ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ишмухаметова М.Г., Кондратьева Е.Д.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ И АСТРОДИНАМИКЕ

Учебно-методическое пособие

Казань – 2009

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
физического факультета

УДК 519.21

Составители: Ишмухаметова М.Г., Кондратьева Е.Д.

Учебно-методическое пособие предназначено для практических занятий по дисциплине «Небесная механика».

Казань, 2009, 37 с.

В пособии изложены алгоритмы решения задач по небесной механике и астродинамике. Для каждой темы приведены основные формулы, рассмотрены примеры решения задач. В пособии представлены тексты задач, необходимые для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов по учебной программе курса «Небесная механика». Пособие может быть также использовано студентами физического факультета, изучающих дисциплины «Астрономия», «Космическая геодезия», «Спутниковая навигация».

Рецензент: Андреев В.В., доцент кафедры вычислительной кибернетики Казанского государственного энергетического университета.

СОДЕРЖАНИЕ

1. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Научный подход к изучению мира характеризуется использованием определенных инструкций, упорядоченное применение которых составляет научный метод. На метод также накладывается ряд дополнительных условий, из которых мы отметим следующие: обоснованность, рациональность, наглядность и доказуемость. Это означает, что решение различных задач может и должно быть разбито на ряд одинаковых шагов, для которых, как правило, различается только формулировка, суть же отдельных этапов остается той же. Унифицируя решение, мы избавляемся от лишних действий и создаем фундамент для расширения возможностей метода. Подобный систематический подход позволяет повысить эффективность работы и углубить ее понимание. На основании вышеизложенного, систематизируем процесс нахождения решения применительно к учебным задачам.

Шаг первый. Постановка задачи.

Необходимо внимательно прочитать условие. Не просто произвести механическое действие по преобразованию письменного текста в устную речь, а понять, что именно требуется найти в задаче. Должна быть полная ясность относительно всего задания, каждой фразы и каждого слова во фразе. Причиной половины досадных ошибок становится недостаточно внимательно прочитанное условие.

На начальном этапе полезно задать себе следующие вопросы:

1) Какой области знаний или теме соответствует задача?
2) Потребуется ли для решения дополнительный теоретический материал?
3) Нужно ли использовать известные константы или табличные данные?

Шаг второй. Рисунок.

Далее необходимо нарисовать схему. Даже если задача кажется тривиальной, следует перевести условие в графическое представление. Практика показала, что при этом выявляется множество дополнительных деталей и «подводных камней». К тому же, это облегчит понимание хода вашей работы другими людьми, например, преподавателем.

Рекомендации здесь следующие:

1) Рисунок должен быть по возможности большим и легко читаемым.
2) Не стоит загромождать рисунок множеством мелких деталей, лучше нарисовать еще один, если это кажется вам необходимым.
3) В то же время изображение следует сделать достаточно подробным, опуская только незначительные оформительские детали.

Шаг третий. Модель.

Необходимо построить модель вычислений. Сюда входит, как математическая модель (набор используемых формул), так и предпочитаемая парадигма. Под парадигмой мы понимаем общепризнанную совокупность понятий, теории и методов исследования, которая дает научному сообществу модель постановки проблем и их решений.

Первое, что следует сделать – это определиться с подходом. Здесь существует три варианта: дедуктивный, индуктивный и абдуктивный (метод аналогии). Последний нам не подходит по соображениям низкой надежности. Мы рекомендуем для хорошо знакомых типов задач использовать индуктивный подход. Это значит, что, опираясь на опыт предыдущих решений, вы записываете необходимые формулы и выводите из них итоговое соотношение. Если не удалось найти итоговое соотношение этим способом, или же с данным типом задач вы сталкиваетесь впервые, подход меняется на дедуктивный. Здесь вы как бы подменяете одно неизвестное на другое и, двигаясь последовательно от формулы к формуле, связываете искомую величину с уже известными. В идейном смысле те же самые шаги выполняются при решении практически любых типов задач: систем интегральных и дифференциальных уравнений, работе с векторами и матрицами, применении графических методов и т.п.

Часто вы можете получить несколько вариантов модели. Выбор одного из них должен быть продиктован целесообразностью (затрачиваемыми ресурсами) и предполагаемой точностью получаемых результатов. Здесь многое зависит от располагаемых технических средств, лимитов времени, отводимых на решение, степени доверия к конкретным численным (или иным) методам.

После составления модели проводятся тестовые вычисления. То есть, задаются условия, при которых решение должно заведомо обращаться в ноль, бесконечность или принимать известные значения. Можно также рассмотреть какой-либо частный случай задачи (например, значение в узлах сетки для табличных данных).

Шаг четвертый. Вычисления.

Ключевыми моментами здесь становятся аккуратность и наглядность. Это значит, что весь цикл вычислений надо разбить на несколько этапов. Так проще отслеживать общую структуру задачи и выполнять проверку. Следует также записывать все промежуточные результаты.

Если для счета пишется компьютерная программа, то результаты промежуточных вычислений, тестов и возникающих ошибок необходимо заносить в log-файлы (текстовые файлы журналов для конкретной программы) или выводить на экран. Постарайтесь сделать программу более интерактивной и понятной пользователям.

При решении учебных задач на этом шаге обычно задается и точность вычислений (сколько знаков после запятой оставлять, до какого члена раскладывать ряд и т.п.).

Шаг пятый. Проверка.

Конечный результат проверяется исходя из следующих соображений:

1) Правильная размерность найденных величин. То есть, скорость не может измеряться в килограммах, а энергия в астрономических единицах.
2) Соответствие физическому смыслу. Не очень хорошо, если небесные объекты в нашем решении вдруг станут двигаться со скоростью, превышающей световую; а их радиусы будут меньше Швардшильдовского. Впрочем, это не слишком жесткое условие. В некоторых случаях оправдан отход от «физичности» (например, использование мнимых расстояний).
3) Попадание решения в интервал ожиданий. Как правило, после составления модели и нала вычислений, а иногда и раньше, мы можем предположить возможные варианты ответа. Сильное отклонение, конечно, не является ошибкой. Но это лишний повод перепроверить решение.
4) Контроль предыдущих шагов. После того, как ответ найден, всегда полезно вернуться к началу и снова последовательно пройти все этапы.

В случае нарушения условий проверки поиск ошибок ведется в обратном направлении. То есть, сначала проверяются вычисления, затем – модель, и, наконец, заново анализируется условие.

Шаг шестой. Запись ответа.

Мало получить ответ. Нужно также правильно его записать. Ответ – это не только значение какой-либо величины, но и выводы относительно физических процессов, описываемых в задаче, а также выявление границ применения решения. Этот шаг должен быть структурирован также, как и предыдущие.

Резюме.

Итак, в процессе решения задачи необходимо выполнить следующие шаги:

1. Прочитать условие.
2. Нарисовать схему.
3. Построить математическую модель.
4. Решить задачу.
5. Проверить результат.
6. Записать ответ.

2. ТЕОРИЯ НЬЮТОНСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Согласно закону всемирного тяготения Ньютона две материальные точки с массами m_1 и m_2 притягиваются друг к другу с силой прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния r между ними

$$F = f \cdot m_1 \cdot m_2 / r^2 \qquad (1)$$

где $f = 6{,}669 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2) - постоянная тяготения.

При решении задач астродинамики, в которых притягивающим телом является Земля, геоцентрический гравитационный параметр равен произведению постоянной тяготения на массу Земли $m_З$:

$$f \cdot m_З = 398{,}60 \cdot 10^3 \text{ км}^3/\text{с}^2 \equiv K_З$$

Если притягивающим телом является Солнце, то применяется гелиоцентрический гравитационный параметр:

$$f \cdot m_С = 132{,}51 \cdot 10^9 \text{ км}^3/\text{с}^2 \equiv K_С$$

Аналогично вводится селеноцентрический гравитационный параметр:

$$f \cdot m_Л = 4{,}90 \cdot 10^3 \text{ км}^3/\text{с}^2 \equiv K_Л$$

При изучении движения спутников других планет используют планетоцентрические гравитационные параметры.

В астрономической системе единиц за единицу массы принята масса Солнца, за единицу длины - среднее расстояние между центром Солнца и центром масс системы Земля-Луна, а за единицу времени – средние солнечные сутки. При этом в качестве постоянной тяготения используют постоянную Гаусса k

$$k = 0{,}01720209895$$

Постоянная Гаусса связана с f соотношением

$$f = k^2$$

Астрономическую систему единиц удобно использовать при решении задач о движении планет или комет относительно Солнца.

Пример 1. Масса Юпитера составляет 1/1047,3 массы Солнца, а масса Земли 1/329390. Определите гравитационный параметр Юпитера.

Решение. Величина гравитационного параметра прямо пропорциональна массе гравитирующего тела, поэтому используем соотношение

$$K_З / K_Ю = m_З / m_Ю \qquad (2)$$

тогда

$$K_Ю = K_З (m_Ю / m_З) = 398{,}60 \cdot 10^3 \cdot 314{,}5 = 125{,}5 \cdot 10^6 \text{ км}^3/\text{с}^2.$$

Пример 2. С какой силой Солнце притягивает комету массой 10^5 кг на расстоянии $13 \cdot 10^6$ км.

Решение. По формуле (1) вычисляем

$$F = f \cdot m_1 \cdot m_2 / r^2 = f \cdot m_С \cdot m / r^2 = K_С \cdot m / r^2 = 132{,}51 \cdot 10^9 \cdot 10^5 / (13 \cdot 10^6)^2 = 78{,}4 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$$

Задачи.

1. Какое из тел, Земля или Солнце, притягивают Луну сильнее? Среднее расстояние Луны от Земли около 380000 км, а расстояние от Земли до Солнца около $15 \cdot 10^7$ км.

2. Гравиметрические определения ускорения силы тяжести дали в экваториальных точках на поверхности Земли значение $g = 9{,}78034$ м/с^2. Экваториальный радиус Земли равен 6378,165 км. Вычислите гравитационный параметр Земли.

3. Определите силу притяжения однородного конуса с высотой h в его вершине. Угол раствора конуса равен 2α, его плотность δ.

4. Вычислите энергию однородного гравитирующего шара радиусом R и плотностью δ.

3. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ЗАДАЧИ ДВУХ ТЕЛ

Задача двух тел состоит в изучении абсолютного движения двух материальных точек, притягивающихся друг к другу по закону Ньютона. Если поместить притягивающее тело с массой m_0 (центральное тела) в начало системы координат с неизменно направленными в абсолютном пространстве осями координат, то достаточно изучить движение материальной точки P с массой m относительно центрального тела.

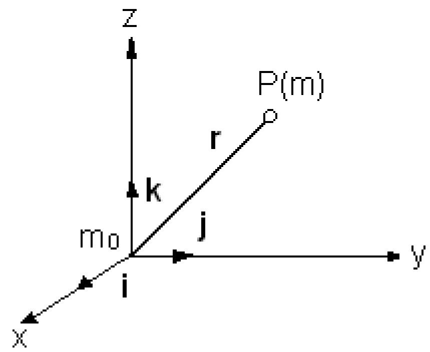

Рис. 1. Движение материальной точки P относительно центрального тела.

Положение материальной точки P зададим радиусом-вектором **r** (рис. 1), тогда относительное движение точки с массой m описывается векторным дифференциальным уравнением

$$d^2\mathbf{r}/d^2t + K\mathbf{r}/r^3 = 0 \qquad (3)$$

где $K=f(m_0 + m)$ (выделение жирным шрифтом будем применять для обозначения векторов). Векторному уравнению (3) соответствует система трех скалярных дифференциальных уравнений.

На практике часто решают ограниченную задачу двух тел (движение пассивного спутника). Она сводится к исследованию движения материальной точки P в поле ньютоновского поля тяготения неподвижного центра. Такая математической модель допустима, если масса *m* тела P ничтожно мала по сравнению с массой центрального тела с массой m_0. В данном случае в дифференциальном уравнении движения (2.1) величина К будет равна гравитационному параметру притягивающего центра

$$K = f \cdot m_0$$

Векторное дифференциальное уравнение (2.1) допускает следующие первые интегралы:

а) векторный интеграл площадей

$$\mathbf{r} \times \mathbf{V} = \boldsymbol{\sigma} \qquad (4)$$

где **V** – скорость движения; $\boldsymbol{\sigma}$ - векторная постоянная площадей;

б) векторный интеграл Лапласа

$$\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{V} + K \cdot \mathbf{r}/r = -\boldsymbol{\lambda} \qquad (5)$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ - вектор Лапласа;

в) интеграл энергии или интеграл живых сил

$$V^2 = 2K/r + h \qquad (6)$$

где h – постоянная энергии или постоянная живых сил.

