

Leibniz	122, 123, 124—135, 140, 153, 158, 159, 166, 172, 194, 221, 243, 244, 258.
Lewin	122, 125, 177, 200, 206.
Lewis	247.
Locke	185.
Lorentz	188, 231.
Lotze	158.
Mach	222.
Malebranche	171.
Maxwell	221, 237, 252.
Meinong	220.
Minkowski	121, 188, 208, 219.
More	126.
Newton	124, 126, 137, 154, 156, 158.
Occam	139.
Pillon	163.
Platon	179.
Poincaré	164.
Reichenbach	122, 124, 152, 154, 169, 177, 178, 194, 200, 201, 205—242, 246, 256, 257, 258.
Renouvier	163.
Robb	122, 132, 187—205, 224, 230, 247, 256, 258.
Russell	138, 142, 147, 165, 173, 178, 196, 198, 200, 207, 225, 226, 227, 233, 236, 239, 243—253.
Schopenhauer	120, 140, 144, 145—154, 191, 195.
Smoluchowski	182, 237, 238, 239.
Spinoza	125.
Tarski	200.
Whitehead	198, 200, 233, 236, 244.
Wolff	124.
Varignon	129.
Zilsel	177.

Allatum est die 30. Aprilis 1934.

ALFRED TARSKI

Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*).

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Bibliographische Abkürzungen	261
Einleitung	264
§ 1. Der Begriff der wahren Aussage in der Umgangssprache	267
§ 2. Formalisierte Sprachen, insbesondere die Sprache des Klassenkalküls	279
§ 3. Der Begriff der wahren Aussage in der Sprache des Klassenkalküls	303
§ 4. Der Begriff der wahren Aussage in den Sprachen endlicher Ordnung	327
§ 5. Der Begriff der wahren Aussage in den Sprachen unendlicher Ordnung	363
Zusammenfassung	390
Nachwort	399

Bibliographische Abkürzungen.

In den bibliographischen Zitaten dieser Arbeit verwende ich folgende Abkürzungen:

„Ackermann,“ für „W. Ackermann. *Über die Erfüllbarkeit gewisser Zähl ausdrücke*. Mathematische Annalen, 100. Band. Berlin 1928. S. 638—649“.

„Ajdukiewicz,“ für „K. Ajdukiewicz. *Z metodologii nauk dedukcyjnych*. [Zur Methodologie der deduktiven Wissenschaften]. Wydawnictwo Polskiego Towarzystwa Filozoficznego we Lwowie, tom X. Lwów 1921“.

*) Dissertationem hanc lingua polona in scriptam tunc ita: *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych* primum anno 1933 typis expressit publicique iuris fecit fasciculo 34. suorum Actorum Societas Scientiarum ac Litterarum Varsoviensis; lingua germanica eam reddidit L. Blaustein.

„Ajdukiewicz₂“ für „K. Ajdukiewicz. *Główne zasady metodologii nauk i logiki formalnej*. [Hauptprinzipien der Methodologie der Wissenschaften und der formalen Logik.] Vom Verfasser genehmigte Nachschrift, redigiert von M. Presburger. Wydawnictwa Koła Matematyczno-fizycznego Sluchaczy Uniwersytetu Warszawskiego, tom XVI. Warszawa 1928 (Lithographische Vervielfältigung)“.

„Bernays-Schönfinkel₁“ für „P. Bernays und M. Schönfinkel. *Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik*. Mathematische Annalen, 99. Band. Berlin 1928. S. 342–372“.

„Carnap₁“ für „R. Carnap. *Abriss der Logistik*. Schriften zur wissenschaftlichen Weltauffassung, Band 2. Wien 1929“.

„Chwistek₁“ für „L. Chwistek. *The Theory of constructive Types (Principles of Logic and Mathematics)*. Part I. Annales de la Société Polonaise de Mathématique, tome II. Kraków 1924. S. 9–48“.

„Chwistek₂“ für „L. Chwistek. *Neue Grundlagen der Logik und Mathematik*. Mathematische Zeitschrift, 30. Band. Berlin 1929. S. 704–724“.

„Dedekind₁“ für „R. Dedekind. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Fünfte Auflage. Braunschweig 1923“.

„Fraenkel₁“ für „A. Fraenkel. *Einleitung in die Mengenlehre*. Dritte Auflage. Berlin 1928“.

„Gödel₁“ für „K. Gödel. *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*. Monatshefte für Mathematik und Physik, XXXVII. Band. Leipzig 1930. S. 349–360“.

„Gödel₂“ für „K. Gödel. *Einige metamathematische Resultate über Entscheidungsdefiniertheit und Widerspruchsfreiheit*. Akademie der Wissenschaften in Wien, Akademischer Anzeiger Nr. 19, Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse vom 23. Oktober 1930. Wien 1930“.

„Gödel₃“ für „K. Gödel. *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*. Monatshefte für Mathematik und Physik, XXXVIII. Band. Leipzig 1931. S. 173–198“.

„Grelling-Nelson₁“ für „K. Grelling und L. Nelson. *Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti*. Abhandlungen der Fries'schen Schule (Neue Folge), zweiter Band, 3. Heft. Göttingen 1908. S. 301–334“.

„Herbrand₁“ für „J. Herbrand. *Recherches sur la théorie de la démonstration*. Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III. Sciences mathématiques et physiques, Nr. 33. Warszawa 1930“.

„Hilbert₁“ für „D. Hilbert. *Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre*. Mathematische Annalen, 104. Band. Berlin 1931. S. 485–494“.

„Hilbert-Ackermann₁“ für „D. Hilbert und W. Ackermann. *Grundzüge der theoretischen Logik*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band XXVII. Berlin 1928“.

„Huntington₁“ für „E. V. Huntington. *Sets of independent postulates for the Algebra of Logic*. Transactions of the American Mathematical Society, volume 5. Lancaster, PA., and New York 1904. S. 288–309“.

„Kotarbiński₁“ für „T. Kotarbiński. *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk*. [Elemente der Erkenntnistheorie, der formalen Logik und der Methodologie der Wissenschaften]. Lwów 1926“.

„Kuratowski₁“ für „C. Kuratowski. *Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles*. Fundamenta Mathematicae, tom II. Warszawa 1921. S. 161–171“.

„Leśniewski₁“ für „St. Leśniewski. *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik*. Fundamenta Mathematicae, tom XIV. Warszawa 1929. S. 1–81“.

„Leśniewski₂“ für „St. Leśniewski. *Über die Grundlagen der Ontologie*. Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, XXIII Année, Classe III. Sciences mathématiques et physiques. Warszawa 1930. S. 111–132“.

„Löwenheim₁“ für „L. Löwenheim. *Über Möglichkeiten im Relativkalkül*. Mathematische Annalen, 76. Band. Berlin 1915. S. 447–470“.

„Łukasiewicz₁“ für „J. Łukasiewicz. *Elementy logiki matematycznej*. [Elemente der mathematischen Logik]. Vom Verfasser genehmigte Nachschrift, redigiert von M. Presburger. Wydawnictwa Koła Matematyczno-fizycznego Sluchaczy Uniwersytetu Warszawskiego, tom XVIII. Warszawa 1929 (Lithographische Vervielfältigung)“.

„Łukasiewicz-Tarski₁“ für „J. Łukasiewicz und A. Tarski. *Untersuchungen über den Aussagenkalkül*. Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, XXIII Année, Classe III. Sciences mathématiques et physiques. Warszawa 1930. S. 30–50“.

„v. Neumann₁“ für „J. v. Neumann. *Zur Hilbertschen Beweistheorie*. Mathematische Zeitschrift, 26. Band. Berlin 1927. S. 1–46“.

„Presburger₁“ für „M. Presburger. *Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt*. Comptes Rendus du I. Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves. Warszawa 1930. S. 92–101“.

„Schröder₁“ für „E. Schröder. *Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik)*. Leipzig. Erster Band, 1890. Zweiter Band, erste Abteilung, 1891. Zweiter Band, zweite Abteilung, 1905. Dritter Band, erste Abteilung, 1895“.

„Skolem₁“ für „Th. Skolem. *Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls und über Produktions- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen*. Videnskapsselskapets Skrifter, I. Mat.-nat. Klasse, 1919, No. 3. Kristiania 1919“.

„Skolem₂“ für „Th. Skolem. *Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theorem über dichte Mengen*. Videnskapselskapets Skrifter, I. Mat.-nat. Klasse, 1920, No. 4. Kristiania 1920“.

„Skolem₃“ für „Th. Skolem. *Über einige Grundlagenfragen der Mathematik*. Skrifter utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, I. Mat.-nat. Klasse, 1929, No. 4. Oslo 1929“.

„Tarski₁“ für „A. Tarski. *Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften. I*. Monatshefte für Mathematik und Physik, XXXVII. Band. Leipzig 1931. S. 361–404“.

„Tarski₂“ für „A. Tarski. *Sur les ensembles définissables de nombres réels. I*. Fundamenta Mathematicae, tom XVII. Warszawa 1931. S. 210–239“.

„Tarski₃“ für „A. Tarski. *Der Wahrheitsbegriff in den Sprachen der deduktiven Disziplinen*. Akademie der Wissenschaften in Wien, Akademischer Anzeiger Nr. 2, Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse vom 21. Jänner 1932. Wien 1932“.

„Veblen“ für „O. Veblen. *A system of axioms for geometry*. Transactions of the American Mathematical Society, volume 5. Lancaster, PA., and New York 1904. S. 343–384“.

„Whitehead-Russell“ für „A. N. Whitehead and B. Russell. *Principia Mathematica*. Second Edition. Cambridge. Volume I, 1925 Volume II, 1927. Volume III, 1927“.

Einleitung.

Vorliegende Arbeit ist fast gänzlich einem einzigen Problem gewidmet, nämlich dem der Definition der Wahrheit; sein Wesen besteht darin, dass man — im Hinblick auf diese oder jene Sprache — eine sachlich zutreffende und formal korrekte Definition des Terminus „wahre Aussage“ zu konstruieren hat. Dieses Problem, welches zu den klassischen Fragen der Philosophie gezählt wird, verursacht bedeutende Schwierigkeiten. Obgleich nämlich die Bedeutung des Terminus „wahre Aussage“ in der Umgangssprache recht klar und verständlich zu sein scheint, sind alle Versuche einer genaueren Präzisierung dieser Bedeutung bis nun erfolglos geblieben und manche Untersuchungen, in welchen dieser Terminus verwendet wurde und welche von scheinbar evidenten Prämissen ausgingen, haben oft zu Paradoxien und Antinomien geführt (für welche sich übrigens eine

mehr oder weniger befriedigende Lösung finden liess). Der Begriff der Wahrheit teilte in dieser Hinsicht das Schicksal anderer analoger Begriffe aus dem Gebiete der sog. Semantik der Sprache.

Die Frage, wie dieser oder jener Begriff zu definieren sei, ist erst dann in korrekter Weise gestellt, wenn ein Verzeichnis der Termini gegeben ist, mit deren Hilfe man die geforderte Definition aufbauen will; soll dabei die Definition ihre eigentliche Aufgabe erfüllen, so darf der Sinn der in diesem Verzeichnis enthaltenen Termini keine Zweifel hervorrufen. Es drängt sich also naturgemäss die Frage auf, welche Termini wir bei der Konstruktion der Definition der Wahrheit verwenden wollen. Ich werde nicht unterlassen, dies im weiteren Verlauf unserer Untersuchungen zu klären; jedenfalls werde ich mich bei dieser Konstruktion keines semantischen Begriffes bedienen, wenn es mir nicht vorher gelingt, ihn auf andere Begriffe zurückzuführen.

Eine weitergehende Analyse der im täglichen Leben geläufigen Bedeutung des Terminus „wahr“ wird hier nicht beabsichtigt: jeder Leser besitzt wohl in höherem oder geringerem Grade eine intuitive Kenntnis des Begriffes der Wahrheit und eingehendere Erörterungen darüber kann er in vielen erkenntnistheoretischen Werken finden. Ich möchte nur erwähnen, dass es sich in der ganzen Arbeit ausschliesslich darum handelt, die Intentionen zu erfassen, welche in der sog. „klassischen“ Auffassung der Wahrheit enthalten sind („wahr — mit der Wirklichkeit übereinstimmend“) im Gegensatz z. B. zu der „utilitaristischen“ Auffassung („wahr — in gewisser Hinsicht nützlich“) ¹⁾.

Der Umfang des Begriffes, den wir definieren wollen, hängt im wesentlichen von der Sprache ab, die Gegenstand der Erwägungen ist: derselbe Ausdruck kann in einer Sprache eine wahre, in einer anderen eine falsche Aussage oder ein sinnloser Ausdruck sein. Von einer einzigen allgemeinen Definition des untersuchten Terminus wird hier überhaupt keine Rede sein: das uns interessierende Problem wird in eine Reihe

¹⁾ Vgl. Kotarbiński, S. 126 (ich habe dieses Werk wiederholt bei der Niederschrift der vorliegenden Arbeit zu Rate gezogen und mich in vielen Punkten an die dort festgelegte Terminologie gehalten).

von gesonderten Problemen zerfallen, welche die einzelnen Sprachen betreffen.

Im § 1 bildet die Umgangssprache den Gegenstand unserer Erwägungen. Das Schlussergebnis dieser Erwägungen ist gänzlich negativ: in Bezug auf die Umgangssprache scheint nicht nur die Definition des Wahrheitsbegriffs, sondern sogar sein konsequenter und mit den Gesetzen der Logik übereinstimmender Gebrauch unmöglich.

Im weiteren Verlaufe der Abhandlung werde ich ausschliesslich die einzigen nach wissenschaftlichen Methoden aufgebauten Sprachen in Betracht ziehen, welche heute bekannt sind, d. i. die formalisierten Sprachen der deduktiven Wissenschaften; ihre Charakterisierung wird am Anfange des § 2 gegeben. Es ergibt sich, dass vom Gesichtspunkt des hier betrachteten Problems diese Sprachen im Grossen und Ganzen in zwei grosse Gruppen zerfallen, wobei den Einteilungsgrund der kleinere oder grössere Bestand einer Sprache an grammatischen Formen bildet. In Bezug auf die „ärmeren“ Sprachen findet das Problem der Definition der Wahrheit eine positive Lösung: es gibt eine einheitliche Methode, welche die Konstruktion der geforderten Definition für jede dieser Sprachen gesondert ermöglicht. In den §§ 2 und 3 werde ich diese Konstruktion für eine konkrete Sprache mit aller Genauigkeit ausführen und mir auf diese Weise die im § 4 skizzierte allgemeine Beschreibung der erwähnten Methode erleichtern. Bezüglich der „reichereren“ Sprachen jedoch wird — wie dies aus den Betrachtungen des § 5 folgt — die Lösung unseres Problems negativ sein: für die Sprachen dieser Gruppe werden wir niemals eine korrekte Definition des Wahrheitsbegriffs konstruieren können. Nichtsdestoweniger spricht alles dafür, dass man auch in diesen Fällen — im Gegensatz zur Umgangssprache — einen konsequenten und richtigen Gebrauch dieses Begriffes einführen kann, und zwar so, dass man ihn als Grundbegriff einer besonderen Wissenschaft, nämlich der Theorie der Wahrheit auffasst und seine fundamentalen Eigenschaften auf axiomatischem Wege präzisiert.

Die Untersuchung der formalisierten Sprachen erfordert naturgemäss die Kenntnis der Grundzüge der modernen formalen Logik. Zur Konstruktion der Definition der Wahrheit

sind ausserdem — allerdings in bescheidenem Maasse — gewisse rein mathematische Begriffe und Methoden nötig. Es würde mich freuen, wenn diese Arbeit den Leser überzeugt, dass die genannten Hilfsmittel schon gegenwärtig ein sogar für die Untersuchung rein philosophischer Probleme notwendiges Rüstzeug bilden²⁾.

§ 1. Der Begriff der wahren Aussage in der Umgangssprache.

Zur Einführung des Lesers in den Kreis unserer Untersuchungen erscheint mir eine — wenn auch nur flüchtige — Betrachtung des Problems der Wahrheitsdefinition in Bezug auf die Umgangssprache wünschenswert; ich möchte hier besonders die verschiedenartigen Schwierigkeiten hervorheben, denen die Versuche einer Lösung dieser Aufgabe begegnen³⁾.

Unter den mannigfaltigen Bestrebungen, welche die Konstruktion einer korrekten Definition der Wahrheit für die Aus-

²⁾ Diese Arbeit wurde von J. Łukasiewicz der Gesellschaft der Wissenschaften in Warschau am 21. März 1931 vorgelegt. Die in ihr enthaltenen Ergebnisse stammen zu einem grossen Teil aus dem Jahre 1929; ich habe über dieselben u. a. in zwei Vorträgen berichtet, welche ich u. d. T. „*Ueber den Begriff der Wahrheit in Beziehung auf formalisierte deduktive Systeme*“ in der Logischen Sektion der Philosophischen Gesellschaft in Warschau (8. Oktober 1930) und in der Polnischen Philosophischen Gesellschaft in Lemberg (15. Dezember 1930) gehalten habe und deren Résumé im XII. Band der Zeitschrift „*Ruch Filozoficzny*“ erschienen ist. Aus von mir unabhängigen Gründen hat sich die Drucklegung der Arbeit bedeutend verzögert; dies gestattete mir übrigens den Text durch ziemlich wesentliche Ergebnisse zu ergänzen (vgl. ⁸⁶⁾). In der Zwischenzeit habe ich ein Résumé der Hauptergebnisse in der Mitteilung Tarski₃ veröffentlicht.

³⁾ Die Bemerkungen, die ich in diesem Zusammenhange vorbringen werde, sind zum grössten Teil nicht das Resultat meiner eigenen Untersuchungen; es finden in ihnen die Anschauungen Ausdruck, die St. Leśniewski in seinen Vorlesungen an der Warschauer Universität (vom Studienjahre 1919/20 an), in wissenschaftlichen Diskussionen und in privaten Gesprächen entwickelt hat; insbesondere betrifft dies fast alles, was ich über die Ausdrücke in Anführungszeichen und die semantischen Antinomien sagen werde. Es erübrigt sich vielleicht hinzuzufügen, dass diese Tatsache Leśniewski nicht im geringsten mit der Verantwortung für die skizzenhafte und vielleicht nicht ganz präzise Form belastet, die ich den folgenden Bemerkungen gegeben habe.

sagen der Umgangssprache bezwecken, scheint wohl der Versuch einer semantischen Definition der natürlichste zu sein. Ich meine hier eine Definition, welche man zunächst in folgende Worte kleiden könnte:

(1) *eine wahre Aussage ist eine Aussage, welche besagt, dass die Sachen sich so und so verhalten, und die Sachen verhalten sich eben so und so*⁴⁾.

In Hinsicht auf formale Korrektheit, Klarheit und Eindeutigkeit der in ihr auftretenden Ausdrücke lässt obige Formulierung offenbar viel zu wünschen übrig. Nichtsdestoweniger scheint der anschauliche Sinn und die allgemeine Intention dieser Formulierung recht klar und verständlich zu sein; es wäre eben die Aufgabe einer semantischen Definition, diese Intention zu präzisieren und ihr eine korrekte Form zu geben.

Als Ausgangspunkt drängen sich gewisse Sätze spezielleren Charakters auf, welche als Teildefinitionen der Wahrheit einer Aussage oder richtiger als Erklärungen verschiedener konkreter Redewendungen vom Typus „ x ist eine wahre Aussage“ gelten können. Das allgemeine Schema dieser Art von Sätzen stellt sich folgendermassen dar:

(2) *x ist eine wahre Aussage dann und nur dann, wenn p ; um konkrete Erklärungen zu gewinnen, setzen wir in diesem Schema an Stelle des Symbols „ p “ irgend eine Aussage und an Stelle des „ x “ einen beliebigen Einzelnamen dieser Aussage ein.*

Ist uns für eine Aussage ein Einzelname gegeben, so können wir für ihn eine Erklärung vom Typus (2) konstruieren, falls es uns nur möglich ist, die durch diesen Namen bezeichnete Aussage anzuführen. Die wichtigste und die häufigste Kategorie von Namen, für welche die obige Bedingung erfüllt ist, sind die sog. *Anführungsnamen*; wir bezeichnen nämlich mit diesem Terminus jeden Namen einer Aussage (oder eines beliebigen anderen, sogar sinulosen Ausdrucks), welcher aus Anführungszeichen (dem links- und rechtsseitigen) und dem Ausdruck besteht, der zwischen den Anführungszeichen steht und der

⁴⁾ Ähnliche Formulierungen finden wir bei Kotarbiński, S. 127 und 136, wo sie als Kommentare behandelt werden, die das Wesen der „klassischen“ Auffassung der Wahrheit näher erklären.

eben das durch den betrachteten Namen Bezeichnete ist. Als Beispiel eines solchen Anführungsnamens einer Aussage kann etwa der Name „es schneit“ dienen; die entsprechende Erläuterung vom Typus (2) lautet in diesem Falle:

(3) *„es schneit“ ist eine wahre Aussage dann und nur dann, wenn es schneit*⁵⁾.

Eine andere Kategorie der Einzelnamen von Aussagen, für die wir analoge Erklärungen konstruieren können, bilden die sog. *strukturell-deskriptiven Namen*. So wollen wir solche Namen nennen, welche beschreiben, aus welchen Worten der durch den Namen bezeichnete Ausdruck sowie aus welchen Zeichen jedes einzelne Wort besteht und in welcher Ordnung diese Zeichen und Worte aufeinanderfolgen. Solche Namen kann man ohne Hilfe von Anführungszeichen formu-

⁵⁾ Die Aussagen (Sätze) behandeln wir hier stets als eine bestimmte Art von Ausdrücken, also als sprachliche Gebilde. Wenn man jedoch die Termini „Ausdruck“, „Aussage“ u. s. w. als Namen konkreter Schriftzeichenreihen interpretiert, so erscheinen verschiedene Formulierungen, die in dieser Arbeit enthalten sind, nicht ganz korrekt und erwecken den Anschein eines verbreiteten Fehlers, der in der Identifizierung gleichgestalteter Ausdrücke besteht. Dies betrifft insbesondere die Aussage (3), denn bei obiger Interpretation müssen die Anführungsnamen als allgemeine (und nicht individuelle) Namen behandelt werden, welche sowohl die Zeichenreihe in Anführungszeichen, als auch jede mit ihr gleichgestaltete Zeichenreihe bezeichnen. Um derartige Vorwürfe zu vermeiden und dabei keine überflüssigen Verwicklungen in die Erwägungen einzuführen, die u. a. mit der Notwendigkeit des Gebrauchs des Gleichgestaltigkeitsbegriffs verbunden wären, ist es bequem festzusetzen, dass Termini wie „Wort“, „Ausdruck“, „Aussage“ u. s. w. niemals konkrete Zeichenreihen, sondern ganze Klassen von solchen Zeichenreihen bezeichnen werden, die mit der gegebenen Zeichenreihe gleichgestaltet sind; nur in diesem Sinne werden wir die Anführungsnamen als individuelle Namen von Ausdrücken behandeln. Vgl. hiezu Whitehead-Russell, Vol. I, S. 661–666 und — wenn es sich um andere Interpretationen des Terminus „Aussage“ handelt — Kotarbiński, S. 123–125.

Bei dieser Gelegenheit bemerke ich, dass ich hier die Worte „Name“ und „bezeichnen“ (ähnlich wie die Worte „Gegenstand“, „Klasse“, „Relation“) nicht in einem, sondern in vielen verschiedenen Bedeutungen gebrauche, indem ich sie sowohl auf Gegenstände im engeren Sinne (d. h. auf Individuen), als auch auf aller Art Klassen, Relationen u. s. w. anwende. Vom Gesichtspunkt der in Whitehead-Russell, (Vol. I, S. 39–68) begründeten Typentheorie betrachtet, sollten diese Ausdrücke als „systematisch mehrdeutige“ bezeichnet werden.

lieren. Zu diesem Zwecke muss man in die Sprache, deren man sich bedient, also in diesem Falle in die Umgangssprache, für alle Buchstaben und alle anderen Zeichen, aus welchen die Worte und Ausdrücke der Sprache bestehen, irgendwelche Einzelnamen, die aber keine Anführungsnamen sind, einführen; so z. B. kämen als Namen der Buchstaben „a“, „e“, „f“, „j“, „p“, „x“... die Bezeichnungen „A“, „E“, „Ef“, „Jot“, „Pe“, „Iks“... in Betracht. Es ist klar, dass man nunmehr jedem Anführungsnamen einen strukturell-deskriptiven Namen zuordnen kann, der ohne Anführungszeichen aufgebaut ist und denselben Umfang besitzt (d. i. denselben Ausdruck bezeichnet), und umgekehrt; so entspricht z. B. dem Namen „Schnee“ der Name: „ein Wort, das aus den sechs aufeinander folgenden Buchstaben: Es, Ce, Ha, En, E und E besteht“. Es leuchtet also ein, dass man auch für strukturell-deskriptive Namen von Aussagen Teildefinitionen vom Typus (2) konstruieren kann. Dies ist aus folgendem Beispiele ersichtlich:

(4) *ein Ausdruck, der aus zwei Worten gebildet ist, von denen das erste aus den zwei aufeinander folgenden Buchstaben: E, Es, das zweite aus den sieben aufeinander folgenden Buchstaben: Es, Ce, Ha, En, E, I, Te besteht, ist eine wahre Aussage dann und nur dann, wenn es schneit.*

Sätze, die (3) und (4) analog sind, scheinen evident zu sein und vollkommen mit der Bedeutung des Wortes „wahr“ übereinzustimmen, welche in der Formulierung (1) ihren Ausdruck gefunden hat. Sie erregen auch bezüglich der Klarheit ihres Inhaltes und der Korrektheit ihrer Form im allgemeinen keinen Zweifel (freilich nur unter der Voraussetzung, dass die Aussagen, die wir in (2) für das Symbol „p“ einsetzen, keine derartigen Zweifel erregen).

Hier ist jedoch eine gewisse Einschränkung nötig. Es sind Situationen bekannt, in denen Behauptungen von eben diesem Typus im Verein mit gewissen anderen, intuitiv nicht minder evidenten Prämissen zu einem offenbaren Widerspruch führen, nämlich zu der sog. Antinomie des Lügners. Wir wollen eine möglichst einfache, von J. Łukasiewicz stammende Fassung dieser Antinomie angeben.

Der grösseren Übersichtlichkeit wegen wollen wir uns des Symbols „c“ als typographischer Abkürzung des Ausdrucks

„die auf dieser Seite, Zeile 3 von oben gedruckte Aussage“ bedienen. Beachten wir nun folgende Aussage:

c ist keine wahre Aussage.

Berücksichtigen wir die Bedeutung des Symbols „c“, so können wir auf empirischem Wege feststellen:

(a) *„c ist keine wahre Aussage“ ist mit c identisch.*

Für den Anführungsnamen der Aussage c (oder irgend einen anderen ihrer Einzelnamen) stellen wir ferner eine Erklärung vom Typus (2) auf:

(β) *„c ist keine wahre Aussage“ ist eine wahre Aussage dann und nur dann, wenn c keine wahre Aussage ist.*

Die Prämissen (α) und (β) zusammen ergeben sofort einen Widerspruch:

c ist eine wahre Aussage dann und nur dann, wenn c keine wahre Aussage ist.

Die Quelle dieses Widerspruchs kann man leicht aufdecken: um die Behauptung (β) zu konstruieren, haben wir für das Symbol „p“ in Schema (2) einen Ausdruck eingesetzt, welcher selbst den Terminus „wahre Aussage“ enthält (weshalb die so gewonnene Behauptung — im Gegensatz z. B. zu (3) oder (4) — nicht mehr als Teildefinition der Wahrheit gelten kann). Man kann jedoch keinen vernünftigen Grund angeben, der solche Einsetzungen grundsätzlich verbieten sollte.

Ich beschränke mich hier auf die Formulierung obiger Antinomie und behalte es mir für später vor, die entsprechenden Konsequenzen aus dieser Tatsache zu ziehen. Von dieser Schwierigkeit absehend, versuche ich zunächst eine Definition der wahren Aussage durch Verallgemeinerung der Erklärungen vom Typus (3) zu konstruieren. Auf den ersten Blick kann diese Aufgabe als eine ganz leichte erscheinen — besonders für jemanden, der den Apparat der modernen mathematischen Logik einigermaßen beherrscht. Man könnte meinen, dass man durch die Einsetzung einer beliebigen Aussagevariablen (d. i. eines Symbols, für das man beliebige Aussagen einsetzen kann) in (3) für den zweimal dort auftretenden Ausdruck „es schneit“ und weiterhin durch die Feststellung, dass die so gewonnene Formel für jeden Wert der Variablen gilt, ohne weiteres zu einem Satz gelangt, welcher alle Behauptungen vom Typus (3) als Spezialfälle umfasst:

(5) für ein beliebiges p — „ p “ ist eine wahre Aussage dann und nur dann, wenn p .

Obiger Satz könnte schon aus dem Grunde nicht als allgemeine Definition des Ausdrucks „ x ist eine wahre Aussage“ gelten, weil die Gesamtheit der möglichen Einsetzungen für das Symbol „ x “ hier auf die Anführungsnamen eingeschränkt wurde. Um diese Einschränkung zu beseitigen, müsste man sich auf die bekannte Tatsache berufen, dass jeder wahren Aussage (und überhaupt jeder Aussage) ein Anführungsname entspricht, der eben diese Aussage bezeichnet⁶⁾. Auf Grund dieser Tatsache könnte man eine Verallgemeinerung der Formulierung (5) z. B. auf folgende Weise versuchen:

(6) für ein beliebiges x — x ist eine wahre Aussage dann und nur dann, wenn — für ein gewisses p — x mit „ p “ identisch ist und dabei p .

Auf den ersten Blick würden wir vielleicht geneigt sein, den Satz (6) als korrekte semantische Definition des Ausdrucks „wahre Aussage“ gelten zu lassen, welche auf präzise Weise die Intention der Formulierung (1) realisiert, und sie deshalb als zufriedenstellende Lösung des uns hier interessierenden Problems anzuerkennen. Im Grunde genommen ist jedoch die Sache keineswegs so einfach: sobald wir die Bedeutung der in (5) und (6) auftretenden Anführungsnamen zu analysieren beginnen, bemerken wir eine Reihe von Schwierigkeiten und Gefahren.

Die Anführungsnamen kann man so wie einzelne Worte einer Sprache behandeln, also so wie syntaktisch einfache Ausdrücke; die einzelnen Bestandteile dieser Namen — die Anführungszeichen und die in den Anführungszeichen stehenden Ausdrücke — erfüllen dieselbe Funktion, wie die Buchstaben oder die Komplexe der aufeinanderfolgenden Buchstaben in den einzelnen Worten, sie besitzen also in diesem Zusammenhang keine selbständige Bedeutung. Jeder Anführungsname ist dann ein konstanter Einzelname eines bestimmten Aus-

⁶⁾ Diese Tatsache könnte man z. B. auf folgende Weise formulieren:

(5') für ein beliebiges x — wenn x eine wahre Aussage ist, so ist — für ein gewisses p — x mit „ p “ identisch;
aus den Prämissen (5) und (5') kann man den unten angeführten Satz (6) als Konklusion ableiten.

drucks (nämlich des in Anführungszeichen gefassten Ausdrucks), und zwar ein Name von demselben Charakter wie die Eigennamen der Menschen; so bezeichnet z. B. der Name „ p “ einen der Buchstaben des Alphabets. Bei dieser Interpretation, welche nb. die natürlichste zu sein und der gewöhnlichen Gebrauchsweise der Anführungszeichen vollkommen zu entsprechen scheint, sind Teildefinitionen vom Typus (3) für irgend welche vernünftige Verallgemeinerungen nicht verwendbar. Keineswegs kann die Aussage (5) bzw. (6) als eine solche Verallgemeinerung gelten: bei Anwendung der sog. Einsetzungsregel auf (5) haben wir nämlich kein Recht, irgend etwas für den Buchstaben „ p “, welcher als Bestandteil eines Anführungsnamens auftritt, einzusetzen (so wie es uns nicht erlaubt ist, irgend etwas für den Buchstaben „ w “ in dem Worte „wahre“ einzusetzen). Daher erhalten wir als Konklusion nicht (3), sondern folgende Aussage: „ p “ ist eine wahre Aussage dann und nur dann, wenn es schneit. Man ersieht bereits hieraus, dass die Aussagen (5) und (6) keine Formulierungen jener Gedanken sind, die wir ausdrücken möchten, und dass sie sogar offenbar unsinnig sind. Die Aussage (5) führt sogar sofort zu einem Widerspruch, denn man kann aus ihr, neben der oben angegebenen Konsequenz, ebenso leicht die ihr widersprechende Konsequenz ableiten: „ p “ ist eine wahre Aussage dann und nur dann, wenn es nicht schneit. Die Aussage (6) allein führt zwar zu keinem Widerspruch, es folgt aber aus ihr der offenbar widersinnige Schluss, wonach der Buchstabe „ p “ die einzige wahre Aussage wäre.

Um obigen Betrachtungen grössere Klarheit zu verleihen, wollen wir die Bemerkung hinzufügen, dass man bei dieser Auffassung der Anführungsnamen dieselben überhaupt aus der Sprache eliminieren und sie überall z. B. durch entsprechende strukturell-deskriptive Namen ersetzen kann. Wenn wir jedoch die für solche Namen konstruierten Erklärungen vom Typus (2), z. B. die Erklärung (4) betrachten, so sehen wir keinen Weg, der zur Verallgemeinerung dieser Erklärungen führt; ersetzen wir andererseits in (5) oder (6) den Anführungsnamen „ p “ durch den umfangsgleichen strukturell-deskriptiven Namen „ Pe “ (bzw. „das Wort, das aus dem einzigen Buchstaben Pe besteht“), so wird der Widersinn der so erhaltenen Formulierungen sofort in die Augen springen.

Um den Sinn der Sätze (5) und (6) zu retten, müssen wir zu einer ganz anderen Interpretation der Anführungsnamen greifen. Diese Namen müssen wir schon als syntaktisch zusammengesetzte Ausdrücke behandeln, deren syntaktische Bestandteile sowohl die Anführungszeichen wie auch die darin stehenden Ausdrücke sind. Nicht alle Anführungsausdrücke sind dann konstante Namen: der in (5) und (6) auftretende Ausdruck „ p “ muss z. B. als Funktion angesehen werden, deren Argument eine Aussagevariable ist und deren Werte konstante Anführungsnamen von Aussagen sind; eine solche Funktion wollen wir als Anführungsfunktion bezeichnen. Die Anführungszeichen werden so zu selbständigen Worten aus dem Gebiete der Semantik, die der Bedeutung nach dem Worte „Name“ nahe stehen und in syntaktischer Hinsicht die Rolle von Funktoren spielen⁷⁾. Es entstehen dann neue Komplikationen. Der Sinn der Anführungsfunktion und der Anführungszeichen selbst ist nicht genügend klar. Jedenfalls sind es keine extensionalen Funktoren: die Aussage „für beliebige p und q — ist p dann und nur dann, wenn q , so ist „ p “ identisch mit „ q “ steht ohne Zweifel in krassem Widerspruch zur üblichen Verwendungsweise der Anführungszeichen. Schon aus diesem Grunde würde die Definition (6) für Alle unannehmbar sein, die konsequent den Gebrauch intensionaler Funktoren vermeiden wollen und sogar der Meinung sind, eine tiefere Analyse mache es unmöglich, solchen Funktoren irgend welchen präzisen Sinn zuzuschreiben⁸⁾. Der Gebrauch der Anführungsfunktion setzt uns ferner der Gefahr aus, in verschiedene semantische Anti-

⁷⁾ Funktoren nennen wir solche Worte wie „liest“ in dem Ausdruck „ x liest“ (ein aussagebildender Funktor mit einem Individuennamen als Argument), „sieht“ in dem Ausdruck „ x sieht y “ (ein aussagebildender Funktor mit zwei Namenargumenten), „Vater“ in dem Ausdruck „der Vater des x “ (ein namenbildender Funktor mit einem Namenargument), „oder“ in dem Ausdruck „ p oder q “ (ein aussagebildender Funktor mit zwei Aussageargumenten); die Anführungszeichen sind ein Beispiel für einen namenbildenden Funktor mit einem Aussageargument. Der Terminus „Funktore“ stammt von T. Kotarbiński, die Termini „aussagebildender Funktor“ und „namenbildender Funktor“ — von K. Ajdukiewicz; vgl. Ajdukiewicz₂, S. 16 und 147.

⁸⁾ Das schwierige Problem der Extensionalität werde ich hier nicht näher besprechen; vgl. zu dieser Frage Carnap₁, wo die Literatur des

nomien, z. B. in die Antinomie des Lügners verwickelt zu werden. Das gilt sogar für den Fall, dass wir — weitgehende Vorsicht walten lassend — nur von den fast evident scheinenden Eigenschaften der besprochenen Funktionen Gebrauch machen. Im Gegensatz nämlich zu derjenigen Fassung der Antinomie des Lügners, die wir oben kennen gelernt haben, kann man die betrachtete Antinomie ganz ohne Anwendung des Ausdrucks „wahre Aussage“ formulieren, indem man die Anführungsfunktionen mit variablem Argument einführt. Eine Skizze dieser Formulierung soll angegeben werden.

Das Symbol „ c “ sei eine typographische Abkürzung des Ausdrucks „die auf dieser Seite, Zeilen 14 und 15 von oben gedruckte Aussage“. Wir nehmen folgende Aussage in Betracht:

für ein beliebiges p — ist c mit der Aussage „ p “ identisch, so nicht p

(falls wir (6) als Definition der Wahrheit annehmen, so besagt obige Aussage, dass c keine wahre Aussage sei).

Wir stellen empirisch fest:

(α) die Aussage „für beliebiges p — ist c mit der Aussage „ p “ identisch, so nicht p “ ist mit c identisch.

Ausserdem machen wir nur eine einzige ergänzende Voraussetzung, welche sich auf die Anführungsfunktion bezieht und keinen Zweifel zu erregen scheint:

(β) für beliebige p und q — ist die Aussage „ p “ mit der Aussage „ q “ identisch, so p dann und nur dann, wenn q .

Aus den Prämissen (α) und (β) leiten wir mit Hilfe elementarer Gesetze der Logik leicht einen Widerspruch ab.

Nur nebenbei möchte ich noch auf andere Gefahren aufmerksam machen, denen uns die konsequente Anwendung obiger Interpretation der Anführungszeichen aussetzt — nämlich auf die Mehrdeutigkeit gewisser Ausdrücke [so muss z. B. der Anführungsausdruck, welcher in (5) und (6) auftritt, in gewissen Situationen als Funktion mit veränderlichem Argument betrachtet werden, in anderen dagegen ist er ein konstanter

Problems angegeben ist, und besonders Whitehead-Russell₁ Vol. I, S. 659–666. Man muss beachten, dass man mit den Termini „extensional“ und „intensional“ gewöhnlich die aussagebildenden Funktoren bezeichnet, während sie im Texte auf die Anführungszeichen, also auf namenbildende Funktoren angewendet werden.

Name, welcher einen Buchstaben des Alphabets bezeichnet]; ferner auf die Notwendigkeit, gewisse sprachliche Konstruktionen zuzulassen, deren Übereinstimmung mit den Grundgesetzen der Syntax mindestens zweifelhaft ist, z. B. sinnvolle Ausdrücke, welche als syntaktische Bestandteile sinnlose Ausdrücke enthalten (als Beispiel kann jeder Anführungsname eines sinnlosen Ausdrucks dienen). — Aus allen diesen Gründen scheint sogar bei der neuen Auffassung der Anführungszeichen die Korrektheit der Definition (6) stark erschüttert zu sein.

Die bisherigen Erwägungen berechtigen uns jedenfalls zur Feststellung, dass der Versuch, eine korrekte semantische Definition des Ausdrucks „wahre Aussage“ aufzubauen, auf wesentliche Schwierigkeiten stösst. Wir kennen nicht einmal eine allgemeine Methode, die es uns gestatten würde, die Bedeutung eines beliebigen konkreten Ausdrucks vom Typus „ x ist eine wahre Aussage“, wo an Stelle von „ x “ irgend ein Einzelname einer Aussage steht, zu präzisieren. Die an den Beispielen (3) und (4) illustrierte Methode lässt uns in solchen Situationen im Stich, in welchen wir für einen gegebenen Namen einer Aussage nicht die durch diesen Namen bezeichnete Aussage aufzeigen können (als Beispiel eines solchen Namens kann z. B. „die erste Aussage, welche im Jahre 2000 gedruckt sein wird“ dienen); wollten wir aber in einem solchen Falle zu der Konstruktion, die bei der Formulierung der Definition (6) verwendet wurde, Zuflucht nehmen, so würden wir uns allen den Verwicklungen aussetzen, von denen oben die Rede war.

In dieser Sachlage drängt sich der Gedanke auf, bei der Lösung unseres Problems zu anderen Methoden zu greifen. Ich will hier nur auf einen derartigen Versuch aufmerksam machen, nämlich auf den Versuch, eine strukturelle Definition zu konstruieren. Das allgemeine Schema dieser Definition würde sich annähernd folgendermassen darstellen: *eine wahre Aussage ist eine Aussage, welche die und die strukturellen Eigenschaften* (d. i. Eigenschaften, welche die Gestalt und Aufeinanderfolge der einzelnen Bestandteile des Ausdrucks betreffen) *besitzt oder welche man aus so und so strukturell beschriebenen Ausdrücken mit Hilfe der und der strukturellen*

Umformungen gewinnen kann. Als Ausgangspunkt können hier zahlreiche aus der formalen Logik geschöpfte Gesetze dienen, welche aus gewissen strukturellen Eigenschaften der Aussage auf ihre Wahrheit bzw. Unwahrheit oder aus der Wahrheit bzw. Unwahrheit gewisser Aussagen auf analoge Eigenschaften anderer Aussagen, die man aus den gegebenen Aussagen mit Hilfe dieser oder jener strukturellen Umformungen erhalten kann, zu schliessen gestatten. Hier einige triviale Beispiele solcher Gesetze: *jeder Ausdruck, der aus vier Teilen besteht, von denen den ersten das Wort „wenn“, den dritten das Wort „so“, den zweiten und den vierten dieselbe Aussage bildet, ist eine wahre Aussage; wenn eine wahre Aussage aus vier Teilen besteht, von denen den ersten das Wort „wenn“, den zweiten eine wahre Aussage, den dritten das Wort „so“ bildet, so ist auch der vierte Teil eine wahre Aussage.* Solche Gesetze (besonders vom zweiten Typus) haben eine grosse Tragweite: mit ihrer Hilfe kann man z. B. jede fragmentarische Definition der Wahrheit, deren Umfang eine beliebige Kategorie von Aussagen umfasst, auf alle zusammengesetzten Aussagen ausdehnen, die man aus Aussagen der gegebenen Kategorie durch ihre Verbindung mittels solcher Ausdrücke, wie „wenn...“, „so“, „dann und nur dann, wenn“, „oder“, „und“, „nicht“ — kurz gesagt, mittels der zum Gebiete des sog. Aussagenkalküls (Theorie der Deduktion) gehörenden Ausdrücke — aufbauen kann. Dies führt auf die Idee, genügend viele, genügend starke und allgemeine Gesetze von der erwähnten Art aufzustellen, so dass jede Aussage unter eines dieser Gesetze fallen müsste; auf diese Weise würde man eine allgemeine strukturelle Definition einer wahren Aussage erreichen. Auch dieser Weg scheint jedoch fast aussichtslos, wenigstens in Bezug auf die Umgangssprache. Die Umgangssprache ist nichts „Fertiges“, Abgeschlossenes, durch deutliche Grenzen Umrissenes; es steht nicht fest, welche Worte man zu dieser Sprache hinzufügen kann, welche also im gewissen Sinne ihr schon „potentiell“ angehören; wir sind nicht imstande, unter den Ausdrücken der Sprache diejenigen, welche wir Aussagen nennen, strukturell zu bestimmen; umso weniger aber können wir unter allen Aussagen die wahren charakterisieren. Der Versuch, eine strukturelle Definition des Terminus „wahre Aussage“ aufzu-

bauen, stösst — auf die Umgangssprache angewendet — auf Schwierigkeiten, die wir nicht überwinden können.

Das Scheitern der bisherigen Versuche führt von selbst auf die Vermutung, dass das hier betrachtete Problem sich überhaupt nicht in befriedigender Weise lösen lässt. Man kann sich tatsächlich auf gewichtige Argumente allgemeiner Natur berufen, welche diese Vermutung nahelegen und welche ich hier nur kurz besprechen werde.

Ein charakteristisches Merkmal der Umgangssprache (im Gegensatz zu verschiedenen wissenschaftlichen Sprachen) ist ihr Universalismus: es wäre mit dem Geiste dieser Sprache unvereinbar, wenn in irgend einer anderen Sprache Worte oder Ausdrücke auftreten würden, die man nicht in die Umgangssprache übersetzen könnte; „wenn man überhaupt über irgend etwas sinnvoll sprechen kann, so kann man darüber auch in der Umgangssprache sprechen“. Dieser universalistischen Tendenz der Umgangssprache in Bezug auf semantische Untersuchungen folgend, müssen wir konsequenterweise in die Sprache neben ihren beliebigen Aussagen und anderen Ausdrücken auch die Namen dieser Aussagen und Ausdrücke, weiterhin die Aussagen, welche diese Namen enthalten, ebenso solche semantische Ausdrücke wie „wahre Aussage“, „Name“, „bezeichnen“ u. s. w. aufnehmen. Andererseits ist eben dieser Universalismus der Umgangssprache im Gebiete der Semantik vermutlich die wesentliche Quelle aller sog. semantischen Antinomien, wie der Antinomie des Lügners oder der heterologischen Worte; diese Antinomien scheinen einfach ein Beweis dafür zu sein, dass sich auf dem Boden jeder Sprache, welche im obigen Sinne universal wäre und für welche hiebei die normalen Gesetze der Logik gelten sollten, ein Widerspruch ergeben muss. Dies betrifft besonders jene Formulierung der Antinomie des Lügners, welche ich Seite [10] und [11] angegeben habe und welche keine Anführungsfunction mit variablem Argument enthält. Wenn wir nämlich die Antinomie in obiger Formulierung analysieren, so gewinnen wir die Überzeugung, dass keine widerspruchsfreie Sprache existieren kann, für welche die gewöhnlichen Gesetze der Logik gelten und die zugleich folgende Bedingungen erfüllt: (I) neben einer belie-

bigen Aussage, welche in der Sprache auftritt, gehört auch ein gewisser Einzelname dieser Aussage zur Sprache; (II) jeder Ausdruck, der aus (2) durch Ersetzung des Symbols „ p “ durch eine beliebige Aussage der Sprache und des Symbols „ x “ — durch einen Einzelnamen dieser Aussage entsteht, soll als wahre Aussage dieser Sprache anerkannt werden; (III) in der betrachteten Sprache lässt sich eine empirisch begründete und mit (α) gleichbedeutende Prämisse formulieren und als eine wahre Aussage anerkennen⁹⁾.

Sind obige Bemerkungen richtig, so scheint selbst die Möglichkeit eines konsequenten und dabei mit den Grundsätzen der Logik und dem Geiste der Umgangssprache übereinstimmenden Gebrauchs des Ausdrucks „wahre Aussage“ und, was daraus folgt, die Möglichkeit des Aufbaus irgend welcher korrekten Definition dieses Ausdrucks sehr in Frage gestellt.

§ 2. Formalisierte Sprachen, insbesondere die Sprache des Klassenkalküls.

Den Versuch einer Lösung des besprochenen Problems in Bezug auf die Umgangssprache gebe ich also aus den im § 1 dargelegten Gründen auf und beschränke mich im weiteren Verlaufe der Untersuchung ausschliesslich auf die formalisierten Sprachen¹⁰⁾. Ich könnte sie ungefähr als solche (künstlich konstruierte) Sprachen charakterisieren, in denen

⁹⁾ Die Antinomie der heterologischen Worte (die ich hier nicht darstellen werde — vgl. Grelling-Nelson, S. 307) übertrifft die Antinomie des Lügners insoweit an Einfachkeit, als in ihrer Formulierung keine empirische Prämisse auftritt, die (α) analog wäre; sie führt auch zu einer entsprechend stärkeren Schlussfolgerung: es kann keine widerspruchsfreie Sprache geben, welche die üblichen Gesetze der Logik beibehält und zwei gewisse Bedingungen erfüllt, die (I) und (II) analog sind, sich aber von jenen dadurch unterscheiden, dass in ihnen nicht von Aussagen, sondern von Namen und nicht von der Wahrheit der Aussagen, sondern von der Relation des Bezeichnens die Rede ist.

