

# **Das EPR – Gedankenexperiment, die Bellsche Ungleichung und der experimentelle Nachweis von Quantenkorrelationen**

Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung,  
dem Landesprüfungsamt für Erste Staatsprüfungen  
für Lehrämter an Schulen vorgelegt von:

Amos Drobisch

Aachen  
21. September 2009

Prof. Dr. H.-J. Kull  
Institut für Theoretische Physik A  
Lehr- und Forschungsgebiet Laserphysik

## Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung.....	3
2. Theorie.....	5
2.1. Verschränkte Zustände.....	5
2.2. Singulettzustand.....	6
2.3. Eigenschaften der Pauli-Spin-Matrizen.....	8
3. Zum EPR-Gedankenexperiment.....	9
3.1. EPR-Disjunktion.....	9
3.2. Das EPR-Gedankenexperiment .....	10
3.3. Struktur und Urheberschaft des EPR-Aufsatzes.....	13
4. Die Bellsche Ungleichung.....	15
4.1. Einführung.....	15
4.2. Verborgene Parameter.....	16
4.3. Voraussagen der klassischen Statistik.....	17
4.4. Der Originalaufsatz von Bell.....	19
4.5. Die CHSH-Ungleichung.....	24
4.5.1 Vorüberlegungen.....	24
4.5.1.1 Detektoreffizienz und Messfehler.....	24
4.5.1.2 Koinzidenzen.....	25
4.5.2 Die CHSH-Ungleichung nach Bell.....	25
4.5.3 Die CHSH-Annahme.....	27
4.6. Die Clauser-Horne-Ungleichung.....	29
4.6.1 Herleitung der Clauser-Horne-Ungleichung.....	29
4.6.2 Vorhersagen der Quantenmechanik für die CH-Ungleichung.....	33
4.7. Zusatzannahmen und die Freedman-Clauser-Ungleichung .....	37
4.7.1 Die CH-Annahme .....	37
4.7.2 Die Freedman-Clauser-Ungleichung.....	38
4.8. Starke und Schwache Ungleichungen.....	39
4.8.1 Starke Ungleichungen.....	39
4.8.2 Schwache Ungleichungen.....	40
4.9. Fazit.....	40
5. Quantenkorrelationen im Experiment.....	41
5.1. Zu Schlupflöchern oder loopholes.....	41
5.1.1 Erstes Schlupfloch – die Detektoreffizienz.....	41
5.1.2 Zweites Schlupfloch – die räumliche Korrelation.....	42
5.1.3 Drittes Schlupfloch – das Lokalitätsproblem.....	42
5.2. Erste Generation (1972-1979).....	44
5.3. Zweite Generation (1980-1985).....	46
5.4. Dritte Generation (seit 1988).....	47
5.4.1 Spontane parametrische Fluoreszenz.....	48
5.4.2 Das Innsbruck-Experiment 1998.....	49
5.4.3 Das Boulder-Experiment 2001.....	50
5.4.4 Das Texas A&M Experiment .....	50
5.5. Potentielle Anwendungsgebiete.....	52
5.6. Einstein vs. Natur: Null zu Eins.....	53
6. Quantenmechanische Korrelationen – Erklärungsversuche.....	55
6.1. Die Leggett-Ungleichung.....	55
7. Zusammenfassung.....	58
A. Anhang.....	59
A.1. Der Originalaufsatz von Einstein, Podolsky und Rosen.....	59
Abkürzungsverzeichnis.....	65
Bildquellen.....	65
Literaturverzeichnis.....	66

## 1. Einleitung

Im Jahr 1995 schlugen Edward S. Fry, Thomas Walther und Shifang Li ein Experiment vor,<sup>1</sup> welches, nach nunmehr einem knappen dreiviertel Jahrhundert, die 1935 von Albert Einstein, Boris Podolsky und Nathan Rosen (EPR) aufgestellte These, die Quantenmechanik könne die Realität nicht vollständig erklären,<sup>2</sup> endgültig zugunsten der Quantenmechanik widerlegen soll. Die Überlegungen von Einstein, Podolsky und Rosen sind auch unter dem Namen *EPR-Paradoxon* oder *EPR-Gedankenexperiment* bekannt. Was wir uns unter einer vollständigen Erklärung der Realität im Sinne von Einstein *et al.* vorzustellen haben, wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit geklärt werden. Eine Ahnung davon soll uns das eingangs erwähnte Experiment von Fry *et al.* vermitteln, welches nun in einer modifizierten Form stark vereinfacht dargestellt wird:

Ein  $\text{Hg}_2$ -Molekül mit Gesamtspin 0 zerfällt, wie auf Abbildung 1 ersichtlich, in zwei Spin-1/2 Hg-Atome. Nach dem Zerfall des  $\text{Hg}_2$ -Moleküls bewegen sich die beiden Quecksilberatome in entgegengesetzte Richtungen auseinander. Wie wir später noch erfahren werden, befindet sich das Teilchenpaar bezüglich seiner Spineinstellung in einem sogenannten *verschränkten* Zustand.

Quantenmechanisch bedeutet dieses, dass, wenn eine Spinmessung entlang einer beliebigen Achse (in Abbildung 1 als  $\vec{z}$ -Achse bezeichnet) von Teilchen 1 das Ergebnis  $S_z^{(1)} = -1/2$  liefert, dann besitzt Teilchen 2 im selben Augenblick mit Sicherheit den Wert  $S_z^{(2)} = +1/2$ , und umgekehrt. Die Entfernung zwischen den beiden Atomen ist dabei absolut unbedeutend. Nun produzieren wir in unserem Experiment kontinuierlich  $\text{Hg}_2$ -Moleküle, welche stetig in zwei Spin-1/2 Hg-Atome zerfallen: Unabhängig davon, wie oft wir solche Messungen wiederholen, besitzt das zweite Teilchen nach erfolgter Spinmessung am ersten Teilchen instantan den entgegengesetzten Wert. Man bezeichnet die beiden Atome als *quantenmechanisch korreliert*.

Angenommen, wir befänden uns zur Spinmessung immer noch am Ort des ersten Atoms und veränderten nach 999 Spinmessungen zufällig die Messrichtung. Wir führen also die 1000. Messung nicht mehr entlang der  $\vec{z}$ -Achse, sondern entlang der  $\vec{x}$ -Achse durch. Als Ergebnis erhielten wir für das erste Teilchen  $S_x^{(1)} = +1/2$ . Führt man nun ebenso an Teilchen 2 eine Messung in  $\vec{x}$ -Richtung durch, erhielten wir exakt den von der Quantenmechanik vorhergesagten Wert  $S_x^{(2)} = -1/2$ .<sup>3</sup> Woher aber kann das zweite Teilchen „wissen“, dass die 1000. Messung zufällig in  $\vec{x}$ -Richtung und

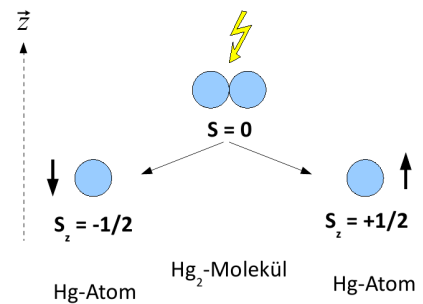


Abbildung 1: Vereinfachte Darstellung des Zerfalls eines Spin-0 Hg-Moleküls in zwei Spin-1/2 Hg-Atome.

1 E. S. Fry, T. Walther, and S. Li, Phys. Rev. A **52**, S. 4381-4395 (1995).

2 A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, Phys. Rev. **47**, S. 777-780 (1935).

3 Der Begründung für dieses Ergebnis wird in Kapitel 4.4. nachgegangen.

nicht mehr in  $\bar{z}$ -Richtung erfolgt ist, wie in den 999 anderen Messungen zuvor? Können die beiden Atome auf irgendeine Art und Weise miteinander kommunizieren, so dass Informationen der Messung von Teilchen 1 zu Teilchen 2 gelangen und sich das zweite Teilchen den quantenmechanischen Vorhersagen entsprechend „einstellen“ kann? Wenn die beiden Messungen raumartig voneinander entfernt stattfinden, stünde diese Vorstellung eines wie auch immer gearteten Einflusses der Messung des ersten auf die des zweiten Teilchens im Widerspruch zur Speziellen Relativitätstheorie.

In dieser Arbeit wird den Deutungsversuchen für dieses Phänomen von Einstein, Podolsky und Rosen nachgegangen, denen zufolge die Quantenmechanik die beschriebene Situation nicht vollständig erklären kann. In ihrem Gedankenexperiment von 1935 stellten Einstein *et al.* diesen vermeintlichen Widerspruch zwischen der Quantenmechanik und der Realität vor. Knapp 30 Jahre später entwickelte der irische Physiker John Stewart Bell 1964 die später nach ihm benannte *Bellsche Ungleichung*, mit deren Hilfe die nachfolgenden Generationen von Wissenschaftlern in die Lage versetzt wurden, den von Einstein *et al.* postulierten Widerspruch experimentell überprüfen zu können.

Die Thematik dieser Arbeit ist hoch interessant, weil es um die Frage geht, ob die Quantentheorie mit ihren Wahrscheinlichkeitsaussagen eine korrekte Beschreibung der Wirklichkeit ist, oder ob andere, noch unbekannte Prinzipien, die uns im weiteren Textverlauf unter dem Namen *verborgene Parameter* begegnen werden, die Abläufe in der Natur determinieren. Beziehungsweise, um es noch kürzer zu fassen:

*Würfelt Gott, oder würfelt er nicht?*

## 2. Theorie

Zu Beginn wollen wir uns zunächst etwas detaillierter mit den bereits in der Einleitung erwähnten Zuständen befassen, da jene *verschränkten* Systeme das Fundament des EPR-Gedankenexperiments bilden.

### 2.1. Verschränkte Zustände

1935 führte Erwin Schrödinger den Begriff der *Verschränkung* als Fachbegriff in die Quantenmechanik ein:

*„Wenn zwei getrennte Körper, die einzeln maximal bekannt sind, in eine Situation kommen, in der sie aufeinander einwirken, und sich wieder trennen, dann kommt regelmäßig das zustande, was ich eben Verschränkung unseres Wissens um die beiden Körper nannte.“<sup>4</sup>*

Ein verschränktes System besteht demzufolge aus mindestens zwei Teilsystemen, die, nachdem sie miteinander in Wechselwirkung standen, wieder voneinander entfernt werden. Wir wollen herausfinden, wie sich solch ein verschränktes System mathematisch beschreiben lässt. Aus der Quantenmechanik ist bekannt, dass sich ein allgemeiner reiner Zustand  $|\psi\rangle$  in einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  der Dimension  $N$  als Linearkombination von Basiszuständen  $|\phi_i\rangle$  schreiben lässt:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N c_i |\phi_i\rangle. \quad (1)$$

Die Wellenfunktionen  $|\psi\rangle$  sind analog zu den Basiszuständen normiert, so dass für die Entwicklungskoeffizienten  $c_i$  folgt:

$$\sum_{i=1}^N |c_i|^2 = 1. \quad (2)$$

Darüber hinaus existieren neben den reinen Zuständen in (1) auch gemischte Zustände. Letztere bestehen aus reinen Zuständen, die miteinander nicht interferieren. Bei gemischten Zuständen addieren sich die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten und nicht, wie in Gleichung (2), die Wahrscheinlichkeitsamplituden. Ein gemischter Zustand lässt sich über den statistischen Operator  $\hat{\rho}$  beschreiben, der auch als Dichtematrix bezeichnet wird:

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^N \lambda_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| \text{ mit } \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \text{ und } Sp(\hat{\rho}) = 1. \quad (3)$$

Der Erwartungswert eines Operators  $\hat{A}$ , sowohl für einen reinen Zustand als auch für ein Gemisch, ist:

$$\bar{A} \equiv \langle\hat{A}\rangle = \langle\Psi_i|\hat{A}|\Psi_i\rangle = Sp(\hat{\rho}\hat{A}). \quad (4)$$

4 E. Schrödinger, Die Naturwissenschaften **23**, S. 823-849 (1935).

Gegeben seien zwei Systeme  $A$  und  $B$ , die sich in den reinen Zuständen  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1$  und  $|\chi\rangle \in \mathcal{H}_2$  mit den Orthonormalbasen  $|n\rangle$  und  $|m\rangle$  befinden:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^N c_n |n\rangle \quad \text{und} \quad |\chi\rangle = \sum_{m=1}^M d_m |m\rangle. \quad (5)$$

Dann kann ein weiterer Zustand  $|\Phi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  für das aus  $A$  und  $B$  zusammengesetzte System über das Tensorprodukt  $|\psi\rangle \otimes |\chi\rangle$  der beiden Teilhilberträume beschrieben werden mit:

$$|\Phi\rangle = \sum_{n,m} c_n d_m |n \otimes m\rangle. \quad (6)$$

Das aus den Zuständen  $|\psi\rangle$  und  $|\chi\rangle$  zusammengesetzte System  $|\Phi\rangle$  wird als *verschränkt* bezeichnet, wenn es von einem Zustandsvektor der Form

$$|\Psi\rangle = \sum_{n,m} b_{nm} |n \otimes m\rangle \quad (7)$$

repräsentiert werden kann. Im Allgemeinen aber lässt sich ein Zustand  $|\Psi\rangle$  nicht als Tensorprodukt  $|\psi\rangle \otimes |\chi\rangle$  schreiben, da es dafür notwendig wäre,  $b_{nm}$  faktorisieren zu können, so dass gilt:

$$b_{nm} = c_n d_m. \quad (8)$$

Ein Zustand, dessen Tensorprodukt sich nicht in dieser Form faktorisieren lässt, wird als *verschränkt* bezeichnet.

Eine Eigenschaft des Tensorprodukts zweier Operatoren  $\hat{A} \otimes \hat{B}$  ist, dass der jeweilige Operator nur auf den zu ihm gehörenden Raum wirkt. Wenn  $\hat{A}$  auf  $\mathcal{H}_1$  definiert ist und  $\hat{B}$  auf  $\mathcal{H}_2$ , gilt entsprechend:

$$(\hat{A} \otimes \hat{B})(|\psi\rangle \otimes |\chi\rangle) = (\hat{A}|\psi\rangle) \otimes (\hat{B}|\chi\rangle). \quad (9)$$

## 2.2. Singulettzustand

Zum Verständnis des EPR-Gedankenexperiments ist es von Bedeutung, sich mit den Besonderheiten des sogenannten *Singulettzustands* vertraut zu machen.

Betrachten wir dazu ein System aus zwei Spin-1/2 Teilchen, deren Spinquantenzahl  $s$  jeweils  $s = 1/2$  beträgt. Jedes der beiden Teilchen besitzt bezüglich einer Raumachse  $2s + 1$  Eigenwerte; eine Eigenschaft, die auch unter dem Begriff *Multiplizität* bekannt ist. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird, dem allgemeinen Gebrauch folgend, die  $\vec{z}$ -Richtung als Quantisierungsachse verwendet. Damit ergeben sich die Eigenwerte der beiden Spin-1/2 Teilchen zu  $s_z = \pm \hbar/2$ . Die entsprechenden Eigenzustände  $|s, s_z\rangle$  sind:

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \equiv |+\rangle \quad \text{und} \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \equiv |-\rangle. \quad (10)$$

Wir wollen herausfinden, wie ein aus zwei Spin-1/2 Teilchen bestehendes System mathematisch beschrieben werden kann. Die Wellenfunktionen  $|\chi_1\rangle$  und  $|\chi_2\rangle$  beider Teilchen befinden sich in einer Superposition der Zustände  $|+\rangle$  und  $|-\rangle$ :

$$\begin{aligned} |\chi_1\rangle &= \lambda_1|+_1\rangle + \mu_1|-_1\rangle, & |\lambda_1|^2 + |\mu_1|^2 &= 1, \\ |\chi_2\rangle &= \lambda_2|+_2\rangle + \mu_2|-_2\rangle, & |\lambda_2|^2 + |\mu_2|^2 &= 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Das Tensorprodukt  $|\chi_1 \otimes \chi_2\rangle$  berechnet sich gemäß seine Definition in (6) zu:

$$|\chi_1 \otimes \chi_2\rangle = \lambda_1 \lambda_2 |+_1 \otimes +_2\rangle + \lambda_1 \mu_2 |+_1 \otimes -_2\rangle + \lambda_2 \mu_1 |-_1 \otimes +_2\rangle + \mu_1 \mu_2 |-_1 \otimes -_2\rangle. \quad (12)$$

Sei  $|\psi\rangle \in \mathcal{K}$  ein beliebiger Zustandsvektor:

$$|\psi\rangle = \alpha |+_1 \otimes +_2\rangle + \beta |+_1 \otimes -_2\rangle + \gamma |-_1 \otimes +_2\rangle + \delta |-_1 \otimes -_2\rangle. \quad (13)$$

Im Allgemeinen lässt sich  $|\psi\rangle$  nicht in der Form von (12) darstellen. Durch einen Parametervergleich von (12) und (13) können wir feststellen, dass ein Tensorprodukt der Bedingung

$$\alpha \delta = \beta \gamma \quad (14)$$

genügen muss. Wenn sich  $|\psi\rangle$  nicht wie in Gleichung (12) schreiben lässt, also wenn die Bedingung (14) von der Wellenfunktion nicht erfüllt wird, dann beschreibt  $|\psi\rangle$  einen *verschränkten* Zustand zweier Spin-1/2 Teilchen. Eine Besonderheit nimmt dabei der folgende Zustand ein:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+_1\rangle |-_2\rangle - |-_1\rangle |+_2\rangle). \quad (15)$$

Wie allgemein üblich, wurde hier die Notation  $|+_1 \otimes -_2\rangle$  durch  $|+_1\rangle |-_2\rangle$  etc. verkürzt. Dass die Wellenfunktion in (15) einen verschränkten Zustand repräsentiert, ist leicht zu erkennen, denn da  $\alpha = \delta = 0$  und  $\beta = -\gamma = 1/\sqrt{2}$  gilt, ist die Bedingung (14) für nicht-verschränkte Systeme wegen  $\alpha \delta \neq \beta \gamma$  nicht erfüllt.

Durch die Addition der beiden Spin-1/2 Operatoren  $\hat{S}^{(1)}$  und  $\hat{S}^{(2)}$  erhalten wir den Operator des Gesamtspins des Systems  $\hat{S} = \hat{S}^{(1)} + \hat{S}^{(2)}$  im Zustand  $|\phi\rangle$ . Die Frage nach dem Gesamtspin von (15) ist gleichbedeutend mit der Berechnung des Eigenwerts  $S$  von  $\hat{S}$  im Singulettzustand. Als Ergebnis findet man:<sup>5</sup>

$$\hat{S}^2 |\phi\rangle = 0, \quad \text{sowie} \quad \hat{S}_z |\phi\rangle = 0. \quad (16)$$

Sowohl der Gesamtspin als auch dessen  $\vec{z}$ -Komponente verschwinden. In der zu (10) analogen Schreibweise lässt sich nun der Eigenzustand  $|S, S_z\rangle$  angeben mit:

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+_1\rangle |-_2\rangle - |-_1\rangle |+_2\rangle). \quad (17)$$

<sup>5</sup> Der Rechenweg kann nachvollzogen werden in Kapitel 10.2 (Addition von Spin 1/2-Operatoren), im Lehrbuch zur Quantenmechanik von Schwabl: F. Schwabl, *Quantenmechanik. Eine Einführung* (Berlin, 2002).

Da der Gesamtspin  $S$  und seine  $z$ -Komponente verschwinden, nennt man diesen verschränkten Zustand aus historischen Gründen *Singulettzustand*. Die anderen drei möglichen Eigenzustände von  $\hat{S}^2$  und  $\hat{S}_z$  für ein System aus zwei Spin-1/2 Teilchen werden als *Tripletzustände* bezeichnet. Diese aber sind hier nicht von Interesse und werden nur der Vollständigkeit halber angegeben:

$$\begin{aligned} |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{|+\rangle_1|-\rangle_2 + |-\rangle_1|+\rangle_2\}, \\ |1, +1\rangle &= |+\rangle_1|+\rangle_2, \\ |1, -1\rangle &= |-\rangle_1|-\rangle_2. \end{aligned} \quad (18)$$

### 2.3. Eigenschaften der Pauli-Spin-Matrizen

Im weiteren Textverlauf werden Rechnungen mit Pauli-Spin-Matrizen durchgeführt. Deshalb sind an dieser Stelle einige ihrer wichtigen Eigenschaften aufgelistet. Die Matrixelemente der Pauli-Spin-Matrizen  $\vec{\hat{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$  lauten:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Dabei sind nachstehende Beziehungen bei der Produktbildung zu beachten:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y &= i \hat{\sigma}_z; \quad \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_z = i \hat{\sigma}_x; \quad \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_x = i \hat{\sigma}_y, \\ \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_k + \hat{\sigma}_k \hat{\sigma}_i &= 2 \hat{I} \delta_{ik}, \\ \sigma_i^2 &= \hat{I}, \quad \sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (20)$$

Für die Spurbildung sind folgende Eigenschaften von Bedeutung:

$$\begin{aligned} Sp(\sigma_i) &= 0, \\ Sp(\sigma_i \sigma_j) &= 2 \delta_{ij}, \\ Sp(\sigma_i \sigma_j \sigma_k) &= 2i \epsilon_{ijk}. \end{aligned} \quad (21)$$



### 3. Zum EPR-Gedankenexperiment

#### 3.1. EPR-Disjunktion

In ihrem berühmten Aufsatz *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*<sup>6</sup> gehen Einstein *et al.* 1935 zunächst ganz allgemein der Frage nach, wann eine physikalische Theorie erfolgreich sei und schlagen zur Beantwortung dieser Frage zwei Kriterien vor:<sup>7</sup>

1. Korrektheit der Theorie.
2. Vollständige Beschreibung durch die Theorie.

Nur in den Fällen, in denen beide Kriterien zutreffen, sei eine Theorie zufriedenstellend.<sup>8</sup> Das erste Kriterium, die Korrektheit einer Theorie, könne überprüft werden, indem eine Korrespondenz ihrer Vorhersagen mit den menschlichen Erfahrungen festgestellt werde.<sup>9</sup> Diesen Part würden in der Physik Messungen und Experimente übernehmen.<sup>10</sup> Einstein *et al.* betrachten deshalb vor allem das zweite Kriterium und beziehen es explizit auf die Quantenphysik. Dafür stellen sie zunächst eine notwendige Bedingung für den Terminus *Vollständigkeit* auf. Dieses *Vollständigkeitskriterium* lautet:

*„Every element of the physical reality must have a counterpart in the physical theory.“<sup>11</sup>* (22)

Diese Definition ist verständlich und plausibel: Wenn ein „element of physical reality“ existiert, das in der Theorie nicht vorkommt und von ihr nicht beschrieben werden kann, dann reicht die Theorie offensichtlich nicht aus, um die Realität vollständig zu beschreiben. Nun beinhaltet das Vollständigkeitskriterium eine weitere wichtige Begrifflichkeit, die es zu definieren gilt. Was Einstein *et al.* meinen, wenn sie von einem *Element der Realität* reden, fassen sie im *Realitätskriterium* zusammen:

*„If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e., with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity.“<sup>12</sup>* (23)

Eine physikalische Größe ist also dann *real*, wenn wir mit Sicherheit das Ergebnis einer Messung dieser Größe voraussagen können, ohne sie dafür messen zu müssen.

---

6 A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, S. 777-780 (1935). In den weiteren Ausführungen verwende ich die folgende Notation, um auf konkrete Stellen im Aufsatz von Einstein *et al.* zu verweisen: EPR, S. 777, 1, 11/12. Damit gemeint ist ein Verweis auf die 11. und 12. Zeile in der 1. Spalte auf Seite 777. Der Aufsatz von Einstein *et al.* ist mit einer von mir vorgenommenen Zeilennummerierung im Anhang zu finden.

7 EPR, S. 777, 1, 11/12.

8 EPR, S. 777, 1, 13-16.

9 EPR, S. 777, 1, 16-18.

10 EPR, S. 777, 1, 19-21.

11 EPR, S. 777, 2, 3-5.

12 EPR, S. 777, 2, 17-21.

Demzufolge ist eine physikalische Theorie nach (22) vollständig, wenn sich mit ihr alle diese real existierenden Größen beschreiben lassen.

Die größte Bedeutung bei der Verbindung zwischen der Realität und ihrer vollständigen quantenmechanischen Beschreibung kommt der Wellenfunktion zu:

*„In quantum mechanics it is usually assumed that the wave function does contain a complete description of the physical reality of the system in the state to which it corresponds.“<sup>13</sup>*

Nun verweisen Einstein *et al.* auf das der Quantenmechanik inhärente Unbestimmtheitsprinzip: Wenn die Operatoren zweier physikalischer Größen  $\hat{P}$  und  $\hat{Q}$  nicht miteinander kommutieren, also  $[\hat{P}\hat{Q}] \neq [\hat{Q}\hat{P}]$ , dann schließt die exakte Kenntnis der einen Größe eine ebensolche Kenntnis der anderen aus, so dass beide Größen gleichzeitig keine scharfen Werte besitzen können.<sup>14</sup>

Aus dem Vollständigkeitskriterium (22), dem Realitätskriterium (23) und dem Unbestimmtheitsprinzip folgern Einstein *et al.* ihre *EPR-Disjunktion*:

1. Entweder die quantenmechanische Beschreibung der Realität über die Wellenfunktion ist unvollständig, oder
2. die physikalischen Größen  $P$  und  $Q$  besitzen nicht gleichzeitig Realität, wenn ihre entsprechenden Operatoren nicht miteinander kommutieren. (24)

Wenn  $P$  und  $Q$  gleichzeitig Realität und damit scharfe Werte besäßen, müsste eine vollständige Theorie der Quantenmechanik gemäß (22) diese Werte vorhersagen können. Das Unbestimmtheitsprinzip verbietet dieses jedoch für nicht miteinander kommutierende Operatoren. Daraus folgt, dass die Quantenmechanik unvollständig sein muss, wenn sie zeigen ließe, dass zwei nicht miteinander kommutierende Operatoren gleichzeitig scharfe Werte besitzen, da sie einen solchen Fall eben nicht beschreiben kann. Dieses ist auch das Ziel von Einstein, Podolsky und Rosen: Sie beabsichtigen zu beweisen, dass die Annahme der Kopenhagener Interpretation der Quantenmechanik, die in der Wellenfunktion enthaltenen Informationen korrespondierten exakt mit dem, was ohne Störung am System gemessen werden könne,<sup>15</sup> zusammen mit dem Realitätskriterium einen Widerspruch erzeugt.<sup>16</sup>

### 3.2. Das EPR-Gedankenexperiment

Einstein *et al.* bedienen sich für ihren Beweis eines Gedankenexperiments.<sup>17</sup> Darin existieren zwei Teilchen, die während einer Zeitspanne von  $t=0$  bis  $t=T$  miteinander

<sup>13</sup> EPR, S. 778, 2, 44-47.

<sup>14</sup> EPR, S. 778, 2, 20-25.

<sup>15</sup> Eine Störung am System ist nach der Kopenhagener Interpretation gleichbedeutend mit der Zustandsänderung der Wellenfunktion.

<sup>16</sup> EPR, S. 779, 1, 1-7.

<sup>17</sup> Die folgenden Ausführungen werden nicht - wie bislang geschehen - einzeln belegt. Die zusammenhängende mathematische Argumentation ist zu finden bei: EPR, S. 779-780.

der in Wechselwirkung stehen und anschließend, unter Einhaltung des im Folgenden formulierten *Lokalitätsprinzips*, wieder voneinander getrennt werden:

“[...] after which time (gemeint ist  $t > T$ , d. Verf.) we suppose that there is no longer any interaction between the two parts.”<sup>18</sup> (25)

Alle Veränderungen am zweiten Teilchen können also nicht in Folge von Eingriffen am System des ersten Teilchens geschehen, und umgekehrt.<sup>19</sup> Für die Konjunktion von (23) und (25) wird der Begriff *lokaler Realismus* verwendet. Mithilfe der Quantenmechanik können wir nun den Zustand  $\Psi$  des aus den beiden Teilchen zusammengesetzten Systems nach ihrer Wechselwirkung angeben. Er lautet:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(2\pi i/h)(x_1 - x_2 + x_0)p} dp. \quad (26)$$

Darin steht  $x_0$  für eine Konstante. Der Zustand (26) lässt sich nach den Eigenfunktionen  $u_p(x_1) = e^{(2\pi i/h)p x_1}$  des Impulsoperators  $\hat{P}_1 = (h/2\pi i)\partial/\partial x_1$  des ersten Teilchens mit dem entsprechenden Eigenwert  $p_1 = p$  entwickeln:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_p(x_2) u_p(x_1) dp. \quad (27)$$

Die Funktionen

$$\psi_p(x_2) = e^{-(2\pi i/h)(x_2 - x_0)p} \quad (28)$$

sind gleichzeitig Eigenfunktionen von  $\hat{P}_2 = (h/2\pi i)\partial/\partial x_2$  mit dem zugehörigen Eigenwert  $p_2 = -p$  für den Impuls des zweiten Teilchens.

