LECTURES

DE

MÉCANIQUE

LA MÉCANIQUE
ENSEIGNÉE PAR LES AUTEURS ORIGINAUX,

Par E.mile JOUGUET,
INGÉNIEUR DES MINES.

PREMIÈRE PARTIE.

LA NAISSANCE DE LA MÉCANIQUE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1908

A MES AMIS

GEORGES FRIEDEL,

ALFRED LIÉNARD, LOUIS CRUSSARD,

INGÉNIEURS DES MINES,

PROFESSEURS A L'ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ETIENNE.

J'offre ce Livre qui doit tant
à leurs encouragements et à leurs conseils.

PRÉFACE.

Il est fort instructif, pour qui veut bien comprendre la nature des principes et des lois de la Mécanique, d'en suivre l'histoire. On semble s'intéresser beaucoup aujourd'hui à ce genre d'études, qui a donné lieu à de remarquables travaux. Il m'a paru qu'on pouvait faire œuvre utile en réunissant un certain nombre de textes empruntés aux principaux auteurs originaux et en donnant à ces citations des dimensions plus considérables que celles dont on se contente habituellement. C'est ce que j'ai tenté de faire dans le présent Ouvrage. L'idée m'en est venue à la suite de la lecture d'un article où M. Le Chatelier signalait l'intérêt qu'il y aurait à faire commenter aux étudiants de l'enseignement scientifique, comme on le fait faire déjà à ceux de l'enseignement littéraire, les écrits des classiques. J'y ai laissé le plus possible la parole aux maîtres. Toutes les fois que je suis intervenu personnellement, par des Notes ou des éclaircissements, je l'ai signalé par une disposition typographique spéciale (*).

J'ai toujours été guidé, dans la rédaction de mes commen-

(*) Les citations des divers auteurs sont imprimées en caractères plus petits que ma rédaction personnelle. Quand la citation n'est pas textuelle, et qu'il s'agit d'une simple analyse, les caractères sont les mêmes, mais le passage est mis entre crochets [ ]. Mes commentaires sont donnés soit sous forme de notes au bas des pages, soit sous forme de raccords entre les différents morceaux, imprimés en caractères plus forts que les citations.

taires, par le respect des auteurs illustres que je citais. Les anciens chercheurs avaient parfois des habitudes de penser qui choquent assez rudement les nôtres. On trouvera, par exemple, dans plusieurs des textes qui vont suivre, un appareil logique fort lourd et souvent tout à fait illusoire ; on rencontrera bien des démonstrations qui, en réalité, ne prouvent rien ; beaucoup, parmi les fondateurs de la Mécanique, ont trop perdu de vue le caractère physique de ses lois, et, dans leur recherche d'une exposition entièrement rationnelle, n'ont atteint, comme l'a dit M. Mach, qu'une fausse rigueur. Il faut se garder cependant de considérer leurs raisonnements comme sans valeur. Que de si grands esprits aient jugé utile de démontrer telle proposition que nous sommes aujourd'hui tentés de prendre comme un principe primitif, qu'ils aient, dans leurs démonstrations, considéré comme évidente telle affirmation qui ne l'est pas, c'est là certes un fait où il vaut la peine de remarquer autre chose que les erreurs de logique pure.

On ne trouvera point ici de recherches historiques originales ; mon but n'est point de redresser des droits de priorité et j'accepte l'histoire de la Mécanique telle qu'on la connaît aujourd'hui. Au début de mon travail, j'avais pris pour guide les admirables historiques que Lagrange a mis en tête des diverses parties de sa *Mécanique analytique*. Pendant que j'y étais occupé, ont paru la traduction française du livre de M. Mach et les travaux de M. Duhem. J'ai largement profité, à tous les points de vue (le lecteur pourra s'en convaincre), de ces beaux Ouvrages. Les études de M. Duhem ont transformé la question des origines de la Mécanique moderne en faisant mieux connaître les sources profondes d'où elle découle ; j'ai naturellement tenu compte de ses découvertes.

Malgré tout, la plupart de mes citations sont empruntées aux auteurs considérés depuis longtemps comme les plus importants. Il me semble que ces auteurs restent toujours les grands noms de la Mécanique. Sans doute on connaît mieux aujourd'hui leurs précurseurs dans la découverte des principes. Mais cette circonstance ne saurait supprimer l'intérêt de leurs écrits et, par suite, des textes rassemblés ici. Le fait même qu'ils ont, de bonne heure, fait oublier leurs prédécesseurs, montre au moins qu'ils sont très représentatifs de l'évolution des idées reçues. Il ne faut pas d'ailleurs que l'étude exclusive des précurseurs fasse oublier les services rendus par ceux qui ont su choisir dans les écrits de ces derniers, où ils sont souvent mêlés à l'erreur, les principes corrects, s'y attacher avec fermeté, les énoncer avec précision et en montrer la fécondité par les applications qu'ils en ont faites. Lagrange n'a apporté aucun principe nouveau : son œuvre n'en est pas moins une des plus considérables de la Mécanique.

Je me contenterai donc, en ce qui concerne les précurseurs des grands classiques, de quelques brèves citations et de quelques Notes. Toutefois, pour être aussi exact que possible sur cette question des origines, je crois utile de donner, dès le début, quelques indications sur les idées d'Aristote touchant l'équilibre et le mouvement. Ces idées péripatéticiennes ont constitué une véritable Mécanique qui a précédé la Mécanique moderne, et c'est précisément un des principaux résultats des recherches de M. Duhem que d'avoir mis en évidence leur influence sur les premiers classiques. Je les expose donc sommairement dans une petite Introduction générale qui marque, pour ainsi dire, le point de départ du présent Ouvrage. Comment s'est développée, à partir de là, la Mécanique moderne, tel est l'objet que je voudrais étudier par l'analyse et le commentaire des auteurs originaux.

Ce que j'ai en vue d'ailleurs, c'est le côté physique des choses. Je me bornerai donc aux principes fondamentaux et aux lois essentielles, dont je voudrais essayer, par cette étude historique, d'éclairer autant que possible l'origine, la nature et la portée. J'arrêterai par conséquent mon histoire au moment où, ces principes et ces lois étant formulés dans un langage précis, il n'y a plus qu'à en tirer les conséquences logiques. Ou, plus exactement, car ce moment ne vient jamais, car on ne peut jamais déclarer close l'ère des recherches sur les principes, j'exclurai de mon étude les travaux qui présentent le caractère de simples développements mathématiques (*).

E. J.

(*) Je tiens à remercier M. G. de Montauzan, professeur de l'Université, qui a bien voulu m'aider de ses conseils pour quelques traductions.

LECTURES

DE

MÉCANIQUE.

INTRODUCTION.

UN MOT SUR LA MÉCANIQUE PÉRIPATÉTICIENNE.

Comme il est bien naturel, la pensée d'Aristote n'est pas toujours précise et unique sur les diverses questions de la Mécanique, et ses nombreux commentateurs de l'antiquité et du moyen âge n'ont pas tous été d'accord sur l'interprétation à en donner ou sur les compléments à lui ajouter. La Mécanique péripatéticienne offre donc sur bien des points des affirmations variées. Voici cependant quelques propositions fondamentales généralement adoptées dans l'École.

Sous le nom de *mouvement*, Aristote comprenait, non seulement, comme nous le faisons aujourd'hui, le changement de lieu, le *mouvement local*, mais encore le changement de qualité, ce que nous appelons les modifications physiques ou chimiques des corps. Nous ne nous occuperons ici que du mouvement local.

A tout élément correspond un lieu naturel, où la forme substantielle de cet élément acquiert sa perfection; si un élément est hors de son lieu naturel, il tend à s'y placer. Sans entrer dans les nombreuses discussions qui se sont élevées entre les divers péripatéticiens sur la définition du lieu de la terre, de l'eau, de l'air, qu'il nous suffise de savoir qu'Aristote voyait dans la chute des corps graves et dans l'ascension des corps légers une manifestation de cette tendance des éléments vers leur lieu naturel, un exemple de *mouvement naturel des corps*. Au mouvement naturel s'oppose le *mouvement violent* qui n'est pas dirigé vers le lieu naturel du corps, celui des projectiles par exemple. Tout mouvement violent est essentiellement périssable.

La production de tout mouvement rencontre une résistance. Aussi, pour entretenir un mouvement, faut-il un moteur; tout corps mû l'est par une force ou puissance. Cette force est d'ailleurs proportionnelle à la vitesse et à la masse du corps mû, avec cette restriction qu'une petite force ne peut pas mouvoir du tout un corps trop gros.

Soient donc (1) A le moteur, B le mobile et C la quantité dont il est mû. Le temps durant lequel le mouvement a eu lieu sera représenté par D. Dans un temps égal, la puissance égale représentée par A fera faire à la moitié de B (2) un mouvement qui sera le double de C et il fera parcourir la distance C dans la moitié du temps D; car ce sera là la proportion.

Si, dans tel temps donné, la même puissance meut le même mobile de telle quantité, il produira la moitié de ce mouvement dans un temps moitié moindre. La moitié de la force produira la moitié du mouvement dans un temps égal sur un mobile égal. Par exemple soit la puissance E moitié de la puissance A et F moitié de B. Les rapports restent les mêmes et la force est en proportion avec le poids à mouvoir. Par conséquent ces deux forces produiront le même mouvement dans un temps égal.

Si E meut F d'un mouvement C dans le temps D, il n'en résulte pas nécessairement que, dans un temps égal, E puisse mouvoir le double de F de la moitié de C.

Si A meut le mobile B dans le temps D d'une quantité égale à C, la moitié de A représentée par E ne pourra pas mouvoir B dans le temps D. Elle ne pourra pas non plus faire parcourir au mobile une partie de C ou telle partie proportionnelle qui serait à C tout entier comme A est à E; car, ce cas posé, il n'y aura pas

---

(1) *Physique*, Livre VII, Chap. VI. Traduction Barthélemy Saint-Hilaire.

(2) La notion de masse n'est naturellement pas très bien dégagée par Aristote.

du tout de mouvement ([3]). S'il faut en effet la force tout entière pour mouvoir telle quantité, la moitié de la force ne pourra la mettre en mouvement ni d'une certaine distance, ni dans une proportion de temps quelconque; car alors il suffirait d'un homme tout seul pour mettre un navire en mouvement.

Quel est le moteur dans les mouvements naturels et dans les mouvements violents?

Dans le mouvement naturel, dans la chute des graves par exemple, la force est la qualité de la pesanteur par laquelle le grave tend vers son lieu naturel. La chute des graves est accélérée : c'est donc que la force de la pesanteur va en croissant au fur et à mesure que le grave se rapproche de son lieu. Dans le mouvement violent, dans celui des projectiles par exemple, le moteur qui développe la force, c'est l'air, traversé par le projectile, ébranlé par lui et qui le tire à l'avant ou le pousse à l'arrière. Il est remarquable que cette opinion conduise à faire une distinction capitale entre la nature des solides et celle de l'air; Aristote, en effet, considère comme indispensable d'expliquer pourquoi un solide persiste dans son mouvement, et il trouve son explication dans l'hypothèse que cette persistance est toute naturelle pour l'air, qui conserve spontanément l'ébranlement qu'il a reçu du projectile et peut même, par là, devenir moteur. Aussi Averroès a-t-il considéré les fluides comme des êtres intermédiaires entre les âmes et les corps.

Le rôle ainsi attribué par Aristote au milieu est donc assez peu clair. D'ailleurs les idées du philosophe sur ce point manquaient certainement de précision. Dans le Chapitre même où il fait intervenir l'air pour entretenir le mouvement des projectiles (*Physique*, Livre IV, Chap. XI), il considère cet air comme une cause de résistance.

Il y a deux causes possibles pour qu'un même poids, un même corps, reçoive un mouvement plus rapide : ou c'est parce que

---

([3]) Cette affirmation est en contradiction avec une des propositions qui précèdent. Manifestement il faut sous-entendre ici la restriction que la moitié de A est une force très petite.

le milieu qu'il traverse est différent, selon que ce corps se meut dans l'eau, dans la terre ou dans l'air; ou c'est parce que le corps qui est en mouvement est différent lui-même et que, toutes choses égales d'ailleurs, il a plus de pesanteur ou de légèreté. Le milieu que le corps traverse est une cause d'empêchement la plus forte possible quand ce milieu a un mouvement en sens contraire et ensuite quand ce milieu est immobile. Cette résistance est d'autant plus puissante que le milieu est moins facile à diviser, et il résiste d'autant plus qu'il est plus dense.

[Et, comme conséquence, Aristote admet que les vitesses dans les mouvements naturels d'un corps sont en raison inverse des densités des milieux traversés.]

Les principes de la Mécanique péripatéticienne sont, pour la plupart, à l'opposé des idées modernes. Ils ont néanmoins une base expérimentale solide. Qu'il faille de la force pour faire marcher une voiture à vitesse constante, qu'il en faille davantage pour faire marcher une voiture plus lourde à la même vitesse ou la même voiture à une vitesse plus grande, qu'une force trop petite soit incapable de mouvoir si peu que ce soit une voiture trop lourde, ce sont des affirmations de sens commun. Que les mouvements violents soient destinés à périr, c'est ce que montrent sans conteste tous les phénomènes d'amortissement. En somme la Mécanique d'Aristote est une Mécanique qui ne fait pas abstraction des résistances passives, et l'on sait que la considération de ces résistances sera précisément prise par Clausius pour un des fondements de la Thermodynamique. Il n'est d'ailleurs pas impossible de trouver dans Aristote des idées analogues à celles qu'énonce notre moderne principe de l'inertie. Dans la dissertation par laquelle il cherche à prouver l'impossibilité du vide ([1]), le Stagyrite fait remarquer que, dans le vide, la tendance vers un lieu, c'est-à-dire le mouvement naturel, serait impossible. Et il ajoute :

Il serait encore bien impossible de dire pourquoi, dans le vide, un corps mis une fois en mouvement pourrait jamais s'arrêter

([1]) *Physique,* Livre IV, Chap. XI.

quelque part. Pourquoi, en effet, s'arrêterait-il ici plutôt que là? Par conséquent, ou il restera nécessairement en repos, ou nécessairement, s'il est en mouvement, ce mouvement sera infini, si quelque obstacle plus fort ne vient à l'empêcher.

C'est là exactement le procédé de raisonnement par lequel les auteurs du XVIIIe siècle justifient le principe de l'inertie. Seulement, tandis que les auteurs modernes considèrent comme intéressant pour la Mécanique réelle d'étudier ce qui se passerait dans le vide, Aristote, proclamant l'impossibilité du vide, n'y cherche pas une approximation de la réalité. Nous reviendrons d'ailleurs sur ce sujet à propos du principe de l'inertie.

Nous terminerons en disant que la Mécanique péripatéticienne a connu la loi de l'équilibre du levier, à savoir que deux poids se font équilibre sur un levier quand ils sont en raison inverse de leurs bras de levier. Dans les *Problèmes mécaniques,* la théorie du levier est exposée d'une manière assez compliquée. Mais certains commentateurs de la pensée d'Aristote, sinon Aristote lui-même, ont rattaché la loi du levier au principe fondamental de la Mécanique péripatéticienne, à la proportionnalité des forces au produit de la masse par la vitesse : dans un levier, en effet, si les deux poids sont en équilibre, le produit de chaque poids par la vitesse qu'il peut prendre dans une rotation du levier est le même pour les deux poids. C'est là la première apparition du principe du travail virtuel. Et il faut ajouter qu'Aristote a au moins entrevu la généralité de ce principe, car il a écrit (*Problèmes mécaniques*) :

« La plupart des autres particularités offertes par les mouvements des mécaniques se ramènent aux propriétés du levier. »

LIVRE I.

ÉTUDES DE STATIQUE.

CHAPITRE I.

LE LEVIER.

§ 1. — Le principe du levier.

Les premières recherches de la Mécanique moderne sur l'équilibre ont fait un grand usage du principe du levier que l'on doit à Archimède.

Nous citerons ici le début du *Traité de l'équilibre des plans ou de leurs centres de gravité* (Περὶ ἐπιπέδων ἰσοῤῥοπικῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων) où le géomètre de Syracuse a exposé ce principe ([5]).

Demandes ([6]). — 1° Des graves égaux suspendus à des longueurs égales sont en équilibre ([7]);

2° Des graves égaux suspendus à des longueurs inégales ne

([5]) Archimède vivait de 287 à 212 avant J.-C. Nous citons la traduction de Peyrard (Paris, 1807).

([6]) Ces demandes sont des postulats d'origine expérimentale.

([7]) Archimède parle des graves égaux sans les définir. Nous rencontrerons bien souvent une manière de faire analogue. C'est donc ici le lieu de présenter sont point en équilibre; et celui qui est suspendu à la plus grande longueur est porté en bas;

3° Si des graves suspendus à de certaines longueurs sont en

---

quelques considérations générales sur les procédés par lesquels l'esprit humain constitue une science physique.

Au début, l'esprit conçoit un certain nombre d'idées vagues, qui lui sont fournies par l'observation et l'expérience, dont il élabore plus ou moins les résultats. Ces idées vagues sont donc à la fois des produits de la nature des choses et de la nature de l'esprit. D'ailleurs, l'esprit humain ayant été façonné par les choses, une partie de l'apport de l'esprit peut, en dernière analyse, remonter également au monde extérieur. Mais il peut, et même il doit, aussi y avoir, dans ces idées, quelque chose de propre à l'esprit et à ses formes. C'est aux philosophes criticistes à faire le départ. Pour nous, il nous suffit, pour affirmer la double influence du monde extérieur et de l'esprit humain, que les idées vagues conçues par l'intelligence à propos d'un objet extérieur aient leur origine non seulement dans des expériences portant directement sur ledit objet mais encore dans les conceptions de l'esprit, que ces conceptions de l'esprit soient *a priori* ou qu'elles découlent d'expériences faites sur d'autres objets. Dans le cas particulier qui nous occupe ici, l'idée vague conçue par Archimède est l'idée de *graves égaux*.

On admet, dans la science moderne, que ces idées vagues doivent être reconstruites avec précision par des *définitions*. En matière physique, les meilleures définitions sont celles qui reposent sur des expériences. Il faut imaginer des expériences, vérifier ce qu'elles donnent et traduire leurs résultats par des définitions et des lois. Ici, par exemple, voici comment on peut modifier le mode d'exposition d'Archimède. On lira les demandes et les propositions I et II en ayant dans l'esprit qu'Archimède étudie, selon la remarque de Peyrard, des surfaces ou des solides remplis d'une même matière homogène, dont la gravité par conséquent se mesure naturellement par leur aire ou par leur volume. Cela fait, on imaginera, après la proposition II, la *définition* suivante : « Pour les graves hétérogènes, nous dirons qu'ils sont égaux si, suspendus à des longueurs égales, ils sont en équilibre, inégaux si, suspendus à des longueurs égales, ils ne sont pas en équilibre. » Pour que cette définition soit acceptable, il faut que soient remplies les conditions suivantes : 1° Deux graves quelconques en équilibre ou non en équilibre sur un levier à bras égaux sont encore en équilibre ou non en équilibre sur un levier à bras plus longs; 2° Deux graves équilibrant un troisième s'équilibrent entre eux. (C'est là une condition imposée par l'esprit à la notion d'égalité.) 3° Si deux graves s'équilibrent, en enlevant une partie du premier, ils ne s'équilibrent plus et le second s'abaisse. On admettra ces trois propositions comme une extension expérimentale des demandes.

Quand l'esprit suit cette voie, nous dirons qu'il adopte le *procédé expérimental*.

La nécessité des définitions est une idée moderne, une idée de science avancée. Les premiers chercheurs ne la voyaient pas aussi nettement que nous. Encore aujourd'hui, il n'est pas rare de la voir sacrifiée, au début d'une science nouvelle. L'esprit humain procède alors comme ici Archimède. L'idée vague de *graves égaux*, il l'adopte comme claire sans la préciser par une définition, et il raisonne avec elle. Si cette idée a été bien choisie, si elle est bien conforme à la nature des choses, les raisonnements ainsi conduits ont beau, au point de vue logique, pécher par la base : ils sont exacts et utiles. Le mérite du savant a résidé dans le choix heureux de sa notion primordiale. Une telle adoption d'une équilibre, et si l'on ajoute quelque chose à l'un de ces graves, ils ne sont plus en équilibre; et celui auquel on ajoute quelque chose est porté en bas;

---

idée vague comme idée précise est favorisée par la tendance *réaliste* de l'esprit. Le savant a donné un nom à son idée vague; et tout de suite, sous ce nom, il voit une réalité, nous dirions presque une substance. Aussi appellerons-nous ce procédé de l'esprit le *procédé métaphysique*.

La reconstruction précise d'une notion vague par une série d'expériences *directes* est parfois impossible. On peut néanmoins conserver cette notion sans avoir recours au procédé métaphysique, en employant ce que nous appellerons le *procédé formel*. On remplace la notion physique vague par un être abstrait, défini *more geometrico* : c'est une reconstruction logique et non plus expérimentale. Entre les êtres abstraits ainsi créés, on pose, par convention, des relations qui sont une expression plus ou moins approchée, plus ou moins dénaturée, des idées vagues qu'on se fait des choses, mais qui sont logiquement arbitraires : ces relations sont ce que M. Poincaré appelle des *Principes*. On constitue ainsi un langage logique, un moule qui, s'il est habilement construit, pourra servir à représenter les faits. Ici, par exemple, on pourrait interpréter comme suit les développements d'Archimède : « Je fais correspondre à chaque grave un nombre λ que j'appelle *grandeur de ce grave*, et je pose en principe que deux graves ayant même λ sont en équilibre aux extrémités des bras égaux d'un levier, que deux graves, au contraire, ayant des λ différents, ne sont pas en équilibre dans ces conditions, le grave de plus petit λ s'abaissant. » Le procédé expérimental pur s'interdirait de parler du nombre λ avant d'avoir montré comment on peut l'obtenir par des expériences. Le procédé formel accepte de tirer quelques conséquences logiques des conventions précédentes, de constituer une théorie des graves et des leviers *abstraits*, avant de vérifier par l'expérience que cette théorie peut servir à représenter les propriétés des leviers *réels* : il recule la vérification expérimentale.

L'analyse des notions de force et de masse nous montrera plus clairement que l'exemple actuel de la théorie du levier ces divers procédés de l'esprit.

Une science achevée ne peut admettre comme valables que le procédé expérimental et le procédé formel. Le procédé métaphysique doit en être éliminé. Il n'est pas douteux toutefois que, bien souvent encore, le savant l'emploie involontairement et il peut être utile comme moyen de découverte.

Remarquons d'ailleurs que l'esprit mélange en général ces divers procédés de raisonnement; nous ne les avons distingués que par une analyse un peu artificielle. Il arrive souvent qu'on reconstruit expérimentalement une notion vague, au début d'une théorie, en imaginant des expériences simples, assurément possibles, mais au fond difficiles à exécuter, qui n'ont jamais été exécutées en fait et dont on postule les résultats : on réserve la vérification expérimentale réelle pour des conséquences plus ou moins lointaines de la théorie. C'est ainsi que la loi de l'égalité de l'accélération de la pesanteur pour tous les corps ne se vérifie guère directement; mais on en vérifie une conséquence, l'indépendance de la durée d'oscillation des pendules vis-à-vis de la matière constituant ces pendules. Une semblable manière de faire est intermédiaire entre le procédé expérimental et le procédé formel. A la vérité, il paraît impossible, dans une science quelconque, de ne pas mélanger ces deux procédés.

Nous rencontrerons fréquemment chez les premiers mécaniciens l'emploi du procédé métaphysique. Il suffira souvent d'ajouter à leurs raisonnements des définitions logiques ou expérimentales pour en faire une théorie moderne.

4° Semblablement, si l'on retranche quelque chose d'un de ces graves, ils ne sont plus en équilibre; et celui dont on n'a rien retranché est porté en bas;

5° Si deux figures planes semblables sont appliquées exactement l'une sur l'autre, leurs centres de gravité seront placés l'un sur l'autre [8];

6° Les centres de gravité des figures inégales et semblables sont semblablement placés....

7° Si des grandeurs suspendues à de certaines longueurs sont en équilibre, des grandeurs égales aux premières suspendues aux mêmes longueurs seront encore en équilibre;

8° Le centre de gravité d'une figure quelconque dont le contour est concave du même côté, se trouve nécessairement en dedans de la figure [9].

---

(8) Il est probable qu'Archimède avait défini le centre de gravité dans un Traité qui ne nous est pas parvenu. L'Alexandrin Pappus est le seul auteur ancien dont nous ayons une définition du centre de gravité. Celle d'Archimède devait sans doute être analogue. Pappus suspend un corps par un axe $\alpha\beta$, et fait remarquer que le plan vertical passant par $\alpha\beta$ coupe le corps « en deux parties équilibres, qui se tiendront en quelque sorte suspendues de part et d'autre du plan, étant égales entre elles par le poids ». Si l'on suspend ensuite le corps par un autre axe $\alpha'\beta'$, le plan vertical de $\alpha'\beta'$ coupera le précédent; s'il lui était parallèle, en effet, « chacun des deux plans diviserait le corps en deux parties qui seraient à la fois de poids égal et de poids inégal, ce qui est absurde ». Suspendons maintenant le corps successivement par deux points γ et γ' : les deux verticales correspondantes $\gamma\delta$ et $\gamma'\delta'$ se coupent, sinon on pourrait, par chacune d'elles, faire passer un plan coupant le corps en deux parties équilibres, ces deux plans étant parallèles, ce qui est impossible. C'est le point de concours de toutes les lignes telles que $\gamma\delta$, lesquelles doivent se couper deux à deux, qui est le centre de gravité.

Nous savons bien aujourd'hui que deux parties du corps « *équilibres* » ne sont pas égales en poids. Mais Pappus n'évite pas toujours cette confusion. On peut se demander d'ailleurs si la notion de parties *équilibres* ne présuppose pas celle de levier. Assurément ces deux notions sont les mêmes. Il n'y a pourtant pas cercle vicieux à parler du centre de gravité au début d'un traité du levier. On peut présenter ainsi les choses : « L'expérience (aidée plus ou moins par les considérations de Pappus) nous montre ou tend à nous montrer qu'il y a dans un corps quelconque un point tel que, si l'on suspend le corps par ce point, il reste en équilibre en quelque position qu'on le place (c'est ainsi que Guido Ubaldo, Stevin et Galilée définiront plus tard le centre de gravité). Admettons que ce point existe en effet; s'il existe, on peut le trouver par les raisonnements d'Archimède, qui ramènent les cas compliqués aux cas simples. »

(9) Archimède n'énonce nulle part la restriction que les verticales doivent être traitées comme parallèles. Elle est cependant indispensable, nous le savons aujourd'hui, pour que le centre de gravité existe. Mais, chez Archimède, la notion de ce centre est *expérimentale* et il n'est pas étonnant qu'il n'ait pas vu la nécessité de la restriction ci-dessus. On peut remarquer, avec M. Duhem, que, dans

Cela posé, je procède ainsi qu'il suit :

Proposition I. — Lorsque des graves suspendus à des longueurs égales sont en équilibre, ces graves sont égaux entre eux.

Car s'ils étaient inégaux, après avoir ôté du plus grand son excès, les graves restants ne seraient pas en équilibre, puisque l'on aurait ôté quelque chose d'un des graves qui sont en équilibre (Dem., 4°). Donc, lorsque des graves suspendus à des longueurs égales sont en équilibre, ces graves sont égaux entre eux.

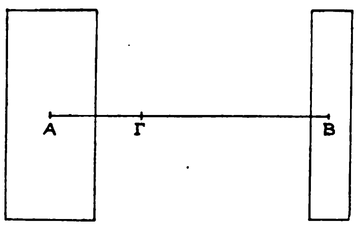
Proposition II. — Des graves inégaux suspendus à des longueurs égales ne sont pas en équilibre; et le grave qui est le plus grand est porté en bas.

Car ayant ôté l'excès, ces graves seront en équilibre, parce que des graves égaux suspendus à des longueurs égales sont en équilibre (Dem., 1°). Donc, si l'on ajoute ensuite ce qui a été ôté, le plus grand des deux graves sera porté en bas, car on aura ajouté quelque chose à un des graves qui sont en équilibre (Dem., 3°).

Proposition III. — Des graves inégaux suspendus à des longueurs inégales peuvent être en équilibre [10], et alors le plus grand sera suspendu à la plus petite longueur.

Que A, B soient des graves inégaux, et que A soit le plus grand. Que ces graves, suspendus aux longueurs AΓ, ΓB, soient en équi-

Fig. 1.



libre. Il faut démontrer que la longueur AΓ est plus petite que la longueur ΓB.

Que la longueur AΓ ne soit pas la plus petite. Retranchons l'excès de A sur B. Puisque l'on a ôté quelque chose d'un des

son *Traité des corps flottants,* Archimède a parlé de la convergence des verticales sans voir qu'elle rendait inexacts quelques-uns de ses énoncés.

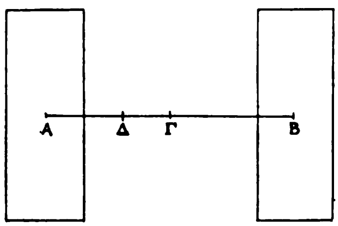
([10]) Ce point n'est pas démontré dans ce qui suit. C'est une conséquence de l'existence du centre de gravité admise comme postulat expérimental.

graves qui sont en équilibre, le grave B sera porté en bas (Dem., 4°). Mais ce grave ne sera point porté en bas; car si ΓA est égal à ΓB, il y aura équilibre (Dem., 1°); et si ΓA est plus grand que ΓB, ce sera au contraire le grave A qui sera porté en bas; puisque des graves égaux suspendus à des longueurs inégales ne restent point en équilibre, et que le grave suspendu à la plus grande longueur est porté en bas (Dem., 2°). Donc ΓA est plus petit que ΓB. Donc, si des graves suspendus à des longueurs inégales sont en équilibre, il est évident que ces graves seront inégaux, et que le plus grand sera suspendu à la plus petite longueur.

Proposition IV. — Si deux grandeurs égales n'ont pas le même centre de gravité, le centre de gravité de la grandeur composée de ces deux grandeurs est le point placé au milieu de la droite qui joint les centres de gravité de ces deux grandeurs.

Que le point A soit le centre de gravité de la grandeur A, et le point B le centre de gravité de la grandeur B. Ayant mené la

Fig. 2.



droite AB, partageons cette droite en deux parties égales au point Γ. Je dis que le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs A, B est le point Γ.

Car, si le point Γ n'est pas le centre de gravité de la grandeur qui est composée des deux grandeurs A, B, supposons, si cela est possible, que ce soit le point Δ. Il est démontré que le centre de gravité est dans la droite AB ([11]). Puisque le point Δ est le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs A, B, le point Δ étant soutenu, les grandeurs A, B seront en équilibre. Donc les grandeurs A, B, suspendues aux longueurs AΔ, ΔB sont en équilibre. Ce qui ne peut être, car des grandeurs égales sus-

([11]) Cette proposition n'est démontrée nulle part dans les Ouvrages qui nous restent d'Archimède.

pendues à des longueurs inégales ne sont point en équilibre (Dem., 2°). Il est donc évident que le point Γ est le centre de gravité de la grandeur qui est composée des grandeurs A, B.

Proposition V. — Si les centres de gravité de trois grandeurs sont placés dans une même droite; si ces grandeurs ont la même pesanteur, et si les droites placées entre les centres de gravité sont égales, le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs sera le point qui est le centre de gravité de la grandeur du milieu.

[C'est une conséquence de ce qui précède moyennant le postulat, tacitement admis, de la note 12.]

Il suit évidemment de là que, si les centres de gravité de tant de grandeurs que l'on voudra et d'un nombre impair, sont dans la même droite, si celles qui sont également éloignées de celle qui est au milieu ont la même pesanteur, et si les droites comprises entre les centres de gravité sont égales, le centre de gravité de la grandeur composée de toutes les grandeurs sera le point qui est le centre de gravité de la grandeur du milieu.

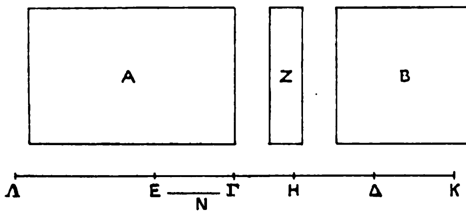
Si ces grandeurs sont d'un nombre pair, si leurs centres de gravité sont dans la même droite, si celles du milieu et celles qui sont également éloignées de part et d'autre des grandeurs du milieu ont la même pesanteur, et si les droites placées entre les centres de gravité sont égales, le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs sera le point placé au milieu de la droite qui joint les centres de gravité.

Proposition VI. — Des grandeurs commensurables sont en équilibre, lorsqu'elles sont réciproquement proportionnelles aux longueurs auxquelles ces grandeurs sont suspendues.

Soient les grandeurs commensurables A, B; que leurs centres de gravité soient les points A, B; soit une certaine longueur EΔ, et que la grandeur A soit à la grandeur B comme la longueur ΔΓ est à la longueur ΓE. Il faut démontrer que le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs A, B est le point Γ.

Puisque A est à B comme ΔΓ est à ΓE, et que les grandeurs A, B sont commensurables, les droites ΓΔ, ΓE seront aussi commensurables. .... Donc les droites EΓ, ΓΔ ont une commune mesure. Que cette commune mesure soit N. Supposons que chacune des droites ΔH, ΔK soit égale à la droite EΓ et que la droite EΛ soit égale à la droite ΔΓ. Puisque la droite ΔH est égale à la droite ΓE, la droite ΔΓ sera égale à la droite EH, et la droite ΛE égale à la droite EH. Donc la droite ΛH est double de la droite ΔΓ, et la droite HK double de la droite ΓE. Donc la droite N mesure chacune des droites ΛH, HK, puisqu'elle mesure leurs moitiés. Mais A est à B comme la droite ΔΓ est à la droite EΓ, ... Donc A est à B comme ΛH est à HK. Que A soit autant de fois multiple de Z que ΛH l'est de N. La droite ΛH sera à la droite N comme A est

Fig. 3.



à Z. Mais KH est à ΛH comme B est à A. Donc, par raison d'égalité, la droite KH est à la droite N comme B est à Z. Donc autant de fois KH est multiple de N, autant de fois B l'est de Z. Mais on a démontré que A est aussi un multiple de Z. Donc Z est la commune mesure de A et de B. Donc si ΛH est partagé dans des segments égaux chacun à N, et A dans des segments égaux chacun à Z, les segments égaux chacun à N, qui sont dans ΛH, seront en même nombre que les segments égaux chacun à Z qui sont dans A. Donc si, à chacun des segments de ΛH, on applique une grandeur égale à Z, qui ait son centre de gravité dans le milieu de chacun des segments, toutes ces grandeurs seront égales à A, et le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs sera le point E, car elles sont en nombre pair, attendu que ΛE est égal à HE (proposition V). On démontrera semblablement que si à chacun des segments de KH, on applique une grandeur égale à Z, qui ait son centre de gravité au milieu de chacun de ces segments, toutes ces grandeurs seront égales à B, et que le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs sera le point Δ. Mais la grandeur A est appliquée au point E et la grandeur B au point Δ. Donc certaines grandeurs égales entre elles sont placées sur une droite; leurs centres de gravité ont entre eux le même intervalle, et ces grandeurs sont en nombre pair. Il est donc évident que le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs est le point placé au milieu de la droite sur laquelle sont les centres de gravité des grandeurs moyennes (proposition V). Mais la droite ΛE est égale à la droite ΓΔ et la droite EΓ est égale à la droite ΔK; donc la droite entière ΛΓ est égale à la droite entière ΓK. Donc le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs est le point Γ. Donc la grandeur A étant appliquée au point E, et la grandeur B au point Δ, ces grandeurs seront en équilibre autour du point Γ ([12]).

[Par la méthode d'exhaustion, Archimède étend ce théorème aux grandeurs incommensurables ([13]).]

Les Ouvrages d'Archimède sont les plus importants, mais ne sont pas les seuls restes qui nous soient parvenus de la Mécanique des Grecs. Nous possédons un certain nombre de textes représentant la science alexandrine sur ce sujet, textes dont le moyen âge occidental a connu quelques-uns ([14]). Il convient de signaler que, dans certains de ces écrits, on voit des tentatives pour tenir compte, dans la Théorie du levier, du poids du levier lui-même.

§ 2. — Commentaires sur le principe du levier.

Le Traité d'Archimède a un but plutôt mathématique que mécanique : son objet principal est la recherche des centres de gravité des figures planes. Il convient de voir maintenant ce que les modernes ont tiré de l'Ouvrage du géomètre grec pour la constitution de leur Science mécanique. Nous ne pouvons mieux faire pour cela que de citer le très instructif commentaire que Lagrange ([15]) a donné du *Principe du*

([12]) On suppose dans cette démonstration que, pour rechercher le centre de gravité de plusieurs grandeurs, toutes ces grandeurs Z étant uniformément réparties sur AK, on peut remplacer d'une manière quelconque quelques-unes de ces grandeurs par leur centre de gravité. Voir les observations de Lagrange dans la citation qui suit : elles sont une excellente analyse de la présente démonstration.

([13]) Le second Livre du Traité est consacré à la recherche des centres de gravité de diverses figures planes.

([14]) *Voir* Duhem, *Les origines de la Statique,* t. I, chap. V.

([15]) Lagrange, mathématicien français (1736-1813). *La Mécanique analytique* a paru pour la première fois en 1788. Nous citons la 4e édition publiée en 1888 par M. G. Darboux.

levier dans la première section de sa *Mécanique analytique*.

1. Archimède... est l'auteur du principe du levier, lequel consiste, comme le savent tous les mécaniciens, en ce que, si un levier droit est chargé de deux poids quelconques placés de part et d'autre du point d'appui, à des distances de ce point réciproquement proportionnelles aux mêmes poids, ce levier sera en équilibre, et son appui sera chargé de la somme des deux poids. Archimède prend ce principe, dans le cas des poids égaux placés à des distances égales du point d'appui, pour un axiome de mécanique évident de soi-même, ou du moins pour un principe d'expérience ([16]); et il ramène à ce cas simple et primitif celui des poids inégaux, en imaginant ces poids, lorsqu'ils sont commensurables, divisées en plusieurs parties toutes égales entre elles, et en supposant que les parties de chaque poids soient séparées et transportées, de part et d'autre, sur le même levier, à des distances égales, en sorte que le levier se trouve chargé de plusieurs petits poids égaux et placés à des distances égales, autour du point d'appui. Ensuite, il démontre la vérité du même théorème pour les poids incommensurables à l'aide de la méthode d'exhaustion, en faisant voir qu'il ne saurait y avoir équilibre entre ces poids, à moins qu'ils ne soient en raison inverse de leurs distances au point d'appui.

Quelques auteurs modernes, comme Stevin, dans sa *Statique*, et Galilée, dans ses *Dialogues sur le mouvement*, ont rendu la démonstration d'Archimède plus simple, en supposant que les poids attachés au levier soient deux parallélépipèdes horizontaux pendus par le milieu, et dont les largeurs et les hauteurs soient égales, mais dont les longueurs soient doubles des bras de levier qui leur répondent inversement. Car, de cette manière, les deux parallélépipèdes sont en raison inverse de leurs bras de levier, et en même temps ils se trouvent placés bout à bout, en sorte qu'ils n'en forment plus qu'un seul, dont le point du milieu répond précisément au point d'appui du levier ([17]). Archimède avait déjà

([16]) Le postulat que l'appui est chargé de la somme des deux poids n'est pas énoncé explicitement par Archimède (*voir* plus haut). Il est indispensable pourtant dans la démonstration de la proposition VI, quand Archimède remplace l'action d'un certain nombre de grandeurs Z sur le levier par celle de la grandeur A.

([17]) On verra plus loin (§ 4) le raisonnement de Galilée. Voici, en résumé, celui de Stevin :

Qu'on se figure le prisme homogène ABCD suspendu par son centre de graemployé une considération semblable pour déterminer le centre de gravité d'une grandeur composée de deux surfaces paraboliques, dans la première proposition du second Livre de l'*Équilibre des plans*.

D'autres auteurs, au contraire, ont cru trouver des défauts dans la démonstration d'Archimède, et ils l'ont tournée de différentes façons pour la rendre plus rigoureuse; mais il faut convenir qu'en altérant la simplicité de cette démonstration, ils n'y ont presque rien ajouté du côté de l'exactitude.

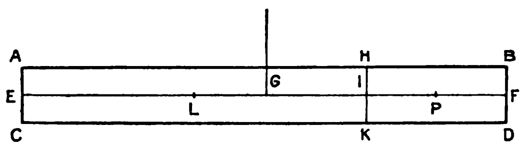
Cependant, parmi ceux qui ont cherché à suppléer à la démonstration d'Archimède sur l'équilibre du levier, on doit distinguer Huygens, dont on a un petit écrit intitulé : *Demonstratio æquilibri bilancis* et imprimé en 1693 dans le *Recueil des anciens Mémoires de l'Académie des Sciences*.

Huygens observe qu'Archimède suppose tacitement que, si plusieurs poids égaux sont appliqués à un levier horizontal, à distances égales les uns des autres, ils exercent la même force pour incliner le levier, soit qu'ils se trouvent tous du même côté du point d'appui; soit qu'ils soient les uns d'un côté et les autres de l'autre côté du point d'appui; et, pour éviter cette supposition précaire, au lieu de distribuer, comme Archimède, les parties aliquotes des deux poids commensurables sur le même levier, de part et d'autre des points où les poids entiers sont censés appliqués, il

---

vité G; il est en équilibre. Supposons ensuite ce prisme coupé suivant la section droite HIK, les deux parties AHKC, HBDK étant reliées par la tige rigide et sans masse EF; l'équilibre n'est pas rompu. Or, ces deux parties sont des

Fig. 4.



poids qu'on peut considérer comme appliqués sur le levier EF en leurs centres de gravité L, P. Et il est facile de voir que les volumes des prismes AHKC, HBDK sont inversement proportionnels aux bras GL, GP.

Les difficultés de ce mode de démonstration sont les suivantes. Peut-on, sans troubler l'équilibre, couper le prisme en HK et supposer les deux prismes partiels soutenus par la tige EF uniquement en leurs centres de gravité ?

Ce sont évidemment les mêmes difficultés que celles qui se trouvent dans la démonstration d'Archimède; mais il faut avouer, à notre avis, que, présentées ainsi, elles sont atténuées et qu'on accepte mieux l'appel à l'expérience qu'elles exigent.

les distribue de la même manière, mais sur deux autres leviers horizontaux et placés perpendiculairement aux extrémités du levier principal, en forme de T; de cette manière, on a un plan horizontal chargé de plusieurs poids égaux, et qui est évidemment en équilibre sur la ligne du premier levier, parce que les poids se trouvent distribués également et symétriquement des deux côtés de cette ligne. Mais Huygens démontre que ce plan est aussi en équilibre sur une droite inclinée à celle-là, et passant par le point qui divise le levier primitif en parties réciproquement proportionnelles aux poids dont il est supposé chargé, parce qu'il fait voir que les petits poids se trouvent aussi placés à distances égales de part et d'autre de la même droite; d'où il conclut que le plan et par conséquent le levier proposé doivent être en équilibre sur le même point.

Cette démonstration est ingénieuse, mais elle ne supplée pas entièrement à ce qu'on peut, en effet, désirer dans celle d'Archimède.

2. L'équilibre d'un levier droit et horizontal, dont les extrémités sont chargées de poids égaux et dont le point d'appui est au milieu du levier, est une vérité évidente par elle-même, parce qu'il n'y a pas de raison pour que l'un des poids l'emporte sur l'autre, tout étant égal de part et d'autre du point d'appui ([18]). Il n'en est pas de même de la supposition que la charge de l'appui soit égale à la somme des deux poids. Il paraît que tous les mécaniciens l'ont prise comme un résultat de l'expérience journalière, qui apprend que le poids d'un corps ne dépend que de sa masse totale, et nullement de sa figure ([19]). On peut néanmoins déduire

---

([18]) Ainsi que le fait remarquer M. Mach, cette affirmation suppose une grande quantité d'expériences négatives, d'où l'on a déduit, par exemple, que la couleur des bras de levier, la forme des poids, la position du spectateur, etc., sont sans influence.

([19]) *Cf.* note 16. — D'Alembert est, je crois, le premier qui ait cherché à démontrer cette proposition; mais la démonstration qu'il en a donnée dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1769 n'est pas entièrement satisfaisante. Celle que Fourier a donnée depuis dans le Ve Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* est rigoureuse et très ingénieuse; mais elle n'est pas tirée de la nature du levier (*Note de Lagrange*).

Voici cette démonstration de Fourier :

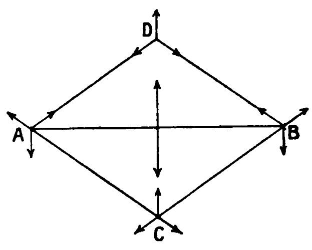
« Je remarque d'abord que trois forces égales ... et dirigées suivant les trois rayons qui divisent le cercle en trois secteurs égaux se font manifestement équilibre. Maintenant, par chacun des points A et B d'une horizontale AB, je mène cette vérité de la première en considérant, comme Huygens, l'équilibre d'un plan sur une ligne.

Pour cela, il n'y a qu'à imaginer un plan triangulaire chargé de deux poids égaux aux deux extrémités de sa base, et d'un poids double à son sommet. Ce plan sera évidemment en équilibre, étant appuyé sur une ligne droite ou axe fixe, qui passe par le milieu des deux côtés du triangle; car on peut regarder chacun de ces côtés comme un levier chargé dans ses deux extrémités de deux poids égaux et qui a son point d'appui sur l'axe qui passe par son milieu ([20]). Maintenant on peut envisager cet équilibre d'une autre manière, en regardant la base même du triangle comme un levier dont les extrémités sont chargées de deux poids égaux, et en imaginant un levier transversal qui joigne le sommet du triangle et le milieu de sa base en forme de T, dont une des extrémités soit chargée du poids double placé au sommet, et l'autre serve de point d'appui au levier qui forme la base. Il est évident que ce dernier levier sera en équilibre sur le levier transversal qui le soutient dans son milieu, et que celui-ci sera, par conséquent, en équilibre sur l'axe sur lequel le plan est déjà en

---

deux lignes qui font avec AB, et des deux côtés, des angles équivalents au tiers d'un droit : j'applique à chacun des points A, B, C, D trois forces qui se font équilibre séparément et sont toutes égales entre elles. De plus, je suppose

Fig. 5.



le milieu de la ligne sollicité par deux forces doubles des précédentes et opposées entre elles. Si la figure est regardée comme un plan matériel et la disposition des forces telle qu'on le voit dans la planche, il est clair que toutes ces forces se détruisent, excepté celles qui doivent se faire équilibre conformément à la proposition à démontrer. »

([20]) Il faut envisager chacun de ces deux leviers séparément; ils sont en équilibre. On les relie ensuite entre eux d'une manière rigide par l'intermédiaire du plan que l'on suppose sans masse et l'on admet que *cette solidification, cette introduction de liaisons nouvelles ne trouble pas l'équilibre*. C'est là un postulat qui joue un grand rôle en Mécanique. On peut le considérer comme suffisamment évident, c'est-à-dire comme résultant assez directement de l'expérience.

équilibre ([21]). Or, comme l'axe passe par le milieu des deux côtés du triangle, il passera aussi nécessairement par le milieu de la droite menée du sommet du triangle au milieu de sa base; donc le levier transversal aura son point d'appui dans le point du milieu et devra, par conséquent, être chargé également aux deux bouts; donc la charge que supporte le point d'appui du levier qui fait la base du triangle, et qui est chargé à ses deux extrémités de poids égaux, sera égale au poids double du sommet et, par conséquent, égale à la somme des deux poids.

3. Cette proposition une fois établie, il est clair qu'on peut, ainsi qu'Archimède le fait, substituer à un poids en équilibre sur un levier deux poids égaux chacun à la moitié de ce poids et placés sur le même levier, à distances égales de part et d'autre du point où le poids est attaché; car l'action de ce poids est la même que celle d'un levier suspendu par son milieu au même point et chargé, à ses deux bouts, de deux poids égaux chacun à la moitié du même poids; et il est évident que rien n'empêche d'approcher ce dernier levier du premier, de manière qu'il en fasse partie. Ou bien, ce qui est peut-être plus rigoureux, il n'y a qu'à regarder ce dernier levier comme étant tenu en équilibre par une force appliquée à son point de milieu, dirigée de bas en haut, et égale au poids dont les deux moitiés sont censées appliquées à ses extrémités; alors, en appliquant ce levier en équilibre sur le premier levier qui est supposé en équilibre sur son point d'appui ([22]), l'équilibre total subsistera toujours et, si l'application se fait de manière que le milieu du second levier coïncide avec l'extrémité

([21]) Il faut avouer que l'expérience ne nous donne pas cette évidence d'une façon très nette. Ici, en somme, au lieu de considérer la solidification d'un système en équilibre, comme dans la note précédente, nous raisonnons au contraire en disjoignant les liaisons d'un tel système; le plan étant supposé en équilibre, nous détruisons sa rigidité pour rendre plus ou moins indépendants les leviers formés respectivement par la base et par la médiane du triangle; on ne voit pas très bien ce qui va se passer.

Mais on peut invoquer ici la superposition des équilibres, dont il sera question plus loin. Imaginons un levier identique à celui que forme la base du triangle, avec cette seule différence que les forces qui le chargent à ses extrémités soient dirigées de bas en haut. Superposons ce levier au plan en équilibre, d'une manière analogue à ce qui sera fait plus loin. On parvient ainsi à l'équilibre du levier transversal.

([22]) Et en solidifiant, par le principe de la note 20, l'ensemble des deux leviers.

d'un des bras du premier levier, la force qui soutient le second levier pourra être censée appliquée au poids même dont ce bras est chargé et qui, étant soutenu, n'aura plus d'action sur le levier, mais se trouvera ainsi remplacé par deux poids égaux chacun à sa moitié et placés de part et d'autre de ce poids sur le premier levier prolongé. Cette superposition d'équilibres est, en Mécanique, un principe aussi fécond que l'est, en Géométrie, la superposition des figures [23].

Les déductions d'Archimède, comme celles de tous les géomètres grecs, présentent une certaine lourdeur, qui s'atténue notablement dans les écrits de ses successeurs (Galilée, Stevin, Huygens, Lagrange), mais ne disparaît pas complètement. Il est incontestable que sa méthode n'est pas une méthode de découverte; certainement ce n'est pas par elle, mais plutôt par l'intuition expérimentale, que l'esprit humain est parvenu à reconnaître, dans le produit PL du grave par le bras de levier, ce que M. Mach appelle la *déterminante de l'équilibre*.

Examinons maintenant la valeur démonstrative de ces déductions.

Ainsi qu'on l'a vu, tous les raisonnements rappelés dans ce qui précède invoquent, outre les *demandes* explicitement énoncées par Archimède, certaines intuitions expérimentales. Archimède suppose qu'il peut, dans la recherche d'un centre de gravité, remplacer quelques-unes des grandeurs qu'il compose par leur centre de gravité partiel (*voir* note 12). Galilée et Stevin admettent qu'ils peuvent sectionner leur prisme sans troubler l'équilibre; Lagrange invoque le principe de la solidification et de la superposition des équilibres. Cela était nécessaire. Du simple fait de l'équilibre de poids égaux à des distances égales du point d'appui, il est manifeste qu'on ne

---

[23] Il faut rattacher cette *superposition des équilibres* aux trois *notions communes* énoncées par Guido Ubaldo au début de sa *Statique* (*cf.* § 3). La manière de Lagrange est moins métaphysique que celle de Guido Ubaldo, lequel pose un peu *a priori*, sans justification, la notion de grandeurs équilibres. Lagrange superpose des corps et les attache les uns aux autres; c'est très concret.

peut pas déduire logiquement la proportion inverse des bras de levier.

A la vérité, Archimède et tous ses successeurs, dit M. Mach ([24]), firent un usage tacite et plus ou moins dissimulé de l'hypothèse que l'effet d'une force P appliquée à une distance L d'un axe est mesuré par le produit PL. Il est d'une évidence immédiate que, dans le cas d'une disposition parfaitement symétrique, l'équilibre subsiste quelle que soit la loi $Pf(L)$ d'après laquelle la déterminante de la rupture d'équilibre dépend de L; il est par conséquent impossible de déduire, de la persistance de l'équilibre dans ce cas, la forme déterminée PL de cette loi. La base fondamentale de la démonstration doit donc se trouver dans la transformation que l'on a en vue et s'y trouve en effet. Considérons un poids appliqué d'un côté de l'axe de rotation; partageons-le en deux parties égales que nous déplaçons symétriquement par rapport au point de suspension primitif; une de ces parties se rapproche de l'axe de rotation exactement de la même quantité dont l'autre s'en éloigne. Faire maintenant l'hypothèse que dans ce déplacement l'action reste la même, c'est avoir déjà décidé de la forme de la loi qui fait dépendre le moment de la distance L.

Il y a donc, forcément, dans toute théorie du levier, une hypothèse plus ou moins explicite déterminant la forme de la fonction $f(L)$.

Cette hypothèse est précisément faite sur la forme très apparente qu'indique M. Mach dans un écrit attribué à Euclide, signalé en 1851 par le Dr Woepcke qui l'a traduit de l'arabe et publié dans le *Journal asiatique* ([25]) sous le titre : *Le Livre d'Euclide sur la balance*. Cet écrit n'est pas sûrement d'Euclide, mais il est peut-être en effet antérieur à Archimède.

Dans les travaux d'Archimède, Stevin, Galilée, Lagrange, l'hypothèse éclate moins aux yeux. L'idée que $f(L)$ se réduit à L doit s'introduire certainement quelque part dans leurs raisonnements, puisqu' n la trouve au bout. Mais elle s'in-

([24]) *La Mécanique. Exposé historique et critique de son développement,* par E. Mach (traduction Bertrand). Paris, 1904.

([25]) 4e série, t. XVIII, 1851, p. 217.

troduit d'une façon plus dissimulée. Est-ce un défaut? Non certes. Je dirais presque, sous une forme paradoxale et qui dépasse un peu ma pensée, que, dans les démonstrations qui sont à la base des théories physiques, le fait qu'une idée s'introduit d'une façon dissimulée est excellent, car c'est une preuve qu'on y fait appel à des notions que nous impose d'une manière invincible notre intuition expérimentale. Le tout est de voir si, dans l'exemple qui nous occupe, les affirmations que l'on invoque peuvent être considérées comme résultant suffisamment de notre expérience journalière. Or, il me semble difficile de refuser ce caractère à la considération du prisme et surtout à la superposition des leviers de Lagrange. On remarquera que ce ou ces leviers superposés sont une manière de rendre *concrète* la démonstration de la proposition VI d'Archimède, et par suite de la rattacher aux faits d'observation.

Enfin, laissons même de côté la valeur *démonstrative* des considérations d'Archimède et de ses successeurs. Dans les raisonnements relatifs aux principes qui sont à la base d'une science physique, il faut voir moins des démonstrations que des analyses logiques, où l'on cherche à scruter diverses notions, à les rattacher les unes aux autres ou à les distinguer entre elles. A ce point de vue, les déductions d'Archimède qui « montrent la similitude du simple et du compliqué et établissent une même conception pour tous les cas » (Mach) présentent une grande valeur. Au même point de vue, il est important d'établir un lien, comme le fait Lagrange, entre la loi du levier et les principes de solidification et de superposition des équilibres : si l'on peut prétendre qu'il est aussi difficile d'admettre *a priori* ces principes que la loi du levier elle-même, il est fort intéressant de rattacher celle-ci à ceux-là, parce que ceux-là sont très généraux et servent dans beaucoup d'autres questions de Mécanique; on sait, en effet, que la solidification est une méthode générale, encore en usage aujourd'hui, pour démontrer certaines conditions nécessaires d'équilibre.

§ 3. — Extension du principe du levier. Notion générale de moment.

Continuons la citation de Lagrange donnée dans le paragraphe précédent.