¹⁰⁾ Die für formalisierte Sprachen gewonnenen Ergebnisse haben auch in Bezug auf die Umgangssprache eine gewisse Geltung und zwar dank dem Universalismus der letzteren: indem wir eine beliebige Definition einer wahren Aussage, die für diese oder jene formalisierte Sprache

der Sinn jedes Ausdrucks durch seine Gestalt eindeutig bestimmt ist. Ohne eine völlig erschöpfende und präzise Beschreibung zu versuchen, die wohl mit grossen Schwierigkeiten zu kämpfen hätte, werde ich hier auf einige wesentliche Eigenschaften aufmerksam machen, welche die aktuell bekannten formalisierten Sprachen besitzen. Und zwar: (α) für jede dieser Sprachen gibt man an oder beschreibt (strukturell) sämtliche Zeichen, aus denen die Ausdrücke der Sprache gebildet sind; (β) unter allen möglichen Ausdrücken, die aus diesen Zeichen gebildet werden können, sondert man mit Hilfe rein struktureller Eigenschaften diejenigen aus, die als Aussagen bezeichnet werden. Ferner konstruiert man die formalisierten Sprachen, wenigstens bis jetzt, ausschliesslich zu dem Zwecke, um auf ihrem Boden formalisierte deduktive Wissenschaften zu betreiben; die Sprache wächst mit der Wissenschaft zu einem Ganzen zusammen, so dass man von der Sprache dieser oder jener formalisierten deduktiven Wissenschaft spricht, anstatt von dieser oder jener formalisierten Sprache zu reden. Darum treten, im Zusammenhang mit der Art, wie deduktive Wissenschaften aufgebaut werden, weitere charakteristische Eigenschaften der formalisierten Sprachen auf. Und zwar: (γ) gibt man an oder beschreibt strukturell eine Kategorie von Aussagen, welche man Axiome oder Grundsätze nennt; (δ) in speziellen Regeln, den sog. Schlussregeln, hebt man gewisse Operationen von strukturellem Charakter hervor, welche die Umformung von Aussagen in andere Aussagen ermöglichen, wobei die Aussagen, welche man aus gegebenen Aussagen durch ein- oder mehrmalige Anwendung dieser Operationen gewinnen kann, Folgerungen aus den gegebenen Aussagen genannt werden; insbesondere werden die Folgerungen aus den Axiomen als beweisbare oder anerkannte Sätze bezeichnet¹¹⁾.

konstruiert wurde, in die Umgangssprache übersetzen, erhalten wir eine fragmentarische Definition der Wahrheit, welche eine weitere oder engere Kategorie von Aussagen umfasst.

¹¹⁾ Die Formalisierung einer Wissenschaft lässt gewöhnlich die Möglichkeit der Einführung neuer Zeichen in die Wissenschaft zu, die anfangs explizite nicht angegeben worden sind. Diese Zeichen — definierte Zeichen genannt (im Gegensatz zu den Grundzeichen) — erscheinen zum ersten Mal in der Wissenschaft in Ausdrücken von spezieller Struktur, den sog. Definitionen, welche man auf Grund besonderer Regeln —

Es erübrigt sich vielleicht hinzuzufügen, dass uns hier „formale“ Sprachen und Wissenschaften in einem besonderen Sinne des Wortes „formal“ gar nicht interessieren, nämlich solche Wissenschaften, deren Zeichen und Ausdrücken kein inhaltlicher Sinn zukommt. Für solche Wissenschaften verliert das hier besprochene Problem jede Relevanz, ja es wird hier geradezu unverständlich. Den Zeichen, die in den hier betrachteten Sprachen auftreten, schreiben wir immer ganz konkrete und für uns verständliche Bedeutungen zu¹²⁾. Die Ausdrücke, die wir Aussagen nennen, bleiben Aussagen auch nach der Übersetzung der in ihnen auftretenden Zeichen in die Umgangssprache; Aussagen, die als Axiome ausgezeichnet wurden, scheinen uns inhaltlich wahr zu sein; bei der Wahl der Schlussregeln leitet uns stets das Prinzip, dass man auf Grund dieser Regeln, wenn sie auf wahre Aussagen angewendet werden, zu neuen wahren Aussagen gelangen soll¹³⁾.

Im Gegensatz zur Umgangssprache besitzen die formalisierten Sprachen keineswegs den universalistischen Charakter, von dem am Ende des vorigen Paragraphen die Rede war. Insbesondere enthält der grösste Teil dieser Sprachen überhaupt keine Termini aus dem Gebiete der Lehre von der Sprache, also z. B. keine Ausdrücke, die Zeichen und Ausdrücke derselben oder einer anderen Sprache bezeichnen oder die zwischen ihnen bestehende Strukturzusammenhänge beschreiben (solche Ausdrücke werde ich in Ermangelung eines besseren Terminus strukturell-deskriptive nennen). Darum müssen wir immer, wenn wir die Sprache einer formalisierten deduktiven Wissenschaft untersuchen, zwischen der Sprache,

der Definitionsregeln — konstruiert. Die Definitionen werden manchmal als anerkannte Sätze der Wissenschaft betrachtet. Dieses Moment der Formalisierung einer Sprache werde ich im weiteren Verlaufe nicht in Betracht ziehen.

¹²⁾ Genau genommen betrifft dies einzig die sog. Konstanten. Variable und technische Zeichen (wie Klammern, Punkte u. s. w.) besitzen keine selbständige Bedeutung; sie üben dagegen einen wesentlichen Einfluss auf die Bedeutung der Ausdrücke aus, deren Bestandteile sie sind.

¹³⁾ Schliesslich werden die Definitionen so konstruiert, dass sie die Bedeutung der Zeichen, welche in die Sprache eingeführt werden, mit Hilfe von Grundzeichen und bereits definierten Zeichen erläutern oder bestimmen (vgl. 11).

von der wir sprechen, und der Sprache, in der wir sprechen, sowie auch zwischen der Wissenschaft, die Gegenstand der Betrachtung ist, und der Wissenschaft, in der die Betrachtung angestellt wird, deutlich unterscheiden. Die Namen der Ausdrücke der ersten Sprache und der zwischen ihnen bestehenden Relationen gehören schon zu der zweiten Sprache, der sog. *Metasprache* (welche übrigens die Grundsprache als Fragment enthalten kann); die Beschreibung dieser Ausdrücke, die Definition der komplizierteren — und zwar besonders der mit dem Aufbau einer deduktiven Wissenschaft verknüpften — Begriffe (wie des Begriffs der Folgerung, des beweisbaren Satzes, ev. der wahren Aussage), die Bestimmung der Eigenschaften dieser Begriffe ist schon die Aufgabe der zweiten Wissenschaft, die als *Metawissenschaft* bezeichnet wird.

Für eine recht umfangreiche Gruppe von formalisierten Sprachen kann man eine Methode angeben, welche die Konstruktion korrekter Definitionen der wahren Aussage für jede einzelne dieser Sprachen ermöglicht. Die allgemeine, abstrakte Beschreibung dieser Methode und der Sprachen, auf welche sie Anwendung findet, würde recht beschwerlich und nicht besonders übersichtlich sein. Ich ziehe es daher vor, den Leser auf einem anderen Wege mit dieser Methode bekannt zu machen: ich werde nämlich eine Definition dieser Art in Bezug auf eine ganz konkrete Sprache bilden und zugleich ihre wichtigsten Konsequenzen darlegen; die Fingerzeige, die ich sodann im § 4 dieser Arbeit geben werde, werden — so glaube ich — in hinreichendem Maasse belehren, wie man die an diesem Beispiele veranschaulichte Konstruktionsmethode auf andere Sprachen von einem ähnlichen logischen Bau anwenden kann.

Als Objekt meiner Betrachtungen wähle ich die Sprache einer äusserst einfachen und dem Leser sicherlich gut bekannten deduktiven Wissenschaft, nämlich des *Klassenkalküls*. Der *Klassenkalkül* ist — wie bekannt — ein Teilstück der mathematischen Logik und kann als eine der Interpretationen einer „formalen“ Wissenschaft, die gewöhnlich *Algebra der Logik* genannt wird, aufgefasst werden¹⁴⁾.

¹⁴⁾ Vgl. Schröder, I. Bd. (besonders S. 160—163) und Whitehead-Russell, Vol. I, S. 205—212.

Unter den Zeichen, aus denen die Ausdrücke der betrachteten Sprache bestehen, unterscheide ich zwei Arten: *Konstante* und *Variable*¹⁵⁾. Ich führe nur vier Konstante ein: das Negationszeichen „N“, das Zeichen der logischen Summe (Alternative, Disjunktion) „A“, das Allzeichen „I“ und endlich das Inklusionszeichen „I“¹⁶⁾. Diese Zeichen, betrachte ich als beziehungsweise gleichbedeutend mit den Ausdrücken der Umgangssprache „nicht“, „oder“, „für ein beliebiges“ (in dem Sinne, in welchem dieser Ausdruck z. B. in Aussage (6) des § 1 verwendet wurde) und „ist in... enthalten“. Als Variable könnte man prinzipiell ganz beliebige Symbole verwenden, wenn nur ihre Anzahl nicht im Vorhinein begrenzt ist und wenn sie ihrer Gestalt nach sich von den Konstanten unterscheiden. Für den weiteren Verlauf der Betrachtungen ist jedoch die genaue Angabe der Gestalt dieser Zeichen, und zwar in solcher Weise, dass man diese Zeichen leicht in eine Folge anordnen (abzählen) kann, technisch wichtig. Ich verwende also hier als Variable ausschliesslich solche Symbole wie „x“, „x,“, „x,,“, und analoge Zeichen, die aus

¹⁵⁾ Dagegen vermeide ich es, indem ich mir eine Bemerkung von Łukasiewicz nutzbar mache, hier in die Sprache irgend welche technische Zeichen (wie Klammern, Punkte u. s. w.) einzuführen, und dies hauptsächlich dank dem Umstande, dass ich in jedem sinnvollen Ausdruck die Funktoren stets vor die Argumente stelle; vgl. Łukasiewicz, insbesondere S. V u. 40.

¹⁶⁾ In dem *Klassenkalkül* treten gewöhnlich noch viele andere Konstante auf, z. B. das Existenzzeichen, die Zeichen der Implikation, des logischen Produkts (der Konjunktion), der Äquivalenz, der Gleichheit sowie des Komplements, der Summe und des Produkts von Klassen¹⁴⁾; darum lässt sich in der betrachteten Sprache — formal genommen — nur ein Bruchstück des *Klassenkalküls* begründen. Es ist aber zu bemerken, dass alle Konstanten des *Klassenkalküls* in diese Sprache als definierte Termini eingehen könnten, wenn wir die Formalisierung der Sprache vervollständigten, indem wir die Einführung neuer Zeichen mit Hilfe von Definitionen¹¹⁾ ermöglichten; dank diesem Umstande genügt schon unsere fragmentarische Sprache, um jeden Gedanken auszudrücken, der in der vollständigen Sprache der betrachteten Wissenschaft formuliert werden kann. — Ich bemerke noch, dass man aus der betrachteten Sprache sogar das Zeichen der Inklusion „I“ eliminieren kann, indem man die Ausdrücke vom Typus „xy“ (wo anstatt „x“ und „y“ beliebige Variable auftreten) so interpretiert, wie wir im weiteren Verlauf den Ausdruck „Ixy“ interpretieren werden.

dem Symbol „ x “ und einer Anzahl kleiner, unten angefügter Striche bestehen. Das Zeichen, welches k kleine unten angefügte Striche enthält (wo k eine beliebige natürliche, von 0 verschiedene Zahl ist), soll Variable k^{ter} Gestalt heissen. In der inhaltlichen Interpretation der Sprache, die ich hier stets im Auge habe, repräsentieren die Variablen immer Namen von Klassen von Individuen. Als Ausdrücke der Sprache treten teils einzelne Konstante und Variable, teils Komplexe solcher aufeinanderfolgenden Zeichen auf, z. B. „ $x, Nx, ,$ “, „ $NIx, x, ,$ “, „ $AIx, x, ,Ix, x, ,$ “, „ $Ix, ,$ “, „ $IIx, Ix, ,x, , ,$ “, „ $Ix, ,x, , ,$ “ u. s. w. Ausdrücke vom Typus „ Np “, „ Apq “, „ $IIxp$ “ und „ Ixy “, wo an Stelle von „ p “ und „ q “ beliebige Aussagen oder Aussagefunktionen (die Bedeutung dieser Termini wird unten erklärt werden) und an Stelle von „ x “ und „ y “ beliebige Variable auftreten, lesen wir beziehungsweise: „nicht p “ oder „es ist nicht wahr, dass p “¹⁷⁾, „ p oder q “, „für eine beliebige Klasse $x-p$ “ und „die Klasse x ist in der Klasse y enthalten“. Von zusammengesetzten Ausdrücken, d. i. solchen, die keine Zeichen sind, kann man behaupten, dass sie aus zwei oder mehreren anderen, einfacheren Ausdrücken bestehen; so besteht z. B. der Ausdruck „ $NIx, x, ,$ “ aus den zwei aufeinanderfolgenden Ausdrücken „ N “ und „ $Ix, x, ,$ “ oder aus den Ausdrücken „ NI “, und „ $x, x, ,$ “ oder endlich aus den Ausdrücken „ $NIx, ,$ “ und „ $x, ,$ “.

Das eigentliche Gebiet der folgenden Betrachtungen wird freilich nicht die Sprache des Klassenkalküls selbst, sondern die ihr entsprechende Metasprache sein; unsere Untersuchungen gehören zu dem auf dem Boden dieser Metasprache entwickelten „Metaklassenkalkül“. Hieraus entspringt das Bedürfnis, den Leser — wenn auch nur flüchtig — mit der Struktur der Metasprache und der Metawissenschaft bekannt zu machen. Ich beschränke mich hier auf die zwei wichtigsten Momente, nämlich auf die Aufzählung aller der Zeichen und Ausdrücke, von denen ich in der Metasprache Gebrauch machen

¹⁷⁾ Aus stilistischen Gründen gebrauchen wir manchmal anstatt des Wortes „nicht“ den Ausdruck „es ist nicht wahr, dass“, wobei wir diesen ganzen Ausdruck als ein einzelnes Wort behandeln, ohne seinen einzelnen Teilen und insbesondere dem in ihm auftretenden Worte „wahr“ irgendwelche selbständige Bedeutung zuzuschreiben.

werde, ohne ihre Bedeutung im Verlaufe der Untersuchung näher zu erklären, und auf die Aufstellung eines Systems der Axiome, welche zur Grundlegung der Metawissenschaft oder wenigstens zur Begründung der in dieser Arbeit enthaltenen Ergebnisse genügen. Diese beiden Momente stehen in inniger Verbindung mit dem fundamentalen Problem unserer Untersuchungen: würden wir sie nicht berücksichtigen, so könnten wir weder sinnvoll behaupten, dass es uns gelungen sei, irgend einen Begriff auf dem Boden der Metasprache korrekt definiert zu haben, noch dass die konstruierte Definition diese oder jene Konsequenzen besitze. Ich will dagegen hier gar nicht versuchen, der Metawissenschaft den Charakter einer streng formalisierten deduktiven Wissenschaft zu verleihen. Ich begnüge mich einzig mit der Bemerkung, dass — ausser den zwei angeführten Momenten — der Prozess der Formalisierung der Metawissenschaft keine spezifische Eigenart aufweist; insbesondere unterscheiden sich die Schluss- und Definitionsregeln in nichts von den Regeln, die beim Aufbau anderer formalisierter deduktiver Wissenschaften Anwendung finden.

Unter den Ausdrücken der Metasprache kann man zwei Kategorien unterscheiden. Die erste Kategorie bilden Ausdrücke von allgemein-logischem Charakter, die aus irgend einem genügend ausgebauten System der mathematischen Logik geschöpft sind¹⁸⁾; man könnte sie in Grundausdrücke und definierte Ausdrücke einteilen, dies wäre jedoch in diesem Zusammenhange ganz zwecklos. Wir werden hier in erster Reihe die Ausdrücke wiederfinden, welche mit den Konstanten der von uns betrachteten Wissenschaft gleichbedeutend sind, also „nicht“ bzw. „es ist nicht wahr, dass“¹⁷⁾, „oder“, „für ein beliebiges“ und „ist in... enthalten“ — symbolisch „ \subset “. Diesem Umstand ist es zuzuschreiben, dass wir jeden Ausdruck der Sprache in die

¹⁸⁾ Z. B. aus dem Werke Whitehead-Russell (ich beabsichtige hier jedoch keineswegs irgend eine spezielle logische Symbolik anzuwenden und werde — ausser den Ausnahmen, die ich explicite angeben werde, — Ausdrücke der Umgangssprache gebrauchen). Über die Bedeutung der unten angegebenen allgemein-logischen Ausdrücke informiert auch Carnap.

Metasprache übersetzen können; so bildet z. B. die Aussage „für jedes a (bzw. für jede beliebige Klasse a) — $a \subset a$ “ die Übersetzung des Ausdrucks „ $\forall x, Ix, x, x$ “. Zu derselben Kategorie gehört weiterhin eine Reihe analoger Ausdrücke aus dem Gebiete des Aussagenkalküls, des Funktionenkalküls (Theorie der scheinbaren Variablen) und des Klassenkalküls, z. B. „wenn... so“, „und“, „dann und nur dann, wenn“, „für ein gewisses x “ (oder „es gibt ein solches x , dass...“), „ist nicht in... enthalten“ — symbolisch „ \supset “, „ist mit... identisch“ — symbolisch „ $=$ “, „ist von... verschieden“ — symbolisch „ \neq “, „ist ein Element“ — symbolisch „ \in “, „ist kein Element“ — symbolisch „ $\bar{\in}$ “, „Individuum“, „Klasse“, „leere Klasse“, „Klasse aller solchen x , dass“ u. s. w. Ferner finden wir hier manche Ausdrücke aus dem Bereich der Gleichmächtigkeits- theorie und der Arithmetik der Kardinalzahlen, z. B. „endliche Klasse“, „unendliche Klasse“, „Mächtigkeit einer Klasse“, „Kardinalzahl“, „natürliche Zahl“ (oder „endliche Kardinalzahl“), „unendliche Kardinalzahl“, „0“, „1“, „2“, „ $<$ “, „ $>$ “, „ \leq “, „ \geq “, „+“, „-“... Ich werde endlich mancher Termini aus der Logik der Relationen bedürfen. Die Klasse aller der Gegenstände x , denen wenigstens ein Gegenstand y derart entspricht, dass xRy (d. i. dass zwischen x und y die Relation R besteht), wird — wie bekannt — Bereich der zweigliedrigen Relation R genannt; analog wird Gegenbereich der Relation R die Klasse aller der Gegenstände y genannt, für welche es wenigstens einen Gegenstand x gibt, derart dass xRy . Bei einer mehrgliedrigen Relation sprechen wir nicht vom Bereich und Gegenbereich, sondern vom 1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten}, ... n ^{ten} Bereich der Relation. Die Relation, deren Bereich nur ein Element x und deren Gegenbereich nur ein Element y umfasst (welche also zwischen den Gegenständen x und y und sonst zwischen keinen anderen zwei Gegenständen besteht), heisst ein geordnetes Paar, dessen erstes Glied x und dessen zweites y ist. Von den mehrgliedrigen Relationen ausgehend, bestimmen wir in analoger Weise geordnete Tripel, Quadrupel und allgemein geordnete n -Tupel. Wenn es für jeden Gegenstand y , der zum Gegenbereich der

zweigliedrigen Relation R gehört, nur einen Gegenstand x gibt, derart dass xRy , so wird die Relation R eindeutig (oder einmehrdeutig) genannt. Eine grosse Rolle wird in unseren Erwägungen der Begriff der Folge spielen. Eine unendliche Folge ist jede eindeutige Relation, deren Gegenbereich die Klasse aller natürlichen Zahlen mit Ausnahme der Null ist; in ähnlicher Weise bezeichnet der Terminus „endliche Folge von n Gliedern“ jede eindeutige Relation, deren Gegenbereich aus allen natürlichen Zahlen k besteht, derart dass $1 \leq k \leq n$ (wo n eine beliebige natürliche, von 0 verschiedene Zahl ist). Das einzige x , welches die Formel: xRk (für eine gegebene Folge R und eine gegebene natürliche Zahl k) erfüllt, nennen wir das k ^{te} Glied der Folge R oder das Glied der Folge R mit dem Index k und bezeichnen es mit dem Symbol „ R_k “. Wir sagen, dass die Folgen R und S sich höchstens an der k ^{ten} Stelle unterscheiden, wenn zwei beliebige entsprechende Glieder dieser Folgen R_i und S_i identisch sind, höchstens mit Ausnahme der k ^{ten} Glieder R_k und S_k , welche verschieden sein können. In den folgenden Erwägungen werden wir es mit Folgen von Klassen und von natürlichen Zahlen zu tun haben, d. i. mit Folgen, deren sämtliche Glieder entweder Klassen von Individuen oder natürliche Zahlen sind; insbesondere werden wir eine Folge, deren sämtliche Glieder Klassen sind, die in einer gegebenen Klasse a enthalten sind, eine Folge von Teilklassen von Klasse a nennen.

Im Gegensatz zu der ersten Kategorie von Ausdrücken wird die zweite Kategorie durch spezifische Termini der Metasprache von strukturell-deskriptivem Charakter gebildet, also durch Namen von konkreten Zeichen und Ausdrücken der Sprache des Klassenkalküls, Namen von Klassen, von Folgen solcher Ausdrücke und von zwischen ihnen bestehenden strukturellen Relationen. Es gehören hierher in erster Linie die Termini „das Negationszeichen“, „das Zeichen der logischen Summe“, „das Allzeichen“, „das Inklusionszeichen“, „die Variable k ^{ter} Gestalt“, „der Ausdruck, der aus zwei aufeinanderfolgenden Ausdrücken x und y besteht“ und „Ausdruck“; als Abkürzungen der ersten sechs Termini werde ich beziehungsweise die Symbole „ ng “, „ sm “, „ al “, „ in “,

„ v_k “ und „ $x \wedge y$ “ verwenden (das Zeichen „ v “ bezeichnet also eine Folge, deren Glieder die aufeinanderfolgenden Variablen v_1, v_2, v_3, \dots sind). Diese Termini habe ich schon früher verwendet — als ich den Leser einleitend in die Sprache des Klassenkalküls einführte; ich hoffe, dass dank den in dem betreffenden Abschnitte enthaltenen Bemerkungen und Beispielen der Sinn der besprochenen Termini keine Zweifel offen lässt. Mit Hilfe dieser Termini (und eventuell der allgemeinlogischen Termini) kann man alle anderen Begriffe der Metawissenschaft von strukturell-deskriptivem Charakter definieren. Insbesondere lässt sich, wie leicht zu ersehen ist, für jeden einfachen oder zusammengesetzten Ausdruck der Sprache, die Gegenstand der Untersuchung ist, in der Metasprache ein individueller Name dieses Ausdrucks von demselben Typus wie die strukturell-deskriptiven Namen der Umgangssprache konstruieren (vgl. S. [9] und [10]); so kann z. B. als Name des Ausdrucks „ $N!x, x,$ “ der symbolische Ausdruck „ $(ng \wedge in) \wedge v_1$ “ dienen. Der Umstand, dass man jedem Ausdruck (und besonders jeder Aussage) der betrachteten Sprache in der Metasprache einerseits einen individuellen Namen dieses Ausdrucks und andererseits einen Ausdruck, welcher die Übersetzung dieses Ausdrucks in die Metasprache ist, zuordnen kann, wird eine entscheidende Rolle bei der Konstruktion der Definition der Wahrheit spielen, wovon sich der Leser im nächsten Paragraphen überzeugen wird.

Als Variable werde ich in der Metasprache die Symbole (1) „ a “, „ b “, (2) „ f “, „ g “, „ h “, (3) „ k “, „ l “, „ m “, „ n “, „ p “, (4) „ t “, „ u “, „ v “, „ x “, „ y “, „ z “ und (5) „ X “, „ Y “ verwenden; sie repräsentieren in dieser Ordnung die Namen: (1) der Klassen von Individuen von beliebigem Charakter¹⁹⁾, (2) der Folgen von solchen Klassen, (3) der natürlichen Zahlen und der Folgen von natürlichen Zahlen, (4) der Ausdrücke¹⁹⁾ und der Folgen von Ausdrücken und (5) der Klassen von Ausdrücken.

Wir wenden uns dem Axiomensystem der Metasprache zu. Zunächst bemerke ich, dass dieses System — den zwei Kate-

¹⁹⁾ Trotzdem ich in den Fällen (1) und (4) verschiedene Variable verwende, behandle ich hier die Ausdrücke als spezielle Klassen von Individuen, nämlich als Klassen konkreter Schriftzeichenreihen (vgl. ³⁾).

gorien von Ausdrücken der Metasprache entsprechend — zwei ganz verschiedene Arten von Aussagen umfasst: einerseits die allgemein-logischen Axiome, die zur Grundlegung eines genügend umfangreichen Systems der mathematischen Logik hinreichen, andererseits die spezifischen Axiome der Metasprache, welche gewisse elementare und mit der Anschauung übereinstimmende Eigenschaften der oben besprochenen strukturell-deskriptiven Begriffe beschreiben. Es erübrigt sich wohl, die auch sonst gut bekannten Axiome der ersten Art hier explicite anzuführen²⁰⁾; als Axiome der zweiten Art kann man z. B. folgende Aussagen annehmen²¹⁾:

Axiom 1. ng, sm, al und in sind Ausdrücke; unter diesen vier Ausdrücken gibt es keine zwei identischen.

Axiom 2. v_k ist ein Ausdruck dann und nur dann, wenn k eine von 0 verschiedene natürliche Zahl ist; v_k ist von den Ausdrücken ng, sm, al, in und auch, wenn $k \neq l$, von jedem der Ausdrücke v_l verschieden.

Axiom 3. $x \wedge y$ ist ein Ausdruck dann und nur dann, wenn x und y Ausdrücke sind; $x \wedge y$ ist von den Ausdrücken ng, sm, al, in und von jedem der Ausdrücke v_k verschieden.

Axiom 4. Sind x, y, z und t Ausdrücke, so gilt $x \wedge y = z \wedge t$ dann und nur dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist: (a) $x = z$ und $y = t$; (b) es gibt einen solchen Ausdruck u , dass $x = z \wedge u$ und $t = u \wedge y$; (c) es gibt einen solchen Ausdruck u , dass $z = x \wedge u$ und $y = u \wedge t$.

Axiom 5. (das Prinzip der vollständigen Induktion). Sei X eine Klasse, welche folgende Bedingungen erfüllt: (a) $ng \in X, sm \in X, al \in X$ und $in \in X$; (b) ist k eine von 0 verschiedene natürliche Zahl, so $v_k \in X$; (c) ist $x \in X$ und $y \in X$, so auch $x \wedge y \in X$. Dann gehört jeder Ausdruck zur Klasse X .

Der inhaltliche Sinn der Axiome 1—4 bedarf keiner näheren Erläuterungen; im Axiom 5 findet der Umstand, dass jeder

²⁰⁾ Man könnte sie wieder dem Werke Whitehead-Russell, entnehmen (vgl. ¹⁸⁾).

²¹⁾ Soviel mir bekannt ist, ist bisher die Metawissenschaft niemals in der Form eines axiomatisierten Systems dargestellt worden.

Ausdruck aus einer endlichen Anzahl von Zeichen besteht, eine präzise Formulierung.

Man könnte nachweisen, dass *obiges Axiomensystem kategorisch ist*; dieser Umstand garantiert uns in einem gewissen Grade, dass es ein genügendes Fundament für den Aufbau der Metasprache bildet²²⁾.

Manche von den angegebenen Axiomen haben einen ausgesprochen existentialen Charakter und ziehen weitere Folgerungen derselben Art nach sich. Unter diesen Folgerungen verdient die Behauptung beachtet zu werden, die besagt, dass die Klasse aller Ausdrücke unendlich (genauer — abzählbar) ist. Unter dem Aspekt anschaulichen Denkens scheint diese Aussage zweifelhaft und jedenfalls wenig evident zu sein, weshalb das ganze Axiomensystem einer ernsten Kritik unterzogen werden kann; bei genauerer Analyse würde sich übrigens diese Kritik ausschliesslich auf die Axiome 2 und 3 als die wesentlichen Quellen des Infinitismus in der Metawissenschaft beschränken. Dieses schwierige Problem will ich hier nicht näher erörtern²³⁾. Man könnte freilich alle erwähnten Konsequenzen

²²⁾ Den Terminus „kategorisch“ gebrauche ich im Sinne O. Veblen's (vgl. Veblen, S. 346). Warum ich in der Kategorizität eines Axiomensystems eine objektive Garantie dafür sehe, dass das betrachtete System zur Grundlegung der entsprechenden deduktiven Wissenschaft genügt, beabsichtige ich nicht näher auszuführen; eine Reihe von Bemerkungen zu dieser Frage enthält Fraenkel, S. 347—391.

In der Interpretation des Terminus „kategorisch“ herrschen gewisse, übrigens nicht besonders bedeutende Meinungsverschiedenheiten. Ohne darauf näher einzugehen, bemerke ich, dass bei einer von den möglichen Interpretationen der Beweis, dass das System kategorisch ist, die Hinzufügung zweier weiterer Axiome zu dem im Texte angegebenen Axiomensystem der Metawissenschaft erfordern würde. In diesen Axiomen, die sonst ohne grössere Bedeutung sind, würde die spezifische Auffassung der Ausdrücke als Klassen (vgl. 5)) zu Tage treten: das eine Axiom würde besagen, dass zwei beliebige Ausdrücke disjunkte Klassen sind (d. h. keine gemeinsamen Elemente besitzen), im zweiten würde — in irgend einer Weise — die Zahl der Elemente jedes Ausdrucks festgesetzt werden.

²³⁾ Es kommen hier z. B. folgende recht subtile Momente in Frage. Normalerweise fasst man die Ausdrücke als Produkte menschlicher Tätigkeit (bzw. als Klassen solcher Produkte) auf; bei dieser Auffassung scheint die Vermutung, dass es unendlich viele Ausdrücke gibt, ein offener Unsinn zu sein. Es bietet sich aber die Möglichkeit einer anderen Interpretation des Terminus „Ausdruck“: man könnte nämlich als Aus-

vermeiden, wenn man die Axiome in genügendem Grade von den existentialen Voraussetzungen befreien würde. Man muss jedoch den Umstand in Betracht ziehen, dass die Eliminierung oder Abschwächung eben dieser Axiome, welche die Existenz aller möglichen Ausdrücke garantieren, den Aufbau der Metawissenschaft ungemein erschweren, eine Reihe der gebräuchlichsten Schlussfolgerungen unmöglich machen und dadurch beträchtliche Komplikationen in der Formulierung der Definitionen und Behauptungen nach sich ziehen würde; dies tritt sogar — wie wir uns später überzeugen werden — innerhalb der vorliegenden Untersuchungen zu Tage. Aus diesen Gründen lohnt es sich, die Betrachtung wenigstens provisorisch auf das angegebene Axiomensystem in seiner primären unabgeschwächten Gestalt zu stützen.

Unter Benützung der vorher aufgezählten Ausdrücke und Symbole der Metasprache werde ich nunmehr jene Begriffe definieren, welche dem Klassenkalkül den Charakter einer formalisierten deduktiven Wissenschaft verleihen, und zwar die Begriffe der Aussage, des Axioms (des Grundsatzes), der Folgerung und des beweisbaren (oder anerkannten) Satzes. Zunächst führe ich jedoch eine Reihe von Hilfssymbolen ein, die zur Bezeichnung verschiedener einfacher Typen von Ausdrücken dienen und die ferneren Konstruktionen sehr erleichtern.

Definition 1. x ist eine Inklusion mit dem Vorderglied v_k und dem Hinterglied v_l — symbolisch $x = v_{k,l}$ — dann und nur dann, wenn $x = (v_k \supset v_l)$.

Definition 2. x ist eine Negation des Ausdrucks y — symbolisch $x = \bar{y}$ — dann und nur dann, wenn $x = n y$.

Definition 3. x ist eine logische Summe (Alternative, Disjunktion) der Ausdrücke y und z — symbolisch $x = y + z$ — dann und nur dann, wenn $x = (s m y) \supset z$.

drücke alle physischen Körper von bestimmter Gestalt und Grösse betrachten. Der Schwerpunkt des Problems verschiebt sich dann in das Gebiet der Physik, die Behauptung von der unendlichen Anzahl der Ausdrücke ist nicht mehr unsinnig und bildet sogar eine spezielle Konsequenz der Voraussetzungen, die in der Physik oder in der Geometrie normalerweise angenommen werden.

Definition 4. x ist eine logische Summe der Ausdrücke t_1, t_2, \dots, t_n (oder eine logische Summe einer endlichen n -gliedrigen Folge t von Ausdrücken) — symbolisch $x = \sum_k^n t_k$ — dann und nur dann, wenn t eine endliche n -gliedrige Folge von Ausdrücken ist, welche eine der folgenden Bedingungen erfüllt: (α) $n=1$ und $x=t_1$, (β) $n > 1$ und $x = \sum_k^{n-1} t_k + t_n$ ²⁴).

Definition 5. x ist ein logisches Produkt (eine Konjunktion) der Ausdrücke y und z — symbolisch $x = y \cdot z$ — dann und nur dann, wenn $x = \overline{y + z}$.

Definition 6. x ist eine Generalisation des Ausdrucks y für die Variable v_k — symbolisch $x = \prod_k y$ — dann und nur dann, wenn $x = (a \vee v_k) \cdot y$.

Definition 7. x ist eine Generalisation des Ausdrucks y für die Variablen $v_{p_1}, v_{p_2}, \dots, v_{p_n}$ — symbolisch $x = \prod_{p_k}^{k \leq n} y$ — dann und nur dann, wenn p eine endliche n -gliedrige Folge von natürlichen Zahlen ist, welche eine von den folgenden Bedingungen erfüllt: (α) $n=1$ und $x = \prod_{p_1} y$, (β) $n > 1$ und $x = \prod_{p_k}^{k \leq n-1} \prod_{p_n} y$.

Definition 8. x ist eine Generalisation des Ausdrucks y dann und nur dann, wenn entweder $x = y$ oder wenn es eine endliche n -gliedrige Folge p von natürlichen Zahlen gibt, derart dass $x = \prod_{p_k}^{k \leq n} y$.

²⁴) Die Definition 4 ist, wie ersichtlich, eine induktive (rekursive) Definition und gibt als solche Anlass zu gewissen Bedenken methodologischer Natur. Es ist aber wohl bekannt, dass man mit Hilfe einer allgemeinen Methode, deren Idee von G. Frege und R. Dedekind stammt (vgl. Dedekind, S. 33–40, ferner Whitehead-Russell, Vol. I, S. 550–557 und Vol. III, S. 244), jede induktive Definition in eine ihr äquivalente normale Definition umformen kann; dies ist jedoch insofern unpraktisch, als die so gewonnenen Formulierungen eine kompliziertere logische Struktur besitzen, weniger übersichtlich in Bezug auf ihren Inhalt und zu weiteren Ableitungen minder geeignet sind. Schon aus diesen Gründen beabsichtige ich auch im weiteren Verlaufe nicht, die induktiven Definitionen zu vermeiden.

Definition 9. x ist eine Partikularisation des Ausdrucks y für die Variable v_k — symbolisch $x = \bigcup_k y$ — dann und nur dann, wenn $x = \overline{\prod_k \overline{y}}$.

Die Operationen, durch welche wir aus gegebenen Ausdrücken Negationen, logische Summen und Generalisationen bilden, könnte man beziehungsweise Negieren, logisches Addieren und Generalisieren nennen. Wenn wir als Ausgangspunkt die Inklusionen $\iota_{k,i}$ nehmen und an ihnen beliebig oft die genannten Operationen vollziehen, so gelangen wir zu einer umfangreichen Klasse von Ausdrücken, die den Namen Aussagefunktionen tragen. Als einen Sonderfall eben dieses Begriffes werden wir den Begriff der Aussage erhalten.

Definition 10. x ist eine Aussagefunktion dann und nur dann, wenn x ein Ausdruck ist, welcher eine der vier folgenden Bedingungen erfüllt: (α) es gibt solche natürliche Zahlen k und l , dass $x = \iota_{k,l}$; (β) es gibt eine solche Aussagefunktion y , dass $x = \overline{y}$; (γ) es gibt solche Aussagefunktionen y und z , dass $x = y + z$; (δ) es gibt eine solche natürliche Zahl k und eine solche Aussagefunktion y , dass $x = \prod_k y$ ²⁵).

²⁵) Die Definition 10 ist eine rekursive Definition von etwas anderem Typus als z. B. die Def. 4, denn es fehlt in ihr der übliche „Übergang von $n-1$ zu n “. Um diese Definition auf eine gewöhnliche induktive Definition zurückzuführen, müsste man den Ausdruck „ x ist eine Aussagefunktion des n ten Grades“ induktiv definieren (die Inklusionen $\iota_{k,i}$ wären dann Funktionen des 0ten Grades, die Negationen und die logischen Summen dieser Inklusionen, sowie ihre Generalisationen für eine beliebige Variable — Funktionen des 1ten Grades u. s. w.) und dann einfach feststellen, dass „ x ist eine Aussagefunktion“ dasselbe bedeutet wie „es gibt eine solche natürliche Zahl n , dass x eine Aussagefunktion des n ten Grades ist“. Man könnte auch die Def. 10 in eine ihr äquivalente normale Definition umformen, und zwar z. B. in folgender Weise:

x ist eine Aussagefunktion dann und nur dann, wenn jede Klasse X , welche folgende vier Bedingungen erfüllt: (α) sind k und l natürliche, von 0 verschiedene Zahlen, so $\iota_{k,l} \in X$; (β) ist $y \in X$, so auch $\overline{y} \in X$; (γ) ist $y \in X$ und $z \in X$, so auch $y + z \in X$; (δ) ist k eine von 0 verschiedene natürliche Zahl und ist $y \in X$, so $\prod_k y \in X$ — auch der Formel: $x \in X$ genügt.

Es soll betont werden, dass die rekursiven Definitionen vom Typus der Def. 10 viel ernsteren methodologischen Bedenken ausgesetzt sind als gewöhnliche induktive Definitionen, denn im Gegensatz zu den letzteren lassen die Aussagen von diesem Typus nicht immer eine Umformung in äquivalente normale Definitionen zu (vgl. ²⁴). Der Umstand, dass im

Der Def. 10 gemäss können als Beispiele von Aussagefunktionen die Ausdrücke: „ Ix, x, x, x “, „ NIx, x, x, x “, „ AIx, x, x, x “, „ IIx, NIx, x, x “ und viele andere dienen. Dagegen gehören die Ausdrücke: „ I^u “, „ Ix, x “, „ AIx, x, x “, „ IIx, x, x “ u. s. w. nicht zu dieser Kategorie. Es ist leicht ersichtlich, dass wir für jede Aussagefunktion der Sprache sozusagen automatisch in der Metasprache einen strukturell-deskriptiven Namen dieser Funktion konstruieren können, indem wir uns ausschliesslich der Symbole bedienen, die in den Def. 1, 2, 3 und 5 eingeführt worden sind. So z. B. fungieren als Namen der oben als Beispiele angeführten Aussagefunktionen beziehungsweise die symbolischen Ausdrücke: „ $n^{t_{1,2}}$ “, „ $n^{t_{1,3}}$ “, „ $n^{t_{1,3}} + t_{3,1}$ “ und „ $n\prod_1 t_{1,2}$ “.

Definition 11. v_k ist eine freie (reelle) Variable der Aussagefunktion x dann und nur dann, wenn k eine von 0 verschiedene natürliche Zahl und x eine Aussagefunktion ist, welche eine von den folgenden vier Bedingungen erfüllt: (α) es gibt eine solche natürliche Zahl l , dass $x = t_{k,l}$ oder $x = t_{l,k}$; (β) es gibt eine solche Aussagefunktion y , dass v_k eine freie Variable der Funktion y ist und dabei $x = y$; (γ) es gibt solche Aussagefunktionen y und z , dass v_k eine freie Variable der Aussagefunktion y ist und dabei $x = y + z$ oder auch $x = z + y$; (δ) es gibt eine solche von k verschiedene Zahl l und eine solche Aussagefunktion y , dass v_k eine freie Variable der Funktion y ist und dabei $x = \prod_1 y$.

Variable, die in einer Aussagefunktion auftreten, aber keine freien Variablen dieser Funktion sind, werden gewöhnlich gebundene (scheinbare) Variable genannt²⁶⁾.

betrachteten Falle eine solche Umformung möglich ist, erklärt sich durch die spezielle Beschaffenheit der in der Definition auftretenden Begriffe (nämlich dadurch, dass jeder Ausdruck aus einer endlichen Anzahl von Zeichen besteht und dass die in den Bedingungen (β)–(δ) angegebenen Operationen immer von kürzeren zu längeren Ausdrücken führen). Wenn ich trotzdem in dieser Arbeit mehrmals Definitionen dieser Art an Stelle von ihnen äquivalenten normalen Definitionen angebe (Def. 10, 11, 14, 22 und 24), so tue ich es deshalb, weil diese Definitionen bedeutende Vorzüge ganz anderer Natur besitzen: sie heben den Inhalt der definierten Begriffe klarer als die normalen Definitionen hervor und bedürfen dabei — zum Unterschied von den gewöhnlichen induktiven Definitionen — keiner vorherigen Einführung von Hilfsbegriffen, die im Übrigen nutzlos sind (z. B. des Hilfsbegriffes einer Aussagefunktion des n^{ten} Grades).

²⁶⁾ Vgl. Hilbert-Ackermann, S. 52–54.

Definition 12. x ist eine Aussage (oder eine sinnvolle Aussage) — symbolisch $x \in As$ — dann und nur dann, wenn x eine Aussagefunktion ist und wenn dabei keine Variable v_k eine freie Variable der Funktion x ist.

So sind z. B. die Ausdrücke: $\prod_1 t_{1,1}$, $\prod_1 \prod_2 t_{1,2}$, $\prod_1 \prod_2 t_{1,2}$, $\prod_1 (t_{1,1} + \prod_1 \prod_2 t_{2,1})$ Aussagen, dagegen sind die Funktionen: $t_{1,1}$, $\prod_2 t_{1,2}$, $t_{1,1} + \prod_1 \prod_2 t_{2,1}$ keine Aussagen, da sie die freie Variable v_1 enthalten. Das Symbol „ As “ bezeichnet laut obiger Definition die Klasse aller sinnvollen Aussagen²⁷⁾.

Das System der Grundsätze des Klassenkalküls wird zwei Kategorien von Aussagen umfassen. Die Aussagen der ersten Kategorie gewinnen wir in der Weise, dass wir ein beliebiges Axiomensystem in Betracht ziehen, welches zur Grundlegung des Aussagenkalküls genügt und die Zeichen der Negation und der logischen Summe als einzige Konstante enthält, also z. B. das aus folgenden vier Axiomen: „ $ANAppp$ “, „ $ANpApq$ “, „ $ANApqAqp$ “ und „ $ANANpqANArpArq$ “ bestehende Axiomensystem²⁸⁾; in diesen Axiomen ersetzen wir die Aussagevariablen „ p “, „ q “ und „ r “ durch beliebige Aussagefunktionen und an den so erhaltenen Ausdrücken vollziehen wir, falls sie nicht schon Aussagen sind, beliebig oft die Operation des Generalisierens, bis alle freien Variablen verschwunden sind. Als Beispiele können die Aussagen: „ $ANAIIx, Ix, x, IIx, Ix, x, x$ “, „ $IIx, IIx, ANIx, x, AIx, x, Ix, x, x$ “ u. s. w. dienen. Um zu den Aussagen der zweiten Kategorie zu gelangen, nehmen wir als Ausgangspunkt irgend ein Axiomensystem des noch nicht formalisierten Klassenkalküls, welches das Zeichen der Inklusion als einziges Grundzeichen enthält²⁹⁾, und übersetzen die

²⁷⁾ Begriffe, die ich im weiteren Verlauf des § 2 besprechen werde, kommen in der Definition der wahren Aussage selbst nicht vor. Ich werde dagegen von ihnen in den vorbereitenden Betrachtungen am Anfang des § 3, welche die endgiltige Form der Definition begründen, Gebrauch machen, sowie auch bei der Formulierung gewisser Konsequenzen dieser Definition (Sätze 3–6 aus § 3), welche charakteristische, inhaltlich wichtige Eigenschaften der wahren Aussagen ausdrücken.

²⁸⁾ Dieses Axiomensystem ist das Resultat einer Modifikation und Vereinfachung des Axiomensystems, welches sich in dem Werke Whitehead-Russell (Vol. I, S. 96–97) findet; vgl. Hilbert-Ackermann, S. 22.

²⁹⁾ Ich meine hier das System von Postulaten, welches im Artikel Huntington, S. 297 angegeben ist (dieses System haben wir jedoch

ausschliesslich an Aussagen, sondern an beliebigen Aussagefunktionen vollziehen und als Ergebnis ebenfalls Aussagefunktionen erhalten, dann würde die Def. 14 den Sinn der Einsetzungsoperation in vollständiger Weise bestimmen, die Operation der Abtrennung würde den Funktionen y und $\bar{y}+z$ die Funktion z zuordnen, die Operation der Hinzufügung des Allzeichens würde in der Bildung der Funktion $y+\prod_k z$ aus der Funktion $y+z$ bestehen (unter der Bedingung, dass v_k keine freie Variable der Funktion y ist), die Operation der Weglassung des Allzeichens würde dagegen in umgekehrter Richtung fortschreiten — von der Funktion $y+\prod_k z$ zur Funktion $y+z$ ³¹⁾. Hier wollen wir uns jedoch ausschliesslich auf Aussagen (im Sinne der Def. 12) beschränken, und deshalb werden wir obige Operationen in der Weise modifizieren, dass wir an Stelle der betreffenden Aussagefunktionen die Aussagen betrachten werden, welche Generalisationen dieser Funktionen sind.

Um die Konstruktion zu vereinfachen, definiere ich vorerst den Hilfsbegriff der Folgerung n^{ten} Grades:

Definition 15. x ist eine Folgerung n^{ten} Grades aus der Aussagenklasse X dann und nur dann, wenn $x \in A_s$, $X \subset A_s$, n eine natürliche Zahl ist und dabei entweder (a) $n=0$ und $x \in X$, oder $n>0$ und eine der folgenden fünf Bedingungen erfüllt ist: (β) x ist eine Folgerung $n-1^{\text{ten}}$ Grades aus der Klasse X ; (γ) es gibt solche Aussagefunktionen u und w , eine solche Aussage y und solche natürliche Zahlen k und l , dass x die Generalisation der Funktion u , y die Generalisation der Funktion w ist, u sich aus der Funktion w durch Einsetzung der Variablen v_k für die Variable v_l gewinnen lässt und dass y eine Folgerung $n-1^{\text{ten}}$ Grades aus der Klasse X ist; (δ) es gibt solche Aussagefunktionen u und w sowie Aussagen y und z , dass x , y und z beziehungsweise Generalisationen der Funktionen u , $w+u$ und w sind und dass y und z Folgerungen des $n-1^{\text{ten}}$ Grades aus der Klasse X sind; (ε) es gibt solche Aussagefunktionen u und w , eine solche Aussage y und eine solche natürliche Zahl k , dass x eine Generalisation der Funktion $u+\prod_k w$, y eine Generalisation der Funktion $u+w$, v_k keine freie Variable der Funktion u ist und dass y eine Folgerung $n-1^{\text{ten}}$ Grades aus der Klasse X ist; (ζ) es gibt solche Aussage-

funktionen u und w , eine solche Aussage y und eine solche natürliche Zahl k , dass x eine Generalisation der Funktion $u+w$, y eine Generalisation der Funktion $u+\prod_k w$ ist und dabei y eine Folgerung des $n-1^{\text{ten}}$ Grades aus der Klasse X ist.

Definition 16. x ist eine Folgerung aus der Aussagenklasse X — symbolisch $x \in Fl(X)$ — dann und nur dann, wenn es eine solche natürliche Zahl n gibt, dass x eine Folgerung n^{ten} Grades aus der Klasse X ist³²⁾.

Definition 17. x ist ein beweisbarer (oder anerkannter) Satz — symbolisch $x \in B_w$ — dann und nur dann, wenn x eine Folgerung aus der Klasse aller Grundsätze ist.

