



# CALCUL DE LA PROBABILITE'

## DANS LE JEU DE RENCONTRE,

PAR M. EULER.

---

I.  
**L**e Jeu de rencontre est un Jeu de Hazard, où deux personnes ayant chacune un entier jeu de cartes, en tirent à la fois une carte après l'autre, jusqu'à ce qu'il arrive, qu'elles rencontrent la même carte : & alors une des deux personnes gagne. Or, lorsqu'une telle rencontre n'arrive point du tout, alors c'est l'autre des deux personnes qui gagne. Cela posé, on demande la probabilité, que l'une & l'autre de ces deux personnes aura de gagner.

II. Pour fixer mieux nos idées, on peut supposer que ces deux personnes dont l'une soit nommée A, & l'autre B, ayent chacune un certain & même nombre de billets marqués des nombres 1, 2, 3, 4, 5 &c. & que chacune en tire un billet après l'autre, jusqu'à ce qu'elles rencontrent le même numero à la fois : & que ce soit la personne A qui gagne alors. Or s'il arrive, que ces deux personnes tirent tous leurs billets sans rencontrer jamais le même nombre, que la personne B gagne.

III. Comme il est indifférent, de quel *numero* chaque billet soit marqué, il est permis de supposer que A tire ses billets selon l'ordre

1, 2, 3, 4, 5, &c. Ou pour faire l'application aux cartes, on concevra les cartes de l'un & l'autre jeu tellement numerotées selon l'ordre comme elles sont tirées successivement par A : de sorte que N<sup>ro</sup> 1. sera la carte que A tire la première, N<sup>ro</sup> 2. celle qu'il tire la seconde ; N<sup>ro</sup> 3 la troisième, & ainsi de suite.

IV. Ainsi la personne A, qui est pour la rencontre, gagnera lorsque B tire de son paquet de cartes au premier coup N<sup>ro</sup> 1 ; ou au second N<sup>ro</sup> 2 : ou au troisième N<sup>ro</sup> 3, ou au quatrième N<sup>ro</sup> 4, &c. Or s'il arrive, que le numero de la carte tirée par B ne répond jamais au numero de la carte tirée par A au même coup ; ce sera alors B qui gagne le dépôt. Par ce moyen il semble que la recherche de ce jeu est rendue la plus aisée, pour y appliquer le calcul.

V. La question est donc de déterminer la probabilité, qu'aura tant A que B pour gagner le dépôt, quel que soit le nombre des cartes, ou des billets numerotés. Car on voit d'abord que cette détermination varie selon le nombre des billets, & qu'elle devient d'autant plus compliquée, plus le nombre des billets sera grand. Il conviendra donc de commencer cette recherche par les plus petits nombres de billets, & d'en partir pour arriver successivement à de plus grands.

VI. Supposons donc d'abord que l'un & l'autre des joueurs n'ait qu'une seule carte marquée de 1. & il est clair que la rencontre ne sauroit manquer, de sorte que A gagnera infailliblement. Dans ce cas donc la probabilité de gagner de A sera exprimée par 1, & celle de B par 0 : puisque celui-cy n'a aucune espérance de gagner.

VII. Que l'un & l'autre des joueurs A & B ait maintenant deux cartes numerotées de 1 & 2 ; & que A tire ses cartes selon les numeros 1 & 2. Dans cette supposition il y aura deux cas : car B tirera ses deux cartes, ou dans l'ordre 1, 2. ou dans l'ordre 2 & 1. Le premier donnant d'abord au premier coup une rencontre fera gagner A, l'autre ne donnant aucune rencontre fera gagner B.

VIII.

VIII. Puisque donc l'un & l'autre de ces deux cas est également probable, tant A que B auront chacun un cas pour gagner. Et partant la probabilité de l'un & de l'autre sera exprimée par  $\frac{1}{2}$  : ou bien chacun aura droit de prétendre à la moitié du dépôt.

