Inhaltsverzeichnis

Einführung in die Himmelsmechanik

Prof.Dr. Michael Soffel

1 Einleitung

Die Himmelsmechanik beschäftigt sich mit den Bewegungen der Planeten, Kometen, Monde und Meteore im Sonnensystem, der Sterne in Sternsystemen und mit denen der künstlichen Raumflugkörper. Bewegung sei dabei als Inbegriff von Translation, Rotation und Deformation verstanden, die im allgemeinen als Bewegungsanteile gleichzeitig vertreten sind.

Die Wurzeln der Himmelsmechanik liegen im klassischen Altertum, welches aber hinsichtlich der beobachteten Bewegungen der Gestirne an der Sphäre über einen rein phänomenologischen Standpunkt nicht hinausgelangte. Man kannte die wichtigsten Bewegungsverhältnisse aus der Registrierung von Sonnen- und Mond-Finsternissen (Thales von Milet, Meton) und fand neben Periodizitäten von Erscheinungen bereits säkulare Verschiebungen wichtiger Punkte, z.B. die sog. Präzession der Äquinoktien sowie Mondknoten- und Apsidendrehung (Ptolemäus, Hipparch). Wenn auch schon im Altertum heliozentrische Bewegungen neben der ptolemäischen Epizykelhypothese gelegentlich behauptet wurde (Pythagoras, Aristarch), so blieb doch die Deutung der Planetenbewegungen vom heliozentrischen Standpunkt der Neuzeit vorbehalten (Kopernikus, 1473 - 1543). Dabei blieben die Einsichten zunächst noch ohne inneren Zusammenhang, sind aber, verglichen mit dem geozentrischen Standpunkt, von überzeugender Einfachheit. Kepler (1571-1630) präzisiert sodann die kopernikanischen Vorstellungen in seinen drei Planetengesetzen. Wohl spricht er bereits in seiner "Astronomia nova" (1609) die Vermutung aus, daß auf jeden Planeten von der Sonne ein Anziehungskraft ausgeübt wird, die umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes Planet-Sonne ist und die für die elliptische Bahnbewegung der Planeten verantwortlich sei. Ein Dynamik erwächst aber vor allem aus der Analyse der Fallbewegung durch Galilei (1564-1642). Die dynamischen Grundbegriffe entstehen dabei nicht ohne Anknüpfung an die klassische Tradition (Plato, Archimedes). Schließlich gelingt es Isaac Newton (1642-1727) die Prinzipien einer allgemeinen Dynamik von allgemeiner Gültigkeit zu formulieren und auf die Bewegung der Himmelskörper anzuwenden. Dabei erscheinen die Keplerschen Gesetze als Folge dieser Prinzipien. Die noch von Newton bevorzugten geometrischen Methoden werden in der folgenden Entwicklung von den weiterreichenden Methoden der Analysis abgelöst, deren Ausarbeitung an glanzvolle Namen wie Euler (1707-1783), Lagrange (1736-1813), Laplace (1749-1827) und Gauss (1777-1855) geknüpft ist. Die Himmelsmechanik wird dann in der Folge Paradies bedeutender mathematischer Leistungen. Diese mehr mathematisch orientierten Arbeiten wurden im wesentlichen durch Henri Poincare geprägt, der als Urvater der modernen Chaostheorie gelten kann. In jüngerer Zeit haben die bahnbrechenden Arbeiten von Kolmogoff, Arnold und Moser (KAM) zur Formulierung der Störungstheorie große Beachtung gefunden. Fragen zur Konvergenz verschiedener störungstheoretischer Ansätze sind bis heute aktuell, genauso wie Fragen nach der Stabilität und dem chaotischen Verhalten des Sonnensystems oder der Dynamik von Asteroiden.

Die rasche Entwicklung der Computertechnik und genauer, schneller Integrationsalgorithmen ist für viele Zweige der Himmelsmechanik von entscheidender Bedeutung gewesen. Man kann heute nicht nur das ganze Sonnensystem über Milliarden von Jahren in der Zeit integrieren, sondern beispielsweise eine Fülle von nichtgravitativen Kräften bei der Bewegung von künstlichen Erdsatelliten berücksichtigen. Hierzu gehört z.B. die oft sehr schwierig zu modellierende Luftreibung; aber auch der Strahlungsdruck der Sonne und der Erdalbedo, magnetische und elektrische Kräfte, der Sonnenwind etc. Es ist selbstverständlich, daß im Zeitalter der Raumfahrt die Himmelsmechanik auch eine höchst anwendungsbezogene Komponente gewonnen hat. Selbst die Wartung von Kommunikationssatelliten erfordert heute umfangreiche himmelsmechanische Software.

Die weite Verbreitung der GPS-Technik in Geodäsie und Navigation hat in jüngerer Zeit die Bedeutung der Himmelsmechanik weiter vergrößert, erfordert doch höchste Genauigkeit bei GPS-Messungen detaillierte Kenntnisse der Positionen der GPS-Satelliten.

Schließlich sei erwähnt, daß im Rahmen der Newtonschen Himmelsmechanik nicht erklärbare astronomische Beobachten (z.B. der Periheldrehung des Merkur) dazu führten, daß die Newtonsche Gravitationstheorie durch die Einsteinsche (die sogenannte Allgemeine Relativitätstheorie) abgelöst wurde. Diese Einsteinsche Gravitationstheorie ist experimentell inzwischen aufs Genaueste bestätigt worden; eine Diskussion jener Theorie übersteigt jedoch den Rahmen dieser Vorlesung.

2 Das Zweikörperproblem

Bezüglich geeignet gewählter kartesischer Inertialkoordinaten $(t, \mathbf{x})$ lautet die Newtonsche Kraft, welche ein Körper der Masse M auf einen anderen der Masse m ausübt:

$$\mathbf{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{1}$$

Hier bezeichnet $\mathbf{r}$ eine Vektor, der von m zu M weist; das Minuszeichen in (1) sagt dann aus, daß die Gravitationskraft stets attraktiv wirkt.

2.1 Integrale der Bewegung

Wir betrachten zwei Himmelskörper der Massen m_1 und m_2, die sich allein unter der Einwirkung ihrer Gravitationskräfte bewegen mögen. Bezüglich eines irgendwiegewählten Koordinatenursprunges seien $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ die entsprechenden Ortsvektoren der beiden Massen. Aus Gleichung (1) ergeben sich dann zusammen mit dem Newtonschen Kraftgesetz

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \tag{2}$$

die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 &= -G\, m_2 m_1 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 &= -G\, m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}. \end{aligned} \tag{3}$$

Diese Gleichungen weisen insgesamt 12 skalare Integrationskonstanten auf: 6 für die zwei Anfangspositionen und 6 weitere für die Anfangsgeschwindigkeiten. Teilt man die erste der Gleichungen (3) durch m_1, die zweite durch m_2 und subtrahiert diese, so erhält man

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = -G(m_1 + m_2)\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3},$$

welches wir in der Form

$$\ddot{\mathbf{r}} = -GM\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{4}$$

scheiben wollen. Hier ist

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

der Relativvektor von m_1 nach m_2 und

$$M \equiv m_1 + m_2$$

die Gesamtmasse. Addition der beiden Gleichungen (3) und 2malige Integration liefert

$$m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{a}$$

und

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = \mathbf{a}t + \mathbf{b}.$$

Hier bezeichnen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ insgesamt 6 Integrationskonstanten. Die linke Seite schreiben wir in der Form

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = M\mathbf{r}_S,$$

wobei also

$$\mathbf{r}_S \equiv \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{M} \tag{5}$$

den *Schwerpunktsvektor* des Systems bezeichnet, so haben wir

$$M\mathbf{r}_S = \mathbf{a}t + \mathbf{b}, \tag{6}$$

d.h. der Schwerpunkt bewegt sich in unseren kartesischen Inertialkoordinaten gleichförmig und geradlinig. Wir wollen die Gleichungen für die Relativpositionen bzgl. des Schwerpunktes ableiten. Es ist

$$(m_1 + m_2)\mathbf{r}_1 - (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2) = -m_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

bzw.

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_S = -\frac{m_2}{M}\mathbf{r}.$$

Analog findet man

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_S = +\frac{m_1}{M}\mathbf{r}.$$

Daraus ergibt sich dann

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_S = -\frac{m_2}{M}\ddot{\mathbf{r}} = Gm_2\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -GM\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_S}{r^3}$$

und schließlich

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_S = -GM\left(\frac{m_2}{M}\right)^3 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_S}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_S|^3}. \tag{7}$$

Analog ergibt sich

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_S = -GM\left(\frac{m_1}{M}\right)^3 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_S}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_S|^3}. \tag{8}$$

Nach dem Schwerpunktsatz (6) wollen wir den Drehimpulserhaltungssatz behandeln. Dieser gilt für jede *Zentralkraft* mit $\ddot{\mathbf{r}} \propto \mathbf{r}$. Daraus folgt $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0$, bzw.

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C}, \tag{9}$$

wo $\mathbf{C}$ drei weitere Integrationskonstanten bezeichnen. Ganz analog dazu gelten die Gleichungen

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_S) \times (\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_S) = \mathbf{C}_1; \quad (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_S) \times (\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_S) = \mathbf{C}_2.$$

Die Größen $\mathbf{C}_1$ und $\mathbf{C}_2$ sind jedoch nicht neue unabhängige Konstanten, sondern sie ergeben sich aus $\mathbf{C}$. So ist etwa

$$\begin{aligned} M^2\mathbf{C}_1 &= (M\mathbf{r}_1 - M\mathbf{r}_S) \times (M\dot{\mathbf{r}}_1 - M\dot{\mathbf{r}}_S) \\ &= (M\mathbf{r}_1 - m_1\mathbf{r}_1 - m_2\mathbf{r}_2) \times (M\dot{\mathbf{r}}_1 - m_1\dot{\mathbf{r}}_1 - m_2\dot{\mathbf{r}}_2) \\ &= m_2^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times (\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2) \\ &= m_2^2(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = m_2^2\mathbf{C}, \end{aligned} \tag{10}$$

d.h.

$$\mathbf{C}_1 = \left(\frac{m_2}{M}\right)^2 \mathbf{C}$$

und analog gilt

$$\mathbf{C}_2 = \left(\frac{m_1}{M}\right)^2 \mathbf{C}.$$

Wir bemerken noch, daß der Drehimpulserhaltungssatz in der Form (??) äquivalent ist zum Keplerschen Flächensatz. Die während einer kleinen Zeitspanne Δt vom Relativvektor $\mathbf{r}$ überstrichene (mathematisch orientierte) Fläche ist nämlich

$$\Delta\mathbf{F} = \frac{1}{2}\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t + \Delta t) \simeq \frac{1}{2}\mathbf{C} \cdot \Delta t,$$

d.h. der Relativvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (2. Keplersches Gesetz). Wir kommen nun zum *Energiesatz*. Aus $\mathbf{r}^2 = r^2$ folgt zunächst

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = r\dot{r}$$

und damit

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^2}\dot{r},$$

bzw.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\dot{\mathbf{r}}^2 = GM\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Diese Relation können wir sofort integrieren und mit

$$U(r) \equiv \frac{GM}{r}$$

erhalten wir den Energiesatz in der Form

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r) = h. \tag{11}$$

Hier hat die Integrationskonstante h die Dimension einer Energie pro Masse (spezifische Energie). Für die Bewegungen relativ zum Schwerpunkt erhalten wir mit $\mathbf{r} \to \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_S$ und $M \to M(m_2/M)^3$ zunächst

$$\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_S)^2 - GM\left(\frac{m_2}{M}\right)^3 \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_S|} = h_1$$

und entsprechend

$$\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_S)^2 - GM\left(\frac{m_1}{M}\right)^3 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_S|} = h_2.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{2M^2}(M\dot{\mathbf{r}}_1 - m_1\dot{\mathbf{r}}_1 - m_2\dot{\mathbf{r}}_2)^2 - GM\left(\frac{m_2}{M}\right)^3 \frac{M}{m_2 r} \\ &= \frac{m_2^2}{2M^2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{Gm_2^2}{Mr} = \left(\frac{m_2}{M}\right)^2 h, \end{aligned} \tag{12}$$

bzw.

$$h_1 = \left(\frac{m_2}{M}\right)^2 h \tag{13}$$

und entsprechend

$$h_2 = \left(\frac{m_1}{M}\right)^2 h. \tag{14}$$

Bisher hatten wir 10 skalare Integrale der Bewegung: $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ liefern 6, der spezifische Drehimpulsvektor $\mathbf{C}$ weitere drei und die spezifische Energie h liefert die zehnte. Die letzten zwei Integrationskonstanten erhält man auf folgende Art und Weise: wir multiplizieren zunächst (4) vektoriell mit $\mathbf{C} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$:

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{C} = -GM\frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})}{r^3}.$$

Mit

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{C}) &= -GM\left(\frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r^3}\mathbf{r} - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r}\right) = GM\left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\dot{r}}{r^2}\mathbf{r}\right) \\ &= GM\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right). \end{aligned}$$

Dies führt uns auf das sogenannte *Laplace-Integral* in der Form

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{C} = GM\left(\frac{\mathbf{r}}{r} + e\mathbf{P}\right). \tag{15}$$

Hier ist $\mathbf{P}$ ein Einheitsvektor, d.h.

$$|\mathbf{P}| = 1.$$

Da $\mathbf{P}$ in der durch $\mathbf{C}$ definierten Bahnebene (senkrecht auf $\mathbf{C}$) liegt und den Betrag Eins hat legen e und $\mathbf{P}$ die fehlenden zwei Integrationskonstanten fest. Der Vektor $\mathbf{L} = GMe\,\mathbf{P}$ trägt auch den Namen *Runge-Lenz Vektor*.

2.2 Bahngleichung; 1tes und 3tes Keplersches Gesetz

Wir können die Bahngleichung aus dem Laplace-Integral (15) ableiten. Wegen $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ hat man

$$C^2 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{C} = (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{r} = GMr \left(1 + e\frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{r}\right).$$

Den Winkel zwischen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{r}$ wollen wir mit v bezeichnen. Dieser Winkel trägt den Namen *wahre Anomalie*. Mit

$$\mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \cos v$$

erhält man die Bahngleichung in der Form

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v} \tag{16}$$

mit

$$p = \frac{C^2}{GM}.$$

Dies ist das erste Keplersche Gesetz: die Relativbewegung erfolgt längs eines *Kegelschnittes*, wobei der eine Körper im Brennpunkt der Ellipse steht. Der Punkt der nächsten Annäherung der beiden Körper aneinander (das Perizentrum) ist durch $v = 0$ gegeben. Dies bedeutet, daß der Runge-Lenz Vektor oder unser Vektor $\mathbf{P}$ gerade zum Perizentrum weist. Die numerische Exzentrizität e des Kegelschnittes gibt an, ob es sich um eine Ellipse ($e < 1$), Parabel ($e = 1$) oder Hyperbel ($e > 1$) handelt. Im Fall einer Ellipse ist

$$p = a(1 - e^2), \tag{17}$$

wenn a die große Halbachse der Ellipse bezeichnet.

Für die *elliptische Bahn* hat man gemäß des Flächensatzes mit $F_{\text{Ell.}} = \pi a^2(1-e^2)^{1/2}$

$$C = 2F/T = 2\pi a^2(1-e^2)^{1/2}/T,$$

wenn T die Umlaufzeit bezeichnet. Wegen $C^2 = GMa(1-e^2)$ ergibt sich

$$T = \frac{2\pi}{n} \quad \text{mit} \quad n = \left(\frac{GM}{a^3}\right)^{1/2}.$$

Hieraus ergibt sich das dritte Keplersche Gesetz in der Form

$$GM = n^2 a^3. \tag{18}$$

Man bemerke, daß für zwei Planeten um die Sonne dieses Gesetz in korrekter Form so lautet

$$\frac{M \odot + m_1}{M_\odot + m_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2. \tag{19}$$

Nur wenn wir die Planetenmassen gegenüber der Sonnenmasse vernachlässigen, verhalten sich die Kuben der großen Halbachsen so wie die Quadrate der Umlaufzeiten. Wir bemerken noch, daß für die Bewegung relativ zum Schwerpunkt gilt

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_S| = \frac{p_1}{1 + e\cos(v_1 - v_{10})}; \quad |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_S| = \frac{p_2}{1 + e\cos(v_2 - v_{20})}$$

mit

$$p_1 = \left(\frac{m_2}{M}\right) p; \quad p_2 = \left(\frac{m_1}{M}\right) p.$$

2.3 Klassifizierung der Kegelschnitte

Eine Klassifizierung der Kegelschnitte gelingt mit Hilfe des Energieintegrals

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{GM}{r} = h.$$

Mit

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r; \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\,\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{v}\,\mathbf{e}_v$$

hat man

$$\dot{r}^2 + (r\dot{v})^2 - 2\frac{GM}{r} = 2h;$$

Ferner ist

$$C = |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| = |r\mathbf{e}_r \times (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{v}\mathbf{e}_v)| = r^2\dot{v}.$$

Mit $r = C^2/[GM(1 + e\cos v)]$ folgt im Falle $e < 1$:

$$\begin{aligned}
\dot{r}^2 &= \frac{2GM}{r} - \frac{C^2}{r^2} + 2h = \\
&= \frac{2(GM)^2}{C^2}(1 + e\cos v) - \frac{C^2(GM)^2}{C^4}(1 + e\cos v)^2 + 2h \\
&= \frac{(GM)^2}{C^2}(1 - e^2\cos^2 v) + 2h
\end{aligned}$$

Auf der anderen Seite ist

$$\dot{r} = \frac{pe\sin v}{(1 + e\cos v)^2}\dot{v} = r^2\dot{v}\frac{e}{p}\sin v = C\frac{e}{p}\sin v = \frac{\mu e}{C}\sin v,$$

mit $\mu = GM$ $(p = C^2/(GM) = C^2/\mu)$. Ein Vergleich ergibt dann

$$\dot{r}^2 = \frac{\mu^2}{C^2}(1 - e^2 + e^2\sin^2 v) + 2h = \frac{\mu^2 e^2}{C^2}\sin^2 v$$

bzw.

$$h = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{C^2}(1 - e^2) = -\frac{1}{2}\frac{\mu}{a}. \tag{20}$$

D.h., für die elliptische Bahn mit $e < 1$ ist die spezifische Energie (Energie pro Masse) negativ; die Bahn ist gebunden. Sie ist durch die große Halbachse der Relativbewegung bestimmt.

Entsprechend hat man im Fall der Hyperbelbahnen mit $e > 1$: $h = +\mu/(2|a|) > 0$ und im Fall der Parabelbahn mit $e = 1$ verschwindet gerade die spezifische Energie ($h = 0$).

Schreiben wir den Energiesatz der elliptischen Bewegung in der Form

$$\mathbf{v}^2 = \frac{2\mu}{r} + 2h = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

so erkennt man, daß die Geschwindigkeit im Falle einer Kreisbahn ($e = 0$) einfach lautet

$$v_K = \sqrt{\mu/a}.$$

2.4 Kepler-Gleichung

Nachdem die Bahnform des Kepler-Problemes geklärt ist, wenden wir uns der Zeitabhängigkeit in der elliptischen Bahn zuwenden. Dazu ist ist nützlich, kartesische Koordinaten mit Ursprung im Mittelpunkt der Bahnellipse einzuführen. Sei $b = a(1 - e^2)^{1/2}$ die kleine Halbachse der Ellipse. Wir schreiben dann

$$(x, y) = (a\cos E, b\sin E),$$

wobei der Winkel E exzentrische Anomalie genannt wird. Aus der Abbildung

Abbildung 1: Wahre und exzentrische Anomalie in der elliptischen Bewegung.

erkennt man, daß gilt

$$\begin{aligned} r\cos v &= a(\cos E - e) \\ r\sin v &= a(1 - e^2)^{1/2}\sin E \end{aligned} \tag{21}$$

Daraus ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} r &= (r^2\cos^2 v + r^2\sin^2 v)^{1/2} \\ &= a(\cos^2 E - 2e\cos E + e^2 + (1-e^2)\sin^2 E)^{1/2} \\ &= a(1 - 2e\cos E + e^2\cos^2 E)^{1/2} \end{aligned}$$

bzw.

$$r = a(1 - e\cos E). \tag{22}$$

Dieses Ergebnis können wir mit $r = a(1-e^2)/(1+e\cos v)$ nach $\cos v$ auflösen:

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}. \tag{23}$$

Daraus folgt sofort

$$\sin v = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1 - e\cos E} \tag{24}$$

und analog ergibt sich

$$\cos E = \frac{e + \cos v}{1 + e\cos v}; \quad \sin E = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin v}{1 + e\cos v}. \tag{25}$$

Später werden wir den Ausdruck dv/dE benötigen. Wit leiten dazu $\sin v$ aus (24) nach der exzentrischen Anomalie E ab:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dE}\sin v &= \cos v \frac{dv}{dE} = \left(\frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}\right)\frac{dv}{dE} \\ &= \frac{\sqrt{1-e^2}[(1-e\cos E)\cos E - e\sin^2 E]}{(1-e\cos E)^2} = \frac{\sqrt{1-e^2}(\cos E - e)}{(1-e\cos E)^2} \end{aligned}$$

und erhalten

$$\frac{dv}{dE} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e\cos E}. \tag{26}$$

Ebenso ergibt sich

$$\frac{dE}{dv} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 + e\cos v}.$$

Für praktische Berechnungen verwendet man in der Regel eine weitere Relation zwischen v und E:

$$\begin{aligned} \tan^2\frac{v}{2} &= \frac{1-\cos v}{1+\cos v} = \frac{1 - e\cos E - \cos E + e}{1 - e\cos E + \cos E - e} \\ &= \frac{(1+e)(1-\cos E)}{(1-e)(1+\cos E)} = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)\tan^2\frac{E}{2} \end{aligned}$$

bzw.

$$\tan\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}. \tag{27}$$

Die Zeitabhängigkeit in der elliptischen Bahn erhalten wir schließlich aus dem Flächensatz. Aus $r^2\dot{v} = C$ ergibt sich nämlich

$$\begin{aligned} C(t-t_0) &= \int_{v_0}^{v} r^2(v)dv = \int_{E_0}^{E} a^2(1-e\cos E)^2 \left(\frac{dv}{dE}\right) dE \\ &= a^2 \int \sqrt{1-e^2}(1-e\cos E)\, dE \\ &= a^2\sqrt{1-e^2}\Big[E - e\sin E\Big]_{E_0}^{E}, \end{aligned}$$

bzw. mit $C^2 = \mu a(1-e^2)$

$$\sqrt{\mu a}(t-t_0) = a^2\Big[E - e\sin E\Big]_{E_0}^{E}.$$

Teilen wir beide Seiten durch a^2 so ergibt sich auf der linken Seite ein Vorfaktor von $(\mu/a^3)^{1/2} = n$. Hier ist n wieder die mittlere Bewegung, welche dem 3. Keplerschen Gesetz $n^2a^3 = \mu$ genügt. Damit ergibt sich schließlich die *Kepler Gleichung* in der Form

$$M = E - e\sin E, \tag{28}$$

wobei der Winkel M

$$M = n(t-T) \tag{29}$$

mittlere Anomalie genannt wird. Im Falle einer Kreisbahn wären wahre und mittlere Anomalie gleich. Im elliptischen Fall stelle man sich vor, daß zusätzlich zum physikalischen Körper ein weiterer fiktiver Körper auf einer Kreisbahn mit der selben mittleren Winkelgeschwindigkeit n um den anderen Körper umläuft. Dieser fiktiver Körper dient hier lediglich der Berechnung der Zeitabhängigkeit in der Bahn. T ist hier der Zeitpunkt eines Durchganges durch das Perizentrums; aus $M = 0$ folgt nämlich $E = v = 0$.

