Дифференциальная геометрия многообразий фигур
Band 34 (2003), Seiten 144-148

R. Fritsch
(Ludwig-Maximilians-Universität München, zur Zeit Staatliche Universität Kaliningrad)

Hilberts Beweis der Transzendenz der Ludolphschen Zahl π

Im Jahr 1882 hat Ferdinand Lindemann (1852–1939, damals Professor in Freiburg im Breisgau) das Problem der Quadratur des Kreises erledigt, indem er die Transzendenz der Ludolphschen Zahl π bewies. Dadurch wurde er weltberühmt und an die im 19. Jahrhundert ein mathematisches Zentrum von Weltgeltung bildende Albertina in Königsberg berufen. Sein ursprünglicher Beweis ist heute nur schwer nachzuvollziehen. Im Jahr 1893 gelang seinem aus Königsberg stammenden und zu dem Zeitpunkt noch hier wirkenden Schüler David Hilbert (1862-1943) eine wesentliche Vereinfachung des Beweises. Damit hat die Transzendenz von π einen starken lokalen Bezug zum Erscheinungsort dieser Zeitschrift, was rechtfertigt, die Grundideen von Hilberts Beweis hier darzustellen.

Zur Erinnerung. Eine komplexe Zahl z heißt *algebraisch*, wenn sie Wurzel eines Polynoms mit ganzen Koeffizienten, oder gleichbedeutend, Wurzel eines normierten Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist. Die erste Formulierung bedeutet: es gibt eine natürliche Zahl n und ganze Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$, derart dass gilt:

$$a_n \neq 0\,, \quad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0.$$

Für $z \neq 0$ kann dabei auch immer $a_0 \neq 0$ angenommen werden. Die Zahl z heißt *ganz algebraisch*, wenn sie Wurzel eines normierten Polynoms mit ganzen Koeffizienten ist, das heißt, $a_n = 1$ gewählt werden kann und die übrigen Koeffizienten trotzdem ganz bleiben.

Lemma 1. *Ist die komplexe Zahl z algebraisch und sind $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ganze Zahlen, die die genannten Bedingungen erfüllen, so ist $a_n z$ ganz algebraisch.*

Eine komplexe Zahl heißt *transzendent*, wenn sie nicht algebraisch ist.

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal produzieren – algebraisch betrachtet – nur algebraische Zahlen. Deswegen bedeutet der Nachweis der Transzendenz der Zahl π, dass die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal unmöglich ist; dies war eine Aufgabe, die dem griechischen Philosophen Anaxagoras im 5. Jahrhundert vor Christus eingefallen ist, als er wegen Gotteslästerung im Gefängnis saß.

Ein wesentliches Hilfsmittel für Hilberts Beweis der Transzendenz der Zahl π ergibt sich aus dem in jedem Lehrbuch der Algebra nachzulesenden Hauptsatz über symmetrische Funktionen.

Satz 2. *Sind $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ganze Zahlen mit $a_n \neq 0$, so gilt*:

a) Jede symmetrische Funktion in n Unbestimmten, liefert angewandt auf die Wurzeln des Polynoms $P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ einen rationalen Wert.

b) Ist $a_n = 1$, so liefert jede symmetrische Funktion in n Unbestimmten mit ganzen Koeffizienten angewandt auf die Wurzeln des Polynoms P einen ganzen Wert.

Hilbert führt – wie schon Lindemann – einen Widerspruchsbeweis. Er nimmt an, dass π algebraisch ist. Dann ist auch $\mathrm{i}\pi$ algebraisch, also Wurzel eines normierten Polynoms P mit rationalen Koeffizienten. Man wählt ein derartiges Polynom P; es habe den Grad n. Mit $z_1 = \mathrm{i}\pi, z_2, \ldots, z_n$ seien die Wurzeln von P bezeichnet. Da $\mathrm{i}\pi$ eine komplexe Wurzel des reellen Polynoms P ist, ist auch $-\mathrm{i}\pi$ eine Wurzel von P; es kann $z_2 = -\mathrm{i}\pi$ angenommen werden. Wegen