IX. Posons que les deux joueurs aient chacun trois cartes marquées des nombres 1, 2, 3, & que A tire en premier lieu N<sup>ro</sup> 1. en second N<sup>ro</sup> 2, en troisième N<sup>ro</sup> 3. Or B pourra tirer ses cartes en 6 manières différentes de la sorte ;

	B					
A	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	2	3	3
2	2	3	1	3	2	1
3	3	2	3	1	1	2

& il y a également de probabilité que chacun de ces 6 cas arrive actuellement.

X. De ces 6 cas il y en aura donc deux, le premier & le second, qui feront gagner A, & où le jeu finit par conséquent au premier coup ; des quatre autres cas il n'y en a qu'un, savoir le cinquième, qui fera gagner A au second coup, & qui y finit le jeu. Parmi les trois autres cas, il y a encore le troisième, qui fait gagner A au troisième coup.

XI. Ainsi en tout, parmi tous les 6 cas possibles il y en a quatre, qui sont favorables à A : & les deux autres, savoir le quatrième & le sixième mettront B en possession du gain. Donc A ayant quatre cas pour gagner, & B deux, l'espérance de A est  $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ , & celle de B  $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$  : ou l'avantage de A est deux fois plus grand que celui de B.

XII. Donnons maintenant à chacun de nos joueurs 4 cartes 1, 2, 3, 4 ; & pendant que A tire ses cartes dans l'ordre 1, 2,

3, 4, l'ordre des cartes de B peut varier en 24 manières différentes, de la sorte ;

A	B																							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4
2	2	2	3	3	4	4	3	3	4	4	1	1	4	4	1	1	2	2	1	1	2	2	3	3
3	3	4	4	2	2	3	4	1	1	3	4	3	1	2	2	4	1	4	2	3	3	1	1	2
4	4	3	2	4	3	2	1	4	3	1	3	4	2	3	4	2	4	1	3	2	1	3	2	1

& chacun de ces 24 cas est également possible.

XIII. Il est évident, que les six premiers cas font d'abord gagner A au premier coup ; & puisque le jeu s'y finit, j'ai rayé les nombres suivans de ces 6 colonnes. Des 18 cas qui restent il y en a 4, savoir les cas 17, 18, 21, & 22, qui font gagner A au second coup, où ces colonnes seront par conséquent terminées. Quatorze cas continueront donc le jeu jusqu'au troisième coup ; & il y en a trois, le 10, 12 & 20, qui terminent le jeu en faveur de A. Enfin des onze cas du reste il n'y en a que deux, qui donnent une rencontre pour le quatrième & dernier coup.

XIV. Ayant donc 6 cas, où A gagne au premier coup, 4 cas où il gagne au second coup, trois cas où il gagne au troisième coup, & deux cas, où il gagne au quatrième coup ; il y aura en tout 15 cas favorables à A, & les 9 autres cas feront gagner B. Par conséquent la probabilité de gagner de A sera  $\frac{15}{24} = \frac{5}{8}$  & celle de B  $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$  ; ou bien l'espérance de A sera à celle de B comme 5 à 3.

XV. Si nous posons le nombre des cartes = 5, on auroit en tout 120 cas différens pour les variations, qui pourroient arriver dans l'ordre des cartes tirées par B, pendant que A tireroit ses cartes  
selon

selon les numeros 1, 2, 3, 4, 5. Or cela meneroit trop loin, si nous voulions représenter tous ces cas, pour voir, combien en seroient favorables à A & à B; & un encore plus grand nombre de cartes rendroit cette représentation tout à fait impraticable.

XVI. D'ailleurs un tel dénombrement actuel ne serviroit pas beaucoup à déterminer en général les espérances des deux joueurs A & B, quelque grand que soit le nombre des cartes. Pour cet effet il faut faire des remarques générales, qui nous puissent conduire à la connoissance des plus grands nombres de cartes, sachant déjà les probabilités pour les plus petits nombres.

