Cet article a été publié en version papier dans les Actes du 11e colloque Inter-IREM épistémologie et histoire des mathématiques (pages 205 à 226)

ISBN : 2-86612-138-4

Dépôt légal : Février 1998

Éditeur : IREM de Reims, Moulin de la Housse, BP 1039, 51687 Reims Cedex 2

Cette version mise en ligne reprend l'intégralité du texte (hors annexe), les figures et la mise en page ont été retouchées pour des raisons de lisibilité.

LE JEU DU TREIZE
Un essai d'analyse d'un jeu de hasard

Patrick PERRIN

Les historiens des sciences s'accordent pour dater la naissance du calcul des probabilités à un échange épistolaire entre Blaise Pascal et Pierre de Fermat en 1654, dans lequel ils donnèrent leurs solutions à deux problèmes issus de jeux de hasard : un problème de dés[1] et un problème de partis[2] . Peu de temps après en 1657 parut un petit traité d'une dizaine de pages : *De rationniis in ludo aleae* de Christian Huygens, dans lequel l'auteur, après avoir introduit la notion d'espérance, résolvait six problèmes de partis et cinq problèmes de dés et terminait en proposant cinq problèmes plus difficiles dont il n'indiquait que la réponse. Il fallut ensuite attendre plus de cinquante ans avant que ne paraisse un autre ouvrage sur le sujet. Il s'agit de l' *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* de Pierre Rémond de Montmort (1er édition 1708). L'ouvrage est considérable tant par son volume (plus de 400 pages pour la seconde édition) que par son objet : c'est la première étude systématique de la théorie des jeux de hasard.

Qui était Rémond de Montmort ?

Sa vie nous est assez bien connue grâce à son éloge funèbre fait par Fontenelle à l'Académie des Sciences en 1719. [2]. Pierre Rémond est né à Paris en 1678 dans une famille aisée. Son père, écuyer, sieur de Bréviande, le destinant à une charge de magistrature, lui fit étudier le droit. Mais Pierre se lassa du droit et de l'autorité paternelle et se sauva en Angleterre, puis en Allemagne chez un parent où il découvrit la philosophie avec l'ouvrage de Nicolas de Malebranche : *la recherche de la vérité*. Il retourna en France en 1699, deux mois avant la mort de son père qui lui laissait en héritage un bien assez considérable. Cette aisance matérielle ne le détourna cependant pas de ses préoccupations intellectuelles. Il approfondit la philosophie et la physique cartésienne avec Malebranche et s'instruisit des nouvelles mathématiques en compagnie de François Nicole.

Chrétien d'une grande piété, il accepte la charge de chanoine de Notre Dame de Paris dont voulait se débarrasser son frère. Il achète en 1704 la terre de Montmort en Champagne et tombe amoureux de la petite nièce de la duchesse d'Angoulème qui demeurait à Mareuil dans le voisinage. Il abandonne alors son canonicat pour pouvoir l'épouser en 1706. Montmort restera par la suite sa résidence favorite. Il y passera la plus grande partie de l'année et y écrira toute son oeuvre scientifique. Il meurt en 1719 emporté par une épidémie de variole.

La publication de l'*Essay* assoit la réputation de Montmort auprès des scientifiques de l'époque. L'ouvrage connait un grand succès, il intéresse particulièrement Nicolas Bernoulli, le neveu de Jacques et de Jean Bernoulli ; il s'en suit une abondante correspondance avec Montmort que celui-ci publiera à la fin de la deuxième édition de l'*Essay* en 1713. Elle incitera également Nicolas Bernoulli à publier la même année l'*Ars conjectandi* de son oncle Jacques mort en 1705. Un autre lecteur attentif de la première édition de l'*Essay* fut Abraham de Moivre qui publia son premier écrit sur les probabilités *De mensura sortis* en 1711. Lecture trop attentive au gout de Montmort qui dira de lui plus tard : *Dans son petit traité De mensura sortis il a bien pillé mon livre sans me nommer.* [4].

[1] C'est le fameux problème posé par le chevalier de Méré à Pascal : comparer les événements « avoir au moins un six en lançant un dé » et « avoir au moins un double six en lançant deux dés ».

[2] Un problème de partis consiste à partager équitablement les mises entre les participants d'un jeu interrompu avant la fin. Ce type de problème circulait dans la communauté savante depuis près de deux cents ans.

Ses liens d'amitié avec les Bernoulli n'empêchèrent pas Montmort d'entretenir des relations cordiales avec les mathématiciens britanniques[3] : Isaac Newton à qui il rendit visite lors d'un voyage à Londres en 1700, Edmund Halley en compagnie duquel il observa l'éclipse totale de soleil de 1715 et surtout Brook Taylor avec lequel il eut une correspondance suivie et qui fit imprimer dans les Transactions Philosophiques de 1717 le second écrit scientifique de Montmort : *De seriebus infinitis tractatus*.

Montmort fut élu membre de la Société Royale de Londres en 1715 et membre associé de l'Académie Royale des Sciences en 1716.

A propos de l'Essay d'Analyse sur les jeux de hazard

Dans la préface de l'*Essay* Rémond de Montmort s'explique sur les raisons qui l'ont incité à s'intéresser à la théorie des jeux de hasard. Plusieurs de ses amis lui avaient demandé depuis longtemps si l'on pouvait déterminer par l'algèbre quel était l'avantage du banquier au jeu du Pharaon[4]. La tâche lui avait paru insurmontable jusqu'à ce qu'il entende parler des travaux de Jacques Bernoulli dans ce domaine.