$$e^{\mathrm{i}\pi} = -1$$

gilt

$$0 = (e^{z_1} + 1)\ (e^{z_2} + 1)\ \ldots\ (e^{z_n} + 1)\,.$$

Durch Ausmultiplizieren der rechten Seite dieser Gleichung ergibt sich:

$$0 = e^{y_1} + e^{y_2} + \ldots + e^{y_N} + 1,$$

wobei die Exponenten y_l Summen der Wurzeln z_j sind, mit $N = 2^{n-1}$. Manche der Exponenten y_l haben den Wert 0, zum Beispiel $y_l = z_1 + z_2$ und liefern damit den Beitrag 1 zu der Summe auf der rechten Seite. Die Numerierung der y_k wird so gewählt, dass die ersten M ($<N$) ungleich 0 und die übrigen gleich 0 sind. Damit erhält die Gleichung die Form

$$0 = e^{y_1} + e^{y_2} + \ldots + e^{y_M} + a,$$

wobei die Terme e^{y_l} nichttriviale Potenzen von e und $a = N\text{-}M{+}1$ eine natürliche Zahl ist. Im folgenden wird gezeigt, dass diese Gleichung nicht bestehen kann.

Dazu werden die Polynome

$$
\begin{aligned}
&P_1 = P = (x - z_1)\ (x - z_2)\ \ldots\ (x - z_n),\\
&P_2 = (x - z_1 - z_2)\ (x - z_1 - z_3)\ \ldots\ (x - z_{n-1} - z_n),\\
&P_3 = (x - z_1 - z_2 - z_3)\ (x - z_1 - z_2 - z_4)\ \ldots\ (x - z_{n-2} - z_{n-1} - z_n),\\
&\vdots\\
&P_n = x - z_1 - z_2 - \ldots - z_n,\\
&P_\# = P_1\,P_2\,\ldots\,P_n
\end{aligned}
$$

betrachtet. Die Koeffizienten des Polynoms $P_\#$ sind symmetrische Funktionen der Wurzeln z_j, also nach Teil a) von Satz 2 rationale Zahlen, die Wurzeln von $P_\#$ sind 0 und die eben definierten Zahlen y_k; dabei hat die Wurzel 0 die Vielfachheit $N\text{-}M$. Multiplikation mit dem Hauptnenner der Koeffizienten und Division durch x^{N-M} liefert das Polynom

$$Q = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_Mx^n$$

mit ganzen Koeffizienten, $b_0, b_n \neq 0$, und den Wurzeln $y_1, y_2, \ldots, y_M$. Nach Lemma 1 handelt es sich bei den $b_M\, y_l$ um ganze algebraische Zahlen.

Nun sei k eine natürliche Zahl, zunächst beliebig; später erzeugt eine geeignete Wahl von k den gewünschten Widerspruch. Hilbert betrachtet die komplexe Funktion g: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$, die gegeben ist durch

$$g(z) = b_M{}^M\, Q(z)$$

und bildet das Integral

$$w_0 = \int_0^\infty z^k g(z)^{k+1} e^{-z} dz\ .$$

Da für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\int_0^\infty z^n e^{-z} dz\ = n!$$

ist w_0 von der Form

$$w_0 = (b_M{}^M\, b_0)^{k+1}\, k! + c_0\, (k+1)!,$$

wobei auch c_0 eine ganze Zahl ist.

Hilberts Ziel ist nun zu zeigen, dass bei geeigneter Wahl von k gilt:

$$\frac{w_0}{k!} \cdot (e^{y_1}\ +\ e^{y_2}\ +\ \ldots + e^{y_M}\ + a) = s + p,$$

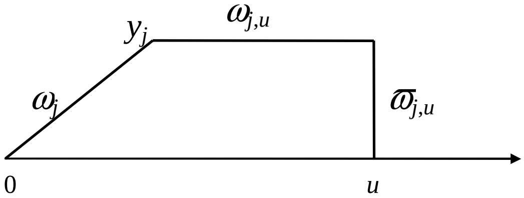
mit einer reellen Zahl s vom Betrag kleiner als 1 und einer von Null verschiedenen ganzen Zahl p. Dann kann die rechte Seite dieser Gleichung nicht gleich Null sein, also auch nicht der zweite Faktor auf der linken Seite, woraus sich der Widerspruch ergibt.

