 『信州大学教育学部紀要』第 81 号 41-45（1994）

環と加群についての知識は算数を教えるのに必要な最小限の数学的素養か
----伊藤・荻上・原田(1993)論文へのコメント

The Knowledge of Ring and Module, Is It Really an Indispensable Knowledge Expected for Teachers in Elementary School?
---- A Critical Comment on the Itoh *et al* (1993) Paper.

守　一雄
Kazuo MORI

はじめに

伊藤・荻上・原田(1993)論文は、数学者の論文にしてはめずらしく、一般読者にもある程度理解が可能な論文である。それは、数学そのものについての論文ではなく、算数教育に対する提言のような内容の論文だからである。伊藤ら(1993)が、算数の問題として、具体的に取り上げているのは、次のような問題である。

（☆）「３枚の皿にリンゴが２個ずつのっている時全部でリンゴは何個あるか」

この問題に、原著者らのうちの一人（以下「数学者Ｂ」と記す）の長男（小学校２年生：帰国子女）が、「３×２＝６」と解答して、担任教師（以下「算数教師Ａ」と記す）から指導を受けたことがまず紹介されている。

この算数教師Ａは、「答えの６は正しいけれども、式は３×２ではなく２×３でなければならない」と指導したという。これに対し、数学者Ｂは、この算数教師Ａにその理由を問いただし、環と加群の概念を持ち出す。そして、算数教師Ａが「整数環Ｚの代数的構造など全く理解せずに算数を”自信をもって”教えていた(p. 16)」ことを非難するのである。

伊藤ら(1993)によれば、とがめられるべきなのは、Ａが受けてきた大学教育であり、「算数教育においては、”教え方”が重視されることが多いようであるが、教え方云々はあくまでも”数学を十分に理解している”ことが大前提である。(p. 16)」と主張する。そして、「小学生に算数を教える教師に要求される最小限の数学的素養を例示すること(p. 16)」を目的として、「２．環と環の作用をもつ加群(p. 16)」「３．Ｚの積演算とＺ−加群としての作用(p. 17)」とが述べられている。

この論文は、学部教官はもちろん大学院生や学部生にも、読んでもらえる論文であろう。そこで、この論文を読んだ学生が、「よし僕（あるいは私）も、算数の教師になるためにもっと数学を勉強しよう」と考えてくれれば、おそらく、伊藤らの目的は果たされることになるのであろう。しかし、むしろ、この論文を読んだ多くの学生は、算数（あるいは数学）を教えることに自信をなくすか、「将来受け持つことになる自分のクラスの子どもの親に数学者がいないよう」願うようになるか、のように思われてならない。

そこで、本論文では、以下の４点について伊藤ら(1993)の問題点を指摘し、最後に、「算数教師Ａ」と「数学者Ｂ」はどうすべきだったのかについて私見を述べる。

問題点１:環と加群についての知識が算数を教えるのに本当に必要であるかどうか
問題点２:算数を教えるための最小限の数学的素養とは何か、どう決めるのか
問題点３:そもそも、何かを教えるための最小限の素養を決定できるか
問題点４:数学を十分に理解するとはどういうことか

１．環と加群についての知識が算数を教えるのに本当に必要であるかどうか

伊藤ら(1993)の論文に直接に述べられているわけではないが、この論文からは、算数（特にかけ算の式の意味）を教えるためには環と加群についての知識が最小限の数学的素養として要求されるものであるようである。環と加群について知っていることが「最小限の素養として要求される」のであるから、「環と加群についての知識なしには、算数は教えられない」と主張していることになる。しかし、その根拠は全く示されていない。伊藤ら(1993)の論文から、かけ算の式の意味が、環や加群という概念と関連があることはわかる。しかし、そのことからすぐに後者が前者を教えるために必要な知識とは言えない。

「環と加群についての知識を持っている方が、より望ましい」ということであれば、それはどんなことを教える場合にも言えることであるから認めよう。しかし、そうした知識なしには教えられないと主張するからには、その根拠を示すべきである。

２．算数を教えるための最小限の数学的素養とは何か、どう決めるのか

環と加群についての知識が算数を教えるための最小限の数学的素養の一部であることを認めたとしよう。では、その他のどんな知識が最小限必要とされるのであろうか？もし、環と加群についての知識が算数を教えるための最小限の素養であることが、ある根拠をもって示せるのであれば、同じ根拠に基づいて、算数を教えるための「最小限の数学的素養」の集合が定義できるだろう。そうすれば、それを学んでおくことにより、「安心して」算数の教師になれる。

しかし、個々の数学者がばらばらに根拠もなく、「○○についての知識は算数を教えるための最小限の数学的素養だ」と言っているのでは、算数教師は何をどう学んだらいいのか、戸惑うばかりである。

