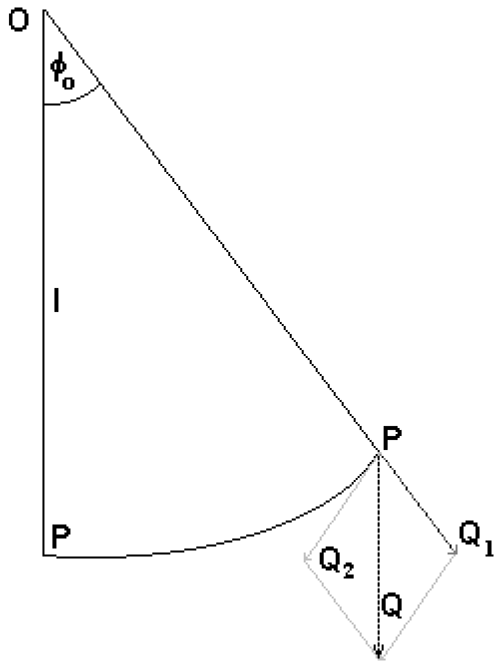
ĆWICZENIE 2.

POMIAR NATĘŻENIA POLA GRAWITACYJNEGO W SIEDLCACH PRZY POMOCY MODELU WAHADŁA MATEMATYCZNEGO

Wprowadzenie

Punkt materialny zaczepiony na nierozciągliwej nici o długości l tworzy układ zwany wahadłem matematycznym. W praktyce używamy modelu składającego się z kulki o niewielkich rozmiarach w porównaniu z długością nici. Wówczas długością wahadła jest odległość środka masy kulki od punktu zaczepienia nitki. Punkt materialny wychylony z położenia równowagi poruszał się będzie po łuku okręgu ruchem niejednostajnie zmiennym. Niech punktem zawieszenia wahadła będzie punkt O , a wahadło wychylamy o kąt ϕ_0 od położenia równowagi.



Rys. 1.

Na punkt P działa siła ciężkości $\vec{Q} = m\vec{g}$,

gdzie: m - masa wahadła, g - natężenie pola grawitacyjnego.

Siła Q rozkłada się na dwie składowe Q_1 i Q_2. Q_1 napina nitkę i jest zrównoważona przez siłę sprężystości ze strony nitki. Ruch wahadła powoduje siła Q_2. Ruch wahadła opisujemy prościej traktując go jako ruch obrotowy wokół osi przechodzącej przez punkt O. Moment siły względem tej osi:

$$\vec{M} = \vec{l} \times \vec{Q}_2 ,$$

gdzie: $\vec{l}$ - ma kierunek wyznaczony przez napiętą nitkę, a zwrot od punktu zaczepienia w kierunku masy *m*. Równanie ruchu wahadła możemy zapisać następująco:

$$\vec{M} = \vec{l} \times \vec{Q}_2 = J\frac{d^2\vec{\phi}}{dt^2}, \qquad /1/$$

gdzie: *J* - oznacza moment bezwładności punktu P względem osi przechodzącej przez punkt O, a ϕ - kąt o jaki w danej chwili wahadło zostało wychylone.
Łatwo zauważyć, że przyspieszenie styczne ma zawsze zwrot przeciwny do kierunku wychylenia. Ponieważ

$$J = m\,l^2$$

a

$$M = -\,m\,g\,l\,sin\phi\ ,$$

to równanie /1/ możemy zapisać w postaci

$$ml^2\frac{d^2\phi}{dt^2} = -mgl\sin\phi\,,$$

lub prościej

$$l\frac{d^2\phi}{dt^2} = -g\sin\phi\,,$$

lub

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\phi = 0\,. \qquad /2\ /$$

Wykorzystaliśmy tutaj fakt, że ruch odbywa się w jednej płaszczyźnie i wystarczy rozważyć moment siły w funkcji kąta wychylenia. Różniczkowe równanie ruchu /2/ w przypadku dowolnego wychylenia nie należy do równań elementarnych.
Pomnóżmy obie strony równania /2/ przez $d\phi\,/\,dt$, wówczas

$$\frac{d\phi}{dt}\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{d\phi}{dt}\frac{g}{l}\sin\phi\,.$$

Scałkujmy je względem czasu, wówczas otrzymamy:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{d\phi}{dt}\right]^2 = \frac{g}{l}\cos\phi + C\,. \qquad /3/$$

Załóżmy, że w chwili $t = 0$, $\phi = \phi_0$ a $d\phi/dt = 0$ (dla t = 0). Po podstawieniu do /3/ dostajemy

$$0 = \frac{g}{l}\cos\phi_0 + C\,,$$

stąd

$$C = -\frac{g}{l}\cos\phi_0\,.$$

Wracając do /3/ mamy:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{d\phi}{dt}\right]^2 = \frac{g}{l}\cos\phi - \frac{g}{l}\cos\phi_0 .$$