Первые интегралы (4) и (5) связаны между собой соотношениями

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \qquad (7)$$

$$K^2 + h \cdot \sigma^2 = \lambda^2 \qquad (8)$$

Из интеграла площадей следует, что орбита относительного движения точки с массой m представляет собой плоскую кривую, лежащую в плоскости, проходящей через притягивающий центр и перпендикулярной вектору $\boldsymbol{\sigma}$.

Если в качестве основной координатной плоскости принята плоскость орбиты ($z=0$), то интеграл площадей в скалярном виде принимает вид

$$x \cdot dy/dt - y \cdot dx/dt \qquad (9)$$

Если ввести полярную систему координат, то интеграл площадей запишется в виде

$$r^2 \cdot d\varphi/dt = \sigma \qquad (10)$$

φ - полярный угол, отсчитываемый от оси абсцисс.

Из векторного интеграла Лапласа (5) и векторного интеграла площадей (4) следует *первый закон Кеплера*: движение материальной точки относительно притягивающего центра происходит по коническому сечению, в одном из фокусов которого находится притягивающий центр.

Соотношение (10) дает математическую формулировку *второго закона Кеплера*: секторная скорость материальной точки есть величина постоянная.

Пример 3. Космический зонд на геоцентрическом расстоянии 320000 км имел скорость 2,31 км/с. Какую скорость имел зонд на расстоянии 230 км от поверхности Земли?

Решение. Рассматриваем движение зонда в поле тяготения Земли, поэтому гравитационный параметр К будет равен

$$К_З = f \cdot m_З = 398{,}60 \cdot 10^3 \text{ км}^3/\text{с}^2$$

Из интеграла энергии (2.4) вычислим h постоянную энергии

$$h = V^2 - 2K/r = 2{,}31^2 - 2 \cdot 398{,}60 \cdot 10^3/320 \cdot 10^3 = 2{,}85 \text{ км}^2/\text{с}^2$$

Используя интеграл энергии и вычисленное значение h постоянной энергии, вычислим скорость зонда на геоцентрическом расстоянии r, которое равно сумме радиуса Земли и заданного расстояния 230 км от поверхности Земли

$$r = 230 \text{ км} + R_З = 230 + 6371 = 6601 = 6{,}601 \cdot 10^3 \text{ км}$$

Тогда

$$V^2 = 2K/r + h = 2 \cdot 398{,}60 \cdot 10^3/6{,}601 \cdot 10^3 + 2{,}85 = 123{,}6 \text{ км}^2/\text{с}^2$$

$$V = 11{,}12 \text{ км/с.}$$

Задачи.

1. Запишите векторный интеграл Лапласа в координатной форме.

2. Докажите справедливость соотношения, связывающего постоянную энергии, постоянную площадей и постоянную интеграла Лапласа

$$K^2 + h \cdot \sigma^2 = \lambda^2$$

3. Космический аппарат на расстоянии 415 км от поверхности Марса имеет скорость 6,8 км/с. Найдите постоянную энергии, если отношение масс Солнца и Марса составляет $3090 \cdot 10^3$, а радиус Марса равен 3407 км. (При решении используйте соотношение (2) из примера 1).

4. УРАВНЕНИЕ ОРБИТЫ СПУТНИКА

Если рассматривать движение материальной точки в плоскости орбиты в полярных координатах с полюсом в фокусе конического сечения, в котором находится притягивающее тело, то уравнение орбиты точки с массой m будет иметь вид

$$r = p/(1 + e \cdot \cos \upsilon) \tag{11}$$

где e – эксцентриситет орбиты и p – фокальный параметр орбиты, которые определяются по формулам

$$e = \lambda/K \tag{12}$$

$$p = \sigma^2/K \tag{13}$$

Направление полярной оси АП, которую называют *линией апсид*, будет определяться вектором Лапласа $\boldsymbol{\lambda}$. Ближайшая к фокусу точка П орбиты называется *перицентром* (рис. 2). Полярный угол υ отсчитывается от линии апсид и называется *истинной аномалией*.

Орбиты задачи двух тел называются *кеплеровскими*. Кеплеровская орбита будет *эллиптической* при $0 \le e < 1$ (в частности, при $e = 0$ она будет окружностью), *параболической* при $e = 1$, *гиперболической* при $e > 1$.

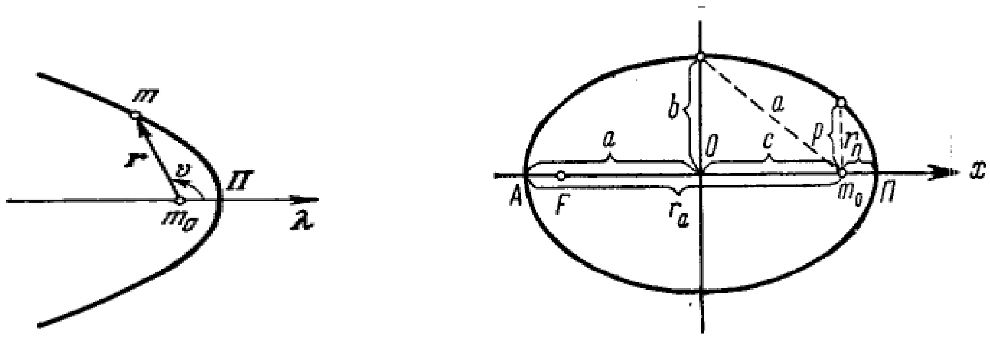

Рис. 2. Элементы кеплеровской орбиты

Если орбита —эллипс, то наиболее удаленная от фокуса, занятого притягивающим центром с массой m_0, точка А называется *апоцентром*. Значения величины радиуса-вектора **r** в перицентре $r_п$ и апоцентре $r_а$ можно вычислить по формулам

$r_n = p/(1 + e)$, при этом истинная аномалия $\upsilon = 0^0$ (14)

$r_a = p/(1 - e)$, при этом истинная аномалия $\upsilon = 180^0$

Величина *a* - соответственно большая полуось эллипса, b - его малая полуось и c - половина расстояния между фокусами. Большая полуось будет положительной для эллипса и отрицательной для гиперболы. Большая полуось и эксцентриситет характеризуют размер и форму (окружность, эллипс, парабола или гипербола) орбиты. Следующие формулы справедливы для обоих типов орбит

$$e = c/a \qquad (15)$$

$$p = b^2/a \qquad (16)$$

$$c^2 = a^2 – b^2 \qquad (17)$$

$$r_n = a(1 – e), \qquad r_a = a(1+ e) \qquad (18)$$

Пример 4. Большая полуось орбиты Земли в движении вокруг Солнца равна $149{,}6\cdot10^6$ км. Вычислите наименьшее и наибольшее гелиоцентрическое расстояние Земли, если эксцентриситет ее орбиты составляет 0,01679.

Решение. Минимальное расстояние движущейся точки от центрального тела достигается в точке перицентра, а максимальное расстояние достигается в апоцентре. Поэтому для решения задачи используем формулы (14)

$$r_n = a(1 – e) = 149{,}6\cdot10^6\cdot(1 - 0{,}016) = 147{,}20\cdot10^6 \text{ км}$$

$$r_a = a(1 + e) = 149{,}6\cdot10^6\cdot(1 + 0{,}016) = 151{,}99\cdot10^6 \text{ км}$$

Пример 5. Постоянная живых сил движущегося вокруг Сатурна спутника равна -0,5 км^2/с^2. Вычислите большую полуось кеплеровской орбиты спутника планеты, если гравитационный параметр Сатурна составляет $37{,}86\cdot10^6$ км^3/с^2.

Решение. Из рис. 2 и соотношений (15) – (17) имеем

$$c = e\cdot a$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2(1 - e^2)$$

$$p = a(1 - e^2) \qquad (19)$$

Выразим эксцентриситет и большую полуось орбиты через соотношения (8), (12) и (13)

$$e^2 = (K^2 + h\cdot\sigma^2)/K^2 = 1 + h\cdot\sigma^2/K^2 \qquad (20)$$

$$\sigma^2 = a\cdot K(1 - e^2) \qquad (21)$$

$$a = \sigma^2/(K(1 - e^2)) = \sigma^2/K(1 - 1 - h\cdot\sigma^2/K^2) = - K/h \qquad (22)$$

Вычислим большую полуось орбиты спутника Сатурна

$$a = - K/h = -37{,}86\cdot 10^6\cdot (-0{,}5) = 18{,}9\cdot 10^6 \text{ км}$$

Задачи.

1. Среднее расстояние Нептуна от Солнца составляет 30,1 а.е., а среднее расстояние Плутона от Солнца равно 39,5 а.е. Эксцентриситеты орбит Нептуна и Плутона соответственно равны 0,009 и 0,25. Какая из этих двух планет ближе подходит к Солнцу?

2. Над каким полушарием - северным или южным - больше времени находился первый искусственный спутник Земли в течение первых его оборотов вокруг Земли. (Перигей находился над некоторой точкой северного полушария).

3. Перигелийное и афелийное расстояние орбиты кометы соответственно равны 1,4 а.е. и 33,5 а.е. Определите размер и форму орбиты кометы относительно Солнца.

4. Космический аппарат движется по гиперболической орбите. Угол между асимптотами орбиты равен $\alpha = 60°$. Найдите эксцентриситет орбиты.

5. Спутник Юпитера движется по орбите с фокальным параметром 25000 км. Определите значение постоянной площадей и ее размерность. (Используйте соотношения, полученные в примере 5).

6. ИСЗ находится на орбите в точке с истинной аномалией $196{,}7^0$. Найдите геоцентрическое расстояние до ИСЗ, если большая полуось орбиты равна 27800 км, а эксцентриситет орбиты составляет 0,43.

7. ИСЗ имеет орбиту с эксцентриситетом 0,15. Найдите значение истинной аномалии для точек, в которых ИСЗ находится на расстоянии 780 км над поверхностью Земли, если известно, что перигей орбиты спутника равен 1500 км, а апогей составляет 7650 км.

8. Минимальное расстояние межпланетной автоматической станции от центра Марса равно 16370 км. Определите фокальный параметр орбиты станции, если эксцентриситет орбиты составляет 0,38.

9. Эксцентриситет орбиты ракеты составляет 0,450, а ее большая полуось – 3,8 а.е. Найдите постоянную площадей движения ракеты вокруг Солнца.

10. Покажите, что среднее арифметическое наибольшего и наименьшего расстояний спутника от притягивающего центра равно большой полуоси его орбиты, среднее

геометрическое — малой полуоси, а среднее гармоническое — фокальному параметру орбиты (при данных x, y среднее геометрическое $c=\sqrt{x \cdot y}$; среднее гармоническое z определяется из соотношения $1/z = (1/x + 1/y)/2$.

11. Докажите, что невозмущенные орбиты Земли (a = 1.000 а.е., e = 0.017) и астероида Эрос (a = 1.458 а.е., e = 0.223) не могут пересекаться.

12. Определите истинную аномалию кометы Швассмана-Вахмана 3 в момент, когда она, удаляясь от Солнца, находилась на гелиоцентрическом расстоянии 1,026 а.е., если большая полуось ее орбиты равна 3.062 а.е., а эксцентриситет 0.693.

