Préhistoire de la géométrie : le problème des sources.

Olivier Keller

1- Introduction.

Si l'on admet que les éléments de mathématiques visibles dans les premiers documents écrits de l'antiquité, à savoir le nombre entier et rationnel, la figure et sa mesure, ne sont pas apparus sans un travail de gestation antérieur, ce qui revient à postuler une préhistoire des mathématiques en général et de la géométrie en particulier, le problème des sources documentaires est le problème numéro un. Nos connaissances sur la préhistoire se sont tellement améliorées qu'il n'est plus nécessaire de recourir à des affabulations amusantes comme celles du mathématicien Louis Bertrand qui disait en 1812 :

> "Il n'est pas facile de passer des idées qui viennent immédiatement des sens aux idées abstraites de la géométrie. Cela s'est pourtant fait de toute ancienneté ; mais on ignore par qui et de quelle manière … C'est donc un service à rendre à la géométrie que de suppléer par une fiction au fait historique dont les traces se sont effacées.
> Jadis un chasseur, ayant tué dans la plaine un daim d'un coup de flèche, voulut savoir à quelle distance il avait atteint sa proie ; et à cet effet, posant successivement son arc sur cette distance, il trouva dans le nombre de fois qu'il put l'y poser, la longueur qu'il avait l'intention de mesurer …"[1]

On a découvert depuis beaucoup de traces, mais qui dit préhistoire et peuples traditionnels ou primitifs dit, par définition, absence d'écriture, et par conséquent impossibilité d'une lecture univoque de ces traces. La tentation est grande, nous allons le voir, de faire de la fiction et même de la mathématique fiction. Tout document est donc l'objet de controverses ; nous envisagerons trois types de sources possibles, en allant des plus sûres au plus controversées :

- *les sources archéologiques préhistoriques proprement dites* : outils lithiques, art mobilier et pariétal, en particulier les incisions, les signes "géométriques" divers et les décors. Ce sont des sources incontestables, d'origine humaine incontestable pour la plupart. Mais le sens des figurations et des signes est énigmatique et controversé ; de plus certaines traces antérieures au Paléolithique supérieur sont candidates au titre de symboles.
- *les sources ethnographiques* : pratiques des chasseurs-cueilleurs et autres sociétés traditionnelles, primitives, actuelles ou ayant récemment existé. S'il y a évidemment des divergences sur l'interprétation de ces pratiques, c'est surtout sur le rapprochement avec la

[1] [Bertrand, 1778 #55]

préhistoire que le débat est très vif, pour la raison que la majorité des chercheurs refusent de considérer les primitifs actuels comme des fossiles vivants, pour présenter les choses sous une forme provocatrice.

- *les sources didactiques* : si l'on admet que l'ontogénie, le développement individuel, reproduit en accéléré la phylogénie, le développement de l'espèce, on peut espérer que l' apprentissage mathématique de l'enfant nous donnent des indications sur une préhistoire des mathématiques dans l'enfance de l'espèce humaine.

2- Les sources archéologiques.

Pour les périodes des Paléolithiques inférieur et moyen, nous ne disposons que des outils lithiques. Jusqu'ici, aucun mathématicien ni historien des mathématiques ne s'est penché sur ce matériel ; quant aux préhistoriens, ils se contentent de célébrer les symétries des bifaces et d'accoler l'épithète "géométrique" aux microlithes du Mésolithique.

Figure 1: biface, et ses plans de symétrie. Soucy, entre 400000 et 300000 avant le présent. Paléolithique inférieur européen. Source : [Lhomme, 2000 #1258]

L'erreur classique est ici de projeter notre analyse géométrique actuelle, par exemple celle des symétries des bifaces (figure 1), et d'en faire un acquis géométrique du tailleur :

> "L'intelligence et les capacités de nos aïeux ne se manifestent pas seulement par les capacités évolutives de leur cerveau. Si nous considérons attentivement le biface, outil caractéristique de l'Acheuléen qui accompagne fréquemment les restes d'*homo erectus* dans les gisements d'Europe occidentale, d'Afrique, de l'est et du sud asiatiques, nous pouvons constater sa parfaite symétrie sur le plan vertical. Si nous le tournons de 90°, nous remarquons qu'il est aussi symétrique sur l'autre plan vertical, perpendiculaire au premier. Les coupes transversales, en forme de lentille, sont également symétriques. *Il est évident que le fabricant de cet outil avait maîtrisé la conception dite euclidienne de l'espace. Et s'il la maîtrisait en taillant ses outils, il devait savoir l'appliquer pour évaluer les distances et pour se situer dans l'espace tridimensionnel* (souligné par nous)"[1]

En réalité, la symétrie est loin d'être parfaite, ce n'est qu'une tendance. En outre les tailleurs de bifaces actuels ne mesurent rien, tout se fait au jugé, à l'œil ; quant à la conception

[1] [Jelinek, 1989 #163 p.38]

euclidienne, elle analyse les symétries après que les formes aient été réalisées, alors que le tailleur *erectus* crèe sa forme bifaciale par action symétrique répétée sur le nucleus.

L'outillage de pierre se développe bien entendu au Paléolithique supérieur et au Néolithique, et l'ensemble est riche d'enseignements, précisément entre autres sur le lent apprentissage de la structuration tridimensionnelle de l'espace matière première, l'espace du bloc qui va être décortiqué. Mais la grande nouveauté du Paléolithique supérieur, avec l'apparition de notre espèce *homo sapiens-sapiens*, est celle du graphisme symbolique.

La controverse porte déjà sur l'époque d'apparition de ce phénomène, puisque certains voient du graphisme symbolique dans les moindres rayures ; ainsi des méandres sur un os daté du Paléolithique inférieur (au Pech de l'Azé), donc de l'époque de *l'homo erectus*. Un préhistorien célèbre, Alexander Marshack, y voyait en 1977 une "tradition du méandre", des "actes iconographiques de participation", des "trajets évoquant des voyages chamaniques", des "éléments d'un complexe narratif de participation rituelle, cérémonielle et mythique"[1]. L'analyse finale a été particulièrement cruelle pour Marshack, puisqu'elle a révélé en 1997 que les méandres n'étaient que des impressions de vaisseaux sanguins sur l'os en question !

Les marques incontestablement intentionnelles elles aussi sont le prétexte de fantastique en général, et de fantastique mathématicien en particulier. En voici quelques exemples.

Le plus caricatural est celui de l'os d'Ishango (Zaïre), daté d'environ –18000, découvert par l'archéologue belge Jean de Heinzelin, et publié par lui en 1962 dans le *Scientific American*.[2] Il s'agit (figure 2) d'un manche d'outil en os, strié, et que De Heinzelin analyse ainsi :

> "Considérons la première colonne, par exemple : 11, 13, 17 et 19 sont tous des nombres premiers…en ordre croissant et ils sont les seuls nombres premiers entre dix et vingt. Prenons maintenant la troisième colonne : 11, 21, 19 et 9 représentent respectivement 10+1, 20+1, 20-1, 10-1…[ces dispositions] pourraient représenter une sorte de jeu de nature arithmétique inventé par une peuplade possédant un système numéral basé sur dix ainsi qu'une connaissance…des nombres premiers"[3].

---

[1] [Lorblanchet, 1999 #532 p.154-155]

[2] N° 206, juin 1962.

[3] De Heinzelin cité dans [Marshack, 1972 #36 p.23]

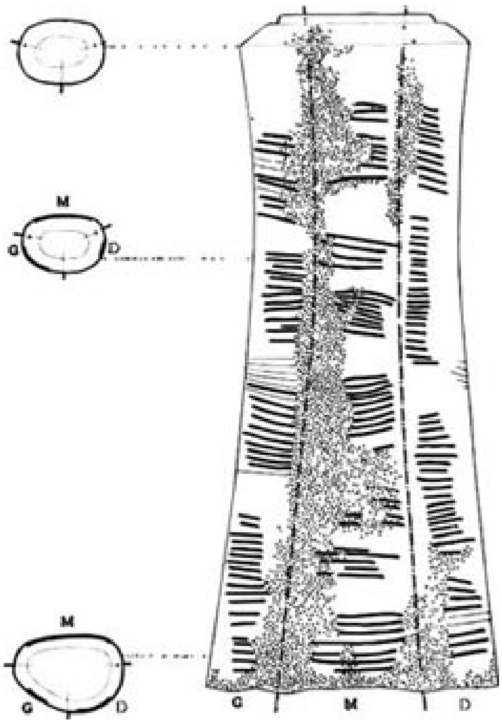

Figure 2 : vue étalée[1] de l'os d'Ishango (République démocratique du Congo). Environ –18000.

Pourquoi pas en effet ? Et que répondre à ce genre de "fantaisies" [2] ? On peut répondre d'abord qu'elles sont *indécidables*, et surtout, comme nous le verrons plus loin, qu'aucun document ethnographique ne corrobore la thèse d'encoches de "jeux arithmétiques" (bien peu ludiques au demeurant).