Dazu wird das Integral

$$w_0 = \lim_{u\to\infty} \int_0^u z^k g(z)^{k+1} e^{-z} dz$$

für alle j$\in\{1, 2, \ldots, M\}$ zerlegt. Da der Integrand eine Stammfunktion besitzt, ist das eigentliche Integral unabhängig vom Integrationsweg. Für j$\in\{1, 2, \ldots, M\}$ und $u > \mathrm{Re}\, y_j$ betrachtet Hilbert den folgenden zusammengesetzten Integrationsweg:

$\omega_j(v) = v\cdot y_j,\ v\in[0,1]$,
$\omega_{j,u}(v) = v + \mathrm{i}\ \mathrm{Im}\, y_j,\ v\in[\mathrm{Re}\, y_j, u]$,
$\varpi_{j,u}(v) = u + (1\text{-}v)\cdot\mathrm{i}\ \mathrm{Im}\, y_j,\ v\in[0,1]$.



Damit wird das Integral $\int_0^u z^k g(z)^{k+1} e^{-z} dz$ in drei Teile zerlegt. Für den dritten Teil gilt:

$$\lim_{u\to\infty} \int_0^1 (u + (1-v)\ \mathrm{i}\ \mathrm{Im}\, y_j)^k \cdot g(u + (1-v)\ \mathrm{i}\ \mathrm{Im}\, y_j)^{k+1} e^{-(u+(1-v)\ \mathrm{i}\ \mathrm{Im} y_j)} (-\ \mathrm{i}\ \mathrm{Im}\, y_j) dv = 0.$$

Hilbert setzt nun

$$v_j = \int_0^1 (vy_j)^k \cdot g(vy_j)^{k+1} \cdot e^{-vy_j} \cdot y_j dv\ ,$$

$$w_j = \lim_{u\to\infty} \int_{\operatorname{Re} y_j}^{u} (v + \mathrm{i}\,\operatorname{Im} y_j)^k g(v + \mathrm{i}\,\operatorname{Im} y_j)^{k+1} e^{-(v+\mathrm{i}\,\operatorname{Im} y_j)} dz =$$

$$= \lim_{u\to\infty} \int_0^u (v + y_j)^k g(v + y_j)^{k+1} e^{-(v+y_j)} dz$$

und hat

$$w_0 = v_j + w_j$$

für alle j$\in\{1, 2, \dots, M\}$.

Hilbert definiert

$$s = \frac{v_1 e^{y_1} + v_2 e^{y_2} + \cdots + v_M e^{y_M}}{k!}$$

$$p = \frac{w_0 a + w_1 e^{y_1} + w_2 e^{y_2} + \cdots + w_M e^{y_M}}{k!}$$

Da stetige Funktionen auf kompakten Intervallen beschränkt sind, gibt es Schranken s_1 und s_2 derart, dass gilt

$$|s| \le \frac{s_1^k}{k!} s_2 (|y_1 e^{y_1}| + |y_2 e^{y_2}| + \cdots + |y_M e^{y_M}|)$$

Damit wird für genügend großes |s|<1 wie gewünscht.

Weiter ergibt sich für alle $j \in \{1,2,\dots,M\}$:

$$w_j \cdot e^{y_j} = (k+1)!\,K(b_M y_j),$$

wobei K ein Polynom mit ganzen Koeffizienten bezeichnet. Nach Teil b) von Satz 2 ist damit

$$w_1 e^{y_1} + w_2 e^{y_2} + \cdots + w_M e^{y_M}$$

eine ganze durch (k+1)! teilbare ganze Zahl. Damit gilt

$$p = a(b_M^M b_0)^{k+1} + (c_0 + c_1)\cdot(k+1).$$

Wird k so gewählt, dass k+1 eine Primzahl größer als a, b_M und b_0 ist, dann ist sicher $p \neq 0$. Da es unendlich viele Primzahlen gibt, gibt es ein solches k, für das zusätzlich $|s|<1$ wird. Damit ist das Ziel erreicht!

Quelle:

David Hilbert: Über die Transcendenz der Zahlen ***e*** und ***π***,
in: *Mathematische Annalen* **43**, 216-219 (1893)