5. СКОРОСТЬ КЕПЛЕРОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Вектор скорости можно разложить на две составляющие – радиальную V_r и поперечную $V_п$ (рис. 3). Модуль скорости материальной точки, движущейся по кеплеровской орбите, определяется формулой

$$V^2 = (1 + e^2 + 2 \cdot e \cdot \text{Cos}\ \upsilon) \cdot K/p \qquad (23)$$

Радиальная V_r и поперечная $V_п$ компоненты скорости соответственно равны

$$V_r = e \cdot \text{Sin}\ \upsilon \cdot \sqrt{K/p} \qquad (24)$$

$$V_п = (1 + e \cdot \text{Cos}\ \upsilon) \cdot \sqrt{K/p} \qquad (25)$$

Величина вектора скорости движущейся точки зависит от положения ее радиуса-вектора на орбите и размера самой орбиты. Выразим постоянную энергии h из формулы (20)

$$h = K^2/\sigma^2 \cdot (e^2 - 1) \qquad (26)$$

С учетом $p = \sigma^2/K$ и $(1 - e^2)/p = 1/a$ (19) равенство (26) запишется

$$h = -K \cdot (1 - e^2)/p = -K/a \qquad (27)$$

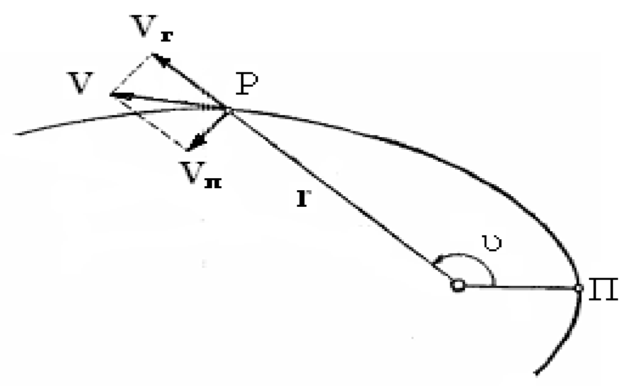

Рис. 3. Составляющие вектора скорости кеплеровского движения.

Подставим выражение (27) в интеграл энергии (6)

$$V^2 = 2K/r + h = 2K/r - K/a = K(2/r - 1/a)$$

$$V^2 = K(2/r - 1/a) \qquad (28)$$

Формула (28) представляет собой интеграл энергии, записанный в более удобной форме для определения скорости движущейся по орбите точки, так как показывает явную зависимость скорости от места положения точки на орбите и ее размера.

Из формулы (28) следует ряд важных соотношений для изучения движения материальной точки по кеплеровской орбите.

Если орбита является окружностью, тогда $r = a$, при этом круговая скорость $V_{кр}$ равна

$$V^2_{кр} = K/r \qquad (29)$$

Круговая скорость $V_{кр}$ — это та скорость в данной точке пространства, которую следует сообщить материальной точке, чтобы она стала обращаться вокруг притягивающего центра по круговой орбите.

Если орбита - парабола, тогда $a \to \infty$, при этом параболическая скорость $V_{пар}$ равна

$$V^2_{пар} = 2 \cdot K/r = 2 \cdot V^2_{кр} \qquad (30)$$

Параболическая скорость $V_{пар}$ есть минимальная скорость, которую следует сообщить материальной точке, находящейся в данной точке пространства, чтобы она могла удаться на любое сколь угодно большое расстояние от притягивающего центра.

Форму орбиты материальной точки можно определить по величине постоянной энергии h, используя формулу (20)

$$e = \sqrt{1 + h \cdot \sigma^2/K^2}$$

Если принять $h = 0$, то $e = 1$ - орбита имеет форму параболы,

$h < 0$, то $e < 1$ - орбита имеет форму эллипса (31)

$h > 0$, то $e > 1$ - орбита имеет форму гиперболы.

В случае эллиптической орбиты скорость материальной точки в перицентре и апоцентре связаны с расстоянием от притягивающего центра соотношением, которое называется *«правилом рычага»* и записывается как

$$V_п/V_а = r_а/r_п \qquad (32)$$

Пример 6. Высота ИСЗ в перигее составляет 680 км, а в апогее – 2120 км. Найдите минимальную и максимальную скорость движения спутника по орбите.

Решение. Из формулы (23) следует, что материальная точка, движущаяся по кеплеровской орбите, имеет максимальную скорость в перицентре орбиты

$$V^2_{мах} = (1 + e^2 + 2 \cdot e \cdot \mathrm{Cos}\ 0^0) \cdot K/p = (1 + e^2 + 2 \cdot e) \cdot K/p = (1 + e)^2 \cdot K/p$$

$$V_{мах} = (1 + e) \cdot \sqrt{K/p} \qquad (32)$$

Минимальную скорость материальная точка имеет в апоцентре своей орбиты

$$V^2_{мин} = (1 + e^2 + 2 \cdot e \cdot \mathrm{Cos}\ 180^0) \cdot K/p = (1 + e^2 - 2 \cdot e) \cdot K/p = (1 - e)^2 \cdot K/p$$

$$V_{мин} = (1 - e) \cdot \sqrt{K/p} \qquad (33)$$

Чтобы найти фокальный параметр p и эксцентриситет e орбиты, определим значение большой полуоси как

·

$$a = (r_п + r_а)/2 \qquad (34)$$

где геоцентрическое расстояние в перицентре и апоцентре (рис. 4) соответственно равно

$r_п = R_З + H_п = 6371 + 680 = 7051$ км

$r_а = R_З + H_а = 6371 + 2120 = 8491$ км

$a = (7051 + 8491)/2 = 7771$ км

$H_п$, $H_а$ – высота спутника от поверхности планеты в перицентре и апоцентре.

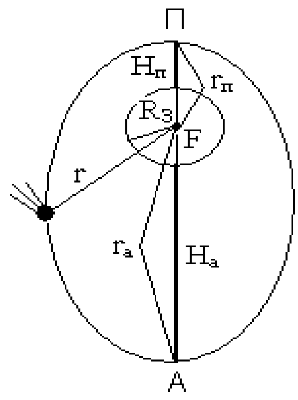

Рис. 4. Элементы орбиты ИСЗ

По формулам находим (18) и (19)находим параметры орбиты

$$e = 1 - (r_n/a\ ) = 0{,}093$$

$$p = a(1 - e^2) = 17311{\cdot}0{,}652 = 7703{,}8 \text{ км}$$

Находим максимальную и минимальную скорости ИСЗ по формулам (32) и (33)

$$V_{max} = (1 + 0,093)\cdot\sqrt{}398,60\cdot10^3/7,703\cdot10^3 = 7,26 \text{ км/с}$$

$$V_{мин} = (1 - 0,093)\cdot\sqrt{}398,60\cdot10^3/7,703\cdot10^3 = 6,52 \text{ км/с}$$

Пример 7. Большая полуось орбиты кометы равна 5,5 а.е., а ее эксцентриситет 0,86. Как близко комета подходит к Солнцу и какую при этом имеет гелиоцентрическую скорость?

Решение. Комета ближе всего подходит к Солнцу в точке перигелия своей орбиты и при этом имеет максимальную скорость. Поэтому находим перегилийное расстояние и скорость в перигелии по формулам (14), (32)

$$r_п = a(1 - e) = 5,5(1 - 0,86) = 0,77 \text{ а.е.}$$

Гравитационный параметр Солнца $K_C = 132,51\cdot10^9$ км^3/с^2, фокальный параметр будет равен

$$p = a(1 - e^2) = 5,5(1 - 0,86^2) = 1,43 \text{ а.е.}$$

переведем астрономические единицы, в которых вычислены большая полуось *a* и фокальный параметр p, в километры

$$p = 1,43\cdot150\cdot10^6 = 214\cdot10^6 \text{ км}$$

$$V_{max} = (1 - e)\cdot K/p = (1 + 0,86)\cdot\sqrt{}132,51\cdot10^9/0,214\cdot10^9 = 46,3 \text{ км/с}$$

Пример 8. Спутник Венеры находится на орбите в точке, истинная аномалия которой равна $112,4^0$. Известна круговая скорость спутника для этого момента 8,3 км/с. Найдите скорость спутника по орбите в заданный момент. Эксцентриситет орбиты равен 0,23, а гравитационный параметр Венеры составляет $32,6\cdot10^3$ км^3/с^2

Решение. Скорость спутника можно найти по формуле (28), для этого необходимо найти величину радиус- вектора r и большой полуоси *a* орбиты спутника. Величину r найдем по формуле (29) через круговую скорость

$$r = K/ V^2_{кр} = 32,6\cdot10^3/8,3^2 = 473 \text{ км}$$

Значение большой полуоси определим с учетом формул (11) и (19)

$$r = a(1 - e^2) /(1 + e\cdot\cos \upsilon)$$

тогда

$$a = r\cdot(1 + e\cdot\mathrm{Cos}\ \upsilon)/(1 - e^2) = 470\cdot(1 + 0,23\cdot\mathrm{Cos}\ 112,4^0)/(1 - 0,23^2) = 511,19/0,947 = 539,8 \text{ км}$$

Вычислим скорость спутника в заданной точке орбиты

$$V^2 = K(2/r - 1/a) = 32,6\cdot10^3(2/470 - 1/539,8) = 77,45 \text{ км}^2/\text{с}^2$$

$$V = \sqrt{}77,45 = 8,8 \text{ км/с.}$$

Задачи.

1. Докажите «правило рычага», используя интеграл площадей.

2. Найдите круговую, параболическую, максимальную и минимальную гелиоцентрические скорости движения Земли.

3. Если космическая ракета на высоте 230 км над земной поверхностью получит в направлении, перпендикулярном ее геоцентрическому радиусу-вектору, скорость 10 км/с, то апогей орбиты ракеты окажется примерно на геоцентрическом расстоянии 370000 км. Какую скорость будет иметь ракета в апогее?

4. КА в перигее на расстоянии 4340 км над поверхностью Земли имеет скорость 12,4 км/с. Определите форму его орбиты относительно Земли.

5. Найдите значение скорости, которую необходимо сообщить спутнику на расстоянии 1300 км над поверхностью Земли, чтобы орбита ИСЗ стала параболической.

6. В перигелии на расстоянии 1500 км от центра Венеры спутник имеет скорость 8,6 км/с. Найдите параметры орбиты спутника относительно Венеры. Отношение массы Солнца к массе планеты составляет 407000.

7. Спутник Марса в некоторый момент имеет истинную аномалию 306,7°. Найдите скорость спутника в этот момент, если эксцентриситет его орбиты равен 0,2, а его большая полуось 120100 км.

8. Вычислите модуль скорости и период обращения кругового спутника, движущегося на геоцентрическом расстоянии 6600 км.

9. КА движется в центральном поле тяготения Луны. Большая полуось его орбиты равна $2R_л$ ($R_л$ – радиус Луны). Какой будет величина скорости в тот момент, когда его селеноцентрическое расстояние будет равно $4R_л$?

10. Гравитационный параметр центрального тела S равен K, большая полуось и эксцентриситет малого начального эллипса равны a_1, e_1, а большего конечного эллипса – a_2, e_2 (см. рис. 5). Запишите, какое приращение скорости может обеспечить переход по эллипсу, касающемуся орбиты 1 в ее перицентре и орбиты 2 в ее апоцентре.

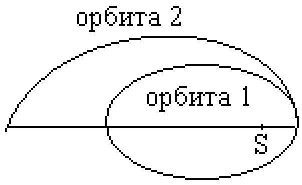

Рис. 5

11. В перигее скорость ИСЗ составляет 5,8 км/с, а расстояние 788 км от поверхности Земли. Вычислите скорость и расстояние ИСЗ в апогее.

12. Космический аппарат совершает перелет с орбиты Земли к орбите Марса и в некоторый момент времени находится на гелиоцентрическом расстоянии $150 \cdot 10^6$ км. Скорость аппарата в этот момент равна 35 км/с и составляет с гелиоцентрическим радиусом-вектором аппарата угол 60^0. Вычислите истинную аномалию КА в данный момент.

13. В момент отделения от ракеты скорость автоматической межпланетной станции (АМС) относительно Земли превышала параболическую скорость на 661 м/с. На какой высоте над поверхностью Земли АМС отделилась от ракеты и какую скорость имела в этот момент? Вычислите величину большой полуоси геоцентрической орбиты АМС и определите форму ее орбиты. Известно, что на расстоянии 488900 км от поверхности Земли АМС имела скорость 4,05 км/с.

14. Докажите, что при прохождении спутника, движущегося по эллиптической орбите, через конец ее малой оси скорость спутника равна по абсолютной величине местной круговой скорости.

15. При прохождении через периастр спутник Р звезды А имел скорость V_0. Местная круговая скорость в периастре известна $V_{кр}$. Вычислите эксцентриситет орбиты спутника.

16. При прохождении через некоторую точку Р, отстоящую от звезды А на расстояние r_0, спутник звезды имел скорость V_0. Местная параболическая скорость в точке Р равна V_n. Вычислите большую полуось орбиты спутника.