XVII. Je remarque donc premièrement en général, que le nombre de cartes étant  $= m$ , il y aura autant de cas différens que le produit de tous les nombres 1, 2, 3, 4, jusqu'à  $m$  contient d'unités: ou bien ce nombre de cas est  $= 1. 2. 3. 4 - - - m$ . Or je suppose toujours, que A tire ses cartes selon l'ordre des numeros 1, 2, 3, 4 - - -  $m$ , dont elles sont marquées, & le produit 1. 2. 3. 4 - - -  $m$  donnera le nombre des cas, qui peuvent arriver dans l'ordre des cartes tirées par B.

XVIII. Cela est clair par les premiers principes des combinaisons, d'où l'on fait que l'ordre de 2 cartes peut varier 2 fois, de 3 cartes, 6 fois; de 4 cartes 24 fois; de 5 cartes 120 fois; de 6 cartes 720 fois; de 7 cartes 5040 fois; de 8 cartes 40320 fois; & en général de  $m$  cartes autant de fois que le produit 1. 2. 3. 4 - - -  $m$  contient d'unités.

XIX. Ce nombre de cas 1. 2. 3. 4 - - -  $m$  étant posé pour abrégé  $= M$ , je remarque en second lieu, qu'il y aura  $\frac{M}{m}$  cas où la premiere carte tirée par B est 1; qu'il y aura  $\frac{M}{m}$  cas où la premiere carte tirée par B est 2: & qu'il y aura autant de

de cas où la première carte de B est ou 3, ou 4, ou 5 &c. ou enfin  $m$ .

XX. De plus, si nous faisons abstraction, que le jeu finit aussi-tôt, que B aura rencontré la carte de A, & que nous supposons qu'ils continuent à tirer leurs cartes jusqu'à la fin, quoiqu'il y fut arrivé une ou plusieurs rencontres, il est aussi clair, qu'il y aura  $\frac{M}{m}$  cas, où la seconde carte de B sera 2 ; & autant de cas, où la troisième carte sera 3, ou la quatrième 4, ou la cinquième 5, ou la sixième 6, & ainsi de suite.

XXI. Donc, dans cette supposition, qu'on continuë de tirer les cartes jusqu'à la fin, il y aura  $\frac{M}{m}$  cas, que A gagne au premier coup ; de même  $\frac{M}{m}$  cas, qu'il gagne au second coup, & toujours autant de cas, qu'il gagne au troisième coup, ou au quatrième, ou au cinquième, &c. ou même au dernier coup.

XXII. Mais en effet quoiqu'il y ait  $\frac{M}{m}$  cas, qui font gagner A au premier coup ; il n'y aura pas autant de cas, qui le font gagner au second coup : puisque des  $\frac{M}{m}$  cas, qui le feroient gagner au second coup, dans la supposition précédente, il faut retrancher ceux qui l'ont déjà fait gagner au premier coup ; - car, dès qu'il aura gagné au premier coup, le jeu ne se continuë pas au delà.

XXIII. Il en est de même du nombre  $\frac{M}{m}$  de cas, où B tireroit la carte N<sup>ro</sup> 3 ; car il en faut retrancher les cas, qui ont déjà rencontré, ou au premier coup, ou au second. Et pour que A gagne au qua-

quatrième coup, il faut ôter du nombre de tous les cas où cela arrive, qui est  $= \frac{M}{m}$ , ceux qui auront déjà eu une rencontre, ou dans le premier, ou dans le second, ou dans le troisième coup.

XXIV. En général donc, le nombre des cas qui feroient gagner A à un coup quelconque, étant  $= \frac{M}{m}$ , dans l'hypothèse précédente, il en faut exclure tous ceux, où il s'est déjà trouvé une rencontre dans quelcun des coups précédens : de sorte que le nombre des cas devient de plus en plus moindre, plus le coup est éloigné du commencement.