Die Zeitabhängigkeit in der elliptischen Kepler-Bahn folgt damit aus den Gleichungen (27) und (28): zu einer beliebigen Zeit t berechnet man zunächst die mittlere Anomalie M, durch Lösen der Kepler-Gleichung gewinnt man die exzentrische Anomalie E uns schließlich aus (27) die wahre Anomalie v, welche auch in der Bahngleichung auftaucht.

Die Kepler-Gleichung ist eine transzendente Gleichung für die exzentrische Anomalie E, wenn die wahre Anomalie M gegeben ist. Man hat sich viele Methoden ausgedacht, um die Kepler-Gleichung zu lösen. Neben einer rein numerischen Methode, welche weiter unten diskutiert werden soll, wollen wir hier auf zwei Lösungsverfahren eingehen.

Eine erste Möglichkeit ist die Lösung durch Iteration. Sei E_0 eine nullte Näherung für E, so können wir leicht formal eine Korrektor ΔE_0 aus der Kepler-Gleichung ausrechnen. Danach ist nämlich:

$$\begin{aligned} M &= E - e\sin E = E_0 + \Delta E_0 - e\sin(E_0 + \Delta E_0) \\ &= E_0 - e\sin E_0 + (1 - e\cos E_0)\,\Delta E_0 + \ldots \end{aligned}$$

d.h.

$$\Delta E_0 \simeq \frac{M - M_0}{1 - e\cos E_0}; \quad M_0 = E_0 - e\sin E_0$$

Es ist klar, daß wir diese Korrektur mehrfach im Sinne einer Iteration anbringen können. Die Konvergenz einer derartigen Iteration ist freilich von vornherein gar nicht klar. Die Erfahrung zeigt, daß diese für $e < 0.2$ in der Regel eintreten wird.

Beispiel: Sei $M = 0.5, e = 0.1$. Wie wir gleich sehen werden, löst

$$E_0 = M + e\sin M + \frac{e^2}{2}\sin(2M)$$

die Kepler-Gleichung bis auf Glieder der Ordnung e^3. Die Iteration liefert dann

$$\begin{aligned}
E_0 &= 0.552\,149\,908 \qquad M_0 = 0.499\,698 \\
E_1 &= 0.552\,479\,990 \qquad M_1 = 0.5 + 2.9 \times 10^{-9} \\
E_2 &= 0.552\,479\,986.
\end{aligned}$$

2.5 Fourier-Analyse in der elliptischen Bahn

Eine weitere Möglichkeit die Kepler-Gleichung zu lösen, besteht darin

$$E - M = e\sin E$$

als ungerade Funktion von E (und daher auch von M) in eine Fourier-Reihe zu entwickeln:

$$e\sin E = 2\sum_{s=1}^{\infty} b_s \sin(sM)$$

mit

$$\begin{aligned}
b_s &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (e\sin E)\sin M dM = -\frac{1}{s\pi}\int (e\sin E) d(\cos sM) \\
&= \frac{1}{s\pi}\int_0^\pi \cos(sM) e d(\sin E) = \frac{1}{s\pi}\left[\int_0^\pi \cos(sM) dE - \int_0^\pi \cos(sM) dM\right] \\
&= \frac{1}{s\pi}\int_0^\pi \cos[s(E - e\sin E)]\, dE = \frac{1}{s} J_s(se).
\end{aligned}$$

Hier bezeichnet $J_s(z)$ eine Bessel-Funktion der ersten Art. Für kleine Werte von e lassen sich diese Bessel-Funktionen folgendermaßen in Taylor-Reihen entwickeln:

$$\begin{aligned}
2J_1(1e) &= e - \frac{e^3}{8} + \mathcal{O}(e^5) \\
2J_2(2e) &= e^2 - \frac{e^4}{3} + \mathcal{O}(e^6)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2J_3(3e) &= \frac{9e^3}{8} + \mathcal{O}(e^5) \\
2J_4(4e) &= \frac{4e^4}{3} + \mathcal{O}(e^6).
\end{aligned}
$$

Die ersten Glieder ergeben sich aus dem asyptotischen Verhalten von $J_s(z)$. Für festen Wert von s(ganze positive Zahl) und $z \to 0$ gilt:

$$
J_s(z) \sim \frac{1}{s!}\left(\frac{z}{2}\right)^s .
$$

Obige Rechnung ergibt:

$$
e \sin E = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2}{s} J_s(se)\sin(sM)
$$

und damit schließlich

$$
E = M + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2}{s} J_s(se)\sin(sM). \tag{30}
$$

Setzen wir die Taylor-Reihen Entwicklungen der Bessel-Funktionen ein, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
E = M \quad &+ \quad \left(e - \frac{1}{8}e^3\right)\sin M + \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{6}e^4\right)\sin 2M \\
&+ \quad \frac{3}{8}e^3 \sin 3M + \frac{1}{3}e^4 \sin 4M + \mathcal{O}(e^5).
\end{aligned} \tag{31}
$$

Auch die anderen Variablen der elliptischen Bewegung lassen sich in Form einer Fourier-Reihe schreiben. Z.B. ergibt eine Differentiation der Kepler-Gleichung nach t:

$$
n = (1 - e\cos E)\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dt} \cdot \left(\frac{r}{a}\right),
$$

d.h.

$$
\frac{a}{r} = \frac{dE}{dt}/n = 1 + 2\sum_{s=1}^{\infty} J_s(se)\cos(sM). \tag{32}
$$

2.6 Die elliptische Keplerbahn im Raum

Bisher hatten wir die Position des einen Körpers in Bezug auf den anderen in der raumfesten Bahnebene durch die Elemente a, e, ω und M angegeben. Für praktische Anwendungen wird man jedoch in der Regel eine andere Referenzeben zugrunde legen. In der Satellitentheorie etwa wird eine solche Referenzebene durch die Äquatorebene der Erde zu einem festen Zeitpunkt (evtl. nach Korrektur für Nutations- und Präzessionseffekten) bestimmt sein. In Abb.? ist eine derartige

Abbildung 2: Die elliptische Keplerbahn im Raum.

Referenzebene zusammen mit der Bahnebene zu sehen. Hier ist die astronomische x-Achse durch die Richtung zum sogenannten Frühlingspunkt bestimmt. Dieser ist definiert durch den Schnittpunkt des scheinbaren Himmelsäquators mit der Ekliptik, d.h. die durch die Position und die Geschwindigkeit der Erde um die Sonne definierte Ebene, in der Regel nachdem auch hier Korrekturen angebracht wurden. Senkrecht auf der Referenzebene, nach oben weisend, steht ein Vektor, welcher zu anwachsenden z-Werten weist. Die Schnittlinie zwischen Referenz- und Bahnebene wird Knotenlinie genannt. Auf ihr denke man sich zwei Punkte, den aufsteigenden und den absteigenden Knoten. Durch den aufsteigenden Knoten läuft der Körper durch die Referenzebene von unten nach oben im Sinne wachsender z-Werte und durch den absteigenden Knoten von oben nach unten. In Abb. sieht man zwei weitere Bahnelemente, welche nun die Lage der Bahnebene im Raum fixieren: I und Ω. I beschreibt die Inklination der Bahnebene bezüglich der Referenzebene. Das Argument des aufsteigenden Knotens, Ω, beschreibt in der Referenzebene den Winkel zwischen astronomischer x-Achse und der Richtung zum aufsteigenden Knoten. Ort und Geschwindigkeit eines Punktes in der Bahn zu einem festen Zeitpunkt t lassen sich nun nicht nur durch die kartesischen Komponenten$\mathbf{x}$ und $\dot{\mathbf{x}}$ angeben, wie man sie in der Regel in numerischen Programmen findet, sondern auch durch die sechs Bahnelemente $(a, e, \omega, \Omega, I, T)$. Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ und den Bahnelementen angeben.

2.6.1 Berechnung von $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ aus Bahnelementen

In Abb.? sind alle interessanten Richtungen durch Punkte auf einer Einheitskugel (Repräsentant der Himmelskugel) um den Ursprung des Referenzsystems markiert; A bezeichne die Richtung der astronomischen x-Achse, N die zum aufsteigen Knoten, B und C die der y- und z-Achse, P die zum Perizentrum in der Bahn und Q weise zum Bahnpunkt. Wir wenden nun mehr fach den Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie an:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \tag{33}$$

Die Bezeichung ist aus folgender Figur zu erkennen: Wir wenden den Satz aud

Abbildung 3: Der Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie.

das Dreieck QAN an. Der durch die Punkte ANQ aufgespannte Winkel ist $180° - I$. Es ist daher:

$$\cos(AQ) = x/r = \cos\Omega\cos(\omega + v) - \sin\Omega\sin(\omega + v)\cos I.$$

Analog ergibt sich aus dem Dreieck QNB (der Winkel zwischen N und B in der Referenzebene beträgt $90° - \Omega$):

$$\cos(BQ) = y/r = \sin\Omega\cos(\omega + v) + \cos\Omega\sin(\omega + v)\cos I.$$

Das Dreieck QCN schließlich mit QNC $= 90° - I$ ergibt

$$\cos(CQ) = z/r = \sin(\omega + v)\sin I.$$

Wir fassen zusammen:

$$\begin{aligned} x &= r[\cos\Omega\cos(\omega + v) - \sin\Omega\sin(\omega + v)\cos I] \\ y &= r[\sin\Omega\cos(\omega + v) + \cos\Omega\sin(\omega + v)\cos I] \\ z &= r\sin(\omega + v)\sin I. \end{aligned} \tag{34}$$

Den Radiusvektor r kann man zu gegebenem Zeitpunkt aus

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}$$

gewinnen, wobei die wahre Anomalie v aus der Kepler-Gleichung folgt.

Zur Ableitung dieses Resultates (34) für $\mathbf{x}$ wollen wir eine Alternativmethode vorstellen. Mit ihr gelingt auch eine einfache Berechnung der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}$. An die astronomischen (x, y, z)-Koordinaten denken wir uns drei orthonormierte rechtshändige Basisvektoren $\mathbf{e}_{(i)}$ $(i = 1, 2, 3 = x, y, z)$. $\mathbf{e}_{(x)}$ ist also ein Einheitsvektor, der zum Frühlingspunkt weist etc. Vom Basissystem $\mathbf{e}_{(i)}$ wollen wir zu einem anderen orthonormierten Dreibein $\mathbf{E}_{(i)}$ übergehen:

- $\mathbf{E}_{(X)}$ und $\mathbf{E}_{(Y)}$ liegen in der Bahnebene
- $\mathbf{E}_{(X)}$ weise zum Perizentrum.

Dieses Basissystem mit assoziierten Koordinaten (X, Y, Z) hat den Vorteil, daß die Bahnkoordinaten besonders einfach werden. Es ist nämlich:

$$X = r \cos v = a(\cos E - e); \quad Y = r \sin v = a(1 - e^2)^{1/2} \sin E; \quad Z = 0. \tag{35}$$

Unter Verwendung von $\dot{E} = (a/r)n$, welches sich aus der differenzierten Kepler-Gleichung, $dM/dt = n = (1 - e \cos E)\dot{E}$, ergibt, folgt entsprechend für die Geschwindigkeit

$$\dot{X} = -a\dot{E} \sin E = -(a^2 n/r) \sin E; \quad \dot{Y} = (a^2 n/r)(1 - e^2)^{1/2} \cos E; \quad \dot{Z} = 0. \tag{36}$$

Nun sind die Koordinaten (x, y, z) und (X, Y, Z) durch eine *Rotationsmatrix* miteinander verknüpft. Aus (das Summenzeichen über Dummy-Indizes $i, j = 1, 2, 3$ lassen wir weg)

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_{(i)} = X^j \mathbf{E}_{(j)}$$

folgt nämlich durch Bildung des Skalarproduktes mit $\mathbf{E}_{(j)}$:

$$x^i = \left[\mathbf{e}_{(i)} \cdot \mathbf{E}_{(j)}\right] X^j \equiv R_{ij} X^j$$

mit

$$R_{ij} \equiv \mathbf{e}_{(i)} \cdot \mathbf{E}_{(j)}.$$

R_{ij} dreht die zwei Basissysteme ineinander und besitzt daher die Eigenschaften einer Rotationsmatrix, d.h. $R_{ij} R_{jk} = \delta_{ik}$. Die Elemente dieser Rotationsmatrix kann man sich leicht besorgen. So ist etwa

$$R_{xX} = \cos(AP) = \cos\Omega \cos\omega - \sin\Omega \sin\omega \cos I$$

etc. Man findet insgesamt:

$$\begin{aligned}
R_{xX} &= \cos\Omega \cos\omega - \sin\Omega \sin\omega \cos I \\
R_{xY} &= -\cos\Omega \sin\omega - \sin\Omega \cos\omega \cos I \\
R_{xZ} &= \sin\Omega \sin I
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R_{yX} &= \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos I \\
R_{yY} &= -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos I \\
R_{yZ} &= -\cos\Omega\sin I \\
\\
R_{zX} &= \sin\omega\sin I \\
R_{zY} &= \cos\omega\sin I \\
R_{zZ} &= \cos I
\end{aligned} \tag{37}
$$

und $R_{ij} = R_{ji}$. Mit Hilfe dieser Rotationsmatrix kann man leicht die Komponenten der Vektoren $\mathbf{x}$ und $\dot{\mathbf{x}}$ durch die Bahnelemente ausdrücken.

Wir wollen dies an einem Beispiel nachprüfen. Es ist z.B.

$$
\begin{aligned}
x &= R_{xX}X + R_{xY}Y + R_{xZ}Z \\
&= [\cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos I]\, r\cos v + [-\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos I]\, r\sin v \\
&= r\,[\cos\Omega(\cos\omega\cos v - \sin\omega\sin v) - \sin\Omega(\sin\omega\cos v + \cos\omega\sin v)\cos I] \\
&= r[\cos\Omega\cos(\omega + v) - \sin\Omega\sin(\omega + v)\cos I].
\end{aligned}
$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem alten aus (34) überein.

2.6.2 Berechnung der Bahnelemente aus gegebenen Vektoren $\mathbf{x}$ und $\dot{\mathbf{x}}$.

Der spezifische Drehimpulsvektor $\mathbf{C} = \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}$ besitzt die kartesischen Komponenten

$$
\begin{aligned}
C_x &= y\dot{z} - z\dot{y} \\
C_y &= z\dot{x} - x\dot{z} \\
C_z &= x\dot{y} - y\dot{x}
\end{aligned} \tag{38}
$$

woraus sich zunächst die Größe p berechnen läßt ($\mu = GM$)

$$p = \frac{C^2}{\mu} \tag{39}$$

Mit $r^2 = \mathbf{x}^2$ ergibt sich die große Halbachse a aus

$$\mathbf{v}^2 = \dot{\mathbf{x}}^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{40}$$

und zusammen mit dem Wert für p erhalten wir denjenigen für e aus

$$p = a(1 - e^2). \tag{41}$$

Nun sind die Winkel I und Ω gerade die Polarwinkel des Drehimpulsvektors $\mathbf{C}$ (I ist auch der Winkel zwischen $\mathbf{C}$ und z-Achse), d.h. die kartesischen Komponenten von $\mathbf{C}$ können wir in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} C_x &= \pm C \sin I \sin \Omega \\ C_y &= \mp C \sin I \cos \Omega \\ C_z &= C \cos I \end{aligned} \tag{42}$$

wobei das obere Vorzeichen für $I \leq 90°$ bzw. $C_z \geq 0$ zu nehmen ist und das untere für $I \geq 90°$, d.h. für $C_z \leq 0$. Daraus ergeben sich Ω und I gemäß:

$$\tan \Omega = -C_x/C_y \tag{43}$$

$$\cos I = C_z/C. \tag{44}$$

Aus den Gleichungen (34) für x, y und z erhält man

$$\begin{aligned} \sin(\omega + f) &= \frac{z}{r} \cos^{-1} I \\ \cos(\omega + f) &= \frac{1}{r}(x \cos \Omega + y \sin \Omega) \end{aligned} \tag{45}$$

und daraus eindeutig $(\omega + f)$. Aber die wahre Anomalie f ist für nichtverschwindende Werte von e bestimmt durch

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}.$$

Aus v erhält man dann E und $M = E - e \sin E$ und damit auch T.

3 Das Mehrkörperproblem gravitierender Massenpunkte

Wir haben gesehen, daß das Keplersche 2-Körperproblem analytisch lösbar ist; man sagt dazu, das Problem sei *integrabel.* Bereits im gravitierenden 3-Körperproblem stößt man im allgeinen Fall jedoch mit rein analytischen Methoden auf die größten Schwierigkeiten. Die Lösungen zeigen hier bereits oft *chaotisches* Verhalten, d.h. zwei anfänglich sehr benachbarte Bahnen weichen im Laufe der Zeit exponentiell voneinander ab. Im Falle eines nichtgebundenen 3-Körper Systems mit positiver Gesamtenergie kann es passieren, daß einer der Körper ins Unendliche entweicht und die beiden anderen auf Kepler-Bahnen umeinander umlaufen. ES kann aber auch eintreten, daß alle drei Körper sich ins Unendliche voneinander weg bewegen. Im gebundenen Falle kann ein Körper für alle Zeiten um ein quasi-elliptisches 2-Körpersystem kreisen, aber auch hier kann einer der Körper ins Unendliche entweichen und die beiden anderen Körper können sich in eine gebundene Kepler-Bahn hineinbewegen.

Das Verhalten von N Punktmassen unter dem Einfluß ihrer Newtonschen Gravitationswechselwirkung ist in einem kartesischen Inertialkoordinatensystem (t, x^i) bestimmt durch die Gleichungen:

$$m_a \ddot{\mathbf{r}}_a = -G m_a \sum_{b \neq a} m_b \frac{\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|^3} \qquad a, b = 1, \ldots, N. \tag{46}$$

Heutzutage verwendet man zwei Hauptmethoden, ein solches gravitatives N-Körperproblem ($N \geq 3$) zu behandeln: die rein *numerische Methode* und die *Störungstheorie.* Für Spezialfälle himmelsmechanischer Probleme (etwa in der Asteroidentheorie) benutzt man oft auch Kombinationen der beiden Methoden.

Bei der rein numerischen Integration werden in der Regel die Bewegungsgleichungen in kartesischen Inertialkoordinaten vorwärts in der Zeit integriert, d.h. von einer Startepoche t_0 zu einer späteren Epoche t. Hierbei werden numerische Integrationsverfahren verwendet, wie sie weiter unten diskutiert werden. Vorteile dieser numerischen Methode ist, daß sie schnelle und genaue Resultate bei komplexen Problemen liefert. Hierbei sind die Worte "schnell" und "genau" freilich mit Vorsicht zu genießen. Bei einem sehr komplexen Problem stößt man eventuell selbst bei größten und schnellsten Rechenmaschinen auf Rechenzeitproblemen. Will man etwa das ganze Sonnensysteme über einen Zeitraum von Milliarden von Jahren integrieren, so kann die Rechenzeit (CPU-Zeit) mehr als sagen wir einen Monat betragen. Die CPU-Zeit im konkreten Fall hängt neben dem Rechner selbst von vielen weiteren Aspekten ab: dem verwendeten Integrationsalgorithmus, dem Compiler etc. Haben wir eine Lösung im chaotischen Bereich vor uns, so nutzt uns die Genauigkeit der besten Computer auch nicht viel, wenn wir uns für das Schicksal des Systems zu sehr fernen Zeiten, d.h. für Zeiten $t > T_{\text{Chaos}}$ (T_{Chaos} ist die Liapunov-Zeitskala) interessieren. Aber selbst im chaotischen Fall kann man genaue Ergebnisse erhalten, wenn der Zeitraum der Integration nur hinreichend klein, d.h. $t < T_{\mathrm{Chaos}}$ gewählt wird. Nachteile der rein numerischen Methode liegen darin, daß man die physikalischen Wechselwirkungsmechanismen oft nur schwer begreifen kann, daß man Resonanzen nur schwierig finden kann, usw.

In der Störungstheorie versucht man zu einem gegebenen Problem ein genäheres zu definieren, welches integrabel ist. In vielen Fällen kann das Keplersche 2-Körperproblem als Näherungsproblem dienen. Für das zu behandelnde Problem definiert man dann kleine Größen die als Basis für Entwicklungen dienen können. Vorteile der Störungstheorie liegen in der Transparenz der Lösungen, wenigstens bei den einfachsten Näherungen. Nachteile ergeben sich offensichtlich bei größeren Genauigkeitsanforderungen oder wenn man weitere Störkräfte betrachten möchte.

3.1 Die klassischen Integrale des N-Körperproblems

Summieren wir Gleichung (46) über den Index a, so verschwindet der resultierende Ausdruck (actio = reactio)

$$\sum_{a=1}^{N} m_a \ddot{\mathbf{r}}_a = -G \sum_a \sum_{b \neq a} m_a m_b \frac{\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|^3} = 0.$$

Mit der Gesamtmasse

$$M = \sum_a m_a,$$

und dem Schwerpunktsvektor $\mathbf{R}$, definiert durch

$$M\mathbf{R} = \sum_a m_a \mathbf{r}_a,$$

gilt dann die Erhaltung des Gesamtimpulses in der Form

$$\sum_a m_a \dot{\mathbf{r}}_a = \mathbf{a}. \tag{47}$$

Daraus folgt der Schwerpunktsatz in der Gestalt

$$M\mathbf{R} = \mathbf{a}t + \mathbf{b}. \tag{48}$$

Multiplikation der Bewegungsgleichung (46) vektoriell mit $\mathbf{r}_a$ und Summation über a liefert

$$\sum_a m_a \mathbf{r}_a \times \ddot{\mathbf{r}}_a = G \sum_{a, b \neq a} m_a m_b \frac{\mathbf{r}_a \times \mathbf{r}_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|^3} = 0,$$

da $\mathbf{r}_a \times \mathbf{r}_b = -\mathbf{r}_b \times \mathbf{r}_a$. Daraus folgt

$$\frac{d}{dt} \sum_a m_a \mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{r}}_a = 0$$

bzw.

$$\sum_a m_a \mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{r}}_a = M\mathbf{C} = \text{const.} \tag{49}$$

Hier ist $\mathbf{C}$ der spezifische Drehimpulsvektor des Gesamtsystems. Er derfiniert hier die sogenannte *invariante Ebene*, auf der $\mathbf{C}$ senkrecht steht. In unserem Planetensystem ist die invariante Ebene um etwa $1,5°$ gegenüber der Ekliptik geneigt. Sie liegt zwischen den Bahnebenen von Jupiter und Saturn. Der Energiesatz lautet im N-Körperproblem

$$\frac{1}{2}\sum_a m_a \dot{\mathbf{r}}_a^2 - \frac{1}{2} G \sum_{a,b\neq 0} \frac{m_a m_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} = Mh. \tag{50}$$

Mit $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{C}$ und h haben wir zehn skalare Integrationskonstanten. Im allgemeinen Fall gibt es vermutlich auch nicht mehr.