4. On peut donc regarder l'équilibre d'un levier droit et horizontal, chargé de deux poids en raison inverse de leurs distances au point d'appui du levier, comme une vérité rigoureusement démontrée; et, par le principe de la superposition, il est facile de l'étendre à un levier angulaire quelconque, dont le point d'appui serait dans l'angle et dont les bras seraient tirés en sens contraire par des forces perpendiculaires à leurs directions. En effet, il est évident qu'un levier angulaire à bras égaux, et mobile autour du sommet de l'angle, sera tenu en équilibre par deux forces égales appliquées perpendiculairement aux extrémités des deux bras et tendant à les faire tourner en sens contraire. Si donc on a un levier droit en équilibre, dont l'un des bras soit égal à ceux du levier angulaire et soit chargé à son extrémité d'un poids équivalent à chacune des puissances appliquées au levier angulaire, l'autre bras étant chargé du poids nécessaire pour l'équilibre, et qu'on superpose ces leviers de manière que le sommet de l'angle de l'un tombe sur le point d'appui de l'autre, et que les bras égaux de l'un et de l'autre coïncident et n'en forment plus qu'un, la puissance appliquée au bras du levier angulaire soutiendra le poids suspendu au bras égal du levier droit, de manière qu'on pourra faire abstraction de l'un et de l'autre et supposer le bras formé de la réunion de ces deux-ci anéanti. L'équilibre subsistera donc encore entre les deux autres bras formant un levier angulaire tiré à ses extrémités par des forces perpendiculaires et en raison inverse de la longueur des bras, comme dans le levier droit.

Or une force peut être censée appliquée à tel point que l'on veut de sa direction. Donc deux forces, appliquées à des points quelconques d'un plan retenu par un point fixe et dirigées comme on voudra dans ce plan, sont en équilibre lorsqu'elles sont entre elles en raison inverse des perpendiculaires abaissées de ce point sur leurs directions; car on peut regarder ces perpendiculaires comme formant un levier angulaire dont le point d'appui est le point fixe du plan : c'est ce qu'on appelle maintenant le *principe des moments,* en entendant par *moment* le produit d'une force par le bras du levier par lequel elle agit.

Ce principe général suffit pour résoudre tous les problèmes de la Statique. La considération du treuil l'avait fait apercevoir dès les premiers pas que l'on a faits, après Archimède, dans la théorie des machines simples, comme on le voit par l'Ouvrage de Guido Ubaldo, intitulé : *Mechanicorum liber,* qui a paru à Pesaro, en 1577; mais cet auteur n'a pas su l'appliquer au plan incliné, ni aux autres machines qui en dépendent, comme le coin et la vis dont il n'a donné qu'une théorie peu exacte [26].

Il convient de rectifier ces indications historiques de Lagrange d'après les résultats de la critique moderne.

Les Alexandrins connaissaient certainement la notion de moment dans le cas du levier oblique. On en trouve une vague indication dans Pappus, à propos du plan incliné. Elle est formulée nettement par Héron (*Les Mécaniques* ou *l'Élévateur*). Mais la partie de l'Ouvrage de Héron où elle se trouve n'a été connue des modernes occidentaux que par la publication faite, d'après la version arabe, par M. Carra de Vaux, en 1894.

Au XIII^{e} siècle, un mathématicien inconnu a retrouvé la notion générale de moment dans le problème du levier angulaire soumis, à ses deux extrémités, à des forces parallèles, à des poids. Mais sa démonstration n'est pas fondée sur le levier; elle se rattache au principe des travaux virtuels et nous en parlerons plus loin (Chap. III, § 3).

Les manuscrits de Léonard de Vinci (1451-1519) montrent qu'il avait de la façon la plus nette la notion de moment dans le cas général d'un corps solide tournant autour d'un axe fixe et soumis à des forces perpendiculaires à cet axe. Léonard appelait un tel corps un *circonvolubile.*

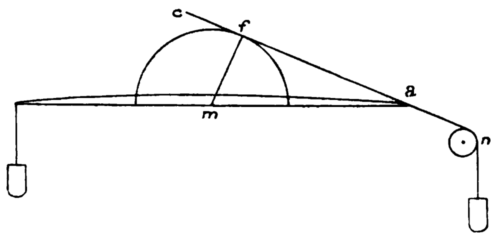
En quelque partie que soit liée la corde *nc* de la partie *ac*, cela

---

[26] Guido Ubaldo ramène bien la vis au plan incliné; mais il adopte la loi du plan incliné qui se trouve dans Pappus (*voir* note 45) et qui est inexacte.

ne fait pas de différence, parce que toujours on emploie une ligne qui tombe perpendiculairement du centre de la balance à la ligne de la corde, c'est-à-dire la ligne *mf*.

Fig. 6.



[Cette ligne *mf* est ce que Léonard de Vinci appelle en un autre endroit le ***bras spirituel*** ou le ***bras potentiel*** de la balance.]

Nous citons ci-après un passage de Guido Ubaldo (1545-1607). Après lui, Benedetti (1530-1590) a exposé très nettement, plus nettement même que Guido Ubaldo, la notion de moment [*Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber* (1585)] : il se pourrait qu'il ait subi l'influence de Vinci ([27]).

[Au début de son *Mechanicorum liber* (1577) Guido Ubaldo admet comme évidentes les affirmations suivantes.]

Notions communes. — I. Si, à des grandeurs équilibres ([28]) on enlève des grandeurs équilibres, ce qui reste est équilibre.

II. Si à des grandeurs équilibres on ajoute des grandeurs équilibres, l'ensemble est équilibre.

III. Deux grandeurs équilibres à une troisième sont équilibres entre elles.

[Nous nous contenterons de citer ici la démonstration que donne Guido Ubaldo de l'équilibre du levier de deuxième espèce. C'est un cas particulier du levier angulaire, et le raisonnement

---

([27]) *Voir* DUHEM, *Les Origines de la Statique*, t. I, 1905, p. 226.

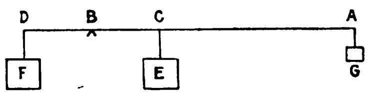
([28]) Je traduis *æquiponderantia* par *grandeurs équilibres*. J'aime mieux ajouter au texte latin le mot *grandeurs* que le mot *forces*. Il serait préférable, si c'était possible, de ne rien ajouter du tout et de laisser le neutre du latin. — *Cf.* note 23.

ressemble beaucoup à celui qu'a développé Lagrange : il invoque les *notions communes* précédentes, c'est-à-dire le principe de la superposition des équilibres (*voir* note 23).]

Soient un levier AB, B son point d'appui, C un point où est suspendu le poids E, et soit une force (*vis*) appliquée en A et soutenant le poids E. Je dis que la puissance en A est au poids E comme BC à BA.

Prolongeons AB en D tel que BD = BC, et, en D, accrochons un poids F égal au poids E. En A accrochons un poids G qui soit à F dans le rapport de BD à BA : les poids F et G seront

Fig. 7.



équilibres. Mais, CB et BD étant égaux, F et E sont aussi équilibres. D'ailleurs, les poids F, E, G ne sont pas équilibres sur le levier DBA, dont l'appui est B; ils tendent à s'abaisser du côté de A. Supposons donc en A une force telle qu'elle équilibre les poids F, E, G. Cette puissance sera égale au poids G, puisque F et E sont équilibres, et n'aura qu'à soutenir le poids G pour qu'il ne descende pas. Les poids F, E, G étant en équilibre avec la force en A, si l'on enlève F et G qui sont équilibres, le reste est encore en équilibre; c'est-à-dire que la force en A équilibre le poids E. Or, la force en A est égale au poids G, et E est égal à F; par suite, le rapport de la force en A au poids E sera le même que celui de BD (ou BC) à BA.

Ce qu'il fallait démontrer.

§ 4. — Usage du principe du levier.

Il y a eu au moyen âge une véritable école de Statique, celle de Jordanus de Nemore. Les principes dont elle a fait usage se rattachent à notre principe de travail virtuel; aussi en parlerons-nous dans le Chapitre III; elle ne paraît pas avoir connu les travaux d'Archimède. A l'ép que de la Renaissance, la lecture des Ouvrages du géomètre de Syracuse a provoqué une réaction contre cette école de Jordanus; les esprits se sont épris de la rigueur grecque. Sans doute, en Mécanique, cette tendance a souvent conduit à une rigueur fictive. Il faut reconnaître, toutefois, nous le verrons, qu'un des postulats fondamentaux de Jordanus, qui n'est qu'une expression particulière du principe du travail virtuel, pouvait, à bon droit, passer pour exiger une démonstration. Il est donc assez naturel qu'une autre méthode se soit constituée. Cette nouvelle méthode a consisté à faire la théorie des machines simples en se servant du principe du levier ([29]). On la trouve exposée dans le *Mechanicorum liber* de Guido Ubaldo, marquis del Monte (1545-1607), Traité qui a paru en 1577 et a eu un fort grand succès ([30]) et dans les Ouvrages de Benedetti (1530-1590) (*Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber*, 1585). Sans doute, elle repose sur un principe moins fécond que la méthode de Jordanus; mais elle a rendu un service immense précisément en permettant de justifier le principe du travail virtuel dans le cas des machines simples et en montrant par là son importance.

Comme exemple de cette méthode nous citerons *Les Méchaniques de Galilée, florentin, ingénieur et mathématicien du duc de Florence,* Ouvrage publié pour la première fois en français par le Père Mersenne (Paris, chez Guenon, 1634) (Galilée a vécu de 1564 à 1642).

A cette époque, on désignait sous le nom de *mécaniques* les machines. La science mécanique était la science de l'équilibre des machines; le mot *mécanique* ne s'appliquait pas, comme aujourd'hui, à l'étude du mouvement.

CHAPITRE I.

DANS LEQUEL ON VOIT LA PRÉFACE QUI MONTRE L'UTILITÉ DES MACHINES.

Avant que d'entreprendre la spéculation des instruments de la Mécanique, il faut remarquer, en général, les commodités et les

---

([29]) On peut, à ce propos, rappeler qu'Aristote avait déjà dit : « La plupart des particularités offertes par les mouvements des mécaniques se ramènent aux propriétés du levier. » (*Cf.* Introduction.)

([30]) *Voir* § 3.

profits que l'on en peut tirer, afin que les artisans ne croyent pas qu'ils puissent servir aux opérations dont ils ne sont pas capables et que l'on puisse lever de grands fardeaux avec peu de force : car la nature ne peut être trompée ni céder à ses droits...

Il faut donc ici considérer quatre choses, à savoir : le fardeau que l'on veut transporter d'un lieu à un autre; la force qui le doit mouvoir; la distance par laquelle se fait le mouvement et le temps dudit mouvement, parce qu'il sert pour en déterminer la vitesse, puisqu'elle est d'autant plus grande que le corps mobile, ou le fardeau, passe par une plus grande distance en même temps : de sorte que si l'on suppose telle résistance, telle force, et telle distance déterminée que l'on voudra, il n'y a nul doute que la force requise conduira le fardeau à la distance donnée, quoique ladite force soit très petite, pourvu que l'on divise le fardeau en tant de parties que la force en puisse mouvoir une ([31]), car elle les transportera toutes les unes après les autres; d'où il s'ensuit que la moindre force du monde peut transporter tel poids que l'on voudra.

Mais l'on ne peut dire à la fin du transport que l'on ait remué un grand fardeau avec peu de force, puisqu'elle a toujours été égale à chaque partie du fardeau : de manière que l'on ne gagne rien avec les instruments, d'autant que si l'on applique une petite force à un grand fardeau, il faut beaucoup de temps et que si l'on veut le transporter en peu de temps, il faut une grande force. D'où l'on peut conclure qu'il est impossible qu'une petite force transporte un grand poids dans moins de temps qu'une plus grande force.

Néanmoins, les machines sont utiles pour manœuvrer de grands fardeaux tout d'un coup sans les diviser, parce que l'on a souvent beaucoup de temps et peu de force; c'est pourquoi la longueur du temps récompense le peu de force : mais celui-là se tromperait qui voudrait abréger le temps en n'usant que d'une petite force et montrerait qu'il n'entend pas la nature des machines ni la raison de leurs effets ([32])...

([31]) Faut-il voir, dans cette rédaction, un souvenir de l'idée d'Aristote qu'une force trop petite ne peut pas déplacer un corps trop lourd?

([32]) Ces considérations se rattachent à ce que nous appelons aujourd'hui le *principe du travail virtuel*. Nous y reviendrons dans le Chapitre III. Nous les avons laissées subsister dans la présente citation pour donner une idée complète du Traité de Galilée.

CHAPITRE II.

DES DÉFINITIONS NÉCESSAIRES POUR LA SCIENCE DES MÉCANIQUES.

Première définition. — La *pesanteur* d'un corps est l'inclination naturelle qu'il a pour se mouvoir et se porter en bas vers le centre de la terre...

Deuxième définition. — Le *moment* est l'inclination du même corps, lorsqu'elle n'est pas seulement considérée dans ledit corps, mais conjointement avec la situation qu'il a sur le bras d'un levier ou d'une balance, et cette situation fait qu'il contrepèse souvent à raison de sa plus grande distance d'avec le centre de la balance... Cette inclination est composée de la pesanteur absolue du corps et de l'éloignement du centre de la balance. Nous appellerons donc toujours cette inclination composée *moment,* qui répond au ῥοπή des Grecs ([33]).

Troisième définition. — Le centre de pesanteur de chaque corps est le point autour duquel toutes les parties dudit corps sont également balancées ou équipondérantes : de sorte que, si l'on imagine que le corps soit soutenu ou suspendu par ledit point, les parties qui sont à main droite contrepèsent à celles de la gauche, celles de derrière à celles de devant, et celles d'en haut à celles d'en bas, et se tiendront tellement en équilibre que le corps ne s'inclinera ni d'un côté ni d'un autre, quelque situation qu'on lui puisse donner, et qu'il demeurera toujours en cet état ([34]). Or, le centre de pesanteur est le point du corps qui s'unirait au centre des choses pesantes, c'est-à-dire au centre de la terre, s'il y pouvait descendre.

CHAPITRE III.

DES SUPPOSITIONS DE CES ARTS.

Première supposition. — Tout corps pesant se meut tellement

([33]) Le *moment* de Galilée est une notion physique et non une conception purement mathématique comme notre *moment* actuel. Cette notion est à rapprocher de celle de gravité *secundum situm* de Jordanus de Nemore (*voir* note 68) et elle pourrait être appliquée à toute machine aussi bien qu'au levier. Dans son Chapitre IV, Galilée va montrer que, pour le levier, son *moment* se mesure par le *moment* moderne. — A remarquer la manière *métaphysique* (note 7) dont la notion de *moment* est posée ici.

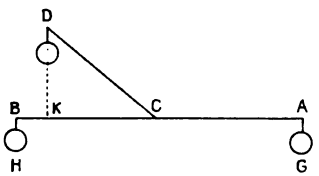
([34]) L'existence d'un tel point est admise comme fait d'expérience (*voir* la note 8).

en bas que le centre de sa pesanteur ne soit jamais hors de la ligne droite qui est décrite ou imaginée depuis ledit centre de pesanteur jusqu'à celui de la terre. Ce qui est supposé avec raison, car, puisque le centre de pesanteur de chaque corps doit aller s'unir au centre commun des choses pesantes, il est nécessaire qu'il y aille par le chemin le plus court, c'est-à-dire par la ligne droite, s'il n'y a point d'empêchement [35].

Deuxième supposition. — Chaque corps pèse principalement sur le centre de sa pesanteur dans lequel il ramasse et unit toute son impétuosité et sa pesanteur.

Troisième supposition. — Le centre de la pesanteur de deux corps également pesants est au milieu de la ligne droite qui conjoint les centres de pesanteur desdits corps; c'est-à-dire que deux corps également pesants et également éloignés de l'appui de la balance ont le point de leur équilibre au milieu de la commune conjonction de leurs éloignements égaux; par exemple, la dis-

Fig. 8.



tance CA étant égale à la distance CB et les deux poids égaux G et H étant suspendus aux points A et B, il n'y a nulle raison pour laquelle ils doivent plutôt s'incliner d'un côté que de l'autre [36].

Mais il faut remarquer que la distance des poids ou des corps pesants d'avec l'appui doit se mesurer par les lignes perpendiculaires qui tombent des points de suspension ou des centres de la pesanteur de chaque corps jusqu'au centre de la terre. De là vient

---

([35]) On suppose, bien entendu, que le grave est abandonné sans vitesse initiale pour dire qu'il ne quitte pas la verticale en tombant. Toutefois il est remarquable que Galilée, même après ses études sur le mouvement des projectiles, ait cru que les projectiles eux-mêmes, quoique ne tombant pas en ligne droite, doivent se diriger vers le centre de la Terre (*cf.* note 124). L'idée d'une attraction centrale ne produisant pas la chute du corps attiré sur le corps attirant a été une des difficultés qu'a rencontrées, au début, la conception newtonienne du monde. Sur les propriétés attribuées ici au centre de gravité, *voir* Chap. III, § 2.

([36]) C'est une des *demandes* d'Archimède.

que, la distance BC étant transportée en CD, le poids D ne contrepèsera plus au poids A, parce que la ligne tirée du point de suspension ou du centre de pesanteur du poids D jusqu'au centre de la terre sera plus proche de l'appui C que l'autre ligne tirée du point de la suspension de B ou du centre de pesanteur du poids H. Il est donc nécessaire que les poids égaux soient tellement suspendus de distances égales que les lignes perpendiculaires tirées par les centres de leurs pesanteurs au centre de la terre se trouvent également éloignées de l'appui C lorsqu'elles passeront vis-à-vis d'icelui ([37]).

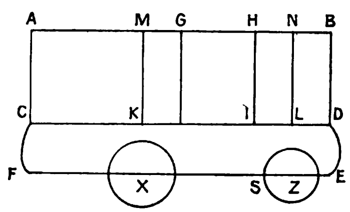
CHAPITRE IV.

DANS LEQUEL L'UN DES PRINCIPES GÉNÉRAUX DES MÉCANIQUES EST EXPLIQUÉ.

Après avoir expliqué les suppositions, il faut établir un principe général qui sert pour démontrer ce qui arrive à toutes sortes de machines, à savoir que les poids inégaux suspendus à des distances inégales pèsent également et sont en équilibre quand lesdites distances ont même proportion entre elles que les poids. Ce qu'il faut démontrer par la troisième supposition...

Ce qui se démontre par cette figure, dans laquelle DECF représente un cylindre homogène, ou de même nature en toutes ses

Fig. 9.



parties, lequel est attaché par ses deux bouts C et D aux points A, B, de sorte que la ligne AB est égale à la hauteur du cylindre CF.

Il est certain que, si on l'attache par le milieu au point G, il sera en équilibre, parce que, si l'on tirait une ligne droite du

([37]) Dans une addition ajoutée au texte de Galilée, le P. Mersenne précise ceci en faisant remarquer que le poids suspendu en D peut être considéré comme attaché en K. Cette possibilité du déplacement d'une force sur sa direction se trouve déjà dans Léonard de Vinci (*voir* plus haut, § 3), dans Benedetti, etc.

point G au centre de la terre, elle passerait par le centre de la pesanteur EF et, par conséquent, toutes les parties qui sont à l'entour de ce centre seraient en équilibre, par la troisième définition, car c'est la même chose que si l'on attachait les deux moitiés du cylindre aux deux points A et B.

Supposons maintenant que le cylindre soit coupé en deux parties inégales par les points ou par la ligne SI; il est certain qu'elles ne seront pas équilibres, et conséquemment qu'elles ne demeureront pas en la situation précédente, n'ayant point d'autre soutien qu'aux points A et B. Mais si l'on attache une corde au point H pour soutenir le poids par le point I, G sera encore le centre de l'équilibre, parce que l'on n'a pas changé la pesanteur ni la situation des parties du cylindre.

D'où il s'ensuit que, n'y ayant point de changement aux parties du poids, ni dans leur situation à l'égard de la ligne AB, le même point G demeurera le centre de l'équilibre, comme il l'a été dès le commencement, car, puisque la partie FS retiendra toujours la même disposition que la ligne AH, à laquelle elle sera parallèle, si l'on y ajoute le lien NL pour soutenir SD par son centre de pesanteur et si l'on ajoute semblablement le lien MK pour soutenir la partie du cylindre CS disjointe d'avec SD, il n'y a nul doute que ces deux parties demeureront encore en équilibre au point G. Par où l'on voit que ces deux parties étant ainsi suspendues et attachées ont un moment égal, lequel est l'origine et la source de l'équilibre du point G, en faisant que la distance GN soit d'autant plus grande que la distance GM que la partie du cylindre FS est plus grande que la partie SD (38).

[Il est en effet facile de voir que le rapport de GM à GN est égal à celui de DI à CI et, par conséquent, il faut conclure] que ces deux corps CI et DS ne pèsent pas seulement également quand leurs distances d'avec l'appui..... sont en raison réciproque de leurs pesanteurs, mais aussi que c'est une même chose que si l'on attachait des poids égaux à des distances égales; de sorte que la pesanteur de CS s'étend et se communique en quelque manière

(38) La ligne AB est un levier dont l'appui est au point G. Galilée y suspend le cylindre CD par les divers fils AC, MK, HI, BD. Le nœud de la démonstration est dans les hypothèses suivantes. Le cylindre étant suspendu par AC, HI et BD, on peut, sans troubler l'équilibre, le sectionner en SI, le fil HI continuant à supporter en I les deux morceaux. Puis, la partie CI, par exemple, étant soutenue par AC et par HI, on peut remplacer ces deux soutiens par le seul fil MK.

virtuellement par delà le soutien G, duquel la pesanteur ID s'éloigne et se retire, comme l'on peut comprendre par ce discours. Ce qui arrivera semblablement si ces corps cylindriques sont réduits et changés aux sphères X et Z ou en telles figures que l'on voudra, car l'on aura toujours le même équilibre, la figure n'étant qu'une qualité, laquelle n'a pas la puissance de la pesanteur, qui dérive de la seule quantité.

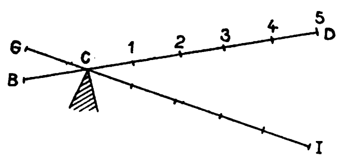
Il faut donc conclure que les poids inégaux pèsent également et produisent l'équilibre lorsqu'ils sont suspendus de distances inégales qui sont en raison réciproque desdits poids.

CHAPITRE V.

OU L'ON VOIT QUELQUES AVERTISSEMENTS SUR LE DISCOURS PRÉCÉDENT.

Après avoir démontré que les moments [39] des poids inégaux sont égaux quand ils sont attachés à des points dont les distances d'avec l'appui ont même proportion que les poids, il faut encore remarquer une autre propriété qui confirme la vérité précédente, car, si l'on considère la balance BD divisée en parties inégales par le point C et que les poids suspendus aux points B et D soient en raison réciproque des distances BC et CD, ..., il est certain que

Fig. 10.



l'un contrepèsera l'autre et qu'ils seront en équilibre; et que, si l'on ajoute quelque chose à l'un, par exemple au poids D, qu'il descendra en bas en I et conséquemment qu'il élèvera les poids B en G. Mais si l'on considère le mouvement du poids D et du poids B, l'on trouvera que le mouvement de D descendant en I surpasse autant le mouvement de B en G comme la distance DC surpasse la distance CB ou CG, car les deux angles GCB et DCI sont égaux et conséquemment les deux parties de cercle décrites par D et par B sont semblables et ont même proportion entre

([39]) Le texte porte, par erreur, *mouvements*.

elles que leurs semi-diamètres BC et CD par lesquels elles ont été décrites.

D'où il s'ensuit que la vitesse du poids D qui descend en I surpasse autant celle du poids B qui monte en G que la pesanteur de B est plus grande que celle de D....

Or, il est aisé de conclure, par tout ce discours, la grande force qu'apporte la vitesse du mouvement pour accroître la puissance du mobile, laquelle est d'autant plus grande que le mouvement est plus vite ([40]). Mais avant de passer outre, il faut remarquer que les distances qui sont entre les bras de la balance et l'appui doivent être mesurées par la distance horizontale [d'une manière analogue à ce qui a été expliqué plus haut].

CHAPITRE VI.

DE LA ROMAINE, DE LA BALANCE ET DU LEVIER.

[Ce Chapitre n'est que l'application directe de ce qui précède ([41]).]

CHAPITRE VII.

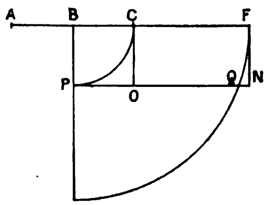
DU TOUR, DE LA ROUE, DE LA GRUE, DU GUINDAX ET DES AUTRES INSTRUMENTS SEMBLABLES.

[Galilée fait remarquer que le tour est la répétition d'une série d'actions de levier qui se succèdent. Le poids soulevé est G, le poids

([40]) *Voir* Chapitre III, § 1.

([41]) Dans une addition, Mersenne expose ici une idée qui remonte à Aristote (*voir* Chap. III, § 3). Sur un levier ABF, un poids placé en F pèse plus que s'il était placé en C. On peut se rendre compte ainsi qu'il suit de la raison de ce

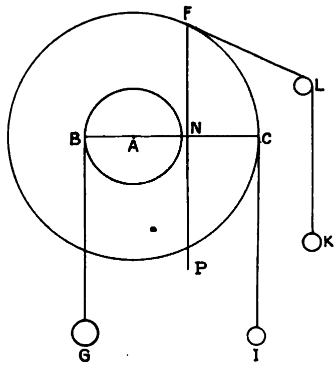
Fig. 11.



phénomène. Le poids tend à tomber suivant la verticale. Pour une même descente verticale $FN = CO$, le poids est moins *contraint* dans la position F que dans la position C, puisque, dans le deuxième cas, il s'éloigne de la verticale de la quantité PO et, dans le premier, de la quantité QN seulement.

moteur I. On peut aussi appliquer l'action motrice en F, non pas en faisant pendre verticalement la corde en F, car alors le poids ne tirerait que comme s'il était pendu en N, mais en appliquant

Fig. 12.



un moteur animé ou bien en tendant la corde suivant FL grâce à une poulie de renvoi. Les rapports des forces sont les rapports inverses des diamètres.]

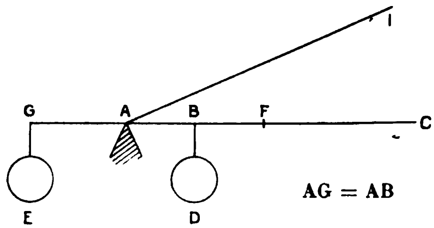
Mais la nature n'est pas trompée ni surmontée, et l'on ne gagne rien parce que, si le fardeau a dix fois plus de résistance que la force (appliquée en F), la distance FA doit être nécessairement décuple de AB, de sorte que le poids ne fera que la dixième partie du chemin de la circonférence FCP; par conséquent, si l'on divisait le fardeau en 10 parties, chacune répondrait à la dixième partie du mouvement et de la force F; c'est pourquoi si l'on portait en dix voyages chaque dixième partie autour de l'axe, on ne cheminerait pas davantage que si l'on faisait une fois le tour FCP et l'on conduirait le fardeau en même temps à la même distance.

CHAPITRE VIII.

DE LA FORCE ET DE L'USAGE DES POULIES.

Après avoir considéré les instruments qui se réduisent aux contrepoids et à l'équilibre comme à leur principe et à leur fondement, il faut parler d'une autre sorte de levier pour entendre la nature des poulies.... Or, le levier dont nous avons parlé suppose que le poids soit à une de ses extrémités et la force à l'autre, de sorte que son soutien doit être entre ses deux extrémités. Mais, si l'on met le soutien à l'extrémité A du levier et la force à l'autre extrémité C, et que le poids D soit attaché à quelque point du milieu, par exemple au point B, il est certain que, si le poids est

Fig. 13.



également éloigné des deux extrêmes, comme quand il est au point F, la force qui le soutient en F sera également divisée, et par conséquent la moitié du poids est soutenue par C et l'autre moitié par A.

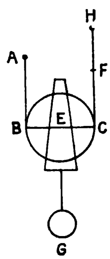
S'il arrive que le fardeau soit attaché ailleurs, par exemple en B, la force C soutiendra le fardeau en B quand il aura même proportion avec ladite force que la distance AC à la distance BA. Mais pour comprendre ceci, il faut s'imaginer que la ligne BA soit prolongée en G et que les distances BA, AG soient égales et que le fardeau E soit attaché au point G et qu'il soit égal au poids D; il est certain qu'à cause de l'égalité des poids E, D et des distances AG et BA, le moment du poids D suffira pour le soutenir; donc la force du moment égal à celui du poids E, lequel le pourra soutenir, suffira encore pour soutenir le poids D. Mais si l'on veut soutenir E au point C, la force doit être à E comme GA à CA, donc la même force pourra soutenir le poids D égal à E. Or la proportion qui est de GA à CA est aussi de BA à CA, GA étant égal à BA. Et parce que les poids E, D sont égaux, chacun d'eux aura la même proportion à la force mise en C. D'où l'on conclut que la force C est égale au moment D lorsqu'il a même proportion que la distance AB à CA ([42]).

([42]) C'est la démonstration de Guido Ubaldo (*voir* § 3). Mais la rédaction de Guido Ubaldo, et surtout celle de Lagrange pour le levier angulaire dont on traite ici un cas particulier, est préférable à celle de Galilée. A prendre le texte de Galilée à la lettre, il y a une lacune logique dans son raisonnement. L'étude du levier de première espèce, sur laquelle il appuie sa démonstration, ne donne l'équivalence de deux forces ayant même moment (au sens moderne) que quand

Or il est très aisé de conclure de tout ce discours que l'on perd autant de vitesse comme l'on acquiert de force tant avec le levier ordinaire qu'avec celui-ci.

[La poulie ordinaire est rapportée par Galilée au levier ordinaire; la poulie mobile au levier que l'on vient d'étudier : B étant l'appui,

Fig. 14.



H la force qui soutient, E le point de suspension du poids G. On voit ainsi que, dans la poulie mobile, la force H vaut $\frac{1}{2}$ G.]

Mais en récompense le chemin que fait la force est double du chemin que fait le fardeau ([43]).

[Galilée passe ensuite aux moufles et trouve le même rapport inverse des forces et des chemins.]

---

ces deux forces sont appliquées de part et d'autre du point de suspension. Une force $E \times \frac{GA}{CA}$ appliquée en C équilibre la force E placée en G; une force $D = E$ placée en B équilibre de même la force E en G; les forces $E \times \frac{GA}{CA}$ et D sont ainsi équivalentes *pour équilibrer la force* E *en* G; il n'est pas évident qu'elles seront équivalentes à un autre point de vue, ni *a fortiori* qu'en changeant l'une de sens elle équilibrera l'autre. On ne peut l'affirmer que si l'on a dans l'idée à l'avance que le produit de la force par le bras de levier est la *déterminante de l'équilibre* (Mach); et même, avant tout, il faut avoir dans l'idée qu'il y a une même déterminante de l'équilibre pour tous les cas.

Au fond, Galilée use ici du procédé métaphysique. Il attribue *a priori* une réalité objective à ce qu'il appelle le *moment,* à ce que M. Mach appelle *la déterminante de l'équilibre.*

Les raisonnements de Guido Ubaldo et surtout ceux de Lagrange (*voir* § 3) montrent comment on peut éliminer de la question le procédé métaphysique. D'ailleurs le texte de Galilée, même pris à la lettre, n'est pas sans intérêt. Il apprend quelque chose de plus que la simple affirmation que l'expérience conduit à admettre le rôle du produit de la force par le bras du levier; en effet, il montre qu'il suffit d'admettre ce rôle dans le cas simple des moments égaux; il facilite certainement ainsi l'adhésion de l'esprit.

([43]) *Voir* Chap. III, § 1.

CHAPITRE IX.

DE LA VIS.

[Il y a lieu d'abord de démontrer un lemme.]

Je dis donc que tous les corps pesants ont une inclination vers le centre de la terre, non seulement quand ils peuvent descendre perpendiculairement, mais aussi quand ils y peuvent arriver par une ligne oblique ou par un plan incliné....

Si l'on prend une balle parfaitement ronde et polie... qu'on la mette aussi sur un plan incliné qui soit aussi parfaitement uni et poli que la glace d'un miroir, elle descendra sur ledit plan, se mouvra perpétuellement et tandis qu'elle trouvera la moindre inclination que l'on puisse imaginer : de sorte qu'elle ne s'arrêtera point jusqu'à ce qu'elle rencontre une surface qui soit à niveau ou équidistante de l'horizon comme est celle d'un lac ou d'un étang glacé, sur laquelle la balle se tiendrait ferme et immobile, mais avec telle condition que la moindre force l'ébranlerait et que, le plan s'inclinant de la largeur d'un cheveu, elle commencerait incontinent à se mouvoir et à descendre vers la partie inclinée et qu'au contraire elle ne pourrait être mue sans violence vers la partie du plan qui monte. Or il est nécessaire que la boule s'arrête sur une surface parfaitement équilibre et qu'elle demeure comme indifférente entre le mouvement et le repos : de sorte que la moindre force du monde suffise pour la mouvoir, comme la moindre force que l'on peut s'imaginer dans l'air suffit pour la retenir.

D'où l'on peut tirer cette conclusion, que tout corps pesant, tous les empêchements extérieurs étant ôtés, peut être mû sur un plan horizontal par la moindre force que ce soit et qu'il faut d'autant plus de force pour le mouvoir sur un plan incliné qu'il a plus d'inclination au mouvement contraire ([44]).

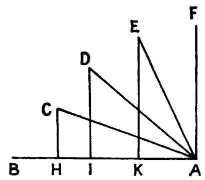
Ce qui sera plus intelligible par cette figure, dans laquelle AB soit le plan parallèle à l'horizon sur lequel la boule est indifférente au mouvement et au repos; de sorte que le vent ou la moindre force la peut faire mouvoir; mais il faut une plus grande force pour la faire mouvoir du point A au point C sur le plan incliné AC et encore une plus grande pour la mouvoir sur les

([44]) Nous reviendrons sur ce texte à propos du principe de l'inertie.

plans AD et AE et finalement on ne peut la lever sur le plan perpendiculaire AF que par une force égale à tout le poids G.

Or, l'on saura combien il faut moins de force pour lever le fardeau sur les plans AE, AD, etc., si l'on tire les lignes perpendiculaires à l'horizon CH, DI et EK, car il y aura même propor-

Fig. 5.



tion des forces nécessaires pour élever le fardeau sur chaque plan audit fardeau, que des lignes perpendiculaires aux lignes de leurs plans. Ce que Pappus Alexandrin s'est efforcé de démontrer dans le 8e Livre de ses *Collections,* mais il s'est trompé, à mon avis, en ce qu'il a supposé une force donnée pour mouvoir le poids sur le plan horizontal, ce qui est faux.... [45].

Soit le cercle AIC dont le diamètre est ABC et le centre B, et qu'il y ait deux forces égales aux points A et C qui représentent une balance mobile autour du centre B, il est certain que le poids C sera soutenu par la force A. Mais si l'on s'imagine que le bras de la balance BC tombe en BF, de sorte qu'il demeure toujours continué avec le bras AB et qu'ils aient tous deux leur point fixe ou leur appui en B, le moment F ne sera pas égal au moment A parce que la distance du point ou du poids F d'avec la ligne de direction BI n'est pas égale à la distance de la force ou du poids A d'avec la même ligne de direction, comme l'on démontre par la perpendiculaire KF qui détermine la distance du point F avec B

---

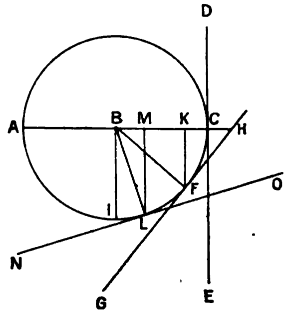
(45) A la vérité, Pappus, partant de cette hypothèse, ne trouve pas la loi exacte du plan incliné.

On remarquera d'ailleurs que l'hypothèse de Pappus se rattache aux idées d'Aristote, et que, pour la rejeter, il faut faire abstraction des résistances passives qui cependant apparaissent dans toutes nos expériences journalières. Il n'a pas fallu à Galilée une force d'esprit médiocre pour arriver à cette abstraction.

La démonstration de Pappus repose sur la considération d'une boule roulant sur un plan incliné, boule que Pappus assimile à une sorte de levier ayant son point d'appui au point de contact. Il est intéressant de signaler que, dans les Notes de Léonard de Vinci, on trouve une évaluation correcte de la pesanteur sur un plan incliné obtenue par des considérations analogues. (*Voir* Duhem, *Les origines de la Statique,* t. I.)

ou I, de sorte que le moment ou le poids de C porté en F est diminué de la distance KC et qu'il n'a plus que le moment BK;

Fig. 16.



c'est pourquoi il faut conclure que le moment de A surpasse celui de F de KC. Il faut dire la même chose du poids C transporté au point L ou en tel autre point du cercle que l'on voudra....

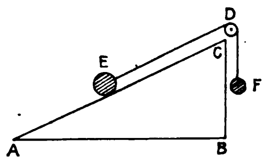
Par ce où l'on voit que le poids C diminue son moment et son inclination d'aller en bas selon les différentes inclinations des plans FB, LB, etc., de sorte que l'on peut s'imaginer la descente de C par tous les points du quart de cercle CI, lequel contient un plan qui s'incline perpétuellement de plus en plus et que la pesanteur du poids en C est totale et entière et conséquemment qu'il se porte de toute son inclination à descendre, parce qu'il n'est nullement empêché par la circonférence lorsqu'il se rencontre sur la tangente DCE.

Mais quand il est en F, il est en partie soutenu par le plan circulaire et sa pente, ou l'inclination qu'il a vers le centre de la terre est d'autant diminuée que BC surpasse BK : de manière qu'il se tient élevé sur ce plan de même que s'il était appuyé sur la tangente GFH, d'autant que le point d'inclination F de la circonférence CI ne diffère point de l'inclination de la tangente GFH que par l'angle insensible de contact.

Il faut dire la même chose du point L, lequel est incliné comme s'il était sur le plan de la tangente NLO, car il diminue sa pente et son inclination qu'il a en C en même proportion que BK est à BC, puisqu'il est constant, par la similitude des triangles KBF et KFH, qu'il y a même raison de FK à FH que de KB à BF. D'où nous concluons que la proportion du moment total et absolu du mobile dans la perpendiculaire de l'horizon avec le moment qu'il a sur le plan incliné HF est la même que la proportion de FH à FK.

Ce qui se voit plus distinctement dans le triangle ABC, car le moment du mobile sur le plan AC est d'autant moindre que le moment qu'il a dans la perpendiculaire CB, que CB est moindre que CA. Et parce qu'il suffit pour mouvoir le fardeau que la force sur-

Fig. 17.



passe insensiblement celle qui le soutient.... nous faisons ici cette proposition universelle : *que, sur le plan incliné, la force a même proportion au poids que la perpendiculaire tirée de l'extrémité du plan sur l'horizon à la longueur dudit plan, c'est-à-dire que la tangente à la sécante* ([46]). . . .

[Galilée considère ensuite la vis comme dépendant du plan incliné.]

CHAPITRE X.

DE LA VIS D'ARCHIMÈDE POUR ÉLEVER LES EAUX.

[C'est une étude purement cinématique. Galilée ne calcule pas la force nécessaire pour faire marcher l'appareil.]

CHAPITRE XI.

[Ce Chapitre est consacré à la percussion.]

.... Cet effet vient de la même source que les autres effets mécaniques, à savoir que la force, la résistance et l'espace par lequel se font les mouvements ont une telle correspondance et proportion entre eux que la force répond seulement à une résistance qui lui est égale et qu'elle la meut seulement par un espace égal ou d'une

([46]) Bien que la rédaction de ce passage soit fort mauvaise, l'idée en est claire. Pour Galilée, le fait, pour un poids, d'être soutenu par le plan GFH est équivalent au fait d'être porté par le levier ABF, et la force à appliquer en A perpendiculairement à AB est celle qu'il faudrait exercer parallèlement au plan pour retenir F sur le plan. Galilée considère donc comme équivalentes deux liaisons qui assurent la même mobilité infinitésimale.

égale vitesse dont elle se meut elle-même. Semblablement quand la force est moindre de moitié que la résistance, elle la peut mouvoir, si elle-même se meut d'une double impétuosité, et si elle fait deux fois autant de chemin. . . .

Il faut remarquer combien la force qui a été imprimée au marteau le portera loin si l'on suppose qu'il ne frappe point, comme il arriverait si le marteau sortait de la main avec la même impétuosité dont il doit frapper une enclume. . . . et qu'il ne rencontrât aucun empêchement en son chemin. Et puis il faut considérer quelle résistance fait le corps qui est frappé et combien il est poussé par une telle percussion. . . . [Par exemple], le marteau qui a 4 degrés de résistance est poussé d'une telle force que, ne trouvant nulle résistance qui l'arrête, il aille jusqu'à 10 pas; . . . . on lui oppose une poutre qui a 4000 degrés de résistance et qui est 1000 fois plus grande que la force du marteau; . . . . si elle est frappée, elle ira seulement en avant la millième partie de 10 pas (47).

Dans le Chapitre IX du Traité que nous venons de citer, Galilée n'a trouvé la loi de la puissance qui retient un grave sur un plan incliné que lorsque cette puissance est parallèle au plan.

Il eût été facile (48) à Galilée de résoudre aussi le cas où la puissance qui retient le poids a une direction oblique au plan; mais ce nouveau pas n'a été fait que quelque temps après, par Roberval, dans un *Traité de Mécanique* imprimé, en 1636, dans l'*Harmonie universelle* de Mersenne.

Roberval regarde aussi le poids appuyé sur le plan incliné comme attaché au bras d'un levier perpendiculairement au plan (49), et il considère la puissance comme une force appliquée au même bras, suivant une direction donnée ; il a ainsi un levier à un seul

(47) Ce Chapitre, dont nous ne citons que des fragments, manque de précision. Il semble même que, en l'écrivant, Galilée n'avait pas encore une notion nette du principe de l'inertie.

On remarquera l'emploi du procédé métaphysique (*voir* note 7) en ce qui concerne le *degré de résistance* d'une poutre, notion adoptée par Galilée sans définition. Nous avons vu que Galilée avait fait de même pour la notion de *moment*. Mais la notion de moment était bien choisie, tandis que celle de *degré de résistance* l'était mal. Aussi Galilée n'a-t-il rien tiré de cette dernière.

(48) Lagrange, *Mécanique analytique*, 1re Partie, Section I.

(49) C'est encore le principe de l'équivalence des liaisons (*voir* note 46).

bras, dont une extrémité est fixe, et dont l'autre extrémité est tirée par deux forces, celle du poids et celle de la puissance qui le retient. Il substitue ensuite à ce levier un levier angulaire à deux bras perpendiculaires aux directions des deux forces et ayant le même point fixe pour point d'appui, et il suppose les deux forces appliquées aux bras de ce levier suivant leurs propres directions, ce qui lui donne, pour l'équilibre, le rapport du poids à la puissance en raison inverse des deux bras du levier angulaire, c'est-à-dire des perpendiculaires menées du point fixe sur les directions du poids et de la puissance.

De là, Roberval déduit l'équilibre d'un poids soutenu par deux cordes qui font entre elles un angle quelconque ([50]).

Ces quelques citations suffisent pour montrer l'usage qui a été fait du principe du levier dans les premières études de Statique. On voit que cet usage met en évidence un principe important : celui de l'*équivalence des liaisons,* quand elles donnent la même mobilité (notes 46 et 49). Nous aurons à discuter à fond ce principe (2e Partie, Livre II, Chap. II).

([50]) Nous revenons au Chapitre suivant sur ce problème qui a conduit Roberval à la loi du parallélogramme des forces.

CHAPITRE II.

LE PARALLÉLOGRAMME DES FORCES.

L'idée de la composition des forces paraît être apparue pour la première fois, d'une manière vague, à propos du levier. Il y a longtemps qu'Aristote a remarqué qu'un poids qui se déplace à l'extrémité d'un bras de levier est soumis à l'action de la pesanteur et à celle du bras qui le retient et l'empêche de suivre la verticale (*voir* Chap. III, § 3). Guido Ubaldo a de même signalé cette double action dans les leviers à bras inclinés sur l'horizon. Mais c'est à propos du problème du poids suspendu à deux cordes que la règle de la composition des forces a été découverte.

§ 1. — Le parallélogramme des forces tiré du plan incliné. Stevin.

La Statique du Hollandais Stevin (1548-1620) repose, comme on va le voir, sur deux principes fondamentaux : d'abord le principe du levier, ensuite celui du plan incliné, posé et justifié d'une manière tout à fait indépendante. C'est dans cette Statique que Stevin a énoncé et partiellement démontré la loi du parallélogramme des forces. Le plan incliné joue un rôle essentiel dans sa démonstration.

Son Ouvrage, paru d'abord en 1586, complété en 1605, comprend cinq Livres : les éléments de Statique, l'Invention du centre de gravité, la Statique pratique, les Éléments d'Hydrostatique, la Pratique de l'Hydrostatique, plus quelques additions. Nos citations sont empruntées au premier Livre et à une des additions. Les œuvres de Stevin ont paru réunies sous le titre *Hypomnemata mathematica* (Leyde, 1608). Nous citons la traduction faite par Albert Girard et parue à Leyde en 1634.

Définition I. — Statique est une science qui déclare les raisons, proportions et qualités des poids et pesanteurs des corps.

Définition II. — La pesanteur d'un corps, c'est la puissance qu'il a de descendre au lieu proposé.

Définition III. — Pesanteur connue est celle de laquelle le poids se peut exprimer certainement.

Définition IV. — Centre de gravité est celui auquel si on imagine le solide être suspendu, il se tiendra en toutes les positions qu'on peut lui donner ([51]).

....

[Stevin commence par traiter de ce qu'il appelle les *pesanteurs directes:* ce sont les forces verticales. Il expose là la théorie du levier avec ses conséquences. On a vu plus haut comment Stevin présente la démonstration d'Archimède relative au levier ([52]). Il parvient, dans cette partie de son Ouvrage, à résoudre, par exemple, les problèmes suivants : Une poutre repose sur deux appuis : quelle est la réaction de chaque appui (*fig.* 18)? Une

Fig. 18.

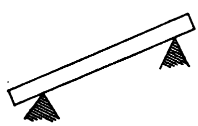
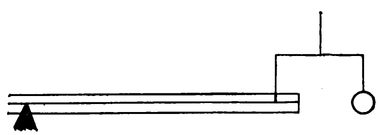


Fig. 19.



poutre repose sur un appui et est soutenue, d'autre part, par une force : quelle est cette force (*fig.* 19)?]

Jusqu'ici ont été déclarées les propriétés des pesanteurs directes; suivent les propriétés et qualités des obliques, desquelles le fondement général est compris au théorème suivant :

Théorème XI. Proposition XIX. — *Si un triangle a son*

([51]) *Voir* notes 8 et 34.
([52]) *Voir* note 17.

plan perpendiculaire à l'horizon et sa base parallèle à icelui, et sur un chacun des côtés un poids sphérique, de pesanteur égale, comme le côté dextre du triangle au senestre, ainsi la puissance du poids senestre au poids dextre ([53]).

Le donné. — Soit ABC un triangle ayant son plan perpendiculaire à l'horizon et sa base AC parallèle à icelui horizon, et soit sur le côté AB (qui est double à BC) un poids en globe D et sur BC un autre E, égaux en pesanteur et grandeur.

Le requis. — Il faut démontrer que comme le côté AB 2 au côté BC 1, ainsi la puissance ou pouvoir du poids E à celle de D.

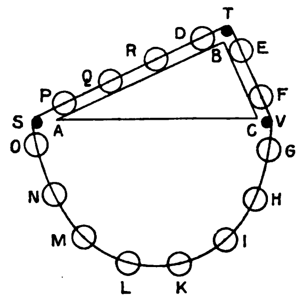
Préparation. — Soit accommodé, à l'entour du triangle, un entour de 14 globes égaux en pesanteur, en grandeur et équidistants, comme D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, enfilés d'une ligne passant par leurs centres, ainsi qu'ils puissent tourner sur leurs susdits centres et qu'il y puisse avoir 2 globes sur le côté BC et 4 sur BA, alors comme ligne à ligne, ainsi le nombre des globes au nombre des globes; qu'aussi en S, T, V soient trois points fermes dessus lesquels la ligne ou le filet puisse couler et que les deux parties au-dessus du triangle soient parallèles aux côtés d'icelui AB, BC tellement que le tout puisse tourner librement et sans accrochement sur lesdits côtés ABC.

Démonstration. — Si le pouvoir des poids D, R, Q, P n'était égal au pouvoir des deux globes E, F, l'un côté sera plus pesant que l'autre; donc (s'il est possible) que les quatre D, R, Q, P soient plus pesants que les deux E, F; mais les quatre O, N, M, L sont égaux aux quatre G, H, I, K, par quoi le côté des 8 globes D, R, Q, P, O, N, M, L sera plus pesant selon leur disposition que non pas les six E, F, G, H, I, K et, puisque la partie plus pesante emporte la plus légère, les 8 globes descendront et les autres 6 monteront. Qu'il soit ainsi donc et que D vienne où O est présentement, et ainsi des autres : voire que E, F, G, H viennent où sont maintenant P, Q, R, D, aussi I, K où sont maintenant E, F. Ce néanmoins l'action des globes aura la même dis-

([53]) C'est ici la proposition fondamentale de Stevin, démontrée, comme on va le voir, en invoquant l'impossibilité du mouvement perpétuel. L'impossibilité du mouvement perpétuel est une idée sur laquelle Léonard de Vinci et Cardan avaient beaucoup insisté avant Stevin.

position qu'auparavant et par même raison les 8 globes auront le dessus en pesanteur et en tombant feront revenir 8 autres en leurs places et ainsi ce mouvement n'aurait aucune fin, ce qui est absurde. Et de même sera la démonstration de l'autre côté. La

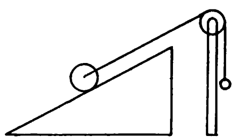
Fig. 20.



partie donc de l'entour DRQPONML sera en équilibre avec la partie E, F, G, H, I, K. Que si l'on ôte des deux côtés les pesanteurs égales et qui ont même disposition, comme sont les 4 globes O, N, M, L d'une part et les quatre G, H, I, K d'autre part, les quatre restants D, R, Q, P seront et demeureront en équilibre avec les deux E, F; par quoi E aura un pouvoir double au pouvoir de D; comme donc le côté BA 2 au côté BC 1, ainsi le pouvoir de E au pouvoir de D (54).

[Dans les corollaires I, II, III, IV de cette proposition, Stevin déduit de ce qui précède l'estimation des poids qui peuvent rete-

Fig. 21.



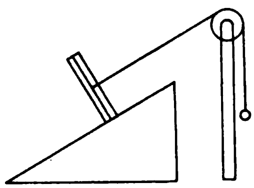
nir sur un plan incliné soit une boule (*fig.* 21), soit une colonne

(54) La démonstration est plus claire, comme l'a indiqué Lagrange, en substituant une chaîne homogène à la file de poids de Stevin.

On remarquera que la démonstration suppose essentiellement que la file de poids pend de telle sorte que ONML est bien symétrique de GHIK. Ce fait n'est peut-être pas tout à fait évident. Cette objection a été présentée au XVII^e siècle par Lamy.

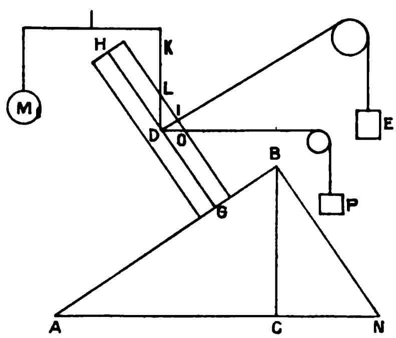
normale au plan et retenue par son centre de gravité (*fig.* 22). Il continue ensuite] :

Fig. 22.



Corollaire V. — Soit ici menée une perpendiculaire par le centre de la colonne D, comme DK, coupant le côté d'icelle en L; alors le triangle LDI sera semblable au triangle ABC, ... par quoi comme AB à BC, ainsi LD à DI. Mais comme AB à BC, ainsi la colonne au poids E, par le quatrième corollaire; donc comme LD à DI, ainsi la colonne à E. Que si en KD on applique un élevant

Fig. 23.



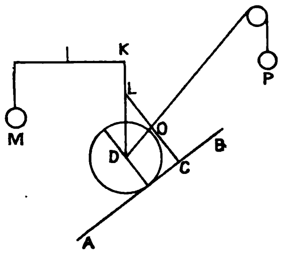
direct M, équilibre avec la colonne, il sera égal en pesanteur à icelle, par la quatrième proposition. Et finalement, comme LD à DI, ainsi M à E.

Corollaire VI. — Soit menée BN, coupant AC prolongée en N et de même DO coupant LI prolongée en O, tellement que l'angle IDO soit égal à l'angle CBN, puis soit appliqué l'élevant direct P à DO tenant la colonne en telle disposition (ayant ôté les poids M, E); alors d'autant que LD est homologue à BA au triangle BAC et DI avec BC, il s'ensuit que, puisque BA à BC est comme le poids sur BA au poids sur BC, qu'ainsi DL à DI, ainsi le poids appartenant à DL à celui de DI, c'est comme M à E : semblablement les trois lignes LD, DI, DO étant homologues aux trois AB, BC, BN;

alors BA à BN étant comme les pesanteurs y appartenant, qu'aussi LD et DO seront comme les pesanteurs y appartenant, c'est-à-dire comme M à P. Et de même serait, si BN était de l'autre côté de la perpendiculaire BC, à savoir entre AB, BC et semblablement DO entre DL et DI : car cette proportion n'est pas seulement lorsque l'élévation, comme DI, est perpendiculaire à l'axe, mais en toutes sortes d'angles ([55]).

Ce que dessus peut aussi être entendu d'un globe sur la ligne AB, comme ici joignant; là où nous dirons comme devant : que

Fig. 24.



comme LD à DO, ainsi M à P (pourvu que CL soit à angles droits sur AB).

. . . .

Mais d'autant que le triangle ABN du sixième corollaire ne cause aucun changement en cette proposition, ôtons-le dorénavant, prenant G pour point ferme de la colonne reposant comme ici joignant (*fig.* 25) sur la pointe au sommet d'une pyramide et dira-t-on encore comme devant que comme LD à DO ainsi M à P ([56]).

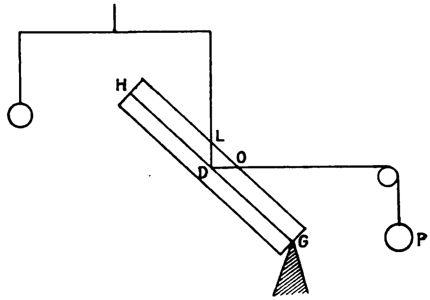
. . . .

([55]) Il est impossible de considérer cette démonstration comme satisfaisante. Par ses principes, Stevin n'a le droit de considérer que des fils obliques parallèles au plan incliné, c'est-à-dire normaux à DG. Le résultat énoncé est exact et il est intéressant de remarquer que Stevin a aperçu la vérité générale, mais il ne faut pas oublier que seul le cas du corollaire V est valablement démontré. Les mêmes restrictions sont naturellement à présenter pour les conséquences qui vont être déduites de la présente proposition; en particulier on doit dire avec Lagrange que, si Stevin a aperçu la généralité de la loi du parallélogramme des forces, il ne l'a démontrée que lorsque deux des forces font un angle droit. La démonstration générale est due à Léonard de Vinci et à Roberval.

([56]) C'est une application de l'idée d'*équivalence des liaisons,* dans des conditions qui ne sont peut-être pas des plus satisfaisantes.

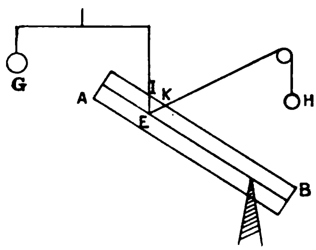
THÉORÈME XII. PROPOSITION XX. — *S'il y a dans l'axe de la colonne un point ferme et un mouvant auquel il puisse être*

Fig. 25.



tenu en quelque disposition par le moyen d'un élevant direct : comme la ligne d'élévation droite à la ligne d'élévation oblique, ainsi l'élevant direct à l'élevant oblique.

