XI

DISCORSO
MATEMATICO
SOPRA
IL ROTAMENTO MOMENTANEO DEI CORPI
DEL
CAVALIERE GIULIO MOZZI
Patrizio Fiorentino.

IN NAPOLI MDCCLXIII.
Nella Stamperia di Donato Campo.
Con licenza de' Superiori.

Del Catt. Riva

AL R. P. D. PAOLO FRISI

C. R. della Congregazione di S. Paolo P. Prof: dell' Università di Pisa, e M: delle Accademie Reali di Londra, di Pietroburgo, di Berlino, e dell' Istituto di Bologna.

IO indirizzo à V. Rev. questa Operetta, non già per dedicarla ad un gran Geometra, che le dia grido con la chiarezza del suo nome, ma per sottoporla al giudizio d' un rispettabile, ed illuminatissimo Amico, dal quale vorrei, che senza parzialità indicato me ne fosse il giusto valore; Imperocchè essendo la medesima composta con tenue Studio unicamente diretto ad interrompere l'ozio nojoso, a cui mi condanna la pertinace mancanza della ſalute: potrebbe per avventura accadere che in iſcambio di racchiudere (come mi ſembra) alcune ſcoperte Meccaniche non diſpregevoli, ella altro non conteneſſe , che errori nuovi, o vecchie Verità non molto importanti; Contuttociò per ſi fatta dubbiezza non iſtimo inconveniente cóſa il pubblicarla, deſiderando, che ſe giammai vi foſſe alcuno utile ritrovamento poſſano toſto qualche frutto ritrarne i coltivatori della Scienza, e ſapendo altresì, quanto poco debba rincreſcermi il vedere che altrimenti addivenga, mentre io non profeſſo le Matematiche, ne ho la vana pretenſione d' eſſer tenuto in quelle per ſolenne Maeſtro. Se il mio libretto è capace di giovare altrui, ne ſarò pienamente contento; ma qualora ei ſi rimanga in eterno ripoſo entro le Librerie l'amerò ſempre nondimeno; perchè lo ſcriverlo mi dette qualche ſollievo, e lo ſtamparlo mi ſomminiſtra un occaſione di manifeſtare al pubblico l'alta ſtima, con la quale mi dichiaro, di V. R.

Dev. e Obb. Serv.
Giulio Mozzi

INTRODUZIONE

Giovanni Bernoulli (1) fu il primo Geometra, che imprese a determinare generalmente come debba ritrovarsi il principio del moto prodotto in un qualunque corpo da una qualsivoglia potenza al medesimo applicata, della quale note siano la quantità, e la direzione; Da lui fu avvertito, che qualora la forza non sia diretta al centro di gravità del Mobile, quello sempre incomincia à moversi rotando, e girando nel primo momento intorno ad una linea, che egli forse chiamò Asse spontaneo di rotazione, perchè il corpo non è necessitato a volgersi dall' immobilità d'un asse materiale, ma quasi spontaneamente si aggira in virtù della sola cagione Motrice. Il metodo, che usa quel valentuomo per risolvere sì fatta questione è interamente fondatò sul verisimile supposto, che tutti gli Elementi del cor-

a 3 *po*

(1) Joann. Bernoulli Operum Tomo 4

po riceverebbero dalla potenza impressa quello stesso moto, che in realtà ne ricevono, se in vece di rimanere ove sono, fossero tutti trasposti nel piano condotto per lo centro di gravità, e per la linea di direzione della forza, e respettivamente collocati venissero nei punti, ne quali incontrano quel piano le perpendicolari sul medesimo abbassate dal vero sito di ciascheduno elemento; Ma noi dimostreremo, che questo principio, ad onta della sua verisimiglianza rare volte s' avvera, valendo solo quando s' adempiono alcune condizioni, che saranno indicate, e conducendo poi in tutti gli altri casi all' errore, cioè alla falsa determinazione dell' asse, e della velocità circolare, ed al tralasciamento del moto rettilineo, e parallelo all' asse medesimo, che ciascheduna parte del corpo concepisce, mentre incomincia à rotare: Ed ancorchè il discorso del Bernoulli sorgesse da miglior fonte, non si potrebbe tenere la soluzione del suo Problema nè per ottima, nè per generale, come quella, che in molti luoghi è manchevole

della

della dovuta chiarezza, e che affatto insufficiente diviene quando più forze, che giaciono in varj piani sono impresse nel corpo: Contuttociò ella è stata la norma di tutti gli autori (1)*, che hanno finora trattato dello stesso soggetto, fra li quali non si ritrova chi ne alteri la sostanza, o almeno ne accenni i difetti essenziali fedelmente copiati da ciascheduno. Estrana cosa è a parer mio, che neppure abbia voluto notarli l'incomparabile Signor d'Alembert nella Dinamica* (2)*, dove parlando della rotazione istantanea de' corpi li considera indistintamente come figure piane, e viene così à prevalersi del tacito supposto adottato per poco accorgimento dagli altri, quantunque di sicuro Ei potesse correggerlo, come quegli, che diede nell' aureo libro della Precessione degli Equinozi i primi lumi necessarii per intraprendere il ritrovamento del mo-*

 to

[1]. Vedi L' Op. di Taylor, Simpson, La Caille.

[2]. Alembert. Dynam. Lem. 18.

to in qualunque istante del tempo, essendo date le forze motrici, che in qualsivoglia maniera agiscono sopra il corpo; E sebbene questa generalissima questione sia stata dipoi compiutamente risoluta dal grande Eulero, nuovo può stimarsi tuttavia il Problema del rotamento momentaneo, che solo ricerca in qual guisa incominci à muoversi il corpo in virtù delle note potenze impresse; imperocchè sì fatta questione si dee sciorre senza l'ajuto dell'altra, essendo di quella infinitamente più semplice, anzi servendole, come in appresso vedremo, di base fondamentale. Ma comunque voglia dirsi il Problema, novissimo è, se troppo non m'inganno, il modo di cui mi vaglio per risolverlo, nuove sono ancora alcune verità non poco importanti che io li prepongo in forma di Lemmi, ed affatto intatte mi pajono varie ricerche Meccaniche le quali intendo aggiugnere per dimostrare la semplicità, e la generalità del mio Metodo:

Me-

Metodo che potrebbe eziandio facilmente applicarsi alle più sublimi speculazioni Fisico-matematiche con sicurezza di ritrovare sempre il vero, mentre egli ha il pregio non comune d'esser fondato sopra principi indubitati, la mancanza de' quali rende del tutto infruttuose le fatiche del Geometra, che sovente per cotal difetto con i suoi difficilissimi calcoli altro non prova, che il proprio ingegno, e la pazienza de' Leggitori

LEM-

L E M M A I.

1. SE una sfera si muove, mentre il di lei centro rimane in quiete, dico, che in ciaschedun' istante del moto essa dovrà rivolgersi intorno ad un asse immobile: che sarà uno de' suoi diametri.

2. Sia la sfera OEPD, che in qualunque guisa si aggiri intorno al suo centro immobile C. E poichè si suppone, che per il movimento essa non cangi figura, dovranno sempre tutte le parti, che la compongono serbare fra loro la medesima distanza; laonde fingendo, che in TAV. I. Fig. 1.

 qua-

qualunque istante il punto A della di lei superficie si muova, ei scorrerà in un momento, o in un tempo infinitamente piccolo una piccolissima porzione di curva A *a* giacente sopra la superficie sferica OA*a*P, poichè altrimenti movendosi, converrebbe, che ei si allontanasse dal Centro C, o che vi si approssimasse. Inoltre perchè la curva A*a* e infinitamente piccola essa potrà considerarsi come composta di due piccole linee rette, e perciò come descritta in un piano A*a* DE, ed in conseguenza come una piccolissima porzione del cerchio A*a*DE tagliato dallo stesso piano nella superficie della sfera; E condotta per il centro C la perpendicolare CP al piano A*a*DE, che incontri in P la superficie sferica, è manifesto, che mentre il punto A descrive l'archetto A*a*, farà d'uopo che il punto P rimanga in quiete, poichè, se ei si movesse non potrebbe conservare la stessa distanza da tutti i punti della linea

AC,

AC, che alla fine del ſuppoſto iſtantaneo moto ſi ritroverà in aC; reſtando dunque fermo il punto P, reſterà ancora immobile tutta la linea PCO, e intorno a queſto diametro in quel momento ſi rivolgerà tutta la sfera.

COROLLARIO I.

3. Quello, che della sfera ſi dimoſtra debbe ancora verificarſi in qualunque altro corpo, o ſiſtema di corpi collegati inſieme, che ſi muovano in qualunque guiſa intorno a un punto immobile, poichè quel punto può conſiderarſi come il centro d'una sfera, che immagineremo conneſſa con il ſiſtema di cui ſi tratta.

COROLLARIO II.

4. Quindi è, che un ſiſtema di corpi uniti inſieme, oltre il moto rettilineo comune a tutte le ſue parti, altro movi-

mento non potrà avere, che un moto di rotazione intorno ad un asse condotto per il di lui centro di gravità. Poichè supposto che a tutto il sistema venga impresso un movimento eguale, e contrario a quello del centro di gravità, il medesimo centro si potrà riputare come fisso, e perciò il moto rimanente alle parti tutte, che compongono il sistema sarà solamente un movimento di rotazione intorno ad un asse, che passerà per il suddetto centro. Dunque &c.

COROLLARIO III.

5. Adunque qualsivoglia corpo, che si muova, in ciascun istante del moto due soli movimenti potrà avere, uno di rotazione intorno il centro di gravità, e l' altro progressivo in linea retta comune a tutte le parti sue.

CO-

COROLLARIO IV.

6. Quindi ancora si potrà dedurre, che i suddetti due movimenti si riducono a due altri, uno de' quali sarà rettilineo e comune a tutte le parti del corpo, e parallelo all' asse di rotazione, che passa per il centro di gravità, e l'altro pure di rotamento, che avrà un asse di rotazione parallelo all'asse mentovato. TAV. I. Fig. 2.

7. Sia C, il centro di gravità del corpo; la direzione del suo movimento sia CD; l' asse di rotamento CS; CHI un piano perpendicolare a CS. Il moto CD del centro di gravità si risolva in due moti DP, CP; e DP sia parallelo a CS, e. CP giacia nel piano CPH congiungendo il centro C, e il punto P, ove DP incontra quel piano; dipoi nel piano stesso si conduca la CH perpendicolare a CP. E perchè tutti i punti P, H del piano PHC hanno insieme con il centro C il moto CP, e nel medesimo tempo ne hanno un

 altro

altro di rotazione intorno a CS, è chiaro, che nella linea CH troveraffi un punto H, il quale non avrà movimento alcuno nella direzione del piano PCH, poichè il fuo moto circolare HI farà uguale, e contrario al moto CP. E parimente per la ragione medefima non avranno alcun moto in quella direzione i punti tutti della linea HE parallela a CS, onde intorno ad effa fi rivolgerà tutto il fiftema, mentre ei fi muoverà in linea retta fecondo la direzione PD. Dunque &c.

DEFINIZIONE.

8. Chiameremo l'affe HE *affe fpontaneo* di rotazione.

LEMMA II.

9. *Date tre forze giacenti in un piano, due delle quali abbiano tendenze oppofte,*

poste, e direzioni parallele, a cui sia perpendicolare la direzione della terza forza, si ricerca la loro forza resultante, o sia quella, che equivale alle date potenze

10. Siano le due forze uguali FE, CD, che agiscano con direzioni parallele FE, CD, la prima da F in E; la seconda da C in D, e sia la terza forza AB colla direzione BA perpendicolare a CD. Si prolunghino le linee CD, FE tanto, che incontrino la linea AB in L, e in N; si prenda LG uguale alla metà di AB, ed MN=LG, LK=CD, ed NO=FE. Si compiscano i rettangoli LH, NR, e si prolunghino le loro Diagonali RN, LH, fino che si congiungano nel punto P. E prolungata la linea LP, si prenda la PS=LH, e la PT=RN=PS. Di poi formato il parallelogrammo TPSX si conduca per il punto X la di lui diagonale PX, che sarà uguale ad AB, e rappresenterà la TAV. I. Fig. 3.

 for-

forza resultante dalle tre forze BA, FE, CD.

11. Perchè, supponendo ne' punti L, N applicate le forze LG, LK, NM, NO, è manifesto, che queste equivarranno alle tre forze date; ma alle forze LG, LK, NO, NM equivagliono le forze LH, NR, ed a queste, le altre due PS, PT applicate al punto P, e similmente alle forze PS, PT equivale la forza PX. Dunque &c.