３．そもそも、何かを教えるための最小限の素養を決定できるか

数学のようなきちんと秩序だった世界を研究対象とする学問では、それを教えるための最小限の素養が明示的に決定できるのかも知れない。しかし、他の多くの学問、少なくとも筆者が専門とする心理学では、それを教えるための最小限の素養を決定することは不可能である。標準的な教科書に取り上げられているような事柄も、教科書によってまちまちであり、一時的には最小限の素養と思われた事柄も、時代が変われば変化する。（たとえば、守・守(1992)の分析を参照されたい。）

もし数学の分野においては、その最小限の素養が決定できるのだとすれば、それがどのようなものであり、なぜそう言えるのかの根拠を示して頂きたい。

４．数学を十分に理解するとはどういうことか

伊藤ら(1993)は、「よい算数教師であるための必要条件は数学を十分に理解していることである」とも述べている。原著者らは、大学で数学を教えている数学者（数学教師）であるが、自分たちが数学を十分に理解していると考えているのだろうか。おそらく、「大学で教えるのには十分なだけ理解している」と考えているのであろう。しかし、それでは、「大学で教えるのには十分なだけ理解」するとはどの程度を言うのであろうか。同様に、「小学校で教えるのに十分なだけの理解」とはどの程度なのであろうか。

ここでも、結局は、「どんなことを教える場合にもできるだけ深く理解していることが望ましい」というだけのことなのではないだろうか。

５．原論文に登場する「算数教師Ａ」と「数学者Ｂ」はどうすべきだったのか

それでは、伊藤ら(1993)に登場する算数教師Ａと数学者Ｂはどうすべきだったのだろうか。筆者は、次のようにすべきであったと考える。

5.1　算数教師Ａはどうすべきだったのか

算数教師Ａのとった対応は基本的にはこれで十分である。それでも、以下のようにしておけば、さらに万全であったろう。

この子どもに、皿の数やリンゴの数を変えて、あるいは、皿の数とリンゴの数の文中での位置を変えて、いろいろな問題をやらせてみる。そして、この子が①一貫して「かける数」と「かけられる数」とを逆にしているのか、②一貫して「先に出てきた数字」を「かけられる数」とし、「後から出てきた数字」を「かける数」としているのか、それとも③まったく一貫性なしに、「かける数」と「かけられる数」とを決めているのか、を見極めておく。そうすれば、この子の親（数学者Ｂ）が、「私の子供は帰国子女だからごく自然に３×２と考えたのだと思う(p. 15)」などと言ってきても、ニヤリと笑って、事実が②や③であることを示すこともできたであろう。本当に①の場合には、次のように指導すればよい。「君は、英語を話すところで育ったので、英語風に考えているようだけれど、日本では、かける数とかけられる数とを逆の位置に書くのが普通なんだ。今のやり方のままでも、同じ答えが出せるんだけれど、先生が計算のやり方を説明したり、君が他の人に説明したりするときに、逆に憶えていると何かと不便だから、これからは、かけられる数×かける数の順番に式を書くようにしようね。（おそらく君が行っていた）アメリカやカナダでは、車が右側を走っていたのに、日本では左側を走っているよね。別にどっちを走ったっていいんだけれど、一度どちらかに決めたら、みんながそれに従わないと事故が起こったりするするよね。式の書き方も、それと同じことさ。」（表現を少し変えれば、親にもこう指導できる。）

以上の指導は、環や加群についての知識がなくとも可能である。むしろ、子どものつまずきの原因がどこにあるかを見つけ出すための教え方の技術の方が重要である。数学者Ｂのように、環と加群については知っていても、自分の子どもがなぜ

３×２と書いたかについて調べてみもせずに、「帰国子女だからごく自然に３×２と考えたのだと思う(p. 15)」と言っていたのでは、指導ができない。言わずもがなのことであるが、教え方が重視されるのにはそれなりの理由があるのである。

算数教師がこうした対応をしても、伊藤ら(1993)の論文にあるように、数学者の親が「環」やら「加群」やらを持ちだしてきた場合には、議論をしても仕方がない。それは、次に述べるように、議論のためではなく「やりこめる」ために持ち出されたものであるからである。「環」や「加群」について学んでおいたところで、そうした数学者の親はさらに難しい概念をぶつけてくるにちがいない。

5.2　数学者Ｂはどうすべきだったのか

最後に、数学者Ｂは、どうすべきであったのかについて、著者の意見を述べたい。数学者Ｂは、いわば傲慢に自分の数学の知識をひけらかし、算数教師Ａの自信をくじくような言動に出ている。子ども自身は、「そういうものか(p. 15)」と思って納得していたようであるが、親の方が「カチンときて」、権威をかさに言いがかりをつけているようにさえ見える。かりに、数学者Ｂの意図が、算数教師Ａにもっと数学の勉強をしてもらいたいと考えた上での、良心的なものであったとしたなら、もっと別の対応も考えられたはずである。

