

# Axiale Lastverteilung im Gewinde einer Schraubenverbindung mit einer Druck- bzw. einer Zugmutter

## Axial Load Distribution in the Thread of a Screw Connection with a Pressure Nut or a Tension Nut

17 July 2016

© Klaus-Jürgen Bladt, 18119 Rostock, Streuwiesenweg 60, Germany

<p>Zusammenwirken von Schraube und Druckmutter Interaction of screw and nut</p>	<p>Modell der Kraftübertragung in einer Schraubenverbindung Model of the force transfer in a screw connection</p>	<p>Belastung der Gewindeflanken [1] Load of the thread flanks</p>	<p>Gewindegeometrie Geometry of thread</p>

Contact: [www.jbladt.de](http://www.jbladt.de)

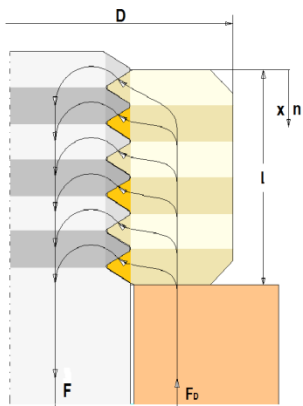
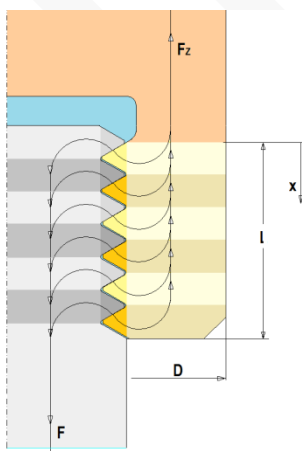
permanently under construction

Zwei Dinge sind zu unserer Arbeit nötig: unermüdliche Ausdauer und die Bereitschaft, etwas, in das man viel Arbeit gesteckt hat, wieder wegzwerfen ← A. E.

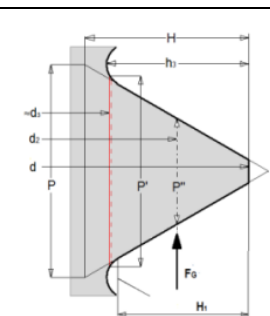
Die Dokumentation wurde mit bestem Wissen und Gewissen erarbeitet. Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle erhebt die Dokumentation keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Richtigkeit. Unbeabsichtigte Fehler können auftreten. Hinweise auf inhaltliche Verbesserungen sind erwünscht. Für die Vervielfältigung des Dokumentes und die Übernahme von Auszügen ist die Zustimmung des Autors erforderlich. Für den Inhalt verlinkter Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich.

The paper was prepared to best of one's knowledge. The paper makes no claim to be complete and correct in spite of the careful control. References for improvements with regard to the content are welcome.

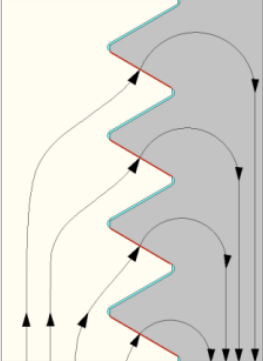
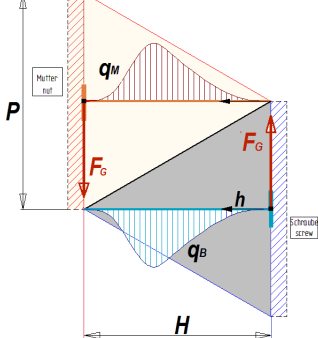
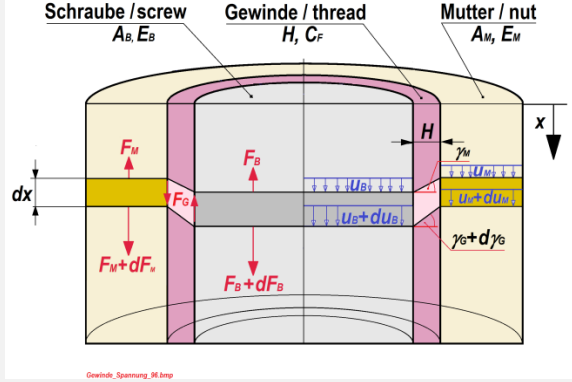
The duplication of the document and the taking over abridges require the approval of the author. The linked WEB-Site operators are responsible for contents of their own sites.

<p><b>0.00</b></p> <p>0.01</p>	<p><b>Problem und Zielstellung</b></p> <p>Mir sind einige interessante, plausible Problemlösungen begegnet, ohne diese aus Zeitmangel tiefergehend betrachten zu können, bei denen es sich lohnt, genauer hinzuschauen. Eine davon ist <b>die axiale Lastverteilung in einer Gewindepaarung</b>. Mich interessieren hierbei die Art und Weise, wie mit den Möglichkeiten der klassischen Mechanik und Mathematik eine akzeptable Lösung des Problems erreicht werden kann, aber auch die <u>Zwischenschritte</u>, die zum Ergebnis führen.</p> <p>Die Betrachtungen beziehen sich auf das Prinzip der Druckschrauben- und der Zugschraubenverbindung</p> <p>Die Thematik ist für den Konstrukteur bedeutsam bei der Beurteilung und Vermeidung von plastischer Verformung und Fressen einer Gewindepaarung.</p> <p>Die Lösung wird mit wenig Text dafür aber mit Bildern und detaillierten Ableitungen der zielführenden Gleichungen beschrieben. Parallel laufende Betrachtungen und Ableitungen für Zug- und Druckmutterverbindung werden nebeneinander dargestellt.</p>	<p><b>Problem and objective</b></p> <p>I on and off met interesting and plausible answers to problems without going deeper into the matter due to lack of time.</p> <p>One of them <b>is the axial load distribution in a mating thread</b>. Hereby, I am interested how to reach a solution by means of the classical mechanics and mathematics and moreover, I am interested in the <u>intermediate steps</u> which are giving rise to the final result.</p> <p>The considerations are relating to the principle of a screw connection with a pressure nut and the tension nut. This theme is of importance for constructors in order to evaluate and prevent prevent plastic deformation and seizing of mating threads.</p> <p>The solution will be described by a modicum for text but in exchange with pictures and detailed deviations of the targeted equations. Parallel going operations und deviations of the pressure and tension nut connection will be presented site by site.</p>
<p>0.02</p>	 <p>Prinzip einer Schraubenverbindung mit einer Druckmutter Principle of a connection with pressure nut</p>	 <p>Prinzip einer Schraubenverbindung mit einer Zugmutter Principle of a connection with a tension nut</p>
<p>0.03</p>		

