Grundgesetze der Arithmetik:

Gottlob Frege - Paragraphen in moderner Notation - Corrigenda nicht eingearbeitet

28. Februar 2006

| **Vorwort.** S.V

Man findet in diesem Buche Lehrsätze, auf denen die Arithmetik beruht, mit Zeichen bewiesen, deren Ganzes ich Begriffsschrift nenne. Die wichtigsten dieser Sätze sind am Ende zum Theil mit angefügter Uebersetzung zusammengestellt. Wie man sieht, sind die negativen, gebrochenen, irrationalen nnd complexen Zahlen hier noch von der Betrachtung ausgeschlossen, ebenso auch Addition, Multiplication u. s. w. Auch die Sätze von den Anzahlen sind noch nicht in der zuerst geplanten Vollständigkeit vorhanden. Insbesondere fehlt noch der Satz, dass die Anzahl der unter einen Begriff fallenden Gegenstände endlich ist, wenn die Anzahl der Gegenstände endlich ist, die unter einen übergeordneten Begriff fallen. Aeussere Gründe haben mich bestimmt, dies, sowie die Behandlung der andern Zahlen und der Rechnungsarten einer Fortsetzung vorzubehalten, deren Erscheinen von der Aufnahme abhängig sein wird, die dieser erste Band findet. Was ich hier geboten habe, mag hinreichen, von meiner Weise eine Vorstellung zu geben. Man könnte meinen, dass die Sätze über die Anzahl Endlos[1] hätten fehlen können. Zur Begründung der Arithmetik im hergebrachten Umfange sind sie allerdings nicht nöthig; aber ihre Ableitung ist meist einfacher als die der entsprechenden Sätze für endliche Anzahlen und kann als Vorbereitung für sie dienen. Noch kommen Sätze vor, die nicht von Anzahlen handeln, die aber zu den Beweisen gebraucht werden. Sie handeln z. B. vom Folgen in einer Reihe, von der Eindeutigkeit von Beziehungen, von zusammengesetzten und gekoppelten Beziehungen, von der Abbildung durch Beziehungen u. dergl. Diese Sätze könnte man vielleicht einer erweiterten Combinationslehre zuweisen.

Die Beweise sind allein in den mit „Aufbau“ überschriebenen Paragraphen enthalten, während die mit „Zerlegung“ überschriebenen das Verständniss erleichtern sollen, indem sie vorläufig den Gang des Beweises in groben Umrissen vorzeichnen. Die Beweise selbst enthalten keine Worte, sondern sind allein mit meinen Zeichen geführt. Sie stellen sich dem Auge dar als eine Reihe von Formeln, die durch ausgezogene oder | unterbrochene Striche S.VI oder andere Zeichen getrennt sind. Jede dieser Formeln ist ein vollständiger Satz mit allen Bedingungen, die zu seiner Gültigkeit nothwendig sind. Diese Vollständigkeit, welche stillschweigend hinzuzudenkende Voraussetzungen nicht duldet, scheint mir für die Strenge der Beweisführung unentbehrlich zu sein.

Der Fortschritt von einem Satze zum nächsten geht nach den Regeln vor sich, die im § 48 zusammengestellt sind, und kein Uebergang geschieht, der nicht diesen Regeln gemäss wäre. Wie und nach welcher Regel die Folgerung gemacht wird, deutet das zwischen den Formeln stehende Zeichen an, während ————•———— eine Schlusskette abschliesst. Es muss hierbei Sätze geben, die nicht aus andern abgeleitet werden. Solche sind theils die Grundgesetze, die ich im § 47 zusammengestellt habe, theils die Definitionen, die man am Ende in einer Tafel vereinigt findet mit Hinweis auf die Stellen, wo sie zuerst vorkommen. Bei einer Fortsetzung dieses Unternehmens wird immer wieder das Bedürfniss von Definitionen hervortreten. Die Grundsätze, die dabei maassgebend sein müssen, sind im § 33 aufgeführt. Die Definitionen sind nicht eigentlich schöpferisch und dürfen es, wie ich glaube, nicht sein; sie führen nur abkürzende Bezeichnungen (Namen) ein, die entbehrt werden könnten, wenn nicht sonst die Weitläufigkeit unüberwindliche äussere Schwierigkeiten machte.

Das Ideal einer streng wissenschaftlichen Methode der Mathematik, das ich hier zu verwirklichen gestrebt habe, und das wohl nach Euklid benannt werden könnte, möchte ich so schildern. Dass Alles bewiesen werde, kann zwar nicht verlangt werden, weil es unmöglich ist; aber man kann fordern, dass alle Sätze, die man braucht, ohne sie zu beweisen, ausdrücklich als solche ausgesprochen werden, damit man deutlich erkenne, worauf der ganze Bau beruhe. Es muss danach gestrebt werden, die Anzahl dieser Urgesetze möglichst zu verringern,

[1] Anzahl einer abzählbar unendlichen Menge.

indem man Alles beweist, was beweisbar ist. Ferner, und darin gehe ich über Euklid hinaus, verlange ich, dass alle Schluss- und Folgerungsweisen, die zur Anwendung kommen, vorher aufgeführt werden. Sonst ist die Erfüllung jener ersten Forderung nicht sicher zu stellen. Dieses Ideal glaube ich nun im Wesentlichen erreicht zu haben. Nur in wenig Punkten könnte man noch strengere Anforderungen stellen. ■→Um mir mehr Beweglichkeit zu sichern und nicht in übermässige Breite zu verfallen, habe ich mir erlaubt, von der Vertauschbarkeit der Vorderglieder (Bedingungen) und von der Verschmelzbarkeit gleicher Vorderglieder stillschweigend Gebrauch zu machen, und habe die Schluss- und Folgerungsweisen nicht auf die geringste Zahl zurückgeführt.←■[2] [#1]Wer mein Büchlein *Begriffsschrift* kennt, wird daraus entnehmen können, wie man auch hierin den strengsten Anforderungen genügen könnte, zugleich aber auch, dass dies eine beträchtliche Zunahme des Umfanges nach sich zöge.

S.VII Im Uebrigen, glaube ich, werden die Ausstellungen, die man mit Recht | bei diesem Buche machen kann, nicht die Strenge betreffen, sondern nur die Wahl des Beweisganges und der Zwischenstufen. Oft stehen mehre Wege offen, einen Beweis zu führen; ich habe sie nicht alle zu betreten versucht, und so ist es möglich, ja wahrscheinlich, dass ich nicht immer den kürzesten gewählt habe. Wer in dieser Hinsicht etwas zu tadeln hat, der mache es besser. Ueber Anderes wird sich streiten lassen. Einige würden vielleicht vorgezogen haben, den Umkreis der zugelassenen Schluss-und Folgerungsweisen weiter zu ziehen und dadurch grössere Beweglichkeit und Kürze zu erzielen. Aber irgendwo muss man hier Halt machen, wenn man überhaupt mein aufgestelltes Ideal billigt, und wo man auch Halt macht, würden immer Leute sagen können: es wäre besser gewesen, noch mehr Schlussweisen zuzulassen.

Durch die Lückenlosigkeit der Schlussketten wird erreicht, dass jedes Axiom, jede Voraussetzung, Hypothese, oder wie man es sonst nennen will, auf denen ein Beweis beruht, ans Licht gezogen wird; und so gewinnt man eine Grundlage für die Beurtheilung der erkenntnisstheoretischen Natur des bewiesenen Gesetzes. Es ist zwar schon vielfach ausgesprochen worden, dass die Arithmetik nur weiter entwickelte Logik sei; aber das bleibt solange bestreitbar, als in den Beweisen Uebergänge vorkommen, die nicht nach anerkannten logischen Gesetzen geschehn, sondern auf einem anschauenden Erkennen zu beruhen scheinen. Erst wenn diese Uebergänge in einfache logische Schritte zerlegt sind, kann man sich überzeugen, dass nichts als Logik zu Grunde liegt. Ich habe Alles zusammengestellt, was die Beurtheilung erleichtern kann, ob die Schlussketten bündig und die Widerlager fest sind. Wenn etwa jemand etwas fehlerhaft finden sollte, muss er genau angeben können, wo der Fehler seiner Meinung nach steckt: in den Grundgesetzen, in den Definitionen, in den Regeln oder ihrer Anwendung an einer bestimmten Stelle. Wenn man Alles in Ordnung findet, so kennt man damit die Grundlagen genau, auf denen jeder einzelne Lehrsatz beruht. Ein Streit kann hierbei, soviel ich sehe, nur um mein Grundgesetz der Werthverläufe (V) entbrennen, das von den Logikern vielleicht noch nicht eigens ausgesprochen ist, obwohl man danach denkt, z. B. wenn man von Begriffsumfängen redet. Ich halte es für rein logisch. Jedenfalls ist hiermit die Stelle bezeichnet, wo die Entscheidung fallen muss.

Mein Zweck erfordert manche Abweichungen von dem, was in der Mathematik üblich ist. Die Anforderungen an die Strenge der Beweisführung haben eine grössere Länge zur unausweichlichen Folge. Wer dies nicht im Auge hat, wird sich in der That wundern, wie umständlich hier oft ein Satz bewiesen wird, den er in einer einzigen Erkenntnissthat unmittelbar einzusehen glaubt. Besonders wird dies auffallen, wenn man die Schrift des Herrn Dedekind

---

[2]Um mir mehr Beweglichkeit zu sichern und nicht in übermässige Breite zu verfallen, habe ich mir erlaubt, von der Vertauschbarkeit der Unterglieder (Bedingungen) und von der Verschmelzbarkeit gleicher Unterglieder stillschweigend Gebrauch zu machen, und habe die Schluss- und Folgerungsweisen nicht auf die geringste Zahl zurückgeführt.

[#1]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

Was sind und was sollen die Zahlen? vergleicht, das Gründlichste, was mir in der letzten Zeit über die Grundlegung der Arithmetik zu Gesicht gekommen ist. Sie verfolgt auf einem weit | kleineren Raume die Gesetze der Arithmetik weit höher hinauf, als es hier geschieht. Diese Kürze wird freilich nur dadurch erreicht, dass Vieles überhaupt nicht eigentlich bewiesen wird. Herr Dedekind sagt oft nur, dass der Beweis aus den und den Sätzen folge; er gebraucht Pünktchen, wie in „$\mathfrak{M}(A, B, C\ldots)$“; nirgends ist bei ihm eine Zusammenstellung der von ihm zu Grunde gelegten logischen oder andern Gesetze zu finden, und wenn sie da wäre, hätte man keine Möglichkeit, zu prüfen, ob wirklich keine andern angewendet wären; denn dazu müssten die Beweise nicht nur angedeutet, sondern lückenlos ausgeführt sein. Auch Herr Dedekind ist der Meinung, dass die Lehre von den Zahlen ein Theil der Logik sei; aber seine Schrift trägt kaum dazu bei, diese Meinung zu erhärten, weil die von ihm angewendeten Ausdrücke „System“, „ein Ding gehört zu einem Dinge“ in der Logik nicht üblich sind und nicht auf anerkannt Logisches zurückgeführt werden. Ich sage dies nicht als Vorwurf; denn sein Verfahren mag für ihn das zweckdienlichste gewesen sein; ich sage es nur, um meine Absicht durch den Gegensatz in helleres Licht zu setzen. Die Länge eines Beweises soll man nicht mit der Elle messen. Man kann ja leicht einen Beweis auf dem Papiere kurz erscheinen lassen, indem man viele Zwischenglieder in der Schlusskette überspringt und manches nur andeutet. Man begnügt sich ja meistens damit, dass jeder Schritt im Beweise als richtig einleuchte, und das darf man auch, wenn man nur von der Wahrheit des zu beweisenden Satzes überzeugen will. Wenn es sich aber darum handelt, eine Einsicht in die Natur dieses Einleuchtens zu vermitteln, genügt dies Verfahren nicht, sondern man muss alle Zwischenstufen hinschreiben, um das volle Licht des Bewusstseins auf sie fallen zu lassen. Den Mathematikern kommt es ja gewöhnlich nur auf den Inhalt des Satzes an, und dass er bewiesen werde. Hier ist das Neue nicht der Inhalt des Satzes, sondern wie der Beweis geführt wird, auf welche Grundlagen er sich stützt. Dass dieser wesentlich verschiedene Gesichtspunkt auch eine andere Behandlungsweise erfordert, darf nicht befremden. Wenn man einen unserer Sätze in üblicher Weise ableitet, wird leicht ein Satz übersehen werden, der zum Beweise unnöthig zu sein scheint. Bei genauer Durchdenkung meines Beweises wird man, glaube ich, denn doch seine Unentbehrlichkeit einsehen, wenn man nicht etwa einen ganz andern Weg einschlagen will. So findet man auch vielleicht in unsern Sätzen hier und da Bedingungen, die zuerst als unnöthig auffallen, die sich aber doch als nothwendig erweisen, oder wenigstens nur mit einem eigens zu beweisenden Satze entfernt werden können. S.VIII

Ich führe hiermit ein Vorhaben aus, das ich schon bei meiner *Begriffsschrift* vom Jahre 1879 im Auge gehabt und in meinen *Grundlagen der Arithmetik* vom Jahre 1884 angekündigt habe[3]. Ich will hier durch die | That die Ansicht über die Anzahl bewähren, die ich in dem zuletzt genannten Buche dargelegt habe. Das Grundlegende meiner Ergebnisse sprach ich dort im § 46 so aus, dass die Zahlangabe eine Aussage von einem Begriffe enthalte; und darauf beruht hier die Darstellung. Wenn jemand anderer Ansicht ist, so versuche er es, darauf eine folgerechte und brauchbare Darstellung durch Zeichen zu gründen, und er wird sehn, dass es nicht geht. In der Sprache ist die Sachlage freilich nicht so durchsichtig; aber wenn man genau zusieht, findet man, dass auch hier bei einer Zahlangabe immer ein Begriff genannt wird, nicht eine Gruppe, ein Aggregat oder dergl., und dass, wo dies doch einmal vorkommen sollte, die Gruppe oder das Aggregrat immer durch einen Begriff bestimmt ist, d. h. durch die Eigenschaften, die ein Gegenstand haben muss, um zu der Gruppe zu gehören, während das, was die Gruppe zur Gruppe, das System zum System macht, die Beziehungen der Glieder zu einander, für die Anzahl völlig gleichgültig ist. S.IX

Der Grund, warum die Ausführung so spät nach der Ankündigung erscheint, liegt zum

[3]Man vergleiche die Einleitung und die §§ 90 und 91 meiner Grundlagen der Arithmetik, Breslau, Verlag von Wilhelm Koebner, 1884.

Theil in innern Umwandlungen der Begriffsschrift, die mich zur Verwerfung einer handschriftlich fast schon vollendeten Arbeit genöthigt haben. Diese Fortschritte mögen hier kurz erwähnt werden. Die in meiner *Begriffsschrift* verwendeten Urzeichen kommen hier mit einer Ausnahme wieder vor. Statt der drei parallelen Striche habe ich nämlich das gewöhnliche Gleichheitszeichen gewählt, da ich mich überzeugt habe, dass es in der Arithmetik grade die Bedeutung hat, die auch ich bezeichnen will. Ich gebrauche nämlich das Wort „gleich" in derselben Bedeutung wie „zusammenfallend mit" oder „identisch mit", und so wird das Gleichheitszeichen auch in der Arithmetik wirklich gebraucht. Der Widerspruch, der sich etwa hiergegen erhebt, wird wohl auf mangelhafter Unterscheidung von Zeichen und Bezeichnetem beruhen. Freilich ist in der Gleichung ‚$2^2 = 2 + 2$' das links stehende Zeichen verschieden von dem rechts stehenden; aber beide bezeichnen oder bedeuten dieselbe Zahl[4]. Zu den alten Urzeichen sind nun noch zwei hinzugekommen: ■→ein Zeichen zur Bezeichnung des Werthverlaufs einer Function und eines, das den bestimmten Artikel der Sprache vertreten soll.←■[5]
[#2] Die Einführung der Werthverläufe der Functionen ist ein wesentlicher Fortschritt, dem eine weit grössere Beweglichkeit zu verdanken ist. Die früheren abgeleiteten Zeichen können nun durch andere, und zwar einfachere ersetzt werden, obwohl die Definitionen der Eindeutigkeit einer Beziehung, des Folgens in einer Reihe, der Abbildung im Wesentlichen dieselben sind, die ich theils in meiner *Begriffsschrift*, theils in meinen *Grundlagen der Arithmetik* gegeben
S.X habe. Die | Werthverläufe haben aber auch eine grosse grundsätzliche Wichtigkeit; definire ich doch die Anzahl selbst als einen Begriffsumfang, und Begriffsumfänge sind nach meiner Bestimmung Werthverläufe. Ohne diese wäre also gar nicht auszukommen. Die alten äusserlich unverändert wieder auftretenden Urzeichen, deren Algorithmus sich auch kaum geändert hat, sind doch mit andern Erklärungen versehen worden. Der frühere Inhaltsstrich erscheint als Wagerechter wieder. Das sind Folgen einer eingreifenden Entwickelung meiner logischen Ansichten. Ich hatte früher in dem, dessen äussere Form ein Behauptungssatz ist, zweierlei unterschieden: 1) die Anerkennung der Wahrheit, 2) den Inhalt, der als wahr anerkannt wird. Den Inhalt nannte ich beurtheilbaren Inhalt. Dieser ist mir nun zerfallen in das, was ich Gedanken, und das, was ich Wahrheitswerth nenne. Das ist die Folge der Unterscheidung von Sinn und Bedeutung eines Zeichens. In diesem Falle ist der Sinn des Satzes der Gedanke und seine Bedeutung der Wahrheitswerth. Dazu kommt dann noch die Anerkennung, dass der Wahrheitswerth das Wahre sei. Ich unterscheide nämlich zwei Wahrheitswerthe: das Wahre und das Falsche. Dies habe ich in meinem oben erwähnten Aufsatze über Sinn und Bedeutung eingehender begründet. Hier mag nur erwähnt werden, dass die ungerade Rede nur so richtig aufgefasst werden kann. Der Gedanke nämlich, der sonst Sinn des Satzes ist, wird in der ungeraden Rede seine Bedeutung. Wieviel einfacher und schärfer durch die Einführung der Wahrheitswerthe Alles wird, kann nur eine eingehende Beschäftigung mit diesem Buche lehren. Diese Vortheile allein schon legen ein grosses Gewicht in die Wagschale zu Gunsten meiner Auffassung, die freilich auf den ersten Blick befremden mag. Auch ist das Wesen der Function im Unterschiede vom Gegenstande schärfer als in meiner *Begriffsschrift* gekennzeichnet. Daraus ergiebt sich weiter die Unterscheidung der Functionen erster und zweiter Stufe. Wie ich in meinem Vortrage über *Function und Begriff*[6] ausgeführt habe, sind Begriffe und Beziehungen Functionen in der von mir erweiterten Bedeutung dieses Wortes, und so haben wir auch Begriffe erster und zweiter Stufe, gleichstufige und ungleichstufige

---

[4]Ich sage freilich auch: der Sinn des rechts stehenden Zeichens ist verschieden von dem des links stehenden; aber die Bedeutung ist dieselbe. Man vergleiche meinen Aufsatz über Sinn und Bedeutung in der Zeitschrift f. Philos. u. philos. Kritik, 100. Bd., S. 25.

[5]der Spiritus lenis zur Bezeichnung des Werthverlaufs einer Function und ein Zeichen, das den bestimmten Artikel der Sprache vertreten soll.

[6]Jena, Verlag von Hermann Pohle, 1891.

[#2]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

Beziehungen zu unterscheiden.

Wie man sieht, sind die Jahre nicht vergebens seit dem Erscheinen meiner *Begriffsschrift* und meiner *Grundlagen* verflossen: sie haben das Werk gereift. Aber grade das, was ich als wesentlichen Fortschritt erkenne, steht, wie ich mir nicht verhehlen kann, der Verbreitung und der Wirksamkeit meines Buches als grosses Hemmniss im Wege. Und worin ich seinen Werth nicht zum geringsten Theile sehe, die strenge Lückenlosigkeit der Schlussketten wird ihm, wie ich fürchte, wenig Dank einbringen. Ich habe mich von den hergebrachten Auffassungsweisen weiter | entfernt und dadurch meinen Ansichten ein paradoxes Gepräge aufgedrückt. S.XI Leicht wird ein Ausdruck, der hier oder da beim flüchtigen Durchblättern aufstösst, befremdlich erscheinen und ein ungünstiges Vorurtheil erzeugen. Ich selbst kann ja das Widerstreben einigermaassen abschätzen, dem meine Neuerungen begegnen werden, weil ich selbst ein ähnliches erst in mir überwinden musste, um sie zu machen. Denn nicht aufs Gerathewohl und aus Neuerungssucht, sondern durch die Sache selbst gedrängt, bin ich dahin gelangt.

Hiermit komme ich auf den zweiten Grund der Verspätung: die Muthlosigkeit, die mich zeitweilig überkam angesichts der kühlen Aufnahme, oder besser gesagt, des Mangels an Aufnahme meiner oben genannten Schriften bei den Mathematikern[7] und der Ungunst der wissenschaftlichen Strömungen, gegen die mein Buch zu kämpfen haben wird. Schon der erste Eindruck muss abschrecken: unbekannte Zeichen, seitenlang nur fremdartige Formeln. So habe ich mich denn zu Zeiten andern Gegenständen zugewendet. Aber auf die Dauer konnte ich doch die Ergebnisse meines Denkens, die mir werthvoll schienen, nicht in meinem Pulte verschliessen, und die aufgewendete Arbeit forderte immer neue Arbeit, um nicht vergeblich zu sein. So liess mich die Sache nicht los. In einem Falle wie hier, wo der Werth eines Buches durch flüchtiges Durchlesen nicht erkannt werden kann, sollte die Kritik helfend einspringen. Aber sie wird im Allgemeinen zu schlecht bezahlt. Ein Kritiker wird nie hoffen können, für die Mühe, die ein gründliches Durcharbeiten dieses Buches in Aussicht stellt, in Geld entschädigt zu werden. Mir bleibt nur übrig zu hoffen, jemand möge von vorneherein soviel Vertrauen zu der Sache schöpfen, dass er in dem innern Gewinn eine hinreichende Belohnung erwartet, und er werde dann das Ergebniss seiner reiflichen Prüfung der Oeffentlickeit übergeben. Nicht, als ob mich nur eine lobende Besprechung befriedigen könnte; im Gegentheil! eine auf gründlicher Kenntnissnahme gestützte Bekämpfung kann mir nur lieber sein als ein Lob, das sich in allgemeinen Wendungen ergeht, ohne den Kern der Sache zu berühren. Einem Leser, der mit solchen Absichten an das Buch herantritt, möchte ich hier durch einige Winke die Arbeit erleichtern.

Um vorerst eine ungefähre Vorstellung zu gewinnen, wie ich mit meinen Zeichen Gedanken ausdrücke, wird es dienlich sein, in der Tafel der wichtigeren Lehrsätze einige der einfacheren näher zu betrachten, denen eine Uebersetzung angehängt ist. Man wird dann auch errathen können, was andere jenen ähnliche besagen wollen, denen keine Uebersetzung folgt. Darauf möge man mit der Einleitung anfangen und die Darlegung der Begriffsschrift in Angriff nehmen. Doch rathe ich, zunächst nur flüchtige Kenntniss davon | zu nehmen und S.XII sich bei einzelnen Bedenken nicht zu lange aufzuhalten. Einige Betrachtungen mussten zwar aufgenommen werden, um allen Einwänden begegnen zu können, sind aber für das Verständniss der Begriffsschriftsätze unwesentlich. Ich rechne dahin die zweite Hälfte des § 8, die auf S. 12 mit den Worten „Wenn wir nun erklären“ beginnt, ferner die zweite Hälfte des § 9, die auf S. 15 mit den Worten „Wenn ich allgemein sage“ beginnt, und den ganzen § 10. Diese Stellen mögen beim ersten Lesen ganz überschlagen werden. Dasselbe gilt von den §§ 26 und 28 bis 32. Dagegen möchte ich als für das Verständniss besonders wichtig die

[7] In dem Jahrb. über die Fortschritte der Math. sucht man meine Grundlagen der Arithm. vergebens. Forscher auf demselben Gebiete, die Herren Dedekind, Otto Stolz, v. Helmholtz scheinen meine Arbeiten nicht zu kennen. Auch Kronecker erwähnt sie in seinem Aufsatze über den Zahlbegriff nicht.

erste Hälfte des § 8, ferner die §§ 12 und 13 hervorheben. Ein genaueres Durchlesen möge mit §34 beginnen und bis zum Schlusse andauern. Man wird dann gelegentlich auf die nur flüchtig gelesenen §§ zurückkommen müssen. Das Wörterverzeichniss am Schlusse und das Inhaltsverzeichniss werden das erleichtern. Die Ableitungen in den §§ 49 bis 52 können als Vorbereitung für das Verständniss der Beweise selbst dienen. Alle Weisen des Folgerns und Schliessens und fast alle der Anwendungen unserer Grundgesetze kommen hier schon vor. Nachdem man so bis ans Ende gelangt ist, möge man die Darlegung der Begriffsschrift noch einmal im Zusammenhange und vollständig lesen und sich dabei vor Augen halten, dass die Festsetzungen, die später nicht gebraucht werden und darum unnöthig scheinen, zur Durchführung des Grundsatzes dienen, dass alle rechtmässig gebildeten Zeichen etwas bedeuten sollen, eines Grundsatzes, der für die volle Strenge wesentlich ist. So wird, glaube ich, das Misstrauen allmählich schwinden, das meine Neuerungen zunächst erwecken mögen. Der Leser wird erkennen, dass meine Grundsätze nirgends zu Folgerungen führen, die er nicht selbst als richtig anerkennen muss. Vielleicht wird er dann auch zugeben, dass er die Arbeit zuerst überschätzt hatte, dass mein sprungloses Vorgehen doch auch wieder das Verständniss erleichtert, nachdem einmal das in der Neuheit der Zeichen liegende Hinderniss überwunden ist. Möge es mir glücken, einen solchen Leser und Beurtheiler zu finden! denn eine auf oberflächlicher Durchsicht gegründete Anzeige könnte leicht mehr schaden als nützen.

Sonst sind die Aussichten meines Buches freilich gering. Jedenfalls müssen alle Mathematiker aufgegeben werden, die beim Aufstossen von logischen Ausdrücken, wie „Begriff“, „Beziehung“, „Urtheil“ denken: *metaphysica sunt, non leguntur!* und ebenso die Philosophen, die beim Anblicke einer Formel ausrufen: *mathematica sunt, non leguntur!* und sehr wenige mögen das nicht sein. Vielleicht ist die Zahl der Mathematiker überhaupt nicht gross, die sich um die Grundlegung ihrer Wissenschaft bemühen, und auch diese scheinen oft grosse Eile zu haben, bis sie die Anfangsgründe hinter sich haben. Und ich wage kaum zu hoffen, dass meine Gründe für die peinliche Strenge und damit verbundene Breite viele von ihnen über-
S.XIII zeugen werden. Hat doch das einmal Hergebrachte grosse | Macht über die Gemüther. Wenn ich die Arithmetik mit einem Baume vergleiche, der sich oben in eine Mannichfaltigkeit von Methoden und Lehrsätzen entfaltet, während die Wurzel in die Tiefe strebt, so scheint mir der Wurzeltrieb, in Deutschland wenigstens, schwach zu sein. Selbst in einem Werke, das man dieser Richtung zuzählen möchte, der Algebra der Logik des Herrn E. Schröder, gewinnt doch bald der Wipfeltrieb wieder die Oberhand, bevor noch eine grössere Tiefe erreicht ist, bewirkt ein Umbiegen nach oben und eine Entfaltung in Methoden und Lehrsätze.

Ungünstig für mein Buch ist auch die weit verbreitete Neigung, nur das Sinnliche als vorhanden anzuerkennen. Was nicht mit den Sinnen wahrgenommen werden kann, sucht man zu leugnen oder doch zu übersehen. Nun sind die Gegenstände der Arithmetik, die Zahlen unsinnlicher Art; wie findet man sich damit ab? Sehr einfach! man erklärt die Zahlzeichen für die Zahlen. In den Zeichen hat man dann etwas Sichtbares, und das ist ja doch die Hauptsache. Freilich haben die Zeichen ganz andere Eigenschaften als die Zahlen selbst; aber was thut’s? Man dichtet ihnen die gewünschten Eigenschaften durch sogenannte Definitionen einfach an. Wie freilich eine Definition statthaben kann, wo gar kein Zusammenhang zwischen Zeichen und Bezeichnetem in Frage kommt, ist ein Räthsel. Man knetet Zeichen und Bezeichnetes möglichst ununterscheidbar zusammen; jenachdem es erforderlich ist, kann man dann die Existenz mit Hinweis auf die Greifbarkeit behaupten[8], oder die eigentlichen Zahleigenschaften hervorkehren. Zuweilen scheint man die Zahlzeichen wie Schachfiguren anzusehen und die sogenannten Definitionen als Spielregeln. Das Zeichen bezeichnet dann nichts, sondern ist die Sache selbst. Eine Kleinigkeit übersieht man freilich dabei, dass wir nämlich mit

[8]Vergl. E. Heine, Die Elemente der Functionslehre, in Crelle’s Journal, Bd. 74, S. 173: „Ich stelle mich bei der Definition auf den rein formalen Standpunkt, indem ich gewisse greifbare Zeichen Zahlen nenne, sodass die Existenz dieser Zahlen also nicht in Frage steht.“

‚$3^2 + 4^2 = 5^2$‘ einen Gedanken ausdrücken, während eine Stellung von Schachfiguren nichts besagt. Wo man sich mit solchen Oberflächlichkeiten zufrieden giebt, ist für eine tiefere Auffassung freilich kein Boden.

Es kommt hier darauf an, sich klar zu machen, was Definiren ist und was dadurch erreicht werden kann. Man scheint ihm vielfach eine schöpferische Kraft zuzutrauen, während doch dabei weiter nichts geschieht, als dass etwas abgrenzend hervorgehoben und mit einem Namen bezeichnet wird. Wie der Geograph kein Meer schafft, wenn er Grenzlinien zieht und sagt: den von diesen Linien begrenzten Theil der Wasserfläche will ich Gelbes Meer nennen, so kann auch der Mathematiker durch sein Definiren nichts eigentlich schaffen. Man kann auch nicht einem Dinge durch blosse Definition eine Eigenschaft anzaubern, die es nun einmal nicht hat, es sei denn die eine, nun so zu heissen, wie man es etwa benannt hat. Dass aber ein | eirundes Gebilde, das man mit Tinte auf Papier hervorbringt, durch eine Definition die Eigenschaft erhalten sollte, zu Eins addirt, Eins zu ergeben, kann ich nur für einen wissenschaftlichen Aberglauben halten. Ebensogut könnte man durch blosse Definition einen faulen Schüler fleissig machen. Unklarheit entsteht hier leicht durch die mangelnde Unterscheidung von Begriff und Gegenstand. Wenn man sagt: „Quadrat ist ein Rechteck, in dem zusammenstossende Seiten gleich sind“, so definirt man den Begriff *Quadrat*, indem man angiebt, welche Eigenschaften etwas haben muss, um unter diesen Begriff zu fallen. Diese Eigenschaften nenne ich Merkmale des Begriffes. Aber, wohl gemerkt, diese Merkmale des Begriffes sind nicht seine Eigenschaften. Der Begriff *Quadrat* ist nicht ein Rechteck, nur die Gegenstände, die etwa unter diesen Begriff fallen, sind Rechtecke, wie auch der Begriff *schwarzes Tuch* weder schwarz noch ein Tuch ist. Ob es solche Gegenstände giebt, ist durch die Definition unmittelbar noch nicht bekannt. Nun will man z. B. die Zahl Null definiren, indem man sagt: sie ist etwas, was, zu Eins addirt, Eins ergiebt. Damit hat man einen Begriff definirt, indem man angegeben hat, welche Eigenschaft ein Gegenstand haben muss, um unter den Begriff zu fallen. Aber diese Eigenschaft ist nicht Eigenschaft des definirten Begriffes. Wie es scheint, bildet man sich nun vielfach ein, man habe durch die Definition etwas geschaffen, was, zu Eins addirt, Eins ergiebt. Grosse Täuschung! Weder hat der definirte Begriff diese Eigenschaft noch leistet die Definition Gewähr dafür, dass der Begriff erfüllt sei. Das bedarf erst einer Untersuchung. Erst wenn man bewiesen hat, dass es einen Gegenstand und nur einen einzigen von der verlangten Eigenschaft giebt, ist man in der Lage, diesen Gegenstand mit dem Eigennamen „Null“ zu belegen. Die Null zu schaffen, ist also unmöglich. Solches ist von mir schon wiederholt dargelegt worden, aber, wie es scheint, ohne Erfolg[9]. S.XIV

Auch bei der herrschenden Logik wird auf kein Verständniss für den Unterschied zu hoffen sein, den ich zwischen dem Merkmal eines Begriffes und der Eigenschaft eines Gegenstandes mache[10]; denn sie scheint durch und durch psychologisch verseucht zu sein. Wenn man statt der Dinge selbst nur ihre subjectiven Abbilder, die Vorstellungen betrachtet, gehen natürlich alle feinern sachlichen Unterschiede verloren, und es treten dafür andere auf, die logisch völlig werthlos sind. Und damit komme ich auf das zu sprechen, was der Wirkung meines Buches bei den Logikern im Wege steht. Es ist der verderbliche Einbruch der Psychologie in die Logik. Entscheidend für die Behandlung dieser Wissenschaft muss die Auffassung der logischen Gesetze sein, und das hängt wieder damit zusammen, wie | man das Wort „wahr“ versteht. Dass die logischen Gesetze Richtschnuren für das Denken sein sollen zur Erreichung der Wahrheit, wird zwar vorweg allgemein zugegeben; aber es geräth nur zu leicht in Vergessenheit. Der Doppelsinn des Wortes „Gesetz“ ist hier verhängnissvoll. In dem einen Sinne besagt es, was ist, in dem andern schreibt es vor, was sein soll. Nur in diesem Sinne können die logischen Gesetze Denkgesetze genannt werden, indem sie fest- S.XV

[9] Mathematiker, die sich ungerne in die Irrgänge der Philosophie begeben, werden gebeten, hier das Lesen des Vorworts abzubrechen.

[10] In der Logik des Herrn B. Erdmann finde ich keine Spur dieses wichtigen Unterschiedes.

setzen, wie gedacht werden soll. Jedes Gesetz, das besagt, was ist, kann aufgefasst werden als vorschreibend, es solle im Einklange damit gedacht werden, und ist also in dem Sinne ein Denkgesetz. Das gilt von den geometrischen und physikalischen nicht minder als von den logischen. Diese verdienen den Namen „Denkgesetze“ nur dann mit mehr Recht, wenn damit gesagt sein soll, dass sie die allgemeinsten sind, die überall da vorschreiben, wie gedacht werden soll, wo überhaupt gedacht wird. Aber das Wort „Denkgesetz“ verleitet zu der Meinung, diese Gesetze regierten in derselben Weise das Denken, wie die Naturgesetze die Vorgänge in der Aussenwelt. Dann können sie nichts anderes als psychologische Gesetze sein; denn das Denken ist ein seelischer Vorgang. Und wenn die Logik mit diesen psychologischen Gesetzen zu thun hätte, so wäre sie ein Theil der Psychologie. Und so wird sie in der That aufgefasst. Als Richtschnuren können diese Denkgesetze dann in der Weise aufgefasst werden, dass sie einen mittlern Durchschnitt angeben, ähnlich wie man sagen kann, wie die gesunde Verdauung beim Menschen vor sich geht, oder wie man grammatisch richtig spricht, oder wie man sich modern kleidet. Man kann dann nur sagen: nach diesen Gesetzen richtet sich im Durchschnitt das Fürwahrhalten der Menschen, jetzt und soweit die Menschen bekannt sind; wenn man also mit dem Durchschnitte im Einklang bleiben will, richte man sich nach ihnen. Aber, wie das, was heute modern ist, nach einiger Zeit nicht mehr modern sein wird und bei den Chinesen jetzt nicht modern ist, so kann man die psychologischen Denkgesetze auch nur mit Einschränkungen als maassgebend hinstellen. Ja, wenn es sich in der Logik um das Fürwahrgehaltenwerden handelte, und nicht vielmehr um das Wahrsein! Und das verwechseln die psychologischen Logiker. So setzt Herr B. Erdmann im ersten Bande seiner Logik[11] S. 272 bis S. 275 die Wahrheit mit Allgemeingültigkeit gleich und gründet diese auf die Allgemeingewissheit des Gegenstandes, von dem geurtheilt wird, und diese wieder auf die allgemeine Uebereinstimmung der Urtheilenden. So wird denn schliesslich die Wahrheit auf das Fürwahrhalten der Einzelnen zurückgeführt. Dem gegenüber kann ich nur sagen: Wahrsein ist etwas anderes als Fürwahrgehaltenwerden, sei es von Einem, sei es von Vielen, sei es von Allen, und ist in keiner Weise darauf zurückzuführen. Es ist kein Widerspruch,
S.XVI dass etwas | wahr ist, was von Allen für falsch gehalten wird. Ich verstehe unter logischen Gesetzen nicht psychologische Gesetze des Fürwahrhaltens, sondern Gesetze des Wahrseins. Wenn es wahr ist, dass ich dies am 13. Juli 1893 in meiner Stube schreibe, während draussen der Wind heult, so bleibt es wahr, auch wenn alle Menschen es später für falsch halten sollten. Wenn so das Wahrsein unabhängig davon ist, dass es von irgendeinem anerkannt wird, so sind auch die Gesetze des Wahrseins nicht psychologische Gesetze, sondern Grenzsteine in einem ewigen Grunde befestigt, von unserm Denken überfluthbar zwar, doch nicht verrückbar. Und weil sie das sind, sind sie für unser Denken maassgebend, wenn es die Wahrheit erreichen will. Sie stehen nicht in dem Verhältnisse zum Denken, wie die grammatischen Gesetze zur Sprache, so dass sie das Wesen unseres menschlichen Denkens zum Ausdruck brächten und sich mit ihm änderten. Ganz anders ist natürlich die Auffassung der logischen Gesetze bei Herrn Erdmann. Dieser bezweifelt ihre unbedingte, ewige Geltung und will sie einschränken auf unser Denken, wie es jetzt ist (S. 375 ff.). „Unser Denken“ kann doch wohl nur heissen das Denken der bis jetzt bekannten Menschheit. Danach bliebe die Möglicheit offen, dass Menschen oder sonstige Wesen entdeckt würden, die unsern logischen Gesetzen widersprechende Urtheile vollziehen könnten. Wenn das nun geschähe? Herr Erdmann würde sagen: Da sehen wir, dass jene Grundsätze nicht überall gelten. Gewiss! wenn sie psychologische Gesetze sein sollen, muss ihr Wortausdruck die Gattung von Wesen kenntlich machen, deren Denken erfahrungsmässig durch sie beherrscht wird. Ich würde sagen: Es giebt also Wesen, welche gewisse Wahrheiten nicht wie wir unmittelbar erkennen, sondern vielleicht auf den langwierigern Weg der Induction angewiesen sind. Wie aber, wenn sogar Wesen gefunden

[11] Halle a. S., Max Niemeyer, 1892.

würden, deren Denkgesetze den unsern geradezu widersprächen und also auch in der Anwendung vielfach zu entgegengesetzten Ergebnissen führten? Der psychologische Logiker könnte das nur einfach anerkennen und sagen: Bei denen gelten jene Gesetze, bei uns diese. Ich würde sagen: Da haben wir eine bisher unbekannte Art der Verrücktheit. Wer unter logischen Gesetzen solche versteht, die vorschreiben, wie gedacht werden soll, oder Gesetze des Wahrseins, nicht Naturgesetze des menschlichen Fürwahrhaltens, der wird fragen: wer hat Recht? wessen Gesetze des Fürwahrhaltens sind im Einklange mit den Gesetzen des Wahrseins? Der psychologische Logiker kann nicht so fragen; denn er erkennte damit Gesetze des Wahrseins an, die nicht psychologisch wären. Kann man ärger den Sinn des Wortes „wahr" fälschen, als wenn man eine Beziehung auf den Urtheilenden einschliessen will! Man wirft mir doch nicht etwa ein, dass der Satz „ich bin hungrig" für den Einen wahr und für den Andern falsch sein könne? Der Satz wohl, aber der Gedanke nicht; denn das Wort „ich" bedeutet in dem Munde des Andern einen andern Menschen, | und daher drückt auch der Satz, von S.XVII
dem Andern ausgesprochen, einen andern Gedanken aus. Alle Bestimmungen des Orts, der Zeit u. s. w. gehören zu dem Gedanken, um dessen Wahrheit es sich handelt; das Wahrsein selbst ist ort- und zeitlos. Wie lautet nun eigentlich der Grundsatz der Identität? etwa so: „Den Menschen ist es im Jahre 1893 unmöglich, einen Gegenstand als von ihm selbst verschieden anzuerkennen" oder so: „Jeder Gegenstand ist mit sich selbst identisch"? Jenes Gesetz handelt von Menschen und enthält eine Zeitbestimmung, in diesem ist weder von Menschen noch von einer Zeit die Rede. Dieses ist ein Gesetz des Wahrseins, jenes eines des menschlichen Fürwahrhaltens. Ihr Inhalt ist ganz verschieden, und sie sind von einander unabhängig, so dass keins von beiden aus dem andern gefolgert werden kann. Darum ist es sehr verwirrend, beide mit demselben Namen des Grundgesetzes der Identität zu bezeichnen. Solche Vermischungen grundverschiedener Dinge sind Schuld an der gräulichen Unklarheit, die wir bei den psychologischen Logikern antreffen.

Die Frage nun, warum und mit welchem Rechte wir ein logisches Gesetz als wahr anerkennen, kann die Logik nur dadurch beantworten, dass sie es auf andere logische Gesetze zurückführt. Wo das nicht möglich ist, muss sie die Antwort schuldig bleiben. Aus der Logik heraustretend kann man sagen: wir sind durch unsere Natur und die äussern Umstände zum Urtheilen genöthigt, und wenn wir urtheilen, können wir dieses Gesetz — der Identität z. B. — nicht verwerfen, wir müssen es anerkennen, wenn wir nicht unser Denken in Verwirrung bringen und zuletzt auf jedes Urtheil verzichten wollen. Ich will diese Meinung weder bestreiten noch bestätigen und nur bemerken, dass wir hier keine logische Folgerung haben. Nicht ein Grund des Wahrseins wird angegeben, sondern unseres Fürwahrhaltens. Und ferner: diese Unmöglichkeit, die für uns besteht, das Gesetz zu verwerfen, hindert uns zwar nicht, Wesen anzunehmen, die es verwerfen; aber sie hindert uns, anzunehmen, dass jene Wesen darin Recht haben; sie hindert uns auch, daran zu zweifeln, ob wir oder jene Recht haben. Wenigstens gilt das von mir. Wenn Andere es wagen, in einem Athem ein Gesetz anzuerkennen und es zu bezweifeln, so erscheint mir das als ein Versuch, aus der eignen Haut zu fahren, vor dem ich nur dringend warnen kann. Wer einmal ein Gesetz des Wahrseins anerkannt hat, der hat damit auch ein Gesetz anerkannt, das vorschreibt, wie geurtheilt werden soll, wo immer, wann immer und von wem immer geurtheilt werden mag.

Ueberblicke ich das Ganze, so scheint mir die verschiedene Auffassung des Wahren als Ursprung des Streites. Für mich ist es etwas Objectives, von dem Urtheilenden Unabhängiges, für psychologische Logiker ist es das nicht. Was Herr B. Erdmann „objective Gewissheit" nennt, | ist nur eine allgemeine Anerkennung der Urtheilenden, die also von diesen nicht S.XVIII
unabhängig ist, sondern sich mit deren seelischer Natur ändern kann.