6. ПОНЯТИЕ НУЛЕВОГО СПУТНИКА

Нулевой спутник планеты (звезды) – это гипотетический спутник, который двигался бы по окружности в непосредственной близости от поверхности небесного тела при допущении, что это тело – идеальный шар (со сферическим распределением плотности). Данные о таком воображаемом спутнике могут быть использованы в качестве эталона при вычислении данных о реальных спутниках.

Под *первой космической скоростью* V_I нулевого спутника относительного центрального тела, принимаемого за идеальный шар, понимают круговую скорость у поверхности этого тела.

Под *второй космической скоростью* V_{II} нулевого спутника относительного центрального тела, принимаемого за идеальный шар, понимают параболическую скорость у поверхности этого тела.

Пример 9. Вычислите I и II космические скорости, а также период обращения нулевого спутника относительно планеты, если ее радиус R составляет 70000 км, отношение массы Солнца к массе планеты составляет 1047.

Решение. Для вычисления I и II космической скорости в формулах (29) и (30) значение радиуса-вектора r принимают равным радиусу шара R притягивающего тела (в данном случае планеты). Гравитационный параметр $K_П$ планеты определим по формуле (2)

$$K_C/K_П = 1047$$

$$K_П = K_C/1047 = 132{,}51\cdot10^9/1047 = 126{,}56\cdot10^6 \text{ км}^3/\text{с}^2.$$

Подставим значения $K_П$, R в формулы (29) и (30) и вычислим V_I и V_{II}

$$V^2{}_I = K/r = 126{,}56\cdot10^6/70\cdot10^3 = 0{,}181\cdot10^4$$

$$V_I = 6{,}5 \text{ км/с}$$

$$V^2{}_{II} = 1{,}4\cdot V_{кр} = 1{,}4\cdot6{,}5 = 9{,}1 \text{ км/с.}$$

Орбиту нулевого спутника можно принять за окружность, тогда период обращения T_0 найдем по формуле

$$T_0 = 2\cdot\pi\cdot R/V_I \qquad (35)$$

$$T_0 = 2\cdot3{,}14\cdot70\cdot10^3/6{,}5 = 67630 \text{ с} = 18{,}8 \text{ ч}$$

Задачи.

1. Астероид представляет собой шар радиуса 80 км со сферическим распределением плотности, равной 5,52 г/см^2. С астероида со скоростъю 150 м/с вертикально вверх брошен камень. Упадет ли камень обратно на астероид?

2. На поверхности Солнца сила тяжести в 28 раз больше, чем на поверхности Земли. Вследствие взрыва образовался протуберанец высотой 100000 км. Считая, что вещество, образовавшее верхний слой протуберанца, не испытывало сопротивления других слоев солнечной атмосферы, вычислите, какой должна была оказаться скорость этого вещества у поверхности Солнца.

3. Вычислите I и II космические скорости нулевых спутников Земли и Луны (радиус Луны равен 1738 км).

4. Орбиту Луну можно в первом приближении считать окружностью радиусом 384400 км. Найдите круговую и параболическую скорость Луны относительно Земли.

5. Вычислите модуль скорости и период обращения кругового спутника, движущегося на геоцентрическом расстоянии 6600 км.

6. Какую скорость должен получить ИСЗ, обращающийся по круговой орбите в плоскости земного экватора, чтобы он все время находился над одной и той же точкой земной поверхности. На какой высоте должен быть запущен такой стационарный спутник.

7. При прохождении через периастр спутник звезды имел скорость $V_{0.}$ Местная круговая скорость $V_{кр}$ в периастре известна. Вычислите эксцентриситет орбиты спутника.

8. При прохождении через некоторую точку на расстоянии r_0 спутник звезды имел скорость V_0 . Местная параболическая скорость в этой точке равна $V_{пар}$. Вычислите большую полуось орбиты спутника.

7. ТРЕТИЙ ЗАКОН КЕПЛЕРА

Периодом обращения спутника вокруг притягивающего центра называют время T между двумя последовательными моментами прохождения спутника через перицентр его орбиты. Период обращения спутника вокруг притягивающего центра и большая полуось a его орбиты связаны зависимостью, выражающей *третий закон Кеплера*

$$T^2/a^3 = 4\cdot\pi^2/K \tag{36}$$

В случае пассивно гравитирующего спутника гравитационный параметр в (36) равен

$$K = f\cdot m$$

В случае активно гравитирующего спутника гравитационный параметр в (36) равен

$$K = f\cdot(m_0 + m)$$

где m_0 и m – масса притягивающего тела и спутника соответственно.

Из формулы (36) следует выражение для средней угловой скорости n (средняя суточная скорость) вращения радиуса-вектора спутника вокруг притягивающего центра

$$n = 2\cdot\pi/T = \sqrt{}K/a^3 \tag{37}$$

Для двух пассивно гравитирующих тел, обращающихся на орбитах с большими полуосями a_1 и a_2 вокруг одного и того же притягивающего тела с периодами обращения T_1 и T_2, из формулы (36) вытекает третий закон Кеплера в его классическом виде

$$a_1^3/T_1^2 = a_2^3/T_2^2 \tag{38}$$

Пример 10. Для первого ИСЗ высота перигея $H_п$ была равна 230 км, а высота апогея $H_а$ – 950 км. Определите его период обращения.

Решение. Используя рис. 4, значение большой полуоси орбиты ИСЗ получаем как

$$a = (2\cdot R_З + H_п + H_а)/2 = (2\cdot 6371 + 230 + 950)/2 = 6961 \text{ км}$$

Период обращения можно найти двумя способами. Во-первых, из формулы (36) имеем

$$T = 2\cdot\pi\cdot a^{3/2}/\sqrt{}K \tag{39}$$

Во-вторых, определим период обращения спутника вокруг притягивающего тела через период его нулевого спутника. Период нулевого спутника T_0 вокруг притягивающего тела, радиус которого R, равен

$$T_0 = 2\cdot\pi\cdot R^{3/2}/\sqrt{}K \tag{40}$$

Тогда с учетом (39) и (40) имеем

$$T = T_0\cdot(a/R)^{3/2} \tag{41}$$

Подставим в (41) выражение для большой полуоси a

$$T = T_0\cdot[(1 + H_п + H_а)/2\cdot R)]^{3/2} \tag{42}$$

Сделаем вычисления по формулам (40) и (42)

$$T_0 = 2\cdot 3{,}14\cdot 6371^{1{,}5}/\sqrt{}398{,}60\cdot 10^3 = 5061 \text{ с} = 84{,}3 \text{ мин}$$

$$T = 84{,}3\cdot[1 + (230 + 950)/(2\cdot 6371)]^{3/2} = 84{,}3\cdot 1{,}142 = 96{,}3 \text{ мин}$$

Пример 11. Комета имеет большую полуось гелиоцентрической орбиты 10 а.е. Найдите период ее обращения и среднюю суточную скорость вокруг Солнца.

Решение. При рассмотрении движения небесных тел (планет, комет) относительно Солнца удобнее использовать астрономическую систему единиц (см. Гл. 1), при этом постоянная Гаусса k = 0,0172 связана с постоянной тяготения соотношением

$$f = k^2$$

Поэтому формула (39) примет вид

$$T = 2\cdot\pi\cdot a^{3/2}/k = 6{,}28\cdot 10^{1,5}/0{,}0172 = 11545{,}99 \text{ суток} = 32 \text{ года}$$

По формуле (37) вычислим среднюю угловую скорость кометы

$$n = 2\cdot\pi/T = 6{,}28/11545{,}99 = 0{,}00054 \text{ рад/сутки}$$

Задачи.

1. Период обращения ИСЗ составлял 106 мин, а наибольшая высота его над поверхностью Земли — 1880 км. Вычислите его наименьшую высоту над земной поверхностью.

2. Советский искусственный спутник Земли «Электрон-2» имел в день запуска высоту в перигее 460 км. Период обращения спутника составлял 22 часа 40 мин. Найдите высоту и скорость спутника в апогее.

3. Американская космическая ракета «Пионер-5», запущенная в сторону Луны 11 марта 1960 г. и ставшая искусственной планетой, имела период обращения вокруг Солнца 312 суток. Гелиоцентрическое расстояние перигелия орбиты ракеты равно $120\cdot 10^6$ км. Вычислите гелиоцентрическое расстояние ракеты в афелии.

4. Минимальное удаление советского спутника «Космос-11» от поверхности Земли составляло 213 км, а максимальное - 1560 км. Подсчитайте, каким был период обращения спутника вокруг Земли и его среднюю суточную скорость.

5. Космический аппарат движется вокруг Солнца по той же орбите, что и Земля, и притом на столь большом расстоянии от Земли, что ее влиянием можно пренебречь. Аппарат получил в направлении своего движения дополнительный импульс скорости, достаточный для достижения орбиты Марса. Сколько времени займет этот перелет? Какую скорость относительно Солнца должен иметь КА в момент старта с земной орбиты? Считать орбиты Земли (размер $150\cdot 10^6$ км) и Марса (размер 22810^6 км) круговыми.

6. Орбита ИСЗ имела эксцентриситет 0,758, а период его обращения составлял 45166 с. Вычислите большую полуось, геоцентрическое расстояние в перигее и апогее, а также модуль скорости в апогее и перигее.

7. Про двойную звезду Спика известно, что одна ее компонента совершает полный оборот вокруг другой за 4,1 суток. В момент времени, когда вектор относительной

скорости одной из компонент параллелен линии апсид орбиты, величина скорости составляет 58 км/с. Вычислите среднее расстояние между компонентами Спики.

8. Зная, что Луна совершает один полный оборот вокруг Земли за 27,3 звездных суток Земли, а ее среднее расстояние от центра Земли составляет 60,3 радиуса Земли. Вычислите величину большой полуоси орбиты суточного спутника (спутник, совершающий один полный оборот вокруг Земли за одни звездные сутки).

9. Среднее суточное движение малой планеты составляет 881,623 с. Вычислите период планеты вокруг Солнца и ее среднее расстояние от Солнца.

10. Малая планета Икар движется по орбите с эксцентриситетом 0,826 и большой полуосью 1,078 а.е. Сколько времени занимает движение Икара от перигелия до афелия его орбиты и как близко подходит к Солнцу.

11. Спутник Юпитера Ганимед имеет период обращения вокруг Юпитера 7 суток 3 часа 40 мин, а большая полуось орбиты составляет 15 радиусов Юпитера. Период обращения Луны вокруг Земли равен 27 суток 7 часов 40 мин, а большая полуось ее орбиты равна 60 земным радиусам. Найдите отношение средней плотности Юпитера к средней плотности Земли. Сжатием Юпитера и Земли пренебречь.

12. Докажите, что период обращения пассивно гравитирующего спутника, движущегося непосредственно около поверхности планеты, зависит только от средней плотности планеты, а не от ее размера. Какую продолжительность имел бы период обращения спутника, если средняя плотность центрального тела была бы равна плотности воды?

13. Два последовательных возвращения к Солнцу кометы Барнарда (177P) наблюдалось в 1889 и 2006 годах. Ее перигелийное расстояние составляло 1,10 а.е. Оцените афелийное расстояние кометы.