Fig. 26.



C'est-à-dire que G est à H comme EI à EK ([57]) (*fig.* 26).

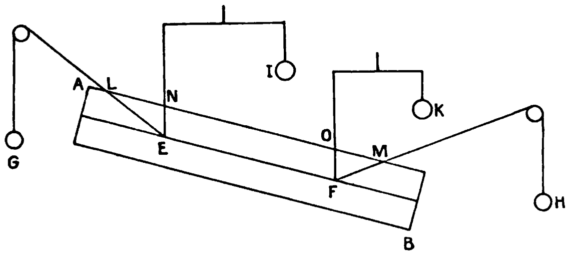
. . . .

THÉORÈME XVIII. PROPOSITION XXVII. — *Si une colonne est pendue en équilibre à deux élevants obliques, comme la ligne d'élévation oblique à la ligne d'élévation droite, ainsi chaque élevant oblique à son élevant direct.*

([57]) Stevin considère cette proposition comme évidente par ce qui précède. Il y a cependant une difficulté à ce changement du point de suspension qui cesse ici d'être le centre de gravité. L'élevant direct n'est plus ici égal au poids du corps que l'élevant oblique maintient sur un plan incliné. Manifestement Stevin admet une extension de ses principes : il considère que les propositions précédentes lui permettent de comparer une pesanteur oblique et une pesanteur directe produisant le même effet, quel que soit cet effet.

... Prenons F pour point ferme, E pour mouvant : alors par la vingtième proposition, comme LE à EN, ainsi G à I. Prenons maintenant E pour point ferme et F pour mouvant; et par ladite vingtième proposition comme MF à FO ainsi H à K.

Fig. 27.



[Stevin montre ensuite que toutes ces règles, démontrées pour les colonnes, sont bonnes quelle que soit la figure des corps. La droite qui joint le point de suspension au point d'appui (ou celle qui joint les deux points de suspension) doit être supposée passer par le centre de gravité : c'est un *diamètre de gravité*. Pour déterminer les segments analogues à EN, EL, FO, FM de la figure 27, segments que Stevin appelle *élévations droites ou obliques*, il faut couper les élevants par une parallèle à ce diamètre de gravité.]

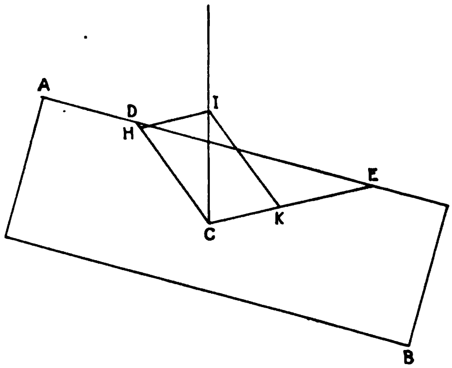
[Enfin, dans une adjonction à sa Statique, qui porte le titre de *Spartostatique ou de l'apondéraire par cordages* et qui est consacrée aux polygones funiculaires, Stévin utilise les résultats précédents pour démontrer la loi du parallélogramme des forces ([58])].

Or, pour venir à la déclaration de la qualité des pesanteurs suspendues par cordages, soit AB une colonne, de laquelle C soit le centre, suspendue à deux lignes CD, CE (venant dudit centre C) ès-points fermes D, E, lesquelles seront diamètres de gravité; par quoi prenant HI entre DC, CI, parallèle à CE, alors CI sera élévation droite, CH oblique; tellement que, comme CI à CH, ainsi cet élevant direct à l'élevant oblique. Mais l'élevant direct de CI est

([58]) Ne pas oublier la réserve de la note 55; mais remarquer que l'observation de la note 57 est sans portée ici, le corps étant suspendu par son centre de gravité. Pour suivre le raisonnement, on appliquera deux fois la proposition XX et la définition précédente des diamètres de gravité, en considérant C comme un point mouvant et successivement D et E comme fermes.

égal au poids de la colonne. Donc, comme CI à CH, ainsi le poids de la colonne entière au poids qui avient en D, et de même manière trouvera-t-on le poids qui avient en E en menant de I

Fig. 28.



jusqu'à CE la ligne IK parallèle à DC et disant : comme l'élévation droite CI à l'élévation oblique CK, ainsi le poids de la colonne au poids qui avient sur E (*fig.* 28).

§ 2. — Le parallélogramme des forces tiré du levier.

Il paraît probable que Léonard de Vinci a eu, avant Stevin, l'idée nette de la loi de la composition des forces sous la forme suivante : « Par rapport à un point pris sur une des composantes, le moment de l'autre est égal au moment de la résultante ([59]) ». On trouve en effet, dans ses Notes, les dessins ci-dessous relatifs au problème d'un poids suspendu par deux cordes, accompagnés des commentaires suivants :

Première. — A est le pôle de la balance angulaire AD et AF, et leurs appendices sont DN et FC (*fig.* 29).

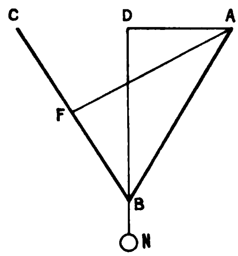
Seconde. — Plus grossit l'angle de la corde qui, au milieu de

---

([59]) Duhem, *Léonard de Vinci et la composition des forces concourantes* (*Bibliotheca mathematica*, 3. Folge, IV. Band., 4. Heft, 16 février 1904). *Les Origines de la Statique*, t. II, Note O.

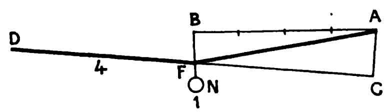
sa longueur, soutient le poids N (*fig.* 30), d'autant plus diminue son levier potentiel et croît le contre-levier potentiel qui soutient le poids.

Fig. 29.



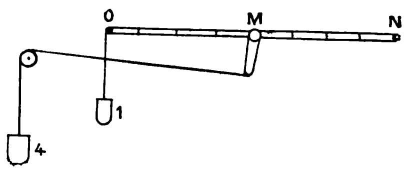
[La figure 30 est faite de sorte que AB = 4AC, et Léonard marque 1 sur N et 4 sur la corde DF.]

Fig. 30.



Cette figure (*fig.* 31) représente la précédente ABC potentielle; mais parce que la réelle pèse et la potentielle non, j'y ajoute le bras MN pour le contre-poids du bras O.

Fig. 31.



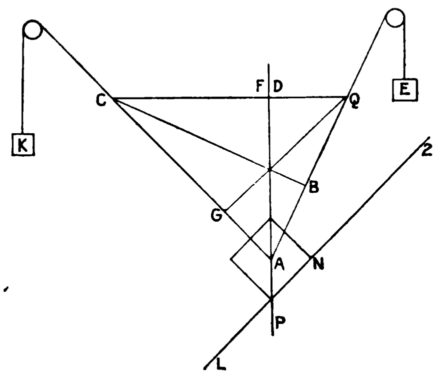
Ces citations montrent non seulement que Léonard de Vinci a connu le théorème énoncé plus haut, mais encore qu'il y est arrivé par le levier angulaire et la notion générale de moment.

Dans le Traité de Mécanique dont il a été question plus haut (Chap. I, § 4), Roberval donne la démonstration générale de la loi du parallélogramme des forces. Sa démonstration fait intervenir le plan incliné, mais d'une manière tout à fait accessoire. De là la place que nous donnons à cette citation dans le présent paragraphe.

[Après avoir étudié l'équilibre d'un grave sur un plan incliné, Roberval aborde le problème d'un poids suspendu par deux cordes. Il fait remarquer que ce problème comprend plusieurs cas particuliers, suivant que le poids peut ou non coulisser sur les cordes, et suivant que le poids est attaché aux deux cordes en deux points différents ou au même point. Bornons-nous ici au cas où le poids, ne coulissant pas sur les cordes, est attaché en un seul point. Roberval annonce, mais ne démontre pas dans ce Traité, qu'on peut ramener les autres cas à celui-là.]

Par la deuxième proposition, nous avons vu que, si CA est le bras d'une balance sur lequel le poids A est retenu par la corde CA (60), qu'il ne glisse le long du bras CA et que, comme CB est à CF (61), ainsi soit le poids A à la puissance Q ou E tirant par la corde QA, cette puissance Q ou E tiendra la balance CA en équilibre, et, la corde QA étant attachée au centre

Fig. 32.



du poids A, la balance demeurera déchargée et le poids A sera soutenu partie par la puissance Q ou E, partie par le plan LN2 perpendiculaire à la balance CA, ou en la place du plan LN2 par la corde CA, par la scholie du quatrième axiome (62). Donc, par

(60) Roberval, dans ce qui précède, a considéré des poids pouvant coulisser sur des leviers et retenus par des cordes tendues le long des bras des leviers.

(61) CB est perpendiculaire à AQ et CF à la verticale AD.

(62) La deuxième proposition, à laquelle renvoie Roberval, est celle qui donne (*voir* le passage signalé par les notes 48, 49) l'évaluation de la puissance qui

ce moyen, la puissance Q ou E est trouvée. Par même moyen..., si QA est pris pour bras d'une balance sur lequel soit posé le poids A retenu par la corde QA, qu'il ne glisse sur le bras QA et que, comme GQ est à QD, ainsi le poids A soit à la puissance C ou K, cette puissance C ou K, tirant par la corde CA, tiendra la balance QA en équilibre, et, la corde CA étant attachée au centre du poids A, la balance QA demeurera déchargée et le poids A sera soutenu partie par la puissance C ou K tirant par la corde CA, et partie par la corde QA. Or, d'autant que $\widehat{GAQ}$ est donné et les cordes AQ et AC avec les angles $\widehat{CAF}$, $\widehat{QAD}$, les perpendiculaires CB, QG, CF, QD sont données et leurs raisons aussi données, et partant les raisons du poids donné A aux puissances Q ou E et C ou K, lesquelles puissances, par conséquent, sont données, et elles soutiennent le poids A par les cordes QA et CA.

....

Corollaire. — On remarquera donc qu'en tous les cas on tire de chaque puissance deux perpendiculaires, l'une sur la direction du poids, l'autre sur la corde de l'autre puissance, et que, dans les raisons du poids aux puissances, le poids est homologue aux perpendiculaires tombant sur les cordes des puissances, et les puissances sont homologues aux perpendiculaires tombant sur la ligne de direction du poids.

[Il suffit maintenant de considérations purement géométriques pour démontrer] :

Que si, de quelque point pris en la ligne de direction du poids, on mène la ligne parallèle à l'une des cordes jusqu'à l'autre corde, [les côtés du triangle ainsi formé] seront homologues au poids et aux deux puissances.

---

retient un poids sur un plan incliné. Roberval l'a démontrée (*voir* note 49) en remplaçant le plan incliné LN 2 par un levier perpendiculaire CA. C'est de là que vient l'intervention du plan LN 2 dans le présent raisonnement. En réalité, cette intervention est tout à fait inutile et il est plus simple de considérer directement, sans l'intermédiaire du plan incliné, la corde CA comme un levier. Qaant à la scholie du quatrième axiome, il n'est pas nécessaire de la connaître pour comprendre la présente citation.

CHAPITRE III.

LE PRINCIPE DU TRAVAIL VIRTUEL.

§ 1. — Poids et vitesse.

Nous avons dit, dans l'Introduction, qu'Aristote avait eu, à propos du levier, une première idée du principe du travail virtuel.

Il paraît probable que cette idée s'est rattachée plus ou moins étroitement, dans sa pensée ou au moins dans celle de plusieurs de ses disciples, au principe fondamental de la Dynamique péripatéticienne qu'il faut, pour mouvoir un corps avec une certaine vitesse, une puissance (ἰσχύς ou δύναμις) proportionnelle à la grandeur du corps et à sa vitesse. Voici, en effet, ce que dit le géomètre arabe Thâbit ibn Kurrah dans le Commentaire qu'il a donné d'un Ouvrage grec, aujourd'hui perdu, appelé *Liber Charastonis* dans la traduction latine de l'écrit arabe.

Si deux mobiles parcourent deux espaces différents en un même temps, le rapport de l'un de ces espaces à l'autre est le même que le rapport de la puissance qui meut (*virtus motiva*) le premier mobile à la puissance qui meut le second. [Et, passant au levier :] La vertu motrice de l'extrémité B du levier est donc à la vertu motrice de l'extrémité A comme les deux chemins que ces points décrivent en un même temps, c'est-à-dire comme l'arc BD est à l'arc AF.

Cette conception du principe du travail virtuel se rencontre chez plusieurs auteurs du moyen âge et de la Renaissance.

On la trouve nettement formulée dans les Notes de Léonard de Vinci.

Première. — Si une puissance meut un corps quelque temps et quelque espace, la même puissance mouvra la moitié de ce corps, dans le même temps, deux fois cet espace.

Deuxième. — Ou bien la même vertu mouvra la moitié de ce corps, en tout cet espace, en la moitié de ce temps.

Troisième. — Et la moitié de cette vertu mouvra la moitié de ce corps, en tout cet espace, pendant le même temps.

Quatrième. — Et cette vertu mouvra deux fois ce mobile, en tout cet espace, en deux fois ce temps, et mille fois ce mobile, en mille pareils temps, en tout cet espace....

[Toutefois Léonard apporte à ces énoncés un correctif; quand la puissance est trop petite, il admet qu'elle ne peut pas déplacer un corps très lourd. On sait que cette restriction avait été posée déjà par Aristote.]

... Plus une force s'étend de roue en roue, de levier en levier ou de vis en vis, plus elle est puissante et lente....

Dans les moufles, les puissances que les cordes interposées entre les parties reçoivent de leur moteur sont entre elles dans la même proportion que celle qu'il y a entre les vitesses de leurs mouvements.

La proportion qu'a le mouvement du moteur des poulies avec le mouvement du poids élevé par les poulies sera celle qu'a le poids élevé par ces poulies avec le poids du moteur.

Il est probable ([63]) que Cardan (1501-1576) a eu connaissance des Notes manuscrites de Léonard de Vinci. Dans son *De Subtilitate* (1551) et dans son *Opus novum de proportionibus* (1570), il reproduit les remarques précédentes à propos des moufles et applique des considérations analogues à la vis et au vérin.

La manière dont Galilée (1564-1642) conçoit le principe du travail virtuel semble se rattacher au point de vue qui

([63]) *Voir* DUHEM, *Les origines de la Statique*, t. I.

nous occupe ici. Que l'on se reporte à la citation des *Méchaniques* (Chap. I, § 4). La notion de *moment* a quelque rapport avec l'ἰσχύς ou la δύναμις d'Aristote. Galilée parle en général de la compensation qui s'établit entre la force et la vitesse, et ce n'est qu'exceptionnellement (*voir* le passage signalé par la Note 43) qu'il considère la force et le chemin. Il n'est pas nécessaire de faire ressortir la parenté des développements du Chapitre V des *Méchaniques*, notamment de la phrase qui précède la note 40, avec la citation donnée plus haut de Thâbit ibn Kurrah. Il est d'ailleurs permis de penser que, dans ce Chapitre, Galilée ne dégage pas très exactement la notion du travail virtuel, notamment qu'il est insuffisamment explicite sur la nécessité de considérer les déplacements *dans la direction des forces*.

Toutefois ses idées sur ce point n'étaient pas inexactes, car ce défaut n'existe plus dans son Traité postérieur intitulé : *Discorsi intorno a due nuove scienze* (*voir* le passage qui suit la note 114). Mais, même là, il semble bien (*voir* la phrase qui précède la note 117) qu'il établisse encore la correspondance plutôt entre force et vitesse qu'entre force et chemin.

On remarquera que Galilée n'a pas pris le principe du travail virtuel pour fondement de sa théorie des *Méchaniques;* il se contente de faire voir en lui un corollaire important des lois de l'équilibre.

§ 2. — Les propriétés du centre de gravité (64).

Encore ici, il faut partir d'une opinion d'Aristote, qui se rattache à la théorie du mouvement naturel des corps. Dans son *Traité du Ciel*, Aristote déclare que tout corps grave se porte vers le centre de l'Univers, lequel coïncide avec celui de la Terre, et qu'il ne s'arrête que lorsque son *milieu* vient se placer en ce centre.

(64) *Voir* DUHEM, *Les origines de la Statique*, t. II

De cette affirmation et du rapprochement entre ce *milieu* des graves et le centre de gravité, dont les anciens avaient la notion expérimentale (*voir* Chap. I), est née une doctrine dont le principal artisan a été Albert de Saxe (XIVe siècle). Cet auteur a développé sa théorie à propos de diverses questions de philosophie naturelle, notamment de la forme de la Terre. Pour lui c'est le centre de gravité, ce point où toute la pesanteur du corps est comme concentrée et qui ne coïncide pas toujours avec le centre de figure, qui tend à se placer au centre du monde. Cette théorie a eu un grand succès. Elle a continué à être en vogue même après les recherches de Copernic : on s'est contenté alors de remplacer le centre de l'Univers par le centre de la Terre et d'une manière générale par le centre de l'astre à la surface duquel se trouvent les graves. On en voit la trace dans les travaux de Galilée; que l'on se reporte aux *Méchaniques,* citées plus haut (note 35) et au passage des *Discorsi* où le célèbre Florentin affirme que le centre de gravité d'un système de graves ne peut s'écarter naturellement du centre commun des choses pesantes (notes 115 et 116).

La considération du centre de gravité peut servir de principe à l'étude de la Statique. Dans ses Notes, Léonard de Vinci énonce et utilise le théorème que, si un corps est en équilibre, la verticale de son centre de gravité tombe dans le polygone de sustentation. Cardan (*Opus novum* et *De subtilitate*) et Bernardino Baldi (*Exercices sur les questions mécaniques d'Aristote,* 1621) se servent plus ou moins heureusement des propriétés du centre de gravité sous une forme qui les rattache davantage à la théorie d'Albert de Saxe : un corps est en équilibre quand son centre de gravité ne peut pas descendre. Il paraît probable d'ailleurs que ces deux auteurs ont dû emprunter cet énoncé à quelque manuscrit de Léonard. Guido Ubaldo, au début de sa Statique, utilise des considérations analogues.

Il est fort remarquable que la notion de centre de gravité ne soit valable qu'avec des verticales parallèles, et que, cependant, elle se soit développée dans des écrits (notamment dans ceux que nous venons de citer) où l'on tient compte essentiellement de la convergence des verticales vers le centre de la Terre; la notion de centre de gravité a été, au début, purement expérimentale. De là, dans le développement de la doctrine, des contradictions, des erreurs qu'on n'est arrivé que peu à peu à débrouiller. La lumière définitive a été faite sur ce point par la discussion qu'ont soutenue, en 1636, Étienne Pascal et Roberval contre Fermat, lequel voulait conserver la notion de centre de gravité malgré la convergence des verticales, et par la Note envoyée en 1638 par Descartes à Mersenne et intitulée : *Examen de la question : savoir si un corps pèse plus ou moins, étant proche du centre de la Terre qu'en étant éloigné* ([65]).

Torricelli (1608-1647), disciple de Galilée, avait appris de son maître l'importance du fait que le centre de gravité d'un ensemble de graves ne peut s'écarter naturellement du centre commun des choses pesantes. Il eut l'idée d'en faire un principe fondamental de la Statique. Il énonça ainsi le premier avec précision, et *en spécifiant que les verticales devaient être considérées comme parallèles,* le principe utilisé déjà par Cardan et Baldi. Voici comment il s'exprime (*De Motu gravium naturaliter descendentium et projectorum libri duo,* 1644) (traduction de M. Duhem).

Nous poserons en principe que deux graves, liés ensemble, ne peuvent se mouvoir d'eux-mêmes, à moins que leur commun centre de gravité ne descende.

En effet, lorsque deux graves sont liés ensemble de telle sorte que le mouvement de l'un entraîne celui de l'autre, que cette liaison soit produite par l'intermédiaire de la balance ou de la poulie ou de tout autre mécanisme, ces deux graves se comporteront comme un grave unique formé de deux parties; mais un tel grave

([65]) Cette question n'est autre chose que la question de la convergence des verticales. Quand on tient compte de cette convergence, les règles de la composition des forces montrent que le poids total d'un corps est plus fort quand il est loin du centre de la Terre que quand il en est près (en supposant que chaque partie du corps conserve la même gravité). Cette remarque avait été faite par Blaise de Parme, un auteur du xv^e siècle qui se rattache à l'école de Jordanus.

ne se mettra jamais en mouvement, à moins que son centre de gravité ne descende. Or donc, quand il sera constitué de telle sorte que son centre de gravité ne puisse descendre en aucune manière, le grave demeurera assurément en repos dans la position qu'il occupe; par ailleurs, en effet, il se mouvrait en vain, car il prendrait un mouvement horizontal qui ne tend nullement vers le bas....

Si deux graves sont placés sur deux plans inégalement inclinés, mais ayant même élévation, et si les poids de ces graves sont entre eux comme les longueurs de ces plans, ces deux graves auront même moment.

Nous montrerons, en effet, que leur commun centre de gravité ne peut descendre, car, quelque mouvement que l'on impose aux deux graves, il se trouve toujours sur la même ligne horizontale. Ainsi deux graves attachés l'un à l'autre se mouvraient et leur commun centre de gravité ne descendrait pas. Cela serait contraire à la loi d'équilibre que nous avons posée en principe.

§ 3. — Notion générale du travail virtuel.

Dans les *Questions mécaniques*, Aristote parvient à la loi du levier par des considérations assez obscures, où il y a lieu de remarquer l'idée suivante. Si l'on considère un poids suspendu à l'extrémité du bras d'un levier, lorsque ce bras s'incline, le poids décrit à la fois un mouvement naturel vertical sous l'action de la pesanteur, et un mouvement forcé, horizontal, produit par la traction du levier. Plus le levier est long, moins, pour une même chute, le mouvement naturel est troublé. Il est donc naturel qu'un poids ait plus de puissance à l'extrémité d'un long levier que d'un court (*Voir* note 41).

On peut rattacher à cette conception les considérations présentées au XIII^e siècle par Jordanus de Nemore et son école sur la *gravité de situation* et son évaluation par *ce qu'un trajet prend du direct*. Nous empruntons à M. Duhem ([66]),

([66]) *Les origines de la Statique*, t. I.

les citations et les analyses suivantes de Jordanus [*Elementa Jordani super demonstrationem ponderis* ([67])].

Le mouvement de tout corps pesant se fait vers le centre et sa vertu est la puissance qu'il a de tendre vers le bas et de résister à un mouvement contraire ....

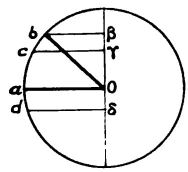
Le mobile qui descend a une gravité d'autant plus grande que son mouvement vers le centre est plus direct.

Un corps est d'autant plus grave en raison de sa situation (*secundum situm*) ([68]) que, dans cette situation, sa descente est moins oblique.

Une descente plus oblique est celle qui, pour une même longueur de chemin, prend moins du direct (*minus capere de directo*).

[Il suit de là qu'un poids attaché à un levier O*b* a une gravité *secundum situm* moindre qu'un poids égal attaché au levier horizontal O*a* : en effet, si l'on compte deux petits arcs égaux *bc*, *ad* à partir de *b* et de *a*, l'arc *bc* prend moins du direct que

Fig. 33.



l'arc *ad*, c'est-à-dire que sa projection sur la verticale est plus petite que celle de *ad*.]

[Cette conception de la gravité *secundum situm* conduit parfois Jordanus à des erreurs. Par exemple, Jordanus étudie le levier coudé *acf* (*fig.* 34), dont le bras *ac* est horizontal et le bras *cf* incliné. En *a* et *f* sont des poids égaux dont les distances horizontales à la verticale de *c* sont égales ($ac = fe$). Jordanus compte des arcs égaux *al*, *fm* sur les trajectoires possibles de *a* et de *f*, remarque que *al* prend davantage du direct que *fm* et en déduit

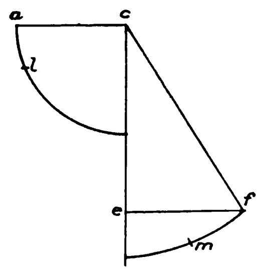
([67]) Manuscrit de la Bibliothèque nationale, exhumé par M. Duhem.

([68]) Cette notion de la gravité *secundum situm* est à rapprocher de la notion de *moment* de Galilée (*voir* note 33). La manière dont elle est mesurée introduit en somme le *travail virtuel*.

que *a* l'emportera et descendra. On sait aujourd'hui que cette conclusion est erronée.

C'est que l'auteur, ayant entrevu la notion de travail virtuel,

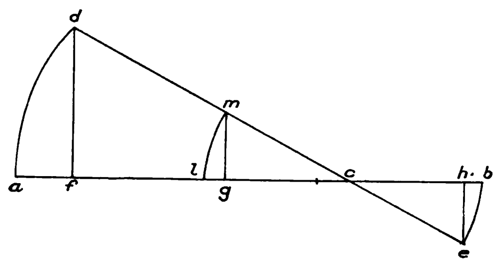
Fig. 34.



n'a pas compris, dans cette démonstration, que l'on doit considérer les travaux des forces dans des déplacements *simultanément possibles* eu égard aux liaisons. Cette idée, toutefois, Jordanus l'a eue dans sa démonstration de la loi du levier droit qu'il faut citer :]

Soient *acb* le fléau, *a* et *b* les poids qu'il porte et supposons que le rapport de *b* à *a* soit celui de *ca* à *cb*. Je dis que la règle

Fig. 35.



ne changera pas de place. Mettons, en effet, qu'elle descende du côté *b* et prenne la position oblique *dce*; *b* descendra de la hauteur verticale *he* et *a* montera de la hauteur verticale *fd*.

Si l'on plaçait en *l*, à la distance $cl = cb$, un poids égal au poids *b*, il monterait, dans ce mouvement, de $gm = he$. Mais il est évident que *df* est à *gm* comme le poids *l* au poids *a*. Dès lors, ce qui suffit à amener le poids *a* en *d* suffirait à amener le poids *l* en *m*. Donc le poids *b* suffirait à amener *l* en *m*. Or, c'est impossible, car on sait que *b* et *l* sont en équilibre.

Cette démonstration repose sur un postulat, qui est celui qu'admettra Descartes : « Ce qui suffit à élever un poids 1 d'une hauteur l suffit aussi pour élever un poids k d'une hauteur $\frac{l}{k}$. » Admettre ce postulat revient à admettre comme principe fondamental celui du travail virtuel. Il y a donc là une vue assez profonde des choses.

Mais il faut reconnaître, ainsi que le dit Lagrange, que le principe du travail virtuel n'est pas assez évident par lui-même pour pouvoir être érigé en principe primitif. C'est précisément la considération des machines simples et particulièrement du levier qui a conduit l'esprit humain à penser que ce qui suffit à élever le poids 1 de la hauteur l suffit à élever le poids k de $\frac{l}{k}$; prendre cette affirmation comme fondement de la théorie des machines simples est un peu un cercle vicieux. Il n'en faut pas conclure que les développements de l'école de Jordanus et ceux de Descartes sont sans valeur, loin de là; dans une Science physique comme la Mécanique, il n'y a pas à proprement parler de *démonstrations;* l'important est de relier des objets divers à des principes généraux. Mais il ne faut pas s'étonner si l'on a jugé utile, au XVI^e siècle, de justifier par une autre voie les lois des machines simples.

Un disciple inconnu de Jordanus a fait, de sa méthode, l'application suivante qui l'a conduit à la notion générale de *moment d'une force autour d'un point.*

Une balance (69) a deux bras inégaux ca, cb qui font entre eux un certain angle; les deux points a, b sont équidistants de la verticale qui passe par le point d'appui c : ils portent des poids égaux; la balance est-elle ou n'est-elle pas en équilibre?

[Nous avons vu que Jordanus avait donné une réponse erronée à cette question. Voici, au contraire, comment la traite son disciple.]

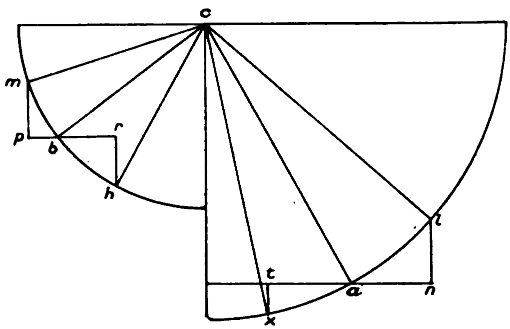
De part et d'autre du bras ca, il trace deux rayons cx, cl faisant avec ca des angles égaux; de même, de part et d'autre du bras cb,

(69) Citation de M. Duhem (*Les origines de la Statique*, t. I, p. 141).

il mène deux rayons *ch*, *cm* faisant avec *cb* des angles égaux entre eux et égaux aux précédents.

Cela posé, il se demande si le poids *a* pourra l'emporter sur le poids *b*, et il déclare que cela ne se pourra pas; car alors les bras *ca*, *cb* du levier viendraient respectivement en *cx*, *cm*; le poids *a*, descendant de la hauteur *tx*, ferait monter le poids *b*, qui lui est égal, d'une hauteur *pm* supérieure à *tx*. De même, le poids *b*

Fig. 36



ne saurait l'emporter sur le poids *a*, car le bras *cb* viendrait en *ch* tandis que le bras *ca* viendrait en *cl*; et le poids *b*, s'abaissant de la longueur *rh*, élèverait le poids égal *a* d'une longueur *nl* supérieure à *rh*.

Cette démonstration offre une parenté évidente avec celle que Jordanus a donnée pour la loi de l'équilibre du levier; mais cette nouvelle application de la méthode des déplacements virtuels présentait certaines difficultés que la première ne rencontrait pas; en effet, dans le cas du levier droit, l'équilibre est indifférent, en sorte que tout déplacement virtuel fini correspond à un travail de la puissance exactement égal au travail de la résistance; dans le cas du levier coudé, l'équilibre est stable; l'égalité entre le travail moteur et le travail résistant n'a plus lieu, sauf pour les déplacements infiniment petits qu'un géomètre du XIII[e] siècle n'aurait su traiter; ces difficultés, le précurseur de Léonard de Vinci ([70]) a su les surmonter de la manière la plus heureuse.

En combinant la démonstration que nous venons de rapporter avec ce principe : « ce qui suffit à élever un certain poids à une

([70]) C'est le nom que M. Duhem donne à l'auteur inconnu dont nous parlons ici.

certaine hauteur suffit aussi à élever un poids n fois moindre à une hauteur n fois plus grande », principe implicitement admis dans la démonstration que Jordanus avait donnée de la loi de l'équilibre du levier droit, on obtient sans peine la condition d'équilibre d'un levier coudé quelconque dont les bras portent des poids quelconques. [Le géomètre qui nous occupe parvient ainsi explicitement à la notion de moment d'une force autour d'un point.

La mesure de la gravité *secundum situm* par ce qu'un trajet donné *prend du direct* s'applique d'une manière particulièrement facile à la comparaison des forces qui peuvent retenir un poids donné sur des plans diversement inclinés. Et, en effet, le géomètre dont nous venons de parler a tiré de cette méthode une démonstration de la loi du plan incliné, démonstration que le lecteur pourra facilement reconstituer et qu'il est inutile de citer.]

Les écrits de l'école de Jordanus ont eu une influence certaine sur Léonard de Vinci, sur Tartaglia et sur Cardan (xv^e^ et xvi^e^ siècles).

Au xvii^e^ siècle, Roberval a connu la loi du travail virtuel sous une forme analogue. Dans le *Traité de Mécanique* où il a trouvé la condition d'équilibre d'un poids suspendu à deux cordes (1636), il fait, après sa démonstration, la remarque suivante :

Si, au-dessous du poids A (voir *fig.* 32) dans sa ligne de direction, on prend quelque ligne comme AP, il arrivera que si le poids A descend jusqu'à P, tirant avec soi les cordes et faisant remonter les puissances K, E, il y aura réciproquement plus grande raison du chemin que les puissances feront en montant [71] au chemin que le poids fait en descendant, que du même poids aux deux puissances prises ensemble; ainsi les puissances monteraient plus à proportion que le poids ne descendrait en les emportant, ce qui est contre l'ordre commun.

[Même remarque si le poids A montait [72].]

---

[71] Il s'agit évidemment du chemin moyen décrit par le centre de gravité des corps K et E.

[72] Cette démonstration, remarque M. Duhem, est à rapprocher de celle qu'a donnée, pour le levier coudé, le disciple de Jordanus cité plus haut. Dans les

La notion générale du principe du travail virtuel a été exposée par Descartes (1596-1650) dans un petit écrit qu'il a envoyé le 5 octobre 1637 à Constantin Huygens (père du célèbre Christian Huygens) et qui porte le titre suivant : *Explication des engins par l'aide desquels on peut, avec une petite force, lever un fardeau fort pesant.* Descartes prend comme fondement de sa théorie le même principe que Jordanus. Il se sépare ainsi nettement de son contemporain Galilée qui considérait plutôt le principe du travail virtuel comme une conséquence des lois de l'équilibre. Nous avons dit plus haut, à propos de Jordanus, ce que nous pensions de cette manière de faire qui est très propre à montrer la généralité du principe, mais où la question est peut-être prise un peu à l'envers. Descartes se sépare aussi de Galilée en ce qu'il considère le travail et non le produit de la force par la vitesse.

Il convient de faire une citation importante de son écrit :

L'invention de tous ces engins n'est fondée que sur un seul principe, qui est que la même force ([73]) qui peut lever un poids, par exemple de 100 livres, à la hauteur de 2 pieds, en peut aussi lever un de 200 livres à la hauteur de 1 pied, ou un de 400 à la hauteur d'un $\frac{1}{2}$ pied, et ainsi des autres, si tant est qu'elle lui soit appliquée.

Et ce principe ne peut manquer d'être reçu, si l'on considère que l'effet doit toujours être proportionné à l'action qui est nécessaire pour le produire ; de façon que, s'il est nécessaire d'employer l'action par laquelle on peut lever un poids de 100 livres à la hauteur de 2 pieds pour en lever un à la hauteur de 1 pied seulement, celui-ci doit peser 200 livres. Car c'est le même de lever 100 livres à la hauteur de 1 pied et derechef encore 100 à la hau-

---

deux cas, le procédé est le même pour tourner la difficulté provenant du fait que l'égalité des travaux virtuels n'est vraie que dans un déplacement infiniment petit.

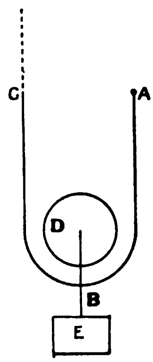
([73]) Descartes prend ici le mot *force* dans le sens du mot moderne *travail.* Il ne faisait certainement pas de confusion entre cette force et la force assimilable à un poids; ses idées étaient fort nettes à ce sujet; dans une lettre au P. Mersenne (12 septembre 1638), il fait remarquer que ce qu'il appelle *force* dans cette question *a deux dimensions.* Mais le langage qu'il a employé prête à l'ambiguïté. *Voir* la note 76.

teur de 1 pied que d'en lever 200 à la hauteur de 1 pied et le même aussi que d'en lever 100 à la hauteur de 2 pieds [74].

Or les engins qui servent à faire cette application d'une force qui agit par un grand espace à un poids qu'elle fait lever par un moindre sont la poulie, le plan incliné, le coin, le tour ou la roue, la vis, le levier et quelques autres....

La poulie. — Soit ABC une corde passée autour de la poulie D, à laquelle poulie soit attachée le poids E. Et premièrement sup-

Fig. 37.



posant que deux hommes soutiennent ou haussent également chacun un des bouts de cette corde, il est évident que si ce poids pèse 200 livres, chacun de ces hommes n'emploiera, pour le soutenir ou le soulever, que la force qu'il faut pour soutenir ou soulever 100 livres; car chacun n'en porte que la moitié [75]. Faisons après cela que A, l'un des bouts de cette corde, étant attaché ferme à quelque chose, l'autre C soit derechef soutenu par un

---

(74) Descartes essaie ici de justifier son postulat fondamental. Il en décompose les idées d'une manière assurément intéressante. Il est certain que, lorsque l'esprit envisage, à la manière indiquée par Descartes, l'élévation de 100 livres à 2 pieds et l'élévation de 200 livres à 1 pied, il aperçoit une parenté entre ces deux élévations. Mais cette parenté n'est peut-être que dans l'opération de l'esprit, et rien ne dit qu'elle soit dans la nature. La confusion d'ailleurs est naturelle chez Descartes qui a « mis la pensée hors de pair et trouvé en elle seule le principe de la certitude » (Boutroux).

Le meilleur moyen de justifier le postulat fondamental de Descartes serait de le rattacher au principe de Torricelli. C'est en somme ce que fera Lagrange.

(75) Il est remarquable qu'ici Descartes démontre directement la loi de l'équilibre de la poulie sans passer par son principe fondamental, lequel apparaît alors comme une conséquence.

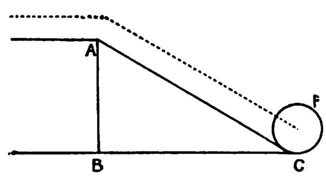
homme; et il est évident que cet homme, en C, n'aura besoin, non plus que devant, pour soutenir le poids E, que de la force qu'il faut pour soutenir 100 livres; à cause que le clou qui est vers A y fait le même office que l'homme que nous y supposions auparavant. Enfin, posons que cet homme qui est vers C tire la corde pour faire hausser le poids E; et il est évident que, s'il y emploie la force qu'il faut pour lever 100 livres à la hauteur de 2 pieds, il fera hausser ce poids E, qui en pèse 200, de la hauteur de 1 pied; car la corde ABC étant doublée comme elle l'est, on la doit tirer de 2 pieds par le bout C pour faire autant hausser le poids E que si deux hommes la tiraient, l'un par le bout A et l'autre par le bout C, chacun de la longueur de 1 pied seulement.

Il y a toutefois une chose qui empêche que ce calcul ne soit exact, à savoir la pesanteur de la poulie et la difficulté qu'on peut avoir à faire couler la corde et à la porter. Mais, cela est fort peu, à comparaison de ce qu'on lève, et ne peut être estimé qu'à peu près....

On doit aussi remarquer qu'il faut toujours un peu plus de force pour lever un poids que pour le soutenir, ce qui est cause que j'ai parlé ici séparément de l'un et de l'autre.

Le plan incliné. — Si, n'ayant qu'assez de force ([16]) pour lever 100 livres, on veut néanmoins lever le corps F, qui en pèse 200, à la hauteur de la ligne BA, il ne faut que le tirer ou

Fig. 38.



le rouler le long du plan incliné CA, que je suppose deux fois aussi long que la ligne AB; car, par ce trajet, pour le faire parvenir au point A, on y emploiera la force qui est requise pour faire monter 100 livres deux fois aussi haut....

Mais il y a encore à rabattre de ce calcul la difficulté qu'il y

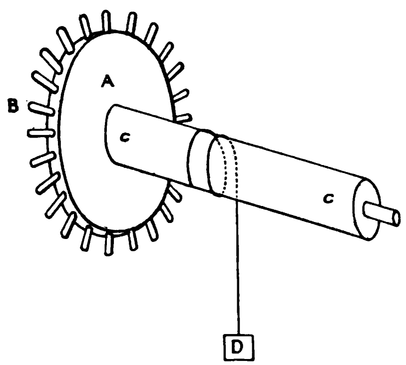
([16]) Ici, il s'agit d'une force assimilable à un poids et non du travail, *de la force à deux dimensions*. Cet emploi d'un même mot pour désigner deux choses différentes prête à l'ambiguïté.

aurait à mouvoir le corps F le long du plan AC, si ce plan était couché sur la ligne BC dont je suppose toutes les parties également distantes du centre de la Terre. Il est vrai que, cet empêchement étant d'autant moindre que le plan est plus dur, plus égal et plus poli, il ne peut derechef être estimé qu'à peu près et n'est pas fort considérable. On n'a pas besoin non plus de considérer que, la ligne BC étant une partie de cercle qui a même centre que la Terre, le plan AC doit être tant soit peu voûté,... car cela n'est nullement sensible.

Le coin. — La puissance du coin s'entend aisément en suite de ce qui vient d'être dit du plan incliné....

La roue ou le tour. — On voit aussi fort aisément que la force dont on tourne la roue A ou les chevilles B qui font mouvoir le tour du cylindre C, sur lequel se roule une corde à laquelle le

Fig. 39.



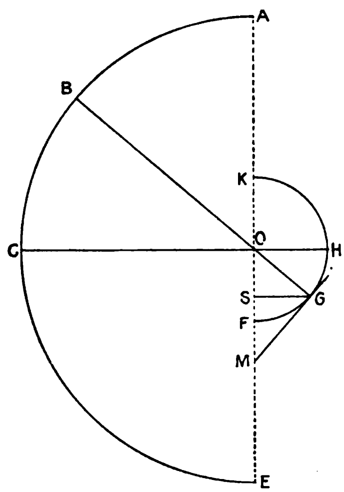
poids D qu'on veut lever est attaché, doit avoir même proportion avec ce poids que la circonférence avec la circonférence de cercle que décrit cette force ou, ce qui est le même, que le diamètre de l'un avec le diamètre de l'autre....

La vis. — Lorsqu'on sait la puissance du tour et du plan incliné, celle de la vis est aisée à connaître et à calculer, car elle n'est composée que d'un plan fort incliné qui tournoie sur un cylindre. Et si ce plan est tellement incliné que le cylindre doive faire, par exemple, dix tours pour s'avancer de la longueur d'un pied dans l'écrou, et que la grandeur de la circonférence du cercle que décrit la force qui le tourne soit de 10 pieds, à cause que

10 fois 10 font 100, un homme seul pourra presser aussi fort avec cette vis que 100 pourraient faire sans elle, pourvu seulement qu'on en rabatte la force qu'il faut à la tourner.

Le levier. — [Descartes considère le levier COH où $CO = 3\,OH$. On exerce une force en C *perpendiculairement au bras* pour soulever un *poids* en H. Descartes fait remarquer que la force à appliquer en C sera différente suivant la position du levier.]

Fig. 40.



Et pour mesurer exactement quelle doit être cette force en chaque point de la ligne courbe ABCE, il faut savoir qu'elle y agit tout de même que si elle traînait le poids sur un plan circulairement incliné, et que l'inclination de chacun des points de ce plan circulaire se doit mesurer par celle de la ligne droite qui touche le cercle en ce point ([77]). Comme par exemple quand la force est au point B, pour trouver la proportion qu'elle doit avoir avec la pesanteur du poids qui est alors au point G, il faut tirer la contingente GM et penser que la pesanteur de ce poids est, à la force qui est requise pour le traîner sur ce plan et par conséquent aussi pour le hausser suivant le cercle FGH, comme la ligne GM est à SM. Puis, à cause que BO est triple de OG, la force en B n'a besoin d'être à ce poids en G que comme le tiers de la ligne SM est à la toute GM.

([77]) C'est l'idée de l'équivalence des liaisons (notes 46 et 49).

Il est intéressant d'ajouter à cette citation la remarque que Descartes est le premier qui ait nettement vu et explicitement énoncé le caractère infinitésimal du principe du travail virtuel. Il marque nettement, dans une lettre à Mersenne, que ce qu'il faut considérer, c'est le *commencement du mouvement* des poids. Galilée ne s'était pas rendu compte de cette nécessité; aussi certains raisonnements de lui, dans un Ouvrage consacré à l'Hydrostatique, laissent-ils beaucoup à désirer.

A la suite de Descartes, le géomètre anglais Wallis (1616-1703) a, dans son traité *De Motu* (1669-1671), donné pour base à la Statique le principe du travail virtuel énoncé sous une forme voisine de celle du philosophe français. On trouvera, dans le Livre II (Chap. II), ce qu'il a écrit sur ce sujet. Bien que la dynamique de Wallis ait des liens étroits avec la dynamique d'Aristote, sa manière de considérer le travail virtuel est plus voisine de celle de Descartes que de celle de Galilée : il envisage le produit de la force par le chemin, non celui de la force par la vitesse.

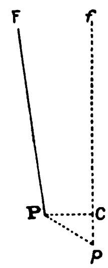
Il faut citer enfin la lettre écrite en 1717 par Jean Bernouilli à Varignon et insérée par celui-ci en tête de la 9e section de sa *Nouvelle Mécanique*. Cette lettre vaut à Jean Bernouilli, depuis ce qu'a écrit Lagrange, d'être considéré comme l'auteur du premier énoncé général du principe du travail virtuel. Il y a lieu cependant de faire une réserve sur cette affirmation, comme on le verra par la note 78 ci-après.

Bernouilli n'a pas démontré le principe qu'il a énoncé. La 9e section de la *Mécanique* de Varignon est consacrée à montrer qu'il est effectivement vérifié dans les machines simples dont l'équilibre a été étudié dans les autres sections de l'Ouvrage par une autre méthode. Varignon, et peut-être aussi Bernouilli, considéraient donc ce principe comme un corollaire des lois de l'équilibre.

Concevez plusieurs forces différentes qui agissent suivant différentes tendances ou directions pour tenir en équilibre un point, une ligne, une surface ou un corps; concevez aussi que l'on imprime à tout le système de ces forces un petit mouvement, soit parallèle à soi-même suivant une direction quelconque, soit autour d'un point fixe quelconque ([78]) : il vous sera aisé de comprendre que par ce mouvement chacune de ces forces avancera ou reculera dans sa direction, à moins que quelqu'une ou plusieurs des forces n'aient leurs tendances perpendiculaires à la direction du petit mouvement; auxquels cas cette force ou ces forces n'avanceraient ni ne reculeraient de rien : car ces avancements ou reculements, qui sont ce que j'appelle *vitesses virtuelles*, ne sont autre chose que ce dont chaque ligne de tendance augmente ou diminue par le petit mouvement; et ces augmentations ou diminutions se trouvent si l'on tire une perpendiculaire à l'extrémité de la ligne de tendance de quelque force, laquelle perpendiculaire retranchera de la même ligne de tendance, mise dans la situation voisine par le petit mouvement, une petite partie qui sera la mesure de la *vitesse virtuelle* de cette force.

Soient, par exemple, P un point quelconque dans le système qui

Fig. 41.



se soutienne en équilibre; F une de ces forces, qui pousse ou qui tire le point P suivant la direction FP ou PF; Pp une petite ligne droite que décrit le point P par un petit mouvement, par lequel la tendance FP prend la situation fp, qui sera ou exactement parallèle à FP, si le petit mouvement du système se fait en tous ses

([78]) Bernouilli ne considère donc que des déplacements virtuels compatibles avec la solidité du système. Or ces déplacements ne sont pas toujours tous compatibles avec les liaisons et ils ne sont pas toujours tous les déplacements compatibles avec les liaisons.

Bernouilli n'a donc peut-être pas vu, et en tous cas n'a pas marqué, l'importance du principe pour éliminer les forces de liaison. Et, en effet, dans les démonstrations que donne Varignon, celui-ci considère parfois des déplacements incompatibles avec les liaisons et fait figurer le travail des réactions.

On voit donc que l'énoncé général de Bernouilli a encore besoin d'être précisé.

points parallèlement à une droite donnée de position ; ou elle fera, étant prolongée, avec FP un angle infiniment petit, si le petit mouvement du système se fait autour d'un point fixe. Tirez donc PC perpendiculaire sur fp et vous aurez Cp pour la *vitesse virtuelle* de la force F, en sorte que $F \times Cp$ fait ce que j'appelle *énergie*. Remarquez que Cp est ou *affirmatif* ou *négatif* par rapport aux autres : il est *affirmatif* si le point P est poussé par la force F et que l'angle FPp soit obtus ; il est *négatif* si l'angle FPp est aigu ; mais au contraire si le point P est tiré, Cp sera *négatif* lorsque l'angle FPp est obtus et *affirmatif* lorsqu'il est aigu. Tout cela étant bien entendu, je forme cette proposition générale :

En tout équilibre de forces quelconques, en quelque manière qu'elles soient appliquées, et suivant quelques directions qu'elles agissent les unes sur les autres, ou médiatement ou immédiatement, la somme des énergies affirmatives sera égale à la somme des énergies négatives prises affirmativement.

Nous terminerons en mentionnant, au XVIII^e siècle, comme se rattachant au principe du travail virtuel, le principe proposé par Maupertuis sous le nom de *Loi de repos* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris,* 1740), utilisé ensuite et rendu plus général par Euler (*Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1751), et le principe donné par Courtivron (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, 1748 et 1749). Nous reviendrons plus tard sur l'énoncé de Courtivron ([79]), qui se relie à la question des forces vives. Voici la Loi de repos de Maupertuis, où apparaît, dans un cas particulier, la notion de *potentiel.*

Soit un système de corps qui pèsent ou qui sont tirés vers des centres par des forces qui agissent chacun sur chacune comme une puissance n de leurs distances aux centres ; pour que tous ces corps demeurent en repos, il faut que la somme des produits de chaque masse par l'intensité de sa force ([80]) et par la puissance

([79]) *Voir* note 210.
([80]) La force est prise de la forme fmr^n. Le coefficient f est ce que Maupertuis appelle *l'intensité de la force*.

$n + 1$ de sa distance au centre de sa force (qu'on peut appeler la *somme des forces au repos*) fasse un maximum ou un minimum.

[Maupertuis démontre cette loi par les théorèmes de la Statique élémentaire (règle du parallélogramme, moments autour d'un point) seulement dans des cas particuliers simples. Il fait remarquer que le principe de Torricelli (*voir* § 2) rentre dans le sien.]

§ 4. — Résumé.

En résumé, le principe du travail virtuel a été d'abord aperçu dans des cas simples. Peu à peu sa généralité s'est manifestée; d'où l'idée de le prendre comme principe primitif de la Statique; c'est ce qu'a proposé Descartes. Mais il faut convenir que ses énoncés généraux, s'ils sont plus féconds, deviennent aussi moins évidents en ce sens qu'ils s'éloignent davantage de notre expérience journalière. Il reste encore à présenter le principe d'une manière qui concilie l'évidence et la fécondité. Ce sera l'œuvre des organisateurs de la Mécanique.

LIVRE II.

ÉTUDES DE DYNAMIQUE.

CHAPITRE I.

LES PREMIÈRES RECHERCHES SUR LE MOUVEMENT.

§ 1er. — La force des corps en mouvement (81).

Aristote pensait (82) que, pour entretenir un mouvement, il fallait un moteur. C'est ainsi que, selon lui, la persistance du mouvement d'une flèche lancée était due à l'action de l'air qui, d'abord ébranlé par le mobile, l'entraînait à son tour dans son ébranlement. Cette conception exigeait qu'Aristote attribuât à l'air le pouvoir, qu'il refusait à la flèche, de continuer à se mouvoir seul sans moteur, par une sorte de conservation du mouvement acquis.

Il était naturel que l'idée vînt de renoncer à cette différence entre les solides et les fluides, et d'attribuer le maintien

(81) *Cf.* E. Wohlwill, *Die Entdeckung des Beharrungsgesetzes* (*Zeitsch. für Völkerpsychologie und Sprachwissenschaft*, 1883-1884, Bd XIV, p. 365, et Bd XV, p. 70 et 337). — P. Duhem, *De l'accélération produite par une force constante* (Extrait des *Comptes rendus du deuxième Congrès international de Philosophie*. Genève, septembre 1904).

(82) *Cf.* Introduction.

du mouvement des projectiles à la conservation d'une certaine *virtus impressa,* d'un certain *impetus,* provenant du moteur primitif. Cette idée se trouve, en effet, chez Nicolas de Cusa (1401-1464) et dans les Notes de Léonard de Vinci. Toutefois, Léonard de Vinci admet que l'*impetus* ne se conserve pas indéfiniment. Pour lui, un projectile se meut d'abord d'un mouvement violent sous l'action de l'*impetus;* puis, l'*impetus* s'affaiblissant progressivement, la gravité finit par l'emporter et produit un mouvement naturel. Des considérations analogues ont été présentées par Tartaglia et par Cardan ([83]).

Cet affaiblissement de l'*impetus* est une manifestation de l'*impossibilité du mouvement perpétuel,* une des idées fondamentales de Léonard de Vinci et de Cardan.

Il convient de remarquer que l'impossibilité du mouvement perpétuel peut s'entendre de deux manières. On peut considérer comme impossible l'existence d'un mobile perpétuellement en mouvement; on peut admettre seulement qu'il ne peut y avoir de moteur produisant indéfiniment du travail ([84]). Léonard et Cardan croyaient, non seulement à l'impossibilité du perpétuel moteur, mais à celle du perpétuel mobile; c'est qu'ils ne faisaient pas abstraction des résistances passives que l'on rencontre en effet toujours dans la nature.

Au XVI[e] et au XVII[e] siècle s'est fait jour l'idée toute différente de l'*indestructibilité du mouvement.* (On sait que cette idée s'est maintenue dans la science moderne qui la concilie, d'ailleurs, avec celle de l'impossibilité du perpétuel mobile en considérant les résistances passives comme des causes étrangères susceptibles de modifier le mouvement. C'est là un

([83]) Il n'est pas sans intérêt de signaler la manière dont Tartaglia se représentait la trajectoire d'un projectile. Pour lui, cette trajectoire se composait d'une droite inclinée, parcourue, au début, par le projectile animé d'un mouvement violent, et d'une verticale parcourue, à la fin, d'un mouvement naturel, ces deux parties étant raccordées par un arc de cercle. Cardan avait des idées analogues. Au contraire, Vinci dessine des trajectoires s'incurvant régulièrement.

([84]) S. CARNOT, *Réflexions sur la puissance motrice du feu.* Note de la page 22 (réimpression fac-simile, Hermann, 1903). — P. DUHEM, préface à la *Thermodynamique* de M. Marchis. Grenoble, 1904.

point sur lequel nous reviendrons dans le Chapitre II du Livre I de la IIe Partie de cet Ouvrage.) Elle a pris corps à propos de la chute accélérée des graves. Aristote avait expliqué l'accélération des corps pesants par un accroissement de leur qualité de pesanteur, au fur et à mesure qu'ils s'approchent de leur lieu naturel. Simplicius nous apprend que quelques auteurs postérieurs à Aristote en ont vu la raison dans le fait que, plus le mobile est bas, moins est épaisse et, par suite, moins est difficile à fendre la couche d'air qui le sépare du sol. Au moyen âge, on a fait intervenir, pour rendre compte de ladite accélération, la même cause qu'Aristote avait invoquée pour expliquer la persistance du mouvement d'une flèche, je veux dire l'action de l'ébranlement de l'air sur le corps tombant. C'est cette dernière opinion qu'ont adoptée Léonard de Vinci (lequel connaissait la loi suivant laquelle varie la vitesse au cours de la chute) et, après lui, Tartaglia et Cardan. Au XVIe siècle apparaît une nouvelle explication; reprenant la considération de l'*impetus* que Vinci avait développée, ainsi que nous venons de le voir, à propos d'un autre sujet (mouvement des projectiles), on envisage cet *impetus* comme se conservant indéfiniment, et la vitesse croissante du grave est alors produite par l'accumulation des *impetus* produits par l'action constante de la gravité.

Cette théorie se trouve surtout chez Jules-César Scaliger (*Exotericarum exercitationum libri XV*, Lutetiæ, 1557) et chez Benedetti (*Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber*. Taurini, 1585; *Disputationes de quibusdam placitis Aristotelis*).

Les corps pesants, une pierre par exemple, dit Scaliger [85], n'ont rien qui favorise la mise en mouvement; ils y sont, au contraire, tout à fait opposés.... Pourquoi donc la pierre se meut-elle plus aisément après que le mouvement a commencé? Parce que, conformément à ce que nous avons dit ci-dessus au sujet du mouvement des projectiles, la pierre a déjà reçu l'impression du mouvement. A une première part du mouvement en succède une se-

---

([85]) *Exercitatio* 77. Traduction de M. Duhem.

conde; et, toutefois, la première demeure. En sorte que, bien qu'un seul moteur exerce son action, les mouvements qu'il imprime en cette succession continue sont multiples. Car la première impulsion est gardée par la seconde et la seconde par la troisième.