Wie man leicht ersieht, gehören zu den anerkannten Sätzen im Sinne der obigen Definition sowohl alle Aussagen, die man aus den Lehrsätzen des Aussagenkalküls auf ganz gleiche Weise erhalten kann, auf welche die Grundsätze der ersten Kategorie (d. i. diejenigen, welche die Bedingung (α) der Def. 13 erfüllen) aus den Axiomen dieser Theorie entstanden sind, wie auch alle bekannten Sätze des nicht formalisierten Klassenkalküls, falls sie nur vorher in die Sprache, die den Gegenstand der Betrachtungen bildet, übersetzt wurden. Um sich davon zu

³²⁾ Den Begriff der Folgerung könnte man auch unmittelbar (d. i. ohne Hilfe der Folgerung des n^{ten} Grades) z. B. in folgender Weise einführen:

$x \in Fl(X)$ dann und nur dann, wenn $X \subset A_s$ und wenn jede Klasse Y , welche folgende fünf Bedingungen erfüllt: (α) $X \subset Y$; (β) wenn $y \in A_s$, y eine Generalisation der Funktion u , z eine Generalisation der Funktion w ist, u sich aus der Funktion w durch Einsetzung der Variablen v_k für die Variable v_l gewinnen lässt und dabei $z \in Y$, so auch $y \in Y$; (γ) wenn $\bar{y} \in A$, y , z und t beziehungsweise Generalisationen der Funktionen u , $w+u$ und w sind und dabei $z \in Y$ und $t \in Y$, so auch $y \in Y$; (δ) wenn $y \in A$, u und w Aussagefunktionen sind, y eine Generalisation der Funktion $u+\prod_k w$, z eine Generalisation der Funktion $u+w$ ist, v_k keine freie Variable der Funktion u ist und dabei $z \in Y$, so auch $y \in Y$; (ε) wenn $y \in A$, u und w Aussagefunktionen sind, y eine Generalisation der Funktion $u+w$, z eine Generalisation der Funktion $u+\prod_k w$ ist und dabei $z \in Y$, so auch $y \in Y$, — zugleich der Formel: $x \in Y$ genügt.

Es ist jedoch zu bemerken, dass wir durch Umformung der eben angegebenen Definition in eine rekursive Aussage vom Typus der Def. 10 eine Aussage gewinnen, welche weder der obigen Definition noch irgend einer anderen normalen Definition äquivalent ist (vgl. 25).

überzeugen, ahmen wir in jedem konkreten Fall den entsprechenden Beweis aus dem Gebiete des Aussagenkalküls oder des Klassenkalküls in der Metawissenschaft nach. So z. B. lässt sich in der oben erwähnten Weise u. a. aus dem bekannten Lehrsatz des Aussagenkalküls „ANpp“ die Aussage $\prod_1(\overline{t_{1,1}} + t_{1,1})$ gewinnen. Indem wir den Beweis dieses Lehrsatzes³³⁾ transponieren, legen wir der Reihe nach dar, dass laut der Def. 13 $\prod_1(\overline{t_{1,1}} + t_{1,1} + t_{1,1})$, $\prod_1(\overline{t_{1,1}} + (t_{1,1} + t_{1,1}))$ und $\prod_1(\overline{t_{1,1} + t_{1,1} + t_{1,1}} + (\overline{t_{1,1} + (t_{1,1} + t_{1,1})} + (\overline{t_{1,1}} + t_{1,1})))$ Grundsätze sind; demnach ist $\prod_1(\overline{t_{1,1} + (t_{1,1} + t_{1,1})} + (\overline{t_{1,1}} + t_{1,1}))$, der Def. 15 gemäss, eine Folgerung des 1^{ten} Grades und $\prod_1(\overline{t_{1,1}} + t_{1,1})$ — eine Folgerung des 2^{ten} Grades aus der Klasse aller Grundsätze. $\prod_1(\overline{t_{1,1}} + t_{1,1})$ ist also, mit Rücksicht auf die Def. 16 und 17, ein anerkannter Satz.

An den Beispielen solcher Schlüsse kann man sich die Schwierigkeiten vorstellen, welche sofort entstehen würden, wenn man aus den Axiomen der Metawissenschaft die in ihnen enthaltenen Voraussetzungen existentialer Natur eliminieren wollte. Der Umstand, dass die Axiome uns jetzt nicht mehr die Existenz der einzelnen Aussagen gewährleisten würden, von denen wir dartun möchten, dass sie beweisbar sind, fielen weniger ins Gewicht; wesentliche Bedeutung besitzt erst der Umstand, dass wir, sogar unter der Voraussetzung der Existenz dieser oder jener konkreten Aussage, ihre Beweisbarkeit nicht begründen könnten, denn im Beweise müssten wir uns auf die Existenz anderer, in der Regel komplizierterer Aussagen berufen (wie man schon aus dem Beweis des Satzes „ $\prod_1(\overline{t_{1,1}} + t_{1,1}) \varepsilon Bw$ “, den wir oben skizziert haben, ersieht). So lange wir es mit speziellen Sätzen vom Typus „ $x \varepsilon Bw$ “ zu tun hätten, könnten wir uns in der Weise Rat schaffen, dass wir diese Sätze mit Prämissen versehen, welche die Existenz der zum Beweise notwendigen Aussagen gewährleisten. Die Schwierigkeiten würden bedeutend wachsen, wenn wir zu Sätzen von allgemeinem Charakter übergängen, die besagen, dass alle Aussagen gewisser Art beweisbar oder — noch allgemeiner — Folgerungen aus der gegebenen Aussagenklasse sind;

³³⁾ Vgl. Whitehead-Russell, Vol. I., S. 101, *21.

oft müssten wir dann in die Prämissen allgemeine existentielle Voraussetzungen aufnehmen, die nicht schwächer wären als diejenigen, welche wir aus Gründen der Evidenz aus den Axiomen eliminiert hätten³⁴⁾.

Auf Grund des oben Gesagten könnte man den Standpunkt einnehmen, dass die Def. 17 im Falle der Verwerfung der existentialen Voraussetzungen nicht mehr alle Eigenschaften erfasst, welche wir dem Begriff des anerkannten Satzes zuschreiben. Es entsteht dann das Problem einer geeigneten „Korrektur“ der obigen Definition; präziser ausgedrückt — es würde sich um die Konstruktion einer Definition des anerkannten Satzes handeln, welche der Def. 17 auf dem Gebiete der existentialen Voraussetzungen äquivalent wäre und dabei — bereits unabhängig von diesen Voraussetzungen — jeden Satz vom Typus „wenn die Aussage x existiert, so $x \varepsilon Bw$ “ nach sich ziehen würde, falls man nur den entsprechenden Satz „ $x \varepsilon Bw$ “ mit Hilfe der betrachteten Voraussetzungen beweisen könnte. Ich skizziere hier kurz einen Versuch der Lösung dieses Problems.

Man kann leicht nachweisen, dass das in der Metawissenschaft angenommene Axiomensystem eine Interpretation in der Arithmetik der natürlichen Zahlen besitzt: zwischen den Ausdrücken und den natürlichen Zahlen lässt sich eine eindeutige Zuordnung durchführen, wobei man den Operationen an Ausdrücken Operationen an Zahlen von denselben formalen Eigenschaften zuordnen kann. Wenn man diese Zuordnung in Betracht zieht, kann man aus der Gesamtheit aller Zahlen jene aussondern, welche den Aussagen zugeordnet sind, unter ihnen die „Grund“-Zahlen hervorheben, den Begriff der „Folgerung“ aus einer gegebenen Klasse von Zahlen einführen und endlich die „anerkannten“ Zahlen als „Folgerungen“ aus der Klasse aller „Grund“-Zahlen definieren. Wenn wir nun aus den Axiomen die existentialen Voraussetzungen eliminieren, so verschwindet die eindeutige Zuordnung: jedem Ausdruck wird auch weiterhin eine natürliche Zahl, aber nicht jeder Zahl ein Ausdruck entsprechen; trotzdem darf man den vorhin bestimmten Begriff der „anerkannten“ Zahl beibehalten und die anerkannten Sätze als solche definieren, die den „an-

³⁴⁾ Dies kann man leicht an Beispiele der Sätze 11, 12, 24 und 28 aus dem § 3 ersehen.

erkannten“ Zahlen zugeordnet sind. Wenn wir auf Grund dieser neuen Definition zu erweisen versuchen, dass eine konkrete Aussage anerkannt ist, werden wir — wie leicht zu ersehen ist — nicht mehr gezwungen sein, uns auf die Existenz irgend welcher anderer Aussagen zu berufen. Nichtsdestoweniger wird der Beweis — was mit Nachdruck betont werden muss — auch weiterhin eine (wenn auch schwächere) existentielle Voraussetzung erfordern, nämlich die Voraussetzung, dass es genügend viele natürliche Zahlen oder — was auf dasselbe hinausläuft — genügend viele verschiedene Individuen gibt. Um also aus der neuen Definition alle erwünschten Schlüsse abzuleiten, müssten wir in der Metawissenschaft das sog. Axiom der Unendlichkeit annehmen, d. i. die Voraussetzung, nach welcher die Klasse aller Individuen unendlich ist²⁹⁾. Es ist mir kein anderer, wenn auch noch weniger natürlicher und komplizierterer Weg bekannt, der unabhängig von obigem Axiom zu einer zufriedenstellenden Lösung des gegebenen Problems führen würde.

Im Zusammenhang mit den Begriffen der Folgerung und des anerkannten Satzes habe ich sog. Schlussregeln erwähnt. Wenn man nämlich den Aufbau einer deduktiven Wissenschaft selbst und nicht die auf dem Gebiete der Metawissenschaft durchzuführende Erforschung einer solchen Wissenschaft beabsichtigt, so gibt man anstatt der Def. 17 eine Regel an, nach der man zu einer Wissenschaft jede Folgerung aus den Axiomen dieser Wissenschaft als anerkannten Satz hinzufügen darf. In unserem Falle könnte man diese Regel in vier Regeln zergliedern — den vier Operationen entsprechend, die wir bei der Konstruktion der Folgerungen anwenden.

Mit Hilfe der Begriffe der Aussage und der Folgerung lassen sich schon in die Metawissenschaft alle wichtigsten methodologischen Begriffe einführen, insbesondere die Begriffe des deduktiven Systems, der Widerspruchsfreiheit und der Vollständigkeit³⁰⁾.

Definition 18. X ist ein deduktives System dann und nur dann, wenn $Fl(X) \subset X \subset As$.

²⁹⁾ Vgl. Whitehead-Russell, Vol. II, S. 208.

³⁰⁾ Vgl. Tarski, insbesondere S. 369, 387—388 und 390.

Definition 19. X ist eine widerspruchsfreie Klasse von Aussagen dann und nur dann, wenn $X \subset As$ und wenn — für jede beliebige Aussage x — entweder $x \in Fl(X)$ oder $\bar{x} \in Fl(X)$.

Definition 20. X ist eine vollständige Klasse von Aussagen dann und nur dann, wenn $X \subset As$ und wenn — für jede beliebige Aussage x — entweder $x \in Fl(X)$ oder $\bar{x} \in Fl(X)$.

In den weiteren Betrachtungen wird sich noch ein Begriff als nützlich erweisen:

Definition 21. Die Aussagen x und y sind äquivalent mit Rücksicht auf die Aussagenklasse X dann und nur dann, wenn $x \in As$, $y \in As$, $X \subset As$ und wenn zugleich $\bar{x} + y \in Fl(X)$ und $\bar{y} + x \in Fl(X)$.

Eine nähere Analyse der in diesem Paragraphen eingeführten Begriffe würde die Grenzen der vorliegenden Untersuchungen überschreiten.

§ 3. Der Begriff der wahren Aussage in der Sprache des Klassenkalküls.

Ich gehe nun zum Hauptproblem dieser Arbeit über — nämlich zur Konstruktion der Definition der wahren Aussage, wobei die Sprache des Klassenkalküls weiterhin der Gegenstand der Betrachtungen bleibt.

Es könnte im ersten Augenblick scheinen, dass im gegenwärtigen Stadium unserer Betrachtungen diese Aufgabe ohne Schwierigkeiten gelöst werden kann, dass „wahre Aussage“ in Bezug auf die Sprache einer formalisierten deduktiven Wissenschaft nichts anderes bedeutet, als „beweisbarer (anerkannter) Satz“ und dass infolgedessen die Def. 17 zugleich eine Definition der wahren Aussage ist, und zwar eine Definition von rein strukturellem Charakter. Nach näherer Überlegung müssen wir jedoch obige Anschauung schon aus folgendem Grunde ablehnen: keine mit dem Sprachgebrauch übereinstimmende Definition der wahren Aussage darf dem Prinzip des ausgeschlossenen Dritten widersprechende Konsequenzen nach sich ziehen; im Gebiete der anerkannten Sätze aber hat dieses

Prinzip keine Geltung — ein einfaches Beispiel zweier einander widersprechender Aussagen (d. i. solcher, dass die eine die Negation der anderen ist), von denen keine beweisbar ist, bietet z. B. das unten angegebene Lemma E. Der Umfang der beiden betrachteten Begriffe ist also nicht identisch; alle beweisbaren Sätze sind ohne Zweifel — vom inhaltlichen Gesichtspunkt aus — wahre Aussagen (wenigstens wurden die Def. 13—17 des § 2 im Hinblick darauf formuliert), aber die Definition der wahren Aussage, die wir suchen, muss ausserdem Aussagen umfassen, die nicht beweisbar sind³⁷⁾.

Versuchen wir an das vorliegende Problem von einer ganz anderen Seite heranzutreten, indem wir zur Idee einer semantischen Definition aus dem § 1 zurückkehren. Wie wir schon aus § 2 wissen, entspricht in der Metasprache jeder Aussage, die zur Sprache des Klassenkalküls gehört, einerseits ein individueller Name dieser Aussage von strukturell-deskriptivem Typus, andererseits eine mit der gegebenen Aussage gleich-

³⁷⁾ Es kommt hier auch der Umstand in Betracht, dass — im Gegensatz zu dem Begriff der wahren Aussage — der Begriff des beweisbaren Satzes in Anwendung auf manche deduktive Wissenschaften einen recht zufälligen Charakter besitzt, der hauptsächlich mit der historischen Entwicklung der Wissenschaft zusammenhängt. Es ist manchmal schwer, die objektiven Gründe anzugeben, aus welchen wir den Umfang dieses Begriffs in dieser oder jener Richtung verengern oder erweitern. So z. B. wird — wenn es sich um den Klassenkalkül handelt — auf Grund der Definitionen des § 2 die Aussage $\bigcap_1 \bigcap_2 t_{1,2}$, welche die Existenz wenigstens zweier verschiedener Klassen feststellt, nicht anerkannt — was im Lemma E ausgedrückt werden soll. Auch lässt sich diese Aussage nicht aus den formalen Voraussetzungen ableiten, auf denen das Werk Schröder, aufgebaut ist, obwohl in diesem Falle die Sache nicht ganz klar ist (vgl. I. Bd., S. 245 und 246; II. Bd., 1. Abt., S. 278; III. Bd., 1. Abt., S. 17 und 18); in vielen Arbeiten dagegen tritt die betrachtete Aussage als eines der Axiome der Algebra der Logik auf oder stellt eine evidente Konsequenz dieser Axiome dar (vgl. z. B. Huntington, S. 297, Postulat 10). Aus ganz anderen Gründen, von denen unten im Zusammenhang mit Satz 24 (vgl. insbesondere³⁴⁾) die Rede sein wird, wäre es angebracht, die Aussage $\bigcap_1 (\bigcap_2 t_{1,2} + \bigcup_2 (t_{2,1} \cdot \bigcap_3 (\bigcap_4 t_{3,4} + \overline{t_{3,2}} + t_{2,3})))$ unter die anerkannten Sätze aufzunehmen, was indes gewöhnlich nicht geschieht. — Zum Problem des gegenseitigen Verhältnisses beider Begriffe: des anerkannten Satzes und der wahren Aussage werde ich im Laufe der Untersuchung noch mehrmals zurückkehren.

bedeutende Aussage; so z. B. entsprechen der Aussage „ $\exists x, \exists x_1, \exists x_2, \exists x_3, x_1, x_2$ “ der Name „ $\bigcap_1 \bigcap_2 (t_{1,2} + t_{2,1})$ “ und die Aussage „für beliebige Klassen a und b — $a \subset b$ oder $b \subset a$ “. Um den Inhalt des Begriffs der Wahrheit in Bezug auf irgend eine konkrete Aussage der betrachteten Sprache zu erläutern, können wir dieselbe Methode anwenden, die wir im § 1 bei der Formulierung der Aussagen (3) und (4) verwendet haben: wir nehmen nämlich das Schema (2) (vgl. S. [8]) und ersetzen dort das Symbol „ x “ durch den Namen der gegebenen Aussage und „ p “ durch eine Aussage, welche die Übersetzung der gegebenen Aussage in die Metasprache ist. Alle auf diesem Wege gewonnenen Sätze, z. B. „ $\bigcap_1 \bigcap_2 (t_{1,2} + t_{2,1})$ ist eine wahre Aussage dann und nur dann, wenn — für beliebige Klassen a und b — $a \subset b$ oder $b \subset a$ “, gehören selbstverständlich zur Metasprache und erklären in präziser und mit dem Sprachgebrauch übereinstimmender Weise die Bedeutung der in ihnen auftretenden Redewendungen von der Form „ x ist eine wahre Aussage“. Von einer allgemeinen Definition der wahren Aussage soll man also — im Grunde genommen — nicht viel mehr verlangen, als dass sie, die gewöhnlichen Bedingungen der methodologischen Korrektheit erfüllend, alle Teildefinitionen von diesem Typus als Sonderfälle umfasse, dass sie sozusagen ihr logisches Produkt sei; höchstens kann man noch verlangen, dass zum Umfang des definierten Begriffs ausschliesslich Aussagen gehören, dass sich also auf Grund der konstruierten Definition alle Sätze vom Typus „ x ist keine wahre Aussage“ beweisen lassen, in denen an Stelle des „ x “ der Name eines beliebigen Ausdrucks (oder eines anderen Gegenstandes), der keine Aussage ist, auftritt.

Wenn wir zur Bezeichnung der Klasse aller wahren Aussagen das Symbol „ Wr “ einführen, so werden obige Postulate in folgender Konvention ihren Ausdruck finden:

Konvention W. Eine formal korrekte, in den Termini der Metasprache formulierte Definition des Symbols „ Wr “ werden wir eine zutreffende Definition der Wahrheit nennen, wenn sie folgende Folgerungen nach sich zieht:

(a) alle Sätze, die man aus dem Ausdruck „ $x \in Wr$ “ dann und nur dann, wenn p “ gewinnt, indem man für das Symbol x

einen strukturell-deskriptiven Namen einer beliebigen Aussage der betrachteten Sprache und für das Symbol „ p “ den Ausdruck, welcher die Übersetzung dieser Aussage in die Metasprache bildet, einsetzt;

(β) die Aussage „für ein beliebiges x — wenn $x \in Wr$, so $x \in As$ “ (oder mit anderen Worten „ $Wr \subset As$ “³⁸⁾).

Es ist zu bemerken, dass der zweite Teil obiger Konvention keine wesentliche Bedeutung besitzt: sobald die Metasprache schon über das Symbol „ Wr “ verfügt, das die Bedingung (α) befriedigt, kann man leicht ein neues Symbol „ Wr' “ definieren, welches ausserdem die Bedingung (β) erfüllt; es genügt zu diesem Zwecke anzunehmen, dass Wr' der gemeinsame Teil der Klassen Wr und As ist.

Enthielte die betrachtete Sprache nur eine endliche, von vornherein bestimmte Anzahl von Aussagen und könnten wir alle diese Aussagen aufzählen, so würde das Problem der Konstruktion einer richtigen Definition der Wahrheit keine Schwierigkeiten bieten — es würde zu diesem Zwecke genügen, dass wir folgendes Schema ausfüllen: $x \in Wr$ dann und nur dann, wenn entweder $x = x_1$ und p_1 , oder $x = x_2$ und p_2, \dots oder $x = x_n$ und p_n , indem wir in ihm die Symbole „ x_1 “, „ x_2 “, ... „ x_n “ beziehungsweise durch strukturell-deskriptive Namen aller Aussagen der untersuchten Sprache, „ p_1 “, „ p_2 “, ... „ p_n “ dagegen durch Übersetzungen dieser Aussagen in die Metasprache ersetzen. So aber verhält es sich tatsächlich nicht; es gibt in der Sprache unendlich viele Aussagen, die automatisch nach dem genannten Schema gebaute Definition müsste aus unendlich vielen Worten bestehen, und derartige Aussagen können wir weder in der Metasprache noch in irgend einer anderen

³⁸⁾ Wenn wir die Metasprache und die in ihr betriebene Metawissenschaft dem Prozess der Formalisierung unterziehen wollten, so würde die genaue Bestimmung des Sinnes verschiedener Ausdrücke, die in der Konvention \mathbb{W} auftreten, wie z. B. der Ausdrücke „formal korrekte Definition des gegebenen Symbols“, „strukturell-deskriptiver Name eines gegebenen Ausdrucks der betrachteten Sprache“, „die Übersetzung einer gegebenen Aussage (der betrachteten Sprache) in die Metasprache“, keine grösseren Schwierigkeiten bieten; bei unbedeutender Modifikation der Ausdrucksweise würde dann die Konvention selbst den Charakter einer normalen Definition aus dem Gebiete der Meta-Metawissenschaft annehmen.

Sprache formulieren. Darum kompliziert sich unsere Aufgabe bedeutend.

Es drängt sich der Gedanke auf, die rekursive Methode anzuwenden. Unter den Aussagen der Sprache finden wir nämlich in Hinsicht auf die logische Struktur gar verschiedenartige Ausdrücke — neben ganz elementaren mehr oder weniger zusammengesetzte. Es würde sich also darum handeln, sämtliche Operationen anzugeben, mit deren Hilfe einfachere Aussagen zu zusammengesetzteren vereinigt werden, und festzustellen, in welcher Weise die Wahrheit bzw. Falschheit der zusammengesetzteren Aussagen von der Wahrheit bzw. Falschheit der in ihnen enthaltenen einfacheren Aussagen abhängt; ausserdem wären gewisse elementare Aussagen auszusondern, aus welchen man mit Hilfe der genannten Operationen alle Aussagen der Sprache konstruieren könnte, und diese ausgesonderten Aussagen wären explicite in wahre und falsche einzuteilen — z. B. mit Hilfe der Teildefinitionen vom oben beschriebenen Typus. Beim Versuch der Realisierung obiger Idee stossen wir auf ein sehr wesentliches Hindernis: eine auch nur oberflächliche Analyse der Def. 10–12 des § 2 beweist, dass im allgemeinen Fall die zusammengesetzteren Aussagen keineswegs Verbindungen einfacherer Aussagen sind; die Aussagefunktionen entstehen tatsächlich auf diesem Wege aus elementaren Funktionen, d. i. aus Inklusionen, die Aussagen dagegen erhalten wir als gewisse Sonderfälle der Aussagefunktionen. Angesichts dieser Sachlage lässt sich keine Methode angeben, welche es erlauben würde, den untersuchten Begriff unmittelbar auf rekursivem Wege zu definieren. Es ergibt sich aber die Möglichkeit, einen Begriff von allgemeinerem Charakter einzuführen, welcher bei beliebigen Aussagefunktionen Anwendung findet, sich schon rekursiv definieren lässt und, auf Aussagen angewendet, uns mittelbar zum Begriff der Wahrheit führt; diesen Bedingungen genügt nämlich der Begriff des Erfülltseins der gegebenen Aussagefunktion durch gegebene Gegenstände und im vorliegenden Falle — durch gegebene Klassen von Individuen.

Versuchen wir vorerst, uns mit Hilfe einiger konkreten Beispiele den üblichen, in der Sprache vorgefundenen Sinn des soeben genannten Begriffs zu verdeutlichen. Die Weise,

auf welche wir dies tun werden, stellt eine natürliche Verallgemeinerung der Methode dar, die wir früher beim Begriff der Wahrheit angewendet haben.

Am einfachsten und evidentesten ist der Fall, in dem die gegebene Aussagefunktion nur eine freie Variable enthält. Dann kann man von jedem einzelnen Gegenstande sinnvoll behaupten, dass er die gegebene Funktion erfüllt bzw. nicht erfüllt³⁹⁾. Um den Sinn dieser Wendung zu erklären, ziehen wir folgendes Schema in Betracht:

für jedes a — a erfüllt die Aussagefunktion x dann und nur dann, wenn p

und setzen in diesem Schema für „ p “ die gegebene Aussagefunktion (nach vorheriger Ersetzung der in ihr auftretenden freien Variablen durch „ a “) und für „ x “ irgend einen individuellen Namen dieser Funktion ein. Auf diesem Wege können wir z. B. — noch auf dem Boden der Umgangssprache — folgende Formulierung erhalten: *für jedes a — a erfüllt die Aussagefunktion „ x ist weiss“ dann und nur dann, wenn a weiss ist* (und daraus insbesondere schliessen, dass der Schnee die Aussagefunktion „ x ist weiss“ erfüllt). Dem Leser ist gewiss eine ähnliche Konstruktion z. B. aus der Schulalgebra bekannt, wo man Aussagefunktionen von einem speziellen Typus, die sog. Gleichungen, betrachtet und die Zahlen, welche diese Funktionen erfüllen, Wurzeln der Gleichungen nennt (z. B. ist 1 die einzige Wurzel der Gleichung „ $x+2=3$ “).

Wenn insbesondere die betrachtete Funktion zur Sprache des Klassenkalküls gehört und die entsprechende Erklärung des Ausdrucks „ a erfüllt die gegebene Aussagefunktion“ gänzlich in den Termini der Metasprache formuliert werden soll, so setzen wir in dem oben angegebenen Schema für „ p “ nicht die Aussagefunktion selbst ein, sondern den mit ihr gleichbedeutenden Ausdruck der Metasprache, „ x “ dagegen ersetzen wir durch einen individuellen Namen dieser Funktion, welcher ebenfalls zum Gebiet der Metasprache gehört. So ergibt z. B. diese Methode in Bezug auf die Funktion „ $\Pi x, Ix, x,$ “ folgende Formulierung: *für jedes a — a erfüllt die Aussagefunktion*

³⁹⁾ Ich abstrahiere vorläufig von den Fragen, die sich an die sog. semantische Kategorie (oder den Typus) der Variablen knüpfen; diese Probleme werde ich im § 4 besprechen.

$\bigcap_{2, 1, 2}$ dann und nur dann, wenn — für eine beliebige Klasse b — $a \subset b$ (daraus folgt sofort, dass die einzige Klasse, welche die Funktion „ $\Pi x, Ix, x,$ “ erfüllt, die leere Klasse ist).

Ganz analog verfahren wir auch in dem Falle, wo die betrachtete Aussagefunktion zwei verschiedene freie Variable enthält; der Unterschied besteht nur darin, dass wir hier den Begriff des Erfülltseins nicht auf einzelne Gegenstände, sondern auf Paare (exakter: auf geordnete Paare) von Gegenständen beziehen. Auf diese Weise erhalten wir z. B. folgende Formulierungen: *für beliebige a und b — erfüllen a und b die Aussagefunktion „ x sieht y “ dann und nur dann, wenn a b sieht; für beliebige a und b — a und b erfüllen die Aussagefunktion $t_{2,3}$ (d. i. „ $Ix, x,$ “) dann und nur dann, wenn $a \subset b$.*

Wir gehen schliesslich zum allgemeinen Falle über, wo die gegebene Aussagefunktion eine beliebige Zahl von freien Variablen enthält. Um eine einheitliche Ausdrucksweise zu erhalten, werden wir von nun an nicht sagen, dass gegebene Gegenstände, sondern dass eine gegebene unendliche Folge von Gegenständen eine gegebene Aussagefunktion erfüllt. Wenn wir uns dabei auf die Betrachtung der Funktionen aus dem Klassenkalkül beschränken, so wird die Festsetzung einer eindeutigen Erklärung dieser Wendung durch den Umstand erleichtert, dass alle Variablen, die in der Sprache dieser Wissenschaft auftreten, in einer Folge angeordnet (numeriert) sind. Bei der Erwägung der Frage, welche Folgen die gegebene Aussagefunktion erfüllen, werden wir nämlich immer eine derartige eindeutige Zuordnung gewisser Glieder der Folge f zu den freien Variablen der betrachteten Funktion im Auge haben, bei welcher jeder Variablen das Glied der Folge mit demselben Index entspricht (d. h. der Variablen v_k — das Glied f_k), die Glieder dagegen, die keiner Variablen zugeordnet sind, werden wir überhaupt nicht berücksichtigen⁴⁰⁾. Den Gang der in Aussicht gestellten Erklä-

⁴⁰⁾ Dies ist übrigens eine Erleichterung rein technischer Natur. Selbst wenn wir nicht alle Variablen einer gegebenen Sprache in einer Folge anordnen könnten (z. B. deshalb, weil man als Variable Symbole beliebiger Gestalt verwenden dürfte), so könnten wir alle Zeichen, also auch alle Variablen jedes gegebenen Ausdrucks für sich numerieren, z. B. auf Grund ihrer natürlichen Ordnung, in welcher sie

rung selbst kann man am besten an konkreten Beispielen erläutern. Ziehen wir z. B. die schon vorher besprochene Funktion $\mathfrak{N}_2 t_{1,2}$ in Betracht; diese Funktion enthält nur eine freie Variable v_1 , wir beachten also nur die ersten Glieder der Folgen. Und zwar sagen wir, dass *die unendliche Folge f von Klassen die Aussagefunktion $\mathfrak{N}_2 t_{1,2}$ dann und nur dann erfüllt*, wenn die Klasse f_1 diese Funktion im früheren Sinn erfüllt, d. i., wenn — für eine beliebige Klasse b — $f_1 \subset b$. In analoger Weise erfüllt *die unendliche Folge f von Klassen die Aussagefunktion $t_{2,3}$ dann und nur dann*, wenn die Klassen f_2 und f_3 die Funktion im früheren Sinn erfüllen, d. h., wenn $f_2 \subset f_3$. Allgemein lässt sich dieser Prozess in folgender Weise beschreiben.

Ziehen wir folgendes Schema in Betracht:

Die Folge f erfüllt die Aussagefunktion x dann und nur dann, wenn f eine unendliche Folge von Klassen ist und wenn p . Haben wir eine Aussagefunktion aus dem Klassenkalkül, so ersetzen wir in diesem Schema das Symbol „ x “ durch einen individuellen (strukturell-deskriptiven), in der Metasprache formulierten Namen dieser Funktion, das „ p “ dagegen durch einen Ausdruck, den wir aus der betrachteten Funktion gewinnen, indem wir sie in die Metasprache übersetzen und zugleich in ihr alle freien Variablen v_i , v_i u. s. w. durch entsprechende Symbole „ f_k “, „ f_i “ u. s. w. ersetzen.

Um eine allgemeine Definition des Erfülltseins einer Aussagefunktion durch eine Folge von Klassen zu formulieren, welche alle aus dem angeführten Schema in der oben beschriebenen Weise gewonnenen Teildefinitionen dieses Begriffs als Sonderfälle umfasst, werden wir die rekursive Methode anwenden. Zu diesem Zwecke genügt es — unter Berücksichtigung der Definition der Aussagefunktion — anzugeben, welche

im Ausdruck aufeinander folgen: das am weitesten links stehende Zeichen würden wir das erste, das nächste das zweite nennen u. s. w. Auf diesem Wege könnten wir wieder eine gewisse Zuordnung der freien Variablen einer gegebenen Funktion zu den Gliedern der Folge herstellen. Diese Zuordnung würde selbstverständlich mit der Gestalt der betrachteten Funktion variieren (im Gegensatz zu jener Zuordnung, die wir im Texte beschrieben haben); dies würde ziemlich bedeutende Komplikationen in der Formulierung der unten angegebenen Def. 22, und zwar der Bedingungen (γ) und (δ) nach sich ziehen.

Folgen die Inklusionen $t_{k,l}$ erfüllen, und weiterhin festzustellen, wie sich der betrachtete Begriff verhält, wenn an den Aussagefunktionen eine von den drei Grundoperationen: des Negierens, des Addierens und des Generalisierens vollzogen wird.

Besondere Beachtung verdient hierbei die Operation des Generalisierens. Es sei x eine beliebige Aussagefunktion; nehmen wir an, dass es uns schon bekannt ist, welche Folgen die Funktion x erfüllen. Indem wir den Inhalt der betrachteten Operation berücksichtigen, werden wir nur dann von der Folge f behaupten, dass sie die Funktion $\mathfrak{N}_k x$ (wo k eine bestimmte natürliche Zahl ist) erfüllt, falls diese Folge die Funktion x selbst erfüllt und sie sogar dann nicht zu erfüllen aufhört, wenn das k^{te} Glied dieser Folge auf beliebige Weise variiert; mit anderen Worten — wenn jede Folge, die sich von der gegebenen Folge höchstens an der k^{ten} Stelle unterscheidet, diese Funktion erfüllt. So z. B. wird die Funktion $\mathfrak{N}_2 t_{1,2}$ durch eine solche und nur eine solche Folge f erfüllt, welche die Formel: $f_1 \subset f_2$ verifiziert und dies ohne Rücksicht darauf, wie wir das zweite Glied dieser Folge variieren lassen (wie man leicht ersieht, ist dies nur dann möglich, wenn das erste Glied die leere Klasse ist).

Nach diesen Erläuterungen wird das Verständnis der folgenden Definition dem Leser keine grösseren Schwierigkeiten bieten:

Definition 22. Die Folge f erfüllt die Aussagefunktion x dann und nur dann, wenn f eine unendliche Folge von Klassen und x eine Aussagefunktion ist, welche eine von den vier folgenden Bedingungen erfüllen: (α) es gibt solche natürliche Zahlen k und l , dass $x = t_{k,l}$ und $f_k \subset f_l$; (β) es gibt eine solche Aussagefunktion y , dass $x = y$ und f die Funktion y nicht erfüllt; (γ) es gibt solche Aussagefunktionen y und z , dass $x = y + z$ und dass f entweder y oder z erfüllt; (δ) es gibt eine solche natürliche Zahl k und eine solche Aussagefunktion y , dass $x = \mathfrak{N}_k y$ und dass hierbei jede unendliche Folge von Klassen, die sich von f höchstens an der k^{ten} Stelle unterscheidet, die Funktion y erfüllt⁴¹⁾.

⁴¹⁾ Die normale Definition, die obiger rekursiver Definition äquivalent ist, lautet (vgl. ³⁶⁾):

Hier einige Beispiele für die Anwendung obiger Definition auf konkrete Aussagefunktionen: die unendliche Folge f erfüllt die Inklusion $\iota_{1,2}$ dann und nur dann, wenn $f_1 \subset f_2$; die Funktion $\overline{\iota_{2,3} + \iota_{3,2}}$ dagegen dann und nur dann, wenn $f_2 \neq f_3$; die Funktion $\bigcap_2 \iota_{1,2}$; bzw. $\bigcap_2 \iota_{2,3}$ erfüllen diejenigen und nur diejenigen Folgen f , in welchen f_1 die leere Klasse, bzw. f_3 die volle Klasse (d. i. die Klasse aller Individuen) ist; jede unendliche Folge von Klassen erfüllt schliesslich die Funktion $\iota_{1,1}$, keine derartige Folge dagegen erfüllt die Funktion $\iota_{1,2} \cdot \iota_{1,2}$.

Der eben definierte Begriff besitzt eine hervorragende Bedeutung für die Untersuchungen über die Semantik der Sprache; mit seiner Hilfe lässt sich der Sinn einer ganzen Reihe von Begriffen aus diesem Gebiete leicht präzisieren, z. B. die Begriffe des Bezeichnens, der Definierbarkeit⁴²⁾ und der Wahrheitsbegriff, der uns hier vor allem interessiert.

Die Folge f erfüllt die Aussagefunktion x dann und nur dann, wenn jede Relation R , welche folgender Bedingung genügt:

für beliebige g und y — damit gRy , ist es notwendig und hinreichend, dass g eine unendliche Folge von Klassen, y eine Aussagefunktion ist und dass es weiterhin entweder (α) solche natürliche Zahlen k und l gibt, dass $y = \iota_{k,l}$ und $g_k \subset g_l$; oder (β) eine solche Aussagefunktion z gibt, dass $y = \overline{z}$ und dass die Formel: gRz nicht besteht; oder (γ) solche Aussagefunktionen z und t gibt, dass $y = z + t$ und dabei gRz oder gRt ; oder endlich (δ) eine solche natürliche Zahl k und eine solche Aussagefunktion z gibt, dass $y = \bigcap_k z$ und dass dabei hRz für jede unendliche Folge h von Klassen, die sich von g höchstens an der h -ten Stelle unterscheidet,

— auch die Formel: fRx befriedigt.

⁴²⁾ Zu sagen, dass der Name x einen gegebenen Gegenstand a bezeichnet, ist dasselbe, wie festzustellen, dass der Gegenstand a (bzw. jede Folge, deren entsprechendes Glied a ist) eine Aussagefunktion von einem bestimmten Typus erfüllt; in der Umgangssprache handelt es sich hier um Aussagefunktionen, die aus drei Teilen in dieser Reihenfolge bestehen: aus einer Variablen, aus dem Worte „ist“ und aus dem gegebenen Namen x . — Was den Begriff der Definierbarkeit anbetrifft, so werde ich seinen Inhalt nur in einem besonderen Falle zu erklären versuchen. Wenn wir nämlich überlegen, welche Eigenschaften der Klassen wir (in Hinsicht auf das hier erörterte System des Klassenkalküls) als definierbar betrachten, gelangen wir zu folgenden Formulierungen:

Wir sagen, dass die Aussagefunktion x die Eigenschaft E von Klassen dann und nur dann bestimmt, wenn — für eine natürliche Zahl k — (α) x als einzige freie Variable v_k enthält und (β) damit die unendliche Folge f von Klassen x erfüllt, es notwendig

Zum Begriff der Wahrheit gelangen wir auf folgende Weise. Auf Grund der Def. 22 und der ihr vorangeschickten Betrachtungen anschaulicher Art kann man sich leicht gegenwärtigen, dass der Umstand, ob eine gegebene Folge eine gegebene Aussagefunktion erfüllt, nur von jenen Gliedern der Folge abhängt, die (in Hinsicht auf ihre Indizes) den freien Variablen der betreffenden Aussagefunktion entsprechen. Im extremen Fall also, wenn die betrachtete Funktion eine Aussage ist, demnach überhaupt keine freien Variablen enthält (was die Def. 22 keineswegs ausschliesst), hängt das Erfülltsein einer Funktion durch eine Folge überhaupt nicht von den Eigenschaften der Glieder der Folge ab. Es bleiben dann nur zwei Möglichkeiten übrig: entweder erfüllt jede unendliche Folge von Klassen die gegebene Aussage, oder es erfüllt sie keine Folge (vgl. die unten angegebenen Lemmata A und B). Die Aussagen der ersten Art, z. B. $\bigcup_1 \iota_{1,1}$, sind eben die wahren Aussagen; die Aussagen der zweiten Art, z. B. $\bigcap_1 \overline{\iota_{1,1}}$ können dementsprechend falsche Aussagen genannt werden.

Definition 23. x ist eine wahre Aussage — symbolisch $x \in Wr$ — dann und nur dann, wenn $x \in As$ und wenn jede unendliche Folge von Klassen x erfüllt⁴³⁾.

Nun ergibt sich vor allem die Frage, ob die eben angegebene Definition, deren formale Korrektheit keinem Zweifel

und hinreichend ist, dass f_k die Eigenschaft E besitzt; wir sagen, dass die Eigenschaft E von Klassen dann und nur dann definierbar ist, wenn es eine Aussagefunktion x gibt, welche E bestimmt.

Auf Grund dieser Festsetzungen könnte man z. B. zeigen, dass solche Eigenschaften von Klassen wie die Leerheit, das Enthalten nur eines Elementes, bzw. zweier, dreier u. s. w. Elemente definierbar sind. undefinierbar ist dagegen die Eigenschaft des Enthaltens unendlich vieler Elemente (vgl. die im Zusammenhang mit den Sätzen 14–16 unten angeführten Bemerkungen). Man sieht auch, dass bei dieser Interpretation der Begriff der Definierbarkeit gar nicht davon abhängt, ob die Formalisierung der untersuchten Wissenschaft die Möglichkeit der Konstruktion von Definitionen zulässt (vgl. 11). Genauere Ausführungen über die Definierbarkeit findet man in der Arbeit Tarski.

⁴³⁾ In der ganzen obigen Konstruktion könnte man anstatt mit unendlichen Folgen mit endlichen Folgen von einer variablen Anzahl von Gliedern operieren. Es wäre dabei bequem, den Begriff der endlichen Folge zu verallgemeinern: bei der bisherigen Interpretation dieses Terminus (vgl. S. [27]) muss eine Folge, die das n -te Glied besitzt, auch alle Glieder

unterliegt, auch sachlich richtig ist — wenigstens in dem Sinne, welcher vorher in der Konvention \mathbb{W} festgesetzt worden ist. Man kann zeigen, dass die Antwort auf diese Frage positiv ausfällt: die Def. 23 ist eine zutreffende Definition der Wahrheit im Sinne der Konvention \mathbb{W} , da sie alle in dieser Konvention angeführten Folgerungen nach sich zieht. Man ersieht jedoch ohne Schwierigkeit (schon daraus, dass die Anzahl dieser Folgerungen unendlich ist), dass die exakte und allgemeine Begründung dieser Tatsache in dem Rahmen der bisherigen Untersuchungen keinen Platz findet: der Beweis würde den Aufbau eines gänzlich neuen Apparats erfordern, und zwar vor allem den Übergang zu der — um eine Stufe höher liegenden — Meta-Metawissenschaft, welchem die Formalisierung der Metawissenschaft, die die Grundlage unserer Untersuchungen bildet, vorangehen müsste²⁸). Wer jedoch den Boden der bisherigen Erwägungen nicht verlassen will, dem bleibt nur der empirische Weg — die Verifizierung der besprochenen Eigenschaft der Def. 23 an einer Reihe konkreter Beispiele.

mit Indizes, die kleiner als n sind, besitzen, — nun hätte man von diesem Postulat abzugehen und jede eindeutige Relation, deren Gegengebiet aus einer endlichen Anzahl natürlicher, von 0 verschiedener Zahlen besteht, eine endliche Folge zu nennen. Die Modifikation der Konstruktion würde darin bestehen, dass aus den Folgen, welche die gegebene Aussagefunktion erfüllen, alle „überflüssigen“ Glieder eliminiert würden, welche auf das Erfülltsein der Funktion keinen Einfluss ausüben: falls in der Funktion als freie Variable v_2, v_1 u. s. w. (selbstverständlich in endlicher Anzahl) auftreten, würden in der Folge, die diese Funktion erfüllt, ausschliesslich Glieder mit den Indizes k, l u. s. w. verbleiben; so z. B. würden die Funktion $f_{2,1}$ die und nur die Folgen f' von Klassen erfüllen, die nur aus zwei Gliedern f_2 und f_1 , welche die Formel: $f_2 \subset f_1$ verifizieren, bestehen. Der Wert einer solchen Modifikation leuchtet vom Standpunkt der Natürlichkeit und der Übereinstimmung mit dem üblichen Vorgehen ein, nichtdestoweniger treten bei ihrer genauen Durchführung gewisse Mängel logischer Natur auf: die Def. 22 nimmt eine kompliziertere Form an. Was den Begriff der Wahrheit anbetrifft, so ist zu bemerken, dass — nach obiger Auffassung — nur eine Folge, nämlich die „leere“ Folge, die kein einziges Glied besitzt, eine Aussage, d. i. eine Funktion ohne freie Variable erfüllen kann; wahr wird man demnach solche Aussagen zu nennen haben, welche die „leere“ Folge tatsächlich erfüllt. Eine gewisse Künstlichkeit dieser Definition wird zweifellos bei allen Anstoss erregen, die mit den spezifischen Verfahrungsweisen, welche man in den mathematischen Konstruktionen anzuwenden pflegt, nicht genügend vertraut sind.

Betrachten wir z. B. die Aussage $\mathbf{N}_1 \mathbf{U}_2 t_{1,2}$, d. i. „ $\exists x, \exists Nx, \exists Nx, \exists x$ “. Der Def. 22 gemäss erfüllen die Aussagefunktion $t_{1,2}$ jene und nur jene Folgen f von Klassen, für welche $f_1 \subset f_2$, ihre Negation dagegen, d. i. die Funktion $\overline{t_{1,2}}$, nur jene Folgen, für die $f_1 \not\subset f_2$ gilt. Infolgedessen erfüllt eine Folge f die Funktion $\mathbf{N}_2 \overline{t_{1,2}}$ nur dann, wenn jede Folge g , welche sich von f höchstens an 2^{ter} Stelle unterscheidet, die Funktion $t_{1,2}$ erfüllt, also die Formel: $g_1 \subset g_2$ verifiziert; da $g_1 = f_1$ und die Klasse g_2 eine ganz beliebige sein kann, so erfüllen die Funktion $\mathbf{N}_2 \overline{t_{1,2}}$ nur derartige Folgen f , dass — für eine beliebige Klasse b — $f_1 \not\subset b$. Schliessen wir in analoger Weise weiter, so erhalten wir das Ergebnis, dass die Folge f die Funktion $\mathbf{U}_2 t_{1,2}$, d. i. die Negation der Funktion $\mathbf{N}_2 \overline{t_{1,2}}$, nur dann erfüllt, wenn es eine Klasse b gibt, für die $f_1 \subset b$ gilt; des weiteren ist die Aussage $\mathbf{N}_1 \mathbf{U}_2 t_{1,2}$ nur dann (durch eine beliebige Folge f) erfüllt, wenn es — für eine beliebige Klasse a — eine Klasse b gibt, für die $a \subset b$. Indem wir hier schliesslich die Def. 23 anwenden, gewinnen wir sofort einen von den Sätzen, die in der Bedingung (α) der Konvention \mathbb{W} beschrieben wurden:

$\mathbf{N}_1 \mathbf{U}_2 t_{1,2} \varepsilon Wr$ dann und nur dann, wenn es — für eine beliebige Klasse a — eine Klasse b gibt, für die $a \subset b$.

Daraus schliessen wir unter Benützung der bekannten Sätze des Klassenkalküls nunmehr ohne Schwierigkeit, dass $\mathbf{N}_1 \mathbf{U}_2 t_{1,2}$ eine wahre Aussage ist.

Ganz analog können wir mit jeder anderen Aussage der betrachteten Sprache verfahren: wenn wir für eine derartige Aussage eine entsprechende in der Bedingung (α) beschriebene Behauptung konstruieren und dasselbe Schlussverfahren wie oben anwenden, können wir ohne die geringste Schwierigkeit beweisen, dass diese Behauptung eine Konsequenz der von uns angenommenen Definition der Wahrheit ist. In zahlreichen Fällen können wir mit alleiniger Hilfe der einfachsten Gesetze der Logik (aus dem Gebiete des Aussagen- und des Klassenkalküls) aus den auf diesem Wege gewonnenen Sätzen definitive Schlüsse über die Wahrheit bzw. Falschheit der betrachteten Aussagen ziehen: so z. B. erweist sich $\mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2 (t_{1,2} + \overline{t_{1,2}})$ als wahre, $\mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2 \overline{t_{1,2}}$ als falsche Aussage. In Bezug auf andere Aussagen,

z. B. in Bezug auf die Aussage $\bigcap_1 \bigcap_2 \bigcap_3 (t_{1,2} + t_{2,3} + t_{3,1})$ oder ihre Negation, können wir die analoge Frage nicht entscheiden (wenigstens so lange nicht, als wir nicht zu den speziellen Voraussetzungen der Metawissenschaft von existentialem Charakter greifen — vgl. S. [30]): die Def. 23 allein gibt nämlich kein allgemeines Kriterium für die Wahrheit einer Aussage⁴⁴); nichtsdestoweniger wird jedoch durch die gewonnenen Sätze der Sinn der entsprechenden Ausdrücke vom Typus „ $x \in Wr$ “ verständlich und eindeutig. — Es soll ausserdem noch bemerkt werden, dass auch der in der Bedingung (β) der Konvention \mathbb{W} angeführte Satz eine evidente Konsequenz der besprochenen Definition ist.

Durch diese Erwägungen wird der Leser zweifellos die subjektive Gewissheit gewinnen, dass die Def. 23 tatsächlich die Eigenschaft besitzt, um die es sich uns handelt: sie genügt allen Bedingungen der Konvention \mathbb{W} . Um die auf diesem Wege gewonnene Überzeugung von der sachlichen Richtigkeit der konstruierten Definition zu festigen, lohnt es sich, einige charakteristische allgemeine Sätze kennen zu lernen, welche man aus ihr ableiten kann. Um die Belastung der Arbeit mit rein deduktivem Material zu vermeiden, führe ich diese Sätze ohne genaue Beweise an⁴⁵).

Satz 1 (der Satz vom Widerspruch). Für jede beliebige Aussage x gilt entweder $x \in Wr$ oder $\bar{x} \in Wr$.

Dies ist eine fast unmittelbare Konsequenz der Def. 22 und 23.

⁴⁴) Dies ist übrigens, wenigstens vom methodologischen Gesichtspunkt aus gesehen, kein Mangel der betrachteten Definition; sie unterscheidet sich in dieser Hinsicht keineswegs von einem bedeutenden Teil der in den deduktiven Wissenschaften auftretenden Definitionen.

