

Grundlagen der Fourier-Transformation und deren Anwendung in der Magnetresonanztomographie (MRT)

Diplomarbeit

im Lehramtsstudium Mathematik - Geschichte, Sozialkunde, Politische Bildung
zur Erlangung des akademischen Grades
Magister der Naturwissenschaften

eingereicht an der Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik
an der Leopold-Franzens-Universität Innsbruck

von

Johannes Klotz

Betreuer: Univ.-Prof. Dr. Markus Haltmeier
Institut für Mathematik

Innsbruck, 30. April 2019

„Woran arbeiten Sie?“ wurde Herr K. gefragt.
Herr K. antwortete: „Ich habe viel Mühe,
ich bereite meinen nächsten Irrtum vor.“

(Mühsal der Besten, Bertolt Brecht)

Meinen Eltern,
die mir bei vielen meiner Irrtümer den Weg gezeigt haben.
Und meiner Schwester, der besten.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich meiner gesamten Familie, allen voran meinen Eltern Manuela und Theodor, für die jahrelange Unterstützung, die vielen Ratschläge und Wegweiser, die unendliche Geduld, die kleinen und großen Lektionen fürs Leben, den Kompass für die wichtigen Dinge und auch den pekuniären Beitrag sowie für alles andere, was sie für mich getan und mir mitgegeben haben, danken. Sie haben es mir erst ermöglicht, diese Zeilen zu schreiben. Seine Familie und Verwandtschaft kann man sich bekanntlich nicht aussuchen. In dieser Beziehung habe ich großes Glück.

Auch meiner Freundin Simone und „ihrer Bande“ möchte ich für die schönen, oft aufbauenden Momente in den letzten drei Jahre danken. Sie hat mir die Studienzeit in Innsbruck wahrlich unvergesslich gemacht.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei meinem Betreuer Univ.-Prof. Dr. Markus Haltmeier für die ungezwungene, unkomplizierte Zusammenarbeit, die hilfreichen Erklärungen und Anmerkungen sowie für die schnellen Korrekturen der vorläufigen Versionen dieser Arbeit bedanken.

Es war mir eine Freude, mit ihm zusammenzuarbeiten.

Die Verwendung der abgedruckten Abbildungen erfolgt mit freundlicher Genehmigung des Springer-Verlags.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt durch meine eigenhändige Unterschrift, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Alle Stellen, die wörtlich oder inhaltlich den angegebenen Quellen entnommen sind, sind als solche kenntlich gemacht.

Die vorliegende Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form noch nicht als Bachelor-/Master-/ Diplomarbeit oder Dissertation vorgelegt.

Innsbruck, am 30. April 2019

(Johannes Klotz)

Abstract

Das Ziel der vorliegenden Diplomarbeit ist es, das Bildgebungsproblem in der Magnetresonanztomographie als anwendungsorientiertes Beispiel von Fourier-Transformationen für den Schulunterricht aufzubereiten. Dafür werden in einem ersten zentralen Teil die mathematischen Grundlagen der kontinuierlichen und diskreten Fourier-Transformation erarbeitet. Anschließend beschäftigt sich die Arbeit mit der Funktionsweise eines MR-Tomographen auf elementarer Ebene. Im dritten Teil werden diese Ergebnisse dann zusammengeführt, um weiters das Rekonstruktionsproblem in der Bildgebung der MRT zu modellieren und zu lösen. Die Aufbereitung für den Mathematikunterricht mit einer Stundenplanung für die Behandlung des Themas im fächerübergreifenden Unterricht sowie Unterrichtsmaterial hierzu findet sich im letzten Teil. Die Anführung der wichtigsten Bestimmungen des Lehrplans, ein Blick in ausgewählte Schulbücher und eine fachdidaktische Einbettung runden den schulisch-didaktischen Teil ab.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen der Fourier-Transformation	3
2.1	Mathematische Grundlagen und Notation	4
2.2	Die kontinuierliche Fourier-Transformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ und $L^2(\mathbb{R}^n)$	5
2.2.1	Die Fourier-Transformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$	6
2.2.2	Umkehrsatz, Rechenregeln und Faltungssatz für die Fourier-Transformation	10
2.2.3	Die Fortsetzung der Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R}^n)$	18
2.3	Die diskrete Fourier-Transformation	22
3	Grundlagen und Funktionsweise der MR-Tomographie	26
3.1	Physikalische Grundlagen	26
3.2	Das Magnetresonanzexperiment im MR-Tomographen	29
3.3	Ortskodierung	32
3.4	Erstellung der Datenmatrix	37
4	Bildgebung in der MRT mittels iDFT - mathematische Modellierung	38
5	Die Fourier-Transformation im Schulunterricht	46
5.1	Verankerung des Themas in den Lehrplänen	46
5.2	Ausgewählte didaktische Prinzipien	47
5.3	Einbindung des Themas in den Unterricht	48
5.3.1	Vorbereitende Überlegungen	48
5.3.2	Unterrichtsplanung	48
5.3.3	Fazit der Unterrichtsplanung	54
6	Schlussbemerkung	56
7	Abbildungsverzeichnis	58
8	Literatur	59

1 Einleitung

Die vorliegende Diplomarbeit ist am Schnittpunkt der Mathematik, ihrer Anwendung in der Technik und ihrer Behandlung im Schulunterricht entstanden. Mathematisch im Mittelpunkt steht dabei die Fourier-Transformation. Die Grundlagen für diese Integraltransformation wurden vor rund 200 Jahren vom französischen Mathematiker Joseph Fourier geschaffen. Schon früh erkannte man das Potenzial dieses mathematischen Werkzeugs. Heute findet die Fourier-Transformation vielfältige Anwendungen in der Mathematik, Naturwissenschaft und Technik. Speziell bei Letzterer ist ihre Bedeutung in vielen Bereichen fundamental, weshalb sie im Lehrstoff höherer technischer Lehranstalten in Österreich zu finden ist. Aufgrund der Relevanz der Fourier-Transformation in der Technik des modernen Alltags und der eleganten Mathematik, die die gesamte Fourier-Analyse umgibt, ist die eingehendere Beschäftigung mit dem Thema lohnenswert. Die beiden Schwerpunkte dieser Arbeit verteilen sich daher einerseits auf die Fourier-Transformation und eine ihrer wichtigen Anwendungen sowie andererseits auf die Aufbereitung des Themas im Schulunterricht.

Als Anwendungsbeispiel für die Fourier-Transformation habe ich die Magnetresonanztomographie (MRT) gewählt. Die MRT ist heute eine der wichtigsten nichtinvasiven Methoden der modernen Medizin, die die Erzeugung von Schnittbildern durch den Körper ermöglicht. Dieses bildgebende Verfahren liefert detaillierte Bilder von Strukturen und Funktionen des Körpers und ist daher aus dem medizinischen Alltag nicht mehr wegzudenken. Im Zentrum der Bildgebung steht dabei aus mathematischer Sicht ein Rekonstruktionsproblem, das sich mithilfe der inversen diskreten Fourier-Transformation lösen lässt.

Das Ziel dieser Arbeit ist die Modellierung und Lösung des Rekonstruktionsproblems in der Bildgebung der Magnetresonanztomographie sowie ihre Aufbereitung für den Schulunterricht. Dazu werden in einem ersten Teil die mathematischen Grundlagen rund um die Fourier-Transformation vorgestellt. Ausgehend von L^1 -Funktionen werden wichtige mathematische Eigenschaften und Sätze gezeigt sowie einige Beispiele angeführt. Mittels des Satzes von Plancherel wird die Fourier-Transformation dann auf L^2 -Funktionen fortgesetzt und schließlich der Bogen zum diskreten Pendant gespannt.

Das zweite Kapitel gibt einen Überblick über die Funktionsweise der MRT. Es werden die physikalischen Phänomene, auf denen das Verfahren beruht, sowie ihre Manipulation und technische Ausnutzung erklärt. Die Entstehung der Datenmatrix, die für die Berechnung des Schnittbildes notwendig ist, soll so nachvollziehbar dargestellt werden.

In der Modellierung werden anschließend die Erkenntnisse der ersten beiden Kapitel zusammengeführt und das Bildgebungsproblem in der MRT mathematisch modelliert und gelöst.

Für den zweiten Schwerpunkt der Arbeit - die Aufbereitung des Themas für den Unterricht - muss zuerst die Frage nach der gesetzlichen und inhaltlichen Berechtigung des Themas für die Schule geklärt werden. Eingebettet in eine fächerübergreifende Unterrichtseinheit, wird dann vor dem Hintergrund der vorgestellten didaktischen Prinzipien eine konkrete Stundenplanung für den mathematischen Teil des Themas präsentiert.

Diese Aufbereitung für den Unterricht soll einen Weg aufzeigen, wie das Lernen im Mathematikunterricht erforschend gestaltet und der Fokus auf die Modellierung gerichtet werden kann. Außerdem soll sie den Lernenden Möglichkeiten bieten, neue Lösungsstrategien zu erarbeiten. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler dazu ermuntert werden, über neue – auch unkonventionelle – Lösungswege in der Mathematik nachzudenken und verschiedene Anwendungen mathematischer Werkzeuge auszuprobieren. In Bezug auf die Zeilen Bertolt Brechts zu Beginn dieser Arbeit soll den Schülerinnen und Schülern so der Mut gegeben werden, sich etwas zuzutrauen; auch auf das Risiko hin, Fehler zu machen oder einem Irrtum aufzusitzen. Die Besten - so könnte man das Zitat nämlich verstehen - sind jene, die viele Irrtümer begangen, aber noch mehr aus ihnen gelernt haben. Sie wissen, dass es dem Lernen immanent ist, Fehler zu machen und zu irren. Das Prinzip „trial and error“ durchzieht die gesamte Geschichte menschlichen Denkens und Lernens; es brachte und bringt in der Wissenschaft viele Resultate hervor und soll seine Früchte auch in die Schule tragen. Durch diesen Umgang mit Fehlern soll den Schülerinnen und Schülern die Angst davor genommen werden, Fehler zu machen. So sollen sie im Gegenteil erkennen, dass Fehler eine Gelegenheit darstellen. Eine Gelegenheit, daraus zu lernen. Auch über sich selbst.

Dieses Prinzip möchte ich meinem Unterricht zugrunde legen. Das Thema dieser Arbeit soll seinen Teil dazu beitragen, indem es die Chance bietet, neue Wege auszuprobieren und den Nutzen der Mathematik für den Alltag zu erkennen.

2 Grundlagen der Fourier-Transformation

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) wuchs als Sohn eines Schneiders und dessen Frau in Auxerre in Frankreich auf. Im Alter von zehn Jahren bereits Vollwaise, erarbeitete sich der Autodidakt Fourier früh wichtige Grundlagen in Mathematik und den Naturwissenschaften und veröffentlichte im Jugendalter schon erste mathematische Abhandlungen [8, S. 590]. Besonders das Problem der Wärmeleitung in Festkörpern und dessen mathematische Beschreibung weckte sein Interesse. Ein 1807 zu diesem Thema eingereichter Artikel an der Pariser Akademie der Wissenschaften wurde nicht ausgezeichnet, weil das Komitee Zweifel an der Qualität und Rigorosität von Fouriers mathematischen Beschreibungen hatte, die unter anderem die Entwicklung geeigneter Funktionen in trigonometrische Reihen (heute Fourier-Reihen) beinhalteten [8, S. 592]. 1817/18 machte Fourier dann aber bedeutende Fortschritte in der Theorie der Fourier-Reihen und -Transformation und schuf schließlich in seinem monumentalen Aufsatz *La Théorie Analytique de la Chaleur* 1822 die Grundlagen der modernen Theorie hierzu. Die Formel für das Fourier-Integral wird von vielen als eine der fundamentalsten in der modernen Analysis angesehen. In den Worten Lord Kelvins¹: „*Fourier's Theorem, which is not only one of the most beautiful results of modern analysis, but may be said to furnish an indispensable instrument in the treatment of nearly every recondite question in modern physics.*“ (zitiert nach [8, S. 594].) Die von Fourier entwickelten mathematischen Instrumente erfuhren bis heute einige bedeutende Weiterentwicklungen. Ebenso vielseitig wie das Leben ihres Entdeckers - Fourier war unter anderem Mathematiker, Lehrer, Ägyptologe, Freund Napoleon Bonapartes, Trockenleger von Sümpfen, Straßenbauer und Mitglied der Académie Francaise - sind auch die Anwendungsmöglichkeiten der Fourier-Transformation. Von Fragestellungen der reinen Mathematik über jene in Statistik, Wahrscheinlichkeitstheorie und Physik bis hin zu Problemen in der Wirtschaft und allen möglichen Gebieten der Technik: Die breite Palette ihrer Anwendungsmöglichkeiten untermauert ihre Bedeutung [8, S. 589 und S. 594].

Die Vermittlung eines grundlegenden Verständnisses dieses wichtigen mathematischen Instruments ist das Ziel dieses Kapitels. Wir wollen die von Fourier entdeckte Integraltransformation mit ihren wichtigen Eigenschaften kennenlernen und ein tieferes Verständnis ihrer Anwendungsmöglichkeiten erlangen. Dieses Verständnis wird grundlegend für die darauffolgenden Kapitel sein.

¹William Thomson, 1. Baron Kelvin (1824-1907), irisch-britischer Physiker.

2.1 Mathematische Grundlagen und Notation

Für das Skalarprodukt von $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $\langle x, y \rangle$, wohingegen wir das Skalarprodukt in einem Funktionenraum X für $f, g \in X$ mit $\langle f, g \rangle_X$ bezeichnen. Ist f eine integrierbare Funktion auf \mathbb{R}^n , so schreiben wir für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx := \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}}}_{n\text{-mal}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Die zu einer Funktion $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ mit $a(x) = h(x) + ig(x)$, wobei $h, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $i := \sqrt{-1}$, **konjugiert komplexe Funktion** ist definiert durch $\bar{a}(x) := h(x) - ig(x)$.

Folgerichtig gilt für geeignete integrierbare Funktionen $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Re}(a(x)) dx + i \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Im}(a(x)) dx.$$

Es sei zudem - weil in dieser Arbeit prominent vertreten - auch die Definition der **komplexen Exponentialfunktion** in Erinnerung gerufen, die für $z \in \mathbb{C}$ mit $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, definiert ist durch

$$e^z = e^{x+iy} := e^x (\cos(y) + i \sin(y)).$$

Aus dieser Definition lassen sich die Eulerschen² Formeln leicht herleiten:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \cos(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \end{aligned}$$

Des Weiteren verwenden wir folgende Notationen für die entsprechenden Funktionenräume:

Definition 2.1. ($\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$)

Die Menge aller stetigen Funktionen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{C} bezeichnen wir mit $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Mit $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) := \{g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \mid \lim_{\|t\| \rightarrow \infty} g(t) = 0\}$ bezeichnen wir den Funktionenraum aller stetigen Funktionen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{C} , die „im Unendlichen verschwinden“, wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm im \mathbb{R}^n , zum Beispiel die Euklidische³ Norm, ist.

Definition 2.2. (ABSOLUT INTEGRIERBARE FUNKTIONEN, $L^1(\mathbb{R}^n)$)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ nennen wir **absolut integrierbar**, wenn f messbar ist und $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty$. Sei $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$ ein Maßraum mit dem Lebesgue⁴-Maß λ .

²Leonhard Euler (1707-1783), Schweizer Mathematiker und Physiker.

³Euklid von Alexandria (vermutlich 3. Jahrhundert v. Chr.), griechischer Mathematiker.

⁴Henri Léon Lebesgue (1875-1941), französischer Mathematiker.

Mit $L^1(\mathbb{R}^n) := L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda, \mathbb{C}) := \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \text{ messbar} \mid f \text{ absolut integrierbar}\}$ bezeichnen wir den Raum aller absolut integrierbaren Funktionen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{C} . Eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ nennen wir auch L^1 -Funktion.

Wir nennen ein n -Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ mit

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

ein **Multiindex** und setzen

$$\begin{aligned} x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \\ c^\alpha &:= c^{|\alpha|} \end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{C}$. Es ist demnach $\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f$.

Definition 2.3. (SCHNELL FALLENDE FUNKTION, SCHWARTZ-RAUM)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **schnell fallend**, wenn f unendlich oft differenzierbar ist und für alle Multiindizes α, β die Funktion

$$t^\alpha \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial t^\beta} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$$

beschränkt ist. Den Raum aller schnell fallenden Funktionen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{C} bezeichnen wir mit $S(\mathbb{R}^n)$ und nennen ihn **Schwartz⁵-Raum**.

2.2 Die kontinuierliche Fourier-Transformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ und $L^2(\mathbb{R}^n)$

In diesem Unterkapitel wird zuerst die Fourier-Transformation für L^1 -Funktionen mit elementaren Eigenschaften, den wichtigsten Rechenregeln und Beispielen eingeführt. In einem zweiten Schritt wird diese dann mittels des *Satzes von Plancherel*⁶ auf den Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen fortgesetzt. Mit dem somit erarbeiteten Resultat gelingt der Brückenschlag zur diskreten Fourier-Transformation, auf der das in Kapitel 4 beschriebene und modellierte Bildgebungsverfahren schließlich aufbaut.

⁵Laurent Schwartz (1915-2002), französischer Mathematiker.

⁶Michel Plancherel (1885-1967), Schweizer Mathematiker.

2.2.1 Die Fourier-Transformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$

Für die Ausführungen dieses Abschnitts wurden [2], [11], [14] und [25] zu Rate gezogen.

Definition 2.4. (FOURIER-TRANSFORMIERTE, FOURIER-TRANSFORMATION)

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann heißt die durch

$$\mathcal{F}[f] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} : \omega \mapsto \mathcal{F}[f](\omega) := \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-i\langle \omega, t \rangle} dt$$

definierte Funktion **Fourier-Transformierte von f** , wobei mit $\langle \omega, t \rangle$ das Standardskalarprodukt der Vektoren ω und t bezeichnet wird.

Die Abbildung \mathcal{F} , die f ihre dazugehörige Fourier-Transformierte zuordnet, nennt man die **Fourier-Transformation**.

Eine erste wichtige Eigenschaft einer Fourier-Transformierten zeigt folgender Satz.

Satz 2.5. (RIEMANN-LEBESGUE-LEMMA)

Für jede Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ existiert die Fourier-Transformierte und erfüllt $\mathcal{F}[f] \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Beweis. Die Existenz der Fourier-Transformierten $\mathcal{F}[f]$ folgt aus der absoluten Integrierbarkeit von f und der Integrierbarkeit des Produkts einer integrierbaren Funktion mit einer beschränkten Funktion.

Für $\omega, \delta \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}[f](\omega + \delta) - \mathcal{F}[f](\omega)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-i\langle \omega + \delta, t \rangle} - f(t) e^{-i\langle \omega, t \rangle} dt \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(t) e^{-i\langle \omega, t \rangle} (e^{-i\langle \delta, t \rangle} - 1)| dt = \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| \cdot |e^{-i\langle \delta, t \rangle} - 1| dt. \end{aligned}$$

Wegen $|e^{-i\langle \delta, t \rangle} - 1| \leq 2$ für alle $\delta \in \mathbb{R}^n$ ist $2|f(\cdot)|$ eine integrierbare Majorante der rechten Seite. Aus der punktweisen Konvergenz von $|e^{-i\langle \delta, t \rangle} - 1| \rightarrow 0$ für $\delta \rightarrow 0$ folgt die Stetigkeit. Aufgrund der Unabhängigkeit der rechten Seite von ω ist $\mathcal{F}[f]$ sogar gleichmäßig stetig.⁷

Mithilfe des *Riemannsches*⁸ Lemmas, das besagt, dass für eine integrierbare Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ und für alle $\alpha \in \mathbb{R}^n$ der Grenzwert $\lim_{\|\alpha\| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \sin(\langle \alpha, x \rangle) dx = 0$ ist, folgt für die Fourier-Transformierte von f , dass

$$\begin{aligned} \lim_{\|\omega\| \rightarrow \infty} \mathcal{F}[f](\omega) &= \lim_{\|\omega\| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-i\langle \omega, t \rangle} dt \\ &= \lim_{\|\omega\| \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(t) \sin(\langle \omega, t \rangle + \frac{\pi}{2}) dt + i \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \sin(\langle \omega, t \rangle) dt \right) = 0. \end{aligned}$$

⁷Der in der Argumentation verwendete *Konvergenzsatz von Lebesgue* findet sich in [25, S. 496].

⁸Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), deutscher Mathematiker.

Insbesondere ist die Fourier-Transformierte durch $\|\mathcal{F}[f]\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-i\langle \omega, t \rangle} dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| dt = \|f\|_1 < \infty$ beschränkt. \square

L^1 -Funktionen werden daher durch die Fourier-Transformation auf stetige, „im Unendlichen verschwindende“ Funktionen abgebildet, in unserer Notation also:

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : f \mapsto \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}[f].$$

Als Einführungsbeispiele berechnen wir von zwei Funktionen die Fourier-Transformierten. Wie wir noch sehen werden, benötigen wir die Resultate später.

Beispiel 2.6. (EINSEITIGER EXPONENTIALIMPULS)⁹

Sei $a > 0$. Für die Funktion

$$f(t) := \begin{cases} e^{-at} & , \text{ falls } t \geq 0 \\ 0 & , \text{ falls } t < 0 \end{cases}$$

ist die Fourier-Transformierte gegeben durch

$$\mathcal{F}[f](x) = \int_0^\infty e^{-at} e^{-ixt} dt = \left. \frac{-e^{-t(a+ix)}}{a+ix} \right|_{t=0}^\infty = \frac{1}{a+ix}.$$

Durch Addition erhält man für $g(t) := e^{-a|t|}$ die Fourier-Transformierte

$$\mathcal{F}[g](x) = \mathcal{F}[f](x) + \mathcal{F}[f](-x) = \frac{2a}{a^2 + x^2}. \quad (1)$$

Beispiel 2.7. Für eine Menge M mit $A \subset M$ und $m \in M$ nennen wir die Funktion $\chi_A : M \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\chi_A(m) = 1$ für $m \in A$ und $\chi_A(m) = 0$ für $m \notin A$ die **Indikatorfunktion** von A .