L'écrit de Benedetti intitulé *Disputationes de quibusdam placitis Aristotelis,* bien que consacré à réfuter certaines opinions d'Aristote, est encore imprégné des idées péripatéticiennes.

[Il pose comme une vérité évidente et fondamentale que, pour des corps semblables, les vitesses dont ils sont animés dans leur mouvement naturel sont proportionnelles aux poids de ces corps dans le milieu où ils se trouvent, et inversement proportionnelles aux résistances qu'ils éprouvent. Ces résistances sont d'ailleurs proportionnelles aux surfaces, et le poids d'un corps dans le milieu est, comme on le sait depuis Archimède, la différence entre le poids du corps et le poids du milieu déplacé. Partant de là, Benedetti montre, par exemple, que les vitesses d'un même corps dans l'eau et dans l'air ne sont pas forcément dans le rapport inverse des densités de l'eau et de l'air, comme le pensait Aristote ([86]), etc. Voici ce qu'il dit ([87]) sur la question du mouvement des projectiles et sur celle du mouvement des graves.]

Aristote pense qu'un corps mû par force et séparé de son premier moteur se meut ou a été mû pendant quelque temps par l'air ou par l'eau qui le suivent. Cela ne peut être. Au contraire, l'air qui, par horreur du vide, vient occuper l'espace abandonné par le corps, loin de pousser ce corps, empêche plutôt son mouvement; l'air, en effet, est tiré par force en arrière du corps et, fendu par la partie antérieure du corps, il résiste aussi. Autant l'air est condensé à l'avant, autant il se raréfie à l'arrière, et, se raréfiant par force, il ne permet pas que le corps fuie avec la vitesse qu'il aurait sans cela, parce que tout agent souffre dans son action. C'est pour cela que, l'air subissant une action violente de la part du corps, le corps lui-même en subit une de la part de l'air. D'ailleurs, une telle raréfaction de l'air n'est pas naturelle, mais

([86]) *Cf.* Introduction.
([87]) Chapitre XXIV.

violente; il s'ensuit qu'elle résiste et tire vers soi, la nature ne souffrant pas que le vide se trouve entre les corps; c'est pourquoi ceux-ci sont toujours contigus, et le corps mobile, ne pouvant se séparer de l'air, a sa vitesse entravée. Donc la vitesse d'un tel corps séparé de son premier moteur provient d'une certaine impression naturelle, d'une impétuosité reçue par ledit mobile, impression et impétuosité qui croissent continuellement dans les mouvements rectilignes naturels, puisque le corps a perpétuellement en lui-même sa cause mouvante, qui est la propension à se rendre au lieu qui lui est assigné par la nature. Aristote n'aurait pas dû déclarer, au Chapitre VIII du Livre I du *De Cœlo,* que le corps est d'autant plus rapide qu'il s'approche davantage du but où il tend; il aurait dû dire plutôt qu'il est d'autant plus rapide qu'il est plus loin du point d'où il est parti. Car l'impression est d'autant plus grande que le corps se meut plus longtemps de son mouvement naturel, recevant continuellement une nouvelle impulsion; en effet, il a en lui-même la cause de son mouvement qui est sa tendance à aller en son lieu, hors duquel il se trouve placé par violence.

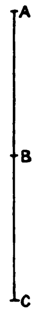
Cette théorie de l'accélération des graves a été développée et précisée par Descartes et Beeckmann, qui discutèrent ensemble sur ce sujet, à l'époque du premier séjour de Descartes en Hollande (1617-1619). Nous ne connaissons, d'ailleurs, ces travaux que par les lettres écrites en 1629 et 1630 par Descartes à Mersenne. Voici ce qu'on lit dans une de ces lettres.

Premièrement, je suppose que le mouvement qui est une fois imprimé en quelque corps y demeure perpétuellement, s'il n'en est ôté par quelque autre cause, c'est-à-dire [88] que ce qui a commencé à se mouvoir dans le vide se meut indéfiniment avec la même vitesse. Supposons donc qu'un poids placé en A soit poussé par sa gravité vers C. Je dis que, si sa gravité l'abandonnait aussitôt qu'il a commencé de se mouvoir, il n'en conserverait pas moins le même mouvement jusqu'à ce qu'il parvienne en C; mais alors il ne descendrait ni plus lentement, ni plus vite de A en B que de B en C. Mais il n'en est pas ainsi; ce corps est soumis à sa gravité

[88] A partir d'ici, le texte est en latin.

qui le pousse vers le bas et qui, à chaque instant (*singulis momentis*), lui donne de nouvelles forces pour descendre (*vires ad descendendum*); de là suit qu'il parcourt l'espace BC beaucoup

Fig. 42.



plus vite que AB, parce que, en le parcourant, il conserve tout l'*impetus* avec lequel il se mouvait suivant AB et qu'à celui-ci s'en ajoute un autre provenant de la gravité qui le presse de nouveau à chaque instant.

Descartes déduit de là la proportionnalité des vitesses aux temps. Il cherche ensuite à déterminer la loi des espaces parcourus, mais, par suite d'une inadvertance, il fait une erreur de raisonnement et ne trouve pas la loi exacte du carré du temps. Il n'a jamais eu l'occasion de corriger son erreur, parce qu'il n'est jamais revenu sérieusement sur ce sujet, ayant été conduit à rejeter l'impossibilité du vide ([89]).

On peut dire que la lettre précédente contient le premier énoncé précis qui ait été donné du *principe de l'inertie*. La loi de l'indestructibilité du mouvement a été ainsi posée d'une façon très nette par Descartes. Elle a été affirmée solennellement et utilisée par lui dans bien d'autres circonstances.

Voici par exemple ce qu'il dit dans sa *Dioptrique* (1637) sur la réflexion de la lumière, qu'il assimile à celle d'une balle sur le sol.

Prenons qu'une balle étant poussée de A vers B rencontre au

([89]) Observations de P. Tannery à propos de la lettre qui nous occupe. (Édition des *Œuvres de Descartes*, par Adam et Tannery.)

point B la superficie de la terre CBE qui, l'empêchant de passer outre, est cause qu'elle se détourne, et voyons de quel côté. Mais afin de ne pas nous embarrasser par de nouvelles difficultés, supposons que la terre est parfaitement plate et dure, et que la balle va toujours d'égale vitesse, tant en descendant qu'en remontant, sans nous enquérir en aucune façon de la puissance qui continue de la mouvoir (90), après qu'elle n'est plus touchée de la raquette, ni considérer aucun effet de sa pesanteur ni de sa grosseur, ni de sa figure; car il n'est pas ici question d'y regarder de si près et il n'y a aucune de ces choses qui ait lieu en l'action de la lumière, à laquelle ceci doit se rapporter. Seulement faut-il remarquer que la puissance, telle qu'elle soit, qui fait continuer le mouvement de cette balle est différente de celle qui la détermine à se mouvoir plutôt vers un côté que vers un autre, ainsi qu'il est très aisé à connaître de ce que c'est la force dont elle a été poussée par la raquette, de qui dépend son mouvement, et que cette force aurait pu la faire mouvoir vers tout autre côté aussi facilement que vers B; au lieu que c'est la situation de cette raquette qui la détermine à tendre vers B et qui aurait pu l'y déterminer en même façon, encore qu'une autre force l'aurait mue; ce qui montre déjà qu'il n'est pas impossible que cette balle soit détournée par la rencontre de la terre, et ainsi que la détermination qu'elle avait à tendre vers B soit changée, sans qu'il y ait rien pour cela de changé en la force de son mouvement, puisque ce sont deux choses diverses (91), et par conséquent qu'on ne doit pas imaginer qu'il soit nécessaire qu'elle s'arrête quelque moment au point B avant que de retourner vers F, ainsi que font plusieurs de nos philosophes; car, si son mouvement était une fois interrompu par cet arrêt, il ne se trouverait aucune cause qui le fît peu après recommencer (92). De plus, il faut remarquer que la détermination à se mouvoir vers quelque côté peut, aussi bien que le mouvement et, généralement, que toute autre sorte de quantité, être divisée en toutes les parties desquelles on peut imaginer qu'elle est composée, et qu'on peut aisément imaginer que celle de la balle qui se

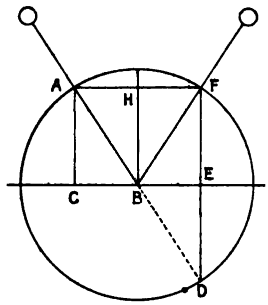
(90) Cette puissance qui continue à mouvoir la balle, c'est, dans l'esprit de Descartes, la force de son mouvement.

(91) C'est ici qu'apparaît la *force du mouvement* du corps. On voit que, pour Descartes, il y a des actions, s'exerçant sur les corps en mouvement, qui ne modifient pas la *force* de ces corps.

(92) Le mouvement ne peut naître de lui-même.

ment de A vers B est composée de deux autres, dont l'une la fait descendre de la ligne AF vers la ligne CE, et l'autre en même temps la fait aller de la gauche AC vers la droite FE, en sorte que ces deux jointes ensemble la conduisent jusques à B suivant la ligne droite AB. Et ensuite, il est aisé à entendre que la rencontre de la

Fig. 43.



terre ne peut empêcher que l'une de ces deux déterminations et non point l'autre en aucune façon; car elle doit bien empêcher celle qui faisait descendre la balle de AF vers CE, à cause qu'elle occupe tout l'espace qui est au-dessous de CE; mais pourquoi empêcherait-elle l'autre qui la faisait avancer vers la main droite, vu qu'elle ne lui est aucunement opposée en ce sens-là ([93]). Pour trouver donc justement vers quel côté cette balle doit retourner, décrivons un cercle du centre B, qui passe par le point A, et disons qu'en autant de temps qu'elle aura mis à se mouvoir depuis A jusques à B, elle doit infailliblement retourner depuis B jusques à quelque point de la circonférence de ce cercle, d'autant que tous les points qui sont aussi distants de celui-ci B qu'en est A se trouvent en cette circonférence et que nous supposons le mouvement de cette balle être toujours également vite ([94]). Puis, afin de savoir précisément auquel de tous les points de cette circonfé-

([93]) Il y a deux choses dans ces raisonnements : d'abord l'idée qu'il faut une cause étrangère pour modifier un mouvement (c'est l'indestructibilité du mouvement), ensuite une première idée de *l'indépendance des effets des forces*. Il n'est pas besoin d'insister sur le fait que ces affirmations ne sont nullement évidentes, comme Descartes semble le dire.

([94]) Parce que la *force du mouvement,* étant indestructible, n'est pas changée par le choc et que seule est changée sa détermination à tendre vers tel ou tel point.

rence elle doit retourner, tirons trois lignes droites AC, HB et FE, perpendiculaires sur CE, et en telle sorte qu'il n'y ait ni plus ni moins de distance entre AC et HB qu'entre HB et FE, et disons qu'en autant de temps que la balle a mis à s'avancer vers le côté droit, depuis A, l'un des points de la ligne AC, jusques à B, l'un de ceux de la ligne HB, elle doit aussi s'avancer depuis la ligne HB jusques à quelque point de la ligne FE; car tous les points de cette ligne FE sont autant éloignés de HB en ce sens-là l'un comme l'autre et autant que ceux de la ligne AC, et elle est aussi déterminée à avancer vers ce côté-là qu'elle a été auparavant. Or est-il qu'elle ne peut arriver en même temps en quelque point de la ligne FE et ensemble à quelque point de la circonférence du cercle AFD, si ce n'est au point D ou au point F, si bien que, la terre l'empêchant de pousser vers D, il faut conclure qu'elle doit aller infailliblement vers F.

Le principal intérêt du passage que nous venons de citer nous semble être dans l'apparition du principe de l'indépendance des effets des forces et de la composition des mouvements que Descartes nous paraît avoir aperçu aussi bien que Galilée, et dans l'idée que certaines causes modifiant le mouvement sont sans action sur la *force* de ce mouvement (note 91). Sur l'indestructibilité du mouvement, les passages suivants des *Principes* sont plus caractéristiques ([95]).

Si, au lieu de nous arrêter à ce qui n'a point d'autre fondement que l'usage ordinaire, nous désirons savoir ce que c'est que le Mouvement selon la vérité, nous dirons, afin de lui attribuer une nature qui soit déterminée, qu'il est le transport d'une partie de la matière ou d'un corps du voisinage de ceux qui le touchent immédiatement, et que nous considérons comme en repos, dans le voisinage de quelques autres.

....

J'ai dit que le transport du corps se fait du voisinage de ceux qui le touchent dans le voisinage de quelques autres, et non pas d'un lieu dans un autre, parce que le lieu peut être pris en plu-

---

([95]) Les *Principes* ont été publiés par Descartes en latin, en 1644. Ils ont été traduits, du vivant même de Descartes, en 1647 par l'abbé Picot. C'est cette traduction, revue plus tard par Clerselier, que nous citons.

sieurs façons qui dépendent de notre pensée.... Mais quand nous prenons le mouvement pour le transport d'un corps qui quitte le voisinage de ceux qui le touchent, il est certain que nous ne saurions attribuer à un même mobile plus d'un mouvement, à cause qu'il n'y a qu'une certaine quantité de corps qui le puissent toucher en même temps.

....

Nous ne saurions concevoir que le corps AB soit transporté du voisinage du corps CD, que nous ne sachions aussi que le corps CD est transporté du voisinage du corps AB.... Nous ne ferons pas de difficulté de dire qu'il y a tout autant de mouvement en l'un comme en l'autre.

....

Mais encore que chaque corps en particulier n'ait qu'un seul mouvement qui lui soit propre, à cause qu'il n'y a qu'une certaine quantité de corps qui le touchent et qui soient en repos à son égard; toutefois, il peut participer à une infinité d'autres mouvements, en tant qu'il fait partie de quelques autres corps qui se meuvent diversement. Par exemple, si un marinier se promenant dans son vaisseau porte sur soi une montre, bien que les roues de la montre n'aient qu'un mouvement unique qui leur soit propre, il est certain qu'elles participent aussi à celui du marinier qui se promène..., à celui du vaisseau et même à celui de la mer..., et à celui de la Terre, et bien qu'il soit vrai que tous ces mouvements sont dans les roues de la montre, néanmoins..., il suffira que nous considérions en chaque corps celui qui est unique et duquel nous pouvons avoir une connaissance certaine.

....

Dieu, par sa toute puissance, a créé la matière avec le mouvement et le repos de ses parties, et conserve maintenant en l'univers, par son concours ordinaire..., autant de mouvement et de repos qu'il a mis en le créant.... Lorsqu'une partie de la matière se meut deux fois plus vite qu'une autre et que cette autre est deux fois plus grande que la première, nous devons penser qu'il y a tout autant de mouvement dans la plus petite que dans la plus grande, et que, toutes fois et quantes que le mouvement d'une partie diminue, celui de quelque autre partie augmente à proportion ([96]).

....

([96]) Cette mesure du mouvement coïncide, autant qu'il est possible pour une

[Comme application de cette loi, Descartes indique le fait que le mouvement d'un corps est rectiligne uniforme s'il n'est troublé par aucune cause étrangère et les règles qui président, selon lui, au choc des corps ([97])].

De cela aussi que Dieu n'est point sujet à changer et qu'il agit toujours de même sorte, nous pouvons parvenir à la connaissance de certaines règles que je nomme les *lois de la nature*.... La première est que chaque chose en particulier continue d'être en même état autant qu'il se peut et que jamais elle ne le change que par la rencontre des autres. Ainsi nous voyons tous les jours que lorsque quelque partie de cette matière est carrée, elle demeure toujours carrée s'il n'arrive rien d'ailleurs qui change sa figure, et que, si elle est en repos, elle ne commence point à se mouvoir de soi-même : mais lorsqu'elle a commencé une fois de se mouvoir, nous n'avons aussi aucune raison de penser qu'elle doive jamais cesser

---

époque où la notion de masse n'était pas très précise, avec ce que nous appelons la *quantité de mouvement*.

Quant à la manière dont Descartes pose *a priori* la conservation de la quantité de mouvement, elle est sans doute fort peu scientifique, mais elle est pourtant intéressante. Au fond, il faut y voir l'affirmation qu'il existe *des lois*. S'il existe seulement une loi s'exprimant par une équation mathématique, il y a quelque chose qui demeure constant dans le mouvement, car cette équation peut toujours s'écrire en mettant une constante dans le second membre. L'affirmation de Descartes nous paraît donc devoir être rapprochée, si différente qu'elle en soit dans la forme, d'un passage célèbre de M. Poincaré, relatif au principe de la conservation de l'énergie. Pour ce savant, le seul énoncé général du principe de la conservation de l'énergie est celui-ci : « Il y a quelque chose qui demeure constant. » Mais, dans l'hypothèse déterministe, le cours de l'univers est défini par des équations différentielles; toute intégrale de ces équations donne une expression qui reste constante; « si nous disons alors qu'il y a quelque chose qui demeure constant, nous ne faisons qu'énoncer une tautologie » (*Thermodynamique,* Préface).

Maintenant il est certain que c'est tout à fait arbitrairement, et inexactement, que Descartes prend pour ce quelque chose la quantité de mouvement.

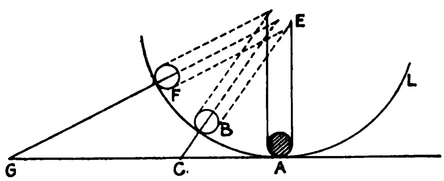
([97]) Descartes a très bien mis en lumière, dans le passage cité, la relativité de la notion de mouvement. Mais alors comment faut-il entendre sa loi de l'indestructibilité du mouvement? Pour être logique, il faudrait, semble-t-il, l'appliquer à ce qu'il a appelé plus haut le *mouvement propre* des corps. Or, non seulement cela paraît difficile, mais encore ce n'est pas ce qu'il fait lui-même : l'usage qu'il en fait pour affirmer que le mouvement d'un corps est rectiligne et uniforme en l'absence de toute perturbation étrangère suppose, en effet, la notion de mouvement absolu.

Les idées de Descartes manquaient donc ici de précision. On remarquera aussi que ses règles sur le choc, qu'il prétend tirer rigoureusement de ses principes, non seulement sont en général fausses, mais encore ne sont nullement une conséquence obligée desdits principes.

de se mouvoir de même force pendant qu'elle ne rencontre rien qui retarde ou qui arrête son mouvement; de façon que si un corps a commencé une fois de se mouvoir, nous devons conclure qu'il continue peu après de se mouvoir et que jamais il ne s'arrête de soi-même....

La seconde loi que je remarque en la nature est que chaque partie de la matière en son particulier ne tend jamais à se mouvoir suivant des lignes courbes, mais suivant des lignes droites.... Cette règle, comme la précédente, dépend de ce que Dieu est immuable et qu'il conserve le mouvement en la matière pour une opération très simple; car il ne le conserve pas comme il a pu être quelque temps auparavant, mais comme il est précisément au même instant qu'il le conserve ([98]). Et, bien qu'il soit vrai que le mouvement ne se fait pas en un instant, néanmoins il est évident que tout corps qui se meut est déterminé à se mouvoir suivant une ligne droite, et non pas suivant une circulaire; car lorsque la pierre A tourne dans la fronde EA suivant le cercle ABF, dans

Fig. 44.



l'instant même qu'elle est au point A, elle est déterminée à se mouvoir vers quelque côté, à savoir vers C, suivant la ligne droite AC, si l'on suppose que c'est celle-là qui touche le cercle; mais on ne saurait feindre qu'elle soit déterminée à se mouvoir circulairement, parce que, encore qu'elle soit venue de L vers A suivant une ligne courbe, nous ne concevons point qu'il y ait aucune partie de cette courbure en cette pierre lorsqu'elle est au point A; et nous en sommes assurés par l'expérience, parce que cette pierre avance tout droit vers C lorsqu'elle sort de la fronde et ne tend, en aucune façon, à se mouvoir vers B: ce qui nous fait voir manifestement que tout corps qui est mû en rond tend sans cesse à s'éloigner du centre du cercle qu'il décrit; et nous le pouvons

([98]) A rapprocher du passage de Galilée, signalé par la note 106.

même sentir de la main pendant que nous faisons tourner cette pierre dans cette fronde, car elle tire et fait tendre la corde pour s'éloigner directement de notre main.

[Sur le choc des corps, Descartes donne sept règles. A titre d'exemples, en voici trois.

Le corps B et le corps C, égaux, allant dans le même sens, B un peu plus vite que C, aux termes de la troisième règle, B et C, après le choc, iront ensemble avec une vitesse égale à la moyenne des vitesses avant le choc (99).

La quatrième règle est relative au choc d'un corps C en repos par un corps B plus petit que lui : C restera immobile et B rejaillira.

Voici enfin la sixième : si le corps C est en repos et est choqué par un corps B qui lui est égal, B pousse C et en même temps C le fait rejaillir; si B a une vitesse 4, il donne une vitesse 1 à C et avec la vitesse 3 il retourne en arrière.] Car, étant nécessaire ou que B pousse C sans rejaillir et qu'ainsi il lui transfère deux degrés de son mouvement, ou bien qu'il rejaillisse sans le pousser, et que, par conséquent, il retienne ces deux degrés de vitesse avec les deux autres qui ne peuvent lui être ôtés, ou bien qu'il rejaillise en retenant une partie de ces deux degrés et qu'il le pousse en lui transférant l'autre partie, il est évident que, puisqu'ils sont égaux et ainsi qu'il n'y a pas plus de raison pourquoi il doive rejaillir que pousser C, ces deux effets doivent être également partagés, c'est-à-dire que B doit transférer à C l'un de ces deux degrés de vitesse et rejaillir avec l'autre (100).

. . . .

Il arrive souvent que l'expérience peut sembler d'abord répugner aux règles que je viens d'expliquer, mais la raison en est évidente, car elles présupposent que les deux corps B et C sont parfaitement durs et tellement séparés de tous les autres qu'il n'y en a aucun autour d'eux qui puisse aider ou empêcher leur mouvement et nous n'en voyons point de tels en ce monde (101).

(99) Cette règle serait exacte, appliquée aux corps parfaitement mous.

(100) On voit que, à travers ses erreurs, Descartes est guidé par l'idée de la conservation de la quantité de mouvement, mais de la quantité de mouvement en valeur absolue, sans signe. On voit aussi qu'il est difficile de trouver ici une application de la notion de *mouvement propre* d'un corps, telle qu'elle est posée plus haut.

(101) Ces lignes sont très caractéristiques de la pensée de Descartes. Il savait, aussi bien que quiconque, observer la nature et raisonner exactement de ses lois.

Nous venons d'assister, dans ce qui précède, à la naissance de l'idée d'*inertie*.

Nous terminerons en signalant que cette idée et l'explication de la chute accélérée des graves par l'accumulation des actions de la pesanteur ont été adoptées et développées très heureusement par Gassendi (1592-1656) en 1640 (*Epistolæ tres de motu impresso a motore translato*) et en 1645 (*Lettre au P. Cazrée*).

§ 2. — Accélération et force statique.

La dynamique de Galilée, bien que n'ignorant pas l'idée de force des corps en mouvement ou d'inertie, n'est point véritablement fondée sur elle. On doit la considérer comme formée par l'union de la notion cinématique d'accélération et de la notion statique de force. Le savant florentin l'a créée à propos du problème du mouvement des corps pesants. Elle est exposée dans un de ses chefs-d'œuvre, les *Discorsi et dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze attenanti alla Mecanica et i movimenti locali.* Dans la première édition de cet Ouvrage, parue à Leyde en 1638, le mouvement des corps pesants est étudié presque exclusivement au point de vue cinématique; l'idée de force statique a été introduite par une importante scholie ajoutée par Galilée en 1655 dans l'édition de Bologne.

L'Ouvrage est sous forme de dialogue et divisé en quatre journées. Les deux premières journées sont consacrées à la résistance des matériaux, les deux dernières au mouvement local. Nos citations seront empruntées à la troisième et à la quatrième. Trois interlocuteurs, Salviati, Sagredo et Simplicio, lisent ensemble l'Ouvrage d'un auteur de leurs amis, écrit en latin, et discutent en italien à son sujet.

Mais il avait ensuite la prétention de tout reconstruire rationnellement, par les principes de sa philosophie; il considérait que dans la pensée seule était le principe de la certitude. On sait qu'il ne voulait admettre en Physique que les principes reçus en Géométrie. Aussi en venait-il, par exagération de système, à négliger l'expérience.

Troisième journée. — Du mouvement local.

[Il est d'abord question du mouvement uniforme. Galilée s'occupe ensuite du mouvement naturellement accéléré.]

L'Ouvrage. — Nous avons considéré dans le Livre précédent ce qui se passe dans le mouvement uniforme; étudions maintenant le mouvement accéléré. Et d'abord, il convient de rechercher et de développer une définition s'appliquant surtout à celui qu'on rencontre dans la nature. On a parfaitement le droit, en effet, d'imaginer arbitrairement une loi de mouvement et d'en considérer les conséquences (c'est ainsi que les auteurs qui ont imaginé les hélices ou les conchoïdes, courbes engendrées par des mouvements qu'on ne rencontre pas dans la nature, n'en ont pas moins acquis la renommée à tirer, des hypothèses faites, la démonstration de leurs propriétés): mais la nature présente une certaine loi d'accélération dans la descente des graves, et nous nous proposons d'étudier les propriétés de cette descente, pourvu que la définition que nous allons donner du mouvement accéléré s'accorde avec l'essence du mouvement naturellement accéléré. Nous croyons fermement avoir trouvé, après de longues réflexions, la définition convenable, et nous le croyons surtout parce que les propriétés démontrées par nous paraissent s'accorder très bien avec les phénomènes expérimentaux. En dernier lieu, nous avons été conduits comme par la main, dans la recherche de l'accélération naturelle, par l'observation de l'usage de la nature dans tous ses autres ouvrages, où elle a coutume d'employer des moyens immédiats, très simples et très faciles; en effet, personne ne croira, je pense, que la natation ou le vol puissent être réalisés par des procédés plus simples et plus faciles que ceux qu'emploient, d'instinct, les poissons ou les oiseaux. Par conséquent, quand je vois une pierre tomber en partant du repos et acquérir ensuite de nouveaux degrés de vitesse, pourquoi ne croirais-je pas que ces accroissements suivent la loi la plus simple et la plus banale ([102])? Si nous y

([102]) C'est là un des rares raisonnements de ce Traité qui ne soient pas modernes. Pour un moderne, il n'y a aucune raison de penser que la Nature procède par des lois simples. Le moderne n'en recherche pas moins la loi simple, mais il sait que cette nécessité lui est imposée plutôt par la tournure de son esprit que par les objets qu'il étudie.

D'ailleurs la simplicité du mouvement uniformément accéléré n'est pas si éviregardons attentivement, aucun accroissement ne nous paraîtra plus simple que celui qui se fait toujours de la même manière. Nous comprendrons facilement le sens de cette phrase en considérant la très grande affinité qui existe entre le temps et le mouvement : de même que l'égalité et l'uniformité du mouvement se définissent et se conçoivent par l'égalité des temps et des espaces (nous disons en effet qu'un mouvement est uniforme quand des espaces égaux sont parcourus dans des temps égaux), de même nous pouvons percevoir la simplicité dans les accroissements de vitesse par la même égalité des parties du temps, en concevant que le mouvement est accéléré uniformément et continuellement de la même manière quand, dans des temps égaux, il reçoit des accroissements égaux de vitesse. Dans ce mouvement, si l'on considère des éléments de temps égaux à partir de l'instant où le mobile quitte le repos et commence à descendre, le degré de vitesse acquis dans les deux premiers éléments de temps sera double de celui que le mobile aura acquis dans le premier seul; le degré acquis dans les trois premiers en sera le triple, le degré acquis dans les quatre premiers en sera le quadruple.... Ainsi il ne paraît en rien contraire à la raison de supposer que l'accroissement de la vitesse se fait comme celui du temps. On peut donc accepter la définition suivante pour le mouvement dont nous allons traiter : j'appelle *mouvement également et uniformément accéléré* celui qui, partant du repos, reçoit des degrés égaux de vitesse (*momenta celeritatis*) dans des temps égaux....

[*Sagredo* fait à cette définition l'objection suivante :]

J'imagine un mobile pesant descendant et partant du repos, c'est-à-dire d'un état sans aucune vitesse; j'imagine qu'il entre en mouvement et que sa vitesse croisse comme le temps à partir de l'instant initial; il aura acquis, par exemple, en huit pulsations ([103]), 8 degrés de vitesse, dont 4 seulement l'auront été en quatre pulsations, 2 dans deux, 1 dans une. Le temps étant divisible à l'infini, il s'ensuit que, en diminuant toujours dans le même rapport la vitesse précédente, il n'y aura aucun degré de vitesse,

dente de soi que cette loi s'impose sans conteste comme plus simple que toutes les autres. On verra plus loin (passage signalé par la note 108) que Galilée lui-même a commencé par supposer que, dans le mouvement des graves, les vitesses croissent comme les espaces parcourus.

([103]) Il s'agit de la durée du battement du pouls.

si petit qu'il soit, c'est-à-dire aucune lenteur, si grande soit-elle, qui ne se soit trouvée dans le mobile depuis la lenteur infinie, c'est-à-dire depuis le repos. Par conséquent, si la vitesse que le corps possède au bout de la quatrième pulsation est telle que, restant dès lors uniforme, elle lui fasse parcourir 2 milles en 1 heure, comme celle qu'il a au bout de la seconde pulsation correspondrait à 1 mille à l'heure, il faut dire que, à des instants de plus en plus voisins de la mise en mouvement, le mobile allait si lentement que, s'il avait continué à se mouvoir avec la même lenteur, il n'aurait parcouru 1 mille ni en 1 heure, ni en 1 jour, ni en 1 année, ni en 1000; il n'aurait même pas parcouru la longueur d'un empan dans un temps encore plus grand. Cette circonstance, à ce qu'il semble, peut assez mal s'imaginer, parce que nos sens nous montrent qu'un grave tombant atteint très vite une grande vitesse.

Salviati. — C'est là une des difficultés qui m'ont également donné à réfléchir au début. Mais je l'ai résolue peu après, et cela grâce précisément à l'expérience même qui l'a fait naître dans votre esprit. L'expérience montre, dites-vous, que, à peine parti du repos, le grave atteint une vitesse très notable; je dis, au contraire, que cette même expérience apprend que les premiers *impetus* ([104]) d'un corps qui tombe, même très lourd, sont très lents et très faibles. Posez un grave sur une matière qui cède, et lâchez-le jusqu'à ce qu'il presse autant qu'il le peut par sa simple gravité : il est manifeste que, si on l'élève d'une coudée ou de deux, et si on le laisse ensuite tomber sur la même matière, il produira, par la percussion, une nouvelle pression, supérieure à celle qu'il produisait d'abord par son simple poids; l'effet sera une combinaison du mobile ([105]) tombant et de la vitesse gagnée dans la chute, et il sera d'autant plus grand que la percussion proviendra d'une plus grande hauteur, c'est-à-dire que la vitesse de choc sera plus grande. Par conséquent, la vitesse d'un grave tombant peut, sans erreur, être estimée par la qualité et la quantité de la percussion. Mais dites-moi, Messieurs; soit une masse qui, tombant sur un pieu d'une hauteur de 4 coudées, le fiche en terre par exemple de 4 doigts; venant d'une hauteur de

([104]) J'emploie le mot latin *impetus* pour traduire l'italien *impeto*.

([105]) C'est-à-dire de la *grandeur du mobile,* de ce que nous appelons aujourd'hui la *masse.*

2 coudées, elle l'enfonce moins; elle l'enfonce moins encore en tombant d'une coudée et moins encore en tombant d'un empan; finalement, si elle tombe de la hauteur d'un doigt, que fera-t-elle de plus que si elle était posée sans choc? Assurément très peu de chose, et son action serait tout à fait imperceptible si on l'avait élevée à une hauteur égale à l'épaisseur d'une feuille. Et puisque l'effet du choc se règle d'après la vitesse du même corps choquant, qui doutera que cette vitesse est très faible, dont l'effet est imperceptible? On reconnaît là la force de la vérité, puisque cette même expérience, qui paraissait au premier abord démontrer une chose, mieux considérée assure du contraire. Mais sans avoir recours à une telle expérience (qui, sans doute, est très concluante), il me semble qu'il n'est pas difficile de pénétrer cette vérité par le simple raisonnement. Prenons une pierre lourde, soutenue en repos dans l'air; enlevons son support et mettons-la en liberté; comme elle est plus lourde que l'air, elle descend vers le bas, non pas d'un mouvement uniforme, mais d'abord lentement et en accélérant continuellement sa marche ensuite. La vitesse pouvant être augmentée ou diminuée à l'infini, quelle raison me persuadera que ce mobile, partant d'une lenteur infinie (c'est le repos), atteint immédiatement une vitesse de 10 degrés plutôt qu'une de 4, qu'une de 2, qu'une d'un, qu'une d'un demi, qu'une d'un centième de degré, et ainsi de suite à l'infini. Écoutez, je vous prie. Je ne crois pas que vous refusiez de me concéder que l'acquisition des degrés de vitesse par une pierre tombant, et partant du repos, peut se faire de la même manière que la diminution et la perte de ces mêmes degrés quand, sous l'action d'une impulsion, la pierre est lancée en haut à la même hauteur. Or, dans ce dernier cas, il ne me semble pas qu'on puisse douter que, dans la diminution, la vitesse de la pierre montant, qui va s'éteindre entièrement, ne pourra pas parvenir à l'état de repos sans passer par tous les degrés de lenteur.

Simplicio. — Mais s'il y a une infinité de degrés de lenteur de plus en plus grands, jamais ils ne seront épuisés complètement; par conséquent le mobile ascendant n'atteindra jamais le repos, mais il se mouvra indéfiniment en ralentissant sans cesse, chose qu'on ne voit pas se produire.

Salviati. — Cela arriverait, signor Simplicio, si le mobile se tenait pendant quelque temps à chaque degré de vitesse; mais il ne fait qu'y passer sans s'attarder plus d'un instant; et, comme tout espace de temps, si petit qu'il soit, contient une infinité d'instants, il y en a assez pour correspondre à l'infinité des degrés de la vitesse décroissante. Que le grave ascendant ne conserve pas pendant un temps fini le même degré de vitesse, cela se voit comme suit. S'il y avait un espace de temps au premier et au dernier instant duquel le mobile se trouvât avoir le même degré de vitesse, il pourrait, avec ce second degré, être élevé de la même hauteur qu'il a franchie en passant du premier au second; il passerait de même du second au troisième, et, finalement, il continuerait son mouvement uniforme à l'infini ([106]).

[Segredo et Simplicio discutent quelque temps sur l'accélération des graves montant ou descendant, conçue comme résultant de la superposition des actions de la pesanteur et de l'impulsion primitivement donnée, cette dernière allant progressivement en s'affaiblissant. Mais Salviati reprend.]

Salviati. — Il ne me paraît pas opportun de rechercher, pour le moment, quelle est la cause de l'accélération du mouvement naturel. Sur ce sujet, des opinions diverses ont été émises par divers philosophes; les uns l'ont attribuée au rapprochement du centre, les autres au fait qu'il reste, à mesure que le corps avance, une épaisseur de moins en moins grande du milieu à traverser, d'autres à une certaine impulsion du milieu ambiant qui, en se reconstituant derrière le mobile, le pousse et le fait avancer continuellement ([107]). Ces suppositions (*fantasie*) et d'autres encore auraient besoin d'être examinées et il serait peu profitable de la faire. Pour le moment, il suffit à notre auteur que nous entendions qu'il veut rechercher et démontrer quelques propriétés d'un mouvement accéléré (quelle que soit la cause de son accélération) dans lequel les valeurs (*momenti*) de la vitesse croissent depuis le départ du repos dans la proportion très simple où croît le temps,

---

([106]) On voit apparaître, dans ce raisonnement, la première idée de ce que Robin a appelé le *principe d'inhérédité*. On admet que l'état futur du Monde ne dépend que de son état actuel et de ses vitesses actuelles, c'est-à-dire de l'état immédiatement antérieur. En langage mathématique, les lois de la Mécanique s'expriment, quand on prend pour fonctions inconnues les coordonnées des points et pour variable le temps, par des équations différentielles du second ordre (*voir* notes 98 et 185).

([107]) Nous avons parlé de ces diverses explications au début du paragraphe 1 du présent Chapitre.

c'est-à-dire dans lequel des temps égaux apportent des accroissements égaux de vitesse. Et s'il arrive que les circonstances qui seront démontrées se rencontrent dans la descente et l'accélération naturelles des graves, nous pourrons affirmer que la définition choisie s'applique au mouvement des graves et que leur accélération croît comme le temps et la durée du mouvement.

Sagredo. — Autant que je comprends, il me paraît que nous aurions pu, avec une clarté peut-être plus grande et sans changer notre conception, poser la définition suivante : « Le mouvement uniformément accéléré est celui où la vitesse croît comme l'espace parcouru; ainsi, par exemple, le degré de vitesse acquis par le mobile dans une chute de 4 coudées est double de celui qui est acquis dans une chute de 2 coudées; ce dernier est double de celui qui est acquis dans le parcours de la première coudée. »....

Salviati. — C'est une consolation pour moi que d'avoir un tel compagnon d'erreur. Et je puis vous dire que votre raisonnement a tant de vraisemblance et de probabilité que notre auteur lui-même m'a avoué, quand je le lui ai présenté, être resté quelque temps dans la même erreur.... Mais cette affirmation est fausse et impossible, autant qu'il l'est qu'un mouvement soit instantané. En voici une démonstration très claire. Si les vitesses sont dans le même rapport que les espaces parcourus ou à parcourir, les espaces seront parcourus dans des temps égaux. Si donc les vitesses avec lesquelles le grave a parcouru l'espace de 4 coudées ont été doubles de celles avec lesquelles il a parcouru les deux premières coudées (comme sont doubles les espaces), les durées de parcours ont été égales; mais que le même mobile parcoure les 4 ou les 2 coudées dans le même temps, cela ne peut avoir lieu que si le mouvement est instantané. Or nous voyons que la chute d'un grave dure un certain temps, et qu'il parcourt les deux premières coudées en moins de temps que les quatre. Il est donc faux que sa vitesse croisse comme l'espace ([108])....

([108]) Cette intégration de Galilée n'est pas très exacte. Elle contient néanmoins quelque vérité. Si les vitesses $\frac{ds}{dt}$ croissaient comme les espaces s, on aurait $\frac{ds}{dt} = ks$, d'où $s = s_0 e^{kt}$; il faudrait, pour qu'il y ait réellement mouvement, que, pour $t = 0$, s ne fût pas nul, ce qui est contraire à l'hypothèse, à moins d'admettre que, dans le premier instant, le mobile parcourt instantanément la longueur s_0.

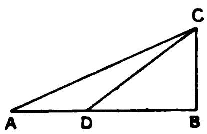
Sagredo. — Reprenant le fil de notre discours, il me semble que nous avons fermement établi la définition du mouvement uniformément accéléré, dont traite ce qui suit : « On appelle *mouvement également et uniformément accéléré* celui qui, partant du repos, acquiert dans des temps égaux des moments [*momenta* (latin)] égaux de vitesse. »

Salviati. — Cette définition posée, l'auteur postule et admet pour vrai un seul principe.

« J'admets que les degrés de vitesse acquis par le même mobile sur des plans diversement inclinés sont égaux lorsque les hauteurs des plans le sont. »

L'auteur appelle *hauteur d'un plan incliné* la perpendiculaire abaissée de l'extrémité supérieure du plan sur l'horizontale menée par l'extrémité inférieure. Si, par exemple, la ligne AB est paral-

Fig. 45.

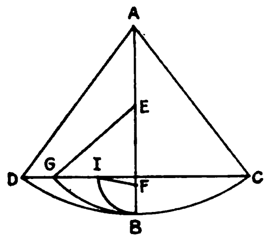


lèle à l'horizon et si, sur elle, sont inclinés les deux plans CA, CD, l'auteur donne à la perpendiculaire CB, tombant sur l'horizontale BA, le nom de *hauteur des plans* CA, CD et il suppose que, le même mobile descendant sur les plans inclinés CA, CD, les degrés de vitesse acquis par lui aux extrémités A, D sont égaux, parce que la hauteur des plans est la même CB. Et il faut entendre aussi que ce serait ce même degré de vitesse que le même mobile tombant du point C aurait en B.

Sagredo. — Vraiment, il me paraît qu'une telle hypothèse a tant de probabilité qu'elle mérite d'être accordée sans controverse, étant entendu toujours que tous les empêchements accidentels et extérieurs sont écartés, que les plans sont bien solides et polis, que le mobile est parfaitement rond, de sorte que plan et mobile ne présentent pas de rugosité. Tous ces obstacles, tous ces empêchements étant écartés, les lumières naturelles me montrent sans difficulté qu'une balle pesante et parfaitement ronde descendant par les lignes CA, CD, CB arrivera aux extrémités A, D, B avec des *impetus* égaux.

Salviati. — Vous trouvez cela très probable ; mais, ajoutant à la vraisemblance, je veux, par une expérience, accroître tellement cette probabilité qu'il s'en faudra de bien peu que la chose ne soit démontrée. Imaginez que cette feuille soit un mur vertical, qu'un clou y soit planté auquel soit suspendue une balle de plomb, d'une once ou deux, par un fil AB long de deux ou trois coudées et perpendiculaire à l'horizon. Traçons sur le mur une horizontale CD coupant d'équerre le fil AB, lequel est à une distance d'environ

Fig. 46.



deux doigts du mur. Écartons le fil AB et la balle dans la position AC et lâchons la balle. Nous verrons celle-ci descendre en décrivant l'arc CB et dépasser l'extrémité B de telle sorte qu'elle remontera, suivant BD, à peu près jusqu'à la ligne tracée CD ; il s'en faudra toutefois d'un petit intervalle qu'elle n'y arrive, circonstance due précisément à la résistance de l'air et du fil. De là nous pouvons conclure, en toute vérité, que l'*impetus* acquis par la balle au point B dans sa descente le long de l'arc CB est tel qu'il suffit à la faire remonter, le long d'un arc identique BD, à la même altitude. Cette expérience faite et refaite, fixons dans le mur, tout contre la verticale AB, en E, par exemple, ou en F, un clou qui fasse saillie de cinq ou six doigts; le fil AC tournant comme tout à l'heure, la balle décrira l'arc CB; quand elle arrivera en B, le fil accrochera le clou E et la balle sera obligée de parcourir la circonférence BG décrite de E comme centre; nous verrons alors ce que pourra produire le même *impetus* qui, acquis à l'extrémité B, peut remonter le mobile suivant l'arc BD jusqu'à la hauteur de l'horizontale CD. Eh bien, messieurs, vous verrez avec plaisir la balle atteindre l'horizontale au point G; la même chose arriverait si le clou était planté plus bas, en F par exemple; la balle décrirait alors l'arc BI et terminerait toujours son ascension à la ligne CD, et si le clou était trop bas pour que la longueur du fil permît à la balle d'atteindre la hauteur de CD (cela arriverait si le clou était plus près de B que de CD), le fil s'enroulerait autour du clou. Cette expérience ne permet pas de douter de la vérité du principe supposé. Les deux arcs CB, DB étant égaux et semblablement placés, le moment (*momento*) acquis dans la descente sur CB est le même que celui qui serait acquis suivant DB; mais le moment acquis en B suivant CB est capable de remonter le même mobile suivant BD; donc le moment acquis suivant DB est égal à celui qui remonterait le même mobile le long du même arc de B en D, de sorte que, d'une manière générale, le moment acquis dans la chute suivant un arc quelconque est égal à celui qui peut faire rebondir le même mobile le long du même arc. Mais tous les moments qui font rebondir le mobile le long de tous les arcs BD, BG, BI sont égaux puisqu'ils sont faits du moment acquis dans la descente CB, comme le montre l'expérience. Donc tous les moments acquis en descendant suivant les arcs DB, GB, IB sont égaux.

Sagredo. — Ce raisonnement me paraît concluant et l'expérience est si bien accommodée à la vérification du postulat que celui-ci mérite d'être admis comme s'il était démontré.

Salviati. — Je ne veux pas, Sr Sagredo, que nous supposions ici plus que nous ne le devions; d'autant plus que le postulat admis va nous servir principalement dans les mouvements se faisant sur des surfaces planes et non sur des surfaces courbes, sur lesquelles l'accélération se fait d'une manière très différente de celle que nous supposons sur les plans. Si l'expérience précédente nous montre que la chute le long de l'arc CB confère au mobile un moment tel qu'il remonte ensuite à la même hauteur par l'un quelconque des arcs BD, BG, BI, nous ne pouvons pas montrer avec la même évidence que la même chose arrivera quand une balle parfaite descendra le long de plans inclinés tracés suivant la corde de ces mêmes arcs; au contraire, il est croyable que, les plans formant un angle au point B, la balle, descendue le long de la corde CB, rencontrant un obstacle à l'arrivée sur les plans qui remontent suivant les cordes BD, BG, BI, perdra, dans le rebondissement, une partie de son *impetus* et ne pourra pas remonter à la hauteur de la ligne CD. Mais, l'obstacle enlevé qui nuit à l'expérience, il me paraît bien que l'esprit continue à concevoir que l'*impetus* (lequel en effet renferme la force de toute la chute) serait capable de remonter le mobile à la même hauteur. Prenons donc pour le moment cette affirmation comme un postulat. Sa vérité absolue sera établie ultérieurement quand nous verrons les conclusions assises sur cette hypothèse être ponctuellement conformes à l'expérience. L'auteur, ayant admis ce seul principe, passe aux propositions complètement démontrées.

[Ces propositions sont les principales propriétés du mouvement uniformément accéléré : la proportionnalité des espaces aux carrés des temps, le fait que les espaces parcourus dans des temps égaux successifs croissent comme les nombres impairs. Elles constituent les propositions I et II du Traité] ([109]).

Simplicio. — Je suis assez bien convaincu que les choses se passeront de la sorte, une fois posée et reçue la définition du mouvement uniformément accéléré. Mais que telle soit l'accélération dont use la nature dans la chute des graves, c'est un point sur lequel je conserve des doutes; pour mon intelligence et pour celle de bien d'autres qui me ressemblent, il me paraît qu'il serait opportun ici d'indiquer une de ces expériences qui, a-t-on dit, sont nombreuses et qui, dans des cas divers, s'accordent avec les conclusions démontrées.

Salviati. — Vous faites là, en homme de science, une demande bien raisonnable et conforme à la coutume et aux convenances des sciences qui appliquent les démonstrations mathématiques à des conclusions concernant la nature (c'est le cas, par exemple, de la Perspective, de l'Astronomie, de la Mécanique, de la Musique, etc.); les auteurs y demandent à l'accord avec l'expérience la confirmation de leurs principes, qui sont le fondement de toute la construction ultérieure .... Aussi notre auteur n'a-t-il pas négligé de recourir à l'expérience ....

Dans l'épaisseur d'une règle, c'est-à-dire d'une planche de bois longue de 12 coudées environ, large d'une demi-coudée et épaisse de 3 doigts, était creusé un canal large d'un peu plus d'un doigt. Il était tracé très droit et, pour qu'il fût bien poli et bien lisse, il était recouvert intérieurement d'une feuille de parchemin aussi

([109]) Naturellement, le postulat qui vient d'être énoncé n'intervient pas encore dans ces démonstrations.

lustrée que possible. On faisait descendre dans le canal une bille de bronze très dur, bien ronde et bien polie. La règle, faite comme on vient de le dire, avait une de ses extrémités élevée d'une coudée ou deux, arbitrairement, au-dessus du plan horizontal. On laissait descendre, comme je l'ai dit, la bille par le canal et l'on notait, de la manière que je vais dire, la durée de toute la course; on répétait le même essai de nombreuses fois pour bien s'assurer de la valeur de cette durée, et, dans cette répétition, on n'a jamais trouvé de différence supérieure au dixième d'une pulsation. Cette opération faite et établie avec précision, nous fîmes descendre la même bille sur le quart seulement de la longueur du canal; la durée de la chute, mesurée, se trouva toujours rigoureusement égale à la moitié de l'autre.

.... L'expérience ayant bien été répétée cent fois, toujours les espaces parcourus se sont trouvés dans le rapport des carrés des temps, et cela quelle que fût l'inclinaison du plan, c'est-à-dire du canal où descendait la bille. Nous avons observé aussi que les durées de chute sur des plans diversement inclinés étaient dans la proportion que leur assignaient les démonstrations de notre auteur ([110]). Pour ce qui est de la mesure du temps, un grand seau plein d'eau était suspendu en l'air; un petit orifice percé dans son fond laissait échapper un petit filet d'eau que l'on recevait dans un petit vase pendant tout le temps de la descente de la bille le long du canal ou de ses parties; les quantités d'eau ainsi recueillies étaient pesées sur une balance très exacte; les différences et les rapports de leurs poids donnaient les différences et les rapports des temps et cela avec une telle justesse que, comme je l'ai dit, ces opérations maintes et maintes fois répétées n'ont jamais donné une différence notable.

....

L'Ouvrage. — Scholie. — On doit entendre que ce qui a été démontré pour les chemins parcourus sur la verticale est encore vrai sur des plans d'inclinaison quelconque. En effet, on a supposé que, sur de tels plans, le degré d'accélération suit la même loi, qui est celle de la croissance du temps, c'est-à-dire celle de la suite des nombres entiers ([111]).

([110]) Démonstrations rapportées dans ce qui va suivre.

([111]) Ainsi Galilée ne se sert pas de son postulat pour démontrer que la chute sur les plans inclinés est uniformément accélérée : il l'admet. Il pourrait cependant faire une démonstration. Le lecteur la fera facilement.

Salviati [112]. — Ici je voudrais, Sr Sagredo, qu'il me fût permis, même au risque d'ennuyer le Sr Simplicio, de suspendre un moment notre lecture pour que je puisse développer, en m'appuyant sur ce que nous avons dit et démontré jusqu'ici ainsi que sur quelques conclusions mécaniques [113] enseignées antérieurement par notre académicien, tout ce que ma mémoire me permet d'ajouter pour une confirmation plus grande de la vérité du principe que nous avons étudié plus haut par des raisonnements probables et par l'expérience.

Et auparavant, il importe, pour aboutir à des conclusions géométriques, de démontrer un seul lemme élémentaire touchant la considération des *impetus* [114]....

Considérons en premier lieu comme un fait très connu que les moments ou les vitesses d'un même mobile sont différentes sur des plans différemment inclinés ; que le maximum a lieu sur la ligne verticale; que, sur les lignes inclinées, la vitesse diminue au fur et à mesure que la ligne s'écarte de la verticale, c'est-à-dire s'incline plus obliquement, et que, par conséquent, l'*impetus,* le *talento,* l'énergie, nous dirons le moment de descente (*momento del discendere*) est diminué, dans le mobile, par le plan sur lequel il s'appuie et descend.

Pour mieux nous rendre compte, soit la ligne AB verticale.

---

(112) C'est ici que commence l'addition de l'édition de Bologne.

(113) Le mot *mécanique* désigne, chez Galilée, les études sur les machines.

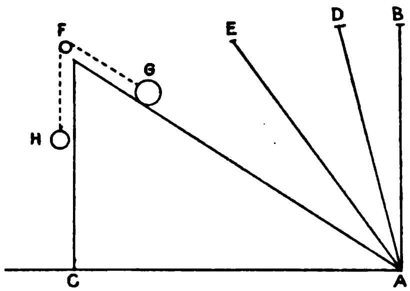
(114) Nous allons assister ici à un travail très intéressant se faisant dans la pensée de Galilée : l'analyse de la notion qu'il désigne par le mot d'*impetus,* qui lui apparaît d'abord sous une forme vague, puis se précise peu à peu, sans arriver, peut-être, à la précision parfaite.

Il y a analogie, dans l'origine de cette notion, avec celle de force des corps en mouvement, avec l'*impetus* de Léonard de Vinci et de Descartes. Galilée qualifie plus loin l'*impetus* d'énergie du mouvement. Mais l'analogie disparaît dès que l'analyse commence. Cette analyse est fondée sur l'idée très féconde, et véritablement *expérimentale,* de mesurer l'*impetus,* la tendance au mouvement, par la force statique qui peut s'y opposer.

Au début, Galilée semble confondre l'*impetus* avec la vitesse (*voir* par exemple le passage signalé par la note 104) ou, au moins, mesurer le premier par la seconde (*voir* les lignes qui suivent la présente note 114). Il y a peut-être là l'influence d'Aristote pour lequel force et vitesse se correspondent; il y a peut-être aussi l'influence de la notion de moment que Galilée a développée en statique dans les *Méchaniques.* Mais la pensée de Galilée, éclairée par la connaissance cinématique du mouvement uniformément accéléré, va se dégager de ces conceptions; la forme restera embarrassée et même obscure; le savant florentin n'arrive pas à faire correspondre rigoureusement la force statique à l'*accélération,* mais il montre certainement le chemin qui conduit à cette correspondance.

Inclinons-la ensuite diversement sur l'horizon comme en AD, AE, AF, etc. Je dis que l'*impetus* maximum et total du grave pour descendre a lieu sur la verticale BA, qu'il est moindre sur DA, moindre encore sur EA, qu'il va encore en diminuant quand on passe à la ligne la plus inclinée FA, et que finalement il est com-

Fig. 47.



plètement anéanti sur l'horizontale CA, où le mobile se trouve indifférent au mouvement et au repos et ne présente de lui-même aucune tendance à se mouvoir d'aucun côté ni aucune résistance a être mis en mouvement ([115]). En effet, de même qu'il est impossible qu'un grave ou un ensemble de graves se meuve naturellement vers le haut en s'éloignant du centre commun où tendent les choses pesantes, de même il est impossible qu'il se meuve spontanément si, dans son mouvement, son centre de gravité ne se rapproche pas du centre commun; donc, sur l'horizontale, qui s'étend sur une surface également distante dudit centre et qui est sans inclinaison, l'*impetus* ou le moment du mobile sera nul. Étant instruits de ce changement d'*impetus,* il faut maintenant que j'explique ce que notre académicien a jadis, dans un ancien Traité de Mécanique ([116]), composé à Padoue pour le seul usage de ses élèves, longuement et complètement prouvé à propos de l'origine et de la nature du merveilleux instrument de la vis. Pour savoir dans quelle proportion se fait ce changement d'*impetus* sur des plans diversement inclinés, par exemple sur AF, menons la hauteur de ce plan au-dessus de l'horizon, c'est-à-dire la ligne FC suivant laquelle l'*impetus* d'un grave et son moment de descente (*momento del discendere*) sont maxima, et cherchons

([115]) Voir *Les Méchaniques,* note 44.
([116]) *Voir* note 113. Il s'agit des *Méchaniques,* citées dans le Livre I.

dans quel rapport est ce moment avec le moment du même mobile sur la ligne inclinée FA. Je dis que ce rapport est le rapport inverse desdites longueurs, et c'est là le lemme qui doit précéder le théorème que j'espère ensuite pouvoir démontrer. Manifestement, aussi grand est l'*impetus* de descente d'un grave, aussi grande est la résistance ou la force minima qui suffit à l'empêcher ou à l'arrêter; pour mesurer cette force, cette résistance, je me servirai de la gravité d'un autre mobile. Imaginons que sur le plan FA repose un mobile G attaché à un fil qui passe sur F et supporte un poids H, et considérons que la chute de H, ou son élévation sur la verticale, est toujours égale à toute l'élévation ou à toute la chute de G le long du plan incliné AF, mais non pas à l'élévation ou à la chute verticale, la seule dans laquelle le mobile G (ou tout autre mobile) exerce sa résistance, comme il est évident. Dans le triangle AFC, le mouvement du mobile G, par exemple vers le haut de A en F, est composé du mouvement transversal et horizontal AC, et du mouvement vertical CF; or, pour ce qui est du déplacement horizontal, la résistance au mouvement est nulle, comme on l'a dit, parce que ce déplacement ne produit aucune diminution ni aucune augmentation de la distance au centre des choses pesantes, distance qui, sur une horizontale, se conserve toujours la même; par conséquent il reste que la résistance est due seulement au fait que le mobile doit gravir la verticale CF. Puis donc que le grave G, se mouvant de A en F, résiste seulement du fait de l'élévation verticale CF, mais que l'autre grave H descend suivant la verticale nécessairement de toute la longueur FA, et puisque le rapport entre l'ascension et la descente reste toujours le même, que le mouvement des mobiles soit grand ou petit (ils sont en effet réunis ensemble), nous pouvons affirmer que, quand il y aura équilibre, c'est-à-dire repos des mobiles, les moments, les vitesses, ou leurs tendances au mouvement, c'est-à-dire les espaces qu'ils parcourraient dans le même temps, devront être en raison inverse de leurs gravités, conformément à la loi qui se démontre dans tous les cas de mouvements mécaniques [117]. Par suite, il suffira, pour empêcher la chute de G, que H soit d'autant moins lourd par rapport à lui que l'espace CF est moindre par rapport à l'espace FA. Donc les graves G et H étant entre eux comme FA à FC, il s'ensuivra que l'équilibre aura lieu

---

[117] Voir *Les Méchaniques*, Liv. I, Chap. I, § 4.

c'est-à-dire que les graves H, G auront des moments égaux et que leur mouvement cessera. Et puisque nous sommes convenus que, pour un mobile, l'*impetus,* l'énergie, le moment ou la propension au mouvement a la grandeur de la force ou résistance minima qui suffit à le tenir fixe, nous conclurons que le grave H est suffisant pour empêcher le mouvement du grave G; donc le poids le plus petit H, qui exerce son moment total sur la verticale FC, sera la mesure précise du moment partiel que le plus grand poids G exerce sur le plan incliné FA; mais la mesure du moment total du même grave G est lui-même (puisque pour empêcher la chute verticale d'un grave il faut l'action contraire d'un grave égal qui soit cependant libre de se mouvoir verticalement). Donc l'*impetus* ou le moment partiel de G sur le plan incliné FA est à l'*impetus* maximum et total du même G sur la verticale FC comme le poids H au poids G, c'est-à-dire, par la construction, comme la hauteur FC du plan est au plan FA. C'est là le lemme que nous nous proposions de démontrer.

