DE MIRABILIBVS PROPRIETATIBVS NVMERORVM PENTAGONALIVM.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Ad classem numerorum pentagonalium non solum eos refero, qui vulgo proprie ita nominari solent & in formula $\frac{3nn-n}{2}$ continentur, sed etiam eos, quos ista formula: $\frac{3nn+n}{2}$ suppeditat; ita vt formula generalis omnium horum numerorum sit $\frac{3nn\mp n}{2}$, ex qua igitur nascitur sequens geminata numerorum series, si loco n successiue scribantur ordine numeri 0, 1, 2, 3, 4, etc.

n	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
Numeri	0, 1, 5, 12, 22, 35, 51
pentagon.	0, 2, 7, 15, 26, 40, 57

Quilibet scilicet numerus pro n assumtus duos producit numeros, quos hic sibi inuicem subscripsi, ita vt series superior contineat numeros pentagonales proprie ita dictos, inferior vero eos, quos hic quoque ad eandem classem refero, et qui oriuntur si superior series retro continuetur.

tur. Hic autem binos coniunctim exhibeo, qui ex eodem numero n in formula $\frac{3nn \mp n}{2}$ oriuntur, quoniam in sequentibus eos horum numerorum distinguemus, qui vel ex numeris paribus vel imparibus pro n assumtis nascuntur.

§. 2. Quod si hos numeros ordine magnitudinis in vnam seriem coniiciamus, orietur ista progressio:

$$0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, \text{ etc.}$$

cuius ordo manifesto est interruptus, quoniam progressio differentiarum hinc fit

$$1, 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, 9, 5, 11, \text{ etc.}$$

quae mixta est ex serie numerorum naturalium et imparium. At vero ista series ad continuitatem perduci potest, si post tertium quemque terminum certa fractio interpoletur. Scilicet inter terminos 2 et 5 constituatur $\frac{10}{3}$, tum vero $\frac{28}{3}$ inter 7 et 12, porro $\frac{55}{3}$ inter 15 et 22, ita vt series completa sit

$$1, 2, \tfrac{10}{3}, 5, 7, \tfrac{28}{3}, 12, 15, \tfrac{55}{3}, 22, 26, \text{ etc.}$$

sic enim series differentiarum lege continua procedet, dum erit

$$1, \tfrac{4}{3}, \tfrac{5}{3}, 2, \tfrac{7}{3}, \tfrac{8}{3}, 3, \tfrac{10}{3}, \tfrac{11}{3}, 4, \text{ etc.}$$

Manifestum autem est, illam seriem oriri, si omnes numeri trigonales per 3 diuidantur. Hinc igitur iam pulchra se offert proprietas nostrorum numerorum pentagonalium, quod singuli ter sumti euadant numeri trigonales.

§. 3. Tales autem proprietates, quas immediate ex formulis generalibus deriuare licet, etiam in aliis numeris polygonalibus locum habere possunt, ad quas igitur non respicio; cum mihi potius propositum sit quasdam proprietates admirabiles commemorare, quibus numeri pentagonales prae omnibus reliquis polygonalibus sunt praediti. Atque hic occurrit illa insignis horum numerorum proprietas, qua iam olim ostendi, istam numerorum pentagonalium seriem tam arcte cum progressione, quam summae diuisorum numerorum naturalium constituunt, esse connexam, vt eius ope adeo lex istius seriei maxime irregularis assignari possit, id quod breuiter repetere operae pretium erit.

§. 4. Quod si quilibet numerus N cum suis divisoribus in vnam summam colligatur, quam summam hoc charactere: $\int N$ indicemus, ex numeris naturalibus sequens nascetur series primo intuitu maxime irregularis:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\int N$	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18	12

vbi termini tam inordinate progrediuntur, dum modo crescunt modo decrescunt, vt vix quisquam eorum legem deteget, quandoquidem ista series ordinem numerorum primorum manifesto in se inuoluit.