Alexander Marshack, peu convaincu par l'analyse de de Heinzelin qu'il relate, propose une autre piste : l'os d'Ishango, ainsi que toute une série d'objets préhistoriques, seraient à analyser comme des calendriers lunaires. Nous ne rentrerons pas ici dans le détail de la critique des constructions ingénieuses de Marshack. Seulement, le groupage des encoches paraît très forcé, voire trafiqué ; et surtout certains de ces "calendriers" sont un tel embrouillamini de lignes ou de points allant dans tous les sens que l'on voit mal quelle pouvait être leur utilité. Mais supposons même que l'os d'Ishango, orné de stries visibles bien alignées, 60 au total sur deux rangées et 48 sur une troisième, représentent respectivement deux lunaisons et un peu plus d'une lunaison et demie : à quoi pouvait donc servir un tel marquage? Le calendrier se fait à partir du moment où l'on s'est rendu compte de la périodicité de certains phénomènes, ici les lunaisons, et il doit par conséquent pouvoir être *relu* ; cela

[1] Réalisée par D. Huylebrouck ; voir www.contrepoints.com.kadath.

[2]Ifrah se livre lui aussi à ce genre d'affabulations, voir [Ifrah, 1994 #28 p.159]

signifie que si telle ou telle activité doit prendre place à tel moment du cycle lunaire, il faut pouvoir, par une indication bien nette, repérer ce moment sur l'os — sans le microscope de Marshack! —. Or ce qui pourrait passer pour de telles indications est la plupart du temps absent des documents présentés par l'auteur, et en tout cas absent de notre os. Admettons même que le groupement réel, visible à l'œil, des 11 premières stries, représente les 11 premiers jours du mois à l'issue desquels doit avoir lieu une action donnée : il faut dans ce cas pouvoir *suivre* ces jours, comme on arrache les feuilles de certains calendriers ; or il est impossible de ficher quoi que ce soit dans les encoches de l'os d'Ishango, elles ne sont pas assez profondes, ni même d'y enrouler une sorte de ficelle qui sauterait une strie chaque jour, parce que les différents rangs d'encoches ne sont pas assez larges et se chevauchent. Des auteurs ont d'ailleurs récemment, et à notre avis définitivement, réfuté la théorie de Marshack en se plaçant sur son propre terrain, celui de l'interprétation des vues des stries au microscope.[1] L'analyse montre que sur des galets aziliens[2], que Marshack interprète comme des calendriers, les stries ont été faites rapidement et avec le même outil, dans le but précisément de rayer, sans chercher à individualiser les encoches, ce qui exclut les marques de chasse ou les calendriers.

En géométrie, le mathématisme fantastique a sévi récemment en la personne de deux célèbres ingénieurs anglais, Alexander Thom et son fils Archie. Après avoir fait une grande quantité de relevés de mégalithes en Bretagne et en Angleterre, ils ont avancé : que les constructeurs employaient une unité, le yard mégalithique, valant 0,829 mètres; que beaucoup de cercles de pierre seraient en réalité des "oeufs" de deux types, faits d'arcs de cercles raccordés dont les centres seraient les sommets de triangles rectangles ; que les côtés de ces triangles, exprimés en yards mégalithiques, seraient des triplets pythagoriciens. Par exemple à Carnac, on aurait un"oeuf mégalithique de type I", avec pour base un triangle rectangle de côtés 37,5-50-62,5, ce qui donne bien un triplet pythagoricien puisque $37{,}5^2 + 50^2 = 62{,}5^2$ qui est lui même, à une homothétie près de rapport 12,5, le fameux triangle 3-4-5.[3] C'est un tour de force, et il faut saluer l'énorme travail fourni dans l'abondance et la précision des relevés.

---

[1] [Mohen, 1989 #63 p.46-47)]
[2] Culture mésolithique, dénommée d'après la grotte du Mas d'Azil (Ariège).

[3] [Thom, 1977 #179]

Mais que penser de la théorie? Tout d'abord, elle était déjà dans l'air, bien avant les mesures des Thom, ce qui montre bien qu'elle n'en dépend probablement pas. Au début du siècle en effet, les Français R.Kerviler et A.Martin étaient parvenus à des conclusions du même type que celles des Thom : existence d'un pied mégalithique, triplets pythagoriciens[1]. Ensuite, le seul matériel subsistant consiste en alignements souvent lacunaires d'énormes blocs de pierre, alignements probablement plusieurs fois modifiés au cours des siècles, ce qui fait que "l'emplacement d'origine ne peut être toujours connu avec la précision du centimètre qu'adopte Thom. De plus, elles [les pierres] ont un volume et il est aléatoire de choisir quel est le point représentatif de leur positionnement, même s'il correspond au milieu des extremités du bloc…"[2]. A partir de ces seuls alignements pourtant, les Thom décèlent des arcs de cercles raccordés dont ils fixent les centres, lesquels à leur tour forment des triangles rectangles (Figures 3 et 4). Ceux-ci, c'est important, n'ont qu'une existence théorique, il n'y en a pas trace sur le terrain. Il a donc fallu, pour établir cette existence théorique, se livrer à deux opérations, dont la première au moins est à haut risque d'imprécision : délimiter des arcs de cercles à partir d'alignements très incertains, puis construire leurs centres. Enfin malgré tout cela, malgré une volonté de fer d'arriver coûte que coûte à des résultats spectaculaires, beaucoup de triplets pythagoriciens ne sont qu'approchés. Par exemple à Woodhenge, on a le triplet 6-17,5-18,5 qui est exact puisque $6^2 + 17{,}5^2 = 18{,}5^2$ (Figure 3) ; mais à Borrowstone Rig, on a le triplet 12,25-9,5-15,5 (Figure 4) qui est inexact[3]. Tant qu'ils y étaient, pourquoi les constructeurs de mégalithes n'ont-ils pas fait leurs triangles exactement, puisque ceux-ci étaient, comme le prétendent les Thom, la base de toute l'édifice?

[1] [Giot, 1989 #211]

[2] [Mohen, 1989 #202 p.38] Voir également la critique de l'archéologue anglais Aubrey Burl [Burl, 1988 #73 p.40 et suivantes]

[3] [Thom, 1990 #178 p.74 et 225]

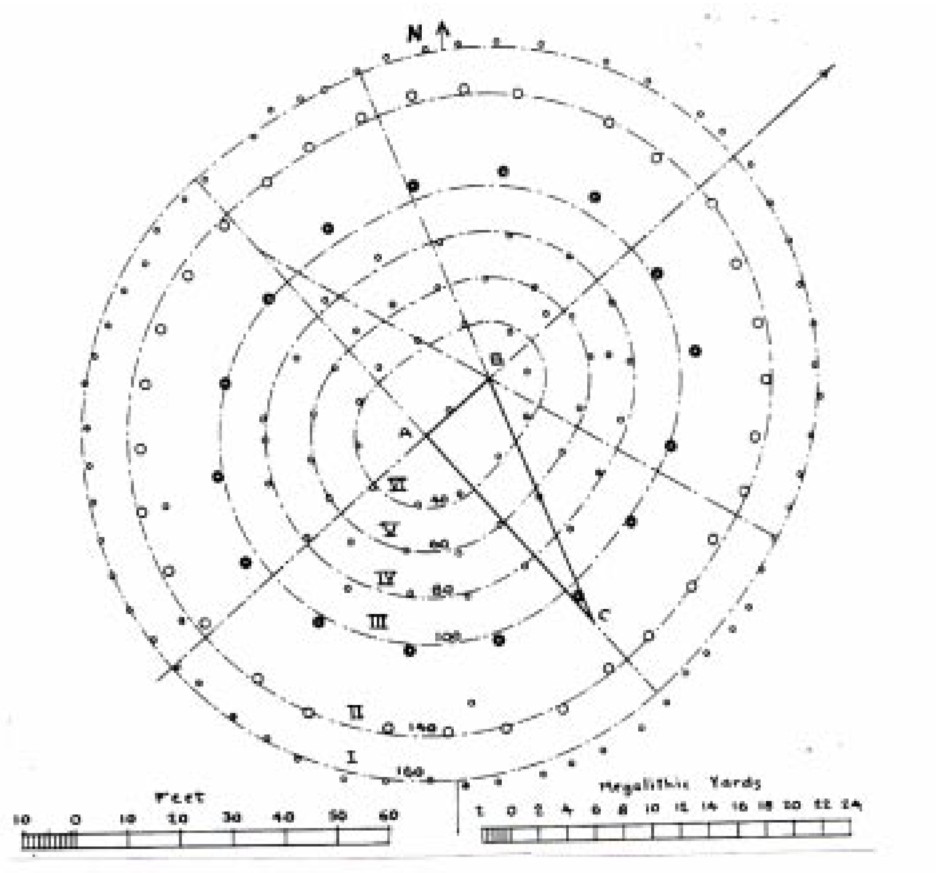

Figure 3 : Woodhenge[1]. Sur le terrain, il n'y a que les blocs de pierre marqués par de petits ronds sur la figure. Tout le reste, pointillés et points A, B et C, a été construit par les auteurs. A est le centre des demi-cercles de la partie sud-ouest. B est le centre des arcs de cercles de la partie nord-est. Le point C vient "opportunément" faire le troisième somment du triangle pythagoricien ABC. Avec le "yard mégalithique" (2,72 pieds ou 0,829 mètre) comme unité : AB = 6, AC = 17,5 et BC = 18,5. On a bien $6^2 + 17{,}5^2 = 18{,}5^2$.