Sagredo. — De ce que Votre Seigneurie a démontré jusqu'ici, il me paraît qu'on peut facilement déduire, en raisonnant sur des proportions inverses, que les mouvements du même mobile sur des plans diversement inclinés, comme FA, FI, et ayant la même hauteur, sont entre eux dans le rapport inverse des longueurs des plans.

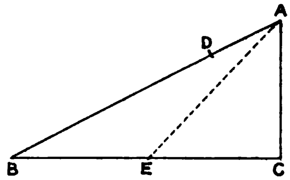
Salviati. — La conclusion est très exacte. Cela posé, je passe à la démonstration du théorème qui énonce que :

Les degrés de vitesse d'un mobile descendant, par un mouvement naturel, de la même hauteur, sur des plans inclinés d'une manière quelconque sont toujours égaux à l'arrivée sur une même horizontale, quand tous les obstacles sont écartés.

Il faut, ici, faire d'abord la remarque suivante : il a été établi que, sur un plan incliné quelconque, la vitesse ou la quantité d'*impetus* d'un mobile partant du repos croît comme le temps (c'est la définition donnée par notre auteur pour le mouvement naturellement accéléré); donc, comme cela a été démontré dans la proposition précédente, les espaces parcourus sont en raison doublée des temps et, par suite, des degrés de vitesse; tels furent les *impetus* dans le premier mouvement, tels seront proportionnellement les degrés de vitesse acquis dans le même temps, puisque les uns et les autres croissent suivant la même proportion dans le même temps.

Soient maintenant le plan incliné AB et sa hauteur au-dessus de l'horizon, la verticale AC, et l'horizontale CB. Ainsi qu'il a été démontré tout à l'heure, l'*impetus* d'un mobile suivant

Fig. 48.



la verticale AC est à l'impetus du même mobile sur le plan incliné AB comme AB à AC; prenons alors sur AB une longueur AD troisième proportionnelle entre AB, AC ([118]); l'impetus suivant AC sera à l'impetus suivant AB, c'est-à-dire suivant AD, comme AC est à AD; par conséquent, dans l'espace de temps où le mobile parcourrait la longueur verticale AC, il parcourra la longueur AD sur le plan incliné AB (les moments étant comme les espaces), et le degré de vitesse en C sera, avec le degré de vitesse en D, dans le même rapport que AC à AD ([119]). Mais le degré de

---

([118]) Telle que $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$.

([119]) Galilée a considéré plus haut que le moment, l'*impetus* d'un mobile sur un plan incliné était mesuré par la force statique capable de maintenir ledit mobile au repos. Ici, il considère que le moment, l'*impetus* peut se mesurer par la vitesse acquise par le mobile au bout d'un temps déterminé. Rien ne dit *a priori* que ces deux modes de mesure soient d'accord; on aurait pu aussi mesurer l'*impetus* par la vitesse acquise après un parcours déterminé et ce troisième mode de mesure n'aurait pas coïncidé avec les deux précédents. Ici apparaît donc le principe physique que la suppression d'une force statique tenant un point en équilibre détermine une accélération proportionnelle à cette force. C'est le principe de la proportionnalité des forces aux accélérations, énoncé sous la forme qui a pris un si grand développement dans la Mécanique d'Huygens et de Reech.

On remarquera encore que Galilée admet que, sur divers plans inclinés, les *impetus,* les moments, sont comme les espaces parcourus dans le même temps à partir du repos. A la vérité, cela résulte de l'hypothèse qu'ils sont comme les vitesses acquises au bout du même temps. Mais il se pourrait que Galilée ne l'ait pas vu ainsi et qu'il l'ait admis *a priori* sous la poussée de sa notion statique de moment qu'il a rapprochée de celle d'*impetus* et qui, nous le savons, coïncide assez bien avec notre notion moderne de travail virtuel.

Il est certain, nous l'avons déjà remarqué dans la note 114, que la démonstration de Galilée est obscure. On verra plus loin qu'Huygens a trouvé ce passage peu satisfaisant (note 179). Mais c'est précisément l'étude de ces passages obscurs qui est instructive pour qui s'intéresse à l'origine des idées.

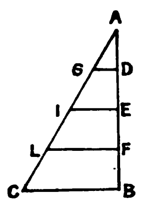
vitesse en B est au même degré de vitesse en D comme le temps correspondant à AB au temps correspondant à AD (par la définition du mouvement accéléré), et le temps correspondant à AB est au temps correspondant à AD comme AC, moyenne proportionnelle entre BA et AD, est à AD (par le dernier corollaire de la seconde proposition) ([120]). Donc les degrés de vitesse en B et en C ont avec le degré de vitesse en D le même rapport, celui de AC à AD; ils sont donc égaux : ce qu'il fallait démontrer....

Reprenons la lecture du texte ([121]).

Théorème III. — Proposition III. — *Si, sur un plan incliné et sur une verticale dont la hauteur est la même, le même mobile descend en partant du repos, les durées de chute seront entre elles comme les longueurs du plan et de la verticale.*

Soient un plan incliné AC et une verticale AB, dont la hauteur au-dessus de l'horizon CB est la même BA. Je dis que, pour un même mobile, les durées de chute sur le plan AC et sur la verticale AB ont le même rapport que la longueur du plan et la longueur de la verticale AB. Concevons, en effet, autant d'horizontales DG, EI, FL que nous voudrons. Par notre hypothèse, les degrés de vitesse acquis aux points G, D par le mobile parti de A sont égaux, puisque les accès vers l'horizon le sont; de même

Fig. 49.



en I, E, et en L, F. Si l'on ne trace pas uniquement ces horizontales, mais si l'on en mène de tous les points de la ligne AB jusqu'à la ligne AC, il faut concevoir que les moments, c'est-à-dire les degrés de vitesse aux deux extrémités d'une même horizontale seront toujours égaux entre eux. Les deux espaces AC, AB sont

([120]) Nous n'avons pas cité la démonstration de cette propriété. Le lecteur y suppléera facilement.

([121]) Ici cesse l'addition de l'édition de Bologne.

donc parcourus avec les mêmes degrés de vitesse. Mais il a été démontré que, si deux espaces sont parcourus par un mobile animé des mêmes degrés de vitesse, les durées de trajet sont dans le rapport des espaces. Donc la durée du parcours AC est à celle du parcours AB comme la longueur du plan AC à la longueur de la verticale AB. C. Q. F. D.

[Suit une série de théorèmes touchant la chute des corps sur des plans diversement inclinés.]

QUATRIÈME JOURNÉE. — DU MOUVEMENT DES PROJECTILES.

....

L'Ouvrage. — J'imagine un mobile lancé sur un plan horizontal, tout obstacle étant écarté. On sait, par ce qui a été dit ailleurs, que son mouvement restera indéfiniment uniforme sur le plan si celui-ci s'étend à l'infini ([122]). Mais si le plan est limité et s'il est installé en l'air, lorsque le mobile, que nous supposons soumis à la gravité, dépassera son extrémité, il ajoutera à son premier mouvement uniforme et indestructible la propension qu'il a vers le bas du fait de sa gravité; de là naîtra un mouvement composé du mouvement horizontal et du mouvement naturellement accéléré de descente. J'appelle ce mouvement *projection*....

THÉORÈME I. — PROPOSITION I. — *Le projectile animé du mouvement composé du mouvement uniforme horizontal et du mouvement naturellement accéléré de descente décrit une demie-parabole*....

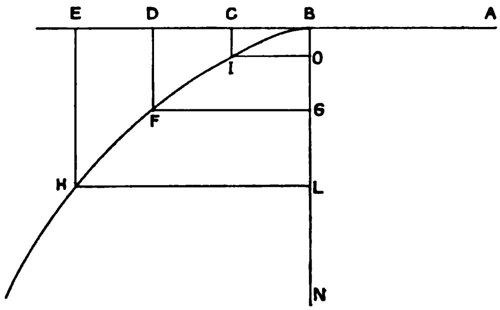
Soit une horizontale ou un plan horizontal AB placé en l'air et le long duquel un corps se meut de A en B d'un mouvement uniforme. En B, l'appui du plan manquant, le corps, en vertu de son poids, est entraîné par sa gravité dans un mouvement naturel suivant la verticale BN et vers le bas. Prolongeons AB par la ligne BE qui nous servira à mesurer le cours du temps; marquons sur BE des durées égales BC, CD, DE et par les points C, D, E menons des parallèles à BN; prenons, sur la première de ces parallèles, une longueur quelconque CI, sur la suivante une longueur quadruple DF, sur la troisième une longueur neuf fois plus grande EH, et ainsi de suite, les longueurs successives croissant comme les

---

([122]) C'est une extension de ce qui a été dit dans le passage signalé par la note 115.

carrés de CB, DB, EB, ou, comme on dit, en raison doublée de ces lignes. Imaginons qu'au déplacement du mobile porté de B en C par le mouvement uniforme nous ajoutions sa descente verticale

Fig. 50.



suivant la longueur CI; au temps BC, le corps se trouvera en I; au temps BD = 2BC, la hauteur de chute sera égale à 4CI, car il a été prouvé, dans le premier Traité, que dans le mouvement naturellement accéléré, les espaces sont comme les carrés des temps; de même l'espace EH parcouru dans le temps BE sera neuf fois CI; de sorte que les espaces EH, DF, CI sont entre eux comme les carrés des lignes EB, DB, CB... Les points I, F, H sont donc sur une parabole....

Sagredo. — On ne peut nier que ce raisonnement ne soit neuf, ingénieux et concluant. Il repose sur la supposition suivante : le mouvement transversal se maintient toujours uniforme; pareillement le mouvement naturel de descente conserve toujours sa propriété de se faire en s'accélérant selon la raison doublée des temps; et ces mouvements et leurs vitesses, en se mélangeant, ne s'altèrent, ni ne se troublent, ni ne s'empêchent mutuellement ([123]), si bien que finalement la trajectoire du projectile ne

([123]) C'est le principe de la composition des mouvements ou de l'indépendance des effets des forces. Comparez avec le passage de Descartes, relatif à la réflexion, note 93. Galilée voit mieux que Descartes le caractère non nécessaire de ce principe.

On remarquera que Galilée n'a traité du mouvement des projectiles que lorsque la vitesse initiale est horizontale. Certains auteurs, comme M. Wohlwill, estiment que, dans sa pensée, la composition du mouvement vertical des graves avec un mouvement de projection non horizontal n'aurait pas été légitime, ces deux mouvement n'étant pas suffisamment indépendants l'un de l'autre. Avec l'idée cartésienne de la persistance indéfinie de tout mouvement, il était naturel de comchangera pas de nature quand le mouvement se continuera. Or, cette conclusion me paraît impossible. En effet, l'axe de notre parabole..., étant vertical, va se terminer au centre de la Terre; la parabole s'éloignant toujours de son axe, le projectile n'ira jamais au centre de la Terre, ou, s'il y arrive, comme cela paraît nécessaire, la trajectoire se transformera en une autre, très différente de la forme parabolique.

[A cette objection, Simplicio ajoute les suivantes : 1° l'auteur a tort de supposer, dans sa démonstration, que toutes les verticales sont parallèles, alors qu'elles concourent au centre de la Terre; 2° il a tort de faire abstraction de la résistance du milieu.

Salviati répond que toutes ces objections sont fondées, mais qu'il est permis de les écarter dans une première approximation. La distance du centre de la Terre est assez grande par rapport aux portées des projectiles pour qu'on puisse considérer toutes les verticales comme à peu près parallèles, bien que, en toute rigueur, la forme de la trajectoire doive différer de la forme parabolique pour, finalement, passer par le centre la Terre ([124]).

Quant à la résistance de l'air, elle a certainement une influence, mais une influence très variable avec la forme, la vitesse, le poids du mobile. Pour en tenir compte scientifiquement, il convient d'en faire d'abord abstraction, puis de n'utiliser les résultats obtenus à la faveur de cette abstraction que dans les limites qu'assignera l'expérience. D'ailleurs l'expérience montre que la résistance de l'air n'est pas très considérable sur les projectiles ordinaires. En faisant tomber une boule de bois et une boule de plomb d'une hauteur de 200 coudées, Salviati a remarqué que celle de bois, sur laquelle l'air devait cependant avoir plus d'action, n'était pas sensiblement retardée par rapport à celle de plomb : or les vitesses atteintes dans une telle chute étaient plus fortes que celles qui se rencontrent dans le tir des projectiles (les armes à feu mises à part). D'autre part, il a fait osciller au bout de pendules de longueurs égales deux sphères de plomb; l'une faisait de grandes oscillations (sa vitesse était donc grande); l'autre en faisait de très petites : ces oscillations se faisaient presque exactement dans le même

poser, à la manière de Galilée, le mouvement de descente des graves avec une projection quelconque, horizontale ou oblique. C'est ce que Gassendi a fait le premier dans les écrits cités à la fin du paragraphe 1. Il y avait là, en somme, une généralisation de l'idée d'accumulation des *impetus*.

([124]) *Voir* le Traité des *Méchaniques*, note 35.

temps, malgré la différence que la différence des vitesses devait apporter dans l'action de l'air, si elle était notable. Il faut d'ailleurs mettre à part les projectiles lancés par des armes à feu : pour ceux-là les vitesses sont telles que la résistance de l'air ne peut-être négligée et la trajectoire parabolique est modifiée.]

§ 3. — Commentaires.

Les citations qui précèdent montrent bien la différence d'esprit de Descartes et de Galilée.

Galilée est un observateur de la nature beaucoup plus attentif et beaucoup plus scrupuleux que Descartes. S'attaquant à des problèmes particuliers, bien déterminés, il les étudie à fond par une analyse admirable et c'est ainsi, par des exemples précis, qu'il met en lumière les idées fondamentales. A l'originalité des conceptions, il joint la prudence de la méthode. Aussi va-t-il en progressant sans cesse; et l'addition, faite dans sa vieillesse, à l'édition de Bologne apporte encore des éléments nouveaux et importants dans la Mécanique.

Descartes, abandonnant plus tôt que Galilée les enseignements de la nature pour s'en rapporter à sa raison, a l'esprit plus généralisateur. Son véritable mérite, a dit excellemment M. Mach, est « d'avoir, le premier, recherché en Mécanique un point de vue plus général et plus fécond; c'est d'ailleurs en cela que consiste le travail spécial des philosophes et c'est là qu'il faut chercher la raison de leur influence fécondante et stimulante » ([125]).

Que l'on compare, par exemple, la manière dont Galilée et Descartes présentent le principe de l'inertie : Galilée le fait entrevoir comme l'aboutissant de remarques faites sur le plan incliné (*voir* les notes 44, 115 et 122); mais il n'en donne pas un énoncé général, ce que fait Descartes. Que l'on compare aussi ce que Descartes et Galilée disent du principe du travail virtuel (Livre I, Chap. III, §§ 1 et 3).

Mais la tendance de Descartes à voir dans sa raison la mesure

([125]) *La Mécanique*, p. 292.

de tout gâte souvent ses plus belles conceptions et les empêche même parfois de progresser avec le temps. Les passages des *Principes* cités plus haut sont caractéristiques à cet égard ; ils ne marquent vraiment pas un pas en avant par rapport aux extraits de la *Correspondance* ou de la *Dioptrique*.

Mais il est inutile de s'arrêter plus longtemps à ce parallèle et il convient d'examiner les citations qui précèdent à un autre point de vue.

Au début de toute recherche physique, l'intelligence humaine se trouve en présence d'idées vagues qui sont un mélange de suggestions expérimentales et de conceptions plus ou moins métaphysiques de l'esprit. Le premier travail consiste à les débrouiller. A l'origine de la Dynamique, nous voyons ainsi apparaître deux notions : celle de *force d'un corps en mouvement* et celle *d'impetus avec lequel un corps tend à se mouvoir sous une action étrangère,* sous l'action de la pesanteur par exemple [il s'agit ici de l'*impetus* de Galilée et non de celui de Descartes (note 114)]. Deux voies s'offrent ainsi dès le début où peut s'engager la Mécanique; il s'agit de savoir laquelle de ces deux notions elle s'attachera à préciser pour en faire une notion fondamentale.

Avec Descartes, l'attention se fixe sur la *force des corps en mouvement*. C'est la source d'un courant de recherches qui se perd d'assez bonne heure mais réapparaît avec une grande ampleur au XIXe siècle. L'état d'un système matériel étant défini par plusieurs paramètres, le déterminisme scientifique, c'est-à-dire la simple notion de loi, nous apprend que certaines fonctions de ces paramètres doivent rester constantes ([126]). On peut chercher, parmi ces fonctions, celle qui traduit le mieux l'idée vague de force d'un corps en mouvement : c'est ce qu'on appelle aujourd'hui l'*énergie* du système. Dans cette fonction énergie on peut chercher à mettre en évidence des groupes de termes que l'on considère comme représentant chacun l'énergie d'une partie. La constance de l'énergie totale ne peut avoir lieu que moyennant certaines

([126]) *Voir* la note 96.

relations entre les variations des énergies partielles et ces relations, qui découlent de la forme de la fonction énergie, sont une manière d'exprimer l'action d'une partie du système sur une autre. Chez Descartes, c'est la quantité de mouvement qui joue le rôle d'énergie; ce sera la force vive chez Leibniz. De nos jours les savants qui ont développé les idées de Helmholtz se sont placés au point de vue que nous venons d'analyser, comme on peut le voir d'une manière très précise dans le *Commentaire aux principes de la Thermodynamique* de M. Duhem ([127]).

C'est au contraire l'*impetus de la tendance au mouvement* qui occupe Galilée. Il éclaire cette notion obscure en mesurant l'impetus par la force statique qui l'arrête. Cette méthode est bien plus précise que celle de Descartes; nous avons dit plus haut qu'il y avait, dans les idées premières de toute science physique, une part expérimentale et une part de l'esprit; chez Descartes, la part de l'esprit est exagérée; la méthode de Galilée fait bien davantage appel à l'expérience; elle rattache la notion d'*impetus* à la notion, déjà vivement éclairée par des études assez avancées sur l'équilibre, de force statique qui vient lui prêter un appui solide. On peut remarquer que, de même, la notion d'énergie ne deviendra féconde que lorsqu'on pourra l'étayer sur autre chose que sur une idée *a priori*, lorsque, grâce au théorème des forces vives et à la notion de potentiel, on aura mis en évidence et étudié l'énergie dans un grand nombre de problèmes particuliers et donné de la sorte à cette notion, pour ainsi parler, une sanction expérimentale qui lui manquait du temps de Descartes.

Courant énergétique, courant statique, telle est la manière dont tendent à se partager, dès le début, les recherches de Mécanique. Naturellement le partage ne sera pas toujours très net et les deux courants se mêleront; mais ils n'en existeront pas moins l'un et l'autre.

([127]) *Voir* notamment la manière dont M. Duhem définit les actions d'un système sur un autre et les échanges de chaleur entre deux systèmes, et comparer avec les derniers mots du passage de Descartes signalé par la note 96.

CHAPITRE II.

LE CHOC DES CORPS.

§ 1. — Wallis et la quantité de mouvement.

Nous laisserons de côté, malgré leur intérêt, les études de Marcus Marci (1639) et de Galilée sur le choc des corps. On les trouvera résumées dans le Livre de M. Mach. Nous en viendrons tout de suite au concours institué sur ce sujet en 1668 par la Société royale de Londres. Trois savants, Wren, Wallis et Ch. Huygens résolurent le problème indépendamment l'un de l'autre.

Dans les Mémoires qu'ils soumirent à la Société, Wallis traita seulement du choc des corps parfaitement mous, Wren et Huygens s'occupèrent uniquement de celui des corps parfaitement élastiques. De là, dans leurs conclusions, des désaccords qu'ils n'ont pas compris tout d'abord : on trouve, en effet, dans une lettre d'Huygens la phrase suivante : « Je ne sais si M. Wallis aura pu réduire ses règles au même sens des nôtres (de celles d'Huygens et de Wren) car je n'y vois pas beaucoup de rapport » ([128]). Contrairement à cette prévision, Wallis est parvenu à rattacher à ses idées les résultats de Wren et d'Huygens. Sa théorie complète du choc se trouve dans son traité *De Motu,* paru en 1669-1671, dont nous allons citer quelques passages.

([128]) Lettre du 29 mai 1669. *Correspondance d'Huygens,* t. VI, n° 1738.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LE MOUVEMENT ([129]).

J'appelle *moment* (*momentum*) ce qui conduit à la production du mouvement.

J'appelle *empêchement* (*impedimentum*) ce qui s'oppose au mouvement ou l'empêche....

La *force motrice* (*vis motrix*) ou simplement la *force* (*vis*) est la puissance de produire le mouvement....

La *résistance* (*resistentia*) ou *force de résistance* (*vis resistendi*) est la puissance contraire au mouvement ou encore la puissance qui résiste au mouvement ([130])....

La *gravité* est une force motrice vers le bas, c'est-à-dire vers le centre de la Terre....

J'appelle *poids* la mesure de la gravité.

. . . .

Proposition VII. — Les effets sont proportionnels à leurs causes adéquates.

Car si une cause C produit un effet E, une autre cause C, toutes choses égales d'ailleurs, produira un autre effet E.... Si les circonstances sont telles que la seconde cause C ne produit pas un effet égal à celui de la première, c'est que l'une ou l'autre de ces deux causes C n'est pas une cause adéquate; l'une ou l'autre est aidée ou empêchée par lesdites circonstances. C'est contre l'hypothèse.

. . . .

Proposition VIII. — La réunion de deux causes contraires est équivalente à l'excès de la plus forte. La réunion de deux causes concordantes est équivalente à leur somme.

[La démonstration est analogue à celle qui précède.]

. . . .

([129]) Nous citons quelques passages de chapitres qui ne sont pas relatifs au choc des corps. Ils sont utiles pour faire bien comprendre les idées directrices et la méthode de Wallis, et ils nous montrent comment Wallis a fait reposer toute la Statique sur le principe du travail virtuel (*cf.* Livre I, Chap. III, § 3).

([130]) On remarquera combien ces définitions sont éloignées de celles par lesquelles on définit les grandeurs introduites dans la Science, ainsi que le dit Robin, *en imaginant une expérience* (procédé expérimental, *voir* note 7).

Proposition X. — Dans un cas où sont réunis un *moment* et un *empêchement,* si le moment est le plus fort, l'ensemble joue le rôle d'un *moment.* C'est l'inverse dans le cas contraire....

En effet, le moment et l'empêchement sont des contraires; l'un est une cause positive, l'autre une cause négative. La proposition est évidente en vertu de la proposition VIII.

Proposition XI. — Si le moment l'emporte sur l'empêchement, le mouvement se produit; il commence s'il n'existait pas, il augmente s'il existait. Si l'empêchement l'emporte, le mouvement est empêché; il s'arrête ou diminue s'il existait.... S'il y a équivalence, il n'y a ni production ni disparition de mouvement; le repos ou le mouvement antérieur subsiste.

C'est la conséquence de la proposition précédente. Puisque la réunion du moment et de l'empêchement doit être tenue pour un moment, un empêchement, ou un néant, le mouvement ou bien se produit, ou bien est empêché, ou bien ne varie pas (proposition VII).

Remarque. — La dernière partie de cette proposition (le mouvement ou le repos se continuent s'il n'y a ni obstacle ni cause motrice) paraît être postulée par Galilée, Descartes, Gassendi, etc.... Je ne me souviens pas d'avoir vu quelqu'un la démontrer.

....

Proposition XII. — Si une force est égale à une force contraire, elle arrête (*sustinebit*); si elle est moindre, elle ne produit même pas l'arrêt; si elle est plus forte (et s'il n'y a aucun autre obstacle) elle produit le mouvement. Et inversement, si elle produit le mouvement, elle est plus forte; si elle ne le produit pas, ou bien elle est moins forte, ou bien elle est égale, ou bien il y a un obstacle étranger.

Soient par exemple S une force vers le haut, D une force vers le bas. Si elles sont égales, elles équivalent à zéro (par la proposition VIII) et ne font pas de mouvement (par la proposition VII). Si S l'emporte, il se fait un mouvement vers le haut; si c'est D, il s'en fait un vers le bas. Elles équivalent à l'excès de la plus forte (par la proposition VIII) et le mouvement s'y conformera (par la proposition VII).

....

Proposition XIII. — Les empêchements (*impedimenta*) de mouvement qui résultent du poids des mobiles sont, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnels aux poids. Ce qui est dit du poids doit être entendu de toute autre force résistante (*vis contraria*) qui sera analogue au poids....

En effet, si un poids P produit un empêchement 1, un second poids P, toutes choses égales d'ailleurs, produira un autre empêchement 1... en vertu de la proposition VII.

Proposition XIV. — Les empêchements de mouvement qui résultent des longueurs à parcourir sont proportionnels à ces longueurs.

....

Proposition XV. — Les empêchements résultant à la fois du poids et de la longueur sont en raison composée des poids et des longueurs.

....

Proposition XVII. — Les moments qui équivalent aux empêchements sont proportionnels aux empêchements.

....

Proposition XVIII. — Les moments des forces sont, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnels à la grandeur des forces....
.... en vertu de la proposition VII.

Proposition XIX. — Les moments de forces égales sont, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnels aux temps d'action....
.... en vertu de la proposition VII.

Proposition XX. — Les moments produits par des forces appliquées pendant un certain temps sont en raison composée des grandeurs des forces et des temps.

....

Proposition XXII. — Dans des mouvements quelconques, les moments sont proportionnels aux empêchements.

....

Proposition XXVII. — Si l'on compare plusieurs mouvements, les grandeurs des forces sont, toutes choses égales d'ailleurs, en raison composée des poids et des vitesses.

En effet, d'après la proposition XXII, le rapport des moments, qui est en raison composée des forces et des temps, est le même que celui des empêchements, qui est en raison composée des poids et des longueurs. Multiplions ces deux rapports par le rapport inverse des temps; on voit alors que le rapport des forces est en raison composée des poids et des longueurs et en raison inverse des temps, c'est-à-dire en raison composée des poids et des vitesses. C. Q. F. D. ([131]).

. . . .

CHAPITRE II.

DE LA DESCENTE DES GRAVES ET DE LA DÉCLIVITÉ DES MOUVEMENTS.

Proposition I. — Toutes choses égales d'ailleurs, les graves gravitent en raison de leurs poids. Et, généralement, toutes les forces motrices agissent en raison des forces.

Ainsi, si un poids P gravite comme G, un autre poids P gravitera comme un autre G.... Donc, 2 P gravitera comme 2 G.

Car la gravité est une force motrice; sa mesure est le poids (*voir*

([131]) Toutes ces propositions sont démontrées par Wallis par des raisonnements dont les citations faites à propos des propositions VII, X, XI, XII, XIII donnent une idée suffisante. En somme, il emploie le procédé métaphysique (note 7). Il serait, en effet, superflu d'insister sur le fait que de semblables démonstrations ne démontrent rien; l'appareil logique, mis en branle par Wallis, est entièrement illusoire. Mais on peut considérer tous ces raisonnements comme une analyse des idées que Wallis se fait de la production et des propriétés du mouvement; il est intéressant de les examiner à ce point de vue, de voir quelles sont pour lui, dans le phénomène du mouvement, les *causes adéquates* auxquelles s'applique sa proposition VII.

En somme Wallis considère, dans le mouvement, un certain effet produit, le déplacement d'un poids sur une certaine longueur, et la nécessité de produire cet effet équivaut pour lui à un *empêchement*, à une *résistance*. Il faut une force pour produire le mouvement. En comparant cette force à l'effet qu'elle produit dans un temps donné, à savoir le déplacement d'un poids, Wallis est conduit à l'évaluer par le produit du poids par la vitesse. Ces idées se rattachent nettement à celles d'Aristote. Elles en diffèrent toutefois par l'influence de celles de Descartes. Wallis, en effet, considère sa force moins comme une action étrangère que comme une *force de corps en mouvement* indestructible. De là une certaine confusion, une certaine obscurité (*cf.* note 134).

On voit que, pas plus que Descartes, Wallis n'avait une notion de la masse distincte de celle du poids. Ce point mis à part, son idée de force coïncide, comme celle de Descartes, avec l'idée moderne de *quantité de mouvement*. Mais le grand progrès de Wallis par rapport à Descartes est d'avoir compris la nécessité de donner un signe à la quantité de mouvement.

Dans son chapitre I, Wallis distingue la *force* du *moment* (*voir* prop. XX). Mais nous verrons que, plus tard, il confond *force* et *moment,* et prend pour *moment* notre moderne *quantité de mouvement*.

les définitions, Chap. I). La gravité mouvra donc suivant la raison des poids (par la proposition XVIII du Chapitre I).

. . . .

Proposition III. — Un grave descend de la quantité dont il se rapproche du centre de la Terre ; il monte de la quantité dont il s'en éloigne.

Et généralement, l'*avancement* (*progressus*) d'une force motrice quelconque est la quantité dont elle se meut suivant sa direction ; le *recul* (*regressus*) est l'inverse....

En effet (par la définition de la gravité) la descente des graves, ou le mouvement dans la direction de la gravité, est un mouvement vers le centre de la Terre. Donc, on dira qu'un grave est descendu de la quantité dont il s'est approché du centre de la Terre.

. . . .

Proposition IV. — Toutes choses égales d'ailleurs, un grave ou un composé de plusieurs graves aura une propension pour le chemin par où il descendra davantage (c'est-à-dire qu'il y sera porté de préférence), et cette propension sera proportionnelle à la descente. Il aura une répugnance plus grande pour le chemin qui le fera le plus monter, et cette répugnance sera proportionnelle à l'ascension. Et inversement.

Pour les chemins qui descendent ou montent également, il y a propension ou répugnance égale. Et inversement.

Ces résultats s'appliquent aux autres mouvements. Le mobile sera porté de préférence sur le chemin qui avance le plus dans la direction de la force et la préférence sera d'autant plus marquée que le chemin avancera davantage.

[La démonstration de cette proposition est analogue à toutes celles qui précèdent. Pour prouver l'égalité des proportions, Wallis invoque toujours la proposition VII du Chapitre I.]

Proposition V. — Les descentes des graves, comparées entre elles, valent (*pollent*) en raison composée des poids et des hauteurs de descente. De même pour les ascensions....

Et généralement, les avancements ou reculs (*progressus* et *regressus*) des forces motrices valent en raison composée des forces et des déplacements selon la direction des forces.

Ainsi, si le grave P, descendant suivant D, vaut comme G, un autre grave P (toutes choses égales d'ailleurs), descendant de la même quantité, vaudra comme un autre G.... Donc, nP vaudra comme nG; la valeur est en raison des poids (par la proposition VII du Chapitre I).

De même, si un poids P descendant suivant D vaut comme G, une autre descente du même poids (toutes choses égales d'ailleurs) suivant un autre D vaudra autant, c'est-à-dire comme un autre G. Donc, une descente suivant mD vaut comme mG; la valeur est en raison des hauteurs (par la proposition VII du Chapitre I) ([132]).

Proposition VI. — La descente et l'ascension étant réunies ensemble, on devra les tenir simplement pour une descente, si la descente a une valeur plus grande (*prœpollet*), pour une ascension si l'ascension a une valeur plus grande (et pour une ascension ou une descente égale à la différence), pour zéro s'il y a équivalence.

Si plusieurs ascensions (ou plusieurs descentes) sont réunies, elles valent ensemble comme leur somme.

Tout cela s'applique, *mutatis mutandis,* aux corps mus par une autre force motrice.

C'est évident par la proposition VIII du Chapitre I.

Proposition VII. — Comparons des graves. Toutes choses égales d'ailleurs, ils pèsent (pour produire une descente ou empêcher une ascension) dans le rapport de ce que vaudraient leurs ascensions ou leurs descentes, s'ils se mouvaient, c'est-à-dire en raison composée des poids et des hauteurs.

Ce résultat s'applique, *mutatis mutandis,* aux autres mouvements....

En effet, comme les graves pèsent d'autant plus, toutes choses égales d'ailleurs, qu'ils sont d'un poids plus grand (proposition I du présent Chapitre) et qu'ils descendent davantage (proposition IV de ce Chapitre), ils pèseront, en tenant compte de ces deux propositions, dans le rapport de ce que vaudront, d'après ces deux considérations, leurs ascensions ou leurs descentes. Ce rapport sera (proposition V de ce Chapitre) la raison composée des poids et des hauteurs. C. Q. F. D.

([132]) Toujours la même fausse rigueur. Et remarquer que Wallis ne définit pas ce qu'il veut dire quand il parle de ce que *valent* (*pollent*) les ascensions ou les descentes des graves. Au fond, tout se réduit à ceci : Wallis a le sentiment physique que la notion du produit du poids par la hauteur (notre moderne notion de travail) est une notion importante (*comparez* avec Descartes, note 74).

Soient, par exemple, deux graves (ou forces motrices) V et P. Supposons, ou bien qu'ils soient égaux et que, par leur situation, ils doivent, s'ils se meuvent, monter ou descendre également, ou bien qu'ils soient inégaux et que le plus lourd descende d'autant moins (dans le même temps) qu'il est plus lourd. Ces deux graves seront en équilibre (car les ascensions et les descentes sont équivalentes, par la proposition V de ce Chapitre) ([133]).

[Et Wallis se borne ici à tracer, en guise d'éclaircissement, les figures suivantes.]

Fig. 51.

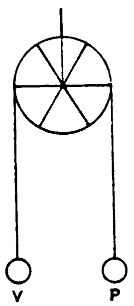


Fig. 52.

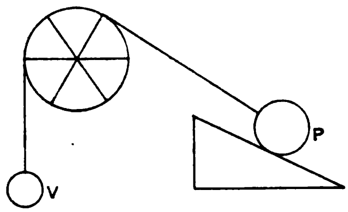


Fig. 53.

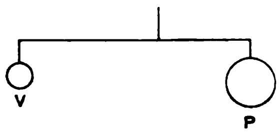
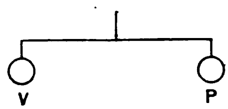


Fig. 54.



CHAPITRE X.

DES MOUVEMENTS ACCÉLÉRÉS ET RETARDÉS ([134]).

Proposition I. — Si un mobile en mouvement reçoit l'action d'une nouvelle force (*vis*) ou d'une nouvelle impulsion (*impetus*) suivant la direction de son mouvement, il se produit une accélération....

([133]) C'est le principe du travail virtuel. Nous avons annoncé (Livre I, Chap. III) que nous trouverions ce principe chez Wallis. Wallis s'en sert dans les Chapitres ultérieurs pour faire la théorie des machines simples.

([134]) Le chapitre X présente, on va le voir, une certaine obscurité qui me paraît tenir à une confusion que Wallis n'évite pas assez entre la *force d'un corps en mouvement* et la *force motrice*. Si la force motrice de la proposition II était la

Soit A mobile sur la droite AB. Sa vitesse est C, son poids P. Par suite, la force ou l'impulsion (*vis* ou *impetus*) avec laquelle

Fig. 55.

il se meut est $V = PC$ (proposition XXVII du Chapitre I). Il conservera sa vitesse s'il ne survient aucun empêchement (*impedimentum*) ni aucune cause motrice (*causa motrix*) (proposition XI du Chapitre I).... S'il survient en B une nouvelle force ou une nouvelle impulsion suivant la même direction et égale à nV, la force totale sera $V + nV = PC + nPC$ (propositions VIII et XXVII du Chapitre I). Le poids en mouvement restant P, la vitesse deviendra égale au quotient de $PC + nPC$ par P, soit à $C + nC$ (proposition XXVII du Chapitre I). Le mouvement est donc accéléré dans la proportion de $1 + n$ à 1. C. Q. F. D.

. . . .

Proposition II. — Si une force motrice (*vis motrix*) constante est appliquée à un mobile d'une manière continue, il se produit un mouvement continuellement accéléré, et accéléré de telle sorte que la vitesse croisse de quantités égales dans des temps égaux (mouvement uniformément accéléré)....

Soit, en effet, une cause motrice quelconque (*causa motrix*), qui dans un certain temps imprime une vitesse 1. Cette vitesse, s'il n'y a ni obstacle ni cause nouvelle, subsistera (proposition XI du Chapitre I). La même cause, agissant de même et appliquée pendant un second intervalle de temps égal au premier, produira de même une vitesse 1 (proposition VII du Chapitre I), qui viendra s'ajouter à la précédente.

[Dans la proposition suivante, Wallis considère la gravité comme une force constante et étudie ainsi le mouvement des graves.]

. . . .

---

même chose que la force des corps en mouvement de la proposition I, la suite logique des idées serait de dire qu'une force constante produit un mouvement uniforme. Dans la pensée de Wallis, il y a donc là certainement deux forces bien différentes. Mais il ne le dit pas assez clairement.

Il me semble que le meilleur moyen de préciser les idées de Wallis serait d'avoir recours aux considérations leibniziennes sur la relation entre la force des corps en mouvement et les actions extérieures. *Cf.* Chap. IV, § 2.

CHAPITRE XI.

DU CHOC.

Proposition I. — Soit un corps grave en mouvement. Considérons-le comme parfaitement dur. Imaginons qu'il choque directement un obstacle ferme, qui soit aussi parfaitement dur. Si la force correspondant au mouvement du corps est moindre que la force qu'a l'obstacle pour résister au mouvement et même si ces deux forces sont égales, le corps s'arrêtera....

Soit un grave A, parfaitement dur, de poids mP, animé de la vitesse rC. Il lui correspond un moment (*momentum*) ou une force (*vis*) mrPC (prop. XXVII, Chap. I) (135). Soit un obstacle B qu'il choque directement et qui a une force de résistance nsPC.

Si $mr\text{PC} < ns\text{PC}$, l'empêchement l'emporte. Si $mr\text{PC} = ns\text{PC}$, l'empêchement sera au moins égal au moment. Dans les deux cas le mouvement s'arrêtera. (La force sera en effet nulle dans le cas d'égalité; dans le premier cas, l'empêchement l'emportant, il faut raisonner comme s'il y avait empêchement.) (Prop. X et XI, Chap. I) (136)....

Remarque. — J'appelle *parfaitement dur* un corps qui ne cède en rien au choc, qui n'est donc ni mou ni élastique.

Un corps *mou* est un corps qui cède au choc de façon à perdre sa figure primitive, comme la glaise, la cire, le plomb.... Pour ces corps une partie des forces est employée à les déformer; la totalité n'en est pas dépensée sur l'obstacle. Il faut tenir compte à part de cette partie (137).

J'appelle *élastique* un corps qui cède de quelque façon au choc,

---

(135) A partir de maintenant, Wallis confond les *moments* et les *forces des corps en mouvement*. Ce n'est pas tout à fait conforme à son Chapitre I, où il considère les moments comme étant en raison composés des forces et des temps.

(136) La *force de résistance* d'un obstacle est insuffisamment définie. Aussi tous ces raisonnements manquent-ils de précision.

(137) Nous savons aujourd'hui que Wallis avait raison de faire, au point de vue de la force des corps en mouvement, au point de vue énergétique, deux catégories dans les corps non élastiques. En effet, suivant que l'énergie interne des corps appelés aujourd'hui *mous* ne dépend pas ou dépend de leur déformation, la force vive perdue dans le choc équivaut ou non à leur échauffement. Mais nous savons aussi que le point de vue de la quantité de mouvement n'est pas le véritable point de vue énergétique. Dans la théorie de Wallis, il suffisait de distinguer les corps mous et les corps élastiques. C'est ce que fera Mariotte.

mais qui reprend de lui-même sa forme primitive. Ainsi sont les ressorts d'acier, de bois.... Ce sujet est traité au Chapitre XIII où l'on parle de la réflexion....

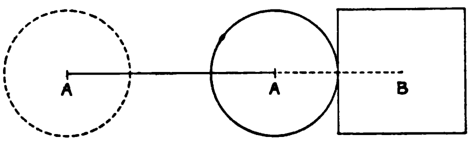
Le choc est *direct* quand une droite parallèle à la direction du mouvement menée par le centre de gravité du corps mobile est perpendiculaire à la surface du corps choqué....

Proposition II. — Si un grave en mouvement choque directement un grave au repos, celui-ci étant tel qu'il n'est mû ou empêché de se mouvoir par aucune autre cause, les deux corps iront ensemble après le choc avec une vitesse que donne le calcul suivant :

Divisez par le poids des deux corps le *moment* fourni par le produit du poids et de la vitesse du grave en mouvement ([138]). Vous aurez la vitesse après le choc....

Soit un grave A, en mouvement le long de la droite AA passant par son centre de gravité et aussi par celui du corps au repos B (car

Fig. 56.



nous exigeons aussi cette dernière condition pour dire que le choc est direct). Soient mP et rC le poids et la vitesse de A. Le moment ou force poussante (*vis impellens*) sera $mrPC$. Soit nP le poids du corps B; sa vitesse est nulle. Le poids des deux corps est $mP + nP$. Le mouvement après le choc se fera avec la même vitesse pour les deux corps. En effet B ne peut aller plus lentement que A, puisque A le suit; il ne peut non plus aller plus vite, car on suppose qu'il n'y a pas d'autre cause de mouvement que celle qui vient de la poussée de A (s'il y a une cause qui le pousse plus vite comme la force élastique, le problème est d'un autre ordre; il est traité en un autre endroit). Puis donc qu'un poids $mP + nP$ est mû par une force $mrPC$, la vitesse est $\frac{m}{m+n}rC$, quotient du moment $mrPC$ par le poids $mP + nP$ (prop. XXVII, Chap. I) ([139])....

([138]) *Voir* la note 135.

([139]) C'est l'idée cartésienne de la conservation de la force des corps en mouvement.

Proposition III. — Si un grave choque directement un second grave se mouvant moins vite que lui sur la même droite, après le choc la vitesse des deux corps sera la même et donnée par la règle suivante :

Divisez la somme des moments par la somme des poids. Vous aurez la vitesse après le choc....

Proposition IV. — Si deux graves, animés de mouvements contraires suivant la même droite, se choquent directement, ils auront après le choc la même vitesse. La valeur de cette vitesse et son sens sont donnés par la règle suivante :

Divisez la différence des moments (parce que les mouvements sont contraires) par la somme des poids; vous aurez la vitesse commune après le choc. Elle sera dirigée du côté où tendait la force prépondérante....

Proposition V. — La grandeur du choc est égale au double de la diminution subie par le plus fort moment dans un choc direct.

Considérons comme choquant le corps qui a le plus fort moment, comme choqué l'autre. Le corps choqué reçoit autant de moments que le corps choquant en perd.... Ces moments gagnés ou perdus sont tous deux l'effet du choc; le choc est donc égal à leur somme, c'est-à-dire au double de la diminution subie par le plus grand moment.

. . . .

CHAPITRE XIII.

DU RESSORT ET DU REBONDISSEMENT OU RÉFLEXION.

Définitions. — J'appelle *force élastique* (*vis elastica*) celle avec laquelle un corps, dont la forme a été modifiée de force, tend à revenir à sa forme primitive.

J'appelle *ressort* un corps ou une partie de corps doué de cette force....

D'où provient la force élastique, je ne le rechercherai pas ici.... Ce n'est pas nécessaire pour l'objet actuel. Il suffit que l'existence d'une telle force dans la nature soit certaine. Or, il n'est personne qui ne voie les corps pressés rebondir, les corps revenant par leur propre effort à leur forme repousser loin d'eux d'autres corps....

Proposition I. — Si un grave choque directement un obstacle, et si les deux corps (ou seulement un d'entre eux) sont élastiques, le grave rebondira avec une vitesse égale à celle qu'il avait avant le choc et suivant la même droite....

Si le ressort était nul, le corps grave A s'arrêterait (prop. I, Chap. XI). Donc tout mouvement qui a lieu après le choc est restitué par la force élastique. Or celle-ci est toujours égale à la force du choc (Chap. XI, prop. V et suiv.). En effet, la force transmise (*illata*) au ressort est égale au choc qu'elle supporte en entier; elle comprime donc le ressort jusqu'à ce que sa résistance lui soit égale. Si la résistance était celle d'un simple empêchement (*impedimentum*), le corps grave A s'arrêterait. Mais le ressort résiste, non comme un simple empêchement, mais comme une force contraire, agissant par réaction avec la même énergie qu'a exigée sa compression. Or ce qu'il a souffert pendant la compression est égal au choc ou à la force transmise. La force restitutive est donc égale à ces mêmes quantités.... Or dans ce cas, le grave A ayant un poids mP et une vitesse rC, la grandeur du choc est $2mr$PC (prop. VI, Chap. XI) ([140]). C'est aussi la valeur de la force élastique restitutive. Comme elle se développe des deux parts, la moitié de cette force, soit mrPC, agit sur l'obstacle, par un effort perdu, et l'autre moitié mrPC repousse le corps A. Par suite la vitesse (en sens inverse de la vitesse avant le choc) sera rC, puisque le poids est mP.

Proposition II. — Si deux graves égaux, animés de vitesses égales en sens inverses, se choquent directement, et si tous les deux (ou simplement un seul) sont des corps élastiques; ou encore si les graves sont inégaux et animés de vitesses inversement proportionnelles aux poids (de sorte que les moments soient égaux); chaque corps rebondira avec la vitesse qu'il avait avant le choc, et suivant la même droite....

Si le ressort était nul, les deux corps s'arrêteraient (prop. IV, Chap. XI). Tout le mouvement qui suit le choc provient donc de la force *élastique restitutive*. Celle-ci a la même grandeur que la force du choc (ce qui se démontre comme dans la proposition I), c'est-à-dire vaut, dans le cas présent, $2nr$PC (prop. VII,

([140]) Nous n'avons pas cité la proposition VI du chapitre XI; mais la proposition V suffit pour faire comprendre ce résultat.

Chap. XI) ([141]). Cette force, se développant des deux parts, agit de part et d'autre comme mrPC. Elle repousse donc le poids nP avec la vitesse rC et le poids rP avec la vitesse mC ([142]).

Mariotte (1620-1684) reprit la question du choc des corps en 1679. La théorie qu'il expose dans son *Traité de la percussion ou choc des corps* est au fond celle de Wallis. Elle en diffère néanmoins par la substitution d'une méthode physique et expérimentale à la méthode pseudo-logique du savant anglais. Ce seul fait donne une assez grande originalité à l'écrit de Mariotte qui mérite, à ce titre, de nous fournir quelques citations; on verra qu'il sonne tout différemment et beaucoup plus juste que la plupart des livres de l'époque.

Définitions. — I. Corps flexible à ressort est celui qui, ayant changé de figure par le choc ou par le pressement d'un autre corps, reprend de soi-même sa première figure, comme un ballon plein d'air bien pressé, un anneau d'acier trempé, une corde de boyau tendue fermement.

II. Corps flexible sans ressort est celui qui ayant pris une nouvelle figure par le choc ou par le pressement d'un autre corps, conserve cette figure; comme la cire, la terre glaise médiocrement imbibée d'eau ([143]).

III. Vitesse respective de deux corps est celle avec laquelle ils s'approchent ou s'éloignent l'un de l'autre, quelles que soient leurs vitesses propres.

. . . .

Problème. — Proposition I. — *Faire que deux corps se rencontrent directement avec des vitesses qui soient l'une à l'autre en telle raison que l'on voudra.*

[Mariotte décrit ici l'appareil qu'il faut employer pour les expériences. Il se compose de deux pendules DE, EL égaux. En I et L

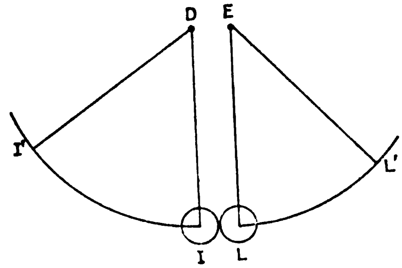
([141]) *Voir* la note précédente.

([142]) On retrouve dans d'Alembert cette manière de rattacher la théorie du choc des corps élastiques à celle du choc des corps mous. — Nous ne croyons pas utile de prolonger cette citation et de donner ici ce que Wallis dit du cas général.

([143]) On voit que Mariotte a abandonné la catégorie des corps *parfaitement durs* de Wallis.

sont suspendues des boules de glaise médiocrement molle, d'un diamètre tel qu'elles se touchent quand DI et EL sont verticaux. On laisse tomber les pendules à partir des positions DI′, EL′. On

Fig. 57.



peut régler les vitesses au moment du choc en réglant les points de départ I′ et L′. On s'appuie pour cela sur les lois de la chute des corps]....

Second principe d'expérience. — Proposition III. — Lorsque deux corps se choquent directement, la puissance ou force de leur choc pour faire impression l'un sur l'autre est la même, soit qu'ils aillent l'un contre l'autre avec des vitesses égales ou inégales, ou qu'un seul des deux soit en mouvement, ou que tous deux aillent de même part, pourvu que la vitesse propre de chacun d'eux soit uniforme .... et, qu'étant en même distance lorsqu'ils commencent à se mouvoir, ils emploient des temps égaux à se rencontrer, c'est-à-dire pourvu que leur vitesse respective soit toujours la même....

Cette proposition se prouve facilement par l'expérience, si ces corps sont des boules de terre glaise médiocrement molle, en les faisant choquer avec de telles vitesses propres qu'on voudra, la vitesse respective demeurant toujours la même : car ces boules s'aplatiront toujours de la même façon. Elle se prouve aussi par les expériences que l'on peut faire dans un bateau qui va très vite sur l'eau, car si l'on pousse quelque corps avec la même force, soit du côté où le bateau va, soit vers le côté opposé, ou de travers, il choquera toujours de même force les corps qui sont dans le même bateau à distances égales; ce qui procède de ce que la vitesse respective est toujours la même, quoique la vitesse propre du corps qui choque et de celui qui est choqué ne soit pas toujours la même, à cause du mouvement du bateau ([144]).

. . . .

[Mariotte définit ensuite la quantité de mouvement par le produit du poids par la vitesse et il ajoute] :

Par poids d'un corps, on n'entend pas ici la vertu qui le fait mouvoir vers le centre de la Terre, mais son volume avec une certaine solidité ou condensation des parties de sa matière qui est vraisemblablement la cause de sa pesanteur ([145]).

. . . .

Cinquième principe d'expérience. Proposition VI. — Si les quantités de mouvement de deux corps sont égales lorsqu'ils se choquent directement, ils s'arrêteront l'un et l'autre et demeureront sans mouvement, s'ils s'attachent ensemble. Mais si les deux quantités de mouvement sont inégales, ils ne demeureront pas en repos immédiatement après le choc.

Faites que la boule I de la machine décrite en la première proposition soit double de la boule L et qu'elles se touchent quand elles seront au repos, sans s'appuyer l'une contre l'autre. Éloignez la plus grosse I de son point de repos par un arc de 10° et la moindre L par un arc de 20° selon la manière qui y est enseignée. Laissez-les aller en même temps, afin qu'elles se rencontrent lorsque leurs centres seront arrivés en leurs points de repos, auquel moment elles se choqueront directement avec des quantités de mouvement égales ([146]). . . . Alors vous verrez toutes deux demeurer sans mouvement. . . . Mais si l'on augmente un peu le poids ou la vitesse d'une des boules, on verra qu'elle emportera l'autre un peu au delà de son point de repos. . . .

Avertissement. — Ce principe d'expérience ou règle de la nature. . . . est presque la même chose que ce principe de Mécanique : les corps dont les poids et distances sont réciproques en une balance font équilibre ([147]).

. . . .

([144]) On trouve ici un souvenir des idées d'Huygens. *Voir* § 3 de ce Chapitre.

([145]) Mariotte entrevoit ici la distinction entre les notions de *masse* et de *poids*.

([146]) Parce que les vitesses acquises sur un arc de 20° et sur un arc de 10° sont à peu près doubles l'une de l'autre, comme cela résulte des lois de la chute des corps et du fait que les arcs de 20° et de 10° sont petits. Mariotte fait explicitement remarquer que cette approximation est suffisante au point de vue expérimental.

([147]) C'est là, sans doute, un souvenir des idées de Wren. *Cf.* § 2 de ce Chapitre.

Sixième principe d'expérience. Proposition X (148). — Si un corps mol sans ressort choque directement un autre corps mol et sans ressort, les deux ensemble étant joints après le choc iront de même part que le corps choquant et la quantité de mouvement des deux ensemble sera égale à la quantité de mouvement de ce corps avant le choc.

. . . .

Septième principe d'expérience. Proposition XI. — Si deux corps mols sans ressort vont de même part avec des vitesses inégales et que le plus vite rencontre l'autre directement, ils auront ensemble, après qu'ils seront joints, une quantité de mouvement égale à la somme des quantités de mouvement des deux corps avant le choc.

Cette proposition se prouve par l'expérience comme la précédente par le moyen de la machine décrite en la première proposition.

. . . .

Huitième principe d'expérience. Proposition XII. — Si deux corps mols sans ressort, égaux ou inégaux, se rencontrent directement, allant l'un contre l'autre avec des vitesses égales ou inégales, et que leurs quantités de mouvement soient inégales avant le choc, la moindre quantité de mouvement se perdra entièrement et il s'en perdra autant de l'autre et les deux corps joints ensemble n'auront plus que la quantité de mouvement restante, c'est-à-dire la différence des deux quantités de mouvement avant le choc. . . .

Faites que les deux boules de terre glaise L et I soient d'un poids égal et les faites rencontrer avec des vitesses inégales, élevant la boule I jusqu'au vingtième degré vers I′ et la boule L jusqu'au dixième vers L′, afin que la vitesse de la boule I soit double de celle de l'autre boule avant le choc. Alors vous les verrez aller ensemble après leur rencontre jusqu'à ce que le fil de suspension de la boule L soit reporté au cinquième degré.

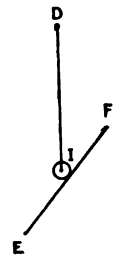
. . . .

Neuvième principe d'expérience. Proposition XIV. — S'il y a un corps inébranlable à ressort qui ait changé sa figure et se soit

(148) Tous les principes d'expérience qui suivent sont donnés par Mariotte comme démontrés par le moyen de son appareil décrit plus haut.

mis en ressort par le choc d'un corps dur et inflexible, en se restituant et reprenant sa première figure il redonnera à ce corps la

Fig. 58.



même vitesse qu'il avait immédiatement avant le choc. . . .

