠ ABD|, dass das Dreieck DBC gleichschenklig ist: |BD| = |CD|. Nach Konstruktion war aber |BD| = |AC|, also auch |CD| = |AC|. Somit ist auch das Dreieck ACD gleichschenklig, woraus die Gleichheit der Basiswinkelbreiten folgt: |∠ CAD| = |∠ CDA|. Also ist |∠ CAD| + |∠ CDA| = 2|∠ CAD|.
Nach dem starken Außenwinkelsatz (I,32) bezogen auf das Dreieck ACD ist |∠ BCD| = |∠ CAD| + |∠ CDA| also |∠ BCD| = 2|∠ CAD|. Nun war aber weiterhin (+) |∠ BCD| = |∠ BDA|, also ist |∠ BDA| = 2|∠ CAD| und damit wegen der Gleichschenkligkeit des Dreiecks ADB auch |∠ DBA| = 2|∠ CAD|. Weil nun ∠ CAD = ∠ BAD gilt, ist hiermit die Behauptung bewiesen. ♦

Man beachte, dass Euklid aus systematischen Gründen hier nicht mit Verhältnissen von Strecken argumentieren kann – diese stehen erst im VI. Buch zur Verfügung. Hätte er diese, so wäre nach Konstruktion klar, dass die längeren Schenkel zur kürzeren Seite (Basis) des Dreieckes ABD im Verhältnis des goldnen Schnitts stehen.

Wir haben also gelernt: Zu einer gegebenen Strecke kann man stets ein goldenes Dreieck konstruieren, so dass die gegebene Strecke Schenkel diese Dreiecks wird. Nach IV, 2 ist es dann weiter möglich, eine winkelgleiche Kopie dieses goldenen Dreiecks in einen vorgegebenen Kreis hineinzukonstruieren. Damit haben wir im Grunde genommen schon die Fünfeckskonstruktion, die wir anstreben.



Sei also ein Kreis vorgegeben, dem wir gemäß unserer Vorüberlegung ein goldenes Dreieck ACD einbeschreiben mit den gleichlangen Schenkeln AC und AD. Dann halbiere man die beiden Basiswinkel bei C und bei D. Die Schnittpunkte der beiden Winkelhalbierenden mit dem Kreis seien B und E.
Beh. ABCDE ist ein reguläres Fünfeck.
Beweis. Da das Dreieck ACD ein goldenes ist, sind die Winkel, welche bei Halbierung der Basiswinkel entstehen, genau so groß wie der Winkel $\angle$ CAD an der Spitze des Dreiecks. Gleichgroßen Peripheriewinkeln liegen jedoch gleichgroße Kreisbögen gegenüber (III, 26), zu denen wiederum gleichlange Sehnen gehören. Also ist das Fünfeck gleichseitig.
Mit einem analogen Argument beweist man auch, dass sämtliche Kantenwinkel des Fünfecks gleiche Breite besitzen. So zeigt man beispielsweise $|\angle \text{AED}| = |\angle \text{BAE}|$, indem man nachweist, dass die zugehörigen Bögen EDCB und ABCD gleichlang sind. Wie bereits festgestellt, ist ja Bogen AB gleichlang Bogen DE. Fügt man nun zu diesen beiden Bögen den Bogen BCD hinzu, so entstehen die fraglichen Bögen, welche folglich gleichlang sein müssen. Der Beweis für die anderen Winkel verläuft völlig analog.
Es sei noch angemerkt, dass gilt: Jede Diagonale des Fünfecks teilt die von ihr geschnittene Diagonale im Verhältnis des goldenen Schnittes.
Die Vieleckskonstruktionen, die wir bis jetzt bei Euklid kennen gelernt haben, waren alle so aufgebaut, dass sie sämtliche Eckpunkte des gewünschten Vielecks gewissermaßen simultan lieferten. Das mehrfache Abtragen der Kante des Vielecks auf dem Kreis, wie man es aus der Schule für das Sechseck gewöhnt ist, wurde nicht verwendet. Gerade in dieser Hinsicht unterscheidet sich die Konstruktion des **Fünfzehnecks**, welche Euklid in IV, 16 angibt, von den uns mittlerweile bekannten Konstruktionen.
Betrachten wir einen Kreis, in dem ein gleichseitiges Dreieck ACD und ein reguläres Fünfeck ABFGH in der abgebildeten Weise einbeschrieben sind.



Wie groß ist der Bogen BC? Der Bogen AC macht ein Drittel des gesamten Kreisbogens aus, der Bogen AB ein Fünftel. Die gesuchte Länge des Bogens BC ist die Differenz hiervon, also zwei Fünfzehntel. Halbiert man folglich den Bogen BD in E durch Errichten der Mittelsenkrechten (siehe unten), so erhält man in Gestalt von BE und EC zweimal den Bogen, der für das Fünfzehneck erforderlich ist. Die zugehörigen Sehnen sind die Kanten des Fünfzehnecks. Nun trage man *ihnen gleiche Sehnen zusammenhängend in den Kreis* ein und erhalte des gewünschte Vieleck.
Einfacher wäre es gewesen, den Bogen CF zu betrachten. Für diesen lautet nämlich die Rechnung: $\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$. Darüber hinaus fällt auf, dass das Vorgehen im Falle des

Fünfzehnecks mehr rechnerisch ist als bei den anderen Vielecken. Euklid überlegt, welche Bogenlänge gebraucht wird, und rechnet dann nach, dass er diese unmittelbar finden kann. Beim Fünfzehneck wird deutlich, dass die Konstruktion regulärer Polygone auf die entsprechende Unterteilung der Kreislinie hinausläuft und damit auf die Konstruktion des zugehörigen Mittelpunktswinkels. Dem Wesen nach handelt es sich somit um ein Problem über die Konstruierbarkeit von Winkeln. Diese Einsicht sollte sehr viel später bei C. F. Gauß (1777 - 1855) den Schlüssel zur allgemeinen Lösung des Konstruktionsproblems für reguläre Polygone liefern.

Weitere Konstruktionen von Vielecken finden wir bei Euklid nicht. Allerdings gibt es noch mehr oder minder versteckt eine wichtige Information bei ihm zu diesem Thema. Diese steckt in seiner Behandlung der Kreisfläche (in XII, 2; siehe unten 4.1), indem er dort vom einbeschriebenen Quadrat zum einbeschriebenen regulären Achteck übergeht. Hierzu errichte man die Mittelsenkrechten auf den Quadratseiten (vgl. III, 30); deren Schnittpunkte mit dem Kreis liefern die fehlenden Eckpunkte für das Achteck. Und so weiter. Natürlich muss man beweisen, dass auf die angegebenen Art und Weise aus einem regulären Vieleck ein neues doppelter Eckenzahl hervorgeht. Das ist aber einfach.

Alles zusammengenommen haben wir mit Euklid folgenden Stand erreicht:

gleichseitiges Dreieck $\rightarrow$ Sechseck $\rightarrow$ Zwölfeck $\rightarrow$ 24-Eck $\rightarrow$ und so weiter: allgemein erhält man das 2^n*3-Eck;

Quadrat $\rightarrow$ Achteck $\rightarrow$ 16-Eck $\rightarrow$ 32-Eck $\rightarrow$ und so weiter: allgemein erhält man das 4*2^n= 2^{n+2}-Eck;.

Fünfeck $\rightarrow$ Zehneck $\rightarrow$ 20-Eck $\rightarrow$ 40-Eck $\rightarrow$ und so weiter: allgemein erhält man das 2^n*5-Eck;

Sechseck $\rightarrow$ Zwölfeck $\rightarrow$ und so weiter (nichts neues mehr; vergleiche Dreieck): allgemein erhält man das 2^n*6-Eck;

Fünfzehneck $\rightarrow$ 30-Eck $\rightarrow$ 60-Eck $\rightarrow$ 120-Eck $\rightarrow$ und so weiter; allgemein erhält man das 2^n*15-Eck.

Geht man die Liste der regulären Vielecke systematisch vom Anfang an durch, so erhält man folgende Situation:

gleichseitiges Dreieck (konstruierbar); Quadrat (konstruierbar); Fünfeck (konstruierbar); Sechseck (konstruierbar); Siebeneck (ungeklärt); Achteck (konstruierbar); Neuneck (ungeklärt); Zehneck (konstruierbar); Elfeck (ungeklärt); Zwölfeck (konstruierbar); Dreizehneck (ungeklärt); Vierzehneck (ungeklärt); Fünfzehneck (konstruierbar); ...

Immerhin erweisen sich von den dreizehn Fällen acht als gelöst. Was mit den restlichen ist, lässt sich auf der Basis von Euklids *Elementen* nicht sagen: Hat man nur noch keine Konstruktion gefunden oder gibt es vielleicht überhaupt keine? Letzteres ist natürlich denkbar, obwohl es bei Euklid kein Resultat gibt, das besagen würde, irgend etwas sei nicht konstruierbar. Auf solche Ergebnisse musste man noch sehr lange warten. Jedenfalls ist es bestens nachvollziehbar, dass sich die Mathematiker nach Euklid intensiv um die noch fehlenden Konstruktionen, angefangen mit derjenigen des Siebenecks, bemühten. Hierauf werden wir gleich zurückkommen.

Zum Abschluss ist es - nicht zuletzt in Hinblick auf die später zu behandelnde Winkeldreiteilung - noch recht instruktiv, sich einen Überblick zu verschaffen über diejenigen Winkel, welche man mit Hilfe der Vieleckskonstruktionen herstellen kann. Mit einem regulären Vieleck sind in natürlicher Weise stets zwei Winkel verbunden: der Mittelpunktswinkel (beim n-Eck ist dieser stets $2\pi/n$) und der Kantenwinkel (den man über die Winkelsumme im n-Eck ausrechnen kann; er beträgt im regulären Falle $\frac{n-2}{n}\pi$). Das liefert nachfolgende Liste:

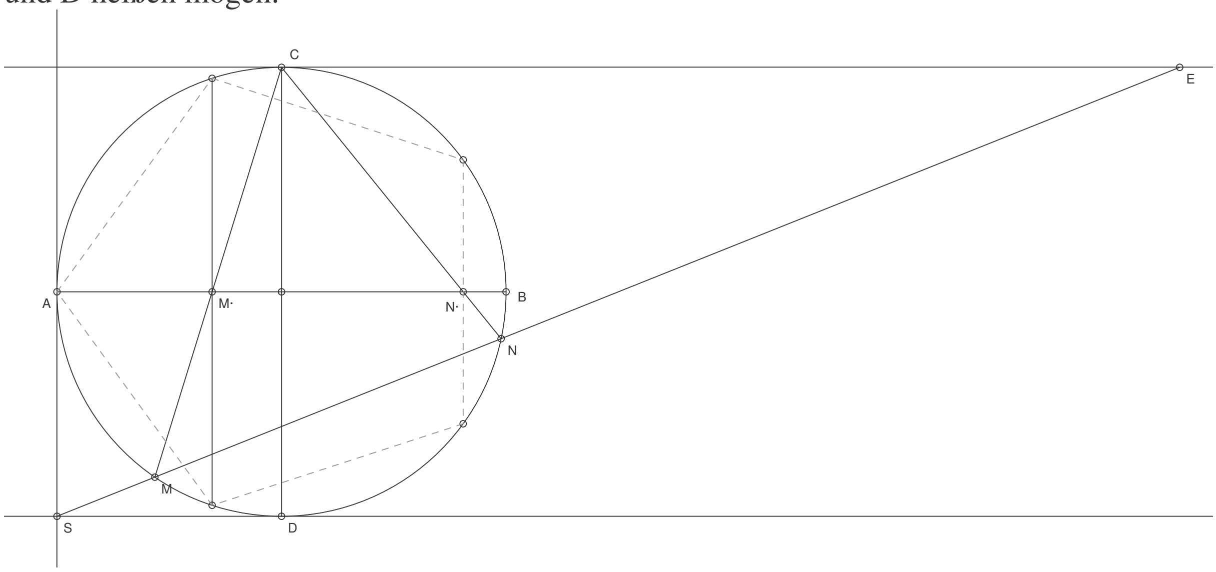
Dreieck: $2\pi/3$; $\pi/3$ Quadrat: $\pi/2$; $\pi/4$ Fünfeck: $2\pi/5$; $\frac{3}{5}\pi$ Sechseck: $\pi/3$; $2\pi/3$

Achteck: $\pi/4$; $\frac{3}{4}\pi$ Zehneck: $\pi/5$; $\frac{4}{5}\pi$ Zwölfeck: $\pi/6$; $\frac{5}{6}\pi$ Fünfzehneck: $\pi/15$; $\frac{13}{15}\pi$

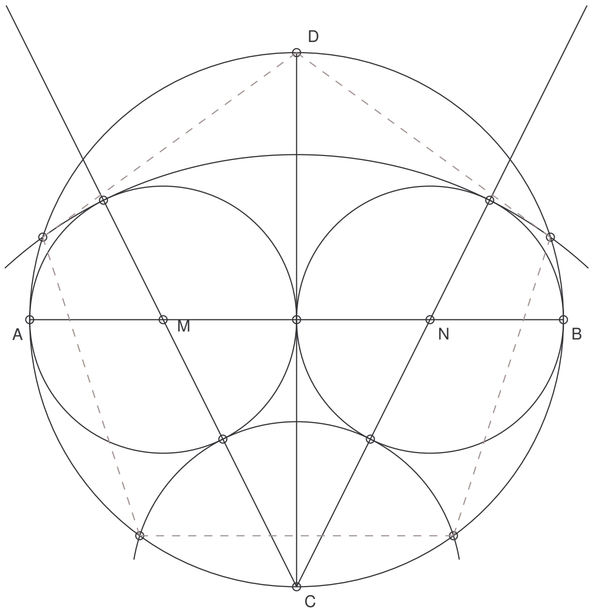
und so weiter. Damit hat man sich schon einen gewissen Vorrat an konstruierbaren Winkeln verschafft, der allerdings in seiner Gesamtheit schwer zu überblicken ist: Kann man vielleicht alle solcherart konstruierbaren Winkel durch eine Formel charakterisieren? Der Vorrat vergrößert sich sofort erheblich, wenn man beachtet, dass wir ja die Winkelhalbierende zu konstruieren gelernt haben. Das besagt: Ist der Winkel α konstruierbar, so auch der Winkel α /2, der Winkel $\alpha/4$ und so weiter! Wir werden, wie gesagt, hierauf zurückkommen.
Doch wenden wir uns nun Konstruktionsvorschlägen zu, welche nach Euklids Zeit vorgebracht wurden. Dabei müssen wir uns natürlich auf eine kleine Auswahl beschränken.

3.2 Weitere Konstruktionsvorschläge

Im folgenden möchte ich noch einige Konstruktionen bzw. Näherungskonstruktionen für reguläre Vielecke vorstellen.
Auf K. G. C. von Staudt (1798 - 1867), einen der ganz wenigen direkten Schüler von C. F. Gauß, geht die folgende Konstruktion des einbeschriebenen Fünfecks zurück: Man konstruiere ein Paar konjugierter Durchmesser, deren Schnittpunkte mit dem Kreis A, B, C und D heißen mögen.

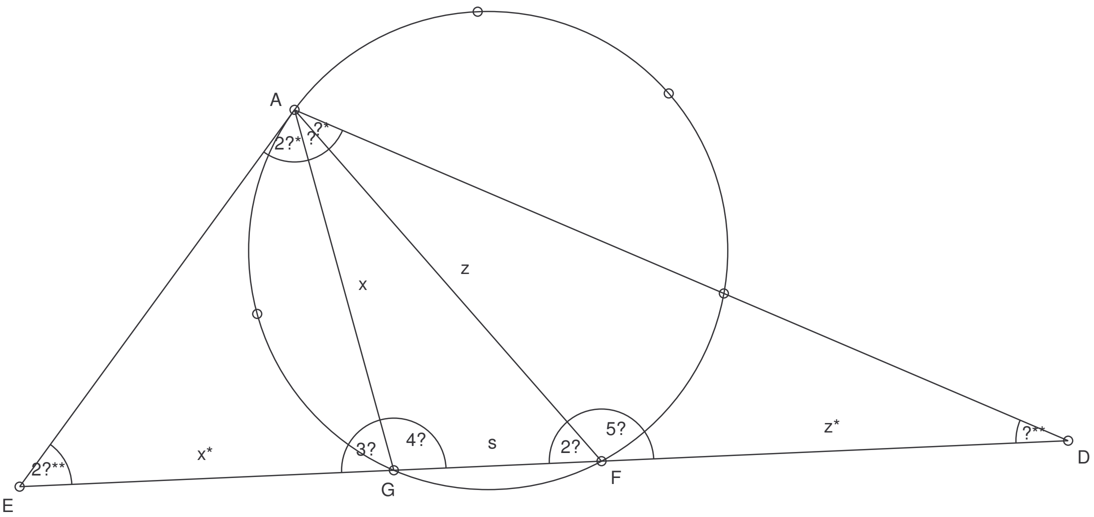


In A, C und D konstruiere man ferner die Tangenten an den Kreis. Auf der Tangenten durch C trage man die Strecke 2|AB| ab; der entstehende Endpunkt heiße E. Nun verbinde man E mit S, dem Schnittpunkt der Tangenten durch A und durch D. Man erhält zwei Schnittpunkte mit dem Kreis, M und N genannt. Schließlich ziehe man die Strecken MC und NC; diese bilden mit dem Durchmesser AB zwei Schnittpunkte, M' und N'. Errichtet man nun in M' und N' die Senkrechten auf dem Durchmesser AB, so erhält man vier Schnittpunkte mit dem Kreis. Zusammen mit A bilden diese die fünf Eckpunkte des zu konstruierenden Fünfecks. Für die Verifikation dieser Konstruktion vergleiche man Weber/Wellstein 1909, 348f.



Die vielleicht einfachste Konstruktion, deren Erfinder ich nicht kenne, ist die folgende: Man geht wieder vom Kreis mit zwei konjugierten Durchmessern aus, und konstruiert auf einem dieser Durchmesser, etwa AB, die Mittelpunkte M und N der beiden auf ihm liegenden Radien. Um diese ziehe man zwei Kreise, deren Radius gleich dem halben Radius des Ausgangskreises ist. Nun ziehe man durch C und M sowie durch C und N die Geraden. Man erhält dann vier Schnittpunkte mit den kleinen Kreisen. Schlägt man nun um C Kreise, deren Radius gleich ist dem Abstand von C zu jeweils einem dieser Schnittpunkte, so erhält man vier Schnittpunkte mit dem Kreis, welche zusammen mit D die Eckpunkte des Fünfecks bilden.
Man bemerkt, dass man für die Konstruktion nur den Kreis um M benötigt; derjenige um N ist aus Symmetriegründen überflüssig.
Weitere Fünfeckskonstruktionen findet man bei Buhrow 1991.
Kommen wir nun zum **Siebeneck.** Im Altertum bereits soll Archimedes (287 - 212) späteren Quellen zufolge eine Konstruktion mit Hilfe der Einschiebung angegebenen haben. Da wir auf die Einschiebung (Neusis) noch im Zusammenhang mit der Winkeldreiteilung zu sprechen kommen werden, möchte ich hierauf nicht näher eingehen, zumal es zweifelhaft ist, ob Archimedes tatsächlich der Urheber dieser Konstruktion ist. Es muss aber hervorgehoben werden, dass die Einschiebung keine Konstruktion mit Zirkel und Lineal darstellt. Solche Verfahren, die in einem gewissen Sinne konstruktiv sind, die aber keine Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen darstellen, werde ich im weiteren bei Verwechselungsgefahr als **Konstruktionen im weiteren Sinne** bezeichnen.
Eine interessante Konstruktion im weiteren Sinne für das Siebeneck gab der arabische Mathematiker al-Quhi, der um 1000 n. Chr. lebte. Sie beruht im Grunde genommen darauf, das Problem zu algebraisieren, das heißt, das Problem in eine Gleichung zu überführen, um diese dann aber geometrisch zu lösen. Die Arbeit von al-Quhi wird ausführlich besprochen in Samplonius 1963, einen Überblick gibt auch Gericke I 200 -202; eine sehr detaillierte Diskussion dieser Traditionslinie – der so genanten Konstruktion von Gleichungen – findet sich in Bos 2001. Umfassende Informationen zum Siebeneck gibt Hogendijk 1984.
Angenommen, wir hätten das Problem gelöst, dann verfügten wir über ein einem Kreis einbeschriebenes Siebeneck A... Um unsere Gleichungen übersichtlicher zu gestalten, setzen wir die Länge der Siebeneckkante gleich s. Dann betrachten wir das Dreieck AFG, wobei A der Kante FG gegenüberliegt. Die Breite des Winkels $\angle$ GAF sei α; somit ist α die Breite des Peripheriewinkels des Siebenecks. Weiter ist der Winkel $\angle$ AFG 2α breit (Peripheriewinkel über zwei Siebeneckskanten) und der verbleibende dritte Winkel $\angle$ FGA 4α

(Peripheriewinkel über vier Siebeneckskanten). Somit gilt $7\alpha = \pi$. Nun verlängern wir die Strecke FG über F und über G hinaus; wir machen $|EG| = |GA| = x$ und $|FD| = |AF| = z$. Weiter konstruiere man die Dreiecke EGA und ADF; deren Winkel man aufgrund der Nebenwinkelbeziehung sowie der Gleichschenkligkeit der Dreiecke zu den in der Zeichnung angegebenen Werten ermittelt.



Bei gegebenem Kreis ist die Kante des Siebenecks, also im wesentlichen die Länge s, zu konstruieren. Dies ist geleistet, wenn man die Dreiecke EGA und ADF konstruiert hat, also im wesentlichen die Kanten EG und FD.

Es gilt nun infolge Winkelgleichheit Δ AGD ~ Δ AFG und Δ AFE ~ Δ GEA, was zu folgenden Verhältnissen Veranlassung gibt: $|DG|:|GA| = |GA|:|FG|$ bzw. $|FE|:|EA| = |EA|:|EG|$ oder $|GA|^2 = |FG|*|DG|$ bzw. $|EA|^2 = |EG|*|FE|$. Modern geschrieben heißt das: $x^2 = s(s+z)$ bzw. $z^2 = x(x+s)$. Die erste Gleichung kann man als Gleichung einer Parabel deuten, die zweite als solche einer Wurzelfunktion. Der Schnittpunkt der beiden Kurven ist die gesuchte Lösung.

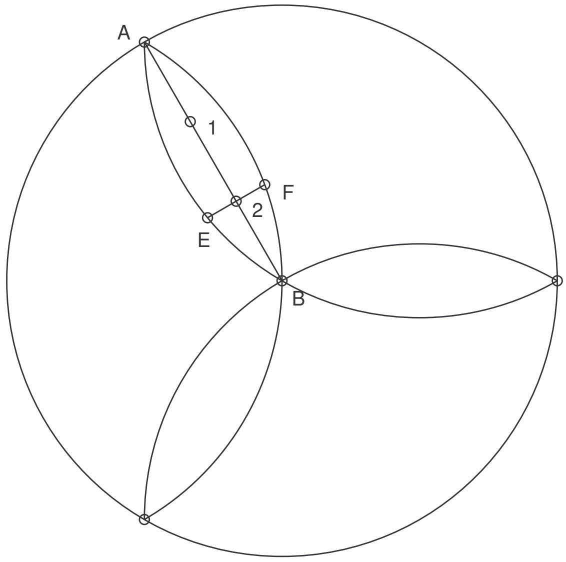
Eine ähnliche Vorgehensweise wurde schon in der Antike von Hippokrates von Chios (zweite Hälfte des 5. Jh. v. Chr.) vorgeschlagen zur Lösung des Problems der Würfelverdopplung (siehe dort).

Setzt man der Einfachheit halber $s = 1$, so erhält man die Gleichungen $x^2=1+z$ und $z^2 = x(x+1)$. Quadrieren und einsetzen liefert: $(x^2-1)^2 = x(x+1)$ oder $\{(x+1)(x-1)\}^2 = x(x+1)$. Offenkundig besitzt diese biquadratische Gleichung die Lösung $x = -1$, die aber aus geometrischen Gründen nicht in Betracht kommt. Dividiert man durch $(x+1)$, so entsteht die kubische Gleichung $x = (x-1)^2(x+1)$. Man kann also sagen, dass al-Quhi eine geometrische Lösung für diese Gleichung vorgeschlagen hat. Diese Idee wurde zwar nicht von al-Quhi selbst wohl aber später von anderen arabischen Mathematikern verfolgt: (vgl. Gericke 1992, I 202 - 204).

Eine einfache aber recht gute Näherung für die Kantenlänge des einbeschriebenen Siebenecks ist die folgende: Man konstruiere das einbeschriebene Sechseck und nehme als Kante des Siebenecks die Höhe des gleichseitigen Dreiecks, aus dem sich das Sechseck aufbauen lässt. Diese Idee scheint erstmals von L. da Vinci vorgetragen worden zu sein. Reichlich verwickelte Näherungskonstruktionen gehen auf den Franzosen F. de Foix de Candalle, die dieser 1593 im Alter von 81 Jahren fand (vgl. Constructions approchées 1995, 17), und auf seinen Landsmann F. Besson (1626) (vgl. Constructions approchées 1995, 19 – 21) zurück.

Es handelt sich hierbei um Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, von denen man aber weiß, dass sie das gewünschte Ergebnis nur angenähert, nicht aber exakt liefern. De Candaille versuchte in nahe liegender Weise analog zum goldenen Dreieck beim Fünfeck ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, dessen Basiswinkel dreimal so groß sind wie sein Winkel an der Spitze; anders gesagt, wollte er den gestreckten Winkel π in sieben gleiche Teile zerlegen.

Zum Abschluss möchte ich noch einige Näherungen vorstellen, die A. Dürer in seiner bereits erwähnten *Underweysung* (1525) gibt (zu Dürers mathematischen Schaffens vgl. Hofmann 1984). Um eine Näherung für die Kante des Neunecks zu konstruieren, erzeuge man die nachfolgende rosettenförmige Figur:



Man drittele nun die Strecke AB durch die Punkte 1 und 2, errichte in 2 die Senkrechte und erhalte die Schnittpunkte E sowie F. Nun ziehe man um B den Kreis durch E und F; die Kante EF ist angenähert gleich der Kante des Neunecks im soeben konstruierten Kreis. Mit Hilfe der Ähnlichkeit lässt sich dann sofort auch dem ursprünglichen Kreis das Siebeneck einbeschreiben.

Für die Kante des 11-Eck empfahl Dürer folgende Summe zu nehmen: $\frac{r}{2}+\frac{1}{8}\frac{r}{2}=\frac{8}{9}r$, wobei r die Länge des Radius des vorgegebenen Kreises sein soll. Analog schlug er für das Dreizehneck vor, einfach den halben Radius zu nehmen.

Mit diesen kurzen und unsystematischen Bemerkungen möchte ich vorerst das Thema Konstruktion von regulären Vielecken verlassen, nicht ohne zu erwähnen, dass wir im weiteren Verlauf der Vorlesung die vollständige Lösung, die C. F. Gauß 1801 gegeben hat, noch kennen lernen werden.

4. Die Quadratur des Kreises

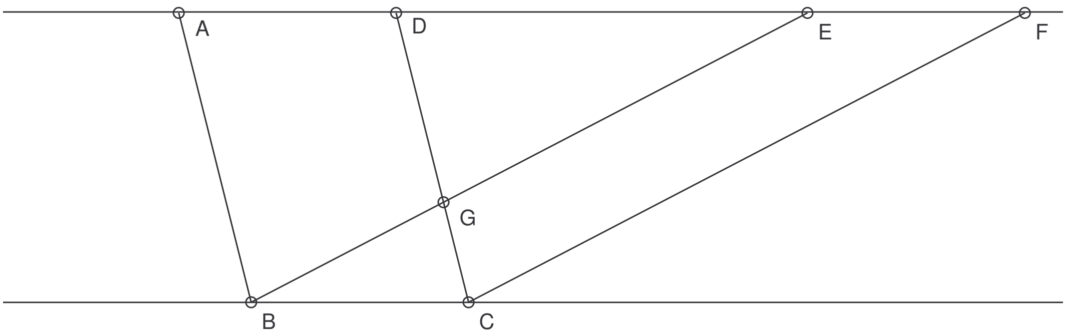
Die Quadratur des Kreises gehört zweifellos zu den bekanntesten mathematischen Problemen überhaupt; im Deutschen ist dieser Terminus synonym geworden zu unlösbare Aufgabe und findet sich so gelegentlich sogar in den Zeitungen. In dem Begriff **Quadratur** steckt natürlich das Wort Quadrat; in diesem Sinne heißt es beispielsweise bei Aristoteles: *Was ist Quadratur? Die Konstruktion eines gleichseitigen rechtwinkligen Parallelogramms, das gleichen Inhalt hat mit einem ungleichseitigen.* (Aristoteles 1996, 44). Sofort danach stellt er aber weiter fest: *Wer aber sagt: Quadratur ist die Auffindung der mittleren Proportionale, nennt die Ursache des Tatbestandes.* Bezeichnet man die Kantenlängen des ungleichseitigen rechtwinkligen Parallelogramms - also des Rechtecks - mit a und b, so läuft die Quadratur des Rechtecks darauf hinaus, eine Kante der Länge $\sqrt{ab}$ zu konstruieren; da für diese gilt (wir nehmen o.B.d.A. a > b an): $a : \sqrt{ab} = \sqrt{ab} : b$, ist sie mittlerer Proportionale zu a und b. Das lässt sich einfach bewerkstelligen, etwa mit Hilfe des Höhensatzes (II 16). Also sollte es bei der Quadratur des Kreises darum gehen, ein dem Kreis flächengleiches Quadrat nur mit Zirkel und Lineal zu konstruieren. Dies ist die Quadratur im engeren Sinne, von ihr unterscheiden kann man eine Quadratur im weiteren Sinne. Diese läuft darauf hinaus, das Verhältnis von Kreisfläche zur Fläche des Quadrats über dem Kreisdurchmesser zu ermitteln. Das muss man nicht - und wurde auch nicht - als Konstruktionsproblem interpretieren. In diesem Sinne bedeutet dann Quadratur soviel wie Berechnung der Kreisfläche, die so genannte Kreismessung (Zyklometrie), ein Sinn, der dem Begriff Quadratur noch heute im Französischen und Englischen anhaftet. Ähnliches gilt für ältere Autoren, etwa Leibniz. Nur im Deutschen ist die Interpretation als Konstruktion mit Zirkel und Lineal so dominant geworden. Bevor wir im einzelnen auf die sehr vielfältigen Versuche, zur Quadratur des Kreises zu gelangen, zu sprechen kommen, möchte ich kurz erwähnen, wie Euklid das entsprechende Problem für Vielecke löst. Diese Lösung kann man als Paradigma einer Quadratur betrachten; möglicherweise dachten die Mathematiker jener Zeit: Was dem Vieleck recht ist, ist dem Kreis billig. Das allerdings stände in scharfen Gegensatz zu Aristoteles Lehre von der Unvereinbarkeit des geradlinig mit dem krummlinig Begrenzten.