[1] [Thom, 1990 #178 p.74]

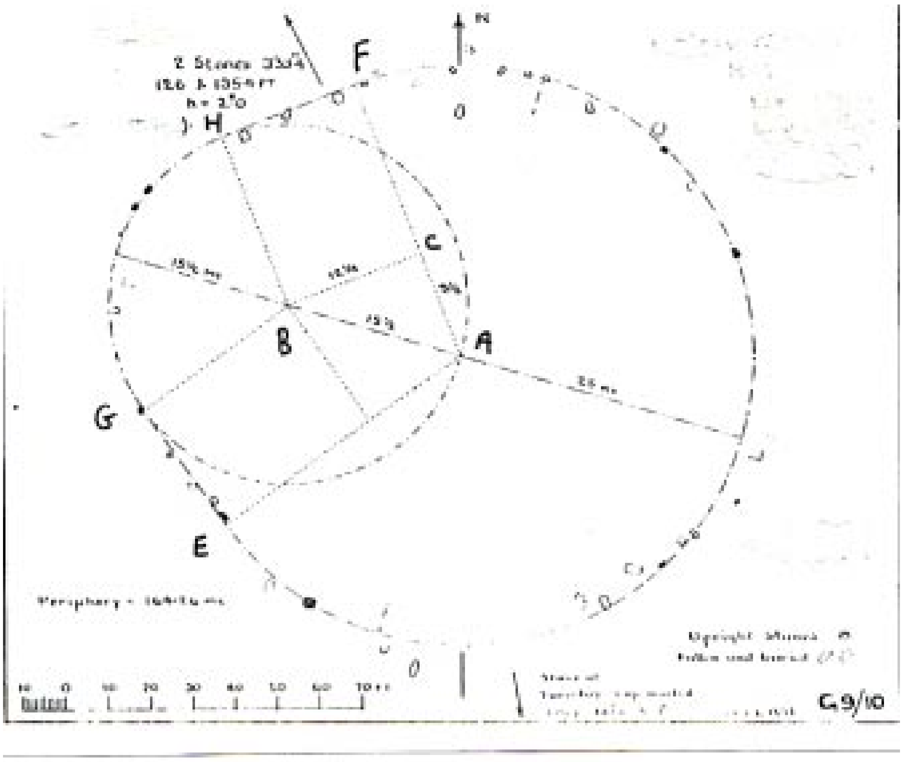

Figure 4 : Borrowstone Rig[1]. Lettres A, B, C, E, F, G et H rajoutées par nous. Unité : yard mégalithique. A est le centre de l'arc de cercle EF, B celui de l'arc de cercle GH. BC est parallèle à HF et CA à HB. Le triangle ABC (dont il n'y a aucune trace sur le terrain, comme dans le cas de la figure précédente), est "presque" pythagoricien : $12{,}25^2 + 9{,}5^2 = 240{,}3125$ mais $15{,}5^2 = 240{,}25$.

On sait depuis la fin du siècle dernier que le mégalithisme est un phénomène mondial. Il existe en particulier au Yemen et au Tibet des alignements impressionnants réunissant des enceintes plus ou moins circulaires, un peu comme à Carnac[2] ; il y a fort à parier qu'en allant y faire des relevés, et que grâce à une géométrie du même style que celle des Thom, on y trouverait le même yard mégalithique et la même passion pour les triplets pythagoriciens. Pour être juste et pour terminer là dessus, il faut reconnaître que dans certaines régions des spéculations sur une géométrie savante des mégalithes pourraient avoir un fondement. Au Proche-Orient, le mégalithisme se rencontre sur une bande côtière qui va de la Syrie à la Palestine, et il est daté du IV° ou III° millénaire, côtoyant donc l'architecture monumentale des premières cités et les premières tablettes de comptabilité ; on pourrait donc imaginer un peuple déjà civilisé, aux connaissances géométriques sérieuses et mettant celles-ci au service de rituels peuplés de pierres. Un important ensemble de dolmens existe également en Inde dès

[1] [Thom, 1990 #178 p.25]

[2] [Mohen, 1989 #202 p.50]

l'époque védique — -1500 à -500 —, qui est celle, réellement cette fois-ci, de construction d'autels à partir de triplets pythagoriciens. Là encore, on pourrait imaginer une influence de brahmanes géomètres védiques sur les constructeurs de dolmens, bien que l'on pense plutôt à des populations non soumises lors de "l'invasion aryenne" du II° millénaire[1]. En Europe de l'Ouest toutefois, il est impossible de faire de tels rapprochements.

Pour terminer là-dessus, signalons le célèbre fantastique sexuel d'André Leroi-Gouran, intéressant de la part d'un préhistorien de ce calibre.

> "Très tôt, sinon dès le préfiguratif, les symboles masculins se confondent avec les bâtonnets alignés ou les séries de points quoique le réalisme forme résurgence de temps à autre jusqu'au Magdalénien. Les symboles féminins sont exprimés de manière constante par des ovales, ou par des triangles, coupés ou non par un trait médian, mais à partir du style II, il est fréquent que ces figures soient remplacées par des ovales emboîtés ou par des cercles. Au style III, ce sont des quadrilatères qui peuvent être recoupés par des figures en damier, comme les de Lascaux."[2]

Bien qu'il n'y ait aucune preuve de cette "évolution", et que la signification sexuelle des très nombreux symboles pariétaux soit difficile à admettre, Leroi-Gourhan persiste et signe :

> "Il semble qu'une forte contrainte morale ou magique se soit exercée dans ce domaine, ce qui explique en particulier durant les styles III et IV ancien l'enfouissement des symboles sexuels dans les formes géométriques presque méconnaissables."[3]

Avec de tels arguments, il est facile d'avoir toujours raison, et nous avons là une théorie "originale" de l'apparition des figures géométriques en dimension deux, une théorie de l'abstraction comme succession de cache-sexes de plus en plus efficaces : le triangle est un camouflage du sexe féminin, puis le rectangle le remplace, lui même probablement suivi des "damiers".

On "sent" bien que ces interprétations ne sont que le fruit de l'imagination plus ou moins talentueuse de leurs auteurs ; et il faut reconnaître, encore une fois, que la nature des sources préhistoriques pousse à cela. En l'absence de système traduisible de signes, comme l'écriture,

---

[1] [Joussaume, 1985 #212 p.333]

[2] [Leroi-Gourhan, 1965 #7 p.234]

[3] Id.

tout signe peut refléter en effet tout ce que l'on veut. C'est sa faiblesse, mais c'est aussi sa force intellectuelle dans son sens d'abstraction représentative.

Pour se tirer d'affaire, il y a un moyen, mais que beaucoup trouvent insupportable, c'est celui du comparatisme ethnographique. Avant d'y venir, donnons tout de suite un argument de poids en sa faveur : il n'existe pas un seul compte-rendu ethnographique de terrain qui confirme une des théories "fantastiques".

3-Les sources ethnographiques.

L'archéologie à elle seule ne suffit pas pour nous renseigner sur les mathématiques de la préhistoire, et l'analyse interne des documents, nous l'avons vu, est loin d'offrir une garantie contre la mathématique fiction. L'habitude, longtemps considérée comme évidente, était de recourir à l'ethnographie des peuples primitifs qui permettait en quelque sorte de redonner vie aux traces laissées par nos ancêtres en se fondant sur les similitudes frappantes de l'outillage, des modes de subsistance et des formes d'art. Puis est apparue une tendance au repli sur les documents archéologiques, en raison du penchant des paléolithiciens à pratiquer "ce que l'on pourrait appeler un innocent pointillisme consistant en des comparaisons ponctuelles de documents dans l'ignorance quasi-totale des contextes"[1]; dans cet esprit, Leroi-Gourhan demandait :

> "Plutôt que d'essayer, avec une imagination forcément dépassée par ce qu'étaient les faits, de broder sur le totémisme hétéroclite des Australiens, des Esquimaux, des Boshimans ou des Fuegiens, ne vaut-il pas mieux recevoir directement du Paléolithique ce qu'il apporte spontanément?"[2].

Mais le maître lui-même, nous l'avons vu, a largement brodé et a très nettement sollicité les signes pariétaux pour en tirer une interprétation sexuelle qu'ils étaient bien loin d'apporter spontanément.

---

[1] [Lorblanchet, 1989 #192 p.60]

[2] Cité par Lorblanchet, op. cit.

Chez les préhistoriens, la tendance toute récente est à une plus grande souplesse qui dénonce "l'illusion positiviste consistant à croire que l'interprétation ne peut être fournie que par les documents eux-mêmes" et pour qui, par exemple, "la connaissance du fonctionnement et du rôle de l'art rupestre dans une société vivante peut fournir à l'archéologue des idées, un modèle qui lui permet ensuite de compléter ou d'orienter l'analyse interne de l'art préhistorique"[1].

Qu'en est-il à propos de nos exemples touchant aux mathématiques? L'ethnographie ne confirme *aucune* des hypothèses plus ou moins ingénieuses que nous avons exposées. Les bâtons ou os à encoches sont communs chez les primitifs, et ils servent à tout sauf à des jeux arithmétiques : bâtons-messages indiquant au destinataire le nombre de "sommeils" ou de "lunes" devant s'écouler avant un évenement donné, ou le nombre de personnes attendues à un rassemblement donné — avec des signes différents suivant qu'il s'agit de femmes, de jeunes gens ou de vieillards —…ou même de motifs musicaux. On a aussi bien sûr des "calendriers" pouvant représenter plusieurs années, mais construits de la façon suivante :

> "Chaque encoche non peinte signale une année, tandis que des ponctuations ou autres encoches, peintes celles-ci, représentent des événements importants qui ont marqué chaque année tels qu'un raid, une pluie de météores, un tremblement de terre, une inondation ou une tempête de neige[2]."