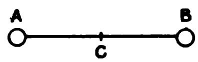
[Pour faire connaître la vérité de cette proposition par l'expérience, Mariotte prend un pendule DI dont la boule I est en jaspe ou en verre poli. Il le fait osciller de sorte qu'au point le plus bas, la boule I rencontre une corde à boyau tendu EF (perpendiculaire au plan de la figure, vue en perspective). La boule est alors repoussée et remonte sensiblement au point d'où elle descend : la petite différence provient de la résistance de l'air.]

. . . .

Proposition XV. — Si deux corps à ressort se choquent directement avec des vitesses réciproques à leurs poids, chacun de ces corps retournera en arrière avec sa première vitesse.

Soient premièrement A et B deux ballons égaux où l'air soit

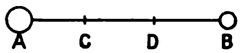
Fig. 59.



également pressé et qu'ils se rencontrent avec des vitesses égales AC, BC. Je dis qu'ils se réfléchiront avec les mêmes vitesses. Car, par la proposition sixième, leur mouvement simple doit se perdre entièrement, et il ne se réparerait point s'ils n'avaient point de ressort. Mais les ballons s'étant choqués chacun avec la même force et ne cédant point l'un à l'autre, leur choc fera le même effet que si chacun d'eux avait rencontré un corps inflexible et inébranlable, et par conséquent ils s'enfonceront l'un l'autre et s'aplatiront de même. Mais en reprenant leur première figure par le ressort, ils reprendront, au moment de leur restitution entière, la même vitesse qu'ils avaient avant le choc, par la proposition précédente. Donc chacun d'eux retournera en arrière avec la même vitesse qu'il avait avant le choc. La même chose arrivera à des boules de jaspe, de verre, d'ivoire, ou d'autre matière ayant un ressort prompt et ferme, par les mêmes raisons.

Soient maintenant deux boules à ressort inégales en poids A et B et que, la figure AB étant divisée au point C, AC soit la vitesse de

Fig. 60.



la boule A et BC celle de la boule B, et que, réciproquement, BC représente le poids de la boule A et AC celui de l'autre boule. Il est évident par la sixième proposition que, si elles se rencontraient avec des vitesses contraires, leur mouvement simple se perdrait, mais, par les mêmes raisons que ci-dessus, elles se mettront en ressort comme si elles avaient rencontré des corps flexibles et inébranlables, et, faisant encore une espèce d'équilibre entre elles en prenant des vitesses réciproques à leurs poids, chacune retournera en arrière avec sa première vitesse....

L'expérience s'en fera facilement avec la machine décrite en la première proposition si l'on se sert de boules d'ivoire au lieu de celles de terre glaise....

Conséquence. — Il s'ensuit que deux corps à ressort, qui se sont rencontrés directement, partagent par le mouvement de ressort la vitesse respective de leur choc selon la raison réciproque de leurs poids, quelques vitesses propres qu'ils aient eu avant le choc. Car, si les boules A et B se rencontrent en quelque autre point de la ligne AB, comme D, avec les vitesses propres AD, BD, leur vitesse respective sera la même que lorsqu'elles se choquent au point C, par la troisième définition.

Mais, par la troisième proposition, l'impression du ressort qu'elles feront l'une sur l'autre sera la même et par conséquent elles prendront une force de ressort aussi prompte et aussi ferme. Or, lorsqu'elles se rencontrent en C, elles partagent leur vitesse respective AB selon la proportion réciproque de leur poids, puisque la boule A prend la vitesse AC et B la vitesse BC. Donc, se rencontrant au point D, elles partageront de même leur vitesse respective, qui est la même que celle avec laquelle elles se rencontrent au point C, et ce partage se fera indépendamment de leur mouvement simple, quel qu'il puisse être.

. . . .

Proposition XVI. — Si deux corps à ressort sont égaux et que l'un choque directement l'autre en repos, ce dernier prendra la vitesse entière de l'autre après le choc et le fera rester sans mouvement.

Soient deux ballons égaux A et B et que le ballon A choque l'autre en B avec quelque vitesse qu'on voudra, qu'on appellera de 4 degrés. Je dis que le ballon A demeurera en repos après le choc et que l'autre ballon perdra la même vitesse de 4 degrés. Car, par la dixième proposition, ces ballons, après le choc et sur la fin de leur aplatissement, prendraient ensemble une vitesse de 2 degrés par le mouvement simple s'ils étaient sans ressort et qu'ils demeurassent en leur aplatissement. Mais, par la troisième proposition, la force du choc en B est égale à celle qui se fait en C par les deux corps mis l'un contre l'autre avec des vitesses égales. Donc, ils se mettent en ressort de même, et, par la conséquence de la précédente, ces ballons partageront également la vitesse respective qui a produit le ressort, laquelle étant de 4 degrés.... chacun en perdra 2 degrés. Donc, le ballon A devait s'avancer avec une vitesse de 2 degrés par le mouvement simple et retourner en arrière avec une vitesse de 2 degrés par le mouvement de ressort, l'un de ces mouvements détruira l'autre.... et le ballon A demeurera en repos. Mais le ballon B, s'avançant avec une vitesse de 2 degrés par le mouvement simple et prenant encore une vitesse de 2 degrés, de même part, par le mouvement de ressort, il aura après le choc une vitesse de 4 degrés.

. . . .

[La seconde partie du Traité de Mariotte est surtout consacrée à la recherche du *centre de percussion* (*voir* Chap. III). Nous en extrayons les démonstrations suivantes qui sont fort intéressantes pour montrer comment le lien s'est établi entre la Statique et la Théorie du choc par un rapprochement entre la *force* et la *quantité de mouvement*.]

Proposition VII. — ABCD est un cylindre creux, dont les deux bases AD, BC sont de bois et le reste de cuir soutenu et étendu par plusieurs cerceaux de bois ou de fil de fer, comme FE, HI, LM, en sorte qu'on puisse faire abaisser la base AD fort près de la base BC, supposée inébranlable : N est un tuyau ajusté à la

Fig. 61.

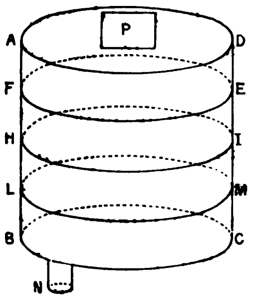
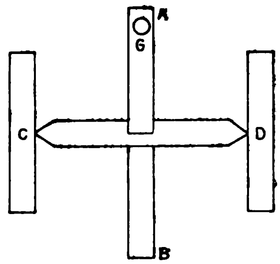


Fig. 62.



base BC, par où l'air enfermé dans le cylindre peut sortir : ce cylindre est chargé d'un poids P sur la surface AD, et l'on ajuste au-dessous de ce cylindre une balance comme celle de la figure 62, en sorte que, la règle AB étant située horizontalement, son extrémité B soit fort près du tuyau N et directement au-dessous.

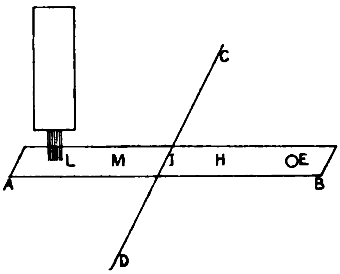
Cela étant, je dis que, si l'on met un poids G sur l'autre côté de la balance dont l'essieu CD est supposé tourner facilement sur les points C et D et que l'air, que le poids P descendant fait sortir avec violence par le tuyau N, choquant l'extrémité de la balance vers B, fasse équilibre avec le poids G supposé également distant de l'essieu CD, ce poids sera au poids P en même raison que la surface de l'ouverture du tuyau N est à la surface entière de la base BC. Car si, par le moyen d'un soufflet dont le tuyau soit égal au tuyau N, on pousse de l'air contre l'ouverture N, avec une force égale à celle de l'air que le poids P fait sortir, il se fera équilibre entre ces deux forces et le poids P ne descendra point, parce qu'il ne sortira point d'air par l'ouverture du tuyau N. Alors l'air poussé par le soufflet remplissant cette ouverture soutiendra sa part du poids P, comme les autres parties de la base BC soutiennent le reste de ce poids. Et la partie que l'air poussé soutiendra sera au poids entier P dans la proportion de l'ouverture N à la largeur entière de la base BC. Donc réciproquement l'air sortant par cette ouverture après qu'on aura ôté le soufflet fera équilibre par son choc avec un poids qui sera au poids P comme l'ouverture N est à la base BC ([149]).

. . . .

Proposition XIII. — Si deux poids ayant une égale quantité de mouvement tombent sur une balance de part et d'autre du centre de mouvement, en des points également distants du centre, ils feront équilibre au moment du choc; et si les points où ils choquent la balance sont inégalement distants du centre de mouvement, ils ne feront pas équilibre; mais si leurs quantités de mouvement sont en raison réciproque des distances inégales, ils feront équilibre au moment du choc.

Ayez une balance comme AB (*fig.* 63), tournant sur l'essieu

Fig. 63.



CD; mettez deux poids égaux sur cette balance aux points E et L, également distants du centre de mouvement I; ces poids feront équilibre par les règles de la Mécanique. Otez un des poids qui était au point L et, par le moyen d'un vaisseau cylindrique fort large...., faites tomber sur le même point L un jet d'eau qui fasse équilibre avec le poids en E, comme il a été enseigné en la proposition VII de la deuxième Partie; et, au lieu du poids qui est au point E, faites-y tomber un autre jet d'eau égal au premier : il est évident que ces jets d'eau feront équilibre entre eux, et qu'y ayant autant de particules d'eau qui choquent en même temps en l'un qu'en l'autre, celles de l'un auront ensemble une

([149]) Je laisse au lecteur le soin de moderniser le raisonnement de Mariotte par application du théorème des quantités de mouvement projetées sur l'axe de l'ajutage. Il convient, bien entendu, de négliger les pertes de charge dans l'ajutage N.

quantité de mouvement égale à celles de l'autre ensemble, puisqu'on suppose qu'elles vont avec une même vitesse. Il est encore manifeste que si deux petits corps égaux entre eux et sans ressort sont de même poids que ces premières particules d'eau et choquent la balance aux mêmes points, en même temps, avec des vitesses égales, ils feront aussi équilibre et auront des quantités de mouvement égales avant le choc.

Mettez ensuite les deux premiers poids en des distances inégales, comme en L et en H; le poids en L emportera le poids en H, et, parce que le jet en L faisait équilibre avec le poids en E et que ce poids, étant en H, ne fait plus équilibre avec le poids en L, il ne fera pas non plus équilibre avec le jet en L; et, par la même raison, si le jet qui, tombant en E, faisait équilibre avec le jet tombant en L, est transporté pour tomber en H, il cessera de faire équilibre avec l'autre jet, et de même à l'égard des petits corps égaux qui tomberaient en même temps avec des vitesses égales aux points L et H. Or, si les premiers poids sont entre eux en raison réciproque des distances LI, HI, ils feront équilibre étant en L et H. Mais, par ce qui a été dit dans la proposition VII de la deuxième Partie, si MI est égale à IH et qu'on fasse tomber au point M un jet dont l'ouverture soit à l'ouverture d'un des premiers jets comme le poids nouveau mis en H est à l'un des premiers poids mis en L, il fera équilibre avec ce poids mis en H; et s'il est transporté en H, il fera alors équilibre avec le premier poids mis en L; et si, au lieu de ce poids en L, on y fait tomber un des premiers jets, il y aura encore équilibre entre ces deux jets inégaux, parce que chacun d'eux fait le même effort que les poids avec lesquels ils sont en équilibre à distances égales. Il paraît donc qu'afin que deux corps qui tombent sur une balance deçà et delà du centre de mouvement en même temps fassent équilibre au moment du choc, il est nécessaire que les distances des points où ils tombent soient en raison réciproque de leurs quantités de mouvement (150).

(150) Les jets sont supposés issus de deux tonneaux identiques et identiquement chargés; seules les ouvertures N diffèrent, et les quantités du mouvement sont proportionnelles à ces ouvertures. — Ce résultat sera utilisé plus tard par Jacques Bernoulli.

§ 2. — Wren et la balance.

Voici la Note même que Wren (1632-1723) a présentée au concours à la Société Royale et qui a été publiée dans les *Philosophical Transactions* (n° 43, 11 janvier 1668). Elle concerne uniquement les corps parfaitement élastiques et est écrite en latin.

LOI DE LA NATURE CONCERNANT LE CHOC DES CORPS.

Les vitesses propres et les plus naturelles des corps sont inversement proportionnelles aux corps.

Loi de la nature. — *C'est pourquoi deux corps* R *et* S, *animés de leurs vitesses propres, les conservent après le choc.*

Et deux corps R *et* S, *animés de vitesses qui ne sont pas leurs vitesses propres, sont ramenés à l'équilibre par le choc. Voici ce que cela signifie : avant le choc, la vitesse de* R *dépasse sa vitesse propre d'une certaine quantité; celle de* S *est inférieure à la sienne de la même quantité; par le choc, cette quantité est ajoutée à la vitesse propre de* S *et retranchée de celle de* R (151).

Donc le choc de deux corps animés de leurs vitesses propres équivaut (*æquipollet*) à une balance oscillant sur son centre de gravité.

Et le choc de deux corps animés de vitesses qui ne sont pas leurs vitesses propres équivaut à une balance réciproque posée sur deux centres également distants du centre de gravité : le fléau de la balance est tracé où il est besoin. [*Et collisio* (152) *corporum improprias velocitates habentium æquipollet libræ reciprocanti super bina centra æqualiter huic inde a centro gravitatis distantia; libræ vero jugum ubi opus est producitur* (153).]

---

(151) J'ai traduit ce passage en le développant un peu, le texte latin ne me paraissant pas très clair.

(152) Je donne ici le texte latin, qui me paraît assez obscur.

(153) Qu'entend au juste Wren quand il dit que le choc des corps *équivaut à une balance?* c'est assez obscur. Voici ce que j'ai compris.

Qu'on se reporte aux figures tracées un peu plus loin par Wren pour résumer ses règles. Qu'on examine notamment la première de celles qui se rapportent au

Par conséquent, il y a trois cas pour le choc des corps égaux animés de vitesses qui ne sont pas leurs vitesses propres.

Pour le choc des corps inégaux animés, soit dans le même sens soit en sens inverse, de vitesses qui ne sont pas leurs vitesses propres, il y en a 10, les 5 derniers se déduisant des 5 premiers par renversement.

Soient R, S deux corps égaux, ou bien R le corps le plus grand, S le plus petit; *a* le centre de gravité ou couteau de la balance; Z la somme des vitesses des deux corps [154].

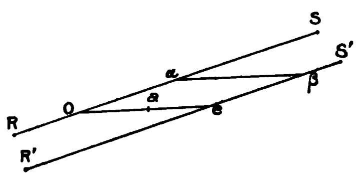
---

choc de deux corps inégaux, c'est-à-dire celle qui convient quand les corps ont leurs vitesses propres. R*a* représente la vitesse du corps R, S*a* celle du corps S, et les corps R et S sont dans le rapport de S*a* à R*a*. La même figure pourrait représenter une balance dont le couteau serait en *a* et qui serait en équilibre avec les poids R et S placés aux extrémités du fléau RS.

Mais il y a certainement, dans l'esprit de Wren quand il fait le rapprochement entre le choc des corps et la balance, autre chose que cette simple analogie d'un dessin. Évidemment, Wren remarque que, dans la balance en équilibre, il y a égalité entre les produits des poids par ce que nous appelons aujourd'hui les *vitesses virtuelles,* comme, dans le choc des corps animés de leurs vitesses propres, il y a égalité entre les produits des poids par les vitesses de choc. Sa pensée est certainement bien exprimée par ce que dit Mariotte dans le passage signalé par la note 147.

Pour les cas où les corps n'ont pas leurs vitesses propres, voici, à ce que je crois, le problème de Statique que Wren fait correspondre au problème de choc. Considérons deux fléaux de balance, exactement superposés dans la position

Fig. 64.



horizontale, l'un R*o*S ayant son couteau en *o*, l'autre R'*e*S' égal au précédent, mais ayant son couteau en *e* (dans la figure 64, j'ai légèrement incliné ces deux fléaux pour qu'on ne les confonde pas). Ces deux fléaux sont réunis par une tringle $\alpha\beta$, articulée en α et β, qui assure leur parallélisme. En R et R' sont deux poids égaux au poids choquant, en S et S' deux poids égaux au poids choqué. Si l'on considère la position où les fléaux sont confondus suivant la même horizontale *oae*, les vitesses virtuelles des poids R et S sont proportionnelles aux vitesses des corps avant le choc, celles des poids R' et S' le sont aux vitesses après le choc. La balance est alors en équilibre, en vertu de la relation supposée entre les poids et les vitesses.

(154) Z est la *vitesse relative* des deux corps. Nous dirions plutôt aujourd'hui, en prenant pour toutes les vitesses la même direction positive, que Z est la *différence* des vitesses. Sur les figures ci-après Z est représentée par la longueur RS.

R*e* S*e*	vitesse du corps	R S	avant le choc donnée	ou	S*o* R*o*	vitesse du corps	S R	avant le choc donnée
*o*R *o*S	vitesse du corps	R S	après le choc cherchée	bien	*e*S *e*R	vitesse du corps	S R	après le choc cherchée

Règle **R*e*, S*e*** **donnent** ***o*R, *o*S**
» R*o*, S*o* » *e*S, *e*R.

Fig. 65.

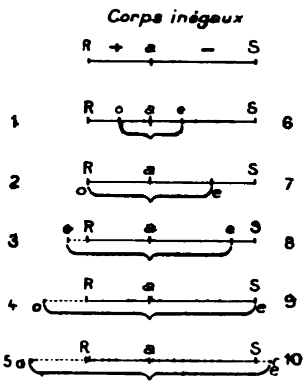
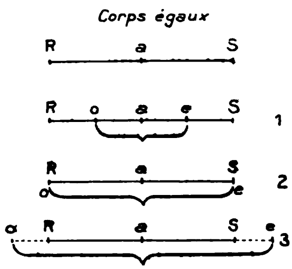


Fig. 66.



Lisez, bien qu'elles soient dissociées, les syllabes R*e*, S*e*, *o*R, *o*S, ou R*o*, S*o*, *e*S, *e*R sur la ligne qui correspond à chaque cas. Une syllabe écrite de droite à gauche indique un mouvement contraire à celui qui est indiqué par une syllabe écrite de gauche à droite. Une syllabe non dissociée indique le repos du corps.

Calcul :

$$\mathrm{R}+\mathrm{S} : \mathrm{S} :: \mathrm{Z} : \mathrm{R}a \qquad \mathrm{R}e - 2\mathrm{R}a = o\mathrm{R} \qquad \mathrm{S}o - 2\mathrm{S}a = e\mathrm{S}$$
$$\mathrm{R}+\mathrm{S} : \mathrm{R} :: \mathrm{Z} : \mathrm{S}a \qquad 2\mathrm{S}a \pm \mathrm{S}e = o\mathrm{S} \qquad 2\mathrm{R}a \pm \mathrm{R}o = o\mathrm{R}$$

§ 3. — Huygens et le mouvement relatif.

Les idées les plus intéressantes sur le problème du choc des corps ont été émises par Huygens (1629-1697). Le savant hollandais ne s'est pas borné d'ailleurs, sur ce sujet, à la Note qu'il a présentée au concours de la Société Royale; il a composé un traité complet : *De Motu corporum ex percussione* qui a été publié dans ses œuvres posthumes en 1700. C'est lui que nous citerons ici.

Hypothèses. — I. Un corps quelconque en mouvement, s'il ne rencontre aucun obstacle, tend à se mouvoir indéfiniment avec la même vitesse et en ligne droite.

II. Quelle que soit la cause pour laquelle deux corps durs rebondissent quand ils se choquent, nous faisons l'hypothèse suivante : si les deux corps sont égaux, si leurs vitesses sont égales, si ces vitesses sont de sens inverse, et si les deux corps se choquent directement, chacun rebondit avec une vitesse égale à celle qu'il avait avant le choc.

On dit que deux corps se choquent directement lorsque le mouvement a lieu suivant la droite joignant les deux centres de gravité et que le contact se produit sur cette droite.

III. Mouvement des corps, vitesses égales ou inégales, ces expressions doivent être entendues relativement à d'autres corps qui sont considérés comme au repos, quoiqu'il puisse arriver que les seconds et les premiers corps soient entraînés dans un mouvement commun. Et lorsque deux corps viennent se choquer, même si tous les deux sont soumis en outre à un autre mouvement commun uniforme, ils se repousseront l'un l'autre, pour un observateur entraîné dans ce mouvement commun, exactement comme si ledit mouvement parasite n'existait pas.

Ainsi, soit un expérimentateur qui, emporté par un navire dans un mouvement uniforme, fait choquer deux sphères égales animées par rapport à lui-même et au navire, de vitesses égales et de sens contraires. Nous disons que les deux corps rebondiront avec des vitesses égales par rapport au navire, exactement comme si l'on produisait le choc dans le navire au repos ou sur la terre ferme ([155]).

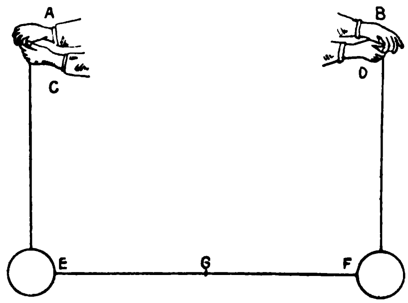
Ceci posé, nous démontrerons les lois qui régissent le choc des corps égaux. Nous poserons en leur lieu les hypothèses dont nous aurons besoin pour le cas des corps inégaux.

Proposition I. — Un corps étant en repos, si un corps égal vient le choquer, après le choc le second corps sera en repos et le premier aura acquis la vitesse qu'avait le second avant le choc.

([155]) En disciple de Descartes, Huygens estime que le mouvement est toujours relatif. C'est là le caractère principal du passage que nous citons ici. Nous le discutons en détail à la suite de cette citation.

Qu'on imagine un navire transporté le long de la rive par le courant d'un fleuve, et cela si près du bord qu'un passager se tenant dans ce navire puisse saisir les mains d'un aide se tenant sur la rive. Le passager tient dans ses deux mains A et B deux corps égaux E et F suspendus à des fils et dont la distance EF est partagée en deux parties égales par le point G. Déplaçant également ses deux mains l'une vers l'autre, par rapport à lui et au

Fig. 67.



navire, il fera se choquer les deux globes E, F avec des vitesses égales; ceux-ci rebondiront nécessairement avec des vitesses égales (hypothèse II) par rapport au passager et au navire. Mais pendant ce temps, le navire est supposé porté vers la droite avec une vitesse GE, égale à celle avec laquelle la main droite A est portée vers la gauche.

Par suite la main A du passager est immobile par rapport à la rive et à l'aide se tenant sur elle. Mais la main B, par rapport à cet aide, se déplace avec la vitesse EF double de GE ou FG. Supposons que l'aide se tenant sur la rive saisisse avec sa main C la main A du passager ainsi que l'extrémité du fil qui soutient le globe E, et avec sa main D la main B du passager qui soutient le fil auquel pend F. On voit que, tandis que le passager fait se rencontrer les sphères E et F avec des vitesses égales par rapport à lui et au navire, en même temps son aide se tenant sur la rive choque la sphère E immobile avec la sphère F animée de la vitesse FE, par rapport à lui et à la rive. Et il est certain que, pour le passager déplaçant ses sphères comme on l'a dit, il n'y a aucun obstacle à ce que son aide se tenant sur la rive lui saisisse les mains et les extrémités des fils, pourvu seulement qu'il accompagne leur mouvement et ne lui oppose aucun empêchement. De même, pour l'aide se tenant sur la rive et conduisant la sphère F contre la sphère immobile E, il n'y a aucun obstacle à ce que le passager joigne ses mains aux siennes, si toutefois les mains A et C sont en repos par rapport à la rive et à l'aide tandis que les mains D et B se meuvent avec la même vitesse FE.

Comme on l'a dit, les sphères E et F rebondissent, après le choc, avec des vitesses égales par rapport au passager et au navire : savoir la sphère E avec la vitesse GE et la sphère F avec la vitesse GF. Pendant ce temps le navire va vers la droite avec la vitesse GE ou FG. Donc, par rapport à la rive et à l'aide se tenant sur elle, le globe F reste immobile après le choc, et le globe E va vers la gauche avec une vitesse double de GE, soit avec la vitesse FE avec laquelle F a choqué E. Nous montrons donc que, pour un observateur se tenant sur la terre, lorsqu'un corps immobile est choqué par un corps égal, celui-ci perd après le choc tout son mouvement, que celui-là au contraire prend en entier.

C. Q. F. D.

Proposition II. — Si deux corps égaux, animés de vitesses inégales, viennent à se choquer, ils échangent leurs vitesses dans le choc.

[La démonstration est analogue à la précédente.]

. . . .

Hypothèse IV. — Si un corps vient choquer un autre corps plus petit et en repos, il lui communique un certain mouvement et perd une partie du sien (156).

---

(156) Il est possible de rattacher cette hypothèse IV à l'hypothèse faite plus loin sur la conservation des forces vives (*cf.* note 163). Ce n'est donc pas une hypothèse distincte.

Tout d'abord, en effet, une fois admis que le grand corps a mis le petit en mouvement, il est nécessaire, pour que les forces vives se conservent, que le grand perde une partie de sa vitesse.

Il reste à voir pourquoi le grand corps met en mouvement le petit. S'il ne le fait pas, il faut, pour la conservation des forces vives, qu'il conserve lui-même sa vitesse en valeur absolue : si donc il a la vitesse $\overline{v_0}$ avant le choc, il est animé, après le choc, de $\overline{v_0}$ ou de $\overline{-v_0}$. Il ne peut pas être animé de v_0, le second corps restant immobile, car celui-ci, par son impénétrabilité, empêche que le grand corps ne continue, après le choc, à se mouvoir comme avant. La vitesse du grand corps après le choc ne peut donc être que $\overline{-v_0}$. Mais considérons alors un navire animé de la vitesse $\overline{-v_0}$; par rapport à lui, la vitesse du grand corps passe de la valeur $2v_0$ à la valeur o; celle du petit reste égale à v_0, c'est-à-dire que les forces vives ne se conservent pas. On éliminera ce cas si l'on admet que les forces vives doivent se conserver *dans un système d'axes quelconque*. Il sera donc nécessaire que le petit corps soit mis en mouvement.

Proposition III. — Un corps aussi grand qu'on veut, s'il est choqué par un corps si petit qu'il soit animé d'une vitesse quelconque, est mis en mouvement par le choc ([157]).

[Démonstration toujours basée sur l'emploi du navire.]

....

Hypothèse V. — Soient deux corps durs venant se choquer; s'il arrive qu'après le choc l'un des deux conserve tout le mouvement qu'il avait avant, le mouvement de l'autre n'est non plus ni augmenté, ni diminué ([158]).

Proposition IV. — Toutes les fois que deux corps se choquent, leur vitesse relative est la même après le choc, quand ils s'éloignent, et avant le choc, quand ils se rapprochent.

Pour deux corps égaux, c'est évident en vertu de la proposition II. Soient maintenant deux corps inégaux et prenons d'abord le cas où le corps le plus grand A est choqué *au repos* par le corps le plus petit B, se déplaçant vers la droite avec une vitesse BA. Je dis qu'après le choc les deux corps se sépareront avec cette même vitesse BA; en d'autres termes, si le corps B a parcouru dans le temps 1 l'espace BA, au bout d'un second espace de temps égal à 1, les deux corps se trouveront distants d'une longueur égale à AB.

On sait en effet que A reçoit de l'impulsion du corps B une certaine vitesse. Soit AC cette vitesse; elle doit être inférieure à celle,

Fig. 68.

BA, avec laquelle B se déplaçait, car ce serait seulement si B était égal à A que A recevrait par le choc la vitesse BA (proposition I) ([159]).

([157]) Il est intéressant de remarquer que Huygens a jugé utile de démontrer ce résultat en s'appuyant sur une hypothèse, c'est-à-dire sur un résultat expérimental, concernant le choc d'un corps petit par un plus grand (hypothèse IV). Il est probable que, s'il a jugé cette démonstration nécessaire, c'est à cause de l'erreur de Descartes dans sa quatrième règle sur le choc (*voir* Chap. I, § 1).

([158]) A la vérité, cette hypothèse V n'est qu'un cas particulier de l'hypothèse de la conservation des forces vives, faite plus loin (*voir* note 163). Ce n'est pas une hypothèse distincte.

([159]) Ce raisonnement n'est pas entièrement probant. La proposition I nous apprend que, si B est égal à A, A reçoit par le choc la vitesse BA; ce n'est pas suffisant pour affirmer ce qu'affirme Huygens. Manifestement, Huygens considère

Divisons AC en deux parties égales par le point D et prenons AE = AD. Imaginons que ces mouvements se produisent dans un navire animé vers la gauche d'une vitesse DA; avant le choc, le corps A, qui était en repos par rapport au navire, avait nécessairement par rapport aux rives la vitesse DA vers la gauche; après le choc, comme le mouvement dans le navire se fait vers la droite avec la vitesse AC et que le navire se déplace en sens inverse avec la vitesse DA, A se mouvra, par rapport aux rives, avec la vitesse DC ou AD vers la droite. Par conséquent, par rapport aux rives, le corps conserve la même vitesse avant et après le choc. C'est pourquoi B, par rapport aux mêmes repères, ne doit rien perdre de sa vitesse (hypothèse V). D'autre part, avant le choc, B se déplaçait par rapport aux rives avec la vitesse BE vers la droite.... Donc, après le choc, il devra se mouvoir par rapport aux rives avec la vitesse BE, mais vers la gauche, car le mouvement plus lent de A empêche que ce ne soit vers la droite. Comme donc après le choc B se déplace, par rapport aux rives, avec la vitesse EB vers la gauche et A avec la vitesse AD ou EA vers la droite, nécessairement ces deux corps s'éloignent l'un de l'autre avec une vitesse composée de EB et de EA, c'est-à-dire avec la vitesse BE; et cela est vrai non seulement par rapport aux rives, mais aussi par rapport au navire, puisqu'ils se séparent réellement avec cette vitesse. On sait d'ailleurs que ce qui arrive à des corps se choquant dans un navire en mouvement arrive partout en dehors du navire de la même manière.

Ce cas démontré, les autres suivent facilement. Il y en a quatre différents : ou bien le corps le plus petit est au repos, ou bien les deux corps sont animés de mouvements contraires, ou bien le plus grand suit le plus petit avec une vitesse plus grande, ou bien le contraire. On peut traiter tous ces cas ensemble.

Supposons, comme plus haut, que A soit plus grand que B et qu'il ait une vitesse AC; supposons aussi que B ou bien soit tout

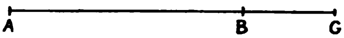
---

comme évident que, puisqu'un corps B égal à A lui imprime la vitesse BA, un corps B inférieur à A ne pourra lui imprimer qu'une vitesse inférieure à BA. Mais on pourrait déduire ce résultat de la loi de la conservation des forces vives, admise plus loin. Soit, en effet, un corps B de masse m en mouvement avec une vitesse v : sa force vive est $\frac{1}{2}mv^2$. S'il choque un corps A de masse $m' > m$, il ne peut lui imprimer une vitesse égale ou supérieure à v; car, s'il le faisait, la force vive de A, après le choc, serait supérieure à $\frac{1}{2}m'v^2$; celle de B serait au moins zéro. La force vive aurait donc crû dans le choc.

à fait en repos ou bien ait une vitesse BC. Lorsque les corps se meuvent ainsi, ils ont une vitesse relative AB. Je dis qu'après le choc ils se sépareront avec la même vitesse.

En effet, considérons de nouveau ces mouvements se produisant

Fig. 69.



dans un navire animé de la vitesse CA, la même que celle du corps A mais en sens inverse. Par rapport aux rives, A est évidemment immobile, et, dans tous les cas, B vient vers lui avec la vitesse BA. Mais A est plus grand que B; donc on se trouve dans le cas précédent et l'on sait qu'après le choc les deux corps se sépareront avec la même vitesse AB par rapport aux mêmes rives. D'où l'on voit qu'ils se sépareront l'un de l'autre avec cette même vitesse, même par rapport au navire et en réalité.

. . . .

Proposition VI. — Quand deux corps viennent se choquer, la quantité de mouvement de l'ensemble ne se conserve pas toujours après le choc égale à ce qu'elle était avant; elle peut augmenter ou diminuer ([160]).

[Cela résulte de tout ce qui précède.]

. . . .

Pour tous les cas possibles de choc entre deux corps égaux, on a fait voir dans quel rapport le mouvement de l'un se transmet à l'autre, en admettant que des corps égaux, se choquant avec des vitesses égales, rebondissent également. De même, pour les corps de toute grandeur, tous les cas, à la vérité très nombreux, pourront être résolus si l'on admet ce qui suit : « Quand deux corps inégaux viennent se choquer et que leurs vitesses sont en raison inverse de leurs grandeurs, l'un et l'autre sont repoussés par le choc avec une vitesse égale à celle qu'ils avaient en venant... ([161]). » D'ailleurs, comme cette proposition n'est pas aussi évidente que celle qui a été admise pour les corps égaux (bien qu'elle ne soit pas

([160]) Huygens entend ici la quantité de mouvement sans signe, comme Descartes, et la présente proposition a précisément pour objet de montrer l'erreur de Descartes sur ce point.

([161]) C'est ce qu'a fait Wren.

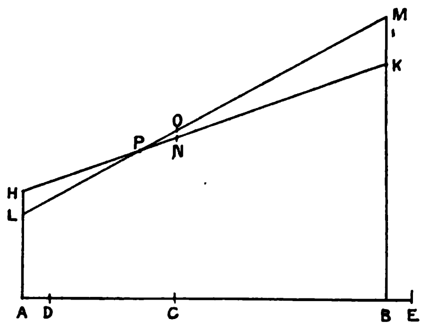
contraire à la raison et qu'elle soit bien d'accord avec l'expérience), nous nous efforcerons de la démontrer.

On sait que, toutes les fois que deux corps graves descendent d'un mouvement naturellement accéléré, les espaces qu'ils parcourent sont en raison doublée des plus grandes vitesses qu'ils ont acquises. Cela a été démontré par Galilée, dans son troisième dialogue sur le mouvement, et prouvé par des expériences innombrables et excellentes; il en est de même du fait que la vitesse acquise par un corps en tombant peut le faire remonter à la même hauteur d'où il est descendu. On trouvera des démonstrations de ces deux résultats dans nos écrits sur l'horloge ([162]). Par eux, on pourra maintenant démontrer le théorème énoncé plus haut.

Proposition VIII. — Si deux corps, se déplaçant en sens inverse, viennent se choquer avec des vitesses en raison inverse de leurs grandeurs, chacun rebondit avec la même vitesse qu'il avait avant le choc.

Soient deux corps venant à la rencontre l'un de l'autre A et B, le premier étant le plus grand. La vitesse BC du corps B est à la vitesse AC du corps A dans le même rapport que la grandeur A à

Fig. 70.



la grandeur B. Nous voulons montrer que, après le choc, chaque corps retournera avec la vitesse qu'il avait avant, savoir A avec la vitesse CA, B avec la vitesse CB. Il est certain, d'ailleurs, que, si A est réfléchi avec la vitesse CA, B le sera avec la vitesse CB, sans quoi la vitesse relative des deux corps ne serait pas la même quand ils s'approchent et quand ils s'éloignent (prop. IV). Suppo-

([162]) On trouvera des extraits de ces écrits plus loin (Chap. III).

sons donc que le corps A ne soit pas réfléchi avec la vitesse CA; et admettons d'abord qu'il le soit, si c'est possible, avec une vitesse moindre CD. B rebondira alors avec une vitesse CE, supérieure à sa vitesse avant le choc, de manière que DE soit égal à AB (prop. IV). Imaginons que le corps A ait acquis sa première vitesse AC, dont il était animé avant le choc, en tombant d'une hauteur HA et que, après être descendu en A, il ait changé son mouvement vertical en mouvement horizontal de vitesse AC; imaginons aussi que le corps B ait acquis de même sa vitesse BC en tombant d'une hauteur KB. Ces hauteurs sont en raison doublée des vitesses, c'est-à-dire que HA est à KB comme le carré de AC au carré de CB. Que si, ensuite, après le choc, les corps A et B changent leurs mouvements horizontaux, dont les vitesses sont mesurées par CD et CE, en mouvements verticaux vers le haut, on sait que A parviendra à une hauteur AL qui sera à AH comme le carré de CD au carré de CA.... et que B.... parviendra à une hauteur BM qui sera à KB comme le carré de CE est au carré de CB. Joignons HK, LM qui se coupent nécessairement au point P et divisons ces deux droites par les points N et O de manière que HN soit à NK et LO à OM comme la grandeur B à A. Lorsque le centre de gravité de A est en H et celui de B en K, leur centre de gravité commun est N. Mais après que H et K sont tombés et que, après le choc, ils se sont relevés jusqu'en L et M, leur centre de gravité commun est en O. Or, cela est impossible, car nous montrerons bientôt que O est plus élevé que N, et c'est un axiome très certain de Mécanique que, dans le mouvement des corps provenant de leur gravité, leur centre commun de gravité ne peut s'élever ([163]).

On peut montrer comme suit que O est plus élevé que N.

[On a ([164])

$$\overline{CE}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{BE}^2 + 2\,BC.BE = BE\,(BC + CE),$$

$$\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + 2\,AD.CD = AD\,(AC + CD).$$

([163]) Voir le Traité *Horologium oscillatorium* (Chapitre suivant). En somme Huygens admet ici, en adoptant le langage moderne, que la somme des forces vives se conserve pendant le choc. Et l'on remarquera qu'il admet implicitement cette conservation *dans tous les systèmes d'axes,* puisqu'il appliquera plus tard sa proposition VIII aux chocs se produisant dans un navire quelconque.

([164]) Nous substituons ici les notations modernes au raisonnement, un peu lourd, d'Huygens.

Donc

$$\frac{\overline{CE}^2 - \overline{BC}^2}{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2} = \frac{BC + CE}{AC + CD}.$$

Or

$$BC + CE > 2BC,$$
$$AC + CD < 2AC.$$

Donc

(1) $$\frac{\overline{CE}^2 - \overline{BC}^2}{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2} > \frac{BC}{AC},$$

mais on sait que

$$\frac{\overline{CE}^2}{\overline{CD}^2} = \frac{BM}{AL}, \qquad \frac{\overline{BC}^2}{\overline{CD}^2} = \frac{BK}{AL}, \qquad \frac{\overline{AC}^2}{\overline{CD}^2} = \frac{AH}{AL}.$$

Donc

$$\frac{\overline{CE}^2 - \overline{BC}^2}{\overline{CD}^2} = \frac{MK}{AL}, \qquad \frac{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2}{\overline{CD}^2} = \frac{HL}{AL}$$

et

$$\frac{\overline{CE}^2 - \overline{BC}^2}{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2} = \frac{MK}{HL}.$$

La relation (1) montre alors que

$$\frac{MK}{HL} > \frac{BC}{AC}.$$

Or

$$\frac{MK}{HL} = \frac{MP}{LP}$$

et

$$\frac{BC}{AC} = \frac{MO}{LO}.$$

Donc

$$\frac{MP}{LP} > \frac{MO}{LO}$$

ou enfin

$$LO > LP.$$

Le point O est donc, par rapport à P, du côté de MK. Il est donc au-dessus de N. C'est ce qui restait à démontrer.]

Admettons maintenant que le corps A soit réfléchi, si c'est possible, avec une vitesse CD supérieure à celle CA qu'il avait avant le choc. CD sera d'ailleurs moindre que CB, vitesse de B avant le choc; en effet, ce serait seulement si B n'était pas inférieur, mais égal à A, que A s'éloignerait après le choc avec une vitesse CB (prop. II).

De plus, B sera réfléchi après le choc avec une vitesse CE telle que DE soit égal à AB.... [La suite de la démonstration est analogue à celle qui précède.]....

Peut-il arriver qu'après le choc A s'arrête et que B soit seul réfléchi? Il le sera alors avec la vitesse AB, puisque telle était la vitesse relative des deux corps avant le choc (prop. IV).... [Huygens démontre par un raisonnement analogue à celui qui précède que cette hypothèse est inadmissible.]....

Peut-on dire enfin que le corps A continue à se mouvoir après le choc dans le même sens qu'avant avec une vitesse CF? S'il en est ainsi, cette vitesse CF ne sera pas plus grande que celle AC qu'il avait avant le choc ([165]). D'ailleurs, le corps B devra précéder A avec une vitesse CG dépassant CF d'une quantité FG égale à AB (prop. IV). On verra par le raisonnement suivant que cela n'est pas possible. Prenons CD égal à CF et DE égal à AB. Donc, ED surpasse CE de la même quantité que CG surpasse FG ou ED. En supposant, comme dans le premier cas, que le corps A revient en arrière après le choc avec une vitesse CD, on montre que même la vitesse CE ne peut être attribuée au corps B sans qu'on soit conduit à l'absurdité suivante : « Les mouvements horizontaux étant changés en mouvements verticaux, le centre de gravité

Fig. 71.

commun des corps s'élèvera à une hauteur plus grande que celle d'où il est descendu. » *A fortiori* parvient-on à la même absurdité si le corps B acquiert une vitesse CG beaucoup plus grande que CE, le corps A en ayant une CF égale à CD elle-même. Donc, après le choc, le corps A ne continue pas son mouvement dans le même sens. C'est pourquoi il ne reste plus que la solution suivante : A retourne en arrière avec la vitesse CA avec laquelle il se déplaçait avant le choc et, par suite, B rebondit aussi avec la vitesse CB.

C. Q. F. D.

[Ce théorème étant démontré, Huygens traite facilement tous les cas de choc entre deux corps inégaux en les ramenant, par l'artifice du navire, au cas qui fait l'objet de la proposition VIII.]

([165]) Cela peut se déduire facilement de la conservation des forces vives et de la proposition IV. C'est d'ailleurs inutile pour ce qui suit.

Ce qu'il y a de particulièrement intéressant, à mon avis, dans le Traité qui précède, c'est la tentative faite par Huygens de construire une théorie mécanique fondée sur la notion de *relativité du mouvement*.

Qu'Huygens pensât que le mouvement ne peut se considérer que relativement, c'est ce qui ne fait aucun doute. Il me suffira, pour le montrer, de citer, à côté de ce qu'il dit plus haut dans son hypothèse III, les passages suivants empruntés à sa correspondance ([166]).

Je montrerais que le mouvement d'un corps peut être en même temps véritablement égal et véritablement accéléré selon qu'on rapporte son mouvement à d'autres différents corps (Lettre n° 1688, année 1668?).

Selon moi, le repos et le mouvement ne peuvent être considérés que relativement, et le même corps qu'on dit être en repos à l'égard de quelques-uns peut être dit se mouvoir à l'égard des autres corps et même il n'y a pas plus de réalité de mouvement dans l'un que dans l'autre (Lettre n° 1754, 10 août 1669).

Et s'il ne veut pas m'accorder que le mouvement et le repos ne se peuvent considérer que relativement, je le prie de me dire et définir ce que c'est l'un ou l'autre à les prendre *absolute* et sans relation (Lettre n° 1770, 30 octobre 1669).

Dans les applications, Huygens n'a pas conservé dans leur intégrité ces idées générales ([167]); il n'a pas complètement éliminé de sa Mécanique la notion de mouvement absolu. *L'énoncé qu'il donne, dans son hypothèse I, du principe connu aujourd'hui sous le nom de* principe de l'inertie *la suppose*. Et dans son hypothèse III où il pose tout d'abord si nettement la relativité du mouvement, il restreint ensuite son affirmation en supposant que le mouvement d'entraînement commun est uniforme (*æquabilis*).

Et cependant il n'est pas douteux qu'il y a dans la théorie

([166]) Voir *Œuvres complètes* d'Huygens publiées par la Société hollandaise des Sciences.

([167]) Quoi d'étonnant à cela d'ailleurs, de la part d'un homme qui a presque été le contemporain de Galilée et des grandes luttes soutenues à propos de la rotation ou de l'immobilité de la Terre?

du choc beaucoup de choses indépendantes, comme l'a voulu Huygens, de la notion de mouvement absolu. Il y en a même plus qu'Huygens lui-même ne paraît l'avoir vu, plus peut-être que dans la plupart des théories mécaniques, et cela grâce à l'*instantanéité* du phénomène du choc. C'est ce que nous allons montrer en examinant, au point de vue de la relativité du mouvement, les diverses hypothèses d'Huygens.

Nous commencerons par nous occuper de la relativité de l'espace. Nous dirons un mot ensuite de la relativité du temps.

Nous envisagerons uniquement le mouvement du centre de gravité des corps choquants, indépendamment de ce qu'on appelle aujourd'hui le mouvement autour du centre de gravité. Nous supposerons les corps assez petits pour que ce mouvement autour du centre de gravité soit négligeable au point de vue de la force vive. Nous n'aurons donc pas à nous préoccuper des hypothèses faites par Huygens sur le fait que le choc est direct, hypothèses grâce auxquelles il peut considérer les corps comme animés de translations. En considérant ces corps comme des points, nous laissons de côté cette question accessoire.

Il reste alors, comme hypothèses fondamentales adoptées par Huygens : 1° l'hypothèse I, c'est-à-dire le principe de l'inertie; 2° une série d'hypothèses qui se réduisent (on peut s'en convaincre en se reportant aux notes 156, 158 et 163) à la suivante : « Les forces vives se conservent pendant le choc, et cela quel que soit le système d'axes auquel on rapporte le mouvement. » Huygens, à la vérité, limite l'indétermination des axes à des axes animés d'un mouvement absolu de translation uniforme. Nous allons voir que cette introduction de l'idée de mouvement absolu est inutile.

On peut se proposer de rechercher ce que le principe de l'inertie contient d'indépendant du système d'axes : c'est une étude que nous ferons dans la seconde Partie de cet Ouvrage. Elle est inutile pour l'objet qui nous occupe ici, parce que, en somme, l'hypothèse I ne joue aucun rôle dans la théorie d'Huygens. Le savant hollandais étudie les variations de vitesse que produit le phénomène instantané du choc; il ne s'occupe pas de la nature du mouvement (uniforme, uniformément accéléré, rectiligne, curviligne, etc.) avant ou après le choc. Pour ses raisonnements, il utilise divers systèmes de référence, les navires qu'il considère comme animés les uns par rapport aux autres de translations uniformes; mais la seule chose qui importe c'est la vitesse d'entraînement, au moment du choc, du point où se produit le choc; il n'est nullement nécessaire que ces translations soient uniformes, il ne l'est même pas que les mouvements respectifs des navires soient des translations, et le système de référence primitif peut être quelconque.

Il est facile de voir, en effet, que la variation de vitesse produite par le choc est indépendante du système d'axes adopté comme système de comparaison. Soient $\overline{v_0}$ et $\overline{v_1}$ les vitesses avant et après le choc d'un des corps choquants, prises par rapport à un système d'axes arbitraire choisi comme primitif, $\overline{v_{r0}}$, $\overline{v_{r1}}$ les mêmes vitesses par rapport à un second système *absolument quelconque*, $\overline{v_e}$ la vitesse, par rapport au premier système et à l'instant du choc, du point du deuxième système où se produit le choc. Les équipollences

$$\overline{v_0} = \overline{v_{r0}} + \overline{v_e}, \tag{1}$$

$$\overline{v_1} = \overline{v_{r1}} + \overline{v_e} \tag{2}$$

montrent que les différences géométriques $\overline{v_0} - \overline{v_1}$ et $\overline{v_{r0}} - \overline{v_{r1}}$ sont égales. La même chose serait vraie pour le second corps choquant dont les vitesses seront désignées par $\overline{v'_0}$, $\overline{v'_1}$, $\overline{v'_{r0}}$, $\overline{v'_{r1}}$.

Examinons maintenant à quelles conditions le principe de la conservation des forces vives peut s'énoncer pour un système d'axes quelconque.

Notons m et m' les masses des corps. Dans le premier système, la conservation des forces vives s'écrit

$$mv_0^2 + m'v_0'^2 = mv_1^2 + m'v_1'^2. \tag{3}$$

Cette égalité (3) étant vérifiée, à quelle condition la conservation des forces vives sera-t-elle vraie pour le second système, c'est-à-dire à quelle condition aura-t-on aussi

$$(4) \qquad mv_{r0}^2 + m'v_{r0}'^2 = mv_{r1}^2 + m'v_{r1}'^2 ?$$

L'égalité (3) peut s'écrire

$$m(v_0^2 - v_1^2) + m'(v_0'^2 - v_1'^2) = 0,$$

ou, en faisant intervenir la notion de produit géométrique,

$$\overline{m(\overline{v_0} - \overline{v_1})} \cdot \overline{(\overline{v_0} + \overline{v_1})} + \overline{m'(\overline{v_0'} - \overline{v_1'})} \cdot \overline{(\overline{v_0'} + \overline{v_1'})} = 0.$$

Tenant compte de (1), (2), il vient

$$\overline{m(\overline{v_{r0}} - \overline{v_{r1}})} \cdot \overline{(\overline{v_{r0}} + \overline{v_{r1}})} + \overline{m'(\overline{v_{r0}'} - \overline{v_{r1}'})} \cdot \overline{(\overline{v_{r0}'} + \overline{v_{r1}'})}$$
$$+ 2m\overline{v_e} \cdot \overline{(\overline{v_0} - \overline{v_1})} + 2m'\overline{v_e} \cdot \overline{(\overline{v_0'} - \overline{v_1'})} = 0,$$

ou encore

$$mv_{r0}^2 - mv_{r1}^2 + m'v_{r0}'^2 - m'v_{r1}'^2 + 2m\overline{v_e} \cdot \overline{(\overline{v_0} - \overline{v_1})}$$
$$+ 2m'\overline{v_e} \cdot \overline{(\overline{v_0'} - \overline{v_1'})} = 0.$$

Pour que (4) soit vérifiée, il faut et il suffit que

$$2\overline{v_e} \cdot \overline{[m(\overline{v_0} - \overline{v_1}) + m'(\overline{v_0'} - \overline{v_1'})]} = 0.$$

Cette relation exprime que le vecteur

$$m(\overline{v_0} - \overline{v_1}) + m'(\overline{v_0'} - \overline{v_1'})$$

a une projection nulle sur le vecteur $\overline{v_e}$. Cette propriété doit être exacte quel que soit le second système d'axes, c'est-à-dire quel que soit le vecteur $\overline{v_e}$. Il faut et il suffit pour cela que le vecteur $m(\overline{v_0} - \overline{v_1}) + m'(\overline{v_0'} - \overline{v_1'})$ soit nul.

Ce résultat peut s'énoncer de deux manières. Ou bien on peut dire que le vecteur $m\overline{v_0} + m'\overline{v_0'}$, c'est-à-dire *la quantité mouvement* entendue avec une direction et un sens, doit se conserver dans le choc. C'est la loi de Wallis convenablement généralisée.

Ou bien on peut dire que les vecteurs $m(\overline{v_0} - \overline{v_1})$ et $m'(\overline{v_0'} - \overline{v_1'})$ doivent être égaux et directement opposés. Cet énoncé est particulièrement instructif. Nous savons, en effet, que ces deux vecteurs sont entièrement indépendants du système de comparaison; ils ont, si l'on peut dire, une valeur absolue. Et leur signification est facile à trouver en faisant intervenir la notion de force. Désignons par ε la durée, très petite, du choc, et admettons, avec Galilée, que les forces sont proportionnelles aux variations de vitesse produites dans un temps donné. Remarquons d'ailleurs que cette définition des forces, si elle suppose la notion d'espace absolu quand on l'applique à une variation de vitesse de même ordre que le temps et que le chemin parcouru dans ce temps, ne la suppose plus du tout dans le cas du choc où la variation instantanée de vitesse est la même dans tous les systèmes d'axes. Les vecteurs $\frac{m(\overline{v_0}-\overline{v_1})}{\varepsilon}$ et $\frac{m'(\overline{v'_0}-\overline{v'_1})}{\varepsilon}$ sont alors les forces moyennes développées par le choc au contact des corps choquants. La condition à laquelle nous sommes parvenus est donc que les forces au contact soient deux à deux égales et directement opposées, c'est-à-dire obéissent au principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

Il nous suffira maintenant d'un mot pour traiter de la relativité du temps. Si t est le temps mesuré avec une certaine horloge, θ le temps mesuré avec une autre horloge, une vitesse quelconque, mesurée par le nombre v avec le temps t, devient $v\frac{dt}{d\theta}$ avec le temps θ. Quand on passe d'un temps à l'autre, les différences géométriques de vitesse sont multipliées par $\frac{dt}{d\theta}$, les forces vives par $\left(\frac{dt}{d\theta}\right)^2$. Le choc étant d'ailleurs instantané, ces facteurs sont les mêmes après et avant. Si donc l'égalité (3) est vraie avec une certaine horloge, elle l'est avec une autre quelconque.

Il convient de faire une remarque. Tout ce qui précède, aussi bien ce qui est relatif aux systèmes d'axes que ce qui est relatif aux horloges, suppose essentiellement que les seconds repères ne subissent pas de changements brusques par rapport aux premiers : c'est à cette condition que $\overline{v_e}$ et que $\frac{dt}{d\theta}$ sont les mêmes avant et après le choc. C'est la seule restriction à nos raisonnements.

En résumé, la théorie du choc d'Huygens repose uniquement sur l'hypothèse que les forces vives se conservent dans le choc des corps élastiques, et cela quels que soient les repères auxquels on rapporte le mouvement. Et cette hypothèse peut se décomposer en deux. Il suffit d'admettre la conservation des forces vives dans un système d'axes particuliers, avec une horloge quelconque, et de poser ensuite le principe de l'égalité de l'action et de la réaction. Or, la conservation des forces vives peut être considérée comme démontrée expérimentalement par l'observation des chocs à *la surface de la Terre,* par le fait que, dans une telle observation, on voit le centre de gravité des corps pesants remonter à la hauteur d'où il est tombé, et pas plus haut : c'est ainsi qu'Huygens la justifie.

Les considérations qui précèdent mettent en évidence un lien entre le principe de l'égalité de l'action et de la réaction et l'idée de l'impossibilité du mouvement perpétuel. C'est un point de vue que nous développerons plus tard.

CHAPITRE III.

LE CENTRE D'OSCILLATION.

§ 1. — Nature et histoire du problème.

Les recherches de Dynamique que nous avons citées jusqu'ici portent toutes sur le mouvement des corps assez petits pour pouvoir être considérés comme des points : elles ont toutes pour objet le mouvement du *point matériel*. Quand les corps ont des dimensions notables, on se trouve en présence de *systèmes*. Les problèmes de la *dynamique des systèmes* ont naturellement été abordés après ceux de la dynamique du point.

Le premier problème [168] et le plus simple de ce genre dont les géomètres se soient occupés est celui du centre d'oscillation. Ce problème a été fameux au commencement du siècle dernier [169] et même dès le milieu du précédent, par les efforts et les tentatives que les plus grands géomètres ont faits pour en venir à bout; et comme c'est principalement à ces tentatives qu'on doit les progrès immenses que la Dynamique a faits depuis, je crois devoir en donner ici une histoire succincte, pour montrer par quels degrés cette Science s'est élevée à la perfection où elle paraît être parvenue dans ces derniers temps.

Les lettres de Descartes offrent les premières traces des recherches sur le centre d'oscillation [170]. On y voit que Mersenne

(168) Citation de *Lagrange* (*Mécanique analytique,* 2e Partie, 1re section).

(169) Ceci était publié au début du XIXe siècle.