Alternativ können wir (26) auch nach den Eigenfunktionen  $v_x(x_1) = \delta(x_1 - x)$  des Ortsoperators  $\hat{Q}_1 = \hat{x}_1$  mit dem Eigenwert  $x_1 = x$  entwickeln:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_x(x_2) v_x(x_1) dx. \quad (29)$$

Darin sind die Funktionen

$$\phi_x(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(2\pi i/h)(x - x_2 + x_0)p} dp = h \delta(x - x_2 + x_0) \quad (30)$$

wiederum Eigenfunktionen von  $\hat{Q}_2 = \hat{x}_2$  mit dem Eigenwert  $x_2 = x + x_0$ . Wir können also  $|\Psi\rangle$  in (26) über die Eigenfunktionen von  $\hat{P}$  und  $\hat{Q}$  ausdrücken.

Damit ist dieser sogenannte *EPR-Zustand* zumindest in zweierlei Hinsicht speziell: Zum einen beschränken Einstein *et al.* die Superposition der beiden Teilchen auf die Fälle, bei denen der Gesamtimpuls des zusammengesetzten Systems verschwindet:  $p_1 + p_2 = 0$ . Zum anderen besitzen die im Raum separierten Teilchen aufgrund der Deltafunktion  $\delta(x - x_2 + x_0)$  in (30) einen konstanten Abstand zueinander, wobei die

<sup>18</sup> EPR, S. 779, 1, 10-12.

<sup>19</sup> Damit ist vor allem auch gemeint, dass die zwei weit voneinander entfernten Teilchen instantan keinen Einfluss aufeinander ausüben können, weil eine solche Situation die Spezielle Relativitätstheorie verletzen würde.

Koordinaten  $x$  und  $x_2$  einzeln nicht weiter spezifiziert sind. In der Dirac-Notation können wir deshalb den EPR-Zustand mit  $x = x_1$  in der Orts- und Impulsdarstellung folgendermaßen angeben:<sup>20</sup>

$$|\Psi\rangle_{EPR} = \sum_{x_1, x_2} \delta(x_1 - x_2 + x_0) |x_1\rangle |x_2\rangle = \sum_{p_1, p_2} \delta(p_1 + p_2) |p_1\rangle |p_2\rangle. \quad (31)$$

Somit haben wir das verschränkte Zweiteilchen-System sowohl in Form einer Superposition der Impulseigenzustände als auch der Ortseigenzustände beschrieben. Obwohl die beiden Teilchen, dem Lokalisierungsprinzip in (25) folgend, nicht mehr miteinander wechselwirken können, befindet sich die Superposition nur in den durch die Deltafunktionen erlaubten Eigenzuständen. Diese Besonderheit des EPR-Zustands resümiert Y. Shih sehr prägnant mit den folgenden Worten:

*“The values of the momentum and the position for neither interaction-free single subsystem is determined. However, if one of the subsystems is measured to be at a certain value of momentum and/or position, the momentum and/or position of the other one is 100% determined, despite the distance between them.”<sup>21</sup>*

Damit haben Einstein, Podolsky und Rosen gezeigt, dass sich der EPR-Zustand in (26) gleichzeitig über die Eigenfunktionen  $\psi_p$  und  $\phi_x$  ausdrücken lässt. Das bedeutet weiter, dass wir nach einer Messung des Impulsoperators  $\hat{P}_1$  (beziehungsweise des Ortsoperators  $\hat{Q}_1$ ) am ersten Teilchen mit Sicherheit entweder den Impuls oder Ort des zweiten Teilchens bestimmen könnten, ohne dieses dabei zu stören. Im ersten Fall wäre der Eigenwert  $p_1$  ein Element der Realität, im zweiten Fall  $x_1$ . Damit wüssten wir aber gleichzeitig auch, dass das zweite Teilchen den Impuls  $-p_1$  besitzt, beziehungsweise sich an der Position  $x_1 + x_0$  befindet. In einer solchen Konstellation hätten wir, in Übereinstimmung mit dem Realitätskriterium in (23), zwei simultane Elemente der Realität: Aufgrund der Messung einer der beiden Größen  $\hat{P}_1$  oder  $\hat{Q}_1$  am ersten Teilchen, können wir dem zweiten Teilchen, da es - bedingt durch das Lokalisierungsprinzip in (25) - nicht „wissen“ kann, welche Größe gerade von uns gemessen wurde, zwei unterschiedliche Wellenfunktionen  $\psi_p$  und  $\phi_x$  zuordnen, die derselben Realität angehören.<sup>22</sup> Nun aber schließt das Unbestimmtheitsprinzip die exakte Kenntnis der Eigenwerte für nicht kommutierende Operatoren aus und für den Impuls- und Ortsoperator gilt bekanntermaßen die Beziehung  $[\hat{P}, \hat{Q}] = \hbar/2\pi i$ .

Einstein *et al.* nehmen an, dass die Wellenfunktion eine vollständige Beschreibung der Realität ist. Da für den speziell von ihnen ausgewählten Zustand eine Messung am ersten Teilchen mit Sicherheit den korrespondierenden Wert am zweiten Teilchen festlegt, wobei die Messung keinen Einfluss auf das zweite Teilchen ausüben

<sup>20</sup> Y. Shih, *The Physics of 2+1+1*, in: *Quantum Reality, Relativistic Causality, and Closing the Epistemic Circle. Essays in Honour of Abner Shimony* (edited by W. C. Myrvold & J. Christian), The Western Ontario Series in Philosophy of Science **73**, S. 164 (2009).

<sup>21</sup> Shih (2009), S. 164.

<sup>22</sup> Im vorliegenden Fall würde sich der EPR-Zustand auf eine der beiden Eigenfunktionen zweier Operatoren reduzieren.

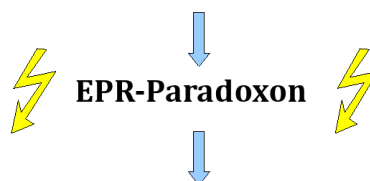
kann, besitzt das zweite Teilchen *im Prinzip* zwei Elemente der Realität gleichzeitig. Dieses würde im Fall des Impuls- und Ortsoperators zu einer Verletzung des Unbestimmtheitsprinzips führen. Einstein *et al.* zeigen also, dass zwei physikalische Größen nicht kommutierender Operatoren gleichzeitig Realität besitzen können, was die Quantenmechanik nicht beschreiben kann, im konkreten Fall sogar ausschließt: scheinbar ein *Paradoxon*! Die EPR-Disjunktion (24) aufgreifend schließen sie, nachdem sie mit ihrem Gedankenexperiment gezeigt haben, dass der von der Disjunktion beschriebene zweite Fall falsch ist:

*„We are thus forced to conclude that the quantum-mechanical description of physical reality given by wave functions is not complete.“<sup>23</sup>*

Auf Abbildung 2 wird die Argumentation von Einstein *et al.* zum besseren Verständnis der Struktur des EPR-Gedankenexperiments noch einmal dargestellt.

#### **EPR-Annahmen:**

- |  |
|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. lokaler Realismus</li> <li>2. Korrektheit der Quantenmechanik</li> <li>3. Vollständigkeit der Quantenmechanik</li> </ol> |
|--|



**EPR-Schlussfolgerung:**  
wahrscheinlich ist die 3. Annahme falsch

*Abbildung 2: Argumentationsschema des EPR-Gedankenexperiments zum Beweis der Unvollständigkeit der Quantenmechanik.*

### **3.3. Struktur und Urheberschaft des EPR-Aufsatzes**

Streng genommen ist der EPR-Aufsatz aufgrund seiner Auseinandersetzung mit der Vollständigkeit einer physikalischen Theorie dem Bereich der Philosophie zuzuordnen.<sup>24</sup> Es ist eine wissenswerte Tatsache, dass, während die Frage nach Vollständigkeit in der klassischen Physik wohl nie aufgekommen ist - ja selbst die Frage, ob eine physikalische Theorie überhaupt vollständig sein müsse, wohl nie diskutiert wurde - mit der Entstehung der Quantenmechanik Überlegungen zur Vollständigkeit einer Theorie Einzug in den wissenschaftlichen Diskurs hielten.<sup>25</sup>

<sup>23</sup> EPR, S. 780, 2, 22-25.

<sup>24</sup> M. Jammer, *The EPR Problem in its Historical Development*, in: *Symposium on the Foundation of Modern Physics. 50 years of the Einstein-Podolsky-Rosen Gedankenexperiment* (edited by P. Lahti & P. Mittelstaedt), S. 130 (Singapore, 1985).

<sup>25</sup> Jammer (2009), S. 131.

Wenn die formale Herleitung der Unvollständigkeit der Quantenmechanik undurchsichtig erscheint, dann ist dieses nichts Außergewöhnliches, denn Max Jammer merkt zur logischen Struktur der Argumentation im EPR-Gedankenexperiment an:

*“Having reviewed the published version of the EPR argument one cannot help feeling that its logical structure is rather entangled and unnecessarily complicated.”<sup>26</sup>*

Er zählt mehrere Autoren auf, die gezeigt hätten, dass die Ableitung der EPR-Disjunktion (24) aus (22) und (23) formal falsch sei. Jammer weist darauf hin, dass der Stil der veröffentlichten EPR-Arbeit sehr deutlich von Einsteins gewöhnlicher Art abweiche, selbst komplexe Sachverhalte klar und logisch einwandfrei zu präsentieren. Dieser Umstand führt ihn auf die Suche nach der eigentlichen Urheberschaft des EPR-Aufsatzes. Dabei gelangt Jammer zu dem Ergebnis, dass nur von Einstein die Idee zum EPR-Aufsatz ausgegangen sein könne. Er führt hier vor allem das engagierte Eingreifen Einsteins in die Debatten um die damals noch junge Wissenschaftsdisziplin der Quantenphysik an. Was die weitere Zusammenarbeit zwischen Einstein, Rosen und Podolsky anbelangt, bestätigt ihm Nathan Rosen persönlich, dass er selbst die Wellenfunktion für das konkrete Gedankenexperiment gefunden und schließlich Podolsky den Aufsatz aufgrund seiner profunden Kenntnisse in der Sprache der mathematischen Logik verfasst habe.<sup>27</sup> Einstein *in persona* kritisierte den EPR-Aufsatz in einen Brief an Schrödinger im Juni 1935. Er war von der Art und Weise der Präsentation durch Podolsky enttäuscht.<sup>28</sup>

Die Kontroverse zwischen Einstein und Podolsky erreichte ihren Höhepunkt, als letztgenannter am 4. Mai 1935 in den *New York Times* einen Artikel veröffentlichte, der unter der Überschrift „Einstein attacks quantum theory“ auf den 11 Tage später erscheinenden Originalaufsatz Bezug nahm. Daraufhin druckte die Zeitung am 7. Mai einen Protestartikel Einsteins ab, in welchem dieser darauf hinwies, dass

*“any information upon which the article... is based was given to you without authority. It is my invariable practise to discuss scientific matters only in the appropriate forum and I deprecate advance publication of any announcement in regard to such matters in the secular press.”<sup>29</sup>*

Einstein musste höchst unzufrieden mit der Arbeit von Podolsky gewesen sein. Trotzdem hat er sich vom EPR-Aufsatz in der Öffentlichkeit nie distanziert.<sup>30</sup>

26 Jammer (2009), S. 140.

27 Jammer (2009), S. 142f.

28 Jammer (2009), S. 145.

29 A. Einstein, zitiert nach Jammer (2009), S. 145.

30 Jammer (2009), S. 145.

## 4. Die Bellsche Ungleichung

### 4.1. Einführung

Einstein *et al.* argumentieren in ihrer Arbeit von 1935, dass die Unvollständigkeit der Quantenmechanik aus der Verletzung des allgemein akzeptierten Unbestimmtheitsprinzips resultiere: Zwei nicht miteinander kommutierende Operatoren, wie Ort und Impuls oder die Spinkomponenten in  $\vec{x}$ - und  $\vec{y}$ -Richtung zweier Teilchen, können *im Prinzip* gleichzeitig eine physikalische Realität aufweisen, indem sie – ohne vorher gemessen zu werden – zum selben Zeitpunkt scharfe Werte besitzen. Ein Umstand, der durch die Quantenmechanik aufgrund des Unbestimmtheitsprinzips nicht beschrieben werden kann und woraus Einstein *et al.* ihre Unvollständigkeit folgern. Interessant daran ist, dass es, wie Y. Shih schreibt, überhaupt nicht Einsteins Anliegen gewesen sei, die Verletzung des Unbestimmtheitsprinzips derart in den Mittelpunkt zu rücken, obwohl seine Argumentation sehr wohl darauf beruhe.<sup>31</sup> Da Einstein zeit seines Lebens ein leidenschaftlicher Verfechter des lokalen Realismus' gewesen sei,<sup>32</sup> hätte er vielmehr nicht akzeptieren können, dass ein Teilchen während seiner Bewegung gemäß der Kopenhagener Interpretation der Quantenmechanik keinen festen Ort oder Impuls besitzt, diese Größen nur mittels Wahrscheinlichkeitsamplituden beschrieben werden können und erst durch die Messung einen eindeutigen Wert erhalten. Einstein glaubte nicht an einen solchen objektiven Zufall und formulierte seinen berühmten Ausspruch:

*„Die Theorie liefert viel, aber dem Geheimnis des Alten bringt sie uns kaum näher. Jedenfalls bin ich überzeugt, daß **der** nicht würfeln.“<sup>33</sup>*

Die damalige Auseinandersetzung um die Interpretation der Quantenmechanik ist der Nachwelt vor allem unter der Bezeichnung „Bohr-Einstein-Debatte“ geläufig. Anhand der gegensätzlichen Positionen Einsteins und Bohrs zur Heisenbergschen Unschärferelation (UR) lässt sich die Debatte gut nachvollziehen. Aus diesem Grund werden die Standpunkte in folgender Tabelle kurz und knapp gegenüber gestellt:<sup>34</sup>

Albert Einstein	Niels Bohr
Unschärfe als erkenntnistheoretisches Problem: UR nur Ausdruck der Grenzen dessen, was gemessen werden kann (Realismus).	Unschärfe als ontologisches Problem: UR macht Aussagen über die Natur der Dinge (Atom besitzt keinen Ort, der besser definiert ist, als UR angibt).

Tabelle 1: Gegensätzliche Positionen Einsteins und Bohrs zur Unschärferelation.

<sup>31</sup> Shih (2009), S. 161.

<sup>32</sup> Ebd.

<sup>33</sup> A. Einstein, zitiert nach C. Held, *Die Bohr-Einstein-Debatte. Quantenmechanik und physikalische Wirklichkeit*, S. 38 (Paderborn, 1998). Der Artikel „der“ ist im Originalzitat kursiv gedruckt, weswegen er hier fett hervorgehoben wird.

<sup>34</sup> A. Zeilinger, *Einsteins Spuk. Teleportation und weitere Mysterien der Quantenphysik*, S. 80f (München, 2007).

Das im EPR-Gedankenexperiment verwendete verschränkte System zweier Teilchen sollte demzufolge eher dazu dienen, Einsteins Haltung zum Realismus zu bekräftigen.<sup>35</sup> Lässt sich ein lokaler Realismus in der Quantenmechanik „retten“? Dafür wäre es außerdem nötig, einen - wie auch immer gearteten - Fernwirkungsmechanismus zwischen den beiden raumartig voneinander getrennten Teilchen auszuschließen, da ein solcher die Spezielle Relativitätstheorie verletzen würde. Immerhin, Einstein *et al.* halten am Schluss ihrer Arbeit eine solche Theorie, welche die Quantenmechanik in ihrem Sinne vervollständigen könnte, für möglich:

*“While we have thus shown that the wave function does not provide a complete description of the physical reality, we left open the question of whether or not such a description exists. We believe, however, that such a theory is possible.”*<sup>36</sup>

## 4.2. Verborgene Parameter

Es herrscht in der Literatur ein fast einhelliger Konsens darüber, dass Einstein bei seiner Suche nach einer Vervollständigung der Quantentheorie an sogenannte *verborgene Parameter* dachte.<sup>37 38</sup> Wenn diese verborgenen Parameter den *Elementen der Realität* im EPR-Gedankenexperiment entsprächen, und zwar insofern, als dass jeder Konstituent eines verschränkten Teilchenpaares von Anfang an eine Art „Regel“ mit sich trüge, die festlegen würde, wie sich das Teilchen bei jeder beliebigen Messung zu verhalten habe, und wenn die Quantenmechanik durch solche verborgenen Parameter beschrieben werden könnte, dann wäre das scheinbare EPR-Paradoxon nicht mehr existent: Die Teilchen besäßen zwar in diesem Fall auch weiterhin eine Unbestimmtheit, jedoch wäre diese auf unsere Unkenntnis bezüglich der versteckten Werte der verborgenen Parameter zurückzuführen, die dann den Teilchen als reale und objektive Eigenschaften immanent wären. Da die verborgenen Parameter im Einstein’schen Sinne die *Elemente der Realität* verkörpern würden, könnte der für Einstein so „unerträgliche“<sup>39</sup> Kollaps der Wellenfunktion während der Messung als rein statistischer Prozess betrachtet werden, bei dem der Impuls eines Teilchens eben nicht erst durch den Akt der Messung aufgrund eines objektiven Zufalls festgelegt wird, sondern eben schon lange vor der Messung *determiniert ist*. Die Quantenmechanik würde sich zu einer derartigen Verborgenen-Parameter-Theorie verhalten, wie die Thermodynamik zur Statistik: Obwohl wir den exakten Impuls und Auf-

35 Shih (2009), S. 161.

36 EPR, S. 780, 2, 42-46.

37 J. S. Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics: collected papers in quantum mechanics*, S. 91 (Cambridge, 1987). Bell setzt sich hier auch mit Max Jammer auseinander, der Einstein nicht notwendigerweise als Verfechter von verborgenen Parametern ansieht. Bell allerdings entkräftet Jammers Argumentation, so dass wir auch weiterhin davon ausgehen können, dass Einstein verborgene Parameter zur Vervollständigung der Quantenmechanik als geeignetes Mittel ansah.

38 Der Terminus „lokale verborgene Variablen“ ist laut N. Gisin obsolet. Er insistiert darauf, dass der moderne Begriff „shared randomness“ die alte Bezeichnung ersetzt habe, vgl.: N. Gisin, *Bell Inequalities: Many Questions, a Few Answers*, in: *Quantum Reality, Relativistic Causality, and Closing the Epistemic Circle. Essays in Honour of Abner Shimony* (edited by W. C. Myrvold & J. Christian), The Western Ontario Series in Philosophy of Science 73, S. 131 (2009). Da ich aber während meiner Recherchen zu dieser Arbeit an keiner anderen Stelle auf den „modernen“ Begriff getroffen bin, werde ich auch weiterhin von „verborgenen Parametern“ sprechen.

39 Held (1998), S. 73.



enthaltort sämtlicher Atome eines Stoffes nicht kennen, können wir im Rahmen der Statistik verlässliche Angaben über dessen makroskopischen Größen, wie den Druck oder die Temperatur, treffen. Übertragen auf den thermodynamischen Fall entsprechen der Impuls und der Aufenthaltsort eines Teilchen den eben vorgestellten verborgenen Parametern. Einstein versuchte also analog zur Thermodynamik, sowohl den objektiven Zufall in der Quantenmechanik als auch die quantenmechanische Unbestimmtheit auf das Wirken verborgener Parameter zurückzuführen.

Der Prüfstein einer jeden Theorie ist das Experiment. Wie aber lässt sich in einem Experiment eine *lokal-realistische Theorie* (LRT) überprüfen, die im wahrsten Sinne des Wortes *verborgene* Größen enthält? Eine Antwort darauf lieferte 1964 John S. Bell. Man kann die Leistung des irischen Quantenphysikers gar nicht genug würdigen: Ihm gelang es, eine Situation zu entwerfen, in der sich die Vorhersagen der Quantenmechanik von denen einer lokal-realistischen Theorie mit verborgenen Parametern quantitativ unterscheiden. Damit wurde den Quantenphysikern das nötige Rüstzeug in die Hand gegeben, um einen Unterschied zwischen den beiden konkurrierenden Theorien experimentell überprüfen zu können. Die dafür nach ihm benannte mathematische Relation kennen wir heute unter dem Namen *Bellsche Ungleichung*.

### 4.3. Voraussagen der klassischen Statistik

Bevor wir die Bellsche Ungleichung kennenlernen werden, wollen wir zunächst die Korrelation berechnen, die unter Anwendung rein statistischer Rechenoperationen zwischen den Spins zweier Teilchen besteht, welche sich unter folgenden Annahmen in einem Gemisch beliebiger Spinzustände befinden:<sup>40</sup>

- 1.) Vor der Messung existieren Spins mit entgegengesetzten Spinvektoren  $\vec{n}$  und  $-\vec{n}$  (vgl. Realitätskriterium (23)).
- 2.) Die Spins sind voneinander unabhängig (vgl. Lokalisierungsprinzip (25)).
- 3.) Für  $\vec{n}$  sind alle Raumrichtungen gleich wahrscheinlich.

Da die Pauli-Matrizen  $\vec{\sigma}$  zusammen mit der Einheit  $\mathbf{I}$  eine vollständige Basis im Hilbertraum eines Zweizustandssystems bilden, kann jede 2x2-Matrix durch eine Kombination von  $\{\vec{\sigma}, \mathbf{I}\}$  dargestellt werden. Insbesondere kann auch jeder Zustand und jeder Operator durch  $\{\vec{\sigma}, \mathbf{I}\}$  beschrieben werden, so auch der Dichteoperator in (3) als allgemeinste Form eines quantenmechanischen Zustands, wobei wegen  $S_p(\hat{\rho})=1$  die Koeffizienten der  $\mathbf{I}$ -Matrix 1/2 sein müssen:

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{I}} + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+n_z & n_x - i n_y \\ n_x + i n_y & 1-n_z \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{33}$$

<sup>40</sup> Die folgenden Rechnungen sind angelehnt an mir zu Verfügung gestellte, private Aufzeichnungen von H.-J. Kull (Aachen, 2009).

In (33) steht der Ausdruck für den statistischen Operator eines Spinzustands mit mittlerem Spinvektor in  $\vec{n}$ -Richtung. Dass der Erwartungswert des Spinvektors tatsächlich in  $\vec{n}$ -Richtung liegt, lässt sich zeigen, indem wir den Erwartungswert des Spins gemäß (4) und unter Ausnutzung von  $Sp(\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j) = 2 \delta_{ij}$  ausrechnen:

$$\langle \vec{\hat{\sigma}} \rangle = Sp(\vec{\hat{\sigma}} \hat{\rho}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} n_i \vec{e}_j Sp(\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j) = \sum_i n_i \vec{e}_i = \vec{n}. \quad (34)$$

Nun wollen wir den statistischen Operator für ein Gemisch aufschreiben, welches den Annahmen in (32) genügt:

$$\hat{\rho} = \left\langle \frac{1}{2} (\mathbf{I} + \vec{n} \cdot \vec{\hat{\sigma}}_1) \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \vec{n} \cdot \vec{\hat{\sigma}}_2) \right\rangle_{\Omega}. \quad (35)$$

Hierbei bezeichnen  $\vec{n}$  und  $-\vec{n}$  die entgegengesetzten Orientierungen der Spins  $\hat{\sigma}_1$  und  $\hat{\sigma}_2$ , während  $\langle \hat{A} \rangle_{\Omega}$  für die Mittelung eines beliebigen Operators  $\hat{A}$  über den Raumwinkel  $\Omega$  steht und berechnet werden kann über:

$$\langle \hat{A} \rangle_{\Omega} = \int_0^{4\pi} d\Omega \hat{A} \frac{1}{4\pi}. \quad (36)$$

Ein Ausmultiplizieren der Klammern in (35) ergibt unter Berücksichtigung der teilcheneigenen Spinräume durch das Tensorprodukt:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4} [\mathbf{I} + \langle \vec{n} \rangle_{\Omega} \cdot (\vec{\hat{\sigma}}_1 - \vec{\hat{\sigma}}_2) - \langle \vec{n} \otimes \vec{n} \rangle_{\Omega} \vec{\hat{\sigma}}_1 \vec{\hat{\sigma}}_2]. \quad (37)$$

Da die  $\vec{n}$  für alle Richtungen gleich wahrscheinlich sind, folgt für die einzelnen Komponenten des Spinvektors und deren gemitteltetes Skalarprodukt sofort:

$$\langle \vec{n}_i \rangle_{\Omega} = 0, \text{ sowie } \langle \vec{n}_i \vec{n}_j \rangle_{\Omega} = 1/3 \delta_{ij}. \quad (38)$$

Eingesetzt in (37) erhalten wir für den statistischen Operator den Ausdruck:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4} \left[ \mathbf{I} - \frac{1}{3} \vec{\hat{\sigma}}_1 \cdot \vec{\hat{\sigma}}_2 \right]. \quad (39)$$

Seien  $\hat{A}$  und  $\hat{B}$  zwei Spinoperatoren mit Spinkomponente in  $\vec{a}$ - und  $\vec{b}$ -Richtung:

$$\begin{aligned} \hat{A} &\equiv \vec{\hat{\sigma}}_1 \cdot \vec{a} \text{ mit } \vec{a}^2 = 1, \\ \hat{B} &\equiv \vec{\hat{\sigma}}_2 \cdot \vec{b} \text{ mit } \vec{b}^2 = 1. \end{aligned} \quad (40)$$

Mit (39) und (40) folgt für den „klassischen“ und rein statistischen Erwartungswert des Produkts zweier Spinmessungen in  $\vec{a}$ - und  $\vec{b}$ -Richtung für das Gemisch in (35):

$$\begin{aligned} E_{klass} &= \langle \hat{A} \hat{B} \rangle = Sp(\hat{\rho} \vec{a} \vec{\hat{\sigma}}_1 \vec{b} \vec{\hat{\sigma}}_2) = \sum_{i,j} a_i b_j Sp(\hat{\rho} \hat{\sigma}_{1i} \hat{\sigma}_{2j}) \\ &= -\frac{1}{12} \sum_{i,j,k} a_i b_j \underbrace{Sp_1(\hat{\sigma}_{1k} \hat{\sigma}_{1i})}_{2\delta_{ik}} \underbrace{Sp_2(\hat{\sigma}_{2k} \hat{\sigma}_{2j})}_{2\delta_{jk}} = -\frac{1}{3} \vec{a} \cdot \vec{b}. \end{aligned} \quad (41)$$

Inwiefern diese „klassische“ Betrachtungsweise für ein derartiges Spingemisch, von dem wir annehmen, dass die Spinrichtungen schon vor der Messung festliegen und unabhängig voneinander sind, mit der Quantenmechanik tatsächlich übereinstimmt, werden wir im nächsten Abschnitt erfahren, in welchem wir den „echten“ quantenmechanischen Erwartungswert des Produktoperators  $\hat{A}\hat{B}$  für eine solche Situationen berechnen werden.