4.1 Die Quadratur der Vielecke bei Euklid

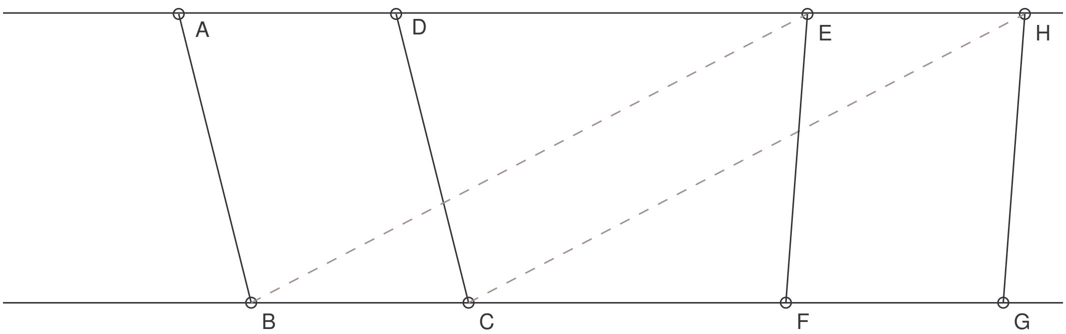
Die Lehre vom Flächeninhalt geradlinig begrenzter Figuren entwickelt Euklid im ersten Buch seiner Elemente. Diese unterscheidet sich allerdings von den gängigen heute Vorstellungen insofern, als Euklid keine Zahlen verwendet: Er baut eine Vergleichstheorie und keine Maßtheorie auf. Dieser Ansatz wurde 2000 Jahre später u.a. von W. Bolyai und P. Gerwien wieder aufgegriffen und führte letztlich zu der Theorie der Zerlegungsgleichheit oder Multikongruenz, wie sie dann in Hilberts sekulärem Buch *Grundlagen der Geometrie* unter Hinzunahme der Ergängzungsgleichheit, eine Idee, welche sich auch schon bei Euklid findet, detailliert dargelegt wurde (vgl. Volkert 1999).

Die Grundfigur der Viereckslehre ist bei Euklid das **Parallelogramm**. Merkwürdigerweise fehlt allerdings bei ihm eine Definition dieses wichtigen Begriffes; man kann aber den Sätzen entnehmen, wie er sich das Zustandekommen eines Parallelogrammes vorgestellt hat: Ist ein Paar von Parallelen gegeben, also ein Streifen, so markiere man auf beiden gleichgroße Strecken und verbinden deren Endpunkte so, dass keine Überkreuzung der Verbindungslinien entsteht. Er beweist dann in I 33, dass die Verbindungslinien selbst wieder auf parallelen Geraden liegen, weshalb man ein Parallelogramm auch als Schnittgebilde zweier Streifen bezeichnen darf. Im Satz 34 beweist Euklid dann die anderen gängigen Eigenschaften des Parallelogramms. Hieraus ergibt sich übrigens, dass das Parallelogramm ein Rhomboid im Sinne der Definition 22 des ersten Buches ist: *ein Rhomboid jede, in der die gegenüberliegenden Seiten sowohl als Winkel einander gleich sind und die dabei weder gleichseitig noch rechtwinklig ist.* Die Definition des Rhomboids ist somit explizit so gewählt, dass weder Rechteck noch Rhombus ein Rhomboid sind. Man bemerkt, dass Euklid mit der Beziehung des Sonderfalles ganz anders umgeht, als wir heute (in der Schule lernt man bekanntlich: Jedes Rechteck ist ein Parallelogramm, aber nicht jedes Parallelogramm ist ein Rechteck). Dies deutet auf einen interessanten Wandel in der mathematischen Denkweise hin.
Der erste Satz der Lehre vom Flächeninhalt lautet bei Euklid:

I 35. Auf derselben Grundlinie zwischen denselben Parallelen gelegene Parallelogramme sind einander gleich.
Der **Beweis** verläuft folgendermaßen:

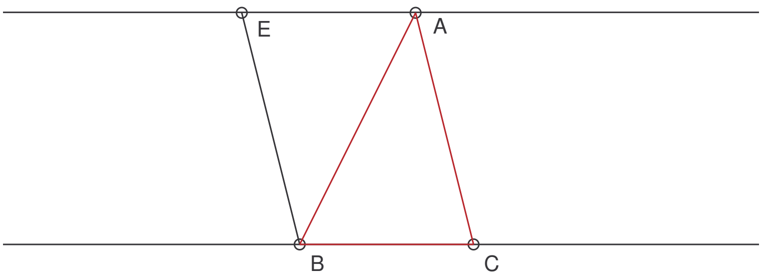


Weil ABCD und BCEF Parallelogramme sind, gilt nach I 34 |AD| = |BC| und |EF| = |BC|, folglich nach Axiom 2 auch |AD| = |EF|. Fügt man jeweils die Strecke DE an, so folgt weiter wieder nach Axiom 2: |AE| = |DF|.
Schließlich gilt ebenfalls nach I 34 |AB| = |CD| und |BE| = |CF|. Folglich sind die Dreiecke ABE und DCF nach I 8 (SSS) kongruent. Nun nehme man beiderseits das Dreieck DGE weg; dann sind die verbleibenden Trapeze ABGD und CFEG "gleich" (vgl. Axiom 3). Die Gleichheit bleibt erhalten, wenn man nun noch beiderseits das Dreieck BCG anfügt (nach Axiom 2), was zu den gewünschten Parallelogrammen führt.
Bem. 1. Euklid definiert nirgends exakt, was ein Flächeninhalt ist; sein Allerweltswort "gleich" muss auch hierfür herhalten. Er verwendet die Implikation: Sind zwei Figuren kongruent, so ist ihr Flächeninhalt gleich. Hieraus ergibt sich, unterstellt man eine entsprechende Additivität: Lassen sich zwei Figuren in gleich viele, paarweise kongruente Teilfiguren zerlegen, so haben sie gleichen Flächeninhalt. Das kommt der modernen Definition schon ziemlich nahe. Hierzu vergleiche man etwa Hilbert 1972, viertes Kapitel.
2. Der Beweis bezieht sich auf die abgebildete Figur; es sind natürlich noch andere Fälle zu berücksichtigen nämlich D = E und E liegt zwischen A und D. Diese sind allerdings einfacher als der von Euklid behandelte Fall.
3. Der Beweis beruht darauf, dass Flächeninhalte Größen sind in dem Sinne, den Euklid in seinen Axiomen unterstellt. Um dies wirklich zu sichern, bedürfte es wieder einer exakten Definition des Begriffes Flächeninhalt.
Der nachfolgende Satz verallgemeinert die Aussage von I 35.
I 36. Auf gleichen Grundlinien zwischen denselben Parallelen gelegene Parallelogramme sind einander gleich.
Beweis: Wir betrachten die abgebildete Situation:



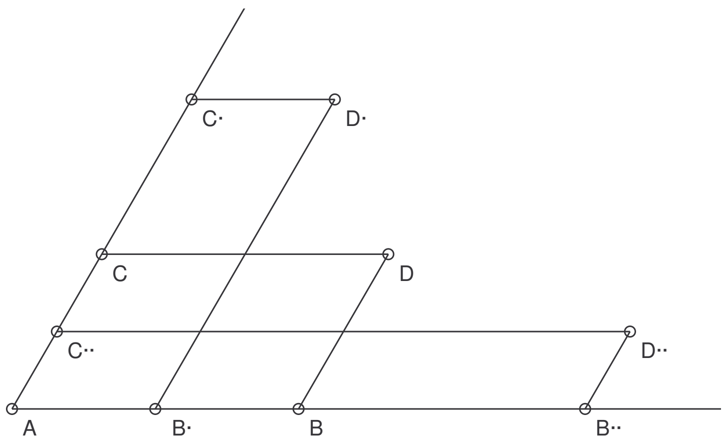
Dann konstruieren wir das Hilfsparallelogramm BCHE und wenden zweimal Satz 35 an, was sofort die Behauptung liefert. Der wesentliche Punkt ist der Nachweis, dass BCHE tatsächlich ein Parallelogramm ist. Das sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.
Bem. 1. Euklid untersucht wieder nur einen Fall.
2. Euklid unterscheidet konsequent zwischen identischen Grundlinien (er sagt dafür: *dieselbe Grundlinie*) und kongruenten (oder gleichlangen) Grundlinien (er sagt dafür *gleich*). Im Unterschied zur modernen Auffassung handelt es sich für Euklid im ersten Fall nur um eine Grundlinie, nicht um zwei, die identisch sind. Die letztere Sichtweise hätte er wohl als paradox (was wörtlich soviel heißt wie: gegen die gute Meinung verstoßend) empfunden.
3. Die Aussage des Satzes 36 formuliert man heute in der Schule meist mit Hilfe der Scherung: Zwei Parallelogramme, welche durch eine oder mehrere Scherungen auseinander hervorgehen, sind flächeninhaltsgleich.

Die nachfolgenden Sätze 37 und 38 behandeln dann Dreiecke in einem Streifen. Dies geschieht durch Zurückführung auf Parallelogramme: Ist zum Beispiel das Dreieck ABC in einem Streifen gegeben, so füge man ihm eine kongruente Kopie ABE längs AB an.

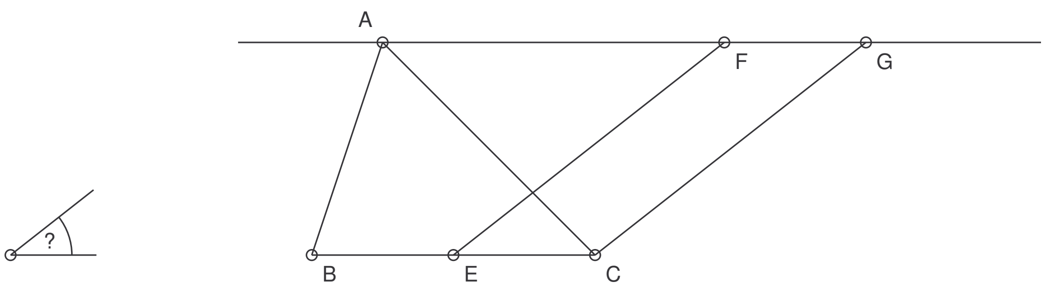


Wichtig ist, sich klarzumachen, dass so tatsächlich ein Parallelogramm entsteht. Der Zusammenhang zwischen Parallelogramm und Dreieck wird später in Satz 40 noch einmal explizit formuliert: *Wenn ein Parallelogramm mit einem Dreieck dieselbe Grundlinie hat und zwischen denselben Parallelen liegt, ist das Parallelogramm doppelt so groß wie das Dreieck.*

Ein Problem der **Flächenverwandlung** wird von Euklid erstmals in Satz 42 angegangen. Dabei versteht man allgemein unter Flächenverwandlung die Überführung einer Figur (etwa eines Dreiecks) in eine andere (etwa ein Parallelogramm) gleichen Flächeninhaltes. Solche Fragen wurden schon vor Euklid studiert; man nimmt unter anderem an, dass hier eine Wurzel für die Beschäftigung mit Kegelschnitten lag. Diesen überraschenden Zusammenhang möge das folgende Beispiel erläutern:
Gegeben sei ein Parallelogramm ABCD. Auf welcher Ortslinie liegen die Ecken D' aller Parallelogramme AB'C'D', die denselben Flächeninhalt wie ABCD besitzen und deren Kanten AB' und AC' auf denselben Halbgeraden wie AB bzw. AC liegen? Die Antwort lautet: auf einer Hyperbel (vgl. Gericke 1992, I 127 - 132 oder Peiffer/Dahan 1994, 55 - 57 und 61).



I 42. Ein einem gegebenen Dreieck gleiches Parallelogramm in einem gegebenen geradlinigen Winkel zu errichten.
Sei ABC das gegebene Dreieck und α der gegebene Winkel. Die geforderte **Konstruktion** verläuft folgendermaßen. Man halbiere die als Grundseite gewählte Kante BC im Punkte E. Dann trage man in E einen, dem gegebenen Winkel α maßgleichen Winkel so an, dass einer seiner Schenkel auf BC fällt und der andere in die Halbebene, in der der Punkt A liegt. Weiter ziehe man durch C die Parallele zum freien Schenkel des eben angetragenen Winkels und durch A die Parallele zur Geraden, auf der die gewählte Grundseite liegt. Deren Schnittpunkt mit dem freien Schenkel des in E angetragenen Winkels sei F, ihr Schnittpunkt mit der anderen Parallelen sei G. Dann ist ECGF ein Parallelogramm, da es als Schnitt zweier Streifen konstruiert worden ist.



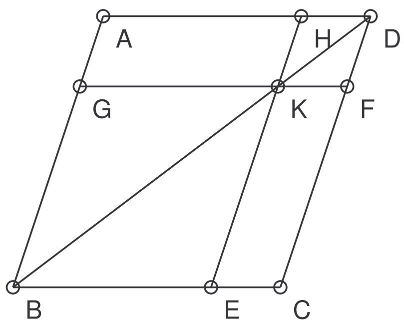
Offensichtlich erfüllt dieses Parallelogramm auch die Forderung bezüglich des Winkels α; es bleibt also nur noch zu zeigen, dass seine Fläche gleich derjenigen des Dreiecks ABC ist. Die Dreiecke ABE und AEC sind flächengleich nach I 38 und das Parallelogramm ECGF ist nach I 41 flächenmäßig doppelt so groß wie das Dreieck AEC. Andererseits ist aber auch das Dreieck ABC flächenmäßig doppelt so groß wie das Dreieck ABE, da ja das erste Dreieck aus zwei Dreiecken zusammengesetzt ist, welche flächengleich dem Dreieck AEC sind. Damit ist die Konstruktion verifiziert.

Bem. Aus heutiger Sicht wäre es wohl nahe liegender, das Parallelogramm durch ein Rechteck zu ersetzen. Euklid arbeitet jedoch stets mit Parallelogrammen. Der Vorzug des Rechtecks liegt hauptsächlich in der einfacheren Berechnung seines Flächeninhaltes; das ist aber ein Aspekt, der, wie bereits gesagt, bei Euklid keine Rolle spielt.

Der nächste Satz enthält eine weitere Möglichkeit der Flächenverwandlung, wenn das auch in der Formulierung nicht sofort deutlich wird. Er ist bekannt unter der Bezeichnung **Satz über Ergänzungsparallelogramme.**

I 43. In jedem Parallelogramm sind die Ergänzungen der um die Diagonale liegenden Parallelogramme gleich.

Beweis: Ist ABCD das gegebene Parallelogramm, so ziehe man dessen Diagonale BD und wähle hierauf einen Punkt K. Zieht man nun durch K die Parallelen zu den Geraden, auf denen die Kanten AB und BC liegen, so erhält man die Parallelogramme AGKH, EBGK, ECFK und KFDH. Dabei heißen AGKH und ECFK Ergänzungsparallelogramme, während die beiden anderen Parallelogramme Parallelogramme um BD genannt werden.

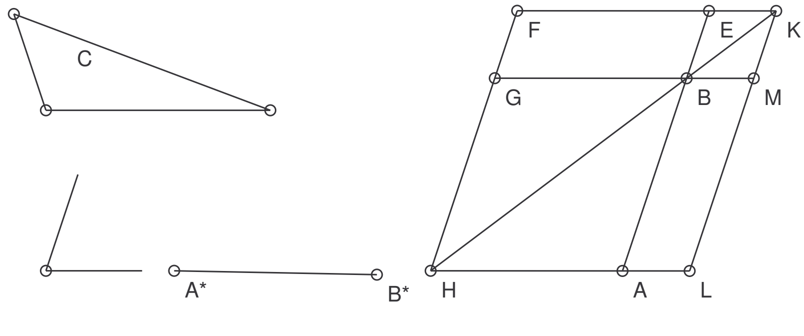


Die Flächengleichheit der beiden Ergänzungsparallelogramme ergibt sich aus der Kongruenz der großen Dreiecke ABD und CDB, von denen die paarweise kongruenten kleinen Dreiecke BEK und BKG sowie KFD und KDH weggenommen werden.

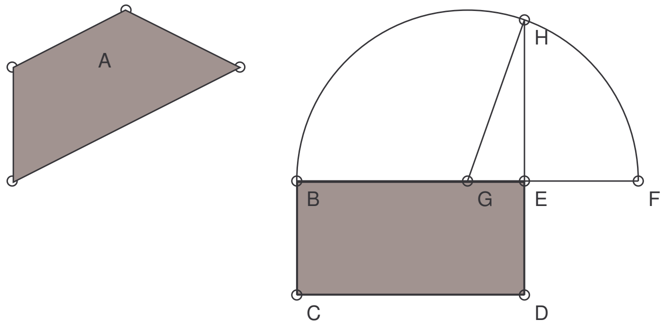
Die in Satz 43 versteckte Möglichkeit der Flächenverwandlung wird umgehend in Satz 44 erläutert. Hierbei geht es letztlich darum, ein Parallelogramm vorgegebenen Flächeninhaltes mit vorgegebener Kantenlänge und vorgegebener Winkelbreite zu konstruieren.

I 44. An eine gegebene Strecke ein einem gegebenen Dreieck gleiches Parallelogramm in einem gegebenen geradlinigen Winkel anzulegen.

Die **Konstruktion** verläuft folgendermaßen: Zuerst besorgt man sich nach I 42 ein dem gegebenen Dreieck flächengleiches Parallelogramm BEFG mit dem richtigen Winkel. Dann wendet man I 43 an, um die vorgegebene Kantenlänge zu realisieren. Das macht man, indem man die vorgegebene Kantenlänge auf der Verlängerung einer der Kanten des Ausgangsparallelogramms abträgt (unten ist das |BA|) und dann die Situation der Ergänzungsparallelogramme realisiert, wie das die untenstehende Zeichnung andeutet.



Bem. Man kann, arbeitet man mit Rechtecken, den Inhalt von I 44 auch algebraisch interpretieren: Da der vorgegebene Winkel dann stets ein rechter ist, geht es dann nur noch um Kantenlängen und Flächeninhalte. Die Aufgabe lässt sich jetzt so lesen: Gegeben ein Produkt $a \cdot b$ sowie eine Zahl c. Zu bestimmen eine vierte Zahl d mit $a \cdot b = c \cdot d$. Diese Sichtweise der Dinge nennt man geometrische Algebra; sie kommt bei Euklid erst im zweiten Buch wirklich zur Geltung. Es sei warnend hinzugefügt, dass die Bezeichnung „geometrische Algebra" unter Mathematikhistorikern durchaus umstritten ist.
Der nachfolgende Satz 45 löst weitgehend das Quadraturproblem für beliebige Vielecke.
I 45. Ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Parallelogramm in einem geradlinigen Winkel zu errichten.
Der Beweis beruht auf der Zerlegbarkeit der fraglichen Figur in Dreiecke (heute nennt man das Triangulierbarkeit); diese wird kommentarlos von Euklid unterstellt. Dann kann man in einem ersten Schritt eines dieser Dreiecke gemäß I 42 in ein flächengleiches Parallelogramm mit dem vorgegebenen Winkel umwandeln. Nun zeichne man eine Kante dieses Parallelogramms aus. Dann kann man gemäß I 44 zum zweiten Dreieck ein flächengleiches Parallelogramm konstruieren, das ebenfalls den vorgegebenen Winkel aufweist aber darüber hinaus auch noch eine Kante besitzt, welche gleichlang der ausgezeichneten Kante des im ersten Schritt erzeugten Parallelogramms ist. Also kann man die beiden Parallelogramme längs der gleichlangen Kante zusammenlegen und erhält so ein einziges Parallelogramm. und so weiter.
Bem. 1. Es lässt sich in der Tat beweisen, dass jedes Polygon triangulierbar ist. Vergleiche hierzu Meschkowski 1966, 41 - 44.
2. Nimmt man den vorgegebenen Winkel als einen rechten an, so liefert die obige Konstruktion ein dem vorgegebenen Vieleck flächengleiches Rechteck.
Aufgrund der letzten Bemerkung genügt zur Quadratur der Vielecke nun der Nachweis, dass man jedes Rechteck in ein flächengleiches Quadrat verwandeln kann. Dies leistet Euklid erst im zweiten Buch mit dem Satz 14. Dieser entspricht unserem Höhensatz, wird aber von Euklid anders bewiesen (üblicherweise gewinnt man den Höhensatz aus dem Satz des Pythagoras) nämlich mit Mitteln der geometrischen Algebra.
II 14. Ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Quadrat zu errichten.
Konstruktion: Nach I 45 können wir ein der gegebenen Figur flächengleiches Rechteck (Euklid sagt *rechtwinkliges Parallelogramm*) BCDE konstruieren. Ist nun |BC| = |CD|, so liegt bereits ein Quadrat vor und man ist fertig. Andernfalls sei o.B.d.A. die Strecke BE die größere. Dann verlängere man diese über E hinaus und trage auf dieser Verlängerung von E aus die Länge |ED| ab. Der entstehende Endpunkt sei F. Dann ziehe man um den Mittelpunkt G der Strecke BF den Thales-Kreis zu dieser Strecke als Durchmesser und zwar in der Halbebene, in der die Punkte C und D nicht liegen. Nun verlängere man DE über E hinaus und erhalte den Schnittpunkt H mit dem Thales-Kreis. Schließlich verbinden wir noch H mit G. Dann ist EH die gesuchte Quadratkante.

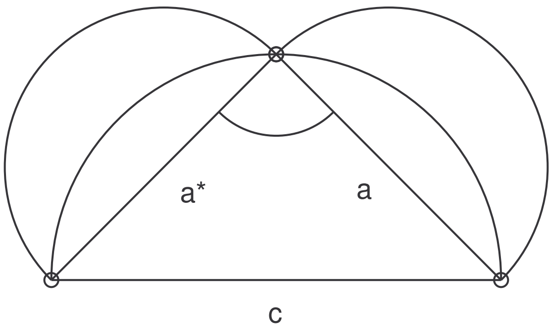


Verifikation. Es gilt die Gleichung $|BE|*|EF| + |EG|^2 = |GF|^2$ (bei Euklid ist dies II 5; man kann diese Gleichung aber ganz einfach nachrechnen, wenn man nur beachtet, dass G Mittelpunkt von BF ist). Nun ist aber $|GF| = |GH|$, da es sich um Radien im selben Kreis handelt; also gilt $|BE|*|EF| + |EG|^2 = |GH|^2$. Letzteres wiederum lässt sich durch den Satz des Pythagoras (I, 47) ausrechnen: $|GH|^2 = |EG|^2 + |EH|^2$. Einsetzen und Subtraktion von $|EG|^2$ liefert schließlich die Gleichung $|BE|*|EF| = |EH|^2$, deren linke Seite sich unschwer als Flächeninhalt des Rechtecks BCDE erkennen lässt (es ist ja $|EF| = |ED|$).
Bem. In diesem Satz wie schon an vielen anderen Stellen des zweiten Buches verwendet Euklid die Formel für den Flächeninhalt des Rechtecks (und natürlich auch diejenige für das Quadrat). Das heißt aber, dass er die maßtheoretische Sichtweise einnimmt. Bemerkenswert ist, dass er aber diese Formel niemals zuvor bewiesen hat. Einen Beweis findet man erst in VI 1. Leitet man hingegen den Höhensatz im Stile der Schulmathematik nur mit Hilfe des Pythagroras her, so kann man mit dem reinen Flächenvergleich auskommen. Es ist also nicht nötig, den maßtheoretischen Aspekt hier ins Spiel zu bringen. Eine andere Möglichkeit, ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln, bietet der von Euklid in I47 implizit bewiesene Kathetensatz. Dazu müsste man aber rechtwinklige Dreiecke konstruieren können, bräuchte also so etwas wie den Thales - Kreis. Der wird aber erst in III,31 behandelt.
Es gilt: Zu jedem Polygon existiert ein zerlegungsgleiches Quadrat. Der zentrale Satz der Theorie der Zerlegungsgleichheit ist aber der folgende: Zwei Polygone, deren Flächen gleiches Maß besitzen, sind immer zerlegungsgleich. Damit ist gezeigt, dass der maßtheoretische Ansatz und derjenige der Zerlegungsgleichheit für Polygone keine unterschiedlichen Ergebnisse liefern. Der genannte Satz wurde erstmals von Gerwien 1833 bewiesen; W. Bolyai gab ein Jahr zuvor einen nicht ganz korrekten Beweis (vgl. Volkert, 1999). Im Dreidimensionalen liegen die Dinge übrigens ganz anders, wie M. Dehn 1900 zeigen konnte. Hier gibt es beispielsweise Dreieckspyramiden, deren Volumina gleiches Maß haben, die aber nicht zerlegungsgleich sind. Vgl. etwa Kellerhans 1996.
Doch zurück zu Euklid. Proklos macht in seinem Euklid-Kommentar zu dem gerade geschilderten Satz folgende aufschlussreiche Bemerkung:
Durch dieses Problem, glaube ich, wurden die Alten auch veranlaßt, sich um die Quadratur des Kreises zu bemühen. Denn wenn ein jeder geradlinigen Figur gleiches Parallelogramm sich finden läßt, dann mag es der Erforschung wert sein, ob nicht auch der Beweis gelingt, daß die geradlinigen den kreisrunden Figuren gleich sind. In der Tat bewies Archimedes, daß jeder Kreis einem rechtwinkligen Dreieck gleich ist, dessen Radius einer der Katheten, und dessen Umfang der Basis gleich ist. (Proklos, 460)
Wie schon oben bemerkt gibt es durchaus Hinweise auf das Quadraturproblem aus der Zeit vor Euklid. Da Proklos über die Geschichte der Mathematik bestens informiert war, scheint es eher unwahrscheinlich, dass ihm dies nicht bekannt gewesen sein sollte. Also liegt es nahe, seine Bemerkung dahingehend zu interpretieren, dass Euklids Beweis die antiken Mathematiker dazu angeregt habe, das Quadraturproblem mit Zirkel und Lineal anzugehen (oder doch zumindest diese vorher schon vorhandene Tendenz bestärkt habe). Der Grund hierfür wäre, dass Euklids Verfahren zur Quadratur der Vielecke eines ist, dass nur mit Zirkel und Lineal auskommt.
Doch kommen wir nun zur Quadratur des Kreises und zu den vielfältigen Ansätzen, die wir schon in der Antike zu seiner Bewältigung finden. Eine solche Vielfalt ist ja stets ein Zeichen dafür, dass es sich um ein "gutes" Problem gehandelt hat; kein geringerer als D. Hilbert hat sich zur Bedeutung von "guten" Problemen für die Entwicklung der Mathematik geäußert. In seinem berühmten Vortrag auf dem Internationalen Mathematikerkongress zu Paris 1900 nannte er als Kennzeichen eines solchen "guten" Problems (Hilbert 1979, 23 - 25):
- *Klarheit und leichte Faßlichkeit;*
- es *sei ferner schwierig, damit es uns reizt, und dennoch nicht völlig unzugänglich, damit es unserer Anstrengung nicht spotte;*

• Beziehungsreichtum.
Es ist wohl unschwer zu erkennen, dass alle diese Kriterien, denen man vielleicht noch die Forderung nach Natürlichkeit hinzufügen könnte, vom Quadraturproblem bestens erfüllt werden.