<p><b>1.00</b></p>	<p><b>Formelzeichen und Symbole / symbols</b></p>	
<p>1.01</p>	<p>Höhenkoordinate Coordinate in direction of height</p>	<p><math>x, \quad 0 \leq x \leq l</math></p>
<p>1.02</p>	<p>Differentielles Höhenelement Differential element in direction of height</p>	<p><math>dx</math></p>
<p>1.03</p>	<p>Koordinate im Gewinde über die Gewindetiefe Coordinate in the thread over depth f thread</p>	<p><math>h, \quad 0 \leq h \leq H</math></p>
<p>1.04</p>	<p>Außendurchmesser der Mutter Outer diameter of nut</p>	<p><math>D, \quad d &lt; D \approx S_W, \quad D \approx S_W = \text{Schlüsselweite}</math></p>
<p>1.05</p>	<p>Gesamte Gewindehöhe über alle Gewindgänge Complete length about height of thread over all thread turns</p>	<p><math>l</math></p>
<p>1.06</p>	<p>Außendurchmesser des Gewindes (Nenndurchmesser ) Outer diameter of thread (nominal diameter)</p>	<p><math>d</math></p>
<p>1.07</p>	<p>Flankendurchmesser des Gewindes Flank diameter 2of the thread</p>	<p><math>d_2</math></p>
<p>1.08</p>	<p>Kerndurchmesser der Schraube Core diameter of thread</p>	<p><math>d_3</math></p>
<p>1.09</p>	<p>Steigung des Gewindes Pitch of thread</p>	<p><math>P</math></p>
<p>1.10</p>	<p>Gewindetiefe Depth of thread</p>	<p><math>H \approx d - d_3</math></p>
<p>1.11</p>	<p>Anzahl der Gewindgänge Number of thread turns</p>	<p><math>n = l/P</math></p>



1.12	Mittlerer Gewindeumfang eines Gewindeganges Mean circumference of one turn of the thread	$U_G = \pi \cdot d_2$	
1.13	Querschnittsfläche der Mutter Cross area of the nut	$A_M \approx \frac{\pi}{4} \cdot (D^2 - d^2)$	
1.14	Querschnittsfläche der Schraube Cross area of the Screw	$A_B \approx \frac{\pi}{4} \cdot d_3^2$	
1.15	Angriffsfläche der Schubspannung Acting area for the shear stress	$dA_\tau \approx \pi \cdot d_2 \cdot dx$	
1.16			
1.17	Zu übertragende Gesamtkraft von der Schraube in die Mutter To be transferred total force from the screw to the nut	$F$	
1.18			
1.19			
1.20	Übertragene Kraft an der Stelle x Transmitted force	$F_B(x)$	$F_M(x)$
1.21	Normalspannung Normal stress	$\sigma_B(x)$	$\sigma_M(x)$
1.22	Angriffsfläche für Normalspannung Acting area for the normal stress	$A_B = \frac{\pi}{4} \cdot d_3^2$	$A_M$
1.23	Lokale Verschiebung in der Schraube Local displacement in the screw	$u_B(x)$	$u_M(x)$
1.24	Dehnung Relative length deformation	$\varepsilon_B(x)$	$\varepsilon_M(x)$
1.25	Elastizitätsmodul E-modulus	$E_B$	$E_M$
1.26	Kraftübertrag im Gewinde Force transfer in the thread	$F_G(x)$	
1.27	Schubspannung Shear stress	$\tau_G(x)$	
1.28	Mittlere Pressung im Gewinde über die Gewindetiefe H Mean pressure in the thread over the depth of flank H	$p(x)$	
1.29	Querkraftverteilung (Pressungsverteilung) über die Gewindetiefe Shear force distribution (pressure distribution) over the thread depth	$q(h)$	
1.30	Angriffsfläche der Schubspannung Acting area of the shear stress	$A_\tau = \pi \cdot d_2 \cdot dx$	
1.32	Winkeländerung in Folge der Verformung des Gewindes Change of the arc due to of the deformation of the thread	$\gamma_G(x)$	
1.33	Fiktive Schubmodule des Gewindes Notional shear modulus of the thread	$G_G^*$	
1.34			
1.35	Gewindeverformungskraft für Definition der Gewindesteifigkeit Force of deformation of the thread for the definition of the stiffness of thread [1]	$F^*$	
1.36	Verformung im Gewindebereich durch eine definierte Kraft zur Definition der Gewindesteifigkeit [1] Deformation of the thread due to a defined force for the definition of the stiffness of the thread [1]	$w^*$	
1.37	Gewindesteifigkeit des Gewindes [1] Stiffness of thread [1]	$C_G = \frac{F^*}{w^*}$	
1.38			
1.39	Faktor im Exponenten der Lösung der Differentialgleichung Factor in the exponent of the solution of the differential equation	$\omega$	
1.40	Konstante des Exponenten Constant of the exponent	$a$	
1.41			
1.42			
1.43	<b>Indices</b>		
1.44	Schraube / Bolzen / Screw / bolt	...B	
1.45	Gewinde / Thread	...G	
1.46	Mutter / Nut	...M	
1.47	Druckmutter / Pressure nut	...D	
1.48	Zugmutter / tension nut	...Z	
1.49	Mittelwert / Mean value	...m	
1.50			
1.51	Nicht auf geführt formenzeichen und Symbole sind im in den folgenden Ausführungen erklärt. Symbols, which you don't find above, are explained in the following script.		