8. УРАВНЕНИЕ КЕПЛЕРА. ПОЛЕТ ОТ ПЕРИЦЕНТРА

В случае эллиптической орбиты положение точки в плоскости орбиты может быть задано прямоугольными координатами, которые вводятся в системе координат с началом в притягивающем центре. Ось абсцисс направлена вдоль оси апсид, а ось ординат перпендикулярна ей, так чтобы система была правой (рис. 5). Тогда прямоугольные координаты радиуса-вектора движущейся по эллиптической орбите точки могут быть заданы в параметрической форме

$$x = a\cdot(\mathrm{Cos}\ E - e) \qquad (43)$$

$$y = a\cdot\mathrm{Sin}\ E\cdot\sqrt{(1 - e^2)}$$

где E – вспомогательная угловая величина, которая называется *эксцентрическая аномалия*. Модуль радиуса-вектора связан с эксцентрической аномалией соотношением

$$r = a\cdot(1 - e\cdot \text{Cos } E) \tag{44}$$

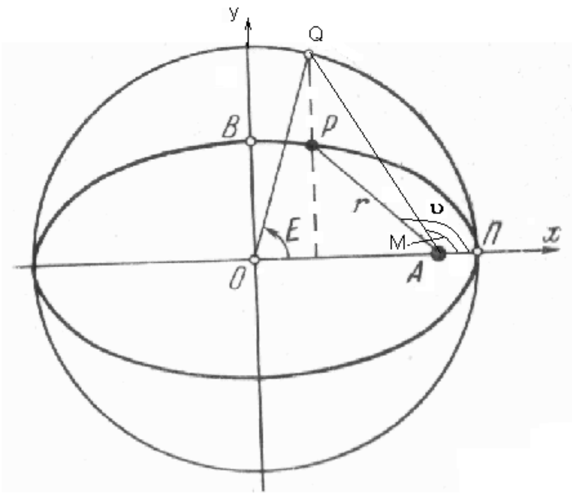

Рис. 5. Движение тела в плоскости орбиты

Связь между эксцентрической аномалией E, которая соответствует заданному значению истинной аномалии υ, и временем движения от перицентра до любой другой точки орбиты в момент t устанавливается у*равнение Кеплера*

$$E - e\cdot \text{Sin } E = M \tag{45}$$

в котором

$$M = n\cdot(t - t_0) \tag{46}$$

Величину M называют средней аномалией, соответствующей истинной аномалии υ в момент времени t (рис. 5), а t_0 — это момент прохождения телом через перицентр его орбиты.

Связь между истинной и эксцентрической аномалиями дается формулой

$$\text{tg } \upsilon/2 = \text{tg } E/2\cdot\sqrt{(1 + e)/(1 - e)} \tag{47}$$

Уравнение Кеплера можно решить методом последовательных приближений (метод неподвижной точки). За нулевое приближение искомого корня E можно принять 0 или M. Последовательные приближения E_n к корню E вычисляются по формулам

$$\begin{gathered} E_0 = 0 \\ E_1 = M \\ E_2 = e\cdot \text{Sin } M + M \\ E_3 = e\cdot \text{Sin } E_2 + M \\ \dots \\ E_{n+1} = e\cdot \text{Sin } E_n + M \end{gathered} \tag{48}$$

Таким образом, при любом выборе нулевого приближения E_0 после конечного числа шагов получим E_{n+1}, которое будет в пределах некоторой допустимой заданной погрешности ε

$$|E_{n+1} – E_n| < ε$$

В случае эллиптического движения для нахождения значений эксцентрической аномалии и средней аномалии можно использовать ряды разложения по степеням эксцентриситета e

$$r/a = 1 - e·\text{Cos } M + e^2·(\text{Cos } 2·M – 1)/2 – 3·e^3(\text{Cos } 3·M – \text{Cos } M)/8 + … \qquad (49)$$

$$υ = M + 2·e·\text{Sin } M + 5·e^2·\text{Sin } 2·M/4 + e^3·(13·\text{Sin } 3·M – 3·\text{Sin } M)/12 + …$$

Ряды сходятся для всех значений эксцентриситетов, не превосходящих предела Лапласа

$$e^* < 0,6627$$

В случае параболической орбиты связь между истинной аномалией и временем t принимает вид

$$1/3·(\text{tg}^3\, υ/2) + \text{tg}\, υ/2 = 2·(t – t_0)\sqrt{K/p^3} \qquad (50)$$

Уравнение (47) может быть преобразовано к виду

$$1/3·(r + p)\sqrt{(2·r – p)/K} = (t – t_0)$$

Решают уравнение (47) по алгоритму

а) вычисляют вспомогательный угол β ($-90^0 < 2β < 90^0$) из условия

$$2/3·\text{ctg}\, 2·β = 2·(t – t_0)\sqrt{K/p^3}$$

б) затем находят вспомогательный угол γ ($-90^0 < γ < 90^0$)

$$\text{tg}\, γ = \sqrt[3]{\text{tg}\, β}$$

в) определяют истинную аномалию

$$\text{tg}\, υ/2 = 2·\text{ctg}\, 2·γ$$

Для орбит, близких к круговым, для предварительных вычислений удобно использовать следующие приближенные формулы

$$E ≈ M - e·\text{Sin } M$$

$$r ≈ a·(1 – e·\text{Cos } M)$$

(51)

$$υ ≈ M + 2·e·\text{Sin } M$$

Пример 12. ИСЗ имеет следующие параметры орбиты: эксцентриситет равен 0,5, а большая полуось – 10^5 км. Требуется рассчитать значения эксцентрической и истинной аномалий и высоту ИСЗ над поверхностью Земли через 50 мин после прохождения спутником перигея.

Решение. Задача решается через уравнение Кеплера (45). Поэтому вычислим, прежде всего, значение средней аномалии M по формуле (46), в которой t – это время, истекшее после прохождения спутником перигея t_0, в нашем случае разница $t - t_0 = 50$ мин = 3000 с. Среднюю угловую скорость вычисляем по формуле (37)

$$n = \sqrt{K/a^3} = (1/a)\cdot\sqrt{K/a} = 1/10^5\cdot\sqrt{(398{,}60\cdot 10^3/10^5)} = 1{,}99\cdot 10^{-5}\ \text{рад}\cdot\text{с}^{-1}$$

$$M = n\cdot(t - t_0) = 1{,}99\cdot 10^{-5}\cdot 3000 = 0{,}0597 \approx 0{,}06\ \text{рад}$$

Значение эксцентрической аномалии E находим, решая уравнение Кеплера методом последовательных приближений с точностью 0,01 (48)

$$E_0 = 0$$

$$E_1 = M = 0{,}06\ \text{рад}$$

$$E_2 = 0{,}5\cdot\text{Sin}\ 0{,}06 + 0{,}06 = 0{,}090\ \text{рад}$$

$$E_3 = 0{,}5\cdot\text{Sin}\ 0{,}090 + 0{,}06 = 0{,}105\ \text{рад}$$

$$E_4 = 0{,}5\cdot\text{Sin}\ 0{,}105 + 0{,}06 = 0{,}112\ \text{рад}$$

$$E_5 = 0{,}5\cdot\text{Sin}\ 0{,}112 + 0{,}06 = 0{,}116\ \text{рад}$$

$$E_6 = 0{,}5\cdot\text{Sin}\ 0{,}116 + 0{,}06 = 0{,}119\ \text{рад}$$

$$E_7 = 0{,}5\cdot\text{Sin}\ 0{,}119 + 0{,}06 = 0{,}119\ \text{рад}$$

$$E = 0{,}119\ \text{рад} = 6{,}82^0$$

Истинная аномалия υ связана с эксцентрической аномалии E соотношением (47)

$$\text{tg}\ \upsilon/2 = \text{tg}\ (0{,}119/2)\cdot\sqrt{(1 + 0{,}5)/(1 - 0{,}5)} = 0{,}103$$

$$\upsilon = 0{,}205\ \text{рад} = 11{,}8^0$$

Чтобы определить высоту ИСЗ над поверхностью Земли в заданный момент времени, найдем геоцентрическое расстояние r в этот момент времени по формуле (11) или (44)

$$r = a\cdot(1 - e\cdot\text{Cos}\ E) = 10^5\cdot(1 - 0{,}5\cdot\text{Cos}\ 0{,}119) = 50354\ \text{км}$$

Тогда высоту H над поверхностью Земли спутника в заданный момент времени найдем, вычитая из величины r значение радиуса Земли 6371 км

$$H = 50354 - 6371 = 43983\ \text{км}$$

Пример 13. КА при выходе на эллиптическую орбиту относительно Земли в перигее на высоте 230 км имел скорость 10,9 км/с. Найдите время полета КА до орбиты Луны, если геоцентрический радиус лунной орбиты равен 384400 км .

Решение. Время перелета от перицентра орбиты до любой другой точки определяется как $(t - t_0)$ и соответственно вычисляется по формуле (45) и (46). Прежде всего, необходимо предварительно вычислить параметры орбиты КА a и e, n. Геоцентрическое расстояние $r_п$ КА в перицентре находим с учетом радиуса Земли как $r_п = 6371+230 = 6601$ км. Значение большой полуоси a определим из интеграла энергии (28)

$$a = r_п/(2 - r_п\cdot V^2/K) = 6601/(2 - 6601\cdot 10{,}9^2/398{,}60\cdot 10^3) = 206281\ \text{км}$$

Используя формулы (18) вычислим эксцентриситет орбиты

$$e = 1 – r_п /a = 1 – 6601/206281 = 0{,}968$$

Значение среднего суточного движения n будет равно

$$n = \sqrt{K/a^3} = 2\cdot10^{-6}\ рад\cdot с^{-1}$$

Значение эксцентрической аномалии E находим для точки выхода КА на лунную орбиту, то есть для момента, когда геоцентрическое значение r радиуса-вектора спутника равно 384400 км. Определим значение E по формуле (44)

$$Cos\ E = (a – r)/(a\cdot e) = (206281 – 384400)/(206281\cdot0{,}968) = - 0{,}892$$

$$Cos\ E = - 0{,}892$$

$$E = 153{,}1^0 = 2{,}673\ рад$$

$$Sin\ E = 0{,}452$$

Тогда по формулам (45) и (46) имеем время перелета КА до лунной орбиты

$$(t – t_0) = (E - e\cdot Sin\ E)/n = (2{,}673 – 0{,}968\cdot0{,}452)/ 2\cdot10^{-6} = 1{,}12 \cdot10^6\ с = 13\ суток$$

Задачи.

1. ИСЗ в 10 часов в апогее имеет высоту 1636 км и скорость 7,7 км/с. Найдите на каком расстоянии от центра Земли будет находиться ИСЗ в 22 часа того же дня.

2. Автоматическая станция обращается вокруг Земли по орбите, максимальное расстояние которой от центра Земли составляет 700000 км, а минимальное – 90000 км. На каком геоцентрическом расстоянии будет находиться станция через двое суток после прохождения перигея орбиты.

3. ИСЗ имел перигей на расстоянии 6600 км от центра Земли. Спутник прошел перигей орбиты в 4 часа по московскому времени. В 5 часов 20 мин было включено тормозное устройство спутника. Найдите для этого момента эксцентрическую аномалию спутника, его истинную аномалию и высоту над поверхностью Земли.

4. ИСЗ имел максимальную высоту 1927 км, а минимальную – 877 км. Найдите расстояние ИСЗ от центра Земли и его среднюю суточную скорость для момента, когда истинная аномалия ИСЗ равна 154°

5. Насколько отличается истинная аномалия астероида Герды от ее средней аномалии в тот момент, когда средняя аномалия равна $125{,}587^0$. Угол эксцентриситета $\varphi=\arcsin(e)$ равен $1{,}834^0$, среднее суточное движение равно $14{,}678'$. При каком значении средней аномалии спутника, взятой между 0^0 и 180^0, она будет сильнее всего отличаться от его истинной аномалии.

6. ИСЗ прошел через перигей в момент $3^h8^m55^s{,}58$ UT. Период обращения спутника составлял $752{,}77^m$, эксцентриситет орбиты был равен 0,758. Укажите момент времени, когда эксцентрическая аномалия спутника равнялась $144{,}9^0$. Вычислите эксцентрическую

аномалию, истинную аномалию и геоцентрическое расстояние спутника по истечении ¼ периода обращения после момента прохождения спутника через перигей.

9. КООРДИНАТЫ ТЕЛА В НЕВОЗМУЩЕННОМ КЕПЛЕРОВСКОМ ДВИЖЕНИИ

Движение материальной точки P по невозмущенной кеплеровской орбите будет однозначно определено, если будут заданы параметры, определяющие размеры и форму орбиты, плоскость, в которой находится орбита, параметры, характеризующие ориентацию орбиты в этой плоскости, а также момент прохождения движущейся точки через определенную точку орбиты (или положение движущейся точки на орбите в заданный момент времени). Эти параметры называются *элементами орбиты* (рис. 6) и вводятся следующим образом:

1. *Наклонение (i)* – это угол между плоскостью орбиты $C\xi\eta$ и основной координатной плоскостью *Cxy*. Угол наклона изменяется в пределах от 0^0 до 180^0.

2. *Долгота восходящего узла (Ω)* – это угол между осью абсцисс *x* и линией узлов, то есть линией пересечения плоскости орбиты с основной координатной плоскостью. Этот угол заключается в пределах от 0^0 до 360^0.