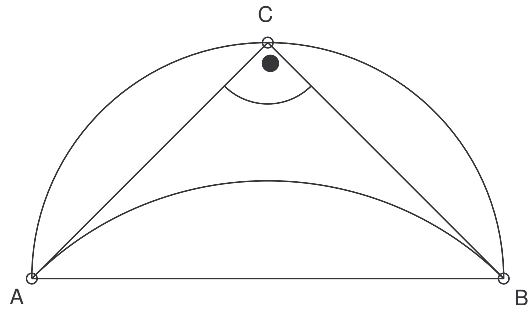
4.2 Die Quadratur der Möndchen

Einer der frühesten Ansätze zur Quadratur des Kreises, welcher tatsächlich mit Zirkel und Lineal zu tun hat (wenn das auch nicht explizit ausgesprochen wird) ist die Möndchenquadratur des Hippokrates von Chios (zweite Hälfte des 5. Jh.). Hippokrates war einer der bedeutendsten Mathematiker vor Euklid, er soll auch *Elemente* geschrieben haben, die allerdings verloren gegangen sind. Im übrigen darf man ihn nicht mit seinem Namensvetter Hippokrates von Kos verwechseln, dem neben Galen berühmtesten Arzt des Altertums. Die nun zu besprechende Möndchenquadratur ist als wörtliches Zitat aus der ebenfalls verlorenen Mathematikgeschichte des Eudemos von Rhodos (4. Jh. v. Chr.), einem Schüler des Aristoteles, in einem Bericht des Simplikios (6. Jh. n. Chr.) überliefert; sie ist damit das älteste größere mathematische Textstück aus der Antike, das man kennt. Eine zweite Quelle zum selben Thema ist Alexander von Aphrodisias (ca. 200 n. Chr.). Den Text selbst findet man bei Bretschneider 1870, 110 - 121; als ausführliche Literatur sei auf Rudio 1907, auf Knorr 1993, 29 – 39 sowie auf meinen Aufsatz (siehe Homepage) verwiesen.
Hippokrates hat genauer gesagt mehrere Möndchen quadriert. Die einfachste Situation ist die eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks, das man um die beiden Halbkreise über den Katheten und um den Thales-Halkreis über der Hypotenuse ergänzt hat.



Die beiden Flächenstücke zwischen dem großen und den kleinen Halbkreisen werden aus nahe liegenden Gründen (krummlinige) **Möndchen** genannt. Es gilt nun der überraschende Satz: Die Gesamtfläche der beiden Möndchen ist gleich der Fläche des rechtwinkligen Dreiecks. Setzt man die Formel für den Flächeninhalt des Kreises voraus, so kann man diese Behauptung unschwer mit Hilfe des Satzes des Pythagoras nachrechnen. Insbesondere erkennt man so, daß die Voraussetzung der Gleichschenkligkeit bei dieser Beweisart überflüssig ist. Hippokrates verwendete jedoch ein anderes Argument, welches auch bei den anderen noch zu besprechenden Möndchen eingesetzt werden kann. Dieses beruht auf dem folgenden, bei Hippokrates unbewiesenen **Hilfssatz:**
Die Flächen ähnlicher Kreissegmente (das heißt solcher mit gleichgroßen Mittelpunktswinkeln) verhalten sich zueinander wie die Quadrate über ihren Sehnen.
Konkret haben wir es hier mit Halbkreisen, also mit Segmenten zum Mittelpunktswinkel π zu tun; die Sehnen sind die Hypotenuse der Länge c beziehungsweise die Katheten der Länge a. Es gilt natürlich $2a^2 = c^2$. Bezeichnet A den Flächeninhalt des Kathetenhalbkreises und C denjenigen des Hypotenusenhalbkreises, so gilt nach Hilfssatz: $2A = C$. (das folgt aus der

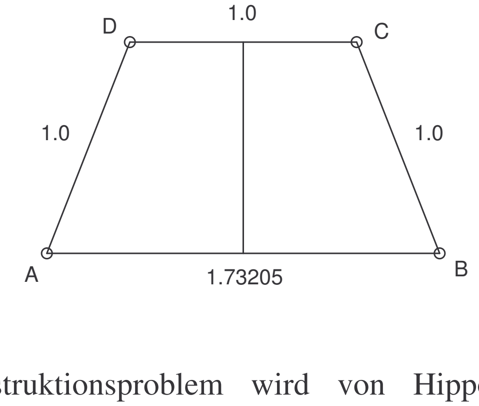
Tatsache, dass der Satz des Pythagoras allgemein für ähnliche Figuren über Hypotenuse und Katheten gilt – vgl. Euklid VI, 31 [dort nur für Polygone]). Addiert man nun auf beiden Seiten den Flächeninhalt Δ des Dreiecks, so ergibt sich $2A + \Delta = C + \Delta$ und damit $(2A + \Delta) - C = \Delta$. Auf der linken Seite steht aber nichts anderes als die Gesamtfläche der Möndchen.
Der soeben betrachtete Sachverhalt ist noch in etwas anderer Form überliefert, der zudem den Vorteil hat, sich verallgemeinern zu lassen und so auf die anderen Möndchenquadraturen zu führen. Hierzu gehen wir von einer Strecke AB aus sowie von einem Winkel τ und einem Verhältnis m:n zweier natürlicher teilerfremder Zahlen mit $m > n$. Dann konstruieren wir zur Sehne AB zwei Kreissegmente mit den Mittelpunktswinkeln $\alpha = m\tau$ und $\beta = n\tau$. Folglich verhalten sich diese Mittelpunktswinkel wie die vorgegebenen Zahlen m und n. Um den Mittelpunkt des jeweiligen Kreissegmentes zu finden, berechnet man am einfachsten die beiden Winkel, die die Sehne AB mit den Radien in ihren Endpunkten einschließt (das fragliche Dreieck ist natürlich gleichschenklig): Im ersten Fall ist das $\frac{1}{2}(\pi-\alpha)=\frac{1}{2}(\pi-m\tau)$, im zweiten $\frac{1}{2}(\pi-\beta)=\frac{1}{2}(\pi-n\tau)$.
Die entsprechenden Winkel trägt man in A und in B an; der Schnittpunkt ihrer freien Schenkel liefert den gesuchten Mittelpunkt. Zu den beiden Mittelpunkten zieht man dann die Kreisbögen zwischen A und B. Weiterhin unterteilt man den Winkel α in m gleiche Teile, den Winkel β in n gleiche Teile, die folglich alle gleich τ sind. Die Schenkel dieser Winkel schneiden den zum entsprechenden Mittelpunkt gehörigen Kreisbogen in m-1 bzw. n-1 Punkten, die man unter Einschluß der beiden Endpunkte A und B miteinander verbindet. Die von den beiden entstehenden Polygonzügen begrenzte Fläche ist das geradlinige Möndchen, die von den beiden Kreisbögen eingeschlossene Fläche heißt einfach Möndchen. Die Frage lautet nun: Wann ist die Gesamtfigur konstruierbar, und wann haben das geradlinige Möndchen und das Möndchen gleichen Flächeninhalt? Wenn dem so ist, nennt man das Möndchen **quadrierbar**. Offensichtlich kommt es bei der genannten Konstruktion nicht auf die Länge der vorgegebenen Sehnen AB an, wohl aber auf die Breite des Winkels τ; charakteristisch ist aber das Verhältnis m:n, folglich verwendet man dieses Verhältnis, um das Möndchenproblem in Kurzform zu charakterisieren: Man spricht vom **(m,n)-Möndchen**. Das Problem der Möndchenquadratur lautet also: Für welche Werte (m,n) erhält man konstruierbare Winkel τ?
Hippokrates hat drei derartige Möndchen untersucht. Beginnen wir mit dem einfachsten: Das ist natürlich das (2,1)-Möndchen, in dessen Fall die Sehnen sich wie $\sqrt{2}$ zu 1 verhalten müssen. Diese Sehnen sind in Beziehung zu entsprechenden Mittelpunktswinkeln zu bringen. Dies kann aufgrund der einfachen Verhältnisse im vorliegenden Fall durch Raten geschehen, da sich ja bekanntlich Diagonale und Seite eines Quadrates wie $\sqrt{2}$ zu 1 verhalten. Erstere können wir dem Mittelpunktswinkel $\beta=\frac{\pi}{2}$ zuordnen und den beiden Quadratseiten $\alpha=\pi$.
Die entsprechenden Kreisbögen sind zum einen der in seiner Mitte geteilte Thales-Halbkreis über AB, zum andern der Kreisbogen, dessen Scheitel gerade die Spitze des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks über AB ist. Ein solches Dreieck erhält man auch noch auf der anderen Seite, wenn man den Winkel halbiert und den freien Schenkel mit dem Kreisbogen zum Schnittpunkt. Wir erhalten also folgende Figur:



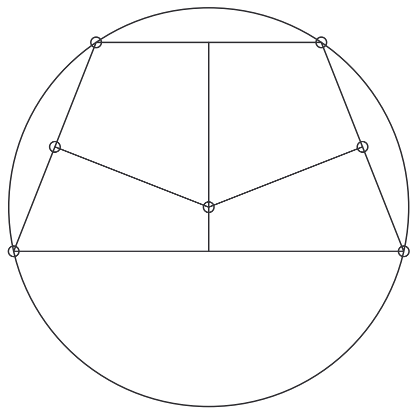
Die Behauptung ist nun, dass das (2,1)-Möndchen quadrierbar ist, was heißt, dass die Gesamtfigur quadrierbar ist und das geradlinige Möndchen flächengleich dem Möndchen ist. Das geradlinige Möndchen ist aber im vorliegenden Fall nichts anderes als das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck selbst. Also erhalten wir die Aussage, dass das Möndchen dem Dreieck flächengleich ist. Der Vergleich mit dem oben behandelten Fall zeigt weiter, dass das (2,1)-Möndchen auch flächengleich den beiden dort betrachteten Möndchen ist.
Der Beweis ist im wesentlichen derselbe wie oben. Allerdings können wir hier schon eine allgemeine Idee erkennen, die hinter der Frage nach den quadrierbaren Möndchen steckt. Vergleicht man Dreiecks- und Möndchenfläche, so wird einerseits vom Dreieck ein Stück weggenommen (die Fläche zwischen dem Kreisbogen zum Mittelpunktswinkel β und der Sehne AB), andererseits etwas hinzugefügt, nämlich die beiden Flächenstücke zwischen dem Kreisbogen zum Mittelpunktswinkel α und den beiden Katheten. Quadrierbarkeit liegt immer dann vor, wenn diese Flächen gleichgroß sind. Im Falle (2,1) ergibt sich das unmittelbar über den Satz des Pythagoras aus dem Hilfssatz. Im allgemeinen muss gelten: Die n Segmente erster Art müssen zusammen flächengleich den m Segmenten zweiter Art sein. Rein rechnerisch führt das auf die Werte $\sqrt{m}$ beziehungsweise $\sqrt{n}$ für die entsprechenden Sehnenlängen; dann gilt ja:

$$n(\sqrt{m})^2 = m(\sqrt{n})^2$$

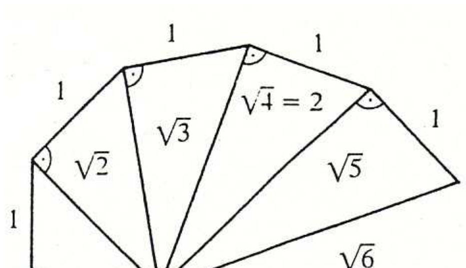
Bei den Mittelpunktswinkeln drehen sich dagegen die Verhältnisse um, das heißt diese verhalten sich wie $n\tau$ zu $m\tau$; so erhält man n Segmente der ersten und m Segmente der zweiten Art.
Der nächst einfachere Fall ist das (3,1)-Möndchen. Hier geht es also darum, Sehnen mit dem Verhältnis $\sqrt{3}$ zu 1 zu realisieren. Das wiederum läuft darauf hinaus, ein dreigleichschenkliges Trapez zu konstruieren, dessen lange Kante zur kürzeren in eben diesem Verhältnis steht.



Das entsprechende Konstruktionsproblem wird von Hippokrates mit Stillschweigen übergangen. Es ist aber nicht schwierig, ein dreigleichschenkliges Trapez zu konstruieren, wenn man dessen Kanten alle kennt. Angenommen, diese seien 1 und $\sqrt{3}$. Dann ziehen wir zuerst die Strecke AB der Länge $\sqrt{3}$, errichten auf ihr die Mittelsenkrechte, zu der wir wiederum zwei Parallelen im Abstand $\frac{1}{2}$ konstruieren. Kreise um die Punkte A und B mit Radius 1 liefern dann in Gestalt der Schnittpunkte C und D (in einer Halbebene bezüglich AB) mit den Parallelen die noch fehlenden Eckpunkte. Nun kann man weiterhin den Umkreis des soeben gefundenen Trapezes konstruieren und damit den zu den als Sehnen aufgefassten Kanten zugehörigen Mittelpunktswinkel τ. Insgesamt ist $3\tau > \pi$, was besagt, dass der das Trapez umfassende Kreisbogen größer als ein Halbkreis ist - eine Tatsache, die Hippokrates ausdrücklich hervorhebt. In Gestalt von τ kennt man aber auch den Mittelpunktswinkel, der zu dem noch fehlenden Bogen gehört. Um den Mittelpunkt des Bogens zu finden, trage man in A (oder B) den Winkel $\frac{\pi}{2}-\frac{\tau}{2}$ an; der Schnittpunkt des freien Schenkels (dieser soll natürlich in der Halbebene bezüglich AB liegen, in der das Trapez nicht liegt) mit der Mittelsenkrechten auf AB liefert den gesuchten Mittelpunkt.

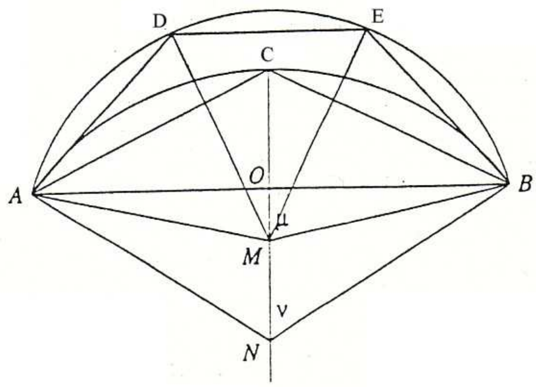


Das letzte, von Hippokrates betrachtete Möndchen war das (3,2)-Möndchen. Hier müssen wir um Quadrierbarkeit zu erreichen, Kanten realisieren, deren Verhältnis $\sqrt{3}$ zu $\sqrt{2}$ beträgt. Solche Kantenlängen zu konstruieren, ist mit Hilfe der bekannten **Wurzelschnecke** ganz einfach:



Die Wurzelschnecke wurde übrigens von J.H. Anderhab (vgl. Hauser o.J., 91f) ins Spiel gebracht, um ein bekanntes Problem zu lösen: In seinem Dialog *Theaitet* berichtet Platon, dass Zenodoros bewiesen habe, dass die Wurzeln aus den Zahlen 3 bis 17 (unter Ausschluss der Quadratzahlen 4, 9 und 16) irrational sind (147c - 148b). Führt man die Wurzelschnecke weiter, so stellt man nämlich fest, dass sich diese beim Übergang von $\sqrt{17}$ zu $\sqrt{18}$ erstmals selbst überschneidet!

Die wirkliche Schwierigkeit beim Fall (3,2) liegt darin, das geradlinige Möndchen herzustellen. Diese Aufgabe wurde von Hippokrates nicht mit Zirkel und Lineal gelöst, sondern mit Hilfe einer Einschiebung (Neusis) - jedenfalls, wenn man der Interpretation von Knorr folgt (Knorr 1993, 33). Um diese zu verstehen, ist es zweckmäßig, die Situation, die man als Lösung anstrebt, zu analysieren.



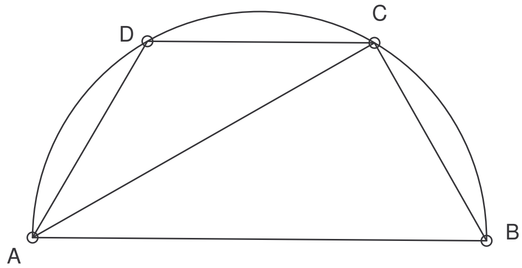
Da der Punkt C den Bogen AB halbiert (der zugehörige Mittelpunktswinkel wird ja auch halbiert), muss dieser auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB liegen. Schwieriger ist es, zu zeigen, dass der Punkt C auf der Winkelhalbierenden des Winkels BAD liegt und folglich die Punkte A,C und E kollinear sind. Klar ist, dass die fragliche Winkelhalbierende durch E geht, denn E halbiert ja nach Voraussetzung den zum Winkel BAD gehörigen Bogen BD. Weiterhin rechnet man nach, dass aufgrund der gemachten Voraussetzungen der Winkel BAC genau die Hälfte des Winkels BAD ist. Womit gezeigt wäre, dass die fragliche Winkelhalbierende durch C gehen muss.

Die Konstruktion im weiteren Sinne verläuft nun so: Man konstruiert zuerst eine Strecke DE der Länge $\sqrt{2}$. Um E zieht man einen Kreis mit diesem Radius. Auf diesem muss dann der Punkt B liegen. Nun errichte man auf DE die Mittelsenkrechte; auf dieser muss Punkt C liegen. Schließlich lege man eine Strecke mit dem Endpunkt E so, dass der Abschnitt auf dieser, welcher vom Schnittpunkt mit der Mittelsenkrechten und vom soeben konstruierten Kreis begrenzt wird, gerade die Länge $\sqrt{3}$ hat. Anschaulich gesprochen läuft das darauf hinaus, die Strecke der Länge $\sqrt{3}$ zwischen Kreis und Mittelsenkrechte einzuschieben, was den Namen des Verfahrens erklärt. Die Einschiebung, die sich nicht mit Zirkel und Lineal realisieren lässt, wurde später, zum Beispiel bei Archimedes, ein wichtiges Hilfsmittel (beispielsweise bei der Winkeldreiteilung), auf das wir noch zurückkommen werden. Wenn Knorrs Interpretation zutrifft, wäre Hippokrates der erste uns bekannte Mathematiker gewesen, der diese Methode verwandt hat. Jedenfalls liefert die Einschiebung den Punkt A, wonach sich die Figur leicht vervollständigen lässt.

Das entstehende (3,2)-Möndchen ist natürlich quadrierbar, da ja 2*3 = 3*2 gilt. Dies zeigt noch einmal, dass die Schwierigkeit in der Konstruktion der Figur liegt, nicht in der Bestimmung der Verhältnisse.

Eine wirkliche Zirkel- und Linealkonstruktion für das (3,2)-Möndchen wurde erst 1936 von dem britischen Mathematikhistoriker A.D. Steele in seiner Dissertation – welche übrigens in Heidelberg entstand – angegeben (vgl. Steele 1936, 319-321). Die Grundidee dieser Konstruktion, welche auf Appolonius zurückgeht, findet sich allerdings schon in einem anderen Kontext bei Pappos (vgl. Bos 2002, 81-84). Anders gesagt gibt es bestimmte Sonderfälle, in denen sich die Einschiebung tatsächlich mit Zirkel und Lineal realisieren lässt, weshalb Bos von „ebenen Neusis – Problemen“ spricht.

All dies geschah vermutlich mit dem Hintergedanken, die Kreisquadratur zu bewältigen. Das wird deutlich aus den letzten uns erhaltenen Ausführungen von Hippokrates zum Thema Möndchen. Man nehme einen Kreis nebst einbeschriebenem Sechseck, betrachte aber nur die obere Hälfte der Figur, also einen Halbkreis nebst einbeschriebenem dreigleichschenkligem Trapez ABCD. Zieht man nun noch die Diagonale AC und konstruiert zu dieser Sehne das den Segmenten über den kleinen Trapezkanten ähnliche Segment, so kann man wieder auf das geradlinige Möndchen (also das gleichschenklige Dreieck ACD) und das krummlinige Möndchen die üblichen Überlegungen anwenden. Da die Sehnen sich wie $\sqrt{3}$ zu 1 verhalten, bekommt man keine Gleichheit. Vielmehr ist das Dreieck ACD flächengleich dem krummlinigen Möndchen plus einem Segment über einer der kurzen Trapezkanten.



Das Problem reduziert sich somit auf die Quadratur des einen fraglichen Segmentes. Hierzu konstruiert Hippokrates einen zweiten Kreis, dessen Durchmesser sich zum ersten verhält wie 1 zu $\sqrt{6}$ und beschreibt diesem ein regelmäßiges Sechseck ein. Aufgrund der Beziehung zwischen den Durchmessern ist klar, dass die entstehenden sechs kleinen Segmente flächengleich dem einen Ausgangssegment sind. Weiter heißt es dann bei Simplikios:
Demnach ist der Mond samt den von dem Sechseck gebildeten Segmenten dem Dreiecke gleich, und wenn man nun zu beiden das Sechseck selbst addirt, so ist das Dreieck samt dem Sechsecke gleichflächig dem gedachten Monde samt dem inneren Kreis (denn das Dreieck war gleich dem Monde samt den vom Sechsecke gebildeten Segmenten des inneren Kreises). Da nun die erwähnten geradlinigen Figuren quadrirt werden können, so gilt dies auch von der Summe des Kreises und Mondes. (Bretschneider 1870, 121)
Es gilt also die Beziehung:

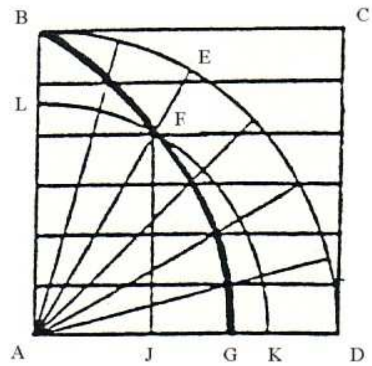
Dreieck + Sechseck = Mond + kleiner Kreis

Könnte man den fraglichen Mond quadrieren, so wäre in der Tat die Quadratur des Kreises geleistet. Hippokrates selbst hat aber klar erkannt, dass er dies nicht geleistet hat. Die entsprechende falsche Ansicht wurde ihm erst später aufgrund ungeschickter Interpretation unterstellt.
Mit Recht lobt Aristoteles den scharfsinnigen Ansatz des Hippokrates: *Z.B. ist es Sache des Mathematikers, sich mit dem Versuch einer Quadratur des Kreises auf Grund der Segmente zu befassen, der Versuch des Antiphon dagegen gehört nicht in die Mathematik.*
(Physikalische Vorlesung, 185a)
Wir werden bald auf die Idee des Antiphon zu sprechen kommen (in 4.4) und dabei sehen, dass Aristoteles diesem doch ziemlich Unrecht getan hat. 1840 veröffentlichte der deutsche Mathematiker Th. M. Clausen (1801 - 1885) einen Aufsatz *Vier neue mondförmige Flächen, deren Inhalt quadrierbar ist*, worin er nachwies, dass das (3,1)-Möndchen, das (3,2)-Möndchen, das (5,1)- und das (5,3)-Möndchen quadrierbar sind. Bei den beiden erstgenannten war er der irrigen Meinung, er habe sie als erster betrachtet. Im übrigen hat sich erst nach dem Zweiten Weltkrieg herausgestellt, dass Hippokrates und Clausen bereits alle quadrierbaren Möndchen behandelt haben (vgl. Stevenhagen/Lenstra 1996, 30f). Ihre Auswahl war erschöpfend.

4.3 Die Quadratrix und andere Kurven

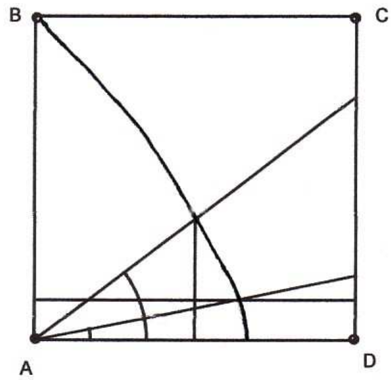
Die Quadratur des Kreises im weiteren Sinne läßt sich auch mit gewissen Kurven leisten, was schon in der Antike erkannt wurde. Die bekannteste unter diesen Kurven ist die Quadratrix, die eben dieser Einsicht ihren Namen verdankt. Ursprünglich wurde sie von einem gewissen Hippias, dessen Identität mit dem gleichnamigen, bei Platon auftretenden Sophisten Hippias von Elis umstritten ist (vgl. Knorr 1993, 80f), eingeführt, um das Problem der Winkeldreiteilung zu lösen, wie wir aus Berichten von Proklos (Proklos, 355) und Pappos (vgl. Bretschneider 1870, 94 - 97) wissen. Die Schwierigkeit bei der Winkeldreiteilung, auf die wir ja noch ausführlich zu sprechen kommen werden, ließe sich leicht beheben, wenn man diese auf die Dreiteilung einer Strecke zurückführen könnte. Letztere ist ja elementar mit Hilfe des Strahlensatzes möglich. Diese Überlegung könnte das Motiv für Hippias gewesen sein, der über den Bewegungsbegriff die geschilderte Rückführung leistete. Pappos beschreibt dessen Vorgehensweise folgendermaßen:

In ein Quadrat ABCD sei aus der einen Ecke A als Centrum mit der Quadratseite AB als Halbmesser ein Kreisquadrant BED beschrieben. Man lasse den Halbmesser AB sich um A mit gleichmässiger Geschwindigkeit so drehen, dass der Punkt B in einer gewissen Zeit den Bogen BD durchläuft. Genau in derselben Zeit rücke die Gerade BC, stets sich selbst parallel, mit gleichmässiger Geschwindigkeit aus der Lage BC in die Lage AD; dann wird der Ort des Durchschnittes dieser Geraden mit dem um A sich drehenden Halbmesser eine Curve BFG liefern, welche die Quadratrix ist. (Bretschneider 1870, 96)



Man beachte, dass man unendlich viele Punkte dieser Kurve mit Zirkel und Lineal konstruieren kann. Das liegt daran, dass man ja Winkel und Strecken halbieren kann: Also kann man den Kurvenpunkt konstruieren, der sich als Schnittpunkt des Schenkels des halben Ausgangswinkels (also des Winkels $\pi/2$) und der um die halbe Höhe nach unten gewanderte Strecke BC ergibt. Diese Vorgehensweise lässt sich wiederholen bezüglich der beiden Hälften des Ausgangswinkels. Und so weiter. Man erhält auf diese Weise eine dichte Teilmenge von Punkten der Quadratrix. Als ganze Kurve ist diese allerdings nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

Will man einen Winkel zwischen 0 und $\pi/2$ dritteln, so trage man diesen gegen die horizontale Achse AB an. Vom Schnittpunkt des freien Schenkels mit der Quadratrix fälle man das Lot auf die Horizontale. Diese Strecke drittele man anschließend. Die Verbindung des untersten Teilungspunktes mit der Ecke A des Quadrates liefert dann den gesuchten Winkel. Begründung: Die Bögen auf dem Viertelkreis BED verhalten sich wie die Ordinaten unter der Quadratrix. Es ist klar, dass die Quadratrix noch mehr leistet, denn sie erlaubt, wie unschwer einzusehen, sogar die n-Teilung des vorgegebenen Winkels vermöge der n-Teilung einer Strecke.



Überraschend ist es hingegen, dass diese Kurve etwas mit der Quadratur des Kreises zu tun hat. Dies erkannte dem Bericht des Pappos zufolge erst Deinostratos, der Bruder des Menaichmos, des Erfinders der Kegelschnitte. Andere mathematische Leistungen des Deinostratos sind übrigens nicht bekannt, was diese Zuschreibung etwas zweifelhaft erscheinen lässt (siehe auch unten).

Deinostratos erkannte, dass sich - modern gesprochen - in der Strecke AG die Konstante π verbirgt. Pappos hat uns in seiner *Collectio* (Buch VI, Prop. 26) den entsprechenden Beweis in der für die Antike so typischen Form einer doppelten **Reductio ad absurdum** überliefert (vgl. Bretschneider 1870, 153f):

Ist A das Centrum des Kreisquadranten BED und BFG die zu letzterem construirte Quadratrix, so ist die dem Quadranten BED gleiche Gerade die dritte Proportionale zu AG und AD.

Die letzte Aussage besagt, dass folgende Gleichheit gilt:

$$\frac{|BED|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|AG|}$$

Dabei sind |AD| und |AG| gewöhnliche Streckenlängen, während |BED| die Länge eines Viertelkreisbogens bezeichnet; in letzterer steckt natürlich das ominöse π drin. Um die fragliche Gleichheit zu beweisen, nimmt man nun an, sie gelte nicht. Dann gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder die linke Seite ist größer als die rechte, oder die linke Seite ist kleiner als die rechte. Beide Möglichkeiten sind zum Widerspruch zu führen, woraus dann die Geltung der Annahme gefolgert wird. Modern gesprochen wird also vorausgesetzt, dass beide Seiten der Gleichung überhaupt existieren - eine Frage, der man sich im Rahmen der Analysis erst im 19. Jahrhundert zuwandte.