Po przekształceniu:

$$\frac{d\phi}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0} .$$

Znak minus bierzemy wtedy, gdy kąt ϕ maleje od ϕ_0 do $-\phi_0$, ponieważ pochodna $d\phi/dt$ wtedy jest ujemna, a znak plus, gdy kąt ϕ rośnie od wartości $-\phi_0$ do ϕ_0 ponieważ pochodna wtedy jest dodatnia. Zatem

$$\frac{d\phi}{dt} = -\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0} ,$$

gdy ϕ zmienia się od ϕ_0 do $-\phi_0$, i

$$\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0} ,$$

gdy ϕ zmienia się od $-\phi_0$ do ϕ_0 .

Rozdzielamy zmienne

$$-\sqrt{\frac{2g}{l}}\frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}} = dt$$

i

$$\sqrt{\frac{2g}{l}}\frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}} = dt .$$

Wykonujemy całkowania

$$-\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\phi_0}^{-\phi_0}\frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}} = t_1 ,$$

oraz

$$\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{-\phi_0}^{\phi_0}\frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}} = t_2 .$$

Łatwo zauważyć, że $t_1 = t_2$, a zatem okres wahań

$$T = t_1 + t_2 = 2\,t.$$

Po podstawieniu

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{-\phi_0}^{\phi_0}\frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}} .$$

Z uwagi na symetrię wychyleń

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g}}\int_{0}^{\phi_0}\frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}} . \qquad /4/$$

Wprowadźmy podstawienie

$$\sin\frac{\phi}{2} = \sin\frac{\phi_0}{2}\sin u . \qquad /5/$$

Po zróżniczkowaniu /5/ mamy

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\phi}{2}d\phi = \sin\frac{\phi_0}{2}\cos u du ,$$

stąd

$$d\phi = \frac{2\sin\frac{\phi_0}{2}}{\cos\frac{\phi}{2}}\cos u du ,$$

$$d\phi = \frac{2\sin\frac{\phi_0}{2}\cos u du}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\phi_0}{2}\sin^2 u}} . \qquad /6/$$

Wiemy, że

$$\cos\phi - \cos\phi_0 = 2\left(\sin^2\frac{\phi_0}{2}\sin^2\frac{\phi}{2}\right). \; /7/$$

Uwzględniając /5/, wyrażenie /7/ możemy zapisać w postaci

$$\cos\phi - \cos\phi_0 = 2\sin^2\frac{\phi_0}{2}\left(1-\sin^2 u\right) = 2\sin^2\frac{\phi_0}{2}\cos^2 u .$$

Wzór /4/ przybierze postać

$$T = 4\sqrt{g\frac{l}{\;}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\phi_0}{2}\sin^2 u}} . \qquad /8/$$

Granice całkowania , jak łatwo zauważyć, otrzymaliśmy z zależności /5/:
1). gdy $\phi = 0$, to $u = 0$, a

2). gdy $\phi = \phi_0$, to $\sin u = \dfrac{\sin\frac{\phi_0}{2}}{\sin\frac{\phi_0}{2}} = 1$, stąd $u = \pi/2$.

Całka występująca we wzorze /8/ jest całką eliptyczną pierwszego rodzaju, przy czym współczynnik $\sin\left(\phi_0/2\right)$ nosi nazwę modułu całki eliptycznej.

Rozwińmy w szereg Newtona

$$\left(1-\sin^2\frac{\phi_0}{2}\sin^2 u\right)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\phi_0}{2}\sin^2 u+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\sin^4\frac{\phi_0}{2}\sin^4 u+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\sin^6\frac{\phi_0}{2}\sin^6 u+\ldots$$

Szereg ten jest zbieżny ponieważ drugi wyraz dwumianu jest mniejszy od jedności. Zauważmy, że

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} du = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots\ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots\ldots 2n} \frac{\pi}{2} . \qquad /9/$$

Korzystając z /9/ i całkując wyraz po wyrazie w granicach od 0 do $\pi/2$ otrzymujemy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\phi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\phi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6 \frac{\phi_0}{2} + \ldots\ldots \right]. \quad /10/$$

Z ostatniej zależności widać, że okres wahadła matematycznego zależy od wychylenia początkowego, zatem wahadło matematyczne nie jest izochroniczne. W pierwszym przybliżeniu okres

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} . \qquad /11/$$

W tym przybliżeniu wahadło matematyczne traktujemy jako izochroniczne. Jest to możliwe wtedy, jeżeli kąt wychylenia ϕ_0 jest bardzo mały, bowiem wyższe wyrazy we wzorze /10/ są małe w porównaniu z wyrazem pierwszym. Przy dokładniejszych pomiarach odstępstwo od izochroniczności należy uwzględnić.