§. 5. Interim tamen demonstraui, istam progressionem, quantumuis irregularem, ad classem serierum recurrentium esse referendam, et singulos eius terminos secundum certam legem ex praecedentibus determinari posse. Quod si enim $\int N$ denotet summam omnium diuisorum huius numeri N, ipso non excepto, inueni semper fore

$$\int N = \int(N-1) + \int(N-2) - \int(N-5) - \int(N-7) + \int(N-12)$$
$$+ \int(N-15) - \int(N-22) - \int(N-26) + \text{etc.}$$

vbi

vbi numeri, qui fucceffiue ab N fubtrahuntur, conftituunt manifefto noftram feriem numerorum pentagonalium

$$1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, \text{ etc.}$$

ita vt termini, ex numeris imparibus pro n affumtis oriundi habeant fignum $+$, qui vero ex paribus nafcuntur fignum $-$. Tum vero, quouis cafu has formulas eo vsque continuari oportet, quoad numeri poft fignum $\int$ fcripti non euadant negatiui; at fi occurrat formula $\int(N-N)$, eius loco fcribi debet ipfe numerus N. Ita fi fumamus $N = 12$, erit

$$\int 12 = \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + \int 0$$

ideoque erit:

$$\int 12 = 12 + 18 - 8 - 6 + 12 = 28.$$

At vero fi fumamus $N = 13$, erit

$$\int 13 = \int 12 + \int 11 - \int 8 - \int 6 + \int 1$$

fiue erit

$$\int 13 = 28 + 12 - 15 - 12 + 1 = 14.$$

§. 6. Quoniam igitur ordo, quo fummae diuiforum progrediuntur, merito maxime irregularis videtur, nemini certe in mentem venire potuit, eum per numeros pentagonales explorari potuiffe, ex quo ifta fpeculatio vtique maxime eft admiranda. Afferam autem adhuc aliam eiusmodi proprietatem, quae quidem cum expofita arctiffime eft connexa, attamen ad plures non minus admirandas proprietates perducit, quae omnes pariter in natura numerorum noftrorum pentagonalium funt fundatae.

§. 7. Fundamentum autem omnium harum mirabilium proprietatum in euolutione huius producti infiniti:

$$S = (1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)(\text{etc.}$$

continetur: demonstraui enim, si singuli hi factores actu in se inuicem multiplicentur, tum denique resultare istam seriem:

$$S = 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.}$$

vbi exponentes ipsius x constituunt nostram seriem numerorum pentagonalium, ratione signorum autem $+$ et $-$ ambo alternatim geminantur, ita vt qui exponentes ex numeris paribus pro n assumtis oriuntur, eae potestates habeant signum $+$, reliqui vero ex imparibus ortis signum $-$. Haec igitur non minus admirationem nostram meretur quam proprietas ante commemorata, cum nulla certe appareat ratio, vnde vllus nexus intelligi possit inter euolutionem illius producti et nostros numeros pentagonales.

§. 8. Cum igitur series ista potestatum ipsius x aequalis sit producto illi infinito, si eam nihilo aequalem statuamus, vt habeamus hanc aequationem:

$$0 = 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.}$$

ea omnes easdem inuoluet radices, quas productum illud includit. Ex primo scilicet factore $1-x$ nihilo aequatum erit $x = 1$; ex secundo factore $1 - xx$ erit vel $x = +1$ vel $x = -1$; ex tertio factore $1 - x^3$ nascuntur hae tres radices:

$$1^\circ)\ x = 1,\quad 2^\circ)\ x = -\frac{1+\sqrt{-3}}{2},\quad 3^\circ)\ x = -\frac{1-\sqrt{-3}}{2};$$

ex quarto autem factore $1 - x^4 = 0$ oriuntur hae quatuor radices:

1°)

$1^\circ)\ x = +1,\ 2^\circ)\ x = -1,\ 3^\circ)\ x = +\sqrt{-1}$ et
$4^\circ)\ x = -\sqrt{-1};$

quintus autem factor $1 - x^5 = 0$ suppeditat has quinque radices:

$$1^\circ)\ x = 1,\ 2^\circ)\ x = \frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}$$

$$3^\circ)\ x = \frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4},\ 4^\circ)\ x = \frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}$$

$$5^\circ)\ x = \frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4};$$

sextus autem factor praebet has sex radices:

$$1^\circ)\ x = 1,\ 2^\circ)\ x = -1,\ 3^\circ)\ x = \frac{+1+\sqrt{-3}}{2},$$

$$4^\circ)\ x = \frac{+1-\sqrt{-3}}{2},\ 5^\circ)\ x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},$$

$$6^\circ)\ x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$ etc. etc.