Wir können das noch allgemeiner fassen: ich erkenne ein Gebiet des Objectiven, Nichtwirklichen an, während die psychologischen Logiker das Nichtwirkliche ohne weiteres für subjectiv halten. Und doch ist gar nicht einzusehen, warum das, was einen vom Urtheilenden

unabhängigen Bestand hat, wirklich sein, d. h. doch wohl fähig sein müsse, unmittelbar oder mittelbar auf die Sinne zu wirken. Ein solcher Zusammenhang zwischen den Begriffen ist nicht zu entdecken. Man kann sogar Beispiele anführen, die das Gegentheil zeigen. Die Zahl Eins z. B. wird man nicht leicht für wirklich halten, wenn man nicht Anhänger von J. St. Mill ist. Andrerseits ist es unmöglich, jedem Menschen seine eigne Eins zuzuweisen; denn dann müsste erst untersucht werden, wie weit die Eigenschaften dieser Einsen übereinstimmten. Und wenn der Eine sagte „einmal Eins ist Eins“ und der Andere „einmal Eins ist Zwei“, so könnte man nur die Verschiedenheit feststellen und sagen: deine Eins hat jene Eigenschaft, meine diese. Von einem Streite, wer Recht hätte, oder von einem Belehrungsversuche könnte nicht die Rede sein; denn dazu fehlte die Gemeinsamkeit des Gegenstandes. Offenbar ist dies dem Sinne des Wortes „Eins“ und dem Sinne des Satzes „einmal Eins ist Eins“ ganz zuwider. Da die Eins, als dieselbe für Alle, Allen in gleicher Weise gegenübersteht, kann sie ebensowenig wie der Mond durch psychologische Beobachtung erforscht werden. Mag es immerhin Vorstellungen von der Eins in den einzelnen Seelen geben, so sind diese doch von der Eins ebenso zu unterscheiden wie die Vorstellungen des Mondes von dem Monde selbst. Weil die psychologischen Logiker die Möglichkeit des objectiven Nichtwirklichen verkennen, halten sie die Begriffe für Vorstellungen und weisen sie damit der Psychologie zu. Aber die wahre Sachlage macht sich doch zu mächtig geltend, als dass dies leicht durchzuführen wäre. Und daher kommt ein Schwanken in den Gebrauch des Wortes „Vorstellung“, indem es bald etwas zu bedeuten scheint, was dem Seelenleben des Einzelnen angehört und nach psychologischen Gesetzen mit andern Vorstellungen verschmilzt, sich mit ihnen associirt, bald etwas Allen gleicherweise Gegenüberstehendes, bei dem ein Vorstellender weder genannt noch auch nur vorausgesetzt wird. Diese beiden Gebrauchsweisen sind unvereinbar; denn jene Associationen, Verschmelzungen gehen nur im einzelnen Vorstellenden vor sich und gehen nur an etwas vor sich, was diesem Vorstellenden ganz so eigenthümlich zugehört, wie seine Freude oder sein Schmerz es thut. Man darf nie vergessen, dass die Vorstellungen verschiedener Menschen, wie ähnlich sie auch sein mögen, was übrigens von uns nicht genau festzustellen ist, doch nicht in eine zusammenfallen, sondern zu unterscheiden sind. Jeder hat seine Vorstellungen, die nicht zugleich die eines Andern sind. Hier verstehe ich natürlich „Vorstellung“ im
S.XIX psychologischen Sinne. Der | schwankende Gebrauch dieses Wortes bewirkt Unklarheit und hilft den psychologischen Logikern ihre Schwäche verbergen. Wann wird man dem endlich einmal ein Ende machen! So wird schliesslich Alles in das Bereich der Psychologie hineingezogen; die Grenze zwischen Objectivem und Subjectivem verschwindet mehr und mehr, und selbst wirkliche Gegenstände werden als Vorstellungen psychologisch behandelt. Denn was ist **wirklich** anders als ein Prädicat? und was sind logische Prädicate anders als Vorstellungen? So mündet denn Alles in den Idealismus und bei grösster Folgerichtigkeit in den Solipsismus ein. Wenn jeder mit dem Namen „Mond“ etwas Anderes bezeichnete, nämlich eine seiner Vorstellungen, etwa so, wie er mit dem Ausrufe „au!“ seinen Schmerz äusserte, so wäre freilich die psychologische Betrachtungsweise gerechtfertigt; aber ein Streit über die Eigenschaften des Mondes wäre gegenstandslos: der Eine könnte von seinem Monde ganz gut das Gegentheil von dem behaupten, was der Andere mit demselben Rechte von seinem sagte. Wenn wir nichts erfassen könnten, als was in uns selbst ist, so wäre ein Widerstreit der Meinungen, eine gegenseitige Verständigung unmöglich, weil ein gemeinsamer Boden fehlte, und ein solcher kann keine Vorstellung im Sinne der Psychologie sein. Es gäbe keine Logik, die berufen wäre, Schiedsrichterin im Streite der Meinungen zu sein.

Doch, um nicht den Schein zu erwecken, als kämpfte ich gegen Windmühlen, will ich an einem bestimmten Buche das unrettbare Versinken in den Idealismus zeigen. Ich wähle dazu die oben erwähnte Logik des Herrn B. Erdmann als eins der neuesten Werke der psychologischen Richtung, dem man auch nicht jede Bedeutsamkeit wird absprechen wollen. Sehen wir uns zunächst folgenden Satz an (I, S. 85):

„So belehrt die Psychologie mit Sicherheit, dass die Gegenstände der Erinnerung und der Einbildung sowie diejenigen des krankhaften hallucinatorischen und illusionären Vorstellens idealer Natur sind . . . . Ideal ist ferner das ganze Gebiet der eigentlich mathematischen Vorstellungen, von der Zahlenreihe bis hinab zu den Gegenständen der Mechanik.“

Welche Zusammenstellung! Die Zahl Zehn soll also auf einer Stufe mit Hallucinationen stehen! Hier wird offenbar das objective Unwirkliche mit dem Subjectiven vermengt. Einiges Objective ist wirklich, anderes nicht. *Wirklich* ist nur eines von vielen Prädicaten und geht die Logik gar nicht näher an, als etwa das Prädicat *algebraisch* von einer Curve ausgesagt. Natürlich verwickelt sich Herr Erdmann durch diese Vermengung in die Metaphysik, wie sehr er sich auch davon frei zu halten strebt. Ich halte es für ein sicheres Anzeichen eines Fehlers, wenn die Logik Metaphysik und Psychologie nöthig hat, Wissenschaften, die selber der logischen Grundsätze bedürfen. Wo ist denn hier der eigentliche Urboden, auf dem Alles ruht? oder ist es wie bei Münchhausen, der sich am eignen Schopfe aus dem Sumpfe zog? Ich zweifle stark an der Mög- | lichkeit und vermuthe, dass Herr Erdmann im psychologisch- S.XX
metaphysischen Sumpfe stecken bleibt.

Eine eigentliche Objectivität giebt es für Herrn Erdmann nicht; denn Alles ist Vorstellung. Ueberzeugen wir uns davon an der Hand seiner eignen Aussagen! Wir lesen auf S. 187 des ersten Bandes:

„Als eine Beziehung zwischen Vorgestelltem setzt das Urteil mindestens zwei Beziehungspunkte voraus, zwischen denen sie stattfindet. Als **Aussage** über Vorgestelltes fordert es, dass der eine dieser Beziehungspunkte als der Gegenstand, von dem ausgesagt wird, das Subjekt . . ., der zweite als der Gegenstand, der ausgesagt wird, das Prädikat . . . bestimmt werde“. Wir sehen hier zunächst, dass sowohl das Subject, von dem ausgesagt wird, als auch das Prädicat als Gegenstand oder Vorgestelltes bezeichnet wird. Statt „der Gegenstand“ hätte hier wohl „das Vorgestellte“ gesagt werden können; wir lesen nämlich (I, S. 81): „Denn die Gegenstände sind Vorgestelltes.“ Aber auch umgekehrt soll alles Vorgestellte Gegenstand sein. Auf S. 38 heisst es:

„Seinem Ursprunge nach zerfällt das Vorgestellte einesteils in Gegenstände der Sinneswahrnehmung und des Selbstbewusstseins, andererseits in ursprüngliche und abgeleitete.“

Was aus der Sinneswahrnehmung und aus dem Selbstbewusstsein entspringt, ist doch wohl seelischer Natur. Die Gegenstände, das Vorgestellte und damit auch Subject und Prädicat werden hierdurch der Psychologie zugewiesen. Das wird durch folgende Stelle (I, S. 147 u. 148) bestätigt:

„Es ist das Vorgestellte oder die Vorstellung überhaupt. Denn beide sind ein und dasselbe: das Vorgestellte ist Vorstellung, die Vorstellung Vorgestelltes.“

Das Wort „Vorstellung“ wird ja nun meist im psychologischen Sinne genommen; dass dies auch der Brauch des Herrn Erdmann ist, sehen wir aus den Stellen:

„Bewusstsein ist demnach das Allgemeine zu Fühlen, Vorstellen, Wollen“ (S. 35) und

„Das Vorstellen setzt sich zusammen aus den Vorstellungen . . . und den Vorstellungsverläufen“ (S. 36).

Danach dürfen wir uns nicht wundern, dass ein Gegenstand auf psychologischem Wege entsteht:

„Sofern eine Perceptionsmasse . . . früheren Reizen und den durch sie ausgelösten Erregungen Gleiches darbietet, **reproducirt** sie die Gedächtnisresiduen, welche jenem Gleichen der früheren Reize entstammen, und **verschmilzt** mit ihnen zu dem Gegenstande der appercipirten Vorstellung“ (I, S. 42).

Auf S. 43 wird dann beispielsweise gezeigt, wie ohne Stahlplatte, Schwärze, Presse und Papier auf rein psychologischem Wege ein Stahlstich der sixtinischen Madonna von Raphaël zu Stande kommt. Nach dem | Allen kann kein Zweifel sein, dass der Gegenstand, von dem S.XXI
ausgesagt wird, das Subject eine Vorstellung im psychologischen Sinne des Wortes nach

Herrn Erdmanns Meinung sein soll, ebenso wie das Prädicat, der Gegenstand, der ausgesagt wird. Wenn das richtig wäre, so könnte von keinem Subjecte mit Wahrheit ausgesagt werden, es sei grün; denn grüne Vorstellungen giebt es nicht. Ich könnte auch von keinem Subjecte aussagen, es sei unabhängig vom Vorgestelltwerden oder von mir, dem Vorstellenden, ebensowenig, wie meine Entschlüsse von meinem Wollen und von mir, dem Wollenden, unabhängig sind, sondern mit mir vernichtet würden, wenn ich vernichtet würde. Eine eigentliche Objectivität giebt es also für Herrn Erdmann nicht, wie auch daraus hervorgeht, dass er das Vorgestellte oder die Vorstellung überhaupt, den Gegenstand im allgemeinsten Sinne des Wortes als höchste Gattung (γενιχώτατον, genus summum) hinstellt (S. 147). Er ist also Idealist. Wenn die Idealisten folgerecht dächten, so würden sie den Satz „Karl der Grosse besiegte die Sachsen“ weder für wahr noch für falsch, sondern für Dichtung ausgeben, wie wir gewohnt sind, etwa den Satz „Nessus trug die Deïanira über den Fluss Euenus“ aufzufassen; denn auch der Satz „Nessus trug die Deïanira nicht über den Fluss Euenus“ könnte nur wahr sein, wenn der Name „Nessus“ einen Träger hätte. Von diesem Standpunkte wären die Idealisten wohl nicht leicht zu vertreiben. Aber das braucht man sich nicht gefallen zu lassen, dass sie den Sinn des Satzes in der Weise fälschen, als ob ich von meiner Vorstellung etwas aussagen wollte, wenn ich von Karl, dem Grossen spreche; ich will doch einen von mir und meinem Vorstellen unabhängigen Mann bezeichnen und von diesem etwas aussagen. Man kann den Idealisten zugeben, dass die Erreichung dieser Absicht nicht völlig sicher ist, dass ich vielleicht damit, ohne es zu wollen, aus der Wahrheit in die Dichtung verfalle. Damit kann aber an dem Sinne nichts geändert werden. Mit dem Satze „dieser Grashalm ist grün“ sage ich nichts von meiner Vorstellung aus; ich bezeichne keine meiner Vorstellungen mit den Worten „dieser Grashalm“, und wenn ich es thäte, so wäre der Satz falsch. Da tritt nun eine zweite Fälschung ein, dass nämlich meine Vorstellung des Grünen ausgesagt werde von meiner Vorstellung dieses Grashalms. Ich wiederhole: von meinen Vorstellungen ist in diesem Satze durchaus nicht die Rede; man schiebt einen ganz andern Sinn unter. Beiläufig bemerkt, verstehe ich gar nicht, wie überhaupt eine Vorstellung von etwas ausgesagt werden könne. Ebenso wäre es eine Fälschung, wenn man sagen wollte, in dem Satze „der Mond ist unabhängig von mir und meinem Vorstellen“ werde meine Vorstellung des Unabhängigseins von mir und meinem Vorstellen ausgesagt von meiner Vorstellung des Mondes. Damit wäre ja die Objectivität im eigentlichen Sinne des Wortes preisgegeben und etwas ganz anderes an
S.XXII die Stelle geschoben. Es ist ja möglich, dass bei der Urtheilsfällung solches Spiel | der Vorstellungen vorkommt; aber das ist nicht der Sinn des Satzes. Man wird auch wohl beobachten können, dass bei demselben Satze und bei demselben Sinne des Satzes das Spiel der Vorstellungen ganz verschieden sein kann. Und diese logisch gleichgültige Begleiterscheinung nehmen unsere Logiker für den eigentlichen Gegenstand ihrer Forschung.

Wie begreiflich wehrt sich die Natur der Sache gegen das Versinken in den Idealismus, und Herr Erdmann möchte nicht zugeben, dass es für ihn keine eigentliche Objectivität gebe; aber ebenso begreiflich ist die Vergeblichkeit dieses Bemühens. Denn wenn alle Subjecte und alle Prädicate Vorstellungen sind und wenn alles Denken nichts ist als Erzeugen, Verbinden, Verändern von Vorstellungen, so ist nicht einzusehen, wie jemals etwas Objectives erreicht werden könne. Ein Anzeichen dieses vergeblichen Sträubens ist schon der Gebrauch der Wörter „Vorgestelltes“ und „Gegenstand“, die zunächst etwas Objectives im Gegensatz zur Vorstellung bezeichnen zu wollen scheinen, aber auch nur scheinen; denn es zeigt sich, dass sie dasselbe bedeuten. Wozu nun dieser Ueberfluss von Ausdrücken? Das ist nicht schwer zu errathen. Man bemerke auch, dass von einem Gegenstande der Vorstellung die Rede ist, obwohl der Gegenstand selber Vorstellung sein soll. Das wäre also eine Vorstellung der Vorstellung. Welche Beziehung von Vorstellungen soll hiermit bezeichnet werden? So unklar dies auch ist, so verständlich ist es doch auch, wie durch das Gegeneinanderarbeiten der Natur der Sache und des Idealismus solche Strudel entstehen können. Wir sehen hier überall den Gegenstand, von dem ich mir eine Vorstellung mache, mit dieser Vorstellung verwechselt und dann doch wieder die Verschiedenheit hervortreten. Diesen Widerstreit erkennen wir auch in folgendem Satze:

„Denn eine Vorstellung, deren Gegenstand allgemein ist, ist deshalb als solche, als Bewusstseinsvorgang, so wenig allgemein, wie eine Vorstellung selbst real ist, weil ihr Gegenstand als real gesetzt ist, oder wie ein Gegenstand, den wir als süss ... empfinden, durch Vorstellungen gegeben ist, die selbst süss ... sind“ (I, S. 86).

Hier macht sich die wahre Sachlage mit Macht geltend. Fast könnte ich dem beistimmen; aber bemerken wir, dass nach den Erdmann’schen Grundsätzen der Gegenstand einer Vorstellung und der Gegenstand, der durch Vorstellungen gegeben ist, selber Vorstellungen sind, so sehen wir, dass alles Sperren umsonst ist. Ich bitte noch die Worte „als solche“ im Gedächtnisse zu behalten, die ähnlich auch auf S. 83 in folgender Stelle vorkommen:

„Wo von einem Gegenstande die Wirklichkeit ausgesagt wird, ist das sachliche Subjekt dieses Urteils nicht der Gegenstand oder das Vorgestellte als solches, sondern vielmehr **dasm-Transscendente**, das als die Seinsgrundlage dieses Vorgestellten vorausgesetzt wird, in dem Vorgestellten sich darstellt. Das Transscendente soll dabei nicht als das Uner- | kennbare ... angenommen werden, sondern seine Transscendenz soll nur in der Unabhängigkeit vom Vorgestelltwerden bestehen.“ S.XXIII

Wieder ein vergeblicher Versuch, sich aus dem Sumpfe herauszuarbeiten! Nehmen wir die Worte ernst, so ist gesagt, dass in diesem Falle das Subject keine Vorstellung ist. Wenn solches aber möglich ist, so ist nicht abzusehen, warum bei andern Prädicaten, die besondere Weisen der Wirksamkeit oder Wirklichkeit angeben, das sachliche Subject durchaus eine Vorstellung sein müsse, z. B. in dem Urtheile „die Erde ist magnetisch“. Und so kämen wir denn dahin, dass nur in wenigen Urtheilen das sachliche Subject eine Vorstellung wäre. Wenn aber einmal zugegeben ist, dass es weder für das Subject, noch für das Prädicat wesentlich ist, Vorstellung zu sein, so ist der ganzen psychologischen Logik der Boden unter den Füssen weggezogen. Alle psychologischen Betrachtungen, von denen unsere Logikbücher jetzt anschwellen, erweisen sich dann als zwecklos.

Aber wir dürfen wohl die Transscendenz bei Herrn Erdmann gar nicht so ernst nehmen. Ich brauche ihn nur an seinen Ausspruch (I, S. 148) zu erinnern: „Der höchsten Gattung untersteht auch die **metaphysische** Grenze unseres Vorstellens, das Transscendente“, und er versinkt; denn diese höchste Gattung ($\gamma\varepsilon\nu\iota\chi\acute{\omega}\tau\alpha\tau o\nu$, genus summum) ist ja nach ihm das Vorgestellte oder die Vorstellung überhaupt. Oder sollte oben das Wort „Transscendentes“ in einem andern Sinne gebraucht sein als hier? In jedem Falle, sollte man denken, müsste das Transscendente der höchsten Gattung unterstehen.

Verweilen wir noch etwas bei dem Ausdrucke „als solches“! Ich setze den Fall, jemand wolle mir einbilden, dass alle Gegenstände nichts seien als Bilder auf der Netzhaut meines Auges. Nun gut! ich antworte noch nichts. Nun behauptet er aber weiter, der Thurm sei grösser als das Fenster, durch das ich ihn zu sehen meine. Da würde ich denn doch sagen: entweder sind nicht beide, der Thurm und das Fenster, Netzhautbilder in meinem Auge, dann mag der Thurm grösser sein als das Fenster; oder der Thurm und das Fenster sind, wie du sagst, Bilder auf meiner Netzhaut; dann ist der Thurm nicht grösser, sondern kleiner als das Fenster. Nun sucht er sich mit dem „als solches“ aus der Verlegenheit zu ziehen und sagt: das Netzhautbild des Thurmes als solches ist allerdings nicht grösser, als das des Fensters. Da möchte ich denn doch fast aus der Haut fahren und rufe ihm zu: nun dann ist das Netzhautbild des Thurmes überhaupt nicht grösser als das des Fensters, und wenn der Thurm das Netzhautbild des Thurmes und das Fenster das Netzhautbild des Fensters wäre, so wäre eben der Thurm nicht grösser als das Fenster, und wenn deine Logik dich anders lehrt, so taugt sie nichts. Dieses „als solches“ ist eine vortreffliche Erfindung für unklare Schriftsteller, die weder ja noch nein sagen wollen. Aber dieses Schweben zwischen beiden | lasse ich mir nicht S.XXIV gefallen, sondern ich frage: wenn von einem Gegenstande die Wirklichkeit ausgesagt wird, ist dann das sachliche Subject des Urtheils die Vorstellung, ja oder nein? Wenn nicht, so ist es wohl das Transscendente, das als Seinsgrundlage dieser Vorstellung vorausgesetzt wird. Aber dies Transscendente ist selber Vorgestelltes oder Vorstellung. So werden wir weiter getrieben zu der Annahme, nicht das vorgestellte Transscendente sei Subject des Urtheils, sondern das Transscendente, das als Seinsgrundlage dieses vorgestellten Transscendenten vorausgesetzt werde. So müssten wir immer weitergehen; wie weit wir aber auch gingen, wir kämen so nie aus dem Subjectiven heraus. Dasselbe Spiel könnten wir übrigens auch beim Prädicate anfangen, und nicht nur beim Prädicate *wirklich*, sondern ebensogut etwa bei *süss*. Wir sagten dann zunächst: wenn von einem Gegenstande die Wirklichkeit oder die Süssheit ausgesagt wird, so ist das sachliche Prädicat nicht die vorgestellte Wirklichkeit oder Süssheit, sondern das Transscendente, das als Grundlage dieses Vorgestellten vorausgesetzt wird. Damit kämen wir aber nicht zur Ruhe, sondern würden rastlos weitergetrieben. Was ist hieraus zu lernen? Dass die psychologische Logik auf einem Holzwege ist, wenn sie Subject und Prädicat der Urtheile als Vorstellungen im Sinne der Psychologie auffasst, dass psychologische Betrachtungen in der Logik ebensowenig angebracht sind, wie in der Astronomie oder Geologie. Wenn wir überhaupt aus dem Subjectiven herauskommen wollen, so müssen wir das Erkennen auffassen als eine Thätigkeit, die das Erkannte nicht erzeugt, sondern das schon Vorhandene ergreift. Das Bild des Ergreifens ist recht geeignet, die Sache zu erläutern. Wenn ich einen Bleistift ergreife, so geht dabei in meinem Leibe mancherlei vor: Nervenerregungen, Veränderungen der Spannung und des Druckes von Muskeln, Sehnen und Knochen, Veränderungen der Blutbewegung. Aber die Gesammtheit dieser Vorgänge ist weder der Bleistift, noch erzeugt sie ihn. Dieser besteht unabhängig von diesen Vorgängen. Und es ist wesentlich für das Ergreifen, dass etwas da ist, was ergriffen wird; die innern Veränderungen allein sind das Ergreifen nicht. So besteht auch das, was wir geistig erfassen, unabhängig von dieser Thätigkeit, von den Vorstellungen und deren Veränderungen, die zu diesem Erfassen gehören oder es begleiten, ist weder die Gesammtheit dieser Vorgänge, noch wird es durch sie als Theil unseres seelischen Lebens erzeugt.

Sehen wir nun noch, wie sich den psychologischen Logikern feinere sachliche Unterschiede verwischen. Bei Merkmal und Eigenschaft ist das schon erwähnt worden. Hiermit hängt der von mir betonte Unterschied von Gegenstand und Begriff zusammen, sowie der von Begriffen erster und zweiter Stufe. Diese Unterschiede sind den psychologischen Logikern natürlich unerkennbar; bei ihnen ist eben Alles Vorstellung. Damit fehlt | ihnen auch S.XXV die richtige Auffassung der Urtheile, die wir im Deutschen mit „es giebt" aussprechen. Diese Existenz wird von Herrn B. Erdmann (Logik I, S. 311) mit Wirklichkeit zusammengeworfen, die, wie wir sahen, auch von Objectivität nicht deutlich unterschieden wird. Von welchem Dinge behaupten wir denn eigentlich, dass es wirklich sei, wenn wir sagen, es gebe Quadratwurzeln aus Vier? Etwa von der Zwei oder von -2? aber weder die eine noch die andere wird hier in irgend einer Weise genannt. Und wenn ich sagen wollte, die Zahl Zwei wirke oder sei wirksam oder wirklich, so wäre das falsch und ganz verschieden von dem, was ich mit dem Satze „es giebt Quadratwurzeln aus Vier" sagen will. Die hier vorliegende Verwechselung ist beinahe die gröbste, die überhaupt möglich ist; denn sie geschieht nicht mit Begriffen derselben Stufe, sondern ein Begriff erster wird mit einem Begriffe zweiter Stufe vermengt. Für die Stumpfheit der psychologischen Logik ist dies bezeichnend. Wenn man allgemeiner einen etwas freieren Standpunkt gewonnen haben wird, mag man sich wundern, dass ein solcher Fehler von einem Logiker von Fach begangen werden konnte; aber erst muss man freilich den Unterschied zwischen Begriffen erster und zweiter Stufe erfasst haben, ehe man die Grösse dieses Fehlers ermessen kann, und dazu wird die psychologische Logik wohl unfähig sein. Was dabei am meisten im Wege steht, ist, dass ihre Vertreter sich auf die psychologische Vertiefung Wunder was zu Gute thun, die doch nichts ist als psychologische Verfälschung der Logik. Und so kommen denn unsere dicken Logikbücher zu Stande, aufgedunsen von ungesundem psychologischen Fette, das alle feineren Formen verhüllt. So wird ein fruchtbares Zusammenwirken von Mathematikern und Logikern unmöglich gemacht. Während der Mathematiker Gegenstände, Begriffe und Beziehungen definirt, belauscht der psychologische Logiker das Werden und den Wandel der Vorstellungen, und im Grunde kann ihm das Definiren des Mathematikers nur thöricht erscheinen, weil es das Wesen der Vorstellung nicht wiedergiebt. Er schaut in seinen psychologischen Guckkasten und sagt zum Mathematiker: ich sehe von dem Allen nichts, was du da definirst. Und der kann nur antworten: kein Wunder! denn wo du suchst, da ist es nicht.

Dies mag genügen, um meinen logischen Standpunkt durch den Gegensatz in helleres Licht zu setzen. Der Abstand von der psychologischen Logik scheint mir so himmelweit, dass keine Aussicht ist, jetzt schon durch mein Buch auf sie zu wirken. Es kommt mir vor, als müsste der von mir gepflanzte Baum eine ungeheure Steinlast heben, um sich Raum und Licht zu schaffen. Und doch möchte ich die Hoffnung nicht ganz aufgeben, mein Buch möchte später dazu helfen, die psychologische Logik umzustürzen. Dazu wird ihm einige Anerkennung bei den Mathematikern wohl nicht fehlen dürfen, die jene nöthigen wird, sich mit ihm abzufinden. Und ich glaube einigen Beistand von dieser Seite erwarten zu können; | haben die S.XXVI Mathematiker doch im Grunde gegen die psychologischen Logiker eine gemeinsame Sache zu führen. Sobald sich diese nur erst herablassen werden, sich ernsthaft mit meinem Buche zu beschäftigen, wenn auch nur, um es zu widerlegen, glaube ich gewonnen zu haben. Denn der ganze Abschnitt II ist eigentlich eine Probe auf meine logischen Ueberzeugungen. Es ist von vornherein unwahrscheinlich, dass ein solcher Bau sich auf einem unsichern, fehlerhaften Grunde aufführen lassen sollte. Jeder, der andere Ueberzeugungen hat, kann ja versuchen, auf ihnen einen ähnlichen Bau zu errichten, und er wird, glaube ich, inne werden, dass es nicht geht, oder dass es wenigstens nicht so gut geht. Und nur das würde ich als Widerlegung anerkennen können, wenn jemand durch die That zeigte, dass auf andern Grundüberzeugungen ein besseres, haltbareres Gebäude errichtet werden könnte, oder wenn mir jemand nachwiese, dass meine Grundsätze zu offenbar falschen Folgesätzen führten. Aber das wird Keinem gelingen. Und so möge denn dies Buch, wenn auch spät, zu einer Erneuerung der Logik beitragen.

Jena im Juli 1893.

G. Frege.

S.XXVII |

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung.

Aufgabe, Ansprüche an die Beweisführung, Dedekind's System, Schröder's Klasse . . . . . . Seite 1

I. Darlegung der Begriffsschrift.

1. Die Urzeichen.

Einleitendes über Function, Begriff, Beziehung [12]

§ 1. Die Function ist ungesättigt . . . . . . Seite 3
§ 2. Wahrheitswerthe, Bedeutung und Sinn, Gedanke, Gegenstand . . . . . . » 4
§ 3. Werthverlauf einer Function, Begriff, Umfang eines Begriffes . . . . . . » 5
§ 4. Functionen mit zwei Argumenten . . . . . . » 5

Zeichen von Functionen.

§ 5. Urtheil und Gedanke, Urtheilstrich und Wagerechter . . . . . . Seite 6
§ 6. ■→Verneinungszeichen, Verschmelzung der Wagerechten←■[13] [#3] . . » 7
§ 7. Gleichheitszeichen . . . . . . » 7
§ 8. Allgemeinheit, deutscher Buchstabe, dessen Gebiet, Verschmelzung der Wagerechten . . . . . . » 8
§ 9. Bezeichnung des Werthverlaufs, kleiner griechischer Vokalbuchstabe, dessen Gebiet . . . . . . » 10
§ 10. Genauere Bestimmung, was der Werthverlauf einer Function sein solle » 12
§ 11. Ersatz des bestimmten Artikels, die Function $\backslash\xi$ . . . . . . » 14
§ 12. ■→Bedingungspfeil, und, weder — noch, oder, Vorderglieder, Hinterglied←■[14] [#4] . . . . . . » 15
§ 13. Wenn, alle, jeder, Unterordnung, particulär bejahender Satz, einige . . » 18

Schlüsse und Folgerungen.

§ 14. Erste Schlussweise . . . . . . Seite 19
§ 15. ■→Zweite Schlussweise, Kontraposition←■[15] [#5] . . . . . . » 21
§ 16. Dritte Schlussweise . . . . . . » 25
§ 17. Lateinische Buchstaben, Uebergang von lateinischen zu deutschen Buchstaben . . . . . . » 26
§ 18. Gesetze in Begriffsschriftzeichen (I , IV , VI) . . . . . . » 29

S.XXVIII | Erweiterung der Allgemeinheitsbezeichnung.

§ 19. Die Allgemeinheit hinsichtlich der Functionen; Functions-, Gegenstandsbuchstaben . . . . . . Seite 30
§ 20. Gesetze in Begriffsschriftzeichen (IIa , III , V) . . . . . . » 30
§ 21. Functionen und Begriffe erster und zweiter Stufe . . . . . . » 31
§ 22. Beispiele von Functionen zweiter Stufe, ungleichstufige Functionen und Beziehungen . . . . . . » 33
§ 23. Arten der Argumente und Argumentstellen, Functionen zweiter Stufe mit Argumenten zweiter und dritter Art . . . . . . » 34
§ 24. Allgemeine Erklärung des Gebrauchs der Functionsbuchstaben . . . . . » 35
§ 25. Die Allgemeinheit hinsichtlich der Functionen zweiter Stufe, Gesetz IIb . . . . . . » 35

2. Definitionen.

Allgemeines.

§ 26. Eintheilung der Zeichen, Namen, Marken, Begriffsschriftsatz, Zwischenzeichen .... Seite 36
§ 27. ■→Das Definitionszeichen←■[16] [#6] .... » 38
§ 28. Rechtmässige Bildung der Namen .... » 38
§ 29. Wann bedeutet ein Name etwas? .... » 39
§ 30. Zwei Weisen, einen Namen zu bilden .... » 40
§ 31. Unsere einfachen Namen bedeuten etwas .... » 41
§ 32. Jeder Begriffsschriftsatz drückt einen Gedanken aus .... » 42
§ 33. Grundsätze des Definirens .... » 43

Besondere Definitionen.

§ 34. Definition der Function ξ ə ζ .... Seite 44
§ 35. Vertretung der Functionen zweiter Stufe durch solche erster Stufe ... » 45
§ 36. Der Doppelwerthverlauf. Der Umfang einer Beziehung .... » 45
§ 37. Definition der Function funk (ξ) .... » 46
§ 38. Definition der Function $\xi :\twoheadrightarrow$ .... » 47
§ 39. Definition der Function ξ^{-1} .... » 48
§ 40. Definition der Function anz (ξ) .... » 48
§ 41. Definition der anz (0) .... » 48
§ 42. Definition der anz (1) , Begriff der Anzahl .... » 48
§ 43. Definition von nf .... » 49
§ 44. Einige Begriffsschriftsätze als Beispiele .... » 49
§ 45. Definition der Function $<_{\xi}$, Folgen und Vorhergehen in einer Reihe » 50
§ 46. Definition der Function $\leq_{\xi}$ .... » 50

3. Abgeleitete Gesetze.

§ 47. Zusammenstellung der Grundgesetze .... Seite 51
§ 48. Zusammenstellung der Regeln .... » 52
§ 49. Ableitung einiger Sätze aus (I) .... » 56
§ 50. Ableitung der Hauptsätze von der Function $\xi = \zeta$ .... » 57

| § 51. Ableitung einiger Sätze aus (IV) .... » 60 S.XXIX
§ 52. Ableitung einiger Sätze aus (V) und (VI) .... » 62

II. Beweise der Grundgesetze der Anzahl.

§ 53. Vorbemerkungen .... Seite 62

A. *Beweis des Satzes*

,$\vdash v$ ə $(u$ ə $q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (u$ ə $(v$ ə $q :\twoheadrightarrow) \to$ anz $(u) =$ anz $(v))$‘

a) Beweis des Satzes

,$\vdash u$ ə $(v$ ə $q :\twoheadrightarrow) \to (w$ ə $(u$ ə $p :\twoheadrightarrow) \to w$ ə $(v$ ə $(q \circ p) :\twoheadrightarrow))$‘

§ 54-59. Definition der Function $\zeta \circ \xi$, Sätze (1) bis (19) .... Seite 63

b) Beweis des Satzes

,$\vdash v$ ə $(u$ ə $q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (u$ ə $(v$ ə $q :\twoheadrightarrow) \to$
$(\neg\ \forall \mathfrak{q}\ [u$ ə $(w$ ə $\mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w$ ə $(u$ ə $\mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)] \to$
$\neg\ \forall \mathfrak{q}\ [v$ ə $(w$ ə $\mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w$ ə $(v$ ə $\mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)]))$‘

und Ende des Abschnittes A.

§ 60-65. Sätze bis (32) .... Seite 73

B. *Beweis des Satzes* ,$\vdash$ *funk* (nf)‘

a) Beweis des Satzes

,$\vdash \forall\mathfrak{q}\,[\forall\mathfrak{a}\,[\neg\ c ə (\mathfrak{a} ə \mathfrak{q}^{-1})] \to (\forall\mathfrak{a}\,[\neg\ b ə (\mathfrak{a} ə \mathfrak{q})] \to$
$(z ə (w ə \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w ə (z ə \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)))] \to$
$(\neg\ c ə z \to (\neg\ b ə w \to \neg\ \text{anz}\,(w) = \text{anz}\,(z)))$‘

§ 66-77. Sätze bis (56) .... Seite 81

b) Beweis des Satzes

,$\vdash c ə v \to$
$(\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon ə u \to \varepsilon = b))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon ə v \to \varepsilon = c))) \to$
$(b ə u \to \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(v)))$‘

und Ende des Abschnittes B.

§ 78-87. Sätze bis (71) .... Seite 96

S.XXX | Γ. *Beweis des Satzes* ,$\vdash$ *funk* $(\textit{anz}\,(nf))$‘..

a) Beweis des Satzes

,$\vdash u ə (v ə q :\twoheadrightarrow) \to (b ə (n ə q) \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to (c ə (m ə q^{-1}) \to$
$\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon ə \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon ə u \to \varepsilon = b)) \to \varepsilon = m)) ə$
$(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\varepsilon ə \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon ə v \to \varepsilon = c)) \to \varepsilon = n)] ə$
$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon ə (\alpha ə q))] :\twoheadrightarrow))))$‘

§ 88-91. Sätze bis (84) .... Seite 107

b) Beweis des Satzes

,$\vdash c ə v \to (b ə u \to$
$(\neg\ \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon ə u \to \varepsilon = b))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon ə v \to \varepsilon = c))) \to$
$\neg\ \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(v)))$‘

und Schluss des Abschnittes Γ.

§ 92-95. Sätze bis (90) .... Seite 114

Δ. *Beweise einiger Sätze von der Anzahl Null.*

a) Beweis des Satzes

,$\vdash \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon))) = \text{anz}\,(0) \to \neg\ f(a)$‘

§ 96-97. Sätze bis (95) .... Seite 120

b) Beweis des Satzes

‚$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a}\ ə\ u] \rightarrow \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(0)$‘

und einiger Folgesätze.

§ 98-101. Sätze bis (107) .... Seite 122

E. *Beweise einiger Sätze von der Anzahl Eins.*

§ 102-107. Sätze bis (122) .... Seite 125

Z. *Beweis des Satzes*

‚$\vdash \text{anz}\,(0)\ ə\ (b\ ə\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow \neg\ b\ ə\ (b\ ə\ <_{\text{nf}})$‘

a) Beweis des Satzes

‚$\vdash \neg\ a\ ə\ (\text{anz}\,(0)\ ə\ <_{\text{nf}})$‘

§ 108,109. Sätze bis (126) .... Seite 133

| S.XXXI

b) Beweis des Satzes

‚$\vdash \forall \mathfrak{d}\,[\neg\ \mathfrak{d}\ ə\ (\mathfrak{d}\ ə\ <_{\text{nf}}) \rightarrow$
$\forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d}\ ə\ (\mathfrak{a}\ ə\ \text{nf}) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a}\ ə\ (\mathfrak{a}\ ə\ <_{\text{nf}})]]$‘

und Schluss des Abschnittes Z.

§ 110-113. Sätze bis (145) .... Seite 135

H. *Beweis des Satzes*

‚$\vdash \text{anz}\,(0)\ ə\ (b\ ə\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow b\ ə\ (\text{anz}\,(b\ ə\ \leq_{\text{nf}})\ ə\ \text{nf})$‘

§ 114-119. Sätze bis (155) .... Seite 142

Θ. *Einige Folgesätze.*

§ 120,121. Sätze bis (161) .... Seite 148

I. *Beweis einiger Sätze von der Anzahl Endlos.*

a) Beweis des Satzes

‚$\vdash \neg\ \text{anz}\,(0)\ ə\ (\infty\ ə\ \leq_{\text{nf}})$‘

§ 122-125. Definition von ∞ , Sätze bis (167) .... Seite 150

b) Beweis des Satzes

‚$\vdash \text{anz}\,(0)\ ə\ (\text{anz}\,(v)\ ə\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow (\infty = \text{anz}\,(u) \rightarrow$
$\infty = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon\ ə\ u \rightarrow \varepsilon\ ə\ v)))$‘

§ 126-127. [#7]Sätze bis (172) .... Seite 155

c) Beweis des Satzes

$$, \vdash \infty = \mathrm{anz}\,(u) \to$$
$$\neg\ \forall \mathfrak{q}\,[\mathrm{funk}\,(\mathfrak{q}) \to (\forall \mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i}\,ə\,(\mathfrak{i}\,ə\ <_{\mathfrak{q}})] \to$$
$$(\forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d}\,ə\,(\mathfrak{e}\,ə\,\mathfrak{q})] \to \neg\ \mathfrak{d}\,ə\,u] \to$$
$$\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(—\varepsilon\,ə\,u) = \mathfrak{a}\,ə\ \leq_{\mathfrak{q}}^{-1}])))]‘$$

§ 128-143. Sätze bis (207) .... Seite 161

d) Beweis des Satzes

$$, \vdash \neg\ \forall \mathfrak{q}\,[\mathrm{funk}\,(\mathfrak{q}) \to (\forall \mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i}\,ə\,(\mathfrak{i}\,ə\ <_{\mathfrak{q}})] \to$$
$$(\forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d}\,ə\,(\mathfrak{e}\,ə\,\mathfrak{q})] \to \neg\ \mathfrak{d}\,ə\,u] \to$$
$$\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ u = \mathfrak{a}\,ə\ \leq_{\mathfrak{q}}^{-1}]))] \to$$
$$\infty = \mathrm{anz}\,(u)‘$$

§ 144-157. Definitionen der Functionen (ξ, ζ) , $\xi \otimes \zeta$, $\xi \angle \zeta$. Sätze bis (263) ... Seite 189

S.XXXII |

K. *Beweis des Satzes*

$$, \vdash \neg\ \forall \mathfrak{A}\,\forall \mathfrak{q}\,[\neg\ u = \mathrm{zw}\,{}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \to \mathrm{anz}\,(0)\,ə\,(\mathrm{anz}\,(u)\,ə\ \leq_{\mathrm{nf}})‘$$

a) Beweis des Satzes

$$, \vdash (x, \mathrm{anz}\,(1))\,ə\,((y,n)\,ə\ \leq_{(q \otimes \mathrm{nf})}) \to (\mathrm{funk}\,(q) \to (\neg\ y\,ə\,(y\,ə\ <_{q}) \to$$
$$\mathrm{anz}\,(\mathrm{zw}\,{}^{q}_{(x,y)}) = \mathrm{anz}\,(\mathrm{zw}\,{}^{\mathrm{nf}}_{(\mathrm{anz}\,(1),n)})))‘$$

§ 158-165. Definition der Function $\mathrm{zw}\,{}^{\zeta}_{\xi}$. Sätze bis (298) .... Seite 217

b) Beweis des Satzes

$$, \vdash \mathrm{anz}\,(0)\,ə\,(n\,ə\ \leq_{\mathrm{nf}}) \to n = \mathrm{anz}\,(\mathrm{zw}\,{}^{\mathrm{nf}}_{(\mathrm{anz}\,(1),n)})‘$$

und Schluss des Abschnittes K.

§ 166-171. Sätze bis (327) .... Seite 240

Λ. *Beweis des Satzes*

$$, \vdash \mathrm{anz}\,(0)\,ə\,(\mathrm{anz}\,(u)\,ə\ \leq_{\mathrm{nf}}) \to \neg\ \forall \mathfrak{A}\,\forall \mathfrak{q}\,[\neg\ \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(—\varepsilon\,ə\,u) = \mathrm{zw}\,{}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}]‘$$

§ 172-179. Sätze bis (348) .... Seite 251

Anhänge.

1. Tafel der Grundgesetze und der aus ihnen zunächst folgenden Sätze ...... Seite 273
2. Tafel der Definitionen .... „ 274
3. Tafel der wichtigeren Lehrsätze .... „ 276
Wörterverzeichniss .... „ 285
Berichtigungen .... „ 288

| **Einleitung..** S.1

In meinen **Grundlagen der Arithmetik**[17] habe ich wahrscheinlich zu machen gesucht, dass die Arithmetik ein Zweig der Logik sei und weder der Erfahrung noch der Anschauung irgendeinen Beweisgrund zu entnehmen brauche. In diesem Buche soll dies nun dadurch bewährt werden, dass allein mit logischen Mitteln die einfachsten Gesetze der Anzahlen abgeleitet werden. Damit dies aber überzeuge, müssen erheblich höhere Ansprüche an die Beweisführung gestellt werden, als in der Arithmetik üblich ist[18]. Ein Kreis von wenigen Schluss- und Folgerungsweisen muss vorher abgegrenzt werden, und kein Schritt darf geschehen, der nicht einer von diesen gemäss wäre. Man darf sich also beim Uebergange zu einem neuen Urtheile nicht daran genügen lassen, wie es die Mathematiker bis jetzt wohl fast immer thun, dass er als richtig einleuchte, sondern man muss ihn in die einfachen logischen Schritte zerlegen, aus denen er besteht, und das sind oft gar nicht wenige. Dabei kann keine Voraussetzung unbemerkt bleiben; jedes Axiom, dessen man bedarf, muss entdeckt werden. Gerade die stillschweigend und ohne klares Bewusstsein gemachten Voraussetzungen verhindern ja die Einsicht in die erkenntnisstheoretische Natur eines Gesetzes.

Damit ein solches Unternehmen Erfolg haben könne, müssen natürlich die Begriffe, deren man bedarf, scharf gefasst werden. Das gilt besonders von dem, was die Mathematiker mit dem Worte ‚Menge' bezeichnen möchten. **Dedekind**[19] braucht das Wort ‚System' wohl in derselben Absicht. Aber trotz der in meinen Grundlagen vier Jahre früher erschienenen Darlegungen ist eine klare Einsicht in das Wesen der Sache bei ihm nicht zu finden, obwohl er dem Kerne manchmal nahe kommt wie an der Stelle (S. 2): „Ein solches System S … ist vollständig bestimmt, wenn von jedem Ding bestimmt ist, ob es Element von S ist oder nicht. Das System S ist daher dasselbe wie das System T, in Zeichen $S = T$, wenn jedes Element von S auch | Element von T, und jedes Element T auch Element von S ist." An- S.2
dere Stellen zeigen dagegen wieder ein Abirren, z. B. folgende (S. 1 u. 2): „Es kommt sehr häufig vor, dass verschiedene Dinge a, b, c … aus irgendeiner Veranlassung unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte aufgefasst, im Geiste zusammengestellt werden, und man sagt dann, dass sie ein **System** S bilden." Hier ist zwar in dem gemeinsamen Gesichtspunkte eine Ahnung des Richtigen enthalten; aber jene Auffassung, jene Zusammenstellung im Geiste ist kein objectives Merkmal. Ich frage: in wessen Geiste? Wenn sie nun in einem Geiste zusammengestellt werden, in einem andern nicht, bilden sie dann ein System? Was in meinem Geiste zusammengestellt werden soll, muss doch wohl in meinem Geiste sein. Bilden denn die Dinge ausser mir nicht Systeme? Ist das System ein subjectives Gebilde in der einzelnen Seele? Ist nun danach das Sternbild Orion ein System? Und was sind seine Elemente? Die Sterne, die Molecüle oder die Atome? Bemerkenswerth ist folgende Stelle (S. 2): „Für die Gleichförmigkeit der Ausdrucksweise ist es vortheilhaft, auch den besondern Fall zuzulassen, dass ein System S aus einem **einzigen** (aus einem und nur einem) Element a besteht; d. h. dass das Ding a Element von S, aber jedes von a verschiedene Ding kein Element von S ist." Dies wird nachher (S. 3) so verstanden, dass jedes Element s eines Systemes S selbst als System aufgefasst werden kann. Da in diesem Falle Element und System zusammenfallen, so ist hier besonders deutlich, dass nach **Dedekind** die Elemente den eigentlichen Bestand des Systemes ausmachen. **E. Schröder** thut in seinen Vorlesungen über die Algebra der Logik[20] einen Schritt über **Dedekind** hinaus, indem er auf den Zusammenhang von dessen Systemen mit den Begriffen aufmerksam macht, den dieser übersehen zu haben scheint. In der That ist das, was **Dedekind** eigentlich meint, wenn er ein System Theil eines Systemes nennt (S.

[17] Breslau 1884.
[18] Vergl. meine Grundlagen § 90.
[19] Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig 1888.
[20] Leipzig 1890, S. 253.