Un tel document — qu'il serait d'ailleurs plus approprié de nommer *annales*, en tant qu'aide mémoire utile à celui qui doit raconter l'histoire — est, comme on le voit, un document *lisible*, ce qui n'est pas le cas de la plupart des soi-disant calendriers lunaires préhistoriques de Marshack. On pourrait multiplier les exemples à l'infini, en utilisant par exemple le travail de "bénédictin" de G.Mallery[3].

---

[1] id. p.61. Voir également [Petrequin, 1989 #193]

[2] [Marshack, 1972 #36 p.140]

[3] [Mallery, 1972 #35] Garrick Mallery est l'auteur d'une monumentale enquête sur le graphisme des aborigènes américains, en le comparant parfois à celui d'autres peuples : pétroglyphes, pictogrammes et idéogrammes, peintures sur peaux, décors divers, marques chronologiques, "bâtons message" etc…. Son travail fut publié pour la première fois en 1893.

On bénéficie d'une enquête conduite par R.Joussaume[1] sur des mégalithes récents construits à Madagascar et servant de sépultures collectives ; malheureusement, il ne s'agit que de dolmens, et non de vastes ensembles analogues à ceux de Bretagne et de Grande-Bretagne, ce qui diminue évidemment sa portée comme contre-exemple à la théorie des Thom. La construction est accompagnée de rites et de sacrifices ; un "maître des pierres" semble plus être un dirigeant du rituel qu'un architecte. L'édification ne peut avoir lieu qu'avec l'accord de "l'astrologue" qui en détermine le jour ; puis elle est engagée de façon à ce que la porte soit toujours orientée à l'ouest : nulle trace dans tout cela de construction savante à base de triplets pythagoriciens. On sait enfin que les peuples primitifs, lorsqu'ils ont besoin de mesure, utilisent tous, sans exception, des unités provenant du corps humain ; la tendance est à la prolifération de telles unités, plutôt qu'à la création d'une unité standard, telle que le yard mégalithique, et qui serait censée valoir pour un grand nombre de tribus, de l'ouest de la France au nord de l'Angleterre. A quelle partie du corps pourrait d'ailleurs correspondre 0,829 m?

Le fait que le comparatisme ethnographique soit incompatible avec la mathématique-fiction est déjà un argument sérieux en sa faveur. Mais à l'attaque qu'il a subie, à partir des années 50 et en provenance des milieux d'archéologues, est venue s'ajouter tout récemment une autre venant d'une branche de l'ethnologie et qui nous concerne tout particulièrement puisqu'elle est dirigée par le courant des "ethnomathématiciens"**,** courant complexe né à la fin des années 70[2]. On y trouve en effet aussi bien l'étude des pratiques populaires de calcul dans les pays du tiers-monde, dans le but d'y améliorer l'enseignement des mathématiques, que l'étude des idées mathématiques des "peuples traditionnels". S'agissant de l'utilisation du comparatisme ethnographique comme matériel d'étude de la préhistoire des mathématiques, les ethnomathématiciens y sont profondément hostiles. Chez M.Ascher par exemple, toute

[1] [Joussaume, 1985 #212 p.295]

[2] [Ascher, 1991 #3][Aveni, 1990 #14][Closs, 1990 #19][Gerdes, 1991 #24; Gerdes, 1991 #137; Gerdes, 1993 #25; Gerdes, 1994 #136; Gerdes, 1994 #301; Gerdes, 1995 #290; Gerdes, 2000 #1300][Joseph, 1991 #29][Zaslavsky, 1973 #45]

idée que les peuples primitifs —rebaptisés "traditionnels", *political correctness* oblige— sont des vestiges qui nous renseignent sur la préhistoire est à proscrire absolument ; ces peuples développent simplement, selon elle, des "cultures" différentes de la culture occidentale dominante et tout aussi valables que celle-ci, y compris dans le domaine scientifique. Par exemple l'auteur affirme que "Le concept navajo d'espace-temps n'est ni meilleur ni pire que celui de la culture occidentale"[1], ou encore :

> "Il y a plusieurs distinctions entre les cultures : certaines produisent leur nourriture par la chasse, d'autres par l'agriculture, d'autres par la pêche; certaines ont beaucoup de machines, d'autres en ont peu...certaines sont préoccupées par un voyage sur Mars et d'autres par l'entrée au pays des morts. Toutes ces différences...affectent l'expression et le contenu des idées mathématiques[2]."

Chasseurs-cueilleurs ou cultivateurs, sans écriture ou avec, le voyage sur Mars ou chez les morts, de simples *différences* que tout cela! Le concept navajo d'espace-temps ou la théorie de la relativité, ce n'est qu'une question de point de vue, et d'ailleurs : "Nos concepts d'espace et de temps ne sont, après tout, que nos idées et non la réalité objective." On ne voit pas très bien comment un relativisme aussi catégorique peut conduire à une histoire des mathématiques, et pourtant M.Ascher affirme que "L'ethnomathématique telle qu'on la conçoit ici a pour but d'élargir l'histoire des mathématiques dans une perspective globale multiculturelle[3]." Doit-on comprendre que chaque "culture" a sa propre histoire, et qu'il faut donc envisager *des* histoires des mathématiques qui peuvent à la rigueur se rencontrer fortuitement? En tout cas, le comparatisme ethnographique est absolument condamné par M.Ascher et c'est logique : puisque les peuples traditionnels ont une culture scientifique égale — "ni meilleure ni pire" — à la nôtre, la différence n'étant que de forme, il ne peut être question d'évolution de l'une à l'autre. Les uns ont choisi de cueillir ce que leur offre la nature, les autres de fabriquer des machines et voilà tout. Il n'est donc pas étonnant que dans le livre

---

[1] [Ascher, 1991 #3 p.186] Cet ouvrage a été traduit en français : [Ascher, 1998 #1299]

[2] id. p.191

[3] id. p.188

de M.Ascher qui relate de nombreux faits ethnographiques, il ne soit jamais question d'histoire.

Mais, dit-elle, "Dans tous les exemples que nous avons présentés, il y a interconnexion entre les idées mathématiques et la culture. On ne peut les séparer l'une de l'autre[1]." Ce point de vue pourrait être extrêmement utile s'il était suivi avec conséquence. Mais M.Ascher ne tient pas sa promesse de nous dévoiler ces connexions ; ce qui la passionne, c'est d'analyser certaines pratiques traditionnelles *du point de vue du mathématicien contemporain*. De sorte que les détails ethnographiques donnés en introduction ne jouent en réalité qu'un rôle décoratif, et non le rôle attendu, déclaré décisif. Son deuxième chapitre par exemple est consacré aux *sona* africains et aux *nitus* océaniens : ce sont des tracés à réaliser autour de certains points par une ligne continue fermée, sans repasser deux fois au même endroit. M.Ascher ne cherche guère à savoir comment et pourquoi un tel type d'activité a pu jouer un rôle si déterminant — mythique, initiatique, ludique — chez ces peuples, elle se livre à une longue analyse mathématique de ces dessins, avec notre théorie des graphes dont les rudiments remontent à Euler, au 18° siècle. La conclusion de M.Ascher est en substance qu'entre la pratique de ces peuples et les élaborations eulériennes ultérieures il n'y aurait que des "différences d'élaboration" ; les Africains et les Océaniens auraient simplement "d'autres idées géométriques et topologiques". Malheureusement, on ne voit pas quelles sont ces "autres" idées. En racontant deux versions de l'histoire qui accompagne le tracé d'un *sona*, l'auteur s'enthousiasme :

> "Peu importe la version, le plus important pour l'histoire est que la figure, une courbe plane simple fermée, détermine deux régions dont elle est la frontière commune. C'est ce que les mathématiciens appellent le théorème de Jordan[2]."

Nous voyons bien par ces exemples que pour nous faire admirer les connaissances mathématiques des peuples étudiés, l'auteur *abandonne* en réalité son point de vue "culturel".

---

[1] id.p.186

[2] id.p.39

Au lieu de nous faire saisir, comme promis, la force du lien spontané entre mathématiques et culture traditionnelle, elle monte en chaire professorale américaine et nous montre ... la théorie des groupes — pour l'analyse des structures de parenté —, la topologie, le calcul des probabilités — pour l'analyse des jeux —, ce qui est d'un intérêt très réduit pour qui cherche à faire une histoire. De tout temps, d'autre part, on a *pratiqué* les mathématiques avant de les *penser* pour en faire une théorie cohérente, sans que l'idée vienne à personne d'identifier ces deux étapes et de nier qu'il y ait progression de l'une à l'autre : ainsi en est-il du laborieux calcul fractionnaire égyptien à la théorie eudoxienne des rapports de grandeur ; des pratiques géométriques mythiques, d'arpentage ou d'architecture à la construction axiomatique euclidienne ; du calcul infinitésimal du 18ème siècle à Cauchy et à Weierstrass etc...

Comme le disent volontiers les ethnomathématiciens, l'évolution n'est pas "unilinéaire" ; elle n'est pas en ligne droite, elle serait plutôt cyclique. Cela se traduit, en mathématiques, par le fait que la science revient périodiquement sur des pratiques ou concepts fondamentaux, comme la numération ou les tracés de courbes, en leur donnant un éclairage et une portée tout nouveaux, et surtout en ouvrant des domaines de recherches insoupçonnés. De ce point de vue, rapprocher le théorème de Jordan de la pratique des *sona en les mettant à égalité* est aussi peu sérieux que de rapprocher les travaux de Cantor des bijections cardinales primitives.