> *Il avoit entrepris de donner des Regles pour juger de la probabilité des évenemens futurs, & dont la connoissance nous est cachée, soit dans les jeux, soit dans les autres choses de la vie où le hazard seul a part. Le titre de cet Ouvrage devoit être De arte conjectandi, l'art de deviner. Une mort prématurée ne lui a pas permis d'y mettre la dernière main.*
>
> *Monsieur de Fontenelle & Monsieur Saurin ont donné chacun une courte Analyse de ce livre ; [...] On ne nous a point appris quels sont les Jeux que cet Auteur déterminait les partis, ni quels sujets de politique & de morale il avoit entrepris d'éclaircir ; mais quelque surprenant que soit ce projet, il y a lieu de croire que ce sçavant Auteur l'auroit parfaitement exécuté.* [3, préf., p.iii-iv].

Montmort résolut le problème du pharaon et obtint d'autres succès qui l'encouragèrent à poursuivre ses recherches.

Le résultat est un volumineux traité en quatre parties. La première renferme une théorie des combinaisons. La seconde la solution de divers problèmes concernant des jeux de cartes : le pharaon, la bassette, le lansquenet, le treize, le piquet, etc... La troisième s'intéresse à divers jeux de dés et de jetons : le quinquenove, les trois dez, le trictrac, les noyaux, etc...La quatrième contient la solution des cinq problèmes de Huygens et quelques autres et se termine par quatre énoncés de problèmes.

Dans l'*Essay* Montmort s'adresse davantage aux savants qu'aux joueurs, même si ceux-ci peuvent tirer profit des résultats obtenus.

> *Quoique dans ce traité j'aye beaucoup plus en vûe le plaisir des géomètres que l'utilité des Joueurs,& que selon nous ceux qui perdent leur temps au jeu méritent bien d'y perdre leur argent, je n'ai point négligé en découvrant l'avantage ou le désavantage des Joueurs, de faire remarquer de quelle manière il faudroit reformer les Jeux pour les rendre parfaitement égaux.* [3, préf., p.xij-xiij].

L'*Essay* n'est pas à proprement parler un traité de probabilité en ce sens que Montmort n'y développe pas de nouvelles notions probabilistes et reprend simplement celle d'espérance mise en place par Huygens. Il est bien davantage un très grand traité d'analyse combinatoire.

[3] La querelle de priorité sur la découverte du calcul infinitésimal faisait rage entre les partisans de Newton (les Anglais) et ceux de Leibnitz (les Bernoulli).

[4] Il s'agit d'un jeu de cartes très prisé à l'époque de Montmort. Le banquier est celui qui tient les cartes.

On a voulu donner dans cet Ouvrage un essai de ce nouvel art, en l'appliquant à une matière qui a été jusqu'ici dans une grande obscurité, & qui ne paroit susceptible d'aucune précision. On a crû qu'elle étoit plus propre que toute autre à donner de l'estime pour l'Analyse, cet art merveilleux qui est la clef de toutes les Sciences exactes, & qui n'est apparemment negligé que parcequ'on ne connoît point assez l'étendue de ses usages ; car au lieu qu'on n'a employé jusqu'ici l'Algebre et l'Analyse qu'à découvrir des raports constans & immuables entre des nombres & des figures, on s'en sert ici pour découvrir des raports de probabilité entre des choses incertaines & qui n'ont rien de fixe, ce qui semble fort opposé à l'esprit de la Geométrie, & en quelque façon hors de ses regles. [3, préf., p.x].

L'un des mérites principaux de Montmort est d'avoir montré que derrière tous ces jeux de hasard se cachent des questions mathématiques dignes du plus haut intérêt. L'extrait que j'ai choisi de présenter dans cet article en est un parfait exemple.

Le problème des dérangements

Un des problèmes les plus remarquables d'analyse combinatoire résolus par Montmort est celui des dérangements ou permutations strictes. Il apparait à l'occasion de l'étude du jeu du Treize. En voici les règles telles que Montmort les expose :

Extrait n°1 [3, p.130]

EXPLICATION DU JEU

98. LES Joueurs tirent d'abord à qui aura la main. Supposons que ce soit Pierre, & que le nombre des Joueurs soit tel qu'on voudra. Pierre ayant un jeu entier composé de cinquante-deux cartes mêlées à discrétion, les tire l'une après l'autre ; nommant & prononçant un lorsqu'il tire la première carte, deux lorsqu'il tire la seconde, trois lorsqu'il tire la troisième, & ainsi de suite jusqu'à la treizième qui est un Roy. Alors si dans toute cette suite de cartes il n'en a tiré aucune selon le rang qu'il les a nommées, il paye ce que chacun des Joueurs a mis au jeu, & cede la main à celui qui le suit à la droite.

Mais s'il lui arrive dans la suite des treize cartes, de tirer la carte qu'il nomme, par exemple, de tirer un as dans le temps qu'il nomme un, ou un deux dans le temps qu'il nomme deux, ou un trois dans le temps qu'il nomme trois, &c, il prend tout ce qui est au jeu, & recommence comme auparavant, nommant un, ensuite deux, &c.

Le problème des dérangements est directement relié à une version simplifiée du jeu du Treize lorsque les cartes sont supposées être toutes de hauteur différentes :

Extrait n°2 [3, p.131-132]

PROPOSITION V.