たとえば、「２×３のかけ算には、３つの意味がある。それは、２個ずつの集りが３つ分あることの計算（日本の小学校で普通に使われる意味）と、３個ずつの集りが２つ分あることの計算（アメリカなどで使われている意味）と、その計算の結果としての６という意味である。（そして、数学では、こうした３つの意味を、環や加群や作用などという概念によって、厳密に定義しているんだ。）」とやさしく教えることはできなかったのだろうか。

あるいは、市川(1993)や長沼(1987)も批判しているように、数学者は厳密さを絶対的に重視するから、やさしく教えてやるつもりでも、「環」や「加群」という言葉を持ち出さざるを得なかったのかも知れない。

しかし、そうした善意の解釈はここでは難しい。なぜなら、もし上のように言うつもりだったならば、「偉い」数学者がわざわざ小学校まで出かけていくはずがないからである。そんなことを言ってみたところで、少なくともカッコ内に入れた最後の３行分を除けば、「そんなこと知ってますよ」と言われるに決まっている。むしろ、この数学者Ｂは、はじめから「いじめてやろう」という意図でもって、算数教師Ａに質問をしたとしか思えない。数学者Ｂは、算数教師Ａが環や加群について知らないことを確信していた上で、あえてそうした用語を持ちだしたのである。

数学に限らず、教えるべき内容について、教師がよく理解しておくことは大事なことである。しかし、何をどこまで理解していれば十分であるかは決めようがないことであり、「より知っている者」もあくまでも比較の上でのことを忘れてはなるまい。算数や数学は、とかく児童生徒が苦手意識を持ちやすく、嫌われることが多い教科である。こんなことで、教師までを「数学嫌い」にしてしまうことは、数学という学問にとって決して有益なことだとは思えない。

引用文献

市川伸一 (1993)『ネットワークのソフィストたち :「数学は語りうるか」を語る電子討論』日本評論社

伊藤武廣・荻上紘一・原田実（1993）算数を教えるのに必要な数学的素養--「２×３か３×２」の数学-- 『信州大学教育学部紀要』第 79 号、15-17.

守 秀子・守 一雄（1992）新免許法後の教育心理学教科書の分析 『信州大学教育学部紀要』第 75 号、75-80.

長沼伸一郎（1987）『物理数学の直観的方法』通商産業研究社

算数を教えるのに必要な数学的素養

──「2×3か3×2」の数学──

伊藤　武広・荻上　紘一*・原田　　実**

1．序

小学校2年の算数でかけ算の導入の際に

(☆)　「3枚の皿にリンゴが2個ずつのっている時全部でリンゴが何個あるか」

という類の問題が扱われる。これに関して著者の1人は次の様な経験を持つ。

著者の長男が2年生の時上記の問題に対して

「3×2＝6」

と解答したところ，担任教師は「答えの6は正しいけれども，式は3×2ではなく2×3でなければならない」と指導した。長男は「そういうものか」と思ったようであるが，著者は早速担任教師にその理由を質問してみた。担任教師と著者とのやりとりは概略次のような内容であった。

教師「リンゴが2個ずつのっている皿が3枚あるから2個＋2個＋2個即ち2個の3倍，従って2個×3＝6個である。2＋2＋2は2の3倍即ち2×3であって3の2倍即ち3×2ではない。これを同数累加という。」

著者「2＋2＋2を日本語では2の3倍というから2×3でなければならないというのであれば，英語では3 times 2だから3×2が自然である。私の子供は帰国子女だからごく自然に3×2と考えたのだと思う」

教師「2（リンゴの個数）が被乗数，3（皿の枚数）が乗数でそれぞれ違う意味をもっている（立場が違う）から2×3と3×2は同じではない」

著者「2と3を違う立場の数と考えるということは，整数環Zの内部演算としての積ではなくZ一加群としての作用を考えていることになる。」

教師「？？？？？」

著者「日本語は右Z一加群的であり英語は左Z一加群的である。更に，〝かけ算〟は環Zの内部演算としての積，左Z一加群としての作用，右Z一加群としての作用という3つの意味をもっている」

教師「？？？？？」

・・・・・・・・・

教師「3年生になれば交換法則を教えるから問題はなくなるでしょう」

---

* 東京都立大学理学部（数学）

** 東京学芸大学（数学）

著者「交換法則というのは環Ｚの内部演算としての積に関する概念であってＺ－加群としての作用に関するものではない」

残念ながらこの教師は，整数環Ｚの代数的構造など全く理解せずに算数を〝自信をもって〟教えていたのである。それは当人の不勉強のせいかも知れないが，彼（又は彼女）が受けた大学教育が悪かったのかも知れない。