Une autre personnalité éminente du courant ethnomathématicien, P.Gerdes, a un point de vue assez différent. Il donne à la recherche ethnomathématique des buts très ambitieux, historiques, philosophiques, mathématiques même, mais manifestement pour lui l'essentiel est de contribuer

> "à renforcer la confiance en l'héritage scientifique et culturel de l'Afrique pour le futur du continent"[1], héritage menacé car "dans la réalité, une grande partie des contenus de ces mathématiques scolaires —en provenance d'Occident et transplantée dans le tiers-monde— sont d'origines africaine et asiatique. Les populations dominées d'Afrique et d'Asie ont été

---

[1] [Gerdes, 1993 #25 p.10]

> désappropriées de ces connaissances dans le processus de la colonisation qui a détruit une grande partie de la culture scientifique."[1]

Il est vrai que les mathématiques ont de profondes racines africaines et asiatiques, et l'on pense bien sûr à l'Egypte antique, à la Mésopotamie, à l'Inde et peut- être à la Chine ; mais le transfert vers l'Occident de ces connaissances originelles s'est fait bien avant la période de colonisation moderne — c'est manifestement celle-ci que P.Gerdes a en vue — de ces régions, et de plus l'histoire montre plutôt que l'Ouest, par le truchement de ses missionnaires et de ses savants envoyés sur place, a mis au jour et *sauvé* de nombreux documents qui nous permettent d'étudier aujourd'hui le brillant passé scientifique de régions aujourd'hui dominées. Le colonialisme moderne a commis suffisamment de crimes, il n'est pas nécessaire d'en inventer d'autres ; et les bonnes intentions anti-impérialistes ne suffisent pas pour faire une bonne histoire. En voici une illustration : "Au sud du Mozambique on ferme en général le couvercle d'un panier avec un petit lacet autour d'un bouton carré entrelacé. Le bouton carré, entrelacé avec ses deux bandelettes, cache certaines considérations géométriques et physiques considérables."[2]

Ce bouton, vu de face, offre en effet une ressemblance avec une des figures utilisées pour démontrer le théorème de Pythagore (Figure 5).

---

[1] id. p.24

[2] id.p.36

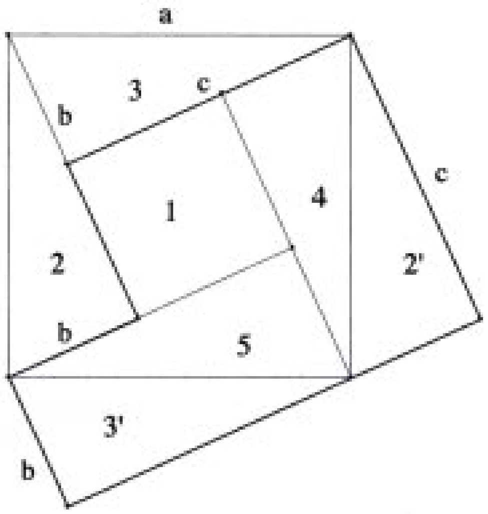

Figure 5 : La figure du bouton (supprimer les triangles 2' et 3' pour le "voir") suggère une démonstration du théorème de Pythagore. Les triangles rectangles (2) et (3) sont déplacés respectivement en (2') et (3'), donnant l'assemblage entouré en gras, et qui a donc la même aire que celle du carré initial de côté a ; l'assemblage est composé d'un carré de côté b et d'un carré de côté c. On a donc $a^2+b^2=c^2$, ce qui donne la relation de Pythagore dans le triangle (3).

En partant de cette figure, Gerdes fait démontrer le dit théorème à ses étudiants et poursuit :

> "Un des étudiants observe : Pythagore n'avait pas découvert ce théorème...nous on l'aurait fait. Exactement! On stimule le développement de la nécessaire confiance en soi mathématique culturelle quand on explicite la pensée géométrique dans les boutons carrés entrelacés et, encore plus, quand on l'explore en révélant son potentiel....Le débat commence : Quand on décongèle la pensée mathématique on stimule la réflexion sur l'impact du colonialisme dans les dimensions historiques et politiques de l'enseignement des mathématiques." [1]

Le raisonnement mathématique, qui permet à Gerdes d'analyser cette figure et bien d'autres avec beaucoup de talent, est-elle une démarche historique? Lui qui insiste ailleurs sur les liens qui unissent la science et la culture d'une société donnée, il se contredit ici en donnant à ses étudiants l'illusion que la démarche mathématique — conduisant par exemple au théorème de

---

[1] id. p.39 et 40

Pythagore — se développe toute seule pourvu qu'une figure de départ lui en donne l'occasion ; il donne à croire en particulier que l'idée de démonstration est naturelle, spontanée, hors contexte. Les faits contredisent cette croyance implicitement propagée par Gerdes : le dit-théorème (plus exactement la connaissance du lien entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle) est au fondement des mathématiques babyloniennes, des constructions védiques d'autels et des mathématiques chinoises des Han ; or, la pratique de ces mathématiques s'est poursuivie au moins pendant des siècles, à l'abri de toute menace colonialiste ou esclavagiste, et pourtant elle n'a jamais abouti à une démonstration du théorème.

Le fait que l'idée de démonstration soit apparue dans une société déterminée, celle de la Grèce antique, à une époque déterminée, au sein d'une "culture" bien précise et sans précédent historique, Gerdes le néglige et il préfère accuser le colonialisme d'une étrange façon : car si réellement des peuples africains avaient été sur la voie de la découverte d'une démonstration du théorème de Pythagore, cela n'aurait pas échappé aux nombreux missionnaires et ethnologues qui ont sillonné le continent depuis le 19ème siècle. La colonisation n'a pas réussi à détruire l'art des *sona*, en supposant qu'elle ait seulement pensé à le faire ; pourquoi aurait-elle détruit l'art des triangles rectangles ?

En bref le reproche que l'on peut faire aux ethnomathématiciens est donc qu'ils ne font pas d'histoire, et qu'au fond ils en refusent même le concept. Pourtant, leurs travaux sont importants et on ne peut que souhaiter vivement qu'ils s'amplifient : par la publication d'enquêtes ethnographiques, ils accroissent le matériel à la disposition du chercheur … friand de comparatisme. Car on ne peut pas rayer d'un trait de plume, aussi bardé de bonnes intentions humanitaires soit-il, les analogies contraignantes bien connues entre les primitifs actuels ou récemment disparus, et ce que nous savons de nos ancêtres de la préhistoire, du Paléolithique supérieur au Néolithique. Il est remarquable d'ailleurs qu'après la brouille ethnologie-préhistoire à partir des années 50[1], résultant de ce que certains auteurs n'hésitent

---

[1] Brouille due à ce que les archéologues, Leroi-Gourhan en tête, considéraient comme une utilisation abusive du comparatisme ethnographique, "dominé par un jeu de puzzle constitué d'informations grapillées au travers du

pas à qualifier d'oukases, on assiste à un retour en force du comparatisme ethnographique sous des appellations diverses. Comme le dit P. Petrequin :

> "En fait, même en France, où la démarche ethno-archéologique a été longtemps boudée jusque dans les années 1975, l'utilisation des exemples actuels pour enrichir les raisonnements strictement archéologiques va croissant. Dans des domaines aussi peu contestables que l'archéologie expérimentale ou l'ethnologie préhistorique, on peut se demander où en seraient les expérimentations sur le débitage des lames de silex à la pression, s'il n'y avait pas eu les exemples des Indiens d'Amérique du Nord, ou bien quelles auraient été les interprétations des campements de Pincevent, sans les modèles indiens et esquimaux, et sans la très vaste expérience ethnologique de Leroi-Gourhan… Il n'est plus guère de domaines de la recherche préhistorique qui ne soient touchés par l'utilisation, consciente ou non, de modèles ethno-archéologiques." [1]

La prise en considération de l'ethnographie tord littéralement le cou aux interprétations mathématiciennes puériles : nous l'avons dit, il n'existe par exemple aucun témoignage d'encoches utilisées comme "jeu arithmétique" parmi le grand nombre d'occurences d'emploi de stries. Mais ce n'est pas le seul mérite de l'ethnographie : elle ne se contente pas de ridiculiser quelque théories unilatérales ou tirées par les cheveux, elle donne aussi une ampleur et une profondeur insoupçonnées au phénomène étudié ; telle encoche, tel point, telle peinture "réaliste", tel rectangle peint sur une paroi, tel tracé digital peuvent recevoir une infinité d'interprétations en général et même chez un peuple donné. L'important est selon nous que ces traces aient eu un sens : l'ethnographie nous oriente en effet vers un phénomène général et capital, celui du symbole représentatif, caractéristique de la pensée et de l'action humaines à partir du Paléolithique supérieur. L'enquête et l'analyse sérieuses exigent d'étudier le rôle concret des figures géométriques et des nombres chez les peuples primitifs, en essayant de découvrir leurs spécificités réelles et leur sens dans le travail de la pensée humaine, plutôt que de courir après des théorèmes de mathématiques contemporaines. Pour cela, l'ethnographie est une source essentielle.

4- Les sources didactiques.