§. 9. Hinc igitur patet, omnes radices cuiuscunque potestatis ex vnitate simul esse radices nostrae aequationis. Ac si rem in genere consideremus, ponendo $1 - x^n = 0$, primo patet, vnam radicem semper esse $x = 1$, ac si n fuerit numerus par, aliam radicem fore $x = -1$. Pro reliquis autem radicibus considerari debent factores trinomiales formulae $1 - x^n$, qui, vti alibi satis est expositum, in hac forma generali continentur:

$$1 - 2x \operatorname{cos.} \frac{2i\pi}{n} + xx,$$

sumendo pro i successiue omnes numeros integros ipso $\frac{1}{2}n$ non maiores. Hoc autem factore nihilo aequato eruuntur istae duae radices:

$$x = \operatorname{cos.} \frac{2i\pi}{n} + \sqrt{-1} \operatorname{sin.} \frac{2i\pi}{n} \text{ et}$$
$$x = \operatorname{cos.} \frac{2i\pi}{n} - \sqrt{-1} \operatorname{sin.} \frac{2i\pi}{n}.$$

Hinc enim viciſſim fit

$$x^n = \cos. 2 i \pi \pm \sqrt{-1} \sin. 2 i \pi.$$

Eſt autem $\cos. 2 i \pi = 1$ et $\sin. 2 i \pi = 0$, ideoque $x^n = 1$; vnde, ſi pro n et i ſucceſſiue omnes numeri integri accipiantur, haec forma:

$$x = \cos. \tfrac{2 i \pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin. \tfrac{2 i \pi}{n}$$

praebebit omnes radices noſtrae aequationis

$$0 = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.}$$

ita vt iſtius aequationis omnes plane radices aſſignare valeamus.

§. 10. Quod ſi ergo omnes radices iſtius aequationis litteris α, β, γ, δ, ε, etc. indicemus, eius factores erunt $\frac{1-x}{\alpha}$, $\frac{1-x}{\beta}$, $\frac{1-x}{\gamma}$, $\frac{1-x}{\delta}$, etc. vnde ex natura aequationum colligimus fore ſummam omnium harum fractionum: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} +$ etc. $= 1$, ſummam vero productorum ex binis $= -1$, tum vero ſummam productorum ex ternis $= 0$, ſummam productorum ex quaternis $= 0$, ſummam productorum ex quinis $= -1$, ſummam productorum ex ſenis $= 0$, ſummam productorum ex ſeptenis $= -1$, etc. Hinc autem porro concludimus fore ſummam quadratorum illarum fractionum, ſcilicet

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\delta^2} + \text{etc.} = 3,$$

ſummam cuborum

$$\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3} + \frac{1}{\delta^3} + \text{etc.} = 4,$$

ſummam biquadratorum

$$\frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{\beta^4} + \frac{1}{\gamma^4} + \frac{1}{\delta^4} + \text{etc.} = 7,$$

et ita porro; vbi quidem nullus ordo perſpicitur.

§. 11.

§. 11. Quod autem hic de fractionibus $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, etc. diximus, etiam de ipsius radicibus α, β, γ, etc. valet. Si enim α fuerit radix nostrae aequationis, per ea quae ostendimus haec radix continetur in hac formula:

$$\operatorname{cos.}\frac{2i\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\ \operatorname{sin.}\frac{2i\pi}{n}.$$

Hinc autem fit

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\operatorname{cos.}\frac{2i\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\ \operatorname{sin.}\frac{2i\pi}{n}} = \operatorname{cos.}\frac{2i\pi}{n} \mp \sqrt{-1}\ \operatorname{sin.}\frac{2i\pi}{n},$$

quae itidem est radix nostrae aequationis; vnde patet, si $\frac{1}{\alpha}$ fuerit radix nostrae aequationis, etiam α fore radicem.

§. 12. Denotet igitur α radicem quamcunque aequationis $1 - x^n = 0$, quandoquidem tum etiam erit radix nostrae aequationis

$$1 - x - xx + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \text{etc.} = 0,$$

tum igitur erit $\alpha^n = 1$. Praeterea vero etiam omnes potestates ipsius α radices simul erunt aequationis $1 - x^n = 0$. Si enim loco x scribamus $\alpha\alpha$ fiet $1 - x^n = 1 - \alpha^{2n}$. Cum autem sit $\alpha^n = 1$, patet etiam fore $\alpha^{2n} = 1$, ideoque $1 - \alpha^{2n} = 0$, quod idem manifestum est de cubo α^3 et omnibus potestatibus altioribus. Hinc igitur sequitur fore

$$\alpha^{n+1} = \alpha \text{ et } \alpha^{n+2} = \alpha\alpha \text{ et } \alpha^{n+3} = \alpha^3.$$

Sicque in genere erit $\alpha^{in+\lambda} = \alpha^\lambda$.