Der durch $h := a\chi_{[-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}]}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegebene **Rechteckimpuls** hat dann die reelle Fourier-Transformierte

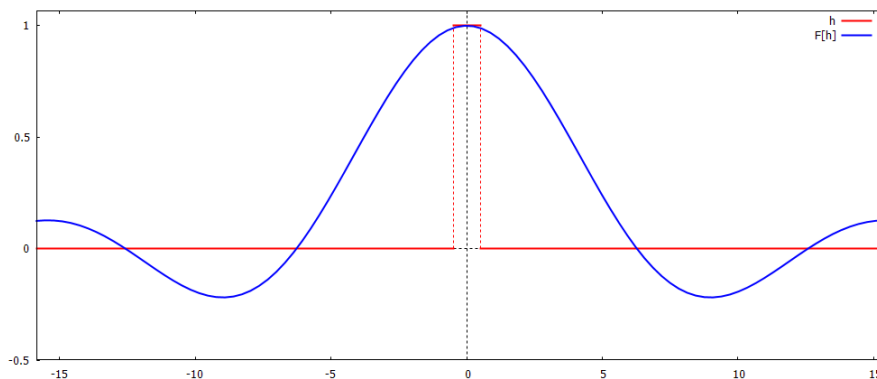
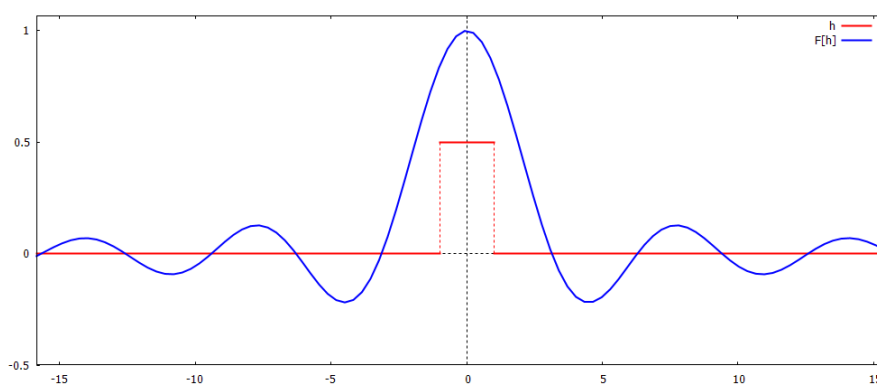
$$\mathcal{F}[h](\omega) = \int_{-\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} ae^{-i\omega t} dt = \left. \frac{ae^{-i\omega t}}{-i\omega} \right|_{t=-\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} = a \frac{-e^{-i\frac{\omega}{2a}} + e^{i\frac{\omega}{2a}}}{2i\frac{\omega}{2}} = \frac{\sin(\frac{\omega}{2a})}{\frac{\omega}{2a}}.$$

Da h absolut integrierbar ist, folgt für $\mathcal{F}[h]$ die Stetigkeit und damit gilt

$$\mathcal{F}[h](0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \mathcal{F}[h](\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{\omega}{2a})}{\frac{\omega}{2a}} = 1. \quad \diamond$$

Bemerkung 2.8. Obwohl $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist, ist $\mathcal{F}[h] \notin L^1(\mathbb{R}^n)$!

⁹Das Beispiel ist entnommen aus [25, S. 584]

Abbildung 1: Funktionsgraphen von h und $F[h]$ aus Beispiel 2.7 für $a = 1$.Abbildung 2: Funktionsgraphen von h und $F[h]$ aus Beispiel 2.7 für $a = \frac{1}{2}$.

Die Graphen in den beiden Abbildung legen die Frage nach Zusammenhängen in den Symmetrieeigenschaften einer Funktion und denen ihrer Fourier-Transformierten nahe. Diese werden im folgenden Lemma untersucht.

Zuvor erinnern wir uns noch an die Definitionen

$$\begin{aligned}
 f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \text{ ist } \mathbf{gerade} &: \Leftrightarrow f(x) = f(-x) \\
 f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \text{ ist } \mathbf{ungerade} &: \Leftrightarrow -f(x) = f(-x).
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Lemma 2.9. (SYMMETRIE)

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Fourier-transformierbare Funktion. Dann gilt:

- (a) $\operatorname{Re}(\mathcal{F}[f])$ ist gerade.
- (b) $\operatorname{Im}(\mathcal{F}[f])$ ist ungerade.
- (c) Ist f gerade, so ist $\mathcal{F}[f]$ reellwertig und gerade.
- (d) Ist f ungerade, so ist $\mathcal{F}[f]$ imaginär und ungerade.

Beweis. Wir führen den Beweis nur für $n = 1$ vor. Geschicktes Umformen ergibt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f](\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \cos(\omega t) dt + i \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(\omega t) dt \\
 &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\int_{-u}^u f(t) \cos(\omega t) dt + i \int_{-u}^u f(t) \sin(\omega t) dt \right) \\
 &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\int_{-u}^0 f(t) \cos(\omega t) dt + \int_0^u f(t) \cos(\omega t) dt \right. \\
 &\quad \left. + i \int_{-u}^0 f(t) \sin(\omega t) dt + i \int_0^u f(t) \sin(\omega t) dt \right) \\
 &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\int_0^u f(-t) \cos(\omega t) dt + \int_0^u f(t) \cos(\omega t) dt \right. \\
 &\quad \left. - i \int_0^u f(-t) \sin(\omega t) dt + i \int_0^u f(t) \sin(\omega t) dt \right),
 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f] &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\int_0^u [f(-t) + f(t)] \cos(\omega t) dt + i \int_0^u [f(t) - f(-t)] \sin(\omega t) dt \right) \\
 &= \int_0^{\infty} [f(-t) + f(t)] \cos(\omega t) dt + i \int_0^{\infty} [f(t) - f(-t)] \sin(\omega t) dt.
 \end{aligned}$$

Die Aussagen (a) – (d) lassen sich nun aus obiger Darstellung der Fourier-Transformierten ableiten. \square

Symmetrieeigenschaften der Fourier-Transformierten lassen sich also sofort anhand der zu transformierenden Funktion ablesen. Diese Tatsache motiviert die eingehendere Untersuchung von Zusammenhängen zwischen einer Funktion und ihrer Fourier-Transformierten.

Des Weiteren lässt sich - wie in diesem Unterkapitel noch erläutert wird - eine Lösungsstrategie in der Mathematik mit Fourier-Transformationen gut veranschaulichen: Hat man ein schwieriges Problem, dessen Lösung man nicht kennt, probiert man es in ein gleichwertiges¹⁰ Problem zu überführen (zu „transformieren“), das einfacher zu lösen ist. Man löst dann dieses einfachere Problem und erhält eine „transformierte“ Lösung, die man allerdings wieder rücktransformieren kann. Damit hat man das ursprüngliche Problem gelöst.

Der Zusammenhang zwischen dieser Strategie und Fourier-Transformationen liegt damit auf der Hand. Kennt man genügend Zusammenhänge zwischen einer Funktion und der zugehörigen Fourier-Transformierten, könnte man die oben beschriebene Strategie mit Fourier-Transformationen anwenden. Es stellt sich allerdings die Frage, wie und unter welchen Voraussetzungen an eine Funktion wir diese aus ihrer Fourier-Transformierten wieder rekonstruieren können bzw. ob sie eine Darstellung mittels ihrer Fourier-Transformierten besitzt. Im nächsten Abschnitt werden wir diese Frage beantworten, bevor wir uns in Form von Rechenregeln und Faltung einigen Zusammenhängen zwischen einer Funktion f und $\mathcal{F}[f]$ widmen.

¹⁰Gleichwertig bedeutet in diesem Zusammenhang, dass sich die Lösungsmenge des ursprünglichen Problems durch Hin- und anschließende Rücktransformation nicht ändert.

2.2.2 Umkehrsatz, Rechenregeln und Faltungssatz für die Fourier-Transformation

Dieser Abschnitt basiert abermals auf den Ergebnissen in [2], [11], [14] und [25].

Das Ergebnis zur ersten Frage, die im letzten Abschnitt aufgeworfen wurde, liefert uns der Umkehrsatz. Bevor wir ihn allerdings formulieren und beweisen können, müssen wir etwas Vorarbeit leisten. Dazu sehen wir uns zuerst folgende Definition an.

Definition 2.10. Für $t \in \mathbb{R}^n$ sei $B_u(t) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|t - x\| < u\}$. Dann setzen wir für eine lokal integrierbare Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$

$$\mathcal{F}^{-1}[g](t) := \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{B_u(0)} g(\omega) e^{i\langle t, \omega \rangle} d\omega \quad (\text{HAUPTWERT})$$

für $t \in \mathbb{R}^n$, sofern der Grenzwert existiert.

Lemma 2.11. Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Sind $\mathcal{F}[f] \cdot g$ und $f \cdot \mathcal{F}[g]$ integrierbar, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[f](x) \cdot g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \mathcal{F}[g](y) dy.$$

Beweis. Durch Anwendung des *Satzes von Fubini*¹¹ lässt sich die Integrationsreihenfolge vertauschen und man erhält die Aussage. \square

Satz 2.12. (UMKEHRSATZ)

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ eine beschränkte Funktion, deren Fourier-Transformierte $\mathcal{F}[f]$ integrierbar ist. Dann gilt für jeden Punkt t in dem f stetig ist

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](t) = (2\pi)^n f(-t).$$

Beweis. Sei $a > 0$. Für $t \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $|t| := \sum_{j=1}^n |t_j|$ die Summe der Beträge der Komponenten von t , für $x \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $g_{a,x} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto e^{-i\langle x, t \rangle} e^{-a|t|}$.

Mit Gleichung (1) in mehreren Dimensionen ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g_{a,x}](y) &= \int_{\mathbb{R}^n} g_{a,x}(t) \cdot e^{-i\langle y, t \rangle} dt = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, t \rangle} e^{-a|t|} \cdot e^{-i\langle y, t \rangle} dt = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y+x, t \rangle} e^{-a|t|} dt \\ &= \mathcal{F}[g_{a,0}](y+x) = \prod_{j=1}^n \frac{2a}{a^2 + (y_j + x_j)^2}. \end{aligned}$$

¹¹Guido Fubini (1879-1943), italienischer Mathematiker. Der Satz samt Beweis findet sich zum Beispiel in [25, S. 480 ff.].

Unter Berücksichtigung von Lemma 2.11 ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,t \rangle} e^{-a|t|} \mathcal{F}[f](t) dt &= \int_{\mathbb{R}^n} g_{a,x}(t) \mathcal{F}[f](t) dt = [\text{Lemma 2.11}] = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[g_{a,x}](t) f(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \frac{2a}{a^2 + (t_j + x_j)^2} f(t) dt = [t = a\tau - x, \frac{dt}{d\tau} = a] = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \frac{2a^2}{a^2 + (a\tau_j)^2} f(a\tau - x) d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \frac{2}{1 + \tau_j^2} f(a\tau - x) d\tau. \end{aligned}$$

Für $a \rightarrow 0$ erhalten wir mit dem *Konvergenzsatz von Lebesgue* wegen der Stetigkeit von f in x und der Beschränktheit von f mit dem soeben erhaltenen Resultat

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,t \rangle} \mathcal{F}[f](t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \frac{2}{1 + \tau_j^2} f(-x) d\tau = 2^n \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \frac{1}{1 + \tau_j^2} d\tau}_{=\pi^n} f(-x) \\ &= (2\pi)^n f(-x). \end{aligned} \quad \square$$

Korollar 2.13. Für $f \in S(\mathbb{R}^n)$ gilt mit dem *Umkehrsatz* $\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \mathcal{F}[f](-x)$.

Der *Umkehrsatz* liefert uns also unter genannten Voraussetzungen eine Darstellung der gespiegelten Funktion von f (samt Vorfaktor) mittels ihrer Fourier-Transformierten und damit praktisch auch eine Darstellung von f . Der Funktionswert an der Stetigkeitsstelle t lässt sich durch Anwenden der Fourier-Transformation auf die Fourier-Transformierte von f rekonstruieren. Dadurch haben wir nun ein Werkzeug in der Hand, um zwischen ursprünglicher Funktion und ihrer Fourier-Transformierten zu „wechseln“ und damit, wie oben erwähnt, ein Problem hin- und wieder rücktransformieren zu können.¹²

Um das transformierte Problem jedoch lösen zu können, müssen die grundlegenden Rechenregeln für die Fourier-Transformierten besprochen werden. Diese erleichtern das Rechnen zum Teil enorm, wie nachfolgender Satz zeigt.

Satz 2.14. (RECHENREGELN FÜR DIE FOURIER-TRANSFORMATION)

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für alle $\omega \in \mathbb{R}^n$:

(a) Für alle $a, b \in \mathbb{C}$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\mathcal{F}[af(t) + bg(t)](\omega) = a\mathcal{F}[f](\omega) + b\mathcal{F}[g](\omega). \quad (\text{Linearität})$$

¹²Insbesondere folgt aus dem Umkehrsatz, dass genügend viele Funktionen als Fourier-Transformierte auftreten. Vergleiche dazu weitere Ausführungen in [25, S. 594].

(b) Für alle $h \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \mathcal{F}[f(t+h)](\omega) = e^{i\langle \omega, h \rangle} \mathcal{F}[f(t)](\omega). \\ \text{(ii)} \quad & \mathcal{F}[e^{-i\langle h, t \rangle} f(t)](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega + h). \end{aligned} \quad \text{(Verschiebung)}$$

(c) Für alle $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ ist

$$\mathcal{F}[f(at)](\omega) = \frac{1}{a} \mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad \text{(Streckung)}$$

(d) Mit der anfangs eingeführten Notation gilt

$$\mathcal{F}[\overline{f(t)}](\omega) = \overline{\mathcal{F}[f(t)](-\omega)}. \quad \text{(Konjugation)}$$

(e) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ein Multiindex mit $|\alpha| \leq k$. Sei außerdem $t^\alpha f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}^n$ integrierbar. Dann existieren die partiellen Ableitungen $\partial^\alpha \mathcal{F}[f]$ und es gilt

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial \omega^\alpha} \mathcal{F}[f](\omega) = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}[t^\alpha f](\omega). \quad \text{(Differentiation und Fourier-Transformierte)}$$

(f) Sei $k \in \mathbb{N}$. Für f seien alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}$ mit $|\alpha| \leq k$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, stetig und integrierbar. Dann ist für jedes dieser α

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}\right](\omega) = (i\omega)^{|\alpha|} \mathcal{F}[f](\omega).$$

Beweis. Die Rechenregeln lassen sich meist mit Substitution oder partieller Integration beweisen.

(a) Die Linearität folgt aus der Linearität des Integrals.

(b)(i)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t+h)](\omega) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t+h) e^{-i\langle \omega, t \rangle} dt = [v := t+h] = \lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \int_{-u+h}^{u+h} f(v) e^{-i\langle \omega, v-h \rangle} dv \\ &\stackrel{\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ bilinear}}{=} e^{i\langle \omega, h \rangle} \lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \int_{-u+h}^{u+h} f(v) e^{-i\langle \omega, v \rangle} dv = e^{i\langle \omega, h \rangle} \mathcal{F}[f(t)](\omega). \end{aligned}$$

(ii)

$$\mathcal{F}[e^{-i\langle h, t \rangle} f(t)](\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-i(\langle \omega, t \rangle + \langle h, t \rangle)} dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-i\langle \omega+h, t \rangle} dt = \mathcal{F}[f](\omega+h).$$

(c) Beweis wird analog zu (b)(i) mittels der Substitution $v := at$ geführt.

(d)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\overline{f(t)}](\omega) &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(t)} e^{-i\langle \omega, t \rangle} dt = \lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \overline{\int_{-u}^u f(t) e^{-i\langle \omega, t \rangle} dt} = \lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \int_{-u}^u \overline{f(t) e^{-i\langle \omega, t \rangle}} dt \\ &= \lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \int_{-u}^u f(t) e^{i\langle \omega, t \rangle} dt = \overline{\mathcal{F}[f](-\omega)}.\end{aligned}$$

(e) Es genügt die Behauptung für eine einzige partielle Ableitung zu zeigen, etwa $\frac{\partial}{\partial \omega_1}$. Mittels des *Satzes über die Differenzierbarkeit von parameterabhängigen Integralen*¹³ erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \omega_1} \mathcal{F}[f](\omega) &= \frac{\partial}{\partial \omega_1} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-i\langle t, \omega \rangle} dt = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \omega_1} f(t) e^{-i\langle t, \omega \rangle} dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) (-i) t_1 e^{-i\langle t, \omega \rangle} dt \\ &= (-i) \mathcal{F}[t_1 f](\omega).\end{aligned}$$

(f) Wieder genügt es die Behauptung für eine partielle Ableitung und auch nur für die Dimension $n = 1$ zu zeigen. Dabei ist

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(y) dy,$$

wobei aus dieser Darstellung die Existenz der Limiten $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ und $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t)$ folgt, für die aufgrund der Integrierbarkeit von f auf ganz \mathbb{R} gilt: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$. Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt = f(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (-i\omega) e^{-i\omega t} dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega) f(t) e^{-i\omega t} dt = i\omega \mathcal{F}[f](\omega).\end{aligned} \quad \square$$

Der Rechenkomfort kann durch Fourier-Transformieren also durchaus gesteigert werden. Wie Satz 2.14 (f) beispielsweise zeigt, wird partielles Ableiten unter der Fourier-Transformation zu einer Multiplikation, was das Ableiten erleichtert. Kennt man die Fourier-Transformierte einer Funktion, kann man darüberhinaus auch die Fourier-Transformierte der konjugiert-komplexen Funktion oder der partiellen Ableitungen der Funktion einfach bestimmen. Letzteres findet unter anderem beim Lösen von Differentialgleichungen Anwendung, wo mittels der bekannten Eigenschaften der Fourier-Transformation und Tabellenwerk die Umkehrtransformation bestimmt wird.

Sehen wir uns dazu zwei Beispiele an.

¹³Dieser ist zum Beispiel formuliert in [2, S. 111]

Beispiel 2.15. (RECHENREGELN I)

Sei f eine Fourier-transformierbare Funktion. Dann lässt sich für die Funktion g , gegeben durch $g(t) := 3f(t + \pi) + e^{it}f(7t)$, die Fourier-Transformierte wie folgt berechnen

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g(t)](\omega) &= \mathcal{F}[3f(t + \pi) + e^{it}f(7t)](\omega) = 3\mathcal{F}[f(t + \pi)](\omega) + \mathcal{F}[e^{it}f(7t)](\omega) \\ &= 3e^{i\pi\omega}\mathcal{F}[f(t)](\omega) + \mathcal{F}[f(7t)](\omega - 1) = 3e^{i\pi\omega}\mathcal{F}[f(t)](\omega) + \frac{1}{7}\mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{\omega - 1}{7}\right). \diamond\end{aligned}$$

Beispiel 2.16. (RECHENREGELN II - DIFFERENZIALGLEICHUNG)¹⁴

Wir sehen uns nun an, wie man mithilfe der Fourier-Transformation Differentialgleichungen lösen kann. Gegeben sei die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y'(t) + 3y(t) = f(t)$$

bei der die Funktion y gesucht ist. Unter der (sehr starken) Voraussetzung, dass alle auftretenden Funktionen Fourier-transformierbar sind, können wir beide Seiten der Gleichung Fourier-transformieren und erhalten

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[y'(t) + 3y(t)](\omega) &= i\omega\mathcal{F}[y(t)](\omega) + 3\mathcal{F}[y(t)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega) \Leftrightarrow \\ \mathcal{F}[y(t)](\omega) &= \frac{1}{i\omega + 3} \cdot \mathcal{F}[f(t)](\omega).\end{aligned}$$

Die Gleichung enthält nun keine Ableitungen mehr, sondern nur noch die Unbekannte $\mathcal{F}[y]$. Hat man $\mathcal{F}[y]$ berechnet, muss man lediglich die Rücktransformation anwenden, um die gesuchte Lösung zu erhalten. In unserem Fall ist $\mathcal{F}[y]$ ein Produkt aus zwei Funktionen, welches wir mithilfe der Funktion

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} e^{-3x} & , \text{für } x \in [0, \infty) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

und dem Ergebnis aus Beispiel 2.6 schreiben können als

$$\mathcal{F}[y](\omega) = \mathcal{F}[h](\omega) \cdot \mathcal{F}[f](\omega). \quad (3)$$

Um die Differentialgleichung zu lösen bleibt nun die Aufgabe, eine Funktion y zu finden, deren Fourier-Transformierte das Produkt der Fourier-Transformierten von f und h ist. \diamond

¹⁴Dieses Beispiel ist [11, S. 722 f.] entnommen.

Die im vorigen Beispiel verbliebene Aufgabe wollen wir lösen. Wie aus den Rechenregeln schon ersichtlich wurde, ist die Summe der Fourier-Transformierten zweier Funktionen gleich der Fourier-Transformierten der Summe dieser Funktionen. Für das Produkt zweier Fourier-Transformierten gilt die analoge Aussage im Allgemeinen jedoch nicht. Ähnlich wie bei der Produktregel der Ableitung benötigen wir jetzt also Regeln für die Berechnung der Fourier-Transformierten des Produkts zweier Funktionen und vice versa für die Berechnung des Produkts zweier Fourier-Transformierten. Das gesuchte Resultat liefert der *Faltungssatz*, dem wir uns jetzt zuwenden werden. Dafür führen wir folgende Operation ein.

Definition 2.17. (FALTUNG)

Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann nennen wir

$$t \mapsto (f * g)(t) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(t-x)dx$$

die **Faltung von f und g** .

Satz 2.18. (RECHENGESETZE DER FALTUNGSOPERATION)

Die Faltung ist assoziativ, kommutativ und distributiv.

Beweis. Die Assoziativität prüft man leicht nach. Die Kommutativität $(f * g)(t) = (g * f)(t)$ erhält man durch Substitution der Integrationsvariable x mit $x' := t - x$. Beim Nachweis der Distributivität $f(t) * (g(t) + h(t)) = (f(t) * g(t)) + (f * h)(t)$ wird die Linearität des Integrals ausgenutzt. \square

Was passiert bei der Faltung von zwei Funktionen?

Anschaulich gesprochen wird der Funktionswert $f(x)$ mit der gespiegelten und um t verschobenen Funktion g gewichtet. Die Faltung mit speziellen Funktionen wird insbesondere ausgenutzt, um eine Funktion zu glätten. Dieses Verfahren hat zahlreiche Anwendungen. Es wird beispielsweise im Bereich bildgebender Systeme zum „Weichzeichnen“ oder „Verschmieren“ eines Bildes genutzt. Ein Beispiel soll das Prinzip der Faltung veranschaulichen.

Beispiel 2.19. (FALTUNG ZWEIER RECHTECKIMPULSE)

Wir betrachten die durch die Funktionen f und g gegebenen Rechteckimpulse:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \chi_{[0,2]}(t) \\ g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \chi_{[0,4]}(t). \end{aligned}$$

Für Faltung von f und g erhalten wir für $t \in (-\infty, \infty)$

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot g(x-t) dx = \int_0^2 f(x) \cdot g(t-x) dx = \int_0^2 1 \cdot g(t-x) dx,$$

da $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 2]$.