#### 4.4. Der Originalaufsatz von Bell

In seinem historischen Aufsatz *On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox* von 1964 beweist John S. Bell, dass lokale verborgene Parameter, wie sie Einstein, Podolsky und Rosen zur Vervollständigung der Quantentheorie in ihrem Gedankenexperiment von 1935 indirekt vorschlugen, mit den statistischen Vorhersagen der Quantenmechanik nicht verträglich sind.<sup>41</sup>

Zur Herleitung seiner Ungleichung verwendet Bell das EPR-Gedankenexperiment in der 1957 von Bohm und Aharonov vereinfachten Form.<sup>42</sup> Letztere betrachten zwei über ihren Spin verschränkte Teilchen, während die Teilchen im Originalaufsatz über ihren Ort und Impuls miteinander verschränkt waren. Demnach sind die zu den jeweiligen Operatoren gehörenden Eigenwerte nicht mehr  $x_1$  und  $x_1+x_0$ , respektive  $p_1$  und  $-p_1$ , sondern  $s_i = \pm \hbar/2$ ,  $i=x, y, z$ . Betrachten wir dazu ein verschränktes System im Singulettzustand  $|\phi\rangle$ , dessen Spin-1/2 Teilchen sich von einer Quelle aus in entgegengesetzte Richtungen entfernen (siehe Abbildung 3). Dann lassen sich mit einem geeigneten Detektor, wie einem Stern-Gerlach-Apparat, die Spins  $\vec{\sigma}_1$  und  $\vec{\sigma}_2$  der beiden Teilchen messen.<sup>43</sup> Der Spin von Teilchen 1 in die Richtung von  $\vec{a}$  ist  $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$ , ebenso gilt  $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$  für den Spin von Teilchen 2 in  $\vec{b}$ -Richtung, wobei  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  beliebige Einheitsvektoren sind.

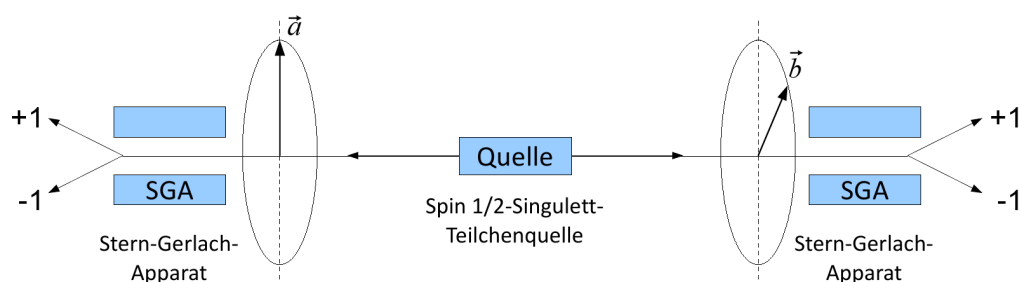


Abbildung 3: Schematische Darstellung des EPR-Gedankenexperiments zur Herleitung der Bellschen Ungleichung. Die Quelle emittiert verschränkte Spin-1/2 Teilchenpaare im Singulettzustand. Diese breiten sich in entgegengesetzte Richtungen aus. Ein Stern-Gerlach-Apparat analysiert in einer beliebigen Orientierung  $\vec{a}/\vec{b}$  jeweils ein Teilchen des verschränkten Paares. Die beiden Messungen A und B, die in einer lokal-realistischen Theorie raumartig voneinander entfernt stattfinden müssen, liefern in Abhängigkeit von der Ablenkung der Teilchen - nach oben oder nach unten - die Messergebnisse  $\pm 1$ .

41 J. S. Bell, *Physics* **1**, S. 195-200 (1964).

42 D. Bohm and Y. Aharonov, *Phys. Rev.* **108**, S. 1070-1076 (1957).

43 Hierbei steht  $\vec{\sigma}_i$  für den Pauli-Spinoperator des Teilchens  $i$  mit den bekannten Eigenwerten  $\pm 1$ .

Gesucht ist zunächst der quantenmechanische Erwartungswert  $E_{QM}$  für das Produkt der beiden Spinmessungen. Da der betrachtete Singulettzustand  $|\phi\rangle$  verschränkt ist, muss  $E_{QM}$  mit dem Erwartungswert des Produktoperators  $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}) \otimes (\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b})$  übereinstimmen. Für den Spin in  $\vec{a}$ -Richtung gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{\sigma} = a_1 \hat{\sigma}_x + a_2 \hat{\sigma}_y + a_3 \hat{\sigma}_z = a_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

In der Basis des Singulettzustands  $|\pm\rangle$  sind die Matrixelemente von  $\vec{\sigma} \cdot \vec{a}$  wegen (42):

$$\begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 - ia_2 & -a_3 \end{pmatrix}.$$

Damit lässt sich der quantenmechanische Erwartungswert des Produktoperators für die beiden Spinmessungen berechnen. Wir müssen allerdings beim Auswerten von  $E_{QM} = \langle \phi | (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}) \otimes (\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}) | \phi \rangle$  die Besonderheit des Tensorprodukts zweier Operatoren beachten, da  $\vec{\sigma}_1$  ausschließlich auf die Zustände  $|\pm\rangle_1$  des ersten Teilchens und ebenso  $\vec{\sigma}_2$  auf die Zustände des zweiten Teilchens wirkt:

$$\begin{aligned} & \langle \phi | (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}) \otimes (\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}) | \phi \rangle = \\ &= \frac{1}{2} [\langle + | \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a} | + \rangle_1 \langle - | \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b} | - \rangle_2 - \langle + | \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a} | - \rangle_1 \langle - | \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b} | + \rangle_2 \\ & \quad - \langle - | \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a} | + \rangle_1 \langle + | \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b} | - \rangle_2 + \langle - | \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a} | - \rangle_1 \langle + | \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b} | + \rangle_2] \\ &= \frac{1}{2} [-a_3 b_3 - (a_1 - ia_2)(b_1 + ib_2) - (a_1 + ia_2)(b_1 - ib_2) - a_3 b_3] \\ &= -[a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3] = -\vec{a} \cdot \vec{b} = -\cos(\theta_{ab}) = E_{QM}(\vec{a}, \vec{b}). \end{aligned} \quad (43)$$

In der letzten Zeile wurde ausgenutzt, dass  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  Einheitsvektoren sind und somit gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos(\theta_{ab}) \text{ für } |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1. \quad (44)$$

Wie erhalten also als Ergebnis für den quantenmechanischen Erwartungswert für das Produkt der beiden Spinmessungen:

$$E_{QM}(\vec{a}, \vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b} = -\cos(\theta_{ab}). \quad (45)$$

Stellen wir uns das auf Abbildung 3 gezeigte Spin-1/2 Gedankenexperiment mit Stern-Gerlach-Apparaten vor, die in gleicher Orientierung  $\vec{a} = \vec{b}$  Messungen durchführen. Der Erwartungswert für das Spinprodukt eines solchen Versuchsaufbaus ist gemäß (45):

$$E_{QM}(\vec{a}, \vec{b}) = -1. \quad (46)$$

Die Messergebnisse für parallele Spinorientierungen unterliegen einer perfekten Antikorrelation: Wird für das erste Teilchen der Eigenwert +1 gemessen, womit sich dieses im Spin-up-Zustand befände, so besitzt das zweite Teilchen mit Sicherheit den Eigenwert -1, und umgekehrt. Von diesem Beispiel war bereits in der Einleitung die Rede.

Bei einem Vergleich von  $E_{QM} = -\vec{a} \cdot \vec{b}$  mit dem „klassischen“ Erwartungswert  $E_{klass} = -1/3 \vec{a} \cdot \vec{b}$ , den wir im vorherigen Kapitel berechnet haben, fällt auf, dass letzterer um den Faktor 3 geringer ist als der quantenmechanische Erwartungswert. Bell bezeichnet  $E_{QM}(\vec{a}, \vec{b})$  auch als *quantenmechanische Korrelation*.<sup>44</sup> Insofern können wir feststellen, dass in der Quantenmechanik eine viel stärkere Korrelation zwischen den Spins zweier Teilchen existiert, als mit einer „klassischen“ und rein statistischen Betrachtungsweise berechnet werden kann. Was aber ist die Ursache davon?

Erinnern wir uns noch einmal daran, welche Bedingungen wir an das Spingemisch in (34) gestellt haben, um  $E_{klass}$  zu berechnen. Wir nahmen an, dass bereits vor der Messung zwei entgegengesetzt ausgerichtete Spins vorliegen (entsprechend dem Einstein'schen Realitätskriterium), dass sich die Spins einander nicht beeinflussen können (Lokalitätsprinzip), und dass die Spinrichtungen für alle Raumrichtungen gleich wahrscheinlich sind. Die letzte Annahme ist für ein isoliertes System offensichtlich erfüllt. Die Diskrepanz zwischen  $E_{QM}$  und  $E_{klass}$  muss demzufolge in den ersten beiden Annahmen begründet liegen und es bleibt zu klären, inwiefern die Quantenmechanik tatsächlich mit dem Realitätskriterium und dem Lokalitätsprinzip verträglich ist. Damit aber sind wir wieder beim EPR-Gedankenexperiment und der Suche nach den Elementen der Realität angekommen, welche die Quantenmechanik im Sinne eines lokalen Realismus' vervollständigen könnten. Bell nahm sich 1964 dieser Problematik an und gab den Quantenphysikern mit seiner Bellschen Ungleichung eine mathematische Relation in die Hand, anhand derer die Quantentheorie hinsichtlich ihrer Übereinstimmung mit dem Realitätskriterium und dem Lokalitätsprinzip überprüft werden kann.<sup>45</sup>

Eine Vervollständigung der Quantentheorie durch verborgene Parameter als *Elemente der Realität*, die den Spin jedes Teilchens bereits vor der Messung determinieren, müsste, wenn damit die Quantenmechanik korrekt beschrieben werden soll, für alle Orientierungen  $\vec{a}, \vec{b}$  den Erwartungswert  $E_{QM}(\vec{a}, \vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b}$  für das Produkt zweier Spinmessungen liefern. Wir bezeichnen die verborgenen Parameter mit  $\lambda \in \Lambda$ , wobei es an dieser Stelle nicht von Bedeutung ist, ob der Raum  $\Lambda$  kontinuierlich oder diskret ist. Für die Herleitung der Bellschen Ungleichung nehmen wir  $\lambda \in \mathbb{R}$  an. Jedes der beiden Spin-1/2 Teilchen besitze nach seiner Emission aus der Quelle solch einen verborgenen Parameter  $\lambda$ . Das Ergebnis  $A$  einer Messung der Observablen  $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$  am ersten Teilchen ist im Rahmen einer LRT vollständig determiniert durch  $\vec{a}$  und  $\lambda$ . Umgekehrt gilt dieses auch für die Messung am zweiten Teilchen zum selben Zeitpunkt:

$$\begin{aligned} A(\vec{a}) \cdot B(\vec{b})(\lambda) &= A(\vec{a}, \lambda) \cdot B(\vec{b}, \lambda) \text{ mit} \\ A(\vec{a}, \lambda) &= \pm 1 \text{ und } B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1. \end{aligned} \tag{47}$$

<sup>44</sup> Bell (1964), S. 198.

<sup>45</sup> Die folgenden Ansätze und Herleitungen basieren auf der Originalarbeit von Bell, *Physics* **1**, S. 195-200 (1964).

Formal stehen in (47) zwei Annahmen, die jeder LRT zugrunde liegen:<sup>46</sup> Zum einen soll das Messergebnis  $A$  für Teilchen 1 nicht von der Orientierung  $\vec{b}$  des Stern-Gerlach-Apparats am Ort des zweiten Teilchens abhängen; umgekehrt beeinflusst die Messung  $B$  an Teilchen 2 nicht das Messergebnis  $A$  (Lokalität). Zum anderen ist das von einem Beobachter abgelesene Messergebnis  $A/B$  festgelegt, sobald das zugehörige  $\lambda$  bekannt ist (Realität).

Im Fall einer nicht perfekt arbeitenden Quelle besitzen die Teilchen unterschiedliche  $\lambda$ . In einer LRT wird dieser Umstand durch eine normierte Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\rho(\lambda)$  berücksichtigt:

$$\int_{\lambda \in \Lambda} d\lambda \rho(\lambda) = 1. \quad (48)$$

Mit (47) und (48) erhalten wir für den Erwartungswert des Produkts der beiden Spinmessungen  $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$  und  $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$ :

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \int_{\lambda \in \Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda). \quad (49)$$

Wegen  $A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1$  und  $B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1$  besitzt Gleichung (49) ein Minimum bei  $-1$ .  $E(\vec{a}, \vec{b})$  müsste für das Produkt der Spinmessungen im Singulettzustand mit dem quantenmechanischen Erwartungswert  $E_{QM}$  in (45) übereinstimmen, falls die von Bell eingeführten lokalen Parameter  $\lambda$  die Quantenmechanik korrekt beschreiben sollen. Insbesondere muss bei paralleler Ausrichtung der Stern-Gerlach-Apparate die Bedingung (46) mit  $\vec{a} = \vec{b}$  erfüllt sein:

$$-1 = \int_{\lambda \in \Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{a}, \lambda). \quad (50)$$

Diese perfekte Antikorrelation wird wegen (47) nur für

$$A(\vec{a}, \lambda) = -B(\vec{a}, \lambda), \quad (51)$$

erreicht, was auch gleichzeitig dem Minimum von (49) entspricht. Die Herleitung des Erwartungswerts  $E(\vec{a}, \vec{b})$  wird also auf einen Vergleich der Minima der beiden Korrelationsfunktionen  $E$  und  $E_{QM}$  reduziert. Damit können wir Gleichung (49) umschreiben:

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = - \int_{\lambda \in \Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda). \quad (52)$$

Wenn  $\vec{c}$  ein weiterer Einheitsvektor ist und nun drei verschiedene Orientierungen  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  der Stern-Gerlach-Apparate vorliegen, gilt wegen  $|A(\vec{b}, \lambda)|^2 = 1$ :

$$\begin{aligned} E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{c}) &= - \int_{\lambda \in \Lambda} d\lambda \rho(\lambda) [A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \\ &= \int_{\lambda \in \Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) [A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) - 1]. \end{aligned} \quad (53)$$

<sup>46</sup> G. Alber und M. Freyberger, Phys. Bl. 55, S. 26 (1999).

Daraus folgt unter Berücksichtigung der Dreiecksungleichung, mit  $|A(\cdot, \lambda)|=1$  für alle Richtungen  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , und mit (48):

$$\begin{aligned}
 |E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{c})| &= \left| \int_{\lambda \in \Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) [A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) - 1] \right| \\
 &\leq \int_{\lambda \in \Lambda} d\lambda |\rho(\lambda)| A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) |A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) - 1| \\
 &= \int_{\lambda \in \Lambda} d\lambda \rho(\lambda) |A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) - 1| \\
 &= \int_{\lambda \in \Lambda} d\lambda \rho(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \\
 |E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{c})| &\leq 1 + E(\vec{b}, \vec{c}).
 \end{aligned} \tag{54}$$

Dieses ist die erste Form der Bellschen Ungleichung:

$$|E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{c})| \leq 1 + E(\vec{b}, \vec{c}). \tag{55}$$

Um zu überprüfen, ob die Quantentheorie mit verborgenen Parametern im Sinne einer lokal-realistischen Theorie vervollständigt werden kann oder nicht, benötigen wir lediglich drei Einheitsvektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , deren quantenmechanische Erwartungswerte  $E_{QM}$  die Bellsche Ungleichung verletzen würden. Dafür wählen wir mit  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \pi/4$  und  $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$  drei koplanare Vektoren so, wie auf Abbildung (5) dargestellt. Dann folgt nach der Berechnung der Erwartungswerte gemäß Gleichung (45) und ihrem Einsetzen in die Bellsche Ungleichung die Relation:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \not\leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{56}$$

Für drei derart gewählte Einheitsvektoren ergibt sich offensichtlich ein Widerspruch. Demzufolge kann eine lokal-realistische verborgene-Parameter-Theorie nicht in Übereinstimmung mit den Vorhersagen der Quantenmechanik für ein Spin-1/2 Teilchenpaar im Singulettzustand gebracht werden. Daraus schlussfolgert Bell, dass eine durch verborgene Parameter erweiterte Quantentheorie nicht-lokale Eigenschaften haben müsse:

*„In a theory in which parameters are added to quantum mechanics to determine the results of individual measurements, without changing the statistical predictions, there must be a mechanism whereby the setting of one measuring device can influence the reading of another instrument, however remote.“<sup>47</sup>*

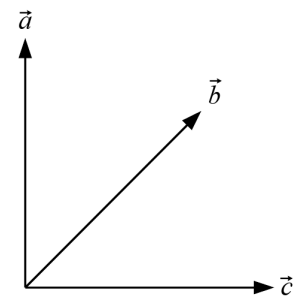


Abbildung 4: Orientierungen der Messapparaturen für eine Verletzung der Bellschen Ungleichung.

Genügt denn unsere klassische Welt einem lokalen Realismus? Zur Überprüfung dieser Frage besitzen wir mit der Bellschen Ungleichung ein gewichtiges Werkzeug. Wir

47 Bell (1964), S. 199.

haben bereits den Erwartungswert für ein „klassisch“ betrachtetes Spingemisch berechnet und erhielten als Ergebnis:  $E_{klass} = -1/3 \vec{a} \cdot \vec{b}$ . Wählen wir nun dieselben Vektoren  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \pi/4$  wie eben und setzen  $E_{klass}$  für diese Winkel in die Bellsche Ungleichung ein, dann erhalten wir:

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \leq 1 - \frac{1}{3\sqrt{2}}. \quad (57)$$

Für den „klassischen“ Erwartungswert des Spingemischs ergibt sich offensichtlich kein Widerspruch! Da in die Herleitung der Bellschen Ungleichung keine weiteren Annahmen außer dem lokalen Realismus einfließen, können wir davon ausgehen, dass unsere klassische Welt ganz im Sinne der Newtonschen Gesetzen determiniert ist und dem Lokalitätsprinzip folgt: Nichts kann sich instantan beeinflussen.

## 4.5. Die CHSH-Ungleichung

### 4.5.1 Vorüberlegungen

#### 4.5.1.1 Detektoreffizienz und Messfehler

Zur experimentellen Überprüfung der Bellschen Ungleichung sind Bedingungen notwendig, die in einem Experiment nur sehr schwer realisiert werden können. So hängt ihr Beweis sehr stark von der Existenz zweier Orientierungsrichtungen (45) ab, für die eine perfekte Korrelation der Messergebnisse zustande kommt. Dieses tritt normalerweise nicht ein, da Messapparaturen technisch bedingt eine Effizienz<sup>48</sup> besitzen, die geringer als 100% ist. Sie befindet sich heute bei Einzelphotonendetektoren in einem Bereich zwischen 25% und 90%.<sup>49 50</sup> Außerdem besitzen reale Analytoren zur Überprüfung der Polarisation von Photonen die Eigenschaft, bestimmte Polarisationsrichtungen zufällig abzuschwächen und sogar orthogonal zueinander polarisierte Photonen passieren zu lassen.<sup>51</sup> Das Ziel muss es also sein, die Bellsche Ungleichung an reale Gegebenheiten so anzupassen, dass beispielsweise die Effizienz der Detektoren, die Bauart der Analytoren oder auch zufällige Messfehler zumindest einen berechenbaren Einfluss auf die Überprüfung einer Verborgenen-Parameter-Theorie besitzen.

48 Der korrekte Fachbegriff lautet *Quanteneffizienz* (QE). Die Quanteneffizienz gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, mit der ein in den Detektor einfallendes Photon ein Photoelektron auslöst, welches von der Ausleselektronik - im Gegensatz zum Photon - gezählt werden kann.

49 Dass hier von Photonen anstatt von Spin-1/2 Teilchen die Rede ist, mag zunächst überraschen. Wir werden jedoch im weiteren Textverlauf erfahren, dass sich polarisationsverschränkte Photonen als Quantenobjekte zur experimentellen Überprüfung des Widerspruchs zwischen der Quantenmechanik und einer LRT genauso eignen wie Spin-1/2 Teilchen.

50 Gewöhnliche Photomultiplier besitzen eine QE-Wert von maximal 25%. Halbleiterdetektoren vom Typ eines *Visible-Light-Photon-Counter* (VLPC) arbeiten bei Betriebstemperaturen von circa 7 K und besitzen einen viel größeren QE-Wert mit maximal 88%. Die Werte sind entnommen aus: G. Reuscher, D. Holtmannspötter, *Quantenoptik - Anwendung nichtklassischen Lichts - Technologieanalyse* (hrsg. v. VDI Technologiezentrum GmbH im Auftrag des BMBF), *Zukünftige Technologien* **49**, S. 85 (2004).

51 J. F. Clauser and A. Shimony, *Rep. Prog. Phys.* **41**, S. 1889 (1978).



### 4.5.1.2 Koinzidenzen

Eine weitere idealisierte experimentelle Annahme ist, dass immer dann, wenn am ersten Detektor ein Teilchen registriert wird, am zweiten Detektor auch der verschränkte Partner beobachtet werden kann. Das zeitliche Zusammentreffen zweier solcher Ereignisse bezeichnet man als *Koinzidenz*. Es kann nun – wie im vorigen Abschnitt angedeutet – vorkommen, dass ein fehlerhafter Analysator ein zu diesem nicht orthogonal polarisiertes Photon in Richtung  $\vec{a}$  zufällig absorbiert. Wenn dieses Photon mit einem anderen verschränkt gewesen ist, dann würde in einem solchen Fall bei korrekt arbeitendem Analysator auf der anderen Seite nur der eine Partner des verschränkten Zustands in Richtung  $\vec{b}$  detektiert werden. Damit würde die in der Herleitung der Bellschen Ungleichung geforderte, perfekte Korrelation abgeschwächt werden. Wie wir im Folgenden sehen werden, wird versucht, solche Fälle durch spezielle Versuchsaufbauten und verschiedene Zusatzannahmen zu umgehen.

### 4.5.2 Die CHSH-Ungleichung nach Bell

Die Anpassung der Bellschen Ungleichung an reale experimentelle Bedingungen erfolgte erstmals 1969<sup>52</sup> von Clauser, Horne, Shimony und Holt (CHSH).<sup>53</sup> Dabei verzichteten sie zunächst auf die Forderung nach einer perfekten Korrelation für den Erwartungswert in (46), die für Bell noch eine zentrale Rolle in der Herleitung seiner Ungleichung einnahm und wonach sich insbesondere bei paralleler Messrichtung  $\vec{a}=\vec{b}$  für die quantenmechanische Korrelation der Wert  $E_{QM}(\vec{a},\vec{b})=-1$  ergibt. Clauser *et al.* schwächten die Forderung nach einer solchen perfekten Korrelation ab, indem sie annahmen, dass in diesem Fall nur eine Korrelation  $E(\vec{a},\vec{b})=-1+\delta$  mit  $0\leq\delta\leq 1$  bestehe.<sup>54</sup> Damit leiteten sie eine Ungleichung ab, die schließlich 1971 von Bell, der durch die Fortschritte von Clauser *et al.* angespornt worden war und sich nach einer Pause von sieben Jahren wieder der Problematik lokal-realistischer Theorien zugewandt hatte,<sup>55</sup> in einer noch symmetrischeren Form hergeleitet wurde.<sup>56</sup> In seinem Aufsatz betrachtet Bell ein System zweier verschränkter Spin-1/2 Teilchen im Singulettzustand, die sich von einer Quelle aus in entgegengesetzte Richtungen ausbreiten (vgl. Abbildung 3). Allerdings erfordere die Herleitung ein über ihren Spin verschränktes Teilchenpaar nicht explizit, wie Clauser und Shimony anmerken.<sup>57</sup> Genauso gut könnten wir die CHSH-Ungleichung auch anhand eines polarisationsverschränkten Zwei-Photonen-Zustands herleiten. Dabei wäre die Polarisation des einen Photons immer orthogonal zu der des anderen eingestellt. Die eigene Polarisation des Teilchens selbst bliebe aber auch in diesem Fall vollkommen unbestimmt.<sup>58</sup>

52 Clauser, Shimony (1978), S. 1889.

53 J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt, Phys. Rev. Lett. **23**, S. 880-884 (1969).

54 Für eine perfekte Antikorrelation, wie Bell sie noch 1964 voraussetzte, gilt demnach:  $\delta=0$ .

55 G. Auletta, *Foundations and Interpretation of Quantum Mechanics. In the Light of a Critical-Historical Analysis of the Problems and of a Synthesis of the Results. With a Foreword by Giorgio Parisi*, S. 593 (Singapore, 2000).

56 Bell (1987), S. 29-39. Die folgenden Ansätze und Herleitungen basieren auf Bells Herleitung.

57 Clauser, Shimony (1978), S. 1891.

58 Clauser *et al.* verwendeten 1969 zur Herleitung ihrer Ungleichung polarisationsverschränkte Photonen.

Bell unterscheidet drei mögliche Messergebnisse, nachdem das Teilchenpaar von der Quelle emittiert wurde:

$$A(\vec{a}, \lambda) = \begin{cases} +1 & , \text{Spin-up-Detektor von Teilchen 1 spricht an} \\ -1 & , \text{Spin-down-Detektor von Teilchen 1 spricht an} \\ 0 & , \text{Teilchen 1 wird nicht detektiert} \end{cases} \quad (58)$$

sowie

$$B(\vec{b}, \lambda) = \begin{cases} +1 & , \text{Spin-up-Detektor von Teilchen 2 spricht an} \\ -1 & , \text{Spin-down-Detektor von Teilchen 2 spricht an} \\ 0 & , \text{Teilchen 2 wird nicht detektiert.} \end{cases} \quad (59)$$

Neben der Nichtdetektion eines Teilchens und dem Verzicht auf eine perfekte Korrelation ist es ein weiteres Zugeständnis an reale Messbedingungen, dass die Messinstrumente selbst verborgene Parameter besitzen können, die die lokalen Messergebnisse beeinflussen würden, so dass vor einer weiteren Auswertung zunächst über die verborgenen Parameter der Messinstrumente gemittelt wird:

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \int_{\lambda \in \Lambda} d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\vec{a}, \lambda) \bar{B}(\vec{b}, \lambda). \quad (60)$$

Aus (58) und (59) folgt für die möglichen Messergebnisse  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$ :

$$|\bar{A}(\vec{a}, \lambda)| \leq 1 \quad \text{und} \quad |\bar{B}(\vec{b}, \lambda)| \leq 1. \quad (61)$$

Seien  $\vec{a}'$  und  $\vec{b}'$  zwei alternativen Messrichtungen, dann gilt:

$$\begin{aligned} E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}') &= \int_{\lambda \in \Lambda} d\lambda \rho(\lambda) [\bar{A}(\vec{a}, \lambda) \bar{B}(\vec{b}, \lambda) - \bar{A}(\vec{a}, \lambda) \bar{B}(\vec{b}', \lambda)] \\ &= \int_{\lambda \in \Lambda} d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\vec{a}, \lambda) \bar{B}(\vec{b}, \lambda) [1 \pm \bar{A}(\vec{a}', \lambda) \bar{B}(\vec{b}', \lambda)] \\ &\quad - \int_{\lambda \in \Lambda} d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\vec{a}, \lambda) \bar{B}(\vec{b}', \lambda) [1 \pm \bar{A}(\vec{a}', \lambda) \bar{B}(\vec{b}, \lambda)]. \end{aligned} \quad (62)$$

Analog zur Herleitung der Bellschen Ungleichung rechnen wir mit Beträgen weiter und erhalten mit den Ungleichungen in (61):

$$\begin{aligned} |E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}')| &\leq \int_{\lambda \in \Lambda} d\lambda \rho(\lambda) [1 \pm \bar{A}(\vec{a}', \lambda) \bar{B}(\vec{b}', \lambda)] \\ &\quad + \int_{\lambda \in \Lambda} d\lambda \rho(\lambda) [1 \pm \bar{A}(\vec{a}', \lambda) \bar{B}(\vec{b}, \lambda)], \end{aligned} \quad (63)$$

beziehungsweise

$$|E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}')| \leq \pm [E(\vec{a}', \vec{b}') + E(\vec{a}', \vec{b})] + 2 \int_{\lambda \in \Lambda} d\lambda \rho(\lambda). \quad (64)$$

Ein letztes Umformen ergibt:

$$\begin{aligned} -2 &\leq E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}') + E(\vec{a}', \vec{b}) + E(\vec{a}', \vec{b}') \leq 2 \quad \text{oder} \\ &|E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}')| + |E(\vec{a}', \vec{b}) + E(\vec{a}', \vec{b}')| \leq 2. \end{aligned} \quad (65)$$

Dieses ist die *CHSH-Ungleichung*. Die linke Seite wird oftmals auch als Bell-Parameter  $S(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$  identifiziert:

$$S(\alpha, \beta, \alpha', \beta') \equiv |E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}')| + |E(\vec{a}', \vec{b}) + E(\vec{a}', \vec{b}')| \leq 2. \quad (66)$$

Die CHSH-Ungleichung stellt eine Verallgemeinerung der originalen Bellschen Ungleichung dar, weil sie nicht notwendigerweise  $\hat{S}_z|\phi\rangle = (\hat{S}_z^{(1)} + \hat{S}_z^{(2)})|\phi\rangle = 0$  voraussetzt. Für diesen Fall wären die Spins zweier verschränkter Teilchen entlang derselben Richtung genau entgegengesetzt, so dass die bekannte Relation

$$E(\vec{b}', \vec{b}') = -1 \quad (67)$$

gelten würde. Mit (67) und  $\vec{a}' = \vec{b}'$  ginge die CHSH-Ungleichung über in:

$$\begin{aligned} |E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}')| &\leq 2 \pm E(\vec{b}, \vec{b}') \pm (-1) \text{ oder} \\ |E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}')| &\leq 1 + E(\vec{b}, \vec{b}'). \end{aligned} \quad (68)$$

Die letzte Form entspricht nach einer Umdefinition der Parameter  $\vec{b}' = \vec{c}$  exakt der Bellschen Ungleichung.