3.2 Die Störfunktion

Dominiert, wie im Planetensystem, eine Masse m_N das System, so bezieht man die Bewegung der übrigen zweckmäßigerweise auf diese:

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}}_a - \ddot{\mathbf{r}}_N &= -G \sum_{b\neq a} m_b \frac{\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|^3} + G \sum_{b=1}^{N-1} m_b \frac{\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_b}{|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_b|^3} \\
&= -G \sum_{b\neq a}^{N-1} m_b \frac{\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|^3} - G m_N \frac{\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_N}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_N|^3} \\
&\quad + G \sum_{b\neq a}^{N-1} m_b \frac{\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_b}{|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_b|^3} + G m_a \frac{\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_a}{|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_a|^3},
\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
(\ddot{\mathbf{r}}_a - \ddot{\mathbf{r}}_N) &+ G(m_a + m_N) \frac{\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_N}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_N|^3} \\
&= -G \sum_{b\neq a}^{N-1} m_b \left(\frac{\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|^3} + \frac{\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_N}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_N|^3} \right).
\end{aligned} \tag{51}$$

Die rechte Seite läßt sich noch als Gradient einer Potentialfunktion R, *Störfunktion* genannt, darstellen:

$$R(\mathbf{r}_a) = \sum_{b\neq a}^{N-1} G m_b \left(\frac{1}{|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|} - \frac{\mathbf{x}_a \cdot \mathbf{x}_b}{|\mathbf{x}_b|^3} \right), \tag{52}$$

wobei wir hier

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_N$$

geschrieben haben. Das erste Glied auf der rechten Seite von (52) heißt direkter Teil, das zweite indirekter Teil, welcher aus der Bewegung von m_N um den gemeinsamen Schwerpunkt resultiert.

3.3 Planetare Ephemeriden: DE und VSOP

Für praktische Zwecke wird der Nutzer in der Regel auf fertige planetare Ephemeridenprogramme zurückgreifen, wenn er Positionen oder Geschwindigkeiten von Sonne, Mond oder Planeten benötigt. Bestens bewährt haben sich die planetaren Ephemeriden des JPL (Jet Propulsion Laboratory), welche auf CD-ROM erhältlich sind. Diese DE-Ephemeriden sind von E.M. Standish, X.X. Newhall, J.G. Williams und W.M. Folkner erstellt worden. Basis derartiger Ephemeriden ist eine numerische Integrationsroutine ???????

4 Das Dreikörperproblem*

Nur für ganz spezielle Anordnungen der drei Körper sind exakte Lösungen bekannt. Am bekanntesten sind die Lösungen von Lagrange (1772), die wir jetzt diskutieren wollen.

4.1 Kollineare ebene Kegelschnittbewegungen

Drei Massenpunkte befinden sich auf einer Geraden und rotieren um den gemeinsamen Schwerpunkt. Wir wollen noch annehmen, daß die drei Massen ein konstantes Abstandsverhältnis aufweisen, wobei sich die Einzelabstände ändern können, d.h.

$$\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 = \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).$$

Umschreiben ergibt etwa

$$(1+\lambda)\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3 + \lambda\mathbf{r}_1$$

oder

$$\mathbf{r}_2 = \frac{\lambda\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3}{1+\lambda}.$$

Den Koordinatenursprung legen wir in den Massenmittelpunkt der drei Körper, d.h.

$$\sum_{i=1}^{3} m_i\mathbf{r}_i = 0.$$

Zusammen mit den obigen Bedingungen erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}
m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3[\mathbf{r}_2 + \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] &= 0 \\
m_1\mathbf{r}_1 + m_2\frac{\lambda\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3}{1+\lambda} + m_3\mathbf{r}_3 &= 0 \\
m_1\frac{(1+\lambda)\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{\lambda} + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3 &= 0
\end{aligned}$$

und einfaches Umschreiben liefert

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_2(m_2 + (1+\lambda)m_3) &= \mathbf{r}_1(\lambda m_3 - m_1) \\
\mathbf{r}_3(m_2 + (1+\lambda m_3) &= -\mathbf{r}_1(\lambda m_2 + (1+\lambda m_1) \\
\mathbf{r}_3(m_1 - \lambda m_3) &= \mathbf{r}_2(\lambda m_2 + (1+\lambda)m_1).
\end{aligned}$$

Damit können wir nun die Beschleunigung einer Masse i durch $\mathbf{r}_i$ alleine ausdrücken. Zunächst gilt z.B. für die Masse 1

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -G\left(m_2\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} + m_3\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3}\right)$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_1 - \frac{\lambda m_3 - m_1}{m_2 + (1+\lambda)m_3}\mathbf{r}_1 = \frac{M}{m_2 + (1+\lambda)m_3}\mathbf{r}_1 \\
\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_1 + \frac{\lambda m_2 + (1+\lambda)m_1}{m_2 + (1+\lambda)m_3}\mathbf{r}_1 = \frac{(1+\lambda)M}{m_2 + (1+\lambda)m_3}\mathbf{r}_1
\end{aligned}$$

und daher

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -G\mu_1 \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} \tag{53}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \frac{m_2(m_2 + (1+\lambda)m_3)^2}{M^2} + \frac{m_3(m_2 + (1+\lambda)m_3)^2}{(1+\lambda)^2 M^2} \\
&= \frac{(m_3 + (1+\lambda)^2 m_2)(m_2 + (1+\lambda)m_3)^2}{M^2(1+\lambda)^2}.
\end{aligned}$$

Analog dazu findet man:

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -G\mu_2 \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|^3}; \qquad \ddot{\mathbf{r}}_3 = -G\mu_3 \frac{\mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_3|^3} \tag{54}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= \frac{(m_3 + \lambda^2 m_1)(m_1 - \lambda m_3)^2}{M^2 \lambda^2} \\
\mu_3 &= \frac{(\lambda^2 m_1 + (1+\lambda)^2 m_2)(\lambda m_2 + (1+\lambda)m_1)^2}{\lambda^2 (1+\lambda)^2 M^2}.
\end{aligned}$$

Wir haben also effektiv drei (reduzierte) Zweikörperbewegungen um den Massenmittelpunkt: der Körper i bewegt sich so um den Schwerpunkt als habe er keine Masse und die Masse μ_i befände sich im Mittelpukt. Aus

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -G\mu_i \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^3} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ergeben sich drei Flächensätze (Drehimpulserhaltung)

$$r_i^2 \dot{\varphi}_i = C_i. \tag{55}$$

Die Bedingung der Kollinearität erfordert, daß alle drei Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_i$ einander gleich sein müssen, d.h.

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}.$$

Also gilt:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}; \qquad \frac{C_1}{C_3} = \frac{r_1^2}{r_3^2}.$$

Die Bahngleichungen

$$r_i = \frac{C_i^2/(G\mu_i)}{1+e_i\cos(f_i - f_{i0})} \qquad (i = 1,2,3)$$

ergeben, daß alle e_i gleich sein müssen, da bei Kollinearität $f_i - f_{i0}$ für alle i's gleich ist (ansonsten hätte man kein konstantes Abstandsverhältnis). Damit ergibt sich also z.B.

$$\frac{r_1}{r_3} = \frac{C_1^2}{C_3^2}\frac{\mu_3}{\mu_1}.$$

Wegen

$$\frac{C_1^2}{C_3^2} = \left(\frac{r_1}{r_3}\right)^4$$

folgt sofort

$$\frac{\mu_1}{\mu_3} = \left(\frac{r_1}{r_3}\right)^3.$$

Diese Gleichung liefert uns nun eine Bestimmungsgleichung für den Parameter λ, da wir mit Hilfe von ?? und ?? beide Seiten durch λ und die Massen ausdrücken können:

$$\frac{\mu_1}{\mu_3} = \lambda^2\frac{(m_3+(1+\lambda)^2 m_2)(m_2+(1+\lambda)m_3)^2}{(\lambda^2 m_1+(1+\lambda)^2 m_2)(\lambda m_2+(1+\lambda)m_1)^2} = \frac{(m_2+(1+\lambda)m_3)^3}{(\lambda m_2+(1+\lambda)m_1)^3},$$

bzw.

$$\lambda^2\frac{(m_3+(1+\lambda)^2 m_2)}{(\lambda^2 m_1+(1+\lambda)^2 m_2)} = \frac{m_2+(1+\lambda)m_3}{\lambda m_2+(1+\lambda)m_1}.$$

Eine einfache Umformung ergibt hieraus die Lagrange'sche Gleichung 5ter Ordnung für λ

$$\begin{aligned}(m_1+m_2)\lambda^5 &+ (2m_2+3m_1)\lambda^4 + (3m_1+m_2)\lambda^3 - (m_2+3m_3)\lambda^2 \\ &- (3m_3+2m_2)\lambda - (m_2+m_3) = 0. \qquad (56)\end{aligned}$$

Nun besitzt ein Polynom

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

mit reellen Koeffizienten a_i und $a_0, a_n \neq 0$, bei denen die Folge der a_i genau p-Zeichenwechsel aufweist, p positive Nullstellen oder eine gerade Anzahl weniger. Nach dieser Descartes'schen Zeichenregel hat die Lagrange'sche Gleichung genau eine positive Lösung für $\lambda = r_{32}/r_{21}$.

Beispiele: a) Im Fall drei gleicher Massen ($m_1 = m_2 = m_3$) lautet dasBestimmungspolynom

$$0 = 2\lambda^5 + 5\lambda^4 + 4\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2 = (\lambda-1)(2\lambda^4 + 7\lambda^3 + 11\lambda^2 + 7\lambda + 2),$$

Abbildung 4: Die Librationspunkte L_1, L_2 und L_3.

d.h. $\lambda = 1$. Dies hätten wir freilich auch erwartet, da in diesem Fall der Schwerpunkt mit der mittleren Masse zusammenfallen muß und die Abstände zu den äußeren Massen gleich sein müssen.

b) Für $m_1 = 3m; m_2 = 2m; m_3 = m$ lautet das Polynom

$$5\lambda^5 + 13\lambda^4 + 11\lambda^3 - 5\lambda^2 - 7\lambda - 3 = 0,$$

d.h. $\lambda = 0,780....$ Mit $r_1 + r_2 = \eta$ folgt hieraus:

$$r_1 = 0,63\eta; \quad r_2 = 0,37\eta; \quad r_3 = 1,15\eta.$$

4.2 Das eingeschränkte Dreikörperproblem

In Falle, daß einer der drei Massen als verschwindent klein angenommen werden kann, redet man vom eingeschränkten 3-Körperproblem. Wir wollen den Fall $m_2 \to 0$ studieren. Je nachdem wie die Massen angeordnet sind ergeben sich drei Konfigurationen, in denen sich m_2 bezüglich der Massen m_1 und m_3 aufhalten kann. Gibt man die Positionen von m_1 und m_3 vor, so heißen die Punkte, wo sich m_3 aufhalten kann, die *Librationspunkte* (oder Lagrange-Punkte) L_1, L_2, L_3. Wir schreiben $m_1 = m$ und $m_3 = \mu m$. Dann lautet die Largrange-Gleichung nach Division durch m

$$\lambda^5 + 3\lambda^4 + 3\lambda^3 - \mu(3\lambda^2 + 3\lambda + 1) = 0$$

oder

$$\lambda^3 = \frac{\mu}{3}\frac{1 + 3\lambda + 3\lambda^2}{1 + \lambda + \lambda^2/3}.$$

Ein Anwendungsbeispiel ist die Bewegung eines Kleinplaneten oder eines Satelliten im Gravitationsfeld der Sonne ($m_1 = m_\odot$) und eines Planeten. In diesem Fall ist $\mu \ll 1$ und ebenso $\lambda \ll 1$. In guter Näherung gilt dann

$$\lambda \sim \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}.$$

Ist der dritte Körper gleich Jupiter, so ist $\mu \sim 10^{-3}$ und $\lambda \sim 1/15$; im Fall der Erde ist $\mu \sim 3 \cdot 10^{-6}$ und $\lambda \sim 1/100$.

4.3 Gleichseitige-Dreiecks-Lösungen

Er existieren noch weitere Librationspunkte, die wir jetzt untersuchen wollen. Wir werden dazu die Bedingung der Kollinearität aufgeben, aber weiter fordern, daß sich die Massen in einer Ebene bewegen sollen und die geometrische Form der Konfiguration sich nicht ändert, d.h.

$$\frac{r_{12}}{(r_{12})_0} = \frac{r_{23}}{(r_{23})_0} = \frac{r_{31}}{(r_{31})_0} \quad = \quad g(t) \qquad (A)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_3 \quad = \quad \dot{\varphi}(t). \qquad (B)$$

Hier bezeichnet $(r_{ab})_0$ den Abstand r_{ab} zu einem Anfangszeitpunkt, $t = 0$. Die Geschwindigkeitskomponente von m_a senkrecht zum Radiusvektor $\mathbf{x}_a$ ist also $r_a\dot{\varphi}$. Wir legen den Ursprung unseres Koordinatensystems wieder in den Massenmittelpunkt, d.h.

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \mathbf{r}_i = 0$$

und daher

$$\begin{aligned} m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + m_3(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \quad &\equiv \quad m_2\mathbf{r}_{12} + m_3\mathbf{r}_{13} \\ &= \quad \mathbf{r}_1(m_2 + m_3) - m_2\mathbf{r}_2 - m_3\mathbf{r}_3 \\ &= \quad M\mathbf{r}_1 - (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3) \\ &= \quad M\mathbf{r}_1. \end{aligned}$$

Zusammen mit den Bedingungen (A) und (B) ergibt sich hieraus

$$M^2 r_1^2 = [g(t)]^2 \left\{ m_2^2 (r_{12})_0^2 + m_3^2 (r_{13})_0^2 + 2m_2 m_3 (r_{12})_0 \, (r_{13})_0 \, \cos\eta \right\}. \qquad (57)$$

Hier ist η der Winkel zwischen $\mathbf{x}_{12}$ und $\mathbf{x}_{13}$; dieser ist aufgrund der Bedingung (B) zeitlich konstant. Daraus folgt

$$r_1 = (r_1)_0 \, g(t)$$

und entsprechende Relationen mit der selben Zeitfunktion $g(t)$ müssen für r_2 und r_3 gelten, d.h.

$$r_i = (r_i)_0 \, g(t). \qquad (58)$$

Aus dem Drehimpulserhaltungssatz

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i$$

egibt sich damit

$$\sum_i \left[m_i (r_i)_0^2 \right] \, g^2(t) \dot{\varphi} = \text{const.}$$

bzw.

$$g^2(t)\dot{\varphi} = \text{const.}$$

Dies bedeutet, daß der Drehimpuls jeder Masse bezüglich des Massenmittelpunktes zeitlich konstant ist. Dies bedeutet also, daß in unserem Bezugssystem die Kraft auf Körper i nur eine Radialkomponente F_i aufweist. Diese ergibt sich zu

$$F_i = m_i(\ddot{r}_i - r_i\dot{\varphi}_a^2) = m_i r_i \left(\frac{\ddot{g}}{g} - \dot{\varphi}^2 \right), \tag{59}$$

woraus man erkennt, daß F_i proportional zum Abstand r_i des Körpers i vom Massenmittelpunkt ist.

Da die Kräfte nur in radiale Richtung weisen gilt

$$\mathbf{x}_i \times \ddot{\mathbf{x}}_i = 0$$

und unter Verwendung der Bewegungsgleichungen erhält man ($k \neq i, j; j \neq i$)

$$\mathbf{x}_i \times \left(m_j \frac{\mathbf{x}_j}{r_{ij}^3} + m_k \frac{\mathbf{x}_k}{r_{ik}^3} \right) = 0.$$

Zusammen mit der Schwerpunktsbedingung $\sum_i \mathbf{x}_i = 0$ können wir diese Bedingung auch so schreiben

$$\mathbf{x}_i \times \mathbf{x}_j m_j \left(\frac{1}{r_{ij}^3} - \frac{1}{r_{ik}^3} \right) = 0. \tag{60}$$

Offensichtlich besitzt diese Gleichung zwei Klassen von Lösungen:

1) alle Massen befinden sich auf einer Geraden; dann verschwinden nämlich alle Kreuzprodukte $\mathbf{x}_a \times \mathbf{x}_b$. Dies sind die *kollinearen Lösungen*, die wir bereits besprochen haben.

2) Alle Relativabstände r_{ij} sind gleich; dann verschwindet die Differenz derartiger Abstände in der Klammer. Dies sind die *gleichseitigen-Dreiecks-Lösungen*. IN diesem Fall ist $r_{ij} = r$, für alle möglichen Kombinationen i und j ($j \neq i$). Die Bewegungsgleichung z.B. für m_1 lautet dann

$$\ddot{\mathbf{x}}_1 = \frac{G}{r^3}(m_2\mathbf{x}_{12} + m_3\mathbf{x}_{13}).$$

Zusammen mit Gleichung ?? lautet dies

$$\ddot{\mathbf{x}}_1 + \frac{GM}{r^3}\mathbf{x}_1 = 0.$$

Wir wollen hierin noch r durch r_1 ausdrücken:

$$\begin{aligned} M^2 r_i^2 &= m_j^2 r_{ij}^2 + m_k^2 r_{ik}^2 + 2 m_j m_k \, \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ik} \\ &= r^2 (m_j^2 + m_k^2 + m_j m_k). \end{aligned}$$

Eingesetzt in ?? erhalten wir

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = -GM_i \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} \tag{61}$$

mit

$$M_i = \frac{(m_j^2 + m_k^2 + m_j m_k)^{3/2}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2}. \tag{62}$$

Physikalisch bedeutet dies, daß sich jeder der Körper i so um das Massenzentrum bewegt, als wäre er masselos und eine Masse M_i befände sich gerade dort. Sind die Anfangsgeschwindigkeiten entsprechend gewählt, so bleibt die Konfiguration in der Gestalt eines gleichseitigen Dreiecks.

Verschwindet die Masse z.B. des zweiten Teilchens, so ergeben sich die weiteren Librationspunkte L_4 und L_5.

Beispiele: a) Um die Punkte L_4 und L_5 bezüglich Sonne und Jupiter bewegen sich die Trojaner-Asteroiden. Ein Trojaner kann sich rund 20° von den Punkten L_4 oder L_5 wegbewegen, er bleibt aber für sehr lange Zeit in einer Bahn um den entsprechenden Librationspunkt.

b) Im Saturnsystem scheint der kleine Mond 1980 S12 im Librationspunkt L_4 von Saturn und dem großen Saturnmond Dione zu stehen.

4.4 Das Jacobi-Integral im eingeschränkten 3-Körperproblem

Ein Probekörper kleiner Masse ($m \to 0$) bewege sich im Feld zweier Massenpunkte m_1 und m_2, welche sich auf *Kreisbahnen* um den gemeinsamen Schwerpunkt S bewegen mögen. Bezüglich kartesischer Inertialkoordinaten mit Ursprung in S gilt für das Probeteilchen

$$\ddot{\mathbf{r}} = -Gm_1 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} = \nabla U_G$$

mit

$$U_G = G \left(\frac{m_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{m_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} \right).$$

Wir wollen nun von den Inertialkoordinaten auf mitrotierende übergehen, derart daß die beiden massiven Körper m_1 und m_2 auf der neuen $\overline{x}$-Achse zu liegen kommen. In diesen lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\overline{\mathbf{r}}} + 2 \times \dot{\overline{\mathbf{r}}} + \omega \times (\omega \times \overline{\mathbf{r}}) = \nabla U_G.$$

Hier ist ω die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Systems bezüglich der Inertialachsen, der zweite Term auf der linken Seite beschreibt die Coriolis-Beschleunigung. Der folgende Term liefert die Zentrifugalbeschleunigung; er läßt sich als Gradient eines Potentials darstellen, so daß wir die Bewegungsgleichung im rotierenden System so schreiben können (die Striche lassen wir jetzt wieder weg):

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\omega \times \dot{\mathbf{r}} = \nabla U_T \tag{63}$$

mit

$$U_T = U_G + \frac{1}{2}(\omega \times \mathbf{r})^2. \tag{64}$$

Der Gradient des zweiten Termes ergibt gerade die Zentrifugalbeschleunigung. Multiplikation mit $\dot{\mathbf{r}}$ und Integration über die Zeit t liefert

$$\int \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}\, dt + 2 \int \dot{\mathbf{r}} \cdot (\omega \times \dot{\mathbf{r}})\, dt = \int \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla U_T\, dt.$$

Da $\omega \times \dot{\mathbf{r}}$ senkrecht auf $\dot{\mathbf{r}}$ steht, trägt der Coriolis-Term nichts bei und die Integrale liefern

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 = U_T + \text{const.}$$

bzw.

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = 2U_T - C. \tag{65}$$

Diese Gleichung beschreibt das sogenannte Jacobi-Integral oder die Energieerhaltung im mitrotierenden System.

4.5 Hillsche Grenzflächen

Wir wollen das Jacobi-Integral in speziellen Einheiten weiter analysieren. Die Einheit der Masse legen wir durch $m_1 + m_2 = 1$ fest; d.h. setzen wir $m_2 = \mu$ dann ist $m_1 = 1 - \mu$. Die Einheit der Länge legen wir durch $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = 1$ fest; damit wird die große Halbachse a ?????? ebenfalls gleich Eins gesetzt. Schließlich legt die Wahl $G = 1$ die Einheit der Zeit fest. Damit ergibt sich der Betrag der Winkelgeschwindigkeit ω auch zu Eins, da $\omega^2 = n^2 = G(m_1 + m_2)a^{-3} = 1$. Aus der Schwerpunktsbedingung folgt, daß unter diesen Bedingungen im rotierenden System die beiden Massen m_1 und m_2 bei $x_1 = -\mu$ und $x_2 = 1 - \mu$ sitzen. Für das totale Potential U_T ergibt sich dann

$$U_T = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \tag{66}$$

mit

$$r_1^2 = ((x - x_1)^2 + y^2 + z^2); \quad r_2^2 = ((x - x_2)^2 + y^2 + z^2).$$

Das Jacobi-Integral lehrt uns, daß $\dot{\mathbf{r}}^2 = 0$ genau für $2U_T = C$ gilt. Zu gegebenem C sind die Flächen verschwindender Geschwindigkeit also durch

$$F(x, y, z; C) \equiv 2U_T - C = 0 \tag{67}$$

gegeben. Diese Flächen heißen *Hillsche-Grenzflächen*; sie begrenzen die Bereiche, in denen sich das masselose Teilchen aufhalten kann. In den Bereichen mit $\dot{\mathbf{r}}^2 > 0$ ist nämlich auch $F > 0$. In Bereichen mit $F < 0$ dagegen wäre $\dot{\mathbf{r}}$ imaginär; hier kann sich das Teilchen nicht aufhalten. Abb. ?? zeigt Schnitte der Hillschen-Grenzflächen in mitrotierenden Koordinaten.

Es ist interessant zu bemerken, daß die fünf Lagrange-Punkte $L_1, \ldots, L_5$ als stationäre Punkte von F bzw. von U_T auftreten für die gilt:

$$0 = dF = dU_T = (x + U_{G,x})dx + (y + U_{G,y}).$$

Hier ist $(\mu' = 1 - \mu)$

$$U_{G,x} = \frac{\partial}{\partial x} U_G = -\frac{\mu'(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-\mu')}{r_2^3}$$

und

$$U_{G,y} = \frac{\partial}{\partial y} U_G = -\frac{\mu' y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}.$$

Da die Terme mit dx und dy unabhängig sind ergeben sich hieraus zwei Gleichungen

$$x = \mu'(x+\mu)r_1^{-3} + \mu(x-\mu')r_2^{-3} \tag{68}$$

$$y = y\mu' r_1^{-3} + \mu y r_2^{-3} \tag{69}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle: 1. $y \neq 0$. In diesem Fall liefert die zweite Gleichung $1 = \mu' r_1^{-3} + \mu r_2^{-3}$. Einsetzen in die erste Gleichung liefert $r_2 = 1$ und damit folgt auch $r_1 = 1$. Die ergibt die Lagrange-Punkte L_4 und L_5 an den Kanten der gleichseitigen Dreiecke.