⁴⁵) Den Beweisen liegen die allgemeinen Gesetze der Logik, die spezifischen Axiome der Metawissenschaft und die Definitionen der in den Sätzen auftretenden Begriffe zu Grunde. In einigen Fällen ist die Anwendung der allgemeinen Eigenschaften der Begriffe der Folgerung, des deduktiven Systems u. s. w., welche ich in der Arbeit Tarski, angegeben habe, angezeigt; die dort erzielten Ergebnisse dürfen wir verwenden, denn die hier eingeführten Begriffe der Aussage und der Folgerung erfüllen, wie leicht gezeigt werden kann, alle Axiome, auf die sich die erwähnte Arbeit stützt.

Satz 2 (der Satz vom ausgeschlossenen Dritten). Für jede beliebige Aussage x gilt entweder $x \in Wr$, oder $\bar{x} \in Wr$.

Im Beweise spielt folgendes Lemma, welches aus den Def. 11 und 22 folgt, eine wesentliche Rolle:

Lemma A. Erfüllt die Folge f die Aussagefunktion x und genügt die unendliche Folge g von Klassen folgender Bedingung: für jedes k gilt $f_k = g_k$, wenn nur v_k eine freie Variable der Funktion x ist, so erfüllt auch die Folge g die Funktion x .

Als unmittelbare Folgerung aus diesem Lemma und der Def. 12 erhalten wir das Lemma B, welches im Verein mit den Def. 22 und 23 nunmehr leicht zum Satz 1 führt:

Lemma B. Wenn $x \in As$ und wenn mindestens eine unendliche Folge von Klassen die Aussage x erfüllt, so erfüllt jede unendliche Folge von Klassen die Aussage x .

Satz 3. Ist $X \subset Wr$, so auch $Fl(X) \subset Wr$; insbesondere also $Fl(Wr) \subset Wr$.

Diesen Satz beweisen wir durch vollständige Induktion, hauptsächlich auf Def. 15, 16, 22 und 23 gestützt; es ist hier auch folgendes einfaches Lemma von Nutzen:

Lemma C. Wenn y eine Generalisation der Aussagefunktion x ist, so ist es dafür, dass jene unendliche Folge von Klassen x erfüllt, notwendig und hinreichend, dass jede unendliche Folge von Klassen y erfüllt.

Als Resumé der in den Sätzen 1—3 enthaltenen Ergebnisse gewinnen wir (mit Hilfe der Def. 18—20) den

Satz 4. Die Klasse Wr ist ein widerspruchsfreies und vollständiges deduktives System.

Satz 5. Jeder beweisbare Satz ist eine wahre Aussage; m. a. W. $Bw \subset Wr$.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus Def. 17, aus Satz 3 und aus Lemma D, dessen Beweis (u. a. auf Grund von Def. 13 und Lemma C) keine Schwierigkeiten macht:

Lemma D. Jeder Grundsatz ist eine wahre Aussage.

Satz 5 lässt sich nicht umkehren:

Satz 6. Es gibt wahre Aussagen, die nicht beweisbar sind; m. a. W. $Wr \not\sqsubset Bw$.

Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus Satz 2 und aus folgendem Lemma, dessen exakter Beweis nicht ganz einfach ist:

Lemma E. Sowohl $\bigcap_1 \bigcap_2 t_{1,2} \varepsilon Bw$, als auch $\overline{\bigcap_1 \bigcap_2 t_{1,2}} \varepsilon Bw$ ⁴⁶⁾.

Als eine Nebenkonsequenz der Sätze 1, 5 und 6 führe ich schliesslich noch folgenden Satz an:

Satz 7. Die Klasse Bw ist ein widerspruchsfreies, aber kein vollständiges deduktives System.

In den Forschungen, die gegenwärtig auf dem Gebiete der Methodologie der deduktiven Wissenschaften betrieben werden⁴⁷⁾ (insbesondere in den Arbeiten der Göttinger Schule, die sich um Hilbert gruppiert) spielt eine viel bedeutendere Rolle als der absolute Begriff der Wahrheit, von dem bisher die Rede war, ein anderer Begriff von relativem Charakter, welcher jenen als Sonderfall umfasst, nämlich der Begriff der in einem Individuenbereich a richtigen oder wahren Aussage⁴⁸⁾. Darunter verstehen wir — ganz allgemein und unexakt gesprochen — jede

⁴⁶⁾ Würden wir (wie es oft geschieht — vgl. 37)) die Aussage $\bigcap_1 \bigcap_2 t_{1,2}$ den anerkannten Aussagen angliedern, so könnten wir hier, anstatt Lemma E, Lemma E' anwenden:

Lemma E'. Sowohl $\bigcap_1 \bigcap_2 (t_{1,2} + t_{2,1}) \varepsilon Bw$, als auch $\overline{\bigcap_1 \bigcap_2 (t_{1,2} + t_{2,1})} \varepsilon Bw$.

Die Idee des Beweises dieser beiden Lemmata ist dieselbe, wie die der Beweise der Widerspruchsfreiheit und der Unvollständigkeit des sog. engeren Funktionenkalküls, welche wir im Buche Hilbert-Ackermann₁, S. 65—68 finden.

⁴⁷⁾ Der Leser, der für die speziellen Begriffe und Untersuchungen aus dem Gebiete der Methodologie der deduktiven Wissenschaften kein grösseres Interesse hat, kann die hier im Kleindruck gegebenen Ausführungen der §§ 3 und 4 übergehen (im engeren Zusammenhang mit der Grundidee dieser Arbeit stehen nur die Ausführungen auf S. [66]—[67]).

⁴⁸⁾ Vgl. hierzu z. B. Hilbert-Ackermann₁, besonders S. 72—81, und Bernays-Schönfinkel. Es muss jedoch betont werden, dass die genannten Verfasser den betrachteten Begriff nicht auf Aussagen, sondern auf Aussagefunktionen mit freien Variablen beziehen (weil es in der Sprache des engeren Funktionenkalküls, deren sie sich bedienen, überhaupt keine Aussagen im strengen Sinne des Wortes gibt) und im Zusammenhang damit den Terminus „allgemeingiltig“ anstatt des Terminus „richtig“ oder „wahr“ verwenden; vgl. hierzu die zweite der zitierten Arbeiten, S. 347—348.

Aussage, welche im üblichen Sinne dann wahr wäre, wenn wir den Umfang der betrachteten Individuen auf eine gegebene Klasse a beschränken, oder — etwas genauer gesagt — wenn wir übereinkommen, die Termini „Individuum“, „Klasse von Individuen“ u. s. w. bzw. als „Element der Klasse a “, „Unterklasse der Klasse a “ u. s. w. zu interpretieren; wenn es sich in concreto um die Aussagen aus der Sprache des Klassenkalküls handelt, so müsste man Ausdrücke vom Typus „ Hxp “ als „für jede Unterklasse x der Klasse a — p “ interpretieren und Ausdrücke vom Typus „ Ixy “ als „die Unterklasse x der Klasse a ist in der Unterklasse y der Klasse a enthalten“. Zu einer präzisen Definition des besprochenen Begriffs gelangen wir mittels einer Modifikation der Def. 22 und 23; als abgeleitete Begriffe werden wir den Begriff der in einem Individuenbereich mit k Elementen richtigen Aussage und den Begriff der in jedem Individuenbereich richtigen Aussage einführen. Es ist bemerkenswert, dass — trotz der grossen Bedeutung dieser Termini für die metamathematischen Untersuchungen — man sich ihrer bisher ausschliesslich im intuitiven Sinne bedient hat, ohne zu versuchen, ihren Sinn näher zu präzisieren⁴⁹⁾.

Definition 24. Die Folge f erfüllt die Aussagefunktion x in dem Individuenbereich a dann und nur dann, wenn a eine Klasse von Individuen, f eine unendliche Folge von Unterklassen der Klasse a und x eine Aussagefunktion ist, welche eine von den vier folgenden Bedingungen erfüllt: (α) es gibt solche natürliche Zahlen k und l , dass $x = t_{k,1}$ und $f_k \subset f_l$; (β) es gibt eine solche Aussagefunktion y , dass $x = y$ und dass die Funktion f die Funktion y im Individuenbereich a nicht erfüllt; (γ) es gibt solche Aussagefunktionen y und z , dass $x = y + z$, und dass die Folge f entweder y oder z im Individuenbereich a erfüllt; (δ) es gibt eine solche natürliche Zahl k und eine solche Aussagefunktion y , dass $x = \bigcap_k y$ und dass jede unendliche Folge g von Unterklassen der Klasse a , welche sich von der Folge f höchstens an der k -ten Stelle unterscheidet, y im Individuenbereich a erfüllt.

⁴⁹⁾ Eine Ausnahme bildet die Arbeit Herbrand₁, in welcher der Verfasser den Begriff der wahren Aussage in unendlichem Bereiche präzisiert (S. 108—112). Der Vergleich der Definition Herbrands mit den im Texte angegebenen Definitionen 25 und 26 wird den Leser ohne weiteres zu dem Schluss führen, dass wir es hier eher mit einem Gleichklang der Termini, als mit einer Verwandtschaft der Inhalte zu tun haben; nichtsdestoweniger ist es möglich, dass in Bezug auf gewisse konkrete deduktive Wissenschaften und unter speziellen Voraussetzungen für die entsprechenden Metawissenschaften der Begriff Herbrands denselben Umfang besitzt (also auch dieselbe Bedeutung für metamathematische Untersuchungen hat) wie ein gewisser Spezialfall des in Def. 25 eingeführten Begriffs.

Definition 25. x ist eine richtige (wahre) Aussage in dem Individuenbereich a dann und nur dann, wenn $x \in As$ und wenn jede unendliche Folge von Unterklassen der Klasse a die Aussage x im Individuenbereich a erfüllt.

Definition 26. x ist eine richtige (wahre) Aussage in einem Individuenbereich mit k Elementen — symbolisch $x \in Rt_k$ — dann und nur dann, wenn es eine solche Klasse a gibt, dass k die Mächtigkeit der Klasse a und x eine richtige Aussage im Individuenbereich a ist.

Definition 27. x ist eine richtige (wahre) Aussage in jedem Individuenbereich — symbolisch $x \in Rt$ — dann und nur dann, wenn — für jede Klasse a — x eine im Individuenbereich a richtige Aussage ist.

Wenn wir in der Def. 25 die Formel „ $x \in As$ “ weglassen und dadurch den Inhalt der Def. 26 und 27 modifizieren, gelangen wir zu Begriffen allgemeinerer Natur, welche nicht nur Aussagen, sondern auch beliebige Aussagefunktionen betreffen.

Beispiele für die Anwendung der definierten Begriffe auf konkrete Aussagen werden wir weiter unten kennen lernen. Zwecks bequemer Formulierung verschiedener Eigenschaften dieser Begriffe führe ich noch einige symbolische Abkürzungen ein.

Definition 28. $x = \varepsilon_k$ dann und nur dann, wenn

$$x = \overline{\bigcap_{k+1} v_{k, k+1}} \cdot \bigcap_{k+1} (\bigcap_{k+2} v_{k+1, k+2} + \overline{v_{k+1, k}} + v_{k, k+1}).$$

Definition 29. $x = a$ dann und nur dann, wenn

$$x = \bigcap_1 (\bigcap_2 v_{1,2} + \bigcup_2 (v_{2,1} \cdot \varepsilon_2)).$$

Wie man leicht ersehen kann, besagt die Aussagefunktion ε_k , dass die durch die Variable v_k bezeichnete Klasse nur aus einem Element besteht; die Aussage a , welche in den weiteren Untersuchungen eine grosse Rolle spielen wird, besagt, dass jede nichtleere Klasse eine einelementige Klasse als Teil enthält.

Definition 30. $x = \beta_n$ dann und nur dann, wenn entweder $n=0$ und $x = \bigcap_1 \varepsilon_1$, oder $n \neq 0$ und $x = \bigcap_k^k \leq^{n+1} \left(\sum_k \varepsilon_k + \sum_1 \sum_k (v_{k, k+1} \cdot v_{k+1, k}) \right)$.

Definition 31. $x = \gamma_n$ dann und nur dann, wenn entweder $n=0$ und $x = \beta_0$, oder $n \neq 0$ und $x = \beta_{n-1} \cdot \beta_n$.

Wie es aus diesen Definitionen folgt, stellen die Aussagen β_n bzw. γ_n (wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist) fest, dass es höchstens n bzw. genau n verschiedene einelementige Klassen, oder — was dasselbe besagt — n verschiedene Individuen gibt.

Definition 32. x ist eine quantitative Aussage (oder eine Aussage über die Anzahl der Individuen) dann und nur dann, wenn es eine solche endliche Folge p von n natürlichen Zahlen gibt, dass entweder $x = \sum_k^n \gamma_{p_k}$ oder $x = \sum_k^n \gamma_{p_k}$.

Ich werde jetzt eine Reihe von charakteristischen Eigenschaften der definierten Begriffe und von wichtigeren Zusammenhängen angeben, welche sie mit bereits früher angeführten Begriffen verbinden; es werden hier u. a. einige Resultate von mehr spezieller Natur ihren Platz finden, die mit spezifischen Eigenschaften des Klassenkalküls in Verbindung stehen und sich nicht auf andere Disziplinen von verwandter logischer Struktur ausdehnen lassen (z. B. die Sätze 11–13, 24 und 28).

Satz 8. Wenn a eine Klasse von Individuen und k die Mächtigkeit dieser Klasse ist, so ist es dafür, dass x eine im Individuenbereich a richtige Aussage ist, notwendig und hinreichend, dass $x \in Rt_k$.

Der Beweis gründet sich u. a. auf folgendes Lemma, welches aus Def. 24 folgt:

Lemma F. Es seien a und b zwei Klassen von Individuen und R eine Relation, die folgenden Bedingungen genügt: (α) für beliebige f' und g' — wenn $f' R g'$, so ist f' eine unendliche Folge von Unterklassen der Klasse a , g' dagegen der Klasse b ; (β) ist f' eine beliebige unendliche Folge von Unterklassen der Klasse a , so gibt es eine solche Folge g' , dass $f' R g'$; (γ) ist g' eine beliebige unendliche Folge von Unterklassen der Klasse b , so gibt es eine solche Folge f' , dass $f' R g'$; (δ) für beliebige f', g', f'', g'', k und l — wenn $f' R g', f'' R g''$ und k und l natürliche, von 0 verschiedene Zahlen sind, so gilt $f'_k \subset f''_l$ dann und nur dann, wenn $g'_k \subset g''_l$. Wenn dann $f R g$ und die Folge f die Aussagefunktion x im Individuenbereich a erfüllt, so erfüllt die Folge g diese Funktion im Individuenbereich b .

Aus diesem Lemma gewinnen wir leicht mit Hilfe der Def. 25 folgendes Lemma G, welches im Verein mit Def. 26 sofort den Satz 8 ergibt:

Lemma G. Wenn die Klassen von Individuen a und b gleichmächtig sind und x eine im Individuenbereich a richtige Aussage ist, so ist x auch eine im Individuenbereich b richtige Aussage.

Nach Satz 8 (bzw. Lemma G) hängt der Umfang des Begriffs „eine im Individuenbereich a richtige Aussage“ ausschliesslich von einer einzigen Eigenschaft der Klasse a ab, nämlich von ihrer Mächtigkeit; dies erlaubt uns im weiteren Verlaufe unserer Überlegungen alle diesen Begriff betreffenden Ergebnisse unberücksichtigt zu lassen, weil man sie unmittelbar aus den entsprechenden Sätzen, die sich auf die Klassen Rt_k beziehen, ableiten kann.

Mit Hilfe der Def. 24 und 25 kann man die Sätze 1–6 und die Lemmata A–D verallgemeinern, indem man in ihnen überall die Ausdrücke

„unendliche Folge von Klassen“, „die Folge... erfüllt die Aussagefunktion...“, „wahre Aussage“ u. s. w. beziehungsweise durch „unendliche Folge von Unterklassen der Klasse a “, „die Folge... erfüllt die Aussagefunktion... im Individuenbereich a “ „eine im Individuenbereich a richtige Aussage“ u. s. w. ersetzt; zufolge Satz 8 lassen sich die so gewonnenen Ergebnisse ihrerseits auf Aussagen ausdehnen, die zu den Klassen Rt_k gehören. Auf diesem Wege gelangen wir u. a. zu folgenden Verallgemeinerungen der Sätze 4–6:

Satz 9. Für jede beliebige Kardinalzahl k ist die Klasse Rt_k ein widerspruchsfreies und vollständiges deduktives System.

Satz 10. Für jede beliebige Kardinalzahl k gilt $Bw \subset Rt_k$, dagegen $Rt_k \not\subset Bw$.

In Hinblick auf Satz 10 taucht folgendes Problem auf: wie soll man die Liste der Grundsätze in Def. 13 vervollständigen, damit die Klasse aller Folgerungen dieser erweiterten Klasse von Grundsätzen mit der gegebenen Klasse Rt_k zusammenfalle? Die Sätze 11 und 12, die ich gleich anführen werde, enthalten die Lösung dieses Problems und beweisen zugleich, dass man — in Bezug auf die Sprache des Klassenkalküls — die uns bekannte Definition der in einem Bereiche mit k Elementen richtigen Aussage (Def. 26) durch eine andere, äquivalente, ersetzen kann, die der Definition des beweisbaren Satzes (Def. 17) analog ist und die darum strukturellen Charakter besitzt.

Satz 11. Wenn k eine natürliche Zahl und X die aus sämtlichen Axiomen und den Aussagen a und γ_k bestehende Klasse ist, so ist $Rt_k = Fl(X)$.

Satz 12. Wenn k eine unendliche Kardinalzahl und X die aus sämtlichen Axiomen, aus der Aussage a und aus allen Aussagen γ_l (wo l eine beliebige natürliche Zahl ist) bestehende Klasse ist, so ist $Rt_k = Fl(X)$.

Der Beweis dieser Sätze stützt sich hauptsächlich auf die Sätze 9 und 10 und auf die drei folgenden Lemmata:

Lemma H. Für jede beliebige Kardinalzahl k gilt $a \in Rt_k$.

Lemma I. Wenn k eine natürliche Zahl und l eine von k verschiedene Kardinalzahl ist, so gilt $\gamma_k \in R_k$ und $\gamma_k \in R_l$, dagegen $\gamma_l \in R_k$ und $\gamma_l \in R_l$.

Lemma K. Wenn $x \in As$ und X die aus sämtlichen Axiomen und der Aussage a bestehende Klasse ist, so gibt es eine der Aussage x mit Rücksicht auf die Klasse X äquivalente Aussage y , derart dass entweder y eine quantitative Aussage ist oder $y \in Bw$ oder endlich $\gamma_l \in Bw$.

Lemma H und I sind fast evident, wogegen der Beweis des sehr wichtigen und an sich interessanten Lemmas K nicht ganz einfach ist⁵⁰⁾.

⁵⁰⁾ Dieses Lemma ist in seinem wesentlichen Teile in den Resultaten enthalten, welche sich in der Arbeit Skolem₁, S. 29–37 finden.

Mit Hilfe von Satz 9 und Lemma I kann man aus Satz 12 folgende Konsequenz ableiten, welche im Verein mit Satz 11 die wesentlichen Unterschiede hervortreten lässt, die in der logischen Struktur der Klassen Rt_k auftreten, je nachdem, ob die Kardinalzahl k endlich oder unendlich ist:

Satz 13. Wenn k eine unendliche Kardinalzahl ist, so gibt es keine Klasse X , welche unter ihren Elementen nur eine endliche Zahl von Aussagen besitzt, die keine Axiome sind, und dabei die Formel: $Rt_k = Fl(X)$ verifiziert⁵¹⁾.

Als leicht zu gewinnende Folgerungen aus Lemma I und den Sätzen 11 und 12 führe ich ferner an:

Satz 14. Wenn k eine natürliche Zahl und l eine von k verschiedene Kardinalzahl ist, so gilt $Rt_k \subset R_l$ und $R_l \not\subset Rt_k$.

Satz 15. Wenn k und l unendliche Kardinalzahlen sind, so gilt $Rt_k = Rt_l$.

Satz 16. Wenn k eine unendliche Kardinalzahl ist und $x \in Rt_k$, so gibt es eine solche natürliche Zahl l , dass $x \in Rt_l$ (m. a. W. die Klasse Rt_k ist in der Summe aller dieser Klassen Rt_l enthalten).

Gemäss den Sätzen 14–16 (bzw. Lemma I) gibt es für jede natürliche Zahl k eine solche Aussage, welche in jedem Bereiche mit k Elementen und in keinem Bereiche von anderer Mächtigkeit richtig ist; dagegen ist jede in einem unendlichen Bereiche richtige Aussage auch in jedem anderen unendlichen Bereiche (ohne Rücksicht auf seine Mächtigkeit) und ausserdem in gewissen endlichen Bereichen richtig. Wir schliessen daraus, dass die betrachtete Sprache es gestattet, eine derartige Eigenschaft von Klassen von Individuen auszudrücken, wie das Bestehen aus genau k Elementen, wo k eine beliebige natürliche Zahl ist; wir finden dagegen in dieser Sprache kein Mittel, um irgend eine spezielle Art von Unendlichkeit (z. B. die Abzählbarkeit) auszuzeichnen, und wir vermögen auch nicht mit Hilfe einer einzigen oder einer endlichen Zahl von Aussagen zwei solche Eigenschaften von Klassen, wie Endlichkeit und Unendlichkeit, voneinander zu unterscheiden⁵²⁾.

⁵¹⁾ Die Idee des Beweises dieses Satzes ist dieselbe wie in den Beweisen der Sätze I. 24 und I. 25 in der Arbeit Tarski₁, S. 377–378. Würden wir aus dieser Arbeit die Def. I. 3, S. 375 hier übernehmen und zugleich den Folgerungsbegriff, mit dem wir operieren, erweitern, indem wir nämlich in der Bedingung (α) der Def. 15 die Worte „oder x ist ein Axiom“ hinzufügen, so könnten wir aus den Sätzen 11 und 13 folgende Konsequenz ableiten:

Damit die Klasse Rt_k ein axiomatisierbares deduktives System sei, ist es notwendig und hinreichend, dass k eine natürliche Zahl ist.

⁵²⁾ Diese Ergebnisse, wie auch der unten angeführte Satz 19, stammen von Löwenheim; vgl. Löwenheim₁ (besonders Satz 4, S. 459) und Skolem₁.

Mit Hilfe der Sätze 9, 11 und 12 beweisen wir den

Satz 17. Wenn X eine widerspruchsfreie Klasse von Aussagen ist, die unter ihren Elementen sämtliche Axiome und die Aussage α enthält, so gibt es eine solche Kardinalzahl k , dass $X \subset Rt_k$; wenn hierbei X ein vollständiges deduktives System ist, so ist $X = Rt_k$.

Wenn wir diesen Satz mit den Sätzen 11 und 12 zusammenstellen, erhalten wir eine strukturelle Beschreibung aller vollständigen deduktiven Systeme, welche unter ihren Elementen sämtliche Grundsätze und die Aussage α enthalten. Es ist zu bemerken, dass das Vorhandensein der Aussage α hier wesentlich ist: die Mannigfaltigkeit der Systeme, die diese Aussage nicht enthalten, ist bedeutend grösser und ihre erschöpfende Beschreibung würde nicht besonders einfach ausfallen⁵³.

Die weiteren Überlegungen betreffen Aussagen, die in jedem Individuenbereich richtig sind, d. h. zur Klasse Rt gehören.

Satz 18. Damit $x \in Rt$, ist notwendig und hinreichend, dass — für jede Kardinalzahl k — $x \in Rt_k$ (m. a. W. die Klasse Rt ist der Durchschnitt aller dieser Klassen Rt_k).

Dieser Satz, welcher eine unmittelbare Konsequenz der Def. 27 und des Satzes 8 bildet, lässt sich mit Hilfe der Sätze 9 und 16 wesentlich verschärfen:

Satz 19. Damit $x \in Rt$, ist es notwendig und hinreichend, dass — für jede natürliche Zahl k — $x \in Rt_k$.

Die Richtigkeit einer Aussage in allen endlichen Bereichen zieht somit schon ihre Richtigkeit in jedem Individuenbereich nach sich.

Aus den Sätzen 9, 14 und 18 leiten wir ferner folgende zwei Korollare ab:

Satz 20. Für jede beliebige Kardinalzahl k gilt $Rt \subset Rt_k$, dagegen $Rt_k \not\subset Rt$.

Satz 21. Die Klasse R ist ein widerspruchsfreies, aber kein vollständiges deduktives System.

Satz 22. $Bw \subset Rt$, dagegen $Rt \not\subset Bw$.

Dieser Satz folgt aus den Sätzen 10, 18 und dem Lemma L:

Lemma L. $a \in Rt$, dagegen $a \notin Bw$.

⁵³ Mit Problemen von diesem Typus, d. i. mit der strukturellen Beschreibung aller vollständigen Systeme einer gegebenen Wissenschaft, habe ich mich in den Jahren 1926–28 beschäftigt, und zwar in Anwendung auf verschiedene elementare deduktive Wissenschaften (Klassenkalkül, Arithmetik der reellen Zahlen, Geometrie der Geraden, Theorie der Ordnung, Theorie der Gruppen); über die noch nicht veröffentlichten Ergebnisse dieser Untersuchungen wurde in den Seminarübungen aus dem Gebiete der Methodologie der deduktiven Wissenschaften berichtet, die ich an der Warschauer Universität in den Jahren 1927/28 und 1928/29 leitete. Vgl. Presburger, S. 92–101 (besonders Anm. 4) auf S. 95).

Dass $a \in Rt$, gewinnen wir sofort aus Lemma H und Satz 18; der exakte Beweis des zweiten Teiles des Lemmas ist bedeutend schwieriger.

Satz 23. Wenn x eine quantitative Aussage ist, so $x \in R$.

Der Beweis, der sich auf Lemma I, Satz 18 und Def. 32 stützt, bietet keine Schwierigkeiten.

Satz 24. Wenn X die aus sämtlichen Grundsätzen und der Aussage α bestehende Klasse ist, so gilt $Rt = Fl(X)$.

Diesen Satz kann man am leichtesten mit Hilfe der Sätze 11, 12 und 18 beweisen.

Indem wir das Lemma K anwenden, gewinnen wir daraus unmittelbar:

Satz 25. Wenn $x \in As$, $x \in Rt$ und $\bar{x} \in Rt$, so gibt es eine quantitative Aussage y , die mit der Aussage x mit Rücksicht auf die Klasse Rt äquivalent ist.

In Hinblick auf Lemma L und Satz 24 finden wir folgende Situation vor: der Begriff der in jedem Individuenbereich richtigen Aussage besitzt einen weiteren Umfang als der Begriff der anerkannten Aussage, denn die Aussage α gehört zum Umfang des ersten, aber nicht des zweiten dieser Begriffe; wenn wir jedoch das System der Grundsätze durch eben diese einzige Aussage α vervollständigen, werden die beiden Begriffe umfangsgleich. Weil es mir wünschenswert scheint, dass — in Bezug auf den Klassenkalkül — die Begriffe der anerkannten und der in jedem Individuenbereich richtigen Aussage sich hinsichtlich des Umfangs nicht unterscheiden⁵⁴, würde ich es eo ipso angezeigt finden, die Aussage α zu den Axiomen der betrachteten Wissenschaft hinzuzufügen.

Es bleibt noch die Frage des Verhältnisses des in Def. 23 eingeführten absoluten Wahrheitsbegriffs zu den zuletzt untersuchten Begriffen zu klären.

Vergleichen wir die Def. 22 und 23 mit den Def. 24 und 25 und wenden wir den Satz 8 an, so gewinnen wir leicht folgendes Resultat:

⁵⁴ Von dieser Tendenz wird noch im nächsten Paragraphen die Rede sein. Es ist zu erwähnen, dass schon Schröder, der übrigens von anderen Erwägungen ausgeht, den Vorschlag gemacht hat, das System der Voraussetzungen des Klassenkalküls durch die Aussage α zu vervollständigen (und sogar durch noch andere Aussagen, die jedoch — was man leicht zeigen kann — in einfacher Weise aus der Aussage α folgen); vgl. Schröder, II. Bd. I. Abt., S. 318–349. — In diesem Zusammenhang bemerke ich, dass mir die Einschaltung der Aussage α in das „formale“ System der Algebra der Logik (von dem der Klassenkalkül eine Interpretation ist) nicht zweckentsprechend zu sein scheint: es sind ja viele Interpretationen dieses Systems bekannt, in denen die betrachtete Aussage nicht erfüllt ist.

Satz 26. Ist a die Klasse aller Individuen, so gilt $x \in Wr$ dann und nur dann, wenn x eine im Bereiche a richtige Aussage ist; wenn also die Kardinalzahl k die Mächtigkeit der Klasse a ist, so ist $Wr = Rt_k$.

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 20 und 26 bildet

Satz 27. $Rt \subset Wr$, dagegen $Wr \not\subset Rt$.

Wenn wir Satz 26 mit den Sätzen 14 bzw. 11 und 12 zusammenstellen, kommen wir zum Schluss, dass diejenigen Voraussetzungen der Metawissenschaft, vermöge welcher man bestimmen kann, welche Mächtigkeit die Klasse aller Individuen besitzt (und die im Beweise des Satzes 26 selbst nicht intervenieren), auf den Umfang des Terminus „wahre Aussage“ einen wesentlichen Einfluss ausüben: der Umfang des betrachteten Terminus ist verschieden je nachdem, ob jene Klasse endlich oder unendlich ist; im ersten Falle hängt der Umfang sogar davon ab, wie gross die Mächtigkeit der besprochenen Klasse ist.

Weil man insbesondere auf dem Boden des hier angenommenen Systems von Voraussetzungen zeigen kann, dass die Klasse aller Individuen unendlich ist (vgl. S. [30]), ermöglicht der Satz 26 im Verein mit Satz 12 eine strukturelle Charakteristik der wahren Aussagen:

Satz 28. Damit $x \in Wr$, ist es notwendig und hinreichend, dass x eine Folgerung aus der Klasse ist, die aus sämtlichen Axiomen, der Aussage α und allen Aussagen $\bar{\gamma}_l$ besteht, wo l eine beliebige natürliche Zahl ist.

Dieser Satz könnte mit Rücksicht auf seine Form offenbar als Definition der wahren Aussage betrachtet werden; es wäre dies eine rein strukturelle, der Def. 17 des beweisbaren Satzes vollkommen analoge Definition. Es muss jedoch mit Nachdruck betont werden, dass die Möglichkeit, eine derartige Definition zu konstruieren, eine rein zufällige Erscheinung ist: wir verdanken sie den spezifischen Eigentümlichkeiten der betrachteten Wissenschaft (jenen Eigentümlichkeiten, die u. a. in dem Lemma K, welches die wesentlichste Prämisse im Beweise der Sätze 12 und 28 bildet, ihren Ausdruck gefunden haben) sowie — in gewissem Grade — den in der Metawissenschaft angenommenen starken existenzialen Voraussetzungen; dagegen liegt hier — im Gegensatz zu der ursprünglichen Definition — keine allgemeine Konstruktionsmethode vor, die man auch auf andere deduktive Wissenschaften anwenden könnte.

Es ist bemerkenswert, dass man durch die Analyse des Beweises des Satzes 28 und der Lemmata, aus denen dieser Satz folgt, ein allgemeines strukturelles Kriterium der Wahrheit für alle Aussagen der untersuchten Sprache gewinnen kann: aus dem Satze 28 lässt sich leicht ein solches Kriterium für quantitative Aussagen ableiten, und der Beweis des Lemmas K gestattet es, jeder Aussage der Sprache eine ihr äquivalente Aussage effektiv zuzuordnen, die, wenn sie nicht quantitativ ist,

offensichtlich wahr oder offensichtlich falsch ist. Eine analoge Bemerkung gilt für den Begriff der Richtigkeit in einem gewissen, bzw. in jedem Individuenbereiche.

Die wichtigsten in diesem Abschnitt gewonnenen Ergebnisse zusammenfassend, können wir folgendes feststellen:

es ist uns gelungen, für die Sprache des Klassenkalküls das zu konstruieren, was wir vorher erfolglos in Bezug auf die Umgangssprache versucht haben, nämlich eine formal korrekte und sachlich zutreffende semantische Definition des Ausdrucks „wahre Aussage“;

unter Ausnützung der spezifischen Eigentümlichkeiten des Klassenkalküls haben wir es dann erreicht, diese Definition in eine ihr äquivalente strukturelle Definition umzuformen, aus der sich sogar ein allgemeines Kriterium der Wahrheit für die Aussagen der untersuchten Sprache ableiten lässt.

§ 4. Der Begriff der wahren Aussage in den Sprachen endlicher Ordnung.

Die Konstruktionsmethode, deren ich mich im vorigen Abschnitte bei der Untersuchung der Sprache des Klassenkalküls bedient habe, kann man — ohne besonders wesentliche Veränderungen — auf viele andere formalisierte Sprachen, sogar von bedeutend komplizierterer logischer Struktur, anwenden. Die folgenden Ausführungen sollen die Allgemeinheit dieser Methode hervorheben, die Grenzen ihrer Anwendbarkeit bestimmen und die Modifikationen skizzieren, welchen diese Methode in den verschiedenen Fällen ihrer konkreten Anwendung unterliegt.

Es ist keineswegs meine Absicht, in diesen Untersuchungen alle Sprachen zu berücksichtigen, die man sich überhaupt denken kann oder die irgend jemand irgendwann konstruieren möchte und könnte; ein derartiger Versuch müsste im vorinein zur Erfolglosigkeit verurteilt sein. In dem, was ich hier sagen werde, werde ich naturgemäss ausschliesslich Sprachen von derselben Struktur, wie die uns gegenwärtig bekannten, in Betracht ziehen (in der vielleicht unbegründeten Überzeugung, dass sie, wie bisher, so auch künftig ein genügendes Fundament für die Grundlegung des gesamten deduktiven Wissens

bilden werden). Und sogar diese Sprachen weisen in ihrem Aufbau so grosse Unterschiede auf, dass der Versuch, sie in einer ganz allgemeinen und dabei präzisen Weise zu untersuchen, auf bedeutende Schwierigkeiten stossen müsste. Es sind dies allerdings Unterschiede eher „kalligraphischer“ Natur: so treten z. B. in manchen Sprachen ausschliesslich Konstante und Variable auf, in anderen können wir den Gebrauch von sog. technischen Zeichen (Klammern, Punkten u. s. w.) nicht vermeiden; in manchen Sprachen verwenden wir als Variable Symbole von genau bestimmter Gestalt, wobei die Gestalt der Variablen von ihrer Rolle und Bedeutung abhängig ist, in anderen dagegen können als Variable ganz beliebige Symbole verwendet werden, wenn sie sich nur ihrer Gestalt nach von den Konstanten unterscheiden; in manchen Sprachen wieder ist jeder Ausdruck ein System von „linear geordneten“ d. i. in einer Zeile der Reihe nach aufeinander folgenden Zeichen, in anderen können sich die Zeichen, die Bestandteile eines und desselben Ausdrucks sind, in verschiedener Höhe, nicht nur nebeneinander, sondern auch untereinander befinden. Diese „Kalligraphie“ der Sprache übt jedoch einen ziemlich starken Einfluss auf die Form der Konstruktionen im Gebiete der Metasprache aus, was ohne Zweifel schon bei einer flüchtigen Durchsicht der vorangehenden Paragraphen in die Augen springt⁵⁵⁾. Bereits aus diesem Grunde tragen die folgenden Ausführungen einen skizzenhaften Charakter; dort, wo sie eine mehr präzise Form annehmen, betreffen sie konkret beschriebene Sprachen, die auf dieselbe Weise wie die uns bekannte Sprache des Klassenkalküls aufgebaut sind (also Sprachen ohne technische Zeichen, mit genau bestimmter Gestalt der Variablen, mit linearer Ordnung der Zeichen in jedem Ausdruck u. s. w.)⁵⁶⁾.

⁵⁵⁾ Vgl. hiezu z. B. S. [49], besonders ⁴⁰⁾.

⁵⁶⁾ Um die folgenden Ausführungen in eine ganz präzise, konkrete und dabei genügend allgemeine Form zu kleiden, würde es genügen, als Gegenstand der Untersuchungen die Sprache irgend eines vollständigen Systems der mathematischen Logik zu wählen. Eine solche Sprache kann nämlich als „universale“ Sprache betrachtet werden, und zwar in dem Sinne, dass alle anderen formalisierten Sprachen — wenn man von Unterschieden „kalligraphischer“ Natur absieht — entweder Bruchstücke von ihr sind oder sich aus jener Sprache bzw. aus ihren Bruchstücken durch Hinzufügung dieser oder jener Konstanten gewinnen lassen, wobei seman-

Ehe wir an unsere Hauptaufgabe — die Konstruktion der Definition der wahren Aussage — herantreten, müssen wir in jedem konkreten Falle den Aufbau einer entsprechenden Metasprache und die Grundlegung der Metawissenschaft, die das eigentliche Untersuchungsgebiet bildet, vornehmen. Eine unseren Bedürfnissen entsprechende Metasprache muss drei Gruppen von Grundausdrücken enthalten: (1) Ausdrücke von allgemeinem Charakter; (2) Ausdrücke, die mit allen Konstanten der zu erörternden Sprache gleichbedeutend sind oder zum Definieren solcher gleichbedeutender Ausdrücke (unter Zugrundelegung der in der Metawissenschaft angenommenen Definitionsregeln) hinreichen; (3) Ausdrücke von strukturell-deskriptivem Typus, die einzelne Zeichen und Ausdrücke der betrachteten Sprache, ganze Klassen und Folgen solcher Ausdrücke oder

tische Kategorien der betreffenden Konstanten (vgl. unten S. [74] ff.) schon durch gewisse Ausdrücke der gegebenen Sprache repräsentiert sind; die Anwesenheit oder Abwesenheit derartiger Konstanten übt, wie wir uns überzeugen werden, nur einen minimalen Einfluss auf die Lösung des uns interessierenden Problems aus. Nichtsdestoweniger konnte ich mich hier nicht entschliessen die Untersuchungen in der erwähnten Richtung zu konkretisieren, und zwar aus folgendem Grunde. Das einzige mir bekannte vollständige System der mathematischen Logik, dessen Formalisierung — im Gegensatz z. B. zum System Whitehead-Russell, — keine Einwände zulässt und vollkommene Präzision aufweist, ist das von Leśniewski begründete System, das bisher in seiner Gänze noch nicht veröffentlicht worden ist (vgl. Leśniewski, und Leśniewski₂). Leider scheint mir dieses System wegen gewisser spezifischer Eigentümlichkeiten ein überaus undankbares Objekt für methodologische und semantische Untersuchungen zu sein. Die Sprache dieses Systems ist nicht als etwas potentiell „Fertiges“ gedacht, sondern als etwas „Wachsendes“: es sind nicht im vorhinein alle Zeichen und Sprachformen vorgesehen, welche in den Sätzen des Systems erscheinen können; dagegen sind genaue Regeln angegeben, welche in jedem Aufbaustadium des Systems seine sukzessive Bereicherung durch neue Ausdrücke und Formen ermöglichen; im Zusammenhang damit besitzen solche Termini wie „Aussage“, „Folgerung“, „beweisbarer Satz“, „wahre Aussage“ in Bezug auf das besprochene System keine absolute Bedeutung und müssen auf den jeweiligen aktuellen Zustand des Systems bezogen werden. Formal genommen würde es sogar schwer fallen, dieses System der allgemeinen, am Anfang des § 2 gegebenen Charakterisierung der formalisierten deduktiven Wissenschaften unterzuordnen. Um unter diesen Umständen das System Leśniewski's den Bedürfnissen der vorliegenden Untersuchungen anzupassen, müsste es einer recht gründlichen Umarbeitung unterzogen werden, was jedoch den Rahmen dieser Arbeit vollständig sprengen würde.

endlich die zwischen ihnen bestehenden Relationen bezeichnen. Die Unentbehrlichkeit der Ausdrücke der ersten Gruppe ist evident. Die Ausdrücke der zweiten Gruppe gestatten jede konkrete Aussage oder, allgemeiner ausgedrückt, jeden sinnvollen Ausdruck der betrachteten Sprache in die Metasprache zu übersetzen und die Ausdrücke der dritten Gruppe ermöglichen es, jedem solchen Ausdrucke einen ihn bezeichnenden Einzelnamen in der Metasprache zuzuordnen; diese beiden Umstände spielen zusammengenommen eine wesentliche Rolle bei der endgültigen Formulierung der gesuchten Definition. Entsprechend den drei Gruppen der Grundausdrücke umfasst das volle Axiomensystem der Metawissenschaft drei Gruppen von Aussagen: (1) Axiome von allgemein-logischem Charakter; (2) Axiome, die mit den Axiomen der untersuchten Wissenschaft gleichbedeutend oder logisch stärker als sie sind, die aber jedenfalls (unter Zugrundelegung der angenommenen Schlussregeln) zur Begründung aller mit den Lehrsätzen der betrachteten Wissenschaft gleichbedeutenden Aussagen hinreichen⁵⁷⁾; schliesslich (3) Axiome, welche die fundamentalen Eigenschaften der Grundbegriffe von strukturell-deskriptivem Typus bestimmen. Die Grundausdrücke und Axiome der ersten Gruppe (sowie die Definitions- und Schlussregeln) entnehmen wir irgend einem genügend ausgebauten System der mathematischen Logik; die Ausdrücke und Axiome der zweiten Gruppe sind naturgemäss von den spezifischen Eigentümlich-

⁵⁷⁾ Wie bereits bemerkt wurde (S. [21]), interessieren uns hier ausschliesslich solche deduktive Wissenschaften, die keine „formalen“ Wissenschaften in einer ganz besonderen Bedeutung dieses Wortes sind; ich habe dabei verschiedene Bedingungen — nicht formaler, sondern inhaltlicher Natur — angeführt, denen die hier untersuchten Wissenschaften genügen: ein streng bestimmter und für uns verständlicher Sinn der Konstanten, die Evidenz der Axiome, die Unfehlbarkeit der Schlussregeln. Ein äusseres Merkmal dieses Standpunkts ist eben der Umstand, dass unter den Grundausdrücken und den Axiomen der Metawissenschaft u. a. die Ausdrücke und Axiome der zweiten Gruppe auftreten: denn sobald wir gewisse Ausdrücke für verständlich halten oder an die Wahrheit gewisser Aussagen glauben, besteht kein Hindernis, sich ihrer je nach Bedarf zu bedienen; dies trifft auch auf die Schlussregeln zu, die wir im Bedarfsfalle aus der Wissenschaft in die Metawissenschaft transponieren dürfen. Wir werden uns im weiteren Verlauf unserer Überlegungen überzeugen, dass in dem gegebenen Falle dieses Bedürfnis tatsächlich besteht.

keiten der untersuchten Wissenschaft abhängig; für die dritte Gruppe endlich werden entsprechende Muster in den Ausführungen des § 2 geliefert. Es ist zu bemerken, dass die zwei ersten Gruppen der Grundausdrücke und Axiome sich teilweise decken und in jenen Fällen, in denen die mathematische Logik oder ihr Bruchstück Gegenstand der Untersuchung bildet (wie dies z. B. beim Klassenkalkül der Fall war), sogar ganz zu einer Gruppe verfließen.

Ist die Grundlegung der Metawissenschaft durchgeführt, so entsteht für uns zunächst die Aufgabe, aus der Gesamtheit aller Ausdrücke der Sprache die besonders wichtige Kategorie der Aussagesfunktionen und insbesondere der Aussagen auszuzeichnen. Die Ausdrücke der untersuchten Sprachen bestehen aus Konstanten und Variablen. Unter den Konstanten, deren Anzahl gewöhnlich endlich ist, finden wir in der Regel gewisse Zeichen aus dem Gebiete des Aussagenkalküls und des Funktionenkalküls, wie z. B. die Zeichen der Negation, der logischen Summe, des logischen Produkts, der Implikation, der Äquivalenz sowie die All- und Existenzzeichen — Zeichen, die uns teilweise schon aus § 2 bekannt sind; daneben begegnen wir manchmal auch anderen Zeichen, welche mit dem individuellen Charakter der betrachteten Sprache zusammenhängen und in inhaltlicher Deutung konkrete Individuen, Klassen oder Relationen bezeichnen, wie z. B. das Inklusionszeichen in der Sprache des Klassenkalküls, das eine bestimmte Relation zwischen Klassen von Individuen bezeichnet. Die Variablen treten gewöhnlich in unendlicher Anzahl auf; je nach ihrer Gestalt und der Interpretation der Sprache repräsentieren sie Namen von Individuen, Klassen oder Relationen (manchmal haben wir es auch mit Variablen zu tun, welche Aussagen vertreten, d. h. mit den sog. Aussagevariablen⁵⁸⁾). Unter den Ausdrücken, die aus den Zeichen beider

⁵⁸⁾ In vielen Sprachen treten ausserdem verschiedene andere Kategorien von Konstanten und Variablen auf, u. a. die sog. namenbildenden Funktoren, die in Verbindung mit Variablen zusammengesetzte Ausdrücke bilden, durch die Namen von Individuen, Klassen und Relationen vertreten werden (z. B. das Wort „Vater“ in der Umgangssprache oder das Zeichen des Komplements in der vollständigen Sprache des Klassenkalküls — vgl. 7) und 16)). Die Sprachen, die wir in dieser Arbeit betrachten, enthalten keine derartigen Zeichen und Ausdrücke.

Arten gebildet sind, werden vor allem die fundamentalen (elementaren) Aussagefunktionen, die den Inklusionen $\iota_{k,i}$ des Klassenkalküls entsprechen, ausgezeichnet. Die genaue Beschreibung der Gestalt dieser Aussagefunktionen und die Bestimmung ihres inhaltlichen Sinnes sind von den speziellen Eigentümlichkeiten der betrachteten Sprache abhängig. Jedenfalls sind dies gewisse Komplexe von Konstanten, die Namen von Individuen, Klassen oder Relationen sind, und von Variablen, welche diese Namen repräsentieren. Das erste Zeichen eines solchen Komplexes ist immer der Name einer Klasse oder einer Relation, bzw. eine entsprechende Variable, und wird (ausgebildender) Funktor der gegebenen fundamentalen Aussagefunktion genannt⁵⁹⁾; die übrigen Zeichen nennen wir Argumente, nämlich 1^{tes} , 2^{tes} , ... k^{tes} Argument — je nach der Stelle, die sie einnehmen. Für jede Konstante und Variable der untersuchten Sprache — mit Ausnahme der Konstanten aus dem Gebiete des Aussagenkalküls sowie der All- und Existenzzeichen — lässt sich eine fundamentale Funktion bilden, die dieses Zeichen enthält (die Aussagevariablen kommen, selbst wenn sie in der Sprache auftreten, in den fundamentalen Funktionen als Funktoren oder Argumente nicht vor, dagegen wird jede von ihnen als selbständige fundamentale

⁵⁹⁾ Es werden hier also die ausgebildenden Funktoren, deren Argumente Namen sind, mit den Namen von Klassen bzw. Relationen identifiziert (und zwar die ein-argumentigen Funktoren mit den Namen von Klassen und die übrigen mit den Namen von zwei- oder mehrgliedrigen Relationen). Bei derjenigen Interpretation des Terminus „Funktore“, welche an einigen Beispielen in 7) festgesetzt wurde, erscheint diese Identifizierung künstlich; jedenfalls stimmt sie sicher mit dem Geiste und der formalen Struktur der Umgangssprache nicht überein. Dagegen scheint mir aus vielen Gründen, auf die ich nicht näher eingehen werde, die Unterscheidung dieser beiden Kategorien von Ausdrücken (d. i. ausgebildender Funktoren und Namen von Klassen bzw. Relationen) in Bezug auf formalisierte Sprachen keineswegs notwendig oder zweckmäßig. Diese ganze Frage hat übrigens eher einen terminologischen Charakter und ist ohne Einfluss auf den weiteren Gang der Untersuchung; man kann nach Belieben entweder die im Texte angegebene Definition des Funktors rein formal auffassen und von der bisherigen Interpretation dieses Terminus absehen, oder aber die Interpretation von Termini wie „Name einer Klasse“, „Name einer Relation“ so erweitern, dass wir Ausdrücke mit einbeziehen, die im üblichen Sinne keine Namen sind.

Funktion betrachtet). Ferner führen wir die sog. Grundoperationen an Ausdrücken ein, mit deren Hilfe man aus einfacheren Ausdrücken zusammengesetztere bilden kann. Neben den Operationen des Negierens, des logischen Addierens und des Generalisierens, die uns aus § 2 bekannt sind (Def. 2, 3 und 6), kommen hier noch andere analog definierte Operationen in Betracht, wie das logische Multiplizieren, das Bilden der Implikation und Äquivalenz sowie das Partikularisieren; jede von diesen Operationen besteht darin, dass vor den betrachteten Ausdruck oder vor zwei auf einanderfolgende Ausdrücke (je nach der Art der Operation) entweder eine der zur Sprache gehörenden Konstanten des Aussagenkalküls oder auch das All- bzw. Existenzzeichen samt der unmittelbar darauf folgenden Variablen gestellt wird. Die Ausdrücke, die wir aus den fundamentalen Funktionen gewinnen, indem wir an ihnen beliebig oft in beliebiger Reihenfolge irgend welche von den Grundoperationen vollziehen, nennen wir eben Aussagefunktionen. Unter den Variablen, die in einer gegebenen Aussagefunktion auftreten, kann man — z. B. mit Hilfe rekursiver Definitionen — freie und gebundene Variable unterscheiden; Aussagefunktionen ohne freie Variable heißen Aussagen (vgl. Def. 10–12 im § 2).