(170) *Voir* les lettres de l'année 1646 (*Édition des Œuvres de Descartes,* par Adam et Tannery, Correspondance, t. IV).

avait proposé aux géomètres de déterminer la grandeur que doit avoir un corps de figure quelconque, pour que, étant suspendu par un point, il fasse ses oscillations dans le même temps qu'un fil de longueur donnée et chargé d'un seul poids à son extrémité. Descartes observe que cette question a quelque rapport avec celle du centre de gravité et que, de même que, dans un corps pesant qui tombe librement, il y a un centre de gravité autour duquel les efforts de la pesanteur de toutes les parties du corps se font équilibre, en sorte que ce centre descend de la même manière que si le reste du corps était anéanti ou qu'il fût concentré dans le même centre; ainsi, dans les corps pesants qui tournent autour d'un axe fixe, il doit y avoir un centre, qu'il appelle *centre d'agitation,* autour duquel les forces d'*agitation* de toutes les parties du corps se contre-balancent, de manière que ce centre, étant libre de l'action de ces forces, puisse être mû comme il le serait si les autres parties du corps étaient anéanties ou concentrées dans ce même centre; que, par conséquent, tous les corps dans lesquels ce centre sera également éloigné de l'axe de rotation feront leur vibration dans le même temps.

D'après cette notion du centre d'agitation, Descartes donne une méthode générale de le déterminer dans les corps de figure quelcoque; cette méthode consiste à chercher le centre de gravité des forces d'agitation de toutes les parties du corps, en estimant ces forces par les produits des masses multipliées par les vitesses, qui sont ici proportionnelles aux distances à l'axe de rotation, et en supposant que les parties du corps soient projetées sur le plan qui passe par son centre de gravité et par l'axe de rotation, de manière qu'elles conservent leurs distances à cet axe.

Cette solution de Descartes devint un sujet de contestations entre lui et Roberval. Celui-ci prétendait qu'elle n'était bonne que lorsque toutes les parties du corps sont réellement ou peuvent être censées placées dans un même plan passant par l'axe de rotation, que dans tous les autres cas il ne fallait considérer que les mouvements perpendiculaires au plan passant par l'axe de rotation et par le centre de gravité du corps, et qu'on devait rapporter chaque particule au point où ce plan est rencontré par la direction du mouvement de cette particule, direction qui est toujours perpendiculaire au plan mené par cette particule et par l'axe de rotation. Mais il est facile de prouver que, par rapport à l'axe de rotation, les moments des forces estimées de cette manière sont toujours égaux à ceux des forces estimées suivant la méthode de Descartes ([171]).

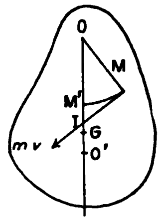
Roberval prétendit, avec plus de fondement, que Descartes n'avait cherché que le centre de percussion, autour duquel les chocs ou les moments de percussion sont égaux, et que, pour trouver le vrai centre d'oscillation d'un pendule pesant, il fallait aussi avoir égard à l'action de la gravité, en vertu de laquelle le pendule se meut ([172]). Mais, cette recherche étant supérieure à la

---

([171]) Lagrange fait ici une erreur. En réalité l'objection de Roberval était fondée et sa correction exacte.

Prenons, pour fixer les idées, une figure plane oscillant autour d'un axe O perpendiculaire à son plan, et soit OG passant par le centre de gravité. Le problème proposé est de composer toutes les forces d'agitation, la force d'agitation du point M étant un vecteur égal à mv appliqué au point M. Pour faire cette composition,

Fig. 72.



Descartes prend les moments autour de O, et il cherche, sur OG, un point O' tel qu'une force appliquée en ce point et égale à la somme des forces d'agitation ait même moment par rapport à O que toutes les forces d'agitation. Cela revient, comme le fait remarquer Lagrange, à rabattre (Lagrange dit *projeter*) M en M' sur OG par un arc de cercle MM', et à supposer que la force mv est appliquée en M' perpendiculairement à OG. Au contraire Roberval considère la force mv comme appliquée en I; il n'envisage que la composante de mv normale à OG, la composante suivant OG étant détruite par la fixité de O, et il détermine le point O' par la condition qu'une force appliquée en ce point et égale à la somme des composantes des mv normales à OG ait même moment que toutes les forces mv.

On voit, par cette analyse, que Roberval compose plus correctement que Descartes les forces appliquées à un corps solide, et, effectivement, il trouve la position exacte du centre d'oscillation d'un secteur circulaire oscillant autour d'un axe perpendiculaire à son plan et passant par son centre. Il reste à voir pourquoi cette composition des *forces d'agitation* est bien la solution du problème du centre d'oscillation. Ce qu'en dit Descartes est insuffisant pour le prouver et l'on va voir par ce qui va suivre que Roberval a bien compris cette insuffisance.

([172]) « La pesanteur du corps est une puissance, disait Roberval, l'agitation en est une autre, quoiqu'elle soit causée par la pesanteur, et chacune de ces puissances a sa force, sa direction et son centre propres et particuliers, qui servent à examiner le centre composé de ces différentes puissances. » A quoi Descartes essayait de répondre : « Le mot de centre de gravité est relatif aux corps qui se

Mécanique de ces temps-là, les géomètres continuèrent à supposer tacitement que le centre de percussion était le même que celui d'oscillation et Huygens fut le premier qui envisagea ce dernier centre sous son vrai point de vue... Ne pouvant résoudre ce problème par les lois connues du mouvement, il inventa un principe nouveau, mais indirect, lequel est devenu célèbre depuis sous le nom de *conservation des forces vives*.

2. Un fil, considéré comme une ligne inflexible sans pesanteur et sans masse, étant attaché par un bout à un point fixe et chargé, à l'autre bout, d'un petit poids qu'on puisse regarder comme réduit à un point, forme ce qu'on appelle un *pendule simple;* et la loi des vibrations de ce pendule dépend uniquement de sa longueur, c'est-à-dire de la distance entre le poids et le point de suspension. Mais, si à ce fil on attache encore un ou plusieurs poids à différentes distances du point de suspension, on aura alors un pendule composé dont le mouvement devra tenir une espèce de milieu entre ceux des différents pendules simples que l'on aurait si chacun de ces poids était suspendu seul au fil. Car, la force de la gravité tendant d'un côté à faire descendre tous les poids également dans le même temps, et de l'autre l'inflexibilité du fil les contraignant à décrire dans ce même temps des arcs inégaux et proportionnels à leurs distances du point de suspension, il doit se faire entre ces poids une espèce de compensation et de répartition de leurs mouvements; en sorte que les poids qui sont les plus proches du point de suspension hâteront les vibrations des plus éloignés, et ceux-ci, au contraire, retarderont les vibrations des premiers. Ainsi il y aura dans le fil un point où, un corps étant placé, son mouvement ne serait ni accéléré ni retardé par les autres poids, mais serait le même que s'il était seul suspendu au fil. Ce point sera donc le vrai centre d'oscillation du pendule composé, et un tel centre doit se trouver aussi dans tout corps solide, de quelque figure que ce soit, qui oscille autour d'un axe horizontal.

Huygens vit qu'on ne pouvait déterminer ce centre d'une ma-

---

meuvent librement; dans le cas du pendule, c'est une chimère », et cependant, dans sa solution, il se servait, lui aussi, du centre de gravité pour déterminer la droite OG où il rabattait ses points M. On voit que Roberval a vu beaucoup plus juste que Descartes en affirmant que rien ne permettait de dire que le centre d'agitation coïncidait avec le centre d'oscillation : on sait aujourd'hui qu'il en est bien ainsi, mais Descartes ne l'a nullement démontré.

nière rigoureuse sans connaître la loi suivant laquelle les différents poids du pendule composé altèrent mutuellement les mouvements que la gravité tend à leur imprimer à chaque instant; mais, au lieu de chercher à déduire cette loi des principes fondamentaux de la Mécanique, il se contenta d'y suppléer par un principe indirect, lequel consiste à supposer que, si plusieurs poids, attachés comme l'on voudra à un pendule, descendent par la seule action de la gravité, et que, dans un instant quelconque, ils soient détachés et séparés les uns des autres, chacun d'eux, en vertu de la vitesse acquise pendant sa chute, pourra remonter à une telle hauteur que le centre commun de gravité se trouvera remonté à la même hauteur d'où il était descendu. A la vérité Huygens n'établit pas ce principe immédiatement, mais il le déduit de deux hypothèses qu'il croit devoir être admises comme des demandes de Mécanique : l'une, c'est que le centre de gravité d'un système de corps pesants ne peut jamais remonter à une hauteur plus grande que celle d'où il est tombé, quelque changement qu'on fasse à la disposition mutuelle des corps, parce que, autrement, le mouvement perpétuel ne serait plus impossible; l'autre, c'est qu'un pendule composé peut toujours remonter de lui-même à la même hauteur d'où il est descendu librement. Au reste, Huygens remarque que le même principe a lieu dans le mouvement des corps pesants liés ensemble d'une manière quelconque, comme aussi dans le mouvement des fluides.

On ne saurait deviner ce qui a donné à cet auteur l'idée d'un tel principe; mais on peut conjecturer qu'il y a été conduit par le théorème que Galilée avait démontré sur la chute des corps pesants, lesquels, soit qu'ils descendent verticalement ou sur des plans inclinés, acquièrent toujours des vitesses capables de les faire remonter aux mêmes hauteurs d'où ils étaient tombés. Ce théorème, généralisé et appliqué au centre de gravité d'un système de corps pesants, donne le principe d'Huygens.

Quoi qu'il en soit, ce principe fournit une équation entre la hauteur verticale d'où le centre de gravité du système est descendu dans un temps quelconque et les différentes hauteurs verticales auxquelles les corps qui composent le système pourraient remonter avec leurs vitesses acquises, et qui, par les théorèmes de Galilée, sont comme les carrés de ces vitesses. Or, dans un pendule qui oscille autour d'un axe horizontal, les vitesses des différents points sont proportionnelles à leurs distances de l'axe; ainsi on peut réduire l'équation à deux seules inconnues, dont l'une soit la descente du centre de gravité du pendule dans un temps quelconque, et dont l'autre soit la hauteur à laquelle un point donné de ce pendule pourrait remonter par sa vitesse acquise. Mais la descente du centre de gravité détermine celle de tout autre point du pendule; donc on aura une équation entre la hauteur d'où un point quelconque du pendule est descendu et celle à laquelle il pourrait remonter par sa vitesse due à cette chute. Dans le centre d'oscillation, ces deux hauteurs doivent être égales, parce que les corps libres peuvent toujours remonter à la même hauteur d'où ils sont tombés; et l'équation fait voir que cette égalité ne peut avoir lieu que dans un point de la ligne perpendiculaire à l'axe de rotation et passant par le centre de gravité du pendule, lequel soit éloigné de cet axe de la quantité qui provient en multipliant tous les poids qui composent le pendule par les carrés de leurs distances à l'axe et divisant la somme de ces produits par la masse du pendule multipliée par la distance de son centre de gravité au même axe. Cette quantité exprimera donc la longueur d'un pendule simple dont le mouvement serait égal à celui du pendule composé.

Cette théorie d'Huygens est exposée dans l'*Horologium oscillatorium* (1673) et elle y est accompagnée d'un grand nombre de savantes applications [173]. Elle n'aurait rien laissé à désirer si elle n'avait pas été appuyée sur un principe précaire, et il restait toujours à démontrer ce principe pour la mettre hors de toute atteinte.

En 1681 parurent, dans le *Journal des Savants de Paris,* quelques mauvaises objections contre cette théorie, auxquelles Huygens ne répondit que d'une manière vague et peu satisfaisante. Mais cette contestation, ayant excité l'attention de Jacques Bernouilli, lui donna occasion d'examiner à fond la théorie d'Huygens et de chercher à la rappeler aux premiers principes de la Dynamique. Il ne considère d'abord que deux poids égaux attachés à une ligne inflexible et droite, et il remarque que la vitesse que le premier poids, celui qui est le plus près du point de suspension, acquiert en décrivant un arc quelconque doit être moindre que celle qu'il aurait acquise en décrivant librement le même arc, et qu'en même temps la vitesse acquise par l'autre poids doit être

---

([173]) Nous citons plus loin de nombreux fragments de l'*Horologium oscillatorium.*

plus grande que celle qu'il aurait acquise en parcourant le même arc librement. La vitesse perdue par le premier poids s'est donc communiquée au second, et, comme cette communication se fait par le moyen d'un levier mobile autour d'un point fixe, elle doit suivre la loi de l'équilibre des puissances appliquées à ce levier, de manière que la perte de vitesse du premier poids soit au gain de vitesse du second dans la raison réciproque des bras de levier, c'est-à-dire des distances au point de suspension. De là, et de ce que les vitesses réelles des deux poids doivent être elles-mêmes dans la raison directe de ces distances, on détermine facilement ces vitesses et, par conséquent, le mouvement du pendule.

3. Tel est le premier pas qui ait été fait vers la solution directe de ce fameux problème. L'idée de rapporter au levier les forces résultantes des vitesses gagnées ou perdues par les poids est très fine et donne la clef de la vraie théorie; mais Jacques Bernouilli s'est trompé en considérant les vitesses acquises pendant un temps quelconque fini, au lieu qu'il n'aurait dû considérer que les vitesses élémentaires acquises pendant un instant et les comparer avec celles que la gravité tend à imprimer pendant le même instant. C'est ce que L'Hôpital a fait depuis dans un écrit inséré dans le *Journal de Rotterdam* de 1690. Il suppose deux poids quelconques attachés au fil inflexible qui fait le pendule composé, et il établit l'équilibre entre les quantités de mouvement perdues et gagnées par ces poids dans un instant quelconque, c'est-à-dire entre les différences des quantités de mouvement que les poids acquièrent réellement dans cet instant, et de celles que la gravité tend à leur imprimer. Il détermine, par ce moyen, le rapport de l'accélération instantanée de chaque poids à celle que la gravité seule tend à lui donner et il trouve le centre d'oscillation en cherchant le point du pendule pour lequel ces deux accélérations seraient égales. Il étend ensuite sa théorie à un plus grand nombre de poids; mais il regarde pour cela les premiers comme réunis successivement dans leur centre d'oscillation, ce qui n'est plus si direct ni ne peut être admis sans démonstration ([174]).

Cette analyse fit revenir Jacques Bernouilli sur la sienne et donna enfin lieu à la première solution directe et rigoureuse du pro-

([174]) On peut même ajouter que cette méthode conduit à des résultats inexacts.
J. Bertrand.

blème des centres d'oscillation, solution qui mérite d'autant plus l'attention des géomètres qu'elle contient le germe de ce principe de Dynamique qui est devenu si fécond entre les mains de d'Alembert.

L'auteur considère ensemble les mouvements que la gravité imprime à chaque instant aux corps qui composent le pendule, et, comme ces corps, à cause de leur liaison, ne peuvent les suivre, il conçoit les mouvements qu'ils doivent prendre comme composés des mouvements imprimés et d'autres mouvements, ajoutés ou retranchés, qui doivent se contre-balancer, et en vertu desquels le pendule doit demeurer en équilibre. Le problème se trouve ainsi ramené aux principes de Statique et ne demande plus que le secours de l'analyse. Jacques Bernouilli trouva, par ce moyen, des formules générales pour les centres d'oscillation des corps de figure quelconque, en fit voir l'accord avec le principe d'Huygens et démontra l'identité des centres d'oscillation et de percussion. Cette solution avait été ébauchée, dès 1691, dans les *Actes de Leipsick;* mais elle n'a été donnée d'une manière complète qu'en 1703, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* (175).

9. Pour ne rien laisser à désirer sur cette histoire du problème du centre d'oscillation, je devrais rendre compte de la solution que Jean Bernouilli en a donnée ensuite dans les mêmes Mémoires et qui, ayant été donnée aussi à peu près en même temps par Taylor dans l'Ouvrage intitulé *Methodus incrementorum,* a été l'occasion d'une vive dispute entre ces deux géomètres; mais, quelque ingénieuse que soit l'idée sur laquelle est fondée cette nouvelle solution et qui consiste à réduire tout d'un coup le pendule composé en pendule simple, en substituant à ses différents poids d'autres poids réunis dans un seul point, avec des masses et des pesanteurs fictives telles qu'elles produisent les mêmes accélérations angulaires et les mêmes moments par rapport à l'axe de rotation et que la pesanteur totale des poids réunis soit égale à leur pesanteur naturelle, on doit néanmoins avouer que cette idée n'est ni si

(175) Nous citons plus loin un passage du Mémoire de Jacques Bernouilli.

On voit, par ces analyses de Lagrange, qu'on pourrait rattacher les travaux d'Huygens sur le centre d'oscillation au courant énergétique et ceux de Jacques Bernouilli, qui invoquent le levier, au courant statique (Chap. I, § 3).

naturelle ni si lumineuse que celle de l'équilibre entre les quantités de mouvement acquises et perdues ([176]).

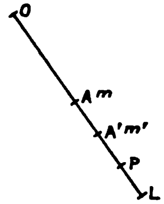
On trouve encore dans la *Phoronomia* d'Herman, publiée en 1716, une nouvelle manière de résoudre le même problème, et qui est fondée sur cet autre principe, que les forces motrices dont les poids qui forment le pendule doivent être animés pour

---

([176]) Voici quelques indications sur cette solution de Jean Bernouilli.

Prenons l'exemple suivant : deux poids A et A', de masses m et m', portés par

Fig. 73.



une verge OAA', oscillent autour de O. Bernouilli remarque que le moment de la pesanteur de m par rapport à O est le même que celui d'un poids de masse $m\dfrac{\overline{OA}^2}{\overline{OP}^2}$, placé en un point P arbitrairement choisi sur la verge, et soumis à une pesanteur $g\dfrac{OP}{OA}$. Il remplace alors les deux poids A et A' par deux poids $m\dfrac{\overline{OA}^2}{\overline{OP}^2}$ et $m'\dfrac{\overline{OA'}^2}{\overline{OP}^2}$ placés en P et soumis respectivement aux pesanteurs $g\dfrac{OP}{OA}$ et $g\dfrac{OP}{OA'}$: il *admet que l'oscillation sera la même*. Au lieu de ces pesanteurs différentes, il suppose ensuite une pesanteur moyenne x donnant le même poids total, donc définie par

$$m\frac{\overline{OA}^2}{\overline{OP}^2}g\frac{OP}{OA}+m'\frac{\overline{OA'}^2}{\overline{OP}^2}g\frac{OP}{OA'}=\frac{m\overline{OA}^2+m'\overline{OA'}^2}{\overline{OP}^2}x.$$

On est donc ramené à un pendule simple dont la masse est $\dfrac{m\overline{OA}^2+m'\overline{OA'}^2}{\overline{OP}^2}$ et la pesanteur x.

Or, on sait que les pendules simples dont les longueurs sont en raison directe des pesanteurs sont isochrones. Le pendule OP peut donc être remplacé par un pendule OL, soumis à la pesanteur g, pourvu que

$$\frac{OL}{OP}=\frac{g}{x}.$$

Donc

$$OL=\frac{m\overline{OA}^2+m'\overline{OA'}^2}{m\,OA+m'\,OA'}.$$

pouvoir être mus conjointement sont équivalentes à celles qui proviennent de l'action de la gravité; en sorte que les premières, étant supposées dirigées en sens contraire, doivent faire équilibre à ces dernières.

Ce principe n'est, dans le fond, que celui de Jacques Bernouilli présenté d'une manière moins simple, et il est facile de les rappeler l'un à l'autre par les principes de la Statique. Euler l'a rendu ensuite plus général et s'en est servi pour déterminer les oscillations des corps flexibles, dans un Mémoire imprimé en 1740, dans le Tome VII des anciens Commentaires de Saint-Pétersbourg.

§ 2. — Huygens et l'impossibilité du mouvement perpétuel.

Étudions de plus près le texte même d'Huygens. Voici une analyse de l'Ouvrage, paru en 1673, intitulé *Horloge oscillante ou démonstrations géométriques relatives à l'application aux horloges du mouvement des pendules* (*Horologium oscillatorium, sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricæ*).

PREMIÈRE PARTIE.

CONTENANT LA DESCRIPTION DE L'HORLOGE.

[L'horloge décrite ici par Huygens est munie d'un pendule cycloïdal. C'est dans le Traité intitulé *Horologium* que Huygens décrit l'horloge avec pendule circulaire.]

DEUXIÈME PARTIE.

DE LA CHUTE DES GRAVES ET DE LEUR MOUVEMENT SUR LA CYCLOIDE.

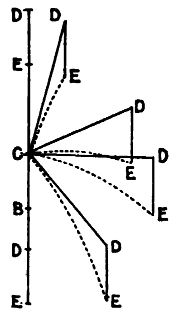
Hypothèses. — I. *S'il n'y avait ni gravité ni résistance de l'air, un corps quelconque, une fois mis en mouvement, continuerait à se mouvoir avec une vitesse uniforme et en ligne droite.*

II. *L'action de la gravité, quelle que soit son origine, donne aux corps un mouvement composé, formé du mouvement uniforme qu'ils possèdent dans telle ou telle direction et du mouvement vers le bas dû à la gravité.*

III. *On peut considérer chacun de ces mouvements à part; l'un n'empêche pas l'autre* ([177]).

Soit un grave C abandonné au repos. Au bout d'un temps F, il aura parcouru, par la force de la gravité, le chemin CB. Imaginons

Fig. 74.



que ce grave ait reçu de quelque autre part un mouvement qui, si la gravité était nulle, lui ferait décrire dans le temps F d'un mouvement uniforme le chemin CD en ligne droite. La force de la gravité intervenant, le corps n'ira pas dans le temps F de C en D, mais bien en un point E situé au-dessous de CD et tel que DE soit toujours égal à CB. En d'autres termes, E sera tel que le mouvement uniforme et le mouvement dû à la gravité s'effectueront chacun en entier dans sa direction, l'un n'empêchant pas l'autre. On apprendra à définir, par la suite de cet Ouvrage, la ligne décrite par le grave dans ce mouvement composé lorsque le mouvement uniforme n'est pas dirigé verticalement vers le haut ou vers le bas, mais en oblique. Lorsque le mouvement uniforme CD est dirigé verticalement de haut en bas, on voit que la ligne CD est, par l'intervention de la gravité, accrue de DE. De même, lorsque le mouvement uniforme CD est dirigé de bas en haut, CD est diminué de DE, de sorte que, au bout du temps F, le grave se trouvera toujours en E. Si, dans l'un et l'autre cas, nous considérons séparément, comme nous l'avons dit, les deux mouvements, et si nous admettons qu'ils ne se gênent mutuellement

([177]) Ce sont là en somme les principes de Galilée combinés avec ceux de Descartes. Ils sont énoncés d'une manière plus absolue et plus générale que chez le savant florentin ; on reconnaît là l'influence du philosophe français.

en aucune manière, nous pourrons trouver la cause et les lois de l'accélération dans la chute des graves.

[Huygens développe ensuite les lois de la chute *rectiligne* des corps pesants. Il montre que leur mouvement est uniformément accéléré en superposant à chaque instant le mouvement uniforme antérieurement acquis et l'effet de la gravité qui est de faire parcourir, dans l'unité de temps, à un grave, partant du repos en un point quelconque de l'espace, une longueur toujours bien déterminée (178). Il ajoute :]

Il faut savoir que tout ce qui a été démontré jusqu'ici s'applique aux graves descendant et montant sur des plans inclinés comme à ceux qui se meuvent verticalement; car les hypothèses qui ont été faites sur l'action de la gravité doivent être admises dans l'un et l'autre cas.

Il ne sera pas difficile maintenant de démontrer la proposition suivante que Galilée a demandé qu'on lui concédât comme évidente de soi. En effet, la démonstration qu'il s'est efforcé d'en apporter ultérieurement et qui se trouve dans la dernière édition de ses œuvres est, selon mon jugement, peu solide (179). Voici cette proposition.

Proposition VI. — Les vitesses acquises par des graves en descendant sur des plans diversement inclinés sont égales si les hauteurs des plans le sont.

Nous appelons *hauteur d'un plan* son altitude comptée sur la verticale.

Soient donc deux plans inclinés dont les sections par un plan vertical sont AB, CD. Leurs hauteurs AE, CD sont égales. Un grave tombe de A en suivant le plan AB ou bien de C en suivant CD. Je dis que dans les deux cas la vitesse acquise en B est la même.

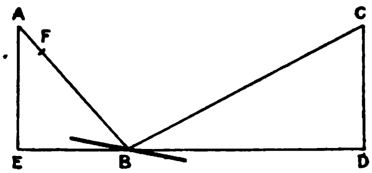
---

(178) Huygens déduit le mouvement accéléré des graves du principe de l'inertie et de celui de la composition des mouvements. La chute libre des corps pesants lui apparaît comme un cas particulier de la parabole des projectiles. Galilée n'avait pas fait un tel rapprochement, très instructif, parce qu'il n'avait pas énoncé les principes d'une manière assez générale. Nous avons déjà dit que certains auteurs, comme M. Wohlwill, pensent même qu'il eût été tout à fait contraire aux idées fondamentales de Galilée d'appliquer la loi de la composition des mouvements à un corps pesant animé d'une impulsion non horizontale. La chose est au contraire toute naturelle avec les idées de Descartes sur l'inertie. *Cf.* Chap. I, § 1, et note 123.

(179) *Voir* note 119.

En effet, si, en tombant suivant CD, le corps acquérait une vitesse plus faible qu'en tombant suivant AB, il acquerrait par exemple dans cette descente CB la même vitesse que dans une

Fig. 75.



descente FB inférieure à AB. Mais il acquerrait suivant CB précisément la vitesse qui pourrait le faire remonter tout le long de BC ([180]). Donc il acquerrait suivant FB la vitesse qui pourrait le faire remonter suivant BC; ce résultat pourrait être obtenu par la réflexion sur une surface oblique; le corps monterait donc jusqu'en C, c'est-à-dire plus haut que le point d'où il est tombé, ce qui est absurde.

On montrera de même qu'en descendant suivant AB le corps ne peut acquérir une vitesse moindre que suivant CB. Donc il acquiert la même vitesse suivant l'un et l'autre plan ([181]).

C. Q. F. D.

[Ce théorème permet à Huygens d'étudier le mouvement sur des plans diversement inclinés. Il démontre en particulier le théorème suivant :]

Proposition IX. — Si le mouvement d'un grave, au bas de sa chute, se retourne vers le haut, il remonte à la hauteur d'où il est tombé, quels que soient les plans contigus suivant lesquels il remonte, quelle que soit l'inclinaison de ces plans.

Soit un grave tombant de la hauteur AB, et soient, à partir de B et vers le haut, des plans inclinés BC, CD, DE dont l'extrémité E

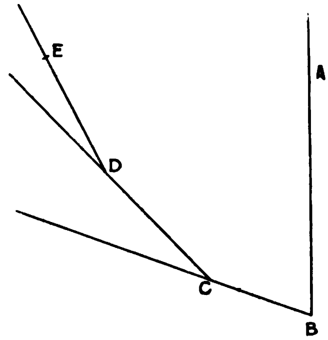
([180]) Cette proposition a été démontrée par Huygens dans l'étude de la chute rectiligne des corps, étude que nous avons supprimée de notre citation.

([181]) C'est une application de l'hypothèse I de la quatrième Partie.

Si l'on compare ce qu'il dit ici avec le passage de Galilée signalé par la note 119, on voit qu'Huygens remplace par l'idée physique de l'impossibilité du mouvement perpétuel l'idée physique de la proportionnalité de la force statique à l'accélération.

est à la même altitude que A. Je dis que, si le mobile, après sa chute

Fig. 76.



suivant AB, retourne son mouvement pour suivre lesdits plans inclinés, il parviendra en E.

. . . .

[Il nous paraît inutile de reproduire la démonstration de ce théorème.

De là Huygens passe naturellement à la considération du mouvement des points pesants sur une courbe, et en particulier sur une cycloïde, celle-ci étant considérée comme formée par une infinité de plans inclinés successifs.]

TROISIÈME PARTIE.

DU DÉVELOPPEMENT ET DE LA DIMENSION DES LIGNES COURBES.

[Dans cette partie, Huygens crée la théorie des développantes et développées. Il démontre notamment que la développée d'une cycloïde est une cycloïde égale.]

QUATRIÈME PARTIE.

DU CENTRE D'OSCILLATION.

. . . .

On appelle *centre d'oscillation* ou *d'agitation* d'une figure quelconque un point situé sur la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur l'axe d'oscillation à une distance de cet axe égale à la longueur du pendule simple synchrone du pendule composé formé par la figure étudiée.

. . . .

Hypothèses. — I. *Si des poids en nombre quelconque commencent à se mouvoir sous l'influence de leur gravité, leur centre de gravité ne peut pas monter plus haut que le point où il se trouvait au début du mouvement.*

La hauteur doit être comptée suivant la distance à un plan horizontal, et l'on suppose dans les graves une tendance à la descente vers ce plan suivant des droites qui lui sont perpendiculaires. Tout cela, ou bien est posé expressément par tous ceux qui ont traité du centre de gravité, ou bien doit être suppléé par le lecteur; sans cela, en effet, il n'y a pas lieu de considérer le centre de gravité.

Quant à notre hypothèse, pour qu'elle ne soulève pas de difficulté, nous ferons voir qu'elle ne contient qu'une affirmation qui n'a jamais été niée par personne, à savoir que les graves ne peuvent pas monter. En effet, considérons d'abord un seul corps grave; il est hors de doute que la force de sa gravité ne pourra pas le faire monter, et il faut entendre que le corps *monte* quand son centre de gravité monte. Mais on est obligé d'admettre le même résultat pour des poids en nombre quelconque réunis entre eux par des lignes inflexibles, parce que rien n'empêche de considérer leur ensemble comme un poids unique; c'est pourquoi leur centre de gravité commun ne pourra pas non plus s'élever.

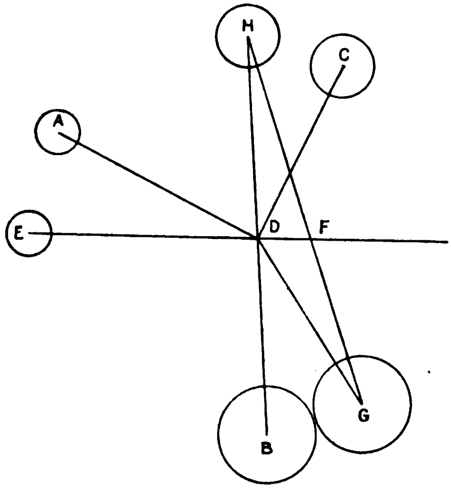
Prenons maintenant des poids en nombre quelconque non réunis entre eux. Nous savons qu'ils ont aussi un centre commun de gravité. Je dis que l'altitude de la gravité résultant de la composition de tous ces poids doit être prise égale à celle de ce centre de gravité; en effet, tous ces poids peuvent être amenés à cette hauteur du centre de gravité sans l'intervention d'aucune autre puissance que celle qui réside dans les poids, en les réunissant seulement par des lignes inflexibles et en les déplaçant autour de leur centre de gravité, ce qui n'exige aucune force ni aucune puissance ([182]). Or il ne peut arriver que des poids, placés sur le même plan horizontal, s'élèvent tous également, par la force de leur gravité, au-dessus de ce plan. Par suite, le centre de gravité d'un nombre quelconque de poids, affectant une disposition quelconque, ne peut atteindre une altitude plus grande que celle qu'il possède. Nous avons dit, dans ce qui précède, que des poids en nombre quelconque pouvaient être amenés, sans l'intervention d'aucune

([182]) On dirait aujourd'hui *aucun travail.*

force, sur le plan horizontal passant par leur centre de gravité. Ce résultat se démontre ainsi qu'il suit :

Soient des poids A, B, C, de position donnée, D leur centre de

Fig. 77.



gravité, EF la section d'un plan horizontal passant par ce centre. Soient des lignes inflexibles DA, DB, DC qui relient invariablement les poids. Déplaçons ceux-ci jusqu'à ce que A soit dans le plan EF en E; les verges décriront des angles égaux, B viendra en G et C en H.

Imaginons maintenant que B et C soient réunis par la verge HG qui coupe le plan EF en F. Le centre de gravité de ces deux poids réunis doit nécessairement se trouver en F, puisque celui des trois points situés en E, G, H est en D et que celui du poids situé en E est aussi dans le plan EDF. Déplaçons donc les poids H, G en les faisant tourner autour de F, et cela sans aucune force; nous les amenons ainsi sur le plan EF, de telle sorte que les trois poids qui étaient d'abord en A, B, C sont transportés à la hauteur de leur centre de gravité, en vertu de leur propre équilibre (*suo ipsorum æquilibrio*). C. Q. F. D. La démonstration est la même pour un nombre quelconque de poids.

Notre hypothèse s'applique aussi aux corps liquides et elle permet de démontrer non seulement tout ce qu'Archimède a dit des corps flottants, mais encore la plupart des autres théorèmes de la Mécanique. Et certes, si les mécaniciens, inventeurs de nouvelles machines où ils s'efforcent vainement de réaliser le mouvement perpétuel, savaient l'utiliser, ils apercevraient facilement leurs erreurs et comprendraient que ce mouvement perpétuel est mécaniquement impossible ([183]).

II. *Abstraction faite de la résistance de l'air et de tout autre obstacle, comme nous voulons l'entendre dans les démonstrations suivantes, le centre de gravité d'un pendule en mouvement parcourt des arcs égaux en descendant et en montant.*

Cela a été démontré pour le pendule simple dans la proposition IX de la descente des graves. L'expérience montre qu'il faut l'admettre aussi pour le pendule composé. En effet, quelle que soit la forme du pendule, on la trouve également apte à la continuation du mouvement si ce n'est en ce qu'elle reçoit plus ou moins fortement l'action résistante de l'air ([184]).

. . . .

Proposition IV. — Soit un pendule composé de plusieurs poids, abandonné au repos. Supposons qu'à un certain instant il ait effectué une partie de son oscillation entière et qu'à partir de ce moment le lien qui relie les différents poids soit rompu, que ceux-ci retournent vers le haut leurs vitesses acquises et s'élèvent aussi haut qu'ils le peuvent. Dans ce mouvement, le centre de la gravité composée de tous les poids reviendra à l'altitude où il se trouvait avant le commencement de l'oscillation.

Soit un pendule composé d'un nombre quelconque de poids A, B, C attachés à une verge ou à une surface non pesantes. Ce pendule est suspendu par un axe passant par le point D et perpendiculaire au plan de la figure. Le centre de gravité E des poids A, B, C est supposé dans ce plan, et la ligne de ce centre DE est

---

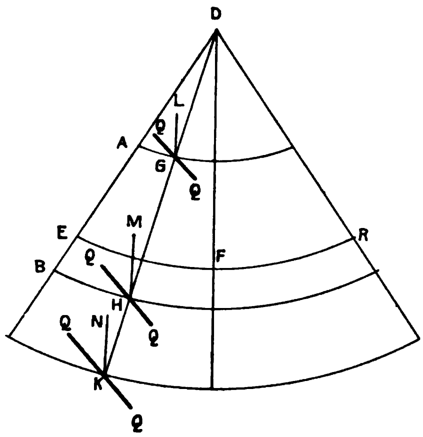
([183]) Ainsi l'idée qui guide Huygens c'est l'impossibilité du mouvement perpétuel, mais envisagée dans un cas particulier où elle est expérimentalement très claire, l'impossibilité pour le centre de gravité d'un ensemble de corps pesants de se relever plus haut que le point d'où il est descendu.

Il faut remarquer en outre l'idée suivante : cette impossibilité est admise par Huygens quelles que soient les liaisons des corps entre eux et avec les corps étrangers; quelles que soient ces liaisons, pourvu que, comme dit Huygens, les corps se meuvent sous la seule *influence de leur gravité* (*voir* l'énoncé de son hypothèse), le principe reste vrai. Ici apparaît la distinction entre les forces actives qui *travaillent* et les forces réactives qui *ne travaillent pas*. *Voir* note 91.

([184]) Cette hypothèse élimine les *résistances passives,* tout comme le principe de l'inertie.

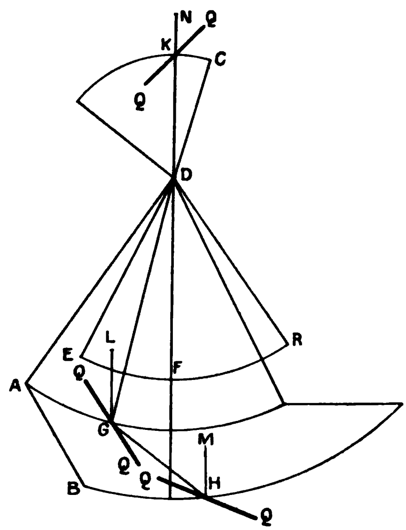
inclinée sur la verticale DF d'un angle $\widehat{EDF}$, le pendule ayant été

Fig. 78.



tiré jusque-là. Supposons maintenant qu'on l'abandonne en cette position et qu'il décrive une partie quelconque de son oscillation,

Fig. 79.



de sorte que les poids A, B, C parviennent en G, H, K. A partir de là, le lien commun qui relie ces poids étant rompu, imaginons que tous retournent vers le haut leurs vitesses acquises (cela pourra se faire par choc sur des plans inclinés) et montent aussi haut qu'ils peuvent, savoir en L, M, N. Une fois parvenus là, leur centre de gravité commun est P. Je dis que P est à la même altitude que E.

En premier lieu, en effet, il est certain, par la première hypothèse, que P ne peut pas être plus haut que E. Mais voici comment nous montrerons qu'il ne peut pas être plus bas. Soit, en effet, si cela est possible, P plus bas que E, et supposons que les poids redescendent des hauteurs LG, MH, NK auxquelles ils sont montés. On sait que dans cette descente ils acquièrent les mêmes vitesses qu'ils possédaient pour monter à ces hauteurs (proposition IV de la deuxième Partie), c'est-à-dire celles qu'ils avaient acquises par le mouvement du pendule venant de CBAD en KHGD. C'est pourquoi, s'ils sont maintenant rattachés ensemble avec lesdites vitesses à la verge ou à la surface auxquelles ils étaient tout à l'heure fixés, ils continueront leur mouvement suivant les arcs commencés; cela se fera si, avant qu'ils atteignent la verge, on imagine qu'ils sont réfléchis par des plans inclinés QQ; le pendule, reconstitué de cette manière, terminera son oscillation comme si son mouvement s'était continué sans aucune interruption ([185]). De la sorte, le centre de gravité du pendule E parcourra en descendant et en montant des arcs égaux EF, FR et parviendra en R à la même hauteur que E. Or E est supposé plus haut que P, centre de gravité des poids dans les positions L, M, N. Donc R sera aussi plus haut que P; par conséquent, le centre de gravité des poids tombés de L, M, N remonterait plus haut que le point d'où il serait descendu, ce qui est absurde (hypothèse I de cette partie). P n'est donc pas plus bas que E. Mais il n'était pas non plus plus haut. Il est donc nécessairement à la même hauteur. C. Q. F. D.

Proposition V. — *Soit un pendule composé d'un nombre quelconque de poids. Multiplions ces poids par le carré de leurs distances respectives à l'axe d'oscillation et divisons la somme de ces produits par le produit de la somme des poids par la distance du centre de gravité au même axe; nous obtenons ainsi la longueur du pendule simple isochrone au pendule composé, c'est-à-dire la distance entre l'axe et le centre d'oscillation du pendule composé lui-même.*

([185]) Il y a ici une application tacite du principe d'inhérédité. *Cf.* note 106.

[Nous ne reproduirons pas ici la démonstration de ce résultat qui se déduit de la proposition précédente. On trouvera un résumé de la marche du raisonnement dans la citation de Lagrange, faite au § 1 du présent Chapitre.]

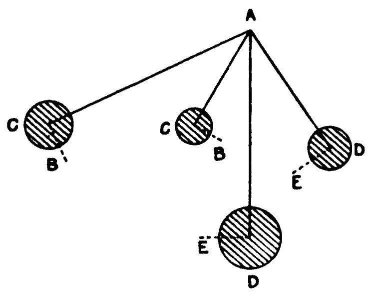
§ 3. — Jacques Bernouilli et le levier.

Voici le principal passage du Mémoire où Jacques Bernouilli a exposé la théorie analysée plus haut par Lagrange. Ce Mémoire est intitulé : *Démonstration générale du centre de balancement ou d'oscillation tirée de la nature du levier*. On le trouve dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris,* année 1703.

. . . .

Principe du levier tiré ou poussé par des puissances qui sont en mouvement. — Soient AC, AC, AD, AD les branches d'un

Fig. 80.



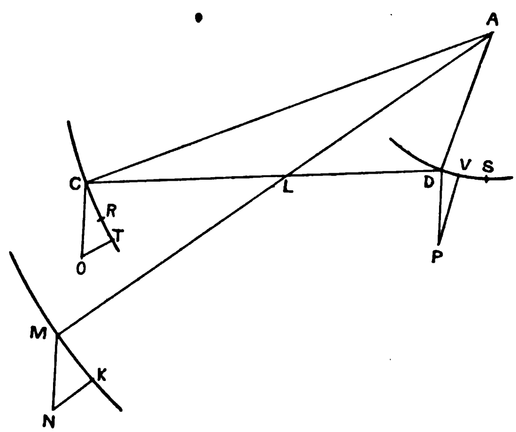
levier mobile autour du point A; soient C, C, D, D des poids ou des puissances mues avec des vitesses CB, CB, DE, DE, lesquels fassent impression suivant les directions CB, CB, DE, DE perpendiculaires aux bras de levier AC, AC, AD, AD. Je suppose que si tous les produits des puissances C par AC et CB sont égaux à tous les produits des puissances D (qui agissent en sens contraire) par AD et DE, ou bien si tous les produits de C par AC et CB (en tant qu'on conçoit toutes les puissances agir en même sens) sont égaux à rien, le levier doit demeurer en équilibre.

Ce principe a été démontré par feu M. Mariotte dans la proposition XIII de la seconde Partie de son *Traité de la percussion des corps,* et il n'y a personne qui en disconvienne ([186]).

Solution. — Soient maintenant A (*fig.* 81) l'axe horizontal du balancement; AXM un plan vertical droit à l'axe; AM le diamètre de la figure qui balance ([187]), auquel on ait appliqué dans le même plan l'ordonnée CLD à angle donné ALD, laquelle ait CL = LD. Soient de plus C et D deux petites parcelles de la figure, lesquelles décrivent dans leur balancement des arcs CT, DS; soit aussi AM la longueur du pendule simple, qui fait ses vibrations dans le même temps que la figure qui balance.

De ce que le balancement tant de M que de C et D s'achève,

Fig. 81.



par l'hypothèse, en même temps, il s'ensuit que les vitesses dont ces poids se meuvent à chaque instant sont proportionnelles à leurs distances AM, AC, AD de l'axe A, et que par conséquent leur mouvement peut être continué avec ces vitesses sans que les poids C et D agissent en aucune manière l'un sur l'autre M; de sorte qu'il ne faut considérer que la seule impulsion que la pesanteur ajoute

([186]) *Cf.* note 150.

Sur l'intervention de la théorie du choc dans le problème actuel, *voir* plus loin note 182.

([187]) Nous nous sommes borné à prendre, dans le Mémoire de Jacques Bernouilli, le cas particulier où le corps oscillant est contenu tout entier dans un plan normal à l'axe de suspension et admet un diamètre. Ce cas suffit pour mettre en évidence les principes mécaniques qui ont guidé Jacques Bernouilli.

à chaque moment aux vitesses acquises. Soit donc ce choc ou cette impulsion représentée par les petites lignes verticales et égales MN, CO et DP ([188]); ensuite, après avoir mené les droites NK, OT et PV, perpendiculaires aux arcs MK, CT, DV, soient conçus les mouvements par MN, CO, DP comme étant composés chacun de deux autres, savoir du mouvement de M en K et de K en N, de C en T et de T en O, de D en V et de V en P. Et là il est encore visible que celui qui se fait par KN, TO et VP se répand tout sur l'axe A et qu'il s'y perd entièrement. Ainsi, il n'y a que le seul mouvement par MK, CT, DV qui ait son effet, mais non sans quelque changement, d'autant que, M étant parvenu en K, les poids C et D (à cause de l'isochronisme qu'on suppose) ne sauraient être en T et en V; ils doivent se trouver en des points comme R et S, tels que les arcs MK, CR, DS soient semblables. C'est ce qui fait que l'effort de la pesanteur qui agit sur le poids C n'est pas épuisé au point R, et que le reste RT doit être employé à pousser le corps D par VS. Mais parce que ce corps D doit résister autant qu'il est poussé, c'est comme si, étant en S, il y avait une force qui tâchât de le repousser de S en V. De sorte que voilà un levier CAD, sur lequel des poids comme C tirant ou poussant d'un côté avec des forces ou vitesses RT, et de l'autre des poids comme D, tirant ou repoussant en sens contraire, font équilibre. Donc, suivant le précédent principe du levier, la somme des produits $C \times AC \times RT$ d'une part est égale à celle des produits $D \times AD \times VS$ de l'autre; ou (ce qui revient au même) la somme des produits $C \times AC \times RT$, en tant qu'on y comprend aussi ceux de l'autre côté, est égale à rien ([189]). En voici l'analyse ([190]).

....

([188]) Jacques Bernouilli considère l'action de la pesanteur comme un choc se produisant au début de chaque élément de temps. Nous rencontrerons encore bien souvent cette conception de l'action des forces continues; elle s'explique historiquement par le fait que le problème du choc des corps a été un des premiers traités à fond.

Ce petit choc tend à imprimer au point matériel où il est appliqué une certaine vitesse (qui vient se combiner avec celle que le point possède déjà). C'est cette vitesse que Bernouilli entend dans ce qui suit par le mot *mouvement;* les vecteurs MN, CO, DP sont de telles vitesses.

([189]) C, D sont les *masses* des points, qui, d'ailleurs, dans l'idée de Bernouilli, ne sont pas distinctes des *poids*. Bernouilli mesure la force par la quantité de mouvement qu'elle tend à produire.

([190]) Il nous paraît inutile de citer ce qui suit, qui n'a qu'un intérêt purement mathématique.

CHAPITRE IV.

CONCEPTIONS GÉNÉRALES.

De l'étude des problèmes particuliers qui ont été rappelés dans les précédents Chapitres, se sont dégagées certaines conceptions fondamentales que nous allons examiner dans le présent Chapitre, en insistant sur leur caractère de généralité, c'est-à-dire sur leur aptitude à servir de base à la Mécanique.

Le courant statique à conduit a préciser la relation entre la *force* et *l'accélération*. Le courant énergétique a abouti à la notion de *force vive* opposée à celle de *force morte*. Enfin, certaines idées philosophiques sur la finalité ont donné aux lois mécaniques une forme spéciale qui a joué et joue encore un grand rôle. Tels sont les trois points que nous allons étudier successivement.

§ 1. — Courant statique. La force et l'accélération.

C'est dans le Traité d'Huygens sur la force centrifuge qu'il faut chercher l'expression finale, avant Newton, du courant statique. Il s'agit encore, dans ce Traité, d'un problème particulier; mais les méthodes y présentent une portée vraiment générale; de là son très grand intérêt.

Les principaux théorèmes relatifs à la force centrifuge ont été énoncés par Huygens sans démonstration en 1673 à la fin de l'*Horologium oscillatorium*. Le Traité *De Vi Centrifuga,* qui contient les démonstrations et que nous allons citer, est posthume.

La gravité est une tendance (*conatus*) à la descente. En admettant que les graves tombant suivant la verticale ou sur des plans inclinés ont un mouvement tellement accéléré que la vitesse croisse de quantités égales dans des temps égaux, on peut démontrer d'une manière très certaine que les espaces parcourus depuis le repos sont entre eux comme les carrés des temps employés à les parcourir. Les expériences de Galilée, de Riccioli et de nous-même montrent que ce résultat s'accorde exactement avec l'expérience, si ce n'est que la résistance de l'air produit une petite différence. Mais cette différence est d'autant plus faible que les corps ont proportionnellement plus de gravité par rapport à leur surface, et qu'on fait l'essai sur des longueurs plus petites. Il est donc tout à fait croyable que, si la résistance de l'air n'existait pas, on observerait exactement le même rapport sur des longueurs très grandes. Maintenant, par suite de cette résistance, une sphère de liège arrive, après un faible espace parcouru, à tomber d'un mouvement uniforme; cela est nécessairement vrai aussi pour une sphère de plomb construite de manière à avoir, proportionnellement à sa gravité, la même surface que celle de liège, c'est-à-dire pour une sphère de plomb dont le diamètre soit à celui de la sphère de liège comme le poids spécifique du liège est à celui du plomb, ainsi que je l'ai montré ailleurs. De même, le mouvement d'une sphère de plomb aussi grande qu'on voudra, tombant dans l'air, arrivera finalement, selon moi, à être uniforme, sans doute après un immense espace parcouru, de telle sorte qu'il n'y aura plus à y considérer d'accélération, et que, par conséquent, jamais cette considération ne sera en réalité d'une précision parfaite. Ce n'est pas une raison pour estimer médiocres la beauté et l'utilité des spéculations de Galilée sur le mouvement accéléré, pas plus qu'on n'a cette opinion de toute la Mécanique ([191]) qui s'occupe des poids parce qu'elle suppose à tort que les graves descendent suivant des lignes parallèles, alors qu'en réalité ils tendent vers le centre de la Terre. D'ailleurs, pour les démonstrations que j'ai en vue ici, il me suffit que ce soit sur des longueurs très petites à partir du point de repos que l'accélération croisse suivant les nombres impairs 1, 3, 5, 7, ainsi que l'a établi Galilée ([192]).

C'est pourquoi, lorsqu'un grave est suspendu à un fil, ce fil est

---

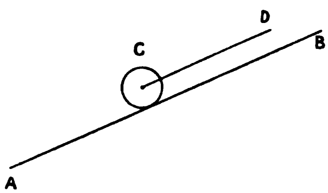
([191]) Il faut entendre par *Mécanique* l'étude des machines simples.
([192]) *Cf.* le passage signalé par la note 109.

tiré parce que le grave a une tendance à s'éloigner, en suivant la direction du fil, d'un mouvement accéléré en cette sorte.

Fig. 82.

Un mouvement accéléré, suivant la progression que nous avons dite, peut faire parcourir dans le même temps un espace plus ou moins grand. C'est ce qui arrive lorsque le grave est soutenu sur un plan incliné AB par un fil CD parallèle au plan. En effet, le corps tend

Fig. 83.



à s'avancer suivant la ligne DC d'un mouvement semblablement accéléré, mais dans lequel il ne parcourrait pas, dans un temps donné, le même espace qu'il ferait s'il était détaché d'un fil vertical. De là vient que l'on sent dans ce cas un *conatus* moindre, et d'autant moindre par rapport au *conatus* vertical que l'espace parcouru dans un certain temps sur un plan incliné est moindre que l'espace parcouru dans le même temps en chute libre ([193]).

Toutes les fois que deux corps de poids égaux sont suspendus

([193]) Il faut entendre les espaces parcourus *à partir du repos*.

Il semble que, dans les lignes qui précèdent, Huygens considère comme évidente la proportionnalité des forces statiques aux accélérations, admise par Galilée à propos de la chute des corps sur les plans inclinés (*voir* note 119). Nous savons cependant qu'il considérait une telle hypothèse comme peu satisfaisante et qu'il a fait reposer la théorie de cette chute sur une autre base (*voir* note 179). Mais précisément par là il avait étayé d'une preuve l'hypothèse dont était parti Galilée puisque, après ses travaux, on pouvait, au moins dans le cas particulier des poids soutenus par des fils sur des plans inclinés, remonter des lois du mouvement, démontrées par d'autres principes, à la proportionnalité des forces aux accélérations.

Le *conatus* d'Huygens est à rapprocher de l'*impetus* de Galilée (notes 114 et 119).

chacun par un fil, s'ils ont une tendance à se mettre en mouvement avec la même accélération dans la direction du fil, de manière à décrire des chemins égaux dans le même temps, nous posons que l'on sent une attraction égale des deux fils, qu'ils soient tirés en haut, en bas ou dans une direction quelconque ([194]). Il n'y a pas à faire connaître la cause d'où vient un tel *conatus;* il suffit qu'il existe. Et le *conatus* existe avec la même intensité toutes les fois que, le corps étant rendu libre, c'est-à-dire le *conatus* n'étant pas annihilé, le mouvement se produit de même. D'ailleurs, c'est seulement le commencement du mouvement, pendant un temps très petit, qu'il faut considérer. En effet, prenons par exemple une sphère B pendue à un fil AB et touchant une surface courbe CD de telle sorte que la ligne joignant le centre de B au point de contact soit perpendiculaire au fil AB comme à la tangente à la courbe. Nous savons que la sphère n'est soutenue en rien par la surface CD et que la corde AB est tendue comme si ladite sphère ne touchait pas CD et comme si elle pendait librement. Cependant, si elle était détachée de la corde, elle ne descendrait pas de la même manière que si elle l'était d'une corde à laquelle elle serait librement suspendue; elle tomberait sur la surface CD et ne conserverait pas même exactement la proportion de l'accélération suivant la loi des nombres impairs 1, 3, 5, 7. Il apparaît par là qu'il ne faut pas, si l'on veut déterminer la force (*vis*) du *conatus,* considérer ce qui se passera quelque temps après la séparation d'avec la corde, mais bien un très petit espace de temps à partir du début du mouvement. Or, la sphère B commence à se mouvoir,

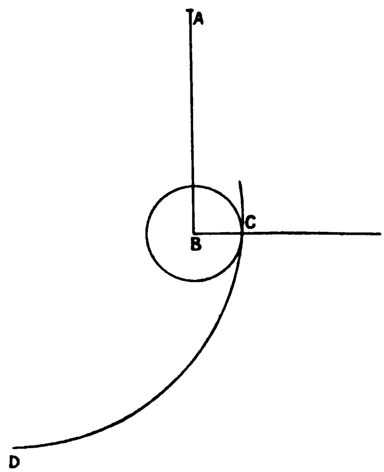
---

([194]) Cette dernière phrase (*nous posons,* etc.) pourrait suggérer l'idée de chercher à rendre la théorie d'Huygens indépendante de l'hypothèse de la proportionnalité de la force à l'accélération en disant que cette proportionnalité est prise comme *définition* de la force. Cette manière de faire serait, je crois, contraire à la pensée d'Huygens. Les forces qu'a en vue Huygens sont bien celles qui sont définies statiquement puisqu'il va (*cf.* prop. II) équilibrer ces forces qui tendent les fils par des poids. Il est d'ailleurs impossible de dire qu'on pourrait donner des poids une définition dynamique, par l'accélération qui naît au moment où le fil qui supporte un corps pesant est rompu, car alors il faudrait expliquer ce qu'on entend par masse, par *quantité solide* selon l'expression d'Huygens (*voir* note 196).

A notre avis, le Traité sur la force centrifuge d'Huygens est fondé sur l'adjonction, aux études de Galilée et aux siennes, de l'idée de force statique avec le principe expérimental de la proportionnalité des forces aux accélérations, principe étayé d'ailleurs par Huygens, ainsi que cela a été expliqué dans la note précédente, de raisons que n'avait pas données Galilée.

après avoir quitté la corde, comme si elle tombait verticalement; puisqu'au début le mouvement est déterminé suivant la droite AB,

Fig. 84.



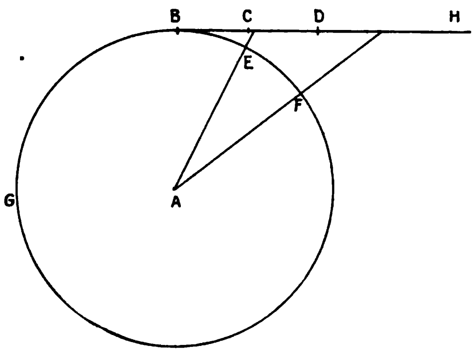
qui est parallèle à la tangente à la courbe en C. Voyons maintenant de quelle espèce et de quelle grandeur (*quis et quantus*) est la tendance (*conatus*) qu'ont à s'éloigner du centre les corps attachés à un fil ou à une roue qui tournent.