---

monde" [Petrequin, 1989 #193]. C'est en réaction à ce comparatisme sommaire que s'instaura l'étude purement interne des documents de la préhistoire. Voir là dessus [Lorblanchet, 1989 #192]

[1] [Petrequin, 1989 #193 p.65]

La recherche d'analogies, toujours dans l'idée de "donner vie" aux documents bruts de la préhistoire, peut-être stimulée par un point de vue totalement différent, celui de la psychogenèse ; si l'on admet en effet que le développement individuel, ou ontogenèse, reproduit en accéléré le développement de l'espèce, ou phylogenèse, on peut essayer de pousser l'analogie jusqu'au développement intellectuel. Dans ce cas, l'observation de l'acquisition des connaissances mathématiques par les enfants permettrait de tirer des conclusions ou au moins d'orienter les recherches historiques. *Les sources didactiques sont donc par principe évolutionnistes,* contrairement aux sources archéologiques et ethnographiques. George Sarton envisage comme "sources" possibles de l'étude de l'"aube de la science", l'archéologie, la linguistisque, l'anthropologie des peuples primitifs, et il ajoute :

> "Enfin les psychologues ont analysé les réactions d'enfants ou d'esprits sous-développés devant les problèmes mêmes que les hommes primitifs avaient à résoudre…L'aube de la science est survenue il y a dix mille ans ou plus dans certains endroits du monde; des témoignages subsistent dans d'autres endroits aujourd'hui ; et elle peut être observée jusqu'à un certain degré dans l'esprit de tout enfant."[1]

L'apprentissage individuel des mathématiques reproduit-il en accéléré leur création et leur évolution historique, leur apprentissage collectif ?

En très gros on peut dire en effet que l'ordre d'acquisition scolaire actuelle respecte l'ordre historique, par exemple dans la séquence entiers, fractions, algèbre réelle, algèbre complexe, analyse réelle, analyse complexe. Mais en détail il y a de nombreuses inversions : les négatifs ont droit de cité dès le début du collège, alors que les grands analystes eux-mêmes ne les acceptaient pas comme des vrais nombres (zéro, c'est rien ; moins que rien, cela n'existe pas). L'analyse au lycée débute par l'étude des fonctions, alors qu'historiquement elle ne traite à l'origine que des courbes et ignore les fonctions. Le calcul vectoriel est enseigné aux débutants, alors qu'il n'est qu'une acquisition très récente etc.

De plus, il serait facile de le voir dans chaque cas, l'acquisition actuelle d'un concept n'a rien à voir avec sa difficile et tortueuse création historique, et heureusement : une vie entière ne suffirait pas pour acquérir des rudiments. Par exemple, on commence à l'école

[1] [Sarton, 1993 #40 p.3-4]

maternelle par les entiers naturels, qui sont souvent le seul bagage arithmétique des peuples primitifs. Mais déjà là, il faut modérer l'analogie : l'enfant ne refait pas tout le chemin, puisqu'il est mis immédiatement en contact avec des idées récentes (à l'échelle historique) et étrangères aux primitifs : l'unicité de l'appellation des nombres, le zéro, la suite illimitée des naturels, le système décimal de position. La progression scolaire respecte encore l'ordre historique en ce qui concerne les fractions : inconnues des primitifs et naissant dans les premiers empires (Egypte etc.), elles ne sont abordées qu'en fin d'études primaires. Mais là encore, l'enfant ne refait pas tout le chemin, et heureusement pour lui, il apprend directement la forme pure a/b avec des méthodes de calcul rapides grâce à un symbolisme adapté. Or cela était inconnu des Egyptiens, pour qui la forme pure était 1/n ou des sommes de 1/n, et qui employaient des méthodes atroces sans aucun symbolisme opératoire.

D'un point de vue psychologique en outre, la recherche et la création d'une part, l'acquisition des produits de la recherche et de la création de l'autre, sont des procès distincts avec des lois distinctes, ce qui ne veut pas dire qu'ils ne peuvent pas s'articuler l'un l'autre.

Une tentative célèbre de relier le développement individuel (apprentissage) et le développement historique est celle de Jean Piaget, pour qui "les mécanismes du passage d'une période historique à la suivante sont analogues à ceux du passage d'un stade psychogénétique à son successeur"[1]; ainsi, dans *Psychogenèse et histoire des sciences*, le chapitre "Le développement historique de la géométrie" est-il logiquement suivi de "La psychogenèse des structures géométriques". Piaget distingue, dans cet ouvrage, trois étapes dans l'histoire de la géométrie : l'étape "intrafigurale", qui est celle de l'étude des relations internes entre les éléments des figures, où l'espace en tant que tel est absent, de même par conséquent que les transformations à l'intérieur de l'espace. C'est l'étape euclidienne, dit-il. Vient ensuite l'étape "interfigurale", où les figures sont mises en relation les unes avec les autres ; nous abordons là la géométrie projective, portée à son sommet par Poncelet et Chasles. Le dernier stade est qualifié de "transfigural", époque de la prééminence des structures, avec comme expression caractéristique le *Programme d'Erlangen* de Felix Klein. Ces niveaux successifs sont pour Piaget un modèle universel de développement et

[1] [Piaget, 1983 #228 p.41] L'ouvrage a été achevé peu avant la mort de Piaget, survenue en 1980.

> "l'on peut même soutenir que les successions intra, inter et trans *puisent leurs racines dans la biologie* [1](cf l'embryogenèse etc.). Ce sont donc elles qui justifient le rêve d'un constructivisme intégral qui est de relier par tous les intermédiaires voulus les structures biologiques de départ et les créations logico-mathématiques d'arrivée"[2].

Voyons maintenant le parallélisme avec l'enfant, tel du moins que nous le propose Piaget ; au stade intrafigural —jusque vers 8-9 ans— l'enfant distingue les figures rectilignes des curvilignes, les angles droits des non-droits. Ses difficultés pour passer au stade suivant, interfigural, se décèlent par exemple dans l'inaptitude à placer correctement des verticales ou des horizontales, parce que l'enfant a besoin pour cela de références extérieures à la figure elle-même ; il lui est difficile également, pour la même raison, de concevoir que le milieu d'un segment n'est pas le seul point équidistant des extrémités. Vient ensuite l'interfigural où le cobaye atteint, entre autres progrès, la compréhension de l'invariance de l'aire après découpage et réorganisation :

> "Or même en des cas aussi simples[3] on constate que les jeunes sujets demeurés au stade intrafigural contestent la conservation de la surface…et il faut atteindre le niveau interfigural…pour que ces invariants soient atteints"[4].

Le transfigural, maîtrisé à partir de 11-12 ans, permet de comprendre la composition des mouvements et de passer aux structures.

Il est clair que le parallélisme enfants-histoire, qui promettait d'être fulgurant, est entaché d'à-peu-près et d'erreurs stupéfiantes. Rattacher à l'intrafigural, *qui dans l'histoire serait la période euclidienne,* l'incompréhension de l'invariance des aires après découpage et réorganisation, est une erreur incompréhensible de la part d'un savant de l'envergure de Piaget

---

[1] Souligné par nous.

[2] Id. p.208

[3] Un carré est divisé en quatre carrés égaux, et ceux-ci sont réorganisés en un rectangle dont la largeur est la moitié du côté du carré initial.

[4] Id. p.138

; on sait en effet que le découpage et la réorganisation des figures est l'un des fondements des *Eléments* d'Euclide[1]. Bien plus, cette technique est évidemment à la racine de tout calcul d'aire, bien connu en Egypte antique et en Mésopotamie ; il faudrait dire alors, si l'on suit la classification proposée, que le stade des débuts des mathématiques historiques est interfigural, et ceci bien avant Euclide.

Mais nous croyons plutôt que les "stades" envisagés par Piaget ne rendent pas compte de la réalité ; il est clair par exemple que l'interfigural, s'il a un sens, est déjà solidement ancré à l'époque euclidienne avec le *passage* d'une figure à l'autre de même forme grâce aux rapports de grandeurs : deux triangles ont la même forme, sont "semblables" si et seulement si leurs côtés sont proportionnels. Et comme le prodigieux Livre V des *Eléments* est consacré à l'étude des rapports pour eux-mêmes, indépendamment des figures qu'ils permettent de mettre en relation, n'est-ce pas déjà du "transfigural" parfaitement maîtrisé ?

Un autre ennui est que le développement psycho-historique de *Psychogenèse et histoire des sciences* contredit celui de deux ouvrages antérieurs : *La représentation de l'espace chez l'enfant*, publié pour la première fois en 1947[2] et dont la quatrième édition est de 1981, suivi de *La géométrie spontanée de l'enfant*, publié l'année suivante[3]. En 1947, Piaget dit en effet que si la science géométrique a suivi historiquement la trajectoire euclidien-projectif-topologique[4], "l'ordre génétique" est inverse :

> "l'analyse abstraite des géomètres tend à démontrer que les notions spatiales fondamentales ne sont pas euclidiennes : elles sont topologiques, c'est-à-dire reposent simplement sur des correspondances qualitatives bicontinues faisant appel aux concepts de voisinage et de séparation, d'enveloppement et d'ordre etc., mais ignorent toute conservation des distances ainsi que toute projectivité. Or *nous constaterons précisément sans cesse* [5]que l'espace

[1] Tout particulièrement dans le Livre I, à partir de la proposition 35, et dans le Livre II.

[2] [Piaget, 1981 #177]

[3] [Piaget, 1948 #248]

[4] Dans *Psychogenèse et histoire des sciences* le dernier stade est celui des structures, ce qui n'est pas la même chose.

[5] Souligné par moi.

> enfantin, dont la nature essentielle est active et opératoire, débute par des intuitions topologiques élémentaires, bien avant de devenir simultanément projectif et euclidien"[1].