COROLLARIO V.

12. E' ancora evidente, considerata la figura, che la direzione della forza PX (uguale alla forza AB) è parallela ad AB, e che la distanza ΥI delle due parallele BA, PX è $= \frac{CD.IN}{AB}$, perchè abbiamo LG: GH :: GI : $I\Upsilon$, o sia $\frac{AB}{2}$: DC :: $\frac{LN}{2}$: ΥI.

AL-

ALTRA DIMOSTRAZIONE.

13. Questa verità si può anco dimostrare in un' altra maniera. TAV. I. Fig. 4.

14. Sia il triangolo isoscele FLC, e si concepiscano applicate le due forze eguali FE, CD a' punti F, C, che agiscano secondo la direzione de' lati FL, CD, l' una traendo da F in E, l' altra da C in D. E' manifesto, che potendosi considerare queste due forze come applicate nel punto L, la loro forza resultante sarà espressa dalla diagonale LM del parallelogrammo NO, i di cui lati sono uguali alla forza FE, e che la LM sarà parallela alla CF, ed uguale alla $\frac{FC.LN}{LF}$. Laonde, se si suppone, che le linee FL, LC divengano parallele, sarà LM $=$ $\frac{FC.LN}{\infty}$. E, se si voglia in quel caso comporre la forza LM con un altra qualunque forza AB parallela alla FC, la loro forza resultante XP sarà uguale ad AB,

AB, e la diſtanza di XP dalla linea AB ſarà $\frac{FC.LN}{AB}$, perchè avremo AB : $\frac{FC.LN}{\infty}$: : LX (∞) : XA. Dunque &c.

COROLLARIO VI.

15. Adunque ſupponendo, che l' angolo L ſia infinitamente piccolo, potraſſi ſupporre, che la forza reſultante dalle forze FE, CD ſia la ſola LM uguale ad $\frac{FE.FC}{\infty}$, vale a dire ad una forza infinitamente piccola perpendicolare alla direzione delle forze FE, CD (che poſſono riguardarſi come parallele), e ſituata a una diſtanza infinita dalla FC.

COROLLARIO VII.

TAV. I. Fig. 5. 16. E ſe oltre le due forze + EF, − CD avremo nel piano NLD due altre forze uguali + cd, − ef, che abbiano oppoſta tendenza, e direzioni parallele alla linea

linea NF, e che siano tali, che stia EF: ef:: nl: NL le quattro mentovate forze s' equilibreranno fra loro ; perchè la forza resultante $\frac{NL.EF}{\infty}$ dalle due prime sarà uguale , e contraria alla resultante $-\frac{nl.ef}{\infty}$ delle seconde : ciò si verificherà ancora, se le due forze cd, $-ef$ non saranno nel piano NLD , ma in un piano nld a quello parallelo, il che già si può dimostrare nella medesima maniera ; perchè le linee LD , ld s' incontreranno sempre in un punto a una distanza infinita ; ma puossi eziandio provare considerando , che sempre la forza resultante dalle due forze positive FE , cd è uguale, e direttamente opposta a quella , che resulta dalle altre due forze negative $-$CD, $-ef$, come facilmente ciascheduno intenderà, quando avverta, che ambedue queste forze resultanti giaciono nella interfezione del piano , che passa per le linee EF , cd , e del piano condotto

dotto per le altre due parallele CD, *ef*.

LEMMA III.

TAV. I. Fig. 6. 17. *Sia la forza* f, *che agisca nella direzione* FL *paralella alla linea* Ol, *e sia* FO *perpendicolare a* Ol, *dico, che la forza* f *equivarrà alla stessa forza* f *traente nella direzione* Ol, *e ad una forza infinitamente piccola uguale ad* $\frac{FO \cdot f}{\infty}$, *che agirà perpendicolarmente ad* FL *a una distanza infinita dal punto* O.

18. Questo è evidentissimo. Imperocchè supposto, che le due paralelle FL, O*l* si congiungano a una distanza infinita dal punto O, potrassi considerare la forza *f*, come applicata nel punto dell' immaginato congiungimento nella direzione medesima FL, e risoluta poi questa forza in due, l' una perpendicolare ad OF, e l' altra giacente nella *l*O, avrassi la prima uguale ad $\frac{f \cdot FO}{\infty}$, e la seconda ugua-

uguale ad $\frac{f \cdot OI}{FL} = f$, essendo F L, O l ambedue uguali all' infinito.

LEMMA IV.

19. *Agisca la forza* φ *nella direzione* R P *perpendicolare al dato piano* C P E, *e la forza* f *agisca nella direzione* F L *parallela allo stesso piano: si cercano due forze a queste equivalenti, una delle quali giacia nel piano, e l' altra gli sia perpendicolare.* TAV. I. Fig. 7.

20. Per la linea F L s'intenda condotto il piano F C M perpendicolare al piano P C M, che lo seghi nella linea C M, a cui sia parallela la P E; la forza f per quello, che abbiamo dimostrato è equivalente alla stessa forza applicata secondo la direzione della linea C M, e alla forza $\frac{f \cdot CF}{\infty}$ applicata perpendicolarmente al piano C M P in un punto infinitamente distante dal punto C, e in conseguenza infini-

finitamente diſtante ancora dal punto P. E ſiccome queſta è applicata nella prolungazione della CM, potraſſi conſiderare ſenza errore, come applicata nella prolungazione della PE, che a CM è parallela. Laonde la forza reſultante dalla forza ſuddetta, è dalla forza φ, che agiſce nella direzione RP, ſarà uguale ad $\varphi + \frac{f \cdot CF}{\infty}$, e agirà in una direzione DH perpendicolare al mentovato piano, tagliando la PE nel punto H in guiſa tale, che PH : ∞ :: $\frac{CF \cdot f}{\infty}$: φ; onde ſarà $PH = \frac{CE \cdot f}{\varphi}$, e così avremo la forza $\varphi + \frac{CF \cdot f}{\infty}$ (o ſia φ), e la forza f applicate l' una perpendicolarmente al piano nel punto H, e l' altra nella linea CM, equivalenti alle forze date. Q. E. I.

21. Queſto può dimoſtrarſi ancora in altra guiſa ſenza la conſiderazione di alcuna quantità infinitamente piccola.

22. Si congiungano i punti C, P, colla

la linea CT, ed in un punto T della mede- TAV. I.
sima suppongasi agire una forza K perpen- Fig. 8.
dicolarmente al piano COH, nella direzione parallela ad RP, e un' altra forza nel punto C, che sia uguale alla forza $\phi - K$, la quale però stia alla forza K come TP: CP. E' chiaro, che queste due forze equivarranno alla forza ϕ applicata in P, ed è altresì manifesto, che la forza $\phi - K$ applicata in C potrassi considerare come applicata in F, e che questa forza insieme colla forza f applicata nella direzione FL, comporranno una terza forza, che agirà nella direzione FO, la quale intersegherà la CM nel punto O in tal maniera, che CF starà a OC come $\phi - K$ ad f: è ancora evidente, che la forza traente nella direzione FO potrà considerarsi come applicata nel punto O, e come risoluta in due forze una delle quali agirà nella direzione OM, e sarà uguale ad f, e l'altra perpendicolarmente al piano OMH, e sarà uguale ad $\phi - K$. E condotta dal punto

to O al punto T la linea OT, farà OH: HT :: CP : PT. E perciò la forza φ applicata perpendicolarmente in H equivarrà alle forze $\varphi - K$, e K applicate ne punti O, e T.

23. Onde questa forza insieme colla forza f applicata in O nella direzione OM farà equivalente alle date forze, come già abbiamo ritrovato, e la distanza PH del punto H dal punto P farà pure come ritrovammo $\frac{CF \cdot f}{\varphi}$. Imperocchè abbiamo CO (o sia $\frac{CF \cdot f}{\varphi - K}$) : PH :: CT : PT :: $\varphi : \varphi - K$.

OSSERVAZIONE.

24. E' necessario avvertire, che le forze infinitamente piccole da noi considerate sono veramente un mero nulla, come apparisce dalle dimostrazioni, che abbiamo dato con metodo geometrico, e rigoroso di quelle stesse verità, nella prova

va delle quali ci ſiamo prevaluti delle immaginate quantità infinitamente piccole per far meglio comprendere, come ſi poſſa ſempre ſenza verun'errore, ſoſtituire nel calcolo a due forze uguali, che abbiano oppoſta tendenza, e direzioni parallele una ſola forza zero perpendicolare alla direzione di quelle, e applicata a una infinita diſtanza dal corpo, ſopra cui agiſcono le dette forze.

L E M M A V.

25. *Siano* Lp, E k *due forze, che* TAV. I.
abbiano direzioni parallele, e tendenze Fig. 8.
contrarie, e ſiano Lm, Eq *due altre forze, ſimilmente parallele, e di contraria tendenza, e s' incontrino le linee delle loro direzioni ne' punti* F, L, *l*, E: *dico, che, ſe ſtarà* LF *ad* Ll; *come* Lm *alla* Lp, *le quattro forze s' equilibreranno fra loro.*

26. Compito il parallelogrammo L o,

ed il parallelogrammo E *n*, è manifesto, che L *o* sarà uguale ad E*n*, e che giaceranno ambedue nella stessa linea L E; ma la linea L*o* rappresenta la forza resultante dalle forze L*m*, L*p*, e la linea E*n* rappresenta quella, che risulta dalle forze E*k*, E*q*; dunque &c.

COROLLARIO VIII.

27. Adunque alle due forze L*p*, E*k* equivagliono le altre due L*m*, E*q*.

COROLLARIO IX.

28. Da quello, che abbiamo detto si raccoglie, che date più forze, ciascheduna delle quali abbia qualsivoglia direzione, e qualunque valore, potrannosi sempre ritrovare due forze sole, che a tutte quelle equivagliano, una delle quali sia perpendicolare a un dato piano preso a piacimento, e l' altra giacente nel piano medesimo. Imperocchè colle semplici regole

gole della Meccanica elementare si possono risolvere tutte quelle forze in forze parallele al piano, e in forze allo stesso perpendicolari, ed altresì per quello, che sopra dimostrammo, facilmente si comprende, che le forze risultanti dalle prime, e dalle seconde si riducono a due forze sole, una delle quali sarà perpendicolare al piano, e l' altra in quello situata. Inoltre è chiaro ancora, che ambedue insieme, e l' una, e l' altra separatamente potranno essere queste forze resultanti da tutte le potenze date uguali a zero, e poste a una distanza infinita dal corpo, sopra cui agiscono, e che in simil caso il loro nullo valore sarà espresso dalla frazione $\frac{AF}{\infty}$, A essendo una qualunque quantità nota, ed F una funzione lineare delle date forze, delle quali $\frac{AF}{\infty}$ è la resultante.

29. Siano molti corpi sciolti, e interamente liberi, e in ciascheduno di quelli si suppongano impresse tali forze, che comunichino loro nel primo istante del moto una velocità comune, o angolare, o rettilinea, intantochè essi si muovano, conservando sempre fra loro le medesime distanze: dico che l'istesse forze produrranno gl'istessi movimenti in que' corpi, quando eglino, rimanendo nella primiera situazione, siano collegati insieme, o da verghe inflessibili, o da qualunque altro non cedente legame.

Questa verità è di per se manifesta. Imperocchè, il nuovo legame, altro non essendo, che un mero impedimento alla mutazione delle distanze respettive de' corpi, ei non può in veruna maniera cambiare l'effetto delle forze, dalle quali quelle medesime distanze non sarebbero alterate, se i corpi fossero sciolti.

PRIN-

PRINCIPIO II.

30. Ad un corpo di qualunque figura isolato, e sciolto, o in qualsivoglia guisa legato, o impedito, intantochè Ei non possa muoversi liberamente, se saranno applicate varie forze e. gr. A, B, C, D, E &c., alcune delle quali A, B, C gli communicherebberò moti uguali, e direttamente opposti a quelli, che nel medesimo istante in esse produrrebbero l' altre forze rimanenti D, E &c, dico, che tutte quelle potenze insieme A, B, C, D, E &c. staranno fra loro in equilibrio, sempre che il corpo rimanga nello stato supposto.

31. Imperocchè in virtù delle forze A, B, C, e delle forze D, E; &c. avendo tutte le parti del corpo tendenze uguali, e direttamente contrarie (come si suppone) esse tutte resteranno immobili, e per conseguenza staranno in equilibrio fra loro le potenze al corpo applicate.