2), die Unterordnung eines Begriffes unter einen Begriff oder das Fallen eines Gegenstandes unter einen Begriff, Fälle, zwischen denen er ebensowenig wie **Schröder** unterscheidet infolge eines gemeinsamen Fehlers der Auffassung; denn auch **Schröder** sieht im Grunde die Elemente als das an, was seine **Klasse** ausmacht. Eine leere Klasse dürfte eigentlich bei ihm ebensowenig vorkommen wie ein leeres System bei **Dedekind**; aber das aus dem Wesen der Sache entspringende Bedürfniss macht sich bei beiden Schriftstellern in verschiedener Weise geltend. **Dedekind** fährt an der oben abgebrochenen Stelle so fort: „Dagegen wollen wir das leere System, welches gar kein Element enthält, aus gewissen Gründen hier ganz ausschliessen, obwohl es für andere Untersuchungen bequem sein kann, ein solches zu erdichten.“ Danach wäre also eine solche Erdichtung erlaubt; es wird nur aus gewissen Gründen darauf
S.3 verzichtet. **Schröder** wagt die Erdichtung | einer leeren Klasse. Beide sind also darin, wie es scheint, mit vielen Mathematikern einig, man dürfe beliebig etwas erdichten, was nicht da ist, ja was sogar undenkbar ist; denn wenn die Elemente das System bilden, so wird das System mit den Elementen zugleich aufgehoben. Wo die Grenzen dieser Erdichtungswillkür liegen, und ob es überhaupt deren gebe, darüber wird wohl wenig Klarheit und Uebereinstimmung zu finden sein; und doch kann die Richtigkeit eines Beweises davon abhangen. Ich glaube diese Frage in meinen Grundlagen der Arithmetik (§ 92 u. ff.) und in meinem Vortrage **Ueber formale Theorien der Arithmetik**[21] für alle Einsichtigen erledigt zu haben. **Schröder** erdichtet seine Null und verwickelt sich dadurch in grosse Schwierigkeiten[22]. Während demnach eine klare Einsicht bei **Schröder** wie bei **Dedekind** fehlt, macht sich doch die wahre Sachlage überall geltend, wo ein System bestimmt werden soll. **Dedekind** führt dann Eigenschaften an, die ein Ding haben muss, um zu dem Systeme zu gehören, d. h. er definirt einen Begriff durch seine Merkmale[23]. Wenn nun die Merkmale den Bestand des Begriffes ausmachen, nicht die unter den Begriff fallenden Gegenstände, so hat ein leerer Begriff gar keine Schwierigkeiten und Bedenken gegen sich. Freilich kann dann nie ein Gegenstand zugleich Begriff sein; und ein Begriff, unter den nur ein Gegenstand fällt, darf nicht mit diesem verwechselt werden. So wird es denn wohl endgiltig dabei bleiben, dass die Zahlangabe eine Aussage von einem Begriffe enthalte[24]. Ich habe die Anzahl auf die Beziehung der Gleichzahligkeit zurückgeführt und diese auf die eindeutige Zuordnung. Von dem Worte ‚Zuordnung‘ gilt Aehnliches wie von dem Worte ‚Menge‘. Beide werden in der Mathematik jetzt nicht selten gebraucht, und es fehlt wohl meistens dabei die tiefere Einsicht in das, was man eigentlich damit bezeichnen will. Wenn mein Gedanke richtig ist, dass die Arithmetik ein Zweig der reinen Logik sei, so muss für ‚Zuordnung‘ ein rein logischer Ausdruck gewählt werden. Ich nehme dafür ‚Beziehung‘. Begriff und Beziehung sind die Grundsteine, auf denen ich meinen Bau aufführe.

Aber auch, nachdem die Begriffe scharf gefasst sind, würde es ohne besonderes Hilfsmittel schwer, ja fast unmöglich sein, den Anforderungen zu genügen, die wir hier an die Beweisführung stellen müssen. Ein solches Hilfsmittel ist nun meine Begriffsschrift, deren
S.4 Darlegung meine erste Aufgabe sein wird. Zuvor mag noch Folgendes bemerkt werden. Es | wird nicht immer möglich sein, Alles regelrecht zu definiren, weil es gerade unser Bestreben sein muss, auf das logisch Einfache zurückzugehen, das als Solches nicht eigentlich definirbar ist. Ich muss mich dann begnügen, durch Winke auf das hinzuweisen, was ich meine. Ich muss vor Allem danach trachten, verstanden zu werden, und deshalb werde ich die Sache allmählich zu entfalten suchen, nicht gleich anfangs die volle Allgemeinheit und den

[21] Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft, Jahrg. 1885, Sitzung vom 17. Juli.

[22] Vergl. E. G.**Husserl** in den Göttinger gel. Anzeigen, 1891, Nr. 7, S. 272, der den Knoten aber wohl nicht löst.

[23] Ueber **Begriff, Gegenstand, Eigenschaft, Merkmal** vergleiche man meine Grundlagen §§ 38, 47, 53, und meinen Aufsatz **Ueber Begriff und Gegenstand** in der Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie, XVI, 2.

[24] § 46 meiner Grundlagen.

endgiltigen Ausdruck erstreben. Man wird sich vielleicht über den häufigen Gebrauch des Anführungszeichens wundern; ich unterscheide damit die Fälle, wo ich vom Zeichen selbst spreche, von denen, wo ich von seiner Bedeutung spreche. So pedantisch dies auch erscheinen mag, ich halte es doch für nothwendig. Es ist merkwürdig, wie eine ungenaue Rede- oder Schreibweise, die ursprünglich vielleicht nur aus Bequemlichkeit und der Kürze halber, aber mit vollem Bewusstsein ihrer Ungenauigkeit gebraucht wurde, zuletzt das Denken verwirren kann, nachdem jenes Bewusstsein geschwunden ist. Hat man es doch fertig gebracht, die Zahlzeichen für die Zahlen, den Namen für das Benannte, das blosse Hilfsmittel für den eigentlichen Gegenstand der Arithmetik zu halten. Solche Erfahrungen lehren, wie nothwendig es ist, an die Genauigkeit der Rede- und Schreibweise die höchsten Anforderungen zu stellen. Und ich habe mich bemüht, ihnen wenigstens überall da gerecht zu werden, wo mir etwas darauf anzukommen schien.

|

I. Darlegung der Begriffsschrift. S.5

1. Die Urzeichen.

Einleitendes über Function, Begriff, Beziehung [25]

§ 1. Wenn es sich darum handelt, die ursprüngliche Bedeutung des Wortes ‚Function‘ in seinem mathematischen Gebrauche anzugeben, so verfällt man leicht darauf, Function von x einen mittelst der Bezeichnungen der Summe, des Products, der Potenz, der Differenz u. s. w. aus ‚x‘ und bestimmten Zahlen gebildeten Ausdruck zu nennen. Dies ist deshalb unzutreffend, weil hierdurch die Function als ein **Ausdruck**, als eine Verbindung von Zeichen, nicht als das dadurch Bezeichnete hingestellt wird. Man wird darum versuchen, statt ‚Ausdruck‘ zu sagen ‚Bedeutung eines Ausdrucks‘. Nun kommt in dem Ausdrucke aber der Buchstabe ‚x‘ vor, der eine Zahl nicht wie etwa das Zeichen ‚2‘ bedeutet, sondern nur unbestimmt andeutet. Für verschiedene Zahlzeichen, die wir an die Stelle von ‚x‘ setzen, erhalten wir im Allgemeinen verschiedene Bedeutungen. Setzen wir z. B. in den Ausdruck ‚$(2 + 3 \cdot x^2) \cdot x$‘ für ‚$x$‘ der Reihe nach die Zahlzeichen ‚0‘, ‚1‘, ‚2‘, ‚3‘ ein, so erhalten wir als zugehörige Bedeutungen die Zahlen 0, 5, 28, 87. Keine dieser Bedeutungen kann den Anspruch erheben, unsere Function zu sein. Das Wesen der Function giebt sich vielmehr in der Zusammengehörigkeit kund, die sie zwischen den Zahlen stiftet, deren Zeichen wir für ‚x‘ setzen, und den Zahlen, die dann als Bedeutungen unseres Ausdruckes auftreten, eine Zusammengehörigkeit, die sich anschaulich in dem Verlaufe der Curve darstellt, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten

$$‚ y = (2 + 3 \cdot x^2) \cdot x ‘$$

ist. Das Wesen der Function liegt demnach in dem Theile des Ausdrucks, der noch ausser dem ‚x‘ vorhanden ist. Der Ausdruck einer **Function** ist **ergänzungsbedürftig**, **ungesättigt**. Der Buch- | stabe ‚x‘ dient nur dazu, Stellen offen zu halten für ein Zahlzeichen, das den Ausdruck ergänzen soll, und macht so die besondere Art der Ergänzungsbedürftigkeit kenntlich, S.6
die das eigenthümliche Wesen der grade bezeichneten Function ausmacht. Im Folgenden soll statt des ‚x‘ der Buchstabe ‚ξ‘ zu diesem Zwecke gebraucht werden[26]. Dieses Offenhalten ist so zu verstehen, dass alle Stellen, an denen ‚ξ‘ steht, immer nur durch dasselbe, nie durch verschiedene Zeichen ausgefüllt werden dürfen. Ich nenne diese Stellen **Argumentstellen**, und dasjenige, dessen Zeichen (Name) in einem gegebenen Falle diese Stellen einnimmt, nenne

[26] Hiermit soll jedoch nichts für die Begriffsschrift festgesetzt sein. Das ‚ξ‘ wird vielmehr in den begriffsschriftlichen Entwickelungen selbst nie vorkommen; ich werde es nur bei der Darlegung der Begriffsschrift und bei Erläuterungen gebrauchen.

ich **Argument** der Function für diesen Fall. Durch das Argument wird die Function ergänzt; das, wozu sie ergänzt wird, nenne ich **Werth** der Function für das Argument. Wir erhalten also einen Namen des Werthes einer Function für ein Argument, wenn wir die Argumentstellen des Namens der Function mit dem Namen des Arguments ausfüllen. So ist z. B. ‚$(2+3\cdot 1^2)\cdot 1$‘ ein Name der Zahl 5, zusammengesetzt aus dem Functionsnamen ‚$(2+3\cdot\xi^2)\cdot\xi$‘ und ‚1‘. So ist denn das Argument nicht mit zur **Function** zu rechnen, sondern dient zur Ergänzung der an sich **ungesättigten Function**. Wenn im Folgenden ein Ausdruck wie ‚die Function $\Phi(\xi)$‘ gebraucht wird, so ist immer zu beachten, dass ‚ξ‘ nur insofern zur Bezeichnung der Function dient, als es die Argumentstellen kenntlich macht, nicht aber so, dass das Wesen der Function geändert wird, wenn irgendein Zeichen für ‚ξ‘ eintritt.

§ 2. Als functionsbildend hat man zu den Grundrechnungsarten noch den Grenzübergang in seinen verschiedenen Arten als unendliche Reihe, Differentialquotienten, Integral gefügt und zuletzt das Wort ‚Function‘ so allgemein verstanden, dass der Zusammenhang zwischen Functionswerth und Argument unter Umständen gar nicht mehr durch die Zeichen der Analysis, sondern nur noch durch Worte bezeichnet werden konnte. Eine andere Erweiterung bestand darin, dass man als Argumente und demzufolge auch als Functionswerthe complexe Zahlen zuliess. In diesen beiden Richtungen bin ich weiter gegangen. Während nämlich bisher die Zeichen der Analysis einerseits nicht immer ausreichten, kamen sie andererseits nicht alle bei der Bildung von Functionsnamen zur Verwendung, indem man z. B. ‚$\xi^2 = 4$‘ und ‚$\xi > 2$‘ nicht als Namen von Functionen gelten liess, wie ich das thue. Damit ist aber zugleich gesagt, dass der Umkreis der Functionswerthe nicht auf Zahlen beschränkt bleiben kann; denn wenn ich als Argument der Function ‚$\xi^2 = 4$‘ der Reihe nach die Zahlen 0, 1, 2, 3 nehme, so erhalte ich keine Zahlen.

‚$0^2 = 4$‘

‚$1^2 = 4$‘

‚$2^2 = 4$‘

‚$3^2 = 4$‘

S.7 sind Ausdrücke von theils wahren, theils falschen Gedanken. Ich spreche | dies so aus: der Werth der Function $\xi^2 = 4$ ist entweder der **Wahrheitswerth** des Wahren oder der des Falschen[27]. Man sieht hieraus schon, dass ich noch nichts behaupten will, wenn ich nur eine Gleichung hinschreibe, sondern dass ich nur einen Wahrheitswerth **bezeichne**, ebenso wie ich nichts behaupte, wenn ich nur ‚2^2‘ hinschreibe, sondern nur eine Zahl **bezeichne**. Ich sage: die **Namen** ‚$2^2 = 4$‘ und ‚$3 > 2$‘ **bedeuten** denselben Wahrheitswerth, den ich kurz das **Wahre** nenne. Ebenso **bedeuten** mir ‚$3^2 = 4$‘ und ‚$1 > 2$‘ denselben Wahrheitswerth, den ich kurz **das Falsche** nenne, gerade so, wie der Name ‚2^2‘ die Zahl Vier **bedeutet**. Ich nenne demnach die Zahl Vier die **Bedeutung** von ‚4‘ und von ‚2^2‘, und ich nenne das Wahre die Bedeutung von ‚$3 > 2$‘. Ich unterscheide aber von der **Bedeutung** eines Namens seinen **Sinn**. ‚2^2‘ und ‚$2+2$‘ haben nicht denselben **Sinn**, noch haben ‚$2^2 = 4$‘ und ‚$2+2 = 4$‘ denselben **Sinn**. Den Sinn des Namens eines Wahrheitswerthes nenne ich **Gedanken**. Ich sage ferner, ein Name **drücke aus** seinen Sinn und **bedeute** seine Bedeutung. Ich **bezeichne** mit dem Namen das, was er bedeutet.

Die Function ‚$\xi^2 = 4$‘ kann also nur zwei Werthe haben, nämlich das Wahre für die Argumente 2 und -2 und das Falsche für alle übrigen Argumente.

Auch der Umkreis dessen, was als Argument zugelassen wird, muss erweitert und auf

[27] Dies habe ich in meinem Aufsatze **Ueber Sinn und Bedeutung** in der Zeitschrift f. Philos. u. phil. Kritik, 100. Bd., eingehender begründet.

Gegenstände überhaupt ausgedehnt werden. **Gegenstände** stehen den Functionen gegenüber. Zu den **Gegenständen** rechne ich demnach Alles, was nicht Function ist, z. B. Zahlen, Wahrheitswerthe und die weiter unten einzuführeuden Werthverläufe. Die Namen von Gegenständen, die **Eigennamen**, führen also keine Argumentstellen mit sich, sie sind gesättigt wie die Gegenstände selbst.

§ 3. Ich brauche die Worte

„die Function $\Phi(\xi)$ hat denselben **Werthverlauf** wie die Function $\Psi(\xi)$"

allgemein als gleichbedeutend mit den Worten

„die Functionen $\Phi(\xi)$ und $\Psi(\xi)$ haben für dasselbe Argument immer denselben Werth."

Wir haben diesen Fall bei den Functionen $\xi^2 = 4$ und $3 \cdot \xi^2 = 12$, wenigstens wenn als Argumente Zahlen genommen werden. Wir können uns aber die Zeichen der Quadrirung und Multiplication auch so definirt denken, dass die Function

$$(\xi^2 = 4) = (3 \cdot \xi^2 = 12)$$

für jedes beliebige Argument als Werth das Wahre hat. Hier kann nun auch ein Ausdruck der Logik gebraucht werden: „der Begriff *Quadrat-* | *wurzel aus* 4 hat denselben Umfang wie S.8
der Begriff *etwas, dessen dreifaches Quadrat* 12 *ist*". Bei solchen Functionen, deren Werth immer ein Wahrheitswerth ist, kann man demnach statt ‚Werthverlauf der Function' sagen ‚Umfang des Begriffes', und es erscheint zweckmässig, **Begriff** geradezu eine Function zu nennen, deren Werth immer ein Wahrheitswerth ist.

§ 4. Bisher war nur von Functionen eines einzigen Arguments die Rede; wir können aber leicht zu **Functionen mit zwei Argumenten** übergehen. Diese sind **zwiefachergänzungsbedürftig** in der Art, dass eine Function mit einem Argumente erhalten wird, nachdem eine Ergänzung durch ein Argument bewirkt ist. Erst durch eine nochmalige Ergänzung gelangen wir zu einem Gegenstande, und dieser heisst dann **Werth** der Function für die beiden Argumente. Wie uns bei den Functionen mit einem Argumente der Buchstabe ‚ξ' diente, so gebrauchen wir hier die Buchstaben ‚ξ' und ‚ζ', um die zwiefache Ungesättigtheit der Functionen mit zwei Argumenten anzudeuten wie in

$$‚(\xi + \zeta)^2 + \zeta‘.$$

Indem wir für ‚ζ', z. B. ‚1', einsetzen, sättigen wir die Function so, dass wir in $(\xi + 1)^2 + 1$ nur noch eine Function mit einem Argumente haben. Diese Gebrauchsweise der Buchstaben ‚ξ' und ‚ζ' muss immer im Auge behalten werden, wenn ein Ausdruck wie ‚die Function $\Psi(\xi, \zeta)$' vorkommt (vergl. die 2. Anm. in § 1). Ich nenne die Stellen, an denen ‚ξ' steht, ξ-**Argumentstellen** und die, an denen ‚ζ' steht, ζ-**Argumentstellen**. Ich sage, die ξ-Argumentstellen seien einander **verwandt** und ebenso die ζ-Argumentstellen, während ich eine ξ-Argumentstelle nicht **verwandt** nenne einer ζ-Argumentstelle.

Die Functionen mit zwei Argumenten $\xi = \zeta$ und $\xi > \zeta$ haben als Werth immer einen Wahrheitswerth (wenigstens wenn die Zeichen ‚$=$' und ‚$>$' in geeigneter Weise erklärt sind). Solche Functionen werden wir zweckmässig Beziehungen nennen. In der ersten Beziehung steht z. B. die 1 zu der 1, überhaupt jeder Gegenstand zu sich selbst, in der zweiten steht z. B. 2 zu 1. Wir sagen, der Gegenstand Γ **stehe zu** dem Gegenstande Δ **in der Beziehung** $\Psi(\xi, \zeta)$, wenn $\Psi(\Gamma, \Delta)$ das Wahre ist. Ebenso sagen wir, der Gegenstand Δ **falle unter** den Begriff $\Phi(\xi)$, wenn $\Phi(\Delta)$ das Wahre ist. Vorausgesetzt ist hierbei natürlich, dass die Function $\Phi(\xi)$ ebenso wie $\Psi(\xi, \zeta)$ als Werth immer einen Wahrheitswerth habe[28].

---

[28]Hier ist eine Schwierigkeit vorhanden, die leicht die wahre Sachlage verdunkeln und dadurch Misstrauen in die

S.9 |

§ 5. Schon oben ist gesagt, dass in der blossen Gleichung noch gar keine Behauptung liegen soll; es ist mit ‚$2+3=5$' eben nur ein Wahrheitswerth bezeichnet, ohne dass gesagt ist, welcher von beiden es ist. Auch wenn ich schriebe ‚$(2+3=5)=(2=2)$' und voraussetzte, man wüsste, dass $2=2$ das Wahre ist, so würde ich doch damit nicht behauptet haben, dass die Summe von 2 und 3 5 ist, sondern ich hätte nur den Wahrheitswerth davon bezeichnet, dass ‚$2+3=5$' dasselbe bedeute wie ‚$2=2$'. Wir bedürfen also noch eines besonderen Zeichens, um etwas als wahr behaupten zu können. Zu diesem Zwecke lasse ich dem Namen des Wahrheitswerthes das Zeichen ‚$\vdash$' vorhergehen, so dass z. B. in

$$‚\vdash 2^2 = 4‘ \ ^{29}$$

behauptet wird, dass das Quadrat von 2 4 sei. Ich unterscheide das **Urtheil** vom **Gedanken** in der Weise, dass ich unter **Urtheil** die Anerkennung der Wahrheit eines **Gedankens** verstehe. Die begriffsschriftliche Darstellung eines Urtheils mittelst des Zeichens ‚$\vdash$' nenne ich **Begriffsschriftsatz** oder kurz **Satz**. Dieses ‚$\vdash$' sehe ich an als zusammengesetzt aus dem senkrechten Striche, den ich **Urtheilstrich** nenne, und dem wagerechten, den ich jetzt einfach den **Wagerechten** nennen will[30]. Der Wagerechte wird meist mit andern Zeichen, wie hier mit dem Urtheilstriche verwachsen vorkommen und dadurch vor der Verwechselung mit dem Minuszeichen geschützt sein. Da, wo er gesondert vorkommt, muss er zur Unterscheidung etwas länger als das **Minuszeichen** gemacht werden. Ich fasse ihn als Functionsnamen auf in der Weise, dass

$$— \Delta$$

das Wahre ist, wenn Δ das Wahre ist, dass es dagegen das Falsche ist, wenn Δ nicht das Wahre ist[31]. Demnach ist

$$— \xi$$

S.10 eine Function, deren Werth immer ein Wahrheitswerth ist, oder nach | unserer Festsetzung ein Begriff. Unter diesen Begriff fällt das Wahre und nur dieses. Es bedeutet also

$$‚— 2^2 = 4‘$$

dasselbe wie ‚$2^2=4$', nämlich das Wahre. Um Klammern entbehrlich zu machen, bestimme ich nämlich, dass Alles, was rechts vom Wagerechten steht, als Ganzes aufzufassen ist, das an der Argumentstelle der Function **—** ξ steht, sofern nicht **Klammern** das verbieten. Es bedeutet

$$‚— 2^2 = 5‘$$

Richtigkeit meiner Auffassung erregen kann. Wenn wir den Ausdruck ‚der Wahrheitswerth davon, dass Δ unter den Begriff $\Phi(\xi)$ fällt', vergleichen mit ‚$\Phi(\Delta)$', so sehen wir, dass dem ‚$\Phi(\ )$' eigentlich entspricht ‚der Wahrheitswerth davon, dass ( ) unter den Begriff $\Phi(\xi)$ fällt' und nicht ‚der Begriff $\Phi(\xi)$'. Die letzten Worte bezeichnen also eigentlich nicht einen Begriff (in unserem Sinne), obwohl es nach der sprachlichen Form so aussieht. Ueber die Zwangslage, in der sich hier die Sprache befindet, vergl. meinen Aufsatz Ueber Begriff und Gegenstand.

[29] Ich benutze hier vielfach die Bezeichnungen der Summe, des Products, der Potenz vorläufig, obwohl sie hier noch nicht definirt sind, um bequemer Beispiele bilden zu können und durch Winke das Verständniss zu erleichtern. Es muss aber im Auge behalten werden, dass nichts auf die Bedeutungen dieser Bezeichnungen gegründet wird.

[30] Früher nannte ich ihn **Inhaltsstrich**, als ich noch unter dem Ausdrucke ‚beurtheilbarer Inhalt' das zusammenfasste, was ich nun unterscheiden gelernt habe als Wahrheitswerth und Gedanken. Vergl. meinen Aufsatz Ueber Sinn und Bedeutung.

[31] Selbstverständlich darf das Zeichen ‚Δ' nicht bedeutungslos sein, sondern muss einen Gegenstand bedeuten. Bedeutungslose Namen dürfen in der Begriffsschrift nicht vorkommen. Die Festsetzung ist so getroffen, dass ‚$— \Delta$' unter allen Umständen etwas bedeutet, sofern nur ‚Δ' etwas bedeutet. Sonst würde $— \xi$ kein scharfbegrenzter Begriff, also in unserm Sinne überhaupt kein Begriff sein. Ich gebrauche hier die **grossen griechischen Buchstaben** als Namen so, als ob sie etwas bedeuteten, ohne dass ich die Bedeutung angebe. In den Begriffsschriftentwickelungen selbst werden sie ebenso wenig wie ‚ξ' und ‚ζ' vorkommen.

das Falsche, also dasselbe wie ‚$2^2 = 5$', wohingegen

$$,\!-\!2\text{ ‘}$$

das Falsche bedeutet, also etwas von der Zahl 2 Verschiedenes. Wenn Δ ein Wahrheitswerth ist, so ist $-\Delta$ derselbe und mithin ist dann

$$\Delta = (-\Delta)$$

das Wahre. Es ist dies aber das Falsche, wenn Δ kein Wahrheitswerth ist. Wir können also sagen, dass

$$\Delta = (-\Delta)$$

der Wahrheitswerth davon ist, dass Δ ein Wahrheitswerth sei.

Die Function $-\Phi(\xi)$ ist danach ein Begriff, und die Function $-\Psi(\xi, \zeta)$ ist eine Beziehung, einerlei, ob $\Phi(\xi)$ ein Begriff und $\Psi(\xi, \zeta)$ eine Beziehung ist oder nicht.

Von den beiden Zeichen, aus denen ‚$\vdash$' zusammengesetzt ist, enthält nur der Urtheilstrich die Behauptung.

§ 6. Wir brauchen kein eignes Zeichen, um einen Wahrheitswerth als das Falsche zu erklären, wenn wir nur ein Zeichen haben, durch welches jeder Wahrheitswerth in den entgegengesetzten verwandelt wird, das auch sonst unentbehrlich ist. Ich setze nun fest:

Der Werth der Function

$$\neg\ \xi$$

soll für jedes Argument das Falsche sein, für das der Werth der Function

$$-\xi$$

das Wahre ist, und soll für alle andern Argumente das Wahre sein.

Wir haben demnach in

$$\neg\ \xi$$

eine Function, deren Werth immer ein Wahrheitswerth ist; es ist ein Begriff, unter den alle Gegenstände fallen mit einziger Ausnahme des Wahren. Hieraus folgt, dass ‚$\neg\ \Delta$' immer dasselbe bedeutet wie ‚$\neg\ (-\Delta)$' und wie ‚$-\neg\ \Delta$' und wie ‚$-\neg\ (-\Delta)$'. ■→Ich nenne ‚$\neg$ ' das **Verneinungszeichen**.←■[32] [#8] Den Uebergang von ‚$\neg\ (-\Delta)$' oder von ‚$-\neg\ \Delta$' zu ‚$\neg\ \Delta$' sowie den von ‚$--\Delta$' zu ‚$-\Delta$' nenne ich die **Verschmelzung** der Wagerechten.
| S.11

Nach unserer Festsetzung ist $\neg\ 2^2 = 5$ das Wahre; also

$$\vdash \neg\ 2^2 = 5,$$

in Worten: $2^2 = 5$ ist nicht das Wahre; oder: das Quadrat von 2 ist nicht 5.

So auch: $\vdash \neg\ 2$

§ 7. Wir haben zwar das Gleichheitszeichen schon beiläufig zur Bildung von Beispielen benutzt; aber es ist nöthig, Genaueres hierüber festzusetzen.

$$,\ \Gamma = \Delta\text{ ‘}$$

bedeute das Wahre, wenn Γ dasselbe ist wie Δ; in allen andern Fällen bedeute es das Falsche.

[32] Wir sehen darum ‚$\neg$ ' als zusammengesetzt an aus dem kleinen senkrechten Striche, dem **Verneinungstriche**, und den beiden Theilen des wagerechten Striches, von denen jeder als **Wagerechter** in unserm Sinne aufgefasst werden kann.

[#8] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

Um Klammern entbehrlich zu machen, bestimme ich, dass Alles, was links vom Gleichheitszeichen bis zum nächsten Wagerechten steht, als Ganzes das ξ-Argument der Function $\xi = \zeta$ bedeute, sofern nicht **Klammern** es verbieten; dass Alles, was rechts vom Gleichheitszeichen steht bis zum nächsten Gleichheitszeichen, als Ganzes das ζ-Argument jener Function bedeute, sofern nicht **Klammern** es verbieten (vergl. S. 10).

§ 8. Wir betrachteten in § 3 den Fall, dass eine Gleichung wie

$$‚\Phi(x) = \Psi(x)‘$$

immer einen Namen des Wahren ergiebt, was für einen Eigennamen wir auch für ‚x‘ einsetzen mögen, sofern dieser nur wirklich einen Gegenstand bedeutet. Wir haben dann die Allgemeinheit einer Gleichheit, während wir in ‚$2^2 = 4$‘ nur eine Gleichheit haben. Dieser Unterschied macht sich dadurch bemerklich, dass wir in jenem Falle einen nur unbestimmt andeutenden Buchstaben ‚x‘ haben, während in ‚$2^2 = 4$‘ jedes Zeichen eine bestimmte Bedeutung hat. Um einen Ausdruck für die Allgemeinheit zu erhalten, könnte man auf den Gedanken kommen, zu definiren: „Unter ‚$\Phi(x)$’ werde das Wahre verstanden, wenn der Werth der Function $\Phi(\xi)$ für jedes Argument das Wahre ist; sonst bedeute es das Falsche.“ Vorausgesetzt würde hierbei wie bei allen unsern Betrachtungen ähnlicher Art sein, dass ‚$\Phi(\xi)$‘ immer eine Bedeutung gewinne, wenn wir in ihm ‚ξ‘ durch einen Namen ersetzen, der einen Gegenstand bedeutet. Sonst würde ich $\Phi(\xi)$ nicht **Function** nennen. Danach bedeutete dann ‚$x \cdot (x-1) = x^2 - 1$‘ das Wahre, wenigstens wenn die Bezeichnungen der Multiplication, Subtraction und Quadrirung auch für Gegenstände, die nicht Zahlen sind, so definirt wären, dass die Gleichung allgemein gälte. Dagegen bedeutete ‚$x \cdot (x-1) = x^2$‘ das Falsche, weil wir als Bedeutung das Falsche erhalten, wenn wir für ‚x‘ ‚1‘ einsetzen, obwohl wir das Wahre erhalten, wenn wir ‚0‘ einsetzen. Aber bei dieser Festsetzung wäre das Gebiet der Allgemeinheit nicht genügend begrenzt. Man wäre z. B. im Zweifel, ob ‚$\neg\ 2 + 3 \cdot x = 5 \cdot x$‘ als Verneinung einer Allgemeinheit oder als Allgemeinheit einer Verneinung aufzufassen wäre;
S.12 genauer: ob dies | den Wahrheitswerth davon bedeuten solle, dass nicht für jedes Argument der Werth der Function $2 + 3 \cdot \xi = 5 \cdot \xi$ das Wahre sei, oder ob es den Wahrheitswerth davon bedeuten solle, dass für jedes Argument der Werth der Function $\neg\ 2 + 3 \cdot \xi = 5 \cdot \xi$ das Wahre sei. Im ersten Falle würde ‚$\neg\ 2 + 3 \cdot x = 5 \cdot x$‘ das Wahre bedeuten, im andern das Falsche. Es muss aber sowohl die Allgemeinheit der Verneinung, als auch die Verneinung der Allgemeinheit ausdrückbar sein. Ich drücke nun jene so aus:

$$‚\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ 2 + 3 \cdot \mathfrak{a} = 5 \cdot \mathfrak{a}]‘$$

und die Verneinung der Allgemeinheit so:

$$‚\neg\ \forall \mathfrak{a}\, [2 + 3 \cdot \mathfrak{a} = 5 \cdot \mathfrak{a}]‘$$

und die Allgemeinheit selbst so:

$$‚\forall \mathfrak{a}\, [2 + 3 \cdot \mathfrak{a} = 5 \cdot \mathfrak{a}]‘.$$

Dies bedeutete das Wahre, wenn für jedes Argument der Werth der Function $2 + 3 \cdot \xi = 5 \cdot \xi$ das Wahre wäre. Da dies nicht der Fall ist, so ist

$$\forall \mathfrak{a}\, [2 + 3 \cdot \mathfrak{a} = 5 \cdot \mathfrak{a}]$$

das Falsche, und darum ist

$$\neg\ \forall \mathfrak{a}\, [2 + 3 \cdot \mathfrak{a} = 5 \cdot \mathfrak{a}]$$

das Wahre.

$$\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ 2 + 3 \cdot \mathfrak{a} = 5 \cdot \mathfrak{a}]$$

ist das Falsche, weil nicht für jedes Argument der Werth der Function $\neg\ 2 + 3 \cdot \xi = 5 \cdot \xi$ das

Wahre ist; denn für das Argument 1 ist er das Falsche. Mithin ist

$$\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ 2+3\cdot\mathfrak{a}=5\cdot\mathfrak{a}]$$

das Wahre, und

$$\text{‚}\ \vdash\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ 2+3\cdot\mathfrak{a}=5\cdot\mathfrak{a}]\ \text{‘}$$

besagt: **es giebt** mindestens eine Lösung der Gleichung ‚$2+3\cdot x=5\cdot x$‘. Ebenso:

$$\vdash\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a}^2=1];$$

in Worten: **es giebt** mindestens eine Quadratwurzel aus 1. Man erkennt hieraus, wie das ‚es giebt‘ in der Begriffsschrift wiedergegeben wird.

Wenn wir nun erklären:

es bedeute

$$\text{‚}\,\forall\mathfrak{a}\,[\Phi(\mathfrak{a})]\ \text{‘}$$

das Wahre, wenn der Werth der Function $\Phi(\xi)$ für jedes Argument das Wahre ist, und sonst das Falsche;

so bedarf dies einer Ergänzung, indem genauer anzugeben ist, welches in jedem Falle diese Function $\Phi(\xi)$ sei. Wir wollen sie die **zugehörige** Function nennen. Es können nämlich Zweifel entstehen. $\Delta=\Delta$ ist sowohl der Werth der Function $\Delta=\xi$, als auch der Werth der Function $\xi=\xi$, beide Male für das Argument Δ. So könnte man von $\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{a}=\mathfrak{a}]$ ausgehend als zugehörige Function $\xi=\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}=\xi$ oder $\xi=\xi$ annehmen | wollen. Aber bei unserm S.13
Gebrauche der deutschen Buchstaben hätten wir in den ersten beiden Fällen gar keine **Function**, weil ‚$\xi=\mathfrak{a}$‘ und ‚$\mathfrak{a}=\xi$‘ immer bedeutungslos bleiben, was man auch für ‚ξ‘ einsetzen möge; denn der deutsche Buchstabe ‚$\mathfrak{a}$‘ darf ausser in ‚$\forall\mathfrak{a}$‘ selbst nicht ohne vorgesetztes ‚$\forall\mathfrak{a}$‘ vorkommen. Hier kann also nur $\xi=\xi$ als zugehörige Function in Betracht kommen. Nicht so einfach ist die Sache bei einem Ausdrucke wie

$$\text{‚}\,\forall\mathfrak{a}\,[((\mathfrak{a}+\mathfrak{a}=2\cdot\mathfrak{a})=(\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{a}=\mathfrak{a}]))]\ \text{‘.}$$

Wenn man blindlings vorginge, könnte man in

$$\text{‚}\,(\xi+\xi=2\cdot\xi)=(\forall\xi\,[\xi=\xi])\ \text{‘}$$

die zugehörige Function zu haben meinen. ■→Wir wollen nun sagen, ‚$\mathfrak{a}$‘ stehe in ‚$\forall\mathfrak{a}$‘ hinter dem **Allquantor**. Die Stelle hinter dem Allquantor ist nie eine **Argumentstelle**; das hinter dem zweiten Allquantor stehende ‚$\mathfrak{a}$‘ wird also mindestens zu bewahren sein.←■[33] [#9] Da aber auf ‚$\forall\mathfrak{a}$‘ immer eine Zeichenverbindung folgen muss, die ‚$\mathfrak{a}$‘ enthält, so muss ‚$\mathfrak{a}$‘ auch mindestens an einer der beiden Stellen in ‚$\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$‘ bewahrt bleiben. Man könnte demnach auf folgende Functionen als zugehörige rathen

$$(\xi+\xi=2\cdot\xi)=(\forall\mathfrak{a}\,[\xi+\mathfrak{a}]),$$
$$(\xi+\xi=2\cdot\xi)=(\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{a}+\xi]),$$
$$(\xi+\xi=2\cdot\xi)=(\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{a}+\mathfrak{a}]);$$

aber den ersten beiden Auffassungen widerspricht, dass die Bedeutung des in

$$\text{‚}\,\forall\mathfrak{a}\,[((\mathfrak{a}+\mathfrak{a}=2\cdot\mathfrak{a})=(\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{a}+\mathfrak{a}]))]\ \text{‘}$$

vorkommenden ‚$\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{a}=\mathfrak{a}]$‘ schon feststeht und nicht wieder in Frage gestellt werden darf.

■→Wir nennen nun das auf einen Allquantor mit einem **deutschen Buchstaben** Folgende, das mit eben diesem Allquantor zusammen den Namen des Wahrheitswerthes dafür bildet, dass der Werth der zugehörigen Function für jedes Argument das Wahre sei, das **Gebiet** des hinter dem Allquantor stehenden deutschen Buchstaben. Die **zugehörige** Function wird nun durch die Regel bestimmt:

---

[33] Wir wollen nun sagen, ‚$\mathfrak{a}$‘ stehe in ‚$\forall\mathfrak{a}$‘ über der **Höhlung**. Die Stelle über der Höhlung ist nie eine **Argumentstelle**; das über der zweiten Höhlung stehende ‚$\mathfrak{a}$‘ wird also mindestens zu bewahren sein.

[#9] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

1. Alle Stellen, an denen ein deutscher Buchstabe in seinem Gebiet, jedoch weder in einem eingeschlossenen Gebiete desselben Buchstaben noch hinter einem Allquantor vorkommt, sind verwandte Argumentstellen, und zwar die der zugehörigen Function.

←■[34] [#10]

Wenn man aber den Wahrheitswerth davon bezeichnen will, dass die Function

$$(\xi + \xi = 2 \cdot \xi) = (\forall \mathfrak{a}\, [\xi = \mathfrak{a}])$$

für jedes Argument das Wahre als Werth habe, so wird man einen andern deutschen Buchstaben wählen:

$$\forall \mathfrak{e}\, [(\mathfrak{e} + \mathfrak{e} = 2 \cdot \mathfrak{e}) = (\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{e} = \mathfrak{a}])].$$

S.14 |

Ich fasse dies in die Regel:

2. Wenn in dem Namen einer Function schon deutsche Buchstaben vorkommen, in deren Gebieten Argumentstellen dieser Function liegen, so wähle man einen von diesen verschiedenen, um den zugehörigen Allgemeinheitsausdruck zu bilden.

Nach unsern Bestimmungen ist im Allgemeinen ein deutscher Buchstabe so gut wie ein anderer, jedoch mit der Beschränkung, dass die Verschiedenheit dieser Buchstaben wesentlich sein kann. Für einige deutsche Buchstaben werden wir später eine etwas abweichende Verwendungsweise festsetzen.

$$, \forall \mathfrak{a}\, [\Phi(\mathfrak{a})]\ ‘$$

bedeutet dasselbe wie

$$, \forall \mathfrak{a}\, [(\text{—}\, \Phi(\mathfrak{a}))]\ ‘$$

und wie

$$, \text{—}\, (\forall \mathfrak{a}\, [\Phi(\mathfrak{a})])\ ‘.$$

■→ Deshalb können wir durch die **Verschmelzung** der Wagerechten von den Formen ‚— $(\forall \mathfrak{a}[\Phi(\mathfrak{a})])$‘ und ‚$\forall \mathfrak{a}\, [(\text{—}\, \Phi(\mathfrak{a}))]$‘ sogleich übergehen zu ‚$\forall \mathfrak{a}\, [\Phi(\mathfrak{a})]$‘.←■[35] [#11]

§ 9. Wenn $\forall \mathfrak{a}\, [\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})]$ das Wahre ist, so können wir nach unserer frühern Bestimmung (§ 3) auch sagen, dass die Function $\Phi(\xi)$ denselben Werthverlauf habe wie die Function $\Psi(\xi)$; das heisst: wir können die Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Werthverlaufsgleichheit umsetzen und umgekehrt. Diese Möglichkeit muss als ein logisches Gesetz angesehen werden, von dem übrigens schon immer, wenn auch stillschweigend, Gebrauch gemacht ist, wenn von Begriffsumfängen die Rede gewesen ist. Die ganze leibniz-boolesche rechnende Logik beruht darauf. Man könnte diese Umsetzung vielleicht für unwichtig oder gar für entbehrlich halten. Dem gegenüber erinnere ich daran, dass ich in meinen Grundlagen der Arithmetik die Anzahl als Umfang eines Begriffes definirt und schon damals darauf hingewiesen

---

[34] Wir nennen nun das auf eine Höhlung mit einem **deutschen Buchstaben** Folgende, das mit eben dieser Höhlung zusammen den Namen des Wahrheitswerthes dafür bildet, dass der Werth der zugehörigen Function für jedes Argument das Wahre sei, das **Gebiet** des über der Höhlung stehenden deutschen Buchstaben. Die **zugehörige** Function wird nun durch die Regel bestimmt:

1. Alle Stellen, an denen ein deutscher Buchstabe in seinem Gebiet, jedoch weder in einem eingeschlossenen Gebiete desselben Buchstaben noch über einer Höhlung vorkommt, sind verwandte Argumentstellen, und zwar die der zugehörigen Function.

[35] Ich fasse darum die wagerechten Striche links und rechts von der Höhlung in ‚$\forall \mathfrak{a}$‘ als **Wagerechte** in unserm besondern Sinne des Wortes auf, sodass wir mit **Verschmelzung** der Wagerechten von den Formen ‚— $(\forall \mathfrak{a}\, [\Phi(\mathfrak{a})])$‘ und ‚$\forall \mathfrak{a}\, [(\text{—}\, \Phi(\mathfrak{a}))]$‘ sogleich übergehen zu ‚$\forall \mathfrak{a}\, [\Phi(\mathfrak{a})]$‘.

[#10] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#11] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

habe, dass auch die negativen, irrationalen, kurz alle Zahlen als Umfänge von Begriffen zu definiren sind. Wir können für einen Werthverlauf ein einfaches Zeichen setzen, und so wird z. B. der Name der Anzahl Null eingeführt werden. In ‚$\forall\mathfrak{a}\,[\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})]$' dagegen können wir nicht für ‚$\Phi(\mathfrak{a})$' ein einfaches Zeichen setzen, weil der Buchstabe ‚$\mathfrak{a}$' immer in dem vorkommen muss, was etwa für ‚$\Phi(\mathfrak{a})$' gesetzt wird.

Die Umwandlung der Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Werthverlaufsgleichheit muss auch in unsern Zeichen ausführbar sein. So schreibe ich z. B. für

$$‚\,\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{a} = \mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{a}-1)]\,‘$$

$$‚\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon^2 - \varepsilon) = \mathrm{ext}\,\alpha\,(\alpha\cdot(\alpha-1))\,‘,$$

indem ich unter ‚$\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon^2-\varepsilon)$'den Werthverlauf der Function $\xi^2-\xi$, unter | ‚$\mathrm{ext}\,\alpha\,(\alpha\cdot(\alpha-1))$'den Werthverlauf der Function $\xi\cdot(\xi-1)$ verstehe. Ebenso ist $\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon^2=4)$ der Werthverlauf der Function $\xi^2 = 4$, oder, wie wir auch sagen können, der Umfang des Begriffes *Quadratwurzel aus Vier*. S.15

Wenn ich allgemein sage:

es bedeute

$$‚\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon))\,‘$$

den Werthverlauf der Function $\Phi(\xi)$,

so bedarf dies ebenso einer Ergänzung, wie oben unsere Erklärung von ‚$\forall\mathfrak{a}\,[\Phi(\mathfrak{a})]$'. Es fragt sich nämlich, welche Function in jedem Falle als **zugehörige** Function $\Phi(\xi)$ anzusehen sei. Dass $\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon^2-\varepsilon)$ der Werthverlauf der Function $\xi^2-\xi$ und nicht von $\xi^2-\varepsilon$ noch von $\varepsilon^2-\xi$ ist, versteht sich von selbst, weil bei unserer Verwendungsweise der **kleinen griechischen Vokalbuchstaben** weder ‚$\xi^2-\varepsilon$' noch ‚$\varepsilon^2-\xi$' für irgendeinen Gegenstand, dessen Name für ‚ξ' eingesetzt würde, eine Bedeutung gewänne, oder, wie wir dafür auch sagen können, weil jene Zeichenverbindungen keine Functionen bedeuten, sondern getrennt von dem ‚$\mathrm{ext}\,\varepsilon\,()$' bedeutungslos sind. Eine Zeichenverbindung wie ‚$\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\Psi(\varepsilon, \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\mathrm{X}(\varepsilon))))$' muss ähnlich wie in § 8 ‚$\forall\mathfrak{a}\,[\Psi(\mathfrak{a}, \forall\mathfrak{a}\,[\mathrm{X}(\mathfrak{a})])]$' beurtheilt werden. ■→Die Stelle hinter dem Werthverlaufszeichen ist ebensowenig eine **Argumentstelle** wie die hinter dem Allquantor. Nennen wir das auf einen **kleinen griechischen Vokalbuchstaben** mit dem Werthverlaufszeichen Folgende, das mit diesem zusammen den Namen des Werthverlaufs der **zugehörigen** Function bildet, das **Gebiet** dieses griechischen Buchstaben, so können wir die Regel aufstellen:

1. Alle Stellen, an denen ein kleiner griechischer Vokalbuchstabe in seinem Gebiete, jedoch weder in einem eingeschlossenen Gebiete desselben Buchstaben noch hinter einem Werthverlaufszeichen vorkommt, sind verwandte Argumentstellen, und zwar die der zugehörigen Function.

Diese wird hierdurch bestimmt.←■[36] [#12] Demnach ist $\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon^2-\varepsilon))$ der Werthverlauf der Function $\xi = \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon^2-\varepsilon)$, und es ist $\mathrm{ext}\,\alpha\,(\alpha = \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon=\alpha))$ der Werthverlauf der Function $\xi = \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon=\xi)$. Für die Bildung eines Werthverlaufnamens gilt also die Regel:

2. Wenn in dem Namen einer Function schon kleine griechische Vokalbuchstaben vorkommen, in deren Gebieten Argumentstellen dieser Function liegen, so wähle man

[36]Die Stelle unter dem Spiritus lenis ist ebensowenig eine **Argumentstelle** wie die über der Höhlung. Nennen wir das auf einen **kleinen griechischen Vokalbuchstaben** mit dem Spiritus lenis Folgende, das mit diesem zusammen den Namen des Werthverlaufs der **zugehörigen** Function bildet, das **Gebiet** dieses griechischen Buchstaben, so können wir die Regel aufstellen:

1. Alle Stellen, an denen ein kleiner griechischer Vokalbuchstabe in seinem Gebiete, jedoch weder in einem eingeschlossenen Gebiete desselben Buchstaben noch mit dem Spiritus lenis vorkommt, sind verwandte Argumentstellen, und zwar die der zugehörigen Function.