2.00	<b>Ermittlung einer Gleichung für den Kraftverlauf in einer Schraubenverbindung</b> <i>Establish of an equation for the force transfer in a screw connection</i>		
2.01	<b>Kraftfluss und Kraftverteilung</b> an den Gewindeflanken in einer Gewindepaarung einer Schraubenverbindung [1] Force distribution on the thread flanks and flow of forces in a matching thread of a screw connection [1]	 <p>Kraftfluss im Gewinde Power flow in the thread</p>	 <p>Gewindebelastungsmodell zur Ermittlung der Deformation im Gewinde [1] Model of thread load (Timoshenko-beam)</p>
2.02	<b>Modell</b> für die Ermittlung der Lastverteilung im Gewinde  Skizze zum Verständnis von Kräftegleichgewicht und Verschiebungen, Deformationen und Winkeländerungen  Sketch for understanding of the balance of forces, deformations and change of angles [2]		
2.03		Ausgangsgleichungen / Basic equations <b>Kräftegleichgewicht + Stoffgesetz</b> Balance of forces + material law	Ausgangsgleichungen / Basic equations <b>Deformationen + Stoffgesetz</b> Deformations + material law
2.04	<b>Gleichgewichtsbedingungen und Verformungen</b>	$(F_B(x) + dF_B(x)) - F_B(x) - F_G(x) = 0$	$(u_B(x) - u_M(x)) = H \cdot \gamma$
2.05	Conditions of balance and deformations	$(F_M(x) + dF_M(x)) - F_M(x) + F_G(x) = 0$	$(u_B(x) + du_B(x)) - (u_M(x) + du_M(x)) = H \cdot (\gamma + d\gamma)$
2.06	↓	$dF_B(x) - dF_M(x) = +2 \cdot F_G(x)$	$du_B(x) - du_M(x) = du_G(x) = H \cdot d\gamma_G(x)$
2.07	Wandlung des Kräftegleichgewichts in ein Spannungsgleichgewicht <b>Geometrie</b> Transformation of the balance of forces in a balance of stresses	$+A_B \cdot d\sigma_B(x) - A_M \cdot d\sigma_M(x) = 2 \cdot (\pi \cdot d_2 \cdot dx) \cdot \tau_G(x)$ <p style="text-align: center;">↓</p>	
2.08	↓	$+\frac{d\sigma_M(x)}{dx} - \frac{A_B}{A_M} \cdot \frac{d\sigma_B(x)}{dx} = -\frac{2 \cdot \pi \cdot d_2}{A_M} \cdot \tau_G(x)$	$\frac{du_G(x)}{dx} = H \cdot \frac{d\gamma_G(x)}{dx}$
2.09	<b>Einführung des Stoffgesetzes</b>	$\sigma_B = E_B \cdot \varepsilon_B(x) \downarrow$	$\tau_G(x) = G_G^* \cdot \gamma_G(x) \downarrow$
2.10	in die Gleichungen für Kräftegleichgewicht und Verformungen	$\varepsilon_B = \frac{du_B(x)}{dx} \downarrow$	Differenziert $\frac{1}{G_G^*} \cdot \frac{d\tau_G(x)}{dx} = \frac{d\gamma_G(x)}{dx}$
2.11		$\frac{\sigma_B}{E_B} = \frac{du_B(x)}{dx} \rightarrow$	$\frac{\sigma_B(x)}{E_B} - \frac{\sigma_M(x)}{E_M} = H \cdot \frac{d\gamma_G(x)}{dx}$
2.12	Introduction of a material law into the equations for balance of forces and deformations	$\frac{d\sigma_M(x)}{dx} - \frac{A_B}{A_M} \cdot \frac{d\sigma_B(x)}{dx} = -\frac{2 \cdot \pi \cdot d_2}{A_M} \cdot \tau_G(x)$	$\frac{\sigma_M(x)}{E_M} - \frac{\sigma_B(x)}{E_B} = -\frac{H}{G_G^*} \cdot \frac{d\tau_G(x)}{dx}$
2.13	<b>Ermittlung einer Vergleichsgröße</b>	Differenziert	

	Determination of size for comparison	$\frac{d^2 \sigma_M(x)}{dx^2} - \frac{A_B}{A_M} \cdot \frac{d^2 \sigma_B(x)}{dx^2} = - \frac{2 \cdot \pi \cdot d_2}{A_M} \cdot \frac{d\tau_G(x)}{dx}$	$\frac{G_G^*}{H} \cdot \left( \frac{\sigma_M(x)}{E_M} - \frac{\sigma_B(x)}{E_B} \right) = - \frac{d\tau_G(x)}{dx}$
2.14		$\Downarrow$ Zusammenführung der Gleichungen $\Leftarrow$ <i>bring together the equations</i>	
2.15		$\frac{d^2 \sigma_M(x)}{dx^2} - \frac{A_B}{A_M} \cdot \frac{d^2 \sigma_B(x)}{dx^2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot d_2}{A_M} \cdot \frac{G_G^*}{H} \cdot \left( \frac{\sigma_M(x)}{E_M} - \frac{\sigma_B(x)}{E_B} \right)$	
2.16			
2.17	<b>Einführung einer Gewindesteifigkeit</b> zur Beschreibung der Gewindeverformung durch ein zu übertragene Schubkraft bzw. Schubspannung <i>Introduction of a stiffness of thread for the description of the thread deformation as a result of the transmitted shear force respectively shear stress</i>	Das komplette Gewinde besteht sowohl aus den Gewindegängen der Mutter als auch aus den Gewindegängen der Schraube. Der Gleitmodul $G_G^*$ ist somit eine fiktive Größe, in der die Geometrie- und Materialeigenschaften des Gewindes von Mutter und Schraube enthalten sind. In [1] wurde die Steifigkeit $C_G = f(C_{GB}, C_{GM})$ des metrischen Gewindes in Abhängigkeit von den Geometrie- und Materialeigenschaften ermittelt. Damit kann der Gleitmodul $G_G^*$ bzw. $\frac{G_G^*}{H}$ wie folgt beschrieben werden: The complete thread consists both of the thread turns of the screw and the thread turns of the nut. The shear modulus $G_G^*$ is because of a fictive size, in which conditions of geometry and material of the screw and the nut are included. In [1] was estimated the stiffness of the thread $C_G = f(C_{GB}, C_{GM})$ - in dependence of the conditions of geometry and material. Therewith the shear modulus can be described as follows:	
2.18		$\tau_G^* \approx \frac{F^*}{\pi \cdot d_2 \cdot P} \approx G_G^* \cdot \gamma_G \approx G_G^* \cdot \frac{w^*}{H} \rightarrow G_G^* = \frac{F^*}{w^*} \cdot \frac{H}{\pi \cdot d_2 \cdot P} = C_G \cdot \frac{H}{\pi \cdot d_2 \cdot P} \rightarrow \frac{G_G^*}{H} = \frac{C_G}{\pi \cdot d_2 \cdot P}$	
2.19		Wandlung des Gleitmoduls in eine Steifigkeitskenngröße des Gewindes von Mutter und Schraube Transformation of the shear modulus in a stiffness characteristic of the thread of screw and nut.	
2.20		$\frac{d^2 \sigma_M(x)}{dx^2} - \frac{A_B}{A_M} \cdot \frac{d^2 \sigma_B(x)}{dx^2} = \frac{1}{A_M} \cdot \frac{2 \cdot C_G}{P} \cdot \left( \frac{\sigma_M(x)}{E_M} - \frac{\sigma_B(x)}{E_B} \right)$	
2.21	Ausgangsgleichung für die Berechnung der Gewindebeanspruchung Basic equation for the calculation of the thread stress	$\left( \frac{\sigma_M(x)}{E_M} - \frac{\sigma_B(x)}{E_B} \right) - A_M \cdot \frac{P}{2 \cdot C_G} \cdot \left( \frac{d^2 \sigma_M(x)}{dx^2} - \frac{A_B}{A_M} \cdot \frac{d^2 \sigma_B(x)}{dx^2} \right) = 0$	
2.22			