COROLLARIO X.

32. E perchè due forze uguali, e direttamente opposte stanno in equilibrio, è manifesto, che, agendo separatamente sopra un qualunque corpo gli communicherebbero uguali, ed opposti movimenti.

PROBLEMA I.

TAV. I. Fig. 5. 33. Data la quantità, e la direzione della forza FL impressa in un qualunque dato sistema di picciolissimi corpi V, *u* collegati insieme, determinare il principio del moto di tutto il sistema.

34. Qualunque siasi il ricercato movimento, per quello, che sopra abbiamo dimostrato, potrassi sempre risolvere in due moti l'uno circolare, l'altro rettilineo comune a tutte le parti del sistema, e parallelo all'asse di rotazione. *num. 6.*

35. Sia dunque PR*p* l'asse spontaneo di rotazione, e per la linea PR*p*, e il pun-

punto G, centro di gravità di tutto il ſiſtema ſi concepiſca condotto il piano Pp $GLMm$. Per la data linea di direzione FL ſi conduca il piano FLO perpendicolare al piano ſuddetto PGp. Dal punto O ſi abbaſſi ancora la perpendicolare OS alla GE prolungata, e ſia GE nel piano PRG parallela a PR, che in conſeguenza di quello, che dimoſtrammo ſarà la direzione del moto rettilineo del centro G. Sia anche GR perpendicolare a PR, ed LD perpendicolare ad RD.

36. Inoltre per maggior chiarezza i corpi V rappreſentino quelli ſituati al di ſopra del piano PGp, e i corpi u quelli, che ſono dall' altra parte dello ſteſſo piano. E per ciaſchedun punto V, u s'intendano condotti i piani VMP, ump perpendicolari al piano PGp, ed alla linea Pp. E ſiano VH, ub gli archetti, che i ſuddetti corpi deſcriveranno girando intorno all' aſſe Pp; A queſti archetti ſi concepiſcano condotte le tangenti HM,

 bm,

bm, che incontrino il piano PGp ne' punti M, m, e si abbassino le perpendicolari VQ, uq alle linee PM, pm. E' manifesto, che le velocità di rotazione de' corpi V, u staranno fra loro come gli archetti VH, ub. Ed è ancora evidente, che se a ciaschedun corpo V fosse applicata nella direzione VM quella forza (*) per cui esso corpo

* *In questo trattato supporremo sempre, che tutte le forze di qualunque genere si siano, producano nel corpo, a cui sono applicate in un solo istante quella velocità, con la quale il corpo descriverebbe equabilmente in un dato tempo infinitamente piccolo* dt, *il piccolo spazio, che realmente descrive con il moto accelerato prodotto dalla forza. Sì fatto supposto facilita la soluzione del Problema senza nuocere all' esattezza. Imperocchè è noto, che la velocità vera acquistata in quel tempetto* dt *è sempre doppia della mentovata uniforme velocità, quando l' azione della forza è continua. Finalmente tuttociò si riduce a considerare in ogni istante il moto, come equabile, e le curve come poligoni, il che è permesso.*

po ſolo, e iſolato deſcriverebbe la lineetta VH nel tempo, nel quale ora la deſcrive, è chiaro dico, che tutte queſte forze inſieme con quella, che agendo ſul centro di gravità produrrebbe nel ſiſtema la ſua velocità nella direzione GE dovrebbero fare equilibrio ad una forza uguale, e contraria alla forza FL; poichè ſicuramente quelle forze genererebbero nel primo momento del moto l'iſteſſo effetto, che nel ſiſtema de' corpi V, u &c. ſi ſuppone prodotto dalla forza FL. n. 29. 30.

37. Ciò poſto ſia M la maſſa di tutti i corpi V, u &c. che compongono il ſiſtema; U la velocità, che in eſſo produrrebbe la forza FL applicata al centro di gravità G; e la ſuddetta forza FL ſarà MU.

38. Sia la velocità di rotazione del centro G intorno all' aſſe Pp, $= \varphi$ e la velocità del centro nella direzione GE $= \Delta$. Siano inoltre, quattro incognite, v. gr. f, x, y, z, che determinino la poſi-

poſizione dell'aſſe ignoto Pp, (giacchè la ſituazione d'ogni linea, che non giace in un piano dato dipende da quattro indeterminate,) e così avremo ſei incognite, e trovando ſei equazioni, che le contengano ſi perverrà alla ſoluzione del Problema.

39. La velocità di ciaſchedun corpo V ſarà $\frac{PV.\varphi}{RG}$, e ſimilmente la velocità di ciaſchedun corpo u ſarà $\frac{pu.\varphi}{RG}$; e le loro forze ſaranno $\frac{PV.\varphi.V.}{PG}$, $\frac{pu.\varphi.u}{RG}$. E' chiaro, che queſte forze, che ſi conſiderano come applicate a' corpicciuoli V, u, nelle direzioni VM, um potrannoſi ancora riguardare, come ſe foſſero applicate ne' punti M, m colle ſteſſe direzioni. E riſolta ciaſcuna delle medeſime in due altre forze, una delle quali ſia perpendicolare al piano PGp, e l'altra giacente nel piano ſteſo, facilmente ſi ſcorge, che le forze perpendicolari al piano ſaranno $\frac{PQ.\varphi.V}{RG}$; $\frac{pq.\varphi.u}{RG}$ e quel-

quelle in esso situate $\frac{VQ.\varphi.V}{RG}$, $\frac{Vq.\varphi.u}{RG}$. Prendiamo ora le forze resultanti dalle suddette, e dalla forza GE, o sia MΔ, che insieme debono fare equilibrio con la forza impressa MU nella direzione LF. Secondo i noti principj della Meccanica la forza resultante dalle forze perpendicolari $\frac{PQ.\varphi.V}{RG}$ sarà pure perpendicolare al piano PGp, e la sua direzione lo segherà in un punto, la di cui distanza dalla linea Pp sarà $= \frac{\int \frac{PM.PQ.\varphi.V}{RG}}{\int \frac{PQ.\varphi.V}{RG}}$ o sia $\int \frac{\overline{PV}.^2 V}{RG.M}$. E similmente la distanza di quel punto dalla linea RD sarà $\frac{\int \frac{PR.PQ.\varphi.V}{RG}}{\int \frac{PQ.\varphi.V}{RG}}$, o sia $\int \frac{PR.PQ.\varphi.V}{RG.M}$. E perchè la somma totale delle forze $\frac{VQ.\varphi.V}{RG}$, $\frac{uq.\varphi.u}{RG}$ è uguale a zero; attesochè il piano PGp passa per il centro di gravità, sarà la forza resultantante dalle forze superiori $\frac{VQ.\phi.V}{RG}$ uguale in valore, e contraria nella direzione alla forza resultante dalle forze inferiori $\frac{uq.\phi.u}{RG}$ la prima di queste sarà $\int\frac{VQ.\phi.V}{RG}$, e supposto, che CI parallela ad RD sia la sua direzione, sarà Ga, perpendicolare alla medesima, uguale ad $\frac{\int RP.VQ.\phi.V}{\int VQ.\phi.V}$, e così medesimamente la seconda forza l'avremo uguale a $\int\frac{uq.\phi.u}{RG}$ della quale supponendo esser la direzione, ci, parallela alla RD sarà la perpendicolare G$b=\frac{\int Rp.uq.\phi.u}{\int uq.\phi.u}$, e per conseguenza sarà ba (distanza delle due parallele C I, ci) $\frac{\int RP.VQ.\phi.V}{\int VQ.\phi.V}+\frac{\int Rp.uq.\phi.u}{\int uq.\phi.u}$

num. 10. adunque in virtù del precedente Lemma avremo il valore della forza resultante dalle forze CI, ic, GE, uguale a quello della forza GE$=$MΔ, e sarà la sua direzione perpendicolare ad RD. E la distanza della medesima linea di direzione dalla linea GE sarà

$$\frac{\int \frac{VQ.\varphi.V}{RG} \left(\frac{\int RP.VQ.\varphi.V}{\int VQ.\varphi.V} + \frac{\int Rp.uq.\varphi.u}{\int uq.\varphi.u} \right)}{M\Delta}$$

$= \int \frac{RP.VQ.V.\varphi}{RG.M\Delta}$, sì perchè $\int \frac{VQ.\varphi.V}{RG}$ è uguale ad $\int \frac{uq.\varphi.u}{RG}$, come ancora, perchè $\int RP.VQ.\varphi.V$ considerata assolutamente esprime l'intera somma delle quantità $PR.VQ.\varphi.V$, ed $Rp.uq.\varphi.u$, quali abbiamo voluto separare per ridurre con maggior chiarezza il caso presente a quello del mentovato Lemma.

40. La forza impressa FL ora s'intenda risoluta in due forze, una delle quali giaccia nel piano PGp, e l'altra gli sia perpendicolare, la prima sarà $\frac{LO.MU}{FL}$, e la seconda $\frac{FO.MU}{FL}$. E siccome queste potenze considerate come agenti con tendenza direttamente contraria alla loro dovrebbero fare equilibrio con le due forze resultanti dal movimento del sistema, che sopra ritro-

trovammo, bisognerà, che abbiano lo stesso valore di quelle, e respettivamente la medesima direzione, laonde nasceranno le sei seguenti equazioni.

I. $\int \frac{PQ.\varphi.V}{RG}$, o sia $\frac{RG.\varphi.M}{RG}$, o sia Mφ $= \frac{FO.MU}{FL}$.

II. $M\Delta = \frac{LO.MU}{FL}$.

III. $\int \frac{RP.PQ.V}{RG.M} = LD$.

IV. $\int \frac{PV.V}{RG.M} = RD$.

V. $\int \frac{RP.VQ.\varphi.V}{RG.M\Delta} = GD$.

VI. $GD = OS$.

E poichè nelle presenti equazioni i membri sono tutti indipendenti l'uno dall' altro, e tutti debbono essere espressi da quantità note, e dalle sei incognite che determinano la natura del Problema è manifesto, che in qualunque caso particolare ne potremo ottenere la soluzione.

CO-

COROLLARIO XI.

41. Poichè LO debbe sempre esser parallela a GE, apparisce dalle due prime equazioni, che la velocità assoluta del centro di gravità è quella stessa, che nel corpo avrebbe prodotto la forza FL applicata al mentovato centro in una direzione parallela alla linea FL.

COROLLARIO XII.

42. Da quello, che abbiamo dimostrato si raccoglie, che essendo LD uguale a zero, la linea di direzione della forza FL taglierà nel punto D la linea DR senza esser perpendicolare al piano DPp, ed altresì, che divenendo zero nello stesso tempo LD, ed LO; la direzione della forza FL taglierà la linea RD, e sarà perpendicolare al piano suddetto. E perchè GD (o sia $\int \frac{R\,P.\,V\,Q.\,\phi.\,V}{R\,G.\,M\,\Delta}$) si suppone mantenersi

nersi di grandezza finita, quando LO, ovvero MΔ diventa zero converrà, che sia zero ancora $\int$RP.VQ. $\circ$.V, onde ne segue, che l' asse di rotazione Pp sarà solamente perpendicolare al piano, che passa per il centro di gravità, e per la direzione della forza impressa, allorchè si ridurranno insieme a zero $\int$RP.PQ.V, e $\int$RP.VQ.V. Ma non già in tutti i casi, come ha creduto Giovanni Bernoulli, che nella ricerca del centro spontaneo di rotazione in qualsivoglia corpo, assume sì fatto supposto per principio evidente, fondandovi sopra l' intera soluzione del Problema, la quale necessariamente è fallace, ogni volta che le mentovate quantità non siano zero; e siccome l' autorità d'un Geometra tanto sublime potrebbe con ragione far sospettare, che quelle debbano esser sempre zero, qualunque siasi il sistema de' corpi, e la direzione della forza impressa, noi mostreremo in un caso semplicissimo la possibilità del contrario, dopo po aver riſoluto il ſeguente.

PROBLEMA II.

43. Dato il ſiſtema de' corpi V, *u* &c. ſi ricerca qual forza convenga imprimerli, affinchè il centro di gravità G ruoti intorno la data linea P*p* con la data velocità *φ*.

