როგორ დავთვალოთ ზღვარი?

პაატა ივანიშვილი
სანკტ–პეტერბურგის სახელმწიფო უნივერსიტეტის

13 ნოემბერი, 2010

მიმოხილვა

ვიწყებ ფორმალური ტიპის განმარტებებიდან და გადავდივარ არაფორმალურ მსჯელობაში, ეს გამოწვეულია მხოლოდ იმიტომ რომ ფორმალური ტიპის მსჯელობების გაგება სტუდენტისთვის რთულია, მაგრამ ის არაფორმალიზმი რომელიც მე მაქვს მოყვანილი, სინამდვილეში ყველაფერი მკაცრად არის დამტკიცებული, და ზუსტად ამიტომაც მე გადავწყვიტე ამ დამტკიცებებს გვერდით ავუარო და უფრო მარტივ ენაზე აგიხსნათ თუ როგორ შეიძლება დავთვალოთ ზრვრები, მათემატიკური თეორიების მინიმალური ცოდნით

ფორმალიზმი

დავუშვათ გვაქვს მოცემული რაომე სიმრავლე E ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში R, ასევე დავუშვათ რომ სიმრავლე E-ს აქვს ერთი ზღვრული წერტილი მაინც (ზღვრული ნიშნავს რომ ამ წერტილის ნებისმიერი რადიუსის მიდამო შეიცავს უსასრულო რაოდენობის წერტილებს მოცემული E სიმრავლიდან), დავუშვათ ასევე რომ მოცემული გვაქვს ორი ფუნქცია ამ სიმრავლეზე, რომლებიც მნიშვნელობებს ღებულობენ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლედან. $f, g : E \to R$, მაშინ ამბობენ რომ ფუნქცია f შემოსაზღვრულია ფუნქცია g-ს მიმართ მოცემულ x_0 ზღვრულ წერტილში E სიმრავლისა, როდესაც:

$$\exists \delta > 0, \quad \exists C > 0, \quad : |f(x)| \leq C|g(x)|, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad x \neq x_0.$$

ამას მოკლედ ასე წერენ: $f(x) = O(g(x))$ წერტილში x_0. და ამბობენ ასე: $f(x)$ არის O დიდი $g(x)$ -ისა მოცემულ წერტილში. ეხლა მეორე განმარტება: ამბობენ რომ ფუნქცია f უსასრულოდ პატარაა ფუნქცია g-ს მიმართ მოცემულ x_0 ზღვრულ წერტილში E სიმრავლისა, როდესაც:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad : |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad x \neq x_0$$

ამას მოკლედ ასე წერენ: $f(x) = o(g(x))$ წერტილში x_0. და ამბობენ ასე: $f(x)$ არის o პატარა $g(x)$ -ისა მოცემულ წერტილში.

დავუშვათ გვაქვს მოცემული უსასრულოდ წარმოებადი ფუნქცია $f(x)$, მაშინ ნებისმიერ x_0 წერტილის მიდამოში ის განიშლება ტეილორის მწკრივში:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^{2!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

მარტივი ფუნქციებისათვის როდესაც $x_0 = 0$ მიიღება შემდეგი მწკრივები (ტეილორის ფორმულები)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \forall x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \forall x$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + ... \quad , \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k+!)} x^{2k+1}, \quad |x| < 1$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x + ... \quad , |x| < 1$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad |x| < 1$$

$$e^x := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \forall x$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3} - ... = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad |x| < 1$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ..., \quad \forall \alpha, \quad |x| < 1$$

შესაბამისად როდესაც $\alpha = -1$ მაშინ მიიღება ასეთი შესანიშნავი ფორმულა:

$$\frac{1}{1-z} = (1-z)^{-1} = 1 + z + z^2 + z^3 + ...$$

კომენტარი: ამ ფორმულებში x-ის ნაცვლად შეგიძლიათ ჩასვათ ნებისმიერი სხვა რამე რაც ნოლში უდრის ნოლს მაგალითად: x-ის ნაცვლად შეიძლება ჩავსვათ $f(x)$ ისეთი რომ $f(0) = 0$: კონკრეტული მაგალითისთვის: $f(x) = x^{100}$ მიიღება:

$$\sin x^{100} = x^{100} - \frac{(x^{100})^3}{3!} + \frac{(x^{100})^5}{5!} - ... = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x^{100})^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