2. Ist $y = 0$, so ist $r_1^2 = (x - x_1)^2 = (x + \mu)^2$ und $r_2^2 = (x - x_2)^2 = (x - \mu')^2$, also

$$x = \mu' \frac{x+\mu}{|x+\mu|^3} + \mu \frac{x-\mu'}{|x-\mu'|^3}.$$

Sei wieder $\lambda = r_{23}/r_{21} = r_{23} = |x - x_2|$. Wir wählen die Vorzeichen so, daß $\lambda = x - \mu'$. Dann ist $x = \mu' + \lambda$ und $x + \mu = \lambda + \mu' + \mu = \lambda + 1$. Damit liefert die letzte Gleichung

$$1 - \mu + \lambda - \frac{1-\mu}{(1+\lambda)^2} - \frac{\mu}{\lambda^2} = 0$$

oder

$$\lambda^5 + (3-\mu)\lambda^4 + (3-2\mu)\lambda^3 - \mu(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0. \tag{70}$$

Dies ist aber genau die Lagrange-Gleichung für $m_1 = 1-\mu$, $m_2 = \mu$ und $m_3 = 0$, d.h. es ergeben sich hieraus die drei kollinearen Librationspunkte L_1, L_2 und L_3.

4.6 Enge Bahnen um die Lagrangeschen Dreieckspunkte

Wie Figur ?? zeigt, sind die Librationspunkte L_1, L_2 und L_3 Sattelpunkte, L_4 und L_5 Minima von U_T, d.h. Maxima der potentiellen Energie. Man könnte daraus schließen, daß alle Librationspunkte instabile Aufenthaltsorte sind. Dies stimmt auch in Regel für L_1, L_2 und L_3. Die Punkte L_4 und L_5 sind jedoch unter gewissen Voraussetzungen aufgrund der Coriolis-Kraft stabil. Wir wollen uns nun eine Testmasse in einem Lagrangepunkt des eingeschränkten 3-Körperproblems denken und untersuchen was geschieht, wenn wir die Testmasse aus dem Librationspunkt etwas herausbewegen.

Die Bahnebene der massiven Körper sei die $x - y -$ Ebene unseres Koordinatensystems. (x_L, y_L) bezeichne einen der Librationspunkte. Wir wissen, daß an dieser Stelle $0 = dU = U_{,x}dx + U_{,y}dy$ $(U = U_T)$ gilt. Sei $(x_L + \xi, y_L + \eta, \zeta)$ der Ort eines Probekörpers in unmittelbarer Nähe des Librationspunktes. Die Bewegungsgleichung lautet im mitrotierenden System

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\omega \times \dot{\mathbf{r}} = \nabla U.$$

Setzen wir $\omega = 1$ und $\omega = \mathbf{e}_z$ dann folgt aus der Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \xi U_{xx} + \eta U_{xy} + \zeta U_{xz} \\
\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= \xi U_{yx} + \eta U_{yy} + \zeta U_{yz} \\
\ddot{\zeta} &= \xi U_{zx} + \eta U_{zy} + \zeta U_{zz}
\end{aligned} \tag{71}$$

mit

$$U_{xy} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_{\mathbf{x}_L} \qquad \text{etc.}$$

Eine spezielle Lösung dieses gekoppelten Systems von Differentialgleichungen lautet

$$\xi = \xi_0\, e^{\chi t}, \qquad \eta = \eta_0\, e^{\chi t}, \qquad \zeta = \zeta_0\, e^{\chi t}. \tag{72}$$

Setzen wir dies in (??) ein, so erhalten wir die algebraischen Gleichungen

$$\begin{aligned}
(\chi^2 - U_{xx})\xi_0 - (2\chi + U_{xy})\eta_0 - U_{xz}\zeta_0 &= 0 \\
(2\chi - U_{yx})\xi_0 + (\chi^2 - U_{yy})\eta_0 - U_{yz}\zeta_0 &= 0 \\
-U_{zx}\xi_0 - U_{zy}\eta_0 + (\chi^2 - U_{zz})\zeta_0 &= 0.
\end{aligned} \tag{73}$$

Mögliche Lösungen für χ erhält man, indem man fordert, daß die Koeffizientendeterminante verschwinden soll. Für ein Teilchen, deren Bewegung auf die $x - y -$ Ebene beschränkt bleiben soll muß dann also gelten:

$$(\chi^2 - U_{xx})(\chi^2 - U_{yy}) + 4\chi^2 - U_{xy}^2 = 0,$$

bzw.

$$\chi^4 + (4 - U_{xx} - U_{yy})\chi^2 + (U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2) = 0. \tag{74}$$

Die Lösungen dieser Gleichung sagen uns, ob die engen Bahnen um die Librationspunkte stabil oder instabil sind: ist der Realteil von χ verschieden von Null, dann sollte die Bahn instabil sein. Man bedenke hierbei, daß die Gleichung Werte für χ^2 liefert, d.h. daß in diesem Falle ein χ mit *positivem* Realteil existiert, welches zu großen Werten von ξ, η und ζ führt. Im Falle eines verschwindenden Realteiles von χ können stabile, periodische Bahnen um die Librationspunkte existieren.

Man findet auf diese Art und Weise, daß die kollinearen Librationspunkte in der Regel instabil sind. Nur ganz spezielle Bahnen um L_1, L_2 oder L_3 können periodisch sein. Eine übliche Bahn macht dagegen nicht mehr als etwa zwei Umläufe um L_2 oder L_3, bevor diese sich vom Lagrangepunkt entfernt.

Anders ist die Situation an einem der gleichseitigen Dreieckspunkte L_4 und L_5. Hier ist $r_1 = r_2 = r = 1$,

$$x_L = \frac{1}{2} - \mu, \qquad y_L = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}, \qquad z_L = 0.$$

Betrachten wir z.B. den Punkt L_4 mit $y_L = +\sqrt{3}/2$, dann findet man

$$\begin{aligned} U_{xx} = \frac{3}{4}, \qquad U_{zz} &= -1 \\ U_{yy} = \frac{9}{4}, \qquad U_{xy} &= \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) \end{aligned} \tag{75}$$

und

$$U_{xz} = U_{yz} = 0.$$

Setzen wir dies in ?? ein, so ergibt sich für enge Bahnen in der $x - y -$ Ebene

$$\chi^4 + \chi^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu)$$

und damit

$$\chi^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}. \tag{76}$$

Nun sind alle vier Wurzeln dieser Gleichung rein imaginär, falls

$$1 - 27\mu(1-\mu) \geq 0. \tag{77}$$

Um dies einzusehen, betrachten wir zunächst die Nullstelle des Radikanten:

$$\mu = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{23}{108}} \equiv \mu_{\mathrm{cr}} \simeq 0.03852.$$

Wenn wir annehmen, daß $m_1 > m_2$, so muß $\mu < 0.5$, d.h. wir müssen das Minuszeichen in dieser Gleichung verwenden. Daraus folgt, daß der Radikant höchstens den Wert 1 annehmen kann, nämlich im Grenzfall $\mu = 0$. Aus ??

ergibt sich dann, daß unter der Bedingung $\mu < \mu_{\rm cr}$ alle Wurzeln für χ rein imaginär sind und enge Bahnen um L_4 (und um L_5) stabil sind. Im System Sonne und Jupiter ist $\mu \sim 0.001$, so daß die Stabilitätsbedingung erfüllt ist und die Trojaner um die Librationspunkte L_4 und L_5 oszillieren.

Diese mathematischen Ergebnisse lassen sich physikalisch verstehen. Ein Körper, der mit Anfangsgeschwindigkeit Null im mitrotierenden Koordinatensystem, in die Nähe des Lagrange-Punktes L_4 gebracht wird, wird anfänglich den Potentialberg hinunter, also weg von L_4, beschleunigt. Sobald aber seine Geschwindigkeit von Null verschieden ist, beginnt die Coriolis-Kraft zu wirken, die den Körper senkrecht zu seiner Bewegungsrichtung beschleunigt. Durch die dadurch hervorgerufene Krümmung der Bahn senkrecht zum Potentialgradienten wird verhindert, daß der Testkörper die Umgebung von L_4 verläßt, wenn μ kleiner ist als der kritische Wert $\mu_{\rm cr}$.

5 Die Rotationsbewegung eines Körpers

5.1 Die Eulersche Theorie des starren Kreisels

Bezüglich Inertialkoordinaten $(t, \mathbf{x})$ gilt für einen Körper die Drehimpulsbilanz

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{D} \tag{78}$$

mit dem Drehimpuls

$$\mathbf{L} = \int d^3x\, \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{v}) \tag{79}$$

und dem Drehmoment

$$\mathbf{D} = \int d^3x\, \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{a}). \tag{80}$$

Hier ist ρ die Materiedichte, $\mathbf{x}, \mathbf{v}$ und $\mathbf{a}$ sind Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Materieelementes. Für einen Körper, welcher *starr* um eine Drehachse ω rotiert gilt

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{x}. \tag{81}$$

Setzen wir dieses Geschwindigkeitsfeld in die Definition von $\mathbf{L}$ ein, so erhalten wir mit $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

$$\mathbf{L} = \int d^3x\, \rho[\mathbf{x} \times (\omega \times \mathbf{x})] = \int d^3x\, [\mathbf{x}^2 \omega - \mathbf{x}(\mathbf{x} \cdot \omega)].$$

$\mathbf{L}$ und ω hängen für einen starren Körper über den Trägheitstensor C_{ij} (eine symmetrische 3 x 3 Matrix) miteinander zusammen. Mit der Einsteinsche Summationskonvention gilt

$$L_i = C_{ij} \omega_j \tag{82}$$

mit

$$C_{ij} = \int d^3x\, \rho(\mathbf{x}^2 \delta_{ij} - x^i x^j). \tag{83}$$

Hier ist δ_{ij} das Kronecker-Symbol:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : \quad i = j \\ 0 & : \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Bezüglich gewisser mitrotierender Hauptachsen nimmt der Trägheitstensor Diagonalgestalt an, d.h.

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

(A, B, C) heißen die *Hauptträgheitsmomente* des starren Körpers. Die Hauptachsen mögen durch drei orthonormierte Basisvektoren $\pi_{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ charakterisiert werden. Bezüglich $\pi_{(i)}$ gilt:

$$L_1 = A\omega_1, \quad L_2 = B\omega_2, \quad L_3 = C\omega_3.$$

Die Gleichung $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{D}$ ist die Grundlage für eine mathematische Beschreibung von Präzessions- und Nutationsbewegung astronomischer Körper. Für eine Beschreibung der sogenannten Polbewegung geht man besser in ein mitrotierendes System. Ein mitrotierendes System von Basisvektoren $\mathbf{e}^{\mathrm{rot}}_{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ ist durch

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}^{\mathrm{rot}}_{(i)} = \omega \times \mathbf{e}^{\mathrm{rot}}_{(i)}$$

gegeben. In einem solchen mitrotierenden System gilt die dynamische Gleichung der Drehbewegung

$$\mathbf{D} = \frac{d}{dt}(L^i \mathbf{e}^{\mathrm{rot}}_{(i)}) = \frac{dL^i}{dt}\mathbf{e}^{\mathrm{rot}}_{(i)} + L^i \frac{d}{dt}\mathbf{e}^{\mathrm{rot}}_{(i)},$$

bzw.

$$\mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{L} + \omega \times \mathbf{L}. \tag{84}$$

Diese Gleichung können wir auch in Komponentenform schreiben

$$D_i = \dot{L}_i + \epsilon_{ijk}\omega_j L_k.$$

Hier ist ϵ_{ijk} das vollständig antisymmetrische Levi-Civita Symbol

$$\epsilon_{123} = +1$$

und durch Vertauschen von jeweils zwei Indizes erhält man einen Faktor von (-1). Bei zwei gleichen Indizes verschwindet damit das Levi-Civita Symbol. Z.B. ist $\epsilon_{312} = -\epsilon_{132} = +\epsilon_{123} = +1$. Ausgeschrieben lauten diese Gleichungen

$$\begin{aligned} D_1 &= \dot{L}_1 + (\omega_2 L_3 - \omega_3 L_2) \\ D_2 &= \dot{L}_2 + (\omega_3 L_1 - \omega_1 L_3) \\ D_3 &= \dot{L}_3 + (\omega_1 L_2 - \omega_2 L_1) \end{aligned}$$

Sind $\mathbf{e}^{\mathrm{rot}}_{(i)} = \pi_{(i)}$ die Hauptträgheitsachsen, so ergeben sich die Eulerschen Kreiselgleichungen ($\dot{L}_1 = A\dot{\omega}_1$ etc.)

$$\begin{aligned} D_1 &= A\dot{\omega}_1 + (C - B)\omega_2\omega_3 \\ D_2 &= B\dot{\omega}_2 + (A - C)\omega_3\omega_1 \\ D_3 &= C\dot{\omega}_3 + (B - A)\omega_1\omega_2. \end{aligned} \tag{85}$$

Wir wollen zunächst das äußere Drehmoment außer Acht lassen annehmen, daß

$$A \simeq B$$

gilt. Dies ist für einen angenähert axialsymmetrischen Körper wie die Erde der Fall. In dieser Näherung lauten die Eulerschen Kreiselgleichungen

$$
\begin{aligned}
A\dot{\omega}_1 + (C-A)\omega_2\omega_3 &= 0 \\
A\dot{\omega}_2 - (C-A)\omega_3\omega_1 &= 0 \\
C\dot{\omega}_3 &= 0
\end{aligned}
\tag{86}
$$

und daher

$$
\omega_3 = \text{const.} = \Omega. \tag{87}
$$

Sei

$$
\sigma_E \equiv \frac{C-A}{A}\Omega,
$$

die Euler-Frequenz, dann lauten die verbleibenden zwei Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\dot{\omega}_1 + \sigma_E\omega_2 &= 0 \\
\dot{\omega}_2 - \sigma_E\omega_1 &= 0
\end{aligned}
$$

d.h.

$$
\omega_1 = \beta\cos(\sigma_E t + \gamma); \quad \omega_2 = \beta\sin(\sigma_E t + \gamma) \tag{88}
$$

mit Konstanten β und γ. Es folgt

$$
\omega_1^2 + \omega_2^2 = \beta^2 = \text{const.}
$$

Zusammen mit $\omega_3 =$const. bedeutet dies, daß der Rotationsvektor ω auf einem Kreiskegel (dem Polhodiekegel) um die Hauptträgheitsachse umläuft. Die Umlaufperiode ist dabei die Euler Periode

$$
T_E = \frac{2\pi}{\sigma_E} = \frac{A}{A-C}\frac{2\pi}{\Omega} \simeq 304\,\text{Tage}. \tag{89}
$$

Die tatsächliche Periode bei der Erde ist jedoch die *Chandler-Periode*

$$
T_{Ch} = 430\,\text{Tage}.
$$

Sie kommt durch die elastische Deformierbarkeit der Erde zustande. Bei der Erde beträgt der Winkel zwischen Hauptträgheitsachse $\pi_{(3)}$ und der Rotationsachse rund $0.''3$, entsprechend 9 Meter am geometrischen Pol der Erde. Ohne äußere Drehmomente ist die Drehimpulsachse $\mathbf{L}$ raumfest, ω läuft auf dem *Herpolhodiekegel* um $\mathbf{L}$ mit einer Periode von etwa einem Tag (freie tägliche Nutation) um. Der Winkel zwischen $\mathbf{L}$ und ω beträgt für die Erde rund $0.''001$, entsprechend 3 Zentimeter auf der Erdoberfläche, d.h. für die Erde fallen Rotationsachse und Drehimpulsachse praktisch zusammen.

Abbildung 5: Bewegung der Hauptträgheits-, der Drehimpuls- und der Rotationsachse in der Eulerschen-Kreiselbewegung

5.2 Die nicht-starre Kreiselbewegung

Wir gehen aus von der Euler-Gleichung in der Form

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} + \omega \times \mathbf{L}.$$

Diese gilt in einem geeigneten Basissytem $\mathbf{e}_{(i)}^{\mathrm{rot}}$ mit

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_{(i)}^{\mathrm{rot}} = \omega \times \mathbf{e}_{(i)}^{\mathrm{rot}}.$$

Für einen elastischen, deformierbaren Körper setzen wir nun an

$$L_i = C_{ij}(t)\omega_j + l_i(t), \tag{90}$$

wobei

$$C_{ij} = \int d^3x\, \rho(\mathbf{x}^2\delta_{ij} - x^i x^j)$$

und

$$l_i = \epsilon_{ijk} \int d^3x\, \rho x^j \bar{v}^k.$$

k_i ist hier der Relativdrehimpuls und $\overline{\mathbf{v}}$ die Teilchengeschwindigkeit bezüglich der mit ω rotierenden Achsen. Damit gilt die *Liouville-Gleichung*

$$D_i = \frac{\partial}{\partial t}(C_{ij}\omega_j + l_i) + \epsilon_{ijk}\, \omega_j(C_{kl}\omega_l + l_k). \tag{91}$$

Für eine elastische Erde, deren Gestalt permanent von Gezeitenkräften etc. verändert wird ist eine geeignete Definition des rotierenden 3-Beins auf verschiedene Arten möglich. Oft wählt man Haupttträgheitsachsen, definiert über $C_{ij} = 0$ für $i \neq j$, oder sogenannte *Tisserand-Achsen*, definiert über $l_i = 0$. Wir wollen folgenden Ansatz machen

$$
\begin{aligned}
C_{11} &= A + c_{11}; \quad C_{12} = c_{12}; \quad \omega_1 = \Omega m_1 \\
C_{22} &= A + c_{22}; \quad C_{13} = c_{13}; \quad \omega_2 = \Omega m_2 \\
C_{33} &= C + c_{33}; \quad C_{23} = c_{23}; \quad \omega_3 = \Omega(1 + m_3).
\end{aligned}
$$

Hier sollen alle Größen c_{ij} und m_i alle kleine Größen erster Ordnung aufgefaßt werden. Die Liouville-Gleichung ergibt dann z.B. bis auf Größen zweiter Ordnung

$$
\begin{aligned}
D_1 = \quad & \frac{\partial}{\partial t}(C_{11}\omega_1 + C_{12}\omega_2 + C_{13}\omega_3 + l_1) \\
& + \epsilon_{123}\omega_2(C_{31}\omega_1 + C_{32}\omega_2 + C_{33}\omega_3 + l_3) \\
& + \epsilon_{132}\omega_3(C_{21}\omega_1 + C_{22}\omega_2 + C_{23}\omega_3 + l_2) \\
= \quad & A\Omega\dot{m}_1 + \Omega\dot{c}_{13} + \dot{l}_1 + \Omega^2 m_2 C - \Omega(1 + m_3)[A\Omega m_2 + c_{23}\Omega + l_2] \\
= \quad & \Omega^2(C - A)\left[\frac{\dot{m}_1}{\sigma_E} + m_2\right] - \Omega^2 c_{23} + \Omega\dot{c}_{13} - \Omega l_2 + \dot{l}_1 \,.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung wollen wir in folgender Form schreiben:

$$
\frac{\dot{m}_1}{\sigma_E} + m_2 = \psi_2. \tag{92}
$$

Analog dazu findet man die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\dot{m}_2}{\sigma_E} - m_1 &= -\psi_1 && (93) \\
\dot{m}_3 &= \dot{\psi}_3. && (94)
\end{aligned}
$$

Die drei Funktionen ψ_1, ψ_2 und ψ_3 heißen *Anregungsfunktionen*. Für diese gilt:

$$
\begin{aligned}
\psi_1 &= [\Omega^2 c_{13} + \Omega\dot{c}_{23} + \Omega l_1 + \dot{l}_2 - D_2]/[\Omega^2(C - A)], && (95) \\
\psi_2 &= [\Omega^2 c_{23} - \Omega\dot{c}_{13} + \Omega l_2 - \dot{l}_1 + D_1]/[\Omega^2(C - A)] && (96) \\
\psi_3 &= [-\Omega^2 c_{33} - \Omega l_3 + \Omega \int_0^t D_3 \, dt]/[\Omega^2 C]. && (97)
\end{aligned}
$$

Die linken Seiten der Euler-Liouville Gleichung für die Größen (m_1, m_2, m_3) beschreiben dabei die Polbewegung (m_1, m_2 und die Schwankungen der Tageslänge (m_3); sie sind daher mit *astronomischen Beobachtungen* verknüpft. Die

Anregungsfunktionen ψ_i beschreiben die Ursachen für eine Abweichung von der Bewegung eines kräftefreien starren Körpers. Sie resultieren aus den Drehmomenten von Mond, Sonne und Planeten und geophysikalischen Prozessen.