3.00	<b>Anwendung der Gleichungen für Ermittlung der Kraftverteilung in einer Schraubenverbindung mit einer Druckmutter bzw. Zugmutter</b> <i>Application of the equation for determining the force distribution in a screw connection with a pressure nut respectively a tension nut</i>		
3.01		$\Downarrow$	$\Downarrow$
3.02		<b><u>Druckmutter / Pressure nut</u></b>	<b><u>Zugmutter / Tension nut</u></b>
	Darstellung der Wirkungsweise von Druckmutter und Zugmutter Illustration of the operation of the pressure nut and the tension nut		
3.03	Kräftegleichgewicht Balance of forces	$F_B(x) + F_M(x) = 0$	$F_B(x) + F_M(x) = F$
3.04		$A_B \cdot \sigma_B(x) + A_M \cdot \sigma_M(x) = 0$	$A_B \cdot \sigma_B(x) + A_M \cdot \sigma_M(x) = F$
3.05	Eliminieren von $\sigma_M(x)$ Elimination of $\sigma_M(x)$	$\sigma_M(x) = - \frac{A_B}{A_M} \cdot \sigma_B(x)$	$\sigma_M(x) = \frac{F}{A_M} - \frac{A_B}{A_M} \cdot \sigma_B(x)$
3.06	Differenzieren von $\sigma_M(x)$ Differentiation of $\sigma_M(x)$	$\frac{\sigma_M^2(x)}{dx^2} = - \frac{A_B}{A_M} \cdot \frac{\sigma_B^2(x)}{dx^2}$	$\frac{\sigma_M^2(x)}{dx^2} = - \frac{A_B}{A_M} \cdot \frac{\sigma_B^2(x)}{dx^2}$