Diese wird hierdurch bestimmt.

[#12]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

einen von diesen verschiedenen, um den Namen des Werthverlaufs dieser Function zu bilden.

Nach unsern Bestimmungen ist im Allgemeinen ein **kleiner griechischerVokalbuchstabe** so gut wie ein anderer, jedoch mit der Beschränkung, dass die Verschiedenheit dieser Buchstaben wesentlich sein kann.

S.16 Die Einführung der Bezeichnung für die Werthverläufe scheint mir | eine der folgenreichsten Ergänzungen meiner Begriffsschrift zu sein, die ich seit meiner ersten Veröffentlichung über diesen Gegenstand gemacht habe. Hiermit ist zugleich der Umkreis dessen erweitert, was als Argument einer Function auftreten kann. Es ist z.B. $\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon^2 - \varepsilon) = \mathrm{ext}\,\alpha\,(\alpha\cdot(\alpha-1))$ der Werth der Function $\xi = \mathrm{ext}\,\alpha\,(\alpha\cdot(\alpha-1))$ für das Argument $\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon^2-\varepsilon)$.

§ 10. Dadurch, dass wir die Zeichenverbindung ‚$\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon)) = \mathrm{ext}\,\alpha\,(\Psi(\alpha))$‘ als gleichbedeutend mit ‚$\forall\mathfrak{a}\,[\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})]$‘ hingestellt haben, ist freilich die Bedeutung eines Namens wie ‚$\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon))$‘ noch keineswegs vollständig festgestellt. Wir haben nur ein Mittel, einen Werthverlauf immer wiederzuerkennen, wenn er durch einen Namen wie ‚$\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon))$‘ bezeichnet ist, durch welchen er schon als Werthverlauf erkennbar ist. Aber weder können wir bis jetzt entscheiden, ob ein Gegenstand, der uns nicht als solcher gegeben ist, ein Werthverlauf sei, und welcher Function er etwa zugehöre, noch können wir im Allgemeinen entscheiden, ob ein gegebener Werthverlauf eine gegebene Eigenschaft habe, wenn wir nicht wissen, dass diese Eigenschaft verbunden sei mit einer Eigenschaft der zugehörigen Function. Nehmen wir an, es sei

$$\mathrm{X}(\xi)$$

eine Function, welche niemals denselben Werth für verschiedene Argumente erhält, so gilt für die Gegenstände, deren Namen die Form ‚$\mathrm{X}(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon)))$‘ haben, ganz dasselbe Kennzeichen zur Wiedererkennung wie für die Gegenstände, deren Zeichen die Form ‚$\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon))$‘ haben. Es ist dann nämlich auch ‚$\mathrm{X}(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon))) = \mathrm{X}(\mathrm{ext}\,\alpha\,(\Psi(\alpha)))$‘ gleichbedeutend mit ‚$\forall\mathfrak{a}\,[\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})]$‘[37]. Hieraus geht hervor, dass durch die Gleichsetzung der Bedeutung von ‚$\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon)) = \mathrm{ext}\,\alpha\,(\Psi(\alpha))$‘ mit der von ‚$\forall\mathfrak{a}\,[\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})]$‘ die Bedeutung eines Namens wie ‚$\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon))$‘ keineswegs völlig bestimmt ist, wenigstens, wenn es eine solche Function $\mathrm{X}(\xi)$ giebt, deren Werth für einen Werthverlauf als Argument diesem selbst nicht immer gleich ist. Wie wird nun diese Unbestimmtheit aufgehoben? Dadurch, dass für jede Function bei ihrer Einführung bestimmt wird, welche Werthe sie für Werthverläufe als Argumente erhält, ebenso wie für alle andern Argumente. Thun wir dies für die bisher betrachteten Functionen! Es sind folgende:

$$\xi = \zeta,$$
$$—\xi,$$
$$\neg\ \xi.$$

Die letzte kann ausser Betracht bleiben, da als ihr Argument immer ein Wahrheitswerth betrachtet werden kann. Es macht ja bei ihr keinen Unterschied, ob man als Argument einen Gegenstand nimmt oder den Werth, den die Function $—\xi$ für diesen Gegenstand als Argument hat. Wir können nun noch die Function $—\xi$ auf die Function $\xi = \zeta$ zurückführen. Nach unsern Festsetzungen hat nämlich die Function $\xi = (\xi = \xi)$ für jedes Argument denselben Werth wie die Function $—\xi$; denn der Werth der Function $\xi = \xi$ ist für jedes
S.17 Argument das Wahre. Daraus folgt, dass | der Werth der Function $\xi = (\xi = \xi)$ nur für das Wahre als Argument das Wahre ist, und dass er für alle andern Argumente das Falsche ist, grade wie bei der Function $—\xi$. Nachdem so Alles auf die Betrachtung der Function

[37] Damit ist nicht gesagt, dass der Sinn derselbe sei.

$\xi = \zeta$ zurückgeführt ist, fragen wir, welche Werthe diese habe, wenn ein Werthverlauf als Argument auftritt. Da wir bisher nur die Wahrheitswerthe und Werthverläufe als Gegenstände eingeführt haben, so kann es sich nur darum handeln, ob einer der Wahrheitswerthe etwa ein Werthverlauf sei. Wenn das nicht der Fall ist, so ist damit auch entschieden, dass der Werth der Function $\xi = \zeta$ immer das Falsche ist, wenn als eins ihrer Argumente ein Wahrheitswerth und als anderes ein Werthverlauf genommen wird. Wenn andrerseits das Wahre zugleich der Werthverlauf der Function $\Phi(\xi)$ ist, so ist damit auch entschieden, was der Werth der Function $\xi = \zeta$ in allen Fällen ist, wo als eins der Argumente das Wahre genommen wird, und ähnlich so verhält es sich, wenn das Falsche zugleich der Werthverlauf einer gewissen Function ist. Die Frage nun, ob einer der Wahrheitswerthe ein Werthverlauf sei, kann unmöglich daraus entschieden werden, dass ‚$\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon)) = \mathrm{ext}\,\alpha\,(\Psi(\alpha))$' dieselbe Bedeutung haben soll wie ‚$\forall\mathfrak{a}\,[\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})]$'. Es ist möglich, allgemein festzusetzen, dass ‚ext' $\eta\,(\Phi(\eta)) =$ ext' $\alpha\,(\Psi(\alpha))$' dasselbe bedeuten solle wie ‚$\forall\mathfrak{a}\,[\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})]$', ohne dass daraus die Gleichheit von $\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon))$ und ext' $\eta\,(\Phi(\eta))$ erschlossen werden kann. Wir hätten dann etwa eine Klasse von Gegenständen, die Namen von der Form ‚ext' $\eta\,(\Phi(\eta))$' hätten und für deren Unterscheidung und Wiedererkennung dasselbe Kennzeichen gälte wie für die Werthverläufe. Wir könnten nun die Function $\mathrm{X}(\xi)$ dadurch bestimmen, dass wir sagten, ihr Werth solle das Wahre sein für ext' $\eta\,(\Lambda(\eta))$ als Argument und er solle ext' $\eta\,(\Lambda(\eta))$ sein für das Wahre als Argument; der Werth der Function $\mathrm{X}(\xi)$ solle ferner das Falsche sein für das Argument ext' $\eta\,(\mathrm{M}(\eta))$ und er solle ext' $\eta\,(\mathrm{M}(\eta))$ sein für das Falsche als Argument; für jedes andere Argument solle der Werth der Function $\Phi(\xi)$ mit diesem selbst zusammenfallen. Wenn nun die Functionen $\Lambda(\xi)$ und $\mathrm{M}(\xi)$ nicht immer für dasselbe Argument denselben Werth haben, so hat unsere Function $\mathrm{X}(\xi)$ für verschiedene Argumente nie denselben Werth, und daher ist dann auch ‚$\mathrm{X}($ext' $\eta\,(\Phi(\eta))) = \mathrm{X}($ext' $\alpha\,(\Psi(\alpha)))$' immer gleichbedeutend mit ‚$\forall\mathfrak{a}\,[\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})]$'. Die Gegenstände, deren Namen die Form ‚$\mathrm{X}($ext' $\eta\,(\Phi(\eta)))$' hätten, würden dann also durch dasselbe Mittel wiedererkannt wie die Werthverläufe, und es wäre $\mathrm{X}($ext' $\eta\,(\Lambda(\eta)))$ das Wahre und $\mathrm{X}($ext' $\eta\,(\mathrm{M}(\eta)))$ das Falsche. Ohne also mit der Gleichsetzung von ‚$\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon)) = \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\Psi(\varepsilon))$' mit ‚$\forall\mathfrak{a}\,[\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})]$' in Widerspruch zu gerathen, ist es immer möglich zu bestimmen, dass ein beliebiger Werthverlauf das Wahre und ein beliebiger anderer das Falsche sein solle. Setzen wir demnach fest, dass $\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(-\!\!-\varepsilon)$ das Wahre und dass $\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = (\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{a} = \mathfrak{a}]))$ das Falsche sein solle! $\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(-\!\!-\varepsilon)$ ist der Werthverlauf der Function $-\!\!-\xi$, deren Werth nur dann das Wahre ist, wenn das Argument das Wahre ist, und deren Werth für alle andern Argumente das Falsche ist. Alle Functionen, von denen dies gilt, haben | denselben Werthverlauf und dieser ist nach unserer Festsetzung das Wahre. Demnach ist $-\!\!-\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon))$ nur dann das Wahre, wenn die Function $\Phi(\xi)$ ein Begriff ist, unter den nur das Wahre fällt; in allen andern Fällen ist $-\!\!-\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon))$ das Falsche. Ferner ist $\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = (\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{a} = \mathfrak{a}]))$ der Werthverlauf der Function $\xi = (\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{a} = \mathfrak{a}])$, deren Werth nur dann das Wahre ist, wenn das Argument das Falsche ist, und deren Werth für alle andern Argumente das Falsche ist. Alle Functionen, von denen dies gilt, haben denselben Werthverlauf, und dieser ist nach unserer Festsetzung das Falsche. Jeder Begriff also, unter den das Falsche und nur dieses fällt, hat als Begriffsumfang das Falsche[38]. S.18

[38]Es liegt nahe, unsere Festsetzung so zu verallgemeinern, dass jeder Gegenstand als Werthverlauf aufgefasst werde, nämlich als Umfang eines Begriffes, unter den er als einziger Gegenstand fällt. Ein Begriff, unter den der Gegenstand Δ als einziger fällt, ist $\Delta = \xi$. Wir versuchen die Festsetzung: es sei $\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\Delta = \varepsilon)$ dasselbe wie Δ. Eine solche ist für jeden Gegenstand möglich, der uns unabhängig von Werthverläufen gegeben ist, aus demselben Grunde, den wir bei den Wahrheitswerthen gesehen haben. Aber ehe wir diese Festsetzung allgemein machen dürfen, fragt es sich, ob sie nicht in Widerspruch mit unserm Wiedererkennungszeichen der Werthverläufe stehe, wenn wir für Δ einen Gegenstand nehmen, der uns schon als Werthverlauf gegeben ist. Es geht nämlich nicht an, sie nur für solche Gegenstände gelten zu lassen, welche uns nicht als Werthverläufe gegeben sind, weil die Weise wie ein Gegenstand gegeben ist, nicht als dessen unveränderliche Eigenschaft angesehen werden darf, sintemal derselbe Gegenstand in verschiedener Weise gegeben werden kann. Setzen wir also für ‚Δ' ‚$\mathrm{ext}\,\alpha\,(\Phi(\alpha))$' ein, so erhalten

Wir haben hiermit die **Werthverläufe** so weit bestimmt, als es hier möglich ist. Erst wenn es sich ferner darum handeln sollte, eine Function einzuführen, welche auf die bisher bekannten Functionen nicht ganz zurückführbar ist, können wir festsetzen, welche Werthe sie für Werthverläufe als Argumente haben solle; und dies kann dann ebenso wohl als eine Bestimmung der Werthverläufe wie jener Function angesehen werden.

§ 11. In der That bedürfen wir noch solcher Functionen. Wenn sich die Gleichsetzung von ‚$\text{ext}\,\varepsilon\,(\Delta = \varepsilon)$' mit ‚$\Delta$' allgemein hätte aufrecht erhalten lassen[39], so hätten wir in der
S.19 Form ‚$\text{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon))$' einen Ersatz für den | bestimmten Artikel der Sprache. Angenommen nämlich, es wäre $\Phi(\xi)$ ein Begriff, unter den der Gegenstand Δ und nur dieser fiele, so wäre $\forall \mathfrak{a}\,[\Phi(\mathfrak{a}) = (\Delta = \mathfrak{a})]$ das Wahre und mithin wäre auch $\text{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon)) = \text{ext}\,\varepsilon\,(\Delta = \varepsilon)$ das Wahre und zufolge unserer Gleichsetzung von ‚$\text{ext}\,\varepsilon\,(\Delta = \varepsilon)$' und ‚$\Delta$' wäre $\text{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon))$ dasselbe wie Δ; d. h. in dem Falle, dass $\Phi(\xi)$ ein Begriff ist, unter den ein und nur ein Gegenstand fällt, bezeichnete ‚$\text{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon))$' diesen Gegenstand. Dies ist nun freilich nicht möglich, weil jene Gleichsetzung in ihrer Allgemeinheit fallen gelassen werden musste; aber wir können uns helfen, indem wir die Function

$$\text{℩}\xi$$

mit der Bestimmung einführen, dass zwei Fälle unterschieden werden:

1) wenn es zu dem Argumente einen Gegenstand Δ der Art giebt, dass $\text{ext}\,\varepsilon\,(\Delta = \varepsilon)$ das Argument ist, so sei der Werth der Function $\text{℩}\xi$ Δ selbst;
2) wenn es zu dem Argumente keinen Gegenstand Δ der Art giebt, dass $\text{ext}\,\varepsilon\,(\Delta = \varepsilon)$ das Argument ist, so sei das Argument selbst der Werth der Function $\text{℩}\xi$.

Danach ist $\text{℩}\text{ext}\,\varepsilon\,(\Delta = \varepsilon) = \Delta$ das Wahre, und es bedeutet ‚$\text{℩}\text{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon))$' dann den unter den Begriff $\Phi(\xi)$ fallenden Gegenstand, wenn $\Phi(\xi)$ ein Begriff ist, unter den ein und nur ein Gegenstand fällt; in allen andern Fällen bedeutet ‚$\text{℩}\text{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon))$' dasselbe wie ‚$\text{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon))$'. So ist z. B. $2 = \text{℩}\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon + 3 = 5)$ das Wahre, weil 2 der einzige Gegenstand ist, der unter den Begriff

was um 3 *vermehrt* 5 *ergiebt*

fällt — eine geeignete Definition des Pluszeichens dabei vorausgesetzt —. Es ist $\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon^2 = 1) = \text{℩}\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon^2 = 1)$ das Wahre, weil unter den Begriff *Quadratwurzel aus* 1 nicht nur ein einziger Gegenstand fällt. Es ist $\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon) = \text{℩}\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon)$ das Wahre, weil unter

---

wir

$$‚\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{ext}\,\alpha\,(\Phi(\alpha)) = \varepsilon) = \text{ext}\,\alpha\,(\Phi(\alpha))\text{ '}$$

und dies wäre gleichbedeutend mit

$$‚\, \forall \mathfrak{a}\,[(\text{ext}\,\alpha\,(\Phi(\alpha)) = \mathfrak{a}) = \Phi(\mathfrak{a})]\text{ ',}$$

was aber nur dann das Wahre bedeutet, wenn $\Phi(\xi)$ ein Begriff ist, unter den nur ein einziger Gegenstand, nämlich $\text{ext}\,\alpha\,(\Phi(\alpha))$ fällt. Da dies nicht nothwendig ist, so kann unsere Festsetzung in ihrer Allgemeinheit nicht aufrecht erhalten bleiben.

Die Gleichung ‚$\text{ext}\,\varepsilon\,(\Delta = \varepsilon) = \Delta$', mit der wir jene Festsetzung versuchten, ist ein besonderer Fall von ‚$\text{ext}\,\varepsilon\,(\Omega(\varepsilon, \Delta)) = \Delta$', und man kann fragen, wie die Function $\Omega(\xi, \zeta)$ beschaffen sein müsse, damit allgemein bestimmt werden dürfe, es solle Δ dasselbe sein wie $\text{ext}\,\varepsilon\,(\Omega(\varepsilon, \Delta))$. Dann muss auch

$$\text{ext}\,\varepsilon\,(\Omega(\varepsilon, \text{ext}\,\alpha\,(\Phi(\alpha)))) = \text{ext}\,\alpha\,(\Phi(\alpha))$$

das Wahre sein, mithin auch

$$\forall \mathfrak{a}\,[\Omega(\mathfrak{a}, \text{ext}\,\alpha\,(\Phi(\alpha))) = \Phi(\mathfrak{a})],$$

was auch $\Phi(\xi)$ für eine Function sei. Eine Function von dieser Eigenschaft werden wir später in $\xi \mathbin{\text{ə}} \zeta$ kennen lernen; aber wir werden sie mit Hilfe des Werthverlaufs definiren, sodass sie uns hier nichts nützen kann.

[39] Vergl. Anm. 1.

den Begriff *sich selbst ungleich* kein Gegenstand fällt. Es ist $\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon + 3) = \imath\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon + 3)$, weil die Function $\xi + 3$ kein Begriff ist.

Hierin haben wir einen Ersatz für den bestimmten Artikel der Sprache, der dazu dient, aus Begriffswörtern Eigennamen zu bilden. Wir bilden z. B. aus den Worten

‚positive Quadratwurzel aus 2',

die einen Begriff bedeuten, den Eigennamen

‚die positive Quadratwurzel aus 2'.

Hier ist eine logische Gefahr. Denn wenn wir aus den Worten ‚Quadratwurzel aus 2' den Eigennamen ‚die Quadratwurzel aus 2' bilden wollten, begingen wir einen logischen Fehler, weil dieser Eigenname ohne weitere Festsetzung zweideutig[40] und eben darum bedeutungslos wäre. Wenn es keine Irrationalzahlen gäbe, was ja behauptet worden ist, so wäre auch der Eigenname ‚die positive Quadratwurzel aus 2' bedeutungslos, wenigstens | dem unmittelbaren Wortsinne nach, ohne besondere Festsetzung. Und gäben wir diesem Eigennamen eigens eine Bedeutung, so hätte diese keinen Zusammenhang mit seiner Bildung, und es dürfte nicht geschlossen werden, dass sie eine positive Quadratwurzel aus 2 wäre, und doch wären wir nur zu geneigt, das zu folgern. Diese Gefahr des bestimmten Artikels ist hier nun ganz vermieden, da ‚$\imath\text{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon))$' immer eine Bedeutung hat, mag nun die Function $\Phi(\xi)$ kein Begriff sein, oder ein Begriff, unter den mehr als ein oder kein Gegenstand fällt, oder mag sie ein Begriff sein, unter den ein und nur ein Gegenstand fällt. S.20

§ 12. Um nun die Unterordnung der Begriffe und andere wichtige Beziehungen bezeichnen zu können, führe ich die Function mit zwei Argumenten

$$\zeta \to \xi$$

durch die Bestimmung ein, dass ihr Werth das Falsche sein soll, wenn als ζ-Argument das Wahre und als ξ-Argument irgendein Gegenstand genommen wird, der nicht das Wahre ist; dass in allen andern Fällen der Functionswerth das Wahre sein soll. Nach dieser und den früheren Festsetzungen ist der Werth dieser Function auch für Werthverläufe als Argumente bestimmt. ■→Es folgt, dass

$$\Delta \to \Gamma$$

dasselbe ist wie

$$—((—\Delta) \to (—\Gamma)),$$

und wir können daher in

$$‚\ \Delta \to \Gamma\ '$$

die wagerechten Striche weglassen. Wir sprechen hier wie früher von der **Verschmelzung**

[40] Ich nehme dabei als zugestanden an, dass es negative und irrationale Zahlen gebe.

der Wagerechten. Den Pfeil nenne ich **Bedingungspfeil**.←■[41] [#13]

Es gelten die Sätze

$$‚\ \vdash 3 > 2 \rightarrow 3^2 > 2\ ‘,$$

$$‚\ \vdash 2 > 2 \rightarrow 2^2 > 2\ ‘;$$

$$‚\ \vdash 1 > 2 \rightarrow 1^2 > 2\ ‘.$$

Die Function $\neg\ (\zeta \rightarrow \xi)$ oder $\neg\ \ \zeta \rightarrow \xi$ hat als Werth immer das Wahre, wenn die Function
S.21 $\zeta \rightarrow \xi$ als Werth das Wahre hat und umgekehrt. Also ist $\neg\ (\Delta \rightarrow \Gamma)\ |$ dann und nur dann das Wahre, wenn Δ das Wahre und Γ nicht das Wahre ist. Folglich

$$\vdash \neg\ (2 + 3 = 5 \rightarrow 2 > 3),$$

in Worten: 2 ist nicht grösser als 3 **und** die Summe von 2 und 3 ist 5.

$$\vdash \neg\ (2 + 3 = 5 \rightarrow \neg\ 3 > 2),$$

in Worten: 3 ist grösser als 2 **und** die Summe von 2 und 3 ist 5. $\neg\ (2 + 3 = 5 \rightarrow \neg\ 3 > 2)$ ist nämlich der Werth der Function $\neg\ (\zeta \rightarrow \xi)$ für das ξ-Argument $\neg\ 3 > 2$ und das ζ-Argument $2 + 3 = 5$.

$$\vdash \neg\ (\neg\ 1^2 = 2^1 \rightarrow 2^3 = 3^2),$$

in Worten: **weder** ist die dritte Potenz von 2 die zweite Potenz von 3, **noch** ist die zweite Potenz von 1 die erste Potenz von 2.

Statt der Sätze

$$‚\ \vdash \neg\ 3 < 3 \rightarrow 3^2 > 3\ ‘,$$

$$‚\ \vdash \neg\ 2 < 3 \rightarrow 2^2 > 3\ ‘,$$

$$‚\ \vdash \neg\ 1 < 3 \rightarrow 1^2 > 3\ ‘$$

hat man die folgenden

$$‚\ \vdash \neg\ \neg\ (\neg\ 3 < 3 \rightarrow 3^2 > 3)\ ‘,$$

$$‚\ \vdash \neg\ \neg\ (\neg\ 2 < 3 \rightarrow 2^2 > 3)\ ‘,$$

$$‚\ \vdash \neg\ \neg\ (\neg\ 1 < 3 \rightarrow 1^2 > 3)\ ‘.$$

Da nun $\neg\ (\neg\ 1 < 3 \rightarrow 1^2 > 3)$ der Wahrheitswerth davon ist, dass weder das Quadrat von 1 grösser als 3, noch 1 kleiner als 3 sei, so wird durch unsern letzten Satz dies verneint, also behauptet, mindestens eins von beiden sei wahr, dass das Quadrat von 1 grösser als 3 **oder** dass 1 kleiner als 3 sei. Man sieht aus diesen Beispielen, wie das ‚**und**‘ der Sprache, wenn es Sätze verbindet, das ‚**weder — noch**‘ und das ‚**oder**‘ zwischen Sätzen wiedergegeben werden.

---

[41] Es folgt, dass

$$\Delta \rightarrow \Gamma$$

dasselbe ist wie

$$—((—\Delta) \rightarrow (—\Gamma)),$$

und wir können daher in

$$‚\ \Delta \rightarrow \Gamma\ ‘$$

den wagerechten Strich vor ‚Δ‘ sowie die beiden Theile, in die der obere wagerechte Strich durch den senkrechten zerlegt wird, als **Wagerechte** in unserm besondern Sinne auffassen. Wir sprechen hier wie früher von der **Verschmelzung der Wagerechten**. Den senkrechten Strich nenne ich **Bedingungsstrich**. Er kann nach Bedürfniss verlängert werden.

[#13] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

In ‚$\Delta \to \xi$‘ kann für ‚ξ‘ irgendein Eigenname eingesetzt werden, also auch z. B. ‚$\Lambda \to \Theta$‘. ■→ Wir erhalten so

$$,\ \Delta \to (\Lambda \to \Theta)\quad `.$$

←■[42] [#14] | Dies bedeutet das Falsche, wenn Δ das Wahre und $\Lambda \to \Theta$ nicht das Wahre ist; S.22
d. h. in diesem Falle, wenn $\Lambda \to \Theta$ das Falsche ist. Das ist aber dann und nur dann der Fall, wenn Λ das Wahre und Θ nicht das Wahre ist. Demnach ist

$$\Delta \to (\Lambda \to \Theta)$$

das Falsche, wenn Δ und Λ das Wahre sind, während Θ nicht das Wahre ist; in allen andern Fällen ist es das Wahre. Hieraus folgt die Vertauschbarkeit von Λ und Δ: es ist

$$\Delta \to (\Lambda \to \Theta)$$

derselbe Wahrheitswerth wie

$$\Lambda \to (\Delta \to \Theta).$$

■→ Es mögen in

$$,\ \Lambda \to (\Delta \to \Theta)\ `$$

‚Θ‘ **Hinterglied**, ‚Δ‘ und ‚Λ‘ **Vorderglieder** heissen. Wir können aber auch ‚$(\Delta \to \Theta)$‘ als **Hinterglied** und ‚Λ‘ allein als **Vorderglied** auffassen. Die Vorderglieder sind demnach **vertauschbar**.←■[43] [#15] Ebenso erkennt man, dass

$$\Xi \to (\Delta \to (\Lambda \to \Theta))$$

dann und nur dann das Falsche ist, wenn sowohl Λ, als auch Δ, als auch Ξ das Wahre ist, während Θ nicht das Wahre ist. In allen andern Fällen ist es das Wahre. Wir haben auch hier wieder die ■→**Vertauschbarkeit der Vorderglieder**←■[44] [#16]‚— Λ‘, ‚— Δ‘, ‚— Ξ‘. Diese Vertauschbarkeit muss eigentlich für jeden vorkommenden Fall nachgewiesen werden, und ich habe dies in meinem Büchlein „Begriffsschrift“ für einige Fälle gethan, sodass es leicht sein wird, danach jeden Fall zn behandeln. Um nicht in zu grosse Weitläufigkeiten verstrickt zu werden, will ich hier diese Vertauschbarkeit als allgemein zugestanden annehmen und in Zukunft ohne weitere Erinnerung davon Gebrauch machen. | S.23

$$\neg\ (\Xi \to (\Delta \to (\Lambda \to \Theta)))$$

ist dann und nur dann das Wahre, wenn sowohl Λ, als auch Δ, als auch Ξ das Wahre ist, während Θ nicht das Wahre ist. Demnach

$$\vdash \neg\ (4 > 2 \to (3 > 2 \to (1 < 2 \to 3 < 2))),$$

in Worten: 3 ist nicht kleiner als 2 und 1 ist kleiner als 2 und 3 ist grösser als 2 und 4 ist

---

[42] Wir erhalten so

$$,\ \Delta \to (\Lambda \to \Theta)\quad `,$$

wo wir nun die Wagerechten **verschmelzen** können:

$$,\ \Delta \to (\Lambda \to \Theta)\ `.$$

[43] Es mögen in

$$,\ \Lambda \to (\Delta \to \Theta)\ `$$

‚— Θ‘ **Oberglied**, ‚— Δ‘ und ‚— Λ‘ **Unterglieder** heissen. Wir können aber auch ‚$\Delta \to \Theta$‘ als **Oberglied** und ‚— Λ‘ allein als **Unterglied** auffassen. Die Unterglieder sind demnach **vertauschbar**.

[44] **Vertauschbarkeit der Unterglieder**

[#14] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#15] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#16] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

grösser als 2;

$$\vdash \neg\ (4 > 2 \rightarrow (3 > 2 \rightarrow \neg\ 1 < 2)),$$

in Worten: 1 ist kleiner als 2 und 3 ist grösser als 2 und 4 ist grösser als 2. Man kann sich dies so zerlegt denken

$$,\ \vdash \neg\ (4 > 2 \rightarrow \neg\ (\neg\ (4 > 2 \rightarrow \neg\ 1 < 2)))\ \text{‘}$$

■→←■[45] [#17]

$$\neg\ (4 > 2 \rightarrow \neg\ \neg\ (3 > 2 \rightarrow \neg\ 1 < 2))$$

den Werth der Function $\neg\ (\zeta \rightarrow \neg\ \xi)$ für das ξ-Argument $\neg\ (3 > 2 \rightarrow \neg\ 1 < 2)$ und das ζ-Argument $4 > 2$, wo nun $\neg\ (3 > 2 \rightarrow \neg\ 1 < 2)$ der Werth derselben Function für das ξ-Argument $1 < 2$ und das ζ-Argument $3 > 2$ ist.

§ 13. ■→Um die Benennung ‚Bedingungspfeil‘ zu rechtfertigen, weise ich darauf hin,←■[46] [#18] dass die Namen ‚$3 > 2 \rightarrow 3^2 > 2$‘, ‚$2 > 2 \rightarrow 2^2 > 2$‘, ‚$1 > 2 \rightarrow 1^2 > 2$‘ aus ‚$\xi > 2 \rightarrow \xi^2 > 2$‘ dadurch hervorgehen, dass für ‚ξ‘ ‚3‘, ‚2‘, ‚1‘ gesetzt werden. Gebrauchen wir nun das Zeichen ‚$>$‘ so, dass ‚$\Gamma > \Delta$‘ das Wahre bedeutet, wenn Γ und Δ reelle Zahlen sind und Γ grösser als Δ ist, und dass in allen andern Fällen ‚$\Gamma > \Delta$‘ das Falsche bedeutet; nehmen wir ferner an, dass die Bezeichnung ‚Γ^2‘ so erklärt sei, dass sie immer eine Bedeutung habe, wenn Γ ein Gegenstand ist, so ist der Werth der Function

$$\xi > 2 \rightarrow \xi^2 > 2$$

S.24 | für jedes Argument das Wahre; also

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{a} > 2 \rightarrow \mathfrak{a}^2 > 2],$$

in Worten: **wenn** etwas grösser als 2 ist, so ist auch sein Quadrat grösser als 2. So auch

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{a}^2 = 1 \rightarrow \mathfrak{a}^4 = 1],$$

in Worten: **wenn** das Quadrat von etwas 1 ist, so ist auch dessen vierte Potenz 1. Man kann aber auch sagen: **jede** Quadratwurzel aus 1 ist auch vierte Wurzel aus 1; oder: **alle** Quadratwurzeln aus 1 sind vierte Wurzeln aus 1[47]. Hier haben wir die **Unterordnung** eines Begriffes unter einen Begriff, einen **allgemein** bejahenden Satz. Wir haben Begriff eine Function mit einem Argumente genannt, deren Werth immer ein Wahrheitswerth ist. Solche Functionen sind hier $\xi^4 = 1$ und $\xi^2 = 1$; diese ist der **untergeordnete**, jene der **übergeordnete** Begriff. Aus diesen Begriffen als Merkmalen ist $\neg\ (\xi^2 = 1 \rightarrow \neg\ \xi^4 = 1)$ zusammengesetzt. Unter diesen Begriff fällt z. B. die Zahl $—1$:

$$\vdash \neg\ ((—1)^2 = 1 \rightarrow \neg\ (—1)^4 = 1),$$

in Worten: $—1$ ist Quadratwurzel aus 1 und vierte Wurzel aus 1. Wir haben in § 8 gesehen, wie das ‚es giebt‘ der Wortsprache wiedergegeben wird. Wir wenden das an, um auszudrücken, dass es etwas giebt, was Quadratwurzel aus 1 und vierte Wurzel aus 1 ist: $\vdash \neg\ \forall \mathfrak{a}\, [\neg\ \neg\ (\mathfrak{a}^2 = 1 \rightarrow \neg\ \mathfrak{a}^4 = 1)]$. ■→Offenbar heben sich hier zwei Verneinungszeichen gegenseitig auf:←■[48] [#19]$\vdash \neg\ \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{a}^2 = 1 \rightarrow \neg\ \mathfrak{a}^4 = 1]$. Betrachten wir dies noch

[45] Die Verneinungsstriche zwischen den Bedingungsstrichen heben sich und die Wagerechten lassen sich verschmelzen. Wir haben in

[46] Um die Benennung ‚Bedingungsstrich‘ zu rechtfertigen, weise ich darauf hin,

[47] Man verbindet hiermit leicht den Nebengedanken, dass es etwas gebe, was Quadratwurzel aus 1 sei. Dieser muss hier ganz fern gehalten werden. Ebenso ist hier der Nebengedanke abzuwehren, dass es mehr als eine Quadratwurzel aus 1 gebe.

[48] Offenbar heben sich hier zwei Verneinungsstriche gegenseitig auf:

[#17] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#18] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#19] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

von einer andern Seite! $\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{a}^2 = 1 \rightarrow \neg\ \mathfrak{a}^4 = 1]$ ist der Wahrheitswerth davon, dass, wenn etwas Quadratwurzel aus 1 ist, es nicht vierte Wurzel aus 1 sei, oder, wie wir auch sagen können, dass **keine** Quadratwurzel aus 1 vierte Wurzel aus 1 sei. Dieser Wahrheitswerth ist das Falsche und folglich: $\vdash \neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{a}^2 = 1 \rightarrow \neg\ \mathfrak{a}^4 = 1]$. Wir haben hier die Verneinung eines **allgemein** verneinenden Satzes, d. h. einen **particulär** bejahenden Satz[49], für den wir auch sagen können: ‚**einige** Quadratwurzeln aus 1 | sind vierte Wurzeln aus 1', wobei aber S.25
die Form des Plurals nicht so verstanden werden muss, dass es gerade mehre sein müssen.

$$\vdash \neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{a}^3 = 1 \rightarrow \neg\ \mathfrak{a}^4 = 1],$$

in Worten: es giebt mindestens eine dritte Wurzel aus 1, die auch vierte Wurzel aus 1 ist; oder: **einige** — oder mindestens doch eine — dritte Wurzel aus 1 ist vierte Wurzel aus 1.

In unsern Zeichen erscheint das Sätze verbindende ‚und' weniger einfach als der Functionsname ‚$\zeta \rightarrow \xi$', wofür ein einfacher Wortausdruck fehlt. Das in der Wortsprache vorliegende Verhältniss scheint leicht das natürlichere und sachgemässere zu sein, weil es das gewohnte ist. ■→ Was aber, vom logischen Standpunkte aus betrachtet, einfacher sei, ist nicht leicht zu sagen: man kann mit ‚und' und der Verneinung unser ‚$\zeta \rightarrow \xi$' erklären, aber auch umgekehrt mit dem Functionsnamen ‚$\zeta \rightarrow \xi$' und dem Verneinungszeichen das ‚und'.←■[50] [#20] Offenbar besagt z. B. ‚$\vdash 2+2 = 4 \rightarrow 2+3 = 5$' weniger als ‚$\vdash \neg\ (2+3 = 4 \rightarrow \neg\ 2+3 = 5)$' und könnte darum für einfacher gelten. Der eigentliche Grund für die Einführung des ‚$\zeta \rightarrow \xi$' ist die Leichtigkeit und Uebersichtlichkeit, mit der sich damit das Schliessen darstellt, zu dem wir jetzt übergehn.

Schlüsse und Folgerungen.

§ 14. Aus den Sätzen ‚$\vdash \Delta \rightarrow \Gamma$' und ‚$\vdash \Delta$' kann geschlossen werden: ‚$\vdash \Gamma$'; denn, wäre Γ nicht das Wahre, so wäre, da Δ das Wahre ist, $\vdash \Delta \rightarrow \Gamma$ das Falsche. Ich werde nun jedem in Begriffsschriftzeichen aufgestellten Satze, wenn er später zu einer weitern Beweisführung gebraucht werden soll, ein **Abzeichen** geben, um ihn heranziehen zu können. Wenn nun so der Satz ‚$\vdash \Delta \rightarrow \Gamma$' das Abzeichen ‚$\alpha$' und ‚$\vdash \Delta$' das Abzeichen ‚$\beta$' erhalten hat, so schreibe

[49] Der **particulär** bejahende Satz besagt einerseits zwar weniger als der **allgemein** bejahende, andererseits aber auch, was leicht übersehen wird, mehr, da er das Erfülltsein der Begriffe behauptet, während die Unterordnung auch bei leeren Begriffen und grade bei diesen immer stattfindet. Manche Logiker scheinen die Begriffe ohne Weiteres als erfüllt anzunehmen und den sehr wichtigen Fall des leeren Begriffes ganz zu übersehen, vielleicht weil sie leere Begriffe sehr mit Uurecht nicht als berechtigt |[S.25] anerkennen. Daher kommt es, dass ich die Ausdrücke ‚Unterordnung', ‚allgemein bejahend', ‚particulär bejahend' nicht ganz in demselben Sinne gebrauche, wie jene Logiker, und zu Aussprüchen gelange, die jene mit Unrecht für falsch zu halten geneigt sein werden.

[50] Was aber, vom logischen Standpunkte aus betrachtet, einfacher sei, ist nicht leicht zu sagen: man kann mit ‚und' und der Verneinung unser ‚$\zeta \rightarrow \xi$' erklären, aber auch umgekehrt mit dem Functionsnamen ‚$\zeta \rightarrow \xi$' und dem Verneinungsstriche das ‚und'.

[#20] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

ich den Schluss entweder so

$$(\beta) :: \frac{\vdash \Delta \to \Gamma \quad `}{, \quad \vdash \Gamma}$$

mit Doppelkolon

oder so

$$(\alpha) : \frac{\vdash \Delta \quad `}{, \quad \vdash \Gamma}$$

mit einfachem Kolon.

S.26 |

Dies ist die einzige Schlussweise, die ich in meiner Begriffsschrift angewendet habe, und man kann mit ihr auch auskommen. Das Gebot der wissenschaftlichen Sparsamkeit würde nun eigentlich verlangen, es zu thun; aber dem treten praktische Gründe entgegen, denen ich hier, wo ich lange Schlussketten bilden will, etwas nachgeben muss. Es würde sich nämlich eine zu grosse Weitschweifigkeit ergeben, wenn ich nicht noch einige andere Schlussweisen zulassen wollte, was ich schon in dem Vorworte jenes meines Werkchens in Aussicht genommen habe.

Wenn uns die Sätze

$$, \vdash \Pi \to (\Lambda \to (\Delta \to \Gamma)) ` \qquad (\gamma$$

und

$$, \vdash \Delta ` \qquad (\beta$$

gegeben sind, so können wir nicht unmittelbar wie oben schliessen, ■→sondern erst, nachdem wir, von der Vertauschbarkeit der Vorderglieder Gebrauch machend,←■[51] [#21](γ) umgewandelt haben in

$$, \vdash \Delta \to (\Pi \to (\Lambda \to \Gamma)) `.$$

Um aber übermassige Weitläufigkeit zu vermeiden, schreibe ich das nicht ausdrücklich hin, sondern gleich

$$(\beta) :: \frac{\vdash \Pi \to (\Lambda \to (\Delta \to \Gamma)) \quad `}{, \quad \vdash \Pi \to (\Lambda \to \Gamma)}$$

oder

$$(\gamma) : \frac{\vdash \Delta \quad `}{, \quad \vdash \Pi \to (\Lambda \to \Gamma),}$$

■→ wo im Schlusssatze die Vorderglieder auch anders geordnet sein könnten.←■[52] [#22]

■→Wenn ein Vorderglied eines Satzes sich von einem zweiten Satze nur durch den fehlenden Urtheilstrich unterscheidet, so kann man auf einen Satz schliessen,

[51]sondern erst, nachdem wir, von der Vertauschbarkeit der Unterglieder Gebrauch machend,

[52]wo im Schlusssatze die Unterglieder auch anders geordnet sein könnten.

[#21]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#22]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

der aus dem ersten durch Unterdrückung jenes Vordergliedes hervorgeht.←■[53] [#23]

Wir ziehen auch zwei solche Schlüsse zusammen, wie aus Folgendem zu ersehen ist. Es sei noch gegeben der Satz ‚$\vdash \Lambda$ (ρ‘. Dann schreiben wir den doppelten Schluss so:

$$\begin{array}{rl} & \vdash \Pi \rightarrow (\Lambda \rightarrow (\Delta \rightarrow \Gamma)) \quad ‘ \\ (\beta, \rho) :: & \overline{\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}} \\ , & \vdash \Pi \rightarrow \Gamma \end{array}$$

§ 15. Etwas weniger einfach ist folgende Schlussweisc. Aus den beiden Sätzen

$$, \vdash \Delta \rightarrow \Gamma \text{ ‘} \qquad (\alpha$$

und

$$, \vdash \Theta \rightarrow \Delta \text{ ‘} \qquad (\delta$$

können wir auf den Satz ‚$\vdash \Theta \rightarrow \Gamma$‘ schliessen. $\vdash (\Theta \rightarrow \Gamma)$ ist nämlich nur dann das Falsche, wenn Θ das Wahre und Γ nicht das Wahre ist. Wenn aber Θ das Wahre ist, so muss auch Δ das Wahre sein, weil sonst $\Theta \rightarrow \Delta$ das Falsche wäre. Wenn aber Δ das Wahre ist und Γ nicht das Wahre | wäre, so wäre $\Delta \rightarrow \Gamma$ das Falsche. Der Fall, wo $\Theta \rightarrow \Gamma$ das Falsche wäre, findet S.27
also nicht statt und es ist $\Theta \rightarrow \Gamma$ das Wahre.

Diesen Schluss schreibe ich entweder so:

$$\begin{array}{rl} & \vdash \Delta \rightarrow \Gamma \quad ‘ \\ (\delta) :: & - - - - - - - - \\ , & \vdash \Theta \rightarrow \Gamma \end{array}$$

oder so:

$$\begin{array}{rl} & \vdash \Theta \rightarrow \Delta \quad ‘ \\ (\alpha) : & - - - - - - - - \\ , & \vdash \Theta \rightarrow \Gamma \end{array}$$

Wenn wir statt des Satzes (α) den in § 14 mit dem Abzeichen ‚γ‘ versehenen als Praemisse haben, so müssen wir eigentlich wie dort erst eine Umwandlung vor dem Schlusse vornehmen. Aber wir machen dies der Kürze halber wie oben im Kopfe und schreiben

$$\begin{array}{rl} & \vdash \Pi \rightarrow (\Lambda \rightarrow (\Delta \rightarrow \Gamma)) \quad ‘ \\ (\delta) :: & - - - - - - - - \\ , & \vdash \Pi \rightarrow (\Lambda \rightarrow (\Theta \rightarrow \Gamma)) \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{rl} & \vdash \Theta \rightarrow \Delta \quad ‘ \\ (\gamma) : & - - - - - - - - \\ , & \vdash \Pi \rightarrow (\Lambda \rightarrow (\Theta \rightarrow \Gamma)). \end{array}$$

Es ist $\neg\ \Gamma \rightarrow \neg\ \Delta$ das Falsche, wenn $\neg\ \Gamma$ das Wahre und $\neg\ \Delta$ nicht das Wahre ist; d. h. wenn —Γ das Falsche und Δ das Wahre ist. In allen andern Fällen ist $\neg\ \Gamma \rightarrow \neg\ \Delta$ das Wahre. Dasselbe gilt aber auch von $\Delta \rightarrow \Gamma$, sodass die Functionen $\neg\ \xi \rightarrow \neg\ \zeta$ und $\zeta \rightarrow \xi$ immer für dieselben Argumente denselben Werth haben. Ebenso haben die Functionen

[53] **Wenn ein Unterglied eines Satzes sich von einem zweiten Satze nur durch den fehlenden Urtheilstrich unterscheidet, so kann man auf einen Satz schliessen, der aus dem ersten durch Unterdrückung jenes Untergliedes hervorgeht.**

[#23] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

$\neg\ \xi \rightarrow \zeta$ und $\neg\ \zeta \rightarrow \xi$ für dieselben Argumente immer denselben Werth. Man führt diesen auf den vorigen Fall zurück, indem man für ‚ζ' ‚$\neg\ \zeta$' setzt ■→und unmittelbar auf einander folgende Verneinungszeichen aufhebt.←■[54] [#24] Auch die Functionen $\zeta \rightarrow \neg\ \xi$ und $\xi \rightarrow \neg\ \zeta$ haben für dieselben Argumente immer denselben Werth. Wir können also von dem Satze ‚$\vdash \Delta \rightarrow \Gamma$' zu dem Satze ‚$\vdash \neg\ \Gamma \rightarrow \neg\ \Delta$' übergehen und umgekehrt von diesem zu jenem. Wir schreiben diese Uebergänge so:

$$\vdash \Delta \rightarrow \Gamma \text{ ‘}$$

$$\times$$

$$\text{,} \vdash \neg\ \Gamma \rightarrow \neg\ \Delta$$

und

$$\vdash \neg\ \Gamma \rightarrow \neg\ \Delta \text{ ‘}$$

$$\times$$

$$\text{,} \vdash \Delta \rightarrow \Gamma$$

Ebenso auch:

$$\vdash \neg\ \Delta \rightarrow \Gamma \text{ ‘}$$

$$\times$$

$$\text{,} \vdash \neg\ \Gamma \rightarrow \Delta$$

und

$$\vdash \Delta \rightarrow \neg\ \Gamma \text{ ‘}$$

$$\times$$

$$\text{,} \vdash \Gamma \rightarrow \neg\ \Delta,$$

Fälle, die auf den ersten zurückführbar sind ■→durch Aufhebung von Verneinungszeichen.←■[55] [#25] Wir können dies in eine Regel so fassen:

> ■→ Man darf ein Vorderglied mit dem Hintergliede vertauschen, wenn man gleichzeitig die Wahrheitswerthe beider **umkehrt**.←■[56] [#26]

S.28 ■→ Wir nennen diesen Uebergang **Kontraposition**.←■[57] [#27] Es können aber auch mehre |

---

[54]und unmittelbar auf einander folgende Verneinungstriche aufhebt.