Analog zu jener wollen wir auch für die CHSH-Ungleichung mit einem Widerspruchsbeweis feststellen, dass sich die Quantenmechanik nicht mit einer LRT verborgener Parameter vervollständigen lässt. Dafür ist es ausreichend zu zeigen, dass die Vorhersagen der Quantenmechanik in mindestens einem Fall die CHSH-Ungleichung verletzen würden. Seien  $\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}$  und  $\vec{b}'$  vier koplanare Einheitsvektoren, die jeweils einen Winkel  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}' = \vec{a}' \cdot \vec{b}' = \pi/4$  einschließen (vgl.

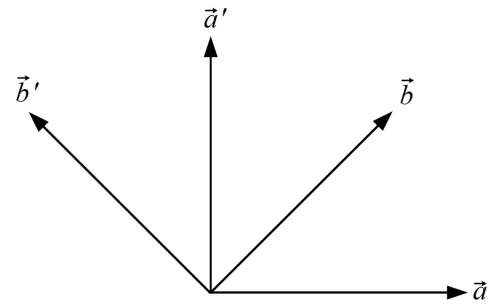


Abbildung 5: Orientierungen der Messapparatur zur Verletzung der CHSH-Ungleichung.

Abbildung 5). Das Einsetzen dieser Werte in die CHSH-Ungleichung (65) ergibt:

$$\begin{aligned} S(0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ) &= |-\cos(45^\circ) + \cos(135^\circ)| + |-\cos(45^\circ) - \cos(45^\circ)| \\ &= 2\sqrt{2} \not\leq 2. \end{aligned} \quad (69)$$

Hierbei wurde ausgenutzt, dass sich der quantenmechanische Erwartungswert zwischen den Vektoren einer Ebene berechnen lässt über:

$$E_{QM}(\vec{a}, \vec{b}) = -\cos(\beta - \alpha). \quad (70)$$

Damit ist der Widerspruchsbeweis auch für die CHSH-Ungleichung vollständig.

### 4.5.3 Die CHSH-Annahme

Cluser *et al.* stellen ihre Ungleichung unter der Zusatzannahme (CHSH-Annahme) auf, dass die Wahrscheinlichkeit der gemeinsamen Detektion  $D_{AB}$  der Photonen unabhängig von der eingestellten Orientierung des jeweiligen Analysators ist.<sup>59</sup>

<sup>59</sup> CHSH (1969), S. 881. Hiermit gemeint ist in der Tat nur die reine Detektionswahrscheinlichkeit der Photonen durch einen Photomultiplier und nicht irgendeine Art von Messung. Wie bereits in Fußnote 58 erwähnt, verwendeten Cluser *et al.* zur Herleitung ihrer Ungleichung polarisationsverschränkte Photonen. Aus diesem Grund erfolgten die „Messungen“ mit Analysatoren anstatt mit Stern-Gerlach-Apparaten.

Formal können wir diese Zusatzannahme folgendermaßen darstellen:<sup>60</sup>

$$D_{AB}(\lambda) = D_A(\vec{a}, \lambda) D_B(\vec{b}, \lambda). \quad (71)$$

Diese Annahme ist natürlich eine starke Idealisierung und schließt genau die Fälle aus, die im Abschnitt 4.5.1 vorgestellt wurden. Das wird insbesondere dann deutlich, wenn wir uns die Korrelationsfunktionen  $E(\vec{a}, \vec{b})$  der CHSH-Ungleichung genauer anschauen. Seien

$$A(\vec{a}, \lambda) = \epsilon_a = \pm 1 \text{ und } B(\vec{b}, \lambda) = \epsilon_b = \pm 1 \quad (72)$$

die möglichen Ergebnisse der Messapparate  $A$  und  $B$ . Dann können wir, wenn  $p_{ab}$  die Koinzidenzwahrscheinlichkeit für die gleichzeitige Messung von  $\epsilon_a$  und  $\epsilon_b$  ist, den Erwartungswert  $E(\vec{a}, \vec{b})$  bestimmen über:<sup>61</sup>

$$\begin{aligned} E(\vec{a}, \vec{b}) &= \sum \epsilon_a \epsilon_b p_{ab} \\ &= (+1)(+1)p_{++} + (-1)(+1)p_{-+} + (+1)(-1)p_{+-} + (-1)(-1)p_{--} \\ &= p_{++} + p_{--} - p_{+-} - p_{-+}. \end{aligned} \quad (73)$$

Wenn  $N$ , die Anzahl der emittierten Teilchenpaare, ausreichend groß ist, dann gilt für die Koinzidenzwahrscheinlichkeit  $p_{++}(\vec{a}, \vec{b})$ :

$$p_{++}(\vec{a}, \vec{b}) = N_{++}(\vec{a}, \vec{b})/N. \quad (74)$$

$p_{--}(\vec{a}, \vec{b})$ ,  $p_{-+}(\vec{a}, \vec{b})$  und  $p_{+-}(\vec{a}, \vec{b})$  werden analog berechnet. Damit folgt für die Korrelationsfunktion  $E(\vec{a}, \vec{b})$  in (73):

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{N_{++}(\vec{a}, \vec{b}) + N_{--}(\vec{a}, \vec{b}) - N_{+-}(\vec{a}, \vec{b}) - N_{-+}(\vec{a}, \vec{b})}{N}. \quad (75)$$

Nun steht  $N$  für die Anzahl aller emittierten Teilchenpaare und nicht nur für diejenigen, die tatsächlich detektiert wurden, oder noch konkreter:  $N$  ist die Anzahl aller Teilchenpaare, die sich bereits zwischen dem Analysator und dem Detektor befinden. Dadurch aber wäre die CHSH-Ungleichung experimentell nur überprüfbar, wenn 100% aller Teilchen in den Orientierungen  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  auch detektiert werden könnten. Nicht perfekt arbeitende Analysatoren und ineffiziente Detektoren verhindern dieses jedoch. Hier setzt die CHSH-Annahme an, die auch als *fair sampling*-Annahme bezeichnet wird.<sup>62</sup> Sie besagt, dass die tatsächlich detektierte Anzahl der Teilchenpaare eine – wörtlich übersetzt – *ausreichende Stichprobe* der Gesamtzahl aller Teilchenpaare darstelle, beziehungsweise das vermessene Teilchenensemble tatsächlich eine repräsentative Auswahl aller Teilchen sei. Dadurch können wir die Erwartungswerte  $E(\vec{a}, \vec{b})$  in der CHSH-Ungleichung tatsächlich über experimentell zählbare Koinzidenzraten bestimmen, ohne die tatsächliche Anzahl aller Teilchenpaare  $N$

60 A. Afriat and F. Selleri, *The Einstein, Podolsky, and Rosen Paradox in Atomic, Nuclear, and Particle Physics*, S. 104 (New York, 1999).

61 M. Le Bellac, *Quantum Physics*, S. 175 (Cambridge, 2006).

62 G. Weihs, *Ein Experiment zum Test der Bellschen Ungleichung unter Einsteinscher Lokalität*, Dissertation, S. 24 (Universität Wien, 1999).

zu kennen. Dieses bedeutet gleichzeitig aber auch, dass einseitige Messereignisse  $A$  ohne koinzidente Partnerereignisse  $B$  nicht berücksichtigt werden.

Die CHSH-Ungleichung enthält nur Linearkombinationen von Korrelationsfunktionen. Diese sind messbar, indem der Mittelwert des Produkts der Spin- oder Polarisationsmessungen aus den Messergebnissen  $\pm 1$  gebildet wird (vgl. Gleichung (75)).<sup>63</sup> Als Verallgemeinerung der Bellschen Ungleichung, die sich explizit mit der Spinmessung zweier Teilchen im Singulettzustand auseinandersetzt, gilt die CHSH-Ungleichung für alle statistischen Experimente, bei denen zwei voneinander unabhängige Teilsysteme involviert sind und zwei dichotome<sup>64</sup> Messungen an jedem der beiden Teilsysteme durchgeführt werden können.<sup>65</sup>

## 4.6. Die Clauser-Horne-Ungleichung

### 4.6.1 Herleitung der Clauser-Horne-Ungleichung

1974 leiteten Clauser und Horne (CH) eine Ungleichung her, die nur mit Koinzidenzwahrscheinlichkeiten beziehungsweise konkreten Zählraten auskommt und auf eine Mittelwertbildung der einzelnen Messungen verzichtet.<sup>66</sup> Dagegen wurden in den bisherigen Ungleichungen stets Korrelationsfunktionen betrachtet. Zusätzlich diskutierten Clauser und Horne ausführlich den Einfluss der Detektoreffizienz auf die Gültigkeit der durch die Messergebnisse gezogenen Schlussfolgerungen. Zur Herleitung verwendeten sie einen Versuchsaufbau wie auf Abbildung 6.

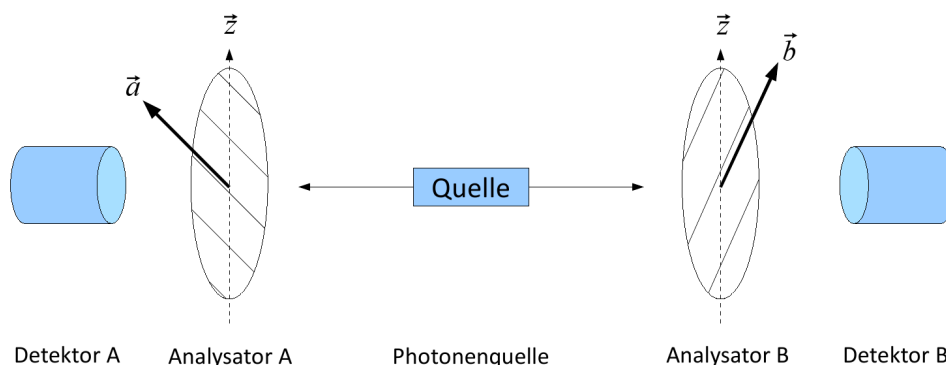


Abbildung 6: Schematischer Versuchsaufbau zur Herleitung der CH-Ungleichung mit Einkanal-detektoren. Die Quelle emittiert verschränkte Photonennpaare, deren Photonen sich in entgegengesetzte Richtungen ausbreiten. Dort treffen sie auf einen Analysator und werden von diesem entweder absorbiert oder treten durch ihn hindurch. Im letzten Fall werden sie vom Detektor mit einer entsprechenden Effizienz registriert. Die Winkel zwischen der Orientierung des Analysators und der  $z$ -Achse seien  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

63 Das Messergebnis  $\pm 1$  kann hierbei ganz allgemein für die Detektion von Spin-up oder Spin-down, vertikaler oder horizontaler, aber auch von links- oder rechtszirkularer Polarisation stehen.

64 Dichotome Messungen sind solche, die als Ergebnis nur eine von zwei Möglichkeiten liefern.

65 Y.-C. Liang, *Correlations, Bell Inequality Violation & Quantum Entanglement*, Dissertation, S. 12 (University of Queensland, 2008).

66 J. F. Clauser, M. A. Horne, *Phys. Rev. D* **10**, S. 526-535 (1974). Die folgenden Betrachtungen sind, soweit nicht anders angegeben, an diese Arbeit angelehnt.

Die Photonenquelle emittiere  $N$  Photonenpaare in einem gegebenen Zeitraum, in welchem die Analysatorrichtungen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  nicht verändert werden. Innerhalb dieses Zeitraums werden  $N_A(\vec{a})$  und  $N_B(\vec{b})$  Teilchen in den Detektoren  $A$  und  $B$  gezählt, sowie  $N_{AB}(\vec{a}, \vec{b})$  Koinzidenzen in beiden Detektoren registriert. Die Analysatoren lassen nur die Photonen durch, die parallel zu  $\vec{a}$  oder  $\vec{b}$  polarisiert sind. Orthogonal polarisierte Photonen hingegen werden absorbiert. Die möglichen Ergebnisse der Messapparate  $A$  und  $B$  sind dann  $A(\vec{a}, \lambda) = +1$  und  $B(\vec{b}, \lambda) = +1$ , so dass lediglich die Koinzidenzwahrscheinlichkeit  $p_{++}(\vec{a}, \vec{b})$  existiert. Die Wahrscheinlichkeiten  $p_{--}(\vec{a}, \vec{b})$ ,  $p_{-+}(\vec{a}, \vec{b})$ ,  $p_{+-}(\vec{a}, \vec{b})$  (vgl. dazu Gleichung (73)) können in einem Experiment wie auf Abbildung 6 nicht bestimmt werden.

Ist  $N$  ausreichend groß, können auch hier die relativen Häufigkeiten durch die entsprechenden Koinzidenzwahrscheinlichkeiten wie in (73) ersetzt werden:<sup>67</sup>

$$\begin{aligned} p_A(\vec{a}) &= N_A(\vec{a})/N, \\ p_B(\vec{b}) &= N_B(\vec{b})/N, \\ p_{AB}(\vec{a}, \vec{b}) &= N_{AB}(\vec{a}, \vec{b})/N. \end{aligned} \quad (76)$$

Analog zur Herleitung der Bellschen Ungleichung und der CHSH-Ungleichung nehmen wir verborgene Parameter  $\lambda$  an, aufgrund derer die Messergebnisse determiniert sind. Allerdings legen die  $\lambda$  im Unterschied zu den bisherigen Ungleichungen nur die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Messergebnis fest. Damit betrachten wir hier den Fall einer *stochastischen* LRT verborgener Parameter, im Gegensatz zu einer rein *deterministischen* LRT. Fine zeigte aber 1982, dass jede deterministische Verborgene-Parameter-Theorie auch eine faktorisierbare stochastische sei.<sup>68</sup> Mit der normierten Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\rho(\lambda)$  aus (48) erhalten wir für die oben angegebenen Koinzidenzwahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} p_A(\vec{a}) &= \int_{\lambda \in \Lambda} d\lambda \rho(\lambda) p_A(\vec{a}, \lambda), \\ p_B(\vec{b}) &= \int_{\lambda \in \Lambda} d\lambda \rho(\lambda) p_B(\vec{b}, \lambda), \\ p_{AB}(\vec{a}, \vec{b}) &= \int_{\lambda \in \Lambda} d\lambda \rho(\lambda) p_{AB}(\vec{a}, \vec{b}, \lambda). \end{aligned} \quad (77)$$

Das Lokalitätsprinzip, welches die Unabhängigkeit der beiden Messungen fordert, können wir über eine Faktorisierung der Koinzidenzwahrscheinlichkeit  $p_{AB}(\vec{a}, \vec{b}, \lambda)$  ausdrücken:<sup>69</sup>

$$p_{AB}(\vec{a}, \vec{b}, \lambda) = p_A(\vec{a}, \lambda) p_B(\vec{b}, \lambda). \quad (78)$$

Da die Gesamtzahl  $N$  der emittierten Photonenpaare in der Praxis nicht zugänglich ist, muss eine von ihr unabhängige Ungleichung entwickelt werden. Dafür betrachten

<sup>67</sup> Die Indizes  $++$  werden in den folgenden Rechnungen aus Gründen der Übersicht fortgelassen.

<sup>68</sup> A. Fine, Phys. Rev. Lett. **48**, S.291-295 (1982).

<sup>69</sup> Damit müssen wir im weiteren Verlauf auch nicht mehr zwischen einer deterministischen und stochastischen LRT unterscheiden, da alle bisherigen Formulierungen bezüglich verborgener Parameter zu den folgenden äquivalent sein werden, wie es Fine 1982 bewiesen hat.

wir zwei alternative Orientierungen der Analysatoren  $\vec{a}'$  und  $\vec{b}'$  und fordern, dass alle Wahrscheinlichkeiten sinnvoller Weise die folgenden Ungleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} 0 &\leq p_A(\vec{a}, \lambda) \leq 1 \\ 0 &\leq p_A(\vec{a}', \lambda) \leq 1 \\ 0 &\leq p_B(\vec{b}, \lambda) \leq 1 \\ 0 &\leq p_B(\vec{b}', \lambda) \leq 1. \end{aligned} \quad (79)$$

Die Herleitung der CH-Ungleichung erfolgt nun aus diesen Forderungen rein algebraisch und bedarf, bis auf das Lokalitätsprinzip, keiner weiterer Annahmen. Gegeben seien sechs beliebige Zahlen

$$0 \leq x_1 \leq X, 0 \leq x_2 \leq X, 0 \leq y_1 \leq Y, 0 \leq y_2 \leq Y, \quad (80)$$

sowie die Funktion  $\Gamma = x_1 y_1 - x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2 - Y x_2 - X y_1$ . Dann gilt, wie gleich bewiesen werden wird, die Ungleichung:

$$-XY \leq \Gamma \leq 0. \quad (81)$$

Zum Beweis der oberen Grenze nehmen wir zwei Fälle an.

1.  $x_1 \geq x_2$ :  
 $\Gamma^{(1)} \equiv \Gamma = (x_1 - X)y_1 + (y_1 - Y)x_2 + (x_2 - x_1)y_2 \leq 0$ . Aus den Forderungen in (80) folgt sofort, dass die ersten beiden Terme nichtpositiv sind und wegen  $x_1 \geq x_2$  die Ungleichung  $\Gamma^{(1)} \leq 0$  erfüllt ist.
2.  $x_1 < x_2$ :  
 $\Gamma^{(2)} \equiv \Gamma = (y_1 - y_2)x_1 + (x_2 - X)y_1 + (y_2 - Y)x_2 \leq 0$ . Wegen  $x_1 < x_2$  können wir schreiben  $\Gamma^{(2)} \leq (y_1 - y_2)x_1 + (x_2 - X)y_1 + (y_2 - Y)x_1 = (y_1 - Y) + (x_2 - X)y_1 \leq 0$ .

Der Beweis der unten Grenze erfolgt auf ähnliche Weise in drei Fällen.

1.  $x_2 \geq x_1$ :  
Mit  $\Gamma + XY = (X - x_2)(Y - y_1) + x_1 y_1 + (x_2 - x_1)y_2$  folgt aufgrund der Forderungen in (80) für die untere Grenze von (81) sofort  $\Gamma + XY \geq 0$ .
2.  $y_1 \geq y_2$ :  
Auch hier können wir für  $\Gamma + XY = (X - x_2)(Y - y_1) + x_2 y_2 + (y_1 - y_2)x_1$  direkt die untere Grenze  $\Gamma + XY \geq 0$  beweisen.
3.  $x_2 < x_1$  und  $y_1 < y_2$ :  
Wir erkennen, dass  $\Gamma + XY = (X - x_2)(Y - y_1) - (x_1 - x_2)(y_2 - y_1) + x_2 y_1 \geq 0$  sein muss, da die ersten beiden Terme wegen  $(X - x_2) \geq (x_1 - x_2) > 0$  und  $(Y - y_1) \geq (y_2 - y_1) > 0$  nichtnegativ sind und der dritte Summand aufgrund der Definitionen in (79) auch nichtnegativ ist.

Aus (78) folgt mit Ungleichung (81):

$$-1 \leq p_A(\vec{a}, \lambda) p_B(\vec{b}, \lambda) - p_A(\vec{a}, \lambda) p_B(\vec{b}', \lambda) + p_A(\vec{a}', \lambda) p_B(\vec{b}, \lambda) + p_A(\vec{a}', \lambda) p_B(\vec{b}', \lambda) - p_A(\vec{a}', \lambda) - p_B(\vec{b}, \lambda) \leq 0. \quad (82)$$

Schließlich erhalten wir nach einer Integration von  $\rho(\lambda) d\lambda$  über die gesamte Ungleichung und mit (77) die *CH-Ungleichung*:

$$-1 \leq p_{AB}(\vec{a}, \vec{b}) - p_{AB}(\vec{a}, \vec{b}') + p_{AB}(\vec{a}', \vec{b}) + p_{AB}(\vec{a}', \vec{b}') - p_A(\vec{a}') - p_B(\vec{b}) \leq 0. \quad (83)$$

Darin können wir die rechte Seite so umschreiben, dass nur noch Verhältnisse von Koinzidenzwahrscheinlichkeiten auftreten und in einem nächsten Schritt nur noch Größen, die unabhängig von der Gesamtzahl  $N$  der emittierten Photonenpaare sind:

$$\frac{p_{AB}(\vec{a}, \vec{b}) - p_{AB}(\vec{a}, \vec{b}') + p_{AB}(\vec{a}', \vec{b}) + p_{AB}(\vec{a}', \vec{b}')}{p_A(\vec{a}') + p_B(\vec{b})} \leq 1. \quad (84)$$

Mit den Zusammenhängen aus (76), der Definition von  $R(\vec{a}, \vec{b})$  als Koinzidenzzählrate,<sup>70</sup>  $r_1(\vec{a})$  und  $r_2(\vec{b})$  als Einzelzählraten und der Annahme, dass die Emissionsrate bei allen Messungen konstant gehalten wird, kann (84) umgeschrieben werden in:

$$\frac{R(\vec{a}, \vec{b}) - R(\vec{a}, \vec{b}') + R(\vec{a}', \vec{b}) + R(\vec{a}', \vec{b}')}{r_A(\vec{a}') + r_B(\vec{b})} \leq 1. \quad (85)$$

Damit existiert eine Ungleichung, die ausschließlich messbare Zählraten enthält, *ohne Zusatzannahmen* für eine experimentelle Umsetzung in Frage kommt<sup>71</sup> und von jeder LRT erfüllt werden muss.<sup>72</sup> Ein bedeutender Unterschied zur CHSH-Ungleichung besteht darin, dass bei einer möglichen experimentellen Überprüfung die dichotome Auswahl aufgrund der verwendeten Einkanalidetektoren nur zwischen den Möglichkeiten „Absorption“ und „Nicht-Absorption“ erfolgt. Im Gegensatz hierzu ist die CHSH-Ungleichung „näher“ am originalen EPR-Gedankenexperiment dran, weil darin, da auf jeder Seite der emittierenden Quelle mit zwei Detektoren gemessen wird, eine echte dichotome Messung (Spin-up oder Spin-down) berücksichtigt wird. Außerdem enthält die CH-Ungleichung nur Linearkombinationen von Koinzidenzwahrscheinlichkeiten beziehungsweise Verhältnisse dieser und nicht mehr, wie die CHSH-Ungleichung, Korrelationsfunktionen.

70 Aufgrund der Verhältnisbildung verschwindet die Normierung auf die tatsächlich emittierten Teilchenpaare, so dass die Wahrscheinlichkeiten durch Zählraten ersetzt werden können.

71 Die CH-Ungleichung wurde allerdings bis heute noch nicht im Experiment getestet (vgl. dazu den Aufsatz von E. S. Fry and T. Walther, Atom based tests of the Bell inequalities – the Legacy of John Bell continues... S. 2 (preprint 2001),

URL: <http://www.lqo.tu-darmstadt.de/publications/proceeding/pdfdownloads/bellpaper.pdf> (Stand: 06. August 2009)). Ein Grund ist die dafür notwendige hohe Effizienz der Detektoren, auf die wir im nächsten Abschnitt zu sprechen kommen.

72 Clauser, Horne (1974), S. 529.



## 4.6.2 Vorhersagen der Quantenmechanik für die CH-Ungleichung

Es bleibt an dieser Stelle zu überprüfen, ob die Quantenmechanik auch die CH-Ungleichung verletzt. Angenommen, ein Experiment zum Test der CH-Ungleichung ist invariant unter Rotation und  $p_A(\vec{a})$  und  $p_B(\vec{b})$  sind konstant. Dann gelten für die quantenmechanischen Vorhersagen und Korrelationen die folgenden Symmetrieüberlegungen:<sup>73</sup>

$$\begin{aligned} [p_A(\vec{a})]_{QM} \text{ und } [r_A(\vec{a})]_{QM} &\text{ sind unabhängig von } \vec{a}. \\ [p_B(\vec{b})]_{QM} \text{ und } [r_B(\vec{b})]_{QM} &\text{ sind unabhängig von } \vec{b}. \\ [p_{AB}(\vec{a}, \vec{b})]_{QM}, [R(\vec{a}, \vec{b})]_{QM} \text{ und } [E(\vec{a}, \vec{b})]_{QM} &\text{ sind nur Funktionen von } |\vec{a} - \vec{b}|. \end{aligned} \quad (86)$$

Wir nehmen an, dass lokal-realistische Theorien dieselben Symmetrien aufweisen:

$$\begin{aligned} p_A(\vec{a}) \equiv p_A \text{ und } r_A(\vec{a}) \equiv r_A &\text{ sind unabhängig von } \vec{a}. \\ p_B(\vec{b}) \equiv p_B \text{ und } r_B(\vec{b}) \equiv r_B &\text{ sind unabhängig von } \vec{b}. \\ p_{AB}(\vec{a}, \vec{b}) \equiv p_{AB}(|\vec{a} - \vec{b}|), R(\vec{a}, \vec{b}) \equiv R(|\vec{a} - \vec{b}|) &\text{ und } E(\vec{a}, \vec{b}) \equiv E(|\vec{a} - \vec{b}|). \end{aligned} \quad (87)$$

Es sei allerdings darauf hingewiesen, dass die Symmetrieüberlegungen in (87) weder aus der Quantenmechanik noch aus einer hypothetischen Symmetrie im Versuchsaufbau folgen, da nicht bekannt ist, inwiefern eine Symmetriebrechung auf der Ebene verborgener Parameter überhaupt auftritt.<sup>74</sup> Allerdings sind die Annahmen auch nicht unzulässig, da sich die postulierten Symmetrien durch Messungen zu verschiedenen Winkeleinstellungen im Experiment überprüfen lassen.

Nun wählen wir  $\vec{a}$ ,  $\vec{a}'$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{b}'$  so, wie auf Abbildung 5 dargestellt, so dass

$$|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}' - \vec{b}| = |\vec{a}' - \vec{b}'| = \frac{1}{3} |\vec{a} - \vec{b}'| \equiv \phi. \quad (88)$$

Damit können wir die CH-Ungleichung (83) umschreiben zu:

$$-1 \leq 3 p_{AB}(\phi) - p_{AB}(3\phi) - p_A - p_B \leq 0. \quad (89)$$

Beziehungsweise folgt mit

$$S(\phi) \equiv \frac{3 p_{AB}(\phi) - p_{AB}(3\phi)}{p_A + p_B} \quad (90)$$

der Zusammenhang:

$$S(\phi) \leq 1. \quad (91)$$

Sowohl die Koinzidenzwahrscheinlichkeit  $p_{AB}(\phi)$  als auch die Wahrscheinlichkeiten für die Einzelereignisse  $p_{A/B}$  lassen sich wegen (76) und der angenommenen Konstanz der Emission wiederum als Zählraten annehmen, weswegen wir  $S(\phi)$  auch mit experimentell direkt zugänglichen Größen ausdrücken können:

<sup>73</sup> Clauser, Shimony (1978), S. 1896.