XXV. Pour juger donc de combien il faut diminuer le nombre des cas favorables  $\frac{M}{m}$  à chaque coup, ou pour en connoître le nombre de ceux qui ont déjà eu une rencontre dans quelque coup précédent, voilà comme je m'y prends. Je conçois que la carte qui se rencontre au coup proposé soit ôtée de l'un & de l'autre jeu, & l'ordre des cartes & le nombre des cas sera le même, que si le nombre des cartes étoit d'une unité moindre.

XXVI. Pour rendre cela plus intelligible, considérons le cas de 4 cartes & des 24 cas, qui y ont lieu, ceux où B tire au troisième coup la carte N<sup>ro</sup> 3, qui sont les cas marqués 1, 6, 10, 12, 20, 21. Otons de ces cas la carte marquée N<sup>ro</sup> 3, & nous aurons

A	B					
1	1	1	2	2	4	4
2	2	4	4	1	1	2
4	4	2	1	4	2	1

qui sont précisément les cas, qu'on auroit pour trois cartes marquées des nombres 1, 2, 4.



XXVII. Puisque ce sont les cas, où B tire au troisième coup la carte N<sup>ro</sup> 3, & qu'il en faut retrancher ceux qui ont déjà eu une rencontre, ou dans le premier coup, ou dans le second; il est clair que ce nombre à retrancher se trouve des cas de trois cartes, en ajoutant ensemble les cas, où A gagneroit alors au premier coup & au second.

XXVIII. En général donc, si le nombre des cartes est  $= m$ , & qu'on veuille savoir de combien il faut diminuër le nombre de cas  $\frac{M}{m}$ , qui ont une rencontre à un coup quelconque; il faut avoir recours au nombre des cartes  $= m - 1$ , & en chercher les cas, qui feroient gagner A à quelcun des coups précédens, & le nombre de tous ces cas ensemble fera celui dont il faut diminuer le nombre  $\frac{M}{m}$ , pour avoir le nombre de cas, qui feront gagner actuellement A à un coup proposé.

XXIX. Posons donc le nombre des cartes  $= m$ , & le nombre de tous les cas, qui lui convient 1. 2. 3. 4. - - -  $m = M$  & soit le nombre des cas

	qui font gagner A
$a$ - - - - -	au premier coup
$b$ - - - - -	au second coup
$c$ - - - - -	au troisième coup
$d$ - - - - -	au quatrième coup
$e$ - - - - -	au cinquième coup
	&c.

& nous avons vû que  $a = \frac{M}{m}$ ; pour les autres nombres  $b, c, d, e$ , &c. nous verrons bientôt leur progression.

XXX. Soit maintenant le nombre des cartes d'une unité plus grand, ou  $= m + 1$ , & le nombre de tous les cas fera

=

$= 1. 2. 3. 4. \dots (m+1) = M(m+1)$ , qui soit  $= M'$   
 Soit ensuite comme auparavant

le nombre des cas	qui font gagner A
$a'$ . . . . .	au premier coup
$b'$ . . . . .	au second coup
$c'$ . . . . .	au troisième coup
$d'$ . . . . .	au quatrième coup
$e'$ . . . . .	au cinquième coup
	&c.

XXXI. Cela posé, nous aurons  $a' = \frac{M}{m+1} = M :$  & en

continuant le jeu, nonobstant les rencontres déjà arrivées, il y aura  $M$  cas aussi, où arriveroit une rencontre au second coup : mais de ceux-ci il faut exclure ceux qui ont déjà eu une rencontre au premier coup ; & ce nombre étant  $= a$ , comme nous avons vû (28), nous aurons  $b' = M - a$ , pour le nombre des cas, qui font actuellement gagner A au second coup.

XXXII. Le nombre des cas, où la rencontre arrive au troisième coup étant aussi  $= M$ , & qu'il en faut exclure ceux qui ont déjà eu de rencontre dans le premier ou second coup ; c'est à dire ceux qui feroient gagner A au premier ou second coup, lorsque le nombre des cartes seroit d'une moindre, nous aurons le nombre des cas, qui feront actuellement gagner A au troisième coup  $c' = M - a - b$ .