3.07			
3.08	Umformen von 2.21 Transformation of 2.21	$\sigma_M(x) - \frac{E_M}{E_B} \cdot \sigma_B(x) - A_M \cdot \frac{E_M \cdot P}{2 \cdot C_G} \cdot \left( \frac{d^2 \sigma_M(x)}{dx^2} - \frac{A_B}{A_M} \cdot \frac{d^2 \sigma_B(x)}{dx^2} \right) = 0$	$\sigma_M(x) - \frac{E_M}{E_B} \cdot \sigma_B(x) - A_M \cdot \frac{E_M \cdot P}{2 \cdot C_G} \cdot \left( \frac{d^2 \sigma_M(x)}{dx^2} - \frac{A_B}{A_M} \cdot \frac{d^2 \sigma_B(x)}{dx^2} \right) = 0$
3.09	Ersetzen von $\sigma_M(x)$ Replacement of $\sigma_M(x)$	$-\frac{A_B}{A_M} \cdot \sigma_B(x) - \frac{E_M}{E_B} \cdot \sigma_B(x) - A_M \cdot \frac{E_M \cdot P}{2 \cdot C_G} \cdot \left( -\frac{A_B}{A_M} \cdot \frac{\sigma_B^2(x)}{dx^2} - \frac{A_B}{A_M} \cdot \frac{d^2 \sigma_B(x)}{dx^2} \right) = 0$	$\frac{F}{A_M} - \frac{A_B}{A_M} \cdot \sigma_B(x) - \frac{E_M}{E_B} \cdot \sigma_B(x) - A_M \cdot \frac{E_M \cdot P}{2 \cdot C_G} \cdot \left( -\frac{A_B}{A_M} \cdot \frac{\sigma_B^2(x)}{dx^2} - \frac{A_B}{A_M} \cdot \frac{d^2 \sigma_B(x)}{dx^2} \right) = 0$
3.10	Umstellung der Gleichung Transformation of equation ↓	$-\frac{A_B}{A_M} \cdot \sigma_B(x) - \frac{E_M}{E_B} \cdot \sigma_B(x) + A_M \cdot \frac{E_M \cdot P}{2 \cdot C_G} \cdot \left( \frac{A_B}{A_M} \cdot \frac{\sigma_B^2(x)}{dx^2} + \frac{A_B}{A_M} \cdot \frac{d^2 \sigma_B(x)}{dx^2} \right) = 0$	$\frac{F}{A_M} - \frac{A_B}{A_M} \cdot \sigma_B(x) - \frac{E_M}{E_B} \cdot \sigma_B(x) + A_M \cdot \frac{E_M \cdot P}{2 \cdot C_G} \cdot \left( \frac{A_B}{A_M} \cdot \frac{\sigma_B^2(x)}{dx^2} + \frac{A_B}{A_M} \cdot \frac{d^2 \sigma_B(x)}{dx^2} \right) = 0$
3.11		$-\left( \frac{A_B}{A_M} + \frac{E_M}{E_B} \right) \cdot \sigma_B(x) + \frac{A_B \cdot E_M \cdot P}{C_G} \cdot \frac{\sigma_B^2(x)}{dx^2} = 0$	$\frac{F}{A_M} - \left( \frac{A_B}{A_M} + \frac{E_M}{E_B} \right) \cdot \sigma_B(x) + \frac{A_B \cdot E_M \cdot P}{C_G} \cdot \frac{\sigma_B^2(x)}{dx^2} = 0$
3.12		$\left( \frac{A_B \cdot E_B + A_M \cdot E_M}{A_M \cdot E_B} \right) \cdot \sigma_B(x) - \frac{A_B \cdot E_M \cdot P}{C_G} \cdot \frac{\sigma_B^2(x)}{dx^2} = 0$	$\left( \frac{A_B \cdot E_B + A_M \cdot E_M}{A_M \cdot E_B} \right) \cdot \sigma_B(x) - \frac{A_B \cdot E_M \cdot P}{C_G} \cdot \frac{\sigma_B^2(x)}{dx^2} = \frac{F}{A_M}$
3.13		$\sigma_B(x) - \frac{A_B \cdot E_M \cdot P}{C_G} \cdot \frac{A_M \cdot E_B}{A_B \cdot E_B + A_M \cdot E_M} \cdot \frac{\sigma_B^2(x)}{dx^2} = 0$	$\sigma_B(x) - \frac{A_B \cdot E_M \cdot P}{C_G} \cdot \frac{A_M \cdot E_B}{A_B \cdot E_B + A_M \cdot E_M} \cdot \frac{\sigma_B^2(x)}{dx^2} = \frac{F}{A_M} \cdot \frac{A_M \cdot E_B}{A_B \cdot E_B + A_M \cdot E_M}$
3.14	Hinweis für Zugmutter: Note for tension nut · $\frac{A_B}{A_B} = \frac{A_M}{A_M} = 1$	↓	$\sigma_B(x) - \frac{A_B \cdot E_M \cdot P}{C_G} \cdot \frac{A_M \cdot E_B}{A_B \cdot E_B + A_M \cdot E_M} \cdot \frac{\sigma_B^2(x)}{dx^2} = \frac{F}{A_B} \cdot \frac{A_B \cdot E_B}{A_B \cdot E_B + A_M \cdot E_M}$
3.15			
3.16	Differentialgleichungen Differential equations	<b>Homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstantem Koeffizienten</b> <u>homogeneous</u> differential equation 2 <sup>nd</sup> order with constant coefficients	<b>Inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstantem Koeffizienten</b> <u>inhomogeneous</u> differential equation 2 <sup>nd</sup> order with constant coefficients
3.17		↓	<b>Wandlung in eine homogene Dgl. durch Substitution</b> conversion into a homogeneous differential equation by substitution
3.18		↓	$s_Z(x) = \sigma_B(x) - b$
3.19			$b = \frac{F}{A_B} \cdot \frac{A_B \cdot E_B}{A_B \cdot E_B + A_M \cdot E_M}$
3.10		↓	$\frac{s_Z^2(x)}{dx^2} = \frac{\sigma_B^2(x)}{dx^2}$
3.11		↓	$s_Z(x) - a \cdot \frac{s_Z^2(x)}{dx^2} = 0$
3.12	Bedingungen Conditions	↓	<b>Angepasste Randbedingungen</b> Adapted conditions $s(x=0) = \sigma_B(x=0) - b = -b = s_0$ $s(x=l) = \sigma_B(x=l) - b = \left( \frac{F}{A_B} - b \right) = s_l$
3.13	homogene Differentialgleichungen homogeneous differential equation	$\sigma_B(x) - a \cdot \frac{\sigma_B^2(x)}{dx^2} = 0$	$s_Z(x) - a \cdot \frac{s_Z^2(x)}{dx^2} = 0$
		$\sigma_B(x) = e^{\omega \cdot x}$	$s_Z(x) = e^{\omega \cdot x}$

<b>4.00</b>	<b>Lösung einer homogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten</b> Solution of the homogeneous differential equation with constant coefficients		
4.01	Zu lösende homogene Differentialgleichung Homogeneous differential equation to be solved	$y - a \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$	
4.02	Lösungsansatz Approach for equation	$y = e^{\omega \cdot x}$	
4.03		$e^{\alpha \cdot x} - a \cdot \omega^2 \cdot e^{\omega \cdot x} = 0$	
4.04		$\omega = \pm \sqrt{1/a}$	
4.05		$y(x) = C_1 \cdot e^{x/\sqrt{a}} + C_2 \cdot e^{-x/\sqrt{a}}$	
4.06	Randbedingung 1 Boundary condition 1	$y(x=0) = y_0$	
4.07	Randbedingung 2 Boundary condition 2	$y(x=l) = y_l$	
4.08	Für Randbedingung 1 For boundary condition 1	$y_0 = C_1 \cdot e^{0/\sqrt{a}} + C_2 \cdot e^{-0/\sqrt{a}} = C_1 + C_2$	
4.09	Für Randbedingung 2 For boundary condition 2	$y_l = C_1 \cdot e^{l/\sqrt{a}} + C_2 \cdot e^{-l/\sqrt{a}}$	
4.10	Mit Randbedingung 1 With boundary condition 1	$C_2 = y_0 - C_1$	
4.11	Mit Randbedingung 2 With boundary condition 2	$y_l = C_1 \cdot e^{l/\sqrt{a}} + (y_0 - C_1) \cdot e^{-l/\sqrt{a}} = C_1 \cdot (e^{l/\sqrt{a}} - e^{-l/\sqrt{a}}) + y_0 \cdot e^{-l/\sqrt{a}}$	