Pierre a un certain nombre de cartes différentes qui ne sont point répétées, & qui sont mèlées à discrétion : il parie contre Paul que s'il les tire de suite, & qu'il les nomme selon l'ordre des cartes, *en commençant ou par la plus haute, ou par la plus basse, il lui arrivera au moins une fois de tirer celle qu'il nommera. Par exemple, Pierre ayant en main quatre cartes, sçavoir un as, un deux, un trois & un quatre mêlées à discrétion, parie que les tirant de suite, & nommant un lorsqu'il tirera la première, deux lorsqu'il tirera la seconde, trois lorsqu'il tirera la troisième, il lui arrivera ou de tirer un as lorsqu'il nommera un, ou de tirer un deux quand il nommera deux, ou de tirer un trois quand il nommera trois, ou de tirer un quatre quand il nommera quatre. Soit conçu la même chose de tout autre nombre de cartes. On demande quel est le sort ou l'espérance de Pierre pour quelque nombre de cartes que ce puisse être depuis deux jusqu'à treize.*

99. **S**OIENT les cartes avec lesquelles Pierre fait le parti, représentées par les lettres *a, b, c, d,* &c. Si l'on nomme *m* le nombre des cartes qu'il tient, & *n* le nombre qui exprime tous les arrangemens possibles de ces cartes, la fraction *m/n* exprimera combien de différentes fois chaque lettre occupera chacune des places. Or il faut remarquer que ces lettres ne se rencontrent pas toujours à leur place utilement pour le Banquier ; par exemple, *a, b, c* ne donne qu'un coup pour gagner à celui qui à la main, quoique chacune de ces trois lettres y soit à sa place ; Et de même *b, a, c, d,* ne donne qu'un coup à Pierre pour gagner, quoique chacune des lettres *c* & *d* y soit à sa place. La difficulté de ce Problême consiste donc à démêler combien de fois chaque lettre est à sa place utilement pour Pierre, & combien de fois elle y est inutilement.

Remarquons d'abord que chez Montmort les mots sort et espérance désignent l'espérance de gain du joueur. En bon disciple de Descartes, Montmort commence l'analyse du problème en démélant ce qui se résoud facilement, de ce qui est la difficulté principale. Le nombre d'arrangements[5] possibles étant connu, il va s'intéresser par la suite à calculer le nombre d'arrangements favorables à Pierre. L'étude des cas où Pierre tient deux, trois, quatre ou cinq cartes permettra au lecteur de se familiariser avec le problème.

Extrait n°3 [3, p.132-133]

PREMIER CAS

Pierre tient un as & un deux, & parie contre Paul, qu'ayant mêlé ces deux cartes, & nommant un lorsqu'il tirera la première, & deux lorsqu'il nommera la seconde, il lui arrivera ou de tirer un as pour la première carte, ou de tirer un deux pour la seconde carte. l'argent du jeu est exprimé par A.

100. **D**EUX cartes ne peuvent s'arranger que de deux façons différentes : l'une fait gagner Pierre, l'autre le fait perdre : donc son sort sera : $\frac{A+0}{2} = \frac{1}{2}A$.

SECOND CAS

Pierre tient trois cartes.

[5] On emploie actuellement le mot permutation pour désigner un arrangement de n éléments choisis parmi n. J'ai préféré conserver le terme utilisé par Montmort.

101.**S**OIENT ces trois cartes représentées par les lettres *a, b, c* : on observera que des six arrangemens differens que ces trois lettres peuvent recevoir, il y en a deux où *a* est à la première place ; qu'il y en a un où *b* est à la seconde place, *a* n'étant point à la première ; & un où *c* est à la troisième place, *a* n'étant à la première, & *b* n'étant point à la seconde ; d'où il suit qu'on aura $S = \frac{2}{3}A$; & par conséquent que le sort de Pierre est à celui de Paul, comme deux est un.

TROISIEME CAS

Pierre tient quatre cartes

102. **S**OIENT les quatre cartes représentées par les lettres *a, b, c, d* : on observera que des vingt-quatre arrangemens differens que ces quatre lettres peuvent recevoir, il y en a six où *a* occupe la première place ; qu'il y en a quatre où *b* est à la seconde, *a* n'étant pas à la première ; trois où *c* est à la troisième, *a* n'étant pas à la première, & *b* n'étant pas à la seconde, enfin deux où *d* est à la quatrième, *a* n'étant pas à la première, *b* n'étant pas à la seconde, & *c* n'étant pas à la troisième ; d'où il suit qu'on aura le sort de Pierre = $S = \frac{6+4+3+2}{24}A = \frac{15}{24}A = \frac{5}{8}A$; & par conséquent que le sort de Pierre est au sort de Paul comme cinq à trois.

QUATRIEME CAS

Pierre tient cinq cartes

103. **S**OIENT les cinq cartes représentées par les lettres *a, b, c, d, f* : on observera que des 120 arrangemens differens que cinq lettres peuvent recevoir, il y en a vingt-quatre où *a* occupe la première place, dix-huit où *b* occupe la seconde, *a* n'occupant pas la première ; quatorze où *c* est à la troisième, *a* n'étant pas à la première place, ni *b* à la seconde ; onze où *d* est à la quatrième place, *a* n'étant pas à la première , ni *b* à la seconde , ni *c* à la troisième ; enfin neuf arrangemens où *f* est à la cinquième place, *a* n'étant pas à la première , ni *b* à la seconde , ni *c* à la troisième , ni *d* à la quatrième ; d'où il suit qu'on aura le sort de Pierre = $S = \frac{24+18+14+11+9}{120}A = \frac{76}{120}A = \frac{19}{30}A$; & par conséquent que le sort de Pierre est au sort de Paul comme dix-neuf est à onze.