[55]durch Aufhebung von Verneinungstrichen.

[56]Man darf ein Unterglied mit dem Obergliede vertauschen, wenn man gleichzeitig die Wahrheitswerthe beider **umkehrt**.

[57]Wir nennen diesen Uebergang **Wendung**.

[#24]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#25]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#26]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#27]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

■→Vorderglieder←■[58] [#28] vorhanden sein. So haben wir den Uebergang

$$\vdash \Pi \rightarrow (\neg\ \Lambda \rightarrow (\Delta \rightarrow \Gamma)) \quad `$$

$$\times$$

$$, \vdash \Pi \rightarrow (\neg\ \Lambda \rightarrow (\neg\ \Gamma \rightarrow \neg\ \Delta)).$$

■→Indem wir von der Vertauschbarkeit der Vorderglieder stillschweigend Gebrauch machen,←■[59] [#29] können wir aber auch schreiben:

$$\vdash \Pi \rightarrow (\neg\ \Lambda \rightarrow (\Delta \rightarrow \Gamma)) \quad `$$

$$\times$$

$$, \vdash \Pi \rightarrow (\neg\ \Gamma \rightarrow (\Delta \rightarrow \Lambda)).$$

■→Durch zweimalige Kontraposition gelingt es, alle Vorderglieder in eins zusammenzufassen, wie folgt:←■[60] [#30]

$$\vdash \Pi \rightarrow (\neg\ \Lambda \rightarrow (\Delta \rightarrow \Gamma)) \quad `$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ \Gamma \rightarrow (\Pi \rightarrow (\neg\ \Lambda \rightarrow \neg\ \Delta))$$

$$\times$$

$$, \neg\ (\Pi \rightarrow (\neg\ \Lambda \rightarrow \neg\ \Delta)) \rightarrow \Gamma.$$

■→Wir fassen nämlich bei der zweiten Kontraposition

$$, \Pi \rightarrow (\neg\ \Lambda \rightarrow \neg\ \Delta)\ `$$

als Hinterglied und ,$\neg\ \Gamma$‘ als Vorderglied auf.←■[61] [#31] Nennen wir zur Abkürzung den Wahrheitswerth

$$\Pi \rightarrow (\neg\ \Lambda \rightarrow \neg\ \Delta)$$

,Θ‘! Der vorletzte Satz geht dann über in ,$\vdash \neg\ \Gamma \rightarrow \Theta$‘, woraus folgt ,$\vdash \neg\ \Theta \rightarrow \Gamma$‘. Setzen wir dann für ,$\Theta$‘ den ausführlichen Ausdruck wieder ein, so erhalten wir den Schlusssatz. Wie aus dem § 12 zu ersehen ist, haben wir in

$$\neg\ (\Pi \rightarrow (\neg\ \Lambda \rightarrow \neg\ \Delta))$$

den Wahrheitswerth davon, dass Δ das Wahre, Λ nicht das Wahre und Π das Wahre sei.

---

[58]Unterglieder

[59]Indem wir von der Vertauschbarkeit der Unterglieder stillschweigend Gebrauch machen,

[60]Durch zweimalige Wendung gelingt es, alle Unterglieder in eins zusammenzufassen, wie folgt:

[61]Wir fassen nämlich bei der zweiten Wendung

$$, \Pi \rightarrow (\neg\ \Lambda \rightarrow \neg\ \Delta)\ `$$

als Oberglied und ,$\neg\ \Gamma$‘ als Unterglied auf.

[#28]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#29]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#30]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#31]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

Nehmen wir die Sätze

$$‚\vdash \Pi \to (\Lambda \to (\Delta \to \Gamma))‘ \qquad (\gamma$$

und

$$‚\vdash \Sigma \to (\neg\ \Xi \to (\Delta \to \Lambda))‘ \qquad (\varepsilon$$

als gegeben an, so können wir so folgern: ■→wir fassen zunächst die Vorderglieder von (ε) zusammen:←■[62] [#32]

$$\vdash \Sigma \to (\neg\ \Xi \to (\Delta \to \Lambda))\quad ‘$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ \Lambda \to (\Sigma \to (\neg\ \Xi \to \neg\ \Delta))$$

$$\times$$

S.29

$$\vdash \neg\ (\Sigma \to (\neg\ \Xi \to \neg\ \Delta)) \to \Lambda$$ [63]

$$(\gamma):\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$

$$\vdash \Pi \to (\neg\ (\Sigma \to (\neg\ \Xi \to \neg\ \Delta)) \to (\Delta \to \Gamma))$$

$$\times$$

$$\vdash \Pi \to (\Delta \to (\neg\ \Gamma \to (\Sigma \to (\neg\ \Xi \to \neg\ \Delta))))$$ [64]

$$\times$$

$$‚\vdash \Pi \to (\Delta \to (\Delta \to (\Sigma \to (\neg\ \Xi \to \Gamma))))$$

Dies können wir dadurch vereinfachen, dass wir ‚Δ‘ nur einmal schreiben:

$$‚\vdash \Pi \to (\Delta \to (\Sigma \to (\neg\ \Xi \to \Gamma)))‘;$$

denn

$$\Delta \to (\Delta \to \Gamma)$$

ist immer derselbe Wahrheitswerth wie $\Delta \to \Gamma$.

■→

Ein zweimal auftretendes Vorderglied braucht nur einmal geschrieben zu werden.
Wir nennen dies die **Verschmelzung** gleicher Vorderglieder.←■[66] [#34]

---

[62] wir fassen zunächst die Unterglieder von (ε) zusammen:
[63] Wir können jetzt wie im Anfange dieses Paragraphen schliessen, da dieser Satz dieselbe Form hat wie dort (δ).
[64] ■→Wir lösen jetzt das zusammengesetzte Vorderglied wieder auf.←■[65] [#33]
[66]

Ein zweimal auftretendes Unterglied braucht nur einmal geschrieben zu werden.
Wir nennen dies die **Verschmelzung** gleicher Unterglieder.

[#32] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#34] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

Ich schreibe nun diesen Uebergang abgekürzt so:

$$\begin{array}{rl} \varepsilon & \vdash \Sigma \rightarrow (\neg\ \Xi \rightarrow (\Delta \rightarrow \Lambda)) \quad ‘ \\ (\gamma): & - - - - - - - - - \\ , & \vdash \Pi \rightarrow (\Delta \rightarrow (\Sigma \rightarrow (\neg\ \Xi \rightarrow \Gamma))) \end{array}$$

oder so:

$$\begin{array}{rl} \gamma & \vdash \Pi \rightarrow (\Lambda \rightarrow (\Delta \rightarrow \Gamma)) \quad ‘ \\ (\varepsilon) :: & - - - - - - - - - \\ , & \vdash \Pi \rightarrow (\Delta \rightarrow (\Sigma \rightarrow (\neg\ \Xi \rightarrow \Gamma))) \end{array}$$

und stelle für ihn folgende Regel auf:

■→Wenn dieselbe Zeichenverbindung in einem Satze als Hinterglied und in einem andern als Vorderglied auftritt, so kann man auf einen Satz schliessen, in welchem das Hinterglied des zweiten als Hinterglied und alle Vorderglieder beider ohne das genannte als Vorderglieder erscheinen Doch brauchen Vorderglieder, die in beiden vorkommen, nur einmal geschrieben zu werden.←■[67] [#35]

In ähnlicher Weise wie in § 14 können wir hier zwei Schlüsse zusammenziehen. Es seien z. B. ausser (ε) die Sätze

$$, \Theta \rightarrow \mathrm{P}\ ‘ \qquad (\vartheta$$

und

$$, \vdash \Pi\ ‘ \qquad (\eta$$

und

$$, \vdash \mathrm{P} \rightarrow (\Pi \rightarrow (\Lambda \rightarrow (\Delta \rightarrow \Gamma)))\ ‘ \qquad (\iota$$

gegeben, so können wir schreiben | S.30

$$\begin{array}{rl} \iota & \vdash \mathrm{P} \rightarrow (\Pi \rightarrow (\Lambda \rightarrow (\Delta \rightarrow \Gamma))) \quad ‘ \\ (\vartheta, \varepsilon) :: & = = = = = = = = \\ , & \vdash \Theta \rightarrow (\Pi \rightarrow (\Sigma \rightarrow (\neg\ \Xi \rightarrow (\Delta \rightarrow \Gamma)))) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rl} \iota & \vdash \mathrm{P} \rightarrow (\Pi \rightarrow (\Lambda \rightarrow (\Delta \rightarrow \Gamma))) \quad ‘ \\ (\vartheta, \eta) :: & \overline{= = = = = = = =} \\ , & \vdash \Theta \rightarrow (\Lambda \rightarrow (\Delta \rightarrow \Gamma)). \end{array}$$

§ 16. Nehmen wir an, es seien die Sätze

$$, \vdash \Delta \rightarrow (\Xi \rightarrow (\neg\ \Theta \rightarrow \Lambda))\ ‘ \qquad (\zeta$$

und

$$, \vdash \Sigma \rightarrow (\neg\ \Xi \rightarrow (\Delta \rightarrow \Lambda))\ ‘ \qquad (\varepsilon$$

---

[67]**Wenn dieselbe Zeichenverbindung in einem Satze als Oberglied und in einem andern als Unterglied auftritt, so kann man auf einen Satz schliessen, in welchem das Oberglied des zweiten als Oberglied und alle Unterglieder beider ohne das genannte als Unterglieder erscheinen Doch brauchen Unterglieder, die in beiden vorkommen, nur einmal geschrieben zu werden.**

[#35]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

gegeben, so können wir diesen Fall auf den eben behandelten zurückführen, und zwar so:

$$\varepsilon \quad \vdash \Sigma \rightarrow (\neg\ \Xi \rightarrow (\Delta \rightarrow \Lambda)) \quad `$$

$$\times$$

$$\vdash \Sigma \rightarrow (\neg\ \Lambda \rightarrow (\Delta \rightarrow \Xi))$$

$$(\zeta): \quad - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; -$$

$$\vdash \Sigma \rightarrow (\neg\ \Lambda \rightarrow (\Delta \rightarrow (\neg\ \Theta \rightarrow \Lambda)))$$

$$\times$$

$$\vdash \Sigma \rightarrow (\neg\ \Lambda \rightarrow (\Delta \rightarrow \Theta))$$

$$\times$$

$$, \vdash \Sigma \rightarrow (\Delta \rightarrow (\neg\ \Theta \rightarrow \Lambda)).$$

■→Diese beiden Kontrapositionen haben den Zweck, durch Verschmelzung gleicher Vorderglieder←■[68] [#36],$\neg\ \Lambda$‘ einmal wegzuschaffen. Dass $\neg\ \Lambda \rightarrow \Lambda$ immer derselbe Wahrheitswerth ist wie —Λ, kann auch unmittelbar eingesehen werden; denn es ist $\neg\ \Lambda \rightarrow \Lambda$ das Falsche, wenn $\neg\ \Lambda$ das Wahre und Λ nicht das Wahre ist, sonst das Wahre. In der letzten Bedingung ist die erste enthalten. Es ist aber auch —Λ das Falsche, wenn Λ nicht das Wahre ist, sonst das Wahre. Wir schreiben nun diesen Uebergang abgekürzt so:

$$\varepsilon \quad \vdash \Sigma \rightarrow (\neg\ \Xi \rightarrow (\Delta \rightarrow \Lambda)) \quad `$$

$$(\zeta): \quad \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot$$

$$, \qquad \vdash \Sigma \rightarrow (\Delta \rightarrow (\neg\ \Theta \rightarrow \Lambda))$$

und sprechen die Regel so aus:

> ■→**Wenn zwei Sätze in den Hintergliedern übereinstimmen, während ein Vorderglied des einen sich von einem Vordergliede des andern nur durch das davor stehende Verneinungszeichen unterscheidet, so können wir auf einen Satz schliessen, in**
> S.31 **welchem das übereinstim- | mende Hinterglied als Hinterglied und alle Vorderglieder beider mit Ausnahme der beiden genannten als Vorderglieder erscheinen. Dabei brauchen Vorderglieder, die in beiden vorkommen, nur einmal hingeschrieben zu werden** (Verschmelzung gleicher Vorderglieder).←■[69] [#37]

§ 17. Sehen wir nun zu, wie der in der Logik ‚Barbara‘ genannte Schluss sich hier einreiht! Aus den beiden Sätzen:

‚alle Quadratwurzeln aus 1 sind
vierte Wurzeln aus 1‘

und

---

[68]Diese beiden Wendungen haben den Zweck, durch Verschmelzung gleicher Unterglieder

[69]**Wenn zwei Sätze in den Obergliedern übereinstimmen, während ein Unterglied des einen sich von einem Untergliede des andern nur durch den davor stehenden Verneinungsstrich unterscheidet, so können wir auf einen Satz schliessen, in welchem das übereinstim- | mende Oberglied als Oberglied und alle Unterglieder beider mit Ausnahme der beiden genannten als Unterglieder erscheinen. Dabei brauchen Unterglieder, die in beiden vorkommen, nur einmal hingeschrieben zu werden** (Verschmelzung gleicher Unterglieder).

[#36]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#37]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

,alle vierte Wurzeln aus 1 sind

achte Wurzeln aus 1'

können wir schliessen:

,alle Quadratwurzeln aus 1 sind

achte Wurzeln aus 1'

Wenn wir nun die Praemissen so schreiben:

$$, \vdash \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{a}^2 = 1 \rightarrow \mathfrak{a}^4 = 1]\ ‘$$

und

$$, \vdash \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{a}^4 = 1 \rightarrow \mathfrak{a}^8 = 1]\ ‘,$$

so können wir unsere Schlussweisen nicht anwenden, wohl aber, wenn wir sie so schreiben:

$$, \vdash x^2 = 1 \rightarrow x^4 = 1\ ‘$$

und

$$, \vdash x^4 = 1 \rightarrow x^8 = 1\ ‘.$$

Wir haben hier den Fall des § 15. Wir versuchten schon früher, die Allgemeinheit mittels eines **lateinischen Buchstaben** in dieser Weise auszudrücken, kamen aber davon wieder ab, weil wir bemerkten, dass das Gebiet der Allgemeinheit nicht genügend abgegrenzt wäre. Wir begegnen diesem Bedenken nun durch die Festsetzung, dass bei einem **lateinischen Buchstaben** das **Gebiet** Alles umfassen solle, was in dem Satze ausser dem Urtheilstriche vorhanden ist[70]. Mit einem lateinischen Buchstaben kann man demnach nie die Verneinung der Allgemeinheit ausdrücken, wohl aber die Allgemeinheit der Verneinung. Eine Zweideutigkeit ist also nun nicht mehr vorhanden. ■→Man sieht aber, dass der Ausdruck der Allgemeinheit mit deutschen Buchstaben und Allquantor dadurch nicht überflüssig wird.←■[71] [#38] Unsere Festsetzung über das **Gebiet** eines **lateinischen Buchstaben** soll dieses nur nach unten, nicht nach oben abgrenzen. Es bleibt also erlaubt, ein solches Gebiet auf mehrere Sätze auszudehnen, und das macht die lateinischen Buchstaben geeignet, beim Schliessen Dienste zu leisten, welche die deutschen bei der strengen Abgeschlossenheit ihres Gebietes nicht leisten können. Wenn wir die Prämissen ,$\vdash (x^2 = 1 \rightarrow x^8 = 1)$' und ,$\vdash (x^2 = 1 \rightarrow x^4 = 1)$' haben und auf den Satz ,$\vdash (x^4 = 1 \rightarrow x^8 = 1)$' schliessen, so erweitern wir vorübergehend, um zu schliessen, das Gebiet des ,x' auf beide Praemissen und den Schlusssatz, wobei jedoch jeder dieser Sätze auch ohne diese Erweiterung gilt.

Wir sagen von einem lateinischen Buchstaben nicht, dass er einen Gegenstand **bedeute**, sondern dass er einen Gegenstand **andeute**. | Ebenso sagen wir auch, ein deutscher Buchstabe **deute** einen Gegenstand **an** da, ■→wo er nicht bei einem Allquantor steht.←■[72] [#39] S.31

Ein Satz mit einem lateinischen Buchstaben kann immer umgewandelt werden in einen solchen mit einem deutschen Buchstaben, ■→dessen Allquantor direkt hinter dem Urtheil-

[70] Hiermit ist der Gebrauch der lateinischen Buchstaben nur für den Fall erklärt, dass ein Urtheilstrich vorhanden ist. Das ist aber in einer reinen Begriffsentwickelung immer der Fall; denn wir schreiten dabei immer von Satz zu Satz fort.

[71] Man sieht aber, dass der Ausdruck der Allgemeinheit mit deutschen Buchstaben und Höhlung dadurch nicht überflüssig wird.

[72] wo er nicht über einer Höhlung steht.

[#38] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#39] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

striche steht.←■[73] [#40] Wir schreiben einen solchen Uebergang so:

$$\vdash \Phi(x) \quad `$$

$$\smile$$

$$, \vdash \forall \mathfrak{a}\, [\Phi(\mathfrak{a})].$$

Hierbei ist die zweite Regel des § 8 zu beachten, wie im folgenden Beispiele, wo als neu einzuführender deutscher Buchstabe nicht ‚$\mathfrak{e}$' gewählt werden darf.

$$\vdash \forall \mathfrak{e}\, [a > \mathfrak{e} \rightarrow a > \mathfrak{e}^3] \rightarrow (a > 0 \rightarrow 1 \geq a)$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [\forall \mathfrak{e}\, [\mathfrak{a} > \mathfrak{e} \rightarrow \mathfrak{a} > \mathfrak{e}^3] \rightarrow (\mathfrak{a} > 0 \rightarrow 1 \geq \mathfrak{a})].$$

Bei dem Uebergange von einem lateinischen zu einem deutschen Buchstaben muss noch folgender Fall erwähnt werden. Betrachten wir den Satz ‚$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [\Gamma \rightarrow \Phi(\mathfrak{a})]$', worin ‚$\Gamma$' ein Eigenname und ‚$\Phi(\xi)$' ein Functionsname sei! $\forall \mathfrak{a}\, [\Gamma \rightarrow \Phi(\mathfrak{a})]$ ist das Falsche, wenn die Function $\Gamma \rightarrow \Phi(\xi)$ für irgendein Argument das Falsche als Werth hat. Das ist dann der Fall, wenn Γ das Wahre ist und der Werth der Function — $\Phi(\xi)$ für irgendein Argument das Falsche ist. In allen andern Fällen ist $\forall \mathfrak{a}\, [\Gamma \rightarrow \Phi(\mathfrak{a})]$ das Wahre. Es besagt also ‚$\forall \mathfrak{a}\, [\Gamma \rightarrow \Phi(\mathfrak{a})]$', dass Γ nicht das Wahre sei, oder dass der Werth der Function $\Phi(\xi)$ für jedes Argument das Wahre sei. Vergleichen wir hiermit ‚$\Gamma \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [\Phi(\mathfrak{a})]$'! Dies bedeutet das Falsche, wenn Γ das Wahre und $\forall \mathfrak{a}\, [\Phi(\mathfrak{a})]$ das Falsche ist. Das ist aber der Fall, wenn für irgendein Argument der Werth der Function — $\Phi(\xi)$ das Falsche ist. In allen andern Fällen ist $\Gamma \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [\Phi(\mathfrak{a})]$ das Wahre. Der Satz ‚$\vdash \Gamma \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [\Phi(\mathfrak{a})]$' besagt also dasselbe wie ‚$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [\Gamma \rightarrow \Phi(\mathfrak{a})]$'. Wenn für ‚$\Gamma$' und ‚$\Phi(\xi)$' Zeichenverbindungen gesetzt werden, welche einen Gegenstand und eine Function nicht bedeuten, sondern nur andeuten, indem sie lateinische Buchstaben enthalten, so gilt das eben Gesagte doch, wenn für jeden lateinischen Buchstaben ein Name gesetzt wird, welcher dies auch sei, also allgemein.

Um mich genauer ausdrücken zu können, will ich folgende Sprechweise einführen. **Namen** nenne ich nur solche Zeichen und Zeichenverbindungen, welche etwas bedeuten sollen. Lateinische Buchstaben und Zeichenverbindungen, in denen solche vorkommen, sind also keine **Namen**, weil sie nur andeuten. Eine Zeichenverbindung, welche lateinische Buchsta-
S.32 ben enthält und welche immer in | einen Eigennamen übergeht, wenn wir jeden lateinischen Buchstaben durch einen Namen ersetzen, will ich **lateinische Gegenstandsmarke** nennen. Und eine Zeichenverbindung, welche lateinische Buchstaben enthält und welche immer in einen Functionsnamen übergeht, wenn wir jeden lateinischen Buchstaben durch einen Namen ersetzen, will ich **lateinische Functionsmarke** oder **lateinische Marke** einer Function nennen.

Wir können nun sagen: der Satz ‚$\vdash \Gamma \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [\Phi(\mathfrak{a})]$' besagt immer dasselbe wie der Satz ‚$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [\Gamma \rightarrow \Phi(\mathfrak{a})]$' nicht nur, wenn ‚$\Phi(\xi)$' ein Functionsname und ‚Γ' ein Eigenname ist, sondern auch wenn ‚$\Phi(\xi)$' eine lateinische Functionsmarke und ‚Γ' eine lateinische Gegenstandsmarke ist.

Wenden wir dies an auf folgenden Fall!

$$\vdash \forall \mathfrak{e}\, [\mathfrak{e} > 2 \rightarrow \mathfrak{e}^2 > 4] \rightarrow (2 \cdot a > 4 \rightarrow a^2 > 4)$$

$$\smile$$

[73]dessen Höhlung von dem Urtheilstriche nur durch einen Wagerechten getrennt ist.

[#40]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

$$\vdash \forall \mathfrak{e}\, [\forall \mathfrak{e}\, [\mathfrak{e} > 2 \rightarrow \mathfrak{e}^2 > 4] \rightarrow (2 \cdot \mathfrak{e} > 4 \rightarrow \mathfrak{e}^2 > 4)]$$ [74]

Nach dem eben Gesagten können wir für den letzten Satz auch schreiben

$$,\ \vdash \forall \mathfrak{e}\, [\mathfrak{e} > 2 \rightarrow \mathfrak{e}^2 > 4] \rightarrow \forall \mathfrak{e}\, [2 \cdot \mathfrak{e} > 4 \rightarrow \mathfrak{e}^2 > 4]\ \text{‘}$$

Es ist klar, dass nur solche ■→Vorderglieder←■[75] [#41] aus dem Gebiete des neu einzuführenden deutschen Buchstaben entlassen werden können, welche den zu ersetzenden lateinischen Buchstaben nicht enthielten. Ich will solche Uebergänge so schreiben:

$$\vdash \forall \mathfrak{e}\, [\mathfrak{e} > 2 \rightarrow \mathfrak{e}^2 > 4] \rightarrow (2 \cdot a > 4 \rightarrow a^2 > 4)\ \text{‘}$$

$$\smile$$

$$,\ \vdash \forall \mathfrak{e}\, [\mathfrak{e} > 2 \rightarrow \mathfrak{e}^2 > 4] \rightarrow \forall \mathfrak{e}\, [2 \cdot \mathfrak{e} > 4 \rightarrow \mathfrak{e}^2 > 4]$$

Statt mehre deutsche Buchstaben nach einander einzuführen, schreiben wir gleich unter das Zeichen ‚ $\smile$ ‘ das Endergebniss hin.

Wir fassen dies in folgende Regel:

Es ist erlaubt, in einem Satze einen lateinischen Buchstaben überall, wo er vorkommt, durch einen und denselben deutschen Buchstaben zu ersetzen. ■→Dieser muss dann zugleich bei einem Allquantor vor einem solchen Hintergliede angebracht werden, ausserhalb dessen der lateinische Buchstabe nicht vorkommt←■[76] [#42][77]. Wenn in diesem ■→Hintergliede←■[79] [#44] das Gebiet eines deutschen Buch- | staben enthalten ist und in diesem Gebiete der lateinische Buchstabe vorkommt, S.33 **so muss der für diesen einzuführende deutsche Buchstabe von jenem verschieden gewählt werden** (zweite Regel des § 8).

§ 18. Wir wollen nun mit lateinischen Buchstaben einige allgemeine Gesetze aufstellen, von denen wir später Gebrauch machen müssen. Nach § 12 wäre

$$\Gamma \rightarrow (\Delta \rightarrow \Gamma)$$

nur dann das Falsche, wenn Γ und Δ das Wahre wären, während Γ nicht das Wahre wäre. Dies ist unmöglich; also

$$\vdash a \rightarrow (b \rightarrow a) \qquad \text{(I}$$

Die ‚I‘ ist diesem Satze als Abzeichen (§ 14) gegeben, und so werden auch fernerhin Abzeichen den Sätzen beigelegt werden. Wenn wir statt ‚b‘ ‚a‘ schreiben, ■→können wir gleiche Hinterglieder verschmelzen,←■[80] [#45] sodass wir in ‚$\vdash a \rightarrow a$‘ einen besondern Fall von (I) haben, der auch ohne Erinnerung mit unter (I) verstanden werden soll.

---

[74] Die zweite Regel des § 8 verbietet hier nicht den nochmaligen Gebrauch des ‚$\mathfrak{e}$‘, weil ‚a‘ in dem ersten Satze nicht im Gebiete des ‚$\mathfrak{e}$‘ vorkommt.

[75] Unterglieder

[76] Dieser muss dann zugleich über einer Höhlung vor einem solchen Obergliede angebracht werden, ausserhalb dessen der lateinische Buchstabe nicht vorkommt

[77] ■→Wenn also der lat. Buchstabe in jedem Vordergliede vorkommt, so muss der ganze Satz ohne den Urtheilstrich als Hinterglied aufgefasst werden, und der Allquantor mit dem deutschen Buchstaben muss dann direkt hinter dem Urtheilsstriche stehen.←■[78] [#43]

[79] Obergliede

[80] können wir gleiche Unterglieder verschmelzen,

[#41] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#42] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#44] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#45] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

$—\Delta$ und $\neg\ \Delta$ sind immer verschieden und Wahrheitswerthe. Da nun $—\Gamma$ ebenfalls immer ein Wahrheitswerth ist, so muss er entweder mit $—\Delta$ oder mit $\neg\ \Delta$ zusammenfallen. Daraus folgt, dass $\neg\ (—\Gamma) = (\neg\ \Delta) \rightarrow (—\Gamma) = (—\Delta)$ immer das Wahre ist; denn es würde nur dann das Falsche sein, wenn $\neg\ (—\Gamma) = (\neg\ \Delta)$ das Wahre, d. h. $(—\Gamma) = (\neg\ \Delta)$ das Falsche, und $(—\Gamma) = (—\Delta)$ nicht das Wahre, d. h. das Falsche wäre. Mit andern Worten: $\neg\ (—\Gamma) = (\neg\ \Delta) \rightarrow (—\Gamma) = (—\Delta)$ wäre nur dann das Falsche, wenn sowohl $(—\Gamma) = (—\Delta)$, als auch $(—\Gamma) = (\neg\ \Delta)$ das Falsche wäre, was, wie wir eben gesehen, nicht möglich ist. Also

$$\vdash \neg\ (—a) = (\neg\ b) \rightarrow (—a) = (—b) \qquad \text{(IV}$$

Auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens könnten die Klammern allenfalls entbehrt werden.

Aus der Bedeutung des Functionsnamens $\backslash\xi$ (§ 11) folgt

$$\vdash a = \backslash\text{ext}\,\varepsilon\,(a = \varepsilon) \qquad \text{(VI}$$

Erweiterung der Allgemeinheitsbezeichnung.

§ 19. Bisher ist die Allgemeinheit nur in Hinsicht auf Gegenstände ausgedrückt worden. Um dasselbe für Functionen thun zu können, sondern wir die Buchstaben ‚f', ‚g', ‚h', ‚F', ‚G', ‚H' und die entsprechenden deutschen als **Functionsbuchstaben** von den andern ab, die wir **Gegenstandsbuchstaben** nennen[81], sodass sie nie wie diese Gegenstände, sondern nur Fnnctionen andeuten sollen. Zu den **Gegenstandsbuchstaben** rechnen wir auch die kleinen
S.34 griechischen | Vokalbuchstaben, ■→da sie ohne das Werthverlaufszeichen nur an solchen Stellen vorkommen, wo auch Eigennamen stehen können.←■[82] [#46] Auf einen Functionsbuchstaben folgt überall in seinem Gebiete eine **Klammer**, deren Innenraum eine Stelle oder zwei durch ein Komma getrennte Stellen enthält, jenachdem der Buchstabe eine Function mit einem oder mit zwei Argumenten andeuten soll. Eine solche Stelle dient zur Aufnahme des einfachen oder zusammengesetzten Zeichens, das ein Argument bedeutet oder andeutet oder, wie die kleinen griechischen Vokalbuchstaben, die Argumentstelle einnimmt. Es ist klar, dass ein Functionsbuchstabe in seinem Gebiete überall mit einer oder überall mit zwei Argumentstellen vorkommen muss. Das **Gebiet** umfasst bei den lateinischen Functionsbuchstaben Alles, was ausser dem Urtheilstriche im Satze vorhanden ist, ■→bei den deutschen wird es begrenzt durch einen Allquantor mit dem dahinterstehenden deutschen Buchstaben.←■[83] [#47] Hierin stimmt der Gebrauch der Functionsbuchstaben ganz mit dem der Gegenstandsbuchstaben überein. Zunächst mag dies an Beispielen erläutert werden.

§ 20. $\forall\mathfrak{a}\ [\Phi(\mathfrak{a})]$ ist nur dann das Wahre, wenn der Werth der zugehörigen Function $\Phi(\xi)$ für jedes Argument das Wahre ist. Dann muss also $\Phi(\Gamma)$ ebenfalls das Wahre sein. Daraus folgt, dass $\forall\mathfrak{a}\ [\Phi(\mathfrak{a})] \rightarrow \Phi(\Gamma)$ immer das Wahre ist, was auch $\Phi(\xi)$ für eine Function mit einem Argumente sein mag. Hierbei ist die erste Regel des § 8 zu beachten, um die zugehörige Function $\Phi(\xi)$ zu erkennen. Schriebe man z. B. ‚$\forall\mathfrak{a}\ [\Psi(\mathfrak{a}, \forall\mathfrak{a}\ [\mathrm{X}(\mathfrak{a},\mathfrak{a})])] \rightarrow \Psi(\Gamma, \forall\mathfrak{a}\ [\mathrm{X}(\Gamma,\mathfrak{a})])$', ■→so hätte man nur scheinbar im Hinter- und Vordergliede den Namen derselben Function; in Wahrheit wäre das Vorderglied mit dem Functionsnamen ‚$\Psi(\xi, \forall\mathfrak{a}[\mathrm{X}(\mathfrak{a},\mathfrak{a})])$'

[81] mit Ausnahme von ‚M', das einem besondern Zwecke vorbehalten bleibt.
[82] da sie ohne den Spiritus lenis nur an solchen Stellen vorkommen, wo auch Eigennamen stehen können.
[83] bei den deutschen wird es begrenzt durch eine Höhlung mit dem alleinstehenden deutschen Buchstaben.

[#46] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#47] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

und das Hinterglied mit dem Functionsnamen ‚$\Psi(\xi, \forall\mathfrak{a}\,[\mathrm{X}(\xi, \mathfrak{a})])$‘ gebildet.←■[84] [#48] Wir verstehen nun unter ‚$\forall\mathfrak{f}\ [\forall\mathfrak{a}\ [\mathfrak{f}(\mathfrak{a})]\ \rightarrow\ \mathfrak{f}(\Gamma)]$‘ den Wahrheitswerth davon, dass man stets einen Namen des Wahren erhalte, welchen Functionsnamen man auch an die Stelle von ‚$\mathfrak{f}$‘ in ‚$\forall\mathfrak{a}\ [\mathfrak{f}(\mathfrak{a})]\ \rightarrow\ \mathfrak{f}(\Gamma)$‘ einsetze. Dieser Wahrheitswerth ist das Wahre, was auch ‚Γ‘ für einen Gegenstand bedeute: $\vdash \forall\mathfrak{f}\ [\forall\mathfrak{a}\ [\mathfrak{f}(\mathfrak{a})] \rightarrow \mathfrak{f}(a)]$. ■→Insbesondere gilt:←■[85] [#49]

$$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[f(\mathfrak{a})] \rightarrow f(a) \qquad \text{(IIa}$$

Man könnte dies Gesetz in Worten etwa so wiedergeben: Was von allen Gegenständen gilt, gilt auch von irgendeinem.

Nach § 7 hat die Function mit zwei Argumenten $\xi = \zeta$ als Werth immer einen Wahrheitswerth, und zwar das Wahre dann und nur dann, wenn das ζ-Argument mit dem ξ-Argumente zusammenfällt. Wenn $\Gamma = \Delta$ das Wahre ist, so ist auch $|\ \forall\mathfrak{f}\ [\mathfrak{f}(\Delta)\ \rightarrow\ \mathfrak{f}(\Gamma)]$ das Wahre; d. S.35
h. wenn Γ dasselbe ist wie Δ, so fällt Γ unter jeden Begriff, unter den Δ fällt, oder, wie man auch sagen kann, so gilt jede Aussage von Γ, die von Δ gilt. Aber auch umgekehrt: wenn $\Gamma = \Delta$ das Falsche ist, so gilt nicht jede Aussage von Γ, die von Δ gilt; d. h. dann ist $\forall\mathfrak{f}\ [\mathfrak{f}(\Delta)\ \rightarrow\ \mathfrak{f}(\Gamma)]$ das Falsche. Es fällt z. B. Γ nicht unter den Begriff $\xi = \Delta$, unter den Δ fällt. Es ist also $\Gamma = \Delta$ immer derselbe Wahrheitswerth wie $\forall\mathfrak{f}\ [\mathfrak{f}(\Delta) \rightarrow \mathfrak{f}(\Gamma)]$. Folglich fällt $\forall\mathfrak{f}\ [\mathfrak{f}(\Delta) \rightarrow \mathfrak{f}(\Gamma)]$ unter jeden Begriff, unter den $\Gamma = \Delta$ fällt; also

$$\vdash g(a = b) \rightarrow g(\forall\mathfrak{f}\,[\mathfrak{f}(b) \rightarrow \mathfrak{f}(a)]) \qquad \text{(III}$$

Wir sahen (§ 3, § 9), dass eine Werthverlaufsgleichheit immer in eine Allgemeinheit einer Gleichheit umsetzbar ist und umgekehrt:

$$\vdash (\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = \mathrm{ext}\,\alpha\,(g(\alpha))) = (\forall\mathfrak{a}\,[f(\mathfrak{a})] = g(\mathfrak{a})) \qquad \text{(V}$$

Hierbei sind die ersten Regeln der §§ 8 und 9 zu beachten.

§ 21. Um nun den Gebrauch der Functionsbuchstaben allgemein erklären zu können, bedürfen wir noch einer Benennung, die jetzt erklärt werden soll.

Betrachten wir die Namen

$$‚\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ (\mathfrak{a}^2 = 4)]\,‘$$

$$‚\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ (\mathfrak{a} > 0)]\,‘$$

$$‚\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \neg\ (\mathfrak{a} > 0 \rightarrow \neg\ \mathfrak{a}^2 = 1)]\,‘$$

so erkennen wir leicht, dass wir sie aus ‚$\neg\ \forall\mathfrak{a}\ [\neg\ \Phi(\mathfrak{a})]$‘[86] erhalten, indem wir den Functionsnamen ‚$\Phi(\xi)$‘ der Reihe nach ersetzen durch die Namen der Functionen $\xi^2 = 4$, $\xi > 0$, $\neg\ (\xi\ >\ 0\ \rightarrow\ \neg\ \xi^2\ =\ 1)$. Es ist klar, dass nur Namen von Functionen mit einem Argumente, nicht Eigennamen oder Namen von Functionen mit zwei Argumenten eingesetzt werden können; denn die einzusetzende Zeichenverbindung muss immer offene Argumentstellen haben zur Aufnahme des Buchstaben ‚$\mathfrak{a}$‘[87], und wenn wir einen Namen einer Function

---

[84]so hätte man nur scheinbar im Ober- und Untergliede den Namen derselben Function; in Wahrheit wäre das Unterglied mit dem Functionsnamen ‚$\Psi(\xi, \forall\mathfrak{a}\ [\mathrm{X}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})])$‘ und das Oberglied mit dem Functionsnamen ‚$\Psi(\xi, \forall\mathfrak{a}\,[\mathrm{X}(\xi, \mathfrak{a})])$‘ gebildet.

[85]Da hier die Höhlung mit dem ‚$\mathfrak{f}$‘ vom Urtheilstriche nur durch einen Wagerechten getrennt ist, so können wir auch unter Wegfall der Höhlung statt des deutschen einen lateinischen Buchstaben schreiben:

[86]Vergl. § 13.

[87]Dass Functionen, wie $\xi = \xi$ oder $\xi^2 - \xi \cdot \xi$, die für jedes Argument denselben Werth haben — man könnte sie Constante nennen —, doch von diesem Werthe (Gegenstande) selbst zu unterscheiden sind, habe ich in meinem Vortrage über Function und Begriff (S. 8) gezeigt.

[#48]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#49]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

mit zwei Argumenten einsetzen wollten, so würden die ζ-Argumentstellen etwa unausgefüllt bleiben. Um z. B. den Namen der Function $\Psi(\xi, \zeta)$ einzusetzen, möchte man vielleicht schreiben ‚$\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \Psi(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})]$‘; aber dann hätte man in Wahrheit nicht den Namen der Function $\Psi(\xi, \zeta)$ eingesetzt, sondern den der Function mit einem Argumente $\Psi(\xi, \xi)$ (1. Regel des § 8). Wollte man schreiben ‚$\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \Psi(\mathfrak{a}, 2)]$‘, so würde man auch nur den Namen einer Function mit einem Argumente, $\Psi(\xi, 2)$ einsetzen. Man könnte etwa das ‚ζ‘ stehen lassen: ‚$\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \Psi(\mathfrak{a}, \zeta)]$‘ und hätte hier eine Function, deren Argument durch ‚ζ‘ angedeutet wäre. Wir fassen dies in der Betrachtung zusammen mit dem Falle, wo das Argumentzeichen in
S.36 ‚$\mathrm{X}(\xi)$‘ ersetzt wird durch ‚$\Phi(\xi)$‘: ‚$\mathrm{X}(\Phi(\xi))$‘. Man spricht hier gewöhnlich von einer | Function von einer Function, aber ungenau; denn, wenn wir uns daran erinnern, dass Functionen von den Gegenständen grundverschieden sind, und dass der Werth einer Function für ein Argument von dieser selbst zu unterscheiden ist, so erkennen wir, dass ein Functionsname niemals die Stelle eines Eigennamens einnehmen kann, weil er leere Stellen entsprechend der Ungesättigtheit der Function mit sich führt. Wenn wir sagen ‚die Function $\Phi(\xi)$‘, so dürfen wir nie vergessen, dass ‚ξ‘ nur in der Weise zum Functionsnamen gehört, dass es die Ungesättigtheit erkennbar macht. Als Argument der Function $\mathrm{X}(\xi)$ kann also niemals selbst wieder eine Function auftreten, wohl aber der Werth einer Function für ein Argument, etwa $\Phi(2)$, wobei dann der Werth ist $\mathrm{X}(\Phi(2))$. Wenn wir ‚$\mathrm{X}(\Phi(\xi))$‘ schreiben, so deuten wir durch ‚$\Phi(\xi)$‘ das Argument nur an, wie wir es in ‚$\mathrm{X}(\xi)$‘ durch ‚ξ‘ andeuten. Der Functionsname ist eigentlich nur ein Theil von ‚$\Phi(\xi)$‘, sodass die Function hier nicht als Argument von $\mathrm{X}(\xi)$ auftritt, weil der Functionsname nur einen Theil der Argumentstelle ausfüllt. So kann man auch nicht sagen, dass in ‚$\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \Psi(\mathfrak{a}, \zeta)]$‘ der Functionsname ‚$\Psi(\xi, \zeta)$‘ die Stelle des Functionsnamens ‚$\Phi(\xi)$‘ in ‚$\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \Phi(\mathfrak{a})]$‘ einnehme; denn er füllt nur einen Theil davon aus, während ein anderer Theil, nämlich die Stelle des ‚ζ‘, noch für einen Eigennamen offen ist. **Functionen mit zwei Argumenten** sind von **Functionen mit einem Argumente** ebenso grundverschieden wie diese von den **Gegenständen**. Denn während diese ganz **gesättigt** sind, sind die Functionen mit zwei Argumenten weniger gesättigt, als die mit einem Argumente, die auch schon **ungesättigt** sind.

Wir haben also in ‚$\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \Phi(\mathfrak{a})]$‘ einen Ausdruck, in dem wir den Namen der Function $\Phi(\xi)$ durch Namen von Functionen mit einem Argumente ersetzen können, aber weder durch solche von Gegenständen, noch durch solche von Functionen mit zwei Argumenten. Dies veranlasst uns, $\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ (\mathfrak{a}^2 = 4)]$, $\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ (\mathfrak{a} > 0)]$, $\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \neg\ (\mathfrak{a} > 0 \to \neg\ \mathfrak{a}^2 = 1)]$ als Werthe derselben Function $\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \phi(\mathfrak{a})]$ für verschiedene **Argumente** aufzufassen. Diese Argumente sind hier aber selbst wieder Functionen, nämlich die Functionen mit einem Argumente $\xi^2 = 4$, $\xi > 0$, $\neg\ (\xi > 0 \to \neg\ \xi^2 = 1)$; und nur Functionen eines Arguments können Argumente unserer Function $\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \phi(\mathfrak{a})]$ sein. Wenn wir sagen ‚die Function $\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \phi(\mathfrak{a})]$‘, so vertritt ‚$\phi$‘ ebenso das Argumentzeichen, wie ‚ξ‘ in dem Ausdrucke ‚die Function $\xi^2 = 4$‘ einen Eigennamen vertritt, der als Argumentzeichen erscheinen könnte. Ebensowenig wie ‚ξ‘ im letzten Falle gehört ‚ϕ‘ in unserm mit zur Function. Wir nennen nun die Functionen, deren Argumente Gegenstände sind, **Functionen erster Stufe**; die Functionen dagegen, deren Argumente Functionen erster Stufe sind, mögen **Functionen zweiter Stufe** heissen. Der Werth unserer Function $\neg\ \forall\mathfrak{a}[\neg\ \phi(\mathfrak{a})]$ ist immer ein Wahrheitswerth, wel-
S.37 che Function | erster Stufe wir auch als Argument nehmen mögen. In Uebereinstimmung mit dem Frühern werden wir sie demnach Begriff nennen, und zwar **Begriff zweiter Stufe** zum Unterschiede von den **Begriffen erster Stufe**, die Functionen erster Stufe sind.

Unsere Function $\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \phi(\mathfrak{a})]$ hatte für die vorhin genommenen Argumente als Werth das Wahre. Nehmen wir nun als Argument die Function $\neg\ (\xi > 0 \to \neg\ \xi^3 = -1)$, so erhalten wir in $\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \neg\ (\mathfrak{a} > 0 \to \neg\ \mathfrak{a}^3 = -1)]$ das Falsche, weil es keine positive Cubikwurzel aus -1 giebt. Ebenso ist der Werth unserer Function für das Argument $\xi + 3$ das Falsche; denn wir können $\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ (\mathfrak{a} + 3)]$ immer ersetzen durch $\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ (—\,\mathfrak{a} + 3)]$, und dies ist das Falsche, weil der Werth der Function $-\xi + 3$ immer das Falsche ist, wenn wir nämlich das Pluszeichen so erklärt voraussetzen, dass für kein Argument der Werth der Function $\xi + 3$ das Wahre ist.

§ 22. Eine andere Function zweiter Stufe haben wir in

$$\forall \mathfrak{a}\,[\phi(\mathfrak{a}) \rightarrow \forall \mathfrak{e}\,[\phi(\mathfrak{e}) \rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{e}]]$$

wo ‚ϕ' wieder das Zeichen des Arguments vertritt. Ihr Werth ist das Wahre für jeden Begriff erster Stufe als Argument, unter den nicht mehr als ein einziger Gegenstand fällt. Demnach

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{a} + 1 = 3 \rightarrow \forall \mathfrak{e}\,[\mathfrak{e} + 1 = 3 \rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{e}]]$$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \rightarrow \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{e} = \mathfrak{e} \rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{e}]]$$

Dagegen:

$$\vdash \neg\ \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{a}^2 = 1 \rightarrow \forall \mathfrak{e}\,[\mathfrak{e}^2 = 1 \rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{e}]]$$

Eine Function zweiter Stufe haben wir auch in $\phi(2)$. Die Werthe dieser Function sind theils Wahrheitswerthe, wie z. B. für die Argumente $\xi + \xi = \xi \cdot \xi$, $\xi + 1 = 4$, denen die Werthe $2 + 2 = 2 \cdot 2$ und $2 + 1 = 4$ entsprechen, theils andere Gegenstände, wie z. B. die Zahl 3 für das Argument $\xi + 1$. Diese Function zweiter Stufe ist von der blossen Zahl 2 verschieden, da sie wie alle Functionen ungesättigt ist.