Die Liouville-Gleichung für die Polbewegung läßt sich sehr kompakt mit komplexen Größen schreiben. Mit

$$m \equiv m_1 + im_2, \quad \psi = \psi_1 + i\psi_2 \tag{98}$$

und

$$c = c_{13} + ic_{23}; \quad l = l_1 + il_2; \quad D = D_1 + iD_2$$

lautet die Liouville-Gleichung für die Polbewegung einfach

$$i\frac{\dot{m}}{\sigma_E} + m = \psi. \tag{99}$$

Die komplexe Anregungsfunktion ψ ist durch

$$\psi = \left[\frac{1}{\Omega^2(C-A)}\right]\left(\Omega^2 c - i\dot{c} + \Omega l - i\dot{l} + iD\right) \tag{100}$$

gegeben. Für $\psi = 0$ erhalten wir das alte Ergebnis in der Form

$$m \propto e^{i\sigma_E t}$$

mit der Euler Periode T_E. Mit Anregungsfunktion kann man formal schreiben

$$m = e^{i\sigma_E t}\left[m_0 - i\sigma_E \int_{-\infty}^{t} \psi(\tau) e^{-i\sigma_E \tau}\, d\tau\right]. \tag{101}$$

Wir wollen nun die freie Bewegung einer elastischen Erde studieren. Die Ableitung der entsprechenden Anregungsfunktionen erfordert einige Überlegungen. Wir wollen dazu von einer kugelförmigen nichtrotierendenErde ausgehen mit

$$C_{ij} = I\,\delta_{ij}.$$

Eine Rotation wird dann die elastische Kugel deformieren und das resultierende Trägheitsmoment wird Korrekturglieder proportional zur Winkelgeschwindigkeit erhalten. Da die Zentrifugalkräfte für die Deformationen verantwortlich sind verhalten sich diese wie die Quadrate der Winkelgeschwindigkeit. Formal kann man von folgendem Ansatz ausgehen

$$C_{ij} = I\,\delta_{ij} + k\frac{R_\oplus^5}{3G}\left(\omega_i\omega_j - \frac{1}{3}\omega^2\delta_{ij}\right).$$

Hierin ist die *Love-Zahl* k einfach ein Maß für die Rotationsdeformation der Erde. Für den Zusammenhang von C_{ij} mit den Hauptträgheitsmomenten betrachten wir zunächst eine quasi-stationäre (säkulare) Situation mit $\omega_1 = \omega_2 = 0$ und $\omega_3 = \Omega$. In diesem Falle schreiben wir $k = k_s$. Dann ist

$$C_{11} = C_{22} = A = I - \frac{k_s R_\oplus^5}{9G}\Omega^2; \quad C_{33} = C = I + \frac{2k_s R_\oplus^5}{9G}\Omega^2.$$

Daraus können wir einen Zahlenwert für die säkulare Love-Zahl k_s ableiten:

$$k_s = \frac{3G(C-A)}{R_\oplus^5 \Omega^2} \simeq 0.96.$$

Für $i \neq j$ lassen sich die Deviationsmomente dann schreiben als

$$c_{ij} = k\frac{R_\oplus^5}{3G}\omega_i\omega_j = \frac{k}{k_s}\frac{\omega_i\omega_j}{\Omega^2}(C-A).$$

Speziell haben wir

$$c_{13} = \frac{k}{k_s}(C-A)m_1; \quad c_{23} = \frac{k}{k_s}(C-A)m_2,$$

d.h.

$$c = \frac{k}{k_s}(C-A)m\,. \tag{102}$$

Wir wollen nun zu dieser Rotationsdeformation die zugehörigen Anregungskunktionen berechnen. Auf den rechten Seiten der Gleichungen für ψ_1 und ϕ_2 betrachten wir nur die c_{13} und c_{23} Anteile:

$$\psi = \psi_1 + i\psi_2 = \frac{1}{\Omega^2(C-A)}[\Omega^2 c - i\dot{c}] \simeq \frac{k}{k_s}m\,. \tag{103}$$

Die Liouville-Gleichung für die Polbewegung lautet damit

$$i\frac{\dot{m}}{\sigma_E} + m \simeq \frac{k}{k_s}m$$

oder

$$i\dot{m} + \sigma_0 m = 0. \tag{104}$$

D.h. die Frequenz der freien Nutation reduziert sich von σ_E auf

$$\sigma_0 = \sigma_E\,\frac{k_s - k}{k_s}.$$

Den Wert für k kann man aus Gezeitenmessungen erhalten

$$k \simeq 0.29$$

und damit ist

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_E} = \frac{T_E}{T_0} \simeq \frac{0.96 - 0.29}{0.96} \simeq 0.7.$$

Damit läßt sich die Chandler-Periode verstehen.

6 Das Gravitationspotential in Außenraum eines ausgedehnten Körpers

Die Gravitationsbeschleunigung die eine "punktförmige" Masse M auf eine Probemasse ausübt,

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r},$$

läßt sich aus dem Gravitationspotential

$$U = \frac{GM}{r}$$

gemäß

$$\mathbf{a} = \nabla U$$

ableiten. Außerhalb einer Massenverteilung erfüllt U die sogenannte *Laplace-Gleichung*

$$\Delta U = 0. \tag{105}$$

Hier ist Δ der sogenannte Laplace- oder Delta-Operator. In kartesischen Koordinaten gilt

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Man sagt auch, U sei eine harmonische Funktion.

Wir wollen überprüfen, ob $(1/r)$ wirklich eine harmonische Funktion ist. $(1/r) = (x^2 + y^2 + z^2)^{(-1/2)}$; z.B. ist

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{r^3} - 3\frac{x^2}{r^5}.$$

Summieren wir über $i = 1, 2, 3$, so heben sich die Terme gegenseitig weg, d.h. $(1/r)$ ist in der Tat eine harmonische Funktion.

In Kugelkoordinaten lautet die Laplace-Gleichung

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\phi^2} = 0. \tag{106}$$

Hier sind (r, θ, ϕ) die mathematischen Polarwinkel: Mit dem Ansatz

$$U(r,\theta,\phi) = \frac{R(r)}{r}P(\theta)Q(\phi)$$

ergibt sich

$$PQ\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{RQ}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \frac{RP}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2Q}{d\phi^2} = 0.$$

Abbildung 6: Die Polarwinkel θ und ϕ.

Multiplikation mit $r^2 \sin^2 \theta/(RPQ)$ liefert

$$r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta P} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \right] + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = 0.$$

Die ϕ-Abhängigkeit steckt nur im letzten Term, d.h.

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = \text{const.} = -m^2,$$

bzw.

$$Q(\phi) = e^{im\phi}.$$

Wir haben dann

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{\sin \theta P} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = 0.$$

Die r-Abhängigkeit steckt hier nur im ersten Term, d.h.

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} = \text{const.} \equiv l(l+1),$$

bzw.

$$\frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} R = 0.$$

Setzt man dies in die verbleibende Gleichung für $P(\theta)$ ein, so erhalten wir

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P = -l(l+1)P.$$

In dieser Gleichung für $P(\theta)$ wollen wir setzen: $x = \cos\theta$. Dann ist $dx/d\theta = -\sin\theta$ und

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{d\theta}\right) = -\sin\theta\frac{d}{dx}; \quad \frac{d}{dx} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}$$

und die Gleichung für P lautet

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P = 0. \tag{107}$$

Die ist die verallgemeinerte Legendre-Gleichung. Die gewöhnliche Legendre-Gleichung erhält man für $m = 0$:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right] + l(l+1)P = 0. \tag{108}$$

Lösung dieser Differentialgleichung sind die Legendre-Polynome

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l \qquad \text{(Formel von Rodrigues')}. \tag{109}$$

$P_l(x)$ ist ein Polynom l-ter Ordnung in x. Damit gilt

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x) \end{aligned}$$

etc. Die verallgemeinerte Legendre-Gleichung wird durch die *verallgemeinerten Legendre-Polynome*, $P_L^m(x)$, gelöst

$$P_l^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x). \tag{110}$$

Achtung: viele Autoren lassen hier den Faktor $(-1)^m$ weg! Man redet dann von unterschiedlicher Phasenkonvention. Zusammen mit der Rodrigues' Formel hat man:

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l. \tag{111}$$

Die *Kugelflächenfunktionen* $Y_{lm}(\theta,\phi)$ definieren wir über

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}. \tag{112}$$

Hier ist der Normierungsfaktor so gewählt, daß

$$\int Y_{l'm'}^* Y_{lm}\, d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, Y_{l'm'}^*(\theta,\phi) Y_{lm}(\theta,\phi) = \delta_{l'l}\delta_{m'm}. \qquad (113)$$

Die Kugelflächenfunktionen bilden ein vollständiges Funktionensytem, d.h. jede Funktion $g(\theta,\phi)$ auf der Einheitskugel kann man nach Y_{lm}'s entwickeln:

$$g(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} A_{lm} Y_{lm}(\theta,\phi)$$

mit

$$A_{lm} = \int d\Omega\, Y_{lm}^*(\theta,\phi) g(\theta,\phi).$$

Zu beachten ist, daß

$$Y_{lm} = 0 \qquad \text{für } |m| > l.$$

In unserer Notation ist etwa

$$\begin{aligned}
Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi} \\
Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \\
Y_{22} &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta e^{2i\phi} \\
Y_{21} &= -\sqrt{\frac{18}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta e^{i\phi} \\
Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Kommen wir nun zur Poisson-Gleichung zurück.

$$U(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r} R(r) Y_{lm}(\theta,\phi) \qquad (114)$$

ist offensichtlich eine Lösung von

$$\Delta U = 0$$

mit

$$\Delta Y_{lm} = -l(l+1) Y_{lm}$$

und

$$\frac{d^2R}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}R = 0.$$

Diese Radialgleichung wird gelöst durch

$$R = \text{const.} \frac{M_{lm}}{r^l},$$

so daß die Lösung der Laplace-Gleichung schließlich lautet

$$U(r,\theta,\phi) = G \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{M_{lm}}{r^{l+1}} \, Y_{lm}(\theta,\phi). \tag{115}$$

Wegen $Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$ ist die Gesamtmasse des gravitierenden Körpers gerade durch

$$M = \frac{M_{00}}{\sqrt{4\pi}}$$

gegeben. Den Dipolterm mit $l = 1$ kann man durch geeignete Wahl des Koordinatenursprunges als Massenmittelpunkt eliminieren. Dann ist

$$U(r,\theta,\phi) = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{M'_{lm}}{r^l} Y_{lm}(\theta,\phi) \right]$$

mit $M'_{lm} = M_{lm}/M$. In der Geodäsie spaltet man Y_{lm} gerne in Real- und Imaginärteil auf und schreibt für das Potential im Außenraum der Erde

$$U = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^l P_{lm}(\cos\theta) \left(C_{lm} \cos m\phi + S_{lm} \sin m\phi \right) \right]. \tag{116}$$

Man beachte, daß in dieser Form die Summe über m jetzt nur von Null bis Unendlich läuft. Die dimensionslosen Größen C_{lm} und S_{lm} werden *Potentialkoeffizienten* genannt.

Für einen rotationssymmetrischen Körper muß die ϕ-Abhängigkeit wegfallen, d.h. $m = 0$. In diesem Falle schreibt man

$$U = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^l J_l \, P_{lm}(\cos\theta) \right] \tag{117}$$

mit

$$J_l = -C_{l0}.$$

Die Größen J_l werden zonale Potentialkoeffizienten oder (dimensionslose) Massenmultipolmomente genannt, J_2 Quadrupolmoment, J_3 Oktupolmoment usw.

7 Der Einsatz eines Computer-Algebra-Systems in der Himmelsmechanik

So manchem Beginner mögen Bessel-Funktionen oder Kugelflächenfunktionen als allzu abstrakte Gebilde erscheinen. Man ist hier geneigt, solche Funktionen anders zu bewerten als zum Beispiel die elementaren trigonometrischen Funktionen, die Exponentialfunktion oder die Logarithmus-Funktion. Ein wesentlicher Grund dafür liegt in der leichten Verfügbarkeit der zuletzt genannten Funktionen auf jedem billigen Taschenrechner. Mit der raschen Entwicklung der Verbreitung der PCs hat sich diese Lage jedoch grundsätzlich geändert. Es existiert heute eine Reihe von Computer-Algebra-Systemen für PCs (oder Workstation), mit denen man genauso einfach mit Bessel-Funktionen wie mit Sinus-Funktionen umgehen kann. Derartige CAS stellen heute kleine Mathematik-Genies dar, die nahezu alles können, was ein guter Mathematiker kann. Darüber hinaus haben sie eine beeindruckende Graphikoberfläche etwa zur 3D-Darstellung von Flächen etc.

Im Moment sind zwei CAS führend auf dem Markt: MAPLE und MATHEMATICA. Mathematica ist von Stefan Wolfram und vielen Mitarbeitern entwickelt worden. Es wird von der Wolfram-Co. kommerziell vertrieben und laufend weiterentwickelt.

Maple ist ein Produkt langer Forschungsarbeit der Waterloo-Universität in Kanada und der ETH in Zürich. Eine erste Version (3.3) kam 1985 auf den Markt. Auch Maple wird laufend verbessert und weiterentwickelt. Die momentane Version ist das Release 4.

Beide CAS sind sehr komplex und nicht frei von Fehlern. Als konkurrierende Produkte auf dem Weltmarkt sind beide inzwischen so ausgereift, daß man nicht eindeutig sagen kann, welches der beiden Systeme das bessere darstellt. Beide Systeme erfordern einen gewissen Mindestbedarf an Hauptspeicher, der etwa bei 6 bis 8 MB liegt. Zum komfortablen Bedienen dieser Systeme sind jedoch vielleicht 16 MB oder mehr wünschenswert.

7.1 Maple: eine kurze Einführung

Wir wollen uns hier kurz Maple vorstellen und damit dann einfache Anwendungen in der Himmelsmechanik studieren. Wir wollen annehmen, daß Maple auf einem PC installiert vorliegt und nachdem wir das CAS aufgerufen haben, z.B. durch Doppelklick auf das Maple-Symbol in Windows95, können wir Maple-Befehle eingeben, die mit dem Terminator-Symbol (ein Semikolon) abgeschlossen werden müssen.

7.1.1 Der Umgang mit Zahlen

Maple versucht, wenn möglich analytisch zu rechnen. Die Eingabe

```
> 1/12 + 1/14;
```

liefert das Ergebnis

$$\frac{13}{84}.$$

Numerisch können wir es mit

```
> evalf(");
```

auswerten. Das "-Zeichen verweist dabei auf die letzte Ausgabe. Man erhält:

$$.1547619048.$$

Mit

```
> Digits := 20; evalf(13/84);
```

erhält man das Ergebnis auf 20 Stellen genau.

```
> evalf(Pi,500);
```

liefert die Zahl π auf 500 Stellen. Die Euler-Zahl e erhält man mit

```
> evalf(exp(1.));
```

die Eingabe

```
> sin(4/9*Pi) + sin(Pi/4);
```

liefert

$$\sin\left(\frac{4}{9}\pi\right) + \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

und den numerischen Zahlenwert erhält man wieder mit evalf("); . Auch komplexe Zahlen sind für Maple kein Problem, wobei die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$, das Symbol I trägt. Die Eingabe

```
> a := 10 + 3*I; abs(a);
```

ergibt

$$\sqrt{109}$$

und der anschließende Befehl

```
> evalf(");
```

liefert schließlich das numerische Ergebnis von

$$10.44030651.$$

Die Stärke eines CAS zeigt sich aber darin, daß man genausogut mit Symbolen arbeiten kann, wie etwa in

```
> c := (d + 7*p)^4; .
```

Mit

```
> expand(c);
```

wird der Ausdruck entwickelt und mit

```
> simplify(");
```

erhält man wieder den Ausdruck in der ursprünglichen Form.

7.1.2 Polynome

Wir definieren ein Polynom poly über

```
> poly := x^4 + 2*x^3 - 12*x^2 - 40*x - 32.
```

Der Befehl

```
> factor(poly);
```

faktorisiert das Polynom und liefert

$$(x-4)(x+2)^3.$$

Mit

```
> expand(");
```

erhält man auch hier die urpröngliche Form zurück. Mit

```
> poly1:= x^2 + 25;
```

und

```
> expand(poly*poly1);
```

ehält man

$$x^6 + 13 * x^4 + 2 * x^5 + 10 * x^3 - 332 * x - 1000 * x - 800.$$

Mit

```
> factor(");
```

erhalten wir das Ergebnis

$$(x-4)(x^2+25)(x+2)^3.$$

Tabelle 1: Elementare Funktionen in Maple

Tabelle 2: Einige weitere Funktionen in Maple

7.1.3 Mathematische Konstanten und Funktionen

Maple kennt eine Fülle von mathematischen Konstanten und Funktionen. Die Konstanten Pi und exp(1.) haben wir bereits kennengelernt. Das Symbol für Unendlich heißt in Maple "infinity". Einige der Funktionen, die Maple kennt sind in den Tabellen (?) und (?) aufgeführt. Die weiter oben verwendete Besselfunktion $J_n(x)$ heißt in Maple BesselJ(n,x). Der Befehl

```
> plot([seq[BesselJ(n,x), n = 1 ..4)], x=0..2*Pi, linestyle = [1,2,3,4]);
```

zeichnet die Bessel-Funktionen $J_n(x)$ für $n = 1, 2, 3, 4$ im Bereich $x \in (0, 2\pi)$. Zusatzpakete enthalten weitere Funktionen der Mathematik. Im Paket "orthopoly" befinden sich z.B. die Legendre-Polynome $P_n(x)$, in Maple $P(n, x)$ genannt. Das Paket wird mit

```
> with(orthopoly);
```

aufgerufen. Der Befehl

```
> P(8,x);
```

liefert etwa das Legendre-Polynom $P_8(x)$:

$$\frac{6435}{128}x^8 - \frac{3003}{32}x^6 + \frac{3465}{64}x^4 - \frac{315}{32}x^2 + \frac{35}{128}$$

usw.

7.1.4 Algebraische Gleichungen

Die Lösungen einer algeraischen Gleichung kann man zunächst versuchen, analytisch zu gewinnen. Die Eingabe

```
> solve( x^2 -x =5, x);
```

liefert analytisch die zwei Wurzeln:

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}, \qquad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

Der Befehl "fsolve" liefert die reellen Lösungen einer algebraischen Gleichung, wie z.B. in

```
> poly:= 23*x^5 + 105*x^4 - 10*x^2 + 17*x; fsolve(poly,x); .
```

mit fsolve(poly,x,complex); versucht Maple alle komplexen Lösungen der Gleichung zu finden. Mit fsolve(poly,x, x = -1..0); sucht Maple die Wurzeln im Bereich zwischen -1 und Null. Auch Gleichungssysteme sind für Maple kein Problem:

```
> glsys:= { 2*x + 3*y + z = 1, x - y - z = 4, 3*x + 7*z = 5};
> solve(glsys); .
```

7.1.5 Grenzwerte, Summen und Produkte

Der Befehl

```
> limit( (sqrt(1+x)-1)/x, x=0);
```

liefert den Grenzwert von 1/2. Summen und Produkte, auch über unendlich viele Glieder, stellen hin und wieder auch kein Problem dar:

> sum(1/(2^k*k), k = 1 .. infinity);   ergibt $\ln 2$,

> product(1 - 1/(2*k)^2, k = 1..infinity);   liefert $2/\pi$.

Dies soll keineswegs heißen, daß Maple stets ein korrektes Ergebnis liefert. Oft kommt kein Ergebnis zurück und manchmal sogar ein falsches.

7.1.6 Differentiation und Integration

Mit

```
> diff(sin(x*y),x);
```

differenziert Maple die Funktion $\sin(x * y)$ nach x. Mehrfachableitungen werden durch ein Dollar-Zeichen markiert, wie in

> diff(x*sin(x), x$3); .

Maple beherrscht (unter Umständen) Integrale analytisch oder numerisch, wenn die Integrationsgrenzen angegeben werden. Die Eingabe

```
> int(1/(1+x^3),x);
```

liefert

$$\frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{3}\right),$$

> int(x*tan(x), x = 0..Pi/2);   ergibt ∞.

Bei einem Versuch, das gleiche Integral von Null bis π zu integrieren ergab sich ein falsches Ergebnis ($\mathrm{I}\cdot\pi^2$ anstelle von $-\pi\ln 2$).

7.1.7 Programmierung

Ähnlich wie in den gängigen Sprachen FORTRAN, PASCAL oder C kann man in Maple eigene Funktionen und Unterroutinen definieren. Das folgende Programm erzeugt die sogenannten Fibonacci-Zahlen:

```
> f := proc(x::nonnegint)
>    option remember;
>    if x = 0 then 0
>    elif x = 1 then 1
>    else f(x-1) + f(x-2) fi
> end:
```

7.1.8 Graphik

Maple besitzt eine ganz ausgezeichnete Graphikoberfläche. Man kann nicht nur wie oben Kurven von Funktionen ohne Aufwand zeichnen. Die Darstellung von Flächen im 3-dimensionalen Raum bereitet oft auch keine Schwierigkeiten,

```
> plot3d([sin(s)*cos(t), cos(s)*cos(t), sin(t)],
> s = 0.. Pi, t = 0.. 2*Pi, style = patch, scaling = constrained);
```

egibt beispielsweise das Bild einer Kugel.

7.2 Der Einsatz von Maple in der Himmelsmechanik

Die numerische Lösung der Kepler-Gleichung mit Maple ist denkbar einfach. Mit

```
> e := .1; M := .8;
```

und

```
> fsolve( x - e*sin(x) = M, x);
```

erhält diese mit einer entsprechenden Genauigkeit. Mit "Digits := 20;" können wir die Genauigkeit der numerischen Lösung steigern. Auf dem Bildschirm können wir interaktiv die Zahlenwerte für e und M verändern und die Kepler-Gleichung wiederum lösen. Ebenso einfach ist die Fourier-Analyse der Kepler-Bahn. Mit

```
> nord := 6;     bs := s -> series(BesselJ(s,s*x)*2/s, x=0, nord);
```

erhalten wir direkt die Fourier-Koeffizienten von $e \sin E$.

Wenden wir uns den Legendre-Polynomen zu. Diese stehen im Paket "orthopoly" zur Verfügung. Mit

```
> Pl := (l,x) -> 1/(2^l*l!)*diff((x^2-1)^l, x$l);
> Plm := (l,m,x) -> (-1)^m*(1-x^2)^(m/2)*diff(Pl(l,x), x$m);
> No := (l,m) -> sqrt( (2*l+1)/(4*Pi)*(l-m)!/((l+m)!));
> Ylm := (l,m,x) -> No(l,m)*Plm(l,m,x)*exp(1)^(I*m*phi);
```

haben wir die Kugelflächenfunktionen für $l > 0$ selbst definiert. Die Definitionen sind sehr einfach, haben jedoch ihre Probleme, z.B. wenn man differenzieren möchte. Die folgende Sequenz von Definitionen ist dagegen wesentlich leistungsfähiger:

```
> with(orthopoly):
> Plm:=proc(theta,l,m)
> local x,fak;
> if type(l,integer)=true and type(m,integer)= true then
```

```
> x:=cos(theta);
> if m >0 then fak:=subs(y=x,diff(P(l,y),y$m));
> else fak:=subs(y=x,P(l,y)); fi;
> (-1)^m*(sin(theta)^m)*fak;
> fi; end:
```

Als Beispiel berechnen wir $P_3^2(\theta, \phi)$:

```
> Plm(theta,3,2);
```

Die Kugelflächenfunktionen erhält man auf bessere Art und Weise dann so:

```
> Ylm:=proc(theta,phi,l,m)
> local m1;
> m1:=abs(m);
> if m1>l then RETURN(`in Ylm l < | m |`,l,m); fi;
> if type(l,integer) <> true and type(m,integer)<>true then
> RETURN(`in Ylm l and or m not integers`,l,m); fi;
> exp(I*m*phi)*Plm(theta,l,m1); end:
```

Einige Beispiele für diese Routinen:

```
> Ylm(theta,phi,1,0); Ylm(theta,phi,0,0); Ylm(theta,phi,2,2);
```

liefert

$$\cos(\theta) \quad 1 \quad 3\mathrm{e}^{(2I\phi)}\sin(\theta)^2.$$

Wir wollen am Ende dieses Teiles wenigstens noch eine Kugelflächenfunktion graphisch darstellen. Wir definieren:

```
> Ylmre:= proc(theta,phi,l,m);
> m1:=abs(m);
> cos(m*phi)*Plm(theta,l,m1); end:
```

Ein Beispiel für die Berechnung des Realteiles von $Y_{3,3}$ ist etwa

```
Ylmre(theta,phi,3,3);
```

$$-15\cos(3\phi)\sin(\theta)^3.$$

Wir wollen diese Kugelflächenfunktion mit einem Skalierungsfaktor auf die Einheitskugel addieren und in Kugelkoordinaten als Fläche darstellen:

```
> eps:=.05; r:=1.+eps*Ylmre(phi,theta,3,3);
> plot3d(r,theta=0..2*Pi, phi=0..Pi, style=patch, coords=spherical);
```

liefert folgende Zeichnung: Man bemerke, daß bei Maple die Bedeutung der sphärischen Winkel θ und ϕ gerade vertauscht ist.

Abbildung 7: Realteil der Kugelflächenfunktion $Y_{3,3}$.

