Logikkens muligheder og grænser

Braüner, Torben

Published in:
Aktuel Naturvidenskab

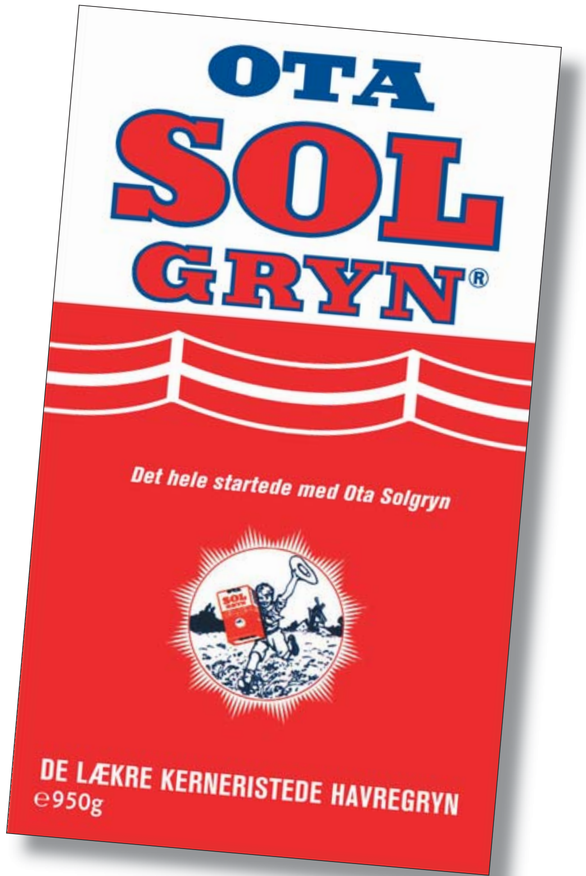
Publication date:
2006

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

Citation for published version (APA):
Braüner, T. (2006). Logikkens muligheder og grænser. *Aktuel Naturvidenskab*, *2006*(6), 32-34.

Logikkens muligheder og grænser

Et afgørende gennembrud i logikkens historie var, da den østrigske logiker og matematiker Kurt Gödel publicerede sine berømte ufuldstændighedssætninger. Gödels arbejder er vigtige for at forstå logikkens muligheder og grænser inden for matematik og datalogi.



Man finder ikke bare selvreference i Gödels og Turings matematiske sætninger. Her er et eksempel fra en pakke havregryn.

Af Torben Braüner

Logisk ræsonneren bruges af alle mennesker og logisk korrekt argumentation er et uomgængeligt krav i al videnskab. Logik handler om normer for korrekt argumentation, og derfor spiller logik en væsentlig rolle i mange videnskaber og fag – specielt inden for datalogi og matematik.

Nutidens forståelse af logikkens muligheder såvel som grænser inden for matematik og datalogi hviler i høj grad på den østrigske logiker og matematiker Kurt Gödels (1906-1978) arbejder. Det var således en afgørende begivenhed i logikkens udvikling, da Gödel i 1931 publicerede de to berømte matematiske sætninger, som kaldes Gödels ufuldstændighedssætninger.

Den første af disse to sætninger siger groft set, at matematik ikke fuldt ud kan mekaniseres. Beviset herfor gør brug af en matematisk stringent formulering af et selvrefererende paradoks i familie med det berømte løgnerparadoks: »Dette udsagn er falsk« (altså, hvis udsagnet er sandt, så må det også være falsk, og omvendt, hvis udsagnet er falsk, må det også være sandt). Den første ufuldstændighedssætning siger mere præcist, at ethvert modsigelsesfrit system af matematiske aksiomer og logiske regler (se boks), der er stærkt nok til at kunne regne med de naturlige tal, er ufuldstændigt i den forstand, at der findes sande matematiske sætninger, der ikke kan bevises i systemet. Om ethvert sådant bevissystem gælder, at selvom almindeligt forekommende sande matematiske sætninger kan bevises, for eksempel »2+2=4«, så findes der altså også meget indviklede sande sætninger, som ikke kan bevises. Det er det, der menes med ufuldstændighed. Det følger deraf, at matematisk sandhed ikke kan indfanges af noget fast bevissystem.

Ufuldstændighedssætningen fastlægger således en absolut begrænsning for matematikkens logiske rækkevidde.

Gödels anden ufuldstændighedssætning er en konsekvens af den første, og den handler om bevissystemer, der tilfredsstiller samme krav – det vil sige, at de ikke må modsige sig selv, og at de skal være stærke nok til at kunne regne med naturlige tal. Den anden ufuldstændighedssætning siger, at man ikke ved hjælp af et sådant systems egne metoder kan bevise, at systemet faktisk er modsigelsesfrit. For at bevise, at systemet er modsigelsesfrit, skal man derfor have fat i stærkere metoder end dem, systemet selv stiller til rådighed.