Durch Fallunterscheidung gelangen wir schließlich zu folgendem Ergebnis

$$(f * g)(t) = \begin{cases} \int_0^2 \underbrace{g(t-x)}_{\notin (0,4)} dx = 0 & , \text{für } t \in (-\infty, 0) \\ \int_0^t g(t-x) dx = \int_0^t 1 dx = t & , \text{für } t \in [0, 2) \\ \int_0^2 \underbrace{g(t-x)}_{\in [0,4]} dx = \int_0^2 1 dx = 2 & , \text{für } t \in [2, 4] \\ \int_0^2 \underbrace{g(t-x)}_{\in [2,6]} dx = \int_{t-4}^2 g(t-x) dx = \int_{t-4}^2 2 dx = 6 - t & , \text{für } t \in (4, 6] \\ \int_0^2 \underbrace{g(t-x)}_{\notin (0,4)} dx = 0 & , \text{für } t \in (6, \infty). \end{cases}$$

◇

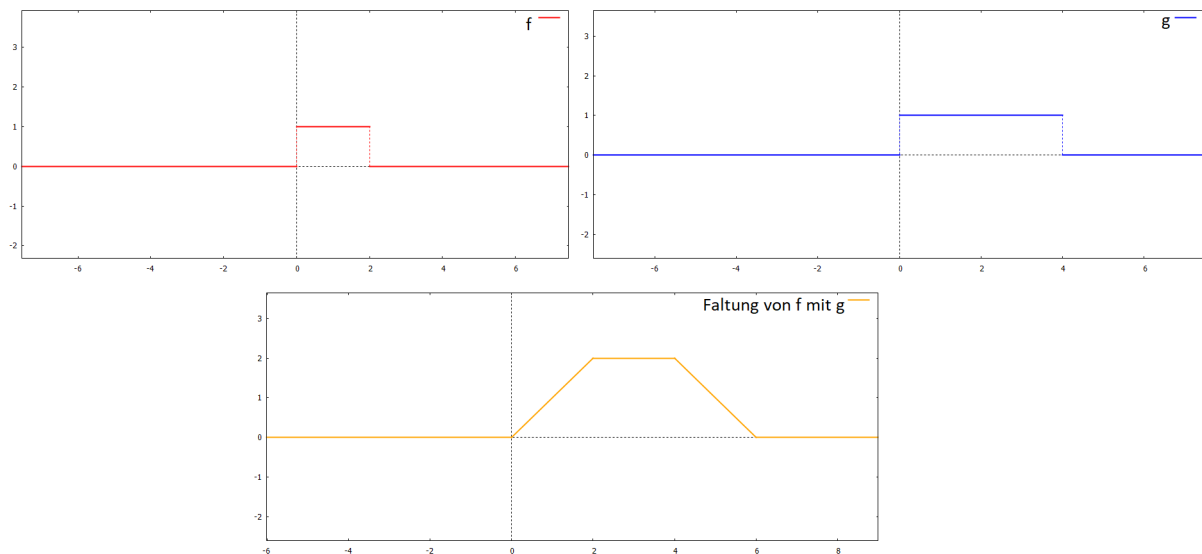


Abbildung 3: Oben sind die Funktionsgraphen der beiden durch f (rot) und g (blau) gegebenen Rechteckimpulse abgebildet. Unten sieht man den Funktionsgraphen der Faltung $f * g$ (orange). Wie schon zu erkennen ist, ist der Graph von $f * g$ glatter als jener von f oder g . Bei nochmaliger Anwendung der Faltung, beispielsweise durch $g * (f * g)$, wird der Funktionsgraph weiter geglättet.

Nachdem wir durch dieses Beispiel nun eine Idee davon haben, was bei der Faltung von Funktionen passiert, wenden wir uns dem offenen Problem aus Beispiel 2.16 zu. Der Zusammen-

hang zwischen der Faltung und dem punktweisen Produkt zweier Funktionen unter Fourier-Transformation wird durch nachstehend formulierten *Faltungssatz* ersichtlich.

Satz 2.20. (FALTUNGSSATZ)

Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f * g$ Fourier-transformierbar und es gilt

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega). \quad (4)$$

Seien f und g zusätzlich so gewählt, dass sowohl die Fourier-Transformation als auch die Umkehrtransformation in der Form $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](t) = f(t)$ anwendbar ist, so gilt

$$\mathcal{F}[f \cdot g](\omega) = \frac{1}{(2\pi)^n} (\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g])(\omega).$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g](\omega) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(t) e^{-i\langle \omega, t \rangle} dt = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(t - x) dx e^{-i\langle \omega, t \rangle} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(t - x) e^{-i\langle \omega, t \rangle} dx dt \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(t - x) e^{-i\langle \omega, t \rangle} dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{\mathbb{R}^n} g(t - x) e^{-i\langle \omega, t \rangle} dt dx = [\text{Satz 2.14(b)}] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle \omega, x \rangle} \mathcal{F}[g](\omega) dx \\ &= \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega). \end{aligned}$$

Für die zweite Aussage betrachten wir $f \cdot g$ als Produkt im Frequenzraum.¹⁵ Mit Gleichung (4) ist $f \cdot g = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f] * \mathcal{F}^{-1}[g]]$, womit wir zeigen können, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f \cdot g](\omega) &= (2\pi)^n \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (f \cdot g)(t) e^{-i\langle \omega, t \rangle} dt = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}[f \cdot g](-\omega) = [\text{Gleichung (4)}] \\ &= (2\pi)^n (\mathcal{F}^{-1}[f] * \mathcal{F}^{-1}[g])(-\omega) = (2\pi)^n \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}[f](-t) * \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}[g](-t) \right)(-\omega) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[f](\omega + u) \cdot \mathcal{F}[g](-u) du = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[f](\omega - u) \cdot \mathcal{F}[g](u) du \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} (\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g])(\omega). \quad \square \end{aligned}$$

Mithilfe der Aussage des *Faltungssatzes* wissen wir jetzt, dass die gesuchte Funktion y aus Gleichung (3) die Funktion $h * f$ ist. Somit haben wir die Differenzialgleichung aus Beispiel 2.16 gelöst.

¹⁵Vor allem in technischen Kontexten wird die Fourier-Transformation dazu genutzt, ein Signal (beschrieben als zeitabhängige Funktion) auf sein Frequenzspektrum abzubilden. Die Fourier-Transformation erlaubt also einen Wechsel von der Orts-/Zeitdomäne in die Frequenzdomäne.

Außerdem zeigt sich durch den *Faltungssatz* wieder, dass die Fourier-Transformation das Rechnen erleichtert kann: Aus der Faltung zweier Funktionen wurde unter der Fourier-Transformation die Berechnung eines Produkts.

Damit haben wir die Betrachtungen über die wichtigsten Sätze und Eigenschaften der Fourier-Transformation sowie der Fourier-Transformierten für L^1 -Funktionen abgeschlossen. Im nächsten Abschnitt zeigen wir die für diese Arbeit wichtige Tatsache, dass die Fourier-Transformation auch auf $L^2(\mathbb{R}^n)$, den Raum aller quadratisch integrierbaren Funktionen, fortgesetzt werden kann. Auf diesem Funktionenraum besitzt die Fourier-Transformation nämlich besonders gute Eigenschaften, welche analog für die diskrete Fourier-Transformation - das Werkzeug unserer Wahl für die Problemstellung aus der Magnetresonanztomographie - nachgewiesen werden können.

2.2.3 Die Fortsetzung der Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R}^n)$

Bei den folgenden Darstellungen stützen wir uns auf [25, S. 599 ff.] sowie [2, S. 231 ff.]. In diesen Werken sind detailliertere Ausführungen zu den besprochenen Inhalten zu finden.

Definition 2.21. (QUADRATISCH INTEGRIERBARE FUNKTIONEN, $L^2(\mathbb{R}^n)$)

Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ nennen wir **quadratisch integrierbar**, wenn $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx < \infty$. Analog zu $L^1(\mathbb{R}^n)$ definieren wir durch $L^2(\mathbb{R}^n) := \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \text{ messbar} \mid f \text{ quadratisch integrierbar}\}$ den Raum aller quadratisch integrierbaren Funktionen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{C} . Wir nennen $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ einfach L^2 -Funktion.

Durch $\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \bar{g} dx$ ist ein Skalarprodukt auf $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ definiert, wodurch der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen zu einem Hilbertraum¹⁶ wird.¹⁷

Lemma 2.22. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\mathcal{F}[f] \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und die Fourier-Transformation erhält die Norm auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ bis auf einen Vorfaktor, d.h. es gilt $\|\mathcal{F}[f]\|_2 = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|f\|_2$.

Beweis. Es ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}[f](x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-ixt} dt \right|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 dt}_{< \infty} dx < \infty.$$

¹⁶David Hilbert (1862-1943), deutscher Mathematiker.

¹⁷Den Beweis für die Behauptungen findet man in [2, S. 123].

Sei $g(x) := \overline{f(-x)}$ und $h := f * g$. Dann ist

$$\mathcal{F}[g](x) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(-t)} e^{-i\langle x, t \rangle} dt = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(-t) e^{i\langle x, t \rangle} dt} = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\langle x, y \rangle} dy} = \overline{\mathcal{F}[f](x)},$$

woraus folgt, dass $\mathcal{F}[h] = \mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g] = \mathcal{F}[f] \cdot \overline{\mathcal{F}[f]} = |\mathcal{F}[f]|^2$.

Unter der Voraussetzung, dass $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](t)$ gilt, ist

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}[f]\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}[f]|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[h] dx = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[h]](0) = (2\pi)^n h(0) \\ &= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \overline{f(t)} dt = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 dt = (2\pi)^n \|f\|_2^2. \end{aligned} \quad \square$$

Korollar 2.23. Für Schwartz-Funktionen ist die Erhaltung der Norm im Sinne von Lemma 2.22 einfach nachzuweisen. Der Beweis findet sich beispielsweise bei Storch [25, S. 599 (Satz 17.C.1)].

Lemma 2.24. $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ ist ein beschränkter, linearer und isometrischer Operator.

Beweis. Die Isometrie wurde in Lemma 2.22 gezeigt. Die Beschränktheit folgt aus demselben Lemma und die Linearität folgt aus der Linearität des Integrals. \square

Die isometrische Abbildung $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ lässt sich von dem in $L^2(\mathbb{R}^n)$ dichten Unterraum $U := L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ eindeutig zu einer isometrischen Abbildung auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen, da $L^2(\mathbb{R}^n)$ ein Hilbertraum, d.h. vollständig, ist.¹⁸

Sei dazu $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Für $m \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$f_m(t) := \begin{cases} f(t), & \|t\| \leq m \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offensichtlich gilt, dass die Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ für $m \rightarrow \infty$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ gegen f konvergiert.

Für alle m hat f_m einen kompakten Träger und da $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist, ist $f_m \in U$. Für Funktionen aus U ist die Fourier-Transformierte aber wohldefiniert, so auch für alle f_m :

$$\mathcal{F}[f_m](x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_m(t) e^{-i\langle x, t \rangle} dt = \int_{B_m(0)} f(t) e^{-i\langle x, t \rangle} dt.$$

¹⁸Der Beweis, dass U ein dichter Unterraum von $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist, findet sich bei Storch [25, S. 594]. Dass sich die Fourier-Transformation fortsetzen lässt, wird mit Satz 17.b.6 in Band 2 bei Storch gezeigt [24, S. 488].

Nach Lemma 2.22 ist $\mathcal{F}[f_m] \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Weil die Folge der f_m gegen f konvergiert und die Fourier-Transformation eine Isometrie ist (bis auf den Faktor $(2\pi)^{\frac{n}{2}}$), bilden auch ihre Fourier-Transformierten $\mathcal{F}[f_m]$ eine *Cauchy*¹⁹-Folge, da für $k, l \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \left\| \mathcal{F}[f_k] - \mathcal{F}[f_l] \right\|_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \left\| \mathcal{F}[f_k - f_l] \right\|_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} (2\pi)^n \|f_k - f_l\|_2 = 0.$$

Weil $L^2(\mathbb{R}^n)$ vollständig ist, konvergiert die Cauchy-Folge $(\mathcal{F}[f_m])_{m \in \mathbb{N}}$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Dies motiviert folgende Definition.

Definition 2.25. (FOURIER-TRANSFORMIERTE VON L^2 -FUNKTIONEN)

Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist die Fourier-Transformierte der eindeutig definierte Limes der Folge der f_m in $L^2(\mathbb{R}^n)$, nämlich

$$\mathcal{F}[f](x) := \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{F}[f_m](x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{B_m(0)} f(t) e^{-i\langle x, t \rangle} dt.$$

Bemerkung 2.26. Der Beweis, dass es nicht auf die Wahl der Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$, wird hier nicht geführt.

Dadurch ist gezeigt, dass für alle Folgen aus U , die gegen f konvergieren, die Folge ihrer Fourier-Transformierten gegen $\mathcal{F}[f]$ konvergiert. Somit ist die Fourier-Transformierte einer Funktion in $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit obenstehender Definition eindeutig bestimmt. Als Resultat dieser Vorbereitungen können wir nun den *Satz von Plancherel* formulieren und beweisen.

Satz 2.27. (SATZ VON PLANCHEREL)

Es gibt genau eine stetige lineare Abbildung

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n),$$

die für Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ mit der gewöhnlichen Fourier-Transformation $f \rightarrow \mathcal{F}[f]$ übereinstimmt und wir nennen diese Abbildung wiederum Fourier-Transformation. \mathcal{F} ist ein isometrischer Automorphismus von $L^2(\mathbb{R}^n)$. Für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}[f](-x)$$

fast überall auf \mathbb{R}^n .

Beweis. Die Eindeutigkeit der stetigen linearen Abbildung aus Definition 2.25 geht aus Bemerkung 2.26 hervor und die Linearität folgt aus Lemma 2.24. Aufgrund von Lemma 2.22

¹⁹Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), französischer Mathematiker.

gilt

$$\left\| \mathcal{F}[f] - \mathcal{F}[g] \right\|_2 = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|f - g\|_2$$

und damit ist \mathcal{F} eine Isometrie. Daraus folgt sofort die Stetigkeit von \mathcal{F} . Aus der Isometrie lässt sich außerdem die Injektivität begründen, denn

$$0 = \left\| \mathcal{F}[f] - \mathcal{F}[g] \right\|_2 = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|f - g\|_2 \Rightarrow f = g.$$

Um die Surjektivität zu zeigen sei $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ beliebig und $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{g} - \psi_n\|_2 = 0.$$

Es gilt

$$\psi_n = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\psi_n]] = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \overline{\mathcal{F}[\mathcal{F}[\psi_n]]}$$

und damit

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\psi}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \overline{\mathcal{F}[\mathcal{F}[\psi_n]]} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \overline{\mathcal{F}[\bar{g}]}$$

Der Faktor $(2\pi)^{\frac{n}{2}}$ ist für den Nachweis der Surjektivität vernachlässigbar. Bleibt zu zeigen, dass $\overline{\mathcal{F}[\bar{g}]} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Da sowohl g als auch $\mathcal{F}[g]$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ sind, gilt das auch für die jeweilige komplexe Konjugation, womit die Surjektivität gezeigt ist.

Die Gleichung $\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \mathcal{F}[f](-x)$ gilt nach Korollar 2.13 für alle Funktionen des dichten Unterraums $S(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ und folglich aus Stetigkeitsgründen für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. \square

Korollar 2.28. Bis auf einen Normierungsfaktor erhält die Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ das Skalarprodukt, denn es gilt für $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g] \rangle_{L^2} = (2\pi)^n \langle f, g \rangle_{L^2}. \quad (\text{PLANCHEREL-IDENTITÄT})$$

Mit dem *Satz von Plancherel* haben wir ein wesentliches Resultat erzielt. Er beweist wichtige Eigenschaften der Fourier-Transformation, die sie zu einem vielseitig anwendbaren Werkzeug in der Mathematik, Naturwissenschaft und Technik machen. Die Leistungen Plancherels in diesem Zusammenhang haben auch dazu geführt, dass die in Satz 2.27 beschriebene Fortsetzung der Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ auch (n -dimensionale) **Fourier-Plancherel-Transformation** genannt wird. Im letzten Teil dieses Kapitels wenden wir uns nun der diskreten Fourier-Transformation zu und werden sehen, dass sich die angenehmen Eigenschaften der kontinuierlichen Variante analog auf den diskreten Fall übertragen lassen.

2.3 Die diskrete Fourier-Transformation

Die Ausführungen zur diskreten Fourier-Transformation (DFT) folgen den Darstellungen in [12, S. 46 ff.] sowie [1, S. 77 ff.].

Die naheliegende Herleitung der diskreten Fourier-Transformation als Approximation ihres kontinuierlichen Pendanten wollen wir in dieser Arbeit nicht aussparen, aber wegen inhaltlicher Kohärenz auf die Modellierung in Kapitel 4 verschieben. Da diese Abbildung auch eine eigenständige lineare Transformation darstellt, führen wir sie direkt mit nachfolgender Definition ein. Im Folgenden fassen wir Vektoren immer als Spaltenvektor auf, um dem Produkt „Matrix \times Vektor“ als „Zeile \times Spalte“ einen Sinn zu geben. Es ist also

$$\gamma := (\gamma(m))_{m \in \{0, \dots, M-1\}} = (\gamma(0), \gamma(1), \dots, \gamma(M-1))^T := \begin{pmatrix} \gamma(0) \\ \gamma(1) \\ \vdots \\ \gamma(M-1) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^M.$$

Weiters setzen wir $\nu_k := \left(\frac{1}{\sqrt{M}} e^{ikm \frac{2\pi}{M}}\right)_{m \in \{0, \dots, M-1\}} \in \mathbb{C}^M$ für $k \in \{0, \dots, M-1\}$.

Definition 2.29. (DISKRETE FOURIER-TRANSFORMATION)

Für $\gamma \in \mathbb{C}^M$ und $k \in \{0, \dots, M-1\}$ setzen wir

$$\Phi[\gamma](k) := \langle \nu_k, \gamma \rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} e^{-ikm \frac{2\pi}{M}} \gamma(m).$$

Die Abbildung $\Phi_M: \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^M: \gamma \mapsto \Phi_M(\gamma) := (\Phi[\gamma](k))_{k=0,1,\dots,M-1} \in \mathbb{C}^M$ heißt **diskrete Fourier-Transformation** der Länge M . Der Vektor γ wird durch die DFT auf seine Koordinaten bezüglich der Basisvektoren ν_k abgebildet.

Satz 2.30. Die Familie $(\nu_k)_{k=0,\dots,M-1}$ ist eine Orthonormalbasis von \mathbb{C}^M . Insbesondere ist Φ_M ein isometrischer Isomorphismus auf \mathbb{C}^M .

Beweis. Seien $l, k \in \{0, \dots, M-1\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle \nu_k, \nu_l \rangle &= \sum_{m=0}^{M-1} \overline{\nu_k(m)} \nu_l(m) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} e^{-ikm \frac{2\pi}{M}} e^{ilm \frac{2\pi}{M}} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} e^{i(l-k)m \frac{2\pi}{M}} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \left(e^{i(l-k) \frac{2\pi}{M}} \right)^m. \end{aligned}$$

Für $l = k$ ist $e^{i(l-k) \frac{2\pi}{M}} = 1$ und somit $\langle \nu_k, \nu_l \rangle = 1$. Für $l \neq k$ ist $e^{i(l-k) \frac{2\pi}{M}} \neq 1$ und aus der

Formel für die geometrische Reihe folgt

$$\langle \nu_k, \nu_l \rangle = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \left(e^{i(l-k)\frac{2\pi}{M}} \right)^m = \frac{1}{M} \cdot \frac{1 - \left(e^{i(l-k)\frac{2\pi}{M}} \right)^M}{1 - e^{i(l-k)\frac{2\pi}{M}}} = \frac{1}{M} \cdot \frac{1 - e^{i(l-k)2\pi}}{1 - e^{i(l-k)\frac{2\pi}{M}}} = 0.$$

Die Familie $(\nu_k)_{k=0, \dots, M-1}$ ist also eine orthonormale Familie in \mathbb{C}^M und somit linear unabhängig. Jedes linear unabhängige M -Tupel in \mathbb{C}^M ist aber eine Basis. Somit ist die erste Aussage gezeigt.

Die zweite Aussage folgt direkt aus allgemeinen Eigenschaften von Orthonormalbasen in endlichdimensionalen Vektorräumen.²⁰ \square

Korollar 2.31. Die eindeutige Umkehrabbildung von Φ_M wird **inverse diskrete Fourier-Transformation** (iDFT) genannt. Setzen wir wiederum für $\delta \in \mathbb{C}^M$ und $m \in \{0, \dots, M-1\}$

$$\Phi^{-1}[\delta](m) := \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{k=0}^{M-1} e^{ikm\frac{2\pi}{M}} \delta(k),$$

so ist die iDFT gegeben durch

$$\Phi_M^{-1} : \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^M : (\delta(m))_{m=0, \dots, M-1} \mapsto \frac{1}{\sqrt{M}} \left(\sum_{k=0}^{M-1} e^{ikm\frac{2\pi}{M}} \delta(k) \right)_{m=0, \dots, M-1}.$$

Beweis. Für $\gamma \in \mathbb{C}^M$ ist

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}[\Phi[\gamma]](m) &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{k=0}^{M-1} e^{ikm\frac{2\pi}{M}} \Phi[\gamma](k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{k=0}^{M-1} e^{ikm\frac{2\pi}{M}} \left(\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{l=0}^{M-1} e^{-ilk\frac{2\pi}{M}} \gamma(l) \right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} \gamma(l) \sum_{k=0}^{M-1} e^{ik(m-l)\frac{2\pi}{M}} \end{aligned}$$

für jedes $m \in \{0, \dots, M-1\}$. Mit der gleichen Argumentation wie im Beweis von Satz 2.30 ist $e^{ik(m-l)\frac{2\pi}{M}} = 1$ für $l = m$ und 0 sonst. Damit ist $\Phi^{-1}[\Phi[\gamma]](m) = \gamma(m)$ für alle $m \in \{0, \dots, M-1\}$ und somit auch $\Phi_M^{-1}[\Phi_M[\gamma]] = \gamma$. \square

Bemerkung 2.32. Die Strukturanalogie zwischen kontinuierlicher und diskreter Fourier-Transformation wird mit Satz 2.30 offensichtlich. Aus der Tatsache, dass die DFT auch ein isometrischer Isomorphismus ist, ließen sich weitere Analogien hinsichtlich Rechenregeln oder (diskreter) Faltung herleiten, die in dieser Arbeit jedoch nicht besprochen werden. Auf jeden Fall ist die Fourier-Transformation vor allem durch diese Eigenschaft ein besonders praktisch zu handhabendes Werkzeug.

²⁰Der notwendige Beweis ist die endlichdimensionale Version des Beweises in [12, S. 18].