8 Elemente der Störungstheorie

8.1 Variation der Konstanten

Wir betrachten ein gestörtes Kepler-Problem, bei welchem die Bewegungsgleichung in der Form

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla(U_0 + R) \tag{118}$$

mit

$$U_0 = \frac{GM}{r}$$

geschrieben werden kann. R wird hier als *Störfunktion* bezeichnet und wir wollen annehmen, daß für das betrachtete Problem $|R| \ll |U_0|$. Ohne die Störfunktion R hat man das vollständigintegrable Kepler-Problem vor sich mit

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\boldsymbol{\alpha}, t); \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(\boldsymbol{\alpha}, t). \tag{119}$$

Hier steht $\boldsymbol{\alpha}$ für den kompletten Satz von Bahnelementen, also etwa

$$\boldsymbol{\alpha} = (a, e, I, \Omega, \omega, T).$$

Wir denken uns nun die Lösung von Gleichung (?) dadurch gegeben, daß wir die Bahnelemente $\boldsymbol{\alpha}$ als zeitlich variabel annehmen. Man spricht dann von der Variation der Konstanten. Dann können wir schreiben:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_i}\frac{d\alpha_i}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Will man formal zu jedem Zeitpunkt die Geschwindigkeit in der Bahn aus dem entsprechenden Ausdruck der ungestörten Kepler-Bahn gewinnen, so kann man die *Oskulationsbedingung*

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0 \tag{120}$$

fordern. Die gestörte Bahn wird dann (im gebundenen Fall) durch oskulierende Kepler-Ellipsen beschrieben. Für einen beliebigen Zeitpunkt t beschreiben dann die Elemente $\boldsymbol{\alpha}(t)$ eine oskulierende Ellipse, welche sowohl Ort wie auch Geschwindigkeit der tatsächlichen Bahn zu diesem Zeitpunkt angibt. Nun ist

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) + \dot{\boldsymbol{\alpha}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \nabla(U_0 + R).$$

Mit der Oskulationsbedingung (120) ist aber

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t},$$

d.h.

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t^2} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right) = \nabla U_0 + \nabla R.$$

Wir wollen nun fordern, daß die explizite Zeitabhängigkeit von $\mathbf{r}(\boldsymbol{\alpha}, t)$ durch U_0 gegeben ist, d.h.

$$\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t^2} = \nabla U_0,$$

was uns auf die Relation

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right) = \nabla R \tag{121}$$

führt. Gleichungen (120) und (121) lassen sich nach $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ auflösen. Dies soll im Detail hier nicht vorgeführt werden. Im Falle der Keplerschen Bahnelemente $(a, e, I, \Omega, \omega, T)$ ergeben sich die Störungsgleichungen in der Form:

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= -\frac{2}{n^2 a}\frac{\partial R}{\partial T} \\
\frac{de}{dt} &= -\frac{1}{na^2 e}\left\{\sqrt{1-e^2}\frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{1}{n}(1-e^2)\frac{\partial R}{\partial T}\right\} \\
\frac{dI}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin I}\left\{\cos I\frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\partial R}{\partial \Omega}\right\} \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cot I}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial I} \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin I}\frac{\partial R}{\partial I} \\
\frac{dT}{dt} &= \frac{1-e^2}{n^2a^2e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{2}{n^2 a}\frac{\partial R}{\partial a}.
\end{aligned} \tag{122}$$

Die letzte Gleichung für den Zeitpunkt des Periastrondurchganges, T, können wir auch in der Form

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} \tag{123}$$

schreiben. Um diese Störungsgleichungen anzuwenden muß die Störfunktion R durch die Bahnelemente ausgedrückt werden, d.h.

$$R = R(a, e, I, \Omega, \omega, T).$$

8.2 Ableitung der Störungsgleichungen mittels vektorieller Elemente

8.2.1 Vektorielle Elemente im Kepler-Problem

Im Kepler-Problem galt

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

und die Lösung konnte durch die sechs konstanten Bahnparameter a, e, I, Ω, ω und $M_0 = -nT$ zu jedem Zeitpunkt t festgelegt werden. Die ersten 5 Bahnparameter kann man durch die Vektoren $\mathbf{C}$ und $\mathbf{f}$ charakterisieren (vgl. (15)):

$$\mathbf{C} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}; \quad \mathbf{f} = \left(\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{GM}{r}\right)\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}}.$$

$\mathbf{C}$ ist der spezifische Drehimpulsvektor und $\mathbf{f}$ der Runge-Lenz Vektor, der zum Perizentrum weist. Wir führen nun ein System von drei orthonormierten Einheitsvektoren, $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{k}$ so ein:

- $\mathbf{l}$ liege in der Knotenlinie der Bahn und weise zum aufsteigenden Knoten
- $\mathbf{m}$ liege in der Bahnebene, senkrecht auf $\mathbf{l}$ und
- $\mathbf{k}$ stehe senkrecht auf $\mathbf{l}$ und $\mathbf{m}$ im Sinne eines rechtshändigen Systems.

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß diese drei Vektoren gegeben sind durch:

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} \cos\Omega \\ \sin\Omega \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} -\cos I \sin\Omega \\ \cos I \cos\Omega \\ \sin I \end{pmatrix}; \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} \sin I \sin\Omega \\ -\sin I \cos\Omega \\ \cos I \end{pmatrix}; \tag{124}$$

Mit diesen Vektoren ist:

$$\mathbf{r} = r\,[\mathbf{l}\cos(\omega + f) + \mathbf{m}\sin(\omega + f)].$$

Die beiden Einheitsvektoren in der Bahnebene, $\mathbf{l}$ und $\mathbf{m}$, können wir noch um den Winkel ω so drehen, daß einer in Richtung des Perizentrums weist (der Vektor $\mathbf{P}$):

$$\mathbf{P} = \mathbf{l}\cos\omega + \mathbf{m}\sin\omega; \quad \mathbf{Q} = -\mathbf{l}\sin\omega + \mathbf{m}\cos\omega. \tag{125}$$

Dann können die beiden vektoriellen Elemente $\mathbf{C}$ und $\mathbf{f}$ so schreiben ($p = a(1-e^2)$):

$$\mathbf{C} = (GMp)^{1/2}\,\mathbf{k}; \quad \mathbf{f} = GMe\,\mathbf{P}. \tag{126}$$

Für die Kepler-Bahn gilt:

$$\mathbf{r} = r(\mathbf{P}\cos f + \mathbf{Q}\sin f) \tag{127}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \left(\frac{GM}{p}\right)^{1/2} [-\mathbf{P}\sin v + \mathbf{Q}(\cos v + e)] \tag{128}$$

8.2.2 Störungstheorie mit vektoriellen Elementen

Jetzt sei

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{F}. \tag{129}$$

$\mathbf{F}$ ist hier die Störbeschleunigung. Wir denken uns nun die Lösung durch oskulierende Elemente beschrieben. Anstelle von 5 der 6 oskulierenden Elemente können wir aber genauso gut die vektoriellen Elemente $\mathbf{k}, \mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ verwenden. Die Zeitabhängigkeit von a, e, I, Ω und ω wird dann durch die Zeitabhängigkeit dieser drei vektoriellen Elemente beschrieben. Z.B. hat man dann

$$\frac{d}{dt}\mathbf{k} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \sin I\,\sin\Omega \\ -\sin I\cos\Omega \\ \cos I \end{pmatrix} = \sin I\frac{d\Omega}{dt}\begin{pmatrix} \cos\Omega \\ \sin\Omega \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{dI}{dt}\begin{pmatrix} \cos I\sin\Omega \\ -\cos I\cos\Omega \\ -\sin I \end{pmatrix},$$

bzw.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{k} = \sin I\frac{d\Omega}{dt}\mathbf{l} - \frac{dI}{dt}\mathbf{m}. \tag{130}$$

Analog findet man

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \left(\frac{d\omega}{dt} + \cos I\frac{d\Omega}{dt}\right)\mathbf{Q} + \left(\sin\omega\frac{dI}{dt} - \cos\omega\sin I\frac{d\Omega}{dt}\right)\mathbf{k} \tag{131}$$

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = -\left(\frac{d\omega}{dt} + \cos I\frac{d\Omega}{dt}\right)\mathbf{P} + \left(\cos\omega\frac{dI}{dt} + \sin\omega\sin I\frac{d\Omega}{dt}\right)\mathbf{k} \tag{132}$$

Daraus gewinnen wir sofort die zeitlichen Variationen der beiden vektoriellen Elemente $\mathbf{C}$ und $\mathbf{f}$. Aus

$$\frac{d}{dt}\mathbf{C} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM}{p}}\frac{dp}{dt}\mathbf{k} + \sqrt{GMp}\frac{d}{dt}\mathbf{k}$$

erhalten wir sofort

$$\frac{d}{dt}\mathbf{C} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM}{p}}\frac{dp}{dt}\mathbf{k} + \sqrt{GMp}\left(\sin I \frac{d\Omega}{dt}\mathbf{l} - \frac{dI}{dt}\mathbf{m}\right). \tag{133}$$

Aus

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = GM\frac{de}{dt}\mathbf{P} + GMe\frac{d}{dt}\mathbf{P}$$

folgt dann

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{f}}{dt} = & \quad GM\frac{de}{dt}\mathbf{P} + GMe\left[\left(\frac{d\omega}{dt} + \cos I\frac{d\Omega}{dt}\right)\mathbf{Q}\right. \\ + & \quad \left.\left(\sin\omega\frac{dI}{dt} - \cos\omega\sin I\frac{d\Omega}{dt}\right)\mathbf{k}\right].\end{aligned} \tag{134}$$

Anderseits bestehen Relationen zur Störbeschleunigung $\mathbf{F}$. Aus

$$\mathbf{C} = \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}; \quad \frac{d}{dt}\mathbf{C} = \mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}}$$

folgt nämlich

$$\frac{d}{dt}\mathbf{C} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}. \tag{135}$$

Wegen

$$\mathbf{f} = \dot{\mathbf{r}}\times(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}) - \left(\frac{GM}{r}\right)\mathbf{r}$$

gilt zunächst

$$\frac{d}{dt}\mathbf{f} = \ddot{\mathbf{r}}\times(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}) + \dot{\mathbf{r}}\times(\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}}) - \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{GM}{r}\right)\mathbf{r}\right].$$

Der letzte Term kürzt sich gerade mit den Beschleunigungstermen aus der Kepler-Gleichung weg (ohne Störbeschleunigung ist verschwindet ja der ganze Ausdruck), so daß wir schließlich erhalten:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{f}}{dt} &= \mathbf{F}\times(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}) + \dot{\mathbf{r}}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{F}) \\ &= 2(\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{F}) - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{F})\dot{\mathbf{r}} - (\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})\mathbf{F}.\end{aligned} \tag{136}$$

Jetzt können wir die jeweiligen Gleichungen für die zeitlichen Variationen von $\mathbf{C}$ und $\mathbf{f}$ gleichsetzen. Skalare Multiplikation von $d\mathbf{C}/dt$ mit $\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}$ und von $d\mathbf{f}/dt$ mit $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ liefert fünf unabhängige Störungsgleichungen. Wir wollen zwei davon in Detail ableiten. Wegen $GM = n^2a^3$ gilt

$$\sqrt{GMp} = \sqrt{n^2a^4(1-e^2)} = na^2\sqrt{1-e^2}.$$

Aus (129) entnimmt man dann beispielsweise

$$na^2\sqrt{1-e^2}\sin I\frac{d\Omega}{dt} = \dot{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{l} = (\mathbf{r}\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{l}.$$

Nun ist aber

$$\mathbf{r} = r\left(\mathbf{l}\cos(\omega+f) + \mathbf{m}\sin(\omega+f)\right)$$

und damit wird die rechte Seite gleich

$$r\sin(\omega+f)(\mathbf{m}\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{l} = r\sin(\omega+f)(\mathbf{l}\times\mathbf{m})\cdot\mathbf{F} = r\sin(\omega+f)\,W$$

mit

$$W \equiv \mathbf{k}\cdot\mathbf{F}\,.$$

Hieraus ergibt sich dann

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r\sin(\omega+f)}{na^2\sqrt{1-e^2}\,\sin I}\,W.$$

Projizieren wir die $\dot{\mathbf{C}}$-Gleichung auf $\mathbf{m}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
-na^2\sqrt{1-e^2}\frac{dI}{dt} &= \dot{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{m} = (\mathbf{r}\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{m}\\
&= r\cos(\omega+f)\,(\mathbf{l}\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{m}\\
&= r\cos(\omega+f)\,(\mathbf{m}\times\mathbf{l})\cdot\mathbf{F}\\
&= -r\cos(\omega+f)W.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\frac{dI}{dt} = \frac{r\cos(\omega+f)}{na^2\sqrt{1-e^2}}W.$$

Wir definieren:

$$S \equiv \frac{1}{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}); \qquad T \equiv \frac{1}{r}(\mathbf{k}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{F}.$$

S ist die *radiale* Komponente von $\mathbf{F}$, T die *transversale* Komponente senkrecht zur radialen Richtung in der Bahnebene. W nennt man die *normale* Komponente von $\mathbf{F}$. Wegen

$$\mathbf{r} = r(\mathbf{P}\cos f + \mathbf{Q}\sin f)$$

ist

$$\begin{aligned}
S &= (\mathbf{P}\cdot\mathbf{F})\cos v + (\mathbf{Q}\cdot\mathbf{F})\sin v\\
T &= (\mathbf{Q}\cdot\mathbf{F})\cos v - (\mathbf{P}\cdot\mathbf{F})\sin v.
\end{aligned}$$

Damit lassen sich dann die 5 (der insgesamt 6) Störungsgleichungen so schreiben:

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left(Se\sin v + T\frac{p}{r}\right) \\
\frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left[S\sin v + T(\cos v + \cos E)\right] \\
\frac{dI}{dt} &= \frac{r\cos(v+\omega)}{na^2\sqrt{1-e^2}}W \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r\sin(v+\omega)}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin I}W \\
\frac{d\omega}{dt} &= -\cos I\frac{d\Omega}{dt} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[-S\cos v + T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v\right]
\end{aligned} \tag{137}$$

mit

$$S \equiv \frac{1}{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}); \quad T \equiv \frac{1}{r}(\mathbf{k}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{F}; \quad W \equiv \mathbf{k}\cdot\mathbf{F}. \tag{138}$$

Diese Störungsgleichungen müssen durch eine weitere für M_0 oder T ergänzt werden. Diese folgt aus der Oskulationsbedingung für $d\mathbf{r}/dt$. Aus

$$\mathbf{r} = r(\mathbf{P}\cos f + \mathbf{Q}\sin f)$$

ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{r} = &\quad \dot{r}(\mathbf{P}\cos f + \mathbf{Q}\sin) \\
&+ \quad r(-\mathbf{P}\sin f + \mathbf{Q}\cos f)\frac{df}{dt} \\
&+ \quad r(\dot{\mathbf{P}}\cos f + \dot{\mathbf{Q}}\sin f).
\end{aligned} \tag{139}$$

Einsetzen von $\dot{\mathbf{P}}, \dot{\mathbf{Q}}$ und $\dot{r} = (GM/p)^{1/2} e\sin f$ liefert:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}} = &\quad \sqrt{\frac{GM}{p}}\, e\sin f(\mathbf{P}\cos f + \mathbf{Q}\sin f) \\
&+ \quad r(-\mathbf{P}\sin f + \mathbf{Q}\cos f)\frac{df}{dt} \\
&+ \quad r\left[\mathbf{Q}\left(\frac{d\omega}{dt} + \cos I\frac{d\Omega}{dt}\right) + \mathbf{k}\left(\sin\omega\frac{dI}{dt} - \cos\omega\sin I\frac{d\Omega}{dt}\right)\right]\cos f \\
&+ \quad r\left[-\mathbf{P}\left(\frac{d\omega}{dt} + \cos I\frac{d\Omega}{dt}\right) + \mathbf{k}\left(\cos\omega\frac{dI}{dt} + \sin\omega\sin I\frac{d\Omega}{dt}\right)\right]\sin f\,.
\end{aligned}$$

Soll dies formal so wie im ungestörten Fall aussehen, so muß die rechte Seite dieser Gleichung gemäß (128) gleich

$$\sqrt{\frac{GM}{p}}[-\mathbf{P}\sin f + \mathbf{Q}(\cos f + e)]$$

sein. Die Terme proportional $\mathbf{Q}$ ergeben dann

$$\frac{df}{dt} = \frac{na^2}{r^2}\sqrt{1-e^2} - \left(\frac{d\omega}{dt} + \cos I \frac{d\Omega}{dt}\right).$$

Entsprechend findet man für die exzentrische Anomalie

$$\frac{dE}{dt} = \frac{na}{r} - \frac{r}{a(1-e^2)^{1/2}}\left(\frac{d\omega}{dt} + \cos I \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\sin f}{1-e^2}\frac{de}{dt}\right).$$

Aus der Kepler-Gleichung $M = E - e\sin E$ haben wir dann

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dE}{dt} - \frac{de}{dt}\sin E - e\cos E\frac{dE}{dt} = \frac{r}{a}\frac{dE}{dt} - \sin E\frac{de}{dt}.$$

Im Kepler-Problem galt

$$M = M_0 + n(t-T),$$

woraus sich bei variierenden oskulierenden Elementen ergibt:

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{dM_0}{dt} + \frac{dn}{dt}\cdot(t-T).$$

D.h. es ergäben sich bereits bei der Zeitableitung der mittleren Anomalie zeitproportionale Glieder. Um solche zu vermeiden, definiert man die mittlere Anomalie bei Anwesenheit von Störungen über

$$M = M_0 + \int_{t_0}^{t} n\,dt. \tag{140}$$

Dann ist

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{dM_0}{dt} = \frac{r}{a}\frac{dE}{dt} - \sin E\frac{de}{dt}.$$

In diese Gleichung können wir nun die zeitlichen Ableitungen von E und e einsetzen. Einige Rechnung ergibt schließlich die letzte noch fehlende Störungsgleichung in der Form

$$\frac{dM_0}{dt} = -\sqrt{1-e^2}\left(\frac{d\omega}{dt} + \cos I\frac{d\Omega}{dt}\right) - S\,\frac{2r}{na^2}. \tag{141}$$

Die Gleichungen (137,141) sind die Störungsgleichungen in STW-Form. Um die alte Form, welche auf Lagrange zurückgeht, zu erhalten schreiben wir

$$\mathbf{F} = \frac{\partial R}{\partial \mathbf{r}} \tag{142}$$

mit der Störfunktion $R = R(t, \mathbf{r})$. Es gilt der Zusammenhang:

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = \frac{\partial R}{\partial \mathbf{r}}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} = \mathbf{F}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha}.$$

Aus $r = a(1 - e\cos E)$ folgt etwa $\partial r/\partial a = r/a$ und man findet

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} = \frac{\mathbf{r}}{a}.$$

Dies führt uns auf

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} = \frac{1}{a}\mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = \frac{r}{a}S. \tag{143}$$

Analog dazu ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial e} &= a\left[-\cos v\, S + \sin v\left(1 + \frac{r}{p}\right) T\right] \\
\frac{\partial R}{\partial I} &= rW\ \sin(\omega + v) \\
\frac{\partial R}{\partial \omega} &= rT \qquad\qquad (144) \\
\frac{\partial R}{\partial \Omega} &= rT\ \cos I - r\cos(\omega + v)\sin I\, W \\
\frac{\partial R}{\partial M_0} &= \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(e\sin v\, S + \frac{p}{r}\, T\right).
\end{aligned}$$

Einsetzen dieser Relationen in die STW-Form der Störungsgleichungen ergibt die Lagrangesche Form aus den Gleichungen (93).

Wir wollen hier zwei der Relationen vorrechnen. Aus

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r\sin(\omega + f)}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin I}W$$

und

$$rW\sin(\omega + f) = \frac{\partial R}{\partial I}$$

ergibt sich sofort

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin I}\frac{\partial R}{\partial I}.$$

Es gilt auch

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= \frac{r\cos(\omega + f)\sin I}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin I}W \\
&= (na^2\sqrt{1-e^2}\sin I)^{-1}\left[-\frac{\partial R}{\partial \Omega} + r\cos I\, T\right] \\
&= (na^2\sqrt{1-e^2}\sin I)^{-1}\left[-\frac{\partial R}{\partial \Omega} + \cos I\frac{\partial R}{\partial \omega}\right].
\end{aligned}$$

9 Satellitentheorie

9.1 Bewegung im Quadrupol- (Oktupol-) Feld der Erde

Wir wollen jetzt die Bewegung eines künstlichen Erdsatelliten studieren. Zunächst wollen wir nur die Störungen durch die Erdabplattung (J_2) und den zonalen ($m = 0$) Term mit $l = 3$ studieren.

Die Satellitenkoordinaten in einem quasi-inertialen, geozentrischen seinen (r, θ, ϕ). Oft schreibt man: $\delta = 90°$ und $\lambda = \phi$. Die Bewegungsgleichung des Satelliten im Gravitationsfeld eines axialsymmetrischen Zentralkörpers lautet gemäß (??)

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla U$$

mit

$$U = \frac{GM}{r}\left[1 - \sum_{l=2}^{\infty} J_l \left(\frac{R}{r}\right)^l P_l(\cos\theta)\right] .$$

Hier bezeichnen M und R die Masse und einen mittleren Radius der Erde. J_l sind die zonalen Multipolmomente der Erde. Es ist: $J_2 = 1.1E - 3$, $J_3 = -2.5E - 6$, $J_4 = -1.6E - 6$ etc. Die Störfunktion R ist also in diesem Fall gegeben durch

$$R = U - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{r} \sum_{l=2}^{\infty} J_l \left(\frac{R}{r}\right)^l P_l(\cos\theta) . \tag{145}$$

Beschränken wir uns zunächst auf den Quadrupol (J_2) und den Oktupol (J_3), so erhalten wir nach Einsetzen der Legendre-Polynome P_2 und P_3:

$$R = -\frac{GM}{r}\left[J_2\left(\frac{R}{r}\right)^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) + J_3\left(\frac{R}{r}\right)^3\left(\frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta\right)\right] .$$

Nun ist

$$\cos\theta = \sin I \sin(v + \omega)$$

und damit

$$\begin{aligned} R \quad &= GM\left\{\frac{3}{2}J_2\frac{R^2}{a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\sin^2 I + \frac{1}{2}\sin^2 I \cos 2(v+\omega)\right]\right. &(146)\\ - \quad & \left. J_3\frac{R^3}{a^4}\left(\frac{a}{r}\right)^4\left[\left(\frac{15}{8}\sin^2 I - \frac{3}{2}\right)\sin(v+\omega) - \frac{5}{8}\sin^2 I \sin 3(v+\omega)\right]\sin I\right\} . \end{aligned}$$

Die wahre Anomalie v kann leicht durch die mittlere Anomalie M ausgedrückt werden. Die geschieht mit Hilfe der Relation

$$\frac{dv}{dM} = \frac{a^2}{r^2}\sqrt{1 - e^2}. \tag{147}$$

Dies folgt aus $M = E - e\sin E$, $dM = (1 - e\cos E)dE$ und

$$\frac{dv}{dE} = \frac{dv}{dE}\frac{dE}{dM} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}\frac{dE}{dM} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e\cos E)^2}.$$

Die Größen r/a und v in der Störfunktion sind dann nur noch Funktionen von e und M und sind damit periodisch in der Zeit. Glieder in R, die weder von M noch von ω abhängen, heißen *säkular*. Glieder, die von ω, aber nicht von M abhängen, heißen *langperiodisch*, während diejenigen, die von M abhängen, *kurzperiodisch* genannt werden. Kurzperiodische Terme in R führen auf kurzperiodische Störungen, d.h. auf Störungen, deren Periode der Bahnperiode entspricht. Säkulare Störungen führen zu Änderungen von gewissen Bahnelementen, welche (in erster Ordnung) mit der Zeit linear anwachsen. Langperiodische Störungen werden durch säkulare Änderungen von ω hervorgerufen. In den Argumenten trigonometrischer Funktionen, in welchen das Argument des Perizentrums auftaucht, muß dann die Periheldrehung berücksichtigt werden. Die Periode dieser langperiodischen Störungen ist dann durch $\dot{\omega}_{\text{saek.}}$ gegeben.