Bristede illusioner

Ufuldstændighedssætningerne kom som en stor overraskelse for samtiden, hvor en bestemt filosofisk opfattelse af matematikken var udbredt, nemlig formalismen. Ifølge samtidens formalister var matematik udelukkende et helt mekanisk, formelt spil med symboler i overensstemmelse med fastlagte regler, der udelukkende afhænger af symbolernes form. Derfor var ønsket om, at matematikken skulle være modsigelsesfri, et ønske om, at selve matematikspillet var modsigelsesfrit. Formalisternes håb var således at opstille et formelt bevissystem for matematikken, som man var helt sikker på, var modsigelsesfrit. Planen var, at den ønskede modsigelsesfrihed skulle bevises ved hjælp af en lille og meget troværdig del af de metoder, bevissystemet stiller til rådighed, nemlig ved hjælp af såkaldte finitte (endelige) metoder. Populært sagt var håbet, at man kunne trække sig selv op ved hårene.

Gödels anden ufuldstændighedssætning ødelagde dette håb, fordi sætningen jo netop siger, at man ikke ved hjælp af systemets egne metoder kan bevise, at systemet er modsigelsesfrit. Selv var Gödel ikke formalist, men derimod tilhænger af en platonisk opfattelse af matematikken. Ifølge denne filosofiske skole er matematik ikke udelukkende et mekanisk spil med symboler, men handler derimod om noget virkeligt, objektivt eksisterende, nemlig abstrakte mængder. For eksempel mængden af alle naturlige tal. Platonikernes abstrakte mængder eksisterer således uafhængigt af mennesker og menneskers matematiske tænkning. Den platoniske skole har ingen problemer med ufuldstændighedssætningerne, idet der ingen tvingende grund er til, at objektivt eksisterende abstrakte mængder skulle have en sådan beskaffenhed, at udsagn om dem lader sig indfange af et fast bevissystem.

Computerens grænser

Gödels første ufuldstændighedssætning er nært beslægtet med det såkaldte standse-problems uafgørlighed. Dette resultat blev publiceret af matematikeren og logikeren Alan Turing i 1936, og har siden vist sig at være af stor betydning inden for teoretisk datalogi. I en nutidig formulering handler standse-problemet om computere, der er "supercomputere" i den forstand, at de tager computerprogrammer som input. Computere kan tage mange forskellige typer input, eksempelvis tal, men denne slags computere tager altså computerprogrammer som input – for eksempel leveret i form af tekst-filer. Turings resultat drejer sig nu om, hvorvidt et sådant inputprogram på et eller andet tidspunkt standser, eller om det bare bliver ved med at køre – om det, populært sagt, går i en uendelig løkke. Turings resultat siger nu, at man ikke kan bygge en supercomputer, der tager et vilkårligt program som input og som afgør, om det pågældende program går i uendelig løkke. Supercomputeren skal indikere, at inputprogrammet går i uendelig løkke ved selv at standse, og supercomputeren må kun standse under sådanne omstændigheder. Bemærk rækkefølgen: Det drejer sig om én enkelt supercomputer, der for ethvert inputprogram skal være i stand til at afgøre, om det går i uendelig løkke. Men en sådan supercomputer kan ikke bygges. Dette kan bevises ved for enhver supercomputer at finde et ikke-standsende program, der når det gives til supercomputeren som input bevirker, at supercomputeren ikke standser. Tricket i beviset er at bruge selvreference: Man fodrer supercomputeren med sit eget program som input! Ligesom logiske bevissystemer har deres absolutte grænser, har computere det altså også.

Tænkning og beregnelighed

Turings og Gödels resultater kan måske forekomme udelukkende at være af interesse for nørder inden for matematisk logik og teoretisk datalogi, men de har faktisk givet anledning til filosofiske overvejelser af interesse for meget bredere kredse.

Mest kendte er argumenter for, at Gödels og Turings resultater giver principielle grunde til, at menneskers bevidsthed og bevidst matematisk tænkning ikke fuldt ud kan forstås i termer af beregnelige modeller (et eksempel på den bevidste matematiske tænkning, der her er tale om, er når et menneske "regner ud" at 2 plus 2 er lig med 4, altså at »2+2=4« er en sand matematisk sætning). Som følge deraf kan en computer ikke tænke og bedrive matematik som et menneske. Allerede Gödel og Turing

Aksiomer

Et aksiom er en ubevist antagelse. Der findes mange forskellige slags aksiomer: Aksiomer der handler om tal, abstrakte mængder, geometri, computer programmer, og meget andet. Et fællestræk er, at aksiomer er byggestenene i matematiske sætninger om det aksiomerne nu handler om. Faktisk er enhver matematisk sætning bevist ud fra aksiomer ved hjælp af logiske regler, og man kan ikke bevise noget uden aksiomer.