<sup>74</sup> Ebd.

$$S(\phi) \equiv \frac{3R(\phi) - R(3\phi)}{r_A + r_B}. \quad (92)$$

Hierin steht  $R(\phi)$  für die Koinzidenzzählrate, bei der zwischen den beiden Analysatoren  $A$  und  $B$  der Winkel  $\phi$  eingestellt ist. Erwähnenswert ist, dass mit den weiter oben getroffenen Symmetrieüberlegungen auch die CHSH-Ungleichung (65) umgeschrieben werden kann:

$$|3E(\phi) - E(3\phi)| \leq 2. \quad (93)$$

Nehmen wir nun weiterhin ein Experiment wie auf Abbildung (7) an. Die quantenmechanischen Vorhersagen für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind:<sup>75</sup>

$$\begin{aligned} [p_{AB}(\phi)]_{QM} &= \frac{1}{4} \eta_A \eta_B f_A g [\epsilon_+^A \epsilon_+^B + \epsilon_-^A \epsilon_-^B F \cos(n\phi)], \\ [p_A]_{QM} &= \frac{1}{2} \eta_A f_A \epsilon_+^A, \\ [p_B]_{QM} &= \frac{1}{2} \eta_B f_B \epsilon_+^B. \end{aligned} \quad (94)$$

Diese Resultate sind charakteristisch für viele Korrelationsexperimente, darunter auch für die hier betrachteten Versuche mit korrelierten Spin-1/2 Teilchen und Photonen. Dabei steht  $\eta_j$  in (94) für die Quanteneffizienz des Detektors  $j$  ( $j = A, B$ ). Für die  $\epsilon_{\pm}^j$  gelten die Relationen:

$$\begin{aligned} \epsilon_+^j &\equiv \epsilon_M^j + \epsilon_m^j, \\ \epsilon_-^j &\equiv \epsilon_M^j - \epsilon_m^j, \end{aligned} \quad (95)$$

mit  $\epsilon_M^j$  und  $\epsilon_m^j$  als maximaler und minimaler Transmissionsgrad der Analysatoren.<sup>76</sup> Die Funktionen  $f_A$  und  $f_B$  beinhalten die winkelabhängige Effizienz der in einem realen Experiment üblicherweise vorhandenen Kollimatoren<sup>77</sup> und die Funktion  $g$  ist die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass, wenn ein emittiertes Photon auf den Detektor  $A$  trifft, auch sein verschränkter Partner auch von Detektor  $B$  registriert werden kann.<sup>78</sup> Die Funktion  $F$  ist ein Maß für die Reinheit des Anfangszustands.<sup>79</sup> Die Werte 1 und 2 für  $n$  hängen davon ab, ob das Experiment mit Fermionen oder Bosonen durchgeführt wird.

<sup>75</sup> Clauser, Horne (1974), S. 529.

<sup>76</sup> Maximaler und minimaler Transmissionsgrad sind gleichbedeutend mit der Effizienz der Analysatoren, parallel beziehungsweise senkrecht zur Polarisationsachse polarisiertes Licht nicht zu absorbieren.

<sup>77</sup> Gemeint ist die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Photon nach dem Passieren des Analysators durch den Kollimator auf den Detektor treffen kann.

<sup>78</sup> Wir wir später erfahren werden, können miteinander verschränkte Photonen auch dadurch entstehen, dass ein angeregtes Atom über mehrere Stufen in den Grundzustand übergeht und dabei ein verschränktes Photonenpaar emittiert. Dieses stellt einen sogenannten Dreikörperzerfall dar, mit dem zurückbleibenden Atom als dritten Körper, welches immer einen Teil des Gesamtimpulses aufnimmt. Die beiden Photonen werden nur im Idealfall in wohldefinierte Richtungen – idealerweise im 180°-Winkel - emittiert. Die Funktion  $g$  beschreibt diese räumliche Korrelation des verschränkten Photonenpaares. Für eine perfekte Korrelation ist  $g = 1$ .

<sup>79</sup> Die exakten funktionalen Abhängigkeiten sind an dieser Stelle nicht von Bedeutung und können nachgeschlagen werden bei: Clauser, Horne (1974), S. 529.

Nach dem Einsetzen der quantenmechanischen Vorhersagen (94) in die Definition für  $S(\phi)$  aus (90) folgt:<sup>80</sup>

$$S(\phi)_{QM} = \frac{1}{4} \eta g \left\{ 2\epsilon_+ + [3 \cos(n\phi) - \cos(3n\phi)] F \left( \frac{\epsilon_-^2}{\epsilon_+} \right) \right\}. \quad (96)$$

Hierin wurde der Einfachheit halber  $\eta \equiv \eta_1 = \eta_2$ ,  $f_1 = f_2$ ,  $\epsilon_+ \equiv \epsilon_+^A = \epsilon_+^B$  und  $\epsilon_- \equiv \epsilon_-^A = \epsilon_-^B$  angenommen. Eine Bedingung für die Verletzung der symmetrisierten CH-Ungleichung (91) erhalten wir dann beispielsweise bei  $\phi = \pi/4n$  mit:

$$\eta g \epsilon_+ \left[ \sqrt{2} \left( \frac{\epsilon_-^2}{\epsilon_+} \right)^2 F + 1 \right] \geq 2. \quad (97)$$

Nur ein Korrelationsexperiment, welches diese Ungleichung erfüllen würde, wäre in der Lage, zwischen den Vorhersagen der Quantentheorie und denen lokal-realistischer Theorien differenzieren zu können. In allen anderen Fällen können wir zwischen den beiden Theorien experimentell keinen Unterschied feststellen.

Inwiefern uns die tatsächlichen experimentellen Voraussetzung daran hindern, die Ungleichung (91) zu überprüfen, ist auf Abbildung 7 dargestellt.

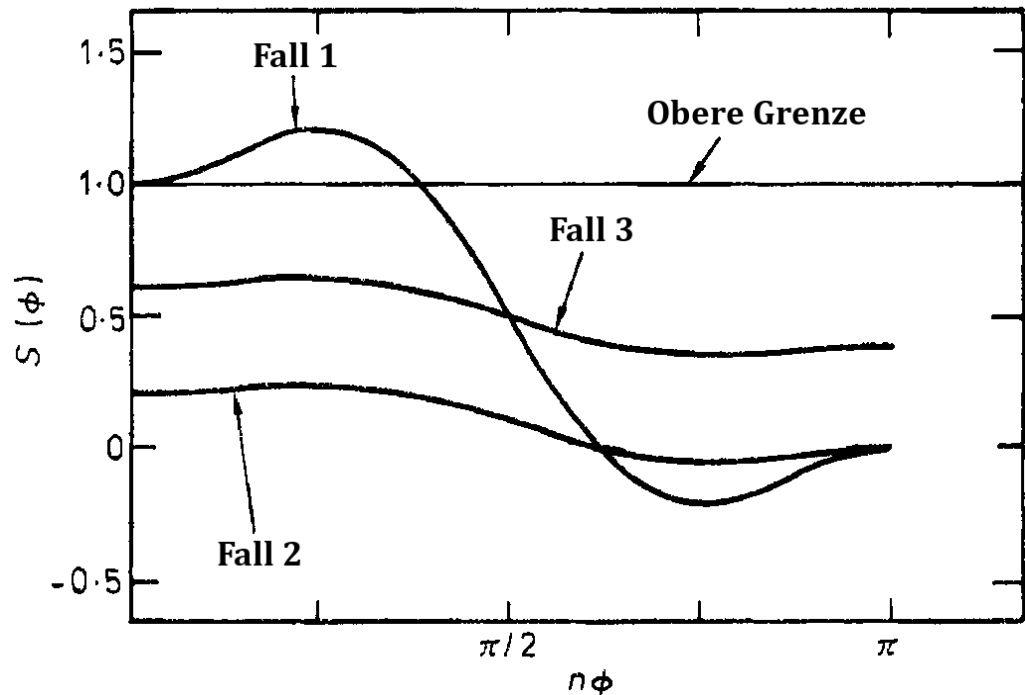


Abbildung 7:<sup>81</sup> Darstellung der Abhängigkeit der Größe  $S(\phi)$  von  $n\phi$  für die Fälle I-III. Die obere Grenze wird von der CH-Ungleichung (91) mit +1 festgelegt. Nur beim Überschreiten dieser Grenze verletzen die quantenmechanischen Vorhersagen die CH-Ungleichung. Fall I: Die Experimente sind annähernd ideal. Es gelten  $\eta \approx g \approx F \approx \epsilon_+ \approx \epsilon_- \approx 1$ . Fall II: Die Experimente besitzen annähernd ideale Parameter für  $F \approx \epsilon_+ \approx \epsilon_- \approx 1$ . Allerdings sind  $\eta \ll 1$  und/oder  $g \ll 1$ . Fall III: Die Experimente besitzen annähernd ideale Parameter für  $\eta \approx g \approx 1$ . Allerdings sind  $F \ll 1$  und/oder  $\epsilon_+, \epsilon_- \ll 1$ .

<sup>80</sup> Clauser, Shimony (1978), S. 1901.

<sup>81</sup> Bearbeitete Abbildung aus: J. F. Clauser and A. Shimony, Rep. Prog. Phys. 41, S. 1903 (1978).

Darauf wird  $S(\phi)_{QM}$  aus (96) für drei spezielle Fälle verglichen. Die obere Grenze wird durch die symmetrisierte CH-Ungleichung (91) festgelegt. Im ersten Fall haben wir es wegen  $\eta \approx g \approx F \approx \epsilon_+ \approx \epsilon_- \approx 1$  mit einem annähernd idealen Versuchsaufbau zu tun. Die CH-Ungleichung wird von der Quantenmechanik über einen großen Bereich  $0 \leq n\phi \leq 3\pi/8$  mit einem Maximum bei  $n\phi = \pi/4$  verletzt. Im zweiten Fall sind die Parameter mit  $F \approx \epsilon_+ \approx \epsilon_- \approx 1$  fast ideal. Allerdings besitzt der Detektor wegen  $\eta \ll 1$  eine geringe Quanteneffizienz beziehungsweise wegen  $g \ll 1$  eine schwache räumliche Korrelation. Eine Verletzung der CH-Ungleichung (91) durch die Quantenmechanik ist unter keinem Winkel  $\phi$  gegeben. Der Fall II ist typisch für Vorgänge, bei denen verschränkte Photonen über die Abregung von Atomen erzeugt werden (vgl. Fußnote 78). Aufgrund eines solchen Dreikörper-Zerfalls gilt für diese Fälle  $g \ll 1$ , da das zurückbleibende Atom einen Teil des Gesamtimpulses aufnimmt.<sup>82</sup> Im Gegensatz dazu ist für Zweikörper-Zerfälle, wie bei einer Elektron-Positron-Annihilation in zwei Photonen oder der Aufspaltung eines Spin-0 Moleküls in zwei Spin-1/2 Teilchen,  $g \approx 1$ .<sup>83</sup>

Solche Situationen haben wir im Fall III mit  $\eta \approx g \approx 1$  vorliegen. Weiterhin sind in diesem Beispiel  $F \ll 1$  und  $\epsilon_+/\epsilon_- \ll 1$ . Hier liegt also kein absolut reiner Anfangszustand vor und die Analysatoren besitzen eine geringe Effizienz. Auch in diesem Fall ist eine Verletzung der CH-Ungleichung durch die Quantenmechanik unter keinem Winkel zu erkennen. Selbst wenn alle experimentellen Parameter in (94) ideal wären, müsste, um zwischen der Quantenmechanik und einer LRT unterscheiden zu können, für das Produkt aus der Quanteneffizienz  $\eta$  des Detektors und der räumlichen Korrelation  $g$  eines verschränkten Spin-1/2 Systems im Singulettzustand gelten:<sup>84</sup>

$$[\eta g]_{Spin-1/2} \geq 0,829. \quad (98)$$

Für verschränkte Photonen, die über eine atomare Kaskade erzeugt werden, liegt diese Grenze noch höher. Mit einer perfekten räumlichen Korrelation ist das untere Limit für die Quanteneffizienz des Detektors:<sup>85</sup>

$$[\eta]_{Kaskade} \geq 0,919. \quad (99)$$

Somit können wir in Experimenten, welche hinsichtlich der in den Fällen II und III auf Abbildung 7 diskutierten Parameter nicht ideal sind, *a priori* nicht zwischen den Vorhersagen der Quantenmechanik und denen lokal-realistischer Theorien unterscheiden. Um dieses dennoch zu ermöglichen, sind Zusatzannahmen notwendig, mit deren Hilfe wir die Skalierung von  $S(\phi)$  so verändern können, dass die Amplitude ausreicht, um die CH-Ungleichung mit  $S(\phi) > 1$  zu verletzen.<sup>86</sup> Die Zusatzannahmen besitzen daher den Zweck, nicht zu realisierende Idealisierungen im Experiment qua Annahme zu umgehen. Die CHSH-Annahme in (71) haben wir bereits als einen Vertreter kennen gelernt. Im folgenden Kapitel wollen wir uns mit einer weiteren An-

82 Clauser, Horne (1974), S. 530.

83 Ebd.

84 Fry *et al.* (1995), S. 4383.

85 S. F. Huelga and M. Ferrero, E. Santos, Phys. Rev. A 51, S. 5008-5011 (1995).

86 Clauser, Shimony (1978), S. 1903.

nahme auseinandersetzen, um anschließend diskutieren zu können, wie sich solche getroffenen Annahmen auf die Überprüfung der Verträglichkeit von Quantenmechanik und lokal-realistischer Theorien auswirken.

## 4.7. Zusatzannahmen und die Freedman-Clauser-Ungleichung

### 4.7.1 Die CH-Annahme

Das Problematische an der CHSH-Annahme ist, dass sich ihre Gültigkeit experimentell nicht überprüfen lässt.<sup>87</sup> Clauser und Horne benutzten 1974 eine andere Zusatzannahme, die zu demselben Ergebnis führte: eine Ungleichung zu entwickeln, welche nur von Koinzidenz- und Einzelzählraten abhängig war.<sup>88</sup> Die CH-Annahme ist jedoch wesentlich schwächer als die CHSH-Annahme, was wir formal daran erkennen werden, dass Ungleichungen zur Formulierung der Annahme genügen. Dabei nehmen Clauser und Horne an, dass die Detektionswahrscheinlichkeit  $D$  für jedes emittierte Photon im Zustand  $\lambda$ , in dessen Ausbreitungsrichtung sich ein Analysator befindet, kleiner oder gleich der Detektionswahrscheinlichkeit ohne Analysator sei.<sup>89</sup>

$$\begin{aligned} 0 \leq p_A(\vec{a}, \lambda) \leq p_A(\infty, \lambda) \leq 1, \\ 0 \leq p_B(\vec{b}, \lambda) \leq p_B(\infty, \lambda) \leq 1. \end{aligned} \quad (100)$$

Hierbei bedeutet  $p_A(\infty, \lambda)$ , dass der zugehörige Analysator in  $\vec{a}$ -Richtung entfernt wurde ( $p_B(\infty, \lambda)$  analog). Clauser und Horne sprechen in ihrem Aufsatz von der sogenannten *no-enhancement*-Annahme. Diese Annahme scheint zunächst plausibel, bedeutet doch das Einsetzen eines Analysators in den Strahlengang gleichzeitig das Einfügen eines Hindernisses zwischen Quelle und Detektor, und es ist eine vertraute Annahme, dass ein Hindernis die Detektionswahrscheinlichkeit zumindest nicht erhöht. Es sei aber darauf hingewiesen, dass ein zwischen zwei gekreuzte Analysatoren gesetzter, diagonal ausgerichteter Polarisator  $C$  jedoch sehr wohl die Wahrscheinlichkeit einer Detektion erhöht, indem er die Intensität der Welle im Vergleich zu dem Wert Null ohne Polarisator  $C$  vergrößert hat. Clauser und Shimony bemerken, dass die Situationen bei Experimenten zur Überprüfung der Bellschen Ungleichung nicht von dieser Art seien.<sup>90</sup> Allerdings kann auch die Gültigkeit der CH-Annahme für die in einem realen Experiment vorliegenden Gegebenheiten nicht bewiesen werden.<sup>91</sup>

Mit der *no-enhancement*-Annahme (100), der algebraischen Ungleichung (81) und einer Argumentation, die analog erfolgt wie solche, die von (77) aus zur CH-Ungleichung (83) führt, erhalten wir die erweiterte CH-Ungleichung (eCH-Ungleichung):

$$\begin{aligned} -p_{AB}(\infty, \infty) \leq p_{AB}(\vec{a}, \vec{b}) - p_{AB}(\vec{a}, \vec{b}') + p_{AB}(\vec{a}', \vec{b}) + p_{AB}(\vec{a}', \vec{b}') \\ - p_{AB}(\vec{a}', \infty) - p_{AB}(\infty, \vec{b}) \leq 0. \end{aligned} \quad (101)$$

<sup>87</sup> Clauser, Shimony (1978), S. 1912f.

<sup>88</sup> Fry, Walther (2001), S. 2.

<sup>89</sup> Clauser, Horne (1974), S. 530.

<sup>90</sup> Clauser, Shimony (1978), S. 1913.

<sup>91</sup> Ebd.

Hierbei ist zu beachten, dass alle Terme in (101) Koinzidenzwahrscheinlichkeiten  $p_{AB}$  zwischen den beiden Detektoren  $A$  und  $B$  sind. Im Gegensatz dazu enthält die ursprüngliche CH-Ungleichung mit  $p_A$  und  $p_B$  auch Wahrscheinlichkeiten für die Zählraten an nur einem Detektor. Nach einer Division durch  $p_{AB}(\infty, \infty)$ , der Einstellung, bei der die Analysatoren auf beiden Seiten der Quelle entfernt worden sind, wird auch die eCH-Ungleichung von der Gesamtzahl  $N$  der emittierten Photonenpaare unabhängig, so dass wir analog zur Herleitung der ursprünglichen CH-Ungleichung in Kapitel 4.6.1 die Wahrscheinlichkeiten durch experimentell zugängliche Zählraten ersetzen können:

$$-1 \leq S' \leq 0. \quad (102)$$

Wobei für  $S'$  gilt:<sup>92</sup>

$$S' = \frac{R(\vec{a}, \vec{b}) - R(\vec{a}, \vec{b}') + R(\vec{a}', \vec{b}) + R(\vec{a}', \vec{b}') - R(\vec{a}', \infty) - R(\infty, \vec{b})}{R(\infty, \infty)}. \quad (103)$$

### 4.7.2 Die Freedman-Clauser-Ungleichung

Nachdem wir die CH-Ungleichung mit der *no-enhancement*-Annahme auf nicht ideale Versuchsbedingungen ausgeweitet haben, können wir analog zu (87) auch an dieser Stelle Symmetrieüberlegungen anbringen, um eine vereinfachte Form der Ungleichung zu erhalten:<sup>93</sup>

$$\begin{aligned} p_{AB}(\vec{a}, \infty) &\equiv p_{AB}(\infty) \text{ und } r_A(\vec{a}) \equiv r_A \text{ sind unabhängig von } \vec{a}. \\ p_{AB}(\infty, \vec{b}) &\equiv p_{AB}(\infty) \text{ und } r_B(\vec{b}) \equiv r_B \text{ sind unabhängig von } \vec{b}. \\ p_{AB}(\vec{a}, \vec{b}) &\equiv p_{AB}(\phi) \text{ und } R(\vec{a}, \vec{b}) \equiv R(\phi) \text{ mit } \phi = |\vec{a} - \vec{b}|. \end{aligned} \quad (104)$$

Mit (88) können wir auf diese Weise die eCH-Ungleichung umschreiben zu

$$-p_{AB}(\infty, \infty) \leq 3p_{AB}(\phi) - p_{AB}(3\phi) - p_{AB}(\vec{a}', \infty) - p_{AB}(\infty, \vec{b}) \leq 0. \quad (105)$$

Wenn die Emissionsrate bei allen Messungen wieder konstant gehalten werden kann, können wir mit  $\vec{a}' = \vec{a}$  die Verhältnisse der Wahrscheinlichkeiten als Zählraten notieren:

$$\begin{aligned} p_{AB}(\phi) / p_{AB}(\infty, \infty) &= R(\phi) / R(\infty, \infty), \\ p_{AB}(\vec{a}, \infty) / p_{AB}(\infty, \infty) &= R_A / R(\infty, \infty), \\ p_{AB}(\infty, \vec{b}) / p_{AB}(\infty, \infty) &= R_B / R(\infty, \infty). \end{aligned} \quad (106)$$

Diese fügen wir in (105) ein und erhalten:

$$-R(\infty, \infty) \leq 3R_{AB}(\phi) - R_{AB}(3\phi) - R_A - R_B \leq 0. \quad (107)$$

Die Ungleichung (107) wurde 1969 bereits von Clauser *et al.* aufgestellt, wofür jene jedoch die wesentlich stärkere CHSH-Annahme verwendeten.<sup>94</sup>

<sup>92</sup> Auch hier sind bei den Zählraten  $R$  die Indizes  $R_{++}$  aus Platzgründen nicht mit angegeben.

<sup>93</sup> Clauser, Shimony (1978), S. 1905.

<sup>94</sup> Clauser, Shimony (1978), S. 1906.

Freedman und Clauser (FC) fassten 1972 die obere und untere Grenze, bei denen die stärksten Verletzungen der Ungleichung durch die Quantenmechanik auftreten, zusammen.<sup>95</sup> Mit  $\phi=\pi/8$  als maximale Verletzung der oberen Grenze in (107) erhalten wir:

$$-R(\infty, \infty) \leq 3 R_{AB}(\pi/8) - R_{AB}(3\pi/8) - R_A - R_B \leq 0. \quad (108)$$

Ebenso bekommen wir mit  $\phi=3\pi/8$  als maximale Verletzung der unteren Grenze:

$$-R(\infty, \infty) \leq 3 R_{AB}(3\pi/8) - R_{AB}(\pi/8) - R_A - R_B \leq 0. \quad (109)$$

Dabei wird  $3\phi=9\pi/8=\pi/8$  ausgenutzt. Wenn wir die letzten beiden Ungleichungen durch  $R(\infty, \infty)$  dividieren und (109) von (108) abziehen, gelangen wir zur wesentlich einfacheren Form von Freedman und Clauser:

$$\delta \equiv \frac{|R_{AB}(\pi/8) - R_{AB}(3\pi/8)|}{R(\infty, \infty)} - \frac{1}{4} \leq 0. \quad (110)$$

Die FC-Ungleichung ist deswegen interessant, weil mit ab 1972 die ersten Experimente zur Überprüfung der Bellschen Ungleichung durchgeführt wurden. Außerdem benötigt man, neben einer Messung ohne Analysatoren auf beiden Seiten, nur noch zwei verschiedenen Differenzwinkel.

## 4.8. Starke und Schwache Ungleichungen

Mit der Einteilung der bisher vorgestellten Ungleichungen in starke und schwache Formen ist es möglich, eine gewisse Systematik in diesem Bereich herzustellen.<sup>96</sup>

### 4.8.1 Starke Ungleichungen

Starke Ungleichungen, wie die originale Bellsche Ungleichung (55) oder auch die CH-Ungleichung (83), können wir direkt und ausschließlich aus dem Lokalitätsprinzip ableiten. Sie können nur in Experimenten mit perfekten Messinstrumenten einen Widerspruch zwischen lokal-realistischen Theorien und den Vorhersagen der Quantenmechanik aufdecken. Bis 1995 ist es niemanden gelungen, die starken Formen der Bellschen Ungleichung experimentell zu überprüfen.<sup>97</sup> Ein Umstand, der - um es vorweg zu nehmen - sich meinen Recherchen nach bis zum heutigen Zeitpunkt auch nicht verändert hat. Allerdings existieren Anstrengungen, Experimente zu realisieren, in denen die Voraussetzungen für eine Überprüfung der starken CH-Ungleichung in (98) mit  $\eta > 0,95$  und  $g \approx 0,97$  sicher erfüllt sind, doch dazu an späterer Stelle mehr.<sup>98</sup>

<sup>95</sup> S. J. Freedman, J. F. Clauser, Phys. Rev. Lett. **28**, S. 938-941 (1972).

<sup>96</sup> Fry *et al.* (1995), S. 4381.

<sup>97</sup> Ebd.

<sup>98</sup> Fry *et al.* (1995), S. 4383.

## 4.8.2 Schwache Ungleichungen

Die schwachen Ungleichungen werden sowohl aus dem Lokalisierungsprinzip als auch aus verschiedenen Zusatzannahmen, wie der CHSH- oder der CH-Annahme, abgeleitet. Wir wissen bereits, dass diese Annahmen vor allem aufgrund der niedrigen Effizienz gewöhnlicher Photonendetektoren getroffen werden müssen, damit die an die realen Gegebenheiten angepassten, berechneten Vorhersagen der Quantenmechanik Ungleichungen, wie die CH-Ungleichung, theoretisch überhaupt verletzen können (vgl. Abbildung 7). Die Lockerung der starken Ungleichungen durch Zusatzannahmen führt jedoch dazu, dass Schlupflöcher, die sogenannten *loopholes*, für lokal-realistische Theorien in die Quantenmechanik offen gelassen werden, welche wir im fünften Kapitel betrachten wollen.

## 4.9. Fazit

Bellsche Ungleichungen sind Relationen zwischen bedingten Wahrscheinlichkeiten, die unter der Annahme eines lokalen Realismus' Gültigkeit besitzen. Während die ursprüngliche Bellsche Ungleichung und die CHSH-Ungleichung Zweikanaldetektoren voraussetzen, um echte dichotome Größen messen zu können, erfordert die CH- und eCH-Ungleichung nur einen Einkanaldetektor, wobei zur Normierung der eCH-Ungleichung zusätzliche Hilfsmessungen ohne Polarisator erforderlich sind. Einkanaldetektoren besitzen einen entscheidenden Nachteil: Wenn ein verschränktes Photonenpaar von der Quelle emittiert wurde und Detektor *A* ein Photon gezählt hat, Detektor *B* jedoch nicht, dann wissen wir nicht, ob das nicht-detektierte Photon „verloren ging“ oder vom Analysator absorbiert wurde. Nur der letzte Fall entspräche einer echten dichotomen Messung in Anlehnung an das EPR-Gedankenexperiment. Zur experimentellen Überprüfung sind Zusatzannahmen notwendig, die der Güte des gesamten Versuchsaufbaus Rechnung tragen. Ohne sie ist eine Unterscheidung zwischen der Quantenmechanik und einer LRT mit verborgenen Parametern unter realen Bedingungen nicht möglich. Bellsche Ungleichungen stehen *a priori* nicht im Zusammenhang mit der Quantenphysik. Aber gerade die Tatsache, dass die Quantenmechanik sämtliche Arten Bellscher Ungleichungen verletzt, macht sie so interessant. Nicolas Gisin schreibt dazu:

*“I bet that in a few decades Bell inequalities will be taught at high school, because of their mathematical simplicity, their force as an example of the scientific methodology and their huge impact on our world view.”<sup>99</sup>*

---

99 Gisin (2009), S. 126.



## 5. Quantenkorrelationen im Experiment

### 5.1. Zu Schlupflöchern oder *loopholes*

Dieses Kapitel behandelt den experimentellen Nachweis von Quantenkorrelationen und wird eingeleitet von einer Übersicht der Probleme, die eine endgültige und sichere Überprüfung der Bellschen Ungleichung bislang unmöglich machten: den Schlupflöchern. Denn, um dieses vorweg zu nehmen, es ist bis zum heutigen Zeitpunkt keinem Experiment gelungen, sämtliche *loopholes* für lokal-realistische Theorien in die Quantenmechanik gleichzeitig zu schließen.<sup>100</sup>

#### 5.1.1 Erstes Schlupfloch – die Detektoreffizienz

Die CHSH-Annahme (vgl. Kapitel 4.5.3) postuliert, dass ein zwischen Quelle und Detektor gestellter Analysator die Detektionswahrscheinlichkeit eines korrelierten Photonenpaares nicht verändert. Damit wird angenommen, dass ein statistisch repräsentatives Ensemble an Photonen detektiert wird. Auch die schwächere CH-Annahme (vgl. Kapitel 4.7.1) zielt in diese Richtung: Ein zwischen Quelle und Detektor gestellter Analysator könne die Detektionswahrscheinlichkeit zumindest nicht vergrößern. Vor allem die zuerst genannte *fair-sampling*-Annahme erlaubt es uns, die Bedeutung der Detektoreffizienz in den quantenmechanischen Vorhersagen der Ungleichungen (65) und (84) geringer zu gewichten.