Une étude plus approfondie de ces différents exemples laisse entrevoir l'existence d'une relation de récurrence entre les valeurs numériques données par Montmort. En effet soit n le nombre de cartes, notons F_{np} le nombre d'arrangements où la pième carte est à sa place sans que les (p-1)èmes cartes précédentes le soient. On a pour n = 4:

$F_{41} = 6$; les arrangements correspondants sont : (a b c d) (a b d c) (a c b d) (a c d b) (a d b c) (a d c b)

$F_{42} = 4$; les arrangements correspondants sont : (c b a d) (c b d a) (d b a c) (d b c a)

$F_{43} = 3$; les arrangements correspondants sont : (b a c d) (d a c b) (b d c a)

$F_{44} = 2$; les arrangements correspondants sont : (b c a d) (c a b d).

Pour n = 5, on remarque que :

$F_{51} = 24$; c'est le nombre d'arrangements des quatre cartes b, c, d, f.

$F_{52} = 18 = 24 - 6$; c'est le nombre d'arrangements des quatre cartes a, c, d, f auquel on a soustrait le nombre d'arrangements où a est à la 1ère place.

$F_{53} = 14 = 24 - F_{41} - F_{42}$; c'est le nombre d'arrangements des quatre cartes a, b, d, f auquel on a soustrait le nombre d'arrangements où a est à la 1ère place et le nombre d'arrangements où b est à la 2ème place sans que a soit à la première.

$F_{54} = 11 = 24 - F_{41} - F_{42} - F_{43}$; c'est le nombre d'arrangements des quatre cartes a, b, c, f auquel on a soustrait le nombre d'arrangements où a est à la 1ère place, le nombre d'arrangements où b est à la 2ème place sans que a soit à la première et le nombre d'arrangements où c est à la 3ème place sans que a soit à la première ni b à la seconde.

$F_{55} = 9 = 24 - F_{41} - F_{42} - F_{43} - F_{44}$; c'est le nombre d'arrangements des quatre cartes a, b, c, d auquel on a soustrait le nombre d'arrangements où l'une de ces cartes est à sa place.

Plus généralement il est clair (!) que les nombres F_{np} ($1 \leq p \leq n$) vérifient les relations suivantes : $F_{n1} = (n - 1)!$ et $F_{np} = F_{n,p-1} - F_{n-1,p-1}$.

Ces formules ont été trouvées par Montmort, ainsi que nous le verrons par la suite, mais c'est une autre relation de récurrence autrement moins évidente que l'auteur expose dans le paragraphe suivant et qui lui sert à calculer l'avantage de Pierre pour un nombre de cartes inférieur ou égal à 13. Remarquez dans la formule le surlignage de p-1 qui remplace nos parenthèses.

Extrait n°4 [3, p.134]

GENERALEMENT

104 **SI** l'on nomme S le sort que l'on cherche, le nombre des cartes que Pierre tient étant exprimé par *p* ; *g* le sort de Pierre, le nombre des cartes étant *p-1* ; *d* son sort, le nombre des cartes qu'il tient étant *p-2*, on aura $S = \frac{g \times \overline{p-1} + d}{p}$. Cette formule donnera tous les cas, ainsi qu'on le voit résolus dans la Table ci-jointe.

TABLE

Si p=1, on aura $S = A$

Si p=2, on aura $S = \frac{1}{2}A$

Si p=3, on aura $S = \frac{2}{3}A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{6}A$

Si p=4, on aura $S = \frac{5}{8}A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{8}A$

Si p=5, on aura $S = \frac{19}{30}A = \frac{1}{2}A + \frac{2}{15}A$

Si p=6, on aura $S = \frac{91}{144}A = \frac{1}{2}A + \frac{19}{144}A$

Si p=7, on aura $S = \frac{531}{840}A = \frac{1}{2}A + \frac{111}{840}A$

Si p=8, on aura $S = \frac{3641}{5760}A = \frac{1}{2}A + \frac{761}{5760}A$

Si p=9, on aura $S = \frac{28673}{45360}A = \frac{1}{2}A + \frac{5993}{45360}A$

Si p=10, on aura $S = \frac{28319}{44800}A = \frac{1}{2}A + \frac{5919}{44800}A$

Si p=11, on aura $S = \frac{2523223}{3991680}A = \frac{1}{2}A + \frac{527383}{3991680}A$

Si p=12, on aura $S = \frac{302786759}{479001600}A = \frac{1}{2}A + \frac{63281959}{479001600}A$

Si p=13, on aura $S = \frac{109339663}{172972800}A = \frac{1}{2}A + \frac{22853263}{172972800}A$

Cette formule donneroit de même l'avantage de Pierre, si l'on supposoit qu'il y eût un plus grand nombre de cartes de différente espece.

Où l'on rencontre les logarithmes

On ne trouve pas, dans la suite du texte, de démonstration de la formule concernant le sort de Pierre. A ceux qui s'en étonneraient, voici la réponse donnée par Montmort dans l'avertissement de la seconde édition de l'*Essay* :

J'avois obmis dans l'édition précédente les Démonstrations des plus difficiles Problêmes, dans le dessein de picquer davantage la curiosité du Lecteur, qui souvent croit avoir sçu ce qu'il apprend sans peine. Je les ai mises toutes dans celle-ci à la prière de quelques amis. Celles des Formules sur le Treize se trouveront dans les Notes latines de M.N.Bernoulli. Je n'aurois pu en donner de meilleures.
[3, av., p.xxv].