Et godt eksempel på et sæt af aksiomer er Peanos aksiomer, der er opkaldt efter den italienske matematiker Guiseppe Peano (1858-1932), og som handler om de naturlige tal, dvs. tallene 0, 1, 2, 3, …. Peanos mål med aksiomerne var at indfange de væsentligste egenskaber ved de naturlige tal, og aksiomerne giver da også tilstrækkelig regnekraft til at bevise Gödels ufuldstændigssætninger. Aksiomerne, af hvilke der er fem, kan formuleres som følger.

1. 0 er et tal.
2. Efterfølgeren til et tal er et tal.
3. 0 er ikke efterfølger til noget tal.
4. To forskellige tal har ikke den samme efterfølger.
5. Hvis nul har en bestemt egenskab - og der om ethvert tal gælder, at hvis tallet har egenskaben, så har efterfølgeren også egenskaben - så har alle tal egenskaben.

Det er vigtigt at bemærke, at aksiomerne er formulerede ved hjælp af tre begreber, nemlig "tal", "0" og "efterfølger", som ikke er definerede eksplicit, men som aksiomerne siger noget om. Med andre ord definerer aksiomerne ikke de naturlige tal eksplicit, men siger derimod noget om dem, nemlig at de har bestemte egenskaber. For eksempel siger det fjerde aksiom, at hver gang man tager to forskellige tal (for eksempel 3 og 8), gælder det, at også tallenes efterfølgere (dvs. 4 og 9) er forskellige.

Et fællestræk ved logiske regler er, at de repræsenterer logisk korrekte slutninger og gyldige argumenter. Man kan derfor bruge dem til at udlede ny information fra allerede kendt information. Logiske regler kan spores tilbage til Aristoteles' syllogismer (384-322 f. Kr.), for eksempel følgende.

Alle Athenere er grækere, Alle grækere er mennesker $\Longrightarrow$
Alle Athenere er mennesker

Sætningerne "Alle Athenere er grækere" og "Alle grækere er mennesker" kaldes præmisserne, og sætningen "Alle Athenere er mennesker" kaldes konklusionen. Det vigtige er her, at hvis præmisserne er sande, er konklusionen det også. Med andre ord, hvis man allerede ved, at præmisserne er sande, kan man udlede, at også konklusionen må være sand.

Moderne logiske regler er mere generelle, men de er baserede på nøjagtigt samme princip, nemlig at hvis præmisserne i en logisk regel er sande, skal konklusionen også være det. En anden vigtig egenskab ved moderne logiske regler er, at de er helt formelle, hvilket blandt andet har den fordel, at de let kan implementeres i en computer.

Kurt Gödel

Kurt Gödel blev født den 28. april 1906. Gödel er en af de store tænkere i vor tid, og han regnes for at være den betydeligste logiker i det 20. århundrede. Gödels 100 års fødselsdag i år har givet anledning til fejring af ham på forskellig vis.

Gödel er mest berømt for sit arbejde inden for matematisk logik. Udover de her i artiklen nævnte resultater, er han også kendt for afgørende resultater inden for mængdelæren. Hans interesser spændte vidt. Han publicerede flere artikler med fysiske og kosmologiske overvejelser om tidens natur. Mere præcist var han interesseret i forholdet mellem Einsteins relativitetsteori og det filosofiske spørgsmål om, hvorvidt tiden eksisterer objektivt, eller om tidens gang er et subjektivt fænomen. Af særlig interesse for Gödel var filosoffen, matematikeren og naturforskeren G.W. Leibniz' arbejde (1646-1716), herunder Leibniz' planlagte *characteristica universalis*, der var et symbolsk sprog, hvori man skulle kunne formulere al videnskab, matematik og metafysik. Ideen om et sådant altomfattende universelt sprog foregreb på mange måder udviklingen af de følgende 300 års logik. Af interesse for Gödel var også Leibniz' ontologiske bevis på Guds eksistens, som Gödel gav en eksakt, logisk formulering.