44. Ritenendo la figura del precedente Problema, e conſiderando le Equazioni del medeſimo, toſto ſi vede, che per ſciogliere il preſente conviene ritrovare il valore d'una ſola incognita, che è la forza MΔ, e che ſi raccoglie dalla quinta Equazione $\int \frac{RP.VQ.\varphi.V}{RG.M\Delta} = GD$; Onde $M\Delta = \int \frac{RP.V.\varphi.V}{RG.GD}$ vale a dire uguale ad una quantità nota, perchè dipendente dalla data ſituazione dell' aſſe P*p*.

45. Ciò premeſſo ſupponiamo, che tutto il ſiſtema ſia ridotto a due ſoli corpi V, *u* uguali, ed infinitamente piccoli, uniti inſieme mediante una verga infleſſibile; e per il TAV. I. *Fig.* 10.

 loro

loro centro di gravità G s'intenda condotto un piano qualunque in cui non giaccia la linea Vu; e abbassate le perpendicolari VQ, uq a quel piano si concepisca in esso una qualunque linea Pp, che non sia parallela alla Qq, e che non la tagli tra i punti Q, q; E ritrovata una forza,
num. 44. che dia al sistema un qualsivoglia movimento di rotazione intorno la linea Pp, facilmente si scorgerà, che in questo caso non possono esser mai zero le due quantità $\int RP.PQ.V$, e $\int RP.VQ.V$; imperocchè abbiamo VQ positiva, ed uq negativa; PR positiva, e Rp negativa; e QP, e qp ambedue positive. Onde $\int RP.PQ$ è uguale a $+RP.+PQ-Rp.+pq = \overline{PQ-pq}\,PR$; e $\int VQ.PR.$ è eguale a $+PR.VQ-Rp.-uq=2PR.VQ$.

Questo solo caso con evidenza dimostra essere insussistente il principio adottato dal Bernoulli, il che dedurrassi eziandio in qualche modo dalla soluzione del seguente Problema; ove si tratta di trovare il

rota-

rotamento del corpo, quando nel medesimo sono più forze impresse non giacenti nello stesso piano, le quali perciò non possono ridursi giammai ad una sola forza.

PROBLEMA III.

46. Date più forze, ciascheduna delle quali agisca in qualsivoglia direzione sopra il sistema de' corpi V, *u*, si cerca il movimento di tutto il sistema nel primo istante del moto.

47. Appena è necessario osservare, che questo Problema è poco diverso dal precedente, mentre contiene le medesime incognite, e somministra quasi l'istesse equazioni per ritrovarne il valore, a motivo che tutte le applicate potenze possono ridursi come abbiamo dimostrato a due forze sole. *num.* 33. *num.* 28.

48. Ritenute adunque tutte le denominazioni sopra indicate sia *lO* la direzione della forza resultante dalle forze giacenti nel TAV. I. *Fig.* 11.

piano PGp, ed FL la direzione di quella, che resulta dalle forze perpendicolari al piano medesimo, la prima di queste due potenze sia Mu, e la seconda MU. E prolungata la lO sino in d, e condotta la perpendicolare LD ad RD; e da un qualunque punto O della linea lO abbassata la perpendicolare OS a GE, è patente, che avremo.

I. $M\varphi = MU.$

II. $M\Delta = Mu.$

III. $\int \frac{RP.PQ.V}{RG.M} = LD$

IV. $\int \frac{\overline{PV}^{2}.V}{RG.M} = RD$

V. $\int \frac{RP.VQ.\varphi.V}{RG.M\Delta} = Gd$

VI. $OS = Gd$

COROLLARIO XIII.

49. Poichè lO debbe esser sempre parallela a GE, dalle due prime equazioni apparisce, che qualunque sia il numero delle potenze, l'assoluta velocità del centro

tro di gravità sarà sempre quella, che nel sistema avrebbero prodotto le medesime forze tutte applicate al suddetto centro nelle loro rispettive direzioni.

OSSERVAZIONE.

50. Potrebbe alcuno pensare, che interamente non fosse esatto il nostro metodo, perchè noi abbiamo soltanto considerato ne' corpi V, *u* &c. le forze $\frac{PV.\varphi.V}{RG}$ &c. traenti nelle direzioni VM &c. quando i corpi medesimi rotando intorno l'asse P*p* non descrivono le lineette VH, ma bensì i piccioli archi V*t*, onde a motivo della loro rotazione vengono ad esser animati, e dalle forze VH.V, e dalle forze H*t*. V, che furono neglette. Ma questo dubbio tosto svanirà, qualora si rifletta, che trattandosi di movimento istantaneo, dovevamo necessariamente trascurare le H*t*.V, poichè esse sono infinitamente piccole rispetto alle forze TAV. I. Fig. 9. [A]

ze VH. V, che abbiamo calcolato. Nulladimeno non tralasceremo di mostrare a quali equazioni si pervenga, calcolando le forze centrali $Ht.V$, mentre non sempre conviene ometterle come nel presente Problema.

51. E' chiaro, che, riguardando noi il cerchio come un poligono d' infiniti lati, avremo nell' arco descritto dal centro di gravità G la lineetta corrispondente ad $Ht = \frac{dt^2.\varphi^2}{RG}$, onde sarà la forza centrale del corpicciuolo G; $\frac{V.dt.\varphi^2}{RG}$, che per maggior brevità chiameremo $k.V$; E la forza centrale di qualunque punto V sarà per conseguenza $\frac{PV.k.V}{RG}$. E se queste forze si considerano come applicate ne' punti P &c. della linea Pp, colle loro direzioni VP &c. E risolutele poi in forze perpendicolari, e parallele al piano PGp se s' aggiungono alle forze già calcolate HV.V &c. le sei Equazioni del Problema, che includono l' equilibrio delle potenze impresse, e delle

le forze refultanti dalla rotazione , e dal movimento rettilineo del corpo diverranno le feguenti.

$$\text{I.}\quad M\varphi = MU.$$

$$\text{II.}\quad Mu = M\sqrt{\Delta^2 + k^2}$$

$$\text{III.}\quad \int \frac{\overline{PV}^2 . V}{RG . M} + \int \frac{PQ . VQ . V . k}{RG . M . \varphi} = RD.$$

$$\text{IV.}\quad \int \frac{PR . PQ . V}{RG . M} + \int \frac{PR . VQ . V . k}{RG . M . \varphi} = LD.$$

$$\text{V.}\quad Gd = \int \frac{PR . VQ . \varphi . V}{RG . M\Delta} \pm \frac{k}{\Delta} \int \frac{PR . PQ . V}{RG . M}$$

$$\text{VI.}\quad OS = Gd \mp \frac{k . dO}{\sqrt{\Delta^2 + k^2}} .$$

Bifogna avvertire, che la linea O*d* è una quantità arbitraria, e che la direzione *d*O della forza impreffa M*u* non viene ad effere efattamente parallela alla *Pp* quando fi computano le forze centrali; le quali però (come fi vede nelle Equazioni del Problema) o non producono alcun cambiamento, o lo producono infinitamente piccolo, e perciò trafcurabile nel noftro cafo.

52. Potrebbefi ancora in altra guifa rifolvere il prefente Problema, ricercando qual movimento darebbe al fiftema, de' cor-

corpi ciascheduna delle applicate potenze, se fosse unica, e componendo poi tutti quei moti nascenti dalle azioni separate delle forze col ridurli a due soli movi-
num. 5. menti l'uno circolare, e l'altro rettilineo; Imperciocchè è evidentissimo esser la medesima cosa il supporre una forza applicata ad un corpo, e l'immaginare quel corpo animato da quei moti, che la stessa forza in esso produrrebbe nel primo istante della sua azione. Il componimento de' moti rettilinei del centro di gravità è insegnato dalla Meccanica Elementare, e quello de' movimenti di rotazione, che si suppongono nello stesso tempo impressi in un qualsivoglia mobile, fu ultimamente scoperto da due celebri Geometri della nostra Italia (*a*), che per diverse vie arrivarono alla medesima verità: Ma siccome sì fatto metodo sembra disapprovato dal chiarissimo Sig. d' Alem-

[a] *Il Sig. D Tommaso Perelli, e il P. Frisi Barnabita Pubblici professori nell' Università di Pisa.*

Alembert (*a*), credo, che non disconvenga in questo luogo il verificarlo, facendo vedere, che si perviene alla stessa conclusione, e quando si cerca il moto, che imprimono al corpo le forze risultanti dalle potenze applicate, e quando si combinano insieme i movimenti, che nascono separatamente dall'azione di ciascuna potenza: E ciò intendo dimostrare appunto nel caso che esamina quel gran Geometra, ove ei condanna il sopraddetto metodo.

L E M M A VI.

53. *Dato il cerchio* NVM, *e il punto* P *nel suo diametro* MN, *e divisa tutta la circonferenza in parti uguali infinitamente piccole, che chiameremo* V, *trovare il valore di* $\int \overline{\text{PV}}^2 \text{V}$. TAV. II. Fig. 12.

Sia PG $=l$, MQ $=$ x, il raggio GM $=a$, la

[a] *D'Alembert sur le sistemè du Monde t. 2. p. 179.*

la ragione del raggio alla circonferenza ſia $r : c$; avremo $PQ = x - a + l$, e $\overline{PV}^2 = \overline{PQ}^2 + VQ^2 = x^2 - 2ax + a^2 + 2lx - 2al + ll + 2ax - xx = a^2 + 2lx - 2al + ll$. E $\overline{PV}^2.V$ ſarà $a^2.V + \overline{2lx - 2al}.V + ll.V$: E' $\int \overline{PV}^2.V$ in tutto l'ambito della circonferenza ſarà $a^2.\frac{ac}{r} + ll.\frac{ac}{r} = \frac{a^3c + llac}{r}$. Perchè è chiaro, che quando x diviene *uguale* al diametro, l'integrale di $\overline{2lx - 2al}.V$ diventa zero, eſſendo in quel caſo la ſomma de' termini negativi uguale a quella de' poſitivi; come facilmente ſi può comprendere conſiderando, che la quantità $x - a$ è negativa fintantochè x è minore del raggio, e poſitiva poi, quando x diviene maggiore di a, conſervando ſempre l'iſteſſo valore ne' punti equidiſtanti dal centro G.

COROLLARIO XIV.

54. Dunque ſuppoſto, che ſia diviſa

tutta

tutta l'area del cerchio MVN in particelle V uguali, e infinitamente piccole farà in tutta quell'area $\int \overline{PV}^2 . V = \frac{a^4 c}{4r} + \frac{a^2 l^2 c}{2r}$. Di più immaginando, che fia defcritta una sfera con il centro G, e col raggio *a*, e nel di lei cerchio maffimo MPN condotta la PPP perpendicolare al diametro MN, e da ciafchedun punto del corpo sferico abbaffata una perpendicolare VP alla linea PP, e confervate fempre le medefime denominazioni farà in tutta la folidità della sfera $\int \overline{PV}^2 . V = \frac{4a^5 c + 10 a^3 l^2 c}{15 r}$; il che facilmente fi raccoglie dalle regole elementari del calcolo integrale.

PROBLEMA IV.

55. Data una sfera defcritta col raggio GP e date due forze *l*, *q*, che agifcano perpendicolarmente al piano GMN ne' punti M, N pofti nella circonferenza del cer- Tav. II. Fig. 13.

cerchio massimo PMN si cerca l' asse, e la velocità di rotazione della sfera nel primo istante del moto.

56. Congiunti i due punti M,N colla linea MN si divida la medesima in L in tal guisa, che sia ML : LN : : q : l; E in vece delle due forze l, q, potremo considerare la sola forza $l + q$ come applicata nel punto L perpendicolarmente al piano PMN, equivalendo essa alle altre due; è patente altresì, che l'asse spontaneo di rotazione PR giacerà nel piano PMN, e che sarà perpendicolare al diametro LG, poichè trattandosi d' una sfera, esser debbono necessariamente uguali a zero $\int PR.PQ.V$, e $\int PR.VQ.V$. e in conseguenza diverrà zero ancora M.Δ essendo $\int \frac{PR.VQ.V.\circ}{RG.M\Delta}$ uguale ad una quantità finita, vale a dire uguale a GL; quindi è, che dobbiamo cercar soltanto il valore di RG.

57. Sia adunque il raggio a, e sia (per isce-

iſcegliere un caſo facile) retto l' angolo MGN; ſi denomini GR, x, ed avremo $\int \frac{\overline{PV}^2 V}{RG.M} = x + GL$; e perchè M (o ſia la ſolidità di tutta la sfera) è uguale $\frac{2a^3c}{3r}$; e $GL = \frac{a\sqrt{q^2+l^2}}{q+l}$, ed $\int \overline{PV}^2 . V = \frac{4a^5 + 10x^2a^3c}{15r}$; avremo $6r\ (\frac{4a^5c + 10a^3x^2c}{60a^3crx}) = x + \frac{a\sqrt{q^2+l^2}}{q+l}$; $x = \frac{2aq+2al}{5\sqrt{q^2+l^2}}$.