XXXIII. Il en est de même des cas, qui feront gagner A à quelqu'un des coups suivant ; & partant en connoissant les nombres  $a, b, c, d, \&c.$  pour le nombre des cartes  $= m$ , nous en tirerons aisément les nombres  $a', b', c', d', \&c.$  lorsque le nombre des cartes est  $= m + 1$ . Car on aura

$a'$

$$\begin{aligned}
 a' &= M \\
 b' &= M - a \\
 c' &= M - a - b \\
 d' &= M - a - b - c \\
 e' &= M - a - b - c - d \\
 &\text{\&c.}
 \end{aligned}$$

XXXIV. Sachant donc, que lorsque le nombre des cartes est  $m = 1$ , &  $M = 1$ , il est  $a = 1$ ; on aura pour deux cartes  $a' = 1$ , &  $b' = 1 - 1 = 0$ ; soit maintenant  $m = 2$ ; & ayant  $M = 2$ ;  $a = 1$ ;  $b = 0$ , & on aura pour trois cartes :

$$a' = 2; \quad b' = 2 - 1 = 1; \quad c' = 2 - 1 - 0 = 1$$

Pofons de plus  $m = 3$ , & ayant  $M = 6$ ;  $a = 2$ ;  $b = 1$ ;  $c = 1$  nous aurons pour quatre cartes :

$$a' = 6; \quad b' = 6 - 2 = 4; \quad c' = 6 - 2 - 1 = 3; \quad d' = 6 - 2 - 1 - 1 = 2$$

XXXV. De cette façon nous pourrons continuer ces nombres à des nombres de cartes aussi grands qu'on voudra : & pour en voir mieux la progression, représentons les de la manière suivante :

NOMBRE DES CARTES

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
<i>a</i>	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880
<i>b</i>	-	0	1	4	18	96	600	4320	35280	322560
<i>c</i>	-	-	1	3	14	78	504	3720	30960	387280
<i>d</i>	-	-	-	2	11	64	426	3216	27240	256320
<i>e</i>	-	-	-	-	9	53	362	2790	24024	229080
<i>f</i>	-	-	-	-	-	44	309	2428	21234	205056
<i>g</i>	-	-	-	-	-	-	265	2119	18806	183822
<i>h</i>	-	-	-	-	-	-	-	1854	16687	165016
<i>i</i>	-	-	-	-	-	-	-	-	14833	148329
<i>k</i>	-	-	-	-	-	-	-	-	-	133496

XXXVI.

XXXVI. Si nous divisons ces nombres par les nombres de tous les cas possibles, qui répondent à chaque nombre de cartes, nous en tirerons premièrement les espérances de A pour gagner au premier coup :

Nombre des cartes	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	&c.
Espérance de A	1,	$\frac{1}{2}$ ,	$\frac{2}{3}$ ,	$\frac{3}{4}$ ,	$\frac{4}{5}$ ,	$\frac{5}{6}$ ,	$\frac{6}{7}$ ,	$\frac{7}{8}$ ,	$\frac{8}{9}$ ,	&c.

D'où nous concluons, que si le nombre des cartes est  $= n$ , l'espérance de A de gagner au premier coup sera  $= \frac{1}{n}$ .

XXXVII. Si nous considérons les nombres de la table §. 35, nous voyons d'abord que chaque nombre est la différence de celui qui est au dessus, & de celui qui le précède. Ainsi, si pour le nombre des cartes  $m$ , le nombre des cas qui font gagner A à un certain coup est  $p$ ; & le nombre des cas qui le font gagner au même coup, si le nombre des cartes est  $= m + 1$ , soit  $= q$ , & le nombre des cas qui le font gagner au coup suivant  $= r$ , le nombre des cartes demeurant  $= m + 1$ , on aura toujours  $r = q - p$ .

XXXVIII. Donc pour le nombre des cartes  $= m$ , le nombre de tous les cas étant  $= 1. 2. 3. 4. \dots m = M$ , l'espérance de A de gagner à un certain coup sera  $= \frac{p}{M}$ ; que je nommerai  $= P$ .