Wir wollen jetzt die Störfunktion nach kurzperiodischen, langperiodischen und säkularen Anteilen aufspalten. Um den säkularen Anteil von R zu erhalten, können wir R zeitlich über einen vollen Umlauf mitteln, wobei wir unter der Mittelung die Operation

$$< Q >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q\,dM$$

verstehen wollen. Die hier benötigten Größen lauten:

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^3 \right\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{r}\right)^3 dM = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-e^2}}\int_0^{2\pi}\frac{a}{r}dv \\
&= \frac{1}{2\pi(1-e^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}(1+e\cos v)dv = (1-e^2)^{-3/2}
\end{aligned}$$

$$\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2v \right\rangle = \left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2v \right\rangle = 0.$$

$$\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^4 \cos v \right\rangle = e(1-e^2)^{-5/2}$$

$$\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^4 \sin v \right\rangle = \left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^4 \cos 3v \right\rangle = \left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^4 \sin 3v \right\rangle = 0.$$

Man findet, daß der Oktupol-Term keine säkularen Beiträge aufweist. Dies gilt allgemein für alle ungeraden Multipole. Der säkulare Anteil der Quadrupol-Störfunktion lautet ($\mu = GM$):

$$R_s = \frac{3}{2}\frac{\mu J_2 R^2}{a^3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\sin^2 I\right)(1-e^2)^{-3/2}. \tag{148}$$

Ein langperiodischer Anteil ergibt sich nur aus dem Oktupolbeitrag zu

$$R_l = \frac{3}{2}\frac{\mu J_3 R^3}{a^4}\sin I\left(1-\frac{5}{4}\sin^2 I\right)e(1-e^2)^{-5/2}\,\sin\omega \tag{149}$$

und der kurzperiodische Anteil des Quadrupolbeitrages lautet

$$\begin{aligned} R_p = \quad & \frac{3}{2}\frac{\mu J_2 R^2}{a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\sin^2 I\right)\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^3(1-e^2)^{-3/2}\right]\right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\sin^2 I\cos 2(v+\omega)\right\}. \end{aligned} \tag{150}$$

Wir können diese Störfunktionen nun in die Störungsgleichungen (??) einsetzen, wobei wir $\partial/\partial T$ durch $-n\,\partial/\partial M$ ersetzen wollen; n ist hier wieder die mittlere Bewegung.

9.2 Die kurzperiodischen Störungen des Quadrupols

Wir wollen zunächst die kurzperiodischen Störungen erster Ordnung resultierend aus dem Quadrupol ableiten, d.h. wir setzen zunächst $R = R_p$ und betrachten die Größen a, n, e, I und ω auf der rechten Seite der Störungsgleichungen zunächst als konstant. Eine Ausnahme dazu stellt jedoch die mittlere Bewegung im ersten Term von

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}$$

dar, deren zeitliche Variation (aufgrund der entsprechenden Variation in a) in erster Ordnung berücksichtigt werden muß. Die unabhängige Variable t wollen wir durch die wahre Anomalie f ersetzen gemäß

$$dt = \frac{dt}{dM}\,dM = \frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^2\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}df.$$

Zum Beispiel gilt für die Bahnneigung

$$\Delta I_p = \frac{\cot I}{n^2 a^2(1-e^2)}\int\left(\frac{r}{a}\right)^2\frac{\partial R_p}{\partial\omega}\,df.$$

Setzt man hierin R_p aus (??) ein, so findet man, daß sich der Integrand als endliche trigonometrische Reihe ausdrücken läßt, die man geschlossen integrieren kann:

$$\begin{aligned} \Delta I_p = \quad & -\frac{3}{2}\frac{\mu J_2 R^2}{n^2 a^5(1-e^2)^2}\sin I\cos I \\ & \times\int(1+e\cos f)[\sin(2\omega)\cos(2f)+\cos(2\omega)\sin(2f)]\,df \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{3}{4}\frac{J_2R^2}{p^2}\sin(2I)\left[\frac{1}{2}\sin(2\omega)\sin(2f)-\frac{1}{2}\cos(2\omega)\cos(2f)\right.\\
&\quad\left.+\,e\sin(2\omega)\left(\sin f-\frac{2}{3}\sin^3 f\right)-\frac{2}{3}e\cos(2\omega)\cos^3 f\right]\\
&= \frac{3}{8}\frac{J_2R^2}{p^2}\sin 2I\left[\cos 2(f+\omega)+e\cos(f+2\omega)+\frac{e}{3}\cos(3f+2\omega)\right].
\end{aligned}
$$

Das Integral der letzten Formel ist kein Problem für Maple. Das gewünschte Resultat erhält man mit den Befehlen

```
> g := sin(2*omega)*cos(2*f)+cos(2*omega)*sin(2*f);
> h:= (1 + e*cos(f))*g;
> int(h,f);
```

Für die sechs Bahnelemente ergeben sich so folgende kurzperiodische Störungen aufgrund des Quadrupolmomentes der Erde:

$$
\begin{aligned}
\Delta a_p &= \frac{J_2R^2}{a}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 I\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]\right.\\
&\quad\left.+\frac{3}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin^2 I\cos 2(v+\omega)\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta e_p &= \frac{3}{2}\frac{J_2R^2}{a^2}\frac{(1-e^2)}{e}\left\{\frac{1}{3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 I\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin^2 I\cos 2(v+\omega)\right\}\\
&\quad-\frac{3}{4}\frac{J_2R^2}{ap}\frac{\sin^2 I}{e}\left[\cos 2(v+\omega)+e\cos(v+2\omega)+\frac{1}{3}e\cos(3v+2\omega)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\Delta I_p = \frac{3}{8}\frac{J_2R^2}{p^2}\sin 2I\left[\cos 2(v+\omega)+e\cos(v+2\omega)+\frac{e}{3}\cos(3v+2\omega)\right]
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\Omega_p &= -\frac{3}{2}\frac{J_2R^2}{p^2}\cos I\left[v-M+e\sin v-\frac{1}{2}\sin 2(v+\omega)\right.\\
&\quad\left.-\frac{e}{2}\sin(v+2\omega)-\frac{e}{6}\sin(3f+2\omega)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\omega_p &= \frac{3}{2}\frac{J_2R^2}{p^2}\left\{\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 I\right)(v-M+e\sin v)\right. \\
&+\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 I\right)\left[\frac{1}{e}\left(1-\frac{1}{4}e^2\right)\sin v+\frac{1}{2}\sin 2v+\frac{3}{12}\sin 3v\right] \\
&-\frac{1}{e}\left[\frac{1}{4}\sin^2 I+\left(\frac{1}{2}-\frac{15}{16}\sin^2 I\right)e^2\right]\sin(v+2\omega) \\
&+\frac{e}{16}\sin^2 I\sin(v-2\omega)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{5}{2}\sin^2 I\right)\sin 2(v+\omega) \\
&+\frac{1}{e}\left[\frac{7}{12}\sin^2 I-\frac{1}{6}\left(1-\frac{19}{8}\sin^2 I\right)e^2\right]\sin(3f+2\omega) \\
&\left.+\frac{3}{8}\sin^2 I\sin(4v+2\omega)+\frac{e}{16}\sin^2 I\sin(5v+2\omega)\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e\Delta M_p &= \frac{3}{2}\frac{J_2R^2}{p^2}\sqrt{1-e^2}\left\{-\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 I\right)\right. \\
&\times\left[\left(1-\frac{e^2}{4}\right)\sin v+\frac{e}{2}\sin 2v+\frac{e^2}{12}\sin 3v\right] \\
&+\sin^2 I\left[\frac{1}{4}\left(1+\frac{5}{4}e^2\right)\sin(v+2\omega)-\frac{e^2}{16}\sin(v-2\omega)\right. \\
&-\frac{7}{12}\left(1-\frac{e^2}{28}\right)\sin(3v+2\omega)-\frac{3}{8}e\sin(4v+2\omega) \\
&\left.\left.-\ \frac{e^2}{16}\sin(5v+2\omega)\right]\right\}. \qquad (151)
\end{aligned}
$$

Der zeitliche Mittelwert von $\cos(jv)$ $(j=1,2,\ldots)$ verschwindet nicht, sondern es gilt

$$
\langle\cos jv\rangle=\left(\frac{-e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^j\left(1+j\sqrt{1-e^2}\right).
$$

Daher ergibt sich für die Mittelwerte der kurzperiodischen Störungen

$$
\begin{aligned}
\langle\Delta a_p\rangle &= 0 \\
\langle\Delta e_p\rangle &= \frac{1}{4}\frac{J_2R^2}{p^2}\sin^2 I\left(\frac{1-e^2}{e}\right)\langle\cos 2v\rangle\cos 2\omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \Delta I_p \rangle &= -\frac{1}{8}\frac{J_2 R^2}{p^2}\sin 2I\,\langle \cos 2v \rangle \cos 2\omega \\
\langle \Delta \Omega_p \rangle &= -\frac{1}{4}\frac{J_2 R^2}{p^2}\cos I\,\langle \cos 2v \rangle \sin 2\omega \\
\langle \Delta \omega_p \rangle &= \frac{3}{2}\frac{J_2 R^2}{p^2}\left[\sin^2 I\left(\frac{1}{8}+\frac{(1-e^2)}{6e^2}\langle \cos 2v \rangle\right)+\frac{1}{6}\cos^2 I\,\langle \cos 2v \rangle\right]\sin 2\omega \\
\langle \Delta M_p \rangle &= -\frac{3}{2}\frac{J_2 R^2}{p^2}\sqrt{1-e^2}\sin^2 I\left(\frac{1}{8}+\frac{1+e^2/2}{6e^2}\langle \cos 2v \rangle\right)\sin 2\omega. \qquad (152)
\end{aligned}
$$

9.3 Die säkularen Störungen des Quadrupols

Die säkularen Störungen des Quadrupols erhalten wir aus den Störungsgleichungen mit $R = R_s$. Daraus ergibt sich sofort, daß die große Halbachse, die Exzentrizität und die Inklination keine säkularen Störungen aufweisen:

$$
a_s = e_s = I_s = 0. \qquad (153)
$$

Zum Beispiel gilt für ω:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cot I}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R_s}{\partial I}+\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R_s}{\partial e} \\
&= \frac{3}{2}\frac{\mu J_2 R^2}{a^3(1-e^2)^{3/2}}\left[\frac{\cot I}{na^2\sqrt{1-e^2}}\sin I\cos I\right. \\
&\quad \left. + \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2 e}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\sin^2 I\right)\left(\frac{3}{2}\frac{2e}{(1-e^2)}\right)\right] \\
&= \frac{3}{2}\frac{J_2 R^2}{p^2}n\left(\cos^2 I + 1 - \frac{3}{2}\sin^2 I\right) \\
&= \frac{3}{2}\frac{J_2 R^2}{p^2}n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 I\right).
\end{aligned}
$$

Insgesamt findet man so für die nichtverschwindenden säkularen Störungen des Quadrupols:

$$
\begin{aligned}
\omega_s &= \omega_0 + \frac{3}{2}\frac{J_2 R^2}{p^2}n_s\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 I\right)t \\
\Omega_s &= \Omega_0 - \frac{3}{2}\frac{J_2 R^2}{p^2}\bar{n}(\cos I)t
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} M_s &= M_0 + n_s t \qquad (154) \\ n_s &= n_0 \left[1 + \frac{3}{2}\frac{J_2 R^2}{p^2}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 I\right)(1-e^2)^{1/2}\right]. \end{aligned}$$

Die Größen mit dem Index 0 bedeuten hierbei die Mittelwerte der Epoche, d.h. die Anfangswerte von denen die periodischen Störungen abgezogen wurden. Insbesondere ist n_0 die ungestörte mittlere Bewegung, die mit der ungestörten großen Halbachse durch

$$n_0^2 a_0^3 = \mu$$

verknüpft ist. Während also alle Elemente periodische Störungen unterworfen sind, ändern sich Ω, ω und M auch säkular. Insbesondere präzediert die Bahnebene im Raum, außer bei einer polaren Bahn mit $I = 90°$. Das Perigäum rückt in der Bahnebene vor wenn $I < 63°26'$ ist und geht für $I > 63°26'$ zurück. Die kritische Inklination ist hierbei durch

$$1 - \frac{5}{4}\sin^2 I = 0$$

gegeben. Bei mäßig großer Bahnneigung weist ein erdnaher Satellit säkulare Bewegungen in Ω und ω von der Größenordnung 4° pro Tag auf.

9.4 Die langperiodischen Störungen des Oktupols

Der Oktupol (J_3) verursacht wie der Quadrupol periodische Störungen aller Bahnelemente. Allerdings sind diese wegen $J_3 \sim 10^{-3} J_2$ etwa tausend mal kleiner als diejenigen des Quadrupols. Der Oktupol verursacht darüber hinaus noch langperiodische Störungen aufgrund der säkularen Variation von ω, welche sich aus dem Quadrupol ergibt. Betrachten wir als Beispiel die Inklination. Die Störungsgleichung für I lautet

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\cot I}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \omega}$$

mit $R = R_l$. Zur Berechnung der langperiodischen Störungen müssen wir die durch J_2 hervorgerufene säkulare Störung von ω mit in Betracht ziehen:

$$\frac{d\omega}{dt} = 3\frac{J_2 R^2}{p^2} n \left(1 - \frac{5}{4}\sin^2 I\right).$$

Setzt man in die Störungsgleichung (??) für I R_l aus (?) ein, differenziert nach ω und benutzt die Beziehung $n^2 a^3 = \mu$, so erhält man zunächst

$$\frac{dI}{dt} = \frac{3}{2} n J_3 \left(\frac{R}{a}\right)^3 \frac{e}{(1-e^2)^3}\cos I\left(1 - \frac{5}{4}\sin^2 I\right)\cos\omega.$$

Nun ist

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{d\omega}\frac{d\omega}{dt}$$

oder

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{R}{a}\frac{e}{1-e^2}\cos I \cos\omega \, .$$

Integrieren wir dies, so erhalten wir die langperiodische Störung von I:

$$\Delta I_l = \frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\left(\frac{R}{a}\right)\frac{e}{1-e^2}\cos I \sin\omega. \qquad (155)$$

Man sieht, daß die Periode dieser langperiodischen Störung durch

$$P_l = \frac{2\pi}{\dot{\omega}} \qquad (156)$$

gegeben ist. Entsprechend ergibt sich eine langperiodische Störung der Exzentrizität der Form

$$\Delta e_l = -\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\left(\frac{R}{a}\right)\sin I \sin\omega, \qquad (157)$$

welche benutzt werden kann, um den Wert von J_3 experimentell aus Satellitendaten zu bestimmen.

9.5 Das Problem der atmosphärischen Reibung

Die Bewegung künstlicher Satelliten, die während ihres Umlaufes ständig odre wenigstens in der Umgebung des Perizentrums in geringerer Höhe als etwa 1000 km über der Erdoberfläche verweilen, wird maßgeblich durch den Luftwiderstand beeinflußt. Die Berücksichtigung dieses Einflusses ist sehr kompliziert, da die genaue Kenntnis der Dichte der Hochatmosphäre erforderlich ist und ferner die genaue geometrische Gestalt des Satelliten berücksichtigt werden muß. Die Berechnung eines Absturzes eines Satelliten mit komplexer Gestalt ist eines der schwierigsten Probleme der Satellitentheorie. Die Dichte der Atmosphäre ist aufgrund zahlreicher Gründe variabel: Gezeiten, tägliche Aufheizung, variable Stärke des Sonnenwindes etc. Darüber hinaus rotiert die Atmosphäre mit der Erde.

Wir wollen hier vereinfacht annehmen, daß der Dichteverlauf der Atmosphäre kugelsymmetrisch in Bezug auf den Erdmittelpunkt ist. Dann ist die Luftdichte lediglich eine Funktion des Abstandes r vom Erdmittelpunkt bzw. der Höhe $h = r - R$ über der Erdoberfläche (Meereshöhe). In den untersten Luftschichten ist die mittlere Dichte ρ gut durch eine Exponentialfunktion der Form

$$\rho = \rho_0 e^{-h/H} \qquad (158)$$

darstellbar, in der ρ_0 die Luftdichte am Erdboden und H die *Skalenhöhe* bedeuten. Nach der physikalischen Theorie ist

$$H = \frac{R_G T}{\mu g}, \tag{159}$$

wobei R_G die Gaskonstante bedeutet, T die absolute Temperatur, $g = GM/r^2$ die Schwerebeschleunigung und μ das mittlere Molekulargewicht der Gasteilchen. Die großen Unterschiede der Skalenhöhe zwischen Tag und Nacht in großen Höhen sind vor allem temperaturbedingt. In Meereshöhe ist $H \sim 8\,\mathrm{km}$. Die Abbildungen ??? zeigen die Zunahme von H und der Abnahme der Dichte mit der Höhe h. Für die oberen Schichten (obere Statosphäre, Ionosphäre und Exosphäre) sind diese Werte um etwa 20% variabel.

Abbildung 8: Zur Tangentialkomponenten T' und dem Winkel θ.

Für den Betrag der Störbeschleunigung setzt man üblicherweise an:

$$a_D = \frac{A\rho\, C_D}{2m} \mathbf{v}^2. \tag{160}$$

Hier ist ρ wieder die Luftdichte, A eine mittlere Querschnittsfläche des Satelliten, m dessen Masse, $C_D \sim 2$ ein Reibungskoeffizient und $\mathbf{v}$ die Relativgeschwindigkeit des Satelliten in Bezug auf die Atmosphäre. Werden Rotation der Atmosphäre und etwa vorhandene Luftströmungen vernachlässigt, so ist die Richtung der Störbeschleunigung entgegengesetzt zu $\mathbf{v}$. Nun steht nur für eine Kreisbahn mit $e = 0$ der Geschwindigkeitsvektor senkrecht auf dem Ortsvektor. Aus diesem Grunde müssen wir zunächst die S, T, W-Komponenten der Störbeschleunigung mit der Tangentialkomponent T' in Richtung von $\mathbf{v}$ verknüpfen. Sei N die Normalkomponente, senkrecht auf der Geschwindigkeit so daß die $-N, T', W$-Richtungen ein Rechtssystem bilden (Abb.?). Wir haben also zwei kartesische Systeme mit $x = -N, y = T'$ und $x' = S, y' = T$, die durch eine

Drehung um die gemeinsame z-Achse mit dem Winkel θ ineinander übergeführt werden können. Aus

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta; \quad y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} S &= -N\cos\theta + T'\sin\theta \\ T &= N\sin\theta + T'\cos\theta \end{aligned} \tag{161}$$

mit

$$\tan\theta = \frac{dr}{r\,df}$$

Aus

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}$$

erhalten wir

$$\frac{dr}{df} = \frac{p}{(1+e\cos f)^2} e\sin f = \frac{r^2}{p} e\sin f$$

und damit

$$\tan\theta = \frac{r}{p} e\sin f = \frac{e\sin f}{1 + e\cos f}\,.$$

Eine einfache Rechnung liefert uns daraus

$$\sin\theta = \frac{e\sin f}{\sqrt{1 + 2e\cos f + e^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{1 + e\cos f}{\sqrt{1 + 2e\cos f + e^2}}. \tag{162}$$

Damit lautet z.B. die Störungsgleichung für die große Halbachse a

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}(Se\sin f + \frac{p}{r}T) \\ &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left(-Ne\sin f\cos\theta + T'e\sin f\sin\theta + \frac{p}{r}N\sin\theta + \frac{p}{r}T'\cos\theta\right). \end{aligned}$$

Nun ist

$$e\sin f\cos\theta = \frac{e\sin f(1 + e\cos f)}{\sqrt{1 + 2e\cos f + e^2}} = \sin\theta(1 + e\cos f) = \frac{p}{r}\sin\theta,$$

d.h. die N-Terme heben sich gerade gegeneinander weg und man findet

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}(T'e\sin f\sin\theta + \frac{p}{r}T'\cos\theta) \\ &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}T'\frac{\left[e^2\sin^2 f + (1 + e\cos f)^2\right]}{\sqrt{1 + 2e\cos f + e^2}} \\ &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}T'(1 + 2e\cos f + e^2)^{1/2}\,. \end{aligned}$$

Nun ist

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\frac{GM}{p}}(1 + 2e\cos f + e^2)^{1/2}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\sqrt{\frac{p}{GM}}vT' \\
&= 2\sqrt{\frac{a}{n^2GM}}vT' = \frac{2a^2}{GM}vT' \, .
\end{aligned}$$

Die Berücksichtigung von e in diesem Kapitel selbst für kleine Werte von e soll folgendes Beipiel verdeutlichen: angenommen, e wäre nur 0.01, dann unterscheiden sich bei $a = 7000\,\text{km}$ Perigäums- und Apogäumshöhen um $2ae = 140\,\text{km}$ und das bedeutet ein Verhältnis der Luftdichten von rund 5:1! Die Störungsgleichungen lauten dann mit

$$T' = -a_D = -\frac{1}{2}\left(\frac{AC_D\rho}{m}\right)\mathbf{v}^2 \tag{163}$$

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= -\left(\frac{AC_D\rho}{m}\right)\frac{v^2(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}}{n(1-e^2)^{1/2}} & (164)\\
\frac{de}{dt} &= -\left(\frac{AC_D\rho}{m}\right)\frac{v^2(1-e^2)^{1/2}(e+\cos f)}{na(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}} & (165)\\
\frac{dI}{dt} &= 0 & (166)\\
\frac{d\omega}{dt} &= -\left(\frac{AC_D\rho}{m}\right)\frac{v^2(1-e^2)^{1/2}\sin f}{nae(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}} & (167)\\
\frac{d\Omega}{dt} &= 0 & (168)\\
\frac{dM}{dt} &= n + \left(\frac{AC_D\rho}{m}\right)\frac{v^2(1-e^2)\sin f}{nae(1+e\cos f)}\left[\frac{1+e\cos f+e^2}{(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}}\right]. & (169)
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß in erster Ordnung die Inklination und der Knoten durch die atmosphärische Reibung nicht gestört werden und die Störungen von ω und M sind praktisch periodisch. a und e dagegen erleiden säkulare Störungen. Die Störung von a ist mit einer Abnahme der Gesamtenergie verknüpft und dies obwohl der Satellit mit der Zeit schneller wird. Bei einer Verkleinerung der großen Halbachse um Δa verliert der Satellit eine potentielle Energie von

$\Delta E_{\rm pot} = GMm\Delta a/a^2$ und gewinnt eine kinetische Energie von $E_{\rm kin} = \Delta E_{\rm pot}/2$. Die verlorene Energie wird an die Atmosphäre abgegeben. Gemäß (??) nimmt a stets ab; für $\cos f < -e$ nimmt die Exzentrizität dagegen zu. Dies ist in der Nähe des Apogäums der Fall. Mittelt man jedoch über einen vollen Umlauf, so nimmt die Exzentrizität im Laufe der Zeit auch stetig ab. Mit der Abnahme von a verändert sich auch die Umlaufperiode P. Gemäß des dritten Keplerschen Gesetzes ist

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \frac{3}{2a}\frac{da}{dt}$$

und daher

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{AC_D}{GMm}Pa\rho_p\int_0^P \frac{\rho}{\rho_p}v^3\,dt, \tag{170}$$

wenn ρ_p die Dichte in Perigäumshöhe ist. Aus Beobachtungen von ΔP bei Satelliten mit veschiedenen Flughöhen kann man so das Dichteprofil der Atmossphäre bestimmen.