Je donnerai à la fin de cet article une traduction de la note de Nicolas Bernoulli en question, dans le dessein de satisfaire le Lecteur dont la curiosité aurait été piquée ! Pour l'heure intéressons nous à la suite formée par les différentes valeurs du rapport S/A. Si l'on note u_p ce rapport, le nombre de cartes étant p, on obtient les valeurs approchées suivantes:

$u_1 = 1; u_2 = 0.5; u_3 \approx 0.666; u_4 = 0.625; u_5 \approx 0.6333; u_6 \approx 0.63194;$

$u_7 \approx 0.632142; u_8 \approx 0.632118; u_9 \approx 0.63212081; u_{10} \approx 0.632120535;$

$u_{11} \approx 0.6321205607; u_{12} \approx 0.6321205586; u_{13} \approx 0.6321205588.$

Point n'est besoin d'être un grand analyste pour conjecturer que l'on se trouve face à une suite convergente. Et c'est tout naturellement à la limite de cette suite que va s'intéresser Montmort dans la remarque qui suit, cette limite se trouvant avoir des propriétés remarquables. Pour ce faire, il utilise une autre expression du sort de Pierre sous forme d'une série numérique. La justification de cette nouvelle expression se trouve également dans la note de N. Bernoulli.

La table, art. I, auquel l'auteur fait référence est celle des nombres de combinaisons de n objets pris p à p ou C_n^p que Blaise Pascal a exposé dans son *Triangle Aritmétique* et qui donne également les nombres figurés (triangulaires, pyramidaux, etc...).

Extrait n°5 [3, p.134-135]

REMARQUE I.

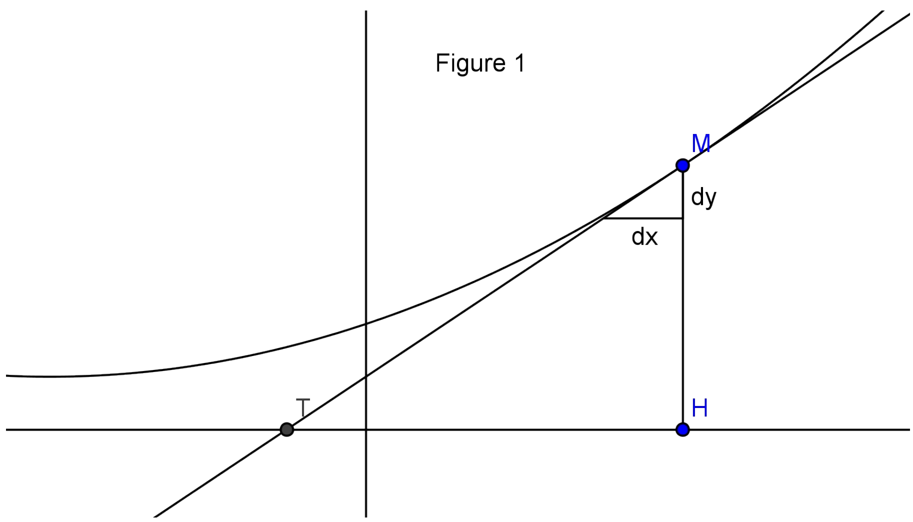
105. **L**A solution précedente fournit un usage singulier des nombres figurés, car je trouve en examinant la formule, que le sort de Pierre est exprimé par une suite infinie de termes qui ont alternativement + & -, & tels que le numérateur est la suite des nombres qui composent dans la Table, *art.I*, la colonne perpendiculaire qui répond à p, en commençant par p, & le dénominateur la suite des produits p x p-1 x p-2 x p-3 x p-4 x p-5, &c. en sorte que ces produits qui se trouvent dans le numérateur & dans le dénominateur se détruisans, il reste pour expression du sort de Pierre cette suite très simple $\frac{1}{1} - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} - \frac{1}{1.2.3.4.5.6} + \&c.$.
Si l'on forme un Logarithmique dont la soutangente soit l'unité, & que l'on prenne deux ordonnées, dont l'une soit l'unité, & l'autre soit éloignée de cette premiere d'une quantité égale à la soutangente, l'excès de l'ordonnée constante sur la derniere sera égal à cette suite.

Nous reviendrons un peu plus loin sur le dernier paragraphe où Montmort donne la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$ sous une forme qui ne nous est pas familière. Pour effectuer cette sommation, Montmort propose deux méthodes. Il attribue la première à Leibniz, celle-ci consiste à rechercher la solution de l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = sy$ sous forme d'une série entière. Voici quelques explications pour permettre de suivre la démonstration.

Dans la figure 1, s =TH est la sous-tangente. La formule générale des sous-tangentes : $s = \pm y\frac{dx}{dy}$ équivaut à : $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{MH}{TH}$.

Un(e) logarithmique est une fonction (une courbe) pour laquelle la sous-tangente s est constante.

Figure 1



Extrait n°6 [3, p.135-136]

Pour le démontrer soit la formule generale des soutangentes $s = \pm \frac{ydx}{dy}$, la soutangente étant nommée s, l'abcisse x, l'ordonnée y. On supposera y égale à une suite d'exposans des x affectés de coefficiens indéterminés, par exemple, $= 1 + ax + bxx + cx^3 + dx^4 + \&c.$ & prenant de part & d'autre la difference, divisant ensuite par dx, & multipliant par s, on trouvera $\pm \frac{sdy}{dx} = y = 1 + ax + bxx + cx^3 + dx^4 + \&c. = \pm as \pm 2bsx \pm 3csxx \pm 4dsx^3 + \&c.$

Si l'on compare les termes omologues de ces deux suites, & que l'on tire de cette comparaison la valeur des coefficiens a, b, c, d, on auroit $y = 1 \pm \frac{x}{s} + \frac{1xx}{1.2ss} \pm \frac{1x^3}{1.2.3s^3} + \frac{1x^4}{1.2.3.4s^4} \pm \&c.$ ce qui fait voir que si l'on détermine, y, à être l'ordonnée d'un logarithmique dont la soutangente constante soit = 1, on aura l'ordonnée qui correspond à x pris du côté que les ordonnées diminuent, $= 1 - \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \&.$ on peut voir cette démonstration dans les actes de Leipsic de l'année 1693, p.179, où le celebre Mr de Leibnitz résout ce Problême : *Un logarithme étant donné, trouver le nombre qui lui correspond.* Or il est clair que si dans cette suite on suppose x = 1, c'est à dire égale à la soutangente ou à l'ordonnée constante, & qu'on retranche cette suite de l'unité, elle deviendra la suite du present Problême.