Die Function zweiter Stufe $-\phi(2)$ unterscheidet sich von der vorigen dadurch, dass ihr Werth immer ein Wahrheitswerth ist. Sie ist also ein Begriff zweiter Stufe, den wir Eigenschaft der Zahl 2 nennen können; denn jeder Begriff, unter den die Zahl 2 fällt, fällt unter diesen Begriff zweiter Stufe, und alle andern Functionen erster Stufe mit einem Argumente fallen nicht unter diesen Begriff zweiter Stufe[88].

Auch in

$$\neg\ (\forall \mathfrak{a}\,[\phi(\mathfrak{a}) \rightarrow \mathfrak{a} = 2] \rightarrow \neg\ \phi(2))$$

haben wir einen Begriff zweiter Stufe, den wir nennen könnten: Eigenschaft der Zahl 2, welche dieser ausschliesslich zukommt.

Ein Begriff zweiter Stufe ist auch $\forall \mathfrak{a}\,[\phi(\mathfrak{a})]$. Eine Function zweiter Stufe, die kein Begriff ist, haben wir in $\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\phi(\varepsilon))$.

Um ein Beispiel aus der Analysis | zu haben, betrachten wir den Differentialquotienten S.38
einer Function. Wir sehen diese als Argument an. Nehmen wir eine bestimmte Function, z. B. ξ^2 als Argument, so erhalten wir zunächst wieder eine Function erster Stufe $2 \cdot \xi$, und erst, wenn wir als Argument dieser einen Gegenstand, z. B. die Zahl 3 nehmen, erhalten wir als Werth einen Gegenstand: die Zahl 6. Der Differentialquotient ist demnach als Function mit zwei Argumenten anzusehn, von denen das eine eine Function erster Stufe mit einem Argumente, das andere ein Gegenstand sein muss. Wir können ihn deshalb **ungleichstufige** Function mit zwei Argumenten nennen. Aus dieser erhalten wir eine Function zweiter Stufe mit einem Argumente; indem wir sie mit einem Gegenstandsargumente — z. B. der Zahl 3 — sättigen; d. h. indem wir bestimmen, dass der Differentialquotient für das Argument 3 gebildet werden solle[89].

Eine ungleichstufige Function mit zwei Argumenten haben wir auch in $-\phi(\xi)$, wo ‚ξ' die Stelle des Gegenstandsarguments und ‚$\phi(\ )$' die des Functionsarguments einnimmt und kenntlich macht. Da der Werth dieser Function stets ein Wahrheitswerth ist, können wir sie

---

[88] Vergl. Anm. S. 8.

[89] Es muss hierbei wie bei allen der Arithmetik entnommenen Beispielen vorausgesetzt werden, dass die Zeichen der Addition, Multiplication u.s.w. sowie das des Differentialquotienten so definirt seien, dass ein aus ihnen und Eigennamen rechtmässig gebildeter Name immer eine Bedeutung habe, was freilich die üblichen Definitionen nicht leisten, weil dabei immer nur auf Zahlen Bedacht genommen wird, meistens ohne dass gesagt würde, was Zahl sei.

ungleichstufige Beziehung nennen. Es ist die Beziehung eines Gegenstandes zu einem Begriffe, unter den er fällt.

Gleichstufige Beziehungen zweiter Stufe haben wir in $\forall\mathfrak{a}[\psi(\mathfrak{a}) \rightarrow \phi(\mathfrak{a})]$ und $\neg\ \forall\mathfrak{a}[\psi(\mathfrak{a}) \rightarrow \neg\ \phi(\mathfrak{a})]$, wo ‚$\phi$' und ‚$\psi$' die Argumentstellen kenntlich machen. In der letzten Beziehung stehen z. B. die Begriffe $\xi^3 = 1$ und $\xi^2 = 1$; denn wir haben $\vdash \neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{a}^2 = 1 \rightarrow \neg\ \mathfrak{a}^3 = 1]$, in Worten: mindestens eine Quadratwurzel aus 1 ist auch Cubikwurzel aus 1.

§ 23. In den bisher gegebenen Beispielen hatten wir als Argumente Functionen mit einem Argumente; $\neg\ \forall\mathfrak{a}\,\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ \phi(\mathfrak{a},\mathfrak{e})]$ ist ein Begriff zweiter Stufe, dessen Argument eine Function mit zwei Argumenten sein muss. Unter diesen Begriff fallen alle Beziehungen, für welche es Gegenstände giebt, die in ihr stehn. Man kann nämlich auch Beziehungen angeben — man könnte sie leere nennen —, in denen keine Gegenstände zu einander stehen, z. B. $\neg\ (\xi = \zeta \rightarrow 2\cdot\xi = 2\cdot\zeta)$; denn $\vdash \neg\ \neg\ \forall\mathfrak{a}\,\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ \neg\ (\mathfrak{a} = \mathfrak{e} \rightarrow 2\cdot\mathfrak{a} = 2\cdot\mathfrak{e})]$.

Um noch ein Beispiel für diesen Fall zu haben, suchen wir die **Eindeutigkeit** einer Beziehung auszudrücken. Darunter verstehen wir, dass es für jedes ξ-Argument nicht mehr als ein ζ-Argument gebe der Art, dass der Werth unserer Function (Beziehung) $\mathrm{X}(\xi,\zeta)$ das Wahre wird. Wir können auch sagen: wenn daraus, dass a zu b in dieser Beziehung steht und dass
S.39 a zu c in | dieser Beziehung steht, allgemein folgt, dass b mit c zusammenfalle, so sagen wir, diese Beziehung sei eindeutig. Oder: wenn daraus, dass $\mathrm{X}(a,b)$ das Wahre ist und dass $\mathrm{X}(a,c)$ das Wahre ist, allgemein folgt, dass $c = b$ das Wahre ist, so nennen wir die Function $\mathrm{X}(\xi,\zeta)$ eine eindeutige Beziehung, sofern sie eine Beziehung ist.

$$\forall\mathfrak{e}\,\forall\mathfrak{d}\,[\mathrm{X}(\mathfrak{e},\mathfrak{d}) \rightarrow \forall\mathfrak{a}\,[\mathrm{X}(\mathfrak{e},\mathfrak{a}) \rightarrow \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]]$$

muss das Wahre sein, wenn die Beziehung —$\mathrm{X}(\xi,\zeta)$ eindeutig sein soll. Setzen wir für ‚X' das Argumentstellen kenntlich machende ‚ϕ', so erhalten wir in

$$‚\ \forall\mathfrak{e}\,\forall\mathfrak{d}\,[\phi(\mathfrak{e},\mathfrak{d}) \rightarrow \forall\mathfrak{a}\,[\phi(\mathfrak{e},\mathfrak{a}) \rightarrow \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]]\ '$$

den Namen einer Function zweiter Stufe, die als Argument eine Function mit zwei Argumenten verlangt. Diese Function zweiter Stufe ist ein Begriff zweiter Stufe, unter den alle eindeutigen Beziehungen, aber auch solche Functionen $\mathrm{X}(\xi,\zeta)$ fallen, für welche —$\mathrm{X}(\xi,\zeta)$ eine eindeutige Beziehung ist. Die Eindeutigkeit ist hier immer in der Richtung vom ξ- zum ζ-Argumente gemeint. Nehmen wir als Argument unserer Function zweiter Stufe die Function $\xi^2 = \zeta$, so erhalten wir als Functionswerth

$$\forall\mathfrak{e}\,\forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{e}^2 = \mathfrak{d} \rightarrow \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{e}^2 = \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]]$$

d. i. das Wahre, während das Falsche als Functionswerth erscheint, wenn wir als Argument die Function $\xi = \zeta^2$ nehmen:

$$\forall\mathfrak{e}\,\forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{e} = \mathfrak{d}^2 \rightarrow \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{e} = \mathfrak{a}^2 \rightarrow \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]]$$ [90]

Wir erkennen aus diesen Beispielen die grosse Mannichfaltigkeit der Functionen. Wir sehen auch, dass es grundverschiedene Functionen giebt, da die Argumentstellen grundverschieden sind. Diejenigen nämlich, welche zur Aufnahme von Eigennamen geeignet sind, können keine Namen von Functionen aufnehmen und umgekehrt. Die Argumentstellen ferner, welche Namen von Functionen erster Stufe mit einem Argumente aufnehmen können, sind unfähig, solche von Functionen erster Stufe mit zwei Argumenten aufzunehmen. Wir unterscheiden demnach:

Argumente erster Art:
Gegenstände;
Argumente zweiter Art:

[90] bei geeigneter Definition von ξ^2 für Argumente, welche nicht Zahlen sind.

Functionen erster Stufe mit einem Argumente;

Argumente dritter Art:

Functionen erster Stufe mit zwei Argumenten.

Ebenso unterscheiden wir:

Argumentstellen erster Art, die zur Aufnahme von Eigennamen geeignet sind;

Argumentstellen zweiter Art, die zur Aufnahme von Namen von Functionen erster Stufe mit einem Argumente geeignet sind;

Argumentstellen dritter Art, die zur Aufnahme von Namen | von Functionen erster Stufe mit zwei Argumenten geeignet sind. S.40

Eigennamen und Gegenstandsbuchstaben sind **passend** für die Argumentstellen erster Art; Namen von Functionen erster Stufe mit einem Argumente sind **passend** für die Argumentstellen zweiter Art; Namen von Functionen erster Stufe mit zwei Argumenten sind **passend** für die Argumentstellen dritter Art. Die Gegenstände und Functionen, deren Namen passend sind für die Argumentstellen des Namens einer Function, sind **passende** Argumente für diese Function. Functionen mit einem Argumente, für welche Argumente zweiter Art passend sind, nennen wir **Functionen zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art**; Functionen mit einem Argumente, für welche Argumente dritter Art passend sind, nennen wir **Functionen zweiter Stufe mit einem Argumente dritter Art**.

Wie wir in $\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{a}=\mathfrak{a}]$ den Werth der Function zweiter Stufe $\forall\mathfrak{a}\,[\phi(\mathfrak{a})]$ für das Argument $\xi=\xi$ haben, so können wir $\forall\mathfrak{f}\,[\mathfrak{f}(2)\rightarrow\mathfrak{f}(1+1)]$ als Werth einer Function **dritter Stufe** ansehn für das Argument $\phi(2)\rightarrow\phi(1+1)$, das selbst eine Function zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art ist.

§ 24. Es ist nun möglich, den Gebrauch der Functionsbuchstaben allgemein zu erklären.

■→Wenn auf einen Allquantor mit einem deutschen Functionsbuchstaben ←■[91] [#50]eine Zeichenverbindung folgt, zusammengesetzt aus dem Namen einer Function zweiter Stufe mit einem Argumente und diesem Functionsbuchstaben, der die Argumentstellen ausfüllt, so bedeutet dies Ganze das Wahre, wenn der Werth jener Function zweiter Stufe für jedes passende Argument das Wahre ist; in allen andern Fällen bedeutet es das Falsche. Welche Stellen Argumentstellen der **zugehörigen** Function zweiter Stufe sind, ist nach der ersten Regel des § 8 zu beurtheilen. Auch die zweite Regel des § 8 hat für Functionsbuchstaben ebenso Geltung wie für Gegenstandsbuchstaben.

Wir haben hiermit zwei Functionen dritter Stufe eingeführt, deren Namen so

$$‚\forall\mathfrak{f}\,[\mu_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta))]‘$$

und

$$‚\forall\mathfrak{f}\,[\mu_{\beta\gamma}(\mathfrak{f}(\beta,\gamma))]‘$$

aussehn mögen, indem wir mit ‚μ_β‘ und ‚$\mu_{\beta\gamma}$‘ die Argumentstelle hier ebenso kenntlich machen, wie wir die Argumentstellen zweiter und dritter Art mit ‚ϕ‘ und ‚ψ‘ und die erster Art mit ‚ξ‘ und ‚ζ‘ kenntlich machen. ‚μ_β‘ und ‚$\mu_{\beta\gamma}$‘ sollen übrigens ebenso wenig wie jene Buchstaben Zeichen der Begriffsschrift sein, sondern uns nur vorläufig dienen. Nehmen wir als Argumente für die erste dieser Functionen der Reihe nach die Functionen zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art $\forall\mathfrak{a}\,[\phi(\mathfrak{a})]$, $\phi(2)$, $\forall\mathfrak{a}\,[\phi(\mathfrak{a})\rightarrow\forall\mathfrak{e}\,[\phi(\mathfrak{e})\rightarrow\mathfrak{a}=\mathfrak{e}]]$, so erhalten wir als Werthe $\forall\mathfrak{f}\,\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{f}(\mathfrak{a})]$, $\forall\mathfrak{f}\,[\mathfrak{f}(2)]$, $\forall\mathfrak{f}\,\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{f}(\mathfrak{a})\rightarrow\forall\mathfrak{e}\,[\mathfrak{f}(\mathfrak{e})\rightarrow\mathfrak{a}=\mathfrak{e}]]$.

| S.41

[91] Wenn auf eine Höhlung mit einem deutschen Functionsbuchstaben

[#50] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

§ 25. Wir bedürfen noch einer Ausdrucksweise für die Allgemeinheit hinsichtlich der Functionen zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art. Man könnte meinen, dass dies noch längst nicht genügte; aber wir werden sehen, dass wir mit dieser auskommen, und dass auch sie nur in einem einzigen Satze vorkommt. Es mag hier zunächst nur kurz bemerkt werden, dass diese Sparsamkeit dadurch möglich wird, dass die Functionen zweiter Stufe in gewisser Weise durch Functionen erster Stufe vertreten werden können, wobei die Functionen, die als Argumente jener erscheinen, durch ihre Werthverläufe vertreten werden. Doch die dazu nöthige Bezeichnungsweise gehört nicht zu den ursprünglichen der Begriffsschrift; wir werden sie später mittels unserer Urbezeichungen einführen. Da unsere Ausdrucksweise nur in einem einzigen Satze gebraucht wird, ist es unnöthig, sie ganz allgemein zu erklären.

Wir deuten eine Function zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art so an:

$$,\ M_\beta(\phi(\beta))\ `$$

mittels des **lateinischen Functionsbuchstaben** ‚M'[92], wie wir mit ‚$f(\xi)$' eine Function erster Stufe mit einem Argumente andeuten. ‚$\phi(\ )$' macht hier die Argumentstelle kenntlich, wie ‚ξ' es in ‚$f(\xi)$' thut. Der Buchstabe ‚β' füllt hier in der Klammer die Stelle des Arguments der als Argument auftretenden Function aus. Der Gebrauch von,$M_\beta(\phi(\beta))$' ist für Functionen zweiter Stufe ganz entsprechend dem von ‚$f(\xi)$' für Functionen erster Stufe. Wir bedienen uns dieses Allgemeinheitsausdrucks in folgendem Gesetze

$$\vdash \forall \mathfrak{f}\,[M_\beta(\mathfrak{f}(\beta))] \rightarrow M_\beta(f(\beta)) \qquad \text{(IIb}$$

in Worten: Was von allen Functionen erster Stufe mit einem Argumente gilt, das gilt auch von irgendeiner. Dies Gesetz ist offenbar das für unsere Functionen zweiter Stufe, was (IIa) für Functionen erster Stufe ist. Dem Buchstaben ‚f' in (IIa) entspricht hier ‚M_β', dem ‚a' in (IIa) entspricht hier ‚f' und dem ‚$\mathfrak{a}$' ‚$\mathfrak{f}$'. Es sei $\Omega_\beta(\phi(\beta))$ eine Function zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art, dessen Stelle durch ‚ϕ' kenntlich gemacht ist. Dann ist $\forall \mathfrak{f}\,[\Omega_\beta(\mathfrak{f}(\beta))]$ nur dann das Wahre, wenn für jedes passende Argument der Werth unserer Function zweiter Stufe das Wahre ist. Dann muss auch $\Omega_\beta(\Phi(\beta))$ das Wahre sein. Mithin ist

$$\forall \mathfrak{f}\,[\Omega_\beta(\mathfrak{f}(\beta))] \rightarrow \Omega_\beta(\Phi(\beta))$$

immer das Wahre, was auch $\Phi(\xi)$ für eine Function erster Stufe mit einem Argumente sein möge, einerlei ob $\forall \mathfrak{f}\,[\Omega_\beta(\mathfrak{f}(\beta))]$ das Wahre oder das Falsche ist; und das besagt unser Gesetz (IIb) allgemein für jede Function zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art.

S.42 |

2. Definitionen.

Allgemeines.

§ 26. Es sollen nun die bisher erklärten Zeichen benutzt werden, um neue Namen einzuführen. Bevor ich jedoch auf die Regeln eingehe, die dabei zu befolgen sind, wird es zur Verständigung dienlich sein, die Zeichen und Zeichenverbindungen in Arten einzutheilen und diese zu benennen[93].

Die deutschen, lateinischen und griechischen Buchstaben will ich in der Begriffsschrift nicht **Namen** nennen, weil sie nichts bedeuten sollen. Dagegen nenne ich z. B. ‚$\forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{a} = \mathfrak{a}]$' einen **Namen**, weil es das Wahre bedeutet; es ist ein **Eigenname**. Ich nenne also **Eigennamen** oder **Namen** eines Gegenstandes ein Zeichen, welches einen Gegenstand bedeuten soll, mag es einfach oder zusammengesetzt sein, aber nicht ein solches, welches einen Gegenstand nur andeutet.

[92] Dieser Buchstabe ist also kein **Gegenstandsbuchstabe**.

[93] Vergl. § 17.

Wenn wir von einem Eigennamen einen Eigennamen, der einen Theil von jenem bildet oder mit ihm zusammenfällt, an einigen oder allen Stellen, wo er vorkommt, ausschliessen, so jedoch, dass diese Stellen als durch einen und denselben beliebigen Eigennamen auszufüllen (als **Argumentstellen erster Art**) kenntlich bleiben, so nenne ich das, was wir dadurch erhalten, **Namen** einer Function erster Stufe mit einem Argumente. Ein solcher Name bildet zusammen mit einem Eigennamen, der die Argumentstellen ausfüllt, einen Eigennamen. Demnach haben wir auch in ‚ξ' selbst einen Functionsnamen, wenn der Buchstabe ‚ξ' nur die Argumentstelle kenntlich machen soll. Die hierdurch benannte Function hat die Eigenschaft, dass ihr Werth für jedes Argument mit diesem zusammenfällt.

Wenn wir von einem Namen einer Function erster Stufe mit einem Argumente einen Eigennamen, der einen Theil von jenem bildet, an allen oder einigen Stellen, wo er vorkommt, ausschliessen, so jedoch, dass diese Stellen als durch einen und denselben beliebigen Eigennamen auszufüllen (als Argumentstellen erster Art) kenntlich bleiben, so nenne ich das, was wir dadurch erhalten, **Namen** einer Function erster Stufe mit zwei Argumenten.

Wenn wir von einem Eigennamen einen Namen einer Function erster Stufe, der einen Theil von jenem bildet, an allen oder einigen Stellen, wo er vorkommt, ausschliessen, so jedoch, dass diese Stellen als durch einen und denselben beliebigen Namen einer Function erster Stufe auszufüllen (als Argumentstellen zweiter oder dritter Art) kenntlich bleiben, so nenne ich das, was wir dadurch erhalten, **Namen** einer Function zweiter Stufe | mit einem Argumente, und zwar zweiter oder dritter Art, jenachdem die Argumentstellen zweiter oder dritter Art sind. S.43

Namen von Functionen nenne ich kurz **Functionsnamen**.

Es ist nicht nöthig, diese Erklärungen von Namenarten weiter fortzusetzen.

Wenn wir in einem Eigennamen Eigennamen, die einen Theil von ihm bilden oder mit ihm zusammenfallen, durch Gegenstandsbuchstaben, Functionsnamen durch Functionsbuchstaben ersetzen, so nenne ich das, was wir dadurch erhalten, **Gegenstandsmarke** oder **Marke** eines Gegenstandes. Geschieht jene Ersetzung nur durch lateinische Buchstaben, so nenne ich die erhaltene Marke **lateinische Gegenstandsmarke**. Auch die Gegenstandsbuchstaben sind also Gegenstandsmarken und die lateinischen Gegenstandsbuchstaben sind lateinische Gegenstandsmarken.

Ein Zeichen (Eigennamen oder Gegenstandsmarke), das nur aus dem Functionsnamen ‚$\xi = \zeta$' und Eigennamen oder Gegenstandsmarken besteht, die an den beiden Argumentstellen stehen, nenne ich **Gleichung**.

Wenn wir in einem Functionsnamen Eigennamen durch Gegenstandsbuchstaben, Functionsnamen durch Functionsbuchstaben ersetzen, so nenne ich das, was wir dadurch erhalten, **Functionsmarke**, und zwar **Marke** einer Function derselben Art wie die, aus deren Namen sie hervorgegangen ist. Geschieht jene Ersetzung nur durch lateinische Buchstaben, so nenne ich die erhaltene Marke **lateinische** Marke einer Function. Auch die Functionsbuchstaben sind Functionsmarken und die lateinischen Functionsbuchstaben sind lateinische Functionsmarken.

Den Urtheilstrich rechne ich weder zu den **Namen** noch zu den **Marken**; er ist ein Zeichen eigner Art. Ein Zeichen, welches aus einem Urtheilstriche und einem mit einem Wagerechten angefügten Namen eines Wahrheitswerthes besteht, nenne ich **Begriffsschriftsatz** oder **Satz**, wo kein Zweifel sein kann. Ebenso nenne ich **Begriffsschriftsatz** (oder **Satz**) ein Zeichen, das aus einem Urtheilstriche und einer mit einem Wagerechten angeführten lateinischen Marke eines Wahrheitswerthes besteht.

Zeichen wie

$$(\alpha):\ \ \rule{4cm}{0.4pt},$$

$$(\alpha,\beta)::\ \ = = = = = = = =,$$

$$(\alpha)::\ \ - - - - - - - -$$

$$\times \qquad\qquad ,$$

die zwischen den Sätzen stehn, um anzudeuten, wie der folgende sich aus dem vorhergehenden ergiebt, nenne ich **Zwischenzeichen**.

§ 27. Um nun neue Zeichen mit den schon bekannten einzuführen, bedürfen wir des ■→**Definitionszeichens**, das als Gleichheitszeichen, dem ein Doppelpunkt auf der Seite des zu Erklärenden vorangestellt ist, als

$$,\ :=\ ‘$$

erscheint und statt des Gleichheitszeichens←■[94] [#51] gebraucht wird, wo nicht geurtheilt,
S.44 sondern definirt werden soll. Wir führen durch eine **Definition** einen | neuen Namen ein, indem wir bestimmen, dass er denselben Sinn und dieselbe Bedeutung haben solle wie ein aus bekannten Zeichen zusammengesetzter. Dadurch wird nun das neue Zeichen gleichbedeutend mit dem erklärenden; die Definition geht also sofort in einen Satz über. Wir dürfen daher eine Definition wie einen Satz ■→ansehen und dabei das Definitionszeichen durch das Gleichheitszeichen←■[95] [#52] ersetzen.

■→←■[96] [#53]Wir wollen immer auf die linke Seite des Gleichheitszeichens das erklärende, auf die rechte das erklärte Zeichen schreiben. Jenes wird aus bekannten Zeichen zusammengesetzt sein.

§ 28. Für die Definitionen stelle ich nun folgenden obersten Grundsatz auf:

Rechtmässig gebildete Namen müssen immer etwas bedeuten.

Rechtmässig gebildet nenne ich einen Namen, wenn er nur aus solchen Zeichen besteht, welche ursprünglich oder durch Definition eingeführt sind, und wenn diese Zeichen nur als das verwendet sind, als was sie eingeführt sind, also Eigennamen als Eigennamen, Namen von Functionen erster Stufe mit einem Argumente als solche u. s. w., sodass die Argumentstellen immer durch passende Namen oder Marken ausgefüllt sind. Zur **rechtmässigen** Bildung gehört ferner, dass die deutschen und die kleinen griechischen Buchstaben immer nur so verwendet werden, wie es ihrem Zwecke gemäss ist. ■→Ein deutscher Buchstabe darf also hinter einem Allquantor nur stehen, wenn auch unmittelbar darauf eine Marke eines Wahrheitswerthes folgt,←■[97] [#54] zusammengesetzt aus dem Namen oder der Marke einer Func-

---

[94]**Definitionsdoppelstriches**, der als verdoppelter Urtheilstrich mit einem Wagerechten verbunden in

$$,\ :=\ ‘$$

erscheint und statt des Urtheilstriches

[95]anziehen und dabei den Definitionsstrich durch den Urtheilstrich

[96]Eine Definition wird hier immer in der Form einer Gleichung mit davor gesetztem ‚:=‘ dargestellt.

[97]Ein deutscher Buchstabe darf also über einer Höhlung nur stehen, wenn auf diese Höhlung unmittelbar eine Marke eines Wahrheitswerthes folgt,

[#51]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#52]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#53]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#54]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

tion mit einem Argumente und demselben deutschen Buchstaben an den Argumentstellen. Ein Functionsbuchstabe muss in seinem Gebiete überall entweder mit einer oder mit zwei Argumentstellen vorkommen. ■→ Hinter einem Allquantor darf nur ein deutscher Buchstabe stehen. Ein deutscher Buchstabe darf an einer Argumentstelle nur stehen, wenn ein Allquantor mit demselben Buchstaben links davor steht, der sein Gebiet abgrenzt. Ein kleiner griechischer Vokalbuchstabe darf hinter dem Werthverlaufszeichen nur dann stehen, wenn sich daran unmittelbar folgend eine Gegenstandsmarke schliesst,←■[98] [#55] zusammengesetzt aus einem Namen oder einer Marke einer Function erster Stufe mit einem Argumente und aus demselben griechischen Buchstaben, der die Argumentstellen ausfüllt. ■→Ein kleiner griechischer Vokalbuchstabe darf an einer Argumentstelle nur stehen, wenn derselbe mit dem Werthverlaufszeichen sein Gebiet abgrenzend vorhergeht. Hinter dem Werthverlaufszeichen darf nur ein kleiner griechischer Vokalbuchstabe vorkommen.←■[99] [#56]

§ 29. Wir beantworten nun die Frage: wann bedeutet ein Name etwas? und beschränken uns auf folgende Fälle.

Ein Name einer Function erster Stufe mit einem Argumente hat dann | eine **Bedeutung** (**bedeutet** etwas, ist **bedeutungsvoll**), wenn der Eigenname, der aus diesem Functionsnamen dadurch entsteht, dass die Argumentstellen mit einem Eigennamen ausgefüllt werden, immer dann eine Bedeutung hat, wenn dieser eingesetzte Name etwas bedeutet. S.45

Ein Eigenname hat eine **Bedeutung**, wenn der Eigenname immer eine Bedeutung hat, der dadurch entsteht, dass jener die Argumentstellen eines bedeutungsvollen Namens einer Function erster Stufe mit einem Argumente ausfüllt, und wenn der Name einer Function erster Stufe mit einem Argumente immer eine Bedeutung hat, der dadurch entsteht, dass der zu prüfende Eigenname die ξ-Argumentstellen eines bedeutungsvollen Namens einer Function erster Stufe mit zwei Argumenten ausfüllt, und wenn dasselbe auch für die ζ-Argumentstellen gilt.

Ein Name einer Function erster Stufe mit zwei Argumenten hat dann eine **Bedeutung**, wenn der Eigenname immer eine Bedeutung hat, der aus diesem Functionsnamen dadurch entsteht, dass die ξ-Argumentstellen mit einem bedeutungsvollen Eigennamen und dass auch die ζ-Argumentstellen mit einem bedeutungsvollen Eigennamen ausgefüllt werden.

Ein Name einer Function zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art hat eine **Bedeutung**, wenn allgemein daraus, dass der Name einer Function erster Stufe mit einem Argumente etwas bedeute, folgt, dass der durch seine Einsetzung in die Argumentstellen unserer Function zweiter Stufe entstehende Eigenname eine Bedeutung habe.

Folglich bildet jeder Name einer Function erster Stufe mit einem Argumente, welcher mit jedem bedeutungsvollen Eigennamen einen bedeutungsvollen Eigennamen bildet, auch mit jedem bedeutungsvollen Namen einer Function zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art einen bedeutungsvollen Namen.

Der Name ‚$\forall \mathfrak{f}\ [\mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))]$‘ einer Function dritter Stufe ist bedeutungsvoll, wenn allgemein daraus, dass ein Name einer Function zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter

[98] Ein deutscher Buchstabe darf an einer Argumentstelle nur stehen, wenn eine Höhlung mit demselben Buchstaben links davor steht, die sein Gebiet abgrenzt. Ueber einer Höhlung darf nur ein deutscher Buchstabe stehen. Ein kleiner griechischer Vokalbuchstabe darf unter dem Spiritus lenis nur dann stehen, wenn sich daran unmittelbar folgend eine Gegenstandsmarke schliesst,

[99] Ein kleiner griechischer Vokalbuchstabe darf an einer Argumentstelle nur stehen, wenn derselbe mit dem Spiritus lenis sein Gebiet abgrenzend vorhergeht. Mit dem Spiritus lenis darf nur ein kleiner griechischer Vokalbuchstabe vorkommen.

[#55] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#56] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

Art etwas bedeute, folgt, dass auch der durch dessen Einsetzung in die Argumentstelle von ‚$\forall \mathfrak{f}\, [\mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))]$‘ entstehende Eigenname eine Bedeutung habe.

§ 30. Diese Sätze sind nicht als Erklärungen der Worte ‚eine Bedeutung haben‘ oder ‚etwas bedeuten‘ aufzufassen, weil ihre Anwendung immer voraussetzt, dass man einige Namen schon als bedeutungsvolle erkannt habe; sie können aber dazu dienen, den Kreis solcher Namen allmählich zu erweitern. Es folgt aus ihnen, dass jeder aus bedeutungsvollen Namen gebildete Name etwas bedeutet. Diese Bildung geschieht so, dass ein Name Argumentstellen eines andern ausfüllt, die für ihn passend sind. So entsteht ein Eigenname aus einem Eigennamen und einem Namen einer Function erster Stufe mit einem Argumente oder aus einem
S.46 Namen einer Function erster Stufe und einem Namen einer Function | zweiter Stufe mit einem Argumente oder aus dem Namen einer Function zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art und dem Namen ‚$\forall \mathfrak{f}\, [\mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))]$‘ einer Function dritter Stufe. So entsteht der Name einer Function erster Stufe mit einem Argumente aus einem Eigennamen und einem Namen einer Function erster Stufe mit zwei Argumenten. Die so gebildeten Namen können in derselben Weise weiter zur Bildung von Namen verwendet werden, und alle so entstehenden Namen sind bedeutungsvoll, wenn die ursprünglichen einfachen es sind.

Ein Eigenname kann nur dadurch bei dieser Bildung zur Verwendung kommen, dass er die Argumentstellen einer der einfachen oder zusammengesetzten Functionen erster Stufe ausfüllt. Zusammengesetzte Namen von Functionen erster Stufe entstehen in der angegebenen Weise nur aus einfachen Namen von Functionen erster Stufe mit zwei Argumenten dadurch, dass ein Eigenname die ξ- oder die ζ-Argumentstellen ausfüllt. Die übrigbleibenden Argumentstellen des zusammengesetzten Functionsnamens sind also immer auch solche eines einfachen Namens einer Function mit zwei Argumenten. Daraus folgt, dass ein Eigenname, welcher Theil eines so gebildeten Namens ist, wo er auch vorkommt, immer an einer Argumentstelle eines der einfachen Namen von Functionen erster Stufe steht. Wenn wir nun diesen Eigennamen an einigen oder allen Stellen durch einen andern ersetzen, so ist der so entstandene Eigenname ebenfalls in der oben angegebenen Weise gebildet, hat also auch eine Bedeutung, wenn alle dabei verwendeten einfachen Namen bedeutungsvoll sind. Vorausgesetzt ist hierbei freilich, dass die einfachen Namen von Functionen erster Stufe mit einem Argumente nur eine Argumentstelle haben, und dass die einfachen Namen von Functionen erster Stufe mit zwei Argumenten nur eine ξ- und eine ζ-Argumentstelle haben. Wenn dies nicht der Fall wäre, so könnte es ja bei der angegebenen Ersetzung vorkommen, dass verwandte Argumentstellen einfacher Functionsnamen mit verschiedenen Namen ausgefüllt würden, und es fehlte für diesen Fall eine Erklärung der Bedeutung. Aber das kann immer vermieden werden und muss vermieden werden, um das Auftreten bedeutungsloser Namen zu verhindern. Es hätte ja auch gar keinen Zweck, bei den einfachen Functionsnamen mehre ξ-Argumentstellen und mehre ζ-Argumentstellen anzubringen. Setzen wir dies voraus, so erkennen wir die Möglichkeit einer zweiten Bildung von Namen von Functionen erster Stufe. Wir bilden nämlich zunächst in der ersten Weise einen Namen und schliessen dann von ihm einen Eigennamen, der ein Theil von ihm ist (oder ganz mit ihm zusammenfällt), an allen oder einigen Stellen aus, so jedoch, dass diese als Argumentstellen erster Art kenntlich bleiben. Der so entstehende Functionsname hat ebenfalls immer eine Bedeutung, wenn die einfachen Namen, aus denen er gebildet ist, etwas bedeuten, und kann weiter zur Bildung von
S.47 bedeutungsvollen Namen in der ersten oder zweiten Weise verwendet werden. |

So können wir z. B. in der ersten Weise aus dem Eigennamen ‚Δ‘ und dem Functionsnamen ‚$\xi = \zeta$‘ den Functionsnamen ‚$\Delta = \zeta$‘ bilden und weiter aus diesem und ‚Δ‘ den Eigennamen ‚$\Delta = \Delta$‘. In der zweiten Weise bilden wir aus diesem den Functionsnamen

,$\xi = \xi$‘ und aus diesem und dem Functionsnamen ,$\forall \mathfrak{a}\ [\phi(\mathfrak{a})]$‘ in der ersten Weise den Eigennamen ,$\forall \mathfrak{a}\ [\mathfrak{a} = \mathfrak{a}]$‘.

Alle rechtmässig gebildeten Namen sind so gebildet.

§ 31. Wir wenden dies an, um zu zeigen, dass die Eigennamen und Namen von Functionen erster Stufe, die wir so aus unsern bisher eingeführten einfachen Namen bilden können, immer eine Bedeutung haben. Nach dem Gesagten ist dazu nur nöthig, von unsern ursprünglichen Namen nachzuweisen, dass sie etwas bedeuten. Es sind

1. Namen von Functionen erster Stufe mit einem Argumente:

$$,\!-\!\!\!-\xi\text{‘}$$
$$,\neg\ \xi\text{‘},$$
$$,\text{ɿ}\xi\text{‘};$$

2. Namen von Functionen erster Stufe mit zwei Argumenten:

$$,\zeta \rightarrow \xi\text{‘},$$
$$,\xi = \zeta\text{‘};$$

3. Namen von Functionen zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art:

$$,\forall \mathfrak{a}\ [\phi(\mathfrak{a})]\text{‘},$$
$$,\mathrm{ext}\,\varepsilon\ (\phi(\varepsilon))\text{‘};$$

4. Namen von Functionen dritter Stufe:

$$,\forall \mathfrak{f}\ [\mu_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta))]\text{‘},$$
$$,\forall \mathfrak{f}\ [\mu_{\beta\gamma}(\mathfrak{f}(\beta, \gamma))]\text{‘},$$

von denen der letzte ausser Betracht bleiben mag, weil er nicht gebraucht werden wird.

Zunächst sei bemerkt, dass immer nur eine ξ- und nur eine ζ-Argumentstelle vorkommt. Wir gehen davon aus, dass die Namen von Wahrheitswerthen etwas bedeuten, nämlich entweder das Wahre oder das Falsche. Wir erweitern dann allmählich den Kreis der als bedeutungsvoll anzuerkennenden Namen, indem wir nachweisen, dass die aufzunehmenden mit den schon aufgenommenen bedeutungsvolle Namen bilden, indem die einen an passende Argumentstellen der andern treten.

Um nun zunächst zu zeigen, dass die Functionsnamen ,$-\!\!\!-\xi$‘ und ,$\neg\ \xi$‘ etwas bedeuten, haben wir nur nachzuweisen, dass die Namen bedeutungsvoll sind, die entstehen, wenn wir für ,ξ‘ einen Namen eines Wahrheitswerthes setzen (andere Gegenstände kennen wir hier noch nicht). Dies folgt unmittelbar aus unsern Erklärungen. Die erhaltenen Namen sind wieder solche der Wahrheitswerthe.

Wenn wir in den Functionsnamen ,$\zeta \rightarrow \xi$‘ und ,$\xi = \zeta$‘ für ,ξ‘ und für ,ζ‘ Namen von Wahrheitswerthen einsetzen, so erhalten wir Namen, die Wahrheitswerthe bedeuten. Folglich haben unsere Namen von Functionen erster Stufe mit zwei Argumenten Bedeutungen. | S.48

Um zu untersuchen, ob der Name einer Function zweiter Stufe ,$\forall \mathfrak{a}\ [\phi(\mathfrak{a})]$‘ etwas bedeute, fragen wir, ob allgemein daraus, dass der Functionsname ,$\Phi(\xi)$‘ etwas bedeute, folge, dass ,$\forall \mathfrak{a}\ [\Phi(\mathfrak{a})]$‘ bedeutungsvoll sei. Nun hat ,$\Phi(\xi)$‘ eine Bedeutung, wenn für jeden bedeutungsvollen Eigennamen ,Δ‘ ,$\Phi(\Delta)$‘ etwas bedeutet. Ist dies der Fall, so ist diese Bedeutung entweder immer (was auch ,Δ‘ bedeute) das Wahre oder nicht immer. Im ersten Falle bedeutet ,$\forall \mathfrak{a}\ [\Phi(\mathfrak{a})]$‘ das Wahre, im andern das Falsche. Es folgt also allgemein daraus, dass der eingesetzte Functionsname ,$\Phi(\xi)$‘ etwas bedeute, dass ,$\forall \mathfrak{a}\ [\Phi(\mathfrak{a})]$‘ etwas bedeute. Folglich ist der Functionsname ,$\forall \mathfrak{a}\ [\phi(\mathfrak{a})]$‘ in den Kreis der bedeutungsvollen Namen aufzunehmen. In ähnlicher Weise folgt dies für ,$\forall \mathfrak{f}\ [\mu_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta))]$‘.

Weniger einfach ist die Sache bei ‚$\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\phi(\varepsilon))$‘; denn wir führen hiermit nicht blos einen neuen Functionsnamen, sondern zugleich zu jedem Namen einer Function erster Stufe mit einem Argumente einen neuen Eigennamen (Werthverlaufsnamen) ein, und zwar nicht nur zu den schon bekannten, sondern im voraus zu allen, die etwa noch eingeführt werden mögen. Der Untersuchung, ob ein Werthverlaufsname etwas bedeute, brauchen wir nur solche zu unterwerfen, welche aus bedeutungsvollen Namen von Functionen erster Stufe mit einem Argumente gebildet sind. Wir wollen dies kurz **rechte** Werthverlaufsnamen nennen. Wir müssen prüfen, ob ein rechter Werthverlaufsname, an die Argumentstellen von ‚$\text{—}\,\xi$‘ und ‚$\neg\;\xi$‘ gesetzt, einen bedeutungsvollen Eigennamen ergebe, und ferner, ob er, an die ξ- oder an die ζ-Argumentstellen von ‚$\zeta \rightarrow \xi$‘ und ‚$\xi = \zeta$‘ gesetzt, je einen bedeutungsvollen Namen einer Function erster Stufe mit einem Argumente bilde. Setzen wir den Werthverlaufsnamen ‚$\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon))$‘ für ‚$\zeta$‘ in ‚$\xi = \zeta$‘ ein, so ist also die Frage, ob ‚$\xi = \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon))$‘ ein bedeutungsvoller Name einer Function erster Stufe mit einem Argumente sei, und dazu ist wieder zu fragen, ob alle Eigennamen etwas bedeuten, die hieraus dadurch hervorgehen, dass wir in die Argumentstelle entweder einen Namen eines Wahrheitswerthes oder einen rechten Werthverlaufsnamen setzen. Durch unsere Festsetzungen, dass ‚$\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\Psi(\varepsilon)) = \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon))$‘ immer gleichbedeutend sein solle mit ‚$\forall\mathfrak{a}\,[\Psi(\mathfrak{a}) = \Phi(\mathfrak{a})]$‘, dass ‚$\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\,\varepsilon)$‘ das Wahre und dass ‚$\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \neg\;\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{a} = \mathfrak{a}])$‘ das Falsche bedeuten solle, ist in jedem Falle einem Eigennamen von der Form ‚$\Gamma = \Delta$‘ eine Bedeutung gesichert, wenn ‚Γ‘ und ‚Δ‘ rechte Werthverlaufsnamen oder Namen von Wahrheitswerthen sind. Damit ist auch bekannt, dass wir aus dem Functionsnamen ‚$\xi = (\xi = \xi)$‘ immer einen bedeutungsvollen Eigennamen erhalten, wenn wir in die Argumentstellen einen rechten Werthverlaufsnamen setzen. Da nun gemäss unsern Bestimmungen die Function $\text{—}\,\xi$ für dasselbe Argument immer denselben Werth hat wie die Function $\xi = (\xi = \xi)$, so ist auch von dem Functionsnamen ‚$\text{—}\,\xi$‘ bekannt, dass aus ihm durch Einsetzung eines rechten Werthverlaufsnamens immer ein Eigenname eines Wahrheitswerthes hervorgeht. | Nach unsern Bestimmungen haben die Namen ‚$\neg\;\Delta$‘ und ‚$\Delta \rightarrow \Gamma$‘ immer dann Bedeutungen, wenn die Namen ‚$\text{—}\,\Delta$‘ und ‚$\text{—}\,\Gamma$‘ etwas bedeuten. Da dies nun der Fall ist, wenn ‚Γ‘ und ‚Δ‘ rechte Werthverlaufsnamen sind, so erhalten wir aus den Functionsnamen ‚$\neg\;\xi$‘ und ‚$\zeta \rightarrow \xi$‘ immer dadurch bedeutungsvolle Eigennamen, dass wir in die Argumentstellen rechte Werthverlaufsnamen oder Namen von Wahrheitswerthen setzen. Wir haben gesehen, dass jeder unserer bisher als bedeutungsvoll anerkannten einfachen Namen von Functionen erster Stufe ‚$\text{—}\,\xi$‘, ‚$\neg\;\xi$‘, ‚$\zeta \rightarrow \xi$‘, ‚$\xi = \zeta$‘ durch Aufnahme von rechten Werthverlaufsnamen an die Argumentstellen bedeutungsvolle Namen liefert. Die rechten Werthverlaufsnamen dürfen also in unsern Kreis von bedeutungsvollen Namen aufgenommen werden. Damit ist aber dasselbe für unsern Functionsnamen ‚$\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\phi(\varepsilon))$‘ entschieden, da nun allgemein daraus, dass ein Name einer Function erster Stufe mit einem Argumente etwas bedeute, folgt, dass der durch dessen Einsetzung in ‚$\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\phi(\varepsilon))$‘ entstehende Eigenname etwas bedeute.

S.49

Es fehlt von unsern ursprünglichen Namen jetzt nur noch‚$\text{ɿ}\xi$‘. Wir haben nun bestimmt, dass ‚$\text{ɿ}\Delta$‘ Γ bedeuten soll, wenn ‚Δ‘ ein Name des Werthverlaufs $\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \Gamma)$ ist, dass dagegen ‚$\text{ɿ}\Delta$‘ Δ bedeuten soll, wenn es keinen Gegenstand Γ der Art giebt, dass ‚Δ‘ ein Name des Werthverlaufs $\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \Gamma)$ ist. Hierdurch ist für alle Fälle einem Eigennamen von der Form ‚$\text{ɿ}\Delta$‘ und damit dem Functionsnamen ‚$\text{ɿ}\xi$‘ eine Bedeutung gesichert.

§ 32. So ist gezeigt, dass unsere acht ursprünglichen Namen eine Bedeutung haben, und damit, dass auch von allen rechtmässig aus ihnen zusammengesetzten Namen dasselbe gilt. Aber nicht nur eine Bedeutung, sondern auch ein Sinn kommt allen rechtmässig aus unsern Zeichen gebildeten Namen zu. Jeder solche Name eines Wahrheitswerthes **drückt** einen

Sinn, einen **Gedanken aus**. Durch unsere Festsetzungen ist nämlich bestimmt, unter welchen Bedingungen er das Wahre bedeute. Der Sinn dieses Namens, der **Gedanke** ist der, dass diese Bedingungen erfüllt sind. Ein Begriffsschriftsatz besteht nun aus dem Urtheilstriche und aus einem Namen oder einer lateinischen Marke eines Wahrheitswerthes. ■→Eine solche Marke verwandelt sich aber in den Namen eines Wahrheitswerthes durch Einführung deutscher Buchstaben statt der lateinischen mit Vorsetzung von Allquantoren nach § 17.←■[100] [#57] Denken wir dies ausgeführt, so haben wir nur den Fall, dass der Satz aus dem Urtheilstriche und einem Namen eines Wahrheitswerthes zusammengesetzt ist. Durch einen solchen Satz wird nun behauptet, dass dieser Name das Wahre bedeute. Da er nun zugleich einen Gedanken ausdrückt, so haben wir in jedem rechtmässig gebildeten Begriffsschriftsatze ein Urtheil, dass ein
Gedanke wahr sei; und | ein Gedanke kann nun gar nicht fehlen. Es wird die Aufgabe des S.50
Lesers sein, sich den Gedanken jedes vorkommenden Begriffsschriftsatzes klar zu machen, und ich werde mich bemühen, dies im Anfange möglichst zu erleichtern.