Ferner definieren wir noch andere Begriffe, die eng mit dem deduktiven Charakter der Wissenschaft, welche Gegenstand der Untersuchung ist, zusammenhängen, und zwar die Begriffe des Axioms, der Folgerung und des beweisbaren Satzes. Zu den Axiomen zählen wir in der Regel gewisse Aussagen logischen Charakters, welche auf ähnliche Weise konstruiert sind, wie die Axiome der ersten Kategorie des Klassenkalküls (vgl. § 2, Def. 13); im übrigen hängt jedoch die Definition des Axioms gänzlich von den individuellen Eigentümlichkeiten der untersuchten Wissenschaft, manchmal sogar von zufälligen Faktoren ab, die mit ihrer historischen Entwicklung zusammenhängen. Bei der Präzisierung des Begriffs der Folgerung dagegen richten wir uns wieder — mutatis mutandis — nach den Mustern des § 2: die Operationen, mit deren Hilfe wir aus den Aussagen einer gegebenen Klasse ihre Folgerungen bilden, unterscheiden sich in keinem wesentlichen Punkt von den Operationen, die in der Def. 15 ange-

geben wurden; die Folgerungen aus den Axiomen werden beweisbare Sätze genannt.

Nach dieser Vorarbeit wenden wir uns bereits an unsere Hauptaufgabe — die Konstruktion der richtigen Definition der wahren Aussage. Wie sich aus § 3 ergibt, führt die uns zur Verfügung stehende Konstruktionsmethode zunächst über die Definition eines anderen Begriffs allgemeinerer Natur, der für die Forschungen auf dem Gebiet der Semantik der Sprache fundamentale Bedeutung hat; ich meine den Begriff: Erfülltsein einer Aussagefunktion durch eine Folge von Gegenständen. Im gleichen Paragraphen habe ich versucht, die übliche, in der Sprache vorgefundene Bedeutung des soeben angeführten Ausdrucks zu klären. Ich habe auch darauf hingewiesen, dass man sich beim Aufbau einer korrekten Definition des Begriffs des Erfülltseins der rekursiven Definition bedienen kann; zu diesem Zwecke genügt es — wenn man die rekursive Definition der Aussagefunktion beachtet sowie den inhaltlichen Sinn der fundamentalen Aussagefunktionen und der Grundoperationen an Ausdrücken im Auge behält — zwei Umstände festzustellen: (1) welche Folgen die fundamentalen Funktionen erfüllen, und (2) wie sich der Begriff des Erfülltseins bei Anwendung irgend welcher Grundoperationen verhält (oder genauer ausgedrückt: welche Folgen jene Aussagefunktionen erfüllen, die aus den gegebenen Aussagefunktionen mit Hilfe einer der Grundoperationen gewonnen werden, vorausgesetzt, dass bereits festgelegt ist, welche Folgen die gegebenen Aussagefunktionen erfüllen). Sobald die Präzisierung des Sinnes des betrachteten Begriffs gelungen ist, bietet die Definition der Wahrheit keine Schwierigkeiten mehr: die wahren Aussagen lassen sich als diejenigen Aussagen definieren, die durch eine beliebige Folge von Gegenständen erfüllt sind.

Bei der Realisation des eben skizzierten Planes in Bezug auf verschiedene konkrete Sprachen stossen wir jedoch auf Hindernisse prinzipieller Natur, und zwar in dem Augenblick, in dem wir die korrekte Definition des Begriffs des Erfülltseins endgültig zu formulieren versuchen. Um das Wesen dieser Schwierigkeiten klar zu machen, muss vorher ein Begriff erörtert werden, den einzuführen sich bisher keine Gelegenheit geboten hat, nämlich der Begriff der semantischen (oder Bedeutungs-) Kategorie.

Dieser Begriff, welcher von E. Husserl stammt, wurde durch Leśniewski in die Untersuchungen über die Grundlagen der deduktiven Wissenschaften eingeführt. Formal betrachtet, ist die Rolle dieses Begriffs bei dem Aufbau einer Wissenschaft analog der Rolle des Begriffs des Typus im System *Principia Mathematica* von Whitehead und Russell; was aber seinen Ursprung und seinen Inhalt anbelangt, entspricht er (annäherungsweise) eher dem aus der Grammatik der Umgangssprache wohl bekannten Begriff des Redeteiles. Während die Typentheorie hauptsächlich als eine Art Vorbeugungsmittel gedacht war, das die deduktiven Wissenschaften vor eventuellen Antinomien bewahren sollte, dringt die Theorie der semantischen Kategorien so tief in die fundamentalen, die Sinnhaftigkeit der Ausdrücke betreffenden Intuitionen hinein, dass es kaum möglich ist, sich eine wissenschaftliche Sprache vorzustellen, deren Aussagen einen deutlichen inhaltlichen Sinn besitzen, deren Bau jedoch mit der in Rede stehenden Theorie in einer ihrer Auffassungen nicht in Einklang gebracht werden kann⁶⁰⁾.

Aus Gründen, von denen schon am Anfang dieses Paragraphen die Rede war, müssen wir hier auf die Angabe einer präzisen strukturellen Definition der semantischen Kategorie verzichten und uns mit folgender annähernden Formulierung begnügen: zwei Ausdrücke gehören zu derselben semantischen Kategorie, wenn es (1) eine Aussagefunktion gibt, die einen dieser Ausdrücke enthält, und wenn (2) keine Funktion, die einen dieser Ausdrücke enthält, den Charakter einer Aussagefunktion verliert, falls man in ihr diesen Ausdruck durch den anderen ersetzt. Es folgt daraus, dass die Relation der Zugehörigkeit zu derselben Kategorie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Wenn man also das sog. Abstraktionsprinzip⁶¹⁾

⁶⁰⁾ Vgl. hierzu Leśniewski₁, besonders S. 14 und 68; Ajdukiewicz₂, S. 9 und 148. In formaler Hinsicht ist die Theorie der semantischen Kategorien von der ursprünglichen Typentheorie der *Principia Mathematica* (Whitehead-Russell₁, Vol. I, S. 37 ff.) ziemlich entfernt, sie unterscheidet sich dagegen wenig von der sog. vereinfachten Typentheorie (vgl. Chwistek₁, S. 12–14; Carnap₁, S. 19–22) und ist eher eine Erweiterung derselben.

⁶¹⁾ Vgl. Carnap₁, S. 48–50.

anwendet, kann man alle Ausdrücke der Sprache, die Bestandteile von Aussagefunktionen sind, in Klassen ohne gemeinsame Elemente einteilen, indem man nämlich zwei Ausdrücke dann und nur dann zu einer und derselben Klasse zählt, wenn sie zu derselben semantischen Kategorie gehören; jede solche Klasse nennen wir eben eine semantische Kategorie. Als einfachste Beispiele der semantischen Kategorien, die man in verschiedenen bekannten Sprachen antrifft, genügt es die Kategorie der Aussagefunktionen anzuführen, ferner die Kategorien, die beziehungsweise die Namen von Individuen, von Klassen von Individuen, von zweigliedrigen Relationen zwischen Individuen u. s. w. umfassen; Variable (bzw. Ausdrücke mit Variablen), welche Namen der gegebenen Kategorie repräsentieren, gehören ebenfalls zu derselben Kategorie.

Im Zusammenhang mit der Definition der semantischen Kategorie taucht folgende Frage auf: ist zur Feststellung des Umstandes, dass zwei gegebene Ausdrücke zu ein und derselben semantischen Kategorie gehören, die Berücksichtigung aller möglichen Aussagefunktionen, welche einen von den gegebenen Ausdrücken enthalten, und die Untersuchung ihres Verhaltens bei Ersetzung dieses Ausdrucks durch einen anderen notwendig, oder genügt die Beobachtung der in Rede stehenden Erscheinung in einigen oder sogar in nur einem Falle? Will man sich an den üblichen Sprachgebrauch anlehnen, so erscheint die zweite Eventualität viel natürlicher: damit zwei Ausdrücke zu derselben semantischen Kategorie gehören, genügt es, wenn es nur eine Funktion gibt, die einen dieser Ausdrücke enthält und die nach der Ersetzung dieses Ausdrucks durch den anderen eine Aussagefunktion bleibt. Dieses Prinzip, das man das Hauptprinzip der Theorie der semantischen Kategorien nennen könnte, wird dem Aufbau der hier untersuchten formalisierten Sprachen streng zugrunde gelegt⁶²⁾.

⁶²⁾ Auf konkrete Sprachen angewendet, erfordern die im Texte angegebenen Formulierungen — sowohl die der Definition der semantischen Kategorie, wie auch die des soeben erwähnten Prinzips — verschiedene Korrekturen und Ergänzungen. Sie sind jedenfalls zu allgemein, denn sie umfassen auch solche Ausdrücke, denen wir gewöhnlich keine selbständige Bedeutung zuschreiben, und reihen sie oft in dieselben semantischen Kategorien ein, zu welchen sinnvolle Ausdrücke gehören (so würden z. B. in der Sprache des Klassenkalküls zu derselben Kategorie die Ausdrücke

Es wird vor allem bei der Präzisierung des Begriffs der Aussagefunktion berücksichtigt; auch übt es einen wesentlichen Einfluss auf die Definition der Operation der Einsetzung aus, d. i. einer von jenen Operationen, mit deren Hilfe wir aus den Aussagen einer Klasse ihre Folgerungen bilden; wollen wir nämlich, dass diese Operation, an einer beliebigen Aussage ausgeführt, als Resultat immer eine neue Aussage gebe, so müssen wir uns darauf beschränken, für die Variablen nur solche Ausdrücke einzusetzen, welche zu derselben semantischen Kategorie gehören wie die entsprechenden Variablen⁶³⁾. Mit diesem Prinzip hängt ein allgemeines Gesetz eng zusammen, das die semantischen Kategorien aussagebildender Funktoren betrifft: die Funktoren zweier fundamentaler Aussagefunktionen gehören dann und nur dann zu derselben Kategorie, wenn die Zahl der Argumente in beiden Funktionen die gleiche ist und wenn zwei beliebige, ihrer Stelle nach einander entsprechende Argumente dieser Funktionen zu derselben Kategorie gehören. Daraus folgt insbesondere, dass kein Zeichen gleichzeitig ein Funktor zweier Funktionen sein kann, die eine verschiedene Anzahl von Argumenten besitzen, oder zweier solcher Funktionen (auch wenn sie die gleiche Anzahl von Argumenten besitzen), in denen zwei ihrer Stelle nach einander entsprechende Argumente zu verschiedenen Kategorien gehören.

„N“, „Ix“, und „Aix, x,“ gehören); in Bezug auf diese sinnlosen Ausdrücke verliert sogar — wie man leicht erweisen kann — das Hauptprinzip der Theorie der semantischen Kategorien seine Geltung. Diese Tatsache ist für unsere Untersuchungen von keiner wesentlichen Bedeutung, denn wir werden hier den Begriff der semantischen Kategorie nicht auf zusammengesetzte Ausdrücke, sondern ausschliesslich auf Variable anwenden. Andererseits zeigen die Beispiele, die wir im weiteren Verlaufe der Arbeit kennen lernen werden, dass obige Formulierungen in konkreten Fällen sehr weitgehende Vereinfachungen zulassen: dank einer entsprechenden Auswahl der beim Bau der Ausdrücke der Sprache verwendeten Zeichen entscheidet schon die blosse Gestalt des Zeichens (und sogar des zusammengesetzten Ausdrucks) über seine Kategorie. Infolgedessen ist es möglich, dass in den methodologischen und semantischen Untersuchungen, die eine konkrete Sprache betreffen, der Begriff der semantischen Kategorie explicite überhaupt nicht auftritt.

⁶³⁾ In der Sprache des Klassenkalküls und in jenen Sprachen, die ich im weiteren Verlauf der Arbeit näher beschreiben werde, können derartige Ausdrücke nur andere Variable sein; so erklärt sich die Formulierung der Def. 14 des § 2.

Wir brauchen eine Klassifikation der semantischen Kategorien: jeder Kategorie wird eine bestimmte natürliche Zahl zugeordnet, die Ordnung der Kategorie heisst; diese Ordnung wird zugleich allen Ausdrücken zugeschrieben, welche diese Kategorie umfasst⁶⁴). Der Sinn des in Rede stehenden Terminus lässt sich auf rekursivem Wege bestimmen. Zu diesem Zwecke nehmen wir folgende Konvention an (wobei wir nur jene Sprachen ins Auge fassen, die hier näher behandelt werden sollen, und ausschliesslich die semantischen Kategorien der Variablen berücksichtigen): (1) die 1^{te} Ordnung schreiben wir nur den Namen von Individuen und den sie repräsentierenden Variablen zu; (2) als Ausdrücke der $n+1$ ^{ten} Ordnung, wo n eine beliebige natürliche Zahl ist, bezeichnen wir die Funktoren aller jener fundamentalen Funktionen, deren Argumente insgesamt höchstens von n ^{ter} Ordnung sind, wobei mindestens eines genau von n ^{ter} Ordnung sein muss. Allen Ausdrücken, die zu einer gegebenen semantischen Kategorie gehören, kommt kraft obiger Konvention dieselbe Ordnung zu, die deshalb die Ordnung der betrachteten Kategorie genannt wird⁶⁵). Dagegen

⁶⁴) Vgl. hierzu Carnap₁, S. 31–32.

⁶⁵) Diese Klassifikation umfasst keineswegs alle semantischen Kategorien, die man in den formalisierten Sprachen antrifft. Sie umfasst z. B. nicht die Aussagevariablen und die Funktoren mit Aussageargumenten — also Zeichen, die im Aussagenkalkül auftreten, — und ebensowenig solche Funktoren, die samt den entsprechenden Argumenten Ausdrücke bilden, die zu einer von den Aussagefunktionen verschiedenen Kategorie gehören, wie z. B. die namenbildenden Funktoren, die ich in ⁶⁴) erwähnt habe.

Angesichts dessen könnte man die im Texte angeführte Definition der Ordnung in folgender Weise erweitern: (1) die 1^{te} Ordnung schreiben wir den Aussagen, den Namen von Individuen und den sie repräsentierenden Ausdrücken zu; (2) zu den Ausdrücken $n+1$ ^{ter} Ordnung rechnen wir jene Funktoren mit einer beliebigen Anzahl von Argumenten der Ordnung $\leq n$, die zusammen mit diesen Argumenten Ausdrücke der Ordnung $\leq n$ bilden, aber dabei selbst keine Ausdrücke n ^{ter} oder niedrigerer Ordnung sind. Auch diese Definition umfasst noch nicht alle sinnvollen Ausdrücke, die in den deduktiven Wissenschaften vorkommen. Es fallen nämlich unter diese Definition keine Zeichen, die Variable „binden“ (also solche Zeichen wie die All- und Existenzzeichen, die Zeichen „ Σ “ und „ Π “ aus der Mengenlehre und Analysis oder das Integralzeichen), Zeichen, die man — im Gegensatz zu den Funktoren — Operatoren nennen könnte (v. Neumann, spricht in diesem Zusammenhange von Abstraktionen). Dagegen ist die letzte Klassifikation vollkommen dem

ist die Kategorie keineswegs durch die Ordnung bestimmt: jede natürliche Zahl, die grösser ist als 1, kann Ordnung vieler verschiedener Kategorien sein; so z. B. sind sowohl die Namen der Klassen von Individuen wie auch die Namen der zwei-, drei- und mehrgliedrigen Relationen zwischen Individuen Ausdrücke 2^{ter} Ordnung.

Es lohnt sich die Aussagefunktionen der Sprache, entsprechend den semantischen Kategorien der in diesen Funktionen auftretenden freien Variablen, einer Klassifikation zu unterwerfen: von zwei Funktionen wollen wir nämlich sagen, dass sie denselben semantischen Typus besitzen wenn die Anzahl der freien Variablen jeder semantischen Kategorie in beiden Funktionen dieselbe ist (oder m. a. W., wenn man den freien Variablen der einen Funktion eineindeutig die freien Variablen der andern Funktion zuordnen kann, und zwar in der Weise, dass jeder Variablen eine Variable derselben Kategorie entspricht); die Klasse aller Aussagefunktionen, die denselben Typus wie eine gegebene Funktion besitzen, können wir einen semantischen Typus nennen.

Den Terminus „semantische Kategorie“ gebrauchen wir manchmal in übertragener Bedeutung, indem wir ihn nicht auf die Ausdrücke der Sprache, sondern auf die von ihnen bezeichneten Gegenstände anwenden; derartige „Hypostasen“ sind in logischer Hinsicht nicht ganz korrekt, aber sie vereinfachen die Formulierung vieler Gedanken. So sagen wir z. B., dass alle Individuen zu derselben semantischen Kategorie gehören, dass aber keine Klassen oder Relationen zu eben dieser Kategorie gehören. Aus dem oben angeführten allgemeinen Gesetze, das die aussagebildenden Funktoren betrifft, folgern wir, dass zwei Klassen dann und nur dann zu derselben Kategorie gehören, wenn alle ihre Elemente zu ein und derselben Kate-

System von Leśniewski angepasst, von dem in ⁶⁶) die Rede war; dieses System enthält nämlich überhaupt keine Operatoren mit alleiniger Ausnahme des Allzeichens, das zu keiner semantischen Kategorie gezählt wird. Ich bemerke noch, dass — meiner Ansicht nach — das Fehlen von Operatoren im System von Leśniewski eine Lücke bildet, welche in einem gewissen Grade seinen „universalen“ Charakter einschränkt; wegen der grossen Bedeutung dieser Zeichen für die mathematischen Forschungen wäre eine entsprechende Ergänzung des Systems sehr erwünscht.

gorie gehören; zwei zweigliedrige Relationen gehören dann und nur dann zu derselben Kategorie, wenn ihre Bereiche zu ein und derselben Kategorie gehören und wenn ihre Gegenbereiche gleichfalls zu einer Kategorie gehören: insbesondere gehören zwei Folgen dann und nur dann zu derselben Kategorie, wenn alle ihre Glieder zu ein und derselben Kategorie gehören; eine Klasse und eine Relation oder zwei Relationen mit verschiedener Gliederzahl gehören niemals zu derselben Kategorie. Ferner folgt daraus, dass es keine Klasse geben kann, deren Elemente zu zwei oder mehreren semantischen Kategorien gehören; in analoger Weise kann es keine Folge geben, die zu verschiedenen semantischen Kategorien gehörende Glieder besitzt. Individuen werden manchmal Gegenstände 1^{ter} Ordnung, Klassen von Individuen und die zwischen ihnen bestehenden Relationen Gegenstände 2^{ter} Ordnung genannt u. s. w.

Die Sprache eines vollständigen Systems der Logik soll bereits — aktuell oder potentiell — alle möglichen semantischen Kategorien enthalten, die in den Sprachen der deduktiven Wissenschaften auftreten. Eben dieser Umstand verleiht der erwähnten Sprache einen in gewissem Sinne „universalen“ Charakter, und er ist einer jener Faktoren, denen die Logik ihre fundamentale Bedeutung für das gesamte deduktive Wissen verdankt. In verschiedenen fragmentarischen Systemen der Logik sowie in anderen deduktiven Wissenschaften kann die Mannigfaltigkeit der semantischen Kategorien einer bedeutenden Beschränkung unterliegen — sowohl in Bezug auf ihre Zahl wie auch auf ihre Ordnung. Wie wir uns überzeugen werden, hängt der Grad der Schwierigkeit, die wir bei der Konstruktion einer korrekten Definition der wahren Aussage in Bezug auf diese oder jene konkrete Sprache zu überwinden haben, in erster Reihe von eben dieser Mannigfaltigkeit der in der Sprache auftretenden semantischen Kategorien ab, — genauer gesagt davon, ob die Ausdrücke und speziell die Variablen der untersuchten Sprache zu einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Kategorien gehören, in letzterem Fall auch noch davon, ob die Ordnungen aller dieser Kategorien von oben beschränkt sind oder nicht. Unter diesem Gesichtspunkt kann man vier Arten von Sprachen unterscheiden: (1) Sprachen, in denen alle Variablen zu einer und derselben semantischen Kategorie

gehören; (2) Sprachen, in denen die Anzahl der die Variablen umfassenden Kategorien grösser als 1, aber endlich ist; (3) Sprachen, in denen die Variablen zu unendlich vielen verschiedenen semantischen Kategorien gehören, wobei aber die Ordnung dieser Variablen eine im vorhinein gegebene natürliche Zahl n nicht überschreitet, und endlich (4) Sprachen, die Variable beliebig hoher Ordnung enthalten. Die Sprachen der ersten drei Arten werden wir Sprachen endlicher Ordnung nennen im Gegensatz zu den Sprachen der vierten Art — den Sprachen unendlicher Ordnung; die Sprachen endlicher Ordnung könnte man weiterhin in Sprachen 1^{ter}, 2^{ter} Ordnung u. s. w. einteilen — je nach der höchsten Ordnung der in der Sprache auftretenden Variablen. In Ergänzung der am Anfang des Paragraphen entworfenen Skizze des Aufbaus einer Metawissenschaft muss hier bemerkt werden, dass die Metasprache, auf deren Boden wir die Untersuchung führen, wenigstens mit allen jenen semantischen Kategorien ausgestattet sein soll, die in der untersuchten Sprache vertreten sind: dies ist notwendig, falls wir es wünschen, uns die Übersetzung eines beliebigen Ausdrucks aus der Sprache in die Metasprache zu ermöglichen⁶⁶⁾.

Hinsichtlich ihrer logischen Struktur sind die Sprachen 1^{ter} Art offenbar die einfachsten. Als ihr typisches Beispiel kann die uns bekannte Sprache des Klassenkalküls dienen. Wir haben im § 3 gesehen, dass in Bezug auf diese konkrete Sprache die Definition des Erfülltseins einer Aussagefunktion durch eine Folge von Gegenständen und dadurch auch die Definition der wahren Aussage keine grösseren Schwierigkeiten bietet. Die dort skizzierte Konstruktionsmethode lässt sich in ihrer Gänze auf andere Sprachen 1^{ter} Art anwenden. Es ist klar, dass dabei in Einzelheiten gewisse Abweichungen auftreten können; u. a. operieren wir nach Bedarf anstatt mit Folgen von Klassen mit Folgen anderer Art, z. B. mit Folgen von Individuen oder Relationen — je nach der inhaltlichen Interpretation und semantischen Kategorie der in der Sprache auftretenden Variablen⁶⁷⁾.

⁶⁶⁾ Es gelten hier — mutatis mutandis — die Bemerkungen aus ⁵⁷⁾.

⁶⁷⁾ Gewisse Komplikationen, auf die ich hier nicht näher eingehen werde, entstehen, wenn in der betrachteten Sprache neben Variablen auch

Beachtenswert ist ein besonders einfaches Beispiel der Sprachen 1^{ter} Art, und zwar die durch Einführung des All- und Existenzzeichens erweiterte Sprache des üblichen Aussagenkalküls⁶⁸⁾; die Einfachheit dieser Sprache besteht u. a. darin, dass sich der Begriff der Variablen mit dem Begriff der fundamentalen Aussagefunktion deckt. In der Metawissenschaft des Aussagenkalküls gibt man bekanntlich zwei verschiedene Definitionen des beweisbaren Satzes, deren Äquivalenz keineswegs evident ist: die eine stützt sich auf den Begriff der Folgerung und ist den Def. 15–17 des § 2 analog, die zweite hängt mit dem Begriff der zweiwertigen Matrix zusammen; dieser zweiten Definition ist es zu verdanken, dass wir — wenn uns die Gestalt einer beliebigen Aussage bekannt ist — leicht feststellen können, ob sie beweisbar ist⁶⁹⁾. Wenn wir nun für die betrachtete Sprache eine Definition der wahren Aussage streng nach den im § 3 angegebenen Mustern konstruieren, so überzeugen wir uns leicht, dass sie eine einfache Umformung der zweiten der erwähnten Definitionen des beweisbaren Satzes darstellt und dass infolgedessen in diesem Fall die beiden Termini „beweisbarer Satz“ und „wahre Aussage“ denselben Umfang besitzen; dieser Umstand liefert uns u. a. ein allgemeines strukturelles Kriterium der Wahrheit für die Aussagen der betrachteten Sprache. Die in vorliegender Arbeit begründete Konstruktionsmethode könnte man also in gewissem Sinne als eine Verallgemeinerung der aus den Untersuchungen über den Aussagenkalkül bekannten Matrizenmethode betrachten.

Ernste Schwierigkeiten entstehen erst dann, wenn wir Sprachen von komplizierterer Struktur betrachten, also Sprachen der 2^{ten}, 3^{ten} und 4^{ten} Art. Wir müssen nunmehr diese Schwierigkeiten analysieren und die Methoden beschreiben, die wenigstens ihre teilweise Überwindung ermöglichen. Um unsere Ausführungen möglichst klar und präzise zu gestalten, werde ich einige konkrete formalisierte Sprachen etwas genauer be-

zusammengesetzte Ausdrücke derselben semantischen Kategorie auftreten; als Beispiel kann die vollständige Sprache des Klassenkalküls dienen, von der in¹⁶⁾ die Rede war, oder die im Artikel Presburger₁ untersuchte Sprache eines Systems der Arithmetik (vgl. auch⁵⁶⁾).

⁶⁸⁾ Vgl. Hilbert-Ackermann₁, S. 84–85; Łukasiewicz₁, S. 154 ff.; Łukasiewicz-Tarski₁, § 4.

sprechen — je eine von jeder Art; ich werde versuchen, möglichst einfache Beispiele zu wählen, die von allen weniger wesentlichen, untergeordneten Komplikationen frei und dabei insofern typisch sind, als die erwähnten Schwierigkeiten auf ihrem Boden im ihrem ganzen Umfang und in aller Krassheit auftreten.

Die Sprache, die uns als Beispiel der Sprachen 2^{ter} Ordnung dienen wird, kann als Sprache der Logik der zweigliedrigen Relationen bezeichnet werden⁶⁹⁾. Die einzigen Konstanten dieser Sprache sind: das Zeichen der Negation „N“, das Zeichen der logischen Summe „A“ und das Allzeichen „II“. Als Variablen bedienen wir uns der Zeichen „x“, „x₁“, „x₁₁“, ... und „X“, „X₁“, „X₁₁“, ... Das aus dem Symbol „x“ und aus *k* kleinen, unten angefügten Strichen zusammengesetzte Zeichen nennen wir eine Variable *k*^{ter} Gestalt 1^{ter} Ordnung und bezeichnen es mit dem Symbol „v_k“; das in analoger Weise aus dem Symbol „X“ gebildete Zeichen heisst Variable *k*^{ter} Gestalt 2^{ter} Ordnung, symbolisch „V_k“. Bei inhaltlicher Deutung repräsentieren die Variablen 1^{ter} Ordnung Namen von Individuen, die Variablen 2^{ter} Ordnung Namen von zweigliedrigen Relationen zwischen Individuen; von inhaltlichem und übrigens — in Übereinstimmung mit der weiteren Beschreibung der Sprache — auch von formalem Gesichtspunkt aus gehören also die Zeichen „v_k“ und „V_k“ beziehungsweise zu zwei verschiedenen semantischen Kategorien. Als fundamentale Aussagefunktionen betrachten wir die Ausdrücke vom Typus „Xyz“, wo an Stelle von „X“ eine beliebige Variable 2^{ter} Ordnung, an Stelle von „y“ und „z“ — Variable 1^{ter} Ordnung auftreten. Diese Ausdrücke lesen wir: „das Individuum *y* steht in der Relation *X* zum Individuum *z*“ und bezeichnen sie — je nach der Gestalt der Variablen — mit den Symbolen „ $\varrho_{k,l,m}$ “; unter Anwendung des aus § 2 (S. [28]) bekannten Zeichens „ \circ “ setzen wir nämlich fest: $\varrho_{k,l,m} = (V_k \circ v_l) \circ v_m$. Die Definitionen der Grundoperationen an Ausdrücken sowie jene der Aussagefunktion, der Aussage, der Folgerung, des

⁶⁹⁾ Es ist dies ein Bruchstück der Sprache der Algebra der Relative, deren Grundlagen das Werk Schröder₁, III. Bd. enthält, — ein Bruchstück, das jedoch zum Ausdruck jedes Gedankens hinreicht, welcher sich in der erwähnten Sprache formulieren lässt (vgl. ¹⁶⁾).

beweisbaren Satzes u. s. w. sind den Definitionen des § 2 ganz analog. Man muss jedoch immer im Auge behalten, dass in der eben betrachteten Sprache zwei verschiedene Kategorien von Variablen auftreten und dass die Ausdrücke $\varphi_{k,l,m}$ die Rolle der Inklusionen $\iota_{k,l}$ spielen. Im Zusammenhang mit dem ersten der obigen Umstände betrachten wir anstatt einer Operation des Generalisierens (resp. des Partikularisierens, Def. 6 und 9) zwei analoge Operationen: das Generalisieren (Partikularisieren) in Bezug auf eine Variable 1^{ter} Ordnung sowie in Bezug auf eine Variable 2^{ter} Ordnung, deren Ergebnisse mit den Symbolen „ $\prod_k' x$ “ und „ $\prod_k'' x$ “ (bzw. „ $\prod_k' x$ “ und „ $\prod_k'' x$ “) bezeichnet werden; dementsprechend führen wir zwei Operationen des Einsetzens ein. Zu den Axiomen der Logik der Relationen zählen wir Aussagen, welche die Bedingung (α) der Def. 13 erfüllen, also Einsetzungen der Axiome des Aussagenkalküls und Generalisationen dieser Einsetzungen, und ausserdem alle Aussagen, die Generalisationen der Ausdrücke vom Typus $\prod_k'' \prod_l' \prod_m' (\varphi_{k,l,m} \cdot y + \overline{\varphi_{k,l,m}} \cdot \bar{y})$ sind, wo k, l und m beliebige natürliche Zahlen ($l \neq m$) sind und y eine beliebige Aussagefunktion ist, in der die freie Variable V_l nicht vorkommt; die Axiome der letzteren Kategorie könnte man mit Rücksicht auf ihren inhaltlichen Sinn Pseudodefinitionen nennen⁷⁰⁾.

Um eine korrekte und richtige Definition des Erfülltseins in Bezug auf die untersuchte Sprache zu erhalten, müssen wir zunächst die bisherige inhaltliche Kenntnis dieses Begriffes einigermaßen vertiefen. Im ersten Stadium des Operierens mit diesem Begriffe sprachen wir von dem Erfülltsein der Aussagefunktion durch einen, zwei, drei u. s. w. Gegenstände — je nach der Zahl der in der gegebenen Funktion auftretenden freien Variablen (vgl. S. [48] ff.). Der Begriff des Erfülltseins hatte dort einen in semantischer Hinsicht ausgeprägt mehrdeutigen Cha-

⁷⁰⁾ Dieser Terminus stammt von Leśniewski, der auf die Notwendigkeit aufmerksam machte, Pseudodefinitionen unter die Axiome der deduktiven Wissenschaften in jenen Fällen einzuschalten, in denen die Formalisierung der Wissenschaft die Möglichkeit der Konstruktion geeigneter Definitionen nicht zulässt (vgl. 11). Die Pseudodefinitionen kann man als Ersatz für das sog. Reduzibilitätsaxiom behandeln, das im System Whitehead-Russell₁ (Vol. I, S. 55 ff.) vorkommt; es wäre auch nicht schwer, den Zusammenhang dieser Aussagen mit einer Axiomengruppe aufzudecken, die in der Arbeit v. Neumann₁ (S. 18) angenommen wird.

rakter; er umfasste nämlich Relationen mit verschiedener Gliederzahl, Relationen, deren letzter Bereich eine Klasse von Aussagefunktionen war, während die anderen Bereiche — in dem dort betrachteten Falle der Sprache des Klassenkalküls — aus Gegenständen einer und derselben Kategorie bestanden, nämlich aus Klassen von Individuen. Im Grunde genommen hatten wir es nicht mit einem Begriffe zu tun, sondern mit einer unendlichen Anzahl analoger Begriffe, die verschiedenen semantischen Kategorien angehörten; hätten wir die Metasprache formalisiert, so müssten wir anstatt des einen Terminus „erfüllt“ unendlich viele verschiedene Termini verwenden. — Die semantische Mehrdeutigkeit des betrachteten Begriffs wächst noch, wenn wir zu Sprachen von komplizierterer logischer Struktur übergehen. Wenn wir nämlich die inhaltlichen Betrachtungen des § 3 fortsetzen, die dort angegebenen Beispiele analysieren und nach ihrem Muster neue konstruieren, so wird uns bald klar, dass zwischen den freien Variablen der Aussagefunktion und den diese Funktion erfüllenden Gegenständen eine strenge semantische Zuordnung besteht: jede freie Variable gehört zu derselben semantischen Kategorie wie der Name des ihr entsprechenden Gegenstandes. Kommen also unter den Variablen der Sprache wenigstens zwei verschiedene Kategorien vor — wie in dem eben untersuchten Falle —, so kann man sich nicht darauf beschränken, bei der Erörterung des Begriffs des Erfülltseins nur eine einzige Kategorie von Gegenständen zu betrachten; die Bereiche der einzelnen Relationen, die wir mit dem Terminus „Erfülltsein“ umfassen, verlieren also ihre semantische Eindeutigkeit (nur der letzte Bereich besteht wie vorher ausschliesslich aus Aussagefunktionen). Da aber die semantische Kategorie einer Relation nicht nur von der Anzahl der Bereiche, d. i. von der Anzahl der Relationsglieder abhängt, sondern auch von den Kategorien dieser Bereiche, so ist auch die Kategorie des Begriffs des Erfülltseins, oder vielmehr die Kategorie jedes einzelnen dieser Begriffe, von zwei Umständen abhängig — einerseits von der Anzahl, andererseits von den Kategorien der freien Variablen, die in den Aussagefunktionen auftreten, auf welche sich der betrachtete Begriff bezieht; mit einem Worte, davon, was wir als semantischen Typus der Aussage-

funktion bezeichnet haben: den Funktionen, die zwei verschiedenen Typen angehören, entsprechen stets zwei semantisch verschiedene Begriffe des Erfülltseins⁷¹⁾. Ich werde dies an einigen Beispielen veranschaulichen. Von den Gegenständen R , a und b werden wir sagen, dass sie die Funktion $\varrho_{1,2,3}$ dann und nur dann erfüllen, wenn R eine Relation ist, a und b Individuen sind und wenn aRb gilt (d. h. wenn a in der Relation R zu b steht); die Funktion $\varrho_{1,2,3} \cdot \varrho_{3,2,2}$ wird durch die Gegenstände R , a und S dann und nur dann erfüllt, wenn R und S Relationen sind, a ein Individuum ist und sowohl aRa , wie auch aSa gilt. Die Funktion $\mathfrak{N}_2' \mathfrak{N}_3' (\overline{\varrho_{1,2,3} + \varrho_{1,3,2}})$ wird durch jene und nur jene Relationen R erfüllt, welche symmetrisch sind, d. h. durch solche Relationen, dass — für beliebige Individuen a und b — die Formel: aRb stets: bRa ergibt; die Funktion $\mathfrak{N}_1'' (\overline{\varrho_{1,2,3} + \varrho_{1,3,2}})$ erfüllen jene und nur jene Individuen a und b , die der folgenden Bedingung genügen: für jede beliebige Relation R — wenn aRb , so bRa , also Individuen, die identisch sind. In den oben angeführten Beispielen treten Aussagefunktionen auf, die zu vier verschiedenen semantischen Typen gehören, und deshalb hatten wir es auch mit vier verschiedenartigen Relationen des Erfülltseins zu tun, obzwar die Anzahl der freien Variablen und demzufolge auch die Anzahl der Relationsglieder in den zwei ersten Beispielen dieselbe war.

Die dem Begriff des Erfülltseins in seiner ursprünglichen Fassung anhaftende semantische Mehrdeutigkeit machte eine genaue Charakterisierung dieses Begriffs durch eine einzige Aussage oder sogar durch eine endliche Anzahl von Aussagen unmöglich und verhinderte dadurch die Anwendung der einzigen uns bis jetzt bekannten Konstruktionsmethode für eine Definition der wahren Aussage. Um diese Mehrdeutigkeit zu vermeiden, nahmen wir bei der Untersuchung des Klassenkalküls zu einem Kunstgriff Zuflucht, der übrigens auch sonst

⁷¹⁾ Auch Funktionen eines semantischen Typus können übrigens mehrere semantisch verschiedene Begriffe des Erfülltseins entsprechen, falls nur die freien Variablen dieser Funktionen mindestens zu zwei verschiedenen semantischen Kategorien gehören; neben der Anzahl und den Kategorien der Variablen kommt hier nämlich auch ihre Anordnung in Betracht.

von Logikern und Mathematikern in ähnlichen Situationen verwendet wird: statt uns unendlich vieler Begriffe des Erfülltseins einer Aussagefunktion durch einzelne Gegenstände zu bedienen, versuchten wir, mit dem semantisch einheitlichen, wenn auch etwas künstlichen Begriff des Erfülltseins einer Funktion durch eine Folge von Gegenständen zu operieren; es erwies sich, dass dieser Begriff insofern allgemeiner als die vorhergehenden ist, als er — anschaulich gesprochen — sie alle als Spezialfälle „umfasst“ (den logischen Charakter dieses „Umfassens“ zu präzisieren würde übrigens ein wenig schwierig sein). Man kann sich leicht klar machen, dass sich diese Methode nicht ohne weiteres auf die gegenwärtigen Betrachtungen übertragen lässt. Das Erfülltsein ist in der neuen Fassung eine zweigliedrige Relation, deren Bereich aus Folgen und deren Gegenbereich aus Aussagefunktionen besteht. Wie früher, so besteht auch hier zwischen den freien Variablen einer Aussagefunktion und den entsprechenden Gliedern der sie erfüllenden Folgen eine strenge Abhängigkeit semantischer Natur. Wenn also die Sprache der Logik der Relationen Variable zweier verschiedener semantischer Kategorien enthält, so müssen wir in unseren Betrachtungen ebenfalls wenigstens zwei Kategorien von Folgen verwenden. So wird z. B. die Funktion $\mathfrak{N}_2' \mathfrak{N}_3' (\overline{\varrho_{1,2,3} + \varrho_{1,3,2}})$ ausschliesslich durch Folgen zweigliedriger Relationen zwischen Individuen erfüllt (nämlich durch jene und nur jene Folgen F , deren erstes Glied F_1 eine symmetrische Relation ist); die Funktion $\mathfrak{N}_1'' (\overline{\varrho_{1,2,3} + \varrho_{1,3,2}})$ dagegen erfüllen ausschliesslich Folgen von Individuen (und zwar solche Folgen f , für die $f_2 = f_3$ gilt). Der Bereich der Relation des Erfülltseins und eo ipso die Relation selbst verliert damit von neuem ihre semantische Eindeutigkeit; wir haben es wiederum nicht mit einem, sondern mit wenigstens zwei verschiedenen Begriffen des Erfülltseins zu tun. Aber noch schlimmer: es zeigt sich bei näherer Analyse, dass die neue Interpretation des Begriffs des Erfülltseins sich nicht mehr zur Gänze aufrechterhalten lässt. Oft enthält nämlich eine und dieselbe Aussagefunktion freie Variable zweier verschiedener Kategorien. Mit Rücksicht auf derartige Funktionen müssten wir mit Folgen operieren, deren Glieder dann ebenfalls zu zwei Kategorien gehören würden; so müsste z. B. das

erste Glied der Folge, welche die Funktion $\varrho_{1,2,3}$ erfüllt, eine Relation sein, die zwei folgenden aber Individuen. Es ist jedoch bekannt, dass die Theorie der semantischen Kategorien das Bestehen solcher „inhomogener“ Folgen überhaupt nicht zulässt; damit fällt die ganze Auffassung. So hat die Änderung der ursprünglichen Deutung des Begriffs des Erfülltseins nur eine, nebensächliche Ursache seiner semantischen Mehrdeutigkeit beseitigt, nämlich die verschiedene Gliederzahl der Relationen, die Gegenstand des Begriffs sind; ein anderer, weit wesentlicherer Faktor, nämlich die semantische Verschiedenartigkeit der einzelnen Relationsglieder, hat dagegen seine volle Kraft bewahrt.

Nichtsdestoweniger lässt sich die in § 3 angewendete Methode, wenn auch mit gewissen Modifikationen, auf die jetzt untersuchte Sprache anwenden: auch in diesem Falle kann man eine Deutung des Begriffs des Erfülltseins finden, bei der dieser Begriff seine semantische Mehrdeutigkeit verliert und dabei einen so allgemeinen Charakter annimmt, dass er alle Spezialfälle des ursprünglichen Begriffs des Erfülltseins „umfasst“. Es stehen uns hier sogar zwei verschiedene Methoden zur Verfügung; ich werde sie als Methode der mehrzeiligen Folgen und als Methode der semantischen Vereinheitlichung der Variablen bezeichnen.

Die erste Methode beruht darauf, dass wir das Erfülltsein nicht als zwei-, sondern als dreigliedrige Relation behandeln, die zwischen Folgen von Individuen, zwischen Folgen von zweigliedrigen Relationen und zwischen Aussagefunktionen besteht. Wir bedienen uns nämlich folgender Ausdrucksweise: „die Folge f von Individuen und die Folge F von Relationen erfüllen zusammen die Aussagefunktion x “. Den Inhalt dieser Wendung kann man sich leicht an konkreten Beispielen vergegenwärtigen; so z. B. erfüllen die Folge f von Individuen und die Folge F von Relationen zusammen die Aussagefunktion $\varrho_{1,2,3}$ dann und nur dann, wenn das Individuum f_2 in der Relation F_1 zum Individuum f_3 steht. Um für diese Wendung eine allgemeine Definition zu formulieren, verfahren wir streng nach dem Muster der Def. 22 aus § 3, wobei wir aber bedenken müssen, dass in der betrachteten Sprache die Rolle der fundamentalen Aussagefunktionen die

Ausdrücke $\varrho_{k,l,m}$ spielen und das statt einer Operation des Generalisierens hier zwei verwandte Operationen auftreten. Die Definition der wahren Aussage ist der Def. 23 vollständig analog.

Diese Methode kann man nun einigermaßen modifizieren, indem man das Erfülltsein als zweigliedrige Relation behandelt, die zwischen den sog. zweizeiligen Folgen und den Aussagefunktionen besteht. Als zweizeilige Folge (oder zweizeilige Matrix) bezeichnen wir nämlich jedes geordnete Paar, das aus zwei Folgen f und F besteht, wobei wir das k^{te} Glied der Folge f bzw. der Folge F als das k^{te} Glied der 1^{ten} bzw. der 2^{ten} Zeile der zweizeiligen Folge deuten wollen. Im gegebenen Falle handelt es sich um solche geordnete Paare, die aus einer Folge von Individuen und einer Folge von Relationen bestehen. Diese Modifikation besitzt, wie leicht ersichtlich, einen rein formalen Charakter und übt keinen wesentlicheren Einfluss auf die Konstruktion als Ganzes aus. Eben dieser Modifikation der betrachteten Methode ist der Terminus „Methode der mehrzeiligen Folgen“ angepasst.

Um die Methode der semantischen Vereinheitlichung der Variablen verstehen zu können, gehen wir von gewissen Erwägungen aus, die mit der gegenwärtig untersuchten Sprache nicht unmittelbar zusammenhängen. Man kann bekanntlich jedem Individuum a eine bestimmte zweigliedrige Relation a^* zuordnen, und zwar derart, dass verschiedenen Individuen verschiedene Relationen entsprechen; es genügt zu diesem Zwecke als a^* ein geordnetes Paar anzunehmen, dessen beide Glieder mit a identisch sind, d. h. jene Relation R , die dann und nur dann zwischen zwei beliebigen Individuen b und c besteht, wenn $b = a$ und $c = a$ ist. Auf Grund dieser Zuordnung kann man nun weiter jeder Klasse von Individuen eindeutig eine Klasse von Relationen, jeder mehrgliedrigen Relation zwischen Individuen eine entsprechende Relation zwischen Relationen zuordnen u. s. w.; so entspricht z. B. einer beliebigen Klasse A von Individuen eine Klasse A^* aller jener Relationen a^* , die den Elementen a der Klasse A zugeordnet sind. Auf diese Weise lässt sich jede Aussage über Individuen in eine äquivalente Aussage über Relationen umformen.

Wir vermerken diese Tatsachen, kehren zur Sprache der Logik der Relationen zurück und verändern, ohne ihre formale Struktur irgendwie anzutasten, die inhaltliche Deutung der in dieser Sprache auftretenden Ausdrücke. Alle Konstanten sollen dabei ihre frühere Bedeutung behalten, während alle Variablen sowohl 1^{ter} wie 2^{ter} Ordnung von nun an Namen zweigliedriger Relationen vertreten sollen. Den fundamentalen Aussagefunktionen vom Typus „ Xyz “, wo anstatt „ X “ irgend eine der Variablen V_k und anstatt „ y “ und „ z “ zwei beliebige Variable v_i und v_m auftreten, schreiben wir folgenden Sinn zu: „es gibt solche Individuen a und b , dass a in der Relation X zu b steht, $y = a^*$ und $z = b^*$ “; damit wird der Sinn der zusammengesetzten Aussagefunktionen ebenfalls modifiziert. Inhaltlich ist es fast evident, dass jede in der früheren Interpretation wahre bzw. falsche Aussage auch in der neuen wahr bzw. falsch bleibt. Durch diese neue Interpretation gehören nunmehr alle Variablen der Sprache — zwar nicht vom formalen, aber vom inhaltlichen Gesichtspunkt aus — zu einer und derselben semantischen Kategorie: sie vertreten Worte desselben „Redeteiles“. Infolgedessen kann man die betrachtete Sprache mit genau derselben Methode untersuchen wie alle Sprachen der 1^{ten} Art; insbesondere kann man das Erfülltsein als zweigliedrige Relation zwischen Folgen von Relationen und Aussagefunktionen behandeln. Dabei entsteht eine unbedeutende Komplikation technischer Natur; da nämlich in derselben Aussagefunktion zwei freie Variable verschiedener Ordnung mit denselben Indizes auftreten können, z. B. v_1 und V_1 , ist es ohne zusätzliche Festsetzung nicht klar, welche Glieder der Folge den Variablen 1^{ter} und welche den Variablen 2^{ter} Ordnung entsprechen sollen. Um diese Schwierigkeit zu beheben, wollen wir z. B. festsetzen, dass jeder Variablen v_k ein Glied der Folge mit ungeradem Index $2 \cdot k - 1$ und jeder Variablen V_k ein Glied mit geradem Index $2 \cdot k$ entspricht; so erfüllt z. B. die Folge F von Relationen die Funktion $\varphi_{k, i, m}$ dann und nur dann, wenn es solche Individuen a und b gibt, dass a in der Relation $F_{2 \cdot k}$ zu b steht, $F_{2 \cdot i - 1} = a^*$ und $F_{2 \cdot m - 1} = b^*$. Von dieser Einzelheit abgesehen, unterscheiden sich die Definitionen des Erfülltseins und der wahren Aussage in keinem wesentlichen Punkt von den Definitionen des § 3.

Die beiden dargestellten Methoden kann man auf alle Sprachen der 2^{ten} Art anwenden⁷²⁾. Falls die Variablen der betrachteten Sprache zu n verschiedenen semantischen Kategorien gehören, fassen wir — bei der Methode der mehrzeiligen Folgen — das Erfülltsein als eine $n+1$ -gliedrige Relation auf, die zwischen n Folgen der entsprechenden Kategorien und den Aussagefunktionen besteht, bzw. als zweigliedrige Relation, deren Bereich aus n -zeiligen Folgen (d. h. aus geordneten n -Tupeln von gewöhnlichen Folgen) und deren Gegenbereich aus Aussagefunktionen besteht. Die auf diese Methode gestützten Konstruktionen stellen wohl die natürlichste Verallgemeinerung der Konstruktionen aus § 3 dar und ihre sachliche Richtigkeit scheint unzweifelhaft.