§. 13. Si igitur α denotet radicem quamcunque nostrae aequationis, ita vt sit $\alpha^n = 1$, si in ea loco x scribamus α, certe euadet haec series:

$$1 - \alpha^1 - \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^7 - \alpha^{12} - \alpha^{15} + \alpha^{22} + \text{etc.} = 0.$$

Prae-

Praeterea vero etiam ponendo $x = \alpha\alpha$ erit

$$1 - \alpha^2 - \alpha^4 + \alpha^{10} + \alpha^{14} - \alpha^{24} - \alpha^{30} + \alpha^{44} + \text{etc.} = 0,$$

et in genere si loco x scribamus α^i, denotante i numerum quemcunque integrum, etiam fiet

$$1 - \alpha^i - \alpha^{2i} + \alpha^{5i} + \alpha^{7i} - \alpha^{12i} - \alpha^{15i} + \alpha^{22i} + \text{etc.} = 0.$$

Atque hoc etiam valebit, si pro i numeri negatiui accipiantur, si quidem ostendimus, radices quoque esse $\frac{1}{\alpha^2}$, $\frac{1}{\alpha^3}$, $\frac{1}{\alpha^4}$, $\frac{1}{\alpha^5}$, etc.

§. 14. Quoniam hic assumsimus α esse radicem aequationis $1 - x^n = 0$, percurramus ordine casus, quibus est n vel 1 vel 2, vel 3, vel 4, etc. Ac primo quidem, si $n = 1$, necessario est $\alpha = 1$, quo valore substituto nostra aequatio generalis induet hanc formam:

$$1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + \text{etc.}$$

quae series manifesto ex infinitis periodis conflatur, quarum singulae continent hos terminos: $1 - 1 - 1 + 1$, vnde cuiusque periodi valor est $= 0$, ideoque etiam infinitae periodi simul sumti summam habebunt $= 0$. Quoniam autem continuata concipi debet, si percursis iam infinitis periodis insuper vnus terminus accedat, summa erit $= 0$; si tres accedant, summa erit -1 et si quatuor accedant $= 0$, quo casu tota periodus est adiecta; quare, cum numerus infinitus nusquam terminetur, summa seriei infinitae medium tenebit inter 4 summas modo memoratas $1, 0, -1, 0$, quod medium reperitur, si aggregatum harum quatuor summarum per numerum, hoc est per quaternarium diuidatur; tum autem manifesto prodit 0, quae ergo vera censenda est summa nostrae seriei.

§. 15.

§. 15. Simile scilicet ratiocinium hic adhiberi potest, quo vulgo ostendi solet summam seriei *Leibnizianae* $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. esse $= \frac{1}{2}$; hoc autem concesso veritas praesentis asserti sponte elucet. Cum enim sit

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}, \text{ erit}$$

$$- 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \text{etc.} = - \tfrac{1}{2}$$

ergo combinandis his duabus seriebus erit

$$1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - \text{etc.} = 0.$$

§. 16. Consideremus nunc casum quo $n = 2$ et $\alpha\alpha = 1$, vbi quidem est α vel $+ 1$ vel $- 1$. Retineamus autem litteram α pro vtrauis earum designanda, et cum sit

$$\alpha^3 = \alpha, \; \alpha^4 = 1, \; \alpha^5 = \alpha, \; \alpha^6 = 1, \text{ etc.}$$

facta substitutione nostra aequatio generalis hanc induet formam:

$$1 - \alpha - 1 + \alpha + \alpha - 1 - \alpha + 1 \,|\, + 1 - \alpha - 1 + \alpha + \alpha - 1 - \alpha + 1 \text{ etc.}$$

quae series pariter per certas periodos progreditur, quae continuo replicantur, atque vnaquaeque earum constat ex his octo terminis:

$$1 - \alpha - 1 + \alpha + \alpha - 1 - \alpha + 1,$$

quorum summa est 0, sicque numerus quantumuis magnus talium integrarum periodorum certe euanescit. At si vero insuper vnus, vel duo, vel 3, vel ad eo 8 termini accedant, summae sequenti modo se habebunt:

ſi inſuper accedat	ſumma erit
vnus terminus -	1
duo - - -	$1-\alpha$
tres - - -	$-\alpha$
quatuor - -	0
quinque - -	α
ſex - - -	$\alpha-1$
ſeptem - -	-1
octo - - -	0

quarum octo ſummarum aggregatum eſt 0, vnde tuto concludimus totius huius ſeriei, quam inuenimus, in infinitum continuatae ſummam eſſe $= 0$.

