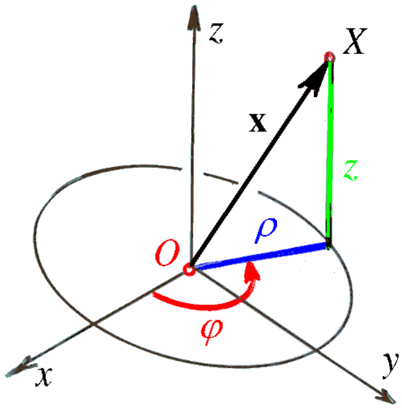
Folie 34. Zylinder- und Kugelkoordinaten

02.12.03 P.Vachenauer

(1) Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z)



In der (x,y)-Ebene werden Polarkoordinaten ρ , φ verwendet.

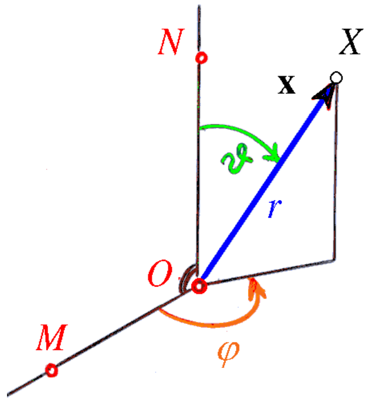
Beachte: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist die Länge der Projektion des Ortsvektors $\mathbf{x}$ in die (x,y)-Ebene.

Umrechnung $\boxed{x = \rho\cos\varphi\ ,\ y = \rho\sin\varphi\ ,\ z = z}$

Wertebereich $\rho \geq 0\ ,\quad -\pi < \varphi \leq \pi\ ,\quad -\infty < z < \infty\ .$

Für die Punkte der z-Achse $\rho = 0$ ist kein Winkel erklärt.

(2) Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ)



Vorgabe Ursprung O, Nordpol N $|\overrightarrow{ON}| = 1$,

Punkt M auf dem Äquator $|\overrightarrow{OM}| = 1$, $\overrightarrow{ON} \perp \overrightarrow{OM}$. Dann ist

$r = |\overrightarrow{OX}|$, **Radius**, Abstand von O , $r \geq 0$.

$\vartheta = \angle(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{ON})$, **Poldistanzwinkel** , $0 \leq \vartheta \leq \pi$,

$\varphi = \angle\left(\overrightarrow{OX}_{\overrightarrow{ON}^{\perp}}, \overrightarrow{OM}\right)$, **Azimut** , $-\pi < \varphi \leq \pi$,

wobei $\varphi > 0$, falls $[\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OX}] > 0$ und $\varphi < 0$, falls $[\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OX}] < 0$.
(Für die Punkte der z-Achse $\vartheta = 0$ bzw. $\vartheta = \pi$ ist kein Azimut erklärt.)

Umrechnung In der Regel nimmt man $N = (0,0,1)$ und $M = (1,0,0)$, dann bringen zwei Drehungen (zunächst um die y-Achse mit Winkel ϑ, dann um die z-Achse mit Winkel φ) und eine Streckung mit dem Faktor r den Nordpol N in den Punkt X :

$$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\sin\vartheta\\0\\\cos\vartheta\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi\\\sin\vartheta\sin\varphi\\\cos\vartheta\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}r\sin\vartheta\cos\varphi\\r\sin\vartheta\sin\varphi\\r\cos\vartheta\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}r\sin\vartheta\cos\varphi\\r\sin\vartheta\sin\varphi\\r\cos\vartheta\end{bmatrix}}.$$

Bilder aus der Animation
zum Volumenintegral im
Multimediamodul
www-hm.ma.tum.de/integration