Or pour le nombre des cartes  $= m + 1$ , le nombre de tous les cas étant  $= M(m + 1)$ , l'espérance de A de gagner au même coup sera  $= \frac{q}{M(m + 1)}$ , qui soit posée  $= Q$ , & l'espérance de gagner

au coup suivant  $= \frac{r}{M(m + 1)}$ , qui soit  $= R$ . Cela posé on aura

$$R = \frac{q - p}{M(m + 1)} \text{ ou bien } R = Q - \frac{P}{m + 1}.$$



XXXIX. Donc posant le nombre des cartes  $= n - 1$ ; puis-  
 que l'espérance de A de gagner au premier coup est  $= \frac{1}{n-1}$ ; pour  
 le nombre des cartes  $= n$ , l'espérance de A de gagner au second  
 coup sera  $= \frac{1}{n} - \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n-2}{(n-1)n}$ .

XL. Or l'espérance de A de gagner au second coup, que le  
 nombre des cartes est  $= n - 1$  étant  $\frac{n-3}{(n-2)(n-1)}$ ; nous en con-  
 cluons, que lorsque le nombre des cartes est  $= n$ , son espérance  
 de gagner au troisième coup sera  $= \frac{n-2}{(n-1)n} - \frac{(n-3)}{(n-2)(n-1)n}$   
 $= \frac{nn-5n+7}{(n-2)(n-1)n} = \frac{(n-2)^2 - (n-2)}{n(n-1)(n-2)}$ .

XLI. De là nous concluons de la même manière, que pour  
 le nombre des cartes  $= n$ , l'espérance de A de gagner au quatrième  
 coup sera  $= \frac{(n-2)^2 - (n-3)}{n(n-1)(n-2)} - \frac{(n-3)^2 + (n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$   
 $= \frac{(n-2)^2(n-3) - 2(n-3)^2 + (n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$ ; & son espérance de gagner au  
 cinquième coup  $= \frac{(n-2)^2(n-3) - 2(n-3)^2 + (n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$   
 $- \frac{(n-3)^2(n-4) - 2(n-4)^2 + (n-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$   
 $= \frac{(n-2)^2(n-3)(n-4) - 3(n-3)^2(n-4) + 3(n-4)^2 - (n-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$

XLII.

XLII. Pour peu qu'on réfléchisse sur la formation de ces formules, on trouvera que le nombre des cartes étant  $= n$ , l'espérance de A de gagner sera

$$\text{au premier coup} = \frac{1}{n}$$

$$\text{au deuxième coup} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\text{au troisième coup} = \frac{1}{n} - \frac{2}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\text{au quatrième coup} = \frac{1}{n} - \frac{3}{n(n-1)} + \frac{3}{n(n-1)(n-2)} - \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$\text{au cinquième coup} = \frac{1}{n} - \frac{4}{n(n-1)} + \frac{6}{n(n-1)(n-2)} - \frac{4}{n(n-1)(n-2)(n-3)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

$$\text{au sixième coup} = \frac{1}{n} - \frac{5}{n(n-1)} + \frac{10}{n(n-1)(n-2)} - \frac{10}{n(n-1)(n-2)(n-3)} + \frac{5}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} - \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}$$

&c.

XLIII. Donc l'espérance de A de gagner en général à quelque coup que ce soit, sera exprimée par la somme de toutes ces formules prises ensemble. Or le nombre de ces formules étant égal au nombre des cartes  $n$ , la somme de tous les premiers termes sera  $= n$ .

$\frac{1}{n} = 1$  : Ensuite la somme des numérateurs des seconds termes étant

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \text{ la somme}$$

de tous les seconds termes sera  $= \frac{1}{1 \cdot 2}$ . Depuis, parce que  $1 +$

$$3 + 6 + 10 + \dots + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

la somme des troisièmes termes est  $= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ , & la somme des qua-

trièmes  $= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ , des cinquièmes  $= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ , & ainsi de suite.