Le calcul de Leibnitz peut se résumer ainsi :

Si $y = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + etc$ alors $\frac{dy}{dx} = a + 2bx + 3cx^2 + 4dx^3 + etc$

et $\pm s\frac{dy}{dx} = \pm as \pm 2bsx \pm 3csx^2 \pm 4dsx^3 + etc$.

En tenant compte de la formule générale des sous-tangentes il vient par identification :

$a = \pm \frac{1}{s}; b = \pm \frac{a}{2s} = \pm \frac{1}{2s^2}; c = \pm \frac{b}{3s} = \pm \frac{1}{6s^3}; d = \pm \frac{c}{4s} = \pm \frac{1}{24s^4}$ d'où

$y = 1 \pm \frac{1}{s}x + \frac{1}{2s^2}x^2 \pm \frac{1}{6s^3}x^3 + \frac{1}{24s^4}x^4 + etc$.

Pour s = 1 et x pris du côté que les ordonnées diminuent,[6] on obtient :

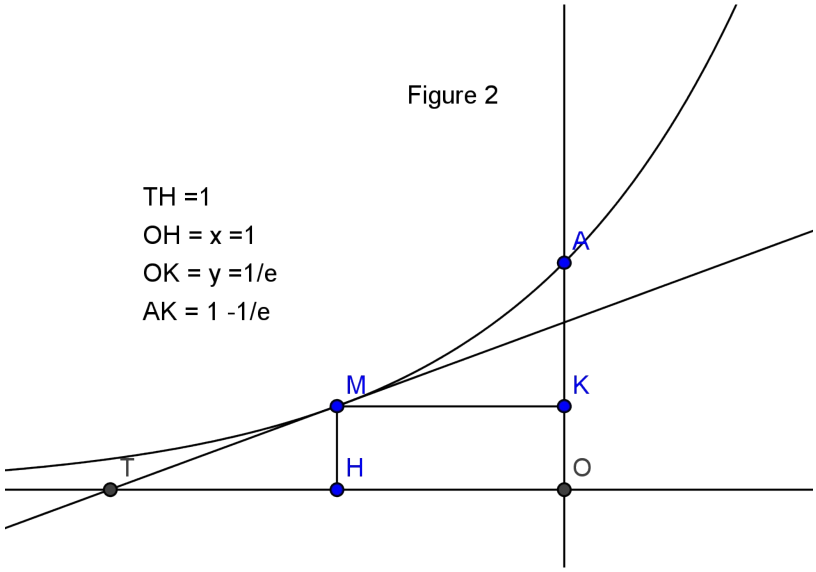
$$y = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + etc$$.

Pour x = 1, la somme de la série précédente est égale à 1/e et par conséquent la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$ est 1 - 1/e.

Or 1 - 1/e est l'excès de l'ordonnée du point A sur l'ordonnée du point M (cf figure 2), ce qui permet de retrouver la formulation du résultat telle que donnée par Montmort[7].

[6] x et s étant des longueurs sont toujours de signe positif ; dans le cas de la figure 2 la formule générale des sous-tangentes contient alors un signe moins.

[7] La notation e pour la base du logarithme népérien a été seulement introduite par Euler en 1736



Cependant l'auteur propose une autre démonstration, originale celle-là, dans laquelle on verra qu'il maitrise parfaitement les outils de la nouvelle analyse.

Extrait n°7 [3, p.136]

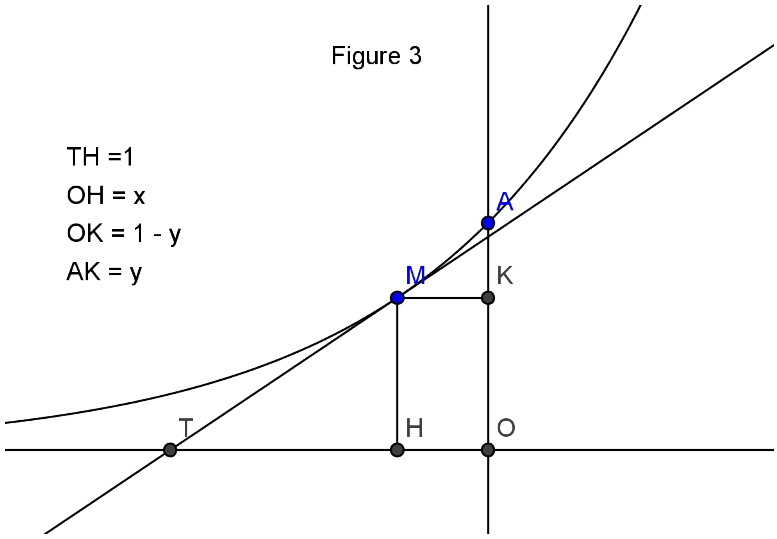
On peut encore le démontrer plus simplement en cette sorte. Soit conçue une logarithmique dont la soutangente soit l'unité ; on prendra sur cette courbe une ordonnée constante = 1 ; & une autre ordonnée plus petite = 1 - y, l'on nommera x l'abcisse comprise entre ces deux ordonnées, on aura

$$dx = \frac{dy}{1-y}\text{, \& } x = y + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 + \&c.$$

& par la méthode pour le retour des suites, $y = x - \frac{x.x}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \&c.$

ce qui, en supposant x=1, devient $= 1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} - \&c.$ *C.Q.F.D.*

Le calcul de Montmort peut se résumer ainsi : avec les notations de la figure 3, la formule générale des sous-tangentes donne : $s = (1-y)\frac{dx}{dy}$; d'où $dx = \frac{dy}{1-y}$ et par intégration $x = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + etc$.