En 1947-48, Piaget pensait que l'ordre génétique et l'ordre historique étaient inversés ; en 1980, les mêmes expériences[2] le conduisent à la conclusion opposée. L'auteur, certes, a prévu l'objection et la balaie en quelques lignes : c'est, dit-il, à l'intérieur de l'intrafigural qu'il y aurait renversement de l'ordre historique, et il faut en outre distinguer

> "le plan des actions, où se situent ces premières intuitions topologiques (copier des figures etc.), et le plan des thématisations avec raisonnement sur les figures, où le jeu des morphismes sur les voisinages et enveloppements topologiques est loin d'être primitif"[3].

La situation est-elle vraiment éclaircie par ce rectificatif ? Tout d'abord, la thèse de l'inversion des ordres historique et génétique est centrale dans les premiers travaux de Piaget, elle articule toute l'œuvre et est reprise en conclusion, et n'est nullement limitée à une seule période de l'enfance ; son importance est telle qu'elle conduit même à une recommandation pédagogique : enseigner la topologie à l'école primaire. Ensuite les stades s'embrouillent quelque peu, puisque les stades I et II —avant sept ans— du Piaget 1947-48, qualifiés alors de "topologiques", deviennent l'intrafigural chez Piaget 1980, qualifié maintenant d'"euclidien"[4], ce qui n'est tout de même pas la même chose. Enfin si le "topologique d'abord" de 1947-48 n'est à envisager que sur le plan de "l'action", et non sur celui de la "thématisation avec raisonnement", il apparaît dans cet argument qu'une périodisation *psychologique*

---

[1] Id. p.5. On peut encore constater le rôle fondamental, chez le Piaget de 1947, de la thèse des développements *inversés* de l'histoire et de la psychogenèse, dans la citation suivante : "On a dit que la théorie des ensembles de Cantor devait s'enseigner à l'école primaire. Nous ne serions pas éloignés d'en penser autant des éléments de la topologie". Id p.6.

[2] [Piaget, 1983 #228, note préliminaire au chapitre 4]

[3] Id. p.133.

[4] Il est possible que Piaget ait seulement changé l'étiquette, car le topologique et l'intrafigural sont parfois décrits dans des termes très voisins. Ainsi dans [Piaget, 1981 #177] on peut lire page 68 : "Les rapports topologiques procèdent de proche en proche et restent attachés à la figure considérée comme un tout sans relation avec d'autres", ce qui est aussi une caractéristique de l'intrafigural.

pratique/théorie se substitue frauduleusement à une analyse de la nature *mathématique* de l'activité.

Mieux vaut reconnaître, nous semble-t-il, que le parallèle psycho-historique tenté par Piaget et ses collaborateurs n'a encore rien donné de concluant, reléguant pour l'instant dans le monde des rêves l'espoir de s'appuyer sur la psychogenèse pour faire progresser la connaissance de l'histoire ou inversement. Les classifications hâtives et les contradictions de Piaget ne sont pas les seules en cause ; il y a une raison de fond qui éloigne l'historien du psychologue, et qui fait que l'un et l'autre sont probablement condamnés à s'observer sans pouvoir vraiment collaborer. A l'école ou dans le bureau du psychologue, l'enfant en effet réagit devant des formes géométriques *toutes prêtes*, déjà crééés, et devant des problèmes inventés par le pédagogue ; l'homme de l'histoire, au contraire, doit créer lui même les formes et résoudre des problèmes qui se posent évidemment dans un tout autre contexte que celui d'une salle de classe contemporaine.

De plus, pour Piaget en tout cas, le progrès scientifique de l'enfant est principalement naturel, il est une affaire de biologie[1] où les adultes-pédagogues ne sont là, pour ainsi dire, que comme accoucheurs. L'historien recherche la raison du progrès scientifique de l'humanité en fouillant dans le contexte parfaitement artificiel du monde intellectuel et social. Si l'on arrive à établir un jour un parallélisme, il ne sera donc qu'une ressemblance formelle, due à des procès essentiellement distincts.

Piaget ne parle que d'histoire, et non de préhistoire ou de peuples primitifs ; ce fait est étonnant de la part d'un savant fasciné par l'embryogenèse, qui aurait pu se laisser tenter par un parallèle géométrie embryonnaire préhistorique/capacité géométrique de la petite enfance. Il y a dans ce domaine des analogies surprenantes qui méritent sans doute davantage qu'un succès de curiosité ; des gravures de l'âge néolithique européen, que l'on a qualifiées de "perspective étalée", ressemblent trait pour trait à certains dessins primitifs où tout ce qui est représenté —façades de cases, arbres, personnages— est rabattu sur un même plan, et aux

[1] Voir la référence plus haut.

dessins d'enfants du "stade II" de Piaget : "On voit simultanément un cheval de profil, une voiture vue de face, mais couchée sur un plan horizontal et ses roues rabattues sur les côtés"[1]. De même y a-t-il peut-être quelque chose à déduire du rapprochement entre la lente rupture de l'esprit de l'enfant avec l'égocentrisme spatial[2] et l'ethnocentrisme de beaucoup de cosmologies primitives qui eurent sans doute beaucoup de mal à concevoir que "au delà des quatre mers, au delà des quatre déserts, au delà des quatre pôles, les choses ne sont pas autres qu'ici"[3].

Un chercheur anglais[4] a tenté d'appliquer à la pensée des peuples primitifs les catégories issues de la psychogenèse selon Piaget, dont les travaux sont, à son grand regret, totalement ignorés des anthropologues. Son ouvrage de 1979, donc antérieur à la publication de *Psychogenèse et histoire des sciences*, veut montrer en particulier que le développement de la géométrie chez les primitifs suit l'ordre topologique-projectif-euclidien que Piaget a cru détecter chez l'enfant en 1947. Il donne pour ce faire de nombreuses références ethnographiques, et cherche, contrairement aux ethnomathématiciens, à faire œuvre d'historien à la recherche des premières étapes de la pensée mathématique humaine[5]. Malheureusement, Hallpike est un auteur à modèle préconçu, celui de Piaget ; il cherche dans la documentation de quoi remplir les cases du modèle, de gré ou de force. Citant un fait de nature géométrique, il y cherchera du "topologique", du "projectif" ou de l'"euclidien", et ce faisant il néglige totalement ce que nous pensons être le "totalitarisme" de la pensée primitive : pensée unitaire, pensée d'unité cosmique dans laquelle le symbole représentatif —volontiers géométrique— est un moyen primordial de cette unité, comme nous le verrons plus tard.

---

[1] [Piaget, 1981 #177 p.66]

[2] Aux débuts du "stade III", "la décentration l'emporte sur l'égocentrisme en situant le sujet, à titre de mobile parmi les autres, au sien d'un cadre immobile d'emplacements, qui constitue le début de l'espace objectif sous son aspect euclidien". [Piaget, 1948 #248 p.38]

[3] [Lie-tseu, 1980 #104 p.474]

[4] [Hallpike, 1979 #65]

[5]Hallpike se prononce explicitement contre le "relativisme culturel", pour qui les représentations primitives de l'espace sont simplement "différentes". Id., p.283.

Mode de pensée qui par conséquent doit avoir eu un rôle déterminant dans le développement des germes de mathématiques.

Mais le souci de collectionner les exemples en passant d'un peuple à l'autre et d'en faire une classification *mathématicienne* empêche l'auteur d'emprunter cette voie de recherche[1] qui exige au contraire de l'enquêteur qu'il laisse vivre, parler et penser ceux qu'il étudie ; il vaut mieux étudier le plus "totalement" possible un ou deux peuples que de multiplier les exemples de curiosités mathématiques primitives *nécessairement* privées de sens parce que privées de leur contexte intellectuel global. Cette règle peut certainement être contestée lorsque l'on parle de mathématiques de la période historique qui, apparemment au moins, forment un système autonome, ayant ses propres bases et ses propres lois parfaitement identifiées ; cette règle nous paraît en revanche indiscutable au sujet des mathématiques embryonnaires de l'époque primitive, où un tel système autosuffisant ne peut exister.

Même si l'on accepte la méthode de Hallpike, on ne peut qu'être très étonné de ses classifications. Pour démontrer que les concepts spatiaux dominants chez les primitifs sont de nature topologique, et non projectifs ou euclidiens, il opère un glissement de sens en ne retenant du topologique que son aspect qualitatif :

> "Ces classifications[2] sont essentiellement topologiques…et sont associées à des caractéristiques physiques de l'environnement telles que ciel/terre, village/brousse, et tout spécialement à des images du corps humain et de la maison, et sont étroitement intégrées à des valeurs morales et des relations sociales. Plus généralement, nous verrons que les classifications spatiales primitives sont qualitatives et liées aux aspects physiognomiques du paysage"[3].

L'auteur donne un peu plus loin l'exemple du village Dogon symbolisant un homme, la maison à l'intérieur du village symbolisant elle aussi un être humain ; chaque espace ou portion d'espace a donc une charge symbolique, et à ce titre on peut dire que la conception de

---

[1] Hallpike fait référence au symbolisme, mais d'une façon à notre avis totalement erronée, comme nous le verrons dans un instant.

[2] Intérieur/extérieur, centre/périphérie, gauche/droite, haut/bas etc.