Bei der Anwendung der Methode der semantischen Vereinheitlichung der Variablen spielt eine wesentliche Rolle die Wahl der vereinheitlichenden Kategorie, d. h. jener semantischen Kategorie, in der sich alle Variablen der betrachteten Sprache interpretieren lassen. Von der vereinheitlichenden Kategorie fordern wir nur eines: dass man nämlich allen Gegenständen jeder semantischen Kategorie, die durch die Variablen der gegebenen Sprache repräsentiert ist, „effektiv“ Gegenstände der gewählten Kategorie zuordnen kann, und zwar in eindeutiger Weise (d. h. so, dass verschiedenen Gegenständen verschiedene entsprechen). Trotzdem ist die Wahl der vereinheitlichenden Kategorie nicht immer ebenso einfach, wie in dem oben untersuchten Falle der Sprache der Relationslogik: nicht immer kann man diese Wahl unter den Kategorien treffen, die in der Sprache vorkommen. Wenn z. B. die Variablen der betrachteten Sprache Namen von zweigliedrigen Relationen

⁷²⁾ Dies gilt sogar für solche Sprachen, in denen Variable auftreten, die durch die Klassifikation auf S. [78] (vgl. ⁶³⁾) nicht erfasst werden; auf gewisse, übrigens nicht besonders wichtige Schwierigkeiten, die hier auftauchen könnten, gehe ich nicht näher ein. Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, dass Aussagevariable, auch wenn sie in der Sprache vorkommen, die Konstruktion keineswegs komplizieren und dass es sich insbesondere nicht lohnen würde, sie in den Prozess der semantischen Vereinheitlichung einzubeziehen: Aussagen, die derartige Variable enthalten, kann man nämlich in der Weise ausschalten, dass man jeder von ihnen eindeutig eine äquivalente Aussage zuordnet, die keine Aussagevariablen enthält (vgl. Hilbert-Ackermann, S. 84–85).

zwischen Individuen und Namen von Klassen, die aus Klassen von Individuen bestehen, repräsentieren, so stellt sich als die einfachste vereinheitlichende Kategorie, wie es scheint, die Kategorie der zweigliedrigen Relationen zwischen Klassen von Individuen dar. Ich verzichte auf die nähere Analyse dieses Problems (sie würde die Kenntnis gewisser Tatsachen aus dem Gebiete der Mengenlehre voraussetzen) und mache nur auf folgendes aufmerksam: (1) die vereinheitlichende Kategorie kann nicht niedrigerer Ordnung sein als irgend eine Kategorie der in der Sprache vorkommenden Kategorien; (2) für jede Sprache 2^{ter} Art kann man eine vereinheitlichende Kategorie, ja sogar unendlich viele solche Kategorien finden, und zwar schon unter den Kategorien n^{ter} Ordnung, wenn n die höchste Ordnung der in der Sprache auftretenden Variablen ist. — Sobald die vereinheitlichende Kategorie bestimmt ist und die fundamentalen Aussagefunktionen entsprechend interpretiert sind, unterscheidet sich der weitere Verlauf der Überlegungen nicht mehr von der bei den Sprachen 1^{ter} Art angewendeten Konstruktionsmethode.

Im Gegensatz zu der Methode der mehrzeiligen Folgen besitzt die zuletzt betrachtete Methode einen ohne Zweifel etwas künstlichen Charakter. Nichtsdestoweniger erweisen sich bei näherer Analyse die mit Hilfe dieser Methode konstruierten Definitionen in einem nicht viel geringerem Maasse inhaltlich evident als die auf die vorige Methode gestützten Konstruktionen; dabei zeichnen sie sich durch ihre logische Einfachheit vorteilhaft aus. Wenn es sich insbesondere um die Definition der wahren Aussage handelt, so bietet der Beweis der Äquivalenz ihrer beiden Formulierungen in keinem konkreten Falle irgend welche Schwierigkeiten. Deutlich sichtbar werden die wesentlichen Vorzüge der Methode der Vereinheitlichung der Variablen aber erst bei der Untersuchung der Sprachen 3^{ter} Art, da sich hier die Methode der mehrzeiligen Folgen als ganz unbrauchbar erweist.

Als typisches Beispiel der Sprachen 3^{ter} Art wählen wir die Sprache der Logik der mehrgliedrigen Relationen⁷³⁾. In dieser Wissenschaft werden wir es mit denselben

⁷³⁾ Es ist dies eine Sprache, die der Sprache des engeren Funktionenkalküls von Hilbert-Ackermann, (S. 43 ff.) ähnlich, aber insofern

konstanten Zeichen ${}_nN^u$, ${}_nA^u$ und ${}_nH^u$ und mit denselben Variablen 1^{ter} Ordnung v_k zu tun haben, wie in der Logik der zweigliedrigen Relationen. Dagegen treffen wir hier Variable 2^{ter} Ordnung in grösserer Mannigfaltigkeit als vorher an. Als derartige Variable werden wir solche Zeichen wie ${}_nX'^u$, ${}_nX''^u$, ${}_nX'''^u$, ..., ${}_nX''''^u$; ${}_nX''''^u$, ${}_nX''''^u$, ..., ${}_nX''''^u$, ${}_nX''''^u$, ${}_nX''''^u$... u. s. w. verwenden; das aus dem Zeichen ${}_nX^u$, aus k kleinen Strichen unten und aus l solchen Strichen oben zusammengesetzte Symbol werden wir einen variablen Funktor k^{ter} Gestalt mit l Argumenten nennen und mit dem Symbol ${}_nV_k^l$ bezeichnen. Bei inhaltlicher Deutung repräsentieren die Variablen v_k , ebenso wie früher, Namen von Individuen, die Variablen V_k^l dagegen Namen von l -gliedrigen Relationen zwischen Individuen, insbesondere für $l=1$ Namen von 1-gliedrigen Relationen, d. i. Namen von Klassen; sowohl vom inhaltlichen als auch vom formalen Gesichtspunkt aus gehören die Zeichen v_k , V_k^1 , V_k^2 ... beziehungsweise zu unendlich vielen verschiedenen semantischen Kategorien 1^{ter} und 2^{ter} Ordnung. Zu den fundamentalen Aussagefunktionen zählen wir Ausdrücke vom Typus ${}_nXxy...z^u$, wo anstatt ${}_nX^u$ ein beliebiger variabler Funktor mit l Argumenten und anstatt ${}_nx^u$, ${}_ny^u$, ..., ${}_nz^u$ Variable 1^{ter} Ordnung in der Zahl l auftreten; diese Ausdrücke lesen wir folgendermassen: „zwischen den Individuen x, y, \dots, z (in der Zahl l) besteht die l -gliedrige Relation X^u . Je nach Anzahl und Gestalt der Variablen bezeichnen wir die fundamentalen Funktionen mit den Symbolen ${}_nq_{k,m}^u$, ${}_nq_{k,m,n}^u$...; indem wir nämlich: $q_{k,m} = V_k^1 \circ v_m$, $q_{k,m,n} = (V_k^2 \circ v_m) \circ v_n$ u. s. w. setzen; um eine einheitliche, von der Zahl der Variablen unabhängige Form des Symbolisierens zu gewinnen, wenden wir überdies Symbole von Typus ${}_nq_{k,p}^u$ an (wo ${}_np^u$ den Namen einer endlichen Folge natürlicher Zahlen repräsentiert), deren Sinn wir mit Hilfe der Formel: $q_{k,p}^u = (((V_k^l \circ v_{p_1}) \circ v_{p_2}) \circ \dots) \circ v_{p_i}$ bestimmen⁷⁴⁾. Die weiteren Definitionen der Metawissenschaft unterscheiden sich in nichts von den analogen Definitionen,

reicher ist, als in ihr die variablen Funktoren sowohl als freie wie auch als gebundene Variable auftreten können.

⁷⁴⁾ Streng genommen sollte man den Sinn des Symbols ${}_nq_{k,p}^u$ auf rekursivem Wege definieren.

die sich auf die Logik der zweigliedrigen Relationen und sogar auf den Klassenkalkül beziehen. Als Operationen des Generalisierens führen wir das Generalisieren hinsichtlich der Variablen v_k und der Variablen V_k^i ein und bezeichnen die Resultate dieser Operationen beziehungsweise mit den Symbolen „ $\prod_k x$ “ und „ $\prod_k^i x$ “. Die Liste der Axiome umfasst Aussagen, die die Bedingung (α) der Def. 13 aus § 2 erfüllen, und Pseudodefinitionen, die eine natürliche Verallgemeinerung der Pseudodefinitionen aus dem Gebiete der Logik der zweigliedrigen Relationen darstellen, deren nähere Beschreibung jedoch überflüssig erscheint.

Wir wenden uns nun dem Problem zu, wie der Begriff des Erfülltseins für die untersuchte Sprache zu erfassen und die Definition der Wahrheit zu konstruieren ist. Der Versuch, die Methode der mehrzeiligen Folgen auch hier anzuwenden, scheitert vollständig. Bei dieser Methode drückt nämlich der Terminus „Erfülltsein“ — in dieser oder jener Form — die Abhängigkeitsbeziehung zwischen n Folgen verschiedener Kategorien und den Aussagefunktionen aus, wobei n der Zahl der durch die Variablen der gegebenen Sprache repräsentierten semantischen Kategorien genau gleich ist. In dem eben untersuchten Falle ist die Zahl n unendlich gross, und die von uns verwendete Metasprache liefert uns — wie übrigens auch keine andere der aktuell existierenden formalisierten Sprachen — nicht die Mittel, um die gegenseitige Abhängigkeitsbeziehung zwischen Gegenständen zu erfassen, die zu unendlich vielen verschiedenen semantischen Kategorien gehören⁷⁵⁾.

Mit vollem Erfolg können wir dagegen die Methode der semantischen Vereinheitlichung der Variablen auf die betrachtete Sprache anwenden. Um das einzusehen, genügt es zu bemerken, dass man jeder n -gliedrigen Relation R zwischen

⁷⁵⁾ In den Fällen, in denen es sich darum handelt, die gegenseitige Abhängigkeitsbeziehung zwischen einer beliebigen, im vorhinein nicht bestimmten Zahl von Gegenständen einer und derselben semantischen Kategorie zu erfassen, verwenden wir in den logischen und mathematischen Konstruktionen meistens gewöhnliche Folgen. Für Gegenstände, die zu endlich vielen verschiedenen Kategorien gehören, erfüllen mehrzeilige Folgen die analoge Funktion. Dagegen finden wir auf dem Boden der bekannten Sprachen nichts derartiges, wie „Folgen mit unendlich vielen Zeilen“ (verschiedener semantischer Kategorien).

den Individuen in eindeutiger Weise eine Klasse R^* zuzuordnen kann, die aus n -gliedrigen Folgen von Individuen besteht, nämlich die Klasse aller Folgen f , welche folgender Bedingung genügen: zwischen den Individuen f_1, f_2, \dots, f_n besteht die Relation R ; insbesondere entspricht z. B. der zweigliedrigen Relation R die Klasse aller jener Folgen f mit zwei Gliedern f_1 und f_2 , für die $f_1 R f_2$ gilt. Infolgedessen kann man jede Aussage, die mehrgliedrige Relationen betrifft, in eine äquivalente Aussage umformen, die etwas über Klassen von Folgen aussagt. Wir erinnern hier daran, dass wir als Folgen von Individuen die zweigliedrigen Relationen zwischen Individuen und natürlichen Zahlen bezeichnen; alle Folgen von Individuen gehören somit — ohne Rücksicht auf die Anzahl ihrer Glieder — zu einer und derselben semantischen Kategorie und demnach gehören die Klassen dieser Folgen — im Gegensatz zu den mehrgliedrigen Relationen — ebenfalls zu einer und derselben Kategorie.

Auf Grund dieser Erwägungen vereinheitlichen wir nun teilweise die semantischen Kategorien der Variablen, und zwar in folgender Weise. Den Variablen v_k schreiben wir — wenigstens vorläufig — die frühere Bedeutung zu; dagegen repräsentieren die Variablen V_k^i von nun an die Namen beliebiger Klassen, die aus endlichen Folgen von Individuen oder aus anderen Gegenständen derselben Kategorie bestehen (also die Namen der Gegenstände von mindestens 3^{ter} Ordnung — je nach der Ordnung, die wir den natürlichen Zahlen zuschreiben⁷⁶⁾). Die fundamentalen Funktionen von der Gestalt „ $Xxy\dots z$ “, in denen ein Funktor mit l Argumenten an der Spitze steht und die somit l Variable 1^{ter} Ordnung enthalten, interpretieren wir durch Wendungen vom Typus „die Folge von Individuen, deren 1^{tes} Glied x , 2^{tes} — y , ... l tes (letztes) — z ist, gehört zu

⁷⁶⁾ In den Systemen der mathematischen Logik, z. B. in Whitehead-Russell, vol. II., S. 4 ff., behandelt man die Kardinalzahlen und insbesondere die natürlichen Zahlen gewöhnlich als Klassen, die aus Klassen von Individuen (oder anderen Gegenständen) bestehen, — nämlich als die Klassen aller jener Klassen, die mit einer gegebenen Klasse gleichmächtig sind; so definiert man z. B. die Zahl 1 als Klasse aller jener Klassen, welche genau ein Element enthalten. Bei dieser Auffassung sind in natürlichen Zahlen schon Gegenstände (wenigstens 3^{ter}), die Folgen von Individuen 4^{ter} und die Klassen von diesen Folgen 5^{ter} Ordnung.

der Klasse X , die aus l -gliedrigen Folgen von Individuen besteht“. Vom inhaltlichen, wenn auch nicht vom formalen Gesichtspunkt aus gehören die Variablen von nun an nur mehr zu zwei verschiedenen semantischen Kategorien; dank diesem Umstand können wir im weiteren Verlauf der Überlegungen schon die Methoden benützen, die bei der Untersuchung der Sprachen 2^{ter} Art angewendet wurden.

Wir können hier also von der Methode der mehrzeiligen Folgen Gebrauch machen, indem wir uns zu diesem Zwecke folgender Wendung bedienen: „die Folge f von Individuen sowie die Folge F , deren Glieder Klassen von endlichen Folgen von Individuen bilden, erfüllen gemeinsam die gegebene Aussagefunktion“. Um diesen Begriff konsequent anwenden zu können, muss man vorher eindeutig den Variablen V_k^i die Glieder der Folge F zuordnen, und zwar in der Weise, dass verschiedenen Variablen mit verschiedenen Indizes entsprechen; am leichtesten erreicht man dies, indem man jeder Variablen V_k^i ein Glied mit dem Index $(2 \cdot k - 1) \cdot 2^{i-1}$ zuordnet, also z. B. den Variablen $V_1^1, V_2^1, V_3^1, V_4^1, V_5^1, V_6^1, V_7^1, V_8^1, \dots$ die Glieder $F_1, F_3, F_5, F_7, F_9, F_{11}, F_{13}, F_{15}, \dots$ (7). Bei dieser Übereinkunft bietet die Festsetzung des Sinnes der oben angeführten Wendung in ihrer Anwendung auf irgend welche konkrete Aussagefunktion und sogar die Konstruktion einer allgemeinen Definition des betrachteten Begriffs keine Schwierigkeiten mehr. Wenn es sich also z. B. um fundamentale Funktionen handelt, so erfüllen die Funktion $q_{k,m}$ gemeinsam jene und nur jene Folgen f und F (der oben angegebenen Kategorien), welche folgender Bedingung genügen: die Folge g von Individuen, deren einziges Glied g_1 mit f_m identisch ist, gehört zur Klasse $F_{(2 \cdot k - 1)}$; in analoger Weise erfüllen die Funktion $q_{k,m,n}$ gemeinsam jene und nur jene Folgen f und F , die folgender Bedingung genügen: die Folge g von Individuen mit zwei Gliedern, in welcher $g_1 = f_m$ und $g_2 = f_n$, gehört zur Klasse $F_{(2 \cdot k - 1), 2}$; und schliesslich allgemein: damit die Folgen f und F gemeinsam die Funktion $q_{k,p}$

7) Anstatt der Funktion $f(k, l) = (2 \cdot k - 1) \cdot 2^{l-1}$ könnte man eine beliebige andere Funktion $f(k, l)$ verwenden, die den geordneten Paaren der natürlichen Zahlen in eindeutiger Weise die natürlichen Zahlen zuordnet. Die Mengenlehre kennt zahlreiche Beispiele derartiger Zuordnungen; vgl. z. B. Fraenkel, S. 30 ff. und S. 96 ff.

erfüllen, ist es notwendig und hinreichend, dass die Folge der Individuen g mit l Gliedern, in welcher $g_1 = f_{p_1}, g_2 = f_{p_2}, \dots, g_l = f_{p_l}$, zur Klasse $F_{(2 \cdot k - 1), 2^{l-1}}$ gehört (die aus Folgen mit derselben Anzahl von Gliedern besteht).

Wenn wir uns hingegen wünschen, mit der Methode der Vereinheitlichung der Variablen gleich bis ans Ende zu kommen, so stützen wir uns darauf, dass man zwischen beliebigen Individuen und gewissen Klassen von endlichen Folgen wieder eine eindeutige Zuordnung festsetzen kann, und zwar z. B. auf die Weise, dass man jedem Individuum a die Klasse a^* zuordnet, die als einziges Element eine Folge enthält, deren einziges Glied eben das gegebene Individuum ist. Davon ausgehend modifizieren wir die Interpretation der Variablen 1^{ter} Ordnung, und zwar genau in derselben Richtung, in der wir früher die Deutung der Variablen 2^{ter} Ordnung modifiziert haben; die fundamentalen Funktionen von der Form „ $Xzy \dots z$ “, die $l+1$ Zeichen enthalten, betrachten wir nunmehr als gleichbedeutend mit Wendungen vom Typus „die l -gliedrige Individuenfolge g , die die Bedingungen: $g_1^* = x, g_2^* = y, \dots, g_l^* = z$ erfüllt, gehört zur Klasse X , die aus Folgen mit l Gliedern besteht“. Bei dieser inhaltlichen Interpretation gehören bereits alle Variablen zu derselben semantischen Kategorie. Die weitere Konstruktion enthält keine wesentlich neuen Momente und ihre Durchführung wird dem Leser keine ernsteren Schwierigkeiten bieten.

Die Methode der semantischen Vereinheitlichung der Variablen kann man mit demselben Erfolg bei der Untersuchung beliebiger Sprachen 3^{ter} Art anwenden⁷²⁾. Eine etwas grössere Schwierigkeit kann nur die Festsetzung der vereinheitlichenden Kategorie bieten. Ebenso wie im Falle der Sprachen 2^{ter} Art ist es auch hier unmöglich, sich auf die Kategorien zu beschränken, die in der betrachteten Sprache vorkommen; im Gegensatz zu jenen Sprachen kann man hier nicht einmal immer die Wahl unter den Kategorien einer jener Ordnungen treffen, die in der Sprache vertreten sind. Diese Schwierigkeit ist übrigens nicht wesentlich und betrifft ausschliesslich die Sprachen niedrigster Ordnung: es lässt sich nachweisen, dass für jene Sprachen, in denen die Ordnung der Variablen eine gegebene Zahl n nicht

überschreitet, wobei $n > 3$ ist, als vereinheitlichende Kategorie eine beliebige Kategorie n^{ter} Ordnung dienen kann.

Auf diese Weise ermöglichen die Methoden, über die wir verfügen — in dieser oder jener Form — die Präzisierung des Begriffs des Erfülltseins und somit die Konstruktion einer richtigen Definition der Wahrheit für eine beliebige Sprache endlicher Ordnung. Wir werden uns im nächsten Paragraphen überzeugen, dass diese Methoden nicht weiter reichen: die Gesamtheit der Sprachen endlicher Ordnung erschöpft den Bereich der Anwendbarkeit unserer Methoden. Es ist daher nun an der Zeit, die wichtigsten Konsequenzen, die aus den konstruierten Definitionen folgen, zusammenzufassen.

Zunächst ist die Definition der wahren Aussage eine richtige Definition der Wahrheit im Sinne der Konvention \mathbb{B} aus § 3: sie umfasst als Spezialfälle sämtliche Teildefinitionen, die in der Bedingung (α) dieser Konvention beschrieben wurden und die in präziser und sachlich richtiger Weise den Sinn der Wendungen vom Typus „ x ist eine wahre Aussage“ erläutern. Obzwar diese Definition an und für sich kein allgemeines Kriterium der Wahrheit bietet, so gestatten die erwähnten Teildefinitionen in vielen Fällen doch, die Frage der Wahrheit bzw. Falschheit der untersuchten Aussage endgültig zu entscheiden.

Insbesondere können wir — gestützt auf die in der Metawissenschaft angenommenen Axiome der zweiten Gruppe (vgl. S. [70]) — nachweisen, dass alle Axiome der untersuchten Wissenschaft zu den wahren Aussagen gehören. In ähnlicher Weise können wir — indem wir in wesentlicher Weise den Umstand ausnützen, dass die in der Metawissenschaft angewendeten Schlussregeln logisch nicht schwächer sind als die entsprechenden Regeln der Wissenschaft selbst⁵⁷), — beweisen, dass alle Folgerungen aus wahren Aussagen wahr sind. Diese beiden Tatsachen zusammen gestatten uns zu behaupten, dass die Klasse der wahren Aussagen alle beweisbaren Sätze der untersuchten Wissenschaft umfasst (vgl. Lemma D und Sätze 3 und 5 aus § 3).

Zu den wohl wichtigsten Konsequenzen allgemeiner Natur die aus der Definition der Wahrheit folgen, muss man den

Satz vom Widerspruch und den Satz vom ausgeschlossenen Dritten zählen. Diese beiden Sätze, gemeinsam mit dem schon erwähnten Satz über die Folgerungen aus den wahren Aussagen, zeigen, dass die Klasse aller wahren Aussagen ein widerspruchsfreies und vollständiges deduktives System bildet (Satz 1, 2 und 4).

Als unmittelbare, wenn auch ein wenig abliegende Konsequenz dieser Tatsachen gewinnen wir den Satz, dass die Klasse aller beweisbaren Sätze ebenfalls ein widerspruchsfreies (obwohl nicht notwendig vollständiges) deduktives System bildet. Auf diese Weise können wir für jede Wissenschaft, für die wir die Definition der Wahrheit zu bilden imstande sind, auch den Beweis ihrer Widerspruchsfreiheit erbringen. Der mit Hilfe dieser Methode durchgeführte Beweis besitzt allerdings keinen grossen Erkenntniswert, denn er stützt sich auf Prämissen, die mindestens ebenso stark sind wie die Voraussetzungen der untersuchten Wissenschaft⁷⁸). Nichtsdestoweniger scheint es bemerkenswert, dass es eine allgemeine Methode derartiger Beweise gibt, die sich auf eine umfangreiche Kategorie von deduktiven Wissenschaften anwenden lässt; dabei ist — wie ersichtlich — diese Methode vom deduktiven Gesichtspunkt aus nicht ganz trivial und eine einfachere oder sogar eine von ihr verschiedene ist bisher in vielen Fällen überhaupt nicht bekannt.

In jenen Fällen, in denen die Klasse der beweisbaren Sätze nicht nur ein widerspruchsfreies, sondern auch ein vollständiges System ist, deckt sie sich — wie man leicht zeigen kann — mit der Klasse der wahren Aussagen. Falls wir also beide Begriffe — den der wahren Aussage und den des beweisbaren Satzes — identifizieren, so gelangen wir zu einer neuen Definition der Wahrheit, die rein strukturellen Charakter besitzt und sich darum wesentlich von der ursprünglichen, semantischen

⁷⁸) Wie Ajdukiewicz in einem etwas anderen Zusammenhange richtig bemerkt hat (vgl. Ajdukiewicz, S. 39–40), folgt daraus keineswegs, dass dieser Beweis in methodologischer Hinsicht nicht korrekt sei und etwa — in dieser oder jener Form — eine „petitio principii“ enthalte: die Behauptung, die wir beweisen, d. i. die Widerspruchsfreiheit der Wissenschaft, tritt nämlich keineswegs unter den Voraussetzungen des Beweises auf.

Definition dieses Begriffs unterscheidet⁷⁹⁾. Und selbst dann, wenn die beweisbaren Sätze kein vollständiges System bilden, ist die Frage des Aufbaus einer strukturellen Definition nicht a priori hoffnungslos: manchmal gelangt man dadurch, dass man das Axiomensystem der Wissenschaft in entsprechender Weise durch Hinzufügung gewisser strukturell beschriebener Aussagen erweitert, zu einem solchen System, dass sich bereits die Klasse aller seiner Folgerungen mit der Klasse aller wahren Aussagen deckt. Von einer allgemeinen Konstruktionsmethode kann hier jedoch keine Rede sein. Ich vermute, dass der Ver-

⁷⁹⁾ Ich habe im Laufe der Untersuchung schon mehrmals die semantischen Definitionen der wahren Aussage den strukturellen Definitionen gegenübergestellt; dies bedeutet aber keineswegs, dass ich hier beachtliche, die Unterschiede zwischen diesen beiden Arten von Definitionen in exakter Weise anzugeben. Vom inhaltlichen Gesichtspunkt aus treten diese Unterschiede ziemlich deutlich hervor. Die Def. 23 aus § 3 — wie auch die anderen auf dieselbe Weise gebauten Definitionen — betrachte ich aus dem Grunde als semantische Definition, weil sie in gewissem Sinne (den näher zu präzisieren es schwer fallen würde) eine „natürliche Verallgemeinerung“, sozusagen ein „unendliches logisches Produkt“ jener Teildefinitionen darstellt, die in der Bedingung (α) der Konvention III beschrieben wurden und die eine unmittelbare Zuordnung zwischen den Aussagen der Sprache und den Namen dieser Aussagen festlegen. Zu den strukturellen Definitionen zähle ich dagegen jene, die auf Grund des folgenden Schemas konstruiert werden: man beschreibt eine Klasse von Aussagen oder anderen Ausdrücken, und zwar so, dass man aus der Gestalt jedes Ausdrucks erkennen kann, ob er zur gegebenen Klasse gehört oder nicht; man gibt weiterhin solche Operationen an den Ausdrücken an, dass man, wenn uns gewisse Ausdrücke in endlicher Anzahl gegeben sind und wenn man die Gestalt eines beliebigen anderen Ausdrucks kennt, schon entscheiden kann, ob er sich aus den gegebenen Ausdrücken mit Hilfe einer der angegebenen Operationen gewinnen lässt: schliesslich definiert man die wahren Aussagen als jene, die man dadurch gewinnt, dass man an den Ausdrücken der gegebenen Klasse beliebig oft die angegebenen Operationen vollzieht (es ist zu bemerken, dass auch eine solche strukturelle Definition selbst noch keineswegs ein allgemeines Kriterium der Wahrheit liefert). Überdies lassen sich gewisse Unterschiede formaler Natur zwischen diesen beiden Arten von Definitionen erfassen. So erfordert die semantische Definition den Gebrauch von Termini höherer Ordnung als alle Variablen der Sprache, die Gegenstand der Untersuchung ist, z. B. den Gebrauch des Terminus „erfüllt“; zur Formulierung einer strukturellen Definition dagegen genügen die Termini von etwa zwei oder drei der niedrigsten Ordnungen. Bei der Konstruktion einer semantischen Definition verwenden wir — explizite oder implizite — jene Aus-

such, eine strukturelle Definition zu konstruieren, sogar in relativ einfachen Fällen — z. B. in Bezug auf die im vorliegenden Paragraphen untersuchte Logik der zweigliedrigen Relationen — auf ernstliche Schwierigkeiten stossen kann. Diese Schwierigkeiten würden gewiss bedeutend wachsen, wenn es sich um die Angabe eines allgemeinen strukturellen Kriteriums der Wahrheit einer Aussage handeln würde, obzwar wir es schon mit zwei Sprachen — jener des Klassenkalküls und jener des Aussagenkalküls — zu tun hatten, für welche sich diese Aufgabe verhältnismässig leicht lösen lässt⁸⁰⁾.

In allen jenen Fällen, in denen wir imstande sind, die Definitionen des Erfülltseins und der wahren Aussage zu konstruieren, können wir auch — mittels einer Modifikation dieser Definitionen — zwei noch allgemeinere Begriffe von relativem Charakter präzisieren, nämlich die Begriffe des Erfülltseins und der richtigen (wahren) Aussage — beide in Bezug auf einen gegebenen Individuenbereich a ⁴⁷⁾. Diese Modifikation beruht auf einer entsprechenden Einengung des Bereiches der betrachteten Gegenstände: anstatt mit beliebigen Individuen, Klassen von Individuen, Relationen zwischen Individuen u. s. w., operieren wir ausschliesslich mit den Elementen der gegebenen Individuenklasse α , den Unterklassen dieser Klasse, den Relationen zwischen den Elementen dieser Klasse u. s. w. Wie daraus ersichtlich, decken sich in dem Spezialfalle, in dem a die Klasse aller Individuen ist, die neuen Begriffe mit den früheren (vgl. Def. 24, 25 und Satz 26). Wie ich schon im § 3 betont habe, spielt der allgemeine Begriff der in einem gegebenen Bereiche richtigen Aussage eine grosse Rolle in den gegenwärtigen methodologischen Forschungen; man muss jedoch hinzufügen, dass dies nur jene Forschungen betrifft, deren Gegenstand die mathematische Logik und ihre einzelnen Bruchstücke sind: auf dem Boden der speziellen Wissenschaften interes-

drücke der Metasprache, die mit den Ausdrücken der untersuchten Sprache gleichbedeutend sind, während sie beim Bau einer strukturellen Definition überhaupt keine Rolle spielen; dieser Unterschied verwischt sich, wie leicht ersichtlich, wenn die untersuchte Sprache ein Bruchstück der Logik ist. Die ganze angegebene Unterscheidung ist übrigens nicht sehr deutlich und scharf, wovon schon dieser Umstand zeugt, dass man in Bezug auf den Aussagenkalkül die semantische Definition als formale Umformung der strukturellen, auf die Matrizenmethode gestützten Definition ansehen kann. Dabei muss man noch in Betracht ziehen, dass die Konstruktion der semantischen Definition, die sich auf die uns schon bekannten Methoden stützt, von dem strukturellen Bau der Definitionen der Aussage und der Aussagefunktion wesentlich abhängig ist.

⁸⁰⁾ Vgl. die Bemerkungen auf S. [66] f. und [82]; auf diese Probleme werde ich noch im § 5 zurückkommen (vgl. ⁹⁵⁾).

sieren uns ausschliesslich die in ganz bestimmten Individuenbereichen richtigen Aussagen, wodurch der allgemeine Begriff seine Bedeutung verliert. Gleichfalls nur in Bezug auf Disziplinen, die Bruchstücke der Logik sind, behalten einige allgemeine, im § 3 für die Sprache des Klassenkalküls nachgewiesene Eigenschaften des betrachteten Begriffs weiterhin ihre Gültigkeit. Es stellt sich z. B. heraus, dass in diesen Disziplinen der Umfang des Terminus „die im Individuenbereich a richtige Aussage“ ausschliesslich von der Mächtigkeit der Klasse a abhängt; man kann also in den Untersuchungen diesen Terminus durch einen anderen, bequemeren ersetzen, nämlich durch den Terminus „die in einem Bereiche mit k Elementen richtige Aussage“ (Def. 26, Satz 8). Auf den Begriff der in einem gegebenen Bereich richtigen Aussage lassen sich die schon früher besprochenen Sätze über den Wahrheitsbegriff erstrecken, wie z. B. der Satz vom Widerspruch und jener vom ausgeschlossenen Dritten. Besondere Beachtung verdient der Begriff der in jedem Individuenbereiche richtigen Aussage (Def. 27). Seinem Umfang nach steht er in der Mitte zwischen dem Begriff des beweisbaren Satzes und jenem der wahren Aussage: die Klasse der in jedem Bereiche richtigen Aussagen umfasst alle beweisbaren Sätze und besteht ausschliesslich aus wahren Aussagen (Satz 22 und 27). Dabei ist diese Klasse in der Regel enger als die Klasse aller wahren Aussagen: sie enthält z. B. keine Aussagen, deren Gültigkeit davon abhängt, wie gross die Anzahl aller Individuen ist (Satz 23). Wer freilich das System der beweisbaren Sätze jeder untersuchten Wissenschaft zu einem vollständigen ausgestalten will, der muss in das System Sätze einfügen, die die Frage, wieviel Individuen es überhaupt gibt, vorweg in diesem oder jenem Sinne entscheiden. Verschiedene Umstände lassen jedoch einen anderen Standpunkt als besser begründet erscheinen, nämlich den, dass man die Entscheidung über solche Probleme den speziellen deduktiven Wissenschaften überlässt, in der Logik und in ihren Bruchstücken dagegen nur zu erreichen sucht, dass sich der Begriff des beweisbaren Satzes hinsichtlich seines Umfangs mit dem Begriff einer in jedem Individuenbereiche richtigen Aussage deckt. Für die Anhänger dieser Tendenz gewinnt die Frage, ob der Umfang der beiden genannten Begriffe tatsächlich identisch ist, grosse Bedeutung; im Falle einer negativen Antwort entsteht das Problem, das Axiomensystem der untersuchten Wissenschaft derart zu vervollständigen, dass die so erweiterte Klasse der beweisbaren Sätze sich bereits mit der Klasse der in jedem Bereiche richtigen Aussagen deckt. Dieses Problem, das eigentlich mit der Frage nach einer strukturellen Charakteristik des zuletzt betrachteten Begriffs äquivalent ist, konnte nur in wenigen Fällen positiv entschieden werden (vgl. Satz 24⁸¹⁾); im allgemeinen bietet diese Frage nicht minder wesentliche Schwierigkeiten als das analoge Problem einer strukturellen Charakteristik der wahren Aussage. Auf ähnliche

⁸¹⁾ In Bezug auf den engeren Funktionenkalkül wurde dieses in Hilbert-Ackermann₁, S. 68 gestellte Problem unlängst von K. Gödel entschieden (Gödel₁).

Schwierigkeiten stossen wir auch dann, wenn wir den Begriff der in einem Bereiche mit k Elementen richtigen Aussage strukturell zu definieren versuchen. Einzig in dem Falle, in dem k eine endliche Zahl ist, kann man leicht eine allgemeine Methode angeben, die der aus den Untersuchungen über den erweiterten Aussagenkalkül bekannten Matrizenmethode nachgebildet ist und eine strukturelle Charakteristik des betrachteten Begriffs ermöglicht; auf diesem Wege gewinnen wir sogar ein allgemeines Kriterium, welches auf Grund der Gestalt einer beliebigen Aussage zu entscheiden gestattet, ob sie in einem Bereiche mit vorgegebener endlicher Anzahl der Elemente richtig ist⁸²⁾.

Ich möchte mich hier in spezielle Untersuchungen über die zuletzt betrachteten Begriffe nicht näher einlassen; einige hieher gehörende Ergebnisse, die sich auf den Klassenkalkül beziehen, habe ich beispielsweise im § 3 angegeben. Ich bemerke hier nur, dass man in den letzten Jahren zahlreiche Resultate gewonnen hat, die gestatten, aus der Richtigkeit in speziellen Individuenbereichen oder aus den strukturellen Eigenschaften gewisser Aussagen auf deren Richtigkeit in jedem Bereiche, also auch auf ihre Wahrheit zu schliessen⁸³⁾. Es ist evident, dass alle diese Ergebnisse erst dann einen klaren und deutlichen Inhalt gewinnen und sich erst dann ganz exakt beweisen lassen, wenn man als Grundlage der Betrachtung eine konkrete, präzise formulierte Definition der richtigen Aussage annimmt.

§ 5. Der Begriff der wahren Aussage in den Sprachen unendlicher Ordnung.

Wir wenden uns nunmehr den Sprachen der 4^{ten} Art zu, also den Sprachen unendlicher Ordnung, die schon ausserhalb des Anwendungsbereiches der im vorigen Paragraphen skizzierten Konstruktionsmethoden liegen. Als Beispiel wird uns die Sprache der allgemeinen Klassentheorie dienen. Diese Sprache ist aus dem Grunde beachtenswert, weil sie — trotz ihrer elementaren Struktur und ihrer Armut an gramma-

⁸²⁾ Vgl. Bernays-Schönfinkel₁, S. 352.

⁸³⁾ So sind nach den bekannten Sätzen von Löwenheim und Skolem gewisse Kategorien von Aussagen in jedem Gebiete richtig, wenn sie nur in allen endlichen und abzählbaren Gebieten richtig sind; diese Sätze umfassen z. B. alle Aussagen der in diesem § beschriebenen Logik der zwei- und mehrgliedrigen Relationen, die Generalisierungen von Aussagefunktionen sind, in denen Variable 2^{ter} Ordnung ausschliesslich als freie Variable auftreten. In Bezug auf die Aussagen des Klassenkalküls lässt sich dieses Ergebnis — wie dies die Sätze 15 und 19 aus § 3 erweisen — wesentlich verschärfen. Ein engeres Anwendungsgebiet besitzen gewisse Resultate von Bernays, Schönfinkel und Ackermann.

tischen Formen — schon zur Formulierung jedes Gedankens genügt, der sich in der gesamten Sprache der mathematischen Logik ausdrücken lässt; eine einfachere Sprache, die das leistet, kann man sich schwer vorstellen⁸⁴⁾.

In der allgemeinen Klassentheorie treten dieselben Konstanten auf wie in den vorher untersuchten Wissenschaften,

mann: sie gestatten, Aussagen von einer speziellen Struktur eine bestimmte natürliche Zahl k derart zuzuordnen, dass schon aus der Richtigkeit einer gegebenen Aussage in dem Bereiche mit k Elementen (also — wie uns schon bekannt ist — aus rein strukturellen Eigenschaften der Aussage) ihre Richtigkeit in jedem Bereiche folgt. Vgl. hierzu Ackermann₁, Bernays-Schönfinkel₁, Herbrand₁, Löwenheim₁, Skolem₁, Skolem₂ und Skolem₃.

⁸⁴⁾ Die Sprache der allgemeinen Klassentheorie steht hinsichtlich des Reichturns an semantischen Kategorien weit hinter der Sprache des Systems Whitehead-Russell₁ und weit mehr noch hinter der Sprache, die Leśniewski in seinem System verwendet (vgl. ⁵⁶⁾ und ⁶⁵⁾). Insbesondere treten in der betrachteten Sprache überhaupt keine Aussagevariablen und weder Namen von zwei- und mehrgliedrigen Relationen, noch Variable, die diese Namen vertreten, auf. Über die Entbehrlichkeit der Aussagevariablen entscheidet der schon in ⁷²⁾ erwähnte Umstand: jeder Aussage, die Aussagevariable enthält, kann man eine logisch äquivalente Aussage zuordnen, die diese Variablen nicht enthält. Die Ausführungen des § 2, insbesondere die Def. 13—17, unterrichten uns dabei hinreichend darüber, wie derartige Variable bei der Anlage einer Axiomenliste und bei der Ableitung der Sätze der untersuchten Wissenschaft vermieden werden können; vgl. auch v. Neumann₁ (insbesondere Anm. ⁹⁾ auf S. 36). Die Möglichkeit der Elimination zweigliedriger Relationen ergibt sich aus folgender Überlegung. Jeder Relation R lässt sich in eindeutiger Weise eine Klasse von geordneten Paaren zuordnen, nämlich die Klasse aller jener geordneten Paare, deren Glieder x und y die Formel: xRy erfüllen. Wenn die Relation R dabei homogen ist, d. h., wenn der Bereich und der Gegenbereich dieser Relation zu derselben semantischen Kategorie gehören, so kann man das geordnete Paar anders interpretieren, als wir das auf S. [26] getan haben, und zwar als Klasse, deren Elemente zwei Klassen sind: die Klasse, die x als einziges Element enthält, und die Klasse, die aus zwei Elementen x und y besteht. Um eine analoge Methode auf nichthomogene Relationen anwenden zu können, muss man ihnen vorher eindeutig homogene Relationen zuordnen, was keine grösseren Schwierigkeiten bietet. Analog verfahren wir mit mehrgliedrigen Relationen. In dieser Weise lässt sich jede Aussage über zwei- und mehrgliedrige Relationen beliebiger Kategorie in eine äquivalente Aussage über Individuen, Klassen von Individuen, Klassen solcher Klassen u. s. w. umformen. Vgl. hierzu Kuratowski₁, S. 171 und Chwistek₂, insbesondere S. 722.

d. i. die Zeichen der Negation und der logischen Summe sowie das Allzeichen. Als Variable verwenden wir Symbole wie „ X “, „ X' “, „ X'' “ u. s. w., d. i. Zeichen, die aus dem Zeichen „ X “ und einer Anzahl kleiner Striche unten und oben gebildet sind; das Zeichen, welches k Striche unten und n oben enthält, nennen wir Variable k^{ter} Gestalt n^{ter} Ordnung und bezeichnen es mit dem Symbol „ V_k^n “. Die Variablen $V_k^1, V_k^2, V_k^3 \dots$ repräsentieren beziehungsweise Namen von Individuen — also von Gegenständen 1^{ter} Ordnung; von Klassen von Individuen — Gegenständen 2^{ter} Ordnung; von Klassen solcher Klassen — Gegenständen 3^{ter} Ordnung u. s. w.; diese Variablen gehören offenbar zu unendlich vielen semantischen Kategorien. Als fundamentale Aussagefunktionen betrachten wir die Ausdrücke vom Typus „ XY “, wo anstatt „ X “ eine beliebige Variable $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung und anstatt „ Y “ eine Variable n^{ter} Ordnung auftritt; diese Ausdrücke lesen wir: „die Klasse X ($n+1^{\text{ter}}$ Ordnung) enthält als Element den Gegenstand Y (n^{ter} Ordnung)“, oder „die Eigenschaft X kommt dem Gegenstand Y zu“. Zur Bezeichnung der fundamentalen Funktionen wenden wir die Symbole „ $\varepsilon_{k,l}^n$ “ an, indem wir $\varepsilon_{k,l}^n = V_k^{n+1} \cap V_l^n$ setzen. Der weitere Aufbau der Wissenschaft weist keine wesentlichen Unterschiede z. B. gegenüber der Logik der zwei- oder mehrgliedrigen Relationen auf. Die Generalisation und Partikularisation der Aussagefunktion x hinsichtlich der Variablen V_k^n bezeichnen wir beziehungsweise mit den Symbolen „ $\prod_k^n x$ “ und „ $\cup_k^n x$ “. Zu den Axiomen zählen wir (1) Aussagen, die die Bedingung (α) der Def. 13 des § 2 erfüllen, die also aus den Axiomen des Aussagenkalküls durch Einsetzung, gegebenenfalls auch durch nachfolgende Generalisierung entstehen; (2) Pseudodefinitionen, d. h. Aussagen, die Generalisationen von Aussagefunktionen vom Typus $\cup_k^{n+1} \prod_l^n (\varepsilon_{k,l}^n \cdot y + \overline{\varepsilon_{k,l}^n} \cdot y)$ sind, wobei y eine beliebige Aussagefunktion ist, die nicht die freie Variable V_k^{n+1} enthält; (3) die Gesetze der Extensionalität, d. i. Aussagen von der Form:

$$\prod_k^{p+2} \prod_l^{p+1} \prod_m^{p+1} \left(\cup_n^p (\varepsilon_{l,n}^p \cdot \overline{\varepsilon_{m,n}^p} + \varepsilon_{l,n}^p \cdot \varepsilon_{m,n}^p) + \overline{\varepsilon_{k,l}^{p+1}} + \varepsilon_{k,m}^{p+1} \right),$$

die besagen, dass zwei Klassen, die sich nicht in ihren Elementen unterscheiden, sich auch in keiner ihrer Eigenschaften unterscheiden, also identisch sind. Um in der untersuchten

Wissenschaft eine hinreichende Basis für die Grundlegung verschiedener Teile der Mathematik, insbesondere aber der ganzen theoretischen Arithmetik zu gewinnen, müssen wir zu dem obigen System noch (4) das Axiom der Unendlichkeit hinzufügen, d. i. die Aussage

$$U_1^3 \left(U_1^2 \epsilon_{1,1}^2 \cdot \mathfrak{N}_1^2(\overline{\epsilon_{1,1}^2} + U_2^2(\epsilon_{1,2}^2 \cdot \mathfrak{N}_1^1(\epsilon_{1,1}^1 + \overline{\epsilon_{2,1}^1}) \cdot U_1^1(\epsilon_{1,1}^1 \cdot \overline{\epsilon_{2,1}^1}))) \right),$$

die die Existenz unendlich vieler Individuen gewährleistet⁸⁵⁾. Bei der Ableitung der Folgerungen aus den Axiomen wenden wir die Operationen der Einsetzung, der Abtrennung, der Hinzufügung und der Weglassung des Allzeichens an, analog den in den Bedingungen (γ)–(ξ) der Def. 15 des § 3 beschriebenen Operationen.

Wenn wir versuchen, den Begriff des Erfülltseins in Bezug auf die untersuchte Sprache zu präzisieren, stossen wir auf Schwierigkeiten, die wir nicht überwinden können. Angesichts der unendlichen Verschiedenartigkeit der in der Sprache repräsentierten semantischen Kategorien ist es hier — ähnlich wie im Fall der Logik der mehrgliedrigen Relationen — a priori ausgeschlossen, die Methode der mehrzeiligen Folgen anzuwenden. Aber noch schlimmer ist es, dass auch die Methode der semantischen Vereinheitlichung der Variablen uns im Stich lässt. Tatsächlich kann — wie uns aus § 4 bekannt ist — die vereinheitlichende Kategorie nicht von niedrigerer Ordnung als irgend eine der Variablen der betrachteten Sprache sein; Folgen, deren Glieder zu dieser Kategorie gehören, und umso mehr die Relation des Erfülltseins, die zwischen derartigen Folgen und den entsprechenden Aussagefunktionen besteht, müssen also von höherer Ordnung sein als alle jene Variablen. In der Sprache, mit der wir es hier zu tun haben, treten ja Variable beliebig hoher (endlicher) Ordnung auf; bei Anwendung der Methode der Vereinheitlichung müssten wir somit mit Ausdrücken „unendlicher Ordnung“ operieren. Doch weder die Metasprache, die den Boden der vorliegenden Untersuchungen bildet, noch irgend eine andere der existierenden Sprachen

⁸⁵⁾ Dadurch, dass wir das Unendlichkeitsaxiom annehmen, verzichten wir freilich auf das Postulat, nach dem nur die in jedem Individuenbereiche richtigen Aussagen beweisbare Sätze der Logik sein sollen (vgl. S. [102]).

enthält derartige Ausdrücke; es ist uns sogar nicht recht klar, welchen inhaltlichen Sinn man solchen Ausdrücken zuschreiben könnte.

Diese Bemerkungen scheinen zu zeigen, dass es unmöglich ist, für die untersuchte Sprache einen allgemeinen, semantisch eindeutigen Begriff des Erfülltseins zu konstruieren, der auf alle Aussagefunktionen ohne Rücksicht auf ihren semantischen Typus anwendbar wäre. Dagegen bemerken wir keine prinzipiellen Schwierigkeiten, die die konsequente Anwendung des Begriffs des Erfülltseins in seiner ursprünglichen Fassung, oder vielmehr — der semantischen Mehrdeutigkeit dieser Fassung wegen — einer unendlichen Anzahl solcher Begriffe unmöglich machen würden; jeder dieser Begriffe wäre in semantischer Hinsicht schon bestimmt und würde sich ausschließlich auf Funktionen eines bestimmten semantischen Typus beziehen (z. B. auf Funktionen, die eine Variable 1^{ter} Ordnung als einzige freie Variable enthalten). Tatsächlich erweckt — unabhängig von der logischen Struktur der Sprache — der inhaltliche Sinn keines dieser Ausdrücke irgend welchen Zweifel; für jede beliebige konkrete Aussagefunktion können wir sogar diesen Sinn genau präzisieren, indem wir für jede Wendung vom Typus „die Gegenstände *a, b, c...* erfüllen die gegebene Aussagefunktion“ eine inhaltlich äquivalente Wendung konstruieren, die gänzlich in Termen der Metasprache formuliert ist. Nichtsdestoweniger bietet das Problem der Konstruktion einer korrekten Definition für jeden der besprochenen Begriffe wiederum wesentliche Schwierigkeiten. Auf dem Boden der Sprachen, die wir früher untersucht haben, konnte man jeden speziellen Begriff des Erfülltseins leicht durch eine gewisse Spezialisierung des allgemeinen Begriffs gewinnen; im gegenwärtigen Falle ist dieser Weg freilich nicht gangbar. Der Gedanke, in Anlehnung an die Definition der Aussagefunktion in dieser oder jener Form die rekursive Methode anzuwenden, muss sich schon nach kurzer Überlegung, trotz seiner Natürlichkeit, als verfehlt herausstellen. Wie man leicht einsieht, lassen sich nämlich die zusammengesetzten Funktionen von einem bestimmten semantischen Typus nicht immer aus einfacheren Funktionen von demselben Typus bilden; wir müssen im Gegenteil, um beliebige Funktionen von einem gegebenen Typus konstruieren

zu können, Aussagefunktionen von allen möglichen semantischen Typen als Material verwenden⁸⁶⁾. Im Zusammenhang damit müssten wir bei der rekursiven Definition irgend eines speziellen Begriffs des Erfülltseins mit ein und demselben rekursiven Prozess unendlich viele analoge Begriffe umfassen — was aber ausserhalb der sprachlichen Möglichkeiten liegt.