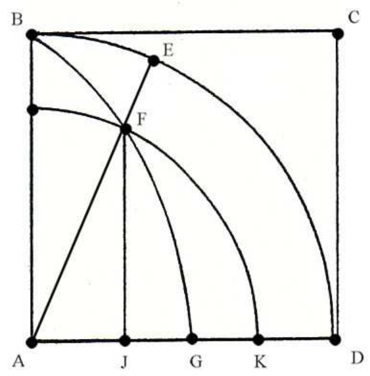
1. Fall: Angenommen also es wäre

$$(*) \qquad \frac{|BED|}{|AD|} < \frac{|AD|}{|AG|}$$

Dann verkleinere man die rechte Seite durch Abänderung des Nenners so, dass Gleichheit entsteht, das heißt, wir suchen einen Punkt K in der Strecke AD zwischen G und D, so dass gilt:

$$(**) \qquad \frac{|BED|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|AK|}$$

(Dass man so einen Punkt K überhaupt finden kann, wird nicht weiter begründet. Die Idee war vermutlich diese: Auf der linken Seite unserer Gleichung steht eine Größe, welche kleiner als 1 ist [das wird unterstellt]. Nimmt man aber rechts K gleich D, so ergibt sich der mit Sicherheit zu große Wert 1 für das Verhältnis. Letztlich spielt hier also die Stetigkeit oder Vollständigkeit hinein)



Nun konstruiere man über AK den entsprechenden Viertelkreisbogen KFL mit Mittelpunkt A, wobei F der Schnittpunkt dieses Viertelkreises mit der Quadratrix sein soll. Dann gilt nach einer bekannten Eigenschaft von Kreisen:

$$\frac{|BED|}{|KFL|} = \frac{|AD|}{|AK|}.$$

Also wäre wegen (**) |KFL| = |AD|. Weiter bezeichne J den Lotfußpunkt des Lotes von F auf AD. Dann gilt der Grundeigenschaft der Quadratrix zufolge (verbleibende Bögen wie Ordinaten):

$$\frac{|BED|}{|ED|} = \frac{|BA|}{|FJ|}$$

und weiter

$$\frac{|BED|}{|ED|} = \frac{|KFL|}{|FK|}$$

Wegen (**) ist die rechte Seite aber gleich

$$\frac{|AD|}{|FK|} = \frac{|AB|}{|FK|}.$$

Insgesamt ist somit

$$\frac{|BED|}{|ED|} = \frac{|AB|}{|FK|}$$

und damit |FJ| = |FK|, was unmöglich ist. Für die letztere, anschaulich unmittelbar einleuchtende Behauptung wird übrigens keine Begründung gegeben; überlegen Sie sich eine. Analog führt man die Annahme, in (*) gelte die Beziehung >, zum Widerspruch, indem man wieder einen Punkt N auf AD einführt, der aus ihr eine Gleichheit macht. Das Argument ist bei Bretschneider 1870, 154 ausgeführt.
Insgesamt erhält man so die Behauptung.
Bevor wir auf die Konstruktion des flächengleichen Quadrates zu sprechen kommen, empfiehlt es sich, kurz auf unsere moderne Sichtweise einzugehen. Gemäß dieser ist es zweckmäßig, die Quadratrix als Parameterkurve aufzufassen, wobei wir als Parameter den Winkel φ (gemessen gegen die horizontale Achse AD, die wir als x-Achse bezeichnen würden) und den senkrechten Abstand des Kurvenpunktes zu dieser Achse, den wir mit y bezeichnen, wählen. Schließlich setzen wir noch der Einfachheit halber |AD| = |AB| = 1. Dann gilt nach Definition der Quadratrix (wir nehmen den Komplementwinkel zum ursprünglich betrachteten Winkel):

$$\frac{|AB|}{|FJ|} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\varphi} \quad \text{oder auch} \quad \frac{1}{y} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\varphi}$$

also $y = \frac{2\varphi}{\pi}$. Weiter ist die zum Kurvenpunkt gehörige Abszisse x = $\frac{y}{\tan\varphi} = \frac{2\varphi}{\pi\tan\varphi}$. Der gesuchte Wert, die Streckenlänge |AG| nämlich, ist der Grenzwert des letzten Ausdrucks für $\varphi \to 0$, also |AG| = $\frac{2}{\pi}$ (da bekanntlich $\frac{\varphi}{\tan\varphi}$ für $\varphi \to 0$ gegen 1 geht). Damit ist dieses Geheimnis gelüftet. Im allgemeinen Fall muss man natürlich den gefundenen Wert noch mit dem Radius des Ausgangskreises multiplizieren, da wir uns ja auf den Einheitskreis beschränkt haben. Die Tatsache, dass der Punkt G nur im Sinne eines Grenzüberganges gegeben ist, wurde übrigens schon im Altertum bemerkt und kritisiert, so etwa nach einem Bericht des Pappos von Sporos (Mitte des 2. Jh. n. Chr.). Eine ausführliche Diskussion dieser Problematik findet man bei Heath I, 226 - 230.

Ist ein Kreis des Radius r gegeben, so läuft das Konstruktionsproblem eines flächengleichen Quadrates darauf hinaus, dessen Kantenlänge $r\sqrt{\pi}$ zu konstruieren. Gemäß der Quadratrix verfügen wir aber über die Strecke |AG| der Länge $\frac{2}{\pi}$ (wir bleiben hier beim Einheitskreis). Dann kann man durch den Höhensatz eine Strecke der Länge π bekommen, indem man den einen Hypotenusenabschnitt $\frac{2}{\pi}$ lang macht und die Höhe 1; der andere Hypotenusenabschnitt hat dann nach Verdopplung die gewünschte Länge π. Damit ist im wesentlichen die Rektifikation des Kreises geleistet, denn man kann ja jetzt sofort eine Strecke, die dem Kreisumfang gleich ist, „konstruieren". Archimedes hat nun in seiner *Kreismessung*, auf die wir später noch zu sprechen kommen werden, bewiesen, dass Rektifikation und Quadratur des Kreises (in der Euklidischen Geometrie) äquivalente Probleme sind. Das zeigt sein Satz: Ein Kreis ist flächengleich dem rechtwinkligen Dreieck, dessen eine Kathete gleich dem Umfang und dessen andere Kathete gleich dem Kreisradius ist. Setzt man dieses Ergebnis als bekannt voraus, so leistet also die Quadratrix die Quadratur. Nun lebte Archimedes aber später als Deinostratos, weshalb man ein Problem hat. Entweder ist die Zuschreibung der Quadratur an Deinostratos ungenau (was beispielsweise Knorr annimmt: vgl. Knorr 1993, 83f) oder man

muss einen anderen Weg finden, um die Quadratur mittels der Quadratrix zu leisten. Schließlich könnte man auch annehmen, dass das Ergebnis von Archimedes schon vor seiner Zeit bekannt gewesen sei; hierfür gibt es aber keinerlei Anhaltspunkte. An dieser Stelle möchte ich diese Frage nur in den Raum stellen; beantworten kann ich sie nicht, allerdings überzeugt mich die Argumentation von Knorr durchaus; dieser geht im übrigen davon aus, dass Nikomedes, ein Schüler des Archimedes, der Entdecker der Quadratur des Kreises vermöge der Quadratrix gewesen sein könnte.
Interessant ist vielleicht noch die Gretchenfrage: Wie ist man (wer auch immer) auf die für die Quadratur entscheidende Beziehung

$$\frac{|BED|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|AG|}$$

gekommen. Hierzu gibt es einen Vorschlag von Bretschneider (vgl. Bretschneider 1870, 154): Nach der Grundeigenschaft der Quadratrix (verbleibende Bögen wie Ordinaten) gilt ja:

$$\frac{|BED|}{|ED|} = \frac{|AB|}{|FJ|}$$

oder

$$\frac{|BED|}{|AB|} = \frac{|ED|}{|FJ|}$$

Lässt man nun den Punkt E gegen den Punkt D gehen, so streben die Punkte F und J beide gegen G und die Bögen nähern sich den entsprechenden Strecken. Im Grenzfall erhält man zwei ähnliche Dreiecke, nämlich AGF und AED. Aus diesen ergeben sich die Verhältnisse

$$\frac{|AD|}{|ED|} = \frac{|AG|}{|FG|} = \frac{|AG|}{|FJ|}$$

oder

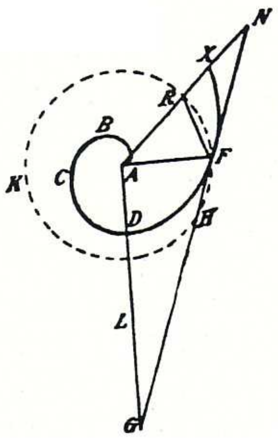
$$\frac{|AD|}{|AG|} = \frac{|ED|}{|FJ|}$$

Damit hat man wegen |AD| = |AB| das Gewünschte. Sollte dieser Vorschlag zutreffend sein, so hätte der Entdecker der Quadratrixeigenschaft bereits ein erstaunliches Maß an intuitiver Einsicht in Grenzprozesse gehabt. Interessant ist dann weiter, wie stark sich die Methode des Findens, die Heuristik also, von jener des Beweisens schon damals unterschied.[1]

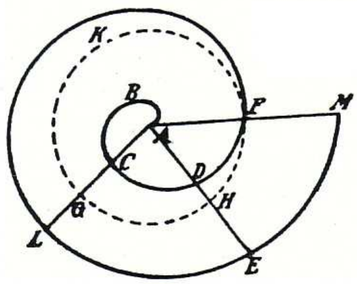
Zum Abschluss dieses Abschnittes möchte ich nur noch darauf hinweisen, dass es manche Ähnlichkeit zwischen der Quadratrix und der von Archimedes eingeführten Spirale gibt (Def. *Wenn sich ein Halbstrahl in einer Ebene um seinem Endpunkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit dreht, nach einer beliebigen Zahl von Dreheungen wieder in die Anfangslage zurückkehrt und sich auf dem Halbstrahl ein Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit, vom Endpunkt des Strahles beginnend, bewegt, so beschreibt dieser Punkt eine "Spirale".* [Archimedes, 26]), so dass man sich vorstellen kann, dass auch letztere mit dem Quadraturproblem in Zusammenhang gestanden haben könnte. Diese Frage wird ausführlich von Knorr diskutiert (Knorr 1993, 163). Dass dem so war, zeigen folgende Ergebnisse:

[1] Weitere Informationen zur Quadratrix aus moderner (Schul-)sicht finden sich bei Schupp/Dabrock 1995, 378-382.

§ 18. Wenn eine gerade Linie die Spirale erster Umdrehung im Schnittpunkt mit der Leitlinie [das ist der sich drehende Strahl] *berührt und im Mittelpunkt der Spirale* [das ist das Drehzentrum] *ein Lot auf der Leitlinie errichtet wird, so wird dieses Lot die Tangente schneiden, und die Strecke, die auf ihm durch die Tangente und den Mittelpunkt der Spirale begrenzt wird, wird der Peripherie des ersten Kreises gleich sein.*



Der erste Kreis ist derjenige Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem der Spirale zusammenfällt, und dessen Radius gleich der Strecke ist, die zwischen Spiralenmittelpunkt und laufendem Punkt nach genau einer Umdrehung liegt. Mit Satz 18 ist also wie bei der Quadratrix eine Rektifikation des Kreises geleistet.
§ 24. Die Fläche, die gebildet wird, von der Spirale erster Umdrehung und der ersten Strecke auf der Leitlinie ist gleich dem dritten Teile des Inhaltes des ersten Kreises.



Wie also könnte man einen Kreis quadrieren? Hierzu muss man zunächst den fraglichen Kreis selbst konstruieren, was nach Euklids drittem Postulat die Konstruktion des Radius' erfordert. Dann müsste man sich die Spirale verschaffen, zu der der gegebene Kreis erster Kreis (in Archimedes' Ausdrucksweise) ist. Diesen rektifiziere man nach § 18 und konstruiere anschließend das entsprechende Quadrat. Das Problem liegt somit in der Konstruktion der Spirale, die sich allerdings auch - wie die Quadratrix - einer Konstruktion durch Zirkel und Lineal entzieht. Geht man davon aus, dass man eine Spirale hat, so könnte man immerhin noch einen Kreis - nämlich den zugehörigen ersten - quadrieren. Auch das wäre eine Quadratur des Kreises.
Kurven wie die Quadratrix und die Archimedische Spirale wurden im übrigen schon in der Antike als mechanische Kurven bezeichnet - eine Anspielung auf ihre Erzeugungsweise.

4.4 Die Behandlung der Kreisfläche bei Euklid und Archimedes

In diesem Abschnitt werden wir eine Behandlung des Kreisflächenproblems kennen lernen, die mit gewissen charakteristischen Abänderungen bis heute üblich geblieben ist. Seit Gregorius a San Vincentios *Opus geometricum* (1647) hat sich hierfür die Bezeichnung **Exhaustion** (von lateinisch exhaurire = ausschöpfen) eingebürgert, welche vor allem im Rahmen der Analysis üblich ist. Diese Bezeichnung ist allerdings wie wir sehen werden, was die Antike anbelangt, irreführend. Die Grundidee des fraglichen Verfahrens ist es, den Kreis mit Hilfe von ein- und umbeschriebenen Vielecken zu erfassen - modern gesprochen; anzunähern. Erstmals greifbar wird diese Idee bei einem Zeitgenossen von Sokrates namens Antiphon, von dem schon einmal oben kurz die Rede war. Im Zusammenhang mit Hippokrates' Möndchenquadratur berichtet Simplikios über Antiphon das folgende:
Antiphon beschrieb einen Kreis und verzeichnete in denselben ein Vieleck aus der Zahl derer, die man überhaupt einbeschreiben kann. Es sei dies z.B. das einbeschriebene Viereck: Indem er hierauf jede Vierecksseite halbierte, zog er durch den Schnittpunkt senkrecht auf dieselbe Gerade nach dem Kreisumfange, welche offenbar jeden der zugehörigen Kreisabschnitte halbierten. Sodann zog er von den (neuen) Schnittpunkten nach den Endpunkten der Vierecksseiten Gerade, so dass durch dieselbe vier Dreiecke entstanden und die ganze einbeschriebene Figur ein Achteck ward. Auf dieselbe Weise halbierte er wiederum jede Seite des Achtecks, errichtete in den Halbirungspunkten derselben Senkrechte bis an den Kreisumfang, verband die durch sie auf den Kreisbögen erhaltenen Schnittpunkte durch Gerade mit den Endpunkten der Seiten und erhielt somit das einbeschriebene Sechszehneck. Indem er nun auf die nämliche Art die Seiten des einbeschriebenen Sechszehnecks teilte, und durch das Ziehen von Geraden das einbeschriebene Vieleck verdoppelte, und dies immerfort wiederholte, bis dadurch die Kreisfläche völlig erschöpft wurde, - so behauptete er, dass auf solche Art dem Kreise ein Vieleck werde einbeschrieben werden, dessen Seiten ihrer Kleinheit halber mit dem Kreisumfang zusammenfallen würden. Nun können wir aber zu jedem Vielecke ein gleichflächiges Quadrat konstruieren, wie wir in den Elementen gelernt haben; folglich werden wir, da dem Kreise ein gleichflächiges Vieleck substituiert ist, durch dessen Gleichsetzung mit dem ihm gleichen Quadrate, ein dem Kreise gleichförmiges Quadrat konstruieren. (Bretschneider 1870, 101)
Die letzten Zeilen dürften von Simplikios stammen, da ja hier auf die Quadratur der Vielecke (vgl. oben 4.1) des Euklid Bezug genommen wird. Vielleicht wollte Simplikios der Überlegung des Antiphon auf diese Weise etwas mehr Plausibilität verleihen. Dennoch fällt seine Kritik an Antiphon deutlich aus, dem er vorwirft, dass sein Vorgehen niemals die Kreisfläche wirklich erschöpfen noch den Kreisumfang jemals erreichen könne. Mit modernen Augen gesehen ist hiermit die Grenzwertproblematik angesprochen, und Antiphon kann als Wegbereiter der (natürlich unpräzisen) Formulierung, wie man sie etwa bei Nikolaus von Kues im ausgehenden Mittelalter findet, der Kreis sei ein Vieleck mit unendlich vielen Ecken, angesehen werden.
Interessant ist die Wendung ganz zu Anfang, wo Simplikios von den Vielecken spricht, die man überhaupt dem Kreis einbeschreiben könne. Das könnte man so verstehen, als ob er hier auf die Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal abhebe, die ja auch für seine weiteren Schritte (Halbierung etc.) gegeben ist. Das wäre dann ein Hinweis darauf, dass Zirkel und Lineal schon früh eine gewisse Rolle gespielt hätten. Leider wird aber im weiteren, insbesondere bei der kritischen Stelle - dem (modern gesprochen) Grenzübergang - gar nichts mehr über den Aspekt der Konstruierbarkeit gesagt.
Nahe verwandt mit Antiphons Ideen ist ein Ansatz, der auf Bryson (Mitte 5. Jh. v. Chr.) zurückgeführt wird; diesen schildert Johannes Philoponos so:

Der Kreis, sagt er [d.i. Bryson]*, ist größer als jedes ihm einbeschriebene Vieleck, kleiner als jedes umbeschriebene. Es soll nun beschrieben werden, gibt er an, innerhalb des Kreises ein einbeschreibenes und ausserhalb desselben ein umbeschreibenes Vieleck; dann ist ein Vieleck, welches das Mittel ist aus dem ein- und dem umbeschriebenen, kleiner als das umbeschriebene und größer als das einbeschriebene, und die Stücke, um welche dasselbe größer und kleiner ist als jene, sind einander gleich. Also ist der Kreis gleich diesem Mittel zwischen dem ein- und dem umbeschriebenen Vielecke.*

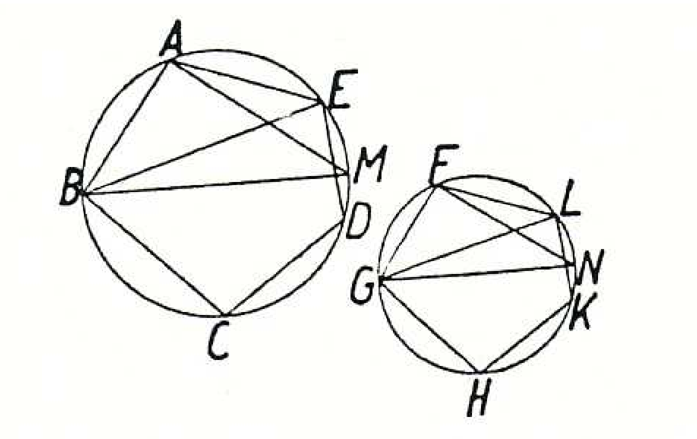
(Bretschneider 1870, 126)

Mit etwas gutem Willen kann man hierin eine Art von Stetigkeitsargument erkennen, das man kurz und prägnant so formulieren kann: Wozu es Kleineres und Größeres gibt, dazu gibt es auch Gleiches. Modern gesprochen hätte man es somit mit dem Zwischenwertsatz zu tun, wobei aber der Bezug zur Konstruktion mit Zirkel und Lineal völlig offen bleibt. Das Verfahren, das sich bei Bryson andeutet, wird recht treffend **Kompression** genannt: Die Kreisfläche wird zwischen ein- und umbeschriebenen Vielecken, deren Flächeninhalte sich immer mehr annähern, eingeschachtelt und ergibt sich folglich als gemeinsamer Grenzwert der beiden Folgen von Flächeninhalten. In dieser beidseitigen Form wird die Kompression erst bei Archimedes angewendet; Euklid arbeitet, wie wir gleich sehen werden, nur mit einer einseitigen, dem Kreis einbeschriebenen Folge von Vielecken. Bemerkenswert aber falsch ist im übrigen die Behauptung Brysons, dass der Überschuss von umbeschriebenem Vieleck zu Kreis gleich sei dem Überschuss von Kreis zu einbeschriebenem Vieleck.

Wir werden bald sehen, dass es signifikante Unterschiede zwischen den antiken Vorgehensweisen und unseren modernen Ansichten gibt, deren wesentlichster vielleicht ist, dass in der Antike kein Grenzübergang vorgenommen wurde. Ein Grund hierfür wird übrigens in den Paradoxien des Zenon gesehen, deren bekannteste der so genannte Achilles ist. Aristoteles schreibt hierzu: *Der zweite Beweis ist der sogenannte Achilleus, daß nämlich auch das langsamste Tier im Laufe nicht eingeholt werden könne vom schnellsten, da der Verfolger immer erst dahin kommen müsse, von wo das fliehende Tier fortgelaufen ist, so daß das langsamere immer einen Vorsprung behalte.* (Aristoteles, 215 = Physikalische Vorlesung 239b) Diese Paradoxien haben deutlich gemacht, so die Interpretation, dass man mit unendlichen Prozessen vorsichtig sein muss. Wirklich konkrete Anhaltspunkte gibt es aber, soweit ich weiß, nicht für diese Interpretation, plausibel klingt sie dennoch.

Kommen wir nun zu Euklid. Die Kreisfläche wird von diesem im XII. Buch behandelt, gewissermaßen als Auftakt zu seinen Betrachtungen über Volumina (etwa der Pyramide), bei der er eine ähnliche Vorgehensweise wie bei der Kreisfläche wählt. Die fragliche Behandlung beruht auf zwei wichtigen Hilfssätzen, deren erster sich mit dem Verhältnis der Flächeninhalte von ähnlichen Vielecken beschäftigt. Dabei ist der Begriff der Ähnlichkeit wie folgt festgelegt (Def. 1 aus Buch VI): *Ähnlich sind geradlinige Figuren, in denen die Winkel einzeln gleich sind und die gleiche Winkel umfassenden Seiten in Proportion stehen.* Man bemerkt, dass Ähnlichkeit bei Vielecken mit mehr als vier Kanten mehr ist als die bloße Winkelgleichheit, die Euklid bei Dreiecken verwendet.

(Hilfssatz 1) *XII, 1: Ähnliche Vielecke in Kreisen verhalten sich zueinander wie die Quadrate über den Durchmessern.*



Der Beweis dieses Satzes beruht auf der Konstruktion geeigneter Dreiecke in den fraglichen Vielecken. Sind die ähnlichen Vielecke ABCDE und FGHKL nebst ihren Umkreisen gegeben[2] (Variable standen Euklid noch nicht zur Verfügung, weshalb er stets eine konkrete Anzahl von Ecken vorgeben musste), so verbinden wir zuerst die Punkte B und E bzw. G und K miteinander. Die entstehenden Dreiecke ABE und FGK sind ähnlich, da sie in einem Winkel sowie im Verhältnis der beiden den Winkel einschließenden Schenkellängen übereinstimmen (VI, 6 - heute ist das ein so genannter Ähnlichkeitssatz, nämlich der erste als SW symbolisierte). Folglich sind die Winkel $\angle$ AEB und $\angle$ FKG von gleicher Breite.
Nun verbinde man B mit seinem Diametralpunkt M und G mit seinem Diametralpunkt N. Dann sind BM und GN Durchmesser und die fraglichen Dreiecke ABM bzw. FGN sind gemäß des Satzes über den Thales-Kreis (III, 31) rechtwinklig. Nach dem Periperiewinkelsatz gilt aber weiter $|\angle AEB| = |\angle AMB|$ und $|\angle FLG| = |\angle FNG|$. Da die Winkel zur Linken als gleich erkannt wurden, sind dies auch die Winkel auf der Rechten. Also stimmen die beiden Dreiecke ABM und FGN in drei Winkeln überein. Deshalb gilt nach Satz VI, 4 (*In winkelgleichen Dreiecken stehen die Seiten um gleiche Winkel in Proportion, und zwar entsprechen einander die, die gleichen Winkeln gegenüberliegen*): $|BM|:|GN| = |BA|:|GF|$ oder quadriert $|BM|^2:|GN|^2 = |BA|^2:|GF|^2$. Das Verhältnis auf der rechten Seite dieser Gleichung drückt aber gerade dasjenige der Vielecksflächen aus, was Euklid in Satz VI, 20 beweisen hat:
Ähnliche Vielecke lassen sich in ähnliche Dreiecke zerlegen, und zwar in gleichviele und den Ganzen (proportional) entsprechende; und die Vielecke stehen zueinander zweimal im Verhältnis wie entsprechende Seiten zueinander.
[Zweimal meint "quadriert".] Der Beweis von VI, 20 ist recht lang (fast zwei Seiten) und soll hier übergangen werden.
Von grundlegender Bedeutung ist der zweite Hilfssatz, den Euklid verwendet. Es handelt sich dabei um den Satz X, 1, der auch bei der Behandlung der Volumina zum Zuge kommt und letztlich die Grundlage für die Exhaustionsmethode schlechthin liefert:
(Hilfssatz 2) *X, 1: Nimmt man bei Vorliegen zweier ungleicher (gleichartiger) Größen von der größeren ein Stück größer als die Hälfte weg und vom Rest ein Stück größer als die Hälfte und wiederholt dies immer, dann muß einmal eine Größe übrig bleiben, die kleiner als die kleinere Ausgangsgröße ist.*
Der Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Gleichartigkeit von Größen (V, Def. 4): Zwei Größen sind gleichartig (oder, wie Euklid sagt, *haben ein Verhältnis zueinander*), wenn *sie vervielfältigt einander übertreffen können.* Sind die

[2] Da nicht jedes Vieleck einen Umkreis besitzt, liegt es nahe anzunehmen, dass Euklid hier regelmäßige Vielecke meint.

gleichartigen Größen a und b gegeben mit a > b, so muss es ein n geben mit nb > a. Dann nehme man von a mehr als die Hälfte weg, vom Rest r noch einmal mehr als die Hälfte und so weiter, insgesamt n-mal. Dies vergleiche man mit dem Vorgang, bei dem von nb insgesamt n-mal b weggenommen wird: offensichtlich gilt im ersten Schritt r < nb-b = (n-1)b; und so weiter (bei a wird mehr als die Hälfte weggenommen, bei nb nur der n-te Teil). Diejenige Größe, die entsteht, wenn man mit Euklid von a immer mehr als die Hälfte wegnimmt, ist klarerweise kleiner als $\frac{a}{2^n}$. Ganz einfach sieht man die Behauptung übrigens rechnerisch ein: Ist nb > a, so ist wegen $2^n > n$ für n > 1 erst recht $2^n b > a$. Division durch 2^n liefert dann: $b > \frac{a}{2^n}$.

Der Inhalt von X, 1 hängt eng mit dem heute so genannten **Axiom von Archimedes - Eudoxos** zusammen, das unter anderem eine wichtige Rolle bei der Grundlegung der Analysis [Nichtexistenz von unendlichkleinen Größen] und der Geometrie (bei Hilbert ein Stetigkeitsaxiom) spielt. Es muss aber gesehen werden, dass es sich bei Euklid um eine Folgerung aus seiner Definition der Gleichartigkeit von Größen und nicht um ein Axiom handelt. Bei Archimedes lautet eine Formulierung der fraglichen Aussage: *Es ist möglich, ein Vielfaches der Differenz zweier gegebener Größen zu finden, das größer ist als eine beliebige gegebene Fläche.* (Archimedes, 153)

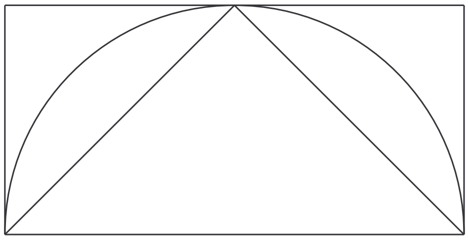
Beachtung fand das fragliche Axiom erst wieder in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts, als man erkannte, dass es eine wichtige Rolle in der axiomatischen Grundlegung der euklidischen Geometrie spielt; hier sind M. Pasch mit seinen *Vorlesungen über neuere Geometrie* (1882), die erstmals explizit dieses Axiom enthalten (vgl. Pasch 1926, 97 Kernsatz IV. [Kernsatz war Paschs Ausdruck für Axiom]) und O. Stolz mit seinem Aufsatz (Stolz 1883) zu nennen. G. Veronese untersuchte 1891 in seinen *Fondamenti* ... ausführlich nicht-archimedische Geometrien. Auch in Hilberts Axiomatik (1899/1900) findet sich das Axiom als eines der beiden Stetigkeitsaxiome; er war es wohl auch, der die entsprechende Bezeichnung einbürgerte (Hilbert 1972, 30):

V,1: (Axiom des Messens oder Archimedisches Axiom) Sind AB und CD irgendwelche Strecken, so gibt es eine Anzahl n derart, daß das n-malige Hintereinander-Abtragen der Strecke CD von A aus auf den durch B gehenden Halbstrahl über den Punkt B hinausführt.

Doch nun zurück zu Euklid. Wie wir in 4.1 schon gesehen haben, entwickelt Euklid eine Theorie des Flächenvergleichs, nicht der Flächenmessung. Dieser Grundhaltung bleibt er auch bei der Behandlung der Kreisfläche treu, wie sein Satz XII, 2 zeigt:

Kreise verhalten sich zueinander wie die Quadrate über den Durchmessern.

Der **Beweis**, der ansonsten in für die Antike typischer Weise in einer doppelten Reductio ad absurdum besteht, beruht auf folgender Konstruktion. Ist ein Kreis K gegeben, so beschreiben wir diesem ein Quadrat ein (nach IV, 6 - vgl. oben 3.1). Die Bögen über den Quadratkanten werden halbiert und das entsprechende einbeschriebene Achteck konstruiert (nach III, 30 - vgl. oben 3.1). Wichtig dabei ist, dass hierbei von dem ursprünglichen Überschuss des Kreises über das Quadrat mehr als die Hälfte weggenommen wird, das heißt genauer, dass der Überschuss des Kreises über das Achteck kleiner ist als die Hälfte des Überschusses des Kreises über das Quadrat. Das entnimmt Euklid der folgenden Figur (die er allerdings nur verbal beschreibt):



Der geschilderte Vorgang lässt sich im nächsten Schritt auf das Achteck anwenden; er führt dann zum einbeschriebenen Sechszehneck. Auch hier ist es wieder so, dass der Überschuss Kreis/Sechszehneck kleiner ist als die Hälfte des Überschusses Kreis/Achteck; also ist er kleiner als ein Viertel des Überschusses Kreis/Quadrat. Und so weiter. Gemäß Hilfssatz 2 (= X, 1) kann man somit schließen, dass man den Überschuss Kreis/regelmäßiges 2^n-eck kleiner machen kann als jede beliebig vorgegebene Schranke (wir würden heute sagen: Er geht gegen Null.) Die regelmäßigen 2^n-ecke schöpfen also in einem gewissen Sinne den Kreis immer besser aus. Also muss man herausfinden, was der Grenzwert der 2^n-ecksflächen ist, um die Kreisfläche zu bekommen. Das ist das heute im Gymnasium übliche Verfahren, wobei einem die Trigonometrie das Leben erheblich erleichtert. Wir werden aber gleich sehen, dass Euklid eine andere Vorgehensweise wählt. Das mag mehrere Gründe, unter anderem grundlagentheoretische, gehabt haben. Ein Motiv liegt jedenfalls auf der Hand: Die eben geschilderte Exhaustion charakterisiert Flächeninhalte über Zahlen und bestimmt den Grenzwert einer Folge positiver reeller Zahlen, benutzt also massiv den Flächenmaßaspekt. Der aber taucht bei Euklid gar nicht auf! Schon deshalb muss er anders vorgehen.