§. 17. Hinc patet, ſummam huius ſeriei periodicae perinde nihilo aequari, quemcunque valorem habuerit littera α; verus enim valor ipſius α, quo eſt $\alpha\alpha = 1$, iam in conſiderationem eſt ductus, dum ipſae periodi ex eo ſunt natae; quamobrem haec ſeries in duas partes diſpeſci poteſt, quarum altera contineat ſolas vnitates, altera vero ſolas litteras α; ac neceſſe eſt, vt vtriusque ſumma ſeorſim nihilo fiat aequalis, ita vt ſit

$$1-1-1+1,\ +1-1-1+1,\ +1-1-1+1,\ \text{etc.} = 0$$

$$-\alpha+\alpha+\alpha-\alpha,\ -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha,\ -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha,\ \text{etc.} = 0,$$

vtriusque autem veritas ex poſitis principiis fit manifeſta.

§. 18. Simili modo res ſe habebit in radicibus cubicis ipſius 1, ponendo $\alpha^3 = 1$, et quoniam periodi ad plures terminos excurrent, ſeriem generalem per binos terminos ſibi ſubſcriptos referamus, vt ſit in genere

$1 -$

$$\left.\begin{array}{l} 1 - \alpha + \alpha^5 - \alpha^{12} + \alpha^{22} - \alpha^{35} \text{ etc.} \\ \quad - \alpha^2 + \alpha^7 - \alpha^{15} + \alpha^{26} - \alpha^{40} \text{ etc.} \end{array}\right\} = 0.$$

Quod ſi iam ſumatur $\alpha^3 = 1$, vt ſit

$$\alpha^4 = \alpha,\ \alpha^5 = \alpha^2,\ \alpha^6 = 1,\ \alpha^7 = \alpha, \text{ etc.}$$

prodibit ſequens progreſſio periodica:

$$\left.\begin{array}{l} 1 - \alpha + \alpha^2 - 1 + \alpha - \alpha^2 + 1 \,|\, - \alpha + \alpha^2 - 1 + \alpha - \alpha^2 + 1 \,| \\ \quad - \alpha^2 + \alpha - 1 + \alpha^2 - \alpha \,|\, + 1 - \alpha^2 + \alpha - 1 + \alpha^2 - \alpha \,|\, + 1 \end{array}\right. \text{etc.}$$

nihilo aequalis, vbi quaelibet periodus conſtat duodecim terminis triplicis generis, ſcilicet 1, α, α^2. Ac facile apparet, terminos cuiusque generis ſeorſim ſumtos ſeriem exhibere nihilo aequalem, vnitates enim conſtituunt hanc ſeriem:

$$1-1-1+1,\ +1-1-1+1,\ +1-1-1+1, \text{ etc.} = 0$$

litterae vero α et $\alpha\alpha$ conſtituunt ſequentes ſeries:

$$-\alpha + \alpha + \alpha - \alpha,\ -\alpha + \alpha + \alpha - \alpha,\ -\alpha + \alpha + \alpha - \alpha, \text{ etc.} = 0$$

$$-\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 - \alpha^2,\ -\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 - \alpha^2,\ -\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 - \alpha^2, \text{ etc.} = 0.$$

Harum autem ſingularum ſummas nihilo aequales eſſe manifeſtum eſt.

§. 19. Conſideremus porro etiam radices biquadratas vnitatis, ſitque $\alpha^4 = 1$, ac prodibit ſequens ſeries periodica:

$$\begin{array}{l} 1 - \alpha + \alpha - 1 + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^3 - \alpha^2 + 1 \,|\, - \alpha + \alpha - 1 + \text{ etc.} \\ \quad - \alpha^2 + \alpha^3 - \alpha^3 + \alpha^2 - 1 + \alpha - \alpha \,|\, + 1 - \alpha^2 + \alpha^3 - \alpha^3 + \text{ etc.} \end{array}$$

vbi ſingulae periodi conſtant ex ſedecim terminis, qui ad quatuor genera relati praebent ſequentes quatuor ſeries, ſingulas nihilo aequales:

$$1-1-1+1,\ +1-1-1+1,\ +1-1-1+1,\ \text{etc.} = 0$$
$$-\alpha+\alpha+\alpha-\alpha,\ -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha,\ -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha,\ \text{etc.} = 0$$
$$-\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2,\ -\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2,\ -\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2,\ \text{etc.} = 0$$
$$+\alpha^3-\alpha^3-\alpha^3+\alpha^3,\ +\alpha^3-\alpha^3-\alpha^3+\alpha^3,\ +\alpha^3-\alpha^3-\alpha^3+\alpha^3,\ \text{etc.} = 0$$