Wir haben im Gegensatz zur kontinuierlichen Version für die DFT den Vorfaktor $\frac{1}{\sqrt{M}}$ eingeführt, um folgende Überlegungen einfach formulieren zu können:

Ein isometrischer Isomorphismus $I : \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^M$ wird meist **unitäre Abbildung** genannt. Seine Abbildungsmatrix \mathbf{I} ist bezüglich einer Orthonormalbasis eine unitäre Matrix²¹, d.h. $\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}^*$, wobei $\mathbf{I}^* := \bar{\mathbf{I}}^\top$ die adjungierte Matrix ist, die man durch Transponieren sowie komplexe Konjugation der Einträge der Matrix \mathbf{I} erhält. In diesem Sinne können wir die DFT auch als Matrizenmultiplikation auffassen.

Satz 2.33. (DFT ALS MATRIZENMULTIPLIKATION)

Wir setzen $\omega_M := e^{i\frac{2\pi}{M}}$. Dann ist ω_M eine M -te Einheitswurzel und für $k, m \in \{0, \dots, M-1\}$ gilt $\nu_k = \omega_M^{km}$. Weiters definieren wir mit

$$V_M := (\nu_0 \mid \dots \mid \nu_{M-1}) = \begin{pmatrix} \omega_M^{0 \cdot 0} & \omega_M^{1 \cdot 0} & \dots & \omega_M^{0 \cdot (M-1)} \\ \omega_M^{0 \cdot 1} & \omega_M^{1 \cdot 1} & \dots & \omega_M^{1 \cdot (M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_M^{0 \cdot (M-1)} & \omega_M^{1 \cdot (M-1)} & \dots & \omega_M^{(M-1) \cdot (M-1)} \end{pmatrix}$$

die Matrix mit den ν_k 's als Spalten. Für alle $\gamma \in \mathbb{C}^M$ gilt dann $\Phi_M[\gamma] = V^* \cdot \gamma$.

Beweis. Es ist

$$\Phi_M[\gamma] = \begin{pmatrix} \langle \nu_0, \gamma \rangle \\ \langle \nu_1, \gamma \rangle \\ \vdots \\ \langle \nu_{M-1}, \gamma \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_0^* \gamma \\ \nu_1^* \gamma \\ \vdots \\ \nu_{M-1}^* \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_0^* \\ \nu_1^* \\ \vdots \\ \nu_{M-1}^* \end{pmatrix} = V^* \cdot \gamma. \quad \square$$

Analog überlegt man sich, dass $\Phi_M^{-1}[\Phi_M[\gamma]] = V \cdot \Phi_M[\gamma]$.

Damit kann die DFT bzw. die iDFT mittels der Multiplikation der Matrix V^* bzw. V mit dem Vektor γ bzw. $\Phi_M[\gamma]$ berechnet werden. Man nennt V^* die **Fourier-Matrix**, V die **inverse Fourier-Matrix** [11, S. 759].

Bemerkung 2.34. Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass die Berechnung der DFT respektive der iDFT mittels Matrizenmultiplikation ziemlich aufwändig ist.²² Daher wurden schnellere Verfahren zur Berechnung gesucht und zum Beispiel im FFT-Algorithmus (**F**ast **F**ourier

²¹Für den Beweis siehe [17, S. 181].

²²Der Aufwand, das heißt die Anzahl der Rechenoperationen, ist proportional zu M^2 , wobei M die Anzahl der Zeilen der quadratischen Matrix ist. Einen Beweis für diese Behauptung und weitere Ausführungen zum numerischen Aufwand der Berechnung der DFT finden sich in [12, S. 47 ff.].

Transform) von Cooley und Tukey 1965 gefunden.²³

Bemerkung 2.35. (HÖHERDIMENSIONALE DFT)

Die N -dimensionale DFT ist definiert als „DFT in jeder Komponente“.

Für $(\gamma(m_1, m_2))_{\substack{0 \leq m_1 \leq M_1-1 \\ 0 \leq m_2 \leq M_2-1}} \in \mathbb{C}^{M_1 \times M_2}$ und $(k_1, k_2) \in \{0, \dots, M_1 - 1\} \times \{0, \dots, M_2 - 1\}$ gelten

$$\Phi[\gamma](k_1, k_2) := \frac{1}{\sqrt{M_1 M_2}} \sum_{m_2=0}^{M_2-1} \omega_{M_2}^{k_2 m_2} \left(\sum_{m_1=0}^{M_1-1} \omega_{M_1}^{k_1 m_1} \gamma(m_1, m_2) \right), \quad (5)$$

$$\gamma(m_1, m_2) = \frac{1}{\sqrt{M_1 M_2}} \sum_{k_2=0}^{M_2-1} \omega_{M_2}^{k_2 m_2} \left(\sum_{m_1=0}^{M_1-1} \omega_{M_1}^{k_1 m_1} \Phi[\gamma](k_1, k_2) \right). \quad (6)$$

Somit ist die höherdimensionale DFT definiert durch

$$\begin{aligned} \Phi_{M_1 \times M_2} : \mathbb{C}^{M_1 \times M_2} &\rightarrow \mathbb{C}^{M_1 \times M_2} : \\ \gamma &\mapsto \Phi_{M_1 \times M_2}(\gamma) := \left(\Phi_{M_1 \times M_2}[\gamma](k_1, k_2) \right)_{\substack{0 \leq m_1 \leq M_1-1 \\ 0 \leq m_2 \leq M_2-1}} \in \mathbb{C}^{M_1 \times M_2}. \end{aligned}$$

Mit der Definition der höherdimensionalen DFT sind wir in diesem Kapitel nun am Ziel unserer Betrachtungen angelangt. Wir haben uns die wesentlichen mathematischen Grundlagen der Fourier-Transformation erarbeitet und ein solides Verständnis ihrer wichtigsten Eigenschaften erlangt. Wie wir in Kapitel 4 sehen werden, ist dies eine Grundvoraussetzung zur mathematischen Modellierung und Lösung des Bildgebungsproblems in der Magnetresonanztomographie. Die höherdimensionale DFT als Ernte unserer Arbeit in diesem Kapitel stellt dabei das Schlüsselwerkzeug dar. Sie ermöglicht uns die Transformation der aus den Messungen im MR-Tomographen erhaltenen Datenmatrix in ein Schnittbild durch den Körper.

²³Vergleiche hierzu: James W. Cooley/John W. Tukey: An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series, in: Mathematics of Computation 19 (1965), Nr. 90, S. 297-301.

3 Grundlagen und Funktionsweise der MR-Tomographie

Bevor wir auf die konkrete Anwendung der Fourier-Transformation in der Magnetresonanztomographie eingehen, soll in diesem Kapitel die Funktionsweise der letzteren beschrieben werden. Dabei werden zuerst die physikalischen Phänomene, die bei der MRT ausgenutzt werden, und anschließend das MR-Experiment selbst, das im Tomographen Messung, Codierung und Verarbeitung des Signals inkludiert, näher betrachtet. Im folgenden Unterkapitel 3.1 wird in den Ausführungen und Abbildungen ein orthogonales dreidimensionales Koordinatensystem zugrundegelegt, bei dem die z -Achse von unten nach oben verläuft (Abbildung 4).

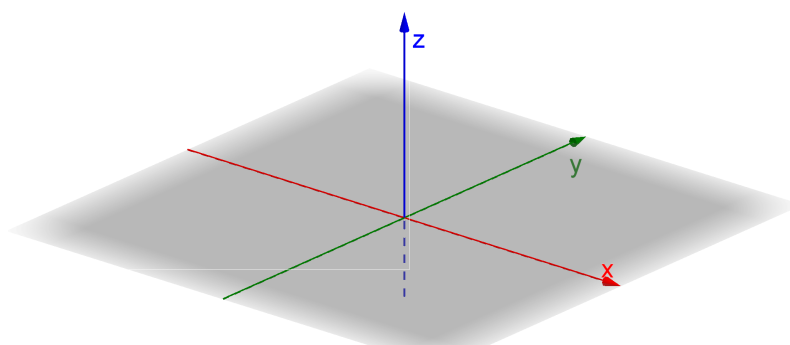


Abbildung 4: Koordinatensystem.

3.1 Physikalische Grundlagen

In der MRT wird eine quantenmechanische Eigenschaft von Atomkernen ausgenutzt, die Physiker **Kernspin** nennen. Der Kernspin ist ein dem Atom inhärenter Eigendrehimpuls, der sich mit der Drehung eines Kreisels vergleichen lässt, die nicht von außen verursacht wird und immer aufrecht bleibt (Abbildung 5a). Atome mit ungerader Anzahl von Protonen und/oder Neutronen besitzen einen Kernspin $\vec{I} \neq 0$. Mit diesem geht stets ein magnetisches Kernmoment $\vec{\mu}$ einher (Abbildung. 5b). Es gilt $\vec{\mu} = \gamma \cdot \vec{I}$, wobei der Proportionalitätsfaktor γ das **gyromagnetische Verhältnis** genannt wird. Das Wasserstoffatom hat von allen stabilen Isotopen das größte gyromagnetische Verhältnis und kommt im menschlichen Körper ausreichend vor, weswegen es sich ausgezeichnet für die MRT verwenden lässt. Unsere Betrachtungen werden wir daher im Folgenden auf Wasserstoffatome eingrenzen [22, S. 6 ff.].

Aufgrund des Kernspins hat ein Atom ein Magnetfeld, das mit dem eines Stabmagneten vergleichbar ist [21, S. 7]. So wie ein Stabmagnet ohne den Einfluss eines äußeren Magnetfeldes beliebig ausgerichtet sein kann, kann sich auch die magnetische Achse des Kernspins²⁴ beliebig im Raum ausrichten, da alle Orientierungen energetisch gleichwertig sind [22, S. 8].

Wenn man nun ein äußeres Magnetfeld anlegt, richtet sich das magnetische Moment allmählich entlang dieses Magnetfeldes parallel oder antiparallel aus, wobei die parallele Ausrichtung

²⁴In Zukunft meinen wir mit der „Bewegung eines (unsichtbaren) Spins“ stets die Bewegung seiner magnetischen Achse. Diese ist „sichtbar“, weil wir mit einer Empfangsspule ein Signal ihrer Bewegung empfangen können.

energetisch etwas günstiger ist. Zusätzlich verhält sich der Kernspin im Magnetfeld wie ein Kreisel, bei dem eine Kraft die Lage seiner Rotationsachse ändert: Er führt eine Ausweichbewegung - die sogenannte **Präzessionsbewegung** - aus (Abbildung 6a). Der Spin präzediert dabei mit einer charakteristischen Frequenz, der **Larmorfrequenz**²⁵, die proportional zur Stärke des Magnetfeldes ist (diese Eigenschaft wird sich noch als eminent wichtig erweisen) [16, S. 2].

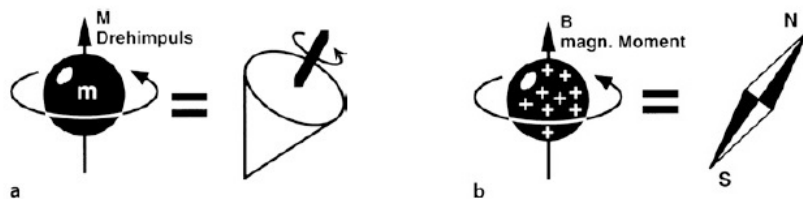


Abbildung 5: a) Vergleich des Kernspins als Drehimpuls \vec{M} eines Protons mit Masse m mit dem Drehimpuls eines Kreisels. b) Hier wird angedeutet, dass die Protonen durch ihre rotierende Ladung ein magnetisches Moment \vec{B} besitzen und man sie deshalb mit kleinen Stabmagneten mit magnetischen Nord- und Südpol vergleichen kann [16, S. 3].

Sieht man sich nun viele Wasserstoffatome in einem homogenen äußeren Magnetfeld an, so richten sich ihre vorher beliebig ausgerichteten Kernspins parallel oder antiparallel zum Magnetfeld aus. Die Anzahl der parallel ausgerichteten Spins überwiegt dabei ein wenig, weil der Zustand energetisch günstiger ist (Abbildung 6b). Nimmt man nun eine ausreichend große (makroskopische) Probe her, so entsteht aufgrund der großen Anzahl an Spins ein messbares magnetisches Moment in Richtung des Magnetfeldes. Diese messbare makroskopische Kernmagnetisierung wird als **Magnetisierung** \vec{M} bezeichnet und ist als Vektorsumme der magnetischen Kernmomente in der Probe bezogen auf das Volumen der Probe definiert [22, S. 9-11]. Die einzelnen Kernspins sind quantenmechanische Objekte, können daher nur diskrete Werte annehmen und unterliegen quantenmechanischen Gesetzen. Durch die Betrachtung der Magnetisierung als Vektor, der nur Aussagen über die Mittelwerte der relevanten Größen zulässt, sind jetzt jedoch Modellannahmen und Gesetze der klassischen Physik uneingeschränkt gültig [22, S. 10].

Die Magnetisierung wird in der MRT als Funktion des Ortes betrachtet $\vec{M} = \vec{M}(x, y, z)$ - es wird die örtliche Verteilung der Magnetisierung gemessen, die durch Wasserstoffatome hervorgerufen wird. Sei das Magnetfeld \vec{B}_0 parallel zur z -Achse eines rechtwinkligen, dreidimensionalen Koordinatensystems ausgerichtet. Die Magnetisierung ist dann ebenfalls in Richtung \vec{B}_0 ausgerichtet, da mehr Kernspins der Probe parallel ausgerichtet sind und sie zwar mit der gleichen Frequenz, aber nicht in Phase präzedieren²⁶. Die x - und y -Komponenten der Magnetisierung heben sich daher im Mittel auf [9, S. 286][22, S. 11]. Den so entstandenen

²⁵Sir *Joseph Larmor* (1857-1942), irischer Physiker und Mathematiker.

²⁶Mit Phase wird hier ein Winkel beschrieben. Beispielsweise präzedieren ein Spin α und ein Spin β in der xy -Ebene mit Larmorfrequenz. Ist β der ersten Drehbewegung jedoch 20° voraus, so hat β gegenüber α eine Phase von $+20^\circ$.

Grundzustand der Magnetisierung bezeichnen wir mit \vec{M}_0 (Abbildung 7b). Die Projektion der Magnetisierung auf die z -Achse nennen wir **Netto-** oder **Longitudinalmagnetisierung** \vec{M}_z . Sie ist zu diesem Zeitpunkt noch nicht direkt messbar, weil sie entlang des Magnetfeldes ausgerichtet ist [21, S. 10].²⁷

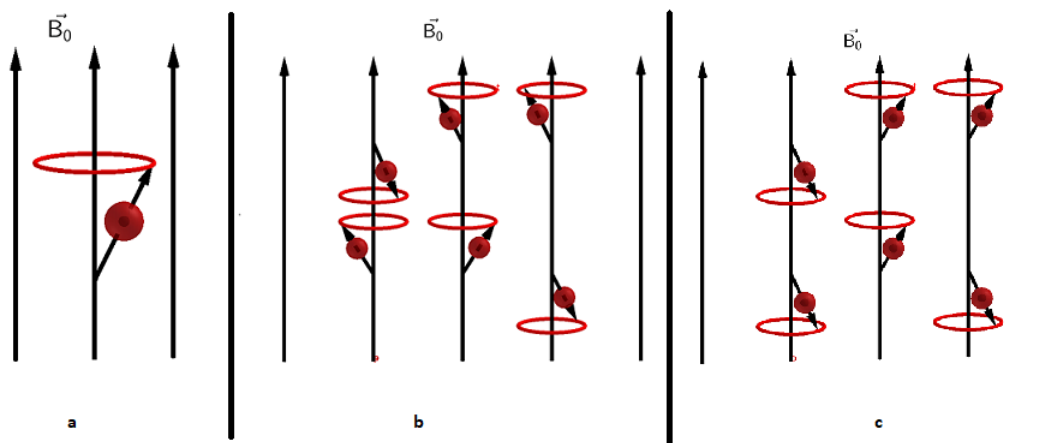


Abbildung 6: *a)* Ein Wasserstoffkern (ein Proton) in einem homogenen Magnetfeld. Aufgrund der Wechselwirkung mit diesem präzediert der parallel zum Magnetfeld ausgerichtete Kernspin. *b)* Schematische Darstellung einer größeren Probe von Protonen in einem homogenen Magnetfeld. Es sind etwas mehr Kernspins parallel als antiparallel ausgerichtet und sie präzedieren nicht in Phase. *c)* Schematisch: Kernspins nach Anregung durch einen HF-Impuls. Im Vergleich zu *b)* haben sich nun einige Spins zusätzlich antiparallel ausgerichtet und zudem präzedieren nun alle in Phase.

Um die Magnetisierung messen zu können, muss das Spinsystem aus seinem Ruhezustand angeregt werden. Dazu wird ein Hochfrequenz-Impuls (**HF-Impuls**) senkrecht zum konstanten äußeren Magnetfeld eingestrahlt. Die Frequenz des HF-Impulses muss, um Energie mit den Protonen der Wasserstoffatome austauschen und sie damit anregen zu können, der Larmorfrequenz entsprechen. Diese **Resonanzbedingung** gibt der MRT ihren Namen. Was bewirkt das Einstrahlen des HF-Impulses nun?

Auf der Ebene der Kernspins bewirkt er zweierlei: Erstens richten sich nun mehr Kernspins antiparallel aus, weil sie die nötige Energie hierfür bekommen haben. Zweitens präzedieren nun alle Kernspins **in Phase** (Abbildung 6c). Dies hat folglich Auswirkungen auf die Magnetisierung. Die Longitudinalmagnetisierung nimmt aufgrund der vermehrten antiparallelen Ausrichtung ab. Zeitgleich heben sich nun die x - und y -Komponenten der Magnetisierung nicht mehr auf, weil die Kernspins in Phase präzedieren. Die Magnetisierung wird also aus ihrer Ruhelage parallel zur z -Achse ausgelenkt und Richtung xy -Ebene „umgeklappt“. Die Projektion der Magnetisierung auf die xy -Ebene nennen wir **Quer-** oder **Transversalmagnetisierung**.

²⁷Dieses Phänomen tritt bereits beim Erdmagnetfeld auf, jedoch ist die Magnetisierung dort sehr gering. Das Magnetfeld des MR-Tomographen ist rund 60.000 mal stärker und schafft damit die Grundlage, das MR-Signal überhaupt messen zu können.

gnetisierung $\vec{M}_{x,y}$. Mit einem HF-Impuls der richtigen Leistung und Dauer („90°-Impuls“) kann die Magnetisierung so komplett in die xy -Ebene umgeklappt werden (Abbildung 7c). Die Transversalmagnetisierung ist dann am größten [22, S. 11-14] [21, S. 10 f.] [16, S. 3-5].

Wird nun der HF-Impuls ausgeschaltet, beginnt sich der Grundzustand des Systems langsam wiederherzustellen (**Relaxation**). Die angeregten Kernspins nehmen nun wieder vermehrt die energetisch günstigere parallele Ausrichtung an und geben dabei Energie ab. Auf makroskopischer Ebene beginnt die Magnetisierung sich ausgehend von der xy -Ebene spiralförmig zurück in ihren Grundzustand parallel zur z -Achse zu schrauben. Die Longitudinalmagnetisierung relaxiert exponentiell gegen den Gleichgewichtswert $\vec{M}_z = \vec{M}_0$, die Transversalmagnetisierung exponentiell abnehmend gegen den Wert $\vec{M}_{x,y} = 0$. Durch elektromagnetische Induktion wird dabei ein Strom induziert, welcher von einer Spule gemessen werden kann. In der MRT ist dieser Strom das gesuchte Signal [21, S. 12] [22, S. 16].

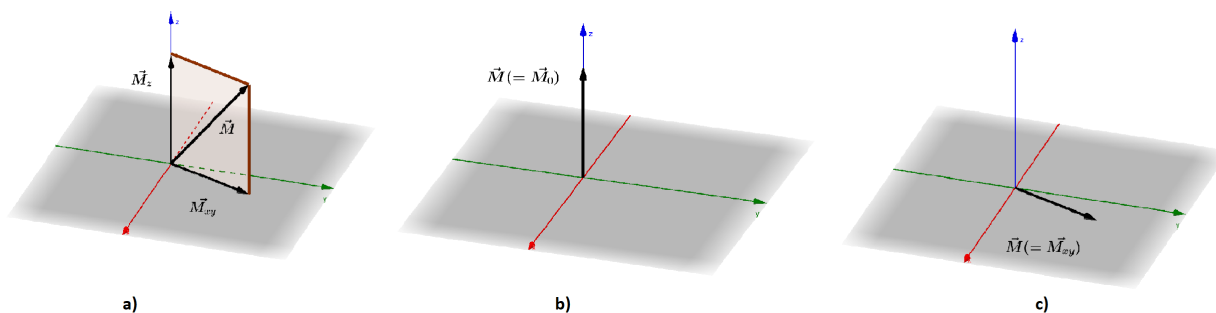


Abbildung 7: Das äußere homogene Magnetfeld verläuft stets parallel zur z -Achse. a) Aufspaltung des Magnetisierungsvektors in Longitudinal- und Transversalmagnetisierung. b) Magnetisierung vor der Auslenkung im Ruhezustand. c) Magnetisierung wurde durch einen 90°-Impuls komplett in die xy -Ebene ausgelenkt.

3.2 Das Magnetresonanzexperiment im MR-Tomographen

Jetzt gilt es zu beleuchten, wie die beschriebenen physikalischen Phänomene konkret in einem MR-Tomographen ausgenutzt werden. Der schematische Aufbau eines MR-Experiments, wie es unabhängig von Spulenanordnung und Bauart in allen MR-Tomographen realisiert wird, ist in Abbildung 8 veranschaulicht. Das Messobjekt, zumeist der menschliche Körper oder Teile davon, wird in einem homogenen, statischen Magnetfeld \vec{B}_0 platziert. Dabei verläuft das Magnetfeld in vielen MR-Tomographen nicht von unten nach oben, sondern entlang des Körpers von den Füßen zum Kopf (der Patient liegt im betrachteten Fall in Rückenlage im Tomographen). Diese Richtung soll bei uns ab nun die z -Richtung genannt werden. Die y -Richtung verläuft von unten nach oben, die x -Richtung von rechts nach links aus Sicht des Patienten.

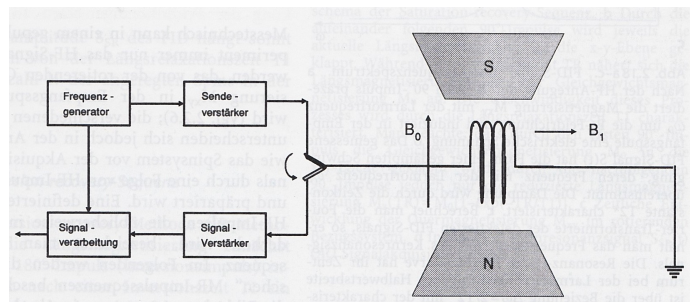


Abbildung 8: Schematischer Aufbau eines MR-Experiments. Das nach der Anregung empfangene Signal wird über eine Empfangselektronik dem Rechner zugeführt [22, S. 19].