3. *Аргумент перицентра (ω)* – это угол между линией узлов и линией апсид, то есть угол с вершиной в притягивающем центре между направлениями на восходящий узел и перицентр орбиты. Аргумент перицентра измеряется в пределах от 0^0 до 360^0.

4. *Большая полуось орбиты a*.

5. *Эксцентриситет орбиты e*.

6. *Момент t_0 - момент прохождения движущейся точки через перицентр орбиты.*

Часто вместо t_0 задают другой элемент – среднюю аномалию M_0 в эпоху t_0.

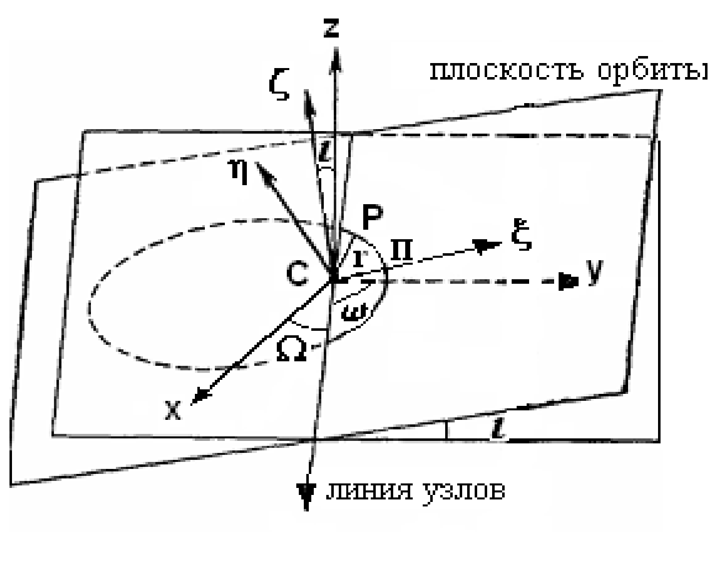

Рис. 6. Элементы кеплеровской орбиты движущейся точки P.

Если за основную плоскость принимается плоскость эклиптики определенной эпохи, то элементы орбиты называются эклиптическими. Если элементы отнесены к плоскости земного экватора (ось абсцисс направляют в точку весеннего равноденствия), то они называются экваториальными.

Зная элементы эллиптической кеплеровской орбиты точки P, ее прямоугольные координаты (x, y, z) в любой заданный момент времени t относительно избранной основной системы координат можно вычислить с помощью следующих формул:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{vmatrix} a\cdot(\mathrm{Cos}\,E - e) + \begin{vmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{vmatrix} b\cdot\mathrm{Sin}\,E \qquad (52)$$

Проективные множители P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y, Q_z в (52) задаются формулами

$$\begin{aligned} P_x &= \mathrm{Cos}\,\Omega\,\mathrm{Cos}\,\omega - \mathrm{Sin}\,\Omega\,\mathrm{Sin}\,\omega\,\mathrm{Cos}\,i \\ P_y &= \mathrm{Sin}\,\Omega\,\mathrm{Cos}\,\omega + \mathrm{Cos}\,\Omega\,\mathrm{Sin}\,\omega\,\mathrm{Cos}\,i \\ P_z &= \mathrm{Sin}\,i\,\mathrm{Sin}\,\omega \\ Q_x &= -\,\mathrm{Cos}\,\Omega\,\mathrm{Sin}\,\omega - \mathrm{Sin}\,\Omega\,\mathrm{Cos}\,\omega\,\mathrm{Cos}\,i \\ Q_y &= -\,\mathrm{Sin}\,\Omega\,\mathrm{Sin}\,\omega + \mathrm{Cos}\,\Omega\,\mathrm{Cos}\,\omega\,\mathrm{Cos}\,i \\ Q_z &= \mathrm{Sin}\,i\,\mathrm{Cos}\,\omega \end{aligned} \qquad (53)$$

Переход от орбитальных координат (ξ, η, ζ) произвольной точки (необязательно лежащей в плоскости орбиты) к ее прямоугольным координатам (x, y, z) выполняют по формулам

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = B \begin{vmatrix} \xi \\ \zeta \\ \eta \end{vmatrix} = B \begin{vmatrix} r\cdot\mathrm{Cos}\,\upsilon \\ r\cdot\mathrm{Sin}\,\upsilon \\ 0 \end{vmatrix} \qquad (54)$$

Матрица B имеет вид

$$B = \begin{vmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & Q_z \end{vmatrix}$$

а проективные коэффициенты R_x, R_y, R_z равны

$$\begin{aligned} R_x &= \mathrm{Sin}\,\Omega\,\mathrm{Sin}\,i \\ R_y &= -\,\mathrm{Cos}\,\Omega\,\mathrm{Sin}\,i \end{aligned} \qquad (55)$$

$$R_z = \mathrm{Cos}\ i$$

Пример 14. . Автоматическая межпланетная станция АМС в некоторый момент времени t_0 находилась на гелиоцентрическом расстоянии, равном $3\cdot10^8$ км, и имела истинную аномалию $\upsilon=45^0$. Известны следующие эклиптические элементы орбиты АМС: e=0,7, $\Omega=150^0$, $\omega=90^0$, $i=60^0$. Вычислите компоненты радиуса-вектора и вектора скорости АМС в эклиптической системе координат в указанный момент времени.

Решение. Компоненты радиуса-вектора r определим по формуле (54). Для этого прежде всего необходимо вычислить компоненты матрицы B по формулам (53) и (55)

$$P_x = \mathrm{Cos}\ 150^0\ \mathrm{Cos}\ 90^0 - \mathrm{Sin}\ 150^0\ \mathrm{Sin}\ 90^0\ \mathrm{Cos}\ 60^0 = -0{,}25$$

$$P_y = \mathrm{Sin}\ 150^0\ \mathrm{Cos}\ 90^0 + \mathrm{Cos}\ 150^0\ \mathrm{Sin}\ 90^0\ \mathrm{Cos}\ 60^0 = -0{,}433$$

$$P_z = \mathrm{Sin}\ 60^0\ \mathrm{Sin}\ 90^0 = 0{,}866$$

$$Q_x = -\ \mathrm{Cos}\ 150^0\ \mathrm{Sin}\ 90^0 - \mathrm{Sin}\ 150^0\ \mathrm{Cos}\ 90^0\ \mathrm{Cos}\ 60^0 = 0{,}866$$

$$Q_y = -\ \mathrm{Sin}\ 150^0\ \mathrm{Sin}\ 90^0 + \mathrm{Cos}\ 150^0\ \mathrm{Cos}\ 90^0\ \mathrm{Cos}\ 60^0 = -0{,}500$$

$$Q_z = \mathrm{Sin}\ 60^0\ \mathrm{Cos}\ 90^0 = 0$$

$$R_x = \mathrm{Sin}\ 150^0\ \mathrm{Sin}\ 60^0 = 0{,}433$$

$$R_y = -\ \mathrm{Cos}\ 150^0\ \mathrm{Sin}\ 60^0 = -0{,}750$$

$$R_z = \mathrm{Cos}\ 60^0 = 0{,}500$$

Для контроля вычислений используем соотношения

$$P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2 = 1$$

$$P_x\cdot Q_x + P_y\cdot Q_y + Pz\cdot Qz = 0$$

$$-0{,}25^2 + -0{,}433^2 + 0{,}866^2 = 0{,}866^2 + -0{,}500^2 + 0^2 = 0{,}9999 \approx 1$$

$$-0{,}25\cdot0{,}866 + (-0{,}433)\cdot(-0{,}500) + 0{,}866\cdot0 = 0$$

Вычисляем значение определителя матрицы B любым известным способом

$$B = \begin{vmatrix} -0{,}25 & 0{,}866 & 0{,}433 \\ -0{,}433 & -0{,}500 & -0{,}750 \\ 0{,}866 & 0 & 0{,}500 \end{vmatrix} = -0{,}125$$

Находим компоненты радиуса-вектора

$$x = -\ 0{,}125\cdot3\cdot10^8\cdot\ \mathrm{Cos}\ 45^0 = -\ 0{,}266\cdot10^8\ \text{км}$$

$$y = -\ 0{,}125\cdot3\cdot10^8\cdot\ \mathrm{Sin}\ 45^0 = -\ 0{,}266\cdot10^8\ \text{км}$$

$$z = 0$$

Теперь можно найти компоненты вектора скорости V как производную компонент радиус-вектора (54)

$$V = B \left\{ \begin{vmatrix} -\ \mathrm{Sin}\ \upsilon \\ \mathrm{Cos}\ \upsilon \end{vmatrix} r\cdot\partial\upsilon/\partial r + \begin{vmatrix} \mathrm{Cos}\ \upsilon \\ \mathrm{Sin}\ \upsilon \end{vmatrix} \partial r/\partial\upsilon \right\}.$$

$$0 \qquad\qquad\qquad 0$$

тогда с учетом формул (24) и (25) имеем

$$V = B \begin{Bmatrix} -(\sqrt{(K\cdot p)}\cdot \mathrm{Sin}\,\upsilon/r) + \sqrt{(K/p)}\cdot e\cdot \mathrm{Sin}\,\upsilon\cdot \mathrm{Cos}\,\upsilon \\ (\sqrt{(K\cdot p)}\cdot \mathrm{Cos}\,\upsilon)/r + \sqrt{(K/p)}\cdot e\cdot \mathrm{Sin}^2\,\upsilon \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Гравитационный параметр Солнца равен $K_C=132{,}51\cdot 10^9$ км^3/с^2, а фокальный параметр p орбиты найдем, используя формулу (11)

$$p = r_0\cdot(1 + e\cdot \mathrm{Cos}\,\upsilon_0)/(1 - e^2) = 3\cdot 10^8\cdot(1 + 0{,}7\cdot \mathrm{Cos}\,45^0)/(1 - 0{,}7^2) = 8{,}79\cdot 10^8 \text{ км}$$

Вычислим компоненты вектора скорости

$$V_x = -(\sqrt{(132{,}51\cdot 10^9\cdot 8{,}79\cdot 10^8}\,)\cdot \mathrm{Sin}\,45^0/3\cdot 10^8 + \sqrt{(132{,}51\cdot 10^9/8{,}79\cdot 10^8)}\cdot 0{,}7\cdot \mathrm{Sin}\,45^0\cdot \mathrm{Cos}\,45^0 =$$
$$= -2{,}653 \text{ км/с}$$

$$V_y = \sqrt{(132{,}51\cdot 10^9\cdot 8{,}79\cdot 10^8}\,)\cdot \mathrm{Cos}\,45^0/3\cdot 10^8 + \sqrt{(132{,}51\cdot 10^9/8{,}79\cdot 10^8)}\cdot 0{,}7\cdot \mathrm{Sin}^2\,45^0 = 3{,}731 \text{ км/с}$$

$$V_z = 0$$

Задачи.

1. Известны элементы орбиты ИСЗ относительно геоцентрической экваториальной системы координат: a=7000 км, e=0,2, i=60^0, Ω=90°, ω=45°. По этим данным вычислите декартовые экваториальные координаты перигея орбиты. Найдите также экваториальные сферические координаты перигея орбиты ИСЗ радиус-вектор r, прямое восхождение α и склонение δ.

2. Космический корабль движется вокруг Солнца по эллиптической орбите, имеющей следующие эклиптические элементы: a=3 а.е., e=0,4, i=60^0, Ω=120°, ω=90°, t_0=1992, янв. 5,12^{h}23^m UT. Какими были в эклиптической системе отсчета прямоугольные координаты корабля за 30 суток до перед его прохождением через перигелий орбиты.

3. Орбита ИСЗ имеет следующие экваториальные элементы: $a=4\cdot R_З$ ($R_З$ – средний радиус Земли), e=0,3, i=65^0, Ω=40°, ω=50°, t_0=1992, янв. 4,4^{h}20^m UT. Какие прямоугольные координаты имел спутник в экваториальной системе отсчета в момент 1992, янв. 4,9^{h}20^m UT.

4. Орбита ИСЗ имеет следующие экваториальные элементы: $a = 4\cdot R_З$ ($R_З$ – средний радиус Земли), e=0,2, i=65^0, Ω=60°, ω=120°, t_0=1992, июнь 3,12^{h}10^m UT. Вычислите, когда спутник в последний раз перед указанным моментом прошел через восходящий узел своей орбиты и когда он после этого момента впервые прошел через нисходящий узел орбиты.