Dla małego wychylenia ϕ_0 $\sin\frac{\phi_0}{2} \approx \frac{\phi_0}{2}$,

gdzie ϕ_0 - mierzymy w mierze łukowej.

Wzór /10/ możemy przybliżyć uwzględniając dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia, ponieważ przy niewielkim ϕ_0 pozostałe są dużo mniejsze od drugiego. Zatem

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\phi_0^2}{16}\right). \qquad /12/$$

Wahadło takie może być wykorzystane do precyzyjnego pomiaru natężenie pola grawitacyjnego, (pomiaru przyspieszenia ziemskiego).Wystarczy zmierzyć długość wahadła l, kąt wychylenia początkowego ϕ_0, oraz okres T, a natężenie pola grawitacyjnego g obliczyć ze wzoru:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \left(1 + \frac{\phi_0^2}{16}\right)^2 . \qquad /13/$$

Wahadło matematyczne, którego okres $T = 2s$ nazywamy wahadłem sekundowym. Długość wahadła sekundowego zależy przede wszystkim od miejsca na Ziemi, w którym to wahadło się waha oraz od jego długości przy założeniu izochroniczności wahań wahadła. Długość wahadła sekundowego obliczamy ze wzoru:

$$l_l = \frac{T_s^2}{4\pi^2} g . \qquad /14/$$

Opis urządzenia

Model wahadła matematycznego składający się z ciężkiej kulki oraz słabo rozciągliwej nici zawieszamy na sztywnym wsporniku zaopatrzonym w kątomierz. Wspornik zawiera dwa haczyki na jednym zawieszamy wahadło sekundowe, a na drugim wahadło badane. Pomiar długości wahadła wykonujemy przy pomocy katetometru z nicią pajęczą.

Pomiar okresu metodą koincydencji.

Na wsporniku zawieszamy dwa wahadła: sekundowe i badane, wychylamy je równocześnie o taki sam kąt i jednocześnie wprawiamy w ruch wahadłowy tak, aby fazy początkowe obu wahadeł były równe. Ponieważ długości obu wahadeł na ogół nie są jednakowe, okresy wahań będą się różniły i drgania nie będą zgodne w fazie. Istnieją jednak momenty kiedy oba wahadła znajdują się w fazie zgodnej (zachodzą wtedy koincydencje). Różnica liczby wahań między kolejnymi koincydencjami jest równa. Przypuśćmy, że wahadło badane porusza się szybciej niż wahadło sekundowe wtedy na n drgań wahadła sekundowego przypada n + 1 (gdy wahadło badane drga wolniej wówczas n - 1) drgań wahadła badanego.

Okres koincydencji t (czas między kolejnymi koicydencjami)wyraża się następująco:

$$t = nT_s = (n \pm 1)T$$

gdzie: T - jest okresem wahadła badanego, a $T_s = 2s$.

Okres drgań wahadła badanego

$$T = \frac{n}{n \pm 1} T_s \ . \qquad /15/$$

Natężenie pola grawitacyjnego (przyspieszenie ziemskie) obliczamy ze wzoru

$$g = \frac{\pi^2 l (n \pm 1)^2}{n^2 T_s^2} \left(1 + \frac{\phi_0^2}{16}\right)^2 . \qquad /16/$$

Przebieg pomiarów

1. Zmierzyć długość wahadła przy pomocy katetometru i suwmiarki ($l = l' + \frac{1}{2}D$, gdzie: l - długość wahadła, l'- długość nici, D - średnica kulki).
2. Wychylić wahadło o kąt ϕ_0, następnie zmierzyć stoperem czas 100 wahnień.
3. Odczytać kąt wychylenia wahadła po 100 (ϕ_{100}) wahnięciach.
4. Obliczyć średni kąt wychylenia $\phi_{śr} = \frac{\phi + \phi_{100}}{2}$. Przyjąć $\phi_0 = \phi_{śr}$.
5. Obliczyć średni okres wahań wahadła.
6. Obliczyć natężenie pola grawitacyjnego korzystając ze wzoru /13/.
7. Powtórzyć czynności 1 - 6 dla innych długości wahadła. Obliczyć średnie natężenie grawitacyjne.
8. Wyznaczyć średni okres wahań posługując się wahałem sekundowym. Spełnić warunek n ≥ 30.
9. Powtórzyć pomiary z punktu 8 dla innych długości wahadła (najlepiej takich jakie były mierzone w pierwszej części ćwiczenia).
10. Obliczyć natężenie pola grawitacyjnego posługując się zależnością /16/.
11. Porównać i ocenić obie metody pomiarów.
12. Przeprowadzić rachunek i dyskusję błędów. Maksymalny błąd pomiaru natężenia grawitacyjnego obliczyć metodą różniczki zupełnej.
13. Przeprowadzić dyskusję wyników.