Wenn das Magnetfeld stark genug ist, entsteht durch die Ausrichtung der Kernspins der Probe eine potentiell messbare Magnetisierung \vec{M} , die aufgrund ihrer parallelen Ausrichtung zum äußeren Magnetfeld jedoch nicht direkt messbar ist. Um diese wirklich messen zu können, muss die Magnetisierung aus dem Ruhezustand ausgelenkt werden. Dazu wird mittels einer Hochfrequenzspule ein HF-Impuls²⁸ erzeugt, der mit Larmorfrequenz (= Präzessionsfrequenz der Kernspins) senkrecht zum statischen Magnetfeld eingestrahlt wird [22, S. 19].

Die Magnetisierung wird je nach Dauer und Leistung des Impulses entsprechend ausgelenkt. Bei einem „90°-Impuls“ wird die Magnetisierung gänzlich in die senkrecht zum Magnetfeld liegende xy -Ebene ausgelenkt. Nach dem Ausschalten des HF-Impulses führen zwei unabhängige Vorgänge dazu, dass die Magnetisierung spiralförmig von der xy -Ebene zurück in ihren Grundzustand parallel zur z -Achse kehrt:

1. Longitudinale Relaxation

Durch die Abgabe von Energie an die Umgebung („Gitter“) kehren viele Kernspins wieder vom angeregten Zustand in ihre parallele Ausrichtung hinsichtlich des Magnetfelds zurück. Damit wird auch der Gesamtvektor \vec{M}_z in diese Richtung größer - die Longitudinalmagnetisierung baut sich wieder auf. Dieser Vorgang wird auch **Spin-Gitter-Relaxation** genannt. Die charakteristische Zeitspanne nach einem 90°-Impuls („ $\vec{M}_z = 0$ “), in der \vec{M}_z wieder auf 63% des Gleichgewichtszustandes \vec{M}_0 angewachsen ist, nennt man **longitudinale Relaxationszeit** oder kurz **T1-Relaxationszeit** (=T1).

2. Transversale Relaxation

Direkt nach dem Ausschalten des HF-Impulses präzedieren die angeregten Kernspins alle noch in Phase. Diese Phasenkohärenz geht aber nach kurzer Zeit bereits verloren. Die Kernspins beeinflussen nämlich gegenseitig die Magnetfelder ihrer Wasserstoffatome, indem sie sie teils verstärken, dann wieder abschwächen. Diese Variation der Stärke des Magnetfeldes bewirkt nun auch eine Variation der Präzessionsfrequenz, wes-

²⁸Der HF-Impuls ist eigentlich selbst ein zeitlich begrenztes Hochfrequenzmagnetfeld und wird in Abbildung 8 mit $\vec{B}_1(t)$ bezeichnet

halb die Kernspins nun unterschiedlich schnell präzedieren und außer Phase geraten (**Dephasierung**). Dadurch heben sich infolge die einzelnen Komponenten der Transversalmagnetisierung $\vec{M}_{x,y}$ zusehends auf, bis diese schließlich verschwindet ($\vec{M}_{x,y} = 0$). Dieser Vorgang wird auch **Spin-Spin-Relaxation** genannt. Die charakteristische Zeitspanne, in der die Transversalmagnetisierung auf 37% ihres ursprünglichen Wertes abgefallen ist, nennt man **transversale Relaxationszeit** oder kurz **T2-Relaxationszeit** (=T2) [22, S. 16 f.] [16, S. 8-10].

Zusätzlich wird die Dephasierung noch durch Inhomogenitäten des äußeren Magnetfeldes verstärkt, die durch den Tomographen selbst oder den Körper verursacht werden. Dadurch verschwindet die Transversalmagnetisierung und damit das MR-Signal schneller als nur mit T_2 , nämlich mit der kürzeren Zeitkonstanten T_2^* . Das mit T_2^* abfallende MR-Signal nennt man **free induction decay** (FID) [16, S. 9].

Die T1- und T2-Relaxation laufen zeitgleich und unabhängig voneinander ab. Typische Messungen für T2 sind im Bereich von 100 – 300 Millisekunden, bei T1 zwischen 0,5 – 5 Sekunden [16, S. 10].

Das FID-Signal hat die Form einer gedämpften Schwingung. Die Zeitspanne von seiner Entstehung bis zum Abklingen entspricht T_2^* . Zudem ist seine Anfangsamplitude proportional zur Anzahl der Kernspins respektive der Wasserstoffatome der Probe. Da verschiedene Gewebe im Körper unterschiedlichen Wasserstoffgehalt haben, sind die T_1 -, T_2 - und T_2^* -Relaxationszeiten gewebeabhängig. Durch ihre Messung lassen sich also Rückschlüsse auf die Art des Gewebes ziehen. Das Problem dabei ist nur, dass wir aufgrund intramolekulare Wechselwirkungen in der Empfangsspule eine Überlagerung interferierender Abklingkurven als Signal messen. Um aus diesen die gewünschten Relaxationszeiten zu erhalten, ist die Anwendung der Fourier-Transformation erforderlich [22, S. 19]. Mit dem Verweis auf detailliertere Ausführungen zu diesem Vorgang im nächsten Kapitel dieser Arbeit begnügen wir uns vorerst damit, zu wissen, dass die gewünschten Zeitkonstanten aus dem Signal ermittelt werden können. Ich möchte nun noch ein paar kurze Bemerkungen zum konkreten Beitrag der Relaxationszeiten bei der Gewebebestimmung machen.

Die drei Parameter Protonendichte, T_1 -Zeit und T_2 -Zeit bestimmen Helligkeit und Kontrast eines MR-Bildes maßgeblich. Um ein MR-Bild zu erstellen, muss eine Schicht in der Probe viele Male hintereinander angeregt werden. Die Zeit, die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Anregungen vergeht, nennt man **Repetitionszeit** (TR). Sie bestimmt, wie viel Zeit den Kernspins nach einer Anregung bleibt, in ihren Grundzustand zurückzukehren und damit auch, wie viel Longitudinalmagnetisierung wieder aufgebaut wird. Je länger TR ist, desto mehr Longitudinalmagnetisierung wird während der Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden HF-Impulsen aufgebaut und desto größer wird das Signal bei der nächsten Anregung. Ist TR also kurz, geben Gewebe mit kurzer T_1 -Zeit viel Signal ab, da sich ihre Longitudinalmagnetisierung nach der Anregung relativ schnell wieder aufbaut. Sie erscheinen im MR-Bild hell.

Wie ich gleich darstellen werde, braucht man zur Kodierung des Ortes innerhalb der Probe, von dem ein Signal kommt, zusätzliche Magnetfelder im MR-Tomographen, die die Dephasierung der Kernspins und damit die $T2$ - bzw. $T2^*$ -Zeit zusätzlich beeinflussen. Diese Effekte müssen vor der Messung rückgängig gemacht werden, was wiederum mittels geeigneten Magnetfeldern geschieht. Nach diesem Vorgang ist das ursprüngliche Signal wieder hergestellt und kann gemessen werden - wir sprechen hier von einem **Echo**. Die Zeitspanne zwischen dem Ende der Anregung und der Messung des Signal nennt man **Echozeit** (TE). Je länger TE gewählt wird, desto länger dauert die $T2$ -Relaxation schon an und desto mehr Transversalmagnetisierung wurde bereits abgebaut. Wird TE also lang gewählt ($> 60ms$), geben Gewebe mit kurzem $T2$ nur mehr Signale mit schwacher Intensität ab, da sich ihre Transversalmagnetisierung relativ schnell abbaut - sie erscheinen am MR-Bild dunkel. Gewebe mit langem $T2$ hingegen haben nur wenig von ihrer Transversalmagnetisierung verloren und senden ein starkes Signal aus - sie erscheinen dann hell.

Über die Repetitions- bzw. Echozeit lassen sich also die gewebespezifischen Relaxationszeiten $T1$ und $T2$ für die MR-Bildgebung ausnutzen (Vergleiche dazu Abbildung 11 auf Seite 35.) [16, S. 12-14].

Wie an früherer Stelle schon einmal erwähnt, wird in der MRT die Magnetisierung \vec{M} einer Probe als Funktion des Ortes, also $\vec{M}(x, y, z)$, aufgefasst. Die Idee dahinter ist, dass man eine Probe in kleine quaderförmige Volumenelemente (**Voxel**) unterteilt, deren Beiträge zum detektierten Summensignal ausgewertet und so durch die Kenntnis der lokalen Zusammensetzung des Gewebes Schnittbilder (**Tomogramme**) der Probe bekommt. Die Aufgabe besteht nun darin, die Beiträge der einzelnen Voxel zum Gesamtsignal zu ermitteln, das heißt ihre Ortsinformation im Signal zu kodieren.

3.3 Ortskodierung

Die Orientierung der Koordinatenachsen folgt auch jetzt Abbildung 4. Die Ortskodierung im MR-Tomographen basiert zum einen auf der Tatsache, dass die Larmorfrequenz proportional zur Magnetfeldstärke ist, zum anderen darauf, dass nur jene Kernspins durch den eingestrahlten HF-Impuls angeregt werden, deren Frequenz jener des Impulses (annähernd) entspricht (=Resonanz) [16, S. 22]. Diese Eigenschaften macht man sich nun zunutze, indem man das Hauptmagnetfeld in alle drei Koordinatenrichtungen durch zusätzliche Spulensysteme mit weiteren Magnetfeldern \vec{B}^x, \vec{B}^y und \vec{B}^z - sogenannten **Gradientenfeldern** - überlagert. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass die Magnetfeldstärke in Richtung des jeweiligen Magnetfeldes (also in x -, y - oder z -Richtung) variiert. Sie weist einen Anstieg (**Gradient**) auf. Oft spricht man einfach von einem x -, y - oder z -Gradienten, womit gemeint ist, dass sich die Stärke der Zusatzfelder \vec{B}^x, \vec{B}^y oder \vec{B}^z entlang der jeweiligen Koordinatenachse ändert. Je nach Ausrichtung der Zusatzmagnetfelder nimmt die Magnetfeldstärke in Richtung der jeweiligen Koordinatenachse linear zu oder ab. [22, S. 30 f.]

Dadurch ist die Präzessionsfrequenz der Kernspins in jeder der drei Koordinatenrichtungen linear abhängig von ihrer Ortskoordinate (x , y oder z), was folgende Möglichkeit zur Ortskodierung eröffnet.

Selektive Schichtanregung (z-Koordinate)

Zur Kodierung der z -Koordinate wird entlang der z -Achse, also auch entlang der Magnetfeldrichtung des Hauptmagnetfeldes, ein Gradientenfeld angelegt, das in z -Richtung zunimmt (d. h. am Kopf stärker als bei den Füßen ist). Alle Wasserstoffatome mit gleicher z -Ortskoordinate präzedieren daher mit der gleichen Frequenz - sie gemeinsam bilden **eine Schicht**. Wird nun ein HF-Impuls mit bestimmter Frequenz eingestrahlt, werden nur Kernspins jener Schicht angeregt, deren Frequenz jener des HF-Impulses entspricht. Durch Variation der Frequenz des HF-Impulses können wir nun gezielt eine Schicht auswählen und anregen. Die Breite der angeregten Schicht wird von der Stärke des Gradienten bestimmt. Mittels starken Gradienten lassen sich dünnere Schichten anregen, bei schwächeren Gradienten werden die Schichten breiter [16, S. 22]. Abbildung 9 zeigt eine schematische Darstellung dieses Vorgangs.

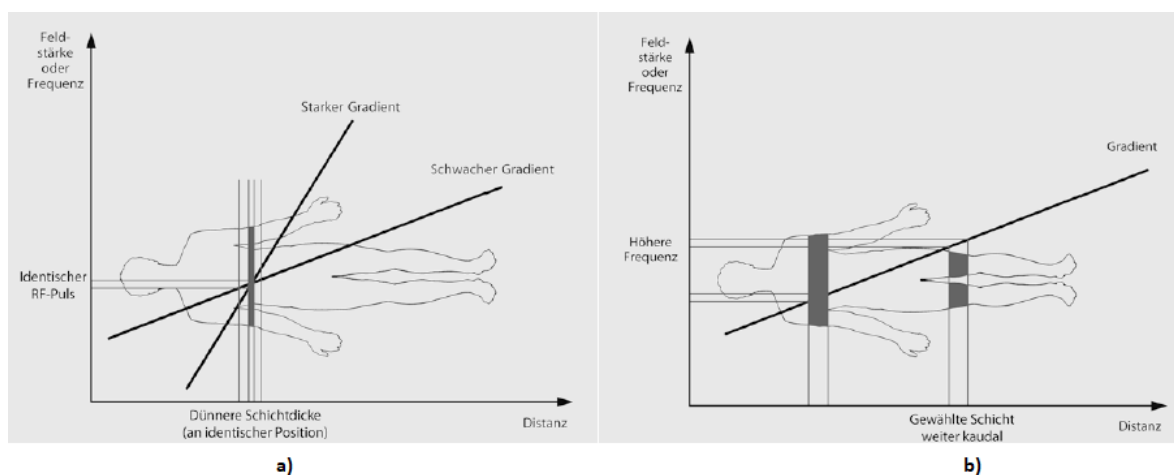


Abbildung 9: a) Durch unterschiedlich starke Gradienten lässt sich die Breite der angeregten Schicht bestimmen. b) Durch Variation der Frequenz des HF-Impulses kann die anzuregende Schicht ausgewählt werden [16, S. 24].

Der z -Gradient wird folgerichtig nur während des Einstrahlens des HF-Impulses eingeschaltet. Da durch Wahl der Frequenz des HF-Impulses nur jeweils eine Schicht angeregt wird, ermöglicht er es, die weitere Kodierung auf zwei Dimensionen zu reduzieren. Durch Aneinanderreihung der 2D-Bilder von unterschiedlichen Schichten lässt sich schlussendlich ein dreidimensionales Bild der Probe erzeugen.

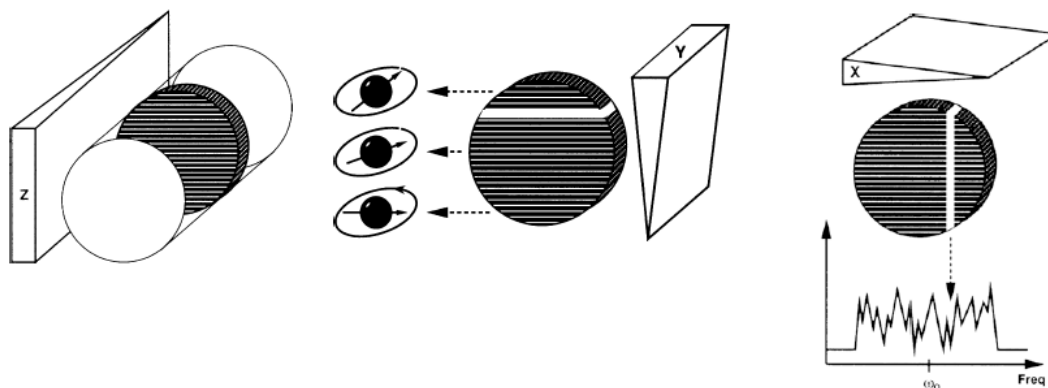


Abbildung 10: Schematische Darstellung des Prinzips der Ortskodierung mittels Gradientenfeldern. Die Magnetfeldgradienten sind durch Keile dargestellt, wobei die Stärke des Keils proportional zur Magnetfeldstärke ist. Zuerst wird ein z -Gradient für die Schichtauswahl eingeschaltet (links). Dann kodiert man mittels eines y -Gradienten die horizontalen Zeilen dieser Schicht mittels ihres Phasenvorsprungs (Mitte). Zuletzt werden die vertikalen Spalten der Schicht anhand ihrer Frequenz kodiert, die für jede Spalte durch einen x -Gradient unterschiedlich ist. [16, S. 23-25]

Phasenkodierung (y -Koordinate)

Nachdem mittels des z -Gradient während der Anregung die z -Komponente der Voxel festgelegt wurde, muss nun innerhalb der angeregten Schicht die Ortskodierung der x - und y -Koordinaten erfolgen.

Direkt nach Ausschalten des HF-Impulses und des z -Gradienten präzedieren die Kernspins in der Schicht alle mit gleicher Frequenz und in Phase. Nun wird ein y -Gradient (von oben nach unten) eingeschaltet. Dieser bewirkt, dass das Magnetfeld oben stärker ist als unten, ergo auch die Kernspins oben schneller präzedieren als unten. „Zeilenweise“ geraten die Kernspins außer Phase - die oberen „laufen“ den unteren davon. Wenn der y -Gradient ausgeschaltet wird, präzedieren alle Kernspins der Schicht wieder mit gleicher Frequenz, jedoch behalten die oberen ihren Phasenvorsprung gegenüber den unteren bei. Jede Zeile (= Kernspins mit gleicher y -Koordinate) ist nun durch ihre Phase charakterisiert. Dieser Gradient wird deshalb auch **Phasenkodiergradient** genannt [9, S. 328-330].

Frequenzkodierung (x -Koordinate)

Die x -Koordinate wird kodiert, indem während des Aussendens des zu messenden Signals ein Gradientenfeld in x -Richtung eingeschaltet wird. Dieses bewirkt wiederum Feldinhomogenitäten - die Magnetfeldstärke nimmt von rechts nach links zu. Dadurch präzedieren Kernspins weiter links auch schneller als jene weiter rechts. Alle Kernspins mit gleicher x -Koordinate präzedieren also mit gleicher Larmorfrequenz und so sind die Spalten einer Schicht eindeutig

durch die Präzessionsfrequenz der Kernspins definiert. Alle Kerne einer Spalte tragen mit gleicher Frequenz zum Signal bei. Dieser Gradient wird auch **Frequenzkodiergradient** genannt. Im Prinzip machen y - und x -Gradient also dasselbe - sie verändern die Magnetfeldstärke und damit die Präzessionsfrequenzen der Kernspins. Der y -Gradient wird aber vor Beginn des Aussendens des Signals und der Signalmessung schon wieder ausgeschaltet - als Wirkung bleibt für die Messung lediglich die zeilenweisen Phasenverschiebungen. Die unterschiedlichen Frequenzen im Signal hingegen bewirkt der zeitgleich mit der Messung eingeschaltete x -Gradient [9, S. 331].

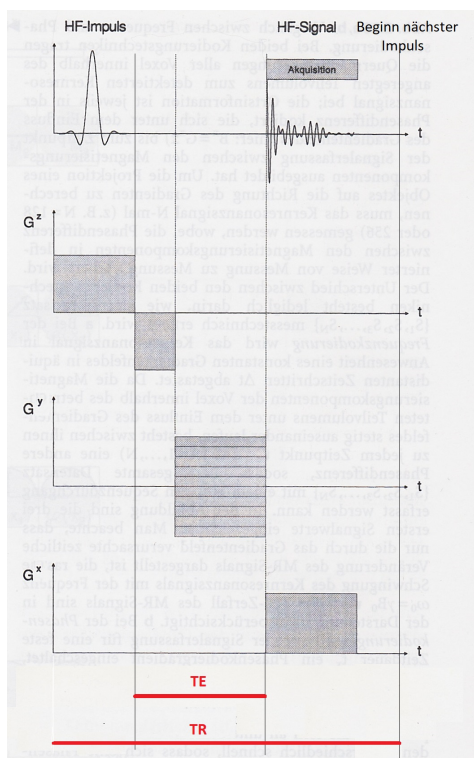


Abbildung 11: Typische Gradientenfolge eines Sequenzdurchgangs. Der z -Gradient G^z wird nach der Anregung für die Dauer der halben Anregungszeit umgepolt, um die Phasenkohärenz der Kernspins wieder herzustellen. Danach wird der Phasenkodiergradient G^y eingeschaltet. Die Unterteilungen der dunklen Fläche weisen auf die unterschiedliche Stärke dieses Gradienten hin, die sich pro Sequenzdurchgang verstärkt. G^x bezeichnet den Frequenzkodiergradienten. Unten rot sind die Echozeit (TE) sowie die Repetitionszeit (TR) eingezeichnet. [22, S. 38, bearbeitet von Johannes Klotz]

Das gemessene Signal enthält also die zwei gewünschten Informationen, die unter Miteinbeziehung des z -Gradienten jedes Voxel eindeutig charakterisieren. Die verschiedenen Frequenzen des Gesamtsignals geben Aufschluss über die Herkunft des Signals in x -Richtung. Mittels der Fourier-Transformation erhalten wir diese Information direkt. Sie kann aus einem Signal alle enthaltenen Frequenzen herausfiltern und diese können wir einer x -Koordinate zuordnen.

Schwieriger wird es, die y -Koordinate zu bestimmen. Die Phasen der einzelnen Spins lassen sich nicht durch eine Messung allein bestimmen. Um dennoch zur gewünschten Information zu kommen, wird eine Schicht öfter angeregt und das Signal anschließend gemessen. Bei jeder Anregung wird dabei der Phasenkodiergradient ein wenig verstärkt (dies ist auch in Abbildung 11 dargestellt). So erhalten wir viele Messungen mit unterschiedlichen Ergebnissen, wobei nun durch den Zusammenhang der unterschiedlichen Stärken des Gradienten und den Ergebnissen durch eine Fourier-Transformation (diesmal in Phasenrichtung) die Phasenaufteilung berechnet werden kann. Je besser die Bildqualität sein soll, umso öfter muss die Phasenkodierung aufgenommen werden. Die Anzahl der aufgenommenen Phasenkodierungen bestimmt auch die Aufnahmedauer insgesamt [16, S. 25 f.].

Somit ist die Aufgabe der Ortskodierung erledigt und wir können in einem Zwischenfazit das bisher Erarbeitete kurz zusammenfassen:

1. Bei der MRT wird eine makroskopische Probe, die Atome mit Kernspin enthält (bevorzugt Wasserstoffatome), in ein homogenes Magnetfeld gebracht. Dadurch entsteht eine nachweisbare Magnetisierung. Außerdem führen die Kernspins eine Präzessionsbewegung mit Larmorfrequenz aus.
2. Da diese Magnetisierung parallel zum äußeren Magnetfeld ausgerichtet ist, muss man sie erst anregen, um sie messen zu können. Dazu wird ein Hochfrequenzimpuls senkrecht zum Magnetfeld mit Larmorfrequenz eingestrahlt. Stimmen Leistung und Dauer des Impulses, wird der Magnetisierungsvektor 90° gedreht. Kippt er nach Ausschalten des Impulses wieder in seine Ruhelage zurück, wird ein Strom induziert - das Signal.
3. Mittels Gradientenfeldern, die das statische Magnetfeld überlagern, kann man gezielt nur eine Schicht Protonen im Körper anregen und geschickt deren Phase und Frequenz manipulieren. Dies ermöglicht die Kodierung des Beitrags jedes Volumenelements der Probe im Signal. Damit ist jedem Volumenlement sein ausgesendetes Signal, das sein Beitrag zum Gesamtsignal der Messung ist, zugeordnet.
4. Somit wissen wir um die Wasserstoffverteilung in der Probe Bescheid, was uns Zugang zu den medizinisch relevanten Informationen (z.B. Gewebeart, Flüssigkeiten in Gelenken und ähnliches) verschafft.