Concernant le retour des suites, D'Alembert en donne la définition suivante : *terme en usage dans l'analyse sublime ; voici en quoi le retour des suites consiste. On a l'expression d'une quantité comme x, par une suite composée de constantes & d'une autre quantité y ; il s'agit de tirer de cette première suite, une autre suite qui exprime la valeur de y en x & en constantes.* [1].

Les calculs peuvent être présentés comme suit : si on suppose que
$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + etc$, alors

$$y^2 = a^2x^2 + 2abx^3 + (2ac + b^2)x^4 + (2ad + 2bc)x^5 + etc$$
$$y^3 = a^3x^3 + 3a^2bx^4 + (3ab^2 + 3a^2c)x^5 + etc$$
$$y^4 = a^4x^4 + 4a^3bx^5 + etc$$
$$y^5 = a^5x^5 + etc$$

Or on sait que $x = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + etc$ donc

$$x = ax + (b + \frac{a^2}{2})x^2 + (c + ab + \frac{a^3}{3})x^3 + (d + ac + \frac{b^2}{2} + a^2b + \frac{a^4}{4})x^4$$
$$+ (e + ad + bc + ab^2 + a^2c + a^3b + \frac{a^5}{5})x^5$$

Par identification, on obtient : $a = 1; b = \frac{-a^2}{2} = \frac{1}{2}; c = -ab - \frac{a^3}{3} = \frac{1}{6}; d = \frac{-1}{24}; e = \frac{1}{120}$ cqfd.

Retour au problème

Après trois exemples d'autres séries convergeant vers la même limite
1-1/e, obtenues par commutativité et associativité, l'auteur revient sur l'analyse du problème des dérangements. Il commence par donner une table permettant de calculer simplement de proche en proche le nombre d'arrangements favorables à Pierre. Cette table est celle des nombres que nous avons noté F_{np} précédemment. On remarquera en particulier à la fin de l'extrait l'énoncé de la formule de récurrence : $F_{n,p} = F_{n,p-1} - F_{n-1,p-1}$.

Extrait n°8 [3, p.136-138]

R E M A R Q U E II

106. **L**ES deux formules des art.104 & 105 apprennent combien celui qui tient les cartes a de hazards pour gagner par quelque carte que ce soit ; mais elle ne font point connoître combien il a de hazards par chaque carte qu'il tire depuis la première jusqu'à la dernière. On voit bien que ce nombre des hazards diminue toujours, & qu'il y a, par exemple, plus de hazards pour gagner par l'as que par le deux, & par le trois que par le quatre, &c. Mais on ne tire pas aisément de ce qui précéde la loi de cette diminution, on la trouvera dans cette Table.

1	= 1							
0	1	= 1						
1	1	2	= 4					
2	3	4	6	= 15				
9	11	14	18	24	= 76			
44	53	64	78	96	120	= 455		
261	309	362	426	504	600	720	= 3186	
1854	2119	2428	1790	3216	3720	4320	5040	= 25487

Cette table fait voir qu'avec cinq cartes, par exemple, un as, un deux, un trois, un quatre & un cinq. Pierre a vingt-quatre façons de gagner par l'as ; dix-huit de gagner par le deux n'ayant point gagné par l'as ; quatorze de gagner par le trois, n'ayant gagné ni par l'as ni par le deux ; onze de gagner par le quatre, n'ayant gagné ni par l'as, ni par le deux, ni par le trois ; & enfin qu'il n'a que neuf façons de gagner par le cinq, n'ayant gagné ni par l'as, ni par le deux, ni par le trois, ni par le quatre.

Chaque rang de cette Table se forme sur le précédent d'une manière très facile. Pour la faire entendre, supposons encore qu'il y ait cinq cartes. On voit d'abord qu'il y a vingt-quatre façons de gagner par l'as. Cela est évident, puisque l'as étant déterminé à être à la première place, les quatre autres cartes peuvent être rangées de toutes les façons possibles ; & en général il est clair que le nombre de cartes étant p, le nombre des hazards pour gagner par l'as est exprimé par autant de produits des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. qu'il y a d'unités dans p-1. Cela posé, 24 - 6 = 18 me donne les hazards pour gagner par le deux, 18- 4 = 14 me donne les hazards pour gagner par le trois, 14 - 3 = 11 me donne les hazards pour gagner par le quatre, & enfin 11 - 2 = 9 me donne les hazards pour gagner par le cinq.

Il en est de même pour tout autre nombre de cartes & généralement chaque nombre de la Table est égal à la différence de celui qui est à la droite & que l'on a déjà trouvé, à celui qui est immédiatement au dessus.

Montmort termine son étude en énonçant une nouvelle formule de récurrence vérifiée par la suite des nombres d'arrangements favorables à Pierre et en donnant le nombre des dérangements.