10. ТРАССА СПУТНИКА НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛАНЕТЫ

Предположим, что планета имеет шаровую форму. *Подспутниковой точкой* называют ортогональную проекцию спутника на поверхность планеты. Когда спутник описывает свою траекторию в пространстве, его подспутниковая точка опишет некоторую линию на поверхности планеты. Эту линию называют *трассой спутника на поверхности планеты*.

Пример 15. Орбита ИСЗ близка к окружности, и он двигается вокруг Земли на высоте 314 км. Плоскость орбиты спутника наклонена к плоскости земного экватора под углом, равным 65°. Под каким углом трасса спутника пересекает земной экватор?

Решение. Рассмотрим сначала движение подспутниковой точки на невращающейся Земле. Среднее суточное движение спутника и его подспутниковой точки равны

$$n = \sqrt{(K_З/a^3)} = \sqrt{396\cdot10^6/(6371+314)^3} = \sqrt{396\cdot10^6/(6685)^3} = 0{,}0012\ с^{-1}$$

Тогда скорость подспутниковой точки V будет равна

$$V = R_З\cdot n = 7{,}36\ км/с$$

В момент прохождения спутника над экватором (из южного полушария в северное) скорость подспутниковой точки можно разложить на две компоненты: по меридиану $V_м$ и по экватору Vэ, которые определяются как

$$V_м = V\cdot Sin\ i\ = 7{,}36\cdot Sin\ 65^0 =\ 6{,}67\ км/с$$

$$V_э = V\cdot Cos\ i = 7{,}36\cdot Cos\ 65^0 = 3{,}10\ км/с.$$

Рассмотрим теперь движение подспутниковой точки на вращающейся Земле. Учтем, что каждая точка экватора вращается со скоростью V_0, которая равна

$$V_0 = 2\cdot\pi\cdot R_З/86164 = 0{,}464\ км/с.$$

Поэтому скорость спутника относительно вращающейся Земли имеет компоненты $V_э'$ и

$$V_м' \qquad V_э' = V_э - V_0 \qquad и \qquad V_м' = V_м\,.$$

Тогда угол γ между трассой спутника и экватором в момент, когда подспутниковая точка находится на экваторе, найдем по формуле

$$tg\ \gamma = V_м'/\ V_э' = V_м/(\ V_э - V_0) = -15{,}96$$

$$\gamma = 93^0 40'.$$

Задачи.

1. Спутник обращается вокруг Земли по окружности на высоте 230 км над поверхностью Земли. Орбита спутника проходит над обоими полюсами (полярный спутник). Под каким углом пересекает трасса спутника экватор Земли?

2. Орбита первого советского спутника была наклонена к плоскости земного экватора под углом 65°. Спутник прошел над головой наблюдателя, находящегося на экваторе, в направлении с юго-запада на северо-восток. В этот момент наблюдатель измерил видимый угол между трассой спутника и направлением на восток. Чему должен был

оказаться равным этот угол? Решите аналогичную задачу, когда трасса спутника пересекает экватор Земли с северо-запада на юго-восток. Данные об орбите спутника следующие: минимальное расстояние спутника над поверхностью Земли составляло 230 км, максимальное – 950 км, аргумент перицентра был равен 58°. (Используйте формулы, полученные в примере 15).

11. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Поисковые эфемериды, а также орбиты на следующие или предыдущие появления малых тел солнечной системы можно получить только при точном учете возмущений от больших планет. В этой задаче аналитические методы применить трудно, так как эксцентриситеты и наклоны плоскости орбиты, по степеням которых разлагаются выражения для возмущений, нельзя считать малыми величинами.

Второй способ учета возмущений — численный. Он основан на применении численного интегрирования дифференциальных уравнений движения на протяжении всего рассматриваемого отрезка времени. Методики, входящие сюда, просты, применимы к орбитам любого вида и позволяют варьировать точность вычислений в зависимости от поставленной задачи.

Впервые метод численного интегрирования дифференциальных уравнений был применен Клеро (Клеро Алексис Клод, 1713—1765) для исследования движения кометы Галлея. При этом им были учтены возмущения от Юпитера и Сатурна, а предсказание появления кометы в 1759 г. было сделано с ошибкой всего в 31 день. Позднее Клеро показал, что можно было уменьшить эту ошибку до 19 суток.

Существует широкий спектр методов, применяемых для успешного проведения подобных исследований. В зависимости от вида поставленной задачи можно прибегнуть к интегрированию дифференциальных уравнений движения в прямоугольных координатах, как это впервые сделали Коуэлл и Кроммелин (Кроммелин Андрю, 1865—1939). Впоследствии метод стал применяться под названием "метод Коуэлла", в том числе и после преобразований Д.К.Куликова.

Можно заменить обычные прямоугольные координаты специальными, что позволит увеличить интервал времени, положенный в основу интегрирования. Эта методика была разработана в ИТА (Институт Теоретической Астрономии, ныне ИПА — Институт Прикладной Астрономии) в 1920 г. при создании службы малых планет и впоследствии улучшена.

Другой подход к поставленной задаче — вычислять отклонения возмущенных прямоугольных координат от невозмущенных. Этот метод был предложен Энке (Энке

Иоганн Франц, 1791—1865) и Бондом (Бонд Джордж Феоикс, 1825—1865). Можно при этом использовать и полярные координаты, как это в свое время постоянно рекомендовал Ганзен (Ганзен Петер Андреас, 1795—1874).

Следующее предложение в этом ряду — интегрировать дифференциальные уравнения возмущенного движения способом вариации произвольных постоянных Лагранжа (Лагранж Жозеф Луи, 1736—1813). Среди новых методов следует прежде всего указать на метод Эверхарта, разработанный и опубликованный им в 1974 г. Этот одношаговый метод широко применяется в настоящее время.

Все методы численного интегрирования можно разделить на 2 группы по их основному признаку:

1) основаны на разложении в ряд Тейлора, причем производные высших порядков определяются путем дифференцирования данного уравнения (методы Адамса, Коуэлла, Эверхарта);

2) тоже основаны на разложениях в ряды, но не используют производные высших порядков. Вместо этого на каждом шаге вычисляют правую часть уравнения для различных значений входящих туда переменных (методы Рунге-Кутта).

Иногда методы разделяют еще по одному признаку: многошаговые (Коуэлл) и одношаговые (Эверхарт).

Преимущества методов второй группы перед первой в том, что не требуются какие-либо другие методы для начала интегрирования, так как для продвижения вперед на один шаг используются только значения функций в последней точке. Величина шага изменяется без дополнительной работы.

К недостаткам методов второй группы можно отнести следующие: процесс интегрирования лишен простых средств контроля правильности выбора шага, обычно в качестве критерия изменения шага служат результаты вычислений с обычным и половинным шагом; методы требуют большого числа подстановок в правые части дифференциальных уравнений, что обычно нежелательно, особенно если они имеют сложную структуру; увеличение точности связано с большими трудностями, так как рабочие формулы становятся значительно более громоздкими, а исправление программы на практике затруднительно.

Методы первой группы лишены этих недостатков.

В небесной механике уравнения движения в гелиоцентрической системе имеют вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2(1+m)\frac{x}{r^3} + \sum_i k^2 m_i \left(\frac{x_i - x}{\Delta_i^3} - \frac{x_i}{r_i^3} \right)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -k^2(1+m)\frac{y}{r^3} + \sum_i k^2 m_i \left(\frac{y_i - y}{\Delta_i^3} - \frac{y_i}{r_i^3} \right)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -k^2(1+m)\frac{z}{r^3} + \sum_i k^2 m_i \left(\frac{z_i - z}{\Delta_i^3} - \frac{z_i}{r_i^3} \right)$$

$$\Delta_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2$$

где x, y, z — координаты исследуемого тела; x_i, y_i, z_i — координаты возмущающих тел. Здесь масса Солнца принята за единицу, массой изучаемого тела m можно пренебречь по сравнению с массами больших планет. Суммирование распространяется на все большие планеты, возмущения от которых мы хотим учитывать. Правые части таковы, что все три уравнения должны интегрироваться параллельно.

Из всей группы методов, основанных на квадратурных формулах, метод Коуэлла наиболее точен, так как при одном и том же наивысшем порядке учитываемых разностей остаточный член его имеет меньший коэффициент. Коуэлл разработал свой метод интегрирования в связи с открытием в 1908 г. спутника Юпитера. В силу больших возмущений от Солнца его движение не описывалось законами Кеплера даже отдаленно. Коуэлл блестяще применил свой метод и к предвычислению появления кометы Галлея в 1910 г.

В дальнейшем этот метод послужил основой для модификаций Б.В.Нумерова (ИТА). В США метод Коуэлла был положен в основу работы по совместному интегрированию уравнений движения внешних планет на 400 лет. В ИТА Д.К.Куликов привел основные формулы этого метода к виду, удобному для программирования, а В.Ф.Мячин провел исследование влияния погрешности как исходных данных, так и накопления ошибок в процессе интегрирования на каждом шаге. Главные источники ошибок:

— отбрасывание остаточного члена в основной формуле интегрирования;

— ошибки округления на каждом шаге;

— ошибки в начальных данных, лежащие вне метода интегрирования;

— ошибки, возникающие от необходимости на каждом шаге прибегать к итерациям;

— неточные значения параметров, например координат, или скоростей, или масс больших планет.

Разработка программы интегрирования включает в себя несколько этапов.

1 — определение начальных условий: вид орбиты, постоянные интегрирования;

2 — определение необходимой точности, т.е. числа десятичных знаков при ожидаемом накоплении ошибки;

3 — определение начальных данных, например координат на два момента или координат и скоростей на один момент;

4 — выбор и проверка шага интегрирования, критерии удвоения или деления шага пополам;

5 — интегрирование от шага к шагу;

6— вывод результатов, если необходимо — интерполирование их, например, для определения наибольшего сближения.

Рассмотрим более подробно некоторые численные методы интегрирования.

11.1. МЕТОД КОУЭЛЛА

Запишем уравнение движения в виде:

$$\ddot{\bar r} = -\frac{k^2(1+m)}{r^3}\cdot\bar r + k^2\sum_i m_i\left(\frac{\bar r_i - \bar r}{\Delta_i^3} - \frac{\bar r_i}{r_i^3}\right), \quad (56)$$

где $m, \bar r$ — гемоцентрические координаты тела; $m_i, \bar r_i$ — масса и гемоцентрические координаты возмущающих тел; Δ_i — их взаимное расстояние.

Основная идея метода Коуэлла сводится к следующему: так как в правую часть не входит $\dot{\bar{\mathbf{r}}}$, надо от $\ddot{\bar r}$ сразу перейти к $\bar{\mathbf{r}}$, используя интерполяционную формулу Стирлинга. Согласно формуле Тейлора

$$\bar r(t_k - \varpi) = \bar r_{k-1} = \bar r_k + \sum_{n=1}^{\infty}\ (-1)^n\,\frac{\varpi^n}{n!}\left(\frac{d^n\bar r}{dt^n}\right)_{\mathrm{k}}$$

$$\bar r(t_k + \varpi) = \bar r_{k+1} = \bar r_k + \sum_{n=1}^{\infty}\ \frac{\varpi^n}{n!}\left(\frac{d^n\bar r}{dt^n}\right)_k$$

Отсюда

$$\Delta^2\bar{\mathrm{r}}_{\mathrm{k}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\ \frac{\varpi^{2n}}{(2n)!}\left(\frac{d^{2n}\bar r}{dt^{2n}}\right)_k.$$

Обозначив $\varpi^2\ddot{\bar{\mathrm{r}}} = \bar{\mathrm{f}}$, имеем

$$\Delta^2\bar{\mathrm{r}}_{\mathrm{k}} = \bar{\mathrm{f}}_{\mathrm{k}} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\ \frac{\varpi^{2n}}{(2n+2)!}\left(\frac{d^{2n}\bar f}{dt^{2n}}\right)_k.$$

Выразим производные через разности, используя не формулу Ньютона, а, следуя за Коуэллом, формулу Стирлинга. Получим

$$\Delta^2\bar r = \bar f_k + \frac{1}{12}\bar f_k^2 - \frac{1}{240}\bar f_k^4 + \frac{31}{60480}\bar f_k^6 - \frac{289}{3628800}\bar f_k^8 + \dots .$$

Суммируя этот ряд от 0 до i и от 0 до k, имеем

$$\bar r_k = \bar f_k^{-2} + \frac{1}{12}\bar f_k - \frac{1}{240}\bar f_k^2 + \frac{31}{60480}\bar f_k^4 - \frac{289}{3628800}\bar f_k^6 + \frac{317}{22809600}\bar f_k^8,$$

где

$$\bar{f}_0^{-2} = \bar{r}_0 - \frac{1}{12}\bar{f}_0 + \frac{1}{240}\bar{f}_0^2 - \frac{31}{60480}\bar{f}_0^4 + \ldots$$

$$\bar{\mathrm{f}}_{-1/2}^{-1} = \Delta\bar{r}_{-1/2} - \frac{1}{12}\bar{f}_{-1/2}^1 + \frac{1}{240}\bar{f}_{-1/2}^3 - \frac{31}{60480}\bar{f}_{-1/2}^5 + \ldots$$

$$\dot{\bar{r}}_k = \bar{f}_{-1/2}^{-1} - \frac{1}{24}\bar{f}_0 + \frac{11}{720}\bar{f}_0^3 - \frac{191}{60480}\bar{f}_0^4$$

Скорости выражены в единице времени, равной ω суток и их надо разделить на ωk перед выводом элементов.