Die letzte Frage, die uns in diesem Kapitel jetzt noch beschäftigen soll, ist, wie wir die Daten in jener Form erhalten, die uns schlussendlich die Berechnung von Schnittbildern ermöglicht.

3.4 Erstellung der Datenmatrix

Wie zuvor beschrieben, reduziert die selektive Schichtanregung die Kodierung auf eine Schicht, also zwei Dimensionen - bei uns auf eine xy -Ebene. Sei G^x der Frequenz-, G^y der Phasenkodiergradient und t die Zeit von Beginn der Signalausendung bis zu dessen vollständigem Abklingen bzw. der neuerlichen Anregung durch einen HF-Impuls (je nach dem was früher eintritt). Um auf die Phasenaufteilung der verschiedenen Beiträge im Signal schließen zu können, muss die Schicht mehrmals angeregt werden. Bei jeder **Bildgebungssequenz** (Impulsanregung - Einschalten des y -Gradienten - Auslesen des Signals unter Anwesenheit des x -Gradienten) wird der Phasenkodiergradient dabei etwas verstärkt. Bei N Durchführungen der Bildgebungssequenz an einer Schicht ist $G_n^y := \frac{n}{N} G^y$ der Gradient bei der n -ten Durchföhrung ($1 \leq n \leq N$, wobei normalerweise $N = 256$ oder $N = 512$). Bei jedem Sequenzdurchgang wird das Signal dabei N -mal zu den Zeitpunkten $t_m := \frac{m}{N} t$ ($1 \leq m \leq N$) gemessen, digitalisiert und abgespeichert. Für jede Kombination (G_n^y, t_m) erhalten wir also einen unabhängigen Messwert. Diese Messwerte zusammen ergeben dann eine $N \times N$ -Matrix, wobei die n -te Zeile die N Messungen für den Gradienten G_n^y enthält (jede Zeile enthält die Daten eines Sequenzdurchganges) [22, S. 38 f.].

Diese Matrix digitalisierter MR-Daten - oft auch **K-Raum** genannt - ist nun die Form, die man braucht, um aus den Daten durch Anwendung einer zweidimensionalen inversen diskreten Fourier-Transformation das zweidimensionale Schnittbild zu erzeugen. Zu beachten ist, dass dabei eine Zeile des K -Raums nicht einer Zeile im Schnittbild entspricht. Das Zentrum des K -Raums enthält die Kontrastinformationen (Konturen, Ränder und Übergänge), die Peripherie die Rauminformationen [16, S. 27].

Damit haben wir auch den physikalisch-technischen Teil unserer Betrachtungen abgeschlossen und verstehen nun, wie wir zu der Form der Datenmatrix kommen, die uns die Erzeugung eines Schnittbildes durch den Körper ermöglicht. Im Folgenden wollen wir unsere Kenntnisse über die Fourier-Transformation mit den in diesem Kapitel erworbenen zusammenführen und sie dazu nutzen, das Problem der Berechnung von Schnittbildern mathematisch zu modellieren und zu lösen.

4 Bildgebung in der MRT mittels iDFT - mathematische Modellierung

Die Darstellungen in diesem Kapitel orientieren sich an [9, S. 322-334] und entnehmen Ideen aus [15, S. 249-266]. Die Ausführungen bezüglich des *Nyquist-Theorems*²⁹ sowie bandbeschränkter Signalen basieren auf [12, S. 55-60].

Eine mögliche Sequenz- und Gradientenfolge im MR-Tomographen zur Erzeugung eines dreidimensionalen Schnittbildes durch den menschlichen Körper wurde im vorhergehenden Kapitel besprochen. Bei der vorgestellten Methode erstellt man durch den geschickten Einsatz eines Gradientenfeldes in z -Richtung zweidimensionale Tomogramme einer Körperschicht und reiht diese anschließend aneinander, um ein 3D-Bild zu bekommen. Diese Vorgehensweise erlaubt für die nachfolgenden Ausführungen nun die Einschränkung der Modellierung auf zwei Dimensionen.

Wir erinnern uns, dass die Kernspins der Wasserstoffatome in der durch den z -Gradienten angewählten Schicht im Körper durch einen HF-Impuls angeregt werden. Die dabei von den Kernspins aufgenommene Energie wird nach Ausschalten des HF-Impulses in Form von elektrischem Strom wieder abgegeben und von einer Spule im MR-Tomographen detektiert. Dies ist das MR-Signal, von dem im Folgenden die Rede ist.

Der Ausgangspunkt der Daten ist also in unserem Fall ein analoges (kontinuierliches) Signal endlicher Länge und Energie. Die Intensität des Signals ist abhängig von der jeweiligen Protonenanzahl einer angeregten Schicht. Wie wir bereits wissen, ist die Protonenanzahl direkt proportional zur Spindichte und damit auch zur Stärke der Transversalmagnetisierung. Folglich hängt das Signal von der Transversalmagnetisierung ab, die wir ab sofort mit M_T bezeichnen. Sei D ein Gebiet in der Ebene, das eine Schicht des Patienten darstellen soll. Wir fassen die Transversalmagnetisierung nun als Funktion des (zweidimensionalen) Ortes auf

$$M_T : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto M_T(x, y).$$

Damit ist M_T ortsbegrenzt [15, S. 249]. Das Ziel ist es nun, die Spindichte-Verteilung in einer Schicht herauszufinden und darzustellen. Da diese direkt mit der Transversalmagnetisierung korrespondiert, müssen wir verstehen, wie genau das Signal von M_T abhängt und wie wir aus dem Signal die Funktion M_T berechnen können. Dazu sehen wir uns an, welche Auswirkungen die Gradienten auf M_T haben [9, S. 322].

Die Magnetisierung der Kernspins einer Schicht im Körper sei nach einem 90° -Impuls in die xy -Ebene geklappt. Wir vernachlässigen vorübergehend die Relaxationsphänomene. Jene be-

²⁹Harry Nyquist (1889-1976), schwedisch-amerikanischer Elektroingenieur.

wirken die zeitabhängige Verringerung der Transversalmagnetisierung nach dem Gesetz

$$M_T = M_{T_0} \cdot e^{-\frac{t}{T_2^*}},$$

mit M_{T_0} als Transversalmagnetisierung zum Zeitpunkt T_0 (jenem Zeitpunkt, an dem der HF-Impuls ausgeschaltet wird) und T_2^* als charakteristische Zeitspanne, nach der die Transversalmagnetisierung verschwunden ist (vgl. die Relaxationsphänomene auf Seite 31) [9, S. 306]. Wir schalten jetzt also für eine Zeit t_y den Phasenkodiergradienten G^y (in y -Richtung) ein. Die Auswirkungen des Phasenkodiergradienten auf die Kernspins hängen einerseits von der y -Koordinate der Kernspins ab, andererseits von der Stärke und Einschaltdauer des Gradienten. Das Produkt $G^y \cdot t_y$ bestimmt also die Wirkung des Gradienten auf die Transversalmagnetisierung maßgeblich. Man kann nun durch Variation der beiden Faktoren die Wirkung des Gradienten beeinflussen. So kann ein schwacher Gradient, der lange Zeit eingeschaltet wird, die gleiche Wirkung auf die Transversalmagnetisierung erzielen wie ein starker Gradient, der für kurze Zeit eingeschaltet ist. Für unseren Fall wählen wir jedoch G^y fest und variieren dessen Wirkung durch unterschiedliche Wahl von t_y . Sei dabei $t_{y_{\max}}$ die maximale Einschaltdauer und $t_y \in [0, t_{y_{\max}}]$.

Der Phasenkodiergradient bewirkt eine Phasenverschiebung der Kernspins abhängig von ihrer y -Koordinate. Der **Phasendrehwinkel φ nach der Zeit t_y** kann beschrieben werden durch

$$\varphi = -\gamma \cdot G^y \cdot t_y \cdot y, \quad (7)$$

wobei γ das gyromagnetische Verhältnis bezeichnet.³⁰ Stellen wir die Transversalmagnetisierung als Zeiger in der komplexen Ebene dar, so lässt sich die Auswirkung des Phasenkodiergradienten als Drehung dieses Zeigers um den Winkel φ in einem rotierenden Koordinatensystem schreiben als

$$M_T(y) = M_{T_0}(y) \cdot e^{-i\gamma G^y t_y y}. \quad (8)$$

Wir haben nun durch den G^y -Gradienten ein Muster der Transversalmagnetisierung $M_T(x, y)$ erhalten. Während des Auslesens des Signals schalten wir jetzt einen Frequenzkodiergradienten G^x ein, welcher die Präzessionsfrequenz der Kernspins abhängig von ihrer x -Koordinate verändert. Ist $t_{\max} > 0$ fest gewählt, so bezeichnet das Intervall $[0, t_{\max}]$ die Zeitspanne, in der G^x angeschaltet ist (diese entspricht der Zeitspanne vom Beginn des Aussendens des Signals bis zu dessen Abklingen). Wie vorher schon erwähnt, wird das Signal bei jedem Sequenzdurchgang öfters abgetastet (gemessen). Die Wirkung des Gradienten G^x auf das Signal ist nicht nur von der x -Koordinate, sondern auch vom Zeitpunkt der Messung $t \in [0, t_{\max}]$ abhängig. Je später das Signal abgetastet wird, desto größer ist die Wirkung von G^x . Analog zur Auswirkung von G^y lässt sich der Einfluss von G^x auf die Transversalmagnetisierung als Drehung

³⁰In unserem Fall ist φ einfach eine Konstante, da wir in dieser Arbeit immer nur von Wasserstoffatomen sprechen.

in der komplexen Ebene beschreiben mit

$$M_T(x, t) = M_{T_0}(x) \cdot e^{-i\gamma G^x t x}. \quad (9)$$

Dass die Auswirkung der Frequenzkodierung auf M_T von zwei Parametern abhängt, wird in Gleichung (9) nochmal deutlich. Im Unterschied zur Phasenkodierung, die vor dem Auslesen des Signals geschieht und deren Wirkung auf die Transversalmagnetisierung somit unabhängig vom Zeitpunkt des Ab tastens des Signals ist, wird der G^x -Gradient zeitgleich mit der Messung eingeschaltet. Seine Wirkung auf M_T wächst mit zunehmender Zeitdauer und ist umso größer, je später man das Signal ab tastet. [9, S. 328- 331].

Das MR-Signal S ohne Berücksichtigung der Relaxationsprozesse erhält man, indem man die in den Gleichungen (8) und (9) beschriebenen Auswirkungen auf die Transversalmagnetisierung anwendet und die Integrale darüber nach x und y bildet. Durch die x - und y -Koordinate ist ein Ort in der angewählten Schicht des Körpers bestimmt. Der Einfachheit halber nehmen wir dabei an, das Koordinatensystem sei so ausgerichtet, dass sein Ursprung genau der Mittelpunkt der beiden Strecken mit kleinstem und größtem x - bzw. y -Wert als Endpunkte ist. Kurz gesagt also $x \in [-x_{\max}, x_{\max}]$ und $y \in [-y_{\max}, y_{\max}]$ mit x_{\max} bzw. y_{\max} als größtem x - bzw. y -Wert. Damit erhalten das Signal

$$S(t, t_y) = \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} \int_{-y_{\max}}^{y_{\max}} M_{T_0}(x, y) \cdot e^{-i\gamma G^x t x} \cdot e^{-i\gamma G^y t_y y} dx dy, \quad (10)$$

wobei $S : [0, t_{\max}] \times [0, t_{y\max}] \rightarrow \mathbb{C}$.

Zur Erinnerung sei noch einmal erwähnt, dass das Signal von t_y abhängt, weil der Phasendrehwinkel (vgl. Gleichung (7)) auch vom Produkt $G^y \cdot t_y$ bestimmt wird. Bei jedem Sequenzdurchgang wird die Wirkung des Phasenkodiergradienten G^y stärker, was wir über die Zeitspanne t_y im Messsignal S ausdrücken können (damit haben beide Veränderliche die Einheit Sekunde). Da wir die Phasenkodierung für eine Schicht oft durchführen müssen, erhalten wir für eine Schicht also mehrere Messsignale. Um die Argumente zu einer Art „normierten Zeit“ zu vereinheitlichen führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} k_x &:= \gamma \cdot G^x \cdot t \\ k_y &:= \gamma \cdot G^y \cdot t_y. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir das Messsignal

$$S(k_x, k_y) = \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} \int_{-y_{\max}}^{y_{\max}} M_{T_0}(x, y) \cdot e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} dx dy. \quad (11)$$

Die Formel in Gleichung (11) drückt den zentralen Zusammenhang zwischen gemessenem Signal und gewünschtem Bild in der MR-Tomographie aus:

**Das Signal ist die zweidimensionale Fourier-Transformierte der
Transversalmagnetisierung und damit auch des gesuchten Bildes.**

Man beachte dabei, dass die Fourier-Transformation in diesem Zusammenhang eine Abbildung vom Ortsraum in den Raum der räumlichen Frequenzen ist und $S(k_x, k_y)$ eine komplexe Zahl [9, S.332 f.]³¹

Mit den in Kapitel 2 erarbeiteten Werkzeugen wären wir theoretisch problemlos in der Lage, durch Anwenden einer zweidimensionalen inversen Fourier-Transformation das Bild aus dem Signal zu berechnen. Tatsächlich liegt das Signal aber nicht in kontinuierlicher Form vor, denn ein Computer kann mit dieser nicht arbeiten.

Um das Signal digital verarbeiten zu können, müssen wir es diskretisieren. Bei dem in der Spule gemessenen Signal handelt es sich um eine kontinuierlich schwankende Spannung. Wie im Unterkapitel 3.4 beschrieben wird das Signal in jedem Sequenzdurchgang zu N Zeitpunkten $t_n \in [0, t_{\max}]$, $0 \leq n \leq N - 1$, abgetastet. Ein Analogue-to-Digital-Converter (ADC) misst an jedem Zeitpunkt t_n die Spannung, speichert den Wert als komplexe Zahl ab und stellt so die Spannung als Folge von komplexen Zahlen dar [18, S. 55 f.].

Die Abstände zwischen den Zeitpunkten wählen wir äquidistant, weshalb wir $t_n := n \cdot \Delta t := n \cdot \frac{t_{\max}}{N}$ definieren. Wir nennen Δt die **Schrittweite** und den Kehrwert $\frac{1}{\Delta t}$ die **Abtastfrequenz**. Die **Bandbreite** Ω der vorkommenden Frequenzen im Signal wird bestimmt durch das gyromagnetische Verhältnis, den Feldgradienten G^x sowie den größten vorkommenden x -Wert, also

$$\Omega = \gamma \cdot G^x \cdot x_{\max}.$$

Die größte im Signal vorkommende (Kreis-)Frequenz ist damit $\nu_{\max} := \frac{\Omega}{2\pi}$ [9, S. 331]. Gemäß dem *Nyquist*-Theorem sind bandbeschränkte Signale, die keine Frequenzen höher als ν_{\max} enthalten, durch die mit der Abtastfrequenz $2\nu_{\max}$ abgetasteten diskreten Werte eindeutig bestimmt.³² Um die Eindeutigkeit des Signals durch die abgetasteten Werte zu gewährleisten, muss die **Nyquist-Bedingung** erfüllt sein, die fordert, dass $\Delta t \leq \frac{\pi}{\Omega}$.

Im vorliegenden Fall bedeutet dies, dass folgende Relation zu gelten hat:

$$\Delta t \leq \frac{\pi}{\Omega} \Leftrightarrow \frac{t_{\max}}{N} \leq \frac{\pi}{\gamma \cdot G^x \cdot x_{\max}}.$$

Dabei ist es ausreichend, wenn wir $\Delta t := \frac{\pi}{\Omega}$ setzen. Denn würden wir ein Ω -bandbeschränktes

³¹Eine Erklärung hierfür findet sich in [9, S. 293 f.]. Mehr Informationen zu räumlichen Frequenzen sind dem online-Artikel [10] sowie [18, S. 111 f.] zu entnehmen.

³²Detailliertere Ausführungen zu bandbeschränkten Signalen und dem Nyquist-Theorem finden sich in [12, S. 55-60].

Signal mit Schrittweite $\Delta t < \frac{\pi}{\Omega}$ abtasten, bekämen wir mehr Werte als notwendig, um das Signal eindeutig zu bestimmen - man spricht von **Oversampling**. Dieses benötigt zwar mehr Daten, erlaubt allerdings Fehlerkorrekturen oder schnellere Berechnungen des Signals [12, S. 59].

Zusätzlich müssen wir die Wirkung des Phasenkodiergradienten diskretisieren. Da wir am Ende unserer Betrachtungen eine quadratische Matrix als Ergebnis erhalten wollen, legen wir uns auf gleich viele Sequenzdurchgänge wie Abtastzeitpunkte fest, nämlich N . Bei jedem der N Sequenzdurchgänge soll die Wirkung des Gradienten gleichmäßig verstärkt werden. Die maximale Wirkung ist gegeben durch $G^y \cdot t_{y_{\max}}$. Da wir die Wirkung nur über die Einschaltzeit t_y verändern können, zerlegen wir das Intervall $[0, t_{y_{\max}}]$ äquidistant in Zeitintervalle mit Länge $\Delta t_y := \frac{t_{y_{\max}}}{N}$. Sei $m \in \{0, \dots, N-1\}$. Im $m+1$ -ten Sequenzdurchgang soll die Wirkung das $\frac{m}{N}$ -tel dieser maximalen Wirkung sein, was bedeutet, dass die Einschaltzeit des Gradienten in diesem Durchgang $\frac{m}{N}$ -tel der maximalen Einschaltzeit $t_{y_{\max}}$ sein muss. Definieren wir daher $t_{y_m} := \frac{m}{N} t_{y_{\max}} = m \cdot \Delta t_y$, so ist die Wirkung des Gradienten im $m+1$ -ten Sequenzdurchgang $G^y \cdot t_{y_m} = G^y \cdot m \cdot \Delta t_y$.

Die Bandbreite Ω_y der vorkommenden Frequenzen in y -Richtung ist wiederum durch Feldgradient, größten y -Wert sowie das gyromagnetische Verhältnis bestimmt, also

$$\Omega_y = \gamma \cdot G^y \cdot y_{\max}.$$

Analog zu vorher ist die größte vorkommende (Kreis-)Frequenz im Signal $\nu' = \frac{\Omega_y}{2\pi}$. Mit der Nyquist-Bedingung legen wir nun fest:

$$\Delta t_y := \frac{\pi}{\Omega_y} \Leftrightarrow \frac{t_{y_{\max}}}{N} := \frac{\pi}{\gamma \cdot G^y \cdot y_{\max}}.$$

Durch das Abtasten bekommen wir eine Approximation des Signals. Mathematisch entspricht dieser Vorgang einer Riemann-Summen-Approximation von Integralen, die wir nun modellieren. Dabei gehen wir davon aus, dass die Funktion M_{T_0} einen kompakten Träger $\text{supp}(M_{T_0}) \subset [-x_{\max}, x_{\max}] \times [-y_{\max}, y_{\max}]$ hat. Wir zerlegen die Intervalle $[-x_{\max}, x_{\max}]$ und $[-y_{\max}, y_{\max}]$ jeweils äquidistant in N gleich große Teilintervalle der Länge $\Delta x := \frac{2x_{\max}}{N}$ bzw. $\Delta y := \frac{2y_{\max}}{N}$. Als Stützstellen wählen wir die linksseitigen Grenzen der Teilintervalle, also $x_{p_1} := p_1 \cdot \Delta x$ und $y_{p_2} := p_2 \cdot \Delta y$ mit $p_1, p_2 \in \{0, \dots, N-1\}$ [15, S. 269 f.].

Damit erhalten wir als Approximation des Signals

$$\begin{aligned}
S(k_x, k_y) &= \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} \int_{-y_{\max}}^{y_{\max}} M_{T_0}(x, y) \cdot e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} dx dy \\
&= \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} \int_{-y_{\max}}^{y_{\max}} M_{T_0}(x, y) \cdot e^{-i\gamma G^x t x} e^{-i\gamma G^y t y} dx dy \\
&\approx \sum_{p_1=0}^{N-1} \left(\sum_{p_2=0}^{N-1} M_{T_0}(x_{p_1}, y_{p_2}) \cdot e^{-i\gamma G^x t_n x_{p_1} \cdot \Delta x} \right) \cdot e^{-i\gamma G^y t_n^m y_{p_2} \cdot \Delta y} \\
&= \Delta x \Delta y \sum_{p_1=0}^{N-1} \sum_{p_2=0}^{N-1} M_{T_0} \left(p_1 \frac{2x_{\max}}{N}, p_2 \frac{2y_{\max}}{N} \right) \\
&\quad \cdot e^{-i\gamma G^x \frac{n\pi}{\gamma G^x x_{\max}} p_1 \frac{2x_{\max}}{N}} \cdot e^{-i\gamma G^y \frac{m\pi}{\gamma G^y y_{\max}} p_2 \frac{2y_{\max}}{N}} \\
&= \frac{4x_{\max} y_{\max}}{N^2} \sum_{p_1=0}^{N-1} \sum_{p_2=0}^{N-1} M_{T_0} \left(p_1 \frac{2x_{\max}}{N}, p_2 \frac{2y_{\max}}{N} \right) e^{-inp_1 \frac{2\pi}{N}} e^{-imp_2 \frac{2\pi}{N}}.
\end{aligned}$$

Den abgetasteten Wert \tilde{S} für das Signal im m -ten Sequenzdurchgang zum Zeitpunkt t_n können wir also schreiben als

$$\tilde{S}(m, n) = \frac{4x_{\max} y_{\max}}{N^2} \sum_{p_1=0}^{N-1} \sum_{p_2=0}^{N-1} M_{T_0} \left(p_1 \frac{2x_{\max}}{N}, p_2 \frac{2y_{\max}}{N} \right) e^{-inp_1 \frac{2\pi}{N}} e^{-imp_2 \frac{2\pi}{N}}. \quad (12)$$

Weil wir vorhin ebenso viele Sequenzdurchgänge wie Abtastzeitpunkte gewählt haben - nämlich N - können wir $\tilde{S}(m, n)$ aus Gleichung (12) als Eintrag in der m -ten Zeile und n -ten Spalte der quadratischen Matrix $\mathcal{S} := ((\tilde{S}(m, n))_{\substack{1 \leq m \leq N \\ 1 \leq n \leq N}})$ auffassen.