ანალოგიურად დანარჩენი ფორმულებისათვის. ანუ თუ $g(x_0) = x_0$ მაშინ სამართლიანია ასეთი ტეილორის ფორმულა:

$$f(g(x)) = f(x_0) + f'(x_0)(g(x)-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(g(x)-x_0)^{2!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(g(x)-x_0)^k$$

(უბრალოდ დაწერეთ ტეილორის ფორმულა $f(x)$ ფუნქციისათვის და მერე x-ის ნაცვლად ჩასვით $g(x)$.)

როდესაც თქვენ გინდათ დათვალოთ მოცემული ფუნქციის ზღვარი, არ არის აუცილებელი გამოიყენოთ ეს ფორმულები სრულად, ეს უსასრულო ჯამები, საკმარისია რომელიმე წევრამდე. პრაქტიკაში ხშირად გამოიყენება პირველ წევრამდე ან მეორე წევრამდე ამ ელემენტარული ფუნქციების ტეილორის ფორმულები. მაგრამ ისმება კითხვა: რა ვუყოთ კუდს?

არაფორმალიზმი

აი მაგალითად:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = ?$$

აქ საკმარისია ფუქცია $\sin x$-ის ნაცვლად ჩასვათ მისი ტეილორის მწკრივის მხოლოდ პირველი წევრი (არანულოვანი) , ანუ უდა ვთქვათ შემდეგი სიტყვები: რადგანაც x პატარაა (ნულისაკენ მიისწრაფის), მაშინ ტეილორის ფორმულის თანახმად: $\sin x = x + \text{tail}$ სადაც tail ნიშნავს კუდს (ინგლისურიდან), მაგრამ კუდი ძალიან პატარაა როდესაც $x \to 0$ რადგანაც:

$$\text{tail} = -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$$

მართალია მანდ უსასრულო ჯამი წერია, მაგრამ მაგ ჯამში, ყოველ ახალ წევრში იზრდება ხარისხები,და ამიტომაც ჯამის ყველა წევრებიდან როდესაც $x \to 0$ ყველაზე დიდი არის მისი პირველი წევრი: $-\frac{x^3}{3!}$ ამიტომაც შეგვიძლია ვთქვათ რომ:

$$\text{tail} \approx -x^3\frac{1}{3!} + \text{ small}$$

სადაც small ნიშნავს პატარა დანამატს, მაგრამ ეს დანამატი არანაირად არ მოქმედებს ამ წევრზე $-\frac{x^3}{3!}$, ყველაზე დიდი რაც შეუძლია გააკეთოს ცოტათი შეარყიოს იგი, შესაბამისად მიიღება რომ:

$$\text{tail} \approx Cx^3$$

სადაც C ეს არის კონსტანტა (რაიმე რიცხვი) (რომელიც მიიღება პირველი წევრის კოეფიციენტის და ამ კუდის შეჯამების შედეგად), მაგრამ ჩვენ მაინც

გვინდა დავწეროთ ზუსტი ტოლობა კუდის მიმართ, ამიტომაც მათემატიკოსებმა გამოიგონეს დიდი და პატარა O, რომელიც ფორმალიზმში არის განხილული, და ამის მაგივრად Cx^3 წერენ $O(x^3)$. (ამის Cx^3 მაგივრად იმიტომ რომ ამის დაწერა ზუსტ ტოლობაში არ არის ფორმალურად სწორი, და საერთოდ არ არის სწორი) მაგრამ თქვენ ამ აღვნიშნის მიმართ $O(x^3)$ ფიქრობთ როგორც Cx^3 სადაც C რომელიც რაიმე კონსტანტაა, და არაფერზე არ ახდენს ზეგავლენას. მოკლედ მოვილაპარაკეთ რომ ყველა ფორმულაში კუდის მაგივრად დავწეროთ $O(x^k)$ სადაც k განისაზღვრება იმ ადგილიდან საიდანაც ვიღებთ კუდს. უფრო ნათელი რომ გახდეს ეს ყველაფერი მომყავს შემდეგი მაგალითები:

$$\sin x = x + O(x^3)$$

ან თუ გინდათ უფრო მეტი სიზუსტე შეგიძლიათ ასე დაწეროთ:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$$