58. Volendo ora ritrovare la velocità di rotazione intorno l'aſſe, che paſſa per il centro di gravità G, e che è parallelo all'aſſe ſpontaneo PR, biſognerà prima trovare la ſua velocità di rotazione intorno il punto R, e da quella detrarre la velocità aſſoluta del punto G, che è $\frac{q+l}{M}$, e che è comune a tutte le parti del ſiſtema.

59. E ſiccome RG ſta ad RO, o ſia ad RG + GO come $\frac{q+l}{M}$ alla velocità di rotazione del punto O intorno il punto R ſarà queſta uguale a $\frac{q+l}{M} + \frac{aq+la}{RG.M}$, e la

ve-

velocità ricercata del punto C intorno il centro di gravità G farà $\frac{aq + al}{RG.M}$, o fia $\frac{\frac{5}{2}\sqrt{q^2 + l^2}}{M}$. Q.F.I.

COROLLARIO XV.

TAV. II. Fig. 14. 60. Da quello, che abbiamo dimoftrato facilmente fi deduce, che agendo foltanto la forza q nel punto N farebbe la velocità di rotazione del punto N intorno l' affe GM uguale $\frac{5q}{2M}$, e la velocità del centro G perpendicolare al piano MGN uguale a $\frac{q}{M}$, e fimilmente che agendo la fola forza l nel punto M farà la velocità di rotazione del punto M intorno l'affe GN uguale a $\frac{5l}{2M}$, e la velocità del centro G uguale ad $\frac{l}{M}$.

PRO-

PROBLEMA V.

61. Si muova realmente il punto M intorno l'asse T N colla velocità di rotazione $\frac{5l}{2M}$, e il punto N muovasi intorno la linea G M colla velocità $\frac{5q}{2M}$; inoltre abbia il centro G nello stesso tempo i due moti perpendicolari al piano G M N, $\frac{q}{M}$, ed $\frac{l}{N}$, si cerca qual movimento debba concepire la sfera.

62. Sia M I K un cerchio massimo perpendicolare a T N, e T I N un altro cerchio massimo perpendicolare a M K. Siano I F, I E le tangenti di questi due cerchi, condotte per il punto I, ove essi s'intersegano, e da quel punto si conduca ancora al centro G la linea I G; di più nel piano F I E si concepisca condotta la diagonale I D del parallelogrammo F E, i di cui lati I F, I E siano proporzionali alle quantità $\frac{5l}{2M}$, $\frac{5q}{2M}$: e per le linee I D, I G passi il piano I G O perpendicolare al piano M G N, perchè allo stesso I G è perpendicolare: Sia ancora G S

nel

nel piano MGN perpendicolare alla linea GO, in cui i due piani MGN, IGO s'interſegano.

63. E perchè il punto I ſi ſuppone aver la velocità $\frac{sl}{2M}$ nel cerchio KIM, ed aver poi nello ſteſſo tempo la velocità $\frac{sq}{2M}$ nel cerchio NIT è manifeſto, che potremo conſiderarlo come tendente a muoverſi con quelle due velocità in un iſtante, ſecondo le direzioni delle tangenti IF, IE, o ſia ſecondo la direzione della diagonale ID del parallelogrammo FE, colla velocità rappreſentata dalla diagonale medeſima ID $= \frac{s}{2M}\sqrt{q^2+l^2}$.

64. E ſiccome collo ſteſſo ragionamento troveremo il moto di tutti i punti della linea IG, e gli avremo quali eſſer dovrebbero, ſe il piano IGO ſi ravvolgeſſe intorno il punto G, è chiaro, che intorno a quel punto realmente il piano ſi ravvolge, e che per conſeguenza tutta la sfera ſi aggira intorno la GS. Avrà dunque la sfera

sfera alla diſtanza del raggio GI dal centro G la velocità di rotazione $\frac{5}{2}\frac{\sqrt{q^2+l^2}}{M}$.

65. E perchè il piano FIE è parallelo al piano MGN ſarà l'angolo DIE uguale all'angolo OGN, e l'angolo DIF uguale all'angolo OGM: ma il ſeno dell'angolo DIE ſta al ſeno dell'angolo FID; come ſta IF ad IE, o ſia come $l:q$; adunque ſtarà $LN:ML::l:q$. E perciò in quella ragione biſognerà dividere la linea MN nel punto L per avere la linea GL a cui è perpendicolare l'aſſe di rotazione GS; e ſiccome è evidente eſſere il moto rettilineo del centro G perpendicolare al piano MGN, ed uguale ad $\frac{l+q}{M}$ avremo tutto il bramato movimento della sfera.

SCOLIO.

66. Adunque al ritrovamento della ſteſſa verità conducono ambedue i metodi, vale a dire quello che compone le forze, e quello che com-

compone i movimenti attuali prodotti in un iſtante dall'azione ſeparata delle forze medeſime, il che s'avvera eziandio, quando l'angolo MGN non è retto, e quando le forze non ſono ſituate nella circonferenza MN, come ciaſcheduno facilmente potrà riſcontrare.

PROBLEMA VI.

TAV. I. Fig. 11. 67. Dato il moto del Siſtema V, *u* &c. trovare le forze, che in eſſo lo produrrebbero, o ſia quelle, che dal dato movimento riſultano.

68. Qualunque ſia il ſuppoſto movimento, dovrà ſempre riſolverſi (come già abbiamo dimoſtrato) in due moti, l'uno di rotamento, e l'altro progreſſivo comune a tutte le parti del corpo, e parallelo all' aſſe di rotazione, onde è chiariſſimo, che ſcioglieremo il preſente Problema con le prime cinque equazioni del Problema III. ritenendo la ſteſſa figura, e le medeſime

fime denominazioni, delle quali in eſſo abbiamo fatto uſo, e riguardando come ignote le ricercate potenze MU, Mu, e le linee LD, RD, Gd, che ne determinano la poſizione, ed altresì come date le velocità φ, Δ; la maſſa M; la ſituazione di ciaſchedun corpo V, e quella dell' aſſe Pp. *

COROLLARIO XVI.

69. Meritano d'eſſere conſiderati i varj caſi del Problema dipendenti dalla quinta Equazione $\int \frac{PR.VQ.\varphi.V}{RG.M\Delta} = Gd$.

70. Se $\int PR.VQ.\varphi.V$ è uguale a zero, mentre non lo è MΔ, ſarà zero la linea Gd, e la forza Mu, o ſia MΔ

 do-

* *Se la Situazione dell' aſſe* P p, *e le quantità* φ, Δ *non foſſero date immediatamente, è chiaro che il ritrovarle dependerebbe da un ſemplice problema di geometria quando foſſe dato il movimento di tre punti del Corpo.*

dovrassi applicare al centro di gravità nella direzione GE.

71. Se ambedue le quantità $\int PR.VQ.\varphi.V$; $M\Delta$ sono uguali a zero, la sola forza MU produrrà il dato moto del sistema.

72. Ma se mai avviene, che sia zero $M\Delta$, e non lo sia $\int PR.VQ.\varphi.V$, allora la Gd diventa infinita, ed a nulla
num. 16. si riduce la forza Mu; il che dimostra, che per generare il supposto moto del sistema, bisogna imprimere in quello la forza MU, e le due forze uguali, e contrarie CI, ic, o due altre forze, che a quelle siano equivalenti, come facilmente si comprenderà, riflettendo a quanto sopra abbiamo spiegato.

COROLLARIO XVII.

73. Movendosi intorno l' asse Pp il centro di gravità G con la velocità φ; è manifesto, che la velocità di rotazione d' un

un punto del corpo ſituato alla diſtanza a dalla linea GE eſſer dee $\frac{RG.\phi + a\phi}{RG}$, onde quel punto roterà intorno l' aſſe GE con la velocità $\frac{a\phi}{RG}$, o ſia con la velocità $\int \frac{Gd.a.M\Delta}{PR.VQ.V}$; perchè $\int \frac{PR.VQ.V.\phi}{RG.M\Delta}$ è uguale a Gd.

74. Ciò premeſſo, ſupponiamo, che oltre le forze M ϕ, M Δ impreſſe ne' punti L, l con le direzioni FL, do s' imprima ancora nel centro di gravità G perpendicolarmente al piano PGp la ſteſſa forza M con tendenza contraria a quella, che eſſa ha nel punto L; e ſiccome queſta nuova forza dee diſtruggere la velocità ϕ in tutte le parti del ſiſtema, ne ſegue, che le tre forze M ϕ, $-$M ϕ, M Δ applicate inſieme a' punti L, G; d nell' accennata maniera comunicheranno al corpo la velocità Δ nella direzione GE, ed inoltre un rotamento intorno l' aſſe GE, per cui i punti ſituati alla diſtanza a dal medeſimo aſſe avranno la velocità

 $\int$Gd

$\int \frac{G\,d.\varphi.M\Delta}{IK.VQ.V}$, il che dimoſtra , come poſſa accadere, che l' aſſe ſpontaneo di rotazione paſſi per il centro di gravità.

COROLLARIO XVIII.

75. Quindi ancora s' impara un modo faciliſſimo per ritrovare le forze, che producono il dato movimento, quando queſto foſſe compoſto d' un moto progreſſivo, nella direzione GE, e d'un altro moto circolare intorno la medeſima GE di cui foſſe data la velocità alla nota diſtanza a dall' aſſe di rotazione; Imperocchè ſupponendo che quella ſia V avremo $V = \int \frac{G\,d.\varphi.M\Delta}{PK.VQ.V}$; E condotto per la linea GE un qualunque piano $GEPp$, e preſa la quantità φ a piacimento; mediante la ſuddetta Equazione, e la fatta Ipoteſi, troveraſſi ſpeditamente in quel piano il ſito de' punti L, d; onde ſapremo la direzione, e il valore delle tre forze $M\varphi$, $-M\varphi$, $M\Delta$, che

che essendo applicate nei punti G, L, d, produrrebbero il dato moto del corpo; E quì convien notare, che in vece delle due forze Mφ, — Mφ applicate ne' punti G, L si possono sostituire due altre forze uguali di contraria tendenza, che siano situate in un piano qualunque perpendicolare al piano G E d, che incontri il medesimo in una linea g parallela alla G L purchè esse siano equivalenti alle due potenze Mφ, — Mφ; E qualora fosse zero la velocità rettilinea Δ; le quattro forze Mφ; — Mφ; CI; ci; produrranno il dato movimento, le quali, per quello che abbiamo dimostrato, si possono facilmente a due sole ridurre; imperocchè basterà alle forze CI, ci sostituire due altre forze uguali, e contrarie, le di cui direzioni passino per i punti L, G; e da ciascheduna di queste forze combinata insieme con la sua correlativa forza Mφ, ò — Mφ nascerà (come è evidente) una forza unica. *num. 16.* *num. 16.*

TEOREMA I.

76. *In qualunque maniera muovasi il Sistema* V, u, *l'asse di rotazione, che passa per il suo centro di gravità sempre si manterrà il medesimo, se le forze centrifughe de' corpi che compongono il sistema staranno fra loro in equilibrio, e se nuove forze non vengano in essi successivamente impresse.*

77. Imperciocchè la forza centrifuga di ciascheduna particella V sarà in ogni momento distrutta dal conato delle altre forze centrifughe, e perciò il punto fisico V continuerà sempre a descrivere la circonferenza dello stesso cerchio, come appunto ei farebbe, se fosse ritenuto da
num. 51. un filo intorno ad un centro immobile. Ma qualora le forze centrifughe non siano in equilibrio, o che altre potenze turbino il moto del sistema, è manifesto, per lo contrario, che in tal caso l'asse di rotazione continuamente cangerà sito.

PRO-

PROBLEMA VII.

78. Dato il sistema de' corpi V, V &c. trovare l' asse di rotazione, intorno a cui le forze centrifughe stanno in equilibrio. TAV. II. Fig. 15.