Die einfachen oder selbst schon zusammengesetzten Namen nun, aus denen der Name eines Wahrheitswerthes besteht, tragen dazu bei, den Gedanken auszudrücken, und dieser Beitrag des einzelnen ist sein **Sinn**. Wenn ein Name Theil des Namens eines Wahrheitswerthes ist, so ist der Sinn jenes Namens Theil des Gedankens, den dieser ausdrückt.

§ 33. Für die Definitionen sind folgende Grundsätze maassgebend.

1. Jeder aus den definirten Namen rechtmässig gebildete Name muss eine Bedeutung haben. Es muss sich also immer ein aus unsern acht Urnamen zusammengesetzter Name angeben lassen, der gleichbedeutend mit ihm ist, und dieser muss bis auf die unwesentliche Wahl deutscher und griechischer Buchstaben durch die Definitionen unzweideutig bestimmt sein.

2. Daraus folgt, dass nie dasselbe doppelt definirt werden darf, weil dann zweifelhaft bliebe, ob diese Definitionen im Einklange mit einander wären.

3. Der definirte Name muss einfach sein; d. h. er darf nicht aus bekannten oder noch zu erklärenden Namen zusammengesetzt sein; denn sonst bliebe zweifelhaft, ob die Erklärungen der Namen mit einander im Einklange wären.

4. Wenn wir in der Definitionsgleichung links einen Eigennamen haben, der aus unsern Urnamen oder definirten Namen rechtmässig gebildet ist, so hat dieser immer eine Bedeutung, und wir werden rechts ein einfaches noch nicht verwendetes Zeichen setzen können, das nun durch die Definition als gleichbedeutender Eigenname eingeführt wird, sodass wir in Zukunft dieses Zeichen überall, wo es vorkommt, durch den links stehenden Namen ersetzen dürfen. Selbstverständlich darf es nie als Functionsname verwendet werden, weil damit der Rückgang auf die Urnamen abgeschnitten wäre.

5. Ein Name, der für eine Function erster Stufe mit einem Argumente eingeführt wird, darf nur eine einzige Argumentstelle enthalten. Bei mehren Argumentstellen wäre es möglich, diese mit verschiedenen Namen auszufüllen, und dann würde der definirte Name als der einer Function mit mehren Argumenten gebraucht, während er nicht als solcher definirt wäre. Wenn ein Name einer Function erster Stufe mit einem Argumente definirt wird, müssen die Argumentstellen auf der linken Seite der Definitionsgleichung mit einem lateinischen Gegenstandsbuchstaben ausgefüllt werden, der auch rechts die Argumentstelle des neuen Functionsnamens kenntlich macht. Die Definition besagt dann, dass der Eigenname, der rechts
durch | Einsetzung eines bedeutungsvollen Eigennamens in die Argumentstelle entsteht, im- S.51

[100]Eine solche Marke verwandelt sich aber in den Namen eines Wahrheitswerthes durch Einführung deutscher Buchstaben statt der lateinischen mit Vorsetzung von Höhlungen nach § 17.

[#57]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

mer gleichbedeutend sein solle mit dem links durch Einsetzung desselben Eigennamens in alle Argumentstellen entstehenden. Die eine Argumentstelle des erklärten Namens vertritt also alle des erklärenden. Wo nun auch der definirte Functionsname weiterhin vorkommen mag, immer muss seine Argumentstelle mit einem Eigennamen oder einer Gegenstandsmarke ausgefüllt sein.

6. Ein Name, der für eine Function erster Stufe mit zwei Argumenten eingeführt wird, muss zwei und darf nicht mehr Argumentstellen enthalten. Die unter einander verwandten Argumentstellen links müssen mit einem und demselben lateinischen Gegenstandsbuchstaben besetzt sein, der auch rechts eine der beiden Argumentstellen kenntlich macht; die nicht verwandten Argumentstellen müssen verschiedene lateinische Buchstaben enthalten. Die Definition besagt dann, dass der Eigenname, der rechts durch Einsetzung von bedeutungsvollen Eigennamen in die Argumentstellen entsteht, immer gleichbedeutend sein solle mit dem links durch Einsetzung derselben Eigennamen in die entsprechenden Argumentstellen entstehenden. Die eine Argumentstelle rechts vertritt also alle ξ-Argumentstellen links, die andere alle ζ-Argumentstellen.

7. Es darf also nie auf der einen Seite einer Definitionsgleichung ein lateinischer Buchstabe vorkommen, der nicht auch auf der andern steht. Wenn die Gegenstandsmarke auf der linken Seite sich in einen rechtmässig gebildeten Eigennamen verwandelt, falls die lateinischen Buchstaben durch Eigennamen ersetzt werden, so hat nach unsern Festsetzungen der erklärte Functionsname stets eine Bedeutung.

Andere als die eben besprochenen Fälle werden weiterhin nicht vorkommen.

Besondere Definitionen.

§ 34. Es ist schon im § 25 darauf hingewiesen worden, dass man statt der Functionen zweiter Stufe im weitern Fortgange Functionen erster Stufe verwenden kann. Dies soll nun gezeigt werden. Wie dort angedeutet worden, wird dies dadurch möglich, dass die Functionen, die als Argumente der Function zweiter Stufe erscheinen, durch ihre Werthverläufe vertreten werden, natürlich nicht so, dass sie diesen einfach ihre Stelle einräumen; denn das ist unmöglich. Es handelt sich zunächst nur darum, den Werth der Function $\Phi(\xi)$ für das Argument Δ, also $\Phi(\Delta)$ mittels ‚Δ'und und‚$\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon))$' zu bezeichnen. Ich mache dies so:

$$‚\Delta \mathbin{ə} \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon))\text{'},$$

was gleichbedeutend mit ‚$\Phi(\Delta)$' sein soll. Der Gegenstand $\Phi(\Delta)$ erscheint also als Werth der Function $\xi \mathbin{ə} \zeta$ mit zwei Argumenten für Δ als ξ-Argument und$\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon))$ als ζ-Argument.
S.52 Es muss nun aber $\xi \mathbin{ə} \zeta$ für alle | möglichen Gegenstände als Argumente erklärt werden. Dies kann so geschehn:

$$a \mathbin{ə} u := \iota\mathrm{ext}\,\alpha\,(\neg\ \forall\mathfrak{g}\,[u = \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(a) = \alpha]) \qquad \text{(A}$$

Da hier eine Function mit zwei Argumenten definirt wird, kommen zwei lateinische Buchstaben links und rechts vor. Obwohl der erklärende Ausdruck nur bekannte Bezeichnungen enthält, mögen einige Erläuterungen nicht überflüssig sein. Wir haben links eine lateinische Marke, die aus dem Eigennamen ‚$\iota\mathrm{ext}\,\alpha\,(\neg\ \forall\mathfrak{g}\,[\Gamma = \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(\Theta) = \alpha])$' dadurch hervorgeht, dass ‚Θ' durch ‚a' und ‚Γ' durch u ersetzt werden. Dieser Eigenname hat die Form von $\iota\mathrm{ext}\,\alpha\,(\Phi(\alpha))$. Es sind dabei nach § 11 zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem sich ein Gegenstand Δ angeben lässt, der als einziger unter den Begriff — $\Phi(\xi)$ fällt, oder nicht. Im ersten Falle ist Δ selbst $\iota\mathrm{ext}\,\alpha\,(\Phi(\alpha))$. Auf unsern Fall angewendet, heisst dies, wenn es einen Gegenstand Δ giebt, so dass $\neg\ \forall\mathfrak{g}[\Gamma = \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(\Theta) = \Delta]$ das Wahre ist, während die Function $\neg\ \forall\mathfrak{g}[\Gamma = \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(\Theta) = \xi]$ für alle von Δ verschiedenen Argumente das Falsche als Werth hat, so ist Δ selbst $\iota\mathrm{ext}\,\alpha\,(\neg\ \forall\mathfrak{g}\,[\Gamma = \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(\Theta) = \alpha])$. Nun ist $\neg\ \forall\mathfrak{g}\,[\Gamma = \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(\Theta) = \Delta]$ das Wahre, wenn es eine Function erster

Stufe eines Arguments giebt, deren Werth für das Argument Θ Δ ist und deren Werthverlauf Γ ist. Sonst ist $\neg\ \forall \mathfrak{g}\ [\Gamma = \operatorname{ext}\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(\Theta) = \Delta]$ das Falsche. Nehmen wir an, Γ sei ein Werthverlauf, so ist durch Γ bestimmt, welchen Werth eine Function, deren Werthverlauf Γ ist, für das Argument Θ hat. Es giebt dann immer einen solchen Werth und nur einen einzigen und dieser Werth ist $\imath\operatorname{ext}\alpha\,(\neg\ \forall \mathfrak{g}\ [\Gamma = \operatorname{ext}\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(\Theta) = \alpha])$ oder $\Theta \mathbin{\text{ə}} \Gamma$. Wenn aber Γ gar kein Werthverlauf ist, so hat die Function $\neg\ \forall \mathfrak{g}\ [\Gamma = \operatorname{ext}\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(\Theta) = \xi]$ für jedes Argument das Falsche als Werth, und dann ist unsere Festsetzung heranzuziehn, dass ‚$\imath\Lambda$' Λ selbst bedeuten soll, wenn es keinen Gegenstand Λ der Art giebt, dass Λ der Werthverlauf $\operatorname{ext}\varepsilon\,(\Delta = \varepsilon)$ ist. Demnach bedeutet ‚$\Theta \mathbin{\text{ə}} \Gamma$', wenn Γ kein Werthverlauf ist, den Werthverlauf einer Function, deren Werth für jedes Argument das Falsche ist, also $\operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon)$.

Fassen wir Alles zusammen, so müssen zwei Fälle unterschieden werden, wenn der Werth der Function $\xi \mathbin{\text{ə}} \zeta$ bestimmt werden soll. Wenn das ζ-Argument ein Werthverlauf ist, so ist der Werth der Function $\xi \mathbin{\text{ə}} \zeta$ der Werth der Function, deren Werthverlauf das ζ-Argument ist, für das ξ-Argument als Argument. Wenn dagegen das ζ-Argument kein Werthverlauf ist, so ist der Werth der Function $\xi \mathbin{\text{ə}} \zeta$ für jedes ξ-Argument $\operatorname{ext}\varepsilon\,(—\varepsilon = \varepsilon)$.

| S.53

§ 35. Wir sehen hier bestätigt, was wir den vorausgeschickten Ueberlegungen entnehmen können, dass der Functionsname ‚$\xi \mathbin{\text{ə}} \zeta$' eine Bedeutung hat. Dies allein ist für die spätern Beweisführungen grundlegend; im Uebrigen könnte unsere Erläuterung falsch sein, ohne die Richtigkeit jener Beweise in Frage zu stellen; denn nur die Definition selbst ist die Grundlage für diesen Aufbau. Sie sollte, wie anfangs gesagt, dazu dienen, eine Function erster Stufe statt einer zweiter Stufe verwenden zu können. Sehen wir nun an Beispielen, wie dieser Zweck erreicht wird! Wir haben in § 22 die Function zweiter Stufe $\phi(2)$ angeführt. Jetzt können wir für ‚$\phi(2)$' schreiben ‚$2 \mathbin{\text{ə}} \operatorname{ext}\varepsilon\,(\phi(\varepsilon))$'. Dies ist noch immer der Name einer Function zweiter Stufe; schreiben wir aber für ‚$\operatorname{ext}\varepsilon\,(\phi(\varepsilon))$' ‚$\xi$', so haben wir in ‚$2 \mathbin{\text{ə}} \xi$' den Namen einer Function erster Stufe. Die Function $\phi(2)$ hat für die Function $\Phi(\xi)$ als Argument denselben Werth $\Phi(2)$ wie die Function $2 \mathbin{\text{ə}} \xi$ für $\operatorname{ext}\varepsilon\,(\Phi(\varepsilon))$ als Argument. Wenn als Argument der Function $2 \mathbin{\text{ə}} \xi$ ein Gegenstand genommen wird, der kein Werthverlauf ist, so haben wir kein entsprechendes Argument der Function zweiter Stufe $\phi(2)$ und die gegenseitige Vertretbarkeit der beiden Functionen erster und zweiter Stufe hört auf.

Den Functionen zweiter Stufe

$$\neg\ \forall \mathfrak{a}\ [\neg\ \phi(\mathfrak{a})]$$

und

$$\forall \mathfrak{a}\ [\phi(\mathfrak{a}) \rightarrow \forall \mathfrak{e}\ [\phi(\mathfrak{e}) \rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{e}]]$$

entsprechen in derselben Weise die Functionen erster Stufe

$$\neg\ \forall \mathfrak{a}\ [\neg\ (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \xi)]$$

und

$$\forall \mathfrak{a}\ [\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \xi \rightarrow \forall \mathfrak{e}\ [\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} \xi \rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{e}]]$$

§ 36. Um andere Beispiele zu finden, suchen wir Functionen mit zwei Argumenten in ähnlicher Weise durch Gegenstände vertreten zu lassen, wie wir es bei Functionen mit einem Argumente gethan haben. Ein einfacher Werthverlauf kann hierzu freilich nicht gebraucht werden, sondern nur ein Doppelwerthverlauf, der das für eine Function mit zwei Argumenten ist, was jener für eine Function mit einem Argumente ist.

Wir gehn beispielsweise aus von der Function mit zwei Argumenten $\xi + \zeta$. Nehmen wir als ζ-Argument z. B. die Zahl 3, so haben wir in $\xi + 3$ nur noch eine Function mit einem Argumente, deren Werthverlauf $\operatorname{ext}\varepsilon\,(\varepsilon + 3)$ ist. Das Entsprechende gilt für jedes ζ-Argument, und wir haben in $\operatorname{ext}\varepsilon\,(\varepsilon + \zeta)$ eine Function eines Arguments, deren Werth immer ein Werthverlauf ist. Denken wir uns das ξ- und das ζ-Argument sowie den Werth der Function $\xi + \zeta$ als rechtwinklige Coordinaten im Raume dargestellt, so können wir uns den Werthverlauf $\operatorname{ext}\varepsilon\,(\varepsilon + 3)$ durch eine Gerade veranschaulichen. Lassen wir das ζ-Argument sich stetig ändern, so verschiebt sich diese Gerade und beschreibt dabei eine Ebene. In jeder ihrer Lagen veranschaulicht sie einen Werthverlauf, den Werth der Function $\operatorname{ext}\varepsilon\,(\varepsilon + \zeta)$ für ein gewisses
S.54 ζ-Argument. Der Werthverlauf der Function $\operatorname{ext}\varepsilon\,(\varepsilon+\zeta)$ ist nun $\mid\ \operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\,(\varepsilon+\alpha)$, und dies nenne ich einen **Doppelwerthverlauf**. Es ist nun

$$\Delta \mathbin{\text{ə}} \operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\,(\varepsilon + \alpha) = \operatorname{ext}\varepsilon\,(\varepsilon + \Delta)$$

das Wahre und ebenso

$$\Gamma \mathbin{\text{ə}} (\Delta \mathbin{\text{ə}} \operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\,(\varepsilon + \alpha)) = \Gamma \mathbin{\text{ə}} \operatorname{ext}\varepsilon\,(\varepsilon + \Delta),$$

und da

$$\Gamma \mathbin{\text{ə}} \operatorname{ext}\varepsilon\,(\varepsilon + \Delta) = \Gamma + \Delta$$

das Wahre ist, so ist auch

$$\Gamma \mathbin{\text{ə}} (\Delta \mathbin{\text{ə}} \operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\,(\varepsilon + \alpha)) = \Gamma + \Delta$$

das Wahre. Hier sehen wir links einen Doppelwerthverlauf die Function mit zwei Argumenten rechts vertreten, freilich nicht so, dass das Vertretende die Stelle des Vertretenen einfach einnimmt, was unmöglich ist, sondern nur so, dass links im Doppelwerthverlaufe das Besondere der Function rechts steckt, wodurch sie sich von andern Functionen erster Stufe mit zwei Argumenten unterscheidet. Wenn die Function mit zwei Argumenten eine Beziehung ist, sagen wir für ‚Doppelwerthverlauf' auch ‚**Umfang** der Beziehung'.

Man kann noch fragen, was $\Gamma \mathbin{\text{ə}} (\Delta \mathbin{\text{ə}} \Theta)$ sei, wenn Θ kein Doppelwerthverlauf, sondern entweder nur ein einfacher oder gar kein Werthverlauf sei. Im ersten Falle ist $\Delta \mathbin{\text{ə}} \Theta$ kein Werthverlauf, und folglich ist dann $\Gamma \mathbin{\text{ə}} (\Delta \mathbin{\text{ə}} \Theta)$ dasselbe wie $\operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon)$. Im andern Falle fällt $\Delta \mathbin{\text{ə}} \Theta$ mit $\operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon)$ zusammen, und

$$\Gamma \mathbin{\text{ə}} (\Delta \mathbin{\text{ə}} \Theta) = \Gamma \mathbin{\text{ə}} \operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon)$$

ist das Wahre; mithin ist auch $\Gamma \mathbin{\text{ə}} (\Delta \mathbin{\text{ə}} \Theta) = (\neg\ \Gamma = \Gamma)$ das Wahre; d. h. $\Gamma \mathbin{\text{ə}} (\Delta \mathbin{\text{ə}} \Theta)$ ist dann das Falsche.

§ 37. Statt der Function zweiter Stufe

$$\forall \mathfrak{e}\, \forall \mathfrak{d}\, [\phi(\mathfrak{e}, \mathfrak{d}) \to \forall \mathfrak{a}\, [\phi(\mathfrak{e}, \mathfrak{a}) \to \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]]$$

(§ 23) können wir nun nun die Function erster Stufe

$$\forall \mathfrak{e}\, \forall \mathfrak{d}\, [\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} \xi) \to \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \xi) \to \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]]$$

betrachten. Wir führen dafür eine einfache Bezeichnungsweise ein, indem wir definiren:

$$\operatorname{funk}(p) := (\forall \mathfrak{e}\, \forall \mathfrak{d}\, [\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} p) \to \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} p) \to \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]]) \qquad (\Gamma$$

Es ist nach § 23

$$\forall \mathfrak{e}\, \forall \mathfrak{d}\, [\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} \Delta) \to \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \Delta) \to \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]]$$

der Wahrheitswerth davon, dass die Beziehung $—\xi \mathbin{\text{ə}} (\zeta \mathbin{\text{ə}} \Delta)$ eindeutig ist; d. h. dass es für jedes ξ-Argument kein oder nur ein ζ-Argument giebt, für das der Werth unserer Function das Wahre ist, oder, wie wir auch sagen können, dass es zu jedem Gegenstande höchstens einen giebt, zu dem er in der Beziehung $—\xi \mathbin{\text{ə}} (\zeta \mathbin{\text{ə}} \Delta)$ steht. Wenn Δ kein Doppelwerthverlauf ist, so ist nach § 36 der Werth der Function $\xi \mathbin{\text{ə}} (\xi \mathbin{\text{ə}} \Delta)$ entweder das Falsche oder

$\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon)$. Da dieses nicht das Wahre ist, so ist der Werth der Function $—\xi ə (\zeta ə \Delta)$ immer das Falsche, wenn Δ kein Doppelwerthverlauf ist; d. h. es ist dann $—\xi ə (\zeta ə \Delta)$ eine Beziehung, in der kein Gegenstand zu einem Gegenstande steht. Dann ist $\text{funk}\,(\Delta)$ das Wahre. Den Functionsnamen ‚$\text{funk}\,(\xi)$' führen wir besonders in Hinblick auf die Fälle ein, wo als Argument der Umfang einer Beziehung auftritt. Ist diese Beziehung $\mathrm{X}(\xi, \zeta)$, so ist $\text{funk}\,(\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\mathrm{X}(\varepsilon, \alpha)))$ das Wahre, wenn die Beziehung $\mathrm{X}(\xi, \zeta)$ eindeutig ist (im Fortgange | vom ξ- zum ζ-Argumente). Also z. B. $\vdash\ \text{funk}\,(\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon^2 = \alpha))$. Nach unserer S.55
Definition darf ‚$\text{funk}\,()$' immer nur als Functionszeichen gebraucht werden, dass dem Argumentzeichen oder dessen Vertreter vorhergeht.

§ 38. Wir können nun unserm Ziele, der Definition der Zahl näher rücken. Ich habe sie in meinen Grundlagen der Arithmetik auf die Beziehung gegründet, die ich Gleichzahligkeit genannt habe. Im § 72 (S. 85) meiner Grundlagen definire ich:

Der Ausdruck ‚der Begriff F ist gleichzahlig dem Begriffe G' sei gleichbedeutend mit dem Ausdrucke ‚es giebt eine Beziehung ϕ, welche die unter den Begriff F fallenden Gegenstände den unter G fallenden Gegenständen beiderseits eindeutig zuordnet'.

Was heisst es nun, dass die Beziehung ϕ die unter den Begriff F fallenden Gegenstände den unter den Begriff G fallenden zuordne? Es heisst (§ 71 der Grundlagen), dass jeder Gegenstand, der unter F fällt, in der Beziehung ϕ zu einem unter G fallenden Gegenstande stehe, oder genauer, dass die beiden Sätze ‚a fällt unter F' und ‚a steht zu keinem unter G fallenden Gegenstande in der Beziehung ϕ' für kein a mit einander bestehen können.

Wir nehmen nun als Begriff F $—\xi ə \Gamma$, als Begriff G $—\xi ə \Delta$, als Beziehung ϕ $—\xi ə (\zeta ə \Upsilon)$. Dann können wir das Gesagte in Begriffsschriftzeichen so ausdrücken:

$$\forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} ə (\mathfrak{a} ə \Upsilon) \to \neg\ \mathfrak{a} ə \Delta] \to \neg\ \mathfrak{d} ə \Gamma]$$ [101]

Die Beziehung muss eindeutig sein. Fügen wir dies noch hinzu, so haben wir

$$\neg\ (\text{funk}\,(\Upsilon) \to \neg\ \forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} ə (\mathfrak{a} ə \Upsilon) \to \neg\ \mathfrak{a} ə \Delta] \to \neg\ \mathfrak{d} ə \Gamma])$$

(Ueber ‚und' vergleiche man § 12.) Wir betrachten dies als Werth der Function mit zwei Argumenten

$$\neg\ (\text{funk}\,(\Upsilon) \to \neg\ \forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} ə (\mathfrak{a} ə \Upsilon) \to \neg\ \mathfrak{a} ə \zeta] \to \neg\ \mathfrak{d} ə \xi])$$

für die Argumente Γ und Δ. Diese Function ist eine Beziehung. Ihr Doppelwerthverlauf ist

$$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\text{funk}\,(\Upsilon) \to \neg\ \forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} ə (\mathfrak{a} ə \Upsilon) \to \neg\ \mathfrak{a} ə \alpha] \to \neg\ \mathfrak{d} ə \varepsilon])]$$

Wir sehen ihn an als Werth der Function

$$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\text{funk}\,(\xi) \to \neg\ \forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} ə (\mathfrak{a} ə \xi) \to \neg\ \mathfrak{a} ə \alpha] \to \neg\ \mathfrak{d} ə \varepsilon])]$$

für das Argument Υ. Für diese Function führen wir durch folgende Definition einen kurzen Namen ein:

$$p :\twoheadrightarrow\ := \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\text{funk}\,(p) \to \neg\ \forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} ə (\mathfrak{a} ə p) \to \neg\ \mathfrak{a} ə \alpha] \to \neg\ \mathfrak{d} ə \varepsilon])] \quad (\Delta$$

Der Werth dieser Function ist immer der Umfang einer Beziehung. Was ist nun $\Gamma ə (\Delta ə \Upsilon :\twoheadrightarrow$)? Nach der Definition ist hierfür zu setzen

$$\Gamma ə [\Delta ə \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\text{funk}\,(\Upsilon) \to \neg\ \forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} ə (\mathfrak{a} ə \Upsilon) \to \neg\ \mathfrak{a} ə \alpha] \to \neg\ \mathfrak{d} ə \varepsilon])]]$$

| oder S.56

$$\neg\ (\text{funk}\,(\Upsilon) \to \neg\ \forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} ə (\mathfrak{a} ə \Upsilon) \to \neg\ \mathfrak{a} ə \Delta] \to \neg\ \mathfrak{d} ə \Gamma])$$

Dies ist der Wahrheitswerth davon, dass die Beziehung $—\xi ə (\zeta ə \Upsilon)$ die unter den Begriff $—\xi ə \Gamma$ fallenden Gegenstände solchen, die unter den Begriff $—\xi ə \Delta$ fallen, eindeutig zuordne. Wir wollen dafür den kürzern Ausdruck einführen ‚die Υ-Beziehung **bildet** den Γ-

[101] Dem ‚a' im Wortausdrucke entspricht hier ‚$\mathfrak{d}$'.

Begriff in den Δ-Begriff **ab**‘, indem wir allgemein einen Begriff, dessen Umfang Γ ist, Γ-**Begriff** und eine Beziehung, deren Umfang Υ ist, Υ-**Beziehung** nennen.

§ 39. Wenn nun Gleichzahligkeit zwischen den Begriffen bestehen soll, so muss es eine Beziehung geben, von der nicht nur das gilt, was wir eben von der Υ-Beziehung sagten, sondern von deren Umkehrung auch das Entsprechende gilt mit Vertauschung der Rollen von Γ und Δ, sodass sie den Δ-Begriff in den Γ-Begriff abbildet. Zu diesem Zwecke ist es wünschenswerth, einen Functionsnamen ‚ξ^{-1}‘ einzuführen der Art, dass, wenn Υ der Umfang einer Beziehung ist, Υ^{-1} der Umfang von deren Umkehrung ist. Zu diesem Zwecke definiren wir

$$p^{-1} := \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\alpha \mathbin{\text{ə}} (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} p)) \qquad \text{(E}$$

Es ist dann die Beziehung

$$—\xi \mathbin{\text{ə}} (\zeta \mathbin{\text{ə}} \Upsilon^{-1}) \text{ oder}$$
$$—\xi \mathbin{\text{ə}} (\zeta \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\alpha \mathbin{\text{ə}} (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \Upsilon)))$$

dieselbe wie $—\zeta \mathbin{\text{ə}} (\xi \mathbin{\text{ə}} \Upsilon)$.

§ 40. Um also dasselbe von der Umkehrung der Beziehung $—\xi \mathbin{\text{ə}} (\zeta \mathbin{\text{ə}} \Upsilon)$ zu sagen, was wir von ihr selbst gesagt haben, brauchen wir nur ‚Υ‘ durch ‚Υ^{-1}‘ zu ersetzen. Demnach ist $\neg\ (\Delta \mathbin{\text{ə}} (\Gamma \mathbin{\text{ə}} \Upsilon^{-1}\ :\twoheadrightarrow\ )\ \rightarrow\ \neg\ \Gamma \mathbin{\text{ə}} (\Delta \mathbin{\text{ə}} \Upsilon\ :\twoheadrightarrow\ ))$ der Wahrheitswerth davon, dass die Υ-Beziehung den Γ-Begriff in den Δ-Begriff, und dass deren Umkehrung diesen in jenen abbilde, natürlich in der Voraussetzung, dass Γ und Δ Begriffsumfänge seien und Υ ein Beziehungsumfang. Damit nun diese Begriffe gleichzahlig seien, muss es eine solche Beziehung geben. Es ist $—\xi \mathbin{\text{ə}} (\zeta \mathbin{\text{ə}} \Upsilon)$ immer eine Beziehung, was auch ‚Υ‘ für einen Gegenstand bedeuten möge, und jede Beziehung lässt sich in der Form ‚$—\xi \mathbin{\text{ə}} (\zeta \mathbin{\text{ə}} \Upsilon)$‘ bezeichnen, indem man für Υ ihren Umfang nimmt. Danach ist $\neg\ \forall\mathfrak{q}\,[\Delta \mathbin{\text{ə}} (\Gamma \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow \neg\ \Gamma \mathbin{\text{ə}} (\Delta \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow\ )]$ der Wahrheitswerth davon, dass die Begriffe $—\xi \mathbin{\text{ə}} \Gamma$ und $—\xi \mathbin{\text{ə}} \Delta$ gleichzahlig seien. Wir können dies als Werth der Function $\neg\ \forall\mathfrak{q}\,[\Delta \mathbin{\text{ə}} (\xi \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow \neg\ \xi \mathbin{\text{ə}} (\Delta \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow\ )]$ für das Argument Γ ansehen. Diese Function ist ein Begriff, dessen Umfang $\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \forall\mathfrak{q}[\Delta \mathbin{\text{ə}} (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\Delta \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q}\ :\twoheadrightarrow\ )])$ ist. Und nach meiner Definition (Grundlagen § 68) ist dieser Begriffsumfang die **Anzahl**, die dem Begriffe $—\xi \mathbin{\text{ə}} \Delta$ zukommt. Statt ‚Anzahl, die dem Δ-Begriffe zukommt‘ sage ich auch kurz ‚Anzahl des Δ-Begriffes‘. Ich definire nun:

$$\text{anz}\,(u) := \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \forall\mathfrak{q}\,[u \mathbin{\text{ə}} (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow\ )]) \qquad \text{(Z}$$

§ 41. Danach ist $\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon)$ [#58]$)$ die Anzahl des $\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon)$-Begriffes oder
S.57 die Anzahl, die dem Begriffe $|\ \neg\ \xi = \xi$ zukommt, und dies ist die Anzahl Null (Grundlagen § 74). ■→Es ist wichtig, die Anzahl Null von der Zahl Null zu unterscheiden.←■[102] [#59] Ich definire

$$\text{anz}\,(0) := \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon)) \qquad (\Theta$$

[102] Später wird es sich als nothwendig erweisen, die Anzahl Null von der Zahl Null zu unterscheiden, und ich will darum jene durch einen schräg durchgehenden Strich auszeichnen.

[#58] im Original fehlt spiritus lenis [Fehlertyp: interp | Rev.: thiel]
[#59] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

§ 42. So definire ich auch (Grundlagen § 77)

$$\mathrm{anz}\,(1) := \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \mathrm{anz}\,(0))) \qquad \text{(I}$$

■→←■[103] [#60]$\mathrm{anz}\,(1)$ ist danach die Anzahl, die dem Begriffe $\xi = \mathrm{anz}\,(0)$ zukommt.

$\neg\ \forall \mathfrak{u}\,[\neg\ (\mathrm{anz}\,(\mathfrak{u} = \Gamma))]$ ist der Wahrheitswerth davon, dass es einen Begriff giebt, dem die Anzahl Γ zukommt, oder, wie wir auch sagen können, dass Γ eine Anzahl ist. Demnach nennen wir die Function $\neg\ \forall \mathfrak{u}\,[\neg\ (\mathrm{anz}\,(\mathfrak{u} = \xi))]$ den Begriff der **Anzahl**.

§ 43. Es ist nun noch die Beziehung zu erklären, in der ein Glied der Anzahlenreihe zum nächstfolgenden steht. Ich führe hier meine Definition (Grundlagen § 76) in etwas veränderter Fassung wieder an:

Wenn es einen Begriff $-\!\!-\,\xi \mathbin{\text{ə}} \Gamma$ und einen unter ihn fallenden Gegenstand Δ der Art giebt, dass die Anzahl, die dem Begriffe $-\!\!-\,\xi \mathbin{\text{ə}} \Gamma$ zukommt, Λ ist, und dass die Anzahl, die dem Begriffe $\neg\ (\xi \mathbin{\text{ə}} \Gamma\ \rightarrow\ \xi\ =\ \Delta)$ zukommt, Θ ist, so sage ich: Λ folgt in der Anzahlenreihe unmittelbar auf Θ.

Wir haben nun in

$$\neg\ (\mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \Gamma \rightarrow \varepsilon = \Delta))) = \Theta \rightarrow (\Delta \mathbin{\text{ə}} \Gamma \rightarrow \neg\ \mathrm{anz}\,(\Gamma) = \Lambda))$$

den Wahrheitswerth davon, dass Λ die Anzahl sei, die dem Begriffe $-\!\!-\,\xi \mathbin{\text{ə}} \Gamma$ zukomme, dass Δ unter diesen Begriff falle und dass Θ die Anzahl des $\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \Gamma \rightarrow \varepsilon = \Delta))$-Begriffes sei. Danach haben wir in

$$\neg\ \forall \mathfrak{u}\,\forall \mathfrak{a}\,[\mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{u} \rightarrow \varepsilon = \mathfrak{a}))) = \Theta \rightarrow (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{u} \rightarrow \neg\ \mathrm{anz}\,(\mathfrak{u}) = \Lambda)]$$

den Wahrheitswerth davon, dass Λ in der **Anzahlenreihe** unmittelbar auf Θ folge. Wir betrachten dies als Werth der Function

$$\neg\ \forall \mathfrak{u}\,\forall \mathfrak{a}\,[\mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{u} \rightarrow \varepsilon = \mathfrak{a}))) = \xi \rightarrow (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{u} \rightarrow \neg\ \mathrm{anz}\,(\mathfrak{u}) = \zeta)]$$

für die Argumente Θ und Λ. Der Umfang dieser Beziehung ist

$$\mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ \forall \mathfrak{u}\,\forall \mathfrak{a}\,[\mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{u} \rightarrow \varepsilon = \mathfrak{a}))) = \varepsilon \rightarrow (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{u} \rightarrow \neg\ \mathrm{anz}\,(\mathfrak{u}) = \alpha)]]$$

und dafür werde ein einfacher Name eingeführt:

$$\mathrm{nf}\ := \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ \forall \mathfrak{u}\,\forall \mathfrak{a}\,[\mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{u} \rightarrow \varepsilon = \mathfrak{a}))) = \varepsilon \rightarrow (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{u} \rightarrow \neg\ \mathrm{anz}\,(\mathfrak{u}) = \alpha)]] \qquad \text{(H}$$

Danach drückt ‚$\mathrm{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (\mathrm{anz}\,(1) \mathbin{\text{ə}} \mathrm{nf}\,)$‘ aus, dass $\mathrm{anz}\,(1)$ in der Anzahlenreihe unmittelbar auf $\mathrm{anz}\,(0)$ folge.

§ 44. Es mögen die sechs im § 78 meiner Grundlagen aufgeführten Sätze in unsern Zeichen folgen:

$$‚\ \vdash \mathrm{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} \mathrm{nf}\,) \rightarrow a = \mathrm{anz}\,(1)\ ‘$$

$$‚\ \vdash \mathrm{anz}\,(u) = \mathrm{anz}\,(1) \rightarrow \neg\ \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} u)]\ ‘$$

| S.58

$$‚\ \vdash \mathrm{anz}\,(u) = \mathrm{anz}\,(1) \rightarrow (d \mathbin{\text{ə}} u \rightarrow (a \mathbin{\text{ə}} u \rightarrow d = a))\ ‘,$$

$$‚\ \vdash \forall \mathfrak{d}\,[\mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} u \rightarrow \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} u \rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{d}]] \rightarrow (\neg\ \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \ \mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} u] \rightarrow \mathrm{anz}\,(u) = \mathrm{anz}\,(1))\ ‘$$

Ich überlasse es dem Leser, sich den Sinn selbst klar zu machen. ‚$\mathrm{funk}\,(\mathrm{nf}\,)$‘ drückt aus, dass die nf-Beziehung eindeutig sei, mit andern Worten: dass es zu jeder Anzahl nicht mehr als eine einzige gebe, die auf sie unmittelbar in der Anzahlenreihe folge. ‚$\mathrm{funk}\,(\mathrm{nf}^{\,-1})$‘ drückt

[103]Der schräge Strich in ‚$\mathrm{anz}\,(1)$‘ soll die Anzahl Eins von der Zahl Eins unterscheiden.

[#60]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

aus, dass es zu jeder Anzahl nicht mehr als eine einzige gebe, auf die sie unmittelbar in der Anzahlenreihe folge. Durch ‚$\vdash \neg\ (\mathrm{funk}\,(\mathrm{nf}^{-1}) \to \neg\ \mathrm{funk}\,(\mathrm{nf}\,))$‘ wird der fünfte jener Sätze wiedergegeben.

$$,\ \vdash \neg\ \forall\mathfrak{u}\,[\neg\ (\mathrm{anz}\,(\mathfrak{u}) = a)] \to (\neg\ a = \mathrm{anz}\,(0) \to \neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} \mathrm{nf}\,))])\ ‘$$

besagt, dass es zu jeder Anzahl mit Ausnahme der $\mathrm{anz}\,(0)$ eine ihr in der Anzahlenreihe unmittelbar vorhergehende gebe.

§ 45. Die nf -Beziehung ordnet die Anzahlen, sodass eine Reihe entsteht. Wir haben nun allgemein zu erklären, was das heisst ‚ein Gegenstand folgt auf einen Gegenstand in einer Reihe‘, wobei die Art dieser Reihe durch die Beziehung bestimmt ist, in der stets ein Glied der Reihe zum nächstfolgenden steht. Ich wiederhole die im § 79 meiner Grundlagen und in der Begriffsschrift gegebene Erklärung in etwas andern Worten.

Wenn der Satz

> ‚wenn jeder Gegenstand, zu dem Δ in der Υ-Beziehung steht, unter den Begriff $-F(\xi)$ fällt, und wenn daraus, dass ein Gegenstand unter diesen Begriff fällt, allgemein folgt, dass jeder Gegenstand, zu dem jener in der Υ-Beziehung steht, gleichfalls unter den Begriff $-F(\xi)$ falle, so fällt Θ unter diesen Begriff‘

allgemein für jeden Begriff $-F(\xi)$ gilt, so sagen wir: ‚Θ **folgt** in der Υ-**Reihe** auf Δ‘. Danach ist

$$\forall\mathfrak{F}\,[\forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{F}(\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \Upsilon) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})]] \to (\forall\mathfrak{a}\,[\Delta \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \Upsilon) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})] \to \mathfrak{F}(\Theta))]$$

der Wahrheitswerth davon, dass Θ in der Υ-Reihe auf Δ folge. Wir können dies ansehn als Werth der Function

$$\forall\mathfrak{F}\,[\forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{F}(\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \Upsilon) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})]] \to (\forall\mathfrak{a}\,[\xi \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \Upsilon) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})] \to \mathfrak{F}(\zeta))]$$

für die Argumente Δ und Θ. Der Umfang dieser Beziehung ist

$$\mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,[\forall\mathfrak{F}\,[\forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{F}(\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \Upsilon) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})]] \to (\forall\mathfrak{a}\,[\varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \Upsilon) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})] \to \mathfrak{F}(\alpha))]]$$

Wir können ihn als Werth der Function

$$\mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,[\forall\mathfrak{F}\,[\forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{F}(\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \xi) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})]] \to (\forall\mathfrak{a}\,[\varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \xi) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})] \to \mathfrak{F}(\alpha))]]$$

S.59 | für das Argument Υ ansehen. Für diese Function führe ich einen einfachen Namen ein, indem ich definire:

$$<_q :=$$
$$\mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,[\forall\mathfrak{F}\,[\forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{F}(\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} q) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})]] \to (\forall\mathfrak{a}\,[\varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} q) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})] \to \mathfrak{F}(\alpha))]]$$

(K

Danach drückt ‚$\Delta \mathbin{\text{ə}} (\Theta \mathbin{\text{ə}}\ <_\Upsilon)$‘ aus, dass Θ auf Δ in der Υ-Reihe folge. Und ‚$\Delta \mathbin{\text{ə}} (\Theta \mathbin{\text{ə}}\ <_{\mathrm{nf}}\ )$‘ drückt aus, dass Θ auf Δ in der Anzahlenreihe folge.

Statt ‚Θ folgt auf Δ in der Υ-Reihe‘ sage ich auch ‚Δ **geht** dem Θ in der Υ-**Reihe vorher**‘.

§ 46. $\neg\ \Delta \mathbin{\text{ə}} (\Theta \mathbin{\text{ə}}\ <_\Upsilon) \to \Theta = \Delta$ ist der Wahrheitswerth davon, dass Θ auf Δ in der Υ-Reihe folge oder mit Δ zusammenfalle. Dafür sage ich kürzer, dass Θ der mit Δ **anfangenden** Υ-**Reihe angehöre**, oder dass Δ der mit Θ **endenden** Υ-**Reihe angehöre**. Ich betrachte dies als Werth der Function $\neg\ \xi \mathbin{\text{ə}} (\zeta \mathbin{\text{ə}}\ <_\Upsilon) \to \zeta = \xi$ für die Argumente Δ und Θ. Der Umfang dieser Beziehung ist $\mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}}\ <_\Upsilon) \to \alpha = \varepsilon)$. Diesen fasse ich auf als Werth der Function $\mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}}\ <_\xi) \to \alpha = \varepsilon)$ für das Argument Υ und führe einen einfachen Namen ein, indem ich definire:

$$\leq_q := \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}}\ <_q) \to \alpha = \varepsilon)$$

(Λ

Danach ist $\Delta \text{ ə } (\Theta \text{ ə } \leq_{\Upsilon})$ der Wahrheitswerth davon, dass Θ der mit Δ anfangenden Υ-Reihe angehöre. Dem zufolge ist $\mathrm{anz}\,(0) \text{ ə } (\Theta \text{ ə } \leq_{\mathrm{nf}})$ der Wahrheitswerth davon, dass Θ der mit $\mathrm{anz}\,(0)$ anfangenden Anzahlenreihe angehöre, wofür ich auch sage, dass Θ eine **endliche** Anzahl sei.

Im § 82 meiner Grundlagen erwähne ich den Satz, dass die Anzahl, die dem Begriffe

der mit n endenden Anzahlenreihe angehörend

zukommt, auf n in der Anzahlenreihe unmittelbar folgt, wenn n eine endliche Anzahl ist. Wir können dies nun so wiedergeben: ‚$\vdash \mathrm{anz}\,(0) \text{ ə } (n \text{ ə } \leq_{\mathrm{nf}}) \to n \text{ ə } (\mathrm{anz}\,((n \text{ ə } \leq_{\mathrm{nf}}) \text{ ə } \mathrm{nf}))$‘; denn $(\Theta \text{ ə } \leq_{\mathrm{nf}})$ ist der Umfang des Begriffes *der mit Θ endenden Anzahlenreihe angehörend*.

3. Abgeleitete Gesetze.

§ 47. Wir haben eben gesehen, wie sich mit unsern Zeichen Begriffe und Gegenstände bezeichnen lassen, mit denen wir uns später beschäftigen werden. Aber dies würde noch wenig zu bedeuten haben, wenn sich nicht auch mit ihnen rechnen liesse, wenn sich nicht Schlussreihen ohne Beimischung von Worten darstellen, Beweise führen liessen. Wir haben nun schon die Grundgesetze und die Schlussweisen kennen gelernt, die dabei zur Anwendung kommen. Es sollen nun Gesetze aus ihnen abgeleitet werden, die wir später gebrauchen werden, | um dabei zugleich die Art des Rechnens zu zeigen. Zunächst mögen die Grundgesetze S.60
und Regeln zusammengenstellt und einige Ergänzungen hinzugefügt werden.

Zusammenstellung der Grundgesetze.

$$\vdash a \to (b \to a),$$
$$\vdash a \to a$$

(I (§ 18)

———————●———————

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [f(\mathfrak{a})] \to f(a)$$

(IIa (§ 20)

———————●———————

$$\vdash g(a = b) \to g(\forall \mathfrak{f}\, [\mathfrak{f}(b) \to \mathfrak{f}(a)])$$

(III (§ 20)

———————●———————

$$\vdash \forall \mathfrak{f}\, [M_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta))] \to M_{\beta}(f(\beta))$$

(IIb (§ 25)

———————●———————

$$\neg\ (—a) = (\neg\ b) \to (—a) = (—b)$$

(IV (§ 18)

$$\vdash (\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = \mathrm{ext}\,\alpha\,(g(\alpha))) = (\forall \mathfrak{a}\, [f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})])$$

(V (§ 20)

———————●———————

$$\vdash a = \imath\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(a = \varepsilon)$$

(VI (§ 18)

§ 48. Zusammenstellung der Regeln.

1. *Verschmelzung der Wagerechten.*

■→Wenn als Argument der Function $—\xi$ der Werth dieser selben Function oder einer der Functionen $\zeta \rightarrow \xi$, $\neg\ \xi$ oder $\forall\mathfrak{a}\,[\Psi(\mathfrak{a})]$ für ein Argument erscheint, so können die Wagerechten verschmolzen werden.

Gleiches gilt, wenn der Werth der Function $—\xi$ an einer Argumentstelle der Functionen $\zeta \rightarrow \xi$, $\neg\ \xi$ oder $\forall\mathfrak{a}\,[\Psi(\mathfrak{a})]$ auftritt.←■[104] [#62]■→

2. *Vertauschung der Vorderglieder.*

Die Vorderglieder desselben Satzes können beliebig mit einander vertauscht werden.←■[105] [#63]■→

3. *Kontraposition.*

Man darf in einem Satze ein Vorderglied mit einem Hintergliede vertauschen, wenn man zugleich die Wahrheitswerthe beider umkehrt.←■[106] [#64]

Zwischenzeichen: $\times$.

■→

4. *Verschmelzung gleicher Vorderglieder.*

Ein mehrmals in demselben Satze auftretendes Vorderglied braucht nur einmal geschrieben zu werden.←■[107] [#65] |

S.61

5. *Verwandlung eines lateinischen Buchstaben in einen deutschen.*

---

[104] Wenn als Argument der Function $—\xi$ der Werth dieser selben Function für ein Argument erscheint, so können die Wagerechten verschmolzen werden.