Extrait n°9 [3, p.138]

On peut encore trouver un ordre reglé dans les nombres 1, 1, 4, 15, 76, 455, &c. qui expriment toutes les manières de gagner avec un nombre de cartes quelconque : cet ordre est visible dans la Table suivante .

$$
\begin{array}{r}
0 \times 1 + 1 = 1 \\
1 \times 2 - 1 = 1 \\
1 \times 3 + 1 = 4 \\
4 \times 4 - 1 = 15 \\
15 \times 5 + 1 = 76 \\
76 \times 6 - 1 = 455 \\
455 \times 7 + 1 = 3186 \\
3186 \times 8 - 1 = 25487
\end{array}
$$

Ces nombres 1, 1, 4, 15, 76, &c. expriment combien il y a de hazards pour que quelqu'une d'entre les p cartes se trouve rangée à sa place ; c'est à dire, par exemple, le 3 à la 3^e, ou le 4 à la 4^e, ou le 5 à la 5^e, &c.

COROLLAIRE I.

107. **S**OIT p le nombre des cartes, q le nombre des hazards que Pierre a pour gagner lorsque le nombre des cartes est *p-1*. Le nombre des hazards favorables à Pierre est exprimé dans cette formule très simple $pg \pm 1$; sçavoir + lorsque p est un nombre impair, & - lorsqu'il est pair.

COROLLAIRE II.

108. LES nombres 0, 1, 2, 9, 44, 265, &c. qui composent la 1re bande perpendiculaire de la Table qui est dans la page précedente, expriment le nombre des hazards qu'il y a pour qu'aucune carte ne soit à sa place.

La formule du corollaire I peut s'écrire ainsi : $B_p = pB_{p-1} - (-1)^p$ {1} si B_p désigne le nombre d'arrangements favorables à Pierre, p étant le nombre de cartes (p>1). Cette formule {1} est une conséquence de celle donnée par Montmort au §104 (cf extrait n°4) et qui s'écrivait :
$u_p = ((p-1)\, u_{p-1} + u_{p-2})/p$ {2} avec $u_p = B_p /p!$ (p>1).

En effet pour p>1, {2} <=> $B_p = (p-1)(B_{p-1} + B_{p-2})$ {2'} et {2'} <=> $B_p - pB_{p-1} = -(B_{p-1} -(p-1)B_{p-2})$.

Cette dernière relation signifie que la suite $v_p = B_p - pB_{p-1}$ est une suite géométrique de raison -1 et par conséquent :

$B_p - pB_{p-1} = (-1)^{p-2}(B_2 - 2B_1)$ {3}.

Or $B_1 = 1$ et $B_2 = 1$ d'où il vient $B_p - pB_{p-1} = (-1)^{p-1} = -(-1)^p$ cqfd.

Le corollaire II précise que l'on peut lire le nombre de dérangements dans la table donnée dans l'extrait n°8. En effet si l'on note D_p le nombre de dérangements, p étant le nombre de cartes, on a alors immédiatement $D_p = p! - B_p = F_{p+1,p+1}$. Rappelons que $F_{p+1,p+1}$ est le nombre d'arrangements où la p+1ème carte est à sa place sans que les p cartes précédentes le soient (autrement dit les p cartes précédentes sont toutes dérangées).

Il est intéressant de signaler que les nombres D_p vérifient également la relation {2'}, la raison en étant que cette relation est linéaire et est vérifiée par les nombres p!. On en déduit immédiatement que les nombres D_p vérifient la relation: $D_p = pD_{p-1} + (-1)^p$ car ils vérifient la relation {3} et que $D_1 = 0$ et $D_2 = 1$.

Le chapitre sur le jeu du Treize se termine sur la résolution de trois variantes du jeu. Le problème général avec un jeu de n cartes dans lequel chaque carte est répétée p fois est évoqué dans la correspondance entre Nicolas Bernoulli et Montmort. Ils trouvent par exemple que pour un jeu ordinaire de 52 cartes où p=4, la probabilité que le banquier n'obtienne aucune rencontre au cours de la première suite de 13 cartes est d'environ 0.356. [3, p.324]. La probabilité que le banquier gagne est donc légèrement supérieure à ce qu'elle était dans le cas de la version simplifiée du jeu avec 13 cartes sans répétition.[8]

L'originalité de l'oeuvre de Montmort ressort clairement du texte qui vient d'être présenté, en particulier son emploi de l'analyse infinitésimale dans la résolution d'un problème de dénombrement.

C'est aussi un témoignage de la pratique de l'analyse au début du 18ème siècle. L'induction tient une place importante dans la recherche des formules de récurrence[9]. Il s'agit bien ici de trouver un ordre réglé dans une suite de nombres, un ordre que l'on rend visible dans une table. La pratique du calcul infinitésimal est déjà très poussée. La nouvelle analyse est pourtant une science très jeune, mais il est remarquable de voir la généralité de la méthode employée par Leibniz et l'habileté développée par Montmort dans ses calculs sur les séries entières.

Ajoutons pour finir qu'avoir suscité dans la communauté savante de son temps un regain d'intérêt pour le calcul des probabilités n'est pas le moindre des mérites de Pierre Rémond de Montmort.

Bibliographie

[1] D'Alembert Jean Le Rond, *article Retour des suites* in Encyclopédie Méthodique.

[2] Fontenelle Bernard Le Bovier De, *Eloge de M. de Montmort* in Histoire de l'Académie Royale des Sciences pour l'année 1719.

[3] Montmort Pierre Rémond De, *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, seconde édition, Paris, 1713.

[4] Montmort Pierre Rémond De, *Lettre à Brook Taylor* datée du 12 avril 1716 in William Young, ed., Brook Taylor, Contemplatio philosophica, London, 1793.

[8] Soit environ 0.643 au lieu de 0.632.

[9] On peut voir également un bel exemple d'induction dans la première partie des remarques de N.Bernoulli données en annexe.