79. Sia GK l' asse, che si ricerca, il quale dovendo passare per il dato centro di gravità G, sarà dipendente da due incognite, che ne determineranno la posizione, onde due Equazioni abbisogneranno per risolvere il Problema, di cui si tratta. Per l' asse GK s' intenda condotto un piano qualunque GQK, e da ciascheduna particella V s' abbassi la perpendicolare VN a GK, e la perpendicolare VQ al piano GQK, e congiunti i punti N, Q sarà pure la QN perpendicolare a GK: Ora è manifesto, che le forze centrifughe di tutti i Corpi V agiscono rispettivamente nelle direzioni NV, e che sono proporzionate a' raggi NV de' cerchi descritti da' punti V. E' chiaro ancora, che esse si posso-

no

no considerare, come applicate ne' punti N, e come risolute in forze perpendicolari al piano GQK; e in forze situate nel medesimo piano: Le prime saranno come $VQ.V$, e le seconde come $NQ.V$. E siccome, tanto le forze perpendicolari al piano, quanto quelle in esso giacenti debbono equilibrarsi, avremo $\int VQ.V=o$, $\int NQ.V=o$, $\int GN.VQ.V=o$, e $\int GN.QN.V=o$, ma le due prime equazioni si verificano rispetto a tutte le linee, che passano per il centro di gravità; adunque rimangono le due ultime per determinare l' asse ricercato GK.

COROLLARIO XIX.

80. Quindi è, che sempre potremo in conseguenza del Problema precedente imprimere in un dato corpo un moto di rotazione durevole.

PRO-

PROBLEMA VIII.

81. Trovare le forze, che debbono imprimersi nel sistema V, *u* mentre ei si muove in una maniera nota, affinchè nasca in esso un altro movimento dato.

82. E' facile intendere, come sarà necessario applicare tali potenze al sistema, che combinate colle forze resultanti dal suo moto attuale compongano quelle, che risulterebbero dall'altro movimento, che il sistema medesimo dee concepire, quali forze similmente per ipotesi sono note; onde ne segue, che il Problema si può sciogliere con i semplici elementi della Meccanica.

SCOLIO GENERALE.

83. Il Lettore geometra considerando attentamente il nostro metodo, tosto s' accorgerà che di quello potremmo eziandio prevalerci per ridurre ad equazione il cotanto difficile problema, in cui si ricerca

ca il moto del corpo V *u* &c. in ogni dato iſtante del tempo, eſſendo note le leggi delle forze, che ſopra il medeſimo in qualſivoglia maniera agiſcono, e la
Fig. 11. ſituazione, e la velocità del corpo nel principio del movimento. Sì fatta queſtione è ſenza alcun dubbio la più ſublime della Meccanica, e da eſſa molto dipende la Fiſica celeſte. Ma ſiccome queſto Problema fu già ſciolto compiutamente dal celebre Eulero *, non mi ſembra punto neceſſario darne un'altra ſoluzione, che della ſua non ſarebbe ne' più ſemplice, ne' più elegante. Volentieri ancora m'aſtengo dall'intraprenderla, perchè l'equazioni differenziali di ſecondo grado a cui ſi perviene ſono troppo compoſte, e peccano (ſe così ſi può dire) di ſoverchia generalità, che ne rende difficoltoſa l'applicazione a' caſi particolari, per li quali talvolta ſi preſentano al mattematico ſagace

* *Act. Ac. Ber. T.V.*

gace ſtrade non tanto ſpinoſe, e più brevi; nulladimeno non tralaſcerò d' accennare in poche parole come ſi debba procedere quando ſi voglia far uſo de' noſtri principj per riſolvere il mentovato problema.

84. Primieramente convien riflettere, che per ottenere il moto del corpo in un qualſivoglia iſtante del tempo è neceſſario ſaper la ſituazione in quel momento di tre punti ſcelti a piacere nel corpo medeſimo; e ſiccome il ſito di ciaſchedun punto riportato a un dato piano dipende da tre indeterminate, avremo nove incognite, dalle quali dipenderà il ritrovamento del ſito de' tre punti dopo un tempo dato; e il tempo eziandio aggiugnerà a quelle un' altra indeterminata.

85. Siano adunque i tre punti dati V, U, *u*, e ſiano le incognite, che li determinano X, Z, Y, X', Z', Y', X'', Z'', Y''; e, *t*, denoti il tempo nel quale i mentovati punti pervengono alla ſitua- TAV. II. *Fig.* 16.

situazione , che si ricerca ; E perchè le distanze V U, U u, V u, si mantengono sempre le medesime, avremo tre equazioni per le quali spariranno tre delle nostre incognite suddette , onde a parlar propriamente rimarranno (compreso il tempo) sette indeterminate, e converrà ritrovare soltanto sei equazioni per ottenere il sito de' tre punti V, U, u in un qualsivoglia istante.

86. Premesse queste considerazioni si supponga, che i punti, V, U, u, nel piccolo tempetto dt (che io suppongo sempre costante) vengano ne' punti V', U', u', descrivendo ciascheduno nello spazio assoluto le lineette V V', U U', uu' : e supponiamo, che in un secondo ugual tempetto dt, descrivano pure nello spazio assoluto le linee V' V'', U' U'', $u'u''$; è manifesto, che le lineette descritte nel primo istante saranno espresse da funzioni, che comprenderanno le prime differenziali dell' incognite del Problema, e che

che le lineette descritte nel secondo istante saranno espresse da funzioni composte ancora de' secondi differenziali, delle medesime quantità. E' manifesto altresì che ritroveremo l' asse di rotazione, e il moto rettilineo, e circolare de' tre punti nel primo istante in funzioni delle incognite, e de' loro primi differenziali, e che lo ritroveremo ancora nel secondo istante in funzioni delle incognite medesime, e de' loro differenziali secondi. Ma prese le forze resultanti dal moto del corpo nel primo momento, e aggiunte loro le forze, che si suppone, che agiscano in quel tempo sovra il corpo medesimo, quando egli è giunto ne' punti U', V', u', si può ritrovare l' asse di rotazione, il moto rettilineo e circolare nel secondo istante; dunque paragonando insieme le indeterminate quantità, onde dipende l' asse di rotazione in quell' istante medesimo, e i valori della velocità rettilinea, e circolare, che in due num. 46. due diverſe maniere abbiamo inſegnato a ritrovare, perverremo alle ſei equazioni, onde naſce lo ſcioglimento del Problema.

LEMMA VII.

87. *Siano* A, B *le forze reſultanti da un qualſivoglia dato numero di potente applicate ad un corpo, che non poſſa muoverſi liberamente, a motivo d'un qualunque oſtacolo, che lo impediſca; e ſiano inoltre*, a, *e* b *quelle, che riſultano dal movimento reale, che il mobile acquiſta nel primo iſtante; dico, che l'azione delle forze reſultanti dalle quattro forze* A, B, — a, — b, *ſarà totalmente diſtrutta dall'oſtacolo mentovato.*

88. Poichè ſi ſuppone, che le forze *a*, *b* reſultino dal moto concepito dal corpo in virtù delle forze A, e B, è manifeſto, che le potenze — *a* — *b* produrrebbero nel corpo libero movimenti uguali, ed oppoſti a quelli che producono nel corpo impedito le

le forze A, e B; adunque le quattro forze A, B, $-a$, $-b$ ſtaranno in equilibrio, *num.* 30. e perciò converrà che le loro riſultanti ſiano diſtrutte dall' oſtacolo, che vieta al corpo il moverſi liberamente.

OSSERVAZIONE.

89. Io debbo avvertire che queſto Lemma poco, o nulla differiſce dal famoſo principio dell' equilibrio ritrovato dal Signor d'Alembert, per cui tanto egli accrebbe la ſcienza Meccanica, nel tempo ſteſſo, che ne rendè più ſtabili i fondamenti; contuttociò mi ſembra d' averli dato nel preſente caſo particolare una forma nuova, nella quale s' adatta con ſomma facilità allo ſcioglimento di quei Problemi, che riſguardano la rotazione dei corpi legati, o impediti da qualſivoglia oſtacolo.

TEOREMA II.

TAV. II. Fig. 17. 90. Sia un piano ELR il quale possa scorrere sopra l'Asse immobile AR, e intorno lo stesso rivolgersi, e vi si concepiscano applicate due forze ne' punti L, E, che siano perpendicolari al piano, e che stian fra loro in ragione inversa delle perpendicolari AL, EN abbassate da' punti L, E, sopra l'asse AR, dico, che queste forze staranno in equilibrio.

91. Siano le due forze LF, ed EM, che tendano ambedue verso l' istessa parte, e si congiungano i punti L, E con la linea LE. Abbiamo AL : EN : : LT : TE; ma AL : EN : : EM : LF, dunque EM : LF : : LT : TE. E siccome il punto T è immobile in tutte le direzioni perpendicolari all'asse per esser situato nella linea AR, le suddette forze potrannosi considerare, come applicate al vette EL, e per conseguenza staranno fra loro in equilibrio.

Se

92. Se la forza *em* cadesse dalla stessa parte della forza FL rispetto all'asse AR, ed avesse direzione contraria a quella, che prima aveva, mantenendosi però alla forza FL nella ragione di AL; *en*, l'equilibrio sussisterebbe tuttavia, poichè condotta la linea L*e*R, avremo un vette con il fulcro nel punto R; E le potenze FL, *em* applicate perpendicolarmente alla RL, e con direzioni contrarie staranno fra loro in ragione inversa delle loro distanze dal fulcro.

TEOREMA III.

93. Dato un piano ARL che possa scorrere sopra la linea immobile AR, e date due forze LF, ME, che giaciano in questo piano, e siano parallele all'asse AR, e abbiano ugual valore, e contraria tendenza, dico, che staranno fra loro in equilibrio. TAV. II. *Fig.* 18.

94. Si supponga aggiunta nello stesso piano alle due date forze un' altra forza qua-

lunque EL perpendicolare alla linea AR. Abbiamo sopra dimostrato, che la forza
num. 10. resultante dalle tre forze EL, LF, ME sarà una forza *el* uguale ad EL, e alla medesima parallela; ma la forza *el* è distrutta dall'ostacolo immobile dell'asse AR, e dallo stesso è distrutta ancora la forza EL, come è manifesto; dunque sarà distrutta eziandio l'azione delle due forze LF, ME, dunque staranno fra loro in equilibrio.

PROBLEMA IX.

TAV. II. 95. Date più forze applicate a un corpo
Fig. 19. di qualunque figura, che possa scorrere sopra un asse immobile, e rivolgersi intorno lo stesso, si cerca il movimento del corpo nel primo istante del moto.

96. Sia PR l'asse immobile; G il centro di gravità del corpo, ST, ed AB le due forze resultanti dalle potenze date, una delle quali (ST) sia perpendicolare al piano

no G P B, che paſſa per il centro G, e per l'aſſe P R, e l'altra (BA) ſia nello ſteſſo piano giacente, il che ſi può ſupporre per quello, che abbiamo dimoſtrato; ſiano inoltre le due F L, *do* quelle, che riſultano dal movimento, che prende il corpo, ed F L ſarà perpendicolare al piano G P R, e *od* ſarà in quello ſituata. Ciò premeſſo è chiaro che P R eſſer dee l'aſſe neceſſario di rotazione. Imperocchè, avendo noi ſuppoſto la linea P R immobile, biſogna, che intorno a quella il corpo ſi rivolga nel tempo ſteſſo, che ſopra la medeſima ei ſcorre. *num. 28.*

97. La velocità di rotazione del punto G ſi chiami φ, e Δ la velocità, con la quale ei ſi muove parallelamente alla R P, e denominando la maſſa di tutto il corpo M, avremo la forza F L $=$ M φ, e la forza *od* (che è parallela a P R) $=$ MΔ: Si riſolva la forza B A in due altre forze C A, B C; una perpendicolare ad R P, e l'altra ad eſſa parallela, e ſi conducano le

le perpendicolari TP, LO alla linea PR dai punti T, L ove le linee ST, FL incontrano il piano RPL; E' manifesto, che le forze $-do$, $-$FL, ST, CB, AC dovranno stare fra loro in equilibrio: e perchè la forza AC è distrutta dall'immobilità dell' asse PR, dovranno equilibrarsi ancora fra loro le forze rimanenti CB, $-do$, $-$FL, TS; laonde sarà d'uopo, che CB sia uguale ad od, e che FL stia a TS come TP ad LO, ed avremo $CB = M\Delta$, e $M o = \frac{ST.TP}{LO}$ colle quali due equazioni si troverà il valore delle due incognite ricercate.

COROLLARIO XX.

98. E' manifesto, che, se il corpo non potesse scorrere sopra la linea PR si risolverebbe il Problema con la sola equazione $M\Delta = \frac{ST.TP}{LO}$. Imperocchè l' azione

ne della forza BA rimarrebbe affatto distrutta.