§. 20. Quamquam hinc noſtra concluſio pro radicibus altioribus iam ſatis eſt confirmata, tamen neceſſe eſt inſuper caſum, quo $\alpha^5 = 1$, euoluere, quandoquidem hic non omnes poteſtates quinta inferiores occurrent. Sit igitur $\alpha^5 = 1$ et haec ſeries periodica prodibit:

$$\begin{array}{l} 1-\alpha+1-\alpha^2+\alpha^2-1+\alpha-1+\alpha^2-\alpha^2+1 \,|\, -\alpha+1 \\ -\alpha^2+\alpha^2-1+\alpha-1+\alpha^2-\alpha^2+1-\alpha \,|\, +1-\alpha^2+\alpha^2 \end{array} \ \text{etc.}$$

vbi poteſtates α^3 et α^4 penitus excluduntur. Quare cum quaelibet periodus 20 conſtet terminis, reliquae poteſtates ſaepius occurrant neceſſe eſt; ſingulis autem ſeorſim ſumtis tres ſequentes ſeries periodicae occurrunt;

$$1+1-1-1-1-1+1+1,\ 1+1-1-1-1-1+1+1,\ \text{etc.} = 0$$
$$-\alpha+\alpha+\alpha-\alpha,\ -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha,\ \text{etc.} = 0$$
$$-\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2,\ -\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2+\alpha^2,\ \text{etc.} = 0$$

Hinc iam veritas ſeriei ipſarum α ex praecedentibus eſt manifeſta; binae reliquae autem, quarum periodi octo terminis conſtant, ſi ſecundum principia hactenus ſtabilita examinentur, etiam nihilo aequales deprehendentur, quoniam non ſolum termini ſolius periodi ſe mutuo deſtruunt, ſed etiam termini ſeriei ſummatricis inde formatae. Ita ex ſerie vnitatum oritur haec ſeries ſummatrix:

$$1,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -1,\ 0:$$

cuius ſumma itidem euaneſcit, quod idem vſu venit in ſerie quadratorum.

§. 21.

§. 21. Ex his iam abunde patet, eandem proprietatem etiam in radicibus altioribus locum esse habituram, ex quotcunque etiam terminis singulae periodi fuerint compositae; quod certe eo magis est mirandum, cum ista proprietas in nullas alias series potestatum competere possit, atque penitus propria sit seriei numerorum pentagonalium.

§. 22. Vt autem rem in genere ob oculos ponamus, sit $\alpha^n = 1$, vnde nascuntur periodi ex $4n$ terminis constantes, qui erunt vel 1, vel α, vel α^2, vel α^3 etc. Plerumque autem non omnes potestates inferiores quam α^n occurrent, vnde periodi singularum potestatum ipsius α plerumque pluribus quam 4 terminis constabunt. Semper autem non solum ipsi termini cuiusque periodi se mutuo destruent, sed etiam termini seriei summatricis. Ita si consideremus potestates α^r, existente r numero minore quam n, ex serie nostra numerorum pentagonalium omnes excerpantur termini, qui per n diuisi hoc idem residuum r relinquant. Ac si cuique horum terminorum suum debitum signum praefigatur, talis prodibit series:

$$\pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \text{etc.}$$

quae semper ex certis periodis ratione signorum $+$ et $-$ constabit, idque ita, vt cuiusque periodi omnes termini simul sumti se mutuo destruant atque idem etiam in serie summatrice eueniat.

§. 23. Verum hae proprietates hactenus commemoratae insuper innumerabiles alias non minus admirandas post se trahunt. Si enim α fuerit radix cuiusque potestatis n ex vnitate, ita vt $1 - \frac{x}{\alpha}$ sit factor formulae $1 - x^n$, euidens est, eum etiam fore factorem formularum $1 - x^{2n}$, $1 - x^{3n}$, $1 - x^{4n}$, etc. in infinitum. Quare, cum hae formulae omnes sint factores nostrae progressionis

$$1 - x - xx + x^5 + x^7 - x^{12} - \text{etc.}$$

eadem radix α in hac aequatione non tantum semel sed adeo infinities occurrit, ita vt ista aequatio infinitas habeat radices ipsi α aequales.