Im engen Zusammenhang mit diesen Erwägungen steht das zentrale Problem unserer Arbeit — die Konstruktion der Definition der Wahrheit. Würde es gelingen, wenn schon nicht den allgemeinen, so doch irgend einen der speziellen Begriffe des Erfülltseins zu präzisieren, so würde diese Aufgabe nicht die mindesten Schwierigkeiten bieten⁸⁷⁾. Andererseits aber kennen wir keine Konstruktionsmethode, die nicht — mittelbar oder unmittelbar — über eine vorherige Definition des Begriffs des Erfülltseins führen würde. Somit dürfen wir — in Anbetracht der Erfolglosigkeit der bisherigen Versuche — jedenfalls feststellen, dass wir gegenwärtig für die untersuchte Sprache keine korrekte und sachlich zutreffende Definition der wahren Aussage konstruieren können.

⁸⁶⁾ Ein äusserer Ausdruck dieses Sachverhalts ist es, dass in den Definitionen des Erfülltseins nicht nur freie Variable wesentlich berücksichtigt werden müssen, sondern auch alle gebundenen Variablen der betrachteten Funktion, obzwar diese Variablen keinen Einfluss auf den semantischen Typus der Funktion ausüben und es keineswegs von den diesen Variablen entsprechenden Gliedern der Folge abhängt, ob die Relation des Erfülltseins besteht oder nicht (vgl. Def. 22 des § 3, Bedingung *d*). — Es sei daran erinnert, dass analoge Schwierigkeiten wie die im Texte erwähnten schon früher auftauchten, nämlich bei dem Versuch, auf unmittelbarem Wege eine rekursive Definition der Wahrheit zu konstruieren (vgl. S. [47]).

⁸⁷⁾ Stellen wir uns z. B. vor, dass es uns in irgend einer Weise gelungen ist, den Begriff des Erfülltseins in Bezug auf solche Aussagefunktionen zu definieren, die eine Variable 1^{ter} Ordnung als einzige freie Variable enthalten; wir können dann mit Wendungen vom Typus „das Individuum *a* erfüllt die Aussagefunktion *y*“ frei operieren. Wenn wir nun irgend eine konkrete Aussagefunktion in Betracht ziehen, z. B. $\bigcup_1^2 \varepsilon_{1,1}^1$, die durch jedes beliebige Individuum erfüllt wird, so gewinnen wir sofort folgende Definition der wahren Aussage: *x* ist dann und nur dann eine wahre Aussage, wenn jedes Individuum *a* die Funktion $x \cdot \bigcup_1^2 \varepsilon_{1,1}^1$ (d. i. die Konjunktion der Aussage *x* und der Funktion $\bigcup_1^2 \varepsilon_{1,1}^1$) erfüllt. Auf ganz analogem Wege kann man von jedem anderen der speziellen Begriffe des Erfülltseins zum Begriff der Wahrheit übergehen.

Angesichts dieser Sachlage taucht die Frage auf, ob unser Misserfolg zufälligen Charakter hat und etwa nur an der Unvollkommenheit der tatsächlich angewandten Methoden liegt, oder ob hier Hindernisse prinzipieller Natur eine Rolle spielen, die im Wesen der Begriffe liegen, die wir definieren wollen, bzw. mit deren Hilfe wir die geforderten Definitionen zu konstruieren versuchen; wenn die zweite Eventualität zutrifft, so wären freilich alle auf die Verbesserung der Konstruktionsmethoden gerichteten Bemühungen fruchtlos. Um diese Frage beantworten zu können, muss man ihr zuerst eine weniger unbestimmte Form geben. Erinnern wir uns daran, dass wir in der Konvention \mathbb{W} des § 3 genau festgesetzt haben, welche Bedingungen über die sachliche Richtigkeit einer beliebigen Definition der wahren Aussage entscheiden; die Konstruktion einer Definition, die diesen Bedingungen genügt, bildet ja den Hauptgegenstand unserer Untersuchung. Angesichts dessen nimmt das in Rede stehende Problem eine präzisere Form an: es handelt sich darum, ob auf dem Boden der Metawissenschaft der betrachteten Sprache die Konstruktion einer richtigen Definition der Wahrheit im Sinne der Konvention \mathbb{W} prinzipiell möglich ist. Wie wir uns überzeugen werden, lässt sich das Problem in dieser Gestalt schon endgiltig lösen, und zwar in negativer Richtung.

Es ist nicht schwer einzusehen, dass das uns interessierende Problem den Rahmen der bisherigen Betrachtung sprengt; es gehört nämlich in das Gebiet der Meta-Metawissenschaft; seine definitive Lösung, ja selbst nur seine korrekte Formulierung würde einen neuen Untersuchungsapparat erfordern und vor allem die genaue Formalisierung der Metasprache und der auf ihrem Boden betriebenen Metawissenschaft erforderlich machen⁸⁸⁾. Ich glaube jedoch, dass es mir — auch ohne so weit zu gehen und unter Vermeidung der verschiedenen technischen Komplikationen — gelingen wird, in ziemlich klarer Weise über alles zu berichten, was sich im Zusammenhang mit obigem Problem gegenwärtig Positives feststellen lässt.

Beim Operieren mit der Metasprache werden wir die in §§ 2 und 3 angegebene Symbolik beibehalten. Um die weiteren Ausführungen zu vereinfachen und mögliche Missverständnisse

zu vermeiden, werden wir einen solchen Bau der Metasprache annehmen, bei dem die untersuchte Sprache ein Bruchstück der Metasprache bildet: jeder Ausdruck der Sprache ist zugleich ein Ausdruck der Metasprache, aber nicht umgekehrt. Dies erlaubt uns in gewissen Fällen (z. B. bei der Formulierung der Bedingung (α) der Konvention \mathbb{W}) einfach von den Ausdrücken der Sprache selbst zu sprechen, anstatt, wie bisher, von den mit ihnen gleichbedeutenden Ausdrücken der Metasprache.

Nach diesen Vorbehalten und Konventionen gehen wir nunmehr an die Formulierung und Begründung des fundamentalen Ergebnisses.

Satz I. (α) Wie auch immer wir in der Metawissenschaft das Symbol „ Wr “, das eine Klasse von Ausdrücken bezeichnet, definieren, so werden wir daraus die Negation eines der Sätze ableiten können, die in der Bedingung (α) der Konvention \mathbb{W} beschrieben wurden;

(β) vorausgesetzt also, dass die Klasse aller beweisbaren Sätze der Metawissenschaft widerspruchsfrei ist, ist es unmöglich, auf dem Boden der Metawissenschaft eine zutreffende Definition der Wahrheit im Sinne der Konvention \mathbb{W} zu konstruieren.

Die Idee des Beweises dieses Satzes könnte man in folgende Worte fassen⁸⁹): (1) Man setzt eine bestimmte Interpretation der Metasprache in der Sprache selbst fest und ordnet auf diesem Wege eindeutig jeder Aussage der Metasprache

⁸⁹) Die hier angewandte Methode verdanken wir Gödel, dem sie in seiner kürzlich erschienenen Arbeit Gödel₃ zu anderen Zwecken diente; vgl. besonders S. 174–175, bzw. 187–190 (Beweis des Satzes VI). Dieser ungemein wichtige und interessante Artikel steht in keinem unmittelbaren Zusammenhang mit dem Thema unserer Arbeit — er betrifft nämlich streng methodologische Probleme: die Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit der deduktiven Systeme; nichtsdestoweniger werden wir die Methoden und teilweise auch die Ergebnisse der Gödelschen Untersuchungen für unsere Zwecke dienstbar machen können.

Bei dieser Gelegenheit bemerke ich, dass ich den Satz I samt der Skizze seines Beweises in die vorliegende Arbeit erst eingefügt habe, nachdem sie bereits in Druck gegeben war; zur Zeit, als die Arbeit der Warschauer Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt wurde (21. III. 1931), war Gödels Artikel — so viel mir bekannt ist — noch nicht erschienen. Ich hatte daher in der ursprünglichen Fassung an dieser Stelle anstatt positiver Ergebnisse nur gewisse Vermutungen ausgesprochen, die sich

eine (in Hinsicht auf das in der Metawissenschaft angenommene Axiomensystem) ihr äquivalente Aussage der Sprache zu: auf diese Weise enthält die Metasprache neben einer beliebigen Aussage auch einen individuellen Namen — wenn nicht derselben, so wenigstens der ihr zugeordneten und äquivalenten Aussage. (2) Würde es uns also gelingen, in der Metasprache eine richtige Definition der Wahrheit zu konstruieren, so würde die Metasprache — mit Rücksicht auf obige Interpretation — jenen universalistischen Charakter gewinnen, der die wesentliche Quelle der semantischen Antinomien auf dem Boden der Umgangssprache war (vgl. S. [18]); insbesondere könnte man dann in der Metasprache die Antinomie des Lügners rekonstruieren, indem man nämlich in der Sprache selbst eine solche Aussage x bildet, dass diejenige Aussage der Metasprache, der die Aussage x zugeordnet ist, besagt, x sei keine wahre Aussage; dabei könnte man bei dieser Rekonstruktion durch Anwendung des aus der Mengenlehre bekannten Diagonalverfahrens⁸⁹) alle Termini vermeiden, die nicht zur Metasprache gehören, sowie alle Prämissen empirischer Natur, die in den bisherigen Formulierungen der Antinomie des Lügners eine Rolle spielen⁹⁰).

übrigens in der gleichen Richtung bewegten und sich teilweise auf meine eigenen Untersuchungen, teilweise auf den einige Monate vorher veröffentlichten kurzen Bericht Gödel₂ stützten.

Nachdem ich den oben angeführten Artikel kennen gelernt hatte, überzeugte ich mich u. a., dass die deduktive Theorie, die Gödel als Gegenstand seiner Untersuchungen gewählt hat, das sog. „System P“, der in diesem Paragraphen betrachteten allgemeinen Klassentheorie auffallend ähnlich ist: abgesehen von gewissen Abweichungen „kalligraphischer“ Natur besteht der einzige Unterschied darin, dass im „System P“ neben drei logischen Konstanten auch gewisse Konstante aus dem Gebiete der Arithmetik der natürlichen Zahlen auftreten (es besteht auch eine weitgehende Analogie zwischen dem „System P“ und dem in Tarski₂, S. 213–217 skizzierten System der Arithmetik). So lassen sich denn die für das „System P“ gewonnenen Resultate leicht auf die gegenwärtige Betrachtung übertragen. Der abstrakte Charakter der von Gödel angewandten Methoden macht übrigens die Gültigkeit der von ihm erzielten Resultate von den spezifischen Eigentümlichkeiten der untersuchten Wissenschaft in hohem Grade unabhängig.

⁸⁹) Vgl. z. B. Fraenkel₁, S. 48 ff.

⁹⁰) Wenn man die unten angegebene Skizze des Beweises analysiert, so bemerkt man leicht, dass eine analoge Rekonstruktion sich sogar auf

Wir wollen den Beweis ein wenig genauer skizzieren⁹¹⁾.

Vereinbaren wir, für den Augenblick anstatt „ X “ das Symbol „ n “ zu verwenden; die Partikularisation der Aussagefunktion y hinsichtlich der Variablen „ n “ werden wir, wie bisher, mit dem Symbol „ $\mathbf{U}_1^3 y$ “ bezeichnen. Die Variable „ n “ repräsentiert also Namen von Klassen, deren Elemente Klassen von Individuen sind; bekanntlich finden wir unter diesen Klassen u. a. die natürlichen Zahlen und überhaupt die Kardinalzahlen⁷⁶⁾.

Ich habe schon bemerkt, dass man in der hier untersuchten Sprache der allgemeinen Klassentheorie alle Tatsachen aus dem Gebiet der Arithmetik der natürlichen Zahlen ausdrücken kann. Insbesondere kann man, wenn eine natürliche Zahl k gegeben ist, in dieser Sprache leicht eine Aussagefunktion t_k konstruieren, die das Symbol „ n “ als einzige freie Variable enthält und die besagt, dass die Klasse, deren Namen durch dieses Symbol repräsentiert ist, mit der Zahl k identisch ist (also aus den und nur den Klassen von Individuen besteht, welche genau k Elemente enthalten⁷⁶⁾). So z. B. ist $t_1 = \mathbf{N}_1^2(\epsilon_{1,1}^2 \cdot \mathbf{U}_1^1 \mathbf{N}_2^1 \mathbf{N}_2^2(\epsilon_{1,1}^1 \cdot (\overline{\epsilon_{1,2}^1} + \overline{\epsilon_{2,1}^1} + \epsilon_{2,2}^1))) + \overline{\epsilon_{1,1}^2} \cdot \mathbf{N}_1^1 \mathbf{U}_1^1 \mathbf{U}_2^2(\overline{\epsilon_{1,1}^1} + \epsilon_{1,2}^1 \cdot \epsilon_{2,1}^1 \cdot \overline{\epsilon_{2,2}^1}))$; eine allgemeine rekursive Definition der Folge der Funktionen t_k bietet auf dem Boden der Metasprache keine grösseren Schwierigkeiten.

Wie ich schon in § 2 (S. [41]) erwähnt habe, kann man zwischen den Ausdrücken der Sprache und den natürlichen Zahlen unschwer eine eindeutige Zuordnung durchführen:

dem Boden der Umgangssprache durchführen lässt und dass sich infolge dieser Rekonstruktion die Antinomie des Lügners tatsächlich der Antinomie des Ausdrucks „heterologisch“ nähert. Zu dem letzten Absatz des Textes vgl. die Schlussbemerkungen des § 1, S. [18] f. und insbesondere⁸⁾.

⁹¹⁾ Zur Vereinfachung werden wir uns an vielen Stellen so ausdrücken, als würde die folgende Beweisführung zur Metawissenschaft und nicht zur Meta-Metawissenschaft gehören; insbesondere werden wir, anstatt z. B. zu behaupten, dass eine gegebene Aussage in der Metawissenschaft beweisbar ist, einfach die Aussage selbst aufstellen. Man vergesse jedenfalls nicht, dass hier nur eine Skizze des Beweises gegeben wird, der noch vieles zur Vollständigkeit fehlt.

man kann in der Metasprache eine solche unendliche Folge φ von Ausdrücken definieren, in welcher jeder Ausdruck der Sprache, und zwar nur einmal, vorkommt. Auf Grund dieser Zuordnung kann man jeder Operation an Ausdrücken eine Operation an natürlichen Zahlen (welche dieselben formalen Eigenschaften besitzt) zuordnen, jeder Klasse von Ausdrücken eine Klasse von natürlichen Zahlen u. s. w.; demzufolge gewinnt die Metasprache eine Interpretation in der Arithmetik der natürlichen Zahlen und mittelbar in der Sprache der allgemeinen Klassentheorie.

Nehmen wir insbesondere an, dass wir in der Metasprache die Aussagenklasse Wr definiert haben; dieser Klasse wird dann eine Klasse der natürlichen Zahlen entsprechen, die ausschliesslich in Termen der Arithmetik definiert ist. Betrachten wir den Ausdruck „ $\mathbf{U}_1^3(t_n \cdot \varphi_n) \in Wr$ “; es ist das eine Aussagefunktion der Metasprache, die „ n “ als einzige freie Variable enthält. Aus den früheren Bemerkungen folgt, dass man dieser Funktion eine andere, ihr für beliebige Werte von „ n “ äquivalente Funktion zuordnen kann, die jedoch vollständig in Termen der Arithmetik ausgedrückt ist. Diese neue Funktion werden wir schematisch in der Form „ $\psi(n)$ “ darstellen; wir haben also:

(1) für ein beliebiges n gilt $\mathbf{U}_1^3(t_n \cdot \varphi_n) \in Wr$ dann und nur dann, wenn $\psi(n)$.

Da die Sprache der allgemeinen Klassentheorie zur Grundlegung der Arithmetik der natürlichen Zahlen ausreicht, können wir annehmen, dass „ $\psi(n)$ “ eine von den Funktionen dieser Sprache ist. Die Funktion „ $\psi(n)$ “ wird also ein Glied der Folge φ sein, z. B. das Glied mit dem Index k : „ $\psi(n)$ “ = φ_k . Wenn wir in der Aussage (1) „ k “ für „ n “ einsetzen, erhalten wir:

(2) $\mathbf{U}_1^3(t_k \cdot \varphi_k) \in Wr$ dann und nur dann, wenn $\psi(k)$.

Das Symbol „ $\mathbf{U}_1^3(t_k \cdot \varphi_k)$ “ bezeichnet selbstverständlich eine Aussage der untersuchten Sprache. Indem wir auf diese Aussage die Bedingung (α) der Konvention \mathbb{W} anwenden, erhalten wir einen Satz von der Form „ $x \in Wr$ dann und nur dann, wenn p “, wo „ x “ durch einen strukturell-deskriptiven oder irgend einen anderen individuellen Namen der Aussage $\mathbf{U}_1^3(t_k \cdot \varphi_k)$, „ p “ dagegen durch diese Aussage selbst oder irgend eine ihr äquivalente Aussage zu ersetzen ist. Insbeson-

dere können wir für „ x “ den Ausdruck „ $\mathbf{U}_1^3(t_k \cdot \varphi_k)$ “ und für „ D “ — angesichts der Bedeutung des Symbols „ t_k “ — die Aussage „es gibt ein solches n , dass $n = k$ und $\psi(n)$ “ oder einfach „ $\psi(k)$ “ einsetzen; auf diese Weise erhalten wir folgende Formulierung:

(3) $\mathbf{U}_1^3(t_k \cdot \varphi_k) \varepsilon Wr$ dann und nur dann, wenn $\psi(k)$.

Die Aussagen (2) und (3) stehen in offenbarem Widerspruch zu einander; die Aussage (2) ist sogar direkt äquivalent der Negation von (3). Damit ist aber der erste Teil des Satzes bewiesen: wir haben bewiesen, dass unter den Folgerungen aus der Definition des Symbols „ Wr “ die Negation eines von jenen Sätzen auftreten muss, von denen in der Bedingung (α) der Konvention \mathbb{W} die Rede ist. Daraus folgt unmittelbar der zweite Teil des Satzes.

Die in dem Teile (β) dieses Satzes auftretende Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit ist wesentlich: enthielte nämlich die Klasse aller beweisbaren Sätze der Metawissenschaft einen Widerspruch, so würde jede Definition in der Metawissenschaft alle überhaupt möglichen Aussagen (denn sie alle wären in der Metawissenschaft beweisbar) nach sich ziehen, also insbesondere auch die in der Konvention \mathbb{W} beschriebenen. Andererseits besteht, wie wir jetzt wissen⁹²⁾, keine Aussicht, die Widerspruchsfreiheit der von uns betriebenen Metawissenschaft auf dem Boden der Meta-Metawissenschaft zu beweisen. Es ist zu bemerken, dass — angesichts des Bestehens einer Interpretation der Metawissenschaft in der Wissenschaft selbst (ein Umstand, der in dem oben skizzierten Beweis eine so wesentliche Rolle gespielt hat) — die Voraussetzung des zweiten Teiles des Satzes I der Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit der untersuchten Wissenschaft selbst äquivalent und vom intuitiven Gesichtspunkt aus ebenso evident ist.

Das in dem Satz I erzielte Ergebnis scheint vielleicht auf den ersten Blick ungemein paradox zu sein. Dieser Eindruck schwächt sich jedoch zweifellos ab, sobald wir uns den tiefliegenden Unterschied zwischen dem Inhalt des zu definierenden Begriffs und dem Charakter jener Begriffe vor Augen

⁹²⁾ Vgl. Gödel₃, S. 196 (Satz XI).

halten, welche uns bei der Konstruktion der Definition zur Verfügung stehen.

Die Metasprache, in der wir die Untersuchung durchführen, enthält — neben den Ausdrücken von logischem Charakter, unter denen wir u. a. (in dem betrachteten Fall) alle Ausdrücke der untersuchten Sprache vorfinden, — ausschliesslich nur strukturell-deskriptive Termini, also Namen von Ausdrücken der Sprache, von strukturellen Eigenschaften dieser Ausdrücke, von strukturellen Relationen zwischen Ausdrücken u. s. w. Das, was wir Metawissenschaft nennen, ist im Grunde genommen die Morphologie der Sprache — eine Wissenschaft von der Gestalt der Ausdrücke — ein Korrelat solcher Teile der traditionellen Grammatik wie die Morphologie, Etymologie und Syntax.

Der Umstand, dass die untersuchte Sprache und die in dieser Sprache betriebene deduktive Wissenschaft formalisierten Charakter haben, hat eine interessante Erscheinung hervorgerufen: es ist nämlich gelungen, auf strukturell-deskriptive Begriffe gewisse Begriffe von ganz anderer Natur zurückzuführen, die sich von jenen sowohl durch ihre Genese als auch durch ihren üblichen Sinn unterscheiden, nämlich den Begriff der Folgerung samt einer Reihe verwandter Begriffe⁹³⁾; es ist gelungen, als einen Teil der Morphologie das zu begründen, was man Logik der gegebenen Wissenschaft nennen könnte.

Durch diesen Erfolg ermuntert, haben wir versucht, weiter zu gehen und in der Metasprache auch noch Definitionen gewisser Begriffe aus einem anderen Gebiet zu konstruieren, nämlich aus der sog. Semantik der Sprache, — also solcher Begriffe wie der des Erfülltseins, des Bezeichnens, der Wahrheit, der Definierbarkeit u. s. w. Ein charakteristisches Merkmal

⁹³⁾ Die Zurückführung des Folgerungsbegriffs auf Begriffe aus dem Gebiete der Morphologie der Sprache ist ein Ergebnis der deduktiven Methode in ihrem letzten Entwicklungsstadium; wenn wir im Alltagsleben sagen, dass ein Satz aus anderen Sätzen folgt, so meinen wir zweifellos etwas ganz anderes, als das Bestehen gewisser struktureller Beziehungen zwischen diesen Sätzen. Im Lichte der letzten Ergebnisse Gödels erscheint es dabei zweifelhaft, ob diese Zurückführung tatsächlich restlos vollzogen worden ist.

der semantischen Begriffe liegt darin, dass sie gewisse Abhängigkeiten zwischen den Ausdrücken der Sprache und den Gegenständen, „von denen in diesen Ausdrücken die Rede ist“, zum Ausdruck bringen, bzw. dass sie mit Hilfe derartiger Abhängigkeiten gewisse Kategorien von Ausdrücken oder anderen Gegenständen charakterisieren. Man könnte (unter Verwendung der „suppositio materialis“) auch sagen, dass diese Begriffe zur Festsetzung der Zuordnung zwischen den Namen von Ausdrücken und den Ausdrücken selbst dienen.

Die semantischen Begriffe erfreuen sich seit langem eines „üblen Rufes“ unter den Spezialisten auf dem Gebiete der Sprachforschung: sie haben sich allen Versuchen einer genaueren Präzisierung ihres Sinnes entzogen, und Eigenschaften dieser Begriffe, die inhaltlich einleuchtend erschienen, haben zu Paradoxien und Antinomien geführt. Darum muss die Tendenz, diese Begriffe auf strukturell-deskriptive Begriffe mit klarem und deutlichem Inhalt und evidenten Eigenschaften zurückzuführen, ganz natürlich und begründet erscheinen. Für die Möglichkeit, diese Tendenz zu realisieren, schien folgende Tatsache zu sprechen: es ist immer gelungen, jede Wendung, die die von uns betrachteten semantischen Termini enthält und die einzelnen, strukturell beschriebenen Ausdrücke der Sprache betrifft, durch eine inhaltlich äquivalente und von derartigen Termini freie Wendung zu ersetzen; m. a. W. man konnte für jeden semantischen Begriff unendlich viele Teildefinitionen formulieren, die in ihrer Gesamtheit alle Fälle der Anwendung dieses Begriffs auf konkrete Ausdrücke erschöpfen und für die die in der Bedingung (α) der Konvention III angeführten Sätze ein Beispiel sind. Zu eben diesem Zwecke rechneten wir in der Regel — mit Rücksicht auf den Inhalt der semantischen Begriffe — neben den Namen von Ausdrücken alle Ausdrücke der Sprache selbst oder die mit ihnen gleichbedeutenden Ausdrücke zur Metasprache (und zwar selbst dann, wenn diese Ausdrücke keinen logischen Charakter besaßen, vgl. S. [69] f.), obgleich eine derartige Bereicherung der Metasprache keine Vorteile für den Betrieb der „reinen“ Morphologie der Sprache bietet.

An und für sich hat die erwähnte Tatsache keine entscheidende Bedeutung: es gibt keinen Weg, der einen automatischen Übergang von jenen Teildefinitionen zu einer allgemeinen Defi-

nition ermöglicht, die sie alle als Spezialfälle umfassen und ihr „unendliches logisches Produkt“ bilden würde⁹⁴). Erst dank den speziellen Konstruktionsmethoden, die wir in den §§ 3 und 4 entwickelten, ist es uns gelungen, die geforderte Reduktion der semantischen Begriffe durchzuführen, und zwar nur für eine bestimmte Gruppe von Sprachen, die an grammatischen Formen arm sind und deren Reichtum an semantischen Kategorien beschränkt ist, — nämlich für die Sprachen endlicher Ordnung. Es sei daran erinnert, dass die dabei angewandten Methoden verlangten, in der Metasprache Kategorien zu verwenden, die höherer Ordnung als alle Kategorien der untersuchten Sprache und deshalb von allen grammatischen Formen dieser Sprache prinzipiell verschieden sind. Die Analyse des oben skizzierten Beweises des Satzes I zeigt, dass dieser Umstand keineswegs zufälligen Charakter hat: unter gewissen allgemeinen Voraussetzungen erweist es sich z. B. als unmöglich, eine richtige Definition der Wahrheit zu konstruieren, wenn man nur solche Kategorien anwendet, die in der betrachteten Sprache auftreten⁹⁵). Darum hat sich auch die Lage von Grund aus geändert, als wir zu den „reichen“ Spra-

⁹⁴) Wir haben im Laufe unserer Untersuchung schon wiederholt ähnliche Erscheinungen angetroffen: die Unmöglichkeit, die gleichzeitige Abhängigkeit zwischen Gegenständen zu erfassen, die zu unendlich vielen semantischen Kategorien gehören; den Mangel an Termini „unendlicher Ordnung“; die Unmöglichkeit, in einen Definitionsprozess unendlich viele Begriffe einzubeziehen u. s. w. (S. [46] f., [94], [106] f., [108]). Ich glaube nicht, dass man diese Erscheinungen als ein Symptom der formalen Unvollkommenheit der aktuell existierenden Sprachen auffassen darf — ihre Ursache liegt eher im Wesen der Sprache selbst: die Sprache, die doch ein Produkt der menschlichen Tätigkeit ist, besitzt notwendig einen „finitistischen“ Charakter und kann nicht als adäquates Werkzeug zur Erforschung von Tatsachen oder zur Konstruierung von Begriffen von einem eminent „infinitalistischen“ Charakter dienen.

⁹⁵) Schon daraus oder auch unmittelbar aus gewissen Resultaten, die in Gödel₂ (S. 187—191) enthalten sind, kann man leicht folgern, dass eine strukturelle Definition der Wahrheit — in dem auf S. [99] ff., besonders in ⁷⁹) besprochenen Sinne — sich sogar für einigermaßen reichere Sprachen endlicher Ordnung nicht konstruieren lässt. Aus anderen Untersuchungen dieses Verfassers (op. cit., S. 193, Satz IX) folgt, dass es in gewissen elementaren Fällen, in denen wir eine solche Definition konstruieren können, dennoch unmöglich ist, ein allgemeines strukturelles Kriterium der Wahrheit von Aussagen anzugeben. Das erste dieser Resultate lässt

chen unendlicher Ordnung übergangen: die früher angewandten Methoden erwiesen sich als unbrauchbar, alle Begriffe und alle grammatischen Formen der Metasprache fanden eine Interpretation in der Sprache und wir konnten im Zusammenhang damit in Satz I endgültig zeigen, dass sich die Semantik der Sprache nicht als ein Teil ihrer Morphologie begründen lässt. Eben darauf reduziert sich die Bedeutung des erzielten Ergebnisses.

Unabhängig davon zieht Satz I wichtige Konsequenzen methodologischer Natur nach sich: es zeigt sich, dass es unmöglich ist, in der Metawissenschaft eine solche Klasse von Aussagen der betrachteten Sprache zu definieren, die ausschliesslich aus inhaltlich wahren Aussagen besteht und dabei vollständig (im Sinne der Def. 20 aus § 3) ist. Insbesondere, wenn wir die Klasse der beweisbaren Sätze der untersuchten Wissenschaft auf irgend einem Wege erweitern — sei es durch Ergänzung der Liste der Axiome, sei es durch Verschärfung der Schlussregeln —, so fügen wir entweder zu dieser Klasse falsche Aussagen hinzu oder wir gewinnen kein vollständiges System. Das ist umso interessanter, als die Erweiterung der Klasse der beweisbaren Sätze zu einem vollständigen und widerspruchsfreien System an und für sich keine Schwierigkeiten bietet⁹⁶).

Eine Interpretation des Satzes I, die die angegebenen Grenzen überschreiten würde, liesse sich keinesfalls rechtfertigen; insbesondere wäre es unrichtig, auf die prinzipielle Unmöglichkeit eines konsequenten und mit der Intuition übereinstimmenden Operierens mit semantischen Begriffen und speziell mit dem Begriffe der Wahrheit zu schliessen. Da aber einer von den möglichen Wegen, die wissenschaftlichen Grundlagen der Semantik aufzubauen, jedenfalls verschlossen ist, muss man sich nach anderen Methoden umsehen. In natürlicher Weise entsteht hier der Gedanke, die Semantik als eine besondere deduktive Wissenschaft zu begründen, mit einem System der Morphologie als logischem Unterbau: zu diesem Zwecke

sich u. a. auf die im § 4 besprochene Logik der zwei- oder mehrgliedrigen Relationen, das zweite auf den engeren Funktionenkalkül von Hilbert-Ackermann, (S. 43 ff.) anwenden.

⁹⁶) Vgl. Tarski, S. 394, Satz I. 56 (ein Resultat Lindenbaums).

hätte man in die Morphologie diese oder jene semantischen Begriffe als Grundbegriffe einzuführen und ihre fundamentalen Eigenschaften auf axiomatischem Wege festzusetzen. Nach den Erfahrungen, die man mit den semantischen Begriffen in Überlegungen gemacht hat, die auf dem Boden der Umgangssprache geführt wurden, sind wir uns der grossen Gefahren dieser Methode bewusst; darum gewinnt in diesem Falle die Frage besondere Bedeutung, wie man Sicherheit erlangen könnte, dass der axiomatische Weg nicht zu Verwicklungen und Antinomien führt.

Im Zusammenhang mit dieser Frage werde ich mich weiterhin ausschliesslich mit der Theorie der Wahrheit befassen und vor allem einen Hilfssatz aufstellen, der eine Konsequenz der Überlegungen des vorigen Paragraphen ist:

Satz II. Für eine beliebige, im vorhinein gegebene natürliche Zahl k kann man auf dem Boden der Metawissenschaft eine Definition des Symbols „ W_r “ konstruieren, die als Folgerungen alle jene Sätze aus der Bedingung (α) der Konvention \mathbb{W} nach sich zieht, in denen an Stelle des Symbols „ p “ Aussagen mit Variablen höchstens k^{ter} Ordnung auftreten (und ausserdem den in der Bedingung (β) dieser Konvention angeführten Satz).

Für den Beweis genügt die Bemerkung, dass dieser Satz nicht mehr die untersuchte Sprache in ihrem ganzen Umfange betrifft, sondern nur ein Bruchstück dieser Sprache, das die Gesamtheit aller jener Ausdrücke umfasst, die keine Variablen höherer Ordnung als k enthalten. Dieses Bruchstück ist offenbar eine Sprache endlicher Ordnung und sogar eine Sprache 2^{ter} Art; wir können also leicht die geforderte Definition konstruieren, indem wir eine von den beiden in § 4 besprochenen Methoden anwenden. Es ist zu bemerken, dass die auf diesem Wege gewonnene Definition (neben den in Satz II angegebenen Folgerungen) eine Reihe von Sätzen allgemeiner Natur nach sich zieht, wie z. B. die Sätze 1—5 aus § 3, wenn nur die Formulierungen dieser Sätze dadurch eine entsprechende Abschwächung erfahren, dass das Gebiet ihrer Anwendbarkeit auf Aussagen mit Variablen höchstens k^{ter} Ordnung beschränkt wird.

Schon daraus ist zu ersehen, dass sich, im Gegensatz zu der Gesamtheorie der Wahrheit, die einzelnen Fragmente dieser Theorie (deren Untersuchungsobjekt Aussagen sind, die

ausschliesslich solche Variable enthalten, deren Ordnung von oben beschränkt ist) als Teilgebiete der Metawissenschaft begründen lassen. Wenn also die Metawissenschaft widerspruchsfrei ist, so finden wir auch in diesen Fragmenten niemals einen Widerspruch. Dieses letzte Ergebnis lässt sich jedoch in gewissem Sinne auf die Gesamtheorie der Wahrheit ausdehnen, wie dies folgender Satz zeigt:

Satz III. Wenn die Klasse aller beweisbaren Sätze der Metawissenschaft widerspruchsfrei ist und wenn wir zur Metawissenschaft das Symbol „Wr“ als neuen Grundterminus, alle Sätze dagegen, die in den Bedingungen (α) und (β) der Konvention \mathbb{W} beschrieben wurden, als neue Axiome hinzufügen, so wird auch die Klasse der beweisbaren Sätze der in dieser Weise erweiterten Metawissenschaft widerspruchsfrei sein.

Um diesen Satz zu beweisen, wollen wir bemerken, dass die Bedingung (α) unendlich viele Aussagen umfasst, die wir als Axiome der Theorie der Wahrheit annehmen wollen. Eine endliche Zahl dieser Axiome kann — auch im Verein mit dem einzigen Axiom aus der Bedingung (β) — nicht zu einem Widerspruch führen (falls nur der Widerspruch nicht schon in der Metawissenschaft selbst liegt). Tatsächlich tritt in der endlichen Zahl der aus (α) geschöpften Axiome nur eine endliche Zahl von Aussagen der untersuchten Sprache auf und in diesen Aussagen finden wir eine endliche Zahl von Variablen; es muss also eine natürliche Zahl k geben, derart dass die Ordnung keiner von diesen Variablen die Zahl k überschreitet. Daraus folgt nach Satz II, dass man in der Metawissenschaft eine solche Definition des Symbols „Wr“ konstruieren kann, dass die betrachteten Axiome Folgerungen aus dieser Definition werden; m. a. W. diese Axiome werden bei entsprechender Interpretation jenes Symbols zu beweisbaren Sätzen der Metawissenschaft (diese Tatsache lässt sich auch unmittelbar, d. h. unabhängig von Satz II begründen). Wenn irgend eine Klasse von Aussagen einen Widerspruch enthält, so muss andererseits der Widerspruch — wie man leicht zeigen kann — schon in einem endlichen Teile dieser Klasse auftreten⁹⁷). Da aber kein endlicher Teil des im Satz III beschrie-

⁹⁷) Vgl. Tarski, S. 388, Satz I. 48.

benen Axiomensystems einen Widerspruch enthält, so ist auch das ganze System widerspruchsfrei, was eben zu beweisen war.

Der Wert des gewonnenen Ergebnisses wird durch den Umstand erheblich abgeschwächt, dass die im Satz III genannten Axiome eine sehr geringe deduktive Kraft besitzen: eine auf sie gestützte Theorie der Wahrheit würde ein höchst unvollständiges System sein, dem die wichtigsten und fruchtbarsten allgemeinen Sätze fehlen würden. Versuchen wir dies an einem konkreten Beispiele näher zu erläutern. Wir betrachten die Aussagefunktion „ $x \in Wr$ oder $\bar{x} \in Wr$ “. Wenn wir in dieser Funktion für die Variable „ x “ beliebige strukturell-deskriptive Namen von Aussagen einsetzen, so gewinnen wir eine unendliche Zahl von Sätzen, deren Begründung auf Grund der aus der Konvention \mathbb{W} geschöpften Axiome nicht die geringsten Schwierigkeiten bietet. Die Lage ändert sich jedoch gründlich, sobald wir zur Generalisation dieser Aussagefunktion, d. i. zum allgemeinen Satz vom Widerspruch übergehen. Vom inhaltlichen Standpunkt aus ist die Wahrheit aller jener Sätze bereits selbst eine Begründung des allgemeinen Satzes: dieser Satz stellt sozusagen ein „unendliches logisches Produkt“ jener speziellen Sätze dar. Das bedeutet jedoch keineswegs, dass wir mit Hilfe der gewöhnlich verwendeten, normalen Schlussweisen tatsächlich den Satz vom Widerspruch aus den erwähnten Axiomen oder Sätzen ableiten können; man kann im Gegenteil durch eine geringe Modifikation im Beweis von Satz III zeigen, dass der Satz vom Widerspruch keine Folgerung (wenigstens im bisherigen Sinne des Wortes) aus dem beschriebenen Axiomensystem ist.

Wir können nun selbstverständlich das oben besprochene Axiomensystem ergänzen, indem wir ihm eine Reihe allgemeiner, von diesem System unabhängiger Sätze angliedern. Als neue Axiome könnte man z. B. die Sätze vom Widerspruch und vom ausgeschlossenen Dritten sowie jene Sätze annehmen, nach denen die Folgerungen aus wahren Aussagen stets wahr sind und auch alle Grundsätze der untersuchten Wissenschaft zu den wahren Aussagen gehören; auf das in dieser Weise erweiterte Axiomensystem liesse sich der Satz III erstre-

cken⁹⁸). Wir schreiben aber den in dieser Richtung geführten Untersuchungen keinen besonderen Wert zu; es scheint uns nämlich, dass jede derartige Ergänzung des untersuchten Axiomensystems einen zufälligen Charakter hat, der von nicht sehr wesentlichen Faktoren, wie z. B. von dem aktuellen Stand des Wissens auf diesem Gebiete abhängt. Jedenfalls erweisen sich verschiedene objektive Kriterien, die man bei der Wahl weiterer Axiome anzuwenden geneigt wäre, als ganz unbrauchbar. So scheint z. B. die Tendenz, dass die Axiome der Theorie der Wahrheit samt den ursprünglichen Axiomen der Metawissenschaft ein kategorisches System ergeben sollen, natürlich zu sein⁹⁹). Man kann zeigen, dass dieses Postulat sich in dem gegebenen Falle mit einem anderen Postulat deckt, nach dem das Axiomensystem der Theorie der Wahrheit den Umfang des in ihm auftretenden Symbols „ Wr “ eindeutig bestimmen soll, und zwar in folgendem Sinne: wenn wir in die Metawissenschaft neben diesem Symbol einen anderen Grundterminus, z. B. das Symbol „ Wr' “ einführen und für dieses Symbol analoge Axiome aufstellen, so muss der Satz „ $Wr = Wr'$ “ beweisbar sein. Das letztere Postulat lässt sich aber nicht erfüllen; es ist nämlich nicht schwer zu beweisen, dass im entgegengesetzten Falle der Begriff der Wahrheit ausschliesslich mit Hilfe von Termen aus dem Gebiete der Morphologie der Sprache definiert werden könnte, was jedoch im offensibaren Widerspruch zu Satz I stünde. Aus anderen Gründen allgemeinerer Natur kann von einem solchen Axiomensystem keine Rede sein, das vollständig wäre und infolgedessen zur Lösung jedes Problems aus dem Gebiete der betrachteten Theorie ausreichen würde; dies ist eine unmittelbare methodologische Konsequenz des diesmal nicht auf die Sprache der allgemeinen Klassentheorie, sondern auf die reichere Sprache der Metawissenschaft und der Theorie der Wahrheit angewendeten Satzes I (vgl. die Bemerkungen auf S. [118]).

⁹⁸) Zu diesem Zwecke muss man jedoch die Prämissen des Satzes einigermassen verschärfen, und zwar dadurch, dass man voraussetzt, die Klasse aller beweisbaren Sätze der Metawissenschaft sei nicht nur widerspruchsfrei, sondern auch ω -widerspruchsfrei im Sinne Gödels (Gödel₃, S. 187), oder m. a. W., diese Klasse bleibe widerspruchsfrei nach einmaliger Anwendung der Regel der unendlichen Induktion, von der unten die Rede sein wird.

Die Grundlagen der Theorie der Wahrheit lassen sich jedoch auf ganz anderem Wege wesentlich verstärken. Der Umstand, dass man aus der Richtigkeit aller Einsetzungen von einer Aussagefunktion wie „ $x \in Wr$ oder $x \in Wr'$ “ nicht auf die Richtigkeit der Aussage, die die Generalisation dieser Funktion ist, schliessen darf, kann man als Symptom einer gewissen Unvollkommenheit und Unvollständigkeit der bisher in den deduktiven Wissenschaften verwendeten Schlussregeln auffassen. Um diese Lücke anzufüllen, könnte man eine neue Regel annehmen, die sog. Regel der unendlichen Induktion, welche sich in Anwendung auf die Metawissenschaft etwa in folgender Weise formulieren lässt: wenn eine gegebene Aussagefunktion als einzige freie Variable das Symbol „ x “ enthält, das zur gleichen semantischen Kategorie gehört wie die Namen der Ausdrücke, und wenn zu den beweisbaren Sätzen der Metawissenschaft jede Aussage gehört, die aus der gegebenen Funktion durch Einsetzung des strukturell-deskriptiven Namens eines beliebigen Ausdrucks der untersuchten Sprache für die Variable „ x “ entsteht, so darf man zu den beweisbaren Sätzen der Metawissenschaft auch die Aussage hinzufügen, die wir aus der Wendung „für jedes x — wenn x ein Ausdruck ist, so p “ durch Einsetzung der betrachteten Aussagefunktion für das Symbol „ p “ gewinnen. Man kann auch eine andere Formulierung dieser Regel angeben, die sich von der vorigen nur dadurch unterscheidet, dass in ihr anstatt von Ausdrücken von natürlichen Zahlen die Rede ist und anstatt strukturell-deskriptiver Namen von Ausdrücken die sog. spezifischen Symbole natürlicher Zahlen behandelt werden, d. i. solche Symbole wie „ 0 “, „ 1 “, „ $1+1$ “, „ $1+1+1$ “ u. s. w.; in dieser Gestalt erinnert die Regel der unendlichen Induktion an das Prinzip der vollständigen Induktion, das sie übrigens hinsichtlich der logischen Kraft bedeutend übertrifft. Da man zwischen den Ausdrücken und den natürlichen Zahlen effektiv eine eindeutige Zuordnung durchführen kann (vgl. den Beweis des Satzes I), so sind — wie leicht zu ersehen ist — beide Formulierungen auf dem Boden der Metawissenschaft äquivalent. In der zweiten Formulierung treten jedoch überhaupt keine spezifischen Begriffe der Metasprache auf und aus diesem Grunde ist sie auf viele andere deduktive Wissenschaften

anwendbar. Falls es sich übrigens um eine Wissenschaft handelt, deren Sprache überhaupt keine spezifischen Symbole der natürlichen Zahlen enthält, bedarf auch diese Formulierung gewisser äusserer Modifikationen; so z. B. muss man zwecks Formulierung der betrachteten Regel für die allgemeine Klassentheorie anstatt mit Einsetzungen einer gegebenen Aussagefunktion mit Ausdrücken vom Typus „ $U_1^i(t_i.p)$ “ operieren, wo an Stelle von „ p “ die betrachtete Funktion auftritt und das Symbol „ t_i “ denselben Sinn wie im Beweise des Satzes I besitzt⁹⁹⁾.

Die Regel der unendlichen Induktion unterscheidet sich ihres „infinistischen“ Charakters wegen prinzipiell von den normalen Schlussregeln: man muss bei ihrer jedesmaligen Anwendung unendlich viele Sätze in Betracht ziehen, obgleich uns in keinem Moment der Entwicklung einer Wissenschaft eine solche Zahl von vorher bewiesenen Sätzen „effektiv“ gegeben ist; man kann ernste Zweifel hegen, ob die Verwendung einer solchen Regel in dem Rahmen der bisherigen Auffassung der deduktiven Methode Platz finden könne. Die Frage, ob diese Regel nicht zu Widersprüchen führt, bietet nicht minder wesentliche Schwierigkeiten, als das analoge, die bisherigen Schlussregeln betreffende Problem, und zwar sogar dann, wenn wir die Widerspruchsfreiheit der bisherigen Regeln voraussetzen und uns die Anwendung der neuen Regel nicht nur in der Wissenschaft, sondern auch in der entsprechenden Metawissenschaft und insbesondere in dem eventuellen Beweise der Widerspruchsfreiheit gestatten. Jedoch vom inhaltlichen Gesichtspunkt aus scheint die Regel der unendlichen Induktion ebenso unfehlbar zu sein, wie die normal angewandten Regeln: sie führt immer von wahren Aussagen zu wahren Aussagen; in Bezug auf die Sprachen endlicher Ordnung lässt sich diese Tatsache

⁹⁹⁾ Auf die Bedeutung der Regel der unendlichen Induktion habe ich schon im Jahre 1926 hingewiesen. In einem „Über die Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit der deduktiven Wissenschaften“ betitelten Referat, das ich auf dem II. Polnischen Philosophischen Kongress erstattete, habe ich u. a. ein einfaches Beispiel eines widerspruchsfreien deduktiven Systems angegeben, das nach einmaliger Anwendung der besprochenen Regel widerspruchsfrei zu sein aufhört, also nicht ω -widerspruchsfrei ist (vgl. ⁹⁸⁾). Einige diese Regel betreffende Bemerkungen kann man in der Arbeit Hilbert, S. 491—492 finden.

auf dem Boden der für diese Sprachen konstruierten Definition der Wahrheit streng begründen. Für die Annahme der Regel — sowohl in der Wissenschaft als auch in der Metawissenschaft — spricht hiebei der Umstand, dass sie die Lösung vieler Probleme ermöglicht, die auf dem Boden der alten Regeln nicht lösbar waren. Durch Hinzufügung dieser Regel erweitert man die Klasse der beweisbaren Sätze in viel grösserem Umfange, als dies durch irgend welche Ergänzung der Liste der Axiome geschehen könnte¹⁰⁰⁾. In Bezug auf gewisse elementare deduktive Wissenschaften geht diese Erweiterung so weit, dass die Klasse der beweisbaren Sätze zu einem vollständigen System wird und sich mit der Klasse der wahren Aussagen deckt; als Beispiel kann die elementare Zahlentheorie dienen, d. i. die Wissenschaft, in der alle Variablen Namen von natürlichen bzw. ganzen Zahlen repräsentieren und als Konstante, neben den Zeichen aus dem Gebiete des Aussagen- und Funktionenkalküls, die Zeichen der Null, der Einheit, der Gleichheit, der Summe, des Produkts und eventuell auch andere mit ihrer Hilfe definierbare Zeichen auftreten.

Wenn wir uns entschliessen, in der Metawissenschaft die Regel der unendlichen Induktion anzunehmen, so wird das System der Axiome, auf die Satz III hingewiesen hat, bereits eine genügende Grundlage für die Entwicklung der Theorie der Wahrheit bilden. Die Begründung irgend eines der bekannten Sätze aus diesem Gebiete wird dann keine Schwierigkeiten bieten, insbesondere z. B. der Sätze 1—6 aus § 3 und des Satzes, laut dem die Regel der unendlichen Induktion, auf wahre Aussagen angewendet, stets auf eine wahre Aussage hinleitet. Ausserdem — was noch wichtiger ist — bilden dann diese Axiome mit den allgemeinen Axiomen der Metawissenschaft zusammen ein kategorisches (wenn auch unvollständiges) System und bestimmen eindeutig den Umfang des in ihnen auftretenden Symbols „ W “.

¹⁰⁰⁾ So z. B. können wir, wenn wir diese Regel in der Metasprache annehmen, ohne sie der Sprache anzugliedern, beweisen, dass die Klasse der beweisbaren Sätze der Wissenschaft widerspruchsfrei ist, was wir früher nicht zu begründen vermochten. Vgl. im Zusammenhang mit diesen Problemen Gödel, S. 187—191 und 196.