COROLLARIO XXI.

99. E perchè abbiamo dimostrato che, *num. 32.*
qualunque siasi la velocità del centro G, sempre si mantiene la LO dello stesso valore, è chiaro, che la velocità di rotazione comunicata al suddetto centro dalla forza ST starà sempre come ST.TP.

PROBLEMA X.

100. Siano applicate più potenze ad un TAV. II.
corpo, che in qualunque modo può ri- *Fig. 19.*
volgersi, intorno un dato punto immobile, si cerca il moto del corpo nel principio del suo movimento.

101. Sia G il centro di gravità del corpo; M la di lui massa; Z il punto, che si suppone immobile; è chiaro, che il corpo non potrà avere, a cagione dell' impo-

mobilità del punto Z , moto rettilineo commune a tutte le ſue parti, ed altresì è manifeſto , che ſi dovrà rivolgere intorno una linea, che paſſerà per il punto Z ; e che ſarà il di lui aſſe di rotazione; queſta, paſſando per il punto dato ſuddetto, dependerà da due incognite, che ne determineranno la ſituazione , quali denomineremo x , ed y , e chiameremo ω la velocità di rotazione del centro G intorno l' aſſe PR , ſecondo il conſueto. Sia GPZ il piano, che paſſa per l' aſſe di rotazione, e per il centro di gravità, ST, AB le forze riſultanti da tutte le potenze date, la prima perpendicolare al piano GPZ, la ſeconda in eſſo piano ſituata: Inoltre FL perpendicolare a quel piano rappreſenti la forza reſultante dal moto attuale, che il corpo ha concepito; e per i punti T , L ſi conduca la linea TL; e la linea LH ſia parallela ad RP, e TP, ed LO ſiano perpendicolari a PZ; Dal punto A , ſi conduca AD perpendicolacolare a PZ, e per il punto B la BC ad essa parallela: la forza – FL, insieme colle forze TS, BA per quello, che abbiamo dimostrato dovranno star fra loro in equilibrio: laonde converrà, che la linea AB prolungata passi per il punto Z, e che eziandio per quel punto passi la prolungazione della linea TL, e finalmente, che la forza FL stia alla forza ST come ZT a ZL, dunque avremo.

I. AC: CB : : AD: DZ.

II. TH: HL : : TP: PZ.

III. ZT: ZL : : FL (o sia) Mφ: TS.

E siccome i valori delle linee AC, CB, AD, TH, HL &c. saranno espressi da funzioni composte di quantità note, e delle tre incognite x, y, φ, per mezzo delle tre ritrovate proporzionalità avremo tre equazioni, che daranno lo scioglimento del Problema.

PRO-

PROBLEMA XI.

TAV. II. Fig. 20. 102. Siano applicate più potenze ad un qualsivoglia dato corpo, che tocchi in un sol punto un piano, il quale ne impedisca il libero movimento, si cerca il moto concepito dal corpo nel primo istante.

103. Sia il piano dato A T L Z, e Z il punto, ove lo tocca il corpo; e siccome si suppone, che il corpo non possa muoversi in quella guisa, che per l' azione delle date potenze ei si muoverebbe, se non appoggiasse sopra il piano nel punto Z, converrà, che la direzione del moto concepito da questo punto giacia in quel piano medesimo.

104. Ciò premesso sia P R l'asse di rotazione, il quale dipenderà da quattro indeterminate; E poichè ignote sono la velocità rettilinea, e circolare del centro di gravità, la risoluzion del Problema dipenderà da sei incognite.

105. Siano F L, O D le due forze risultanti

ti da tutte le potenze applicate, ed FL sia secondo il solito quella perpendicolare al piano dato ZOAC, ed OD l'altra in esso piano giacente. Siano poi ST, AB le forze, che risultano dal moto istantaneo, che il corpo concepisce, e la prima si supponga parallela a LF, e l'altra situata nel suddetto piano; Si congiungano i punti T, L, e per il punto T si conduca a piacimento la linea TQ, alla quale s'intendano abbassate le due perpendicolari LK, ZQ: parimente dal punto D nel piano ABZ si conduca una linea qualunque DC, ed a questa siano perpendicolari AC, BH, OI. Di più sia ZN la direzione del moto assoluto del punto Z, e presa la ZN uguale ad una data costante, si concepisca abbassata la perpendicolare, NM al suddetto piano; e perchè è nota la posizione del piano medesimo, le linee, AB, CH, OD, ZN &c. saranno tutte espresse da funzioni composte di quantità note, e delle incognite, dalle quali dipende de lo scioglimento del Problema. Le forze $-TS$, $-AB$, insieme con le forze impresse FL, DO dovranno rimanere in equilibrio; laonde converrà, che AB sia situata nella prolungazione di DO; che TL passi per il punto Z; che FL stia a TS; come TZ a ZL; e finalmente che NM sia uguale a zero. Adunque avremo le sei seguenti equazioni, dalle quali si raccoglie la soluzione bramata.

I. $ID = \frac{IO.DH}{BH}$

II. $AC = \frac{BH.CD}{DH}$

III. $AB = OD$.

IV. $ZQ = \frac{TQ.LK}{TK}$

V. $TS = \frac{LF.ZL}{TZ}$

VI. $NM = 0$

Nascendo l' ultima equazione dalla nullità del moto del punto Z nella direzione perpendicolare al piano AHZ.

CO-

COROLLARIO XXII.

106. Che se il corpo non toccasse il piano nel punto Z solamente; ma in una data linea *Zkz*, il Problema si risolverebbe con lo stesso metodo, e con uguale facilità; imperocchè, se il contatto del piano, e del corpo nella linea *Zz* impedisce il movimento, che produrebbero le forze FL, DO, converrà che tutta la linea *Zz* si muova nel piano mentovato; onde non solo sarà nullo il moto del punto Z perpendicolare al piano, ma quello ancora d'un' altro punto *z* preso a piacimento nella medesima linea, e perciò, supponendo, che *st* rappresenti in questo caso la forza perpendicolare al piano resultante dal moto concepito dal corpo; e *zn* il moto assoluto del punto *z*, e condotta la linea *tLk*, che incontri *Zz* in *k*, e *nm* perpendicolare al piano AHZ, ritenute tutte le altre denominazioni del Problema, avremo, come facilmente si vede

de le sei seguenti equazioni, due delle quali solamente diversificano dalle ritrovate.

I. $ID = \frac{IO \cdot DH}{BH}$

II. $AC = \frac{BH \cdot CD}{DH}$

III. $AB = DO$

IV. $ts = \frac{LF \cdot Lk}{tk}$

V. $NM = o$

VI. $nm = o$

COROLLARIO XXIII.

107. E quando poi si voglia supporre, che il corpo tocchi il piano con la sua superficie nello spazio circoscritto da una data figura, di tal maniera, che il libero moto del corpo rimanga impedito da tutto il supposto contatto, il Problema diverrà assai più facile, e dipenderà da tre sole equazioni; imperocchè in tal caso la superficie del mobile, che tocca il piano dee ne-

neceſſariamente ſtriſciare ſopra il medeſimo, e mantenervisi tutta nel primo iſtante del moto. Onde naſce, che l'aſſe di rotazione è perpendicolare al piano dato, e che a nulla ſi riduce il moto rettilineo del corpo, che è parallelo all'aſſe medeſimo; tre adunque ſaranno le incognite del Problema; la velocità di rotazione del centro di gravità, e le due indeterminate, dalle quali dipende la ſituazione dell'aſſe ſuddetto. Ora cadendo il punto F entro i limiti del dato ſpazio, in cui il piano, e il corpo ſi toccano, la forza FL ſarà interamente diſtrutta dalla reſiſtenza del piano, e ſarà d'uopo perciò, che ſia zero la forza *ts*, che nella direzione *ts* debbe ſempre equilibrare la forza FL; ma ſiccome la forza *ts*, nel noſtro caſo è ſempre uguale a zero; perchè il piano della rotazione è parallelo al piano, che tocca il mobile, è manifeſto, che rimarranno ſolamente le tre equazioni, che includono l'equilibrio delle forze AB, *do*, le quali ſono le ſeguenti

I.

I. $ID = \frac{IO.DH}{BH}$

II. $AC = \frac{BH.CD}{DH}$

III. $AB = do$. Dunque &c.

108. E altresì manifesto, che in qualunque caso dei precedenti Problemi, facilmente si conoscerà in qual modo il dato contatto del mobile, e del piano impedisca il libero movimento del corpo, imperocchè essendo note le forze applicate, si sa quale sarebbe stato quel moto, se la resistenza del piano non l'avesse impedito, ed è cognita eziandio la posizione della forza F L, onde sempre si può determinare come si debba procedere per risolvere una qualsivoglia questione di simil natura; ma io non stimo opportuno di esporre partitamente le minute varietà, che occorrono in questi problemi; ne voglio intraprendere di facilitarli, e neppure d'accrescerne il numero con aggiungner loro altre ricerche spettanti il movimento di quei corpi che toccano più piani, ovve-

ro più ſolidi di qualunque data figura, mentre il lettore può ſenza veruna difficoltà ſupplire a sì fatte mancanze, quando ſia bene impoſſeſſato del noſtro metodo che agevolmente ſi applica a tutti i caſi poſſibili.

OSSERVAZIONE

109. E' d' uopo notare, come dal precedente Problema ſi può dedurre una nova Teorica ſulla reſiſtenza relativa dei ſolidi, più eſteſa, e meglio dimoſtrata di quelle, che ſi ritrovano nei comuni Trattati della Meccanica Elementare; Ma ſiccome l' eſporla, e lo ſpiegarla con eſempi, richiederebbe troppo lungo ragionamento, à contemplazione della brevità, che mi ſono propoſta ne accennerò i ſoli principj. Supponiamo adunque, che un qualſivoglia corpo, di cui fingeremo eſſer le parti inſeparabili, tocchi in qualunque modo un piano immobile, e che li ſia attaccato in tutto lo ſpazio del contatto:

poniamo, ancora, che in ciaſchedun punto della ſuperficie tangente nota ſia la forza aſſoluta di coerenza nella direzione perpendicolare alla ſuperficie medeſima, o vogliamo dire al ſuddetto piano: E ciò premeſſo vedraſſi chiaramente, che ſarà riſoluto il Problema della reſiſtenza relativa nella ſua maſſima generalità, quando eſſendo date più forze applicate al corpo tendenti à diſtaccarlo dal piano ſi ſappia in ogni caſo determinare l'effetto da eſſe prodotto; Ora queſto ſempre far ſi potrà conſiderando il corpo, come ſe egli toccaſſe il piano, e foſſe poi inſieme animato dalle forze che riſultano, e dalle potenze applicate, e dalle forze della coeſione, che tutte ſono cognite; imperocchè uſando il metodo, che abbiamo ſopra ſpiegato ſi verrà toſto à conoſcere, ſe l' azione di tutte quelle forze rimanga impedita dal piano, ovvero ſe ella generi qualche movimento nel corpo, e ſe lo ſepari dal medeſimo piano, a cui ora ſolo lo ſuppo-
nia-

niamo tangente nel luogo dell' attaccatura.

PROBLEMA XII.

110. Dato il moto d'un corpo nel momento, in cui movendosi incontra un piano immobile, trovare il moto del corpo dopo l'urto.

111. La soluzione di questo problema si riduce a quella del precedente. Imperocchè dato il moto del corpo nell'istante, in cui incontra il piano immobile si possono ritrovare le forze risultanti dallo stesso movimento, e ricercar poi qual moto debba nascere dall'applicazione di quelle forze al corpo, che già tocca il piano nella maniera, nella quale l'ha incontrato a cagione del noto movimento, che aveva prima dell'urto.

OSSERVAZIONE

112. Se le forze risultanti dal movimento del Corpo si riducono ad una forza sola F L (*Fig.* .) è manifesto, che incontran-

 do-

do il mobile un oſtacolo inſuperabile perpendicolare alla linea F L ſubitamente per la reſiſtenza di quello ſi fermerà ; ma è chiaro altresì , che due oſtacoli ſaranno neceſſarj per iſpegnere tutto il moto del corpo , quando le mentovate forze non poſſono ridurſi ad una forza unica , e che queſti oſtacoli dovranno eſſere perpendicolari alle direzioni delle due forze (*Fig.* 11.) *ol*, F L , ovvero alle direzioni di due altre forze loro equivalenti ; E ſiccome nei corpi , che ruotano ſi chiama centro di percuſſione quel punto, al movimento del quale eſſendo oppoſta una qualunque invincibile reſiſtenza, viene a ceſſare, in virtù della medeſima , il moto in tutte le parti del mobile, converrà conchiudere, che il ſuddetto centro di percuſſione non eſiſte in tutti i corpi rotanti , ma che ſolamente ritrovaſi in alcuni, e che pure in quelli non è ſempre ſituato nel piano, che paſſa per il centro di gravità , e che taglia perpendicolarmente l'aſſe di rotazione,

come

come tutti i Meccanici hanno finora creduto.