4.12		
4.13	Integrationskonstante 1 Integration constant 1	$C_1 = \frac{y_l - y_0 \cdot e^{-l/\sqrt{a}}}{e^{l/\sqrt{a}} - e^{-l/\sqrt{a}}}$
4.14	Integrationskonstante 2 Integration constant 2	$C_2 = y_0 - C_1 = \frac{y_0 \cdot e^{l/\sqrt{a}} - y_0 \cdot e^{-l/\sqrt{a}} - y_l + y_0 \cdot e^{-l/\sqrt{a}}}{e^{l/\sqrt{a}} - e^{-l/\sqrt{a}}} = -\frac{y_l - y_0 \cdot e^{l/\sqrt{a}}}{e^{l/\sqrt{a}} - e^{-l/\sqrt{a}}}$
4.15	Lösung der Differentialgleichung Solution of the differential equation	$y = \frac{y_l - y_0 \cdot e^{-l/\sqrt{a}}}{e^{l/\sqrt{a}} - e^{-l/\sqrt{a}}} \cdot e^{x/\sqrt{a}} - \frac{y_l - y_0 \cdot e^{l/\sqrt{a}}}{e^{l/\sqrt{a}} - e^{-l/\sqrt{a}}} \cdot e^{-x/\sqrt{a}}$

<b>5.00</b>	<b>Anwendung der Lösung für die Druckmutter und die Zugmutter</b> Application of the solution on the pressure nut and the tension nut	
5.01		
5.02	<b>Druckmutter / Pressure nut</b>	<b>Zugmutter / Tension nut</b>
5.03	$\sigma_{DB}(x) = y(x)$	$y(x) = \sigma_{ZB}(x) - b$
5.04	Randbedingung 1 Boundary condition 1	$y_0 = \sigma_{ZB}(x=0) - b$
5.06		$y_0 = -b$
5.07	Randbedingung 2 Boundary condition 2	$y_l = \sigma_{ZB}(x=l) - b = \frac{F}{A_B} - b$
5.08	Lösung mit Randbedingen Solution with boundary conditions	$y(x) = \frac{y_l - y_0 \cdot e^{-l/\sqrt{a}}}{e^{l/\sqrt{a}} - e^{-l/\sqrt{a}}} \cdot e^{x/\sqrt{a}} - \frac{y_l - y_0 \cdot e^{l/\sqrt{a}}}{e^{l/\sqrt{a}} - e^{-l/\sqrt{a}}} \cdot e^{-x/\sqrt{a}}$
5.09	$\sigma_{DB}(x) = \frac{y_l - y_0 \cdot e^{-l/\sqrt{a}}}{e^{l/\sqrt{a}} - e^{-l/\sqrt{a}}} \cdot e^{x/\sqrt{a}} - \frac{y_l - y_0 \cdot e^{l/\sqrt{a}}}{e^{l/\sqrt{a}} - e^{-l/\sqrt{a}}} \cdot e^{-x/\sqrt{a}}$	$\sigma_{ZB}(x) = \frac{y_l - y_0 \cdot e^{-l/\sqrt{a}}}{e^{l/\sqrt{a}} - e^{-l/\sqrt{a}}} \cdot e^{x/\sqrt{a}} - \frac{y_l - y_0 \cdot e^{l/\sqrt{a}}}{e^{l/\sqrt{a}} - e^{-l/\sqrt{a}}} \cdot e^{-x/\sqrt{a}} + b$
5.10	$\sigma_{DB}(x) = \frac{\frac{F}{A_B}}{e^{l/\sqrt{a}} - e^{-l/\sqrt{a}}} \cdot e^{x/\sqrt{a}} - \frac{\frac{F}{A_B}}{e^{l/\sqrt{a}} - e^{-l/\sqrt{a}}} \cdot e^{-x/\sqrt{a}}$	$\sigma_{ZB}(x) = \frac{(\frac{F}{A_B} - b) \cdot e^{x/\sqrt{a}} + b \cdot e^{(x-l)/\sqrt{a}} - (\frac{F}{A_B} - b) \cdot e^{-x/\sqrt{a}} + b \cdot e^{-(x-l)/\sqrt{a}}}{e^{l/\sqrt{a}} - e^{-l/\sqrt{a}}} + b$
5.11	$\sigma_{DB}(x) = \frac{F}{A_B} \cdot \frac{e^{x/\sqrt{a}} - e^{-x/\sqrt{a}}}{e^{l/\sqrt{a}} - e^{-l/\sqrt{a}}}$	$\sigma_{ZB}(x) = \frac{(\frac{F}{A_B} - b) \cdot (e^{x/\sqrt{a}} - e^{-x/\sqrt{a}}) + b \cdot (e^{(x-l)/\sqrt{a}} - e^{-(x-l)/\sqrt{a}})}{e^{l/\sqrt{a}} - e^{-l/\sqrt{a}}} + b$
5.12		$\sigma_{ZB}(x) = \frac{F}{A_B} \cdot \left(1 - \frac{A_B E_B}{A_B E_B + A_M E_M}\right) \frac{(e^{x/\sqrt{a}} - e^{-x/\sqrt{a}})}{e^{l/\sqrt{a}} - e^{-l/\sqrt{a}}} + \frac{F}{A_B E_B + A_M E_M} \frac{(e^{(x-l)/\sqrt{a}} - e^{-(x-l)/\sqrt{a}})}{e^{l/\sqrt{a}} - e^{-l/\sqrt{a}}} + \frac{F}{A_B E_B + A_M E_M}$
5.13		$\sigma_{ZB}(x) = \frac{F}{A_B} \frac{A_M E_M}{A_B E_B + A_M E_M} \frac{(e^{x/\sqrt{a}} - e^{-x/\sqrt{a}})}{e^{l/\sqrt{a}} - e^{-l/\sqrt{a}}} + \frac{F}{A_B E_B + A_M E_M} \frac{(e^{(x-l)/\sqrt{a}} - e^{-(x-l)/\sqrt{a}})}{e^{l/\sqrt{a}} - e^{-l/\sqrt{a}}} + \frac{F}{A_B E_B + A_M E_M}$
5.14		
<b>5.15</b>	<b>Schraube / Screw (bolt)</b>	
5.16	Kraftverteilung in der Schraube Force distribution in the screw $\frac{\sigma_B(x) \cdot A_B}{F} = \frac{F_B(x)}{F}$	$\frac{F_{ZB}(x)}{F} = \frac{A_M \cdot E_M}{A_B \cdot E_B + A_M \cdot E_M} \cdot \frac{(e^{x/\sqrt{a}} - e^{-x/\sqrt{a}})}{e^{l/\sqrt{a}} - e^{-l/\sqrt{a}}} - \frac{A_B \cdot E_B}{A_B \cdot E_B + A_M \cdot E_M} \cdot \frac{(e^{(l-x)/\sqrt{a}} - e^{-(l-x)/\sqrt{a}})}{e^{l/\sqrt{a}} - e^{-l/\sqrt{a}}} + \frac{A_B \cdot E_B}{A_B \cdot E_B + A_M \cdot E_M}$
5.16	Umformung / Transformation [3], [4] $\sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \rightarrow$	$\frac{F_{ZB}(x)}{F} = \frac{A_M \cdot E_M}{A_B \cdot E_B + A_M \cdot E_M} \cdot \frac{\sinh(x/\sqrt{a})}{\sinh(l/\sqrt{a})} - \frac{A_B \cdot E_B}{A_B \cdot E_B + A_M \cdot E_M} \cdot \left(\frac{\sinh((l-x)/\sqrt{a})}{\sinh(l/\sqrt{a})} - 1\right)$
5.17	Einführen und Umformen Introduction and transformation	$c = l/\sqrt{a} = \sqrt{\frac{l^2}{P} \cdot \frac{A_B \cdot E_B + A_M \cdot E_M}{A_B \cdot E_M \cdot A_M \cdot E_B} \cdot C_G} = \sqrt{l \cdot n \cdot \frac{A_B \cdot E_B + A_M \cdot E_M}{A_B \cdot E_M \cdot A_M \cdot E_B} \cdot C_G} \text{ mit } \frac{l}{P} = n$
5.18	Gl./Equ. 2.19	$C_G = d \cdot E_B \cdot \left[0,72 + 0,87469 \cdot \left(\frac{E_M - E_B}{E_M + E_B}\right)^4 - 0,49499 \cdot \left(\frac{E_M - E_B}{E_M + E_B}\right)^2\right]$
5.19	Dimensionsloser Kraftverteilung in der Schraube Dimensionless force distribution in the bolt	$\frac{F_{DB}(x/l)}{F} = \frac{\sinh\left(\frac{x}{l} \sqrt{l \cdot n \cdot \frac{A_B \cdot E_B + A_M \cdot E_M}{A_B \cdot E_M \cdot A_M \cdot E_B} \cdot C_G}\right)}{\sinh\left(\sqrt{l \cdot n \cdot \frac{A_B \cdot E_B + A_M \cdot E_M}{A_B \cdot E_M \cdot A_M \cdot E_B} \cdot C_G}\right)}$
5.20	Info: $\frac{1}{c^2} = \frac{1}{l \cdot n \cdot C_G} \cdot \frac{A_M \cdot E_M \cdot A_B \cdot E_B}{A_B \cdot E_B + A_M \cdot E_M}$	$\frac{F_{ZB}(x/l)}{F} = \frac{l \cdot n \cdot C_G}{A_B \cdot E_B \cdot c^2} \cdot \left\{ \frac{\sinh\left(\frac{x}{l} \cdot c\right)}{\sinh(c)} - \frac{A_B \cdot E_B}{A_M \cdot E_M} \cdot \left(\frac{\sinh\left(\frac{(l-x)}{l} \cdot c\right)}{\sinh(c)} - 1\right) \right\}$