Soit une roue BG horizontale tournant autour de son centre A. Une sphère attachée à sa circonférence, lorsqu'elle parvient au point B, a une tendance (*conatus*) à continuer son chemin suivant la droite BH tangente à la roue en B : en effet, si elle est détachée de la roue et si elle s'échappe, elle restera sur le chemin BH et n'en sortira pas, à moins que la force de la gravité ne la tire vers le bas ou que la rencontre d'un autre corps n'empêche son mouvement ([195]). A la vérité, il est difficile de comprendre, à première vue, pourquoi le fil AB est tendu comme il l'est quand le globe a une tendance à aller suivant BH, perpendiculaire à AB. Mais tout deviendra clair par le raisonnement suivant. Imaginons que la roue soit très grande, de manière à emporter facilement un homme se tenant sur elle et y étant assez solidement attaché pour ne pas pouvoir en être chassé. Imaginons, en outre, que cet homme tienne à la main un fil portant, attachée à sa seconde extrémité,

([195]) C'est le principe de l'inertie. Nous savons déjà (Chap. II, § 3, et Chap. III, § 2, note 177) que Huygens l'admettait.

une balle de plomb. Le fil sera donc tendu de la même manière et avec la même énergie (*æque valide*) par la force de la rotation, soit qu'il soit ainsi tenu, soit qu'il aille jusqu'au centre A et qu'il y soit attaché; la raison pour laquelle il est tendu va pouvoir maintenant être perçue très clairement. Prenons des arcs égaux BE, EF, très petits par rapport à la circonférence entière, par exemple des centièmes de cette circonférence ou encore moins. Ces arcs, l'homme fixé à la roue les parcourt dans des temps égaux, et, dans les mêmes intervalles de temps, le plomb parcourrait, s'il était lâché, des chemins rectilignes BC, CD, égaux à ces arcs, et dont les extrémités C, D ne tombent pas à la vérité exactement sur les rayons AE, AF, mais sont à une très petite

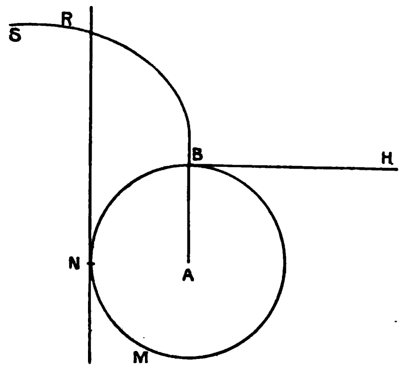
Fig. 85.



distance de ces lignes du côté de B. On voit maintenant que, lorsque l'homme arrivera en E, le plomb sera en C (s'il a été lâché au point B), quand l'homme arrivera en F, le plomb sera en D; nous dirons donc, à bon droit, que cette tendance est dans le plomb.

Si maintenant les points C et D étaient sur les droites AE, AF, il serait certain que le plomb tend à s'éloigner de l'homme par la ligne joignant la position de celui-ci au centre, et à s'éloigner de façon que sa distance à l'homme soit EC au bout d'un premier élément de temps (*pars temporis*) et FD au bout d'un second élément. Mais ces espaces EC, FD, etc. croissent comme les carrés 1, 4, 9, 16 des nombres entiers; en effet, ils reproduisent d'autant plus exactement cette suite que les éléments (*particulæ*) BE, EF sont pris plus petits, et, par suite, au commencement, on doit les considérer comme n'en différant pas. Aussi, est-il constant que le *conatus* sera exactement le même que celui que l'on ressent lorsqu'un globe est suspendu à un fil, parce qu'alors aussi le globe tend à entrer, suivant la direction du fil, en un mouvement semblablement accéléré, au cours duquel les espaces parcourus dans les intervalles de temps 1, 2, 3 sont 1, 4, 9. Les choses se passeraient donc ainsi si les points C et D étaient sur les droites AE, AF. Mais comme ils s'en éloignent un peu du côté de B, il arrive que le globe ne tend pas à s'éloigner de l'homme par un rayon, mais par une courbe qui touche ce rayon au point où se trouve l'homme. Soit un plan PQ touchant la roue en B, lié à elle et entraîné avec elle. Le globe B, s'il se sépare de la roue ou du plan, décrira par rapport à ce plan et au point B qui continuent à se mouvoir, une courbe qui touchera en B le rayon AB emporté dans le mouvement. Si nous voulons décrire cette conrbe, nous enrou-

Fig. 86.

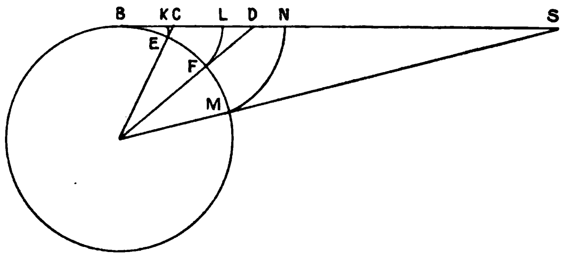


lerons autour de la circonférence un fil BNM et nous déplacerons son extrémité R vers RS de manière à laisser toujours tendue la partie qui a quitté la circonférence BNM; dans ce mouvement, l'extrémité R décrira la ligne BRS comme il est facile de le montrer....

Par conséquent, comme le globe entraîné avec la roue tend à décrire, par rapport au rayon dans lequel il se trouve, une courbe tangente à ce rayon, on voit que le fil sera tendu par cette tendance (*conatus*) exactement comme si le globe tendait à suivre le rayon lui-même.

Mais les espaces que parcourrait le globe sur ladite courbe dans des temps croissant par degrés égaux sont comme la suite des carrés 1, 4, 9, 16, ... des nombres entiers, si l'on considère le début du mouvement et des espaces très petits. La figure ci-contre le montre, dans laquelle on a pris, sur la circonférence de la roue, des arcs égaux BE, EF, FM et sur la tangente BS des segments BK,

Fig. 87.



KL, LN égaux aux dits arcs; les rayons étant d'ailleurs EC, FD, MS. Si le globe était détaché en B de la roue tournante, lorsque B serait venu en E, le globe serait en K et aurait parcouru l'élément EK de la courbe ci-dessus décrite; au bout d'un second intervalle de temps égal au premier, lorsque B serait venu en F, le globe se trouverait en L et aurait parcouru la partie de courbe FL; de même lorsque B serait venu en M le globe aurait parcouru la portion de courbe MN. Mais ces parties de courbe doivent être, au commencement de la séparation du globe et de la roue, considérées comme égales aux droites EC, FD, MS qu'elles touchent, car on peut prendre, à partir de B, des arcs assez petits pour que la différence entre ces droites et les arcs soit avec leur propre longueur dans un rapport inférieur à tout rapport imaginable.

Donc les espaces EK, FL, MN doivent être considérés comme croissant suivant la série des carrés 1, 4, 9, 16. Et, par suite, le *conatus* du globe retenu sur la roue en mouvement sera le même que si le globe tendait à s'avancer suivant le rayon avec un mouvement accéléré au cours duquel il parcourrait dans des temps égaux des espaces croissant comme les nombres impairs. Il suffit, en effet, que cette progression soit observée au début; ultérieurement le mouvement peut être n'importe quel autre; cela n'importe en rien pour le *conatus* qui existe avant le commencement du mouvement. Mais ce *conatus* que nous avons dit est tout à fait semblable à celui avec lequel des graves suspendus à un fil tendent à descendre. De là nous tirerons la conclusion que les forces centrifuges de mobiles inégaux transportés dans des cercles égaux avec des vitesses égales sont entre elles comme les gravités des mobiles, c'est-à-dire comme les quantités solides ([196]). En effet, tous les graves tendent à descendre avec la même vitesse et d'un mouvement semblablement accéléré, et cette tendance a un moment (*momentum*) d'autant plus grand que les corps sont plus grands; il doit en être de même pour les corps qui tendent à fuir le centre, puisqu'on a montré que leur *conatus* était tout à fait semblable à celui qui provient de la gravité. Mais tandis que le même globe a toujours la même tendance à descendre toutes les fois qu'il est suspendu à un fil, la tendance d'un globe entraîné avec une roue est plus ou moins grande suivant que la roue tourne plus ou moins vite. Il nous reste à chercher la grandeur ou la quantité des divers *conatus* pour les diverses vitesses de la roue ([197]).

. . . .

([196]) C'est notre notion de masse.

([197]) Cette méthode est excessivement remarquable.

Le problème traité par Huygens est le suivant. Il considère un point matériel en mouvement sous l'action d'une force statiquement définie par la tension d'un fil et il étudie la grandeur de cette force dans ses rapports avec le mouvement produit. C'est, on le voit, un problème très général de Mécanique : de là la place que nous avons donnée à ce traité d'Huygens dans le présent chapitre. Pour résoudre ledit problème, il examine ce qui se passe dans les accélérations quand la force disparaît *subitement*, par suite de la rupture du fil, et il étudie la modification de l'accélération, non pas par rapport à un système d'axes fixes (système dans lequel serait vraie la loi d'inertie), mais par rapport à un système mobile. C'est exactement la méthode que préconiseront, au XIXe siècle, Reech et M. Andrade. Les progrès de la Cinématique permettront à ces savants de faire une remarque importante : la variation d'accélération provoquée par la rupture du fil est indépendante du système d'axes auquel on rapporte le mouvement et dépend fort peu de l'horloge qui définit le temps. Le principe de la proportionnalité de la force à l'accélération signifiera alors, pour eux, la proportionnalité de la force à la variation instantanée d'accélération (*cf.* Deuxième Partie, Livre I, Chap. II).

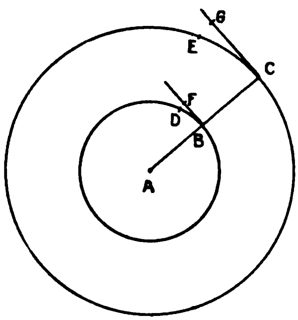
Naturellement Huygens ne voit pas aussi loin. Il ne s'occupe nullement de la relativité du temps. Pour ce qui est du système d'axes, il n'aperçoit pas le moyen de le prendre quelconque; il se place dans un système particulier, la roue, dans lequel le point et le fil qui le tire sont d'abord en équilibre; par rapport à ce système, la variation d'accélération se confond avec l'accélération naissante, et c'est cette accélération naissante dans ce système d'axes que Huygens compare avec la force. L'analogie est complète avec le procédé qui servira à Reech et à Robin pour définir la masse au moyen du quotient du poids, *défini statiquement*, par l'accélération que prend un grave quand on coupe le fil qui le tient suspendu à la surface de la terre.

Il est évident que ce procédé est général. Quels que soient la force et le mouvement produit, on pourra toujours trouver un système d'axes par rapport auquel le fil et le corps tiré seront en équilibre, et étudier l'accélération qui naît par rapport à ces axes quand on coupe le fil. Toutefois cette condition que le fil et le corps soient primitivement en équilibre par rapport au système de référence ne

Proposition I. — Si deux mobiles égaux parcourent en des temps égaux des circonférences inégales, la force centrifuge dans la plus grande circonférence et la force centrifuge dans la plus petite sont comme sont entre elles les deux circonférences ou leurs diamètres.

Sur les deux cercles de rayons AB et AC, deux mobiles égaux

Fig. 88.



tournent dans le même temps. Prenons sur l'un et l'autre deux arcs très petits semblables BD, CE et sur les tangentes en B et en C, portons BF, CG respectivement égaux à ces arcs. Le mobile qui parcourt le cercle BD a une tendance (*conatus*) à s'éloigner du

détermine pas entièrement celui-ci; un corps solide quelconque ayant une droite fixe coïncidant avec le fil peut en jouer le rôle. Pour mettre le procédé d'Huygens à l'abri de toute objection dans le cas général, il faudrait donc démontrer au moins ce cas particulier du théorème cinématique de Reech-Andrade : l'accélération naissante est la même par rapport à tous ces systèmes d'axes ayant une droite commune. Mais dans l'application que fait Huygens, cette difficulté ne se présente pas; ce n'est pas un seul point et un seul fil qu'étudie Huygens, c'est tous les points possibles répartis sur la circonférence de la roue et retenus tous par des fils, manifestement dans des conditions identiques; le système de référence peut être déterminé par la condition que tous ces fils en soient des droites fixes; c'est alors forcément la roue elle-même; c'est elle en effet que choisit Huygens.

Pour déterminer l'accélération naissante, par rapport à la roue, Huygens admet (note 195) que, une fois le fil coupé, le point aura un mouvement rectiligne uniforme par rapport à l'espace dans lequel tourne la roue. Mais Reech et Andrade remarqueront que la méthode s'appliquerait quelle que soit la loi qui exprimerait, dans cet espace, le mouvement du point libre ou, comme ils disent, le cours naturel des choses. Après cette remarque, il est loisible, si l'on veut, de ne pas attribuer une valeur absolue au principe de l'inertie et de ne le prendre que comme une expression particulière, provisoire et approximative, de ce que nous observons en général par rapport aux systèmes d'axes où nous avons coutume de nous placer.

centre avec un mouvement naturellement accéléré suivant la tension de son fil et à parcourir ainsi, dans un certain temps, l'espace DF. Dans le cercle CE le mobile a une tendance (*conatus*) semblable, mais telle qu'il décrirait, dans le même temps, l'espace EG. Par suite, autant de fois DF est plus grand que EG, autant de fois la force (*vis*) qui tire le fil dans le grand cercle sera plus grande que celle qui le tire dans le petit. Mais FD et GE sont entre eux comme BF et CG ou comme BA et AC. Donc la force centrifuge (*vis centrifuga*) dans le grand cercle et la force centrifuge dans le petit seront dans le même rapport que les circonférences, c'est-à-dire que leurs diamètres. C. Q. F. D.

Proposition II (198). — Si des mobiles égaux tournent dans le même cercle ou dans des cercles égaux avec des vitesses inégales, mais l'un et l'autre d'un mouvement uniforme, la force centrifuge (*vis recedendi a centro*) du plus rapide sera à la force centrifuge du plus lent en raison doublée des vitesses, c'est-à-dire que, si les fils qui les retiennent se retournent vers le bas au centre de la roue et soutiennent des poids qui s'opposent à la force centrifuge des mobiles et l'équilibrent exactement, ces poids seront entre eux comme les carrés des vitesses.

. . . .

[La valeur de la force centrifuge est ainsi entièrement déterminée. Suivent quelques applications parmi lesquelles il y a lieu de citer la démonstration de la propriété classique du régulateur parabolique d'être isochrone.

Le Traité se termine par diverses propositions relatives au pendule, notamment par l'étude, faite pour la première fois, du pendule conique lorsque le poids décrit une circonférence horizontale (199).]

---

(198) Il nous paraît inutile de reproduire les démonstrations des propositions qui suivent.

(199) Il est intéressant de rappeler que ses études sur la force centrifuge ont permis à Huygens d'expliquer la variation de la pesanteur apparente avec la latitude. Il avait lui-même proposé d'employer le pendule à la mesure de l'intensité de la pesanteur. Des mesures faites par Richer en Europe et à Cayenne montrèrent que la pesanteur était plus faible près de l'équateur. Huygens en aperçut l'explication dans la force centrifuge due à la rotation de la Terre.

§ 2. — Courant énergétique. La force des corps en mouvement.

Dans un petit écrit paru en 1686 dans les *Acta eruditorum* de Leipzig, Leibniz (1646-1716) revient sur la notion de force des corps en mouvement et propose d'estimer cette force autrement que ne le faisaient Descartes et ses disciples. Ce Mémoire, écrit en latin, est intitulé :

« *Courte démonstration d'une erreur mémorable de Descartes et d'autres savants, touchant la prétendue loi naturelle en vertu de laquelle Dieu conserverait toujours la même quantité de mouvement, loi dont ils font un usage fautif même en Mécanique.* »

Plusieurs mathématiciens, voyant que, dans les cinq machines ordinaires, la vitesse et la masse se compensent, estiment généralement la *force motrice* (*vim motricem*) par la quantité de mouvement, c'est-à-dire par le produit du corps par sa vitesse. Pour parler d'une manière plus géométrique, soient deux corps de même espèce en mouvement agissant à la fois par leur masse et par leur mouvement; ces savants disent que leurs forces sont en raison composée des corps, c'est-à-dire des masses, et de leurs vitesses, D'autre part, il est conforme à la raison de dire que la même somme de puissance motrice se conserve dans la nature; que cette somme ne diminue pas, puisque nous n'observons jamais qu'un corps perde aucune force qui ne soit transferrée à une autre; que cette somme n'augmente pas non plus, puisque le mouvement perpétuel est à ce point irréel qu'aucune machine et par conséquent pas même le monde entier ne peut conserver sa force sans nouvelles impulsions extérieures. Aussi Descartes, qui tenait la force motrice et la quantité de mouvement pour équivalentes, a-t-il déclaré que Dieu conservait la même quantité de mouvement dans le monde.

Je veux montrer qu'il y a une grande différence entre la force motrice et la quantité de mouvement. Pour cela, je suppose d'abord qu'un corps tombant d'une certaine hauteur acquiert la force d'y remonter si la direction de sa vitesse est convenable et si aucun obstacle extérieur ne l'empêche; par exemple un pendule remonterait précisément à la hauteur d'où il est descendu si la résistance de l'air et quelques autres petits obstacles n'absorbaient une partie de sa force; nous ferons abstraction de ces obstacles. Je suppose en outre qu'il faut la même force pour élever un corps A d'une livre à une hauteur CD de quatre aunes que pour élever un corps B de quatre livres à une hauteur EF d'une aune ([200]). Tout cela est admis et par les Cartésiens et par les autres philosophes et mathématiciens de notre temps. Il suit de là que le corps A, tombé de la hauteur CD, a précisément acquis autant de force que le corps B tombé de EF. Car le corps A, venu de C en D, possède en D la force de remonter jusqu'en C, par notre première hypothèse, c'est-à-dire la force d'élever un corps d'une livre, lui-même, à quatre aunes. De même B, tombé de E en F, possède en F, par notre première hypothèse, la force de remonter en E, c'est-à-dire la force d'élever un corps de quatre livres (lui-même) à une aune. Donc, par la deuxième hypothèse, la force du corps A en D et celle du corps B en E sont égales.

Voyons maintenant si les quantités de mouvement le sont aussi. Ici, nous allons trouver une très grande différence. Je le prouve. Galilée a démontré que la vitesse acquise dans la chute CD était double de la vitesse acquise dans la chute EF. Multiplions donc le corps A, qui est comme 1, par sa vitesse qui est comme 2; le produit, soit la quantité de mouvement, sera comme 2. Au contraire multiplions le corps B, qui est comme 4, par sa vitesse qui est comme 1; le produit, soit la quantité de mouvement, sera comme 4. La quantité de mouvement du corps A en D est donc la moitié de celle du corps B en F, tandis qu'un peu plus haut nous avons trouvé que leurs forces sont égales. Il y a donc une grande différence entre la force motrice et la quantité de mouvement, et l'une ne peut être évaluée par l'autre. C'est ce que nous nous proposions de démontrer. Notre raisonnement montre comment la force doit être évaluée par la quantité d'effet qu'elle peut produire, par exemple par la hauteur où elle peut élever un corps grave de grandeur et d'espèce données, et non par la vitesse qu'elle peut lui imprimer. En effet ce n'est pas une force double, c'est une force encore plus grande qu'il faut pour donner à un même corps une vitesse double.

D'ailleurs qu'on ne s'étonne pas si, dans les machines ordinaires

---

([200]) *Voir* la citation de Descartes faite au Livre I, Chapitre III, § 3.

(levier, treuil, poulie, coin, vis et autres semblables), l'équilibre a lieu lorsque la grandeur d'un des corps est compensée par la vitesse que la disposition de la machine donnerait à l'autre, c'est-à-dire lorsque les grandeurs [les corps sont supposés de même espèce ([201])] sont réciproquement comme les vitesses; c'est-à-dire encore lorsque la même quantité de mouvement tend à se produire de part et d'autre. Là en effet il arrive encore que, de part et d'autre, les quantités d'effet futures sont égales, nous voulons dire les hauteurs de descente ou d'ascension, de quelque côté que l'équilibre soit rompu. Ainsi il arrive là par accident que la force peut être estimée par la quantité de mouvement. Mais il y a d'autres cas, comme celui que nous avons signalé plus haut, où cette coïncidence n'existe plus.

....

Il faut donc dire que les forces sont en raison composée des corps (de même poids spécifique ou densité) et des hauteurs génératrices des vitesses, c'est-à-dire des hauteurs le long desquelles les corps en tombant pourraient acquérir leurs vitesses, ou plus généralement (puisque quelquefois aucune vitesse n'a été produite jusque-là) des hauteurs devant être engendrées. Il ne faut pas multiplier les corps par les vitesses elles-mêmes, comme cela paraît plausible au premier abord, et comme plusieurs l'ont pensé. De là sont nées beaucoup d'erreurs qui se trouvent dans les écrits mathématico-mécaniques des RR. PP. Honoré Fabri et Claude Dechales ainsi que de J.-A. Borelli et d'autres savants, d'ailleurs éminents dans ce genre d'études. C'est là la cause, je pense, qui a fait mettre en doute récemment, par quelques hommes très savants, la règle d'Huygens relative au centre d'oscillation des pendules, règle pourtant très exacte.

Leibniz eut, au sujet de l'objection qu'il présentait ainsi à Descartes, une controverse avec l'abbé de Conti. Sans entrer dans le détail de cette discussion, citons les passages suivants de la réplique de Leibniz (1687), qui sont intéressants.

Afin aussi de prévenir le doute de ceux qui penseraient satisfaire à mon objection en disant que la matière insensible qui presse les corps pesants de descendre et fait leur accélération a perdu

([201]) C'est-à-dire de même poids spécifique.

justement la quantité de mouvement qu'elle donne à ces corps, je réponds que je demeure d'accord de cette pression qui est cause de la pesanteur, et je crois que cet éther perd autant de force (mais non pas autant de mouvement) qu'il en donne aux corps pesants ([202]); mais que tout cela ne fait rien à résoudre mon objection, quand j'accorderais même (contre la vérité) que l'éther a perdu autant de mouvement qu'il en a donné. Car mon objection est formée exprès de telle sorte qu'il n'importe point comment la force a été acquise, dont je fais abstraction pour ne pas entrer en dispute sur aucune hypothèse. Je prends la force et la vitesse acquise telle qu'elle est.... et là-dessus je fais voir.... qu'il se peut et même se doit faire que la quantité de mouvement soit diminuée ou augmentée dans les corps, pendant que la même force demeure.

....

Au lieu du principe cartésien, on pourrait établir une autre loi de la nature que je tiens la plus universelle et la plus inviolable, savoir *qu'il y a toujours une parfaite équation entre la cause pleine et l'effet entier*.... Pour faire mieux voir comment il faut se servir de cet axiome et pourquoi Descartes et d'autres s'en sont éloignés, considérons sa troisième règle du mouvement pour servir d'exemple et supposons que deux corps B et C chacun d'une livre aillent l'un contre l'autre, B avec une vitesse de 100 degrés et C avec une vitesse de 1 degré ([203]). Toute leur quantité de mouvement sera 101. Mais si C avec sa vitesse peut monter à un pouce de hauteur, B pourra monter avec la sienne à 10000 pouces; ainsi la force de tous les deux sera d'élever une livre à 10001 pouces. Or, suivant cette troisième règle cartésienne, après le choc ils iront ensemble de compagnie avec une vitesse comme 50 et demi, afin qu'en la multipliant par 2 (nombre de livres qui vont ensemble après le choc) il revienne la première quantité de mouvement 101. Mais ainsi ces 2 livres ne se pourront élever ensemble qu'à une hauteur de 2550 pouces et un quart, ce qui vaut autant que s'ils avaient la force d'élever une livre à 5100 pouces et demi, au lieu

([202]) Rapprochez cette phrase de ce que nous avons dit, dans le paragraphe 3 du Chapitre I, en analysant les idées fondamentales du courant énergétique, notamment la manière dont l'idée d'énergie permet d'exprimer l'action d'un corps sur un autre (note 127).

([203]) Pour bien être dans le cas de la troisième règle de Descartes, il faut supposer (*voir* note 99) que B et C vont dans le même sens avant le choc. La discussion de Leibniz convient d'ailleurs à ce cas.

qu'avant le choc il y avait la force d'élever une livre à 10001 pouces. Ainsi presque la moitié de la force sera perdue en vertu de cette règle sans aucune raison et sans être employée à rien ([204]).

Leibniz est revenu sur la question dans son *Specimen dynamicum,* publié en 1695.

[Leibniz commence par déclarer qu'il y a dans les corps autre chose que l'étendue (*extensio*), à savoir la *force de la nature* (*vis naturæ*) qui y a été placée par le Créateur.]

La force active (*vis activa*) (que quelques-uns appellent assez heureusement *virtus*) est double: la *primitive* est attachée à toute substance corporelle (j'estime, en effet, qu'un corps complètement au repos est chose contraire à la nature); la *dérivée,* résultant du conflit des corps entre eux, s'exerce de façons diverses, comme par une limitation de la *primitive* ([205])....

C'est par la force dérivée que les corps agissent les uns sur les autres ou subissent l'action les uns des autres. Sous ce nom, nous entendrons ici seulement celle qui est attachée au mouvement local et qui, en retour, tend à produire le mouvement local. Nous savons, en effet, que tous les autres phénomènes matériels peuvent s'expliquer par le mouvement local. Le mouvement est un continuel changement de lieu; il a donc besoin du temps. Un mobile en mouvement, comme il a du mouvement dans le temps, a de

([204]) En somme, la méthode de Leibniz ressemble beaucoup à celle de Descartes; c'est une méthode métaphysique. Ses idées sont certainement plus proches de la vérité que celles de Descartes; elles ne sont pas exemptes d'erreur cependant. La force des corps en mouvement, telle qu'il la mesure, ne se conserve dans le choc des corps que si ceux-ci sont parfaitement élastiques. La troisième règle cartésienne, que Leibniz critique ici, est exacte si les corps sont parfaitement mous (*cf.* note 99).

Huygens admet, comme Leibniz, la conservation des forces vives dans le choc. Mais il ne donne pas à ses hypothèses un tour métaphysique. La restriction, *pourvu que les corps soient parfaitement élastiques,* ne détonnerait nullement dans les énoncés qu'il en donne. Elle détonnerait, au contraire, chez Leibniz qui aurait besoin d'expliquer, après ses affirmations si absolues, pourquoi la non-élasticité des corps permettrait la disparition d'une partie de la force.

On sait d'ailleurs aujourd'hui que, cette explication, Leibniz pourrait la trouver dans les phénomènes calorifiques qui accompagnent le choc des corps mous. Il est donc incontestable que ses idées constituent un progrès sur celles de Descartes et de Wallis. Dans l'usage qu'il fait, à la manière de ces derniers, du procédé métaphysique, il choisit plus heureusement qu'eux sa fonction *énergie*.

([205]) C'est toujours le procédé métaphysique.

même, à un certain instant, une *vitesse*.... La vitesse prise avec sa direction s'appelle *conatus*. L'*impetus* est le produit de la masse (*moles*) du corps par sa vitesse, et sa quantité est ce que les Cartésiens appellent, d'habitude, *quantité de mouvement* ([206]).

....

L'*impetus* (quoique étant chose momentanée) est fait d'une infinité de degrés imprimés successivement au mobile; il a un certain élément, de l'infinie répétition duquel il peut naître. Imaginez, dans le plan de cette feuille, un tube AC tournant avec une vitesse uniforme autour du point C immobile, et un globe B, placé dans ce tube, qui, toute attache ou tout empêchement étant rompu, commence à se mouvoir par la force centrifuge. Évidemment, au début, le *conatus* pour s'éloigner du centre, par lequel le globe B tend vers l'extrémité A, est infiniment petit par rapport à l'*impetus* qu'il a déjà du fait de la rotation et avec lequel le globe B, entraîné avec le tube lui-même, tend de D vers (D), en conservant sa distance au centre. Mais l'impression de la force centrifuge se continuant quelque temps par la rotation précédente, il naîtra forcément dans le globe un impetus centrifuge (D)(B) comparable à l'impetus D(D). On voit par là que le *nisus* est double; il y a le *nisus* élémentaire ou infiniment petit que j'appelle *sollicitation* (*sollicitatio*), et celui qui est formé par la continuation ou la répétition des *nisus* élémentaires; c'est l'*impetus* lui-même. Ce n'est pas, certes, que je veuille que ces entités mathématiques se trouvent réellement dans la nature; mais elles servent pour faire, par une abstraction de l'esprit, des estimations soignées.

La force (*vis*) aussi est double. La force élémentaire, que j'appelle aussi *morte* parce qu'en elle n'existe pas encore de mouvement, mais seulement une sollicitation au mouvement, est comme celle du globe dans le tube ou de la pierre dans la fronde, tant qu'elle est retenue par la corde; l'autre est la force ordinaire, unie au mouvement actuel, et je l'appelle *vive* : des exemples de force morte sont donnés par la force centrifuge, par la gravité ou force centripète, par la force avec laquelle un ressort tendu commence à se débander. Mais dans la percussion, qui est produite par un grave tombant déjà depuis quelque temps ou par un arc se débandant pendant quelque temps ou par toute autre cause, la

([206]) Cet *impetus* n'est pas le même que celui de Galilée, note 114. — Pour le *conatus, voir* note 207.

force est vive et elle naît d'une infinité d'impressions continuées de la force morte....

Les anciens, autant qu'on le sait, n'eurent que la science des forces mortes; c'est celle qu'on appelle *Mécanique* et qui traite du levier, de la vis, du plan incliné.... de l'équilibre des liqueurs et d'autres problèmes semblables; on n'y étudie que le premier *conatus* des corps entre eux, avant qu'ils n'acquièrent un *impetus* par leur action ([207]).

....

[Leibniz explique comment il est arrivé à l'estimation de la *force vive* par un effet qu'elle produit, dans lequel elle se consume entièrement, et qu'il appelle pour cela *violent*.]

J'ai choisi, parmi les effets violents, celui qui est le plus susceptible d'homogénéité ou de division en parties semblables et égales, comme est l'ascension d'un corps doué de gravité, car l'élévation d'un grave à deux ou trois pieds est précisément double ou triple de l'élévation du même grave à un pied, et l'élévation d'un grave double à un pied est exactement double de l'élévation d'un grave simple à un pied; par conséquent, l'élévation d'un grave double à trois pieds est sextuple de l'élévation du grave simple à un pied ([208]). Je suppose, toutefois (au moins pour la démonstration, car, dans la réalité, les choses sont peut-être autrement, mais l'erreur est insensible), que les graves ont même gravité à toutes les altitudes. Dans un ressort, en effet, il n'y a pas aussi facilement homogénéité. Comme, donc, je voulais comparer des corps différents ou doués de vitesses différentes, j'ai vu sans difficulté que, si le corps A était simple et le corps B double, et si leurs vitesses étaient égales, la force du premier était simple, celle du second double, puisque précisément ce qui est posé une fois dans l'un l'est deux fois dans l'autre. Car, il y a dans B deux fois un corps égal à A et animé de la même vitesse, et rien de plus. Mais si les corps A et C sont égaux et si la vitesse de A est simple, celle de C double, je voyais que ce qui est dans A n'est pas exactement double dans C, puisque la vitesse est bien doublée, mais non le corps. Et j'ai vu que c'était là l'erreur de ceux qui crurent que la force est doublée par le seul doublement d'une modalité. De même, j'ai observé

([207]) *Voir* la fin de la note 209. — La notion de *conatus* est ici la même que dans Huygens (note 193), ce qui n'est peut-être pas très conforme à la définition posée plus haut par Leibniz (note 207).

([208]) Comparer avec Descartes, note 74.

jadis et enseigné que le véritable art d'estimer — non suivi jusqu'à présent, malgré la publication de tant d'éléments de mathématiques universelles — consiste en une réduction à quelque chose d'homogène, c'est-à-dire à une répétition exacte et complète, non seulement des modes, mais encore des choses. De cette méthode, aucun exemple meilleur ou plus clair ne peut être donné que ce que je dis dans la présente discussion ([209]).

([209]) Leibniz nous paraît se faire illusion sur la valeur de la règle qu'il donne pour faire une bonne estimation, et par laquelle il recommande de diviser les choses en parties semblables et égales. On pourrait, semble-t-il, avec cette règle justifier aussi bien l'évaluation de la force vive par le produit mv que par le produit mv^2.

Prenons, en effet, comme effet de la force vive destiné à la mesurer, l'élévation d'un poids pendant un certain temps. N'est-il pas assez naturel d'admettre que la force vive qui peut faire remonter un poids de 1 livre pendant 2 secondes est double de celle qui peut faire remonter 2 livres pendant 1 seconde? Or, si l'on adopte cette règle, on est conduit à évaluer la force vive par le produit mv.

Les indications de Leibniz n'en sont pas moins intéressantes et le conseil est toujours bon à suivre, pour éclaircir une notion, de l'analyser de manière à la réduire à des éléments simples. Faisons abstraction du tour trop absolu que Leibniz donne, comme Descartes, à sa pensée. Il n'en reste pas moins qu'il aperçoit l'importance de la notion du travail que peut développer un corps en mouvement, et par là l'intérêt de la considération du produit mv^2.

Voici donc, en résumé, les conceptions générales auxquelles parvient Leibniz.

La *force vive* d'un corps en mouvement se conserve. Elle n'est changée que par l'action de corps étrangers qui perdent autant de force vive qu'ils en donnent au premier corps (*voir* note 202). L'action de ces corps est une *force morte* et c'est la répétition des impressions de la force morte qui fait varier la force vive (*voir* note 207). La force morte peut donc se mesurer par la force vive qu'elle produit pendant une partie élémentaire du mouvement.

De là le moyen de rattacher la notion de force statique à la notion de force des corps en mouvement. Leibniz n'est sans doute pas assez explicite sur ce point, mais on peut compléter sa pensée comme suit : la force statique est la force morte. Pour la mesurer, nous pouvons la considérer comme produisant une certaine force vive en agissant pendant un certain temps, ou bien le long d'un certain chemin; ce sera alors soit le quotient de l'élément de force vive par l'élément de temps, soit le quotient de l'élément de force vive par l'élément de chemin. Comment fixerons-nous notre choix entre ces deux modes d'évaluation ?

Ce choix est imposé, si nous voulons que notre force morte soit quelque chose de comparable à un poids. En effet, Leibniz établit l'équivalence entre la force vive estimée par le produit mv^2 et l'action d'un poids sur un certain chemin. Si donc nous adoptons l'évaluation leibnizienne de la force vive, la force morte est le quotient de la variation de mv^2 par le chemin élémentaire.

Si, au contraire, nous estimions la force vive par le produit mv, cela reviendrait, comme nous l'avons montré plus haut, à établir une équivalence entre la force vive et l'action d'un poids pendant un certain temps. Voulant toujours que notre force morte soit analogue à un poids, nous serions conduit à diviser la variation de mv par l'élément de temps.

Les deux procédés nous conduisent à la même estimation $m\frac{dv}{dt}$ de la force.

Il est intéressant de remarquer que l'intervention des idées énergétiques permet

[Se référant donc à cet effet de la force vive qu'est l'élévation des graves à une certaine hauteur, effet qu'il considère comme susceptible de division en parties égales, Leibniz montre, en s'appuyant sur les théorèmes de Galilée relatifs à la chute ou à l'ascension des corps pesants, que les forces des corps, en général, sont en raison composée de la raison simple des corps et de la raison doublée des vitesses.]

La conception leibnizienne des *forces vives* et des *forces mortes* a joué un grand rôle dans la Science du XVIIIe siècle. Complétée par l'énoncé du *théorème des forces vives* admis *a priori*, à la suite d'Huygens et de son *Horologium oscillatorium*, comme principe fondamental, elle a constitué la *doctrine des forces vives*, sur laquelle les mécaniciens se sont divisés en partisans et en adversaires. Nous reviendrons sur cette querelle (deuxième Partie, Livre III). Contentons-nous de donner ici un exemple de l'utilisation des idées de Leibniz en citant le début du Mémoire de Courtivron intitulé *Recherches de Statique et de Dynamique où l'on donne un nouveau principe général pour la considération des corps animés par des forces variables suivant une loi quelconque* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, 1748 et 1749) ([210]).

Ce principe général est que, de toutes les situations que prend successivement un système de corps animés par des forces quelconques et liés les uns aux autres par des fils, des leviers, ou par tel autre moyen qu'on veuille supposer, celle où le système a la plus grande somme des produits des masses par les carrés des vitesses, c'est-à-dire la plus grande force vive, est la même situation que celle où il le faudrait placer en premier lieu pour qu'il restât en équilibre.

La métaphysique générale de ce principe est assez simple. Une quantité variable quelconque qui croît par degrés infiniment petits devient la plus grande dans le même instant où elle cesse d'augmenter, c'est-à-dire où son accroissement et par conséquent sa

---

de justifier, dans une certaine mesure, le lien entre la force statique et l'accélération. C'est un point que nous avons d'ailleurs déjà rencontré (*voir* notes 181 et 193).

([210]) Nous avons déjà dit un mot de ce Mémoire. Note 79.

cause sont zéro. Or un système de corps, dont la force entière augmente continuellement parce que le résultat des pressions agissantes fait accélération, aura atteint son maximum de force lorsque la somme des pressions sera nulle, comme il arrive lorsqu'il a pris la situation que demande l'équilibre ([211]).

Ce raisonnement pourrait ne satisfaire que les partisans des forces vives; ce n'est pas assez, je veux le rendre péremptoire et je pense d'ailleurs qu'il a besoin d'être développé : pour y parvenir, je vais examiner divers cas de mon principe et le démontrer rigoureusement dans tous.

[Suit un examen de quelques cas très particuliers où Courtivron démontre, en effet, directement son principe. Il fait remarquer que ses démonstrations s'abrègent en invoquant le théorème des forces vives; mais il donne des raisonnements sans l'invoquer ([212]).]

§ 3. — Les causes finales.

Nous avons vu, par les citations qui précèdent, que les conceptions métaphysiques n'avaient pas été étrangères au développement de la Mécanique.

Il est facile de trouver dans les idées de *quantité de matière* et dans celle de *force des corps en mouvement* la trace de la notion de substance, et les écrits de Leibniz sont fort instructifs à cet égard. Il est une autre tendance de l'esprit humain, abandonnée par la Science moderne, qui a joué un rôle important dans l'histoire qui nous occupe. C'est la tendance à l'explication des phénomènes naturels par les causes finales. Elle a conduit à des points de vue nouveaux et a imprimé aux formules de la Mécanique un caractère qu'elles ont conservé.

Nous trouvons une manifestation intéressante de ces tendances dans le Mémoire de Maupertuis (1698-1759), publié le 15 avril 1744 dans les *Mémoires de l'Académie des*

([211]) C'est la théorie de Leibniz.

([212]) Remarquons en passant que, par là, Courtivron démontre le théorème des forces vives dans les cas qu'il étudie.

Sciences et intitulé : *Accord des différentes lois de la nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles.*

[Maupertuis y rappelle les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière ainsi que les explications qu'on en a tentées. Descartes a assimilé la propagation et la réflexion de la lumière au mouvement d'une balle rencontrant une surface qui la réfléchit ou la dévie; mais son interprétation est imparfaite pour la réfraction ([213]). Newton et Clairaut ont fait intervenir, dans ce phénomène, la loi d'attraction.]

Fermat avait senti le premier le défaut de l'explication de Descartes; il avait aussi désespéré apparemment de déduire les phénomènes de la réfraction de ceux d'une balle qui serait poussée contre des obstacles ou dans des milieux résistants; mais il n'avait eu recours ni à des atmosphères autour des corps ni à l'attraction, quoiqu'on sache que ce dernier principe ne lui était ni inconnu ni désagréable; il avait cherché l'explication de ces phénomènes dans un principe tout différent et purement métaphysique.

Tout le monde sait que, lorsque la lumière ou quelque autre corps vont d'un point à un autre par une ligne droite, ils vont par le chemin et le temps le plus court.

On sait aussi... que, lorsque la lumière est réfléchie, elle va encore par le chemin le plus court et le temps le plus prompt...

Voilà donc le mouvement direct et le mouvement réfléchi de la lumière qui paraissent dépendre d'une loi métaphysique qui porte que *la nature dans la production de ses effets agit toujours par les moyens les plus simples.*

[Dans le cas de la réfraction, si la lumière a des vitesses différentes dans les différents milieux, la ligne droite joignant deux points appartenant à des milieux différents est toujours le plus court chemin, mais non le plus prompt. Fermat, admettant que la lumière va moins vite dans les milieux plus denses, a posé en principe qu'elle suivait toujours le chemin le plus prompt et a retrouvé ainsi les lois de la réfraction.]

On vit plusieurs des plus célèbres mathématiciens embrasser le sentiment de Fermat; Leibniz est celui qui l'a le plus fait valoir...

([213]) Nous avons donné (Chap. I, § 1) le passage de Descartes sur la réflexion Ce qu'il dit de la réfraction est analogue. Il suppose que la balle va plus vite dans le milieu le plus dense.

Il fut si charmé du principe métaphysique et de retrouver ici *ses causes finales* auxquelles on sait combien il était attaché, qu'il regarda comme un fait indubitable que la lumière se mouvait plus vite dans l'air que dans l'eau ou dans le verre.

C'est cependant tout le contraire. Descartes avait avancé le premier que la lumière se meut le plus vite dans les milieux les plus denses, et, quoique l'explication de la réfraction qu'il en avait déduite fût insuffisante, son défaut ne venait point de la supposition qu'il faisait. Tous les systèmes qui donnent quelque explication plausible des phénomènes de la réfraction supposent le paradoxe ou le confirment ([214]).

Or ce fait posé, que *la lumière se meut le plus vite dans les milieux les plus denses,* tout l'édifice que Fermat et Leibniz avaient bâti est détruit...

En méditant profondément sur cette matière, j'ai pensé que la lumière, lorsqu'elle passe d'un milieu dans un autre, abandonnant déjà le chemin le plus court... pouvait bien aussi ne pas suivre celui du temps le plus prompt... La lumière ne suit aucun des deux, elle prend une route qui a un avantage plus réel : *le chemin qu'elle tient est celui par lequel la quantité d'action est la moindre.*

Il faut maintenant expliquer ce que j'entends par la quantité d'action. Lorsqu'un corps est porté d'un point à un autre, il faut pour cela une certaine action; cette action dépend de la vitesse qu'a le corps et de l'espace qu'il parcourt, mais elle n'est ni la vitesse ni l'espace pris séparément. La quantité d'action... est proportionnelle à la somme des espaces multipliés chacun par la vitesse avec laquelle le corps les parcourt.

[Maupertuis montre facilement qu'en vertu des lois de la réfraction l'expression $V \times AR + W \times RB$ est minimum, l'indice de réfraction étant $\frac{W}{V}$. La même propriété a évidemment lieu dans la réflexion ([215]).]

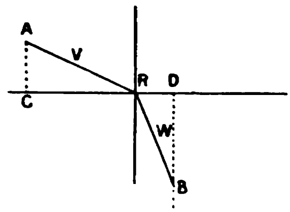
Je connais la répugnance que plusieurs mathématiciens ont pour les *causes finales* appliquées à la Physique et l'approuve même

([214]) Il faut entendre tous les systèmes donnant une explication du phénomène fondée sur l'assimilation de la lumière à un projectile. Ces systèmes se rattachent tous plus ou moins à l'explication de Descartes. Maupertuis est vraiment bien affirmatif. On sait d'ailleurs aujourd'hui que son affirmation est fausse : la lumière va moins vite dans les milieux plus denses.

([215]) Physiquement parlant, l'explication de Maupertuis n'est pas distincte de celle de Descartes. Elle n'en diffère que par l'introduction des idées finalistes.

jusqu'à un certain point; j'avoue que ce n'est pas sans péril qu'on les introduit. L'erreur où sont tombés des hommes tels que Fermat

Fig. 89.



et Leibniz en les suivant ne prouve que trop combien leur usage est dangereux. On peut cependant dire que ce n'est pas le principe qui les a trompés; c'est la précipitation avec laquelle ils ont pris pour principe ce qui n'en était que des conséquences.

On ne peut pas douter que toutes choses ne soient réglées par un Être suprême qui, pendant qu'il a imprimé à la matière des forces qui dénotent sa puissance, l'a destinée à exécuter des effets qui marquent sa sagesse, et l'harmonie de ces deux attributs est si parfaite que sans doute tous les effets de la nature se pourraient déduire de chacun pris séparément. Une mécanique aveugle et nécessaire suit les desseins de l'Intelligence la plus éclairée et la plus libre, et, si notre esprit était assez vaste, il verrait également les causes des effets physiques soit en calçulant les propriétés des corps, soit en recherchant ce qu'il y avait de plus convenable à leur faire exécuter.

Le premier de ces moyens est le plus à notre portée, mais il ne nous mène pas fort loin. Le second quelquefois nous égare, parce que nous ne connaissons point assez quel est le but de la nature et que nous pouvons nous méprendre sur la *quantité* que nous devons regarder comme sa *dépense* dans la production de ses effets.

Pour joindre l'étendue à la sûreté dans nos recherches, il faut employer l'un et l'autre de ces moyens. Calculons les mouvements des corps, mais consultons aussi les desseins de l'Intelligence qui les fait mouvoir.

En 1746, Maupertuis a appliqué des considérations analogues au choc des corps et déterminé les vitesses après le choc en rendant minima une *action* exprimée par ce qu'on appelle aujourd'hui *la force vive due aux vitesses perdues*. Il a d'ailleurs essayé, mais par des indications fort obscures, de rattacher cette *action* à celle qu'il avait définie, dans ce qui précède, par le produit de la masse par la vitesse et le chemin.

Dans l'Ouvrage célèbre où il a donné une méthode générale pour traiter les problèmes qui ressortissent aujourd'hui au calcul des variations et qu'on appelait alors *problèmes d'isopérimètres* ([216]), Euler (1707-1783) a affirmé avec une grande netteté les idées finalistes.

Comme la construction du monde est la plus parfaite possible et qu'elle est due à un Créateur infiniment sage, il n'arrive rien dans le monde qui ne présente des propriétés de maximum ou de minimum. C'est pourquoi aucun doute ne peut subsister sur ce qu'il soit également possible de déterminer tous les effets de l'univers par leurs causes finales, à l'aide de la méthode des maxima et minima, aussi bien que par leurs causes efficientes.

Et l'Ouvrage se termine par une addition importante, consacrée à la Mécanique, où Euler reprend le principe *de la moindre action* de Maupertuis, mais d'une manière beaucoup plus satisfaisante. Citons les passages les plus saillants de cet important morceau, qui est intitulé : *Du mouvement des projectiles* ([217]) *dans un milieu non résistant, déterminé par la méthode des maxima et minima.*

1. Puisque tous les effets de la nature suivent quelque loi de maximum ou minimum, il n'est pas douteux que les courbes décrites par les projectiles sous l'influence de forces quelconques jouissent de quelque propriété de maximum ou de minimum. Il paraît moins facile de définir, *a priori*, par des principes métaphysiques, quelle est cette propriété; mais, puisqu'il est possible de déterminer ces courbes par la méthode directe, on pourra en

---

([216]) *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici* (Lausanne et Genève, 1744).

([217]) Je traduis *Corpora projecta* par *projectiles*. Il ne s'agit pas des projectiles au sens de la balistique.

conclure, avec l'attention voulue, ce qui y est maximum ou minimum. On doit de préférence considérer l'effet provenant des forces agissantes. Comme cet effet consiste dans le mouvement produit, il paraît conforme à la vérité que ce mouvement, ou plutôt la réunion de tous les mouvements qui résident dans le projectile, doive être minimum. Quoique cette conclusion ne paraisse pas suffisamment démontrée, cependant si je fais voir qu'elle s'accorde avec la vérité déjà connue, *a priori,* elle acquerra tant de poids que tous les doutes qui pourraient naître à son sujet s'évanouiront complètement.

. . . .

2. M est la masse du projectile, et, pendant qu'il parcourt l'élément d'espace ds, sa vitesse est due à la hauteur v. Sa quantité de mouvement est alors, en cet endroit, $M\sqrt{v}$ dont le produit par ds donne $M\,ds\sqrt{v}$, mouvement total (*collectivum*) du corps le long de l'espace ds. Je dis que la ligne décrite par le corps sera telle que, parmi toutes les lignes ayant mêmes extrémités, l'expression $\int M\,ds\sqrt{v}$ ou, puisque M est constant, l'expression $\int ds\sqrt{v}$ y sera minima. Si donc on considère la courbe cherchée comme donnée, la vitesse $\sqrt{v}$ pourra être définie en fonction des forces agissantes et de quantités se rapportant à la courbe; donc la courbe elle-même peut être déterminée par la méthode des maxima et minima. D'ailleurs l'expression ci-dessus, écrite en partant de la quantité de mouvement, peut aussi être rapportée aux forces vives : soit en effet dt le temps de parcours de l'élément ds; comme $dt = ds\sqrt{v}$, on aura $\int ds\sqrt{v} = \int v\,dt$. Donc, dans la courbe décrite par un projectile, la somme de toutes les forces vives qui résident dans le corps aux divers instants est minima. Aussi pas plus ceux qui estiment les forces par les vitesses elles-mêmes que ceux qui les estiment par les carrés des vitesses ne trouveront ici rien qui offense leur sentiment.

. . . .

[Euler vérifie alors que son principe est vrai dans certains cas particuliers : le mouvement parabolique des corps pesants, les mouvements produits par une force centrale, etc. Il vient enfin au cas général.]

13. Par ces cas donc, est mis en lumière le parfait accord avec la vérité du principe ici établi. Il peut rester un doute sur la question de savoir si cet accord se rencontrera encore dans des cas plus compliqués. Aussi faut-il chercher à déterminer avec beaucoup de soin l'étendue de ce principe, afin de ne pas lui attribuer plus que sa nature ne le permet. Expliquons-nous. Tous les mouvements de projectiles se partagent en deux catégories. Dans la première, la vitesse du corps dépend uniquement du lieu où il se trouve, quel qu'il soit, de sorte que, si le corps revient au même point, il reprend la même vitesse; cela arrive si le corps est attiré vers un ou plusieurs centres fixes par des forces qui ne sont fonctions que des distances à ces centres. Dans la seconde, je fais rentrer les mouvements dans lesquels la vitesse du corps n'est pas déterminée par sa seule position; cela arrive si les centres d'attraction sont mobiles ou si le mouvement se produit dans un milieu résistant. Cette distinction faite, il faut remarquer que, toutes les fois que le mouvement du corps rentrera dans la première catégorie, c'est-à-dire que le corps sera attiré par un ou par un nombre quelconque de centres fixes, la somme de tous les mouvements élémentaires sera minima dans son mouvement [218].

14. Par sa nature, notre proposition postule cette condition. En effet, quand on cherche la courbe qui, entre des extrémités données, rend minimum $\int ds\sqrt{v}$, on suppose par là même que la vitesse du corps est la même aux deux extrémités, quelle que soit la courbe suivie par le corps. Quel que soit le nombre des centres fixes, la vitesse du corps en un lieu quelconque M s'exprime par une fonction déterminée des deux variables $CP = x$, $PM = y$. Soit donc v une fonction quelconque de x et de y, de telle sorte que $dv = T\,dx + V\,dy$, et voyons si notre principe nous donne la véritable trajectoire du corps. Puisque $dv = T\,dx + V\,dy$, le corps se meut comme s'il était sollicité en M par deux forces, l'une T dans la direction de Ox, l'autre V dans celle de Oy; de là la force tangentielle $\frac{T\,dx + V\,dy}{ds}$ et la force normale $\frac{-V\,dx + T\,dy}{ds}$.

([218]) C'est, énoncée sous une forme un peu moins générale, la restriction aux termes de laquelle le principe de la moindre action exige que les forces admettent un potentiel.

Par la nature du mouvement libre, on doit avoir [219]

$$\frac{2v}{r} = \frac{-V\,dx + T\,dy}{ds} = \frac{-V + Tp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Si la méthode des maxima et minima nous conduit aussi à cette équation, notre principe sera conforme à la vérité.

15. Par ce principe [220], $\int dx\sqrt{v(1+p^2)}$ doit être minimum. Différentions donc la quantité $\sqrt{v(1+p^2)}$ et il vient, en tenant compte de ce que $dv = T\,dx + V\,dy$,

$$\frac{T\,dx\sqrt{1+p^2}}{2\sqrt{v}} + \frac{V\,dy\sqrt{1+p^2}}{2\sqrt{v}} + \frac{p\,dp\sqrt{v}}{\sqrt{1+p^2}};$$

d'où l'on tire l'équation de la courbe cherchée par la méthode enseignée :

$$\frac{V\,dx\sqrt{1+p^2}}{2\sqrt{v}} = d\frac{p\sqrt{v}}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dp\sqrt{v}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{p(T\,dx + V\,dy)}{2\sqrt{v}\sqrt{1+p^2}}$$

ou

$$-\frac{dp\sqrt{v}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Tp\,dx - V\,dx}{2\sqrt{v(1+p^2)}}.$$

Mais le rayon de courbure en M est $-\frac{(1+p^2)\,dx\sqrt{1+p^2}}{dp}$. Posons-le égal à r. On aura

$$\frac{2v}{r} = \frac{Tp - V}{\sqrt{1+p^2}},$$

exactement ce qu'on trouve par la méthode directe. Pourvu donc que les forces agissantes soient telles qu'on puisse les réduire à deux forces T et V parallèles aux axes coordonnés et fonctions quelconques des deux variables x et y [221], toujours, dans la trajectoire, le mouvement du corps additionné suivant tous les éléments sera minimum.

---

[219] r désigne le rayon de courbure, p la dérivée $\frac{dy}{dx}$.

[220] Il n'est pas nécessaire, pour suivre ce calcul, de connaître les méthodes employées par Euler dans les problèmes d'isopérimètres. Les méthodes analytiques du calcul actuel des variations permettent de le faire très bien.

[221] Il faut ajouter la condition énoncée plus haut pour la vitesse (passage signalé par la note 218) et qui revient à celle-ci : $T\,dx + V\,dy$ doit être une différentielle exacte.

16. Ce principe se trouve donc si étendu que seul le mouvement troublé par une résistance de milieu paraît lui échapper. La raison de cette exception se conçoit facilement, parce que, dans ce cas, le corps parvenant au même point par des chemins différents n'acquiert pas la même vitesse. Toute résistance supprimée dans le mouvement des projectiles, on aura toujours cette propriété que la somme de tous les mouvements élémentaires est minima. Et il ne faut pas considérer cette propriété dans le mouvement d'un corps unique seulement, il faut la prendre aussi dans celui de plusieurs corps réunis; de quelque manière qu'ils agissent les uns sur les autres, la somme de tous les mouvements sera toujours minima. Comme des mouvements de cette nature sont difficilement soumis au calcul, ce résultat sera compris plus facilement en vertu des premiers principes qu'en vertu de l'accord des calculs exécutés suivant les deux méthodes ([222]). En effet, puisque les corps, en vertu de l'inertie, résistent à tout changement d'état, ils obéiront le moins possible aux forces agissantes, si toutefois ils sont libres. Donc, dans le mouvement engendré, l'effet provenant des forces devra être moindre que si le ou les corps étaient mus de quelque autre manière. La force de ce raisonnement n'apparaît pas encore suffisamment; comme cependant il s'accorde avec la vérité, je ne doute pas que les principes d'une métaphysique plus saine ne permettent de le mettre en plus grande évidence. Je laisse ce soin à d'autres, qui font profession de Métaphysique.

Nous rechercherons, dans la seconde Partie de cet Ouvrage, la signification que la Mécanique moderne attribue à ces lois de maximum et de minimum introduites dans la Science sous l'influence des idées finalistes.

([222]) Euler se borne donc à démontrer le principe de la moindre action dans le cas du point, et il ne fait même ses calculs que pour le point *libre*. L'extension rigoureuse aux systèmes et au cas des liaisons sera due à Lagrange. On remarquera aussi que, même pour le point, Euler n'envisage que les mouvements plans.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

TABLE DES AUTEURS ET DES OUVRAGES CITÉS.

Ce Volume contient des citations empruntées aux auteurs et aux Ouvrages suivants (*).

(*) Les chiffres arabes renvoient aux pages.

TABLE DES MATIÈRES.

40310 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

40510 Paris. Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.