算数教育においては，〝教え方〟が重視されることが多いようであるが，教え方云々はあくまでも〝数学を十分に理解している〟ことが大前提である。「算数を教えるのに大学で学ぶ代数学や幾何学等を知っていても役にたたない」と思っているとしたらとんでもないことで，小学校で教える算数と大学で学ぶ数学とは〝同じもの〟である。従って，算数教育の基本は数学を理解することである。言い替えれば，良い算数教師であるための必要条件は数学を十分に理解していることである。

本稿の目的は，小学生に算数を教える教師に要求される最小限の数学的素養を例示することである。

2.　環と環の作用をもつ加群

念のため環と作用域をもつ加群の概念を復習する。

定義1.　空でない集合Ｍにおいて，加法$M \times M \ni (a,\ b) \longrightarrow a+b \in M$が定義されていて次の条件を満たすとき，Ｍを加群という：

(Ｍ1)　$a+b=b+a$

(Ｍ2)　$(a+b)+c=a+(b+c)$

(Ｍ3)　任意のa，bに対して$a+x=b$がただ1つの解をもつ。

例えば，整数全体の集合Ｚは通常の加法に関して加群をなす。

定義2.　空でない集合Ａにおいて，加法$A \times A \ni (a,\ b) \longrightarrow a+b \in A$と乗法$A \times A \ni (a,\ b) \longrightarrow ab \in A$が定義されていて次の条件を満たすとき，Ａを環という：

(Ｒ1)　Ａは加法に関して加群である

(Ｒ2)　$(ab)c=a(bc)$

(Ｒ3)　$a(b+c)=ab+ac$，$(b+c)a=ba+ca$。

特に，乗法が交換法則を満たすときＡを可換環という。

例えば，Ｚは通常の加法と乗法に関して可換環をなす。

定義3.　環Ａと加群Ｍが与えられ，ＡのＭへの作用$A \times M \ni (a,\ x) \longrightarrow ax \in M$が定義されていて次の条件を満たすとき，Ｍを左Ａ－加群という：

(ＬＭ1)　$a(x+y)=ax+ay$

(ＬＭ2)　$(ab)x=a(bx)$

(ＬＭ3)　$(a+b)x=ax+bx$

(ＬＭ4)　Ａが乗法に関する単位元1をもてば$1x=x$が成り立つ。

同様にＡのＭへの作用$M \times A \ni (x,\ a) \longrightarrow xa \in M$が定義されていて次の条件を満たすとき，Ｍを右Ａ－加群という：

(RM1)　$(x+y)a=xa+ya$

(RM2)　$x(ab)=(xa)b$

(RM3)　$x(a+b)=xa+xb$

(RM4)　Aが乗法に関する単位元1をもてば$x1=x$が成り立つ。

注．環Aはその積演算をAのAへの作用とみなすことにより左A一加群ありかつ同時に右A一加群でもある。

3．Zの積演算とZ一加群としての作用

整数全体の集合をZで表わす。Zは通常の加法と乗法に関して可換環の構造をもつ。積演算によりZは左Z一加群でありかつ同時に右Z一加群でもある。即ち，Zにおける乗法$Z\times Z\ni(m, n)\longrightarrow mn\in Z$は3つの意味をもっている：(i) 環の内部演算としての積 (ii) 左Z一加群としての作用 (iii) 右Z一加群としての作用。(i) ではmとnは〝対等〟で$m\times n$，((ii) ではm times n即ちnのm倍 (iii) ではmのn倍即ちn times mである。

このことを問題 (☆) に即して述べれば次のようになる：問題 (☆) においてはリンゴの個数と皿の枚数はそれぞれ違う意味をもっていると考えられているから，そこで教えようとしているかけ算はZの内部演算としての積ではなく左Z一加群又は右Z一加群としての作用である。

リンゴの個数の集合Zに皿の枚数の集合Zが作用している。分かりやすくするために皿の枚数の集合をZ_0で表わすことにすれば，「$3\times2=6$」とするのは左Z_0一加群としてのZ_0のZへの作用$Z_0\times Z\ni(3, 2)\longrightarrow 3\times2=6\in Z$であり，「$2\times3=6$」とするのは右$Z_0$一加群としての$Z_0$のZへの作用$Z\times Z_0\ni(2, 3)\longrightarrow 2\times3=6\in Z$である。この時，右$Z_0$一加群と考える（即ち，$2\times3$）のは正しいが左$Z_0$一加群と考える（即ち，$3\times2$）のは正しくないという根拠は全くないのである。何故ならば，Zは可換環であるから，§2の注に記したように，Zの内部演算としての積，左Z一加群としての作用，右Z一加群としての作用は全て同じものと考えられるのである。

参考文献

[1] 数学辞典（第3版），岩波書店

(1993年4月21日　受理)