5.21			
<b>5.22</b>	<b>Gewinde / Thread</b>		
5.23	Ausgangsgleichung für die Gewindepressung Basic equation for the pressure in the thread Gl./Equ. 2.04	$dF_B(x) = F_G(x)$	
5.24	Transformation Transformation	Längenelement in Umfangsrichtung / Element of length in direction of circumference $dU_G = dx \cdot \frac{\pi \cdot d_2}{P}$	
5.25	Pressungsflächenelement Element of pressure area	$dA_G = dU_G \cdot H = dx \cdot \frac{\pi \cdot d_2}{P} \cdot H$	
5.26	Pressungsfläche des gesamten Gewindes Pressure area of the complete thread	$A_G = \frac{n \cdot \pi \cdot d_2}{\text{Gewindelänge}} \cdot H = \frac{L}{P} \cdot \pi \cdot d_2 \cdot H$	
5.27	Pressung an der Stelle x	$p(x) = \frac{dF_B(x)}{dA_G} = \frac{F_G(x)}{dA_G} \rightarrow p(x) = \left( \frac{dF_B(x)}{dx} \right) \cdot \frac{1}{\frac{\pi \cdot d_2}{P} \cdot H} = \frac{F_G(x)}{dx} \cdot \frac{1}{\frac{\pi \cdot d_2}{P} \cdot H}$	
5.28	Mittlere Pressung im Gewinde Mean pressure in the thread	$p_m = \frac{F}{L \cdot H} = \frac{F}{\underbrace{L \cdot \pi \cdot d_2 \cdot H}_{A_G}}$	
5.29	Dimensionslose Pressungsverteilung im Gewinde	$\frac{p(x)}{p_m} = \left\{ \frac{dF_B(x)}{F/l} \right\} = \frac{F_G(x)}{F/l}$	
5.29	Dimensionless pressure distribution in the thread		
5.30			
5.31		$\frac{p_{DG}(x/l)}{p_{Dm}} = c \cdot \frac{\cosh(x/l \cdot c)}{\sinh(c)}$	
5.31		$\frac{p_{ZG}(x/l)}{p_{Zm}} = \frac{l \cdot n \cdot C_G}{A_B \cdot E_B \cdot c} \cdot \left( \frac{\cosh(x/l \cdot c)}{\sinh(c)} + \frac{A_B \cdot E_B}{A_M \cdot E_M} \cdot \frac{\cosh(l-x/l \cdot c)}{\sinh(c)} \right)$	
5.32			
<b>5.33</b>	<b>Mutter / Nut</b>		
5.34	Kraftverteilung in der Mutter Force distribution in the nut	$F_B(x) + F_M(x) = 0$	$F_B(x) + F_M(x) = F$
5.35		$\rightarrow \frac{F_M(x/L)}{F} = -\frac{F_B(x/L)}{F}$	$\frac{F_M(x/L)}{F} = 1 - \frac{F_B(x/L)}{F}$
5.36			