Wie wir bereits in Kapitel 4.6.2 erfahren haben, müssen, selbst wenn alle anderen Parameter, die ein Experiment beeinflussen können, perfekt sind, für die Detektoreffizienzen die Bedingungen  $\eta_{Spin-1/2} \geq 0,829$  und  $\eta_{Kaskade} \geq 0,919$  erfüllt sein, damit eine Unterscheidung zwischen der Quantenmechanik und lokal-realistischer Theorien mit verborgenen Parametern überhaupt möglich ist. Eine hohe Detektoreffizienz ist notwendig, weil ein zu kleines  $\eta$  die messbaren Korrelationen der verschränkten Teilchenpaare schwächen würde. Je niedriger die Effizienz ist, desto geringer ist auch die Wahrscheinlichkeit, beide Konstituenten eines verschränkten Zustands tatsächlich zu messen. Ein solcher Fall könnte die Messergebnisse zu Ungunsten der Quantenmechanik verändern, da die Quantentheorie die Messergebnisse nicht erklären könnte. Auf der anderen Seite könnte eine zu niedrige Detektoreffizienz die Messergebnisse auch zu Gunsten der Quantenmechanik verschieben, indem korrelierte Teilchenpaare im Vergleich zu nicht-korrelierten bevorzugt detektiert werden. Ein Experiment würde damit die Quantentheorie bestätigen, obwohl eine LRT mit verborgenen Parametern das gültige Modell wäre.

Allerdings ist aus der Bedingung (98) für ein valides Experiment auch ersichtlich, dass eine hohe Detektoreffizienz allein nicht ausreicht, um die CH-Ungleichung experimentell überprüfen zu können. Auch die räumliche Korrelation  $g$  müsste optimal sein, damit davon ausgegangen werden kann, dass beide Partner eines verschränkten Zustands in den entsprechenden Detektoren  $A$  und  $B$  - unabhängig von der De-

---

<sup>100</sup> Gisin (2009), S. 130.

tektoreffizienz - prinzipiell detektiert werden können. Das Schließen des ersten Schlupflochs setzt folglich auch eine Lösung für das Problem voraus, die das folgende Schlupfloch aufwirft.

### 5.1.2 Zweites Schlupfloch – die räumliche Korrelation

Ein verschränkter Zweiteilchen-Zustand entsteht im Idealfall aus einem Zweikörper-Zerfall, bei dem nur die Partner involviert sind, die im Anschluss an den Zerfall auch miteinander verschränkt sind.<sup>101</sup> Damit kann aufgrund der Impulserhaltung eine starke räumliche Korrelation der Teilchen sicher gestellt werden, welche wiederum garantiert, dass die beiden Konstituenten eines verschränkten Teilchenpaares prinzipiell zum Detektor gelangen können. Daraus folgt aber auch, dass dieses Schlupfloch nur dann geschlossen werden kann, wenn der verschränkte Zustand im Experiment über einen Zweikörper-Zerfall produziert wird ( $g \approx 1$ ).<sup>102</sup> Hingegen nimmt bei einem Dreikörper-Zerfall, wie er bei einer atomaren Kaskade vorliegt, das Atom, welches beim Übergang in den Grundzustand zwei verschränkte Photonen emittiert, einen Teil des Gesamtimpulses auf und sorgt damit für eine Schwächung der räumlichen Korrelation zwischen den beide Photonen ( $g \ll 1$ ),<sup>103</sup> so dass von einem Teilchenpaar nur ein Partner registriert werden könnte oder beide Teilchen erst nacheinander ihren Detektor erreichen könnten. Damit wären die beiden Ereignissen nicht mehr koinzident (vgl. Abbildung 8).

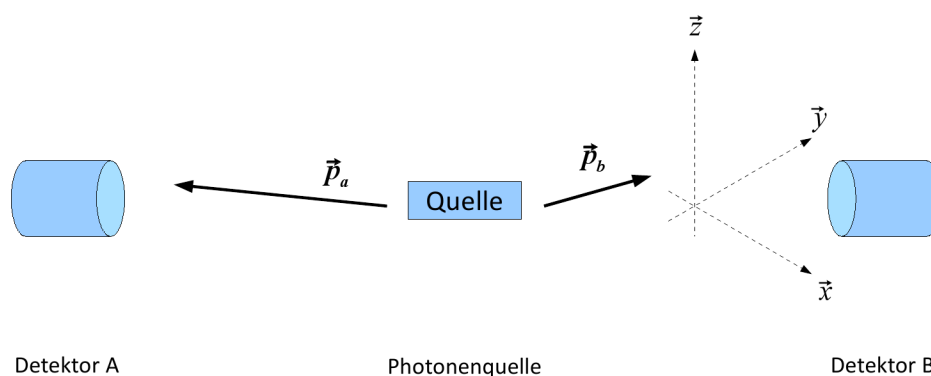


Abbildung 8: Eine Photonenquelle emittiert ein verschränktes, schwach räumlich korreliertes Photonenpaar. Sowohl der Betrag als auch die Richtung des Impulses beider Partner des verschränkten Zustands stimmen nicht überein. Während das erste Teilchen mit dem Impuls  $\vec{p}_a$  vom Detektor A prinzipiell registriert werden kann, fliegt das zweite Teilchen an Detektor B vorbei.

### 5.1.3 Drittes Schlupfloch – das Lokalitätsproblem

Das dritte Schlupfloch betrifft die raumartige Separation der Messungen, wodurch ein Signal zur „Absprache“ zwischen den Detektoren ausgeschlossen wird.<sup>104</sup> Es könnte doch sein, dass die starke quantenmechanische Korrelation  $E_{QM} = -\vec{a} \cdot \vec{b}$  nur

<sup>101</sup> Fry, Walther (2001), S. 3.

<sup>102</sup> Vgl. dazu den dritten auf Abbildung 7 dargestellten Fall („Case III“).

<sup>103</sup> Vgl. dazu den zweiten Fall auf Abbildung 7 („Case II“).

<sup>104</sup> Aus diesem Grund heißt das dritte Schlupfloch auch *Kommunikationsschlupfloch*.

dadurch zustande kommt, weil vom Ort der ersten Messung aus verborgene Parameter zum zweiten Detektor propagieren, welche an diesem das von der Quantenmechanik vorhergesagte Messergebnis hervorbringen. In einem Experiment müssen die Messungen raumartig voneinander entfernt stattfinden, damit dieser skizzierte Fall ausgeschlossen werden kann. Die Detektoren wären damit kausal getrennt und könnten einander keine Informationen über ihre jeweilige Messung zukommen lassen. Dieses Prinzip ist auf Abbildung 9 dargestellt:

Die Quelle emittiert ein verschränktes Spin- $1/2$  Teilchenpaar. Alice (Detektor  $A$ ) misst zuerst. Die Dauer der Messung ist durch einen Balken gekennzeichnet. Anschließend erfolgt die Messung von Bob (Detektor  $B$ ). Die Messung von Alice befindet sich außerhalb Bobs Rückwärtslichtkegels, so dass keine Informationen über Alice' Messung zu Bob gelangen können. Allerdings müsse für ein Bell-Experiment zunächst definiert werden, was eine raumartig getrennte Messung überhaupt sei, da dieses von keiner Theorie festgelegt sei, worauf G. Weihs hinweist.<sup>105</sup> Er identifiziert die wichtigsten Bestandteile eines solchen Messprozesses in ihrer zeitlicher Abfolge wie folgt:

1. Erzeugung einer Zufallszahl.
2. Einstellung der Messrichtung infolge dieser Zufallszahl.

Nur wenn es möglich ist, die Messrichtung des Detektors  $B$  erst kurz vor dem Eintreffen des zweiten Teilchens zufällig festzulegen und diese Festlegung außerhalb des Lichtkegels der Messung am ersten Teilchen erfolgt, kann davon ausgegangen werden, dass die beiden Messungen raumartig voneinander getrennt stattfinden. Darauf wies 1964 bereits Bell hin, indem er Experimente forderte, „in which the settings are changed during the flight of particles“.<sup>106</sup>

In den folgenden Kapiteln werden die Experimente vorgestellt, die bislang zur Überprüfung der Verträglichkeit der Bellschen Ungleichung mit der Quantenmechanik durchgeführt wurden. Dabei werde ich mich an die Einteilung der Experimente in drei Generationen nach Aspect richten, exemplarisch auf die bedeutendsten Vertreter der jeweiligen Generation konzentrieren und vor allem auch die jüngsten dazu durchgeführten Experimente und deren Ergebnisse präsentieren.<sup>107</sup>

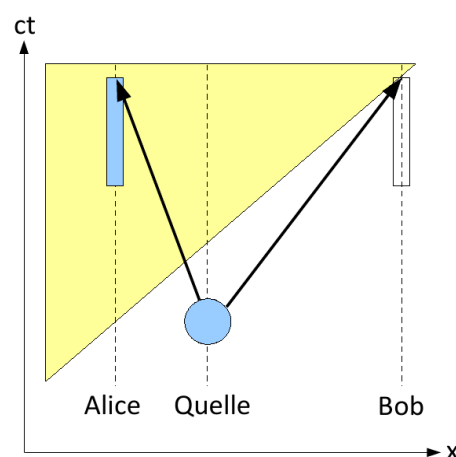


Abbildung 9: Raumzeit-Diagramm für zwei Messungen (gefüllter und leerer Balken), die raumartig voneinander getrennt erfolgen. Lichtstrahlen sind  $45^\circ$ -Linien. Die schwarzen Pfeile stehen für die Geschwindigkeiten der verschränkten Spin- $1/2$  Teilchen.

<sup>105</sup> Weihs (1999), S. 50.

<sup>106</sup> Bell (1964), S. 199.

<sup>107</sup> Zur Einteilung der bisher durchgeführten Experimente in Generationen, vgl. A. Aspect, Nature **398**, S. 189-190 (1999).

## 5.2. Erste Generation (1972-1979)

Bei der ersten Generation handelte es sich um Experimente, in denen verschränkte Photonen über eine atomare Kaskade erzeugt wurden. Dabei werden Atome angeregt, die anschließend über mehrere Stufen wieder in den Grundzustand übergehen und ein verschränktes Photonenpaar emittieren. In den Experimenten von 1972 bis 1979 wurden verschiedene Elemente und atomare Übergänge verwendet. Gemeinsam ist ihnen, dass nur ein Einkanal-detektor benutzt wurde. Aus diesem Grund heraus erfolgten die Tests der Bellschen Ungleichung anhand der eCH-Ungleichung, beziehungsweise der aus ihr abgeleiteten Form von Freedman und Clauser.

Die zuletzt genannten Personen veröffentlichten 1972 das erste Experiment, welches explizit zur Überprüfung der Bellschen Ungleichung konzipiert war.<sup>108</sup> Dafür produzierten sie in einem Ofen Calcium-40 Atome, die durch eine Wasserstoffbogenlampe über Resonanzabsorption in den Zustand  $3d4p\ ^1P_1$  angeregt wurden (vgl. nebenstehende Abbildung 10). Sieben Prozent der Atome, die nicht wieder direkt in den Grundzustand übergingen, fielen auf das  $4p^2\ ^1S_0$ -Niveau, von welchem aus die atomare Kaskade

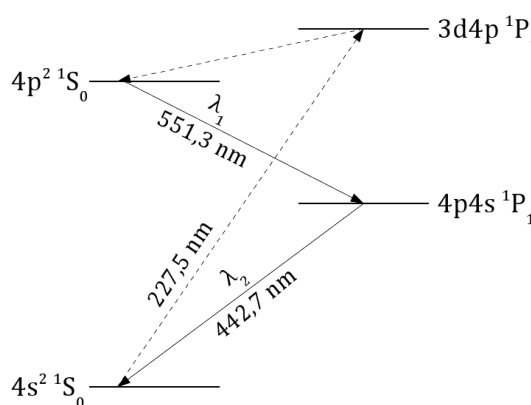


Abbildung 10: Schematische Darstellung der atomaren Kaskade im Calciumatom für das Freedman-Clauser-Experiment.

startete. Dabei ging das Calciumatom unter Aussendung zweier Photonen der Wellenlängen  $\lambda_1=551,3\text{ nm}$  und  $\lambda_2=422,7\text{ nm}$  wieder in den Grundzustand über. Da der Anfangs- und Endzustand der Kaskade wegen  $(J=0)\rightarrow(J=1)\rightarrow(J=0)$  keinen Gesamtdrehimpuls besaß, mussten die beiden emittierten Photonen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  aufgrund der Drehimpulserhaltung eine entgegengesetzte Polarisation besitzen, worüber sie miteinander verschränkt waren. Freedman und Clauser benötigten für ihr Experiment noch eine Messzeit von 200 h. Sie erhielten für das  $\delta$  in der FC-Ungleichung den Wert:  $\delta=0,050\pm 0,008 \neq 0$ . Dieses bedeutete eine Verletzung der FC-Ungleichung um fünf Standardabweichungen, womit das erste Mal experimentell gezeigt worden war, dass die Quantenmechanik nicht mit einer Verborgenen-Parameter-Theorie vervollständigt werden konnte. Die verwendeten Detektoren besaßen allerdings eine Effizienz von  $\eta=0,13-0,28$ , so dass die CHSH-Annahme nötig war, um dieses Ergebnis für gültig erklären zu können.

Die Tabelle 2 soll den Überblick über die bedeutenden Bell-Experimente der ersten Generation vervollständigen:

<sup>108</sup> Freedman, Clauser, S. 938-941 (1972).

Experiment	untersuchte Teilchen	Ergebnis
Freedman, Clauser. University of California 1972	Photonen, über atomare Kaskade von $^{40}\text{Ca}$ -Atomen emittiert.	Widerspruch zur FC-Ungleichung: $\delta = 0,050 \pm 0,008 \not\approx 0$ .
Clauser. <sup>109</sup> University of California 1976	Photonen, über atomare Kaskade von $^{202}\text{Hg}$ -Atomen emittiert.	Widerspruch zur FC-Ungleichung: $\delta = 0,0385 \pm 0,0093 \not\approx 0$ .
Fry, Thompson. <sup>110</sup> Texas A&M University 1976	Photonen, über atomare Kaskade von $^{200}\text{Hg}$ -Atomen emittiert.	Widerspruch zur FC-Ungleichung: $\delta = 0,046 \pm 0,0014 \not\approx 0$ .

Tabelle 2: Übersicht über die bedeutenden Bell-Experimente der ersten Generation

Es bleibt zu erwähnen, dass die in Tabelle 2 aufgeführten Experimente nicht die einzigen waren, die im Zeitraum von 1972-1979 zum Test der Bellschen Ungleichung durchgeführt worden sind. Bis 1979 gab es dazu sieben Experimente.<sup>111 112</sup> Von den sieben Experimenten wurden sechs mit verschränkten Photonen realisiert, die nicht nur über atomare Kaskaden erzeugt wurden, sondern auch über Elektron-Positron-Annihilation. Lamehi-Rachti und Mittag setzen in Anlehnung an die Bohm-Version des EPR-Gedankenexperiments 1976 das erste Mal direkte Messungen an den Spin-Komponenten von Protonen um, wobei sie für ihre Auswertung die Bellsche Ungleichung an die speziell von ihnen verwendete Symmetrie im Versuchsaufbau anpassen. Auch Lamehi-Rachti und Mittag konnten mit ihren Messergebnissen die Vorhersagen der Quantenmechanik bestätigen und eine Verletzung der Bellschen Ungleichung feststellen.<sup>113</sup> Es soll jedoch nicht unterschlagen werden, dass bis 1979 auch zwei Experimente die Bellschen Ungleichungen bestätigten, was den Einzug des lokalen Realismus<sup>7</sup> in die Quantenmechanik bedeutet hätte.<sup>114</sup> Die Fachwelt diskutierte die Ergebnisse kontrovers und vermutete teils durch den Versuchsaufbau bedingte, systematische Fehler.<sup>115</sup>

Die Detektoreffizienzen sämtlicher Experimente der ersten Generation befanden sich im Bereich  $0,06 \leq \eta \leq 0,28$ .<sup>116</sup> Dieser reichte zum Schließen des ersten Schlupflochs keinesfalls aus. Auch die räumliche Korrelation der verschränkten Photonen war aufgrund ihrer überwiegenden Erzeugung aus atomaren Kaskaden wegen

109 J. F. Clauser, Phys. Rev. Lett. **36**, S. 1223-1226 (1976).

110 E. S. Fry and R. C. Thompson, Phys. Rev. Lett. **37**, S. 465-468 (1976).

111 B. D’Espagnat, Spektrum d. Wiss. **1**, S. 77 (1980).

112 Ausführlichere Diskussionen zu den bisher durchgeführten Experimente zum Test der Bellschen Ungleichung können nachgelesen werden bei: Afriat, Selleri (1999); Auletta (2000); Clauser, Shimony (1978); Weihs (1999).

113 M. Lamehi-Rachti and W. Mittag, Phys. Rev. D **14**, S. 2543-2555 (1976).

114 D’Espagnat (1980), S. 78.

115 Eine detaillierte Diskussion der Ergebnisse ist nachzulesen bei: Clauser, Shimony (1978), S. 1909-1917.

116 Afriat, Selleri (1999), S. 105.

$g \ll 1$  viel zu gering, um zweifelsfrei eine Verletzung der Bellschen Ungleichung feststellen zu können. Darüber hinaus waren die einzelnen Messungen räumlich nicht voneinander separiert, wodurch auch das dritten Schlupfloch noch offen stand.

### 5.3. Zweite Generation (1980-1985)

Die Experimente der zweiten Generation wurden vor allem von der Gruppe um Alain Aspect in Orsay durchgeführt. Aspect *et al.* versuchten, eine hocheffiziente, stabile und gut zu kontrollierende Quelle für verschränkte Photonenpaare zu entwickeln. Dieses gelang ihnen, indem sie dieselbe atomare  $^{40}\text{Ca}$ -Kaskade wie Freedman und Clauser benutzten, aber im Gegensatz zu jenen die Atome mit einem Krypton-Ionen-Laser sowie einem verstellbaren Farbstofflaser anregten. Dadurch erhöhten sich die messbaren Koinzidenzraten um mehrere Größenordnungen.<sup>117</sup> Allerdings waren auch bei den Versuchen von Aspect *et al.* die Detektoreffizienzen deutlich niedriger als  $\eta=1$ .<sup>118</sup> In Tabelle 3 sind die wichtigsten Ergebnisse dieser Zeit zusammengefasst.

Experiment	untersuchte Teilchen	Ergebnis
Aspect, Grangier, Roger. <sup>119</sup> Université Paris-Sud 1981	Photonen, über atomare Kaskade von $^{40}\text{Ca}$ -Atomen emittiert. (Einkanaldetektoren)	Widerspruch zur FC-Ungleichung $\delta = 0,0572 \pm 0,0043 \not\approx 0$ , und zur eCH-Ungleichung: $S = 0,126 \pm 0,014 \not\approx 0$ .
Aspect, Grangier, Roger. <sup>120</sup> Université Paris-Sud 1982	Photonen, über atomare Kaskade von $^{40}\text{Ca}$ -Atomen emittiert. (Zweikanaldetektoren)	Widerspruch zur CHSH-Ungleichung: $S = 2,697 \pm 0,015 \not\approx 2$ .
Aspect, Dalibard, and Roger. <sup>121</sup> Université Paris-Sud 1982	Photonen, über atomare Kaskade von $^{40}\text{Ca}$ -Atomen emittiert. (Einkanaldetektoren mit zeitlich variierten Analysatoren)	Widerspruch zur eCH-Ungleichung: $S = 0,101 \pm 0,020 \not\approx 0$ .
Perrie, Duncan, Beyer, Kleinpoppen. <sup>122</sup> University of Stirling 1985	Photonen, über spontane Übergänge metastabilen Deuteriums emittiert. Die Emission erfolgt simultan. (Einkanaldetektoren)	Widerspruch zur FC-Ungleichung: $\delta = 0,018 \pm 0,0010 \not\approx 0$ .

Tabelle 3: Bell-Experimente der zweiten Generation

117 Freedman/Clauser registrierten 1972 noch typische Koinzidenzraten von  $0,1-0,3\text{s}^{-1}$ . Die von Aspect *et al.* gemessenen Raten lagen in einem Bereich zwischen  $0-40\text{s}^{-1}$ .

118 A. Aspect, arXiv:quant-ph/0402001v1, S. 23 (2004).

119 A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, Phys. Rev. Lett. **47**, S. 460-463 (1981).

120 A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49**, S. 91-94 (1982).

121 A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49**, S. 1804-1807 (1982).

122 W. Perrie, A. J. Duncan, H. J. Beyer, and H. Kleinpoppen, Phys. Rev. Lett. **54**, S. 1790-1793 (1985).

In Tabelle 3 wird deutlich, dass auch sämtliche Versuche der zweiten Generation von einer LRT nicht erklärt werden können, da sie ausnahmslos die Bellsche Ungleichung verletzen. Das in der dritten Zeile aufgeführte Experiment war bis 1998 das meistzitierte zur Bellschen Ungleichung und ist auch für uns von besonderer Bedeutung.<sup>123</sup> Aspect *et al.* versuchten nämlich 1982 erstmals, das Lokalitätsproblem zu lösen. Um eine durch verborgene Parameter vermittelte Korrelation der Messergebnisse ausschließen zu können, mussten die Messungen räumlich separiert voneinander erfolgen. Dazu entwickelte die Gruppe um Aspect einen optischen Schalter, der extrem schnell zwischen zwei Polarisationsrichtungen  $\vec{a}$  und  $\vec{a}'$  umschalten konnte. Eine solche Vorrichtung ist äquivalent zu einem Analysator, der zwischen den beiden Orientierung  $\vec{a}$  und  $\vec{a}'$  hin und her geschaltet werden kann. Die Messungen fanden in einem räumlichen Abstand von  $s=13$  m statt, wofür ein Lichtsignal  $t_c=s/c\approx 40$  ns benötigte. Die Schaltzeit zwischen den beiden möglichen Polarisationsrichtungen betrug  $t_p\approx 10$  ns. Damit war  $t_p < t_c$ , wodurch die Messung auf der einen und der dazugehörige Richtungswechsel der Polarisation auf der anderen Seite zwei raumartig voneinander getrennte Ereignisse waren. Zeilinger wies aber 1986 darauf hin, dass die Messrichtungen nicht wirklich zufällig ausgewählt worden wären, da das Umschalten zwischen den beiden Polarisationsrichtungen periodisch - und damit deterministisch - erfolgt sei.<sup>124</sup>

Aspect hatte seinerzeit mit der Verwendung des Lasers für die Anregung der Calciumatome die höchste Intensität einer Quelle zur Emission verschränkter Photonen erreicht. Allerdings waren die verwendeten Detektoren nicht ausreichend effizient genug, um das Detektionsschlupfloch zu schließen. Dadurch, dass die Polarisationsrichtungen periodisch und nicht wirklich zufällig ausgewählt wurden, scheiterten Aspect *et al.* auch daran, eine endgültige Lösung für das Kommunikationsschlupfloch zu finden.

#### **5.4. Dritte Generation (seit 1988)**

Bevor ich die wichtigsten Vertreter der dritten Generation der Bell-Experimente vorstelle, möchte ich in Kapitel 5.4.1 zunächst das damals neuartige Verfahren zur Erzeugung verschränkter Photonen über spontane parametrische Fluoreszenz erläutern.<sup>125</sup>

---

123 Weihs (1999), S. 41.

124 A. Zeilinger, Phys. Lett. A **118**, S. 1-2 (1986).

125 Der englische Fachbegriff dafür ist „spontaneous parametric down-conversion“, abgekürzt: SPDC.

### 5.4.1 Spontane parametrische Fluoreszenz

Ein Pumpstrahl trifft, wie auf Abbildung 11 dargestellt wird, auf einen optisch nicht-linearen Kristall. Während die Photonen mit der Pumpfrequenz  $\omega_p$  dabei vernichtet werden, entstehen gleichzeitig zwei neue Photonen  $\omega_1$  und  $\omega_2$ , die einen verschränkten Zweiphotonen-Zustand bilden. Dieser lässt sich in einer ähnlichen Notation angeben, wie den EPR-Zustand zweier über Ort und Impuls miteinander verschränkter Teilchen in (31):<sup>127</sup>

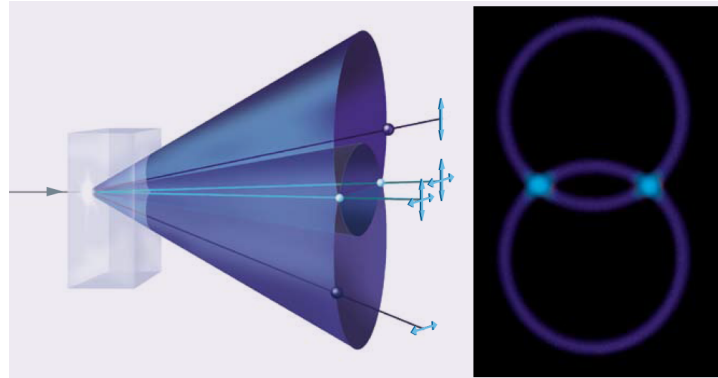


Abbildung 11:<sup>126</sup> Erzeugung zweier zueinander orthogonal polarisierter Photonen über spontane parametrische Fluoreszenz. Der obere Kegel ist der des außerordentlichen Fluoreszenzlichts (vertikale Polarisation), der untere Kegel der des ordentlichen (horizontale Polarisation). Auf der hellblauen Schnittlinie sind die Photonen miteinander verschränkt.

$$|\Psi\rangle = \Psi_0 \sum_{1,2} \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_p) \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_p) a_1^\dagger(\vec{k}_1) a_2^\dagger(\vec{k}_2) |0\rangle. \quad (111)$$

Hierbei sind die  $a_j^\dagger$  ( $j=1,2$ ) die Erzeugeroperatoren für die beiden Photonen  $\omega_1$  und  $\omega_2$ .  $\Psi_0$  ist eine Normalisierungskonstante. Die beiden Deltafunktionen werden auch als *Phasenanpassungsbedingungen* bezeichnet:<sup>128</sup>

$$\omega_p = \omega_1 + \omega_2 \text{ und } \vec{k}_p = \vec{k}_1 + \vec{k}_2. \quad (112)$$

Zwei bedeutende Vertreter der spontanen parametrischen Fluoreszenz sind die Typ-I SPDC und die Typ-II SPDC. Bei der Typ-I SPDC besitzen die beiden verschränkten Photonen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  dieselbe Polarisation, während bei der Typ-II SPDC die Polarisationsrichtungen orthogonal zueinander stehen (vgl. Abbildung 11).

Zur dritten Generation zählen demnach die Experimente, in denen seit 1988 verschränkte Photonen über spontane parametrische Fluoreszenz produziert wurden. Das Praktische an dieser neuen Art der Erzeugung ist zum einen, dass zwischen den verschränkten Photonen aufgrund der Phasenanpassungsbedingungen in (112) eine starke räumliche Korrelation besteht.<sup>129</sup> Dadurch kann man sicher sein, zu einem Photon prinzipiell auch immer seinen verschränkten Partner detektieren zu kön-

126 Abbildung entnommen aus: Spektrum der Wissenschaft 11/2008, "Die Wirklichkeit der Quanten" von A. Zeilinger, Seite 60, Grafik links: Laurie Grace (Bearbeitung Spektrum der Wissenschaft), Foto rechts: Paul Kwiat und Michael Reck, Universität Wien (Bearbeitung Spektrum der Wissenschaft).

127 Shih (2009), S. 165.

128 Die Phase des Konversionslichts muss an die Phase des Pumplichts angepasst sein, um parametrisches Fluoreszenzlicht erzeugen zu können. Die Phasenanpassung garantiert demnach die Impulserhaltung bei der Konversion der Photonen (vgl. Weihs (1999), S. 62)).

129 So gesehen haben wir hier einen echten Zweikörper-Zerfall vorliegen.



nen.<sup>130</sup> Da für diese Fällen  $g \approx 1$  angenommen werden kann, konnte mit dem Übergang von atomaren Kaskaden zu SPDC-Prozessen bei der Photonenerzeugung das zweite Schlupfloch geschlossen werden.<sup>131</sup> Ein anderer positiver Aspekt bei der praktischen Umsetzung von SPDC-Experimenten sind die dafür ausreichenden, schmalen Lichtbündel. Dieses sorgte für eine stetige Miniaturisierung des Versuchsaufbaus, so dass die Lichtstrahlen in immer kleinere optische Elemente, wie Glasfaserkabel, eingekoppelt werden konnten, womit gleichzeitig viele neue Anwendungsfelder eröffnet wurden.<sup>132</sup> Nachdem das zweite Schlupfloch durch die SPDC-Experimente geschlossen werden konnte, machte sich 1998 eine Gruppe um Gregor Weihs in Innsbruck daran, auch das Lokalitätsproblem anzugehen.