Die Frage, ob die auf diesen Grundlagen aufgebaute Theorie keinen inneren Widerspruch enthält, gewinnt unter diesen Umständen eine besondere Bedeutung. Leider können wir diese Frage bis nun nicht endgiltig entscheiden. Der Satz I behält seine volle Geltung: trotz der Verstärkung der Grundlagen der Metawissenschaft lässt sich die Theorie der Wahrheit nicht als ein Teil der Morphologie der Sprache aufbauen. Wir können dagegen vorläufig den Satz III für die erweiterte Metasprache nicht beweisen; jene Prämisse, die in dem ursprünglichen Beweise die wesentlichste Rolle gespielt hat, d. i. die Reduktion der Widerspruchsfreiheit des unendlichen Axiomensystems auf die Widerspruchsfreiheit jedes endlichen Teiles dieses Systems, verliert nun — wie man leicht einsieht — wegen des Inhalts der neu angenommenen Regel völlig ihre Geltung. Es ist nicht ausgeschlossen, dass die betrachtete Frage sich in keiner Richtung entscheiden lässt (wenigstens auf dem Boden eines „normalen“ Systems der Meta-Metawissenschaft, das nach den am Anfang des § 4 angegebenen Prinzipien aufgebaut ist und das die Semantik der Metasprache nicht umfasst). Dagegen ist die Möglichkeit, den Satz III in seiner neuen Fassung als falsch zu erweisen, vom inhaltlichen Gesichtspunkt aus wenig wahrscheinlich. Eines scheint klar: es lässt sich hier die Antinomie des Lügners weder in der uns aus § 1 bekannten Formulierung noch in der Form, in der sie im Beweise des Satzes I auftritt, unmittelbar rekonstruieren. Die in der Theorie der Wahrheit angenommenen Axiome besitzen nämlich hier, im Gegensatz zur Umgangssprache, deutlich den Charakter von Teildefinitionen; durch Hinzufügung des Symbols „ W “ wird die Metasprache keineswegs semantisch universal, sie deckt sich nämlich nicht mit der Sprache selbst und lässt sich auch nicht in der Sprache interpretieren (vgl. S. [11] und [111]).¹⁰¹⁾

¹⁰¹⁾ Das zuletzt betrachtete Problem ist einem anscheinend allgemeineren Problem methodologischer Natur äquivalent, das sich in folgender Weise formulieren lässt. Wir setzen die Widerspruchsfreiheit der durch die Regel der unendlichen Induktion ergänzten Metawissenschaft voraus. Wir betrachten eine unendliche Folge t von Aussagen der Metawissenschaft; ferner nehmen wir in die Metawissenschaft ein neues Grundzeichen „ N “ auf und fügen als Axiome jene und nur jene Aussagen hinzu, die aus dem Schema „ $n \in N$ dann und nur dann, wenn p “ dadurch entstehen, dass für das Zeichen „ n “ das l -te spezifische Symbol der natürli-

Der Versuch, die gewonnenen Ergebnisse auf andere Sprachen unendlicher Ordnung anzuwenden, stösst auf keine ernstere Hindernisse. Dies betrifft insbesondere das wichtigste dieser Ergebnisse — den Satz I. Die Sprachen unendlicher Ordnung liefern in der Tat, dank der Fülle der in ihnen enthaltenen Bedeutungsformen, genügende Mittel zur Formulierung jeder Aussage aus dem Gebiete der Arithmetik der natürlichen Zahlen und ermöglichen infolgedessen die Interpretation der Metasprache in der Sprache selbst; dieser Umstand ist eben dafür entscheidend, dass Satz I seine Geltung für alle Sprachen der betrachteten Art behält¹⁰²⁾.

chen Zahlen (d. i. der aus k Zeichen „1“, die durch die Zeichen „+“ von einander getrennt sind, zusammengesetzte Ausdruck) und für das Zeichen „ p “ das l -te Glied der Folge t (wobei k hier eine beliebige natürliche Zahl ist) eingesetzt wird. Es handelt sich darum, ob die auf diese Weise erweiterte Klasse der beweisbaren Sätze der Metawissenschaft widerspruchsfrei bleibt. Dieses Problem könnte man das Problem der unendlichen induktiven Definitionen nennen: das in ihm beschriebene Axiomensystem könnte man — vom inhaltlichen Standpunkt aus — als eine Definition sui generis des Symbols „ N “ auffassen, die sich nur dadurch von den normalen Definitionen unterscheidet, dass sie in unendlich vielen Aussagen formuliert ist. Dieses Charakters der Axiome wegen scheint die Möglichkeit einer negativen Lösung des Problems wenig wahrscheinlich zu sein. Aus Satz II und aus der Interpretation der Metawissenschaft in der Wissenschaft selbst kann man unschwer schliessen, dass sich das betrachtete Problem in jenen Fällen in positivem Sinne lösen lässt, in denen die Ordnung aller Variablen, die in den Aussagen der Folge t auftreten, von oben beschränkt ist; man kann dann sogar in der Metawissenschaft eine solche Definition des Symbols „ N “ konstruieren, aus der alle erwähnten Axiome folgen. — Das betrachtete Problem hängt offenbar mit den spezifischen Eigenschaften der Metawissenschaft als solcher nicht zusammen: in derselben oder in einer etwas modifizierten Form kann man es auch für andere deduktive Wissenschaften, z. B. für die allgemeine Klassentheorie aufwerfen.

¹⁰²⁾ Hier ist ein Vorbehalt nötig: wenn wir als Ausgangspunkt die in ⁶⁵⁾ skizzierte Klassifikation der semantischen Kategorien wählen, so stossen wir doch auf Sprachen unendlicher Ordnung, für die Satz I seine Geltung verliert. Als typisches Beispiel kann die Sprache der sog. Protothetik Leśniewski's dienen (vgl. Leśniewski₁). Infolge des „finitistischen“ Charakters aller semantischen Kategorien dieser Sprache kann man in der Metasprache leicht eine richtige Definition der Wahrheit konstruieren, indem man die Matrizenmethode aus dem erweiterten Aussagenkalkül als Vorbild wählt⁶⁵⁾; eine solche Definition kann man übrigens auch auf anderem Wege gewinnen: wie Leśniewski gezeigt hat,

Einige Bemerkungen wollen wir jenen Fällen widmen, in denen nicht — wie bisher — eine einzelne Sprache, sondern eine ganze Klasse von Sprachen als Gegenstand der Untersuchung auftritt. Wie ich schon in der Einleitung betont habe, hängt der Begriff der Wahrheit sowohl seinem Umfang wie seinem Inhalt nach wesentlich von der Sprache ab, auf die er angewendet wird: nur dann können wir von einem Ausdruck sinnvoll behaupten, dass er eine wahre Aussage sei oder nicht sei, wenn wir diesen Ausdruck als Bestandteil einer konkreten Sprache behandeln. Sobald die Erwägungen eine grössere Anzahl von Sprachen betreffen, ist der Ausdruck „wahre Aussage“ nicht mehr eindeutig; wollen wir seine Mehrdeutigkeit vermeiden, so müssen wir ihn durch den relativen Terminus „eine in Bezug auf die gegebene Sprache wahre Aussage“ ersetzen. Um den Sinn dieses Terminus zu präzisieren, wenden wir im wesentlichen die uns schon bekannten Verfahrensweisen an: wir bauen für alle Sprachen der gegebenen Klasse eine gemeinsame Metasprache auf; innerhalb der Metasprache versuchen wir den betrachteten Ausdruck mit Hilfe der in §§ 3 und 4 entwickelten Methoden zu definieren; falls dies nicht gelingt, fügen wir diesen Terminus den Grundausdrücken der Metasprache bei und bestimmen seine Bedeutung auf axiomatischem Wege nach den Weisungen des Satzes III aus diesem Paragraphen. Wegen des relativisierten Charakters des betrachteten Terminus erwarten wir jedoch a priori, dass sich bei der Realisierung des skizzierten Planes die früheren Schwierigkeiten bedeutend vergrössern und ganz neue Komplikationen auftreten können (die z. B. mit der Notwendigkeit der Präzisierung des Wortes „Sprache“ zusammenhängen). Ich beabsichtige nicht, die hier berührten Probleme näher zu erörtern. Für derartige Untersuchungen bestehen zur Zeit keine weiter reichenden Aussichten. Insbesondere wäre es irrig anzunehmen, dass eine Relativisierung des Wahrheits-

ist die Klasse der beweisbaren Sätze der Protothetik vollständig und deshalb deckt sich der Begriff des beweisbaren Satzes seinem Umfang nach mit dem Begriff der wahren Aussage. Der Satz I betrifft dagegen ohne Einschränkung alle jene Sprachen, in denen die Ordnung der semantischen Kategorien aus dem Gebiet der sog. *Ontologie* Leśniewski's (vgl. Leśniewski₂) nicht von oben beschränkt ist.

begriffs — in jener Richtung, von der oben die Rede war, — den Weg zu irgend einer allgemeinen Theorie dieses Begriffs ebne, die alle möglichen oder wenigstens nur alle formalisierten Sprachen umfassen würde. Die Klasse der Sprachen, die wir zum Gegenstand simultaner Betrachtungen wählen, kann nicht zu weit sein; wenn wir z. B. in diese Klasse die Metasprache eingliedern, die das Gebiet der Untersuchungen bildet und bereits um den Wahrheitsbegriff bereichert ist, so schaffen wir automatisch Bedingungen, die die Rekonstruktion der Antinomie des Lünners ermöglichen. Die Sprache der allgemeinen Theorie der Wahrheit enthielte genau aus denselben Gründen wie die Umgangssprache einen Widerspruch.

Zum Schluss bemerken wir, dass die erzielten Ergebnisse sich auch auf andere Begriffe von semantischem Charakter, z. B. auf den Begriff des Erfülltseins erstrecken lassen. Für jeden dieser Begriffe kann man ein System von Postulaten aufstellen, das (1) Teildefinitionen enthält, die den in der Bedingung (α) der Konvention \mathbb{W} beschriebenen Sätzen analog sind und den Sinn des gegebenen Begriffs in Bezug auf alle konkreten, strukturell beschriebenen Ausdrücke dieser oder jener Klasse bestimmen (z. B. in Bezug auf Aussagen oder Aussagefunktionen von einem bestimmten semantischen Typus), und ausserdem (2) ein weiteres Postulat umfasst, das dem Satze aus der Bedingung (β) der erwähnten Konvention entspricht und feststellt, dass der betrachtete Begriff ausschliesslich auf Ausdrücke der gegebenen Klasse angewendet werden darf. Wir sind geneigt, eine solche Definition des untersuchten Begriffs als sachlich zutreffend gelten zu lassen, die alle Postulate des obigen Systems als Folgerungen nach sich zieht. Methoden, die den in §§ 3 und 4 dargestellten ähnlich sind, ermöglichen die Konstruktion der geforderten Definition in jenen Fällen, in denen wir es mit einer Sprache endlicher Ordnung zu tun haben, oder, allgemeiner ausgedrückt, in denen der betrachtete semantische Begriff ausschliesslich solche Sprachausdrücke betrifft, in denen die Ordnung aller Variablen von oben beschränkt ist (vgl. Satz II). In den übrigen Fällen kann man — nach dem Vorbild des Beweises des Satzes I — zeigen, dass man in der Metasprache keine Definition mit den erwähnten

Eigenschaften aufzustellen vermag¹⁰³). Um auch in diesen Fällen die Theorie des uns beschäftigenden Begriffs aufbauen zu können, gliedern wir ihn in das System der Grundbegriffe und die oben beschriebenen Postulate in das Axiomensystem der Metawissenschaft ein; ein dem Beweise des Satzes III analoges Schlussverfahren beweist, dass das auf diesem Wege bereicherte System der Metasprache innerlich widerspruchsfrei bleibt. Die deduktive Kraft der hinzugefügten Postulate ist jedoch sehr gering: diese Postulate genügen nicht zur Begründung der wichtigsten Sätze von allgemeinem Charakter, die den betrachteten Begriff betreffen; auch bestimmen sie nicht eindeutig seinen Umfang und das gewonnene System ist nicht vollständig, ja nicht einmal kategorisch. Um diese Mängel von Grund aus zu beseitigen, müsste man die Grundlagen der Metawissenschaft selbst verstärken, indem man zu ihren Schlussregeln die Regel der unendlichen Induktion hinzufügt; dann würde aber der Beweis der Widerspruchsfreiheit grosse Schwierigkeiten bieten, die zu überwinden wir bisher nicht in der Lage sind.

Zusammenfassung.

Die Hauptergebnisse dieser Arbeit kann man in folgenden drei Thesen zusammenfassen:

A. Für jede formalisierte Sprache endlicher Ordnung können wir in der Metasprache eine formal korrekte und sachlich zutreffende Definition der wahren Aussage konstruieren, indem wir ausschliesslich Ausdrücke von allgemein-logischem Charakter verwenden, ferner Ausdrücke der Spra-

¹⁰³) Dies betrifft insbesondere den Begriff der Definierbarkeit (obgleich in diesem Falle sowohl die Fragestellung selbst als auch die Methode der Lösung im Vergleich mit dem im Texte angeführten Schema gewisser Modifikationen bedarf). In der Arbeit Tarski, habe ich der Vermutung Ausdruck gegeben, dass es auf dem Boden der Metasprache unmöglich ist, diesen Begriff in seiner ganzen Ausdehnung zu definieren; diese Vermutung kann ich nunmehr exakt begründen. Diese Tatsache verdient umso mehr Beachtung, als man — wie ich in der erwähnten Arbeit bewiesen habe — die Definitionen der einzelnen Fälle des Definierbarkeitsbegriffs, die nicht die ganze Sprache, sondern beliebige ihrer Bruchstücke endlicher Ordnung betreffen, nicht nur in der Metasprache, sondern auch in der Sprache selbst konstruieren kann.

che selbst, sowie Termini aus dem Gebiete der Morphologie der Sprache, d. h. die Namen der Sprachausdrücke und der zwischen ihnen bestehenden strukturellen Relationen.

B. Für formalisierte Sprachen unendlicher Ordnung ist die Konstruktion einer solchen Definition unmöglich.

C. Dagegen kann man sich sogar in Bezug auf die formalisierten Sprachen unendlicher Ordnung in konsequenter und richtiger Weise des Wahrheitsbegriffs bedienen, indem man diesen Begriff in das System der Grundbegriffe der Metasprache eingliedert und seine fundamentalen Eigenschaften mit Hilfe der axiomatischen Methode bestimmt (die Frage jedoch, ob die auf diesem Wege begründete Theorie der Wahrheit keinen Widerspruch enthält, ist bis nun nicht endgültig entschieden worden).

Da sich die gewonnenen Ergebnisse leicht auf andere Begriffe semantischer Natur ausdehnen lassen, können wir den obigen Thesen eine allgemeinere Gestalt verleihen:

A'. Die Semantik einer beliebigen formalisierten Sprache endlicher Ordnung lässt sich als ein auf entsprechend konstruierte Definitionen gestützter Teil der Morphologie der Sprache aufbauen.

B'. Es ist unmöglich, auf diesem Wege die Semantik der formalisierten Sprachen unendlicher Ordnung zu begründen.

C'. Man kann dagegen die Semantik einer beliebigen formalisierten Sprache unendlicher Ordnung als eine selbständige Wissenschaft begründen, die sich auf eigene Grundbegriffe und eigene Axiome stützt und als logischen Unterbau ein System der Morphologie der Sprache besitzt (wenn uns auch bis jetzt die volle Gewähr fehlt, dass die mit Hilfe dieser Methode aufgebaute Semantik keinen inneren Widerspruch enthält).

In formaler Hinsicht sind obige Untersuchungen im Rahmen der Methodologie der deduktiven Wissenschaften durch-

geführt worden. Manche sozusagen nebenbei erzielten Ergebnisse werden vielleicht die Spezialforscher eben dieses Gebietes interessieren. Ich mache also darauf aufmerksam, dass wir dank der Definition der wahren Aussage für deduktive Wissenschaften endlicher Ordnung eine allgemeine Methode gewonnen haben, ihre Widerspruchsfreiheit zu beweisen (eine Methode, die übrigens keinen bedeutenderen Erkenntniswert besitzt). Ich bemerke noch, dass es uns gelungen ist, für die Sprachen endlicher Ordnung die Begriffe einer in dem gegebenen bzw. in jedem Individuenbereiche richtigen Aussage zu präzisieren — Begriffe, die in den neueren Arbeiten aus dem Gebiete der Methodologie eine grosse Rolle spielen.

In ihrem wesentlichen Teile liegt jedoch vorliegende Arbeit abseits von dem Hauptstrom methodologischer Untersuchungen. Ihr zentrales Problem — die Konstruktion der Definition der wahren Aussage und die Fundierung der wissenschaftlichen Grundlagen der Theorie der Wahrheit — gehört ins Gebiet der Erkenntnistheorie und wird sogar zu den Hauptproblemen dieses Zweiges der Philosophie gezählt. Und so hoffe ich, dass diese Arbeit in erster Reihe die Erkenntnistheoretiker interessieren wird und dass diese die in der Arbeit enthaltenen Ergebnisse kritisch analysieren und für weitere Forschungen auf diesem Gebiete zu verwerten im Stande sein werden, ohne sich durch den stellenweise beschwerlichen und in dem von ihnen bearbeiteten Wissenschaftsgebiete bisher nicht verwendeten Apparat von Begriffen und Methoden abschrecken zu lassen.

Zum Schluss noch Eines. Die in ihrer alltäglichen wissenschaftlichen Arbeit an die Anwendung deduktiver Methoden nicht gewöhnten Philosophen sind geneigt, alle formalisierten Sprachen mit einer gewissen Geringschätzung zu behandeln, indem sie diesen „künstlichen“ Gebilden die einzige natürliche Sprache — die Umgangssprache — gegenüberstellen. Darum wird der Umstand, dass die gewonnenen Ergebnisse fast ausschliesslich die formalisierten Sprachen betreffen, den Wert obiger Untersuchungen in den Augen mancher Leser wesentlich herabsetzen. Es fiel mir schwer, diese Ansicht zu teilen: meines Erachtens beweisen die Erörterungen des § 1 nachdrücklich, dass der Wahrheitsbegriff (wie übrigens auch andere semantische Begriffe) in seiner Anwendung auf die Umgangs-

sprache — bei Verwendung der normalen Gesetze der Logik — unbedingt zu Verwicklungen und Widersprüchen führt. Wer immer, allen Schwierigkeiten zum Trotz, die Semantik der Umgangssprache mit Hilfe exakter Methoden betreiben wollte, müsste sich vorher der undankbaren Arbeit einer „Reform“ dieser Sprache unterziehen: er müsste ihre Struktur präzisieren, die Mehrdeutigkeit der in ihr auftretenden Termini beseitigen und endlich die Sprache in eine Reihe immer umfangreicherer Sprachen spalten, von denen jede in demselben Verhältnis zur nächsten stünde, wie eine formalisierte Sprache zu ihrer Metasprache. Man darf jedoch zweifeln, ob die auf diesem Wege „rationalisierte“ Umgangssprache die Eigenschaft der „Natürlichkeit“ behalten würde und ob sie dann nicht die charakteristischen Merkmale der formalisierten Sprachen annehmen würde.

Nachwort.

Als ich die vorstehenden Untersuchungen niederschrieb, habe ich mich ausschliesslich für solche formalisierte Sprachen interessiert, deren Struktur sich mit der Theorie der semantischen Kategorien und insbesondere mit dem Hauptprinzip dieser Theorie in Einklang bringen lässt; dieser Umstand hat einen wesentlichen Einfluss auf den Aufbau der ganzen Arbeit und auf die Formulierung ihrer Schlussergebnisse ausgeübt. Es schien mir damals, dass „die Theorie der semantischen Kategorien so tief in die fundamentalen, die Sinnhaftigkeit der Ausdrücke betreffenden Intuitionen [hineindringt], dass es kaum möglich ist, sich eine wissenschaftliche Sprache vorzustellen, deren Aussagen einen deutlichen inhaltlichen Sinn besitzen, deren Bau jedoch mit der in Rede stehenden Theorie in einer ihrer Auffassungen nicht in Einklang gebracht werden kann“ (vgl. S. [75]). Heute könnte ich den damals in dieser Frage vertretenen Standpunkt nicht mehr in entschiedener Weise verteidigen. Im Zusammenhang damit erscheint es mir nun interessant und wichtig zu untersuchen, welche Folgerungen sich für die Grundprobleme vorliegender Arbeit ergeben, wenn man in den Bereich der Überlegungen solche formalisierte Sprachen einbezieht, in welchen das Hauptprinzip der Theorie der semantischen Kategorien nicht mehr gilt. Mit eben dieser Frage will ich mich im folgenden kurz befassen.

Ogleich auf diese Weise das Gebiet der Betrachtungen wesentlich erweitert wird, beabsichtige ich jedoch — ebenso wie früher — keineswegs, alle möglichen Sprachen zu berücksichtigen, die irgend jemand irgendwann zu konstruieren vermöchte. Ich werde mich im Gegenteil ausschliesslich auf solche Sprachen beschränken, welche — abgesehen von den mit der Theorie der semantischen Kategorien zusammenhängenden Unterschieden — in ihrer Struktur eine möglichst weitgehende Analogie mit den vorher untersuchten Sprachen aufweisen. Insbesondere werde ich zwecks Vereinfachung der Überlegungen nur solche Sprachen in Betracht ziehen, in welchen — neben den All- und Existenzzeichen sowie den Konstanten des Aussagenkalküls — ausschliesslich Individuennamen und die sie vertretenden Variablen wie auch konstante und variable aussagebildende Funktoren mit beliebiger Argumentenzahl auftreten. Nach dem Vorbild der Betrachtungen aus den §§ 2 und 4 versuchen wir der Reihe nach, für jede dieser Sprachen die Begriffe der fundamentalen Aussagefunktion, der Grundoperation an Ausdrücken, der Aussagefunktion im allgemeinen, des Axioms, der Folgerung und des beweisbaren Satzes zu bestimmen. So z. B. zählen wir in der Regel zu den Axiomen — ebenso wie in der Sprache der allgemeinen Klassentheorie aus § 5 — die Einsetzungen der Axiome des Aussagenkalküls, die Pseudodefinitionen und die Gesetze der Extensionalität (ausserdem gegebenenfalls noch andere Aussagen, je nach den spezifischen Eigentümlichkeiten der Sprache); bei der Bestimmung des Begriffs der Folgerung nehmen wir die Def. 15 aus § 2 zum Vorbild.

Der im § 4 eingeführte Begriff der Ordnung eines Ausdrucks spielt beim Aufbau der jetzt untersuchten Sprache eine nicht minder wesentliche Rolle als zuvor. Es empfiehlt sich, den Namen der Individuen und den sie vertretenden Variablen die Ordnung 0 zuzuschreiben (und nicht so wie zuvor die Ordnung 1). Die Ordnung eines aussagebildenden Funktors einer beliebigen (fundamentalen) Aussagefunktion ist jetzt nicht mehr durch die Ordnungen aller Argumente dieser Funktion eindeutig bestimmt: da nämlich das Hauptprinzip der Theorie der semantischen Kategorien nunmehr nicht gilt, kann es geschehen, dass ein und dasselbe Zeichen zugleich die Rolle des Funktors

in zwei oder mehreren Aussagefunktionen spielt, in welchen Argumente, die beziehungsweise die gleichen Stellen einnehmen, nichtsdestoweniger zu anderen Ordnungen gehören. Um also die Ordnung eines beliebigen Zeichens zu bestimmen, müssen wir die Ordnungen aller Argumente in allen Aussagefunktionen ins Auge fassen, in denen dieses Zeichen ein aussagebildender Funktor ist. Ist die Ordnung aller dieser Argumente kleiner als eine bestimmte natürliche Zahl n und tritt mindestens in einer Aussagefunktion irgend ein Argument auf, das genau von der Ordnung $n-1$ ist, so schreiben wir dem betreffenden Zeichen die Ordnung n zu; wir zählen alle derartigen aussagebildenden Funktoren — ähnlich wie auch die Namen von Individuen und die sie vertretenden Variablen — zu den Zeichen endlicher Ordnung. Wir müssen jedoch auch dem Fall Rechnung tragen, dass in der Sprache noch andere aussagebildende Funktoren vorkommen, welchen man eine unendliche Ordnung zuschreiben muss; wenn z. B. ein Zeichen aussagebildender Funktor nur solcher Aussagefunktionen ist, deren sämtliche Argumente endlicher Ordnung sind, wobei jedoch diese Ordnungen durch keine natürliche Zahl nach oben beschränkt sind, so wird schon dieses Zeichen von unendlicher Ordnung sein.

Um die Zeichen unendlicher Ordnung einzuteilen, bedienen wir uns des der Mengenlehre entnommenen Begriffs der Ordnungszahl, der eine Verallgemeinerung des üblichen Begriffs der natürlichen Zahl ist¹⁰⁴). Die natürlichen Zahlen sind bekanntlich die kleinsten Ordnungszahlen. Da es für jede unendliche Folge von Ordnungszahlen Zahlen gibt, die grösser als jedes Glied der Folge sind, so gibt es insbesondere Zahlen, die grösser als alle natürlichen Zahlen sind; wir nennen sie transfinite Ordnungszahlen. In jeder nicht leeren Klasse von Ordnungszahlen gibt es bekanntlich eine kleinste Zahl; insbesondere gibt es die kleinste transfinite Zahl, die man mit dem Symbol „ ω “ bezeichnet; die nächstgrössere Zahl ist $\omega+1$, weiter folgen der Reihe nach die Zahlen $\omega+2$, $\omega+3\dots$, $\omega\cdot 2$, $\omega\cdot 2+1$, $\omega\cdot 2+2\dots$, $\omega\cdot 3\dots$ u. s. w. Jenen Zeichen unendlicher Ordnung, welche Funktoren von Aussagefunktionen sind, die ausschliesslich Argumente endlicher Ord-

¹⁰⁴) Vgl. z. B. Fraenkel, S. 185 ff.

nungen enthalten, schreiben wir als ihre Ordnung die Zahl ω zu; ein Zeichen, welches ein Funktor nur solcher Aussagefunktionen ist, deren Argumente entweder endlicher Ordnung oder von der Ordnung ω sind (wobei mindestens ein Argument einer Funktion tatsächlich von der Ordnung ω ist), ist von der Ordnung $\omega + 1$. Die allgemeine rekursive Definition der Ordnung lautet: die Ordnung eines bestimmten Zeichens ist die kleinste Ordnungszahl, die grösser ist als die Ordnungen aller Argumente in allen Aussagefunktionen, in welchen das gegebene Zeichen als ein aussagebildender Funktor auftritt¹⁰⁵).

Ähnlich wie im § 4 können wir Sprachen endlicher und unendlicher Ordnung unterscheiden. Ja wir können sogar jeder Sprache als ihre Ordnung eine ganz bestimmte Ordnungszahl zuordnen, nämlich die kleinste Ordnungszahl, welche die Ordnungen aller Variablen überschreitet, die in dieser Sprache auftreten (die früheren Sprachen n^{ter} Ordnung behalten — wie man sich leicht überzeugen kann — auf Grund dieser Konvention ihre frühere Ordnung bei und zwar mit Rücksicht auf die Herabsetzung der den Namen der Individuen zugeschriebenen Ordnung; die Sprache der allgemeinen Klassentheorie aus § 5 erhält die Ordnung ω).

Aus diesen Bemerkungen folgt keinesfalls, dass jede in den betrachteten Sprachen auftretende Variable von einer bestimmten Ordnung ist. Es scheint mir im Gegenteil (auf Grund der angestellten Proben und Überlegungen) fast sicher zu sein, dass man sich nicht auf die Verwendung Variabler bestimmter Ordnungen beschränken kann, falls man Sprachen erhalten will, die den früheren Sprachen in Bezug auf die Fülle der mit ihrer Hilfe ausdrückbaren Begriffe tatsächlich überlegen wären und deren Erforschung ein neues Licht auf die uns hier interessierenden Probleme werfen könnte. Man muss in die Sprachen Variable unbestimmter Ordnung einführen, welche sozusagen alle möglichen Ordnungen „durchlaufen“, welche als Faktoren oder Argumente in Aussagefunktionen ohne Rücksicht auf die Ordnung der übrigen in diesen Funktionen vorkommenden Zeichen auftreten können und welche insbesondere zugleich sowohl

¹⁰⁵) Vgl. hierzu die Einführung des Stufensystems in dem unlängst erschienenen Buch von R. Carnap, *Logische Syntax der Sprache*, Schriften zur wissenschaftlichen Weltauffassung, Bd. 6, Wien 1934, S. 139 ff.

Funktoren als auch Argumente ebenderselben Aussagefunktionen sein können. Wir müssen mit derartigen Variablen höchst vorsichtig verfahren, wenn wir uns nicht in Antinomien nach Art der berühmten Antinomie der Klasse aller Klassen, die sich selbst als Elemente nicht enthalten, verfangen wollen. Wir müssen insbesondere die nötige Vorsicht walten lassen, wenn wir für eine Sprache, die derartige Variable enthält, die Einsetzungsregel formulieren und die von uns als Pseudodefinitionen bezeichneten Axiome beschreiben. Auf Einzelheiten können wir hier nicht eingehen¹⁰⁶).

Offenbar besteht kein Hindernis, Variable transfiniten Ordnung nicht nur in die Sprache, die den Gegenstand der Betrachtungen bildet, sondern auch in die Metasprache, auf deren Boden die Betrachtungen angestellt werden, einzuführen. Insbesondere kann man die Metasprache immer in der Weise konstruieren, dass in ihr Variable höherer Ordnung auftreten als die Ordnungen aller Variablen der betrachteten Sprache; die Metasprache wird dann eine Sprache höherer Ordnung,

¹⁰⁶) Von den zuletzt betrachteten Sprachen führt nur ein Schritt zu Sprachen anderer Art, in welchen ausschliesslich Variable unbestimmter Ordnung auftreten. In formaler Hinsicht sind dies Sprachen von sehr einfacher Struktur — nach der im § 4 festgesetzten Terminologie muss man sie zu den Sprachen erster Art zählen, da ihre sämtlichen Variablen zu ein und derselben semantischen Kategorie gehören. Nichtsdestoweniger kann man — wie dies die Untersuchungen von E. Zermelo und seinen Fortsetzern (vgl. z. B. Skolem₃, S. 1–12) gezeigt haben — dank einer entsprechenden Wahl der Axiome auf dem Boden dieser Sprachen die Mengenlehre und die ganze klassische Mathematik aufbauen, man kann also in ihnen sozusagen jeden Gedanken ausdrücken, der sich in den vorher untersuchten Sprachen endlicher und unendlicher Ordnung formulieren lässt. Für die Sprachen, von denen die Rede ist, verliert der Begriff der Ordnung keineswegs seine Bedeutung, er betrifft aber nicht mehr die Ausdrücke der Sprache, sondern entweder die durch diese Ausdrücke bezeichneten Gegenstände oder die Sprachen als Ganzes. Individuen, d. h. Gegenstände, die keine Mengen sind, nennen wir nämlich Gegenstände der Ordnung 0; die Ordnung einer beliebigen Menge ist die kleinste Ordnungszahl, die grösser ist als die Ordnungen aller Elemente dieser Menge; die Ordnung der Sprache ist die kleinste Ordnungszahl, welche die Ordnungen aller Mengen übertrifft, deren Existenz aus den in der Sprache angenommenen Axiomen folgt. Unsere ferneren Ausführungen beziehen sich ohne Einschränkung auch auf jene Sprachen, von welchen eben die Rede ist.

also eine an grammatischen Formen wesentlich reichere als die von uns untersuchte Sprache sein. Dies ist eine Tatsache, die vom Standpunkt der uns hier interessierenden Probleme eine hervorragende Bedeutung besitzt: es verschwindet nämlich hiemit der Unterschied zwischen den Sprachen endlicher und unendlicher Ordnung — der Unterschied, der in den Untersuchungen der §§ 4 und 5 so stark hervorgetreten ist und in den in der „Zusammenfassung“ formulierten Thesen A und B einen krassen Ausdruck gefunden hat. In der Tat: die Aufstellung einer richtigen und korrekten Definition der Wahrheit für die Sprachen endlicher Ordnung wurde im wesentlichen durch den Umstand ermöglicht, dass wir in der Metasprache Ausdrücke höherer Ordnung als alle Variablen der untersuchten Sprache zur Verfügung hatten; das Fehlen solcher Ausdrücke in der Metasprache hat es nicht erlaubt, diese Konstruktionsmethode auf Sprachen unendlicher Ordnung auszudehnen. Nunmehr sind wir schon imstande, den Begriff der Wahrheit für eine beliebige Sprache endlicher oder unendlicher Ordnung zu definieren, wenn wir nur unseren Untersuchungen eine Metasprache zu Grunde legen, deren Ordnung mindestens um 1 höher ist als die der betreffenden Sprache (eine wesentliche Rolle spielt hier das Vorhandensein von Variablen unbestimmter Ordnung in der Metasprache). Es ist vielleicht interessant hervorzuheben, dass die Konstruktion der Definition hiebei eine gewisse Vereinfachung erfährt: wir können uns nämlich streng an die im § 3 skizzierte Methode halten, ohne die Kunstgriffe anzuwenden, zu denen wir im § 4 bei der Untersuchung der Sprachen zweiter und dritter Art unsere Zuflucht nehmen mussten; wir brauchen weder mehrzeilige Folgen anzuwenden noch die semantische Vereinheitlichung der Variablen durchzuführen, denn — das Hauptprinzip der Theorie der semantischen Kategorien einmal aufgehoben — können wir frei mit Folgen operieren, deren einzelne Glieder verschiedener Ordnung sind. Andererseits verlieren die im § 5 im Zusammenhang mit Satz I angestellten Überlegungen keineswegs an Bedeutung und lassen sich auf Sprachen beliebiger Ordnung ausdehnen: es lässt sich für keine Sprache, in welcher man die Arithmetik der natürlichen Zahlen aufbauen kann, eine zutreffende Definition der Wahrheit angeben, wenn die Ordnung der Meta-

sprache, auf deren Boden die Untersuchungen geführt werden, die Ordnung der untersuchten Sprache nicht übertrifft (vgl. die betreffenden Bemerkungen auf S. [117]).

So ergibt sich schliesslich auf Grund obiger Betrachtungen die Notwendigkeit, die in den Schlüsselausführungen dieser Arbeit aufgestellten Thesen A und B, welche die Zusammenfassung ihrer Hauptergebnisse enthalten, einer ziemlich weitgehenden Umformung zu unterziehen:

A. Für jede formalisierte Sprache lässt sich in der Metasprache eine formal korrekte und sachlich zutreffende Definition der wahren Aussage mit alleiniger Hilfe von Ausdrücken allgemein-logischen Charakters, von Ausdrücken der Sprache selbst und von Termini aus der Morphologie der Sprache konstruieren — jedoch unter der Bedingung, dass die Metasprache eine höhere Ordnung besitzt als diejenige Sprache, die Gegenstand der Untersuchung ist.

B. Wenn die Ordnung der Metasprache der Ordnung der Sprache selbst höchstens gleich ist, lässt sich eine solche Definition nicht konstruieren.

Aus einem Vergleich der neuen Formulierung der beiden Thesen mit der früheren ersieht man, dass die Tragweite der gewonnenen Ergebnisse eine wesentliche Erweiterung erfahren hat, wobei aber gleichzeitig die Bedingungen für die Anwendung dieser Ergebnisse näher präzisiert wurden.

Mit Rücksicht auf die neue Fassung der These A verliert die frühere These C ihre Bedeutung; sie besitzt einen gewissen Wert nur noch dann, wenn die Untersuchungen auf dem Boden einer Metasprache geführt werden, welche dieselbe Ordnung wie die untersuchte Sprache besitzt, und wenn man unter Verzicht auf die Konstruierung einer Definition der Wahrheit die Theorie der Wahrheit mit Hilfe der axiomatischen Methode aufzubauen versucht. Es ist leicht einzusehen, dass eine auf diesem Wege aufgebaute Theorie der Wahrheit keinen inneren Widerspruch enthalten kann, wenn nur die Metasprache höherer Ordnung widerspruchsfrei ist, auf deren Boden man eine zutreffende Definition der Wahrheit aufstellen und aus ihr die-

jenigen Sätze, welche in der Theorie der Wahrheit als Axiome angenommen worden sind, ableiten kann¹⁰⁷).

In ähnlicher Weise wie in den Schlusssausführungen der Arbeit können wir den Thesen A und B eine allgemeinere Fassung geben, indem wir sie auf andere Begriffe aus dem Gebiet der Semantik ausdehnen:

A'. Die Semantik einer beliebigen formalisierten Sprache lässt sich als ein auf entsprechend konstruierte Definitionen gestützter Teil der Morphologie der Sprache begründen, jedoch unter der Bedingung, dass die Sprache, in welcher wir die Morphologie treiben, eine höhere Ordnung besitzt, als die Sprache, deren Morphologie wir treiben.

B'. Es ist unmöglich auf diesem Wege die Semantik einer Sprache zu begründen, wenn die Ordnung der Sprache der Morphologie der Ordnung der untersuchten Sprache höchstens gleich ist.

Die These A hat in ihrer neuen verallgemeinerten Fassung keine geringe Bedeutung für die Methodologie der deduktiven Wissenschaften; ihre Konsequenzen laufen gleichsam den bedeutsamen Ergebnissen parallel, die in den letzten Jahren auf diesem Gebiet von Gödel erzielt wurden. Die Definition der Wahrheit erlaubt es, die Widerspruchsfreiheit einer deduktiven Wissenschaft auf dem Boden einer Metawissenschaft zu beweisen, deren Ordnung höher ist als jene der Wissenschaft selbst (vgl. S. [58] und [99]); aus den Gödelschen Untersuchungen folgt dagegen, dass es im allgemeinen unmöglich ist, die Widerspruchsfreiheit einer Wissenschaft zu beweisen, falls man den Beweis auf dem Boden einer Metawissenschaft von gleicher oder niedrigerer Ordnung durchzuführen versucht⁹²). Gödel hat ferner eine Methode der Konstruktion solcher Aussagen angegeben, welche sich — unter Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit der betreffenden Wissenschaft — in dieser Wissenschaft nach keiner Richtung hin entscheiden lassen.

¹⁰⁷) Insbesondere findet die auf S. [126] berührte Frage eine positive Antwort; dasselbe gilt auch für das in ¹⁰¹) erwähnte Problem der unendlichen induktiven Definitionen.

Alle nach der Methode von Gödel konstruierten Aussagen besitzen aber die Eigenschaft, dass man auf dem Boden der Metawissenschaft höherer Ordnung unter Zugrundelegung der richtigen Definition der Wahrheit feststellen kann, ob sie wahr oder falsch sind, und somit auch in Bezug auf diese Aussagen eine Entscheidung treffen, d. i. sie entweder beweisen oder widerlegen kann; noch mehr: man kann diese Entscheidung im Bereiche der Wissenschaft selbst treffen, ohne sich der Begriffe und Voraussetzungen der Metawissenschaft zu bedienen — allerdings nur unter der Bedingung, dass wir vorher die Sprache und die logischen Grundlagen der betrachteten Wissenschaft durch die Einführung von Variablen höherer Ordnung bereichert haben¹⁰⁸).

Wir wollen versuchen, dies etwas genauer zu erklären. Betrachten wir eine beliebige deduktive Wissenschaft, in welcher sich die Arithmetik der natürlichen Zahlen aufbauen lässt, und stellen wir provisorisch die Untersuchung auf dem Boden der Metawissenschaft gleicher Ordnung wie die Wissenschaft selbst an. Die von Gödel begründete Methode der Konstruktion unentscheidbarer Aussagen haben wir implizite im Beweis des Satzes I aus § 5 (S. [112] ff.) skizziert. Setzen wir überall — sowohl in der Formulierung des Satzes als auch in seinem Beweise — an Stelle des Symbols „*Wr*“ das Symbol „*Bw*“, welches die Klasse aller beweisbaren Sätze der betrachteten Wissenschaft bezeichnet und sich bekanntlich in der Metawissenschaft definieren lässt (vgl. z. B. Def. 17 aus § 2). Gemäss dem ersten Teil des Satzes I können wir als Konsequenz der Definition des Symbols „*Bw*“ die Negation eines der in der Bedingung (*a*) der Konvention \mathfrak{W} aus § 3 beschriebenen Sätze gewinnen (falls wir nur in dieser Konvention ebenfalls „*Wr*“ durch „*Bw*“ ersetzen). M. a. W. man kann eine solche Aussage *x* der betrachteten Wissenschaft konstruieren, welche folgende Bedingung erfüllt:

es ist nicht wahr, dass $x \in Bw$ dann und nur dann, wenn p

oder in äquivalenter Formulierung:

(1) *$x \in Bw$ dann und nur dann, wenn p .*

¹⁰⁸) Vgl. Gödel, S. 187 ff. und insbesondere S. 191 Anm. 48a).

wobei das Symbol „ p “ die ganze Aussage x vertritt (und zwar kann als x die im Beweis des Satzes I konstruierte Aussage $U_1^3(i_k, \varphi_k)$ gewählt werden).

Wir werden zeigen, dass die Aussage x tatsächlich unentscheidbar und dabei wahr ist. Zu diesem Zwecke wollen wir zur Metawissenschaft höherer Ordnung übergehen; der Satz (1) bleibt hiebei offenbar gültig. Gemäss der These A können wir auf Grund der bereicherten Metawissenschaft eine richtige, alle Aussagen der untersuchten Wissenschaft betreffende Definition der Wahrheit konstruieren. Wenn wir die Klasse aller wahren Aussagen mit dem Symbol „ Wr “ bezeichnen, wird — der Konvention \mathbb{W} gemäss — die von uns konstruierte Aussage x folgender Bedingung genügen:

(2) $x \in Wr$ dann und nur dann, wenn p ;

aus (1) und (2) gewinnen wir sofort

(3) $x \in Bw$ dann und nur dann, wenn $x \in Wr$.

Indem wir ferner mit dem Symbol „ \bar{x} “ die Negation der Aussage x bezeichnen, können wir bekanntlich aus der Definition der Wahrheit folgende Sätze ableiten (vgl. Satz 1 und 5 aus § 2):

(4) entweder $x \in Wr$, oder $\bar{x} \in Wr$;

(5) wenn $x \in Bw$, so $x \in Wr$;

(6) wenn $\bar{x} \in Bw$, so $\bar{x} \in Wr$.

Aus (3) und (5) schliessen wir ohne Schwierigkeit, dass

(7) $x \in Wr$

und dass

(8) $x \in Bw$.

In Hinsicht auf (4) und (7) haben wir $\bar{x} \in Wr$, was in Verbindung mit (6) die Formel:

(9) $\bar{x} \in Bw$

ergibt.

Die Formeln (8) und (9) bringen zusammen zum Ausdruck, dass x eine unentscheidbare Aussage ist; dabei folgt aus (7), dass x eine wahre Aussage ist.

Durch die Feststellung der Wahrheit der Aussage x haben wir eo ipso — auf Grund von (2) — auch die Aussage x selbst

in der Metawissenschaft begründet. Da sich ferner die Metawissenschaft in der durch Variable höherer Ordnung bereicherten Wissenschaft interpretieren lässt (vgl. S. [41]) und da bei dieser Interpretation die Aussage x , die ja keine spezifischen Termini der Metawissenschaft enthält, in sich selbst übergeht, so lässt sich der in der Metawissenschaft gegebene Beweis der Aussage x automatisch auf den Boden der Wissenschaft selbst übertragen: die auf dem Boden der ursprünglichen Wissenschaft unentscheidbare Aussage x wird in der bereicherten Wissenschaft zu einer entscheidbaren Aussage.

Noch auf ein analoges Ergebnis möchten wir hier aufmerksam machen. Es lassen sich für jede deduktive Wissenschaft, in der die Arithmetik enthalten ist, solche arithmetische Begriffe angeben, die sozusagen inhaltlich zu dieser Wissenschaft gehören, die aber auf Grund dieser Wissenschaft nicht definierbar sind; mit Hilfe von Methoden, die den bei dem Aufbau der Wahrheitsdefinition verwendeten völlig analog sind, kann man jedoch zeigen, dass diese Begriffe auf Grund der betrachteten Wissenschaft definiert werden können, sofern man nur die Wissenschaft durch die Einführung von Variablen höherer Ordnung bereichert¹⁰⁹⁾.

Schliesslich können wir also feststellen, dass die Definition der Wahrheit und, allgemeiner, die Grundlegung der Semantik es gestattet, manchen wichtigen negativen Ergebnissen, die im Gebiet der Methodologie der deduktiven Wissenschaften gewonnen wurden, die parallelen positiven Ergebnisse gegenüberzustellen und dadurch die in der deduktiven Methode und im Gebäude des deduktiven Wissens selbst aufgedeckten Lücken bis zu einem gewissen Grade auszufüllen.

Historische Bemerkung. Im Laufe der letzten sechs Jahre, d. i. vom Jahre 1929 an, in dem ich die endgültige Definition des Wahrheitsbegriffes und den grössten Teil der übrigen hier dargelegten Resultate erreicht habe, bis zum Jahre 1935, in dem nunmehr die vollständige

¹⁰⁹⁾ Vgl. hierzu mein Autoreferat: *Über definierbare Mengen reeller Zahlen*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique, tome IX., année 1930, Kraków 1931, S. 206—207 (Bericht über einen am 16. Dezember 1930 in der Lemberger Sektion der Polnischen Mathematischen Gesellschaft gehaltenen Vortrag); die Ideen, die ich dort skizzierte, habe ich später zum Teil in der Arbeit Tarski, entwickelt.

Arbeit erstmalig in einer Weltsprache erscheint, sind die hier untersuchten Fragen mehrfach behandelt worden. So erschienen in deutscher Sprache ausser meiner Zusammenfassung Tarski₁ (1982) z. B. Arbeiten von Carnap, in denen ganz ähnliche Gedanken entwickelt werden (vgl. R. Carnap, *Die Antinomien und die Unvollständigkeit der Mathematik*, Monatshefte für Mathematik und Physik, 41. Bd., Leipzig 1934, S. 263—284 und *Ein Gültigkeitskriterium für die Sätze der klassischen Mathematik*, ibid., 42. Bd., Leipzig 1935, S. 163—190; beide Artikel sind Ergänzungen zu R. Carnap, *Logische Syntax der Sprache*, Wien 1934).

Von vornherein lag es nahe, dass infolge dieses Zeitraums von sechs Jahren, infolge der Aktualität der Probleme und vielleicht auch infolge der Sprache des Urtextes meiner Arbeit Irrtümer bezüglich der historischen Zusammenhänge auftreten könnten. Und in der Tat schreibt z. B. Carnap in dem zweiten der angeführten Artikel (S. 165, Anm. ³⁾) über meine Untersuchungen, dass diese „...in Anknüpfung an die von Gödel...“ durchgeführt worden seien. Es ist deshalb wohl nicht überflüssig, wenn ich an dieser Stelle einige Bemerkungen über die Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit meiner Untersuchungen mache.

Ganz allgemein möchte ich feststellen, dass alle meine Methoden und Ergebnisse, ausser an jenen Stellen, an denen ich dies ausdrücklich hervorgehoben habe — vgl. z. B. Anm. ³⁾ und Anm. ⁶⁸⁾ —, von mir vollkommen selbständig und unabhängig gewonnen wurden. Die in Anm. ³⁾ angegebenen Daten liefern, wie ich glaube, hinreichende Unterlagen für die Nachprüfung dieser Behauptung. Ergänzend bemerke ich, dass meine in französischer Sprache erschienene Arbeit Tarski₁ (1931), über die ich schon im Dezember 1930 berichtet habe (vgl. das in ¹⁰⁹⁾ zitierte Autoreferat in deutscher Sprache), eben jene Konstruktionsmethode enthält, die dort zu andern Zwecken, in der vorliegenden Arbeit jedoch zur Konstruktion der Definition der Wahrheit verwendet wurde.

Im einzelnen möchte ich die Selbständigkeit meiner Untersuchungen in folgenden Punkten hervorheben: (1) die allgemeine Problemstellung für die Definition der Wahrheit, vgl. insbesondere S. [44]—[46]; (2) die positive Lösung des Problems, d. h. die Definition des Wahrheitsbegriffs für den Fall, dass man in der Metasprache über genügend reiche Mittel verfügt (für logische Sprachen geht diese Definition in jene des von Carnap verwendeten Terminus „analytisch“ über), vgl. S. [53] f. und [98]; (3) die Methode der Beweise der Widerspruchsfreiheit auf Grund der Definition der Wahrheit, vgl. S. [58] und [99]; (4) der axiomatische Aufbau des Metasystems, vgl. S. [29] ff., und im Zusammenhang damit (5) die Ausführungen auf S. [41] f. über die Interpretation des Metasystems in der Arithmetik, die bereits die von Gödel weit vollständiger und ganz unabhängig entwickelte sogenannte „Methode der Arithmetisierung der Metasprache“ enthalten. Ausserdem möchte ich noch auf Resultate aufmerksam machen, die sich nicht auf den Wahrheitsbegriff, sondern auf einen andern semantischen Begriff, jenen der Definierbarkeit beziehen und über die auf S. [143] berichtet wurde.

An der einzigen Stelle, an der ich in wesentlicher Weise an Gödels Gedanken anknüpfe — bei der negativen Lösung des Problems der Definition der Wahrheit für den Fall, dass die Metasprache nicht reicher ist als die untersuchte Sprache, — habe ich dies selbstverständlich nachdrücklich betont (vgl. ⁶⁸⁾); es sei bemerkt, dass das so erzielte, meine Arbeit sehr vervollständigende Resultat als einziges in die im übrigen bereits abgeschlossene Untersuchung nachträglich eingefügt wurde.

„Nachwort“ allatum est die 13. Aprilis 1935.