Seien K und K' die gegebenen Kreise, d und d' die zugehörigen Durchmesser. Weiter bezeichnen wir mit I(K) den Flächeninhalt von K und mit I(K') denjenigen von K'; die Inhalte der Quadrate über den Kanten d bzw. d' bezeichnen wir mit $I(Q_d)$ bzw. $I(Q_{d'})$. Dann lautet Euklids Behauptung:

$$\frac{I(K)}{I(K')} = \frac{I(Q_d)}{I(Q_{d'})}$$

Wie bereits bemerkt verläuft der Beweis über Widerspruch. Wir nehmen also an, die obige Ungleichung gelte nicht, das heißt, es wäre

$$\frac{I(K)}{I(K')} \neq \frac{I(Q_d)}{I(Q_{d'})}$$

Dann gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder die linke Seite ist kleiner als die rechte oder umgekehrt (Mit modernen Augen müsste man zusätzlich noch zeigen, dass die linke Seite überhaupt existiert [für die rechte Seite wird dieses Problem bei etwas gutwilliger Interpretation durch Euklids Theorie des Flächeninhaltes erledigt - siehe 4.1 oben]; dieses Existenzproblem spielt bei Euklid noch keine Rolle: Er bewegt sich, wie man sagt, noch ganz auf der Stufe des **natürlichen Flächeninhaltes.**). Nun sind wie immer bei der doppelten Reductio ad absurdum diese beiden Möglichkeiten zum Widerspruch zu führen. Scheiden beide Fälle aus, weil sie auf Widersprüche führen, so muss die Gleichheit gelten, und der gewünschte Beweis ist erbracht.

a) Betrachten wir zuerst die folgende Möglichkeit.

$$\frac{I(K)}{I(K')} < \frac{I(Q_d)}{I(Q_{d'})}$$

Aus dieser Ungleichung macht Euklid eine Gleichung, indem er einen Flächeninhalt S einführt, für den gilt:

$$\frac{I(K)}{S} = \frac{I(Q_d)}{I(Q_{d'})}$$

Offensichtlich muss dann S < I(K') sein, weil ja das Verhältnis vergrößert wurde. Gemäß der oben geschilderten Konstruktion können wir im Kreis K' ein einbeschriebenes regelmäßiges 2^n-eck P' konstruieren, so dass sich dessen Flächeninhalt I(P') von I(K') um weniger unterscheidet als S von I(K'): Folglich muss (*) I(P') > S sein. Nun konstruieren wir mit der Vorgehensweise von oben in K ein einbeschriebenes regelmäßiges 2^n-eck P, das P' ähnlich ist. Es gilt nach Hilfssatz 1 (= XII, 1):

$$\frac{I(P)}{I(P')} = \frac{I(Q_d)}{I(Q_{d'})}$$

Andererseits ist aber aufgrund der Definition von S: $\frac{I(Q_d)}{I(Q_{d'})} = \frac{I(K)}{S}$ und damit $\frac{I(P)}{I(P')} = \frac{I(K)}{S}$. Folglich ist $\frac{S}{I(P')} = \frac{I(K)}{I(P)}$. Auf der rechten Seite ist der Zähler sicher größer als der Nenner, da ja P in K einbeschreiben ist. Folglich muss auch S größer als I(P') sein, was aber der Beobachtung (*) von oben widerspricht. Damit haben wir die eine Hälfte der doppelten Reductio erledigt.

b) Jetzt müssen wir die Möglichkeit

$$\frac{I(K)}{I(K')} > \frac{I(Q_d)}{I(Q_{d'})}$$

in Betracht ziehen. Man könnte hierzu eine analoge Argumentation wie für Fall a) konstruieren, wobei man dann mit umbeschriebenen 2^n-ecken arbeiten müsste. Eine andere einfachere Möglichkeit, die auch Euklid wählt, besteht darin, Fall b) auf Fall a) zurückzuführen. Gemäß der ersten Alternative führt man wieder einen Flächeninhalt S ein mit

$$\frac{I(K)}{S} = \frac{I(Q_d)}{I(Q_{d'})}$$

wobei jetzt aber S > I(K') sein muss. Anstatt I(K') zu vergrößern, kann man aber auch I(K) verkleinern, um Gleichheit zu erzielen: zweite Alternative. Das heißt, es gibt einen Flächeninhalt T < I(K) mit

$$\frac{T}{I(K')} = \frac{I(Q_d)}{I(Q_{d'})}$$

Bildet man nun auf beiden Seiten den Kehrwert und vertauscht die Rollen von K und K' miteinander, so gelangt man genau zu der bereits in a) untersuchten Situation. Diese wurde aber als widersprüchlich nachgewiesen, weshalb auch Teil b) als erledigt betrachtet werde darf. ♦

Bemerkenswert an diesem Beweis ist, dass Euklid kommentarlos die Existenz der vierten Proportionalen S unterstellt. In moderner Formelsprache läuft dies auf das folgende hinaus: Sind die Flächeninhalte (allgemeiner: gleichartige Größen) x, y und z gegeben, so existiert stets ein a mit

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{a}$$

Für dieses a gilt somit $a = \frac{yz}{x}$. Hier wird also eine Art von Abgeschlossenheit (oder Vollständigkeit) des Größenbereichs „Flächeninhalt“ unterstellt.

Bem. Aus Euklids Satz ergibt sich die Folgerung, dass das Verhältnis $\frac{I(K)}{I(Q_d)}$ für alle Kreise konstant ist; modern gesehen ist die Proportionalitätskonstante, die hier auftritt, nichts anderes als ein Viertel der Kreiszahl π. Die Tatsache, dass genau dieselbe Konstante auch beim Verhältnis von Kreisumfang zu Durchmesser auftritt, ist eigentlich erstaunlich und wurde erst von Archimedes nachgewiesen.

Wir kommen nun zu Archimedes (287 - 212), dem nach allgemeiner Ansicht größten Mathematiker und Physiker des Altertums. Dem Problem der Kreisquadratur im weiteren Sinne (also im Sinne einer angenäherten Kreismessung) hat Archimedes eine seiner bekanntesten Schriften, die *Kreismessung* (= Archimedes, 367 - 377), gewidmet. Darin beweist er den Satz:

Jeder Kreis ist einem rechtwinkligen Dreieck inhaltsgleich, insofern der Radius gleich der einen der den rechten Winkel einschließenden Seite, der Umfang aber gleich der Basis ist.
(Archimedes, 369)

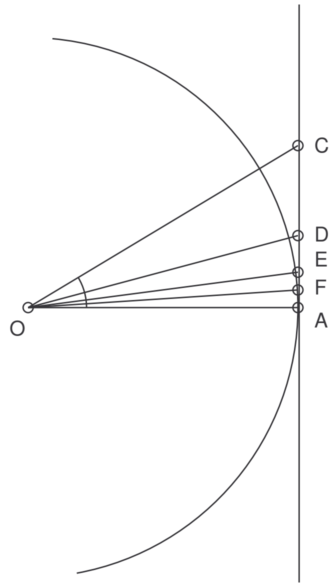
[Basis meint hier die andere Kathete; während der Begriff Hypotenuse schon im Altertum üblich war, kam der Begriff Kathete erst viel später auf; vgl. Tropfke 1940, 83-87]
Damit ist auch die Äquivalenz von Kreisquadratur und -rektifikation bewiesen: Kann man das fragliche Dreieck konstruieren, so lässt sich der entsprechende Kreis sicherlich quadrieren. Das Dreieck ist konstruierbar, wenn man seine beiden Katheten konstruieren kann. Da die eine Kathete kongruent dem Radius des Kreises sein muß (der natürlich konstruierbar sein sollte, da man sonst ja nicht den Kreis konstruieren kann), reduziert sich das ganze Problem auf die Konstruktion der anderen Kathete, also auf eine Strecke, die dem Kreisumfang gleichlang sein muss.
Archimedes beweist seinen Satz ganz im Stile von Euklid, indem er die beiden Annahmen, I(K) sei größer als I(Δ) und I(K) sei kleiner als I(Δ), zum Widerspruch führt. Angenommen, es wäre I(K) > I(Δ). Dann konstruiere man wie gehabt in K ein regelmäßiges Polygon P mit I(K) - I(P) < I(K) - I(Δ). Also ist I(P) > I(Δ).
Ist man bereit, etwas von Archimedes' Argumentation abzuweichen, so lässt sich diese Annahme recht schnell zum Widerspruch führen. Was man dazu braucht, ist lediglich die Formel für den Inhalt von P: I(P) = $n\frac{hp}{2n} = \frac{1}{2}hp$, wobei n die Eckenzahl und p der Umfang des Polygons P ist sowie h die Höhe des Dreiecks, welches P erzeugt. Da h kleiner als der Kreisradius r ist und p kleiner als der Kreisumfang U, kann das Produkt $\frac{1}{2}hp$ sicher nicht größer sein als $\frac{1}{2}Ur$. Analog führt man die Annahme, I(K) sei kleiner als I(Δ), zum Widerspruch.
Die Vorgehensweise von Archimedes, der wie auch Euklid vor ihm schon, keine Formeln zur Berechnung des Flächeninhaltes verwendet, kann man bei Archimedes, 369f nachlesen.
Dies bietet also nicht viel neues. Von größter Tragweite hingegen war Archimedes' anschließende Bestimmung von Schranken für das Verhältnis $\frac{I(K)}{d^2}$ (oder, wie er sagt: *von Kreis zum Quadrat seines Durchmessers*). Damit vollzog er eine entscheidende Wendung zum Quantitativen. Sieht man einmal von technischen Verbesserungen ab, die insbesondere mit der Verwendung der Trigonometrie und anderen Fortschritten in der Numerik zusammenhingen, so kann man sagen, dass erst Nikolaus von Kues (1401 - 1464) und dann hauptsächlich Christian Huyghens (1629 - 1695) substantielle Fortschritte über das Archimedische Verfahren hinaus erzielt haben.

Archimedes schreibt: *Der Umfang des Kreises ist demnach dreimal so groß als der Durchmesser und noch etwas größer, nämlich um weniger als* $\frac{1}{7}$, *aber um mehr als* $\frac{10}{71}$ *desselben.* (Archimedes, 377)

Bevor wir uns der recht aufwendigen Beweisführung zuwenden, sei noch angemerkt, dass man mit guten Gründen vermutet, dass Archimedes noch wesentlich bessere Näherungswerte kannte; vgl. hierzu Knorr, W. *Archimedes and the Measurement of the Circle* (Archive for History of Exact Sciences 15 (1976), 15 - 160).

Sei also ein Kreis K gegeben, dem ein regelmäßiges Sechseck einbeschrieben ist. Da das erzeugende Dreieck eines regelmäßigen Sechsecks stets gleichseitig ist, ergibt sich nach Pythagoras für das Verhältnis Seitenlänge zu Länge der Höhe immer $\sqrt{3}$: 1. Für die soeben erhaltene Wurzel verwendet Archimedes ohne Begründung die Abschätzung $\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{152}$. Da es sich hierbei um eine Quadratwurzel handelt, liegt die Vermutung nahe, dass er seine Approximation durch Überlegungen wie $a + \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 + b} > a + \frac{b}{2a+1}$ oder $a - \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 - b} > a - \frac{b}{2a-1}$ gewonnen hat, deren erster Teil sich übrigens später explizit bei Heron findet. Eine erste, allerdings schlechte Näherung für die gesuchte Wurzel erhält man, wenn man in der ersten Abschätzung a=2 und b=1 einsetzt. Verbessern kann man die Abschätzung, indem man zu $3\sqrt{3}$ (dann ist a=5 und b=2) oder sogar zu $15\sqrt{3}$ (dann ist a=26 und b=1 allerdings in der zweiten Abschätzung) übergeht. Letzteres führt exakt auf die von Archimedes verwendeten Werte. Allerdings muss gesagt werden, dass es zu der Frage, wie Archimedes zu seinen Näherungen kam, viele, teils kontroverse Ansichten gibt; ich habe hier nur eine mir plausibel erscheinende Antwort geschildert.

Archimedes beginnt seine Betrachtungen mit dem umbeschriebenen Sechseck. Sei also ein Kreis mit Mittelpunkt O gegeben; dann ziehe man einen Radius OA und trage in O an OA einen Winkel der Breite $\frac{\pi}{6}$ an. Den freien Schenkel dieses Winkels bringe man mit der in A auf OA errichteten Senkrechten zum Schnitt. Heißt der entsprechende Schnittpunkt C, so ist das Dreieck OAC gerade die Hälfte des das umbeschriebene Sechseck erzeugenden Dreiecks. Im nächsten Schritt wird der Winkel AOC halbiert; es ergibt sich ein Schnittpunkt D mit der Senkrechten in A und OAD ist die Hälfte desjenigen Dreiecks, das das Zwölfeck liefert. In analoger Weise werden die Punkte E, F und G konstruiert, wobei man mit dem Dreieck OAG beim 96-eck angelangt ist.



Das Ziel besteht ja darin, das Verhältnis von Kreisumfang zu -radius (oder Durchmesser) zu ermitteln. Als Näherungen hierfür verwenden wir die entsprechenden Verhältnisse in den die Vielecke erzeugenden Dreiecke (also |OA| zu |OC|; |OA| zu |OD| usw.). Es ist natürlich einfach, die gewünschten Verhältnisse mit Hilfe der Trigonometrie zu ermitteln; diese stand aber Archimedes nicht zur Verfügung.

Im Dreieck AOC gilt wie bereits oben bemerkt $|OA| : |AC| = \sqrt{3} : 1 > 265 : 153$ nach der eingangs erwähnten Näherung. Weiter ist $|OC| : |AC| = 2 : 1 = 306 : 153$.

Nun ziehen wir das nächstfolgende Dreieck OAD in Betracht. Nach Euklid VI, 3 (siehe unten die Nachbemerkung) gilt dann, weil OD nach Konstruktion die Winkelhalbierende ist: $|OC| : |OA| = |CD| : |DA|$. Wir addieren beiderseits 1, bringen auf den Hauptnenner und verwenden die Beziehung $|CD| + |DA| = |CA|$::

$$\frac{|OC|+|OA|}{|OA|} = \frac{|CA|}{|DA|}$$

Umstellen liefert

$$\frac{|OC|+|OA|}{|CA|} = \frac{|OA|}{|DA|}$$

oder auch

$$\frac{|OC|}{|CA|} + \frac{|OA|}{|CA|} = \frac{|OA|}{|DA|}$$

Fie beiden Verhältnisse auf der linken Seite sind Abschätzungen bekannt. Setzen wir die ermittelten Werte ein, so erhalten wir:

$$\frac{306}{153} + \frac{265}{153} < \frac{|OA|}{|DA|}$$

oder

$$\frac{571}{153} < \frac{|OA|}{|DA|}$$

Damit haben wir eine Abschätzung für die Kreiszahl bekommen, da ja OA der Radius unseres Kreises ist und DA die halbe Zwölfecksseite; ersetzen wir den Radius durch den Durchmesser und die halbe Seite durch die ganze, so bleibt das Verhältnis erhalten. Um eine Näherung für π zu bekommen, müssen wir den Kehrwert des erhaltenen Verhältnisses mit 12 multiplizieren. Es ergibt sich dann 3,21541...

Im nächsten Schritt ermitteln wir das Verhältnis |OD| : |AD| (dieses entspricht dem Verhältnis |OC| : |AC| von oben). Da das Dreieck AOD rechtwinklig ist, gilt nach Pythagoras $|OD|^2 = |OA|^2 + |AD|^2$. Division durch $|AD|^2$ liefert:

$$\frac{|OD|^2}{|AD|^2} = \frac{|OA|^2 + |AD|^2}{|AD|^2}$$

Die beiden Teilverhältnisse auf der rechten Seite lassen sich abschätzen. Einsetzen liefert dann die Einsicht, dass die linke Seite größer als 349450 : 23409 ist. Hieraus ist noch die Wurzel zu ziehen. Mit Hilfe einer weiteren Näherung findet Archimedes schließlich

$$\frac{|OD|}{|AD|} > \frac{591 + \frac{1}{8}}{153}$$

Gestützt auf dieses Verhältnis kann man jetzt in völlig analoger Weise zum bisherigen das Verhältnis |AE| : |OE| ermitteln. Dann ist man beim 24-eck. Um zum 96-eck zu kommen, muss man die gesamte Prozedur noch zwei weitere Male durchlaufen. Schließlich sind analoge Berechnungen auch noch für die zugehörigen einbeschriebenen Vielecke durchzuführen. Einzelheiten zu dieser rechnerischen Großtat findet man bei Heath II, 50 - 56 und natürlich in der Abhandlung von Archimedes selbst.

Nachbemerkung: Der dritte Satz des sechsten Buches lautet: *Halbiert man im Dreieck einen Winkel und bringt die den Winkel teilende gerade Linie auch mit der Grundlinie zum Schnitt, so müssen die Abschnitte der Grundlinien dasselbe Verhältnis haben wie die übrigen Dreiecksseiten; ...* [es folgt die Umkehrung]. Der Beweis beruht darauf, dass man durch den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit der Gegenseite die Parallele zur entsprechenden Dreiecksseite zieht und dann die Ähnlichkeit von Dreiecken ausnutzt.

Übersichtlicher wird das ganze Verfahren, wenn man direkt die Seite s_{2n} des einbeschriebenen (bzw. S_{2n} des umbeschriebenen) 2n-ecks durch die Seite s_n (da die erzeugenden Dreiecke des ein- und des umbeschriebenen Vielecks ähnlich sind, genügt es, mit s_n zu arbeiten) des in der Konstruktion vorangegangenen einbeschriebenen Vielecks ausdrückt, also modern gesprochen, eine Rekursion einführt. Man findet dann (r ist der Kreisradius):

$$s_{2n} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}}$$

bzw.

$$S_n = \frac{2s_n}{\sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}}$$

Für den Umfang des Kreises mit Durchmesser d erhält man so folgende Abschätzungen (vgl. Weber - Wellstein II, 273):

n = 6	3,00000d	3,46410d
n = 12	3,10583d	3,21539d
n = 24	3,13263d	3,15966d
n = 48	3,13936d	3,14609d
n = 96	3,14103d	3,14271d
n = 192	3,14145d	3,14187d
n = 384	3,14156d	3,14166d
n = 768	3,14158d	3,14161d
n = 1536	3,14159d	3,14160d

Man sieht, wie langsam das Verfahren konvergiert. Erst für n = 1536 erhält man vier gültige Nachkommastellen. Der Grund für diese Langsamkeit liegt darin, dass die beiden verwendeten Grenzen, die sich geometrisch gesehen geradezu aufdrängen, recht weit auseinander liegen. Hier sollte Chr. Huyghens' Verbesserung einsetzen: Dieser änderte nämlich die untere Grenze ab, indem er nicht mehr das einbeschriebene Vieleck verwandte, sondern diesem noch etwas hinzufügte (vgl. unten 4.5)

Das Archimedische Verfahren wurde auch nach ihm vielfach angewendet, so von Adrien Romanus (1561 - 1615), der π auf 15 Stellen genau berechnete, wozu er schon des 2^{24}-ecks bedurfte. Ludolph van Ceulen (1540 - 1610) [Ceulen bedeutet Köln, woher Ludolphs Familie stammte], der die Berechnung der Kreiszahl zu seinem Lebenswerk machte, wurde hierfür mit der Bezeichnung Ludolphsche Zahl von der Geschichte belohnt. Er ermittelte 1596 π auf 20 Stellen genau, wozu er treffend bemerkte: *Die lust heeft, can naerder comen* (Rudio 1892, 36), später dann sogar auf 32 Stellen (mitgeteilt in seinem posthum veröffentlichten Werk *De Arithmetische en Geometrische fondamenten* (1615)). Berichten zufolge soll er sogar 35 Stellen von π gekannt haben, die auch auf seinem Grabstein eingemeißelt wurden (dieser ist aber verschwunden). Zu der Namensgebung Ludolphsche Zahl, die anscheinend nur im Deutschen üblich ist, bemerkt Rudio (1892, 37):

Bei aller Achtung vor dem riesemhaften Fleiße und der ungeheuren Geduld, welche Ludolf durch seine Berechnungen bekundete, muß es uns heute doch befremdlich erscheinen, daß die Zahl π *nach einem Mathematiker benannt worden ist und noch benannt wird, der verhältnismäßig wenig Originalität bei ihrer Ermittlung gezeigt hat und dessen Leistungen uns doch nicht im entferntesten das Intereese einflößen, welches die Kreismessung des Archimedes, des eigentlichen Schöpfers aller der bis zu jenem Zeitpunkt angewandten Methoden, stets behaupten wird.*

Im Jahre 1717 veröffentlichte der Franzose de Lagny (1660 - 1734) die ersten 127 Stellen der Kreiszahl, ein Ergebnis, das übrigens Euler in seiner berühmten *Introduction in analysin infinitorum* (1748) mitteilt (ohne Quellenangabe). 1853 ermittelte dann W. Shanks 707 Stellen von π, wobei sich allerdings 1945 bei Berechnungen mit einem der ersten Computer ergab, daß Shanks Werte ab der 528. Stelle falsch waren (vgl. Wells 1990, 48 - 55).

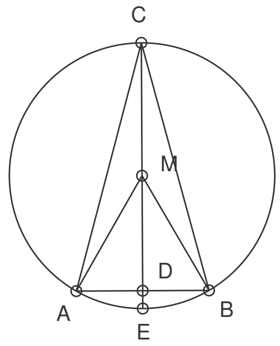
Eine sehr detaillierte Darstellung der Geschichte der Kreiszahl findet man in der *Numéro spécial* π der Zeitschrift *Petit Archimède.*

4.5 Weitere Entwicklungen nach Archimedes

Aus der Fülle des Materials möchte ich zwei aus heutiger Sicht besonders wichtige Entwicklungen herausgreifen: die Ideen des Kardinals Nikolaus von Kues und diejenigen des jungen Christiaan Huygens. Es muss aber, um Missverständnisse zu vermeiden, betont werden, dass dies wirklich nur eine kleine Auswahl ist.

Gemessen am Werk von Archimedes brachte wohl der vor allem als Philosoph und Theologe bekannte Kardinal Nikolaus von Kues (1401 - 1464) als erster eine wirklich neue Vorgehensweise ins Spiel, nämlich die so genannte **Isoperimetrie**. Ich möchte hier nur kurz in moderner Formulierung die Grundidee dieses interessanten Ansatzes vorstellen, der sich übrigens bestens zu einer schulischen Behandlung eignet; als Literatur sei verwiesen auf Simon 1912 (historisch) sowie auf Fricke 1983, Kommerell 1936, 21ff und Sieber 1979 (mathematisch und didaktisch). Beim isoperimetrischen Ansatz geht man von einem festen Umfang U aus (deshalb der Name!), den man als Umfang einer Folge von regelmäßigen n-ecken mit wachsender Eckenzahl realisiert. Gesucht ist dann der Radius, der zu dem Kreisumfang U gehört. Als Näherungswerte für diesen verwendet man den Inkreis- und den Umkreisradius r_n^e bzw. r_n^u der n-ecke mit Umfang U.

Der wesentliche Schritt besteht natürlich darin, das n-eck mit seinem Nachfolger in Beziehung zu setzen. Das geschieht mit Hilfe der nachfolgenden Überlegung. Es sei AMB das charakteristische Dreieck eines regelmäßigen Polygons mit dem geforderten Umfang U. Um den Mittelpunkt M ziehe man den Umkreis des n-ecks durch die Punkte A und B, und fälle von M das Lot auf AB mit Fußpunkt D. Weiter konstruiere die Schnittpunkte C und E der Verlängerungen dieses Lotes mit dem Umkreis, CE ist also Durchmesser des Ausgangspolygons. Wir bezeichnen mit r_n^u den Radius dieses Kreises, mit r_n^e denjenigen des entsprechenden einbeschriebenen Kreises.



Offensichtlich gelten folgende Gleichheiten: $|AM| = r_n^u$ und $|MD| = r_n^e$. Gemäß dem Satz über den Mittelpunktswinkel (Euklid III, 20) ist $|\angle ACB| = \frac{1}{2}|\angle AMB|$. Da nun der letzte Winkel der Mittelpunktswinkel eines n-ecks ist, kann man den ersteren als solchen eines 2n-ecks verwenden. Nimmt man weiter als dessen Kante die Strecke AB - also als Umkreismittelpunkt C - so erhält man ein 2n-eck mit dem Umfang 2U. Das für unsere Konstruktion erforderliche 2n-eck erhält man hieraus, indem man mit C als Zentrum eine zentrische Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ durchführt. Wir haben uns somit überlegt, dass gilt: $|AC| = 2r_{2n}^u$ und $|DC| = 2r_{2n}^e$. andererseits ist aber $|DC| = r_n^u + r_n^e$, also hat man $r_{2n}^e = \frac{1}{2}(r_n^u + r_n^e)$. In Worten: Der Inkreisradius des 2n-ecks ist gleich dem arithmetischen Mittel aus dem Inkreis- und dem Umkreisradius des n-ecks:
Was uns jetzt noch fehlt ist eine analoge Beziehung für den Umkreisradius des 2n-ecks. Hierzu betrachten wir das rechtwinklige Dreieck ACE. Der Kathetensatz liefert für dieses:

$$|AC|^2 = |AE|*|CD|$$

oder

$$(2r_{2n}^u)^2 = (2r_n^u)*(2r_{2n}^e)$$

und damit

$$r_{2n}^u = \sqrt{r_n^u * r_{2n}^e}$$

In Worten: Der Umkreisradius des 2n-ecks ist gleich dem geometrischen Mittel aus dem Umkreisradius des n-ecks und dem Inkreisradius des 2n-ecks. Man bemerkt, dass die Formeln, die man erhält, einfacher sind als jene, die im Archimedischen Verfahren auftreten. Das heißt, dass das Verfahren von Cusanus schon aus dieser Sicht Vorteile bietet. Seine Konvergenz ist zuerst einmal nicht schneller als diejenige beim Verfahren des Archimedes; sie läßt sich allerdings durch einfache Überlegungen leicht verbessern (vgl. Fricke 1983, 148 - 152 und Kommerell 1936, 21ff).
Aus der Fülle des Materials möchte ich hier bezüglich des 16. Jahrhunderts nur einige wenige Punkte noch herausgreifen (auf Ludolph van Ceulen sind wir ja schon eingegangen). Zuerst

einmal ist da der recht gute (auf sieben Stelle genaue) Näherungswert $\frac{355}{113}$ zu nennen, der allgemein Adriaen Anthoniszoon, genannt Metius, zugeschrieben wird. Dieser soll ihn gefunden haben bei dem Versuch, die von dem Mathematiker Simon Duchesme 1584 aufgestellte Behauptung, jeder Kreis sei flächengleich einem Quadrat, dessen Kantenlänge $\frac{39}{44}$ mal Kreisdurchmesser ist, zu widerlegen. Metius' Strategie war es vermutlich, mit Hilfe der Methode des Archimedes einen so genauen Näherungswert für die Kreiszahl zu bestimmen, dass man diesem ansah, dass die Behauptung von Duchesme falsch sein muss. Wie er gerade auf $\frac{355}{113}$ kam, ist nicht ganz klar, da sich dieser Wert nicht bei Verwendung der Archimedischen Methode ergibt. Möglich wäre es, dass er aus den Werten $\frac{22}{7}$ und $\frac{333}{106}$ durch eine Art Mittelbildung nach der von Schülern so gerne angewandten Methode "Zähler plus Zähler durch Nenner plus Nenner" gefunden wurde (oder aus $\frac{377}{120}$ [ein Wert, der auf Ptolemaios zurückgeführt] und $\frac{22}{7}$ durch eine entsprechende subtraktive Mittelbildung). Im übrigen spielte die genannte Mittelbildung (sie funktioniert immer, wenn das Produkt der Nenner positiv ist) viel später in der Analysis, etwa in A. L. Cauchy's berühmten *Cours d'analyse algébrique* (1821) eine recht wichtige Rolle, insbesondere im Zusammenhang mit dem heute so genannten Mittelwertsatz (vgl. Volkert 1992). M. Curtze hat darauf hingewiesen, dass der fragliche Näherungswert schon früher (nämlich 1573) von Valentin Otho (*~1550 in Magdeburg, +~1605 in Heidelberg) mitgeteilt worden war (vgl. Curtze 1894 und 1895). Otho spielt eine gewisse Rolle in der Heidelberger Wissenschaftsgeschichte, denn er war hier ab etwa 1590 als kurfürstlicher Mathematikus tätig und zwar bei der Berechnung trigonometrischer Tafeln (unter anderem genoss er das Privileg eines kostenlosen Mittagstisches). Otho war ursprünglich Mitarbeiter des Rheticus gewesen, auf den auch das erwähnte Berechnungsunternehmen zurückging; als letzterer starb kam das Originalmanuskript von Kopernikus' *De revolutionibus ...* in Othos Besitz, das in der Nachfolge eine zeitlang in Heidelberg lag. Weitere wichtige Namen aus dieser Blütezeit Heidelberger Wissenschaft sind B. Pitiscus, J. Christmann und Scultetus (ursprünglich Schulz).

Interessant ist übrigens noch, dass der Wert $\frac{355}{113}$ in der Kettenbruchentwicklung für die Kreiszahl auftritt, was möglicherweise eine andere Art seiner Entdeckung gewesen sein könnte. Allerdings ist zu jener Zeit ein systematischer Gebrauch von Kettenbrüchen nicht nachweisbar, weshalb man hier eine Form impliziten Wissens annehmen müsste. Schließlich ist noch anzumerken, dass der fragliche Näherungswert schon dem chinesischen Mathematiker Zu Chong-zhu (430 - 501) bekannt gewesen ist (vgl. Juschkewitsch 1964, 59 oder Martzloff 1997, 277 - 282).