Wir wollen nun näher auf die Störungen der großen Halbachse und der Exzentrizität eingehen. Es empfiehlt sich dazu, statt der wahren Anomalie f die exzentrische Anomalie E einzuführen. Wir benutzen dazu die Relationen

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = \frac{GM}{a}\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}$$

und

$$\frac{dE}{dt} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}\frac{1}{1-e\cos E};$$

die letztere ergibt sich dabei aus der Kepler-Gleichung, welche abgeleitet einfach

$$\frac{dE}{dt}(1-e\cos E) = n = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$$

lautet. Mit

$$K \equiv \frac{AC_D}{m}$$

hat man

$$T' = -\frac{1}{2}K\rho v^2$$

und damit

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= -\frac{a^2}{GM}K\rho v^3 = -K\rho\frac{v^3}{n}\sqrt{\frac{GM}{a^3}}\frac{a^2}{GM} \\ &= -K\rho\frac{v^3}{n}\left(\frac{GM}{a}\right)^{-1/2} = -K\rho a\left(\frac{GM}{a}\right)^{1/2}\left(\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}\right)^{3/2}.\end{aligned}$$

Wir wollen nun die atmosphärische Dichte um die Perigäumshöhe h_0 (Dichte ρ_0) herum entwickeln und schreiben

$$\rho = \rho_0 e^{-(h-h_0)/H}. \tag{171}$$

Die Skalenhöhe H soll hier als konstant angenommen werden. Setzt man $H =$ const. $= H(r_0)$, so ist der Fehler nicht allzu groß, da der Einfluß der höheren Luftschichten rasch abnimmt. Mit $r = a(1 - e\cos E)$ und $r_0 = a(1 - e)$ können wir im Exponenten $h - h_0 = r - r_0 = ae(1 - \cos E)$ setzen. Setzt man noch den Ausdruck für dE/dt ein so erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dE} &= \frac{da}{dt}\left(\frac{dE}{dt}\right)^{-1} \\
&= -K\rho a\left(\frac{GM}{a}\right)^{1/2}\left(\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{a^3}{GM}}(1-e\cos E) \\
&= -Ka^2\frac{(1+e\cos E)^{3/2}}{(1-e\cos E)^{1/2}}\,\rho\,.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\rho = \rho_0 e^{-ae(1-\cos E)/H} \equiv \rho_0 e^{-z(1-\cos E)}$$

ergibt sich

$$\frac{da}{dE} = -Ka^2\rho_0\frac{(1+e\cos E)^{3/2}}{(1-e\cos E)^{1/2}}\,e^{-z(1-\cos E)} \tag{172}$$

mit

$$z = \frac{ae}{H}.$$

Analog findet man

$$\frac{de}{dE} = -Ka(1-e^2)\rho_0\sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}}\cos E\,e^{-z(1-\cos E)}. \tag{173}$$

Man kann nun die rechten Seiten der Störungsgleichungen nach Potenzen von e entwickeln und $\cos^n E$ durch entsprechende Ausdrücke von $\cos nE$ ausdrücken. Integriert man über einen vollen Umlauf, so erhält man etwa

$$\begin{aligned}
\Delta a &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{da}{dE}\right)dE \\
&= -2\pi Ka^2\rho_0 e^{-z}\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1+e\cos E)^{3/2}}{(1-e\cos E)^{1/2}}e^{z\cos E}dE\,.
\end{aligned}$$

Wir entwickeln jetzt nach Potenzen von e

$$\frac{(1+e\cos E)^{3/2}}{(1-e\cos E)^{1/2}} = 1 + 2e\cos E + \ldots$$

und erhalten wegen

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nE) e^{z\cos E}\, dE$$

$$\Delta a = -2\pi K a^2 \rho_0 e^{-z}\left\{J_0(z) + 2eJ_1(z) + \frac{3}{4}e^2[J_0(z) + J_2(z)] + \ldots\right\}$$

Mit einer Entwicklung der Besselschen Funktionen, gültig für $z > 2$,

$$\begin{aligned} J_n(z) = \quad & \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left[1 - \frac{4n^2 - 1^2}{1!8z} + \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)}{2!(8z)^2}\right. \\ & \left. - \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)}{3!(8z)^3} + \ldots\right] \end{aligned} \tag{174}$$

erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \Delta a = \quad = \quad & -Ka^2\rho_0\sqrt{\frac{2\pi}{z}}\left\{1 + 2e + \frac{3}{2}e^2 + \frac{1}{8z}\left(1 - 6e - \frac{21}{2}e^2\right)\right. \\ & \left. + \frac{9}{128z^2}\left(1 - \frac{10}{3}e + \frac{19}{2}e^2\right) + \ldots\right\}. \end{aligned} \tag{175}$$

Analog gewinnt man

$$\begin{aligned} \Delta e \equiv \int_0^P \frac{de}{dt}\, dt \quad = \quad & -2\pi K a\rho_0(1-e^2)e^{-z}\left\{J_1(z) + \frac{e}{2}[J_0(z) + J_2(z)]\right. \\ & \left. + \frac{e^2}{8}[3J_1(z) + J_3(z)] + \ldots\right\} \\ = \quad & -Ka^2\rho_0\sqrt{\frac{2\pi}{z}}\left\{1 + e - \frac{e^2}{2} - \frac{3}{8z}\left(1 + \frac{7}{3}e + \frac{5}{6}e^2\right)\right. \\ & \left. - \frac{15}{128z^2}\left(1 - \frac{19}{5}e - \frac{17}{2}e^2\right) + \ldots\right\}. \end{aligned} \tag{176}$$

Das Auftreten des Faktors $z^{-1/2} = (H/ae)^{1/2}$ kann man wie folgt deuten: ist H klein so nimmt die Dichte nach oben rasch ab und der Einfluß des Luftwiderstandes ist geringer als bei großem H. Die gleiche Wirkung hat aber auch ein großer Wert von ae, also eine stark exzentrische Bahn. In beiden Fällen verläuft ein Großteil der Bahn in Höhen geringer Dichte. Für $a = 7000\,\mathrm{km}$ und $e = 0.05$ ist die Perigäumshöhe $h_0 = 280\,\mathrm{km}$; $H = 50\,\mathrm{km}$ und $ae = 350\,\mathrm{km}$, so daß sich hier $z \simeq 7$. Für $a = 7800\,\mathrm{km}$ und $e = 0.05$ ist $h_0 = 1040\,\mathrm{km}$, $H = 130\,\mathrm{km}$ und $ae = 390\,\mathrm{km}$, woraus sich $z \simeq 3$ ergibt.

10 Numerische Integrationsverfahren

Die rein numerische Behandlung himmelsmechanischer Probleme erfordert die Benutzung numerischer Algorithmen, welche genau und schnell sind.

Es gibt verschiedene Wege, die Genauigkeit einer gewissen numerischen Methode zu bestimmen. Zum Beispiel kann man zu Testzwecken für einfache analytisch bekannte Bahnen einen maximalen globalen Fehler als größten auftretenden Fehler in den Orts und Geschwindigkeitskoordinaten definieren. Für konkrete Probleme kann man eine der folgenden Methoden verwenden:

- lege anfangs eine obere Toleranzgrenze z.B. für den lokalen Rundungsfehler fest
- überprüfe Abweichungen in der Konstanz von Erhaltungsgrößen wie der Gesamtenergie, falls keine Dissipation im System wirkt
- führe den Rückwärtstest durch.

Die erste Methode wird üblicherweise im Zusammenhang mit automatischer Schwittweitensteuerung verwendet. Beim Rückwärtstest integriert man zunächst von einer Anfangskonfiguration zu einer Endkonfiguration und dann rückwärts in der Zeit wieder zurück, um zu sehen wie gut die Anfangsdaten wieder reproduziert werden können. In einer speziellen Variante dieses Verfahrens dreht man bei der Endkonfiguration die Vorzeichen aller Geschwindigkeiten herum und integriert weiter vorwärts in der Zeit bis zur Anfangskonfiguration.

Ein Maß für die Geschwindigkeit eines numerischen Programmes ist durch die CPU-Zeit gegeben, die während der Ausführung des Programmes verstreicht. Eine andere Möglichkeit besteht einfach darin zu zählen, wie oft diejenige Funktion, welche die Differentialgleichung definiert, aufgerufen wird, da dies üblicherweise die meiste Rechenzeit in Anspruch nimmt. Diese Methode hat den Vorteil maschinenunabhängig zu sein. Die Geschwindigkeit einer konkreten Programmes hängt von vielen Faktoren ab, wie z.B. vom Compiler, der Computersprache, der Effizienz der Programmierung und der Algorithmen etc. Bei aufwendigen Programmen laufen üblicherweise FORTRAN oder C Programme schneller als solche in ALGOL, PASCAL oder BASIC. Bei einfachen Programmen mag unter Umständen die Sprache PASCAL von Vorteil sein.

Üblicherweise betrachtet man in der Himmelsmechanik (ein System von) Differentialgleichungen der Form

$$\dot{z} = f(z, t)$$

oder

$$\ddot{z} = f(z, \dot{z}, t).$$

Hier ist t die Zeitvariable und im allgemeinen wird z ein Vektor mit diversen Komponenten sein. Zu einem numerischen Integrationsverfahren einer deratigen Differentialgleichung gehört im allgemeinen

- eine Diskretisierung der t-Werte an denen z berechnet werden soll. Integriert man von einem Anfangszeitpunkt t_A bis zu einem Endzeitpunkt t_E, so betrachtet man Zeitpunkte $t_0 = t_A, t_1 > t_0, \ldots, t_{i+1} > t_i, \ldots t_N = t_E$. Diese diskreten Zeitpunkte nennt man die *Stützstellen*, ein Intervall $h_i = t_{i+1} - t_i$ die *Schrittweite* zum entsprechenden Zeitpunkt.
- eine Formel, welche aus alten Funktionswerten für z einen neuen berechnet
- eine Abschätzung des Rundungsfehlers
- ein Kriterium nachdem entschieden wird ob der neue Funktionswert akzeptiert werden kann oder nicht und schließlich
- eine Korrekturstrategie, falls der Wert nicht akzeptiert wird.

Eine deratige Strategie werden wir weiter unten beim Runge-Kutta-Nystrom Verfahren von Fehlberg (??) kennenlernen. In vielen Programmen operiert man jedoch mit konstanten Schrittweiten während der Integration in der Zeit und eine Fehler-Kontrolle ist nur durch Variation dieser universellen Schrittweite möglich.

Eine Fehler-Kontrolle gestaltet sich problematisch, wenn das zu integrierende System chaotisches Verhalten zeigt, d.h. wenn anfänglich beliebig benachbarte Ausgangszustände mit der Zeit exponentiell, d.h. proportional zu $\exp(t/t_L)$ voneinander abweichen. Etwa bei der Dynamik von Asteroiden findet man häufig ein derartiges chaotisches Verhalten. Die Möglichkeiten numerischer Integrationen hängen dann im wesentlichen vom betrachteten Zeitintervall ab: ist dieses klein gegen die Liapunovzeit t_L, so wirkt sich das chaotische Verhalten praktisch nicht aus; eine Fehler-Kontrolle der numerischen Integration ist analog zum nicht-chaotischen Fall möglich und der Endzustand kann im Rahmen eines kleinen Fehlers vorhergesagt werden. Anders liegt der Fall, wenn wir uns für das Langzeitverhalten eines chaotischen Systems interessieren. Ist das betrachtete Zeitintervall groß gegen t_L so kann man selbst mit numerischen Integrationen nur noch statistische Aussagen gewinnen, wenn man viele Systemkonfigurationen betrachtet. Typischerweise kann dann ein und dasselbe Computerprogramm verschiedene Ergebnisse liefern, wenn verschiedene Rechenmaschinen zur Integration verwendet werden.

Die meisten numerischen Integrationsverfahren arbeiten mit Differenzen von Funktionswerten. Man unterscheidet zwischen *Vorwärts, Zentralen-* und *Rückwärts-Differenzen.* Für feste Schrittweiten h sind diese so definiert:

$$\Delta f(t) \quad = \quad f(t+h) - f(t) \qquad \text{Vorwärts-Differenz}$$

$$\begin{aligned}\delta f(t) &= f(t+h/2) - f(t-h/2) \qquad &\text{Zentrale-Differenz}\\ \nabla f(t) &= f(t) - f(t-h) \qquad &\text{Rückwärts-Differenz}\end{aligned}$$

Entsprechend sind die Operatoren $\Delta^n, \delta^n, \nabla^n$ definiert über

$$\Delta^n f(t) = \Delta(\Delta^{n-1} f(t)) \qquad \text{etc.}$$

Für äquidistante Stützstellen ist also z.B. ($f_i \equiv f(t_i)$)

$$\begin{aligned}\nabla f_i &= f_i - f_{i-1}\\ \nabla^2 f_i &= f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}.\end{aligned}$$

Wir wollen jetzt einige der gängigen Integrationsverfahren vorstellen.

10.1 Runge-Kutta Verfahren

Beim einfachen Rungen-Kutta Verfahren erhält man den neuen Funktionswert gemäß

$$z_{n+1} = z_n + \sum_{i=1}^{\nu} w_i k_i. \tag{177}$$

Hierin ist ν die Ordnung des Verfahrens, w_i die sogenannten *Gewichtsfaktoren* und die k_i sind von der Form

$$k_i = h \cdot f(t_n + c_i h; z_n + \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij} k_j) \tag{178}$$

für $i = 1, 2, \ldots, \nu$. In den Tabellen ?? - ?? sind die Zahlen

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\nu} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_\nu & a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \cdots & a_{\nu\nu} \\ - & - & - & - & - \\ & w_1 & w_2 & \cdots & w_\nu \end{array}$$

für $\nu = 4$ (RK4), 6 (RK6) und 8 (RK8) angegeben. Zum Beispiel ist also für RK4

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4$$

mit

$$
\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f(t_n, z_n) \\
k_2 &= h \cdot f(t_n + \frac{1}{2}h, z_n + \frac{1}{2}k_1) \\
k_3 &= h \cdot f(t_n + \frac{1}{2}h, z_n + \frac{1}{2}k_2) \\
k_4 &= h \cdot f(t_n + h, z_n + k_3)\ .
\end{aligned}
$$

10.2 Runge-Kutta (Fehlberg) Nystrøm Verfahren

Das von Fehlberg (??) entwickelte Runge-Kutta Nystrøm Verfahren stellt eine Weiterentwicklung der einfachen RK-Verfahren für ein System von Gleichungen der Form

$$\ddot{z} = f(z, \dot{z}, t) \tag{179}$$

mit

$$z(t_0) = z_0; \qquad \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0$$

dar. Im sogenannten RKN($\dot{x}$) $p(p+1)$-Verfahren der Ordnung p hat man

$$
\begin{aligned}
z_{i+1} &= z_i + \dot{z}_i h + h^2 \sum_{\kappa=0}^{\nu_p} c_\kappa f_\kappa \\
\hat{z}_{i+1} &= z_i + \dot{z}_i h + h^2 \sum_{\kappa=0}^{\nu_p+1} \hat{c}_\kappa f_\kappa \\
\dot{z}_{i+1} &= \dot{z}_i + \sum_{\kappa=0}^{\nu_p} \dot{c}_\kappa f_\kappa,
\end{aligned}
\tag{180}
$$

d.h. man kombiniert eine Formel $p-$ter Ordnung für z und $\dot{z}$ mit einer Formel $(p+1)-$ter Ordnung für z, welche der Schrittweitensteuerung imn Rahmen einer Fehlerkontrolle dient. Hier ist

$$
\begin{aligned}
f_0 &= f(z_i, \dot{z}_i, t_i) \\
f_\kappa &= f(z_i + \dot{z}_i \alpha_k h + h^2 \sum_{\lambda=0}^{\kappa-1} \gamma_{\kappa\lambda} f_\lambda, \dot{z}_i + h \sum_{\lambda=0}^{\kappa-1} \beta_{\kappa\lambda} f_\lambda, t_i + \alpha_k h)
\end{aligned}
\tag{181}
$$

Tabelle 3: Die Koeffizienten von RK4

0	–			
1/2	1/2	–		
1/2	0	1/2	–	
1	0	0	1	–
	1/6	1/3	1/3	1/6

Tabelle 4: Die Koeffizienten von RK6

0	–						
$\frac{5-\sqrt{5}}{10}$	$\frac{5-\sqrt{5}}{10}$	–					
$\frac{5+\sqrt{5}}{10}$	$\frac{5}{\sqrt{10}}$	$\frac{5+2\sqrt{5}}{10}$	–				
$\frac{5-\sqrt{5}}{10}$	$\frac{-15+7\sqrt{5}}{20}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{15-7\sqrt{5}}{10}$	–			
$\frac{5+\sqrt{5}}{10}$	$\frac{5-\sqrt{5}}{60}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{15+7\sqrt{5}}{60}$	–		
$\frac{5-\sqrt{5}}{10}$	$\frac{5+\sqrt{5}}{60}$	0	$\frac{9-5\sqrt{5}}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{-5+3\sqrt{5}}{10}$	–	
1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{-55+25\sqrt{5}}{12}$	$\frac{-25-7\sqrt{5}}{12}$	$\frac{5-2\sqrt{5}}{10}$	$\frac{5+\sqrt{5}}{2}$	–
	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

$(\kappa = 1, \ldots, \nu_p + 1)$ und

$$\nu_p = \begin{cases} 7 & p = 5 \\ 9 & p = 6 \\ 12 & p = 7. \end{cases} \tag{182}$$

Die Konstanten $\hat{c}_\kappa$ sind gegeben durch

$$\hat{c}_\kappa = \begin{cases} c_\kappa & \kappa = 0, \nu_p - 1 \\ 0 & \kappa = \nu_p \\ c_{\nu_p} & \kappa = \nu_p + 1. \end{cases} \tag{183}$$

Für $p = 5$ sind die Koeffizienten α, β und γ in Tabelle ?? aufgelistet. Die Koeffizienten c und $\dot{c}$ ergeben sich dann gemäß

$$\begin{aligned} c_\lambda &= \gamma_{\nu_p+1,\lambda} \\ \dot{c}_\lambda &= \beta_{\nu_p+1,\lambda} \end{aligned}$$

für $\lambda = 0, 1, \ldots, \nu_p$.

Den lokalen Rundungsfehler TE kann man durch

$$TE = z_{i+1} - \hat{z}_{i+1} \tag{184}$$

abschätzen um danach folgende automatische Schrittweitensteuerung zu organisieren: halbiere Schrittweite, d.h. $h \to h/2$ falls $max > 1$

verdoppele Schrittweite, d.h. $h \to 2h$ falls $max < (1/2)^{p+1}$

mit

$$max = Max(TE(i)/TOL(i) \cdot z(i)) \quad (i = 1, 2, 3)$$

wenn wir von den drei kartesischen Komponenten $(z(1) = x, z(2) = y, z(3) = z)$ eines Bahnvektors ausgehen. In der letzten Gleichung beschreibt TOL einen vorgegebenen Toleranzvektor für die Variablen.

Tabelle 5: Die Koeffizienten von $RKN(\dot{x})5(6)$

$\alpha_1 = \frac{4}{15},\ \alpha_2 = \frac{2}{5},\ \alpha_3 = \frac{3}{5},\ \alpha_4 = \frac{9}{10},\ \alpha_5 = \frac{3}{4},\ \alpha_6 = \frac{2}{7},\ \alpha_7 = \alpha_8 = 1$
$\beta_{10} = \frac{4}{15},\ \beta_{20} = \frac{1}{10},\ \beta_{21} = \frac{3}{10},\ \beta_{30} = \frac{3}{20},\ \beta_{31} = 0,\ \beta_{32} = \frac{9}{20},$ $\beta_{40} = \frac{9}{40},\ \beta_{41} = \beta_{42} = 0,\ \beta_{43} = \frac{27}{40},\ \beta_{50} = \frac{11}{48},\ \beta_{51} = \beta_{52} = 0,$ $\beta_{53} = \frac{5}{8},\ \beta_{54} = -\frac{5}{48},\ \beta_{60} = \frac{27\,112}{194\,481},\ \beta_{61} = \beta_{62} = 0,$ $\beta_{63} = \frac{56\,450}{64\,827},\ \beta_{64} = \frac{80\,000}{194\,481},\ \beta_{65} = -\frac{24\,544}{21\,609},$ $\beta_{70} = -\frac{26\,033}{41\,796},\ \beta_{71} = \beta_{72} = 0,\ \beta_{73} = -\frac{236\,575}{38\,313},$ $\beta_{74} = -\frac{14\,500}{10\,449},\ \beta_{75} = \frac{275\,936}{45\,279},\ \beta_{76} = \frac{228\,095}{73\,788},$ $\beta_{80} = \frac{7}{81},\ \beta_{81} = \beta_{82} = \beta_{83} = 0,\ \beta_{84} = -\frac{250}{3483},\ \beta_{85} = \frac{160}{351},$ $\beta_{86} = \frac{2401}{5590},\ \beta_{87} = \frac{1}{10}\ .$
$\gamma_{10} = \frac{8}{225},\ \gamma_{20} = \frac{1}{25},\ \gamma_{21} = \frac{1}{25}, \gamma_{30} = \frac{9}{160}, \gamma_{31} = \frac{81}{800},\ \gamma_{32} = \frac{9}{400},$ $\gamma_{40} = \frac{81}{640},\ \gamma_{41} = 0,\ \gamma_{42} = \frac{729}{3200},\ \gamma_{43} = \frac{81}{1600},\ \gamma_{50} = \frac{11\,283}{88064},$ $\gamma_{51} = 0,\ \gamma_{52} = \frac{3159}{88\,064},\ \gamma_{53} = \frac{7275}{44\,032},\ \gamma_{54} = -\frac{33}{688},\ \gamma_{60} = \frac{6250}{194\,481},$ $\gamma_{61} = \gamma_{62} = \gamma_{63} = 0,\ \gamma_{64} = -\frac{3400}{194\,481},\ \gamma_{65} = \frac{1696}{64\,827},\ \gamma_{70} = -\frac{6706}{45\,279},$ $\gamma_{71} = \gamma_{72} = \gamma_{73} = 0,\ \gamma_{74} = \frac{1\,047\,925}{1\,946\,997},\ \gamma_{75} = -\frac{147\,544}{196\,209},$ $\gamma_{76} = \frac{1\,615\,873}{1\,874\,886},\ \gamma_{80} = \frac{31}{360},\ \gamma_{81} = \gamma_{82} = \gamma_{83} = \gamma_{84} = 0,$ $\gamma_{85} = \frac{64}{585},\ \gamma_{86} = \frac{2401}{7800}, \gamma_{87} = -\frac{1}{300}\ .$