§. 24. Nouimus autem ex natura aequationum, si aequatio quaecunque

$$1 + Ax + Bxx + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.} = 0,$$

habeat duas radices aequales α, tum etiam α fore radicem aequationis per differentiationem natae, scilicet:

$$A + 2Bx + 3Cxx + 4Dx^3 + \text{etc.} = 0;$$

ac si habeat tres radices aequales α, tum insuper α quoque erit radix istius aequationis per differentiationem natae, postquam scilicet illam aequationem differentialem per x multiplicauerimus

$$1^2.A + 2^2.Bx + 3^2.Cxx + 4^2.Dx^3 + \text{etc.} = 0,$$

vnde si haec aequatio habuerit λ radices aequales, quae singulae sint $= \alpha$, semper erit

$$1^\lambda.A + 2^\lambda.B\alpha + 3^\lambda.C\alpha\alpha + 4^\lambda.D\alpha^3 + \text{etc.} = 0,$$

vnde si vniformitatis gratia hanc aequationem per α multiplicemus, erit quoque

$$1^\lambda.A\alpha + 2^\lambda.B\alpha^2 + 3^\lambda.C\alpha^3 + 4^\lambda.D\alpha^4 + \text{etc.} = 0.$$

§. 25. Cum igitur posito $\alpha^n = 1$ nostra aequatio ex numeris pentagonalibus formata

$1 -$

$$1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \text{etc.} = 0;$$

habeat infinitas radices ipsi α aequales, erit quoque α radix omnium aequationum in hac forma generali contentarum:

$$-1^\lambda x - 2^\lambda x^2 + 5^\lambda x^5 + 7^\lambda x^7 - 12^\lambda x^{12} - \text{etc.} = 0$$

quicunque numerus integer pro λ accipiatur. Semper igitur erit

$$-1^\lambda \alpha - 2^\lambda \alpha^2 + 5^\lambda \alpha^5 + 7^\lambda \alpha^7 - 12^\lambda \alpha^{12} - \text{etc.} = 0.$$

§. 26. Ad hoc clarius ostendendum sumamus $\alpha = 1$, eritque semper

$$-1^\lambda - 2^\lambda + 5^\lambda + 7^\lambda - 12^\lambda - 15^\lambda + \text{etc.} = 0,$$

ac pro casu $\lambda = 0$ veritatem istius aequationis iam probauimus. Sit igitur $\lambda = 1$ et monstrandum erit, huius seriei diuergentis infinitae:

$$-1 - 2 + 5 + 7 - 12 - 15 + 22 + 26 - \text{etc.}$$

summam esse $= 0$. Quoniam autem haec series est interrupta, seu potius ex duabus seriebus mixta, vtramque seorsim contemplemur, ponendo

$$s = -1 + 5 - 12 + 22 - 35 + \text{etc. et}$$

$$t = -2 + 7 - 15 + 26 - 40 + \text{etc.}$$

atque ostendi oportet fore $s + t = 0$.

§. 27. Ex doctrina autem serierum, quae signis alternantibus procedunt, veluti $A - B + C - D + \text{etc.}$ constat, huius seriei in infinitum progredientis summam esse

$$= \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{4}(B - A) + \tfrac{1}{8}(C - 2B + A) - \tfrac{1}{16}(D - 3C + 3B - A) \text{ etc.}$$

quae

quae regula ita commodius per differentias exponitur, ſcilicet ratione ſignorum ſepoſita. Ex ſerie numerorum A, B, C, D, E, etc. formetur ſeries differentiarum, dum quilibet terminus illius ſeriei a ſequente ſubtrahitur, quae ſit a, b, c, d, etc. Eadem porro lege ex hac ſerie differentiarum formetur ſeries ſecundarum differentiarum, quae ſit a', b', c', d', etc. ex hac porro ſeries tertiarum differentiarum, quae ſit a'', b'', c'', d'', e'', etc. atque hoc modo vlterius donec ad differentias conſtantes perueniatur. Tum autem ex terminis primis omnium harum ſerierum ſumma ſeriei propoſitae ita determinatur, vt ea ſit

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{A} - \tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{8}a' - \tfrac{1}{16}a'' + \tfrac{1}{32}a''' - \tfrac{1}{64}a'''' + \text{etc.}$$

§. 28. Hac regula ſtabilita, cum ſignis mutatis ſit

$$-s = 1 - 5 + 12 - 22 + 35 - 51 + 70 - \text{etc. et}$$
$$-t = 2 - 7 + 15 - 26 + 40 - 57 + 77 - \text{etc.}$$

hi termini ſequenti modo diſponantur ac differentiae ſubſcribantur:

1, 5, 12, 22, 35, 51, 70 etc.	2, 7, 15, 26, 40, 57, 77 etc.
4, 7, 10, 13, 16, 19	5, 8, 11, 14, 17, 20
3, 3, 3, 3, 3	3, 3, 3, 3, 3
0, 0, 0, 0	0, 0, 0, 0

Hinc igitur colligitur fore

$$-s = \tfrac{1}{2} - \tfrac{4}{4} + \tfrac{3}{8} = -\tfrac{1}{8}, \text{ ſiue } s = \tfrac{1}{8}, \text{ porro}$$
$$-t = \tfrac{2}{2} - \tfrac{5}{4} + \tfrac{3}{8} = \tfrac{1}{8}, \text{ ſiue } t = -\tfrac{1}{8}.$$

vnde manifeſto conficitur eſſe $s + t = 0$.