და უფრო დიდი სიზუსტისთვის ასე

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7)$$

კითხვაზე: მოცემულ ამოცანებში რომელი სიზუსტით ვწეროთ ფორმულები? (ანუ ეს მწკრივები რომელი ადგილიდან გავწყვიტოთ O დიდით), ამ კითხვაზე თქვენ თვითონ ნახავთ პასუხს როესაც ამოხსნით რამოდენიმე მაგალითს.

ანალოგიურად დანარჩენი ფორმულებისათვის:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + O(x^4)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + O(x^5)$$

$$\arcsin x = x + O(x^3)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x + O(x^2)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + O(x^5)$$

$$e^x := 1 + x + O(x^2)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + O(x^3)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + O(x^2)$$

როდესაც $\alpha = -1$ მაშინ:

$$\frac{1}{1-z} = (1-z)^{-1} = 1 + z + O(z^2)$$

ეხლა გავიაზროთ ამ სიმბოლოს O რამოდენიმე თვისება.
გასაგებია რომ:

$$O(x^k) \cdot O(x^m) = O(x^{k+m})$$

მართლაც, რადგანაც $O(x^k) \approx Ax^k$ სადაც A რაიმე კონსტანტაა. და $O(x^m) \approx Bx^m$ სადაც B რაიმე კონსტანტაა, მაშინ მათი ნამრავლი იქნება:

$$O(x^k) \cdot O(x^m) \approx Ax^k Bx^m = ABx^{k+m} \approx O(x^{k+m})$$

რადგანაც AB ესეც რაიმე კონსტანტაა. ანალოგიურად მოწმდება ასეთი თვისებები:

$$1. \quad x^m \cdot O(x^k) = O(x^{k+m})$$

$$2. \quad \frac{O(x^n)}{x^m} = O(x^{n-m}), \qquad n \geq m$$

ფორმალიზმი

დარწმუნდით რომ

$$(x+O(x^2))^2 = (x+O(x^2))(x+O(x^2)) = x^2+2xO(x^2)+O(x^2)O(x^2) = x^2+O(x^3)+O(x^4) = x^2+O(x^3)$$

მე გადავაგდე წევრი $O(x^4)$ რადგანაც იგი ამ $O(x^3)$ წევრთან შედარებით პატარაა , პატარა x-ებისათვის
ეხლა ისევ დავუბრუნდეთ ჩვენს ამოცანას:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = ?$$

როგორც უკვე ვიცით:

$$\sin x = x + O(x^3)$$

შესაბამისად მიიღება:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x + O(x^3)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{O(x^3)}{x}\right) = \lim_{x \to 0} (1 + O(x^2)) = 1$$

რადგანაც მეორე თვისებიდან გამომდინარეობს რომ :

$$\frac{O(x^3)}{x} = O(x^2)$$

მაგრამ რადგანაც $O(x^2) \approx Cx^2$ მაშინ

$$\lim_{x \to 0} O(x^2) = 0$$

და დაიმახსოვრეთ ერთხელ და სამუდამოდ რომ

$$\lim_{x \to 0} O(x^m) = 0, \quad \forall m \geq 1$$

ეხლა $\sin x$-ის ნაცვლად ავიღოთ მისი უფრო ზუსტი მიახლოება:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$$