PROBLEMA XIII.

113. Dato il moto di due corpi, che movendosi s' incontrano in un dato punto, trovare il movimento loro dopo l' urto. TAV. II. *Fig.* 21.

114. Siano i due corpi, che s' incontrano G, *g*; Z il punto, ove scambievolmente si toccano urtandosi; ADLZ*a* il piano tangente d' ambedue i corpi nel punto Z; FL rappresenti la direzione, e la quantità della forza perpendicolare al detto piano LZ*l* resultante dal moto dato del corpo G, e DO sia la forza resultante dallo stesso moto, che giace nel medesimo piano LZ*l*. Similmente rappresentino *fl*, ed *od* le direzioni, e le quantità delle forze, che risultano dal moto del corpo *g*, e la prima sia perpendicolare al piano suddetto, e l'altra in esso situata; e di tutte queste linee sarà dato il valore, e la posizione. Ciò supposto osserveremo, che la soluzione del Problema dipende dal ritrovamento del valore di dodici incognite,

poichè bisogna ritrovare gli assi di rotazione in ambedue i corpi, ciascheduno de' quali dipende da quattro indeterminate, ed inoltre ritrovar conviene le velocità circolari, e rettilinee, con le quali essi si moveranno dopo l'urto, che pure sono altre quattro incognite da aggiungersi alle mentovate. E se ST, e BA, ed st, e ba rappresenteranno le direzioni, e le quantità delle forze resultanti da' movimenti, che i corpi G, g concepiranno dopo l'urto, supponendo, come sempre abbiam fatto, che ST, ed st siano perpendicolari al piano lZL, e BA, e ba in quel piano giacenti; avremo le loro rispettive quantità, e le loro situazioni espresse, e indicate da funzioni composte di quantità note, e delle suddette dodici incognite.

115. Di più condotte le linee LT, lt che congiungano i punti L, T, ed l, t, ove le direzioni ST, FL, st, fl intersegano il piano lZL, e condotte ancora nel medesimo piano le linee AI, ai, ZQ, zq, a pia-

piacimento, e le perpendicolari BC, OH, DI, bc, ob, di, LQ, TK, tk, lq alle fuddette refpettive linee; i loro valori, e le loro direzioni faranno efpreffe, e indicate da funzioni della fteffa natura, tutte independenti l' una dall' altra. Ciò premeffo per quello, che abbiamo dimoftrato converrà, primieramente che le forze $-$ST, $-st$ nelle direzioni TS, ts facciano equilibrio con le forze FL, fl. ed in fecondo luogo che le forze $-$ AB, DO, $-$ ab, do, fiano pure in equilibrio fra loro, e inoltre bifognerà, che il punto Z del corpo G abbia nel primo iftante del moto la medefima velocità del punto Z nel corpo g nella direzione perpendicolare al piano lZL tangente de' due corpi; e perciò fe MN farà perpendicolare al detto piano, e ZM rapprefenterà la velocità del punto Z nel corpo G in quefta direzione, e ZN la velocità del punto Z nel corpo g, dalle mentovate condizioni del Problema ricaveremo le dodici feguenti

 equa-

equazioni, che ſono neceſſarie per riſolverlo.

I. $AC = CB . \frac{AI}{ID}$.

II. $AC = CB . \frac{AH}{OH}$

III. $AB = OD$

IV. $ac = cb . \frac{ai}{id}$

V. $ac = cb . \frac{ab}{ob}$

VI. $ab = od$

VII. $FL = ST . \frac{ZT}{ZL}$

VIII. $LQ = KT . \frac{ZQ}{ZK}$

IX. $fl = st . \frac{zt}{zl}$

X. $lq = kt . \frac{zq}{zk}$.

* XI. $LF - ST = lf - st$

XII. $ZM = ZN$

PRO-

* Queſta equazione naſce dal principio eſpoſto al numero 88, poichè è la ſteſſa coſa il ſupporre, che una forza ſia diſtrutta da un' oſtacolo, e l' immaginare, che venga annichilata da un' altra forza, che le ſia uguale, ed oppoſta

PROBLEMA XIV.

116. Se un corpo movendosi incontra più corpi, che pure si muovono, e non si toccano fra loro; essendo dato in ciascheduno il movimento, innanzi l' urto, si ricerca come essi debbano muoversi dopo la percossa. TAV. II. Fig. 22.

117. Primieramente è manifesto, che il numero delle incognite, dal ritrovamento delle quali dipende la soluzione del Problema, sarà sempre il numero dei corpi moltiplicato per sei; poichè in ciascheduno dovremo ritrovare, dopo la percossa, l' asse di rotazione, il movimento circolare, ed il moto rettilineo, cioè il valore di sei indeterminate, come nei precedenti problemi parecchie volte abbiamo mostrato, laonde per ogni corpo saranno necessarie sei Equazioni.

118. Sia G il corpo impellente, e g, g' &c. siano i corpi da quello percossi ne' punti Z, Z'; Per il [illegible] Z si conduca il piano Zqkt tangente [illegible]ue corpi G, g; Siano fl, ts due

due linee perpendicolari al medesimo piano; e *do*, *ab* due altre in quello giacenti; *fl*, e *do* rappresentino le forze risultanti dal moto, che aveva il corpo *g* avanti l' urto; e, *ts*, ed *ab*, rappresentino quelle, che risultano dal movimento, ch' egli averà dopo la percossa; dipoi per i punti *a*, *z* si conducano due linee *ai*, *zk* in qualunque direzione giacenti nel piano suddetto, e sopra la linea *ai* s' abbassino le perpendicolari *bc*, *ob*, *id*, e similmente si conducano le perpendicolari *lq*, *tk* alla *zk*; inoltre la linea *mzn* sia condotta perpendicolare al piano del contatto. Ed *mz* rappresenti la velocità che avrà in quella direzione il punto *z* del corpo *g* dopo l' urto; E similmente *zn* la velocità rappresenti del corpo G nel punto stesso del contatto, e nella medesima direzione.

119. Si concepisca di poi, che una somigliante figura sia descritta in tutti i piani de' contatti *z*' *z*'' &c., e che le linee, che la compongono abbiano valo[illegible] hi a quelli

li indicati nella presente, cioè che abbiano lo stesso significato rispetto ai corpi g' g'' &c., che quelle già condotte hanno relativamente alle forze, velocità &c. considerate nel corpo g; di più si prenda un qualunque piano BDTQR, e a questo si rapportino nella solita maniera le forze risultanti da tutte le forze, fl, $- st$, de' corpi, g, g' &c. ed eziandio quelle, che risultano dal moto che aveva il corpo G avanti l'urto, e quelle, che nascono dal di lui movimento dopo l'urto. n. 28.

120. Siano adunque FL, DO le due forze risultanti dal movimento, che aveva il corpo G prima dell'urto, ed FL sia perpendicolare al piano BLV, e l'altra DO in quello giacente. Similmente ST, e BA rappresentino le risultanti dal moto concepito dal corpo G dopo l'urto, BA, giacendo nel suddetto piano, ed ST essendoli perpendicolare; In oltre sia PQ la forza, che risulta dalle due forze FL, $-$ST; ed EI, sia quella che risulta dalle altre due forze

ze DO, —BA; E finalmente ſiano CR, XY le forze riſultanti da tutte le forze, $fl, -st$, preſe in tutti i corpi g, g' &c. nel modo ſuddetto; e CR ſia la forza perpendicolare al piano BLV; ed XY quella in eſſo piano giacente.

121. Ciò premeſſo, è chiaro, che tutti i corpi G, g, g' animati reſpettivamente dalle forze FL, —ST; DO, —BA; fl —ft; do, —ba, &c. dovranno ſtare fra loro in Equilibrio; Ed è ancora patente, che dopo l'urto i punti z, z' &c. del corpo G dovranno avere nelle direzioni, mn, $m'n'$ la ſteſſa velocità dei punti z, z' &c., ove ſono toccati i corpi g, g' dal corpo G; E ſiccome ciaſchedun corpo g tocca ſolamente il corpo G, converrà che in eſſo le forze, do, —ba, ſi bilancino fra loro, e che altresì la linea di direzione della forza riſultante dalle forze, fl, —st, paſſi per il punto z del contatto, e prema in quello il corpo G in tal guiſa, che tutte le forze (fl —st) preſe in tutti i corpi g, g',

fac-

facciano equilibrio con le forze PQ,EI, inerenti nel corpo G. Laonde ogni corpo g, g' &c. ci somministrerà le sei seguenti Equazioni

I. $ab = do$

II. $ac = \frac{cb.ai}{id}$

III. $ac = \frac{cb.ab}{ob}$

IV. $fl = \frac{zs.st.}{zl}$

V. $lq = \frac{qz.kt}{zk}$

VI. $zm = zn$

122. E condotte sopra la linea EI prolungata le perpendicolari XK, YV, e la linea QR, che congiunga i punti Q, R, ove si suppone, che le parallele PQ, CR incontrino il piano QDV; e dipoi nello stesso piano tirata una qualunque linea QH, e alla medesima abbassata la perpendicolare RH, avremo in conseguenza dell' equilibrio delle forze dalle quali supponiamo animato il corpo G, le seguenti equazioni, che pure sono sei

I.

I. $CR = PQ$
II. $EI = XY$
III. $RH = o$
IV. $QH = o$
V. $XK = o$
VI. $YU = o$

123. Onde è manifesto, che abbiamo ritrovate tante equazioni, quante osservammo esser necessarie per lo scioglimento di questo Problema.

OSSERVAZIONE.

124. La questione ultimamente risoluta è novissima; imperocchè Mac. Laurin, e il Signor d'Alembert (1), che meglio d'ogni altro Geometra hanno scritto sopra la percossa dei corpi considerarono solamente il caso nel quale i corpi G, g, g' &c. sono tutti sferici, e supposero, che i corpi g, g' fossero in quiete quando venivano urtati dal corpo G; Ne dettero altresì quei Valent' Uomini veruna Teorica, che immediatamente potesse condurre alla riso-
lu-

[1] In Dinam: di M: Alembert

luzione di queſto Problema, il quale con tanta ſemplicità abbiamo ſciolto mediante il noſtro metodo, che ſarebbe eziandio valevole à guidarci in altre ricerche dello ſteſſo genere anche più difficoltoſe della preſente; ma per ora mi baſta l' aver dato un picciolo ſaggio della ſua fecondità, riſerbandomi ad altro tempo l'impreſa di dimoſtrare ampiamente quanto giovamento ne poſſa ritrarre la Meccanica, e come con eſſo ſi faciliti una parte conſiderabile della Fiſica Celeſte.

ERRORI.	CORREZIONI.
Carte 27. lin. 4. debono.	debbono.
Carte 69. lin. 5 le due FL. do	le due forze FL, do

Tavola. I.ª

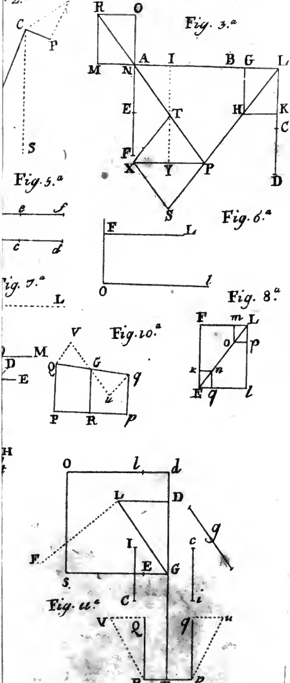
2.ª
Fig. 3.ª
Fig. 5.ª
Fig. 6.ª
ig. 7.ª
Fig. 8.ª
Fig. 10.ª
Fig. 11.ª
R
O
A
I
B
G
L
M
N
E
T
H
K
C
F
X
Y
P
D
S
e
f
c
d
l
m
o
p
n
q
V
M
Q
G
u
R
d
I
c
i
u

Tavola II.