### 5.4.2 Das Innsbruck-Experiment 1998

Um das Kommunikationsschlupfloch zu schließen, wurden die Messeinrichtungen von Weihs *et al.* in einem Abstand von  $s=400$  m voneinander entfernt aufgebaut.<sup>133</sup> Eine Messung durfte demnach nicht länger als  $t_c=s/c \approx 1,3 \mu\text{s}$  dauern, damit eine direkte Kommunikation mit Lichtgeschwindigkeit zwischen den beiden Detektoren ausgeschlossen werden konnte. Das verschränkte Photon durchlief vor seiner Detektion einen transversalen elektro-optischen Modulator, der die Polarisationsrichtung des ankommenden Photons, abhängig vom Eingang eines an ihm angeschlossenen Zufallsgenerators, zwischen  $0^\circ$  und  $45^\circ$  drehen konnte.<sup>134</sup> Um eine wirkliche Zufälligkeit garantieren zu können, wurde ein physikalischer Zufallsgenerator verwendet, der aus einer Lichtquelle mit kurzer Kohärenzzeit, einem Strahlteiler und zwei hinter dem Strahlteiler montierten Photodioden aufgebaut war. Der Weg des einzelnen Photons durch den Strahlteiler ist nicht vorhersagbar. Es trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% auf die erste oder die zweite Photodiode. Der Modulator drehte nun abhängig davon, von welcher der beiden Photodioden im Zufallsgenerator das Photon registriert wurde, die Polarisationsrichtung des einfallenden Photons. Im Anschluss daran traf dieses auf einen Zweikanal-Detektor. Die gesamte Verzögerung in den optischen und elektronischen Elementen der Messeinrichtung (Zufallsgenerator, Modulator, Verstärker usw.) bezifferten Weihs *et al.* auf eine Zeitdauer von  $t=100$  ns, welche um eine Größenordnung unter der erlaubten Zeit von  $t_c=1,3 \mu\text{s}$  lag. Wegen  $t \ll t_c$  und der Verwendung eines physikalischen Zufallsgenerators, ist die Gruppe um Weihs die erste gewesen, die das Kommunikationsschlupfloch endgültig zu schließen vermochte. Zur Überprüfung der Existenz einer eventuellen lokal-realistischen Quantentheorie benutzten sie die CHSH-Ungleichung und gelangten mit ihren Messwerten, bei einer Messdauer von 10 s, zu dem Ergebnis:

$$S(0^\circ, 45^\circ, 22,5^\circ, 67,5^\circ) = 2,73 \pm 0,02 \not\leq 2.$$

130 Aspect (2004), S. 28.

131 P. G. Kwiat, P. H. Eberhard, A. M. Steinberg, and R. Y. Chiao, Phys. Rev. A **49**, S. 3210 (1994).

132 Aspect (2004), S. 28.

133 G. Weihs, T. Jennewein, C. Simon, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, Phys. Rev. Lett. **81**, S. 5039-5043 (1998).

134 Dieser Vorgang ist äquivalent zur Richtungsänderung eines Analysators von  $\vec{a}$  nach  $\vec{a}'$ .

Eine LRT mit verborgenen Parametern würde auch für dieses Experiment ein falsches Modell sein und müsste als Erklärung für die einzelnen Messdaten ausscheiden.

Im Innsbruck-Experiment konnten sowohl das zweite als auch das dritte Schlupfloch geschlossen werden. Allerdings lag die Detektoreffizienz immer noch bei rund 5%, und dieser Wert war eindeutig zu niedrig, um auch das erste Schlupfloch sicher zu schließen. Dieses sollte erst drei Jahre später gelingen.

### 5.4.3 Das Boulder-Experiment 2001

Das erste Experiment, das wegen seiner ausreichend hohen Detektoreffizienz von 98% keine Verwendung mehr für die *fair sampling*-Annahme fand, wurde 2001 von Rowe *et al.* in Boulder, Colorado, an massiven Teilchen durchgeführt.<sup>135</sup> Dazu benutzten sie zwei über ihren Gesamtdrehimpuls miteinander verschränkte  ${}^9\text{Be}^+$ -Ionen, die in einer Paul-Falle gespeichert waren.<sup>136</sup> Der Messprozess war viel diffiziler als bei den bisher durchgeführten Experimenten mit Photonen, weswegen ich auf diesen nicht im Detail eingehen werde. Bei bestehendem Interesse daran verweise ich auf die Originalarbeit von Rowe *et al.* Die beiden Beryllium-Ionen waren in der Paul-Falle einem Raman-Laserfeld ausgesetzt und besaßen dadurch, je nachdem, an welchem Ort sich die Ionen in der Kammer befanden, eine unterschiedliche Phase. Diese Phase entsprach der Orientierung der Analysatoren in den „klassischen“ Photonenexperimenten. Der Zustand eines verschränkten Teilchens zur jeweils eingestellten „Orientierung“ konnte detektiert werden, indem ein weiterer Laserstrahl auf das jeweilige Ion gerichtet worden ist. Wurden dabei viele Photonen gestreut, befand sich dieses Ion im „Spin-down“-Zustand, bei wenig gestreuten Photonen im „Spin-up“-Zustand. Rowe *et al.* werteten ihr Experiment anhand der CHSH-Ungleichung aus:

$$S(-22,5^\circ, 67,5^\circ, -22,5^\circ, 67,5^\circ) = 2,25 \pm 0,03 \not\leq 2.$$

Auch für das Experiment von Rowe *et al.* erwies sich die Quantenmechanik als korrektes Modell für die Vorhersage der Messergebnisse. Allerdings war es mit einem Defizit behaftet, welches das endgültige Schließen aller Schlupflöcher verhinderte: Die Beryllium-Ionen besaßen eine mittlere Entfernung von nur 3  $\mu\text{m}$  zueinander, so dass bei der Messung am ersten Atom sich das zweite in dessen Lichtkegel befand. Das Kommunikationsschlupfloch stand demnach weiterhin offen.

135 M. A. Rowe, D. Kielpinski, V. Meyer, C. A. Sackett, M. W. Itano, C. Monroe & D. J. Wineland, *Nature* **409**, S. 791-794 (2001).

136 Die beiden Beryllium-Ionen wurden durch stimulierte Raman-Übergänge über zwei senkrecht zueinander ausgerichtete Laserstrahlen mit einem Frequenzunterschied in der Nähe der Hyperfeingrundzustände der beiden Atome miteinander verschränkt. Die detaillierte Beschreibung der Herstellung solcher verschränkter Zustände würde an dieser Stelle zu weit führen und kann nachvollzogen werden bei: C. A. Sackett, D. Kielpinski, B. E. King, *et al.*, *Nature* **404**, S. 256-259 (2000).

### 5.4.4 Das Texas A&M Experiment

Es existiert jedoch ein Kandidat, der in Zukunft alle drei Schlupflöcher gleichzeitig und endgültig schließen möchte. Die Rede ist von dem bereits in der Einleitung erwähnten Experiment der Texas A&M Universität, welches mit der CH-Ungleichung (83) zum ersten Mal eine starke Form der Bellschen Ungleichung überprüfen möchte.<sup>137</sup> Das Experiment an der Texas A&M Universität ist eine exakte Realisierung des vom Bohm und Aharonov modifizierten EPR-Gedankenexperiments mit Spin-1/2 Teilchen, da die Verschränkung über den Kernspin zweier Spin-1/2  $^{199}\text{Hg}$ -Isotope erfolgt, die im Grundzustand  $^1\text{S}_0$  günstigerweise keinen resultierenden Elektronenspin ( $S=0$ ) oder Bahndrehimpuls ( $L=0$ ) besitzen. Hingegen beträgt ihr Kernspin  $I=1/2$ , so dass der Gesamtdrehimpuls jeweils  $F=1/2$  mit den möglichen Quantenzahlen  $m_F = \pm 1/2$  ist. Die  $^{199}\text{Hg}$ -Atome werden durch Photodissoziation eines  $^{199}\text{Hg}_2$ -Moleküls<sup>138</sup> über einen gepulsten Laser produziert (vgl. Abbildung 12).

Weil die Photodissoziation einen Zweikörper-Zerfall darstellt, bewegen sich die beiden Atome in ihrem Schwerpunktsystem genau entgegengesetzt auseinander. Da aber die  $^{199}\text{Hg}_2$ -Moleküle vor der Dissoziation eine gewisse Anfangsgeschwindigkeit besaßen, ist der Winkel zwischen den Hg-Atomen im Laborsystem geringer als  $180^\circ$ . Über eine entsprechende Geschwindigkeitstransformation lässt sich jedoch der Laborwinkel berechnen, unter dem die  $^{199}\text{Hg}$ -Atome auseinander fliegen, so dass die Detektoren für diesen Winkel exakt positioniert werden können. Dieses hat zur

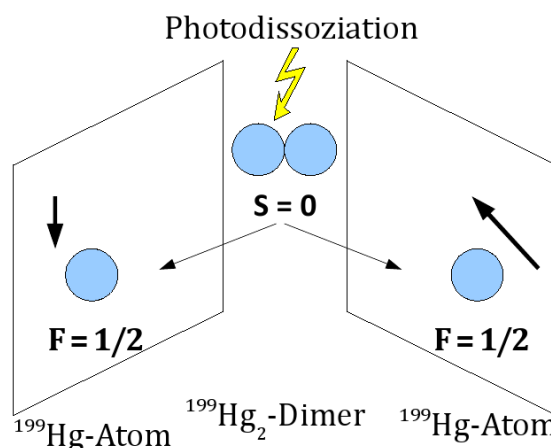


Abbildung 12: Schematische Darstellung der Photodissoziation eines  $^{199}\text{Hg}_2$ -Moleküls mit Elektronenspin  $S=0$  in zwei  $^{199}\text{Hg}$ -Atome, die über ihren Kernspin miteinander verschränkt sind.

Folge, dass die räumliche Korrelation der verschränkten Teilchen mit einem Wert von  $g > 0,98$  fast perfekt ist, womit das zweite Schlupfloch geschlossen werden würde.

Die beiden Isotope des  $^{199}\text{Hg}_2$ -Moleküls bilden nach dessen Dissoziation, bei geeigneter Wahl der Anregungsenergie des Laserpulses, einen verschränkten Singulettzustand. Mit den Abkürzungen in (10) kann der EPR-Zustand des Texas A&M Experiments in der Basis der Eigenzustände  $|F, m_F\rangle = \left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle$  angegeben werden:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2). \quad (113)$$

<sup>137</sup> Fry, Walther (1995) und Fry, Walther (2001). Vgl. dazu auch einen weiteren Aufsatz von T. Walther und E. S. Fry, Phys. Bl. 53, S. 229-232 (1997). Die folgenden Ausführungen basieren auf den genannten Arbeiten.

<sup>138</sup> Dieses wird auch häufig als  $^{199}\text{Hg}_2$ -Dimer bezeichnet.

Zum Testen der CH-Ungleichung ist es erforderlich, die Koinzidenzraten  $R_{++}(\vec{a}, \vec{b})$ ,  $R_{++}(\vec{a}, \vec{b}')$ ,  $r_{+A}(\vec{a}')$  usw. zu messen (vgl. Ungleichung (85)). Es reicht deshalb aus, nur die  $^{199}\text{Hg}$ -Atome mit  $m_F = +1/2$  (Spin-up) für die verschiedenen Messrichtungen  $\alpha$ ,  $\beta$  nachzuweisen. Dieser Nachweis erfolgt über Photoionisation, bei welcher die dafür verwendeten Laser zwei Aufgaben erfüllen: Zum einen definieren sie die Richtungen, bezüglich derer die Spins gemessen werden.<sup>139</sup> Zum anderen regen sie aufgrund der Auswahlregeln für elektrische Dipolstrahlung nur die  $^{199}\text{Hg}$ -Isotope mit  $m_F = +1/2$  in einen autoionisierenden Zustand an, wonach schließlich im Detektor die Messung über die Auslösung von Sekundärelektronen erfolgen kann.<sup>140</sup> Die Messung findet mit zwei voneinander unabhängig arbeitenden Detektoren statt, von denen der eine das  $^{199}\text{Hg}_+$ -Ion und der andere das zurückbleibende Photoelektron registriert. Mit der Annahme, dass aufgrund der perfekten Korrelation zwischen dem Ion und dem Photoelektron das  $^{199}\text{Hg}$ -Atom detektiert wurde, wenn entweder der eine oder der andere Detektor anspricht, wird eine resultierende Detektoreffizienz von  $\eta > 0,99$  erreicht. Mit einem derart hohen Wert würde auch das erste Schlupfloch geschlossen werden.

Die Lösung für das Kommunikationsproblem kennen wir bereits: Mittels eines elektro-optischen Modulators und eines physikalischen Zufallsgenerators kann, ähnlich wie im Innsbruck-Experiment von 1998, die Ausbreitungsrichtung des Anregungslasers und damit die Orientierung des Kernspins der  $^{199}\text{Hg}$ -Isotope innerhalb weniger Nanosekunden verändert werden. Wenn die Messungen 12 m voneinander entfernt erfolgen, ließe sich so auch das Kommunikationsschlupfloch schließen. Damit würde das Experiment der Texas A&M Universität tatsächlich das erste Experiment werden, in dem alle Schlupflöcher endgültig geschlossen werden können. Allerdings wurden bislang noch keine Ergebnisse des im Aufbau befindlichen Experiments veröffentlicht.<sup>141</sup>

## 5.5. Potentielle Anwendungsgebiete

Auf welche Weise uns verschränkte Zustände in praktischer Hinsicht in der Zukunft von Nutzen sein können, soll in diesem Kapitel kurz angedeutet werden. Die erste Quantenrevolution im frühen 20. Jahrhundert hat mit dem Welle-Teilchen-Dualismus Erfindungen, wie den Transistor oder Laser, ermöglicht, die zu den Wurzeln unserer heutigen Informationsgesellschaft gehören. Dank der Ideen von Einstein und Bell, führt uns heute ein weiterer essentieller Bestandteil der Quantenmechanik – die Rede ist natürlich vom Phänomen der *Verschränkung* – durch die Anfänge der zweiten Quantenrevolution, wozu auch die *Quanteninformatiotechnology* gezählt wird.<sup>142 143</sup>

139 Dieser Vorgang ist äquivalent zur Festlegung der Messrichtung der Analysatoren.

140 Für eine ausführliche Beschreibung der physikalischen Prozesse bei der Photodissoziation und -ionisation im Texas A&M Experiment verweise ich auf die in Fußnote 137 angegebene Literatur.

141 Für weitere Informationen verweise ich auf die Homepage des „Department of Physics“ der Texas A&M Universität: <http://physics.tamu.edu/research/list-quantum.html>.

142 Aspect (2007), S. 866.

143 Für weitere Informationen zur zweiten Quantenrevolution und den von ihr eröffneten, neuen Anwendungsgebieten, vgl. auch: J. P. Dowling, G. J. Milburn, arXiv: quant-ph/0206091v1, S. 1-24 (2002).

Verschränkte Zustände, realisiert in Form sogenannter *Qubits*,<sup>144</sup> bilden als Quantenregister die Grundbausteine zukünftiger Quantencomputer.<sup>145</sup> Für Quantencomputer lassen sich Algorithmen programmieren, die ihre Aufgaben im Vergleich zu klassischen Computern viel schneller ausführen können. So besitzt ein Quantencomputer bei der Faktorisierung großer Zahlen einen exponentiellen Geschwindigkeitsvorteil gegenüber seinem klassischen Pendant.<sup>146</sup> Aber auch für die Kryptographie sind diese Zustände von außerordentlicher Bedeutung: Verschränkte Qubits ermöglichen eine prinzipiell abhörsichere Kommunikation zwischen zwei Partnern.<sup>147</sup>

Weitere Anwendungsfelder für verschränkte Photonenzustände sind die Lithographie, Mikroskopie oder auch die optische Tomographie, um nur einige von ihnen aufzuzählen.<sup>148</sup> Boto *et al.* zeigten im Jahr 2000, dass in der Lithographie das Rayleigh-Kriterium zur Berechnung der minimal erreichbaren Strukturgröße  $x_{min}$  durch die Anzahl  $n$  der miteinander verschränkten Photonen drastisch verringert werden kann:<sup>149</sup>

$$x_{min} = \frac{\lambda}{NA \cdot n}. \quad (114)$$

Hierin steht  $NA$  für die numerische Apertur des entsprechenden Fokussierobjektivs. Analog ließe sich dieser Gedanke auch auf die Mikroskopie übertragen, wodurch die Auflösung um den Faktor  $1/n$  gesteigert werden könnte.

### **5.6. Einstein vs. Natur: Null zu Eins.**

Die in den vergangenen 40 Jahren durchgeführten Bell-Experimente, in denen die Messungen von Generation zu Generation immer weiter verfeinert wurden, um die unterschiedlichen Schlupflöcher zu schließen, zeigen fast ausnahmslos eine Verletzung der Bellschen Ungleichung. Daraus würde folgen, dass sich die Vorhersagen der Quantenmechanik nicht von einer lokal-realistischen Theorie mit verborgenen Parametern erklären ließen. Wenn das Innsbruck-Experiment von 1998 mit einer höheren Detektoreffizienz durchgeführt worden wäre, dann könnte der Konjunktiv im letzten Satz durch den Indikativ ersetzt werden. Allerdings ist es, auch unter Berücksichtigung aller bisher durchgeführten Versuche, extrem unwahrscheinlich, dass im Innsbruck-Experiment gerade die verschränkten Teilchenpaare detektiert wurden, deren Korrelation eben nicht repräsentativ für das Gesamtensemble aller Teilchen war. Diese Vorstellung käme einer Verschwörung der Teilchen gegen den Experimentator gleich, oder, um es in den Worten von Anthony Leggett auszudrücken:

*„Thus, to maintain a local hidden-variable theory in the face of the existing experiments would appear to require belief in a very peculiar*

144 „Qubit“ ist die englische Abkürzung für „quantum bit“ und wird als Grundeinheit in der quantenmechanischen Datenverarbeitung verwendet.

145 D. Jazig, Physik Journal **11**, S. 26 (2005).

146 M. A. Nielsen & I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, S. 172 (Cambridge, 2000).

147 D. Bruß, H. Weinfurter, Physik Journal **11**, S. 57 (2005).

148 Reuscher, Holtmannspötter (2004), S. 11-49.

149 A. Boto, P. Kok, D. Abrams, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **85**, S. 2733-2736 (2000).

*conspiracy of nature.*<sup>150</sup>

Die Fachwelt ist sich heute darin einig, dass die Quantenmechanik aufgrund ihrer inhärenten Eigenschaften die Bellsche Ungleichung verletzt und die starken quantenmechanischen Korrelationen zwischen verschränkten Teilchen von einer lokal-realistischen Theorie mit verborgenen Parametern nicht erklärt werden können.<sup>151</sup>

*„Nach dieser experimentellen Erkenntnis und allgemeinen Falsifikation lokal-realistischer Theorien kann es daher lokal-realistische verborgene Variablen genauso wenig geben, wie der objektive Zufall eben doch ein nicht zu leugnender, unumgehrer Bestandteil unserer Welt ist. [...] Und ER würfelt doch ...“*<sup>152</sup>

Mit diesem Ergebnis lässt sich nun auch das scheinbare EPR-Paradoxon auflösen:<sup>153</sup> Die darin verwendeten Prämissen *Lokalität* und *Realismus* sind in der Quantenmechanik offensichtlich nicht gemeinsam gültig, wie 1964 von J. S. Bell theoretisch und seit 1972 immer wieder in Experimenten bewiesen worden ist. Da aber schon die Annahmen von Einstein *et al.* in ihrem Gedankenexperiment für die Quantenmechanik nicht gültig sind, kann es eine aus ihnen gezogene Schlussfolgerung erst recht nicht sein. Einsteins Vorstellung von einer deterministischen lokal-realistischen Natur der Quantenmechanik hat sich damit im Nachhinein als falsch erwiesen.

150 A. J. Leggett, *Found. Phys.* **33**, S. 1470 (2003).

151 A. Aspect, *Nature* **446**, S. 866-867 (2007); E. S. Fry, X. Qu, and M. O. Scully, *Do Experimental Violations of Bell Inequalities Require a Nonlocal Interpretation of Quantum Mechanics? II: Analysis à la Bell*, in: *Quantum Reality, Relativistic Causality, and Closing the Epistemic Circle. Essays in Honour of Abner Shimony* (edited by W. C. Myrvold & J. Christian), The Western Ontario Series in Philosophy of Science **73**, S. 154 (2009); A. Zeilinger, *Spektrum der Wissenschaft* **11**, S. 54-63 (2008).

152 S. A. Camejo, *Skurrile Quantenwelt*, S. 244 (Frankfurt am Main, 2007).

153 Weitere Lösungsvorschläge für das EPR-Paradoxon, wie die Annahme eines Äthers, in dem ausgedehnte, unelastische Teilchen Signale mit Überlichtgeschwindigkeit weiterreichen können, rückwärts in der Zeit propagierende Elemente der Realität oder auch das Zulassen negativer Wahrscheinlichkeiten in lokal-realistischen Theorien mit verborgenen Parametern, können nachgelesen werden bei: Afriat, Selleri (1999), S. 195-242.

## 6. Quantenmechanische Korrelationen – Erklärungsversuche

Da eine lokal-realistische Theorie zur Erklärung der Quantenmechanik ausscheidet, können wir fragen, welche der beiden Annahmen im lokalen Realismus falsch ist – oder ob gar beide Annahmen falsch sind? Wenn das *Lokalitätsprinzip* ungültig wäre, hingen die Teilcheneigenschaften selbst über größte Entfernungen instantan miteinander zusammen. Einstein war diese Schlussfolgerung bekannt, wobei er feststellte, dass sich ein derartiger besonderer „Fernwirkungsmechanismus [...] im Widerspruch zum Relativitätspostulat“<sup>154</sup> befunden hätte. Andererseits könnten wir auch den *Realismus* in Frage stellen, indem wir anzweifeln, dass Teilchen generell über Eigenschaften verfügen, die sie vor und unabhängig von einer Messung besitzen.

### 6.1. Die Leggett-Ungleichung

Der Physiknobelpreisträger Anthony Leggett entwarf 2003 ein Konzept für eine bestimmte Klasse physikalischer Theorien, die sich vom Lokalismus lösten, am Realismus jedoch festhielten.<sup>155</sup> Verglichen mit der Lokalitätsannahme in (47) gilt nun beispielsweise für eine Messung  $A$  am ersten Teilchen:

$$A = A(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \dots, \lambda). \quad (115)$$

Dabei sind  $\vec{c}, \vec{d}, \dots$  beliebige Größen, die das Verhalten der Umwelt beschreiben und auf die Messung am ersten Teilchen einwirken können. Dazu zählt natürlich auch die Orientierung des Messapparats beim zweiten Teilchen. Leggett ließ demnach explizit zu, dass gewisse Eigenschaften zweier verschränkter Teilchen gemäß den Beobachtungen aus der Quantenmechanik über beliebige Entfernungen miteinander korreliert sein können. Er fand heraus, dass auch solche Theorien nicht mit der Quantenmechanik verträglich sind und entwickelte mehrere Ungleichungen, die es auf eine ähnliche Weise wie die Bellsche Ungleichung ermöglichen, zwischen den nun nicht-lokalen realistischen Theorien mit verborgenen Parametern und der Quantenmechanik zu unterscheiden. Die Leggett-Ungleichungen lauten:

$$\begin{aligned} |E(\phi) + E(\phi')| &\leq 2 - \frac{4}{\pi} |\sin(\phi - \phi')| \text{ sowie} \\ |E(\phi) - E(\phi')| &\leq 2 - \frac{4}{\pi} |\cos(\phi - \phi')|. \end{aligned} \quad (116)$$

Auch die Leggett-Ungleichungen erzeugen für die Winkel  $\phi=0$  und  $\phi'=18^\circ$  einen Widerspruch zu den Vorhersagen der Quantenmechanik für die Erwartungswerte zweier Spin-1/2 Teilchen:

$$\begin{aligned} |E(0) + E(18^\circ)| &\leq 2 - \frac{4}{\pi} |\sin(-18,8^\circ)| = 1,59. \\ |E(0) + E(18^\circ)|_{QM} &= |-\cos(0) - \cos(18,8^\circ)| = 1,95 \not\leq 1,59. \end{aligned} \quad (117)$$

154 A. Einstein, zitiert nach Held (1998), S. 75.

155 Leggett (2003).

Damit wäre theoretisch gezeigt, dass die von Leggett verwendeten Klassen nicht-lokaler realistischer Theorien die Quantenmechanik auch nicht beschreiben können.

Gröblacher *et al.* führten 2007 das erste Experiment zum Test der Leggett-Ungleichungen durch, wofür sie diese zunächst an reale, experimentelle Bedingungen anpassen mussten.<sup>156</sup> Die Koinzidenzmessungen erfolgten an verschränkten Photonen, bei denen die lineare Polarisation des einen mit der elliptischen Polarisation des anderen Photons korreliert war. Gröblacher *et al.* stellten fest, dass ihre Messergebnisse die von ihnen modifizierte Leggett-Ungleichung um mehr als 3,2 Standardabweichungen verletzten. Einige Monate später verbesserten Paterek *et al.* das Experiment der Gröblacher-Gruppe mit einer noch allgemeineren Form der Leggett-Ungleichung und registrierten gar eine Verletzung um 80 Standardabweichungen.<sup>157</sup> Es schien demnach nicht möglich zu sein, eine fixe Polarisation der Photonen zu messen und gleichzeitig eine beliebig starke Fernwirkung zu postulieren.<sup>158</sup> Gröblacher *et al.* schlossen daraus, dass für eine Erklärung der quantenmechanischen Korrelationen, im Einklang mit den durchgeführten Experimenten, bestimmte Aspekte des Realismus aufgegeben werden müssten.<sup>159</sup> Auch Aspelmeyer und Zeilinger zielen in diese Richtung, indem sie darauf hinweisen, dass die vollständige Aufgabe des Lokalismus' in der Quantenmechanik nicht ausreichend sei, um die experimentellen Ergebnisse zu erklären. Es müsse darüber hinaus auch die Vorstellung eines *naiven Realismus*' *ad acta* gelegt werden, demnach Teilchen bestimmte Eigenschaften, wie ihre Polarisation, unabhängig von einer Messung besitzen.<sup>160</sup>

An dieser Stelle sei an eine Gegebenheit zwischen A. Einstein und seinem Freund und Biographen A. Pais erinnert:

*„I recall that during one walk Einstein suddenly stopped, turned to me and asked whether I really believed that the moon exists only when I look at it.“<sup>161</sup>*

Existiert denn der Mond überhaupt unabhängig von meiner Beobachtung? Besitzen Objekte außerhalb von Messgeräten reale Eigenschaften? In einem in der „Frankfurter Allgemeinen Sonntagszeitung“ (F.A.S) 2007 erschienenen Artikel wird dazu der Wissenschaftsphilosoph Holger Lyre befragt. Dieser macht darauf aufmerksam, dass die messungsunabhängige Realität bislang nur für verschränkte Teilchenpaare experimentell ausgeschlossen worden sei und mit den aufbrandenden Diskussionen um den tatsächlichen Charakter der uns umgebenden Realität nur „Strohmannen zu Fall gebracht“ würden.<sup>162</sup> Ein Jahr später erschien ein weiterer Artikel in der F.A.S., in welchem der französische Professor für theoretische Physik, Bernard D'Espagnat,

156 S. Gröblacher, T. Paterek, R. Kaltenbaek, *et al.*, Nature **446**, S. 871-875 (2007).

157 T. Paterek, A. Fedrizzi, S. Gröblacher, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **99**, 210406-1 - 210406-4 (2007).

158 M. Aspelmeyer in einem Interview mit ORF.at, URL: <http://science.orf.at/science/news/147910> (Stand: 12. September 2009).