მაშინ დარწმუნდით რომ იგივე პასუხი მიიღება, და სრულად არ იყო საჭირო ასეთი უფრო ზუსტი მიახლოების აღება, საკმარისი იყო მისი ტეილორის მწკრივის მხოლოდ პირველი არანულოვანი წევრის აღება. და ბოლოს კიდევ მინდა ვთქვა რომ ჩვენ ასევე შეგვიძლია დავწეროთ: $\sin(x) = O(x)$ მაშინ პასუხი მიიღება: $O(1) = \text{by definition} = const$ მაგრამ ჩვენც ზუსტად ამ კონსტანტის პოვნა გვჭირდება, ამიტომაც ასეთი ტიპის მიახლოების აღება სინუსისათვის არის ძალიან უვარგისი. მოკლედ დავრწმუნდით რომ ყველაზე კარგია ამ შემთხვევაში ასეთი ტიპის მიახლოება.

$$\sin x = x + O(x^3)$$

ამოხსენით მაგალითები:

$$1. \quad \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{1/2} - 1}{x} = ?$$

$$2. \quad \lim_{x \to 0} \frac{(\cos x)^{2/3} - 1}{x^2} = ?$$

$$3. \lim_{n \to \infty} (\sqrt{n + n^2} - n)$$

მითითებები: პირველ ამოცანაში გამოიყენეთ შემდეგი:

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2)$$

მეორე ამოცანაში კი:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) = 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + O(x^4) \right)$$

მაშინ შეეგიძლიათ ისარგებლოთ ფორმულით:

$$(1 + f(x))^{2/3} = 1 + \frac{2}{3} f(x) + O((f(x))^2)$$

როდესაც $f(x)$ პატარაა (საკმარისია რომ $f(0) = 0$), და ამ ფუნქციის ნაცვლად აიღეთ $f(x) = -\frac{x^2}{2} + O(x^4)$

მესამე ამოცანაში: მანდ $n \to \infty$ ამიტომაც ჩვენი ფორმულები არ მუშაობენ, მაგრამ თუ ცოტას დაფიქრდებით მაშინ ყველაფერი გამარტივდება,

ამ წევრიდან: $\sqrt{n+n^2}$ ფრჩხილებს გარეთ გავიტანოთ ყველაზე დიდი, ეს იქნება n^2 (ეს კეთდება იმიტომ რომ რაც დარჩება იყოს პატარა) მაშინ მიიღება:

$$\sqrt{n+n^2} = (n+n^2)^{1/2} = \left(n^2\left(\frac{1}{n}+1\right)\right)^{1/2} = n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2}$$

ეხლა დავხედოთ და მივხდეთ: რა წერია აქ?

$$n(1+\text{small})^{1/2}$$

სადაც $\text{small} = \frac{1}{n}$ და ის არის ოატარა , ანუ მიისწრაფვის ნოლისკენ, მაშინ შეგიძლიათ დაწეროთ რომ:

$$n(1+\text{small})^{1/2} = n(1+\frac{1}{2}\text{small}+O((\text{small})^2)) = n(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}+O(1/n^2)) =$$

$$= n+\frac{1}{2}+O(1/n)$$

და გასაგებია რომ $\lim_{n\to\infty} O(1/n) = 0$

ამ ტექსტის წაკითხვის, გააზრების და სწავლის შემდეგ თუ თქვენ თვლით რომ უკვე შეგიძლიათ ამოხსნათ ნებისმიერი ამოცანა ზღვარზე, მაშინ მე თქვენ გირჩევთ სცადოთ ამოხსნათ ამოცანა ნომერი 3, არნოლდის მათემატიკური ტრიუმფიდან.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{\arcsin(\arctan x)-\arctan(\arcsin x)}$$

ამ ამოცანის ამოხსნა რათქმაუნდა შეიძლება ტეილორის ფორმულებით, მაგრამ ეს ძალიან რთულია ამ შემთხვევაში, ამის გარდა არსებობს კიდევ ორი არასტანდარტული გზა, ერთი გეომეტრიული და ერთი უფრო ანალიტიკური, და ორივე ძალიან მარტივი და პატარაა.