Составим схему решения на примере учета только вторых разностей. Рабочие формулы напишем для координаты x.

$$x_n = f_n^{-2} + \frac{1}{12}f_n - \frac{1}{240}f_n^2$$

Назовем два последние члена редукцией

$$\mathrm{Red}_\mathrm{n} = \frac{1}{12}f_n - \frac{1}{240}f_n^2$$

и выразим вторую разность через саму функцию

$$\mathrm{Red}_\mathrm{n} = \frac{11}{120}f_n - \frac{1}{240}\left(f_{n+1} - f_{n-1}\right). \qquad (57)$$

Далее вычисляем по алгоритму

1. На заданные четыре момента вычислим f по формуле (56).
2. Определим Red_n по (57) для второго и третьего моментов.
3. $f_n^{-2} = x_n - \mathrm{Re}\,d_n$ для n=2, 3 (58)
4. $f_4^{-2} = 2f_3^{-2} - f_2^{-2} + f_3$ (59)
5. $\mathrm{Red}_4 = x_4 - f_4^{-2}$ (60)
6. Первое приближение на шаг вперед:

$\mathrm{f}_5^{-2} = 2f_4^{-2} - f_3^{-2} + f_4$ (61)

7. $\mathrm{Red}_5 = 3\,\mathrm{Re}\,d_4 - 3\,\mathrm{Re}\,d_3 + \mathrm{Re}\,d_2$ (62)
8. $\mathrm{x}_5 = f_5^{-2} + \mathrm{Re}\,d_5$ (63)

Второе приближение предыдущего шага:

9. f_5 по формуле (56) (64)
10. $\mathrm{Re}\,d_4 = \frac{11}{120}f_4 - \frac{1}{240}\left(f_5 + f_3\right)$ (65)
11. $\mathrm{x}_4 = f_4^{-2} + \mathrm{Re}\,d_4$ (66)

Для следующего шага f_4 по формуле (56).

11.2. МЕТОД ЭВЕРХАРТА

Одним из главных преимуществ метода Эверхарта является то, что он одношаговый. Он был разработан не специально для задач небесной механики и включает в себя алгоритмы решения четырех основных видов дифференциальных уравнений.

Это типы:

$$\dot{x} = f(t, x)$$

$$\ddot{\mathrm{x}} = \mathrm{f}(\mathrm{t}, \mathrm{x})$$

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$$

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}, \dot{x}, \ddot{x})$$

Нас интересует решение уравнения второго из этих видов:

$$\ddot{\mathrm{x}} = \mathrm{f}(\mathrm{t}, \mathrm{x}), \qquad (67)$$

причем в начальный момент могут быть вычислены как координаты, так и скорости, т.е. $x, \dot{x}$.

Разложим функцию f в ряд по степеням t в окрестности начальной точки t_1

$$\ddot{x} = f_1 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots A_n t^n \qquad (68).$$

Дважды интегрируя уравнение (68) по независимой переменной, получим

$$\dot{x} = \dot{x}_1 + f_1 t + A_1 \frac{t^2}{2} + \ldots A_n \frac{t^{n+1}}{n+1} \qquad (69)$$

$$\mathrm{x} = \mathrm{x}_1 + \dot{x}_1 t + f_1 \frac{t^2}{2} + A_1 \frac{t^3}{2 \cdot 3} + \ldots A_n \frac{t^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \qquad (70)$$

Полином в правой части выражения (68) не является отрезком ряда Тейлора, у него другие коэффициенты, которые и надо найти. Для этого представим функцию f в виде

$$f = f_1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t(t - t_2) + \alpha_3 t(t - t_2)(t - t_3) + \ldots \qquad (71)$$

Если шаг интегрирования h разбит на n частей, то моменты идут в порядке

$$t_1\ t_2\ t_3 \ldots t_n = T$$

Здесь начальный момент времени t_1=0, шаг интегрирования h, момент в конце шага T.

В правой части условия (71) могут быть подставлены значения f по (70) для каждого момента t.

$t_2 \quad f_2 = f_1 + \alpha_1 t_2$

$$\mathrm{t}_3 \quad f_3 = f_1 + \alpha_1 t_3 + \alpha_2 t_3 (t_3 - t_2) \qquad (72)$$

$$t_4 \quad f_4 = f_1 + \alpha_1 t_4 + \alpha_2 t_4 (t_4 - t_2) + \alpha_3 t_4 (t_4 - t_2)(t_4 - t_3)\,.$$

Условия (72) позволяют нам вычислить коэффициенты α:

$$\alpha_1 = (f_2 - f_1)/t_2$$

$$\alpha_2 = (\mathrm{f}_3 - f_1 - \alpha_1 t_3)/t_3 (t_3 - t_2) \tag{73}$$

$$\alpha_3 = (\mathrm{f}_4 - f_1 - \alpha_1 t_4 - \alpha_2 t_4 (t_4 - t_2))/t_4 (t_4 - t_2)(t_4 - t_3)\,.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в (68) и (71), найдем A_i

$$A_1 = \alpha_1 - \alpha_2 t_2 - \alpha_3 t_2 t_3$$

$$\mathrm{A}_2 = \alpha_2 - \alpha_3 t_2 - \alpha_3 t_3 \tag{74}$$

$$A_3 = \alpha_3\,.$$

Тогда искомые значения координат и скоростей, которые очень важны, например, для определения орбиты, на конце шага

$$x(T) = x_1 + \dot{x}_1 T + f_1 \frac{T^2}{2} + A_1 \frac{T^3}{2 \cdot 3} + A_2 \frac{T^4}{3 \cdot 4} + \ldots$$

$$\dot{\mathrm{x}}(\mathrm{T}) = \dot{\mathrm{x}}_1 + f_1 T + A_1 \frac{T^2}{2} + A_2 \frac{T^3}{3} + \ldots \tag{75}$$

Схема решения для числа разбиения шага интегрирования n=5.

Исходные данные: h — шаг интегрирования;

n — число разбиений шага;

x, y, z - координаты и компоненты;

$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ - скорости тела в исходный момент;

t_1 — начальный момент, на который даны координаты и скорость.

1. Вычислим узлы разбиения шага

$$t_1 \quad t_2 = \frac{h}{4} \quad t_3 = 2\frac{h}{4} \quad t_4 = 3\frac{h}{4} \quad t_5 = T = h$$

2. Получим значения функций в исходный момент. При этом в правой части запишем только основные члены, не учитывая возмущения от других тел.

$$\mathrm{f}_{1\mathrm{x}} = -k^2 \frac{x_1}{r_1^3}; \quad f_{1y} = -k^2 \frac{y_1}{r_1^3}; \quad f_{1z} = -k^2 \frac{z_1}{r_1^3}; \quad r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2\,.$$

Далее все вычисления идут параллельно по каждой координате.

3. В первом приближении имеем:

$$x_2 = x_1 + \dot{x}_1 t_2 + f_1 \frac{t_2^2}{2} \tag{76}$$

$$x_3 = x_1 + \dot{x}_1 t_3 + f_1 \frac{t_3^2}{2}$$

$$x_4 = x_1 + \dot{x}_1 t_4 + f_1 \frac{t_4^2}{2}$$

4. Вычисляем f_2, f_3, f_4 по формулам (76).

5. Определяем вспомогательные коэффициенты:

$$\alpha_1 = \frac{\mathrm{f}_2 - f_1}{t_2}$$

$$\alpha_2 = \frac{\mathrm{f}_3 - f_1 - \alpha_1 t_3}{t_3(t_2 - t_3)}$$

$$\alpha_3 = \frac{\mathrm{f}_4 - f_1 - \alpha_1 t_4 - \alpha_2 t_4 (t_4 - t_2)}{t_4(t_4 - t_2)(t_4 - t_3)}$$

6. Получаем коэффициенты основного ряда:

$$\mathrm{A}_1 = \alpha_1 - \alpha_2 t_2 - \alpha_3 t_2 + \alpha_3 t_2 t_3$$

$$\mathrm{A}_2 = \alpha_2 + \alpha_3 t_2 t_3$$

$$\mathrm{A}_3 = \alpha_3$$

7. Теперь можно вычислить координаты и скорость на конечный момент шага:

$$x(T) = x_1 + \dot{x}_1 T + f_1 \frac{T^2}{2} + A_1 \frac{T^3}{2 \cdot 3} + A_2 \frac{T^4}{3 \cdot 4} + A_3 \frac{T^5}{4 \cdot 5}$$

$$\dot{\mathrm{x}}(\mathrm{T}) = \dot{\mathrm{x}}_1 + f_1 T + A_1 \frac{T^2}{2} + A_2 \frac{T^3}{3} + A_3 \frac{T^4}{4}.$$

Таким образом, мы получили координаты и скорости в первом приближении.

8. Вычисляем уточненные координаты:

$$x_2 = x_1 + \dot{x}_1 t_2 + f_1 \frac{t_2^2}{2} + \left[A_1 \frac{t_2^3}{2 \cdot 3} + A_2 \frac{t_2^4}{3 \cdot 4} + A_3 \frac{t_2^5}{4 \cdot 5} \right]$$

$$x_3 = x_1 + \dot{x}_1 t_3 + f_1 \frac{t_3^2}{2} + \left[A_1 \frac{t_3^3}{2 \cdot 3} + A_2 \frac{t_3^4}{3 \cdot 4} + A_3 \frac{t_3^5}{4 \cdot 5} \right]$$

$$x_4 = x_1 + \dot{x}_1 t_4 + f_1 \frac{t_4^2}{2} + \left[A_1 \frac{t_4^3}{2 \cdot 3} + A_2 \frac{t_4^4}{3 \cdot 4} + A_3 \frac{t_4^5}{4 \cdot 5} \right]$$

9. Идем на второе приближение, начиная с пункта 4: f_2, f_3, f_4 и т.д.

Процесс последовательных приближений повторяется до тех пор, пока два последовательно полученных значения x(T) не будут отличаться друг от друга меньше, чем заранее заданная ошибка ε.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. А б а л а к и н В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Ю. А., Рябов Ю. А. Справочное руководство по небесной механике. «Наука», 1971.
2. Б а л к М. Б. Элементы динамики космического полета. «Наука», 1965.
3. Дубошин Г. Н. Небесная механика. «Наука», 1968.
4. Субботин М. Ф. Курс небесной механики. Т. 1. «Гостехиздат», 1941.
5. Эскобал П. Методы определения орбит. «Мир», 1970.

Дополнительная

6. Д у б я г о А. Д., Определение орбит. «Гостехиздат», 1949.
7. Субботин М. Ф., Введение в теоретическую астрономию. «Наука», 1968.
8. Эльясберг П. Е., Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. «Наука», 1965.
9. Ишмухаметова М.Г., Кондратьева Е.Д. Методы астродинамики. Часть 1. Методическое пособие, Казань, КГУ, 2002.
10. Ишмухаметова М.Г. Методы астродинамики. Часть 2. Методическое пособие, Казань, КГУ, 2003.