159 Gröblacher *et al.* (2007), S. 875.

160 M. Aspelmeyer, A. Zeilinger, Physics World **7**, S. 27 (2008).

161 Abraham Pais, zitiert nach Nielsen & Chuang (2006), S. 112.

162 U. v. Rauchhaupt, *Die Wirklichkeit, die es nicht gibt*, in: Frankfurter Allgemeinen Sonntagszeitung, S. 65 (22.04.2007).



um eine Stellungnahme zu diesem Thema gebeten wurde. Für D'Espagnat steht ausnahmslos fest, dass das Gemessene vor oder ohne Messung nicht existiert: Alles das, was wir wahrnehmen, mit was für einem apparativen Aufwand auch immer, gäbe es ohne uns und unseren Apparaten nicht.<sup>163</sup>

Alain Aspect geht dagegen noch nicht so weit, der geläufigen Vorstellung von einer realistischen Natur abzuschwören. Es gebe schließlich immer noch nicht-lokale Modelle, die dieselben Vorhersagen trafen wie die Quantenmechanik.<sup>164</sup> Ein Beispiel für ein solches Modell ist die Bohmsche Mechanik.<sup>165</sup> Sie ist eine klassische, realistische und deterministische Theorie mit verborgenen Parametern, deren Voraussagen als ununterscheidbar von denen der herkömmlichen Quantenmechanik gelten.<sup>166</sup> In der Bohmschen Mechanik können sich raumartig voneinander getrennte Objekte beeinflussen, wodurch auch die starken quantenmechanischen Korrelationen erklärt werden können. Allerdings behagt auch Aspect nicht die Vorstellung einer physikalischen Realität, die instantan von etwas verändert werden könne, das weit entfernt passiere. Insbesondere denkt er in diesem Zusammenhang an die Gültigkeit der Spezielle Relativitätstheorie. Dennoch zieht Aspect die Vorstellung einer existierenden Nicht-Lokalität in der Quantenmechanik einer allzu rigiden Abkehr vom Realismus-Begriff vor, und schließt - eher ratlos anmutend:

*„I tend to accept the kind of non-local image sketched above as useful to stimulate my imagination, although I am aware that it implies renouncing the kind of realism I would have liked.*

*The conclusion one draws is more a question of taste than logic [...]*<sup>167</sup>

---

163 U. v. Rauchhaupt, *Die Realität ist nicht in den Dingen*, in: Frankfurter Allgemeinen Sonntagszeitung, S. 69 (02.03.2008).

164 Aspect (2007), S. 867.

165 D. Bohm, Phys. Rev. **85**, S. 166-193 (1952).

166 Rauchhaupt (2007), S. 65.

167 Aspect (2007), S. 867.

## 7. Zusammenfassung

Für Albert Einstein, Boris Podolsky und Nathan Rosen waren einige, von der damals noch jungen Disziplin der Quantenmechanik herbeigeführte Konsequenzen, nicht nachvollziehbar. Insbesondere die Tatsache, dass zwei beliebig weit voneinander entfernte, verschränkte Teilchen so perfekt korreliert sein sollen, dass sich das eine Teilchen bei der Messung einer Eigenschaft so verhält, als „wüsste“ es im selben Moment um die entsprechende, verschränkte Eigenschaft des anderen Teilchen Bescheid, bereitete ihnen Kopfzerbrechen. Um ihrem Unbehagen über diese Situation Ausdruck zu verleihen, ersannen sie 1935 ein Gedankenexperiment, an dessen Schlusspunkt die Unvollständigkeit der Quantenmechanik stand: Jene würde zur Beschreibung der Realität nicht ausreichen. Die Annahmen, die dem Gedankenexperiment zugrunde liegen, sind folgende: Zum einen besitzen Teilchen im Sinne einer objektiven Realität Merkmale auch dann, wenn sie nicht gemessen werden. Diese Eigenschaften liegen in Form verborgener Parameter vor. Zum anderen können sich diese Merkmale nicht über beliebig weite Entfernungen gleichzeitig beeinflussen, wenn die Spezielle Relativitätstheorie Gültigkeit besitzen soll. Die Konjunktion dieser beiden Annahmen wird *lokaler Realismus* genannt. John S. Bell entwarf 1964 eine Ungleichung, die ganz allgemein beschreibt, welche Vorhersagen eine lokal-realistische Theorie trifft. Bell zeigte, dass die Quantenmechanik seine Ungleichung verletzt und schloss daraus, dass die Quantenmechanik keine Theorie sei, die auf einem lokalen Realismus basiert. Die von Einstein *et al.* getroffenen Annahmen könnten zusammen nicht gleichzeitig Gültigkeit besitzen. Seit 1972 wurden entsprechende Experimente zum Test der Bellschen Ungleichung immer weiter verbessert. In nahezu allen Fällen offenbarte sich eine experimentelle Verletzung der Bellschen Ungleichung, womit die von Einstein *et al.* als befremdlich erachteten Eigentümlichkeiten der Quantenmechanik letztendlich bestätigt werden konnten. In Folge dessen können wir wohl davon ausgehen, dass die Quantenmechanik nicht-lokale Eigenschaften besitzt. Ob wir auch unser Verständnis von der Natur als etwas objektiv und unabhängig von uns Existierendes modifizieren müssen, worauf die neuesten Ergebnisse hindeuten, wird die Zukunft zeigen.

## A. Anhang

### *A.1 Der Originalaufsatz von Einstein, Podolsky und Rosen<sup>168</sup>*

---

<sup>168</sup> A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, Phys. Rev. **47**, S. 777-780 (1935). Die Zeilennummerierung wurde von mir hinzugefügt.

of lanthanum is  $7/2$ , hence the nuclear magnetic moment as determined by this analysis is 2.5 nuclear magnetons. This is in fair agreement with the value 2.8 nuclear magnetons determined from La III hyperfine structures by the writer and N. S. Grace.<sup>9</sup>

<sup>9</sup> M. F. Crawford and N. S. Grace, *Phys. Rev.* **47**, 536 (1935).

This investigation was carried out under the supervision of Professor G. Breit, and I wish to thank him for the invaluable advice and assistance so freely given. I also take this opportunity to acknowledge the award of a Fellowship by the Royal Society of Canada, and to thank the University of Wisconsin and the Department of Physics for the privilege of working here.

MAY 15, 1935

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 47

## Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?

A. EINSTEIN, B. PODOLSKY AND N. ROSEN, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey*

(Received March 25, 1935)

In a complete theory there is an element corresponding to each element of reality. A sufficient condition for the reality of a physical quantity is the possibility of predicting it with certainty, without disturbing the system. In quantum mechanics in the case of two physical quantities described by non-commuting operators, the knowledge of one precludes the knowledge of the other. Then either (1) the description of reality given by the wave function in

quantum mechanics is not complete or (2) these two quantities cannot have simultaneous reality. Consideration of the problem of making predictions concerning a system on the basis of measurements made on another system that had previously interacted with it leads to the result that if (1) is false then (2) is also false. One is thus led to conclude that the description of reality as given by a wave function is not complete.

### 1.

ANY serious consideration of a physical theory must take into account the distinction between the objective reality, which is independent of any theory, and the physical concepts with which the theory operates. These concepts are intended to correspond with the objective reality, and by means of these concepts we picture this reality to ourselves.

In attempting to judge the success of a physical theory, we may ask ourselves two questions: (1) "Is the theory correct?" and (2) "Is the description given by the theory complete?" It is only in the case in which positive answers may be given to both of these questions, that the concepts of the theory may be said to be satisfactory. The correctness of the theory is judged by the degree of agreement between the conclusions of the theory and human experience. This experience, which alone enables us to make inferences about reality, in physics takes the form of experiment and measurement. It is the second question that we wish to consider here, as applied to quantum mechanics.

Whatever the meaning assigned to the term *complete*, the following requirement for a complete theory seems to be a necessary one: *every element of the physical reality must have a counterpart in the physical theory*. We shall call this the condition of completeness. The second question is thus easily answered, as soon as we are able to decide what are the elements of the physical reality.

The elements of the physical reality cannot be determined by *a priori* philosophical considerations, but must be found by an appeal to results of experiments and measurements. A comprehensive definition of reality is, however, unnecessary for our purpose. We shall be satisfied with the following criterion, which we regard as reasonable. *If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e., with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity*. It seems to us that this criterion, while far from exhausting all possible ways of recognizing a physical reality, at least provides us with one

5

10

15

20

5

10

15

20

such way, whenever the conditions set down in it occur. Regarded not as a necessary, but merely as a sufficient, condition of reality, this criterion is in agreement with classical as well as quantum-mechanical ideas of reality.

To illustrate the ideas involved let us consider the quantum-mechanical description of the behavior of a particle having a single degree of freedom. The fundamental concept of the theory is the concept of *state*, which is supposed to be completely characterized by the wave function  $\psi$ , which is a function of the variables chosen to describe the particle's behavior. Corresponding to each physically observable quantity  $A$  there is an operator, which may be designated by the same letter.

If  $\psi$  is an eigenfunction of the operator  $A$ , that is, if

$$\psi' \equiv A\psi = a\psi, \quad (1)$$

where  $a$  is a number, then the physical quantity  $A$  has with certainty the value  $a$  whenever the particle is in the state given by  $\psi$ . In accordance with our criterion of reality, for a particle in the state given by  $\psi$  for which Eq. (1) holds, there is an element of physical reality corresponding to the physical quantity  $A$ . Let, for example,

$$\psi = e^{(2\pi i/\hbar)p_0x}, \quad (2)$$

where  $\hbar$  is Planck's constant,  $p_0$  is some constant number, and  $x$  the independent variable. Since the operator corresponding to the momentum of the particle is

$$p = (\hbar/2\pi i)\partial/\partial x, \quad (3)$$

we obtain

$$\psi' = p\psi = (\hbar/2\pi i)\partial\psi/\partial x = p_0\psi. \quad (4)$$

Thus, in the state given by Eq. (2), the momentum has certainly the value  $p_0$ . It thus has meaning to say that the momentum of the particle in the state given by Eq. (2) is real.

On the other hand if Eq. (1) does not hold, we can no longer speak of the physical quantity  $A$  having a particular value. This is the case, for example, with the coordinate of the particle. The operator corresponding to it, say  $q$ , is the operator of multiplication by the independent variable. Thus,

$$q\psi = x\psi \neq a\psi. \quad (5)$$

In accordance with quantum mechanics we can only say that the relative probability that a measurement of the coordinate will give a result lying between  $a$  and  $b$  is

$$P(a, b) = \int_a^b \bar{\psi}\psi dx = \int_a^b dx = b - a. \quad (6)$$

Since this probability is independent of  $a$ , but depends only upon the difference  $b - a$ , we see that all values of the coordinate are equally probable.

A definite value of the coordinate, for a particle in the state given by Eq. (2), is thus not predictable, but may be obtained only by a direct measurement. Such a measurement however disturbs the particle and thus alters its state. After the coordinate is determined, the particle will no longer be in the state given by Eq. (2). The usual conclusion from this in quantum mechanics is that *when the momentum of a particle is known, its coordinate has no physical reality*.

More generally, it is shown in quantum mechanics that, if the operators corresponding to two physical quantities, say  $A$  and  $B$ , do not commute, that is, if  $AB \neq BA$ , then the precise knowledge of one of them precludes such a knowledge of the other. Furthermore, any attempt to determine the latter experimentally will alter the state of the system in such a way as to destroy the knowledge of the first.

From this follows that either (1) *the quantum-mechanical description of reality given by the wave function is not complete* or (2) *when the operators corresponding to two physical quantities do not commute the two quantities cannot have simultaneous reality*. For if both of them had simultaneous reality—and thus definite values—these values would enter into the complete description, according to the condition of completeness. If then the wave function provided such a complete description of reality, it would contain these values; these would then be predictable. This not being the case, we are left with the alternatives stated.

In quantum mechanics it is usually assumed that the wave function *does* contain a complete description of the physical reality of the system in the state to which it corresponds. At first

sight this assumption is entirely reasonable, for the information obtainable from a wave function seems to correspond exactly to what can be measured without altering the state of the system. We shall show, however, that this assumption, together with the criterion of reality given above, leads to a contradiction.

## 2.

For this purpose let us suppose that we have two systems, I and II, which we permit to interact from the time  $t=0$  to  $t=T$ , after which time we suppose that there is no longer any interaction between the two parts. We suppose further that the states of the two systems before  $t=0$  were known. We can then calculate with the help of Schrödinger's equation the state of the combined system I+II at any subsequent time; in particular, for any  $t>T$ . Let us designate the corresponding wave function by  $\Psi$ . We cannot, however, calculate the state in which either one of the two systems is left after the interaction. This, according to quantum mechanics, can be done only with the help of further measurements, by a process known as the *reduction of the wave packet*. Let us consider the essentials of this process.

Let  $a_1, a_2, a_3, \dots$  be the eigenvalues of some physical quantity  $A$  pertaining to system I and  $u_1(x_1), u_2(x_1), u_3(x_1), \dots$  the corresponding eigenfunctions, where  $x_1$  stands for the variables used to describe the first system. Then  $\Psi$ , considered as a function of  $x_1$ , can be expressed as

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1), \quad (7)$$

where  $x_2$  stands for the variables used to describe the second system. Here  $\psi_n(x_2)$  are to be regarded merely as the coefficients of the expansion of  $\Psi$  into a series of orthogonal functions  $u_n(x_1)$ . Suppose now that the quantity  $A$  is measured and it is found that it has the value  $a_k$ . It is then concluded that after the measurement the first system is left in the state given by the wave function  $u_k(x_1)$ , and that the second system is left in the state given by the wave function  $\psi_k(x_2)$ . This is the process of reduction of the wave packet; the wave packet given by the

infinite series (7) is reduced to a single term  $\psi_k(x_2)u_k(x_1)$ .

The set of functions  $u_n(x_1)$  is determined by the choice of the physical quantity  $A$ . If, instead of this, we had chosen another quantity, say  $B$ , having the eigenvalues  $b_1, b_2, b_3, \dots$  and eigenfunctions  $v_1(x_1), v_2(x_1), v_3(x_1), \dots$  we should have obtained, instead of Eq. (7), the expansion

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x_2) v_s(x_1), \quad (8)$$

where  $\varphi_s$ 's are the new coefficients. If now the quantity  $B$  is measured and is found to have the value  $b_r$ , we conclude that after the measurement the first system is left in the state given by  $v_r(x_1)$  and the second system is left in the state given by  $\varphi_r(x_2)$ .

We see therefore that, as a consequence of two different measurements performed upon the first system, the second system may be left in states with two different wave functions. On the other hand, since at the time of measurement the two systems no longer interact, no real change can take place in the second system in consequence of anything that may be done to the first system. This is, of course, merely a statement of what is meant by the absence of an interaction between the two systems. Thus, *it is possible to assign two different wave functions (in our example  $\psi_k$  and  $\varphi_r$ ) to the same reality* (the second system after the interaction with the first).

Now, it may happen that the two wave functions,  $\psi_k$  and  $\varphi_r$ , are eigenfunctions of two non-commuting operators corresponding to some physical quantities  $P$  and  $Q$ , respectively. That this may actually be the case can best be shown by an example. Let us suppose that the two systems are two particles, and that

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/\hbar)(x_1 - x_2 + x_0)p} dp, \quad (9)$$

where  $x_0$  is some constant. Let  $A$  be the momentum of the first particle; then, as we have seen in Eq. (4), its eigenfunctions will be

$$u_p(x_1) = e^{(2\pi i/\hbar)px_1} \quad (10)$$

corresponding to the eigenvalue  $p$ . Since we have here the case of a continuous spectrum, Eq. (7) will now be written

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p(x_2) u_p(x_1) d p, \quad (11)$$

where

$$\psi_p(x_2) = e^{-(2\pi i/\hbar)(x_2 - x_0)p}. \quad (12)$$

This  $\psi_p$  however is the eigenfunction of the operator

$$P = (\hbar/2\pi i) \partial/\partial x_2, \quad (13)$$

corresponding to the eigenvalue  $-p$  of the momentum of the second particle. On the other hand, if  $B$  is the coordinate of the first particle, it has for eigenfunctions

$$v_x(x_1) = \delta(x_1 - x), \quad (14)$$

corresponding to the eigenvalue  $x$ , where  $\delta(x_1 - x)$  is the well-known Dirac delta-function. Eq. (8) in this case becomes

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(x_2) v_x(x_1) dx, \quad (15)$$

where

$$\begin{aligned} \varphi_x(x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/\hbar)(x - x_2 + x_0)p} v dp \\ &= \hbar \delta(x - x_2 + x_0). \end{aligned} \quad (16)$$

This  $\varphi_x$ , however, is the eigenfunction of the operator

$$Q = x_2 \quad (17)$$

corresponding to the eigenvalue  $x + x_0$  of the coordinate of the second particle. Since

$$PQ - QP = \hbar/2\pi i, \quad (18)$$

we have shown that it is in general possible for  $\psi_k$  and  $\varphi_r$  to be eigenfunctions of two noncommuting operators, corresponding to physical quantities.

Returning now to the general case contemplated in Eqs. (7) and (8), we assume that  $\psi_k$  and  $\varphi_r$  are indeed eigenfunctions of some noncommuting operators  $P$  and  $Q$ , corresponding to the eigenvalues  $p_k$  and  $q_r$ , respectively. Thus, by measuring either  $A$  or  $B$  we are in a position to predict with certainty, and without in any way

disturbing the second system, either the value of the quantity  $P$  (that is  $p_k$ ) or the value of the quantity  $Q$  (that is  $q_r$ ). In accordance with our criterion of reality, in the first case we must consider the quantity  $P$  as being an element of reality, in the second case the quantity  $Q$  is an element of reality. But, as we have seen, both wave functions  $\psi_k$  and  $\varphi_r$  belong to the same reality.

Previously we proved that either (1) the quantum-mechanical description of reality given by the wave function is not complete or (2) when the operators corresponding to two physical quantities do not commute the two quantities cannot have simultaneous reality. Starting then with the assumption that the wave function does give a complete description of the physical reality, we arrived at the conclusion that two physical quantities, with noncommuting operators, can have simultaneous reality. Thus the negation of (1) leads to the negation of the only other alternative (2). We are thus forced to conclude that the quantum-mechanical description of physical reality given by wave functions is not complete.

One could object to this conclusion on the grounds that our criterion of reality is not sufficiently restrictive. Indeed, one would not arrive at our conclusion if one insisted that two or more physical quantities can be regarded as simultaneous elements of reality *only when they can be simultaneously measured or predicted*. On this point of view, since either one or the other, but not both simultaneously, of the quantities  $P$  and  $Q$  can be predicted, they are not simultaneously real. This makes the reality of  $P$  and  $Q$  depend upon the process of measurement carried out on the first system, which does not disturb the second system in any way. No reasonable definition of reality could be expected to permit this.

While we have thus shown that the wave function does not provide a complete description of the physical reality, we left open the question of whether or not such a description exists. We believe, however, that such a theory is possible.





## Abkürzungsverzeichnis

CH	J. F. Clauser, M. A. Horne
CHSH	J. F. Clauser, M. A. Horne, R. Shimony, R. A. Holt
EPR	A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen
eCH-...	erweiterte CH-...
F.A.S.	Frankfurter Allgemeine Sonntagszeitung
FC	S. J. Freedman, J. F. Clauser
LRT	Lokal-realistische Theorie
QE	Quanteneffizienz
SPDC	spontaneous parametric down-conversion (spontane parametrische Fluoreszenz)
UR	Unschärferelation

## Bildquellen

Abbildung 7, entnommen und bearbeitet aus: J. F. Clauser and A. Shimony, Rep. Prog. Phys. **41**, S. 1903 (1978).

Abbildung 11 aus: Spektrum der Wissenschaft 11/2008, "Die Wirklichkeit der Quanten" von A. Zeilinger, Seite 60, Grafik links: Laurie Grace (Bearbeitung Spektrum der Wissenschaft), Foto rechts: Paul Kwiat und Michael Reck, Universität Wien (Bearbeitung Spektrum der Wissenschaft).

## Literaturverzeichnis

- A. AFRIAT and F. SELLERI, *The Einstein, Podolsky, and Rosen Paradox in Atomic, Nuclear, and Particle Physics* (New York, 1999).
- G. ALBER und M. FREYBERGER, Phys. Bl. **55**, S. 23-27 (1999).
- A. ASPECT, P. GRANGIER, and G. ROGER, Phys. Rev. Lett. **47**, S. 460-463 (1981).
- A. ASPECT, P. GRANGIER, and G. ROGER, Phys. Rev. Lett. **49**, S. 91-94 (1982).
- A. ASPECT, J. DALIBARD, and G. ROGER, Phys. Rev. Lett. **49**, S. 1804-1807 (1982).
- A. ASPECT, Nature **398**, S. 189-190 (1999).
- A. ASPECT, arXiv: quant-ph/0402001v1, S. 1-34 (2004).
- A. ASPECT, Nature **446**, S. 866-867 (2007).
- M. ASPELMEYER, A. ZEILINGER, Physics World **7**, S. 22-28 (2008).
- M. ASPELMEYER, Interview mit ORF.at,  
URL: <http://science.orf.at/science/news/147910> (Stand: 12. September 2009).
- G. AULETTA, *Foundations and Interpretation of Quantum Mechanics. In the Light of a Critical-Historical Analysis of the Problems and of a Synthesis of the Results. With a Foreword by Giorgio Parisi* (Singapore, 2000).
- K. BAUMANN, R. U. SEXL, *Die Deutungen der Quantentheorie*, 3. überarbeitete Auflage (Braunschweig, 1987).
- J. S. BELL, Physics **1**, S. 195-200 (1964).
- J. S. BELL, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics: collected papers in quantum mechanics* (Cambridge, 1987).
- D. BOHM, Phys. Rev. **85**, S. 166-193 (1952).
- D. BOHM and Y. AHARONOV, Phys. Rev. **108**, S. 1070-1076 (1957).
- A. BOTO, P. KOK, D. ABRAMS, *ET AL.*, Phys. Rev. Lett. **85**, S. 2733-2736 (2000).
- D. BRUSS, H. WEINFURTER, Physik Journal **11**, S. 57-62 (2005).
- S. A. CAMEJO, *Skurrile Quantenwelt* (Frankfurt am Main, 2007).
- J. F. CLAUSER, M. A. HORNE, A. SHIMONY, R. A. HOLT, Phys. Rev. Lett. **23**, S. 880-884 (1969).
- J. F. CLAUSER, M. A. HORNE, Phys. Rev. D **10**, S. 526-535 (1974).
- J. F. CLAUSER, Phys. Rev. Lett. **36**, S. 1223-1226 (1976).
- J. F. CLAUSER and A. SHIMONY, Rep. Prog. Phys. **41**, S. 1881-1927 (1978).

- J. P. DOWLING, G. J. MILBURN, arXiv: quant-ph/0206091v1, S. 1-24 (2002).
- A. EINSTEIN, B. PODOLSKY and N. ROSEN, Phys. Rev. **47**, S. 777-780 (1935).
- B. D'ESPAGNAT, Spektrum d. Wiss. **1**, S. 68-81 (1980).
- A. FINE, Phys. Rev. Lett. **48**, S. 291-295 (1982).
- S. J. FREEDMAN, J. F. CLAUSER, Phys. Rev. Lett. **28**, S. 938-941 (1972).
- E. S. FRY and R. C. THOMPSON, Phys. Rev. Lett. **37**, S. 465-468 (1976).
- E. S. FRY, T. WALTHER, and S. LI, Phys. Rev. A **52**, S. 4381-4395 (1995).
- E. S. FRY and T. WALTHER, *Atom based tests of the Bell inequalities – the Legacy of John Bell continues...*(preprint 2001),  
URL: <http://www.lqo.tu-darmstadt.de/publications/proceeding/pdfdownloads/bellpaper.pdf>  
(Stand: 06. August 2009).
- E. S. FRY, X. QU, and M. O. SCULLY, *Do Experimental Violations of Bell Inequalities Require a Nonlocal Interpretation of Quantum Mechanics? II: Analysis à la Bell*, in: *Quantum Reality, Relativistic Causality, and Closing the Epistemic Circle. Essays in Honour of Abner Shimony* (edited by W. C. Myrvold & J. Christian), The Western Ontario Series in Philosophy of Science **73**, S. 125-156 (2009)
- N. GISIN, *Bell Inequalities: Many Questions, a Few Answers*, in: *Quantum Reality, Relativistic Causality, and Closing the Epistemic Circle. Essays in Honour of Abner Shimony* (edited by W. C. Myrvold & J. Christian), The Western Ontario Series in Philosophy of Science **73**, S. 125-138 (2009).
- S. GRÖBLACHER, T. PATEREK, R. KALTENBAEK, *ET AL.*, Nature **446**, S. 871-875 (2007).
- C. HELD, *Die Bohr-Einstein-Debatte. Quantenmechanik und physikalische Wirklichkeit* (Paderborn, 1998).
- S. F. HUELGA and M. FERRERO, E. SANTOS, Phys. Rev. A **51**, S. 5008-5011 (1995).
- M. JAMMER, *The EPR Problem in its Historical Development*, in: *Symposium on the Foundation of Modern Physics. 50 years of the Einstein-Podolsky-Rosen Gedankenexperiment* (edited by P. Lahti & P. Mittelstaedt), S. 129-149 (Singapore, 1985).
- D. JANZIG, Physik Journal **11**, S. 26 (2005).
- H.-J. KULL, private Aufzeichnungen (Aachen, 2009).
- P. G. KWIAT, P. H. EBERHARD, A. M. STEINBERG, and R. Y. CHIAO, Phys. Rev. A **49**, S. 3209-3221 (1994).
- M. LAMEHI-RACHTI and W. MITTIG, Phys. Rev. D **14**, S. 2543-2555 (1976).
- A. J. LEGGETT, Found. Phys. **33**, S. 1469-1493 (2003).

- Y.-C. LIANG, *Correlations, Bell Inequality Violation & Quantum Entanglement*, Dissertation (University of Queensland, 2008).
- M. LE BELLAC, *Quantum Physics* (Cambridge, 2006).
- M. A. NIELSEN & I. L. CHUANG, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge, 2000).
- T. PATEREK, A. FEDRIZZI, S. GRÖBLACHER, *ET AL.*, Phys. Rev. Lett. **99**, 210406-1 – 210406-4 (2007).
- W. PERRIE, A. J. DUNCAN, H. J. BEYER, and H. KLEINOPPEN, Phys. Rev. Lett. **54**, S. 1790-1793 (1985).
- U. v. RAUCHHAUPT, *Die Wirklichkeit, die es nicht gibt*, in: Frankfurter Allgemeinen Sonntagszeitung, S. 65 (22.04.2007).
- U. v. RAUCHHAUPT, *Die Realität ist nicht in den Dingen*, in: Frankfurter Allgemeinen Sonntagszeitung, S. 69 (02.03.2008).
- G. REUSCHER, D. HOLTMANNSPÖTTER, *Quantenoptik – Anwendung nichtklassischen Lichts – Technologieanalyse* (hrsg. v. VDI Technologiezentrum GmbH im Auftrag des BMBF), Zukünftige Technologien **49** (2004).
- M. A. ROWE, D. KIELPINSKI, V. MEYER, C. A. SACKETT, M. W. ITANO, C. MONROE & D. J. WINELAND, Nature **409**, S. 791-794 (2001).
- C. A. SACKETT, D. KIELPINSKI, B. E. KING, *ET AL.*, Nature **404**, S. 256-259 (2000).
- E. SCHRÖDINGER, Die Naturwissenschaften **23**, S. 823-849 (1935).
- F. SCHWABL, *Quantenmechanik. Eine Einführung* (Berlin, <sup>6</sup>2002).
- Y. SHIH, *The Physics of 2#1+1*, in: *Quantum Reality, Relativistic Causality, and Closing the Epistemic Circle. Essays in Honour of Abner Shimony* (edited by W. C. Myrvold & J. Christian), The Western Ontario Series in Philosophy of Science **73**, S. 157-208 (2009).
- T. WALTHER und E. S. FRY, Phys. Bl. **53**, S. 229-232 (1997).
- G. WEIHS, T. JENNEWEIN, C. SIMON, H. WEINFURTER, and A. ZEILINGER, Phys. Rev. Lett. **81**, S. 5039-5043 (1998).
- G. WEIHS, *Ein Experiment zum Test der Bellschen Ungleichung unter Einsteinscher Lokalität*, Dissertation (Universität Wien, 1999).
- A. ZEILINGER, Phys. Lett. A **118**, S. 1-2 (1986).
- A. ZEILINGER, *Einsteins Spuk. Teleportation und weitere Mysterien der Quantenphysik*, (München, <sup>3</sup>2007).
- A. ZEILINGER, Spektrum der Wissenschaft **11**, S. 54-63 (2008)

## **Erklärung zur schriftlichen Hausarbeit**

Ich versichere, dass ich die schriftliche Hausarbeit – einschließlich beigefügter Zeichnungen, Kartenskizzen und Darstellungen – selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Alle Stellen der Arbeit, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entnommen sind, habe ich in jedem Fall unter Angabe der Quelle deutlich als Entlehnung kenntlich gemacht.

Amos Drobisch

Aachen, den 21. September 2009