Kurt Gödel døde den 4. februar 1978 i Princeton, USA. Gödel var hele sit liv meget tilbageholdende med at offentliggøre sine filosofiske synspunkter, men det står klart, at de har spillet en betydelig rolle i hans videnskabelige arbejde. Gödels samlede værker, hvis udgivelse afsluttedes i 2003, kaster mere lys over dette spørgsmål, og det er bemærkelsesværdigt, at Gödels arbejde fortsat diskuteres inden for mange forskellige fag, specielt filosofi, datalogi og matematik.

diskuterede disse argumenter: Gödel var enig i konklusionen, nemlig at menneskers bevidste matematiske tænkning ikke er beregnelig. Han mente, at menneskers bevidsthed hidrører fra en ikke-materiel sjæl på linje med de ikke-materielle og objektivt eksisterende mængder i hans platoniske matematikfilosofi. Turing accepterede derimod ikke konklusionen, men mente, at argumentet hvilede på en forkert præmis, nemlig at menneskelig matematisk tænkning ikke begår fejl, som ikke kan korrigeres. Tværtimod mente Turing, at menneskelig matematisk tænkning er grundlæggende fejlbarlig, og at dette gjorde, at argumentet ikke holdt.

En prominent nutidig fortaler for sådanne argumenter er den engelske matematiker og fysiker Roger Penrose. På linie med Gödel mener Penrose ikke, at menneskers bevidste matematiske tænkning er beregnelig. Men i modsætning til Gödel mener Penrose, at menneskers bevidsthed skal forklares i materielle, fysiske termer, nemlig i termer af endnu ukendte kvantemekaniske fænomener, der altså må have en ikke-beregnelig karakter. Konsekvenserne af Gödels og Turings resultater har det sidste halve århundrede givet anledning til heftig debat inden for den gren af datalogien, som kaldes kunstig intelligens.

Fuldstændige bevissystemer

Et andet afgørende bidrag fra Gödel var hans såkaldte fuldstændighedssætning (som ikke skal forveksles med de to ovenfor beskrevne *u*fuldstændighedssætninger). Gödels fuldstændighedssætning blev publiceret i hans ph.d.-afhandling fra 1930, og handler om en bestemt og særligt vigtig slags logik, nemlig den logik, der kaldes første-ordens logik, og som groft set er en formalisering og generalisering af Aristoteles' syllogismer (se boks). Fuldstændighedssætningen siger, at der for første-ordens logikken godt kan opstilles et modsigelsesfrit og fuldstændigt bevissystem. Ufuldstændighedssætningen holder derfor ikke for første-ordens logikken. Dette skyldes, at første-ordens logikken ikke har så stærk en udtrykskraft som den logik, ufuldstændighedssætningerne handler om. Man kan nemlig ikke på den krævede måde regne med naturlige tal i første-ordens logikken. Første-ordens logikken har imidlertid en tilstrækkeligt stærk udtrykskraft til mange formål, herunder mange formål inden for datalogien, hvor et fuldstændigt bevissystem ofte er et afgørende kriterium for at implementere en logik i en computer. For eksempel er programmeringssproget Prolog (*Pro*gramming in *log*ic) baseret på et fuldstændigt bevissystem for en del af første-ordens logikken. Inden for datalogien er man faktisk også interesseret i logikker, der er mindre stærke end første-ordens logikken, idet sådanne logikker som regel kan implementeres mere effektivt i en computer.

Logiske argumenter er stadig gode

Gödels resultater er med til at afklare både logikkens muligheder og grænser: Gödels fuldstændighedssætning viser, at man for første-ordens logikkens vedkommende *kan* opnå fuldstændighed, hvilket siden hen er blevet fulgt af et væld af fuldstændighedsresultater for andre logikker, der er videnskabeligt interessante i sig selv såvel som brugbare i mange praktiske sammenhænge. På den anden side viser ufuldstændighedssætningerne, at der er en absolut grænse for logiske bevissystemers rækkevidde, og at computere ikke kan beregne alt. Men det vil være en misforståelse, hvis dette leder til, at man opgiver logikken og logisk ræsonneren. Et logisk korrekt argument er nu engang et godt argument, hvad enten det underliggende bevissystem er fuldstændigt eller ej. ■

Om forfatteren

Torben Braüner er lektor i datalogi ved Roskilde Universitetscenter og tilknyttet forskningsgruppen: Programmering, Logik og Intelligente Systemer
E-mail: torben@ruc.dk
Tlf.: 46743840

Mere information
Kurt Gödel. Collected Works, Vol. I-V, Solomon Feferman (red.). Oxford University Press, 1986-2003.

Ernest Nagel og James R. Newman. Gödel's Proof. New York University Press, 1958.

Roger Penrose. Shadows of the Mind. Oxford University Press, 1994.

Mikkel Willum Johansen: Matematik – kvadratisk, praktisk god. Aktuel Naturvidenskab nr. 4/2006.

The Kurt Gödel Society: http://kgs.logic.at