Erwähnung verdient auch noch das Werk über die Kreismessung des großen französischen Mathematikers F. Viète (1540 - 1603). Darin findet sich der folgende wichtige Satz (vgl. Rudio 1892, 33):

Wenn man einem Kreise zwei reguläre Polygone einschreibt, von denen das erste halb so viele Seiten besitzt wie das zweite, so verhält sich der Flächeninhalt des ersten Polygons zu dem des zweiten wie die Supplementarsehne (apoteme) einer Seite des ersten Polygones zum Durchmesser.

[Die Apoteme ist die Höhe in einem erzeugenden Dreieck des Polygones auf der Kante desselben.]

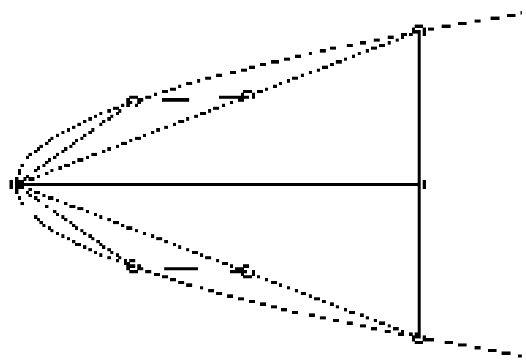
Geht man einerseits vom einbeschriebenen Quadrat aus, so kommt man über das einbeschriebene Acht-, Sechzehn- und so weiter "schließlich" nach unendlich vielen Schritten zum Kreis. Das Verhältnis Quadrat/Kreis ist dann gleich dem unendlichen Produkt aller auftretenden Verhältnisse, was Viète den berühmten Ausdruck

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}*\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}*\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}+\ldots}$$

lieferte. Natürlich ist nicht klar, welchen Sinn solch ein monströser Ausdruck haben soll - dazu muss man ja Konvergenzbetrachtungen durchführen, was erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts im vorliegenden Fall gemacht wurde (vgl. Rudio 1892, 35 Anm. *) - aber dennoch handelt es sich hierbei um eine wichtige mathematische Errungenschaft, nämlich um den ersten korrekten und geschlossenen analytischen Ausdruck für die Kreiszahl überhaupt!

Im ersten Drittel des 17. Jahrhunderts erregte die Kreisquadratur des flämischen Jesuiten Gregorius a San Vincentio (1584 - 1667), der zeitweise in Löwen Mathematik lehrte, großes Aufsehen. Diese findet sich im zehnten Buch seines Monumentalwerkes (mehr als 1000 Seiten im Quartformat) *Opus geometricum*, das 1647 erschien. Der Verfasser war so stolz auf seine vermeintliche Entdeckung, dass er diese sogar auf dem Frontizips seines Buches verewigte.

Die Quadratur des Gregorius, die nicht als eine Konstruktion mit Zirkel und Quadrat gemeint war (das wird schon deutlich daran, dass ein wesentlicher Zwischenschritt in der Erzeugung eines Körpers bestand - vgl. Montucla 1754) erwies sich als falsch, was dann dazu führte, dass das ganze Werk von Gregorius in Verruf und dann bald auch in Vergessenheit geriet. Dies ist bedauerlich, da es eine Fülle anderer interessanter (und auch richtiger) Dinge enthält: So etwa die Flächenbestimmung zur Hyperbel (Quadratur der Hyperbel [aber wieder nicht mit Zirkel und Lineal!]; vgl. Volkert 1996) und einen Zerlegungsbeweis für den Satz des Pythagoras. Einer der Mathematiker, der sich mit Gregorius auseinandersetzte, war der junge Christiaan Huygens (1629 - 1695), der den Fehler von Gregorius klar und unzweifelhaft herausarbeitete (vgl. Huygens XI, 314 - 337). Er ging aber über diese wichtige kritische Arbeit noch hinaus und verfasste eine eigene Abhandlung zum Thema *De circuli magnitudine inventa* (1654) [im folgenden zitiert nach Rudio 1892], über die Rudio folgendermaßen urteilt:
Und in der That hat Huygens damit nicht zuviel gesagt. Denn die genannte Abhandlung ist nicht nur für die Kreismessung eine geradezu epochemachende, sie gehört auch unstrittig zu den schönsten und bedeutendsten elementargeometrischen Arbeiten, die jemals geschrieben wurden, ... (Rudio 1892, 39)
Ein Blick auf die Details zeigt, dass dieses emphatische Urteil in der Tat angemessen ist. Huygens erster Satz lautet so:
Lehrsatz I. *Wenn einem Kreissegment, welches kleiner als der Halbkreis ist, ein größtes Dreieck einbeschreiben ist und den alsdann übrig bleibenden Segmenten in gleicher Weise wieder Dreiecke einbeschrieben werden, so wird der Inhalt des zuerst eingeschriebenen Dreiecks kleiner sein als das Vierfache der beiden jenen übrig gebliebenen Segmenten einbeschriebenen Dreiecke zusammen.* (Rudio 1892, 89)
Dieser Ansatz erinnert sofort an die so genannte **Parabelquadratur** des Archimedes (*Die Quadratur der Parabel* = Archimedes, 151 - 176), in der dieser gezeigt hatte, dass die Fläche eines Parabelsegmentes gleich vier Dritteln der Fläche des ihm einbeschriebenen maximalen Dreiecks ist. Dabei erhält man das maximale Dreieck als Schnittpunkt des Durchmessers des Segmentes mit der Parabel; der Durchmesser seinerseits ist festgelegt durch die Mittelpunkte aller Sehnen, welche der das Parabelsegment begrenzenden Sehne parallel sind.

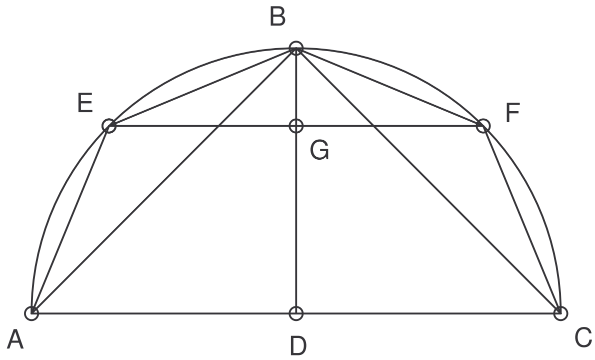


Anschließend konstruiert Archimedes in den beiden verbleibenden Parabelsegmenten wieder maximale Dreiecke und so fort. Mit Hilfe dieser Konstruktion kann man - modern gesprochen - das Segment schließlich ausschöpfen. Da im Falle der Parabel gilt, dass die Flächen der beiden hinzukommenden Dreiecke zusammen genau gleich einem Viertel des maximalen Dreiecks aus dem vorangegangenen Schrittes ist, muss man "nur noch" die geometrische Reihe

$$\Delta + \frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{4}(\frac{1}{4}\Delta) + \ldots$$

summieren, wobei Δ der Inhalt des ersten maximalen Dreiecks ist. Die Einzelheiten (vgl. Volkert 1988, 41 - 49) sind verwickelt, weshalb Archimedes' Arbeit zu Recht als ein Meisterwerk gilt.

Doch nun zurück zu Huygens. Sei also ein Kreissegment über der Sehne AC gegeben; die Spitze B des maximalen Dreiecks erhält man auch hier als Schnittpunkt des Durchmessers mit dem Kreisbogen. Der Durchmesser muss alle der Sehne parallelen Sehnen halbieren, ist also deren Mittelsenkrechte. (Die Tatsache, dass dieses Dreieck maximal ist, ergibt sich anschaulich daraus, dass jedes andere einbeschriebene Dreieck eine kleinere Höhe hat. Dies wurde meines Wissens dann nicht weiter begründet. Es gibt allerdings bei Euklid im dritten Buch Beweise für ähnliche Maximaleigenschaften; vgl. etwa III,7.) Aufgrund der Konstruktion folgt auch sofort, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.



Seien weiter E und F die Spitzen der maximalen Dreiecke in den Segmenten über den Dreiecksseiten AB und BC. Diese Dreiecke sind natürlich auch wieder gleichschenklig; die Dreiecksungleichung (I,20) liefert dann

$$2\,|AE| > |AB| \text{ oder } 4\,|AE|^2 > |AB|^2$$

$$2\,|EB| > |AB| \text{ oder } 4\,|EB|^2 > |AB|^2$$

Verlängert man BD über D hinaus bis zum Schnittpunkt H mit der Kreislinie, so ergibt sich der Durchmesser BH und die rechtwinkligen Dreiecke HAB sowie HEB. Nach dem Kathetensatz gilt in diesen:

$$|AB|^2 = |DB| * |HB|$$

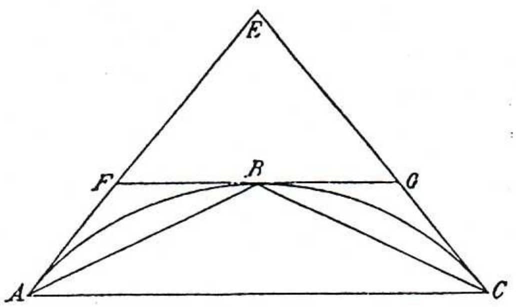
und $$|EB|^2 = |BG| * |HB|$$

also $$\frac{|AB|^2}{|EB|^2} = \frac{|DB|}{|BG|}$$

wobei G der Lotfußpunkt des Lotes von E auf HB ist, also die Höhe des Dreiecks HEB. Hieraus ergibt sich mit Hilfe der obigen Abschätzungen |DB| < 4 |BG|.
Schließlich sind die Dreiecke ABE und EFB nach SWS (I,4) kongruent, weshalb |AB| = |EF| und damit |AC| < 2 |AB| = 2 |EF| gilt. Insgesamt erhält man:

$$I(\Delta\ ABC) < 2*|EF|*4*|GB| = 4I(\Delta\ EBF) = 4(I(\Delta\ AEB) + I(\Delta\ BFC)) = \frac{1}{4}|AC|*|DB|.$$

Der Inhalt von Lehrsatz I lässt sich kurz und prägnant so formulieren: Der bei der geschilderten Konstruktion entstehende Zuwachs ist größer als ein Viertel des zuvor Vorhandenen.
Im zweiten Satz wird eine Aussage bewiesen, welche einen Zusammenhang zwischen umbeschriebenem Vieleck und einbeschreibenem maximalen Dreieck herstellt.
Lehrsatz II. *Es sei ein Kreissegment gegeben, kleiner als der Halbkreis, und über der Basis desselben ein Dreieck, dessen beide Seitenlinien das Segment berühren; zieht man alsdann noch die Tangente in dem Scheitel des Segmentes, so schneidet diese von dem ersten Dreieck ein Dreieck ab, welches größer ist als die Hälfte des dem Segmente einbegeschriebenen größten Dreiecks.* (Rudio 1892, 89)
Der Scheitel des Segmentes ist nichts anderes als die Spitze des maximalen einbeschriebenen Dreiecks. Die Situation sei also die folgende:



Zu zeigen ist: $I(\Delta\ FEG) > \frac{1}{2} I(\Delta\ ABC)$. Folgende Tatsachen werden von Huygens zu Recht als zu klein bezeichnet: 1.) Die Dreiecke AEC, ABC, AFB und BGC sind gleichschenklig. 2.) B ist die Mitte der Strecke FG.
Nach der Dreiecksungleichung ist |FE| + |EG| > |FG|. Wegen der Gleichschenkligkeit ist aber |FE| = |EG|, also ist 2|FE| > |FG| oder $|FE| > \frac{1}{2}|FG| = |FB| = |AF|$ (nach 2.) bzw. 1.)). Weiter ist dann |AE| = |AF| + |FE| < |FE| + |FE| = 2|FE|. Bezeichnen wir den Schnittpunkt der Verlängerung von EB mit AC durch H, so liefert der Strahlensatz weiter: |AC| < 2|FG| und |HE| < 2|BE| und damit

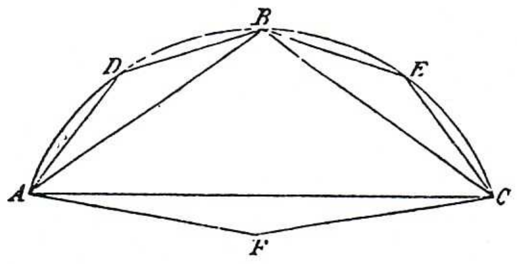
$$(*) \quad I(\Delta\ FEG) > \frac{1}{4} I(\Delta\ AEC)$$

Nimmt man hingegen AC als Grundseite und berücksichtigt das obige Ergebnis |HE| < 2|BE|, so findet man weiter die Beziehung

$$(**) \quad I(\Delta\ ABC) < \frac{1}{2} I(\Delta\ AEC)$$

Aus (*) und (**) zusammen ergibt sich 2I(Δ FEG) > I(Δ ABC), was zu beweisen war.
Um den oben angesprochenen Zusammenhang zwischen ein- und umbeschriebenen Vieleck einzusehen, muss man bedenken, dass man letzteres dadurch erhalten kann, dass man die Tangenten an den Umkreis des einbeschriebenen Vielecks in dessen Eckpunkten konstruiert.

Im nachfolgenden Satz tritt erstmals die Fläche eines Kreissegmentes selbst in Erscheinung.
Lehrsatz III. Jedes Kreissegment, welches kleiner als der Halbkreis ist, hat zu dem ihm eingeschriebenen größten Dreiecke ein größeres Verhältnis als 4 zu 3. (Rudio 1892, 90)
Während also im Falle der Archimedischen Parabelquadratur Gleichheit gilt, ist hier nur eine Größerbeziehung gegeben.
Es sei also wieder die Situation aus Satz I gegeben.



Nach dem bereits genannten Satz gilt: I(Δ ABC) < 4(I(Δ ABD) + I(Δ BCE)). Also kann man zu ABC noch ein gleichschenkliges dreieckiges Flächenstück AFC hinzufügen, so dass die Ungleichung von oben weiterhin gilt:

$$I(\Delta\ ABC) + I(\Delta\ AFC) < 4(I(\Delta\ ABD) + I(\Delta\ BCE))$$

Nun setze man den Vorgang des Einbeschreibens maximaler Dreiecke in Segmente so lange fort, bis schließlich alle im letzten Schritt auftretenden Segmente zusammen kleiner als I(Δ AFC) sind, *was sicherlich einmal eintritt* (Rudio 1892, 91). Die Begründung für diese Behauptung könnte wie schon bei Euklid in anderem Zusammenhang (vgl. 4.3 oben) mit Hilfe von X,1 erfolgen. A fortiori sind dann auch die im letzten Schritt einbeschriebenen Dreiecke zusammen kleiner als I(Δ AFC). Nun setzen wir die verschiedenen Schritte zusammen:

1. Schritt: $\frac{1}{4}(I(\Delta\ ABC) + I(\Delta\ AFC)) < (I(\Delta\ ABD) + I(\Delta\ BCE))$

2. Schritt: $\frac{1}{4}(I(\Delta\ ABD) + I(\Delta\ BCE)) <$ Fläche der vier hinzukommenden Dreiecke

und so weiter. *Es ist nämlich von Archimedes bewiesen worden, daß wenn irgend welche Flächenräume gegeben sind, von denen jeder folgende gleich $\frac{1}{4}$ des vorangehenden ist, alle diese Flächenräume zusammen vermehrt um den dritten Teil des kleinsten, zu dem größten sich verhalten wie 4 zu 3.* (Rudio 1892, 93) Diese Bemerkung bezieht sich auf die endliche geometrische Reihe mit den Anfangsgliedern

$$(I(\Delta ABC) + I(\Delta AFC)) + \frac{1}{4}(I(\Delta ABC) + I(\Delta AFC)) + \frac{1}{4}(\frac{1}{4}(I(\Delta ABC) + I(\Delta AFC))) + \ldots,$$

deren Glieder man gemäß der obigen Ungleichungen immer nach oben durch die Fläche der neu hinzukommenden maximalen Dreiecke abschätzen kann.
So erhält man schließlich die Beziehung I(Δ ABC) + I(Δ AFC) + Fläche aller weiteren Dreiecke + $\frac{1}{3}$(Fläche der Dreiecke, die im letzten Schritt hinzukommen) > $\frac{4}{3}$(I(Δ ABC) + I(Δ AFC)). Subtraktion von I(Δ ABC) + I(Δ AFC) auf beiden Seiten liefert:

(*) Fläche aller weiteren Dreiecke + $\frac{1}{3}$(Fläche der Dreiecke, die im letzten Schritt hinzukommen) > $\frac{1}{3}$(I(Δ ABC) + I(Δ AFC)).

Andererseits sollten die letzten hinzukommenden Dreiecke zusammen kleiner als I(Δ AFC) sein. Also gilt:

(**) $\frac{1}{3}$(Fläche der Dreiecke, die im letzten Schritt hinzukommen) < $\frac{1}{3}$I(Δ AFC).

Subtrahiert man die Ungleichungen (*) und (**), so erhält man:

Fläche aller weiteren Dreiecke > $\frac{1}{3}$I(Δ ABC) oder nach Addition von I(Δ ABC) auf beiden Seiten: I(Δ ABC) + Fläche aller weiteren Dreiecke > $\frac{4}{3}$I(Δ ABC). Die linke Seite ist aber sicher kleiner als der Flächeninhalt des Segmentes selbst, da alle fraglichen Flächen in diesem Segment liegen. Damit erhält man dann die zu beweisende Behauptung.

Zwei Punkte verdienen es mindestens hervorgehoben zu werden: Zum einen verwendet Huygens eine Art von Archimedizität für den Flächeninhalt von Dreiecken, wenn er davon ausgeht, dass man zu jeder positiven Schranke ein Dreieck konstruieren kann, dessen Inhalt kleiner als eben jene Schranke ist. Dies ist natürlich zutreffend in der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie, bedarf aber der axiomatischen Grundlegung. Das hat man gegen Ende des 19. Jahrhunderts erkannt (vgl. M. Pasch *Vorlesungen über neuere Geometrie* [1882], wo das fragliche Axiom meines Wissens erstmals auftritt). Zum andern bemerkt man, dass Huygens ganz natürlich davon ausgeht, dass jedes Kreissegment überhaupt einen Flächeninhalt besitzt.

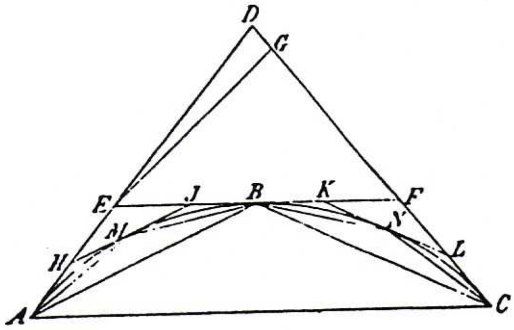
Bem. Die von Archimedes behauptete Identität lässt sich folgendermaßen leicht herleiten. Es sei eine endliche geometrische Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{4}$ gegeben: $a+\frac{a}{4}+\frac{a}{16}+...+\frac{a}{4^n}$.

Dann soll nach Archimedes gelten: $a+\frac{a}{4}+\frac{a}{16}+...+\frac{a}{4^n}+\frac{1}{3}\frac{a}{4^n}=\frac{4}{3}a$. Dies ergibt sich sofort aus der Identität $\frac{1}{4^n}+\frac{1}{3}\frac{1}{4^n}=\frac{1}{3}\frac{1}{4^{n-1}}$, welche man wiederum durch einfaches Nachrechnen bestätigt.

Wenden wir uns nun dem nächsten Satz zu, der eine Abschätzung nach oben für die Fläche des Kreissegmentes bereitstellt.

Lehrsatz IV*. Jedes Kreissegment, welches kleiner ist als der Halbkreis, ist kleiner als zwei Drittel des Dreiecks, welches diesselbe Basis wie jenes besitzt und dessen Seitenlinien das Segment berühren.*

Beweis. Wir gehen von folgender Situation aus:



Nach Satz II gilt dann: $\frac{1}{2}$I(Δ ABC) < I(Δ EDF). Dann kann man, so Huygens, vom Dreieck EDF ein Dreieck EGD abschneiden, so dass der verbleibende Rest, also das Dreieck EGF, immer noch größer als $\frac{1}{2}$I(Δ ABC) ist.

Nun beschreibe man den Segmenten über AB und BC maximale Dreiecke ein; den vier entstehenden Segmenten beschreibe man wieder maximale Dreiecke ein und so weiter bis die sich ergebenden Segmenten alle zusammen kleiner als 2I(Δ EDG) sind.
Durch die Spitzen der maximalen Dreiecke ziehe man jeweils die Tangenten an den Kreis. Insgesamt erhält man so ein einbeschriebenes und ein umbeschreibenes Vieleck. Nach Satz II gilt, dass die Dreiecke über den Tangenten immer größer sind als die Hälften der Dreiecke in den Segmenten. Also gilt:

$$\text{(Fläche aller äußeren Dreiecke)} > \frac{1}{2}\text{(Fläche aller maximalen inneren Dreiecke)}$$

Andererseits ist aber (siehe oben)

$$I(\Delta\ EGF) > \frac{1}{2} I(\Delta\ ABC)$$

und nach Satz II

$$I(\Delta\ HEJ) > \frac{1}{2} I(\Delta\ AMB)$$

$$I(\Delta\ KFL) > \frac{1}{2} I(\Delta\ BNC)$$

und so weiter.
Aufaddiert erhält man

$$I(\Delta EGF) + (I(\Delta HEJ) + I(\Delta KFC)) + \ldots > \frac{1}{2}(I(\Delta ABC) + I(\Delta AMB) + I(\Delta BNC) + \ldots)$$

oder wegen I(Δ EGF) = I(Δ EDF) - I(Δ EGD):

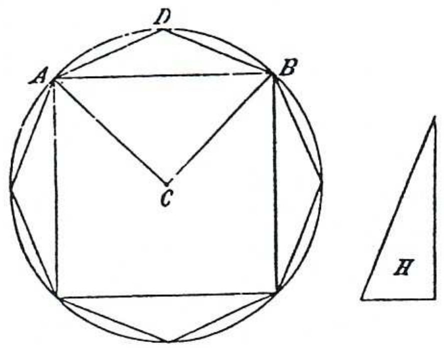
$$\text{I(alle äußeren Dreiecke)} - I(\Delta\ EGD) > \frac{1}{2}\text{I(alle maximalen inneren Dreiecke)}$$

Also ist einerseits I(alle äußeren Dreiecke) - I(Δ EGD) > $\frac{1}{2}$I(alle maximalen inneren Dreiecke) und andererseits I(Δ EGD) > $\frac{1}{2}$I(alle Restsegmente). Die Addition der beiden Ungleichungen liefert: I(aller äußeren Dreiecke) > $\frac{1}{2}$(Fläche des Segmentes ABC). Die linke Seite ist aber sicher kleiner als die Fläche zwischen dem Kreisbogen AC und den Kanten AD und CD. Fügt man nun noch beiderseits das Segment über AC hinzu, so erhält man:

$$I(\Delta\ ADC) > \frac{3}{2}\text{(Fläche des Segmentes ABC)},$$

was zu beweisen war.
Mit dem nächsten Satz kommen wir zum Kreis.
Lehrsatz V. *Jeder Kreis ist größer als ein ihm einbeschriebenes gleichseitiges Polygon, vermehrt um den dritten Teil des Überschusses, um welchen dieses Polygon ein anderes einbeschriebenes von halb so vielen Seiten übertrifft.* (Rudio 1892, 93f)
Bem. Hier wird erstmals der Fortschritt deutlich, den Huygens erzielte: Im Vergleich zu Archimedes' Vorgehen wird die untere Schranke für die Kreisfläche verbessert.
Beweis. Es seien P_n und P_{2n} die beiden Polygone, H bezeichne die Differenz ihrer Flächeninhalte. Wir betrachten ein Segment über einer Kante AB von P_n sowie das P_n erzeugende Dreieck ABC, wobei C der Mittelpunkt des Kreises sein soll; Segment und

Dreieck zusammen bilden den Sektor CADB. Geht man von P_n zu P_{2n} über, so wird im Segment AB das maximale Dreieck ADB konstruiert.



Nach dem oben bewiesenen Satz III gilt (*) I(Seg über AB) > $\frac{4}{3}$I(Δ ADB), woraus durch beiderseitige "Subtraktion" von I(Δ ADB) folgt: I(Seg über AD) + I(Seg über DB) > $\frac{1}{3}$I(Δ ADB). Fügt man andererseits in (*) jeweils das Dreieck ABC hinzu, so entsteht einerseits der Sektor CADB und andererseits das Viereck CADB, wobei noch der Summand $\frac{1}{3}$I(Δ ADB) übrig bleibt:

$$\text{(**)}\quad \mathrm{I(Sektor\ CADB)} > \mathrm{I(Viereck\ CADB)} + \frac{1}{3}\mathrm{I}(\Delta\ \mathrm{ADB})$$

Weiter gelten folgende Verhältnisse:

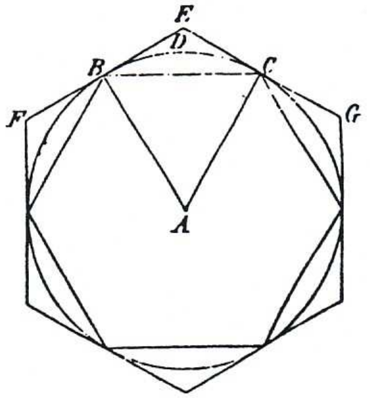
$$\frac{I(SektorCADB)}{I(Kreis)} = \frac{I(ViereckCADB)}{I(P_{2n})} = \frac{\frac{1}{3}I(\Delta ADB)}{\frac{1}{3}(I(P_{2n}) - I(P_n))}$$

woraus sich die Behauptung direkt ergibt, indem man gemäß (**) alle "Zähler" durch die ihnen proportionalen "Nenner" ersetzt und beachtet, dass $I(P_{2n}) - I(P_n) = H$ ist.
Im nachfolgenden sechsten Satz wird eine verbesserte Abschätzung der kreisfläche nach oben gewonnen.

Satz VI. *Jeder Kreis ist kleiner als zwei Drittel eines ihm umbeschriebenen gleichseitigen Polygones, vermehrt um ein Drittel des dazu ähnlichen eingeschriebenen Polygones.*

(Rudio 1892, 95)

Beweis. Es genügt auch hier, die Situation in einem Segment zu betrachten, wobei wir allerdings jetzt ein umbeschriebenes und ein ihm ähnliches (das heißt im wesentlichen gleiche Kantenzahl) einbeschriebenes Polygon betrachten müssen.



Nach Satz IV ist I(Segment BDC) < $\frac{2}{3}$I(Δ BEC). Der Ausdruck auf der rechten Seite drückt aber gerade den Überschuss des Vierecks ABEC über das Dreieck ABC aus. Weiter gilt

$$\text{I}(\Delta\ \text{ABC}) + \frac{2}{3}\text{I}(\Delta\ \text{BEC}) > \text{I}(\text{Sektor ABDC})$$

Die linke Seite ist aber unter Berücksichtigung der obigen Bemerkung gleich $\frac{2}{3}$I(Viereck ABED) + $\frac{1}{3}$I(Δ ABC), woraus sich durch Summation über alle Sektoren die Behauptung ergibt.

Im Satz VII nähert sich Huygens schließlich der Frage nach der Approximation der Kreiszahl. Dabei greift er auf Archimedes zurück, insofern dieser ja gezeigt hatte, dass der Kreis flächengleich einem rechtwinkligen Dreieck ist, dessen eine Kathete gleich dem Kreisradius und dessen andere Kathete gleich dem Kreisumfang ist. Also kann man sich der Kreiszahl auf über den Umfang nähern.

Satz VII. *Der Umfang eines jeden Kreises ist größer als der Umfang eines ihm einbeschriebenen gleichseitigen Polygones, vermehrt um den dritten Teil des Überschusses, um welchen dieser Umfang den Umfang eines anderen einbeschriebenen Polygones von halb so vielen Seiten übertrifft.* (Rudio 1892, 96)

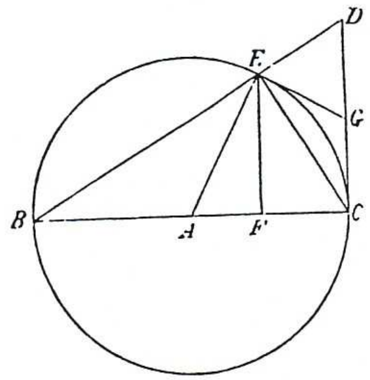
Beweis. Es sei GJ eine Strecke, die gleichlang dem Umfang des Polygons P_{2n} ist, GH eine gleichlang dem Umfang von P_n; folglich ist HJ gleichlang der Differenz der Umfänge. Fügt man ein Drittel dieser Strecke an GJ an, so erhält man die Strecke GK. Zu zeigen ist dann: |GK| > U(Kreis).

Da bislang nur Sätze über Flächeninhalte bewiesen wurden, ist es nahe liegend, zu versuchen, solche ins Spiel zu bringen. Dabei wird die bekannte Tatsache benutzt, dass man den Flächeninhalt eines regelmäßigen Polygons nach der Formel Umfang mal Radius des Umkreises berechnen kann.