XLIV. De là il s'ensuit donc, que

le nombre des cartes étant	l'espérance de gagner de A fera
1	1
2	$1 - \frac{1}{1 \cdot 2}$
3	$1 - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$
4	$1 - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$
5	$1 - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$
6	$1 - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$

prenant de cette suite toujours autant de termes, qu'il y a de cartes.

XLV. L'espérance de A est donc la plus grande au cas d'une carte, & la plus petite au cas de deux cartes. Ensuite on voit, que lorsque le nombre des cartes est impair, l'espérance de A est toujours plus grande, que pour tout nombre pair de cartes. Or si le nombre des cartes est pair, alors l'espérance de A est moindre, que pour tout nombre impair de cartes.

XLVI.



**XLVI.** Ayant trouvé l'espérance de A, on n'a qu'à l'ôter de l'unité, pour avoir l'espérance de B : car l'espérance de l'un & de l'autre marque la partie du dépôt, à laquelle l'un & l'autre peut prétendre en vertu de la probabilité, qu'il a de le gagner tout entier. Ainsi l'espérance de A étant  $= x$ , celle de B sera  $= 1 - x$ .

**XLVII.** Les formules, que je viens de trouver pour l'espérance de A, se réduiront aisément à des fractions décimales, d'où l'on jugera mieux de leur véritable valeur. Ainsi ayant fait ce calcul je trouve.

nombre des cartes.	l'espérance de A	l'espérance de B
1	1, 0000000000	0, 0000000000
2	0, 5000000000	0, 5000000000
3	0, 6666666666	0, 3333333333
4	0, 6250000000	0, 3750000000
5	0, 6333333333	0, 3666666666
6	0, 6319444444	0, 3680555555
7	0, 632142857	0, 367857143
8	0, 632118055	0, 367881945
9	0, 632120811	0, 367879189
10	0, 632120536	0, 367879464
11	0, 632120561	0, 367879439
12	0, 632120558	0, 367879442
13	0, 632120559	0, 367879441
14	0, 632120558	0, 357879442
15	0, 632120558	0, 367879442
	&c.	&c.

**XLVIII.** Donc, si nous négligeons les fractions décimales, qui suivent après la neuvième, on peut dire que, dès que le nombre des

cartes est plus grand que 12, les espérances de A & de B ne varient plus, quelque grand que soit le nombre des cartes. Ainsi, lorsque le nombre des cartes n'est pas au-dessous de 12, on pourra dire que l'espérance de A est  $\approx 0,632120558$ , & celle de B  $\approx 0,367879442$ .

XLIX. Pourvu donc que le nombre des cartes ne soit pas moindre que 12, l'espérance de A sera toujours à celle de B à peu près comme 12, à 7, ou plus exactement comme 122 à 71, ou encore plus exactement comme 1720 à 1001. Ou bien parmi 19 jeux qu'on joue, il y en aura probablement 12 qui font gagner A, & 7 qui feront gagner B.

L. Si le nombre des cartes étoit infini, l'espérance de A seroit exprimée par cette serie infinie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} - \frac{1}{720} + \&c.$$

& l'espérance de B par celle-cy

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \&c.$$

Or posant  $e$  pour marquer le nombre, dont le logarithme est  $\approx 1$ , on fait que  $\frac{1}{e}$  exprime cette dernière serie. Donc pour le cas  $n = \infty$ ,

l'espérance de A sera  $\approx 1 - \frac{1}{e}$ , & celle de  $\approx \frac{1}{e}$  : mais on a

$$e \approx 2,718281828459045235360.$$

LI. Substituant cette valeur pour  $e$  on trouvera que l'espérance de A est à celle de B comme

$$1,718281828459045235360 \text{ à } 1.$$

& cette proportion sera juste aussi-tôt que le nombre des cartes sera plus grand que 20. Par conséquent elle sera très exacte pour le cas de ce jeu, comme il se joue ordinairement, en y employant un jeu entier de 52 cartes.

\* \*      \* \*      \* \*