[3] [Hallpike, 1979 #65 p.285]

l'espace est qualitative. Mais peut-on pour autant en inférer une conception topologique, sous prétexte que la topologie peut aussi être considérée comme qualitative, par opposition au quantitatif métrique ? L'identification par Hallpike des deux thèmes paraît arbitraire. L'un de ses propres exemples le montre bien : il évoque un peuple chez qui deux figures topologiquement équivalentes —le rectangle et le cercle— ont des fonctions symboliques opposées[1] : le rectangle est l'espace borné, fermé, alors que le cercle est l'espace illimité.

Pour illustrer le passage au projectif et à l'euclidien, l'auteur montre des Indiens d'Amérique fabriquant un récipient en écorce, et divers systèmes primitifs d'orientation terrestre ou maritimes qui ne consistent tous, selon nous, qu'à "apprendre par cœur" des configurations terrestres ou célestes, ainsi qu'une grande quantité de détails physiques —vents, courants marins, bancs de poissons, vols d'oiseaux— pour pouvoir voyager grâce à des visées successives, puis il conclut :

> "les relations topologiques, les associations concrètes, et les représentations imagées dominent quand l'espace est appréhendé de façon statique et perceptive, tandis que la construction d'objets (…) et les problèmes de navigation (…) engendreront des concepts euclidiens et projectifs, où les notions de ligne droite, d'angles, de relations métriques, de proportions et de systèmes généraux de coordination sont comprises"[2].

On pourrait à bon droit tirer une conclusion identique de la taille des outils lithiques qui atteignent dès la fin du Paléolithique inférieur des qualités "euclidiennes", au point qu'un préhistorien de renom, Jelinek, a pu s'exclamer :

> "Il est évident que le fabricant de cet outil avait maîtrisé la conception dite euclidienne de l'espace. Et s'il la maîtrisait en taillant ses outils, il devait savoir l'appliquer pour évaluer les distances et pour se situer dans l'espace tridimensionnel"[3].

---

[1] Id. p.296

[2] Id. p.320

[3] [Jelinek, 1989 #163 p.38]

La remarque de Jelinek est tout aussi vraie, ou tout aussi fausse, que celle de Hallpike : les deux reposent à notre sens sur la confusion habituelle[1] et que nous dénonçons comme ruineuse pour l'histoire. Celle qui, de l'analyse mathématique d'une activité, infère la présence du corpus scientifique actuel correspondant dans le cerveau de l'acteur. Et si Hallpike a raison, si vraiment le navigateur des îles Caroline aborde le "stade euclidien", alors il doit en être de même pour notre ancêtre tailleur de pierre pourtant bien moins évolué que les Dogons qui n'en seraient, d'après l'auteur, qu'au "stade topologique". La classification Piaget-Hallpike nous paraît totalement inopérante.

5- Conclusion.

Comment donc utiliser les sources de façon correcte ? Il me semble que le mot d'ordre doit être : *Laissez-les vivre* !! Regardons, observons patiemment, évitons de quitter nos sources à tout instant pour faire des mathématiques sur leur dos ! Jouer avec la documentation pour "faire des maths" n'a rien de condamnable, à condition de ne pas prendre un tel délassement pour une analyse historique ; nous avons vu à quelles aberrations cela peut conduire.

Pour les outils lithiques, dont le façonnage est spécifiquement humain dès le début, il faut observer non seulement l'objet fini, mais le plan d'action standard qui lui donne naissance et les évidences géométriques correspondantes qui s'ancrent dans le cerveau humain. Si l'on observe cela et rien que cela, des séquences apparaissent qui n'ont rien à voir avec des "concepts euclidiens", du "topologique pur", ou avec des "intelligences préopérationnelles" et "opérationnelles".

Pour le graphisme symbolique, où la forme tend à acquérir une universalité abstraite, en même temps qu'un statut de moyen d'action sur le monde, il faut se pencher certes sur l'objet produit et sur son mode concret de production, mais il faut interroger surtout la pensée globale de nos ancêtres, leurs mythes et leurs rituels. C'est une tâche indispensable parce qu'il

[1] Il est remarquable que la confusion soit souvent faite même lorsque l'on met des animaux en scène!

n'y a pas encore de géométrie pure comme plus tard, et ignorer cela conduit aux contes de fées à la Thom. C'est une tâche impossible si l'on refuse le comparatisme ethnographique, dont un des grands mérites est de tordre le cou aux affabulations.

Quant aux sources didactiques, je ne sais pas trop, mais il y a une trop grande différence de nature entre d'une part l'apprentissage d'un savoir déjà là, distillé par des maîtres qui e domninent, et sa découverte d'autre part dans des contextes qui n'ont rien à voir avec les bancs de l'école.

Les sources primordiales sont donc les sources archéologiques et les sources ethnographiques, les secondes éclairant les premières. Tel est l'état d'esprit qui nous a guidé dans notre travail[1].

-oOo-

La Réunion, août 2001

Références bibliographiques.

Ascher, Marcia. *Ethnomathematics. A Multicultural View of Mathematical Ideas*. Pacific Grove: Brooks and Cole Publishing Company, 1991.

Aveni, Anthony. *Empires of Time.Calendars, Clocks and Cultures*. Londres: I.B. Tauris & Co, 1990.

Bertrand, Louis. *Eléments de géométrie*: Pachoud, 1812.

Closs, Michael. *Native American Mathematics*. 3° ed. Austin: University of Texas Press, 1990.

Gerdes, Paulus. *L'ethnomathématique comme nouveau domaine de recherche en Afrique.* Maputo: Institut Supérieur de Pédagogie du Mozambique, 1993.

Gerdes, Paulus. *Le cercle et le carré. Créativité géométrique, artistique et symbolique de vannières et vanniers d'Afrique, d'Amérique, d'Asie et d'Océanie*. Paris: L'harmattan, 2000.

[1] [Keller, 1998 #523]

Gerdes, Paulus. *Lusona. Récréations géométriques d'Afrique*. Maputo: Union Mathématique Africaine, 1991.

Gerdes, Paulus. “On Mathematics in the History of Sub-Saharan Africa.” *Historia mathematica* 21 (1994): 345-376.

Gerdes, Paulus. *Une tradition géométrique en Afrique. Les dessins sur le sable. Tome 1 : Analyse et reconstruction. Tome 2 : Exploration éducative et mathématique. Tome 3 : Analyse comparative.* 3 vols. Paris: L'Harmattan, 1995.

Gerdes, Paulus, et Gildo Bufalo. *Sipatsi. Technologie, art et géométrie à Inhambane*. Trad. Amélia Russo de Sa et Thierry Le Noan. Maputo: Institut supérieur de pédagogie, 1994.

Giot, Pierre-Roland. “Le "temps astral" des mégalithes.” In *Le temps de la préhistoire*, ed. Jean-Pierre Mohen, 50-53. Paris: Archeologia, 1989.

Hallpike, C. R. *The Foundations of Primitive Thought*. Oxford: Oxford University Press, 1979.

Ifrah, Georges. *Histoire universelle des chiffres*. 2 vols. Paris: Laffont, 1994.

Jelinek, Jan. *Sociétés de chasseurs. Ces hommes qui vivent de la nature sauvage*. Trad.Dagmar Doppia. Paris: Gründ, 1989.

Joussaume, Roger. *Des dolmens pour les morts. Les mégalithismes à travers le monde*. Paris: Hachette, 1985.

Keller, Olivier. “Préhistoire de la géométrie : la gestation d'une science d'après les sources archéologiques et ethnographiques.” Thèse, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, 1998.

Leroi-Gourhan, André. *Le geste et la parole. La mémoire et les rythmes.* Paris: Albin Michel, 1965.

Lie-tseu. “Le vrai classique du vide parfait.” In *Philosophes taoïstes. Lao-tseu, Tchouang-tseu Lie-tseu*, ed. Etiemble, 363-609. Paris: Gallimard, 1980.

Lorblanchet, Michel. “Art préhistorique et art ethnographique.” In *Le temps de la préhistoire*, ed. J.P. Mohen, 60-63. Paris: Archeologia, 1989.

Mallery, Garrick. *Picture-Writing of the American Indians*. 2 vols. New York: Dover, 1972.

Marshack, Alexander. *Les racines de la civilisation*. Paris: Plon, 1972.

Mohen, Jean-Pierre. *Le monde des mégalithes*. Paris: Castermann, 1989.

Mohen, Jean Pierre. *Le temps de la préhistoire*. Paris: Archeologia, 1989.

Petrequin, Pierre. “Ethno-archéologie.” In *Le temps de la préhistoire*, ed. J.P. Mohen, 64-66. Paris: Archeologia, 1989.

Piaget, Jean, et Rolando Garcia. *Psychogenèse et histoire des sciences*. Paris: Flammarion, 1983.

Piaget, Jean, Bärbel Imhelder, et Alina Szeminska. *La géométrie spontanée de l'enfant.* Paris: PUF, 1948.

Piaget, Jean, et Bärbel Inhelder. *La représentation de l'espace chez l'enfant*. 4° ed. Paris: PUF, 1981.

Sarton, Georges. *Ancient Science through the Golden Age of Greece.* 3° ed. New York: Dover, 1993.

Thom, A., and A.S. Thom. *La géométrie des alignements de Carnac*. Rennes: Laboratoire "Anthropologie-Préhistoire-Protohistoire et Quaternaire Armoricains". E.R. N°27, Université de Rennes, 1977.

Thom, A., et A.S. Thom. *Stone Rows and Standing Stones. Britain, Ireland and Brittany. PartI*. Oxford: BAR, 1990.

-oOo-