Wir konstruieren über den soeben eingeführten Strecken Dreiecke mit der gemeinsamen Spitze N, deren Flächeninhalte denjenigen der Polygone entsprechen. Hierzu ist erforderlich, dass der Abstand von N zur Geraden, auf der die fraglichen Strecken liegen, gleich dem Radius des Ausgangskreises (also des Kreises, in den die Polygone einbeschreiben wurden) ist. Am einfachsten wäre es, NG senkrecht auf GK zu wählen, was Huygens aber nicht macht. Weiterhin ist dann klar, dass der Inhalt des Dreiecks HJN gerade gleich dem Überschuss $I(P_{2n})$ - $I(P_n)$ ist. Andererseits ist aber nach Konstruktion I(Δ JNK) gleich einem Drittel dieses Überschusses.

Nach Satz V ist I(Δ GNK) < I(Kreis). Weil sich letzterer aber nach Archimedes ebenfalls als Dreieck mit derselben Höhe wie im Dreieck GNK realisieren lässt, schließt Huygens, dass

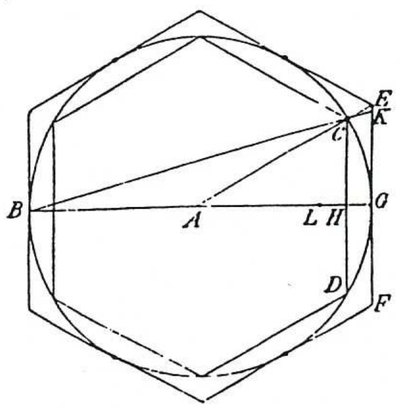
dann die andere Kathete des zum Kreis gehörigen Dreiecks größer sei als GK. Erstere ist aber gerade gleichlang dem Kreisumfang. Also gilt: $|GK| < U(\text{Kreis})$, was zu beweisen war.
Was jetzt noch fehlt, ist eine Abschätzung für den Kreisumfang nach unten. Hierzu ist Satz VIII eine Vorbereitung, die eigentliche Aussage folgt dann in Satz IX.
Lehrsatz VIII. *Wenn man in einem Endpunkte des Durchmessers eines Kreises die Tangente konstruiert und durch den andern Endpunkt des Durchmessers eine Gerade zieht, welche den Kreis schneidet und jene Tangente trifft, so werden zwei Drittel des Abschnittes der Tangente, vermehrt um ein Drittel des Lotes, welches man von auf dem Kreise befindlichen Schnittpunkte auf den Durchmesser fällen kann, zusammen größer sein als der abgeschnittene, der Tangente anliegende Kreisbogen.* (Rudio 1892, 98)



Beweis. Wir gehen von folgender Situation aus, in der die Behauptung formelmäßig ausgedrückt lautet: $\frac{2}{3}|CD| + \frac{1}{3}|EF| >$ Bogen CE

In E wurde die Tangente an den Kreis konstruiert, weshalb der Winkel AEG ein rechter ist (G ist der Schnittpunkt der Tangenten in E mit der Tangenten in C).
Nach dem Tangenten-Sekanten-Satz (III,37) ist $|GE| = |GC|$; nach Konstruktion ist weiter $|AC| = |AE|$. Also ist das Viereck ACGE ein Drachen mit zwei rechten Winkeln. Schließlich ist $|GC| = |GD|$ nach der Umkehrung des Satzes vom Thales-Kreis (die Punkte C, E und D liegen auf demselben Thales-Kreis um G).
Nach Satz VI gilt: $\frac{2}{3}I(\text{Viereck AEGC}) + \frac{1}{3}I(\Delta\ \text{AEC}) > \text{Sektor(AEC)}$.
Der Inhalt des Drachens AEGC ist aber gleich dem Inhalt des Dreiecks ACD (Beweis als Übungsaufgabe) und der Inhalt des Dreiecks AEC ist gleich demjenigen eines Dreiecks mit Grundlinie der Länge $|EF|$ und Höhe der Länge $|AC|$ (Beweis wieder als Übungsaufgabe). Die beiden Grundlinien der genannten Dreiecke kann man sich aneinander gelegt denken, ihre Höhe ist gemeinsam. Die entsprechenden Bruchteile ihrer Flächeninhalte erhält man, indem die Bruchteile der Grundlinien bildet. Insgesamt ergibt sich:
$\frac{2}{3}I(\text{Viereck AEGC}) + \frac{1}{3}I(\Delta\ \text{AEC}) = I($Dreieck mit Grundlinie der Länge $\frac{2}{3}|CD| + \frac{1}{3}|EF|$ und Höhe der Länge $|AC|$). Das rechts stehende Dreieck ist aber andererseits größer als der Sektor AEC (nach Satz IV). Da die Höhe des Dreiecks gerade gleich dem Radius des Sektors ist, muss die Grundlinie des Dreiecks größer sein als der Bogen des Sektors.
Schließlich liefert der letzte Lehrsatz die gewünschte Abschätzung nach oben.
Lehrsatz IX. *Der Umfang eines jeden Kreises ist kleiner als zwei Drittel des Umfanges eines ihm einbeschriebenen gleichseitigen Polygones, vermehrt um ein Drittel des Umfanges des dazu ähnlichen umgeschriebenen Polygones.* (Rudio 1892, 99)

Beweis. Es genügt offenbar, die Situation für ein erzeugendes Dreieck zu betrachten. Also gehen wir aus von folgender Situation:



Wir halbieren die Kante des umbeschriebenen Polygones EF in G und ziehen den Durchmesser GB (G liegt also auf dem Kreis!), der CD in H schneide. Nun konstruieren wir die Strecke BC, welche EK in K schneiden möge. Schließlich konstruieren wir noch den Punkt L auf GB mit |HL|= |HG|.

Dann gilt: |BL| = |BG| - |LG| = |BG| - 2|HG| = 2|AG| - 2|HG| = 2(|AG|-|HG|) = 2|AH|. Somit ist also

$$\frac{|GA|}{|AH|} = \frac{|GB|}{|BL|}$$

Wegen |HB| = |GB| - |HG| und |BL| = |HB| - |HG| gilt: $\frac{|HB|}{|BL|} > \frac{|GB|}{|HB|}$. Hieraus wollen wir eine Abschätzung für die Verhältnisse von oben gewinnen. Es ist nach der soeben hergeleiteten Abschätzung $(\frac{|GA|}{|AH|} =)\frac{|GB|}{|BL|} = \frac{|GB|}{|HB|} * \frac{|HB|}{|BL|} > \frac{|GB|}{|BH|} * \frac{|GB|}{|BH|}$. Andererseits gilt aufgrund der Strahlensätze $\frac{|GA|}{|AH|} = \frac{|EG|}{|CH|}$ und $\frac{|GB|}{|HB|} = \frac{|KG|}{|CH|}$. Kombiniert man dies mit dem vorangehenden Ergebnis, so erhält man die Abschätzung

$$\frac{|EG|}{|CH|} > \frac{|KG|}{|CH|} * \frac{|KG|}{|CH|}$$

Multiplikation mit |CH| nebst Division durch |KG| liefert dann

$$\frac{|EG|}{|KG|} > \frac{|KG|}{|CH|}$$

Hieraus wiederum folgt |EG| + |CH| > 2|KG| also auch $\frac{1}{3}$(|EG| + |CH|) > $\frac{2}{3}$|KG|. Addiert man beiderseits $\frac{1}{3}$|CH|, so erhält man schließlich: $\frac{1}{3}$|EG| + $\frac{2}{3}$|CH| > $\frac{2}{3}$|KG| + $\frac{1}{3}$|CH|.

Gemäß Satz VIII ist die rechte Seite größer als der Bogen CD. Damit hat man die gewünschte Aussage für das erzeugende Dreieck bewiesen; man muss jetzt nur noch durch entsprechendes Vervielfachen zu den Polygonen und dem Kreis übergehen.

Huygens selbst macht noch ausdrücklich darauf aufmerksam, dass man sein Ergebnis auch so formulieren kann: Der Bogen eines Winkels α ist kleiner als $\frac{1}{3}$Tangens von α plus $\frac{2}{3}$Sinus von α. Dabei muss man aber sehen, dass Huygens hier noch in alter Tradition einen Winkel betrachtet, der genau doppelt so groß ist, wie derjenige, den wir heute verwenden würden: Bei Huygens geht es um den Winkel DAC, während wir den Winkel GAC nehmen würden. Diese unsere Aufffassung hat sich erst mit Euler durchgesetzt.

Nun kommen wir zur Nutzanwendung dieser doch recht aufwendigen Überlegungen. Dies ist Inhalt von Aufgabe I bei Huygens (Rudio 1892, 101):
Das Verhältnis der Kreisperipherie zum Durchmesser mit beliebiger Genauigkeit zu finden.
Diese Aufgabe wird mit Hilfe der hergeleiteten Abschätzungen gelöst. Es stellt sich dabei heraus, dass Huygens' Verfahren für dasselbe Polygon doppelt so viele gültige Stellen liefert wie das Archimedische. In erstem Schritt zeigt Huygens, dass er die Abschätzung, welche Archimedes mit Hilfe des 96-ecks gab, schon mit dem 12-eck erreichen kann.
Sei ein Kreis mit Radius 10000 gegeben (so große Zahlen wurden gewählt, um das Rechnen mit Nachkommastellen zu vermeiden). Dann, so Huygens, ist die Kante des einbeschriebenen Zwölfecks größer als $5176\frac{3}{8}$. Wie er zu diesem Wert kommt, sagt Huygens nicht. Nahe liegend ist die Annahme, dass er ihn mit Hilfe des Satzes des Pythagoras nebst einer geschickten Abschätzung der auftretenden Quadratwurzeln (etwa im Stile Herons) erhalten hat. Jedenfalls ist der Wert recht gut; der Computer liefert 5176,380902. Für den Umfang des einbeschriebenen 12-ecks ergibt sich, dass er größer sein muss als $62116\frac{1}{2}$. Mit Blick auf Lehrsatz VII muss nun noch der Umfang des einbeschriebenen Sechsecks ermittelt werden; er ist natürlich gleich 60000. Als Differenz ergibt sich $2116\ \frac{1}{2}$, wovon ein Drittel gleich $705\frac{1}{2}$ ist. Folglich ist nach Satz VII die Peripherie des Kreises größer als $62116\frac{1}{2} + 705\frac{1}{2} = 62822$; damit ist die Kreiszahl als Verhältnis von Umfang zu Durchmesser sicher größer als $\frac{62822}{20000}$. Von diesem Bruch sieht man leicht ein, dass er größer ist als die von Archimedes mit $3\frac{10}{71}$ angegebene Untergrenze (Huygens' Untergrenze ist 3,141100000, Archimedes' ist ungefähr 3,1408450704).
Um die zugehörige Abschätzung nach oben zu bekommen, zieht Huygens Lehrsatz VI heran. Die Kante des einbeschriebenen Zwölfecks wird hierzu als kleiner als $5176\frac{2}{5}$ (vgl. den oben angegebenen Wert), diejenige des umbeschriebenen Zwölfecks mit 5359. Hieraus ergibt sich für zwei Drittel des Umfangs des einbeschriebenen Zwölfecks die Obergrenze $41411\frac{1}{5}$, für ein Drittel des Umfangs des umbeschriebenen Zwölfecks 21436. Die Summe der beiden Obergrenzen beträgt somit $62847\frac{1}{5}$; dieser Wert schätzt also den Kreisumfang nach oben ab.

Die Kreiszahl ist somit kleiner als $\frac{62847\frac{1}{5}}{20000}$, ein Wert, der kleiner ist als die von Archimedes angegebene Obergrenze $3\frac{1}{7}$ (Huygens' Wert ist 3,142360000, Archimedes' Wert ist etwa 3,1428571429). Anschließend betrachtet Huygens noch das 60eck und das 10800eck.

Interessant - nicht zuletzt in Hinblick auf unser Thema Konstruktionen mit Zirkel und Lineal - ist die Aufgabe II: *Eine Strecke zu bestimmen, welche der Peripherie eines gegebenen Kreises gleich ist.* Gelänge es, diese Aufgabe konstruktiv zu lösen, so würde dies die Rektifikation des Kreises und damit auch dessen Quadratur bedeuten. Huygens behauptet nun keineswegs, dies zu leisten zu können, sondern er gibt Konstruktionen an, bei denen *der Unterschied* [zwischen exaktem und konstruiertem Wert] *nicht wahrnehmbar* (Rudio 1892, 104) sein wird. Er gibt insgesamt drei Möglichkeiten an: a) Nehme achtmal die Kantenlänge des einbeschriebenen 12ecks und füge die Länge des Kreisradius hinzu. Die Länge der entstehenden Gesamtstrecke weicht vom wahren des Kreisumfanges um weniger als $\frac{1}{4000}$ der Länge des Durchmessers ab. b) Es sei der Kreis mit dem Diametralpunktepaar B und C gegeben. Dann halbiere man den einen Bogen BC durch den Punkt D, den anderen drittele man durch die Punkte E und F (das geht konstruktiv). Nun ziehe man den Durchmesser BC und verbinde D mit E sowie D mit F. Die Schnittpunkte mit dem Durchmesser BC seien G und H. Dann ist $|GD|$ gleich der doppelten Kantenlänge des einbeschriebenen 12ecks und $|GH|$ ist die Kantenlänge des umbeschriebenen 12ecks. Huygens liefert hierfür keine Begründung; offensichtlich ist das aber keineswegs. Gemäß Lehrsatz VI erhält man eine Abschätzung für den Kreisumfang; wobei der Fehler weniger als $\frac{1}{5000}$ der Länge des Durchmessers beträgt. c) Man nehme dreimal die Länge des Radius und addiere hierzu $\frac{1}{10}$ der Kantenlänge des einbeschriebenen Quadrates. Der Fehler ist kleiner als $\frac{1}{10000}$ der Länge des Durchmessers.

Übrigens hat schon Viète eine Näherungskonstruktion vorgeschlagen, die sogar zu einem noch besseren Resultat führt, als die von Huygens angegebenen Möglichkeiten (vgl. Montucla 1754, 62 Anm. *): Hierzu geht man von einer Strecke AB aus, die man durch C im Verhältnis des goldenen Schnittes teilt. Ist BC der Minor, so ist die Strecke der Länge $|AB|+\frac{1}{6}|AB|$ eine sehr gute Näherung für den Kreis mit dem Durchmesser BC. Geht man wie üblich vom Kreis aus, so muss man dessen Durchmesser BC verlängern und hierauf den Punkt A konstruieren, so dass C die Strecke AB im Verhältnis des goldenen Schnittes teilt. Das ist natürlich auch möglich.

Huygens löst (natürlich nur annäherungsweise) in der Aufgabe III das analoge Problem für Kreisbögen (Rudio 1892, 106 - 108). Anschließend beweist er noch viele interessante Sätze, auf deren Inhalt ich hier nicht eingehen möchte. Einige dieser Sätze (nämlich die Nummern 12 und 13) gehen auf Willibrord van Snel (1580 - 1626), auch Snellius genannt, zurück, der 1621 seinen *Cyclometricus* veröffentlicht hatte. Dort finden sich einige interessante Entwicklungen, die allerdings auf den fraglichen, von Snel nicht bewiesenen Sätzen beruhten. Abschließend zitiere ich nur noch einen bemerkenswerten Satz:

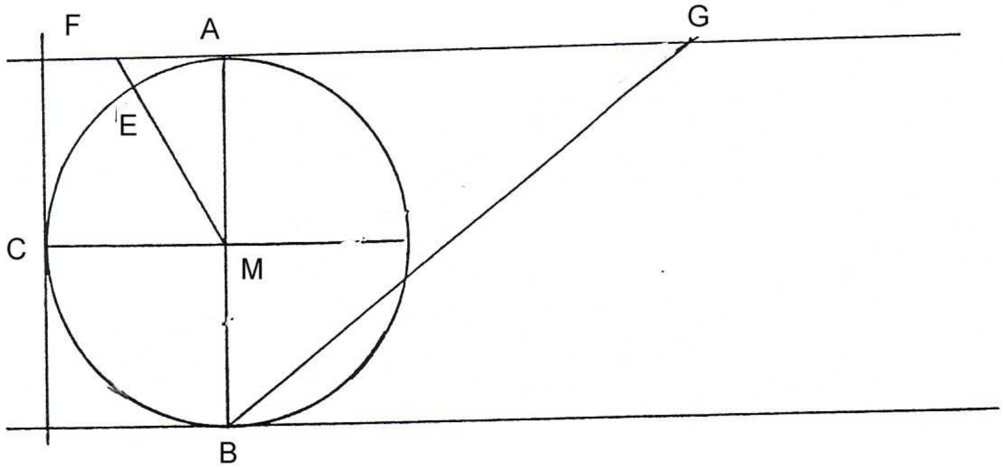
Lehrsatz X. *Die Seite eines dem Kreise eingeschriebenen gleichseitgen Polygones ist mittlere Proportionale zwischen der Seite des dazu ähnlichen umgeschriebenen Polygones und der halben Seite des eingeschriebenen Polygones von halber Seitenzahl.* .

Insgesamt besticht Huygens' Arbeit durch Scharfsinn und Eleganz; sie bringt, wie bereits erwähnt einen erheblichen Fortschritt bei der näherungsweisen Berechnung der Kreiszahl. Das eigentliche Konstruktionsproblem berührt sie allerdings nicht, da es ja auch nach Huygens keineswegs ausgeschlossen war, konstruktiv eine Quadratur durchzuführen. Allerdings kann man sich vorstellen, dass Huygens' Abhandlung eher den Skeptikern Vorschub leistete: Wenn schon soviel Scharfsinn nicht zur Lösung führt, muss man sich vielleicht doch mit dem Gedanken vertraut machen, daß es keine solche gibt. Soweit ich weiß, gibt es aber aus jener Zeit keine eindeutigen Belege dafür, daß solche Skeptiker überhaupt

existierten. Rudio behauptet zwar, Huygens sei von der Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises überzeugt gewesen, gibt aber hierfür keinen Beleg an (Rudio 1892, 41).
Zum vorläufigen Abschluss - wir werden später wieder auf das Thema Quadratur des Kreises zurückzukommen haben - unserer Betrachtungen möchte ich noch zwei andere **angenäherte** Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen vorstellen.

4.6 Die Näherungskonstruktionen von Kochansky und Specht

Die erste der darzustellenden Näherungskonstruktionen geht auf den polnischen Jesuiten Adam Kochansky zurück und stammt aus dem Jahr 1685. Gegeben sei der Kreis ADBC mit Mittelpunkt M, wobei AB und CD konjugierte, das heißt orthogonale, Durchmesser sein sollen. Man trage von C aus in Richtung A den Kreisradius ab und erhalte als Schnittpunkt auf der Periphereie des Kreises den Punkt E. Dann ist der Winkel CME ein 60° Winkel. Nun konstruiere man in A die Tangente an den gegebenen Kreis und verlängere ME über E hinaus bis zum Schnittpunkt F mit der soeben konstruierten Tangenten. Von F aus trage man in Richtung von A auf der Tangenten dreimal den Radius ab; der erhaltene Endpunkt sei G. Dann ist die Strecke BG in guter Näherung (bis auf vier Stellen genau) gleich dem halben Kreisumfang. Es dürfte wohl klar sein, dass man zeichnerisch längst nicht mehr feststellen kann, ob die angegebene Konstruktion wirklich genau ist oder nur angenähert. Das vermag nur die Rechnung zu klären: Man berechne mit Hilfe der Trigonometrie die Länge der Strecke BG auf so viele Nachkommastellen, bis man eine Abweichung an der letzten Stelle vom bekannten Wert für die Kreiszahl feststellt. Die Quintessenz lautet: Auf die geschilderte Art und Weise kann man eine vorgeschlagene Konstruktion als bloß angenähert nachweisen. Man kann sie falsifizieren, aber kann so nicht deren Korrektheit zeigen (denn selbst wenn die ersten 1000 Stellen stimmen, könnte ja die Abweichung an der 1001. Stelle stattfinden).
Kochanskys Konstruktion läuft darauf hinaus (im Falles des Einheitskreises), eine Strecke der Länge $\sqrt{4+(3-\frac{\sqrt{3}}{3})^2} \approx 3{,}14153$ herzustellen (vgl. Carrega 1989, 93). Im Prinzip könnte man natürlich auf die Idee kommen, eine dezimale Näherung für die Kreiszahl herzunehmen, etwa 3,14159, und eine entsprechende Strecke der Länge $\frac{314159}{100000}$ konstruieren zu wollen. Obgleich man nachweisen kann (wir werden dies im nächsten Semester tun), dass man jede Strecke mit rationaler Maßzahl konstruieren kann, stellt sich dennoch heraus, dass das Verfahren unpraktibel ist (vgl. Carrega 1989, 93).



Die zweite Näherungskonstruktion wurde 1828 im Crelle-Journal von einem Cand. Phil. Specht (also einem Kandidaten der Philosophie - damals gehörte die Mathematik noch zur Philosophischen Fakultät) veröffentlicht; diese realisiert die Näherung (vgl. Carrega 1989, 93) $\pi \approx \frac{1}{2}(2+\frac{3}{5})\sqrt{1+(2+\frac{1}{5})^2} \approx 3{,}1415919$. Sie möge hier für sich selber sprechen:

Annäherungs-Construction des Kreis-Umfangs und Flächen-Inhalts.

(Vom Herrn Cand. phil. *Specht* zu Berlin.)

Ist BC der Radius eines Kreises, so findet man den Umfang und Flächen-Inhalt dieses Kreises näherungsweise vermittelst folgender einfachen geometrischen Construction. Wenn man nemlich den Durchmesser BD (Fig. 13.) senkrecht auf BC stellt, und über D hinaus verlängert; alsdann auf dieser Verlängerung, $Da = ab = bc$, gleich dem fünften Theile des Radius nimmt; ferner die BC über C hinaus bis A verlängert, so daſs $BA = Ca$; endlich aus dem Puncte A mit der Cc die Parallele AE zieht, welche die Verlängerung von BD in E trifft: so wird die BE dem Umfange, und das Dreieck BCE dem Flächen-Inhalte des gegebenen Kreises sehr nahe kommen.

Für $BC = 1$ ist $Ba = 2\frac{1}{5}$, $Bc = 2\frac{3}{5}$,

$$Ca^2 = BC^2 + Ba^2 = \frac{146}{25}, \quad Ca = \frac{\sqrt{146}}{5},$$

$$BC : Bc = BA : BE,$$

$$1 : \frac{13}{5} = \frac{\sqrt{146}}{5} : BE \text{ und } BE = \frac{13\sqrt{146}}{25}$$

$$= \sqrt{39{,}7484} = 3{,}141591953 \ldots$$

Nun ist $\pi = 3{,}141592653\ldots$ woraus zu ersehen, daſs die Construction den Umfang und Flächen-Inhalt des Kreises bis zur sechsten Decimal-Stelle genau giebt.

Eine weitere interessante Konstruktion, die auf der Näherung $\pi \approx \frac{355}{113}$ beruht und von dem berühmten indischen Mathematiker S. Ramanuyan (1887-1920) stammt, findet man bei Carrega 1989, 94-96. Sie verläuft folgendermaßen:

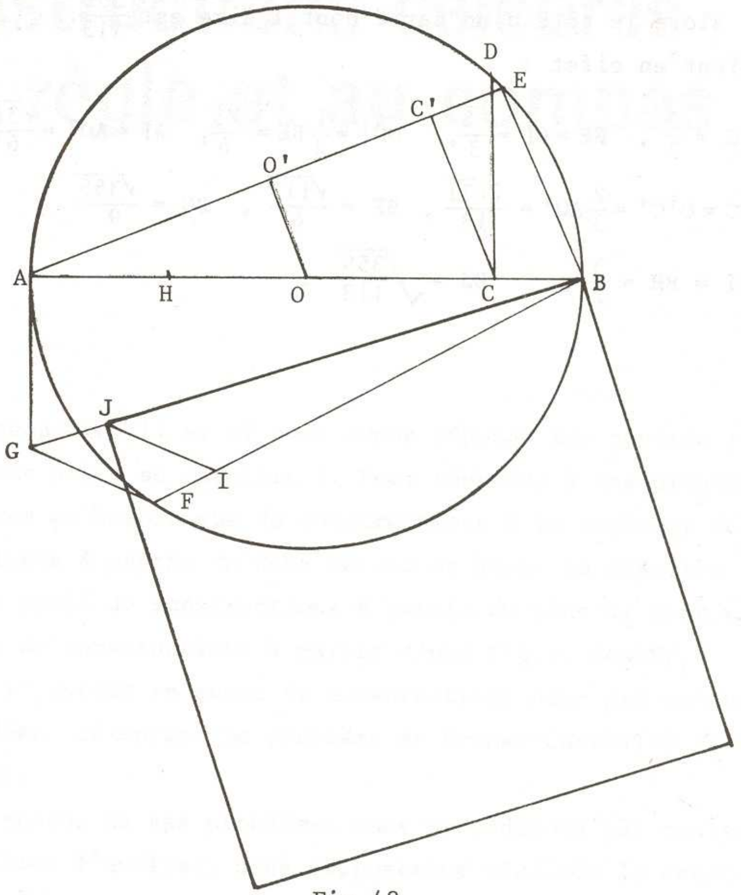


Fig.48

Bekanntlich sind auch heute noch Kreisquadrierer am Werk. Diese unterscheiden sich von Specht dadurch, dass sie den bloß angenäherten Charakter ihrer Konstruktionen nicht sehen. Meist hilft der Hinweis, es sei bewiesen, dass die Quadratur des Kreises unmöglich sei, auch nicht weiter.

5. Die Verdoppelung des Würfels

Die Vorgeschichte dieses Problems, bei dem es darum geht, einen gegebenen Würfel, allgemeiner einen gegebenen Körper, bezüglich seines Volumens zu verdoppeln (oder allgemeiner in einem vorgegebenen Verhältnis zu verändern), ist uns durch einen sich auf Eudemos stützenden Kommentar von Eutikios zu Archimedes' Schrift *Über Kugeln und Zylinder* überliefert (vgl. Heath I, 244f - den Originaltext findet man in Archimedes' *Opera* Band III). Dort wird zuerst von König Minos berichtet, der ein würfelförmiges Grabmal für Glaukos errichten ließ, welches in jeder Richtung 100 Fuß maß. Er soll aber mit dem Ergebnis unzufrieden gewesen sein, weshalb er befahl, das Grabmal dadurch zu verdoppeln, dass man jede seiner Kante verdoppelte. Es heißt dann weiter:
Die Geometer nahmen sich der Frage an, indem sie herauszufinden versuchten, wie man einen gegebenen Körper unter Beibehaltung seiner Form verdoppeln kann; das Problem bekam die Bezeichnung "Würfelverdopplung", weil sie vom Würfel ausgingen und versuchten,

diesen zu verdoppeln. Lange Zeit blieben ihre Versuche vergeblich; dann entdeckte Hippokrates von Chios als erster, daß sich der Würfel verdoppeln ließe, wenn es gelänge, zwischen zwei Strecken, deren größere doppelt so groß ist wie die kleinere, zwei mittlere Proportionale in stetiger Proportion einzuschieben. So wurde das Rätsel in ein anderes nicht minder schwieriges überführt. Nach einer gewissen Zeit, so die Geschichte, gerieten die Delier in die gleiche Verlegenheit, als ihnen das Orakel befahl, einen bestimmten Altar zu verdoppeln. (Heath I, 243; Übersetzung K. V.)
Schließlich sollen die Delier in ihrer Ratlosigkeit Platon befragt haben, der meinte, dem Gott, der durch das Orakel gesprochen habe, ginge es nicht darum, dass der Altar wirklich verdoppelt würde, sondern darum, die Griechen wegen ihrer Vernachlässigung der Mathematik zu beschämen.

5.1 Hippokrates' Beitrag

Bevor wir näher auf einige der von Eutokios erwähnten zwölf Lösungsversuche für die Würfelverdopplung eingehen, sei noch Proklos zitiert, der ebenfalls das Verdienst des Hippokrates erwähnt:
Die Zurückführung endlich ist der Übergang von einem Problem oder Lehrsatz zu einem andern, dessen Erkenntnis oder Lösung auch die vorliegende Aufgabe klärt. Als z. B. die Lösung des Problems der Würfelverdopplung gesucht wurde, übertrug man die Untersuchung auf ein anderes Problem, aus dem dieses folgt, nämlich die Auffindung der zwei mittleren Proportionalen, und untersuchte fortan, wie man zu zwei gegebenen Geraden [Strecken] zwei mittlere Proportionale finden könne. Als erster soll Hippokrates von Chios die Zurückführung des schwer zu lösenden Konstruktionsproblems vorgenommen haben , derselbe, der auch die Möndchen quadrierte und viele andere geometrische Entdeckungen machte, ein fähiger Kopf im Zeichnen und Kontruieren wie nur irgendeiner. Soviel hiervon. (Proklos 315f)
Was nun hat Hippokrates entdeckt? Sind zwei Größen a und b gegeben, die man sich zu jener Zeit üblicherweise als Streckenlängen dachte, so heißen allgemein zwei weitere Größen x und y zwei mittlere Proportionale zu a und b, falls gilt:

$$(1) \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b} \text{ mit } a < b.$$

In unserem speziellen Fall soll nun a = $\frac{1}{2}$b sein, also:

$$\frac{b}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2b}$$

Was diese Gleichung mit der gesuchten Lösung, also geometrisch gedacht mit der Kantenlänge $a\sqrt[3]{2}$ (in moderner Ausdrucksweise) zu tun hat, liegt nicht gerade auf der Hand. Leider ist nicht überliefert, wie Hippokrates selbst seine Behauptung begründet hat. Aber vielleicht hat er sich eine Rechnung wie die folgende vorgestellt:

$$\left(\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{x}}\right)^3 = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{x}} * \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}} * \frac{\mathrm{y}}{2\mathrm{b}} = \frac{1}{2},$$

welche zeigt, dass $\frac{x}{b}$ die gesuchte Kantenlänge ist.
Vielleicht hat er aber auch so gedacht: Setzen wir b = 1 und damit 2b = 2, so gilt:

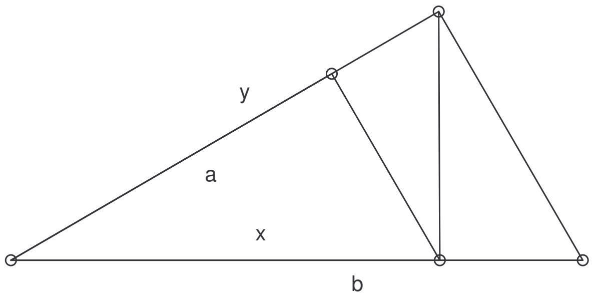
$$\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} = \frac{x^2}{x^3} \text{ mit } x^3 = 2$$

Setzt man $x^2 = y$, kommt man dann (bis auf eine Umstellung) auf die Gleichung (1). Im übrigen ist das Problem, eine mittlere Proportionale zu finden, aus der Elementargeometrie bekannt. Soll man x derart bestimmen, dass für gegebene a und b gilt:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

so kann dies leicht mit dem Höhensatz geschehen (Euklid II, 14). Man kann dies auch im Sinne einer Flächenverwandlung sehen: Gegeben das Rechteck mit dem Inhalt ab, gesucht ein flächengleiches Quadrat. Man darf vermuten, dass derartige Aufgaben schon von den Pythagoreern bearbeitet wurden, also etwa zeitgleich mit dem Auftreten des Problems der Würfelverdopplung. Wir werden weiter unten sehen, dass der Gedanke der Flächenverwandlung auch bei der Duplikation eine - wenn auch hier nicht konstruktive - Lösung (über Kegelschnitte nämlich) - liefert.