§. 29.

§. 29. Quanquam ipsae rationes, quibus hae proprietates innituntur, nullum plane dubium relinquunt: tamen haud inutile erit, istam veritatem etiam pro casu $\lambda = 2$ ostendisse, siue reuera esse

$$-1^2 - 2^2 + 5^2 + 7^2 - 12^2 - 15^2 + 22^2 + \text{etc.} = 0.$$

Discerpatur enim haec series itidem in duas, quae sint mutatis signis:

$$s = +1^2 - 5^2 + 12^2 - 22^2 + 35^2 - 51^2 + \text{etc.}$$

$$t = 2^2 - 7^2 + 15^2 - 26^2 + 40^2 - 57^2 + \text{etc.}$$

ac pro prioris summa inuenienda instituatur sequens operatio:

Series	1, 25, 144, 484, 1225, 2601, 4900
Diff. I.	24, 119, 340, 741, 1376, 2299
Diff. II.	95, 221, 401, 635, 923
Diff. III.	126, 180, 234, 288
Diff. IV.	54, 54, 54
Diff. V.	0, 0

Hinc igitur erit

$$s = \tfrac{1}{2} - \tfrac{24}{4} + \tfrac{95}{8} - \tfrac{126}{16} + \tfrac{54}{32} = + \tfrac{5}{16}.$$

Simili modo pro altera serie

Series	4, 49, 225, 676, 1600, 3249, 5929
Diff. I.	45 176, 451, 924, 1649, 2680
Diff. II.	131, 275, 473, 725, 1031
Diff. III.	144 198, 252, 306
Diff. IV.	54, 54, 54
Diff. V.	0, 0

 Hinc

Hinc concluditur.

$$t = \tfrac{4}{2} - \tfrac{45}{4} + \tfrac{151}{8} - \tfrac{144}{16} + \tfrac{54}{32} + - \tfrac{5}{16}.$$

Quamobrem euictum est totam summam fore $s + t = 0$.

§. 30. Consideremus nunc etiam radices quadratas, siue sit $\alpha^2 = 1$, hincque orietur ista series:

$$-1^\lambda.\alpha - 2^\lambda + 5^\lambda.\alpha + 7^\lambda\alpha - 12^\lambda - 15^\lambda.\alpha + 22^\lambda + 26^\lambda - \text{etc.} = 0,$$

vnde si terminos vnitatem et α continentes a se inuicem separemus, binas obtinebimus series nihilo aequales, scilicet:

$$-2^\lambda - 12^\lambda + 22^\lambda + 26^\lambda - 40^\lambda - 70^\lambda + 92^\lambda + \text{etc.} = 0$$

et

$$-1^\lambda.\alpha + 5^\lambda.\alpha + 7^\lambda.\alpha - 15^\lambda.\alpha - 35^\lambda.\alpha + 51^\lambda.\alpha + 57^\lambda.\alpha - \text{etc.} = 0.$$

Quod si vero harum serierum veritatem eodem modo, quo ante sumus vsi, ostendere vellemus, vnamquamque in quatuor alias series discerpi oporteret, vt scilicet tandem ad differentias constantes perueniremus. At vero si quis hanc operam suscipere voluerit, certus esse poterit, aggregatum omnium summarum partialium fore $= 0$.

§. 31. Nunc generalissime totum negotium complectamur, sitque $\alpha^n = 1$, et quaeramus seriem, quae contineat tantum potestates α^r. Hunc in finem ex omnibus nostris numeris pentagonalibus excerpamus eos, qui per n diuisi relinquunt idem residuum r. Sint igitur isti numeri pentagonales A, B, C, D, E, etc. omnes scilicet formae

mae $\gamma n + r$, et cuiusque ſignum $\pm$, quod ipſi conuenit, ſollicite notetur. Tum autem ſemper erit

$$\pm A^\lambda \pm B^\lambda \pm C^\lambda \pm D^\lambda \pm \text{etc.} = 0,$$

quicunque valor integer exponenti λ tribuatur. Atque in hac forma generaliſſima omnes ſeries, quas hactenus eruimus, et quarum ſummas nihilo aequari oſtendimus, continentur.