Diese Matrix hat dann genau die Form der DFT einer $\mathbb{C}^{N \times N}$ -Matrix, wie sie in Gleichung (6) (S. 25) definiert ist. Für den vorliegenden Fall bedeutet dies, dass für $\mathcal{M} := (M_{T_0}(x_{p_1}, y_{p_2}))_{\substack{0 \leq p_1 \leq N-1 \\ 0 \leq p_2 \leq N-1}}$ und für alle $(m, n) \in \{0, \dots, N-1\}^2$ gilt

$$\tilde{S}(m, n) = \Phi[M_{T_0}](m, n).$$

Die Matrix \mathcal{S} erhalten wir also durch Anwendung der DFT auf die Matrix der Transversalmagnetisierungen (die das diskrete Pendant zur kontinuierlichen Verteilung der Spindichte ist). Somit lässt sich durch Anwenden der inversen diskreten Fourier-Transformation auf die Matrix \mathcal{S} der abgetasteten Signale die (diskrete) Verteilung der Transversalmagnetisierung in Form einer Matrix berechnen, in mathematischer Notation:

$$\mathcal{M} = \Phi_{N \times N}^{-1}[\mathcal{S}].$$

Damit haben wir eine sehr gute Approximation des gesuchten Schnittbildes durch den Körper erhalten und das Problem der Bildgebung in der MR-Tomographie gelöst.

Übersichtlich lassen sich die einzelnen Schritte der Modellierung so zusammenfassen:

1. Die Problemstellung der Bildgebung in der MR-Tomographie besteht darin, die Funktion $M_{T_0} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ aus einem kontinuierlichen Signal S zu rekonstruieren. M_{T_0} gibt die Spindichte in Abhängigkeit des Ortes an und liefert somit die Spindichte-Verteilung (entspricht hier der Transversalmagnetisierung) in der angewählten Schicht.
2. Um das Problem zu lösen, muss verstanden werden, wie die Information der Transversalmagnetisierung im Signal kodiert ist und welcher Zusammenhang zwischen Signal und Transversalmagnetisierung besteht. Beachtet man die Wirkung des Phasen- und Frequenzkodiergradienten auf M_{T_0} ergibt sich der in Gleichung (11) dargestellte Zusammenhang als Resultat.
3. Damit ein Computer die mit dem Signal arbeiten kann, muss man das Signal diskretisieren. Dazu wird bei jedem Sequenzdurchgang der Phasenkodiergradient etwas verstärkt. Ein ADC misst bei jedem Sequenzdurchgang zu bestimmten Zeitpunkten das Signal und speichert es als komplexe Zahl. Das Signal eines Sequenzdurchganges entspricht dann einer Folge komplexer Zahlen. Mathematisch bedeutet das nichts anderes, als die Integrale aus Gleichung (11) durch Riemann-Summen zu approximieren.
4. Somit liegt das diskretisierte Signal als Matrix \mathcal{S} vor. Diese entspricht genau der Matrix, die man durch Anwenden der DFT auf $\mathcal{M} = (M_{T_0}(x_{p_1}, y_{p_2}))_{\substack{0 \leq p_1 \leq N-1 \\ 0 \leq p_2 \leq N-1}}$ erhält. Mathematisch können wir das Problem nun präzise formulieren: Rekonstruiere die Funktion M_{T_0} aus einem Sample ihrer zweidimensionalen Fourier-Transformierten. Am Computer heißt die Aufgabe, die Rohdatenmatrix aus dem Raum der räumlichen Frequenzen in den Ortsraum zu überführen.
5. Der Schlüssel zur Lösung der Aufgabe ist die inverse diskrete Fourier-Transformation, auf die wir in Kapitel 2 hingearbeitet haben. Durch ihre Anwendung auf die Matrix \mathcal{S} erhalten wir die Matrix der Transversalmagnetisierung und somit unser gesuchtes Bild.

Mit dieser Zusammenfassung sind wir am Schluss unserer Betrachtungen über die MR-Tomographie und die zugrundeliegende Mathematik angelangt. Wir haben einen Weg beschrieben, der eine nichtinvasive Möglichkeit zur Erstellung von Schnittbildern durch den menschlichen Körper ermöglicht. In der Praxis geht die Arbeit in der MRT jetzt weiter, indem unter anderem versucht wird, schnellere Methoden der Bildgebung zu entwickeln, wobei einige der in Kapitel 2 besprochenen Eigenschaften der Fourier-Transformation ausgenutzt werden.³³

Wir hingegen wollen uns im letzten Kapitel mit der didaktischen Aufbereitung der bisher besprochenen Materie für den Mathematikunterricht beschäftigen. Die für die Schule zugegebenermaßen ziemlich fortgeschrittenen Inhalte werden wir jedoch so aufzubereiten versuchen,

³³Vergleiche hierzu beispielsweise [18, S. 118 f.] oder [10].

dass sie ein gutes Beispiel für die theoretisch anspruchsvolle, aber zugleich praxisnahe Seite der Mathematik abgeben. Mit ihrer Hilfe soll die Omnipräsenz der Mathematik hinter den Kulissen des täglichen Lebens beleuchtet werden.

5 Die Fourier-Transformation im Schulunterricht

In diesem Kapitel werden wir zuerst mit einem Blick in die Lehrpläne die gesetzliche Berechtigung des Themas als Teil des Lehrstoffs im Unterricht klären. Die anschließend vorgestellten didaktischen Prinzipien liefern die Theorie, von der die im dritten Schritt skizzierte Unterrichtsplanung motiviert ist.

5.1 Verankerung des Themas in den Lehrplänen

Das Themengebiet „Fourier-Transformation“ - oder allgemeiner „Integraltransformationen“ - findet man erwartungsgemäß in den Lehrplänen verschiedener Lehrgänge an Höheren Technischen Lehranstalten, die aufgrund ihrer technischen Ausrichtung den Schwerpunkt des Mathematikunterrichts meist in der Analysis haben. So halten Lehrpläne verschiedener HTL-Lehrgänge ([4], [5], [6] und [7]) folgende Bildungs- und Lehraufgabe fest:

- „Die Schülerinnen und Schüler können im Bereich Integralrechnung Integraltransformationen auf Aufgaben des Fachgebietes anwenden.“

Explizit wird das Thema „Fourier-Transformation“ nur im Lehrplan für Elektrotechnik [6] genannt. Dort ist für das neunte Semester zu lesen:

- „Die Schülerinnen und Schüler können im Bereich Analysis die kontinuierliche Fourier-Transformation auf aperiodische Zeitfunktionen anwenden und die Fourier-Transformierte interpretieren.“

In Bezug auf das Thema dieser Arbeit ist auch zu erwähnen, dass die MRT für Schülerinnen und Schüler der Biomedizin- und Gesundheitstechnik im Lehrstoff enthalten ist (siehe [4]). Im AHS-Bereich sind Fourier-Transformationen zwar nicht Teil des Lehrstoffs, jedoch lässt der Lehrplan durch schulautonome Schwerpunktsetzungen in den Erweiterungsbereichen der Pflichtgegenstände ebenso wie durch die unabhängige Gestaltung von Wahlpflichtfächern genügend Spielraum, um dieses Thema im Unterricht bearbeiten zu können [3]. Mit der Wahl des Themas „Fourier-Transformationen“ in Verbindung mit deren Anwendung in der MRT wird den Leitvorstellungen des Lehrplans, dass sich der Unterricht sowohl an „wissenschaftlichen Erkenntnissen als auch an den Erfahrungen und Möglichkeiten, die die Schülerinnen und Schüler aus ihrer Lebenswelt mitbringen“, zu orientieren habe, Genüge getan. Ebenso kommen durch die damit verbundene Anknüpfung an Vorerkenntnisse und Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler sowie durch das Herstellen eines Bezugs zu ihrer Lebenswelt zwei im Lehrplan formulierte didaktische Grundsätze speziell zum Tragen [3]. Nicht zuletzt durch seine vielseitigen Aspekte - man bedenke unter anderem physikalische Grundlagen, mathematische Rechenverfahren oder Datenverarbeitung - eignet sich das Thema zur Bearbeitung im

fächerübergreifenden Unterricht. Dieser bietet den Schülerinnen und Schülern die im Lehrplan geforderte Chance, ihr Wissen zu vernetzen und in größeren Zusammenhängen zu denken [3].

5.2 Ausgewählte didaktische Prinzipien

Bei didaktischen Prinzipien in unserem Sinn handelt es sich um grundsätzliche Ideen zur Vermittlung von Mathematik. In der in diesem Kapitel beschriebenen Stundenplanung wurden speziell drei dieser Prinzipien berücksichtigt, die ich zuvor kurz erläutern möchte.

Das **Spiralprinzip** geht von der Annahme aus, dass mit einer gewissen intellektuellen Ehrlichkeit mathematische Inhalte jedem Kind/Jugendlichen in jedem Alter auf unterschiedlichem Niveau vermittelt können. Am Beispiel des Begriffs „Symmetrie“ kann man mit Zehnjährigen Faltfiguren aus Papier herstellen und später mit Sechszehnjährigen ausgehend von Funktionsgraphen Symmetrieeigenschaften von Funktionen in einer abstrakteren Form (wie Definition 2.7 auf Seite 8) herleiten. Man greift dadurch Begriffe immer wieder auf und bietet wiederholt gleiche Lehrinhalte in verschiedener Form und verschiedenen Kontexten an - die „Lernspirale“ weitet sich also zunehmend [13, S. 65 f.].

In Anlehnung an das Spiralprinzip legt auch das **Prinzip des kumulativen Lernens** Wert auf das wiederholte Aufgreifen mathematischer Begriffe und Methoden, hat den Fokus jedoch verstärkt auf der Vernetzung von Inhalten. Diese Vernetzung kann einerseits vertikal geschehen, womit die Weiterentwicklung und Vertiefung mathematischer Inhalte und Begriffe gemeint ist (ähnlich dem Spiralprinzip). Andererseits soll aber auch eine horizontale Vernetzung stattfinden, die das aktuelle Thema mit anderen Inhalten aus Mathematik, anderen Fächern oder dem Alltag in Verbindung bringt. Horizontale Vernetzung geschieht also zeitgleich, vertikale zeitversetzt. Durch die horizontale Vernetzung soll versucht werden, ein breiteres Netz von Beziehungen eines mathematischen Themas zu anderen Gegenständen zu spinnen, um es so präsenter im Gedächtnis haben zu können [13, S. 68].

Zuletzt ist die Unterrichtsplanung auch vom **operativen Prinzip** motiviert. Dieses stellt das Lernen als eigenes Handeln in Form des Dreischritts Handeln - Verinnerlichen - Operatives Üben in den Mittelpunkt. Im ersten Schritt soll ein Thema oder Begriff ganz unmittelbar durch anschauliche Objekte, Zeichnungen oder Modelle erschlossen werden. Danach soll diese anschaulich-konkrete Sichtweise durch Verinnerlichung zu abstrakt-symbolischen Denkinhalten führen. Im letzten Schritt soll das Verständnis dann durch operatives Üben vertieft werden. Hier geht es um exploratives Arbeiten, also beispielsweise um Aufgaben, in denen eine Funktion gegeben ist und man die Auswirkungen auf den Funktionsgraphen durch Manipulation der Funktion untersucht („Was-wäre-wenn“-Aufgaben). Ziel dieses didaktischen Prinzips ist die Durchdringung eines Gegenstandes aus unterschiedlichen Richtungen und damit einhergehend ein profunderes Verständnis desselben [13, S. 74-78].

5.3 Einbindung des Themas in den Unterricht

5.3.1 Vorbereitende Überlegungen

Laut Hammer und Reiss ist die „erste und schwierigste Frage, die es bei der Unterrichtsplanung zu klären gilt [...]: ‚Warum sollen die Schülerinnen und Schüler den zu behandelnden Gegenstand lernen?‘“ [13, S. 125].

Eine mögliche Antwort für unser Thema wird ersichtlich, wenn man sich die Erwartungen an den Mathematikunterricht, wie sie in [20, S. 312 f.] formuliert sind, genauer ansieht. Dort wird unter anderem gefordert, dass der Mathematikunterricht durch Einblicke in die Anwendungsgebiete der Mathematik Interesse am Fach wecken soll. Diese Forderung ist im vorliegenden Fall sicherlich erfüllt. Weiters soll der Unterricht die Mathematik als einen Weg zum Verständnis der Welt vorstellen und das kritische Denken schulen. Wie wir gleich sehen werden, wird durch die Aufbereitung des Themas kritisches und exaktes Denken gefördert und es werden - durch die Bearbeitung der Thematik allgemein - exemplarisch mithilfe der Mathematik die tieferliegenden Strukturen unter der Oberfläche des Alltäglichen offengelegt. Nicht zuletzt fordert der Autor, dass „nützliche“ Fertigkeiten und Freude an der Mathematik zu vermitteln seien. Letzteres kann durch das Thema versucht werden zu erreichen. Es hängt aber auch maßgeblich von der Einstellung und Bereitschaft der Schülerinnen und Schüler ab, ob sie Freude an der Mathematik haben. Die Nützlichkeit des Themas ist für das Verständnis der MRT auf jeden Fall gegeben. Darüberhinaus können auch Verbindungen zur Anwendung in der Optik oder Akustik aufgezeigt werden, die durch ihren Alltagsbezug ebenfalls nützlich sein können. Ob allerdings junge Leute, die in ihrem späteren Leben die Fourier-Transformation nicht als Werkzeug in ihrem Beruf - sei es in der Mathematik, Naturwissenschaft oder Technik - brauchen, diese als für ihr Leben nützlich erachten, bleibt an dieser Stelle offen.

Somit wäre die Frage nach der Berechtigung des Themas im Unterricht geklärt. Die Fourier-Transformation in Verbindung mit der MRT kann meines Erachtens auf drei Arten in den Schulunterricht einfließen: Entweder im fächerübergreifenden Unterricht Mathematik-Physik (-Informatik), im Wahlfach Mathematik bzw. Physik an einer AHS Oberstufe oder, als dritte Möglichkeit, in Form einer Projektwoche. Mit der ersten Möglichkeit wollen wir uns im Folgenden eingehender beschäftigen und das Thema in diesem Sinne aufarbeiten.

5.3.2 Unterrichtsplanung

Die nachfolgend formulierte Unterrichtsplanung ist für eine fünfte Klasse einer HTL gedacht und wird somit in einem Klassenverband mit 25-30 Schülerinnen und Schülern bearbeitet. Das Thema MRT wird fächerübergreifend im Mathematik- und Physikunterricht (alternativ noch zusätzlich in Informatik) behandelt. Dabei werden zuerst im Physikunterricht die physikalischen Grundlagen und die Funktionsweise der MRT herausgearbeitet, so dass die Schülerinnen

und Schüler verstehen und erklären können, wie das Messsignal im MR-Tomographen entsteht. An diesem Punkt setzt nun die Stundenplanung an.

Für das Thema sind fünf Unterrichtsstunden eingeplant. Die zentrale Frage, die den Fahrplan für diese Stunden vorgibt, lautet: „Wie errechnet man aus dem im MR-Tomographen gemessenen Signal ein Schnittbild durch den menschlichen Körper?“

Weitere handlungsleitende Fragen sind: Wie lässt sich die Fourier-Transformation aus Fourier-Reihen herleiten? Wie berechnet man die Fourier-Transformierte geeigneter Funktionen? Wie lässt sich die Fourier-Transformierte im Kontext zeitabhängiger Funktionen (Signale) interpretieren? Welche besonderen mathematischen Eigenschaften weist die Fourier-Transformation auf und wie kann man diese nützen? Wie lässt die Fourier-Transformierte durch eine diskrete Fourier-Transformation approximieren? Welche Rolle spielt Letztere in der MRT-Bildgebung?

Benötigt werden für die Arbeit PCs oder Laptops einem Computeralgebrasystem (CAS). Außerdem werden für die Herleitung der Fourier-Transformation und Rechenbeispiele die Schulbücher herangezogen. Unter den drei hierfür durchgesehenen Büchern für die fünfte Klasse in der HTL ([26, 23, 19]) führt [19] die Fourier-Transformation direkt über die Definition ein, während in den anderen Büchern unser Zugang über Fourier-Reihen gewählt wurde. Aufgrund des Zugangs zum Thema, der anschaulichen Abbildungen, durchgerechneten Beispiele und angehängten Aufgaben orientieren wir uns im Folgenden am Kapitel „Fourier-Transformation“ aus dem Schulbuch von Timischl/Kaiser [26, S. 234-242]. Vorwissen über Fourier-Reihen kann zu diesem Zeitpunkt in der HTL vorausgesetzt werden und es erscheint sinnvoll, das Thema „Fourier-Transformation und MRT“ zeitnah nach den Fourier-Reihen zu behandeln.

Die Ziele der Stunden sind:

- auf der Ebene der Sachkompetenz:

- Die Schülerinnen und Schüler (SuS) können die Herleitung der Fourier-Transformation als Fortführung der Fourier-Reihen von Signalen „unendlicher Periodendauer“ motivieren und erklären.
- Sie können die Fourier-Transformierte einiger wichtiger Funktionen berechnen, einfache Situationen der Signalverarbeitung modellieren und die Fourier-Transformierte im Kontext interpretieren.
- Sie können die wichtigsten Eigenschaften der Fourier-Transformation nennen und die Verbindung zur diskreten Fourier-Transformation erläutern.
- Sie können die Anwendung der Fourier-Transformation in der MRT motivieren und erklären.

- auf der Ebene der Selbstkompetenz:

- Die SuS sollen erkennen, dass sie mit ihrem bisherigen Wissen und Können neue Probleme modellieren und lösen können. Daraus sollen sie Vertrauen in sich und ihre Fähigkeiten aufbauen, was letztlich zu mehr Selbstbewusstsein führen soll.

- auf der Ebene der Sozialkompetenz:

- Die SuS sollen lernen in Gruppen gemeinsam an Problemen zu arbeiten.
- Sie sollen lernen, die verschiedenen Stärken und Schwächen der Gruppenmitglieder zu akzeptieren und die Stärken bestmöglich einzusetzen.
- Sie sollen eigene Erklärungs- und Problemlöseversuche in der Gruppe artikulieren können.

Die fünf Stunden setzen sich aus einer Einzelstunde am Anfang und anschließend zwei Doppelstunden zusammen. Eine konkrete Stundenplanung wird nur für eine Doppelstunde vorgelegt, die Abläufe der anderen Stunden hingegen werden skizziert.

Die erste Stunde wird dazu genutzt, die Fourier-Transformation ausgehend von Fourier-Reihen herzuleiten. Dazu wird ein Video als „kick-off“ verwendet, das die Überlagerung periodischer, gleichfrequenter Schwingungen bzw. die Zerlegung gemischter Schwingungen visualisiert.³⁴ Das mathematische Instrument zur Beschreibung dieser „Umwandlung“ ist den Schülerinnen und Schülern schon bekannt: die Entwicklung einer Funktion in eine Fourier-Reihe. Gemeinsam im Plenum werden die Fourier-Reihen wiederholt. Durch das Video ist auch schon der richtige Kontext gegeben, denn es geht auch später in der MRT darum, aus einem Signal, das sich aus überlagerten Grundsignalen zusammensetzt, diese wieder herauszufiltern. Im Plenum werden die wichtigsten Aspekte der Fourier-Reihen wiederholt. Anschließend sollen die SuS sich mithilfe eines Arbeitsblattes, eines CAS und des Schulbuchs [26, S. 232-236] dann den Übergang von Fourier-Reihen über komplexe Fourier-Koeffizienten und der „unendlichen Periodendauer“ hin zur Fourier-Transformation in Partnerarbeit erarbeiten. Dabei liegt das Augenmerk verstärkt auf der intuitiven Erfassung des Übergangs von Fourier-Reihen zur Fourier-Transformation. Mithilfe des CAS sollen Folgen von Rechteckimpulsen mit ihrem Frequenzspektrum geplottet werden. Mit zunehmender Periodendauer der Rechteckimpulse kann man so den Übergang von einem Linienspektrum zu einem kontinuierlichem Spektrum unendlich vieler Frequenzen beobachten. Im Plenum werden anschließend die Ergebnisse gemeinsam besprochen und die Fourier-Transformation mathematisch korrekt aus Fourier-Reihen hergeleitet. Somit sind die Begriffe „Fourier-Transformation“ und „Fourier-Transformierte“ sowie der durch das Fourier-Integral beschriebene Zusammenhang zwischen Zeit- und Frequenzdomäne

³⁴Youtube-Kanal „3Blue1Brown“, [<https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BYt=197s>], eingesehen am 27.1.2019. Ziel des Betreibers des Kanals ist es, Mathematik unterhaltsam mittels Animationen aufzubereiten und schwierige Sachverhalte anschaulich darzustellen.

eines Signals am Ende der Stunde bekannt.

Aufbauend auf diesem Ergebnis beginnt nun mit der Doppelstunde der Hauptteil des Themenblocks.

Die ersten 15 Minuten werden zuerst dazu verwendet, die Ergebnisse der letzten Stunde zu wiederholen, die Gruppen für den Stationenbetrieb einzuteilen (durch Abzählen) und die einzelnen Stationen zu erklären. Außerdem werden die Tische so zusammengestellt, dass man gemeinsam in der Gruppe darauf arbeiten kann. Die Gruppengröße pro Station sollte fünf bis sechs Personen nicht überschreiten. Es wird erklärt, dass bestimmte wichtige Funktionen, deren Fourier-Transformierte und wichtige Eigenschaften der Fourier-Transformation heute im Mittelpunkt stehen. Sie zu verstehen ist die Voraussetzung, um die Bildgebung in der MRT zu verstehen. Pro Station werden 20 Minuten Bearbeitungszeit vereinbart. Der Hauptteil der Doppelstunde nimmt dann etwa 60 Minuten ein. Jede Station gibt es dabei zweimal, damit man bei 25-30 SuS Gruppen zu je vier bis sechs Leuten zusammenbekommt. Die SuS bearbeiten dann gemeinsam in der Gruppe ihre Station, wobei die Reihenfolge der Stationen keine Rolle spielt. Die Lehrperson hilft bedarfsmäßig weiter, sobald Verständnisfragen oder Unstimmigkeiten auftauchen. Die drei Arbeitsblätter für die Stationen sind im Folgenden abgebildet.