Die von Hippokrates beschriebene Situation steckt im Grunde genommen in jedem rechtwinkligen Dreieck. Betrachten wir ein derartiges Dreieck, in dem die Höhe eingezeichnet ist, so sind bekanntlich die beiden entstehenden Teildreiecke untereinander und dem großen Dreieck ähnlich (diese Tatsache liefert einfache Beweise für den Höhen- und den Kathetensatz). Die analoge Aussage gilt, wenn man in einem der beiden Teildreiecke nochmals die Höhe zieht.

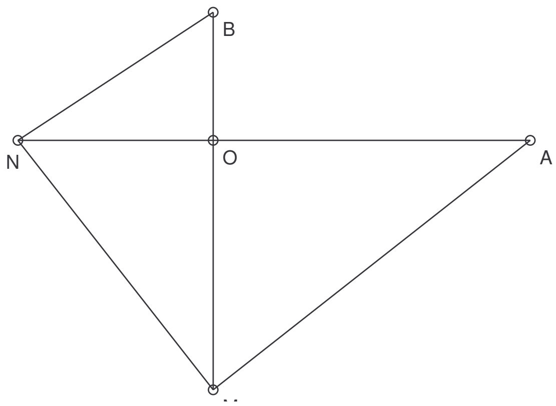


Man erhält dann folgende Verhältnisgleichheiten:

$$\frac{b}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{a}$$

also genau die Hippokratischen mittleren Proportionalen. Diese Einsicht liefert leider keine konstruktive Lösung, da die Kenntnis der Stücke a und b nicht hinreicht, um das fragliche rechtwinklige Dreieck herzustellen.

Die erste "Lösung", die Eutokios erwähnt, wird von ihm Platon zugeschrieben. Diese Zuschreibung gilt heute aus mehreren Gründen als fragwürdig (vgl. deren Diskussion bei Heath I, 255 und Knorr 1993, 57f); interessant ist aber auf jeden Fall, daß diese sehr nahe unserer obigen Einsicht bezüglich der rechtwinkligen Dreiecke kommt. Die Ausgangssituation ist nämlich die folgende:



Alle Winkel in O und die Winkel in M und in N sollen rechte sein. Anders gesagt führt dies dazu, dass die Verlängerung ON von AO und die Verlängerung OM von BO Höhen in den anliegenden rechtwinkligen Dreiecken sind. Folglich sind die drei rechtwinkligen Dreiecke AOM, OMN und OBN ähnlich und man findet:

$$\frac{|AO|}{|OM|} = \frac{|OM|}{|ON|} = \frac{|ON|}{|OB|}$$

Also sind |OM| und |ON| mittlere Proportionale. Aber auch hier überzeugt man sich schnell, dass die Kenntnis der Strecken AO und OB nicht hinreicht, um die Figur zu konstruieren. Platon soll deshalb, so Eutikios, ein mechanisches Hilfsmittel erfunden haben, mit dessen Hilfe man die gewünschte Figur zustande bringen kann (vgl. Heath I, 256 - 258 oder Knorr 1993, 57 - 61). Angesichts der Position, die Platon bezüglich der Philosophie der Mathematik vertrat, erscheint diese Behauptung von Eutikios ziemlich fragwürdig. Im übrigen werden wir sehen, dass die von Archytas angewandte Vorgehensweise (vgl. unten 4.4) letztlich auf die Erzeugung eines geeigneten rechtwinkligen Dreiecks mit zwei Höhen führt.
Festzuhalten bleibt jedenfalls, dass erst Hippokrates das Problem der Würfelverdopplung tatsächlich in ein ebenes Konstruktionsproblem - bei dem man, wenn man will, auf Zirkel und Lineal insistieren kann - transformiert hat. Es erstaunt insofern nicht, dass sich alle nachfolgenden Lösungsversuche Hippokrates' Transformation zu Nutzen machten.

Exkurs: Die Quadratverdopplung

Betrachtet man das Analogon zur Würfelverdopplung in der Ebene, so wird man auf die Quadratverdopplung geführt. Berühmt geworden ist dieses keineswegs schwierige Problem durch eine Stelle in Platons Dialog *Menon*. Diese Stelle, die ich gleich im Original zitieren werde, hat bei Platon die Funktion, seine so genannte Anamnesislehre zu erläutern. Diese besagt sehr knapp formuliert, dass Lernen stets ein Erinnern an in vorhergehenden Leben Gesehenes sei, das dann nur unbewusst zur Verfügung steht. Das entspricht in etwa der modernen These (J. Bruner), dass man jeden mathematischen Gegenstand auf jeder Entwicklungsstufe des Schülers intellektuell redlich diesem lehren könne.

Sokrates (zum Sklaven): Sage, mein Bursche, siehst du dieser viereckigen Fläche an, daß sie ein Viereck ist?
Sklave: Ja.
Sokrates: Es ist doch eine viereckige Figur mit lauter gleichen Seiten - diesen da -, vieren an der Zahl.
Sklave: Jawohl.

Sokrates: Sind nicht auch diese durch die Mitte (den Seiten parallel) gezogenen Linien gleich?
Sklave: Ja.
Sokrates: Eine solche Figur könnte man sich auch größer oder kleiner denken?
Sklave: Gewiss.
Sokrates: Wenn nun diese Seite zwei Fuß betrüge und auch diese zwei Fuß, wie viel Fuß betrüge das Ganze? Mache dir dies aber so klar: wenn die Strecke auf dieser Strecke zwei Fuß betrüge, auf dieser aber nur einen Fuß, würde nicht dann die Figur einmal zwei Fuß enthalten?
Sklave: Ja.
Sokrates: Da es aber auch auf dieser Seite zwei Fuß sind, kommen da nicht noch einmal zwei Fuß heraus?
Sklave: Das ist der Fall.
Sokrates: Die Figur enthält also zweimal zwei Fuß?
Sklave: Ja.
Sokrates: Wie viel macht aber zweimal zwei Fuß aus? Rechne es aus und sag' es mir.
Sklave: Vier, mein Sokrates.
Sokrates: Ließe sich nun ein zweites, doppelt so großes Viereck herstellen, und zwar von der gleichen Art, mit lauter gleichen Seiten, wie dieses?
Sklave: Ja.
Sokrates: Wie viel Fuß wird es also enthalten?
Sklave: Acht.
Sokrates: Wohlan denn, versuche mir zu sagen, wie lang jede Seite derselben sein wird. Die Seite unseres Vierecks hier ist zwei Fuß lang; wie lang wird nun aber die Seite des doppelten sein?
Sklave: Offenbar, mein Sokrates, doppelt so lang.
Sokrates (zu Menon): Du siehst doch, Menon, dass ich nichts lehre, sondern alles erfrage? Und jetzt glaubt er zu wissen, wie groß die Seite sei, welche das vierfüßige Quadrat ergeben soll. Oder scheint es dir nicht so?

Nach längeren Verhandlungen gelangt der Sklave schließlich zu der Einsicht, dass die Seite des großen Quadrates gerade die Diagonale des kleinen sein muss, was man natürlich leicht mit Hilfe des Satzes von Pythagoras erkennen kann. Eine andere Möglichkeit bietet der Höhensatz, indem man die Hypotenusenabschnitte gleich der gegebenen Quadratseite und gleich derem Doppelten nimmt. Das läuft darauf hinaus, das Rechteck mit den Kanten a und 2a zu quadrieren.

Einfach ist es übrigens auch, eine Kreisfläche zu verdoppeln. Hierzu trägt man auf einer Tangenten vom Berührradius aus den Radius ab und verbindet den entstehenden Endpunkt mit dem Kreismittelpunkt. So erhält man den Durchmesser der Kreisfläche doppelten Inhaltes.

5.2 Menaichmos und die Kegelschnitte

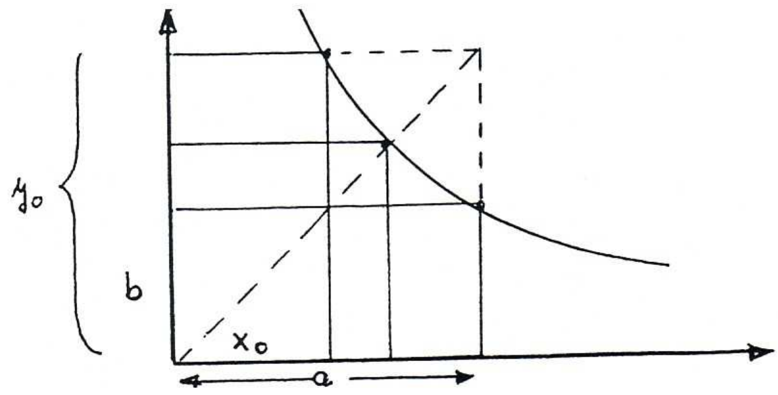
Das Verdienst, eine inhaltliche Interpretation des Hippokratischen Ansatzes gegebene zu haben, kommt Menaichmos (um 360 v. Chr.), dem Bruder des Deinostratos, zu. Menaichmos gilt als Entdecker der Kegelschnitte und seine Entdeckung könnte mit der Duplikation zusammengehangen haben.
Betrachten wir hierzu noch einmal unsere Ausgangsgleichung (1):

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

Fasst man hierin das erste und das letzte Verhältnis zusammen, so gelangt man zu der Gleichung

(2) $xy = ab$.

Diese lässt sich geometrisch interpretieren: Gegebenen ist ein Rechteck mit dem Inhalt ab; gesucht sind alle ihm flächengleichen Rechtecke, wobei x und y für dessen Seitenlängen stehen. Nimmt man für x etwa einen festen Wert, sagen wir x_0 an, so ist das zugehörige y_0 zu konstruieren. Dies lässt sich mit Hilfe der so genannten Ergänzungsparallelogramme (Euklid I, 45) leicht bewerkstelligen:



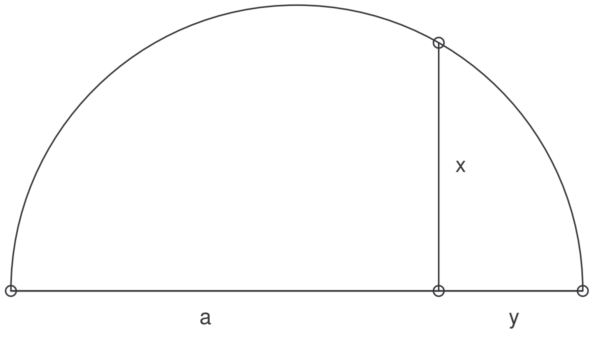
Als Ortslinie für die Eckpunkte aller dem Ausgangsrechteck flächengleichen Rechteck ergibt sich eine rechtwinklige Hyperbel (genauer gesagt: ein Ast derselben), was für uns sofort aus der Gleichung (2) ersichtlich wird:

(2') $y = \dfrac{ab}{x}$

Fasst man in (1) die ersten beiden Verhältnisse zusammen, so gelangt man zu einer ähnlichen Fragestellung wie eben:

(3) $x^2 = ay$

Hier geht es also darum, das Quadrat der Seitenlänge x in ein flächengleiches Rechteck mit der festen Seitenlänge a bei variabler Seitenlänge y zu verwandeln, was man mit Hilfe des Höhensatzes leicht durchführen kann:



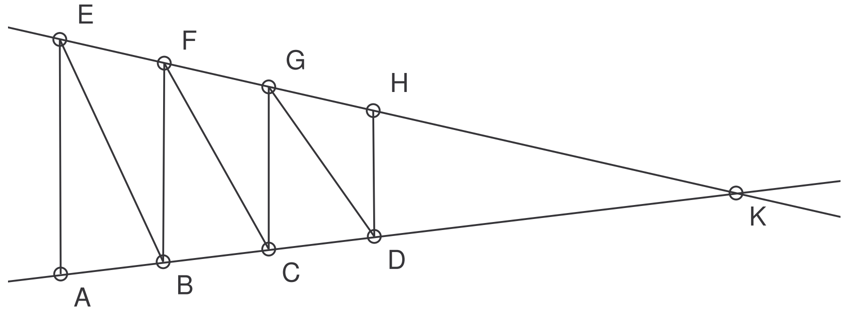
Modern betrachtet hat man es mit einer Parabel zu tun. Bringt man diese Parabel mit der Hyperbel zum Schnitt, so erhält man eine Lösung des Problems. Analog ergibt sich aus den beiden letzten Verhältnissen die Beziehung $y^2 = xb$, also für uns eine Wurzelfunktion. Natürlich könnte man deren Graph mit einer der beiden obigen Kurven schneiden und erhielte auch so eine Lösung. Weil bei Menaichmos' Lösung insgesamt drei Kurven im Spiel sind, sprach man schon in der Antike von der Triade des Menaichmos. Eine moderne Aufarbeitung der Ideen von Menaichmos findet man in dem lesenswerten Aufsatz Videla 1997.

Exkurs: Einige Bemerkungen zur Geschichte der Kegelschnitte im Altertum

Die Anfänge dieser Geschichte liegen im Dunkeln. Der erste antike Mathematiker, der im Zusammenhang mit Kegelschnitten erwähnt wird, ist der uns bereits bekannte Menaichmos. Dieser soll die Kegelschnitte (also Ellipse, Parabel und Hyperbel), die als Kurven schon zuvor im Zusammenhang mit Flächenverwandlungen bekannt gewesen sein dürften, als Schnitte von Ebenen mit Kegeln interpretiert haben. Dabei wird aber für jede Kurve eine andere Art von Kegel verwendet. Die Ellipse ist dann der Schnitt mit einem spitzwinkligen Kegel (eine Ausdrucksweise, die sich noch bei Archimedes findet), die Parabel jener mit dem rechtwinkligen und die Hyperbel (die nur einen Ast hat) jener mit dem stumpfwinkligen Kegel, dabei liegt die schneidende Ebene immer senkrecht zu einer Mantellinie. Bücher über Kegelschnitte sollen dann Aristaios der Ältere und Euklid verfasst haben. Diese wurden aber vollständig durch die *Konika* des Apollonios verdrängt und sind heute nur noch ihrem Titel nach bekannt.
Die *Kegelschnitte* des Apollonios von Perge gelten als einer der Höhepunkt der antiken Mathematik schlechthin. Sie enthalten zahlreiche Ergebnisse über die Kegelschnitte bis hin zu einer Art von Koordinatendarstellung derselben (sog.Symptome). Apollonios war es auch, der die Idee hatte, einen Doppelkegel zugrunde zulegen und die Lage der schneidenden Ebene zu variieren.
Lit. Heath I und II

5.3 Erathostenes und das Mesolab

Eine andere frühe planimetrische Lösung, fußend auf der Einsicht von Hippokrates, stammt von Erathostenes, seines Zeichens Bibliothekar am Museion in Alexandria (2. Hälfte des 3. Jhs. v. Chr.). Bekannt geblieben ist Erathostenes vor allem in der Geographie (Bestimmung des Erdumfanges) sowie durch das von ihm entdeckte Sieb für Primzahlen.
Da bei Hippokrates gleiche Verhältnisse auftreten, ist es sicherlich nicht abwegig, an eine Strahlensatzfigur von der folgenden Art zu denken, wobei $|AE|$ und $|DH|$ die beiden vorgegebenen Größen seien, zu denen zwei mittlere Proportionale (in der Figur sind dies $|BF|$ und $|CG|$) gesucht sind. Wir setzen voraus, daß die Geraden, auf denen die Strecken AE, BF, CG und DH liegen, parallel sind, ebenso wie die Geraden, auf denen AF, BG und CH liegen.



Dann gilt nach dem Strahlensatz, bezogen auf die Parallelen durch AE und BF bzw. durch BF und CG:

$$(1)\ \frac{|EK|}{|FK|}=\frac{|AE|}{|BF|} \text{ und } (2)\ \frac{|BK|}{|CK|}=\frac{|BF|}{|CG|}$$

Andererseits ist nach dem Strahlensatz bezogen auf die Parallelen durch EB und FC:

$$(3)\ \frac{|EK|}{|FK|}=\frac{|BK|}{|CK|}$$

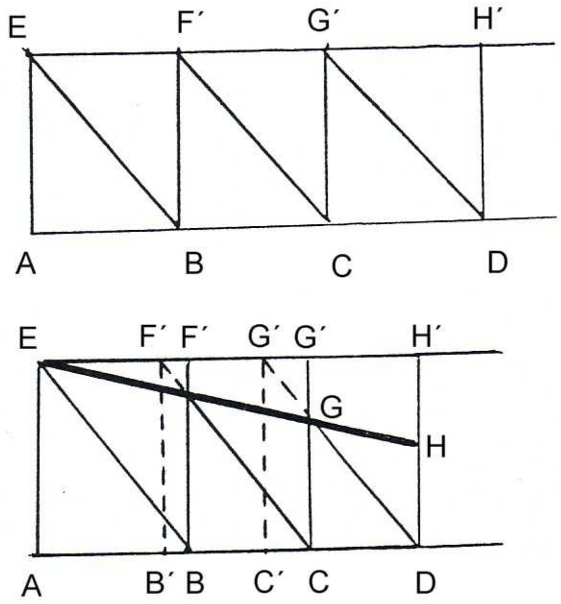
Zusammengefasst erhält man aus (1), (2) und (3) die Gleichheit:

$$\frac{|AE|}{|BF|}=\frac{|BF|}{|CG|}$$

Analog findet man unter Verwendung der Parallelen durch FC und GD:

$$\frac{|BF|}{|CG|}=\frac{|CG|}{|DH|}$$

Also leistet die Figur das Gewünschte, womit die Analysis beendet ist.
Die Konstruktion (Synthesis) geschieht mit Hilfe eines mechanischen Instrumentes, das Erathostenes Mesolab (etwa Mittelnehmer) nannte.
Dieses besteht aus einem Rahmen, in dem drei Plättchen beweglich eingelassen sind - und zwar so, dass man das zweite hinter das erste und das dritte hinter das zweite schieben kann. Die Plättchen haben die Form kongruenter rechtwinkliger Dreiecke (anderen Quellen zufolge sind es kongruente Rechtecke mit eingezeichneten Diagonalen). Die Länge der Strecke AE sei gleich der größeren der beiden gegeben Größen, diejenige von DH sei gleich der kleineren der gegebenen Größen. Nun schiebe man das zweite Plättchen hinter das erste, das dritte hinter das zweite. Das Ziel hierbei ist, die Schnittpunkte F und G sowie die gegebenen Punkte E und H in eine gerade Linie zu bringen. Erreicht man dies, so ergibt sich genau die oben analysierte Situation. Um das Verschieben kontrolliert durchführen zu können, benutzte man ein Lineal, das die Punkte A und D verband und in D beweglich war.



Ersichtlich handelt es sich bei Erasthostenes' Lösung nicht um eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal sondern um eine mechanische Lösung, welche Ausprobieren erfordert. Man kann im übrigen das Mesolab dazu verwenden, n mittlere Proportionale zu erzeugen, wenn man n+1 Plättchen installiert.
Es sei noch angemerkt, dass der Lütticher Polyhistor R.F. de Sluse (1622 - 1685) im Jahre 1659 ein umfangreiches Werk mit dem Titel *Mesolabum* veröffentlicht hat, in dem er unter anderem die Würfelverdopplung und allgemeiner die Einschiebung von n mittleren Proportionalen behandelte.

Literatur:

Archimedes. *Werke*. Übersetzt und mit Anmerkungen versehen von A. Czwalina (Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1982).

Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen zur Kreismessung. Übersetzt und hg. von F. Rudio (Leipzig: Teubner, 1892).

Aristoteles. *Von der Seele*. Übersetzt von O. Gigon (München: dtv, 1996).

Aristoteles. *Physikalische Vorlesung.* Übersetzt von P. Gohlke (Paderborn: Schöningh, 1975).

Becker, Oskar. *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung* (Frankfurt a. M.: Suhrkamp, 1975).

Beutel, E. *Die Quadratur des Kreises* (Teubner: Berlin - Leipzig, 1913).

Beutelspacher, A./Petri, B. *Der Goldene Schnitt* (Mannheim u.a.: BI, 1989).

Bos, H.J.M. *Redefining Geometrical Exactness* (New York u.a.: Springer, 2001)

Bretschneider, C. A. *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides* (Leipzig: Teubner, 1870).

Buhrow, J. *Fünfeckskonstruktionen von berühmten Künstlern* (Mathematik lehren Heft 49 (1991), 34 - 36).

Carrega, J.-C. *Théorie des corps. La règle et le compas* (Paris: Hermann, ²1989).

Clausen, T. *Vier neue mondförmige Flächen, deren Inhalt quadrierbar ist* (Journal für die reine und angewandte Mathematik 21 (1840), 375f).

Constructions approchées de polygones réguliers. Publié par l'IREM de Caen/Basse - Normandie 1995.

Drinfel'd, G. I. *Quadratur des Kreises und Transzendenz von π.* Mit Ergänzungen von H. Pieper (Berlin: VEB Wissenschaften, 1980).

Euclid. *The Thirteen Books of the Elements*. Übersetzt und kommentiert von Sir Th. L. Heath. 3 Bände (New York: Dover, 1956).

Euklid. *Die Elemente* (Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1980).

Gericke, H. *Mathematik in Antike und Orient. Mathematik im Abendland* (Sonderausgabe in einem Band. Wiesbaden: Fourier, 1992).

Heath, Sir Th. *A History of Greek Mathematics. Vol. I* (New York: Dover, 1981).

Heath, Sir Th. *A History of Greek Mathematics. Vol. II* (New York: Dover, 1981).

Heuser, G.: *Geschichte der Geometrie von Thales bis Euklid* (Luzern o.J.)

Hilbert, D. *Grundlagen der Geometrie* (Stuttgart: Teubner, ¹¹1972).

Hilbert, D. *Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900.* In. Hilbertsche Probleme, erläutert von einem Autorenkollektiv unter Redaktion von P. S. Alexandrov (Leipzig: Teubner, 1979).

Hobson, E. W. *Squaring the Circle.* In: Squaring the Circle and other Monographs (New York: Chelsea, 1969).

Hogendijk, J.P. *Greek and Arabic Construction of the Regular Heptagon* (Archive for History of Exact Science 30 (1984), 197-330)

Hofmann, J.E. *Dürer als Mathematiker* (Praxis der Mathematik 13 (1971), 85-91 und 117-122)

Johnson, A. et al. *Abstract Algebra and Famous Impossibilites* (Newe York u.a.: Springer, 1991).

Joseph, G. G. *The Crest of the Peacock* (London u.a.: Penguin, 1992).

Kellerhans, R. *Nichteuklidische Geometrie und Volumina hyperbolischer Polyeder* (Mathematische Semesterberichte 43 (1996), 155 - 168).

Kropp, G. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (Mannheim u.a.: BI, 1968).

Knorr, W. R. *The Ancient Tradtion of Geometric Problems* (New York: Chelsea, 1993).

Liebscher, D.-E. *Relativitätstheorie mit Zirkel und Lineal* (Berlin: Akademie Verlag, 1991).

Lohnstein, R.: Die *Siebzehn-Teilung des Kreises in elementargeometrischer Herleitung* (Zeitschrift für den mathematisch- und naturwissenschaftlichen Unterricht 49 (1918), 303-312)

Martin, G. E. *The Foundations of Geomety and the Non-Euclidean Plane* (New York u.a.: Springer, 1986).

Meschkowski, H. *Grundlagen der euklidischen Geometrie* (Mannheim u.a.: BI, 1966).

Niebel, , E. *Untersuchungen über die Bedetung der geometrischen Konstruktionen in der Antike* (Kantstudien Ergänzungsheft 76) [Köln, 1959].

Numéro spécial π (Supplément au Petit Archimède nr. 64 - 65 (mai 1980)).

Pappos. *La collection mathématique.* 2 tomes. Übersetzt und hg. von P. van Eecke (Paris - Brügge: Brouwer, 1933).

Pasch. M. *Vorlesungen über neuere Geometrie* (Berlin: Springer, ²1926).

Peiffer, J./Dahan, A. *Wege und Irrwege* (Basel: Birkhäuser, 1994).

Platon. *Der Staat*. Übersetzt von O. Apelt (Hamburg: Meiner, 1961).

Proklos. *Kommentar zum ersten Buch von Euklids "Elementen"*. Übersetzt von L. Schönberger, hg. von M. Steck (Halle a. d. S.: Leopoldina, 1945).

Rudio, F. *Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates* (Leipzig: Teubner, 1907).

Rudio, F. (1892) siehe: Archimedes, Huygens, Lnambert, Legendre

(Dold-)Samplonius, Y. *Die Konstruktion des regelmäßgien Siebenecks nach Abu Sahl al-Quhi Waigan ibn Rustam* (Janus 50 (1963), 227 - 249).

Scheid, H. *Elemente der Arithmetik und Algebra* (Mannheim u.a.: BI, 1991).

Schönbeck, J. *Euklid durch die Jahrhunderte.* In: Jahrbuch Überblicke Mathematik 1984, hg. von S. D. Chatterji u.a. (Mannheim u.a.: BI, 1984).

Schupp, H./Dabrock, H.: *Höhere Kurven* (Mannheim u.a.: BI, 1995)

Seidenberg, A. *The Ritual Origin of Geometry. Part 1* (Archive for History of Exact Sciences 1 (1960/62), 488 - 527), *Part II* (Archive for History of Exact Sciences 2 (1965), 1 - 40).

Seidenberg, A. *The Origin of Mathematics* (Archive for History of Exact Sciences 18 (1977/78), 301 - 342).

Steele, A. D. *Über die Rolle von Zirkel und Lineal in der griechischen Mathematik.* (Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik Abteilung B: Studien. Band 3 (1936), 287 - 369).

Stevenhagen P./Lenstra, H. W. jr. *Chebatarev and his Density Theorem* (The Mathematical Intelligencer 18 no.2 (1996), 26 - 37).

Stolz, O. *Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes* (Mathematische Annalen 22 (1883), 504 - 519).

Struve, H. *Wechselwirkungen zwischen Geometrie und Geometrieunterricht im 19. Jahrhundert (Teil I).* In: Der Wandel im Lehren und Lernen von Mathematik und Naturwissenschaften. Band 1: Mathematik, hg. von J. Schönbeck, H. Struve und K. Volkert (Weinheim: Deutscher Studien Verlag, 1994), 152 - 168.

Toepell, M. *Der verlorengegangene Mittelpunkt* (Didaktik der Mathematik 3 (1989), 218 - 242).

Toussaint,G. *A New look at Euclid's Second Proposition* (The Mathematical Intelligenzer 15 Heft 3 (1993), 12 - 23).

Tropfke, J.: *Geschichte der Elementarmathematik. Band 4: Ebene Geometrie*. Bearbeitet von K. Vogel (Berlin, de Gruyter ^{3}1940).

Veronese, G. *Fondamenti di geometria* (Padua, 1891).

Volkert, K. *Die Krise der Anschauung* (Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1986).

Volkert, K. Die *Lehre vom Flächeninhalt ebener Polygone* (Mathematische Semesterberichte 46 (1999), 1-28)

Volkert, K. *Konstruktion und Anschauung*. In: Dialogisches Handeln, hg. von M. Astroh u.a. (Heidelberg u.a.: Spektrum, 1997), 130 - 149.

Weber, H./Wellstein, J. *Enzyklopädie der Elementarmathematik. Band 1: Algebra und Arithmetik* (Leipzig: Teubner, ^{3}1909).

Weber, H./Wellstein, J. *Enzyklopädie der Elementarmathematik. Band II: Geometrie* (Leipzig, ^{2}1907).

Wolff, H.: Über eine algebraische Behandlung des regulären Siebzehnecks (Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 49 (1918), 299-303)

Zeuthen, H. *Die geometrischen Constructionen als "Existenzbeweis" in der antiken Geometrie* (Mathematische Annalen 47 (1896), 222 - 228).