<b>6.00</b>	<b>Beispiel und Diskussion / Example and discussion</b>								
6.01	<b>Beispiel / example</b>								
6.02	$D = 16,0 \text{ mm}$	$d = 10,0 \text{ mm}$	$d_2 = 9,350 \text{ mm}$	$d_3 = 8,124 \text{ mm}$	$P = 1,00 \text{ mm}$	$l = 10,0 \text{ mm}$	$E_B = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$	$E_M = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$	$C_G = 7,60 \cdot 10^6 \text{ N/mm}$
6.03	Vergleich Comparison	<p><b>Druckmutter / pressure nut</b> Kraftübertragung von der Schraube zur Mutter forces transfer from the screw to the nut</p> <p>(+) Zugkraft (-) Druckkraft</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>—○— dimensionslose Kraftverteilung in der Schraube <math>F_B / (F/L)</math></li> <li>—●— dimensionslose Kraftverteilung im Gewinde <math>pG/pm</math></li> <li>—●— dimensionslose Kraftverteilung in der Mutter <math>F_M/F</math></li> <li>—*— dimensionslose zu übertragende Kraft <math>+F/F</math></li> <li>—*— dimensionslose zu übertragende Kraft <math>-F/F</math></li> </ul>	<p><b>Zugmutter / tensile nut</b> Kraftübertragung von der Schraube zur Mutter force transfer from the screw to the nut</p> <p>(+) Zugkraft (-) Druckkraft</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>—○— dimensionslose Kraftverteilung in der Schraube <math>F_B / (F/L)</math></li> <li>—●— dimensionslose Kraftverteilung im Gewinde <math>pG/pm</math></li> <li>—●— dimensionslose Kraftverteilung in der Mutter <math>F_M/F</math></li> <li>—*— dimensionslose zu übertragende Kraft <math>+F/F</math></li> <li>—*— dimensionslose zu übertragende Kraft <math>-F/F</math></li> </ul>						



6.04	<b>Diskussion der Ergebnisse / discussion of results</b>	
	<p>1. Für die Einschätzung der Pressung in Gewinden von Schraubenverbindungen mit einer Druck- oder Zugmutter wurden zwei einfache, gut handhabbare Gleichungen abgeleitet.</p> <p>2. Ergebnisse mit diesen Gleichungen geben einen guten Einblick in den Mechanismus des Kraftübergangs von der Schraube zur Mutter (oder umgekehrt).</p> <p>3. Die erreichbaren Ergebnisse haben vorwiegend einen qualitativen Charakter. Sie sind auf Grund der Annahmen und Vereinfachungen nur teilweise quantitativ verwertbar.</p> <p>4. <u>Aber:</u> Der Vergleich von Ergebnissen, die mit unterschiedlichen Materialien und geometrischen Bedingungen ermittelt wurden, gibt brauchbare Hinweise zur Gestaltung einer Schraubenverbindung.</p> <p>5. Das Beispiel zeigt sehr gut die Unterschiede bzgl. der Kraftübertragung beim Einsatz einer Druckmutter bzw. einer Zugmutter.</p> <p>6. Ein Ergebnis der Berechnung ist die im Gewinde übertragene Kraft <math>F_G(x)</math> bzw. die mittlere Pressung <math>p(x)</math> über die Gewindetiefe <math>H</math>, die nach [1] umgerechnet werden können in eine Pressungsverteilung <math>p_G(h)</math> über die Gewindetiefe <math>H</math>. Dafür wird die dort u. a. angegebene parabelförmige Pressungsverteilung als ausreichend angesehen.</p>	<p>1. The estimation of the pressure in threads of screw connections with a pressure nut or a tension nut derived two simple, easy to handle equations.</p> <p>2. The results with these equations give a good impression into the mechanism of the force transfer from the screw to the nut (or vice versa).</p> <p>3. The results have mainly a qualitative character. They are on the basis of assumptions and simplifications partly quantitatively usable.</p> <p>4. <u>However:</u> The comparison of results, which are determined with different geometries and materials, give useful notes for the layout of a screw connection.</p> <p>5. The example shows very impressively the difference in force transfer when using a pressure nut respectively a tension nut.</p> <p>6. One result of Calculation is the transmitted force <math>F_G(x)</math> in the thread respectively the mean pressure distribution <math>p(x)</math> over the depth of thread <math>H</math>, both can be converted to a pressure distribution <math>p_G(h)</math> over the depth of the thread <math>H</math>. Doing this you can use a parabolic distribution for the pressure distribution. (see 2.01)</p>
6.05		

<b>7.00</b>	<b>Quellen / Sources</b>	
7.01	[1] Bladt, K.-J.: Bestimmung der Gewindesteifigkeit auf der Grundlage des schubweichen Balkens (Timoschenko-Balken) <i>Attempt of the estimation of the stiffness of the thread based on the Timoshenko beam</i> Rostock, 21.06.2016, <a href="http://www.jbladt.de/technik/maschinenelemente-machine-elements/">http://www.jbladt.de/technik/maschinenelemente-machine-elements/</a>	
7.02	[2] Schlottmann, D.: Maschinenelemente Grundlagen, VEB Verlag Technik, 1973, (kontinuierliches Modell)	
7.03	[3] Bronstein, I.N.: Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harry Deutsch, 4., überarbeitete Auflage 1999	
7.04	[4] Bartsch, H.-J.: Taschenbuch mathematischer Formeln, Fachbuchverlag Leipzig, 18., verbesserte Auflage,	
7.05	[-] Bladt, K.-J.: Drehmomentübertragung von der Welle zur Nabe bei Pressverbindungen, <a href="http://www.jbladt.de/technik/maschinenelemente-machine-elements/">http://www.jbladt.de/technik/maschinenelemente-machine-elements/</a>	
7.06	[-] Maduschka, Ludwig: Beanspruchung von Schraubenverbindungen und zweckmäßige Gewindeträger, Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, Nov./ Dez. 1936, Volumen 7, Nr.6, S.299 - 305 <i>Zitiert in mehr als 45 Fachbüchern und Veröffentlichungen (Diskretes Modell zur Ermittlung der Lastverteilung)</i>	
7.07	[-] L. ZBOROVJAN und Gy. KRÁMM: Gewindepaarung mit gleichmäßiger Lastverteilung, Institut für Maschinenkonstruktionslehre, Technische Universität, H-1521 Budapest, eingegangen am 20. Juni 1984, vorgelegt von Prof. Dr. L. Varga, (kontinuierliches Modell)	