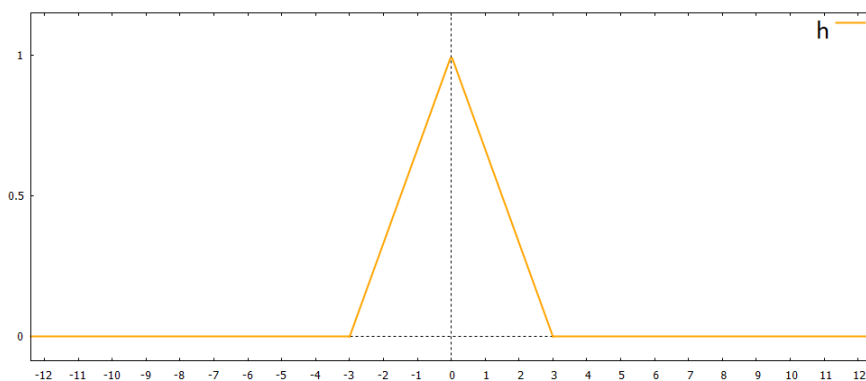
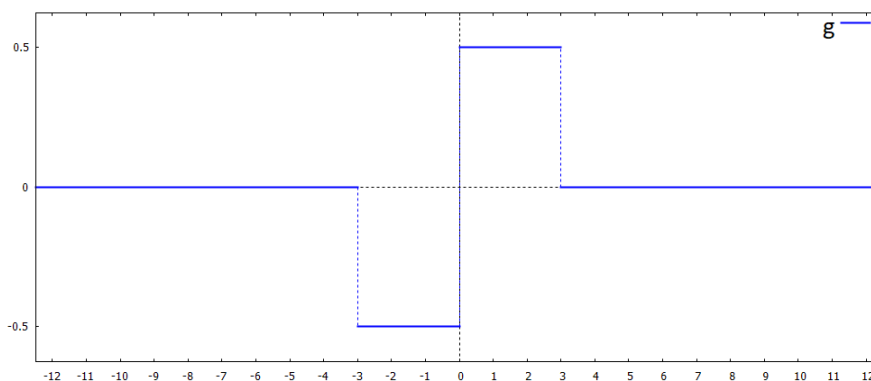
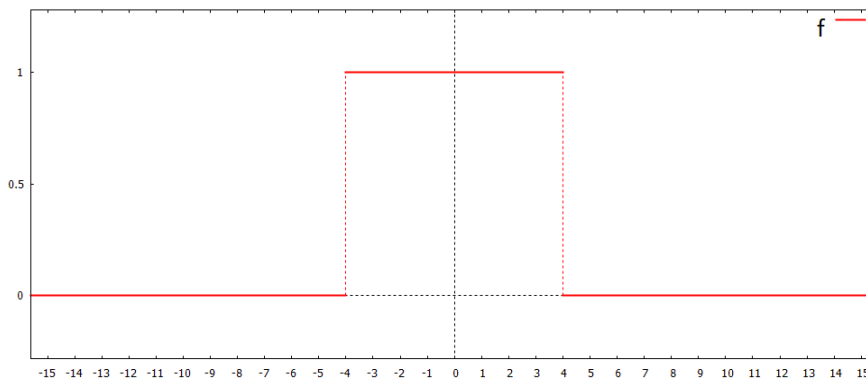
Station 1 (Einseitiger Exponentialimpuls, Ähnlichkeitssatz/Streckung)

Ein Exponentialimpuls sei gegeben durch $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} e^{-t}, & \text{falls } t \geq 0 \\ 0, & \text{falls } t < 0. \end{cases}$

- 1) Bestimme die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}[f]$ von f .
- 2) Plotte die Funktionsgraphen von $\mathcal{F}[f]$ und f mithilfe eines CAS.
- 3) Beobachte, wie sich die Funktionsgraphen ändern, wenn man t durch at ersetzt, wobei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. (Setze hierfür konkrete Zahlen für a ein!)
- 4) Stelle eine Vermutung über den mathematischen Zusammenhang zwischen $\mathcal{F}[f(t)](\omega)$ und $\mathcal{F}[f(at)](\omega)$ auf.
- 5) Überprüfe deine Vermutung, indem du $\mathcal{F}[f(at)]$ berechnest und die Substitution $v := at$ benutzt.

Station 2 (Symmetrische Eigenschaften)

1) In der untenstehenden Abbildungen siehst du drei Funktionsgraphen. Entscheide, ob diese gerade oder ungerade Funktionen darstellen. (Nimm dazu das Schulbuch S. 238/239 zu Hilfe.)



2) Sieh dir den im Schulbuch beschriebenen Zusammenhang zwischen (un-)geraden Funktionen und ihrer Fourier-Transformierten an und notiere dir die wichtigen Zusammenhänge ins Heft.

3) Stelle die Funktionsgleichungen zu den abgebildeten Funktionsgraphen auf. Berechne von zweien die Fourier-Transformierte mithilfe der Tipps auf Seite 239!

Station 3 (Inverse Fourier-Transformation)

1) Die Fourier-Transformation bildet eine zeitabhängige Funktion g auf ihre Fourier-Transformierte $\mathcal{F}[g]$ ab. Dabei ist wesentlich, dass $\mathcal{F}[g]$ die gleichen Informationen enthält wie g . Erkläre, durch welchen Satz dies zum Ausdruck kommt!

2) Die **inverse Fourier-Transformation** ermöglicht es, die ursprüngliche Funktion aus der Fourier-Transformierten zurückzugewinnen. Nutze das Ergebnis aus 1) und definiere die inverse Fourier-Transformation (für geeignete Funktionen! Tipp: Schulbuch S. 237!).

3) Überprüfe deine Definition, indem du mithilfe eines CAS den durch

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } |t| \leq 1 \\ 0, & \text{falls } |t| > 1. \end{cases}$$

gegebenen Rechteckimpuls Fourier-transformierst und anschließend die inverse Fourier-Transformation darauf anwendest. (Probe: Du musst f zurückerhalten.)

Ziel des Hauptteils der Stunde ist ein tiefergehendes Verständnis der Fourier-Transformation. Vor allem Station 3 thematisiert die Möglichkeit der Rückgewinnung der ursprünglichen Funktion aus ihrer Fourier-Transformierten, wodurch dieses Instrument erst so wertvoll für die Mathematik wird. Den Stationenbetrieb habe ich dabei als Methode gewählt, um die SuS in Gruppen selbstständig an Problemen arbeiten zu lassen.

Die letzten 15 Minuten werden wiederum dazu genutzt, die wichtigsten Erkenntnisse des Stationenbetriebs festzuhalten. Dabei werden die Ergebnisse im Dialog zwischen Lehrperson und SuS in einem Tafelbild festgehalten und von den SuS im Heft notiert. Damit wird der Lernertrag gefestigt und gesichert. Außerdem stellt die Lehrperson immer wieder Bezüge von den erarbeiteten Eigenschaften und Funktionen zur MRT her, um so die Rolle der einzelnen Lernschritte für das Gesamtziel „Bildgebung in der MRT“ klar zu machen. Mit einem Ausblick auf die noch ausstehenden Lernschritte - diskrete Fourier-Transformation sowie ihre Anwendung in der MRT - wird die Stunde beendet.

In der zweiten Doppelstunde wird nun zuerst die diskrete Fourier-Transformation (DFT) als Approximation der kontinuierlichen Variante hergeleitet. Es wird die Notwendigkeit des Abtastens des Signals zur digitalen Verarbeitung aufgezeigt und so der technische Kontext zur mathematischen Herleitung geliefert. Danach wird mit Visualisierungen am PC der Einsatz der DFT in der MRT erarbeitet. Die verschiedenen Eigenschaften, die in der ersten Doppelstunde erarbeitet wurden und sich auf die DFT analog übertragen lassen, kommen nun bei der Bildgebung zur Sprache. Zum Abschluss soll der Weg noch mal nachgezeichnet werden, den die SuS beginnend vom Aufbau des MR-Tomographen im Physikunterricht bis zum Entstehen des Schnittbildes am Ende des Themenschwerpunktes gegangen sind. Dabei kommt vernetzend noch einmal alles Wissen zur Sprache, das die SuS während der Bearbeitung des Themas

erworben haben. Die mögliche Gestaltung eines Heftchens „Einführung in die MRT“ könnte als bleibendes Produkt dieses Unterrichtsthemas gestaltet werden.

5.3.3 Fazit der Unterrichtsplanung

Auch wenn beim Thema „Fourier-Transformation und ihre Anwendung in der MRT“ für den Schulunterricht eher schwierige Inhalte bearbeitet werden, kann eine Umsetzung im fächerübergreifenden Unterricht nach Art der skizzierten Stundenplanung gelingen. Dabei wird sowohl didaktischen Prinzipien als auch den Anforderungen des Lehrplans Genüge getan.

Didaktisch wird die Stundenplanung hauptsächlich geleitet vom operativen Prinzip. Durch die anschauliche Darstellung von Schwingungen und ihren Überlagerungen wird zuerst ein konkreter Zugang zum Thema gewählt. Anschließend wird der Vorgang mathematisch modelliert und so der Weg vom konkret-anschaulichen Objekt hin zum abstrakten Gegenstand - der Fourier-Transformation - beschritten. Durch die Doppelstunde, in der die Fourier-Transformation und ihre Eigenschaften eingehender untersucht werden und man sich durch verschiedene Aufgabenstellungen unterschiedlich in das Thema einarbeitet, soll ein profunderes Verständnis der Fourier-Transformation erreicht werden.

Das Spiralprinzip kommt beispielsweise bei der Behandlung der Symmetrie-Eigenschaften zum Tragen. Die Symmetrie der Funktionsgraphen, die durch die Spiegelung des Graphen an der y -Achse (gerade Funktion) bzw. am Koordinatenursprung (ungerade Funktion) gegeben ist, deckt sich mit der bisherigen Vorstellung der SuS von Symmetrie, die sie beispielsweise durch Faltung von Papierfiguren oder dem Einzeichnen von Symmetrieachsen bei einfachen geometrischen Figuren (Rechteck, Dreieck) kennen. Davon ausgehend werden nun abstrakte Definitionen der Symmetrie-Eigenschaften von Funktionen erarbeitet. Somit wird das Verständnis des Begriffs „Symmetrie“ auf semantischer Ebene erweitert.

Durch die Bearbeitung des Themas im fächerübergreifenden Unterricht findet eine horizontale Vernetzung statt, was dem Prinzip des kumulativen Lernens folgt.

Mit der skizzierten Unterrichtsplanung werden die Forderungen des Lehrplans, dass der Unterricht den didaktischen Grundsätzen nach *Lernen in anwendungsorientierten Kontexten, im sozialen Umfeld und mit instruktionaler sowie technologischer Unterstützung* zu erfolgen habe [3], erfüllt. Außerdem werden die drei Dimensionen mathematischer Kompetenzen (Komplexitäts-, Handlungs- und Inhaltsdimension) berücksichtigt, wobei spezielles Augenmerk auf darstellend-modellierendes sowie formal-operatives Arbeiten gelegt wurde. Nicht zuletzt wird durch das Thema vor allem der pragmatisch-anwendungsorientierte Aspekt der Mathematik in den Vordergrund gestellt.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass das Thema ein gutes Beispiel dafür ist, wie man den Mathematik-Unterricht anhand komplexerer Themen vernetzend und anwendungsorientiert gestalten kann. Die SuS erfahren dabei, dass die Modellierung ein zentraler Bestandteil

mathematischer Arbeit ist und erst nachfolgend die eigentliche Rechenarbeit - die in der Schule immer noch zentral im Unterricht ist - erfolgen kann. Dadurch wird die Mathematik auch lebensnaher dargestellt und nicht isoliert vom Alltag präsentiert. Mit der Stundenplanung wurde ein Weg aufgezeigt, wie der anwendungsorientierte Aspekt der Mathematik und ihr Alltagsbezug im Unterricht thematisiert werden kann. Wenn dadurch eine Steigerung des Interesses der SuS an der Mathematik erreicht werden kann, hat die Stundenplanung ihren Sinn erfüllt.

6 Schlussbemerkung

Am Schluss dieser Ausführungen wollen wir noch einmal zurückblicken und das Erarbeitete resümieren.

Den Ausgangspunkt der Arbeit bildete das Problem der Bildgebung in der MRT. Unser Kernanliegen dabei war es, darzulegen, wie aus den gesammelten Daten der Messungen im MR-Tomographen ein dreidimensionales Schnittbild durch den menschlichen Körper erzeugt werden kann. Die korrekte mathematische Modellierung dieses Vorgangs war somit vorrangiges Ziel der Arbeit.

Dazu mussten wir zuerst die dem Verfahren zugrundeliegenden mathematischen Instrumente studieren. Der Dreh- und Angelpunkt des Verfahrens ist die inverse diskrete Fourier-Transformation (iDFT), die als Resultat am Ende des ersten Kapitels steht. In diesem wurden ausgehend von der kontinuierlichen Fourier-Transformation für L^1 -Funktionen die wichtigsten Grundlagen dazu behandelt. Neben nützlichen Symmetrieeigenschaften, den wichtigsten Rechenregeln inklusive des Faltungssatzes sowie einigen Beispielen zu Fourier-Transformationen wurde mit dem Umkehrsatz die für diese Arbeit zentrale Tatsache gezeigt, dass für L^1 - und L^2 -Funktionen die ursprüngliche Funktion aus ihrer Fourier-Transformierten stets rekonstruiert werden kann. Des Weiteren wurde mit dem Satz von Plancherel gezeigt, dass man die Fourier-Transformation für L^2 -Funktionen überhaupt sinnvoll definieren kann und dass sie auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ mathematisch besonders interessant, weil ein isometrischer Automorphismus ist. Diese Eigenschaft konnte auch für das diskrete Pendant nachgewiesen werden. Durch die Definition der höherdimensionalen (inversen) diskreten Fourier-Transformation gelangten wir schließlich zu dem Werkzeug, das wir für das Bildgebungsproblem benötigten.

Anschließend galt es, sich mit dem MR-Tomographen eingehender auseinanderzusetzen und seine Funktionsweise auf elementarer Ebene zu beleuchten. Die heute in der Medizin weit verbreitete Magnetresonanztomographie gilt als eine der wichtigsten nicht-invasiven Methoden für die Erzeugung von Schnittbildern durch den Körper. Ihren Namen verdankt sie der geschickten Manipulation der Präzessionsfrequenz der Kernspins mittels geeigneter Magnetfelder sowie der Anregung von Kernspins mit bestimmter Larmorfrequenz durch einen HF-Impuls (Resonanz). Diese Vorgänge wurden in Kapitel 2 näher beschrieben. Als weiterer wichtiger Punkt wurde erläutert, wie die Ortsinformation im von den Kernspins ausgesandten Signal kodiert ist. Dies führte direkt zur Frage der Speicherung des Signal und schließlich zur Erstellung einer Datenmatrix, die genau jene Form hat, die Anwendung einer inversen diskreten Fourier-Transformation möglich macht.

Der dritte Teil baute dann auf den Ergebnissen der ersten beiden Kapitel auf und modellierte das Bildgebungsproblem in der MRT mathematisch. Es handelt sich dabei um ein Rekonstruktionsproblem, bei dem eine ortsbegrenzte, bandbeschränkte, zweidimensionale Funktion aus einem Sample abgetasteter Werte ihrer Fourier-Transformierten rekonstruiert werden soll. Die zu rekonstruierende Funktion ist die Transversalmagnetisierung der Kernspins im Patientenkörper, die mit der Kernspindichte-Verteilung und damit mit der Wasserstoff-Verteilung im

Körper korrespondiert. Mit der Kenntnis von letzterer gelangt man schließlich zu den medizinisch relevanten Informationen.

Der zweite Schwerpunkt der Arbeit lag auf der altersgerechten Aufbereitung des Themas für den Schulunterricht. Nach einem Blick in die Lehrpläne und damit zur gesetzlichen und inhaltlichen Berechtigung des Themas im Unterricht, stellten wir einige didaktische Prinzipien sowie eine Stundenplanung für die Bearbeitung des Themas in einer fächerübergreifenden Unterrichtseinheit vor. Dabei gaben wir einen kurzen Einblick in die Darstellung von Fourier-Transformationen in ausgewählten Schulbüchern und präsentierten selbst erstellte Arbeitsblätter für den Einsatz im Unterricht.

Abschließend können wir resümieren, dass das Thema Fourier-Transformation und ihre medizinische Anwendung für den Schulunterricht schon recht fortgeschrittene Inhalte bietet. Seine Behandlung ist weder für die Lehrperson, noch für die Schülerinnen und Schüler der einfachste gangbare Weg. Wenn jedoch beschränkt, kann er viele neue Einsichten in verschiedene alltägliche Anwendungen der Mathematik und ihre eigentümlichen Methoden eröffnen und sich dadurch als überaus fruchtbar erweisen. Die Beschäftigung mit dem Thema ist eine Möglichkeit, die Oberfläche des Alltags zu durchdringen und die Phänomene und Strukturen dahinter zu erkunden. Die Schwierigkeit des Themas allein sowie die möglicherweise damit verbundene Sorge, etwas nicht zu verstehen oder nicht erklären zu können, sollte weder für Lehrpersonen noch für die Lernenden ein Grund sein, das Thema zu scheuen. Denn bezugnehmend hierauf könnte Samuel Beckett den Zeilen Bert Brechts zu Beginn dieser Arbeit nun an ihrem Ende hinzufügen:

Ever tried. Ever failed.
No matter.
Try again. Fail again.
Fail better.

Abbildungsverzeichnis

1	Funktionsgraph eines Rechteckimpulses und seiner Fourier-Transformierten 1	8
2	Funktionsgraph eines Rechteckimpulses und seiner Fourier-Transformierten 2	8
3	Funktionsgraphen zweier Rechteckimpulse und ihrer Faltung	16
4	Koordinatensystem	26
5	Kernspin	27
6	Kernspins im MR-Experiment	28
7	Magnetisierungsvektor	29
8	Schematischer Aufbau MR-Tomograph	30
9	Gradientenstärke	33
10	Ortskodierung mittels Gradientenfeldern	34
11	Gradientenfolge für Bildgebung mittels 2D-Fouriertransformation	35

Literatur

- [1] Achilles, Dietmar: Die Fourier-Transformation in der Signalverarbeitung. Kontinuierliche und diskrete Verfahren in der Praxis, Berlin- Heidelberg u.a. 1978.
- [2] Amann, Herbert/ Escher, Joachim: Analysis III, Bd. 3, Basel ²2008.
- [3] BMBWF: Lehrplan der allgemeinbildenden höheren Schulen, tagesaktuelle Version, [<https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568>], eingesehen am 4.3.2019.
- [4] BMBWF: Lehrplan der höheren Lehranstalt für Biomedizin- und Gesundheitstechnik, tagesaktuelle Version, [https://www.htl.at/fileadmin//content/Lehrplan/HTL_VO_262_2015/BGB1_II_Nr_262_2015_Anlage_1.3.pdf], eingesehen am 4.3.2019.
- [5] BMBWF: Lehrplan der höheren Lehranstalt für Elektronik und Technische Informatik, tagesaktuelle Version, [https://www.htl.at/fileadmin//content/Lehrplan/HTL_VO_262_2015/BGB1_II_Nr_262_2015_Anlage_1.5.pdf], eingesehen am 4.3.2019.
- [6] BMBWF: Lehrplan der höheren Lehranstalt für Elektrotechnik, tagesaktuelle Version, [https://www.htl.at/fileadmin//content/Lehrplan/HTL_VO_262_2015/BGB1_II_Nr_262_2015_Anlage_1.6.pdf], eingesehen am 4.3.2019.
- [7] BMBWF: Lehrplan der höheren Lehranstalt für Mechatronik, tagesaktuelle Version, [https://www.htl.at/fileadmin//content/Lehrplan/HTL_VO_262_2015/BGB1_II_Nr_262_2015_Anlage_1.17.pdf], eingesehen am 4.3.2019.
- [8] Debnath, Lokenath: A short biography of Joseph Fourier and historical development of Fourier series and Fourier transforms, in: International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 43 (2012), Nr. 5, S. 589-612, [<https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/0020739X.2011.633712>], eingesehen am 27.2.2019.
- [9] Dössel, Olaf: Bildgebende Verfahren in der Medizin. Von der Technik zur medizinischen Anwendung, Berlin-Heidelberg ²2016.
- [10] Gallagher, Thomas/ Nemeth, Alexander/ Hacein-Bey, Lotfi: An Introduction to the Fourier Transform: Relationship to MRI, in: American Journal for Roentgenology 190 (2008), Nr. 5, S. 1396-1405, [https://www.ajronline.org/doi/full/10.2214/AJR.07.2874#_i3], eingesehen am 20.2.2019.
- [11] Goebbels, Steffen/ Ritter, Stefan: Mathematik verstehen und anwenden. Von den Grundlagen bis zu Fourier-Reihen und Laplace-Transformation, Heidelberg 2011.

- [12] Haltmeier, Markus: Bild- und Signalverarbeitung (Skriptum zur Vorlesung im Wintersemester 2010/11), Wien 2010.
- [13] Hammer, Christoph/ Reiss, Kristina: Grundlagen der Mathematikdidaktik. Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe, Basel 2013.
- [14] Hell, Tobias: Analysis 3 für Lehramtsstudierende. Gewöhnliche Differentialgleichungen und Integraltransformationen (Skriptum zur Vorlesung im Wintersemester 2016/17), Innsbruck 2016.
- [15] Klingen, Bruno: Fouriertransformationen für Ingenieur- und Naturwissenschaften, Berlin-Heidelberg 2001.
- [16] Köchli, Viktor/Marinček, Borut/ Weishaupt, Dominik: Wie funktioniert MRI?. Eine Einführung in Physik und Funktionsweise der Magnetresonanztomographie, Berlin-Heidelberg 2014⁷.
- [17] Kowalsky, Hans-Joachim/ Michler, Gerhard O.: Lineare Algebra, Berlin 2003¹².
- [18] McRobbie, Donald/ Moore, Elizabeth/ Graves, Martin: MRI from picture to proton, Cambridge-New York 2017³.
- [19] Pauer, Franz/ Scheirer-Weindorfer, Martina et al.: Mathematik 4/5 HTL, Wien 2014.
- [20] Pauer, Franz, Qualitätsmerkmale der fachlichen Ausbildung der MathematiklehrerInnen, in: Lehrerinnen- und Lehrerbildung braucht Qualität. Und wie!?, hrsg. von Hans Brunner/ Erich Mayr et al., Innsbruck 2002
- [21] Schwarzmüller-Erber, Gabriele/ Silberstein, Eva: Angewandte Magnetresonanztomographie. Grundlagen und Anwendungen, Wien 2010.
- [22] Semmler, Wolfhard/Brix, Gunnar et al.: Grundlagen der MRT und MRS, in: Magnetresonanztomographie, hrsg. von Wolfhard Semmler/ Maximilian Reiser, Berlin-Heidelberg u.a. 2002³, S. 3-132.
- [23] Sidlo, Eva-Maria/ Puhm, Ursula et al.: Mathematik mit technischen Anwendungen 4, Wien 2015.
- [24] Storch, Uwe/ Wiebe, Hartmut: Lehrbuch der Mathematik für Mathematiker, Informatiker und Physiker, Bd. 2, Mannheim-Wien u.a. 1990.
- [25] Storch, Uwe/ Wiebe, Hartmut: Lehrbuch der Mathematik für Mathematiker, Informatiker und Physiker, Bd. 3, Mannheim-Leipzig u.a. 1993.

- [26] Timischl, Wolfgang/ Kaiser, Gerald: Ingenieur-Mathematik 4, Wien 2018.