Wagerechte in unserm Sinne sind die beiden durch den Verneinungsstrich getrennten Theile des wagerechten Striches in ‚$\neg\ \xi$'.

Wagerechte in unserm Sinne sind auch der untere und die beiden Theile des obern wagerechten Striches in ‚$\zeta \rightarrow \xi$' [#61].

Wagerechte in unserm Sinne sind endlich die beiden an die Höhlung gefügten geraden Striche in ‚$\forall\mathfrak{a}\,[\phi(\mathfrak{a})]$'.

[105]

2. *Vertauschung der Unterglieder.*

Die Unterglieder desselben Satzes können beliebig mit einander vertauscht werden.

[106]

3. *Wendung.*

Man darf in einem Satze ein Unterglied mit einem Obergliede vertauschen, wenn man zugleich die Wahrheitswerthe beider umkehrt.

[107]

4. *Verschmelzung gleicher Unterglieder.*

Ein mehrmals in demselben Satze auftretendes Unterglied braucht nur einmal geschrieben zu werden.

[#62] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#63] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#64] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#65] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

Es ist erlaubt, in einem Satze einen lateinischen Buchstaben überall, wo er vorkommt, durch einen und denselben deutschen Buchstaben zu ersetzen, und zwar einen Gegenstandsbuchstaben durch einen Gegenstandsbuchstaben und einen Functionsbuchstaben durch einen Functionsbuchstaben. ■→Dieser muss dann zugleich hinter einem Allquantor angebracht werden vor einem Hintergliede, ausserhalb dessen der lateinische Buchstabe nicht vorkam. Wenn in diesem Hintergliede das Gebiet eines deutschen Buchstaben ganz enthalten ist, in welchem Gebiete der lateinische Buchstabe vorkam, so muss der für diesen zu setzende deutsche Buchstabe von jenem verschieden gewählt werden.←■[108] [#66]

Zwischenzeichen: $\smile$.

Dies Zeichen wird auch angewendet, wenn mehre deutsche Buchstaben in dieser Weise eingeführt werden sollen. Wiewohl man gleich das Endergebniss hinschreibt, muss man doch einen nach dem andern eingeführt denken.

6. *Schliessen (a).*

■→Wenn ein Vorderglied eines Satzes sich von einem andern Satze nur durch den fehlenden Urtheilstrich unterscheidet, so kann man auf einen Satz schliessen, der aus dem ersten durch Unterdrückung jenes Vordergliedes hervorgeht.←■[109] [#67]

Zwischenzeichen: ( ): ——————
und ( ):: ——————;
zusammengezogene Schlüsse mit
(,):: ══════.

7. *Schliessen (b).*

■→Wenn dieselbe Zeichenverbindung (Eigenname oder lateinische Gegenstandsmarke) in einem Satze als Hinterglied und in einem andern als Vorderglied erscheint, so kann man auf einen Satz schliessen, in dem das Hinterglied des zweiten Satzes als Hinterglied und alle Vorderglieder beider ohne das genannte als Vorderglieder erscheinen. Dabei können gleiche Vorderglieder nach Regel (4) verschmolzen werden.←■[110] [#68]

Zwischenzeichen: ( ): – – – –
und ( ):: – – – –;
zusammengezogene Schlüsse mit
(,):: = = = = und (,):: $\overline{= \; = \; = \; =}$

8. *Schliessen (c).*

■→Wenn zwei Sätze in den Hintergliedern übereinstimmen, während ein Vorderglied des einen sich von einem Vordergliede des andern nur durch das davor stehende Verneinungszeichen unterscheidet, so können wir auf einen Satz schliessen, in dem das gleiche Hinterglied

[108] Dieser muss dann zugleich über einer Höhlung angebracht werden vor einem Obergliede, ausserhalb dessen der lateinische Buchstabe nicht vorkam. Wenn in diesem Obergliede das Gebiet eines deutschen Buchstaben ganz enthalten ist, in welchem Gebiete der lateinische Buchstabe vorkam, so muss der für diesen zu setzende deutsche Buchstabe von jenem verschieden gewählt werden.

[109] Wenn ein Unterglied eines Satzes sich von einem andern Satze nur durch den fehlenden Urtheilstrich unterscheidet, so kann man auf einen Satz schliessen, der aus dem ersten durch Unterdrückung jenes Untergliedes hervorgeht.

[110] Wenn dieselbe Zeichenverbindung (Eigenname oder lateinische Gegenstandsmarke) in einem Satze als Oberglied und in einem andern als Unterglied erscheint, so kann man auf einen Satz schliessen, in dem das Oberglied des zweiten Satzes als Oberglied und alle Unterglieder beider ohne das genannte als Unterglieder erscheinen. Dabei können gleiche Unterglieder nach Regel (4) verschmolzen werden.

[#66] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#67] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#68] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

als Hinterglied und alle Vorderglieder beider mit Ausnahme der beiden genannten als Vorderglieder erscheinen.←■[111] [#69]

Zwischenzeichen: ( ): · — · — · — · .

9. *Anziehen von Sätzen. Ersatz der lateinischen Buchstaben.*

Wenn wir einen Satz mittels seines Abzeichens anziehen, können wir damit einen einfachen Schluss verbinden, indem wir jeden lateinischen Gegenstandsbuchstaben überall, wo er in dem Satze vorkommt, durch denselben Eigennamen oder dieselbe lateinische Gegen-
S.62 standsmarke ersetzen. |

Desgleichen können wir dabei jeden der lateinischen Functionsbuchstaben ‚f‘, ‚g‘, ‚h‘, ‚F‘, ‚G‘, ‚H‘ überall, wo er in dem Satze vorkommt, durch denselben Namen oder dieselbe lateinische Marke einer Function erster Stufe mit einem oder mit zwei Argumenten ersetzen, je nachdem der lateinische Buchstabe eine Function mit einem oder mit zwei Argumenten andeutet.

Wenn wir das Gesetz (IIb) anziehen, können wir das darin vorkommende ‚M_β‘ an beiden Stellen durch denselben Namen oder dieselbe lateinische Marke einer Function zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art ersetzen.

In Betreff der Wörter ‚denselben‘ und ‚dieselbe‘ im zweiten und dritten Absatze dieser Regel ist zu beachten, dass das Argument nicht mit zur Function gehört, dass also ein Wechsel des Argumentzeichens keine Aenderung des Functionsnamens ist. Damit hier und da derselbe Functionsname vorkomme, ist erforderlich, dass die verwandten Argumentstellen sich entsprechen. Für die Frage, was als verwandte Argumentstellen anzusehn seien, sind die Regeln zu beachten:

■→Alle Stellen, an denen ein deutscher Buchstabe in seinem Gebiete, jedoch weder in einem eingeschlossenen Gebiete desselben Buchstaben, noch hinter einem Allquantor vorkommt, sind verwandte Argumentstellen der zugehörigen Function;←■[112] [#70]

alle Stellen, an denen ein kleiner griechischer Vokalbuchstabe in seinem Gebiete, jedoch weder in einem eingeschlossenen Gebiete desselben Buchstaben, ■→noch mit dem Werthverlaufszeichen vorkommt, sind verwandte Argumentstellen der zugehörigen Function.←■[113] [#71]

10. *Anziehen von Sätzen. Ersetzung deutscher Buchstaben.*

Wenn wir einen Satz mittels seines Abzeichens anziehen, ■→dÃijrfen wir einen deutschen Buchstaben hinter dem Allquantor←■[114] [#72] und zugleich an allen Argumentstellen der zugehörigen Function durch einen und denselben andern, und zwar einen Gegenstandsbuchstaben durch einen solchen und einen Functionsbuchstaben durch einen solchen ersetzen, wenn dadurch nicht ein deutscher Buchstabe, der in einem dem eignen eingeschlossenen Gebiete vorkommt, dem Buchstaben gleich wird, dessen Gebiet das eingeschlossene ist.

---

[111] Wenn zwei Sätze in den Obergliedern übereinstimmen, während ein Unterglied des einen sich von einem Untergliede des andern nur durch den davor stehenden Verneinungsstrich unterscheidet, so können wir auf einen Satz schliessen, in dem das gleiche Oberglied als Oberglied und alle Unterglieder beider mit Ausnahme der beiden genannten als Unterglieder erscheinen.

[112] Alle Stellen, an denen ein deutscher Buchstabe in seinem Gebiete, jedoch weder in einem eingeschlossenen Gebiete desselben Buchstaben, noch über einer Höhlung vorkommt, sind verwandte Argumentstellen der zugehörigen Function;

[113] noch mit dem Spiritus lenis vorkommt, sind verwandte Argumentstellen der zugehörigen Function.

[114] dürfen wir einen deutschen Buchstaben über der Höhlung

[#69] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#70] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#71] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#72] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

11. *Anziehen von Sätzen. Ersetzung der griechischen Vokalbuchstaben.*

Wenn wir einen Satz mittels seines Abzeichens anziehen, ■→dürfen wir einen griechischen Vokalbuchstaben hinter dem Werthverlaufszeichen←■[115] [#73] und zugleich an allen Argumentstellen der zugehörigen Function durch einen und denselben andern ersetzen, wenn dadurch nicht ein griechischer Buchstabe, der in einem dem eignen eingeschlossenen Gebiete vorkommt, dem Buchstaben gleich wird, dessen Gebiet das eingeschlossene ist.

12. *Anziehen von Definitionen.*

Wenn wir eine Definition mittels ihres Abzeichens anziehen, dürfen wir ■→das Definitionszeichen durch das | Gleichheitszeichen ersetzen←■[116] [#74] und die Aenderungen vornehmen, die nach (9), (10), (11) bei der Anziehung eines Satzes erlaubt sind. S.63

Festsetzungen über den Gebrauch der Klammern.

13. Alles, was rechts von einem Wagerechten im Zusammenhange steht, ist als Ganzes aufzufassen, das an der Stelle des ‚ξ' in ‚—ξ' steht, sofern nicht Klammern das verbieten.

14. Alles, was links vom Gleichheitszeichen bis zum nächsten Wagerechten — diesen ausgeschlossen — im Zusammenhange steht, ist als Ganzes aufzufassen, das an der Stelle des ‚ξ' in ‚$\xi = \zeta$' steht, sofern nicht Klammern das verbieten.

Danach ist z. B. ‚$a = b = c$' aufzufassen wie ‚$(a = b) = c$'. Da jedoch ‚$a = b = c$' in anderm Sinne gebräuchlich ist, werde ich in solchem Falle die Klammern hinschreiben.

15. Alles was rechts von einem Gleichheitszeichen steht bis zum nächsten Gleichheitszeichen — dieses ausgeschlossen —, ist als Ganzes aufzufassen, das an der Stelle des ‚ζ' in ‚$\xi = \zeta$' steht, sofern nicht Klammern das verbieten.

16. Wir haben Namen von Functionen mit zwei Argumenten wie z. B. ‚$\xi = \zeta$', ‚ξ ə ζ', welche ihre Argumentstellen links und rechts haben. Ich will solche Functionszeichen **zweiseitige** nennen. Für zweiseitige Functionszeichen mit Ausnahme des Gleichheitszeichens sei Folgendes bestimmt.

Alles, was links von einem solchen Zeichen bis zum nächsten Gleichheitszeichen oder Wagerechten im Zusammenhange steht, ist als Ganzes aufzufassen, das an der linken Argumentstelle steht, sofern nicht Klammern das verbieten, und Alles, was rechts von einem solchen Zeichen bis zum nächsten zweiseitigen Functionszeichen im Zusammenhange steht, ist als Ganzes aufzufassen, das an der rechten Argumentstelle steht, sofern nicht Klammern es verbieten.

17. Wir haben einfache Namen von Functionen erster Stufe mit einem Argumente bisher so gebildet und werden es auch in Zukunft thun, dass die Argumentstelle rechts vom eigentlichen Functionszeichen steht wie bei ‚$\mathrm{funk}\,(\xi)$', ‚$\xi :\twoheadrightarrow$ ', ‚ξ^{-1}',$\mathrm{anz}\,(\xi)$', ‚$<_\xi$', ‚$\leq_\xi$'. Für solche **einseitige** Functionszeichen mit Ausnahme des Wagerechten bestimme ich Folgendes.

Alles, was rechts von einem einseitigen Functionszeichen im Zusammenhange steht bis zum nächsten zweiseitigen Functionszeichen, ist als Ganzes aufzufassen, das an der Argumentstelle steht.

18. Wenn ein Wagerechter links frei endet, so schliessen wir ihn sammt seinem Argumentzeichen in Klammern ein.

---

[115]dürfen wir einen griechischen Vokalbuchstaben unter dem Spiritus lenis

[116]den Definitionsstrich durch den | Urtheilstrich ersetzen

[#73]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#74]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

§ 49. Leiten wir zunächst einige Sätze aus (I) ab!

■→Ich werde nun (I) so anziehen, dass ich dabei nach Regel (9) des § 48 für ‚b‘ ‚$\neg\ b$‘
S.64 schreibe.←■[117] [#75] Aus dem Folgenden ist zu ersehen, wie ich einen Satz anziehe. |

$$\text{I} \quad \vdash a \rightarrow (\neg\ b \rightarrow a)$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ a \rightarrow (a \rightarrow b) \qquad \text{(Ia}$$

(Ia) ist hiermit zum Abzeichen des neuen Satzes gemacht. Zu dem Uebergange vergleiche man Regel (3). ■→Hierbei ist auch von der Vertauschbarkeit der Vorderglieder Gebrauch gemacht nach Regel (2).←■[118] [#76]

In der folgenden Ableitung ziehe ich (I) in der Weise an, dass ich für ‚a‘ ‚$\neg\ a$‘ schreibe.

$$\text{I} \quad \vdash \neg\ a \rightarrow (b \rightarrow \neg\ a)$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ (b \rightarrow \neg\ a) \rightarrow a \qquad \text{(Ib}$$

■→Bei der Anwendung der Regel (3) ist hier ‚$b \rightarrow \neg\ a$‘ als Hinterglied anzusehen.←■[119] [#77]

$$\text{I} \quad \vdash a \rightarrow (b \rightarrow a)$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ (b \rightarrow a) \rightarrow \neg\ a \qquad \text{(Ic}$$

$$\text{Ia} \quad \vdash \neg\ a \rightarrow (a \rightarrow b)$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ (a \rightarrow b) \rightarrow a \qquad \text{(Id}$$

In der folgenden Ableitung ist (I) in der Form ‚$\vdash\ a \rightarrow a$‘ gedacht und nun statt ‚a‘ ‚$b \rightarrow \neg\ a$‘ geschrieben. Wenn man (I) in der ursprünglichen Form annimmt und statt ‚a‘ ‚$b \rightarrow \neg\ a$‘ schreibt, so erhält man zunächst

$$,\ \vdash (b \rightarrow \neg\ a) \rightarrow (b \rightarrow (b \rightarrow \neg\ a))\ ‘$$

■→wo man nun die gleichen Vorderglieder nach Regel (4) verschmelzen kann.←■[120] [#78]

---

[117] Ich werde nun (I) so anziehen, dass ich dabei nach Regel (9) des § 48 für ‚b‘ ‚$\neg\ b$‘ schreibe und nach Regel (1) die Wagerechten verschmelze.

[118] Hierbei ist auch von der Vertauschbarkeit der Unterglieder Gebrauch gemacht nach Regel (2).

[119] Bei der Anwendung der Regel (3) ist hier ‚$b \rightarrow \neg\ a$‘ als Oberglied anzusehen.

[120] wo man nun die gleichen Unterglieder nach Regel (4) verschmelzen kann.

[#75] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#76] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#77] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#78] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

Auch so kann man das Folgende auffassen.

$$\text{I} \quad \vdash (b \rightarrow \neg\ a) \rightarrow (b \rightarrow \neg\ a)$$

$$\times$$

$$\vdash b \rightarrow (a \rightarrow \neg\ (b \rightarrow \neg\ a)) \qquad \text{(Ie}$$

$$\text{I} \quad \vdash (b \rightarrow a) \rightarrow (b \rightarrow a)$$

$$\times$$

$$b \rightarrow (\neg\ a \rightarrow \neg\ (b \rightarrow a)) \qquad \text{(If}$$

Man vergleiche hierzu das im § 12 über ‚und' Gesagte.

Im Folgenden wird (Ie) so angezogen, dass für ‚b' ‚a' geschrieben wird ■→und die gleichen Vorderglieder verschmolzen werden.←■[121] [#79]

$$\text{Ie} \quad \vdash a \rightarrow \neg\ (a \rightarrow \neg\ a)$$

$$\times$$

$$\vdash (a \rightarrow \neg\ a) \rightarrow \neg\ a \qquad \text{(Ig}$$

§ 50. Es sollen nun die Hauptgesetze der Function $\xi = \zeta$ abgeleitet werden. ■→Wir ersetzen zunächst nach Regel (9) § 48 den Functionsbuchstaben ‚g' in (III) durch den Namen der Function $—\xi$.←■[122] [#80]

$$\text{III} \quad \vdash a = b \rightarrow \forall \mathfrak{f}\, [\mathfrak{f}(b) \rightarrow \mathfrak{f}(a)]$$

$$(IIb): \ — \ — \ — \ — \ — \ — \ — \ —$$

S.66

$$\vdash a = b \rightarrow (f(b) \rightarrow f(a)) \qquad \text{(IIIa}$$

Der Uebergang geschieht hierbei nach Regel (7) und (IIb) ist in der Form

$$‚\ \vdash \forall \mathfrak{f}\, [\mathfrak{f}(b) \rightarrow \mathfrak{f}(a)] \rightarrow (f(b) \rightarrow f(a))\ '$$

herangezogen, indem nach Regel (9) ‚$\mathrm{M}_\beta(\phi(\beta))$' durch die lateinische Marke einer Function zweiter Stufe ‚$\phi(b) \rightarrow \phi(a)$' ersetzt ist.

$$\text{IIIa} \quad \vdash a = b \rightarrow (f(b) \rightarrow f(a))$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ f(a) \rightarrow (f(b) \rightarrow \neg\ a = b) \qquad \text{(IIIb}$$

[121] und die gleichen Unterglieder verschmolzen werden.

[122] Wir ersetzen zunächst nach Regel (9) § 48 den Functionsbuchstaben ‚g' in (III) durch den Namen der Function $—\xi$ und verschmelzen die Wagerechten.

[#79] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#80] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

■→In der folgenden Ableitung ist der Functionsbuchstabe ,f' in (IIIa) durch die lateinische Functionsmarke ,$\neg\ f(\xi)$' ersetzt.←■[123] [#81]

$$\text{IIIa} \quad \vdash a = b \rightarrow (\neg\ f(b) \rightarrow \neg\ f(a))$$

$$\times$$

$$\vdash a = b \rightarrow (f(a) \rightarrow f(b)) \qquad \text{(IIIc}$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ f(b) \rightarrow (f(a) \rightarrow \neg\ a = b) \qquad \text{(IIId}$$

Wir können (IIIa) in Worten etwa so wiedergeben: Wenn a mit b zusammenfällt, so gilt Alles von a, was von b gilt. Aehnlich (IIIc). (IIId) können wir so aussprechen: Wenn eine Aussage von a gilt, die von b nicht gilt, so fällt a mit b nicht zusammen.

In der folgenden Ableitung ist der Functionsbuchstabe ,g' in (III) durch den Functionsnamen ,$\neg\ \xi$' und ,b' durch ,a' ersetzt.

$$\text{III} \quad \vdash \neg\ a = a \rightarrow \neg\ \forall \mathfrak{f}\, [\mathfrak{f}(a) \rightarrow \mathfrak{f}(a)]$$

$$\times$$

$$\vdash \forall \mathfrak{f}\, [\mathfrak{f}(a) \rightarrow \mathfrak{f}(a)] \rightarrow a = a \qquad (\alpha$$

$$\text{———————} \bullet \text{———————}$$

$$\text{I} \quad \vdash f(a) \rightarrow f(a)$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{f}\, [\mathfrak{f}(a) \rightarrow \mathfrak{f}(a)] \qquad (\beta$$

$$(\alpha) : \quad \overline{}$$

$$\vdash a = a \qquad \text{(IIIe}$$

Dieser Satz ist zwar nach nnserer Erklärung des Gleichheitszeichens selbstverständlich, aber es ist der Mühe werth zu sehen, wie er aus (III) entwickelt werden kann. Dabei bietet sich überdies Gelegenheit, einiges zu bemerken, was auch für spätere Ableitungen gelten soll. Der zweite Satz hat das Abzeichen ,α' erhalten. Ein kleiner griechischer Buchstabe, so verwendet, soll nur innerhalb derselben Ableitung als Abzeichen unverändert gelten, sodass er in einer andern Ableitung als Abzeichen für einen andern Satz gebraucht werden kann. Eine Ableitung endet mit einem Satze, der zuerst ein von einem kleinen griechischen Buch- |
S.64 staben verschiedenes Abzeichen erhält. In unserer Ableitung folgt unter dem Satze (α) das Zeichen

, ———————— ● ———————— '

um anzuzeigen, dass wir hier die Schlussreihe abbrechen und eine neue anfangen, die erst da, wo wir (α) anziehen, mit jener verknüpft wird. Der Uebergang zu (β) erfolgt nach Regel (5),

[123] In der folgenden Ableitung ist der Functionsbuchstabe ,f' in (IIIa) durch die lateinische Functionsmarke ,$\neg\ f(\xi)$' ersetzt, und dann sind die Wagerechten verschmolzen.

[#81] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

der von (β) zu (IIIe) nach Regel (6). Ersetzen wir nun in (IIIa) den Functionsbuchstaben ‚f' durch die lateinische Functionsmarke ‚$b = \xi$'!

$$\begin{array}{rl} & \text{IIIa} \quad \vdash a = b \rightarrow (b = b \rightarrow b = a) \\ (IIIe) :: & \overline{} \\ & \vdash a = b \rightarrow b = a \end{array} \qquad \text{(IIIf}$$

Der Schluss erfolgt nach Regel (6).

In der folgenden Ableitung sind in (IIIc) und (IIIa) ‚a' durch ‚— a', ‚b' durch ‚$\neg\ a$' und der Functionsbuchstabe ‚f' durch den Functionsnamen ‚— ξ' ersetzt, und die Wagerechten sind, wo es möglich ist, verschmolzen.

$$\text{IIIc} \quad \vdash (—a) = (\neg\ a) \rightarrow (a \rightarrow \neg\ a)$$

$$\times$$

$$\vdash a \rightarrow \neg\ (—a) = (\neg\ a) \qquad (\alpha$$

$$\text{———————} \bullet \text{———————}$$

$$\text{IIIa} \quad \vdash (—a) = (\neg\ a) \rightarrow (\neg\ a \rightarrow a)$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ a \rightarrow \neg\ (—a) = (\neg\ a) \qquad (\beta$$

$$(\alpha) : \quad \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot$$

$$\vdash \neg\ (—a) = (\neg\ a) \qquad \text{(IIIg}$$

■→Bei den Uebergängen zu (α) und (β) sind die gleichen Vorderglieder nach Regel (4) verschmolzen.←■[124] [#82] Der letzte Schluss geschieht nach Regel (8).

In der folgenden Ableitung ersetzen wir den Functionsbuchstaben ‚f' in (IIIc) durch die lateinische Functionsmarke ‚$f(a) = f(\xi)$'.

$$\begin{array}{rl} & \text{IIIc} \quad \vdash a = b \rightarrow (f(a) = f(a) \rightarrow f(a) = f(b)) \\ (IIIe) :: & \overline{} \\ & \vdash a = b \rightarrow f(a) = f(b) \end{array} \qquad \text{(IIIh}$$

In der folgenden Ableitung ist in (III) der Functionsbuchstabe ‚g' ersetzt durch ‚$\neg\ F(—\xi)$' und es sind die Wagerechten verschmolzen.

$$\text{III} \quad \vdash \neg\ F(—a = b) \rightarrow \neg\ F(\forall \mathfrak{f}\, [\mathfrak{f}(b) \rightarrow \mathfrak{f}(a)])$$

$$\times$$

$$\vdash F(\forall \mathfrak{f}\, [\mathfrak{f}(b) \rightarrow \mathfrak{f}(a)]) \rightarrow F(—a = b) \qquad (\alpha$$

$$(III) :: \quad - - - - - - - -$$

[124]Bei den Uebergängen zu (α) und (β) sind die gleichen Unterglieder nach Regel (4) verschmolzen.

[#82]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

$$\vdash F(a = b) \to F(—a = b) \qquad (\beta$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{f}\,[\mathfrak{f}(a = b) \to \mathfrak{f}(—a = b)] \qquad (\gamma$$

$$\text{———————} \bullet \text{———————}$$

$$\text{III} \quad \vdash \neg\ (—a = b) = (a = b) \to \neg\ \forall \mathfrak{f}\,[\mathfrak{f}(a = b) \to \mathfrak{f}(—a = b)]$$

$$\times$$

$$\vdash \forall \mathfrak{f}\,[\mathfrak{f}(a = b) \to \mathfrak{f}(—a = b)] \to (—a = b) = (a = b) \qquad (\delta$$

$$(\gamma) :: \ \text{—————————————}$$

$$\vdash (—a = b) = (a = b) \qquad (\text{IIIi}$$

S.65 Bei der zweiten Anziehung von (III) ist ‚g' durch ‚F' ersetzt. Bei der | letzten Anziehung von (III) ist ‚$g(\xi)$' durch ‚$\neg\ \xi$', ‚a' durch ‚$— a = b$', ‚b' durch ‚$a = b$' ersetzt.

§ 51. Es sollen nun einige Sätze aus (IV) abgeleitet werden.

$$\text{IIIa} \quad \vdash (—a) = (\neg\ b) \to (\neg\ b \to a)$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ (\neg\ b \to a) \to \neg\ (—a) = (\neg\ b) \qquad (\alpha$$

$$\text{———————} \bullet \text{———————}$$

$$\text{IIIc} \quad \vdash (—a) = (\neg\ b) \to (a \to \neg\ b)$$

$$\times$$

$$\vdash a \to (b \to \neg\ (—a) = (\neg\ b)) \qquad (\beta$$

$$(I) :: \ — \ — \ — \ — \ — \ — \ — \ —$$

$$\vdash a \to ((a \to b) \to \neg\ (—a) = (\neg\ b)) \qquad (\gamma$$

$$(I) :: \ — \ — \ — \ — \ — \ — \ — \ —$$

$$\vdash \neg\ b \to ((\neg\ b \to a) \to ((a \to b) \to \neg\ (—a) = (\neg\ b))) \qquad (\delta$$

$$\text{———————} \bullet \text{———————}$$

$$\beta \quad \vdash a \to (b \to \neg\ (—a) = (\neg\ b))$$

$$(I) :: \ — \ — \ — \ — \ — \ — \ — \ —$$

$$\vdash (b \to a) \to (b \to \neg\ (—a) = (\neg\ b)) \qquad (\varepsilon$$

$$(\delta) : \ \cdot — \cdot — \cdot — \cdot — \cdot — \cdot — \cdot$$

$$\vdash (\neg\ b \to a) \to ((a \to b) \to ((b \to a) \to \neg\ (—a) = (\neg\ b))) \qquad (\zeta$$

$$(\alpha): \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot$$

$$\vdash (a \to b) \to ((b \to a) \to \neg\ (—a) = (\neg\ b)) \qquad (\eta$$

$$(IV): - - - - - - - -$$

$$\vdash (b \to a) \to ((a \to b) \to (—a) = (—b)) \qquad (\text{IVa}$$

(I) ist hier bei seiner ersten Anwendung in der Form

$$,\ \vdash (a \to b) \to (a \to b)\ `$$

bei seiner zweiten in der Form

$$,\ \vdash (\neg\ b \to a) \to (\neg\ b \to a)\ `$$

bei seiner dritten in der Form

$$,\ \vdash (b \to a) \to (b \to a)\ `$$

zu denken. Man bemerke an den Uebergängen zu (γ), (δ) und (ε) die Wirkung dieser Anwendung von (I). So wird (I) noch oft gebraucht werden. Man vergleiche hierzu die Ableitung von (Ie) in § 49. Der Satz (IVa) wird oft gebraucht, um | die Gleichheit von Wahrheitswerthen zu beweisen. S.67

$$\text{IV} \quad \vdash \neg\ (—a) = (\neg\ \neg\ a) \to (—a) = (\neg\ a)$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ (—a) = (\neg\ a) \to (—a) = (\neg\ \neg\ a)$$

$$(IIIg) :: \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash (—a) = (\neg\ \neg\ a) \qquad (\text{IVb}$$

$$(IIIa) : \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash f(\neg\ \neg\ a) \to f(—a) \qquad (\text{IVc}$$

$$\overline{\qquad\qquad} \bullet \overline{\qquad\qquad}$$

$$\text{IVb} \quad \vdash (—a) = (\neg\ \neg\ a)$$

$$(IIIc) : \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash f(—a) \to f(\neg\ \neg\ a) \qquad (\text{IVd}$$

Ein Beispiel für die Anwendung von (IVa) haben wir im Folgenden.

$$\text{IIIf} \quad \vdash b = a \to a = b$$

$$(IVa) : \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash (a = b \to b = a) \to (—a = b) = (—b = a) \qquad (\alpha$$

$$(IIIf) :: \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash (—a = b) = (—b = a) \qquad (\beta$$

$$(IIIc) : \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash (—a = b) = (a = b) \to (a = b) = (—b = a) \qquad (\gamma$$

$$(IIIi) :: \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash (a = b) = (—b = a) \qquad (\delta$$

$$(IIIc) : \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\begin{array}{ll} & \vdash (\text{—}\, b = a) = (b = a) \rightarrow (a = b) = (b = a) \qquad (\varepsilon \\ (IIIi) :: & \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ & \vdash (a = b) = (b = a) \qquad (\text{IVe} \end{array}$$

Beim Uebergange zu (γ) ist hier (IIIc) in der Form

$$, \vdash (\text{—}\, a = b) = (a = b) \rightarrow ((\text{—}\, a = b) = (\text{—}\, b = a) \rightarrow (a = b) = (\text{—}\, b = a)) \text{ ‘}$$

zu denken, indem ‚$f(\xi)$‘ durch

$$, \xi = (\text{—}\, b = a) \text{ ‘},$$

‚a‘ durch ‚$(\text{—}\, a = b)$‘, ‚b‘ durch ‚$(a = b)$‘ ersetzt ist. Für den Uebergang zu (ε) haben wir in (IIIc) ‚$f(\xi)$‘ durch ‚$(a = b) = \xi$‘, ‚a‘ durch ‚$(\text{—}\, b = a)$‘, ‚b‘ durch ‚$b = a$‘ ersetzt zu denken.

§ 52. Es mögen endlich noch einige Sätze aus (V) und (VI) abgeleitet werden.

$$\begin{array}{ll} \text{V} & \vdash (\text{ext}\, \varepsilon\, (f(\varepsilon)) = \text{ext}\, \alpha\, (g(\alpha))) = (\forall \mathfrak{a}\, [f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})]) \\ (IIIa): & \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ & \vdash \forall \mathfrak{a}\, [f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})] \rightarrow \text{ext}\, \varepsilon\, (f(\varepsilon)) = \text{ext}\, \alpha\, (g(\alpha)) \\ (IIIh): & - - - - - - - - - \\ & \vdash \forall \mathfrak{a}\, [f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})] \rightarrow F(\text{ext}\, \varepsilon\, (f(\varepsilon))) = F(\text{ext}\, \alpha\, (g(\alpha))) \qquad (\text{Va} \end{array}$$

———————— • ————————

$$\begin{array}{ll} \text{V} & \vdash (\text{ext}\, \varepsilon\, (f(\varepsilon)) = \text{ext}\, \alpha\, (g(\alpha))) = (\forall \mathfrak{a}\, [f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})]) \\ (IIIc): & \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ & \vdash \text{ext}\, \varepsilon\, (f(\varepsilon)) = \text{ext}\, \alpha\, (g(\alpha)) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})] \qquad (\alpha \\ (IIa): & - - - - - - - - - \\ & \vdash \text{ext}\, \varepsilon\, (f(\varepsilon)) = \text{ext}\, \alpha\, (g(\alpha)) \rightarrow f(a) = g(a) \qquad (\text{Vb} \end{array}$$

In (IIa) ist hier ‚$f(\xi)$‘ durch ‚$f(\xi) = g(\xi)$‘ ersetzt zu denken.

Bei der folgenden Ableitung ist in (Va) ‚$g(\xi)$‘ durch ‚$a = \xi$‘ ersetzt und zugleich für ‚a‘ ‚ε‘ geschrieben nach Regel (11) § 48.

$$\begin{array}{ll} \text{Va} & \vdash \forall \mathfrak{a}\, [f(\mathfrak{a}) = (a = \mathfrak{a})] \rightarrow \text{ext}\, \varepsilon\, (f(\varepsilon)) = \text{ext}\, \varepsilon\, (a = \varepsilon) \\ (IIIa): & - - - - - - - - - \\ & \vdash \forall \mathfrak{a}\, [f(\mathfrak{a}) = (a = \mathfrak{a})] \rightarrow (a = \imath\text{ext}\, \varepsilon\, (a = \varepsilon) \rightarrow a = \imath\text{ext}\, \varepsilon\, (f(\varepsilon))) \qquad (\alpha \\ (VI) :: & \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ & \vdash \forall \mathfrak{a}\, [f(\mathfrak{a}) = (a = \mathfrak{a})] \rightarrow a = \imath\text{ext}\, \varepsilon\, (f(\varepsilon)) \qquad (\text{VIa} \end{array}$$

S.68 |

II. Beweise der Grundgesetze der Anzahl.

Vorbemerkungen

§ 53. In Beziehung auf die nun folgenden Beweise hebe ich hervor, dass die Ausführungen, die ich regelmässig unter der Ueberschrift ‚Zerlegung‘ vorausschicke, nur der Bequemlichkeit des Lesers dienen sollen; sie könnten fehlen, ohne dem Beweise etwas von seiner Kraft zu nehmen, der allein unter der Ueberschrift ‚Aufbau‘ zu suchen ist.

Die Regeln, auf die ich mich in den Zerlegungen beziehe, sind oben in § 48 unter den entsprechenden Nummern aufgeführt worden. Die zuletzt abgeleiteten Gesetze findet man am

Schlusse des Buches mit den im § 47 zusammengestellten Grundgesetzen auf einer besondern Tafel vereinigt. Auch die Definitionen des Abschnittes I, 2 und andere sind am Schlusse des Buches zusammengestellt.

Zunächst beweisen wir den Satz:

Die Anzahl eines Begriffes ist gleich der Anzahl eines zweiten Begriffes, wenn eine Beziehung den ersten in den zweiten und wenn die Umkehrung dieser Beziehung den zweiten in den ersten abbildet.

A. Beweis des Satzes

$$,\vdash v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \to \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(v))`$$

a) Beweis des Satzes

$$,\vdash u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \to (w \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to w \ni (v \ni (q \circ p) :\twoheadrightarrow))`$$

§ 54. *Zerlegung.*

Nach der Definition (Z) ist der Satz

$$,\vdash v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \to \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(v))` \qquad (\alpha$$

eine Folge von

$$\begin{aligned}&,\vdash v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow)^{\#83} \to (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \to \\ &\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \forall \mathfrak{q}\,[u \ni (\varepsilon \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ \varepsilon \ni (u \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)]) = \\ &\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \forall \mathfrak{q}\,[v \ni (\varepsilon \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ \varepsilon \ni (v \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)]))\quad `\end{aligned} \qquad (\beta$$

Dieser Satz ist mit (Va) und nach Regel (5) abzuleiten aus dem Satze | S.69

$$\begin{aligned}&,\vdash v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \to \\ &(\neg\ \forall \mathfrak{q}\,[u \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (u \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)]) = \\ &(\neg\ \forall \mathfrak{q}\,[v \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (v \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)]))\quad `\end{aligned} \qquad (\gamma$$

der mit (IVa) zu beweisen ist. Wir bedürfen dazu der Sätze

$$\begin{aligned}&,\vdash v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \to \\ &(\neg\ \forall \mathfrak{q}\,[v \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (v \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)] \to \\ &\neg\ \forall \mathfrak{q}\,[u \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (u \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)]))`\end{aligned} \qquad (\delta$$

und

$$\begin{aligned}&,\vdash v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \to \\ &(\neg\ \forall \mathfrak{q}\,[u \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (u \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)] \to \\ &\neg\ \forall \mathfrak{q}\,[v \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (v \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)]))`\end{aligned} \qquad (\varepsilon$$

Wenn wir in (ε) ‚u' mit ‚v' vertauschen und für ‚q' ‚q^{-1}' schreiben, so erhalten wir

$$\begin{aligned}&,\vdash u \ni (v \ni (q^{-1})^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \\ &(\neg\ \forall \mathfrak{q}\,[v \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (v \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)] \to \\ &\neg\ \forall \mathfrak{q}\,[u \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (u \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)]))`\end{aligned} \qquad (\zeta$$

Dieser Satz stimmt nahezu mit (δ) überein. Um (δ) aus (ζ) nach Regel (7) abzuleiten, bedürfen wir des Satzes

$$,\vdash u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \to u \ni (v \ni (q^{-1})^{-1} :\twoheadrightarrow)` \qquad (\eta$$

Wir suchen also zunächst den Satz (ε) zu beweisen. ■→Er geht durch Kontraposition (Regel 3) hervor aus dem Satze←■[125] [#84]

$$‚\vdash v \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (u \mathbin{\text{ə}} (v \mathbin{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow) \to$$
$$(\forall \mathfrak{q} \, [v \mathbin{\text{ə}} (w \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg \; w \mathbin{\text{ə}} (v \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)] \to$$
$$\forall \mathfrak{q} \, [u \mathbin{\text{ə}} (w \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg \; w \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)])) ‘ \qquad (\vartheta$$

der nach Regel (5) folgt aus

$$‚\vdash v \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (u \mathbin{\text{ə}} (v \mathbin{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow) \to$$
$$(\forall \mathfrak{q} \, [v \mathbin{\text{ə}} (w \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg \; w \mathbin{\text{ə}} (v \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)] \to$$
$$(u \mathbin{\text{ə}} (w \mathbin{\text{ə}} p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg \; w \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} p :\twoheadrightarrow)))) ‘ \qquad (\iota$$

Um den Sinn hiervon besser zu erkennen, ■→verwandeln wir es durch Kontraposition in←■[126] [#85]

$$‚\vdash v \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (u \mathbin{\text{ə}} (v \mathbin{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow) \to$$
$$(w \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} p :\twoheadrightarrow) \to (u \mathbin{\text{ə}} (w \mathbin{\text{ə}} p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to$$
$$\neg \; \forall \mathfrak{q} \, [v \mathbin{\text{ə}} (w \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg \; w \mathbin{\text{ə}} (v \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)])))) ‘ \qquad (\kappa$$

Des bequemern Ausdrucks halber sage ich nun statt ‚Begriff, dessen Umfang durch ‚u‘ angedeutet wird‘ [#86] ‚u-Begriff‘, statt ‚Beziehung, deren Umfang durch ‚p‘ angedeutet wird‘ ‚p-Beziehung‘, statt ‚durch die p-Beziehung werden die unter den w-Begriff fallenden Gegenstände den unter den u-Begriff fallenden eindeutig zugeordnet‘ ‚die p-Beziehung bildet den w-Begriff in den u-Begriff ab‘. Wir können nun (κ) so in Worten wiedergeben:

‚Wenn die Umkehrung der p-Beziehung den u-Begriff in den w-Begriff abbildet und die p-Beziehung den w-Begriff in den u-Begriff abbildet, wenn ferner die q-Beziehung den u-Begriff in den v-Begriff und die q^{-1}-Beziehung den v-Begriff in den u-Begriff abbildet, so
S.70 giebt es | eine Beziehung, die den w-Begriff in den v-Begriff und deren Umkehrung den v-Begriff in den w-Begriff abbildet‘.

Eine solche Beziehung ist offenbar eine aus der p-Beziehung und aus der q-Beziehung zusammengesetzte[127], wie folgendes Bild anschaulich macht

$$w \xrightarrow[p]{} u \xrightarrow[q]{} v$$

Ich führe nun für den Umfang einer aus der p-Beziehung und aus der q-Beziehung zusammengesetzten Beziehung die abgekürzte Bezeichnung ‚$q \circ p$‘ ein, indem ich definire

$$q \circ p := \operatorname{ext} \alpha \operatorname{ext} \varepsilon \, (\neg \; \forall \mathfrak{r} \, [\mathfrak{r} \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q) \to \neg \; \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{r} \mathbin{\text{ə}} p)]) \qquad (\mathrm{B}$$

Es wird nun auf den Satz ankommen

$$‚\vdash u \mathbin{\text{ə}} (v \mathbin{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow) \to (w \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} p :\twoheadrightarrow) \to w \mathbin{\text{ə}} (v \mathbin{\text{ə}} (q \circ p) :\twoheadrightarrow)) ‘ \qquad (\lambda$$

in Worten:

‚Wenn die p-Beziehung den w-Begriff in den u-Begriff abbildet und wenn die q-Beziehung den u-Begriff in den v-Begriff abbildet, so bildet die aus beiden zusammengesetzte $(q \circ p)$-Beziehung den w-Begriff in den v-Begriff ab‘.

Ferner bedürfen wir des Satzes

$$‚\vdash v \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (u \mathbin{\text{ə}} (w \mathbin{\text{ə}} p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to v \mathbin{\text{ə}} (w \mathbin{\text{ə}} (q \circ p)^{-1} :\twoheadrightarrow)) ‘ \qquad (\mu$$

[125] Er geht durch Wendung (Regel 3) hervor aus dem Satze
[126] verwandeln wir es durch Wendung in
[127] Vergl. Grundlagen S. 86.

[#84] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#85] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#86] im Original fehlt rechtes Zeichen [Fehlertyp: interp | Rev.: bonn]

der auf (λ) zurückgeführt werden kann mit dem Satze

$$‚\ \vdash (q \circ p)^{-1} = p^{-1} \circ q^{-1}\ ‘ \qquad (\nu$$

Wir versuchen zunächst den Satz (λ) zu beweisen. Aus der Definition (Δ) ist zu entnehmen, dass zweierlei bewiesen werden muss, nämlich erstens

$$‚\ \vdash u \,\text{ə}\, (v \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (w \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, p :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow$$
$$\forall \mathfrak{d}\, [\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, (q \circ p)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, v] \rightarrow \neg\ \mathfrak{d} \,\text{ə}\, w])\ ‘ \qquad (\xi$$

und zweitens

$$‚\ \vdash \text{funk}\,(p) \rightarrow (\text{funk}\,(q) \rightarrow \text{funk}\,(q \circ p))\ ‘ \qquad (o$$

(ξ) geht hervor aus

$$‚\ \vdash u \,\text{ə}\, (v \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (w \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, p :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{a}\, [d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, (q \circ p)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, v] \rightarrow \neg\ d \,\text{ə}\, w))\ ‘ \qquad (\pi$$

nach Regel (5). Um (π) in Worten auszusprechen, ist es bequemer, ■→ihn zuvor durch Kontraposition in←■[128] [#87]

$$‚\ \vdash u \,\text{ə}\, (v \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (w \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, p :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow$$
$$(d \,\text{ə}\, w \rightarrow \neg\ \forall \mathfrak{a}\, [d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, (q \circ p)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, v]))\ ‘ \qquad (\rho$$

zu verwandeln. Sagen wir nun statt ‚Gegenstand, der durch ‚d‘ angedeutet wird‘ kurz ‚d‘, so lautet unser Satz in Worten so:

‚Wenn d unter den w-Begriff fällt und wenn der w-Begriff durch die p-Beziehung in den u-Begriff abgebildet wird und wenn der u-Begriff durch die q-Beziehung in den v-Begriff abgebildet wird, so giebt es einen Gegenstand, der unter den v-Begriif fällt und zu dem d in der $(q \circ p)$-Beziehung steht‘. | S.71

Der Beweis wird sich stützen müssen auf den Satz

$$‚\ \vdash d \,\text{ə}\, (e \,\text{ə}\, p) \rightarrow (e \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, q) \rightarrow d \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, (q \circ p)))\ ‘ \qquad (\sigma$$

in Worten:

‚Wenn d zu e in der p-Beziehung steht und wenn e zu m in der q-Beziehung steht, so steht d zu m in der $(q \circ p)$-Beziehung‘.

Dies wird abzuleiten sein aus dem Satze

$$‚\ \vdash (\neg\ \forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, q) \rightarrow \neg\ d \,\text{ə}\, (\mathfrak{r} \,\text{ə}\, p)]) = d \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, (q \circ p))\ \ ‘ \qquad (\tau$$

der aus der Definition (B) folgt. Um ihn zu beweisen, bedürfen wir des Satzes

$$‚\ \vdash f(a, b) = a \,\text{ə}\, (b \,\text{ə}\, \text{ext}\,\alpha\, \text{ext}\,\varepsilon\, (f(\varepsilon, \alpha)))\ ‘ \qquad (\upsilon$$

denn die linke Seite der Definitionsgleichung (B) ist ein Doppelwerthverlauf. (υ) ist auf den Satz

$$‚\ \vdash f(a) = a \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\, (f(\varepsilon))\ ‘ \qquad (\phi$$

zurückzuführen, der aus der Definition (A) abzuleiten ist. Nach dieser ist zu beweisen

$$‚\ \vdash f(a) = \imath \text{ext}\,\alpha\, (\neg\ \forall \mathfrak{g}\, [\text{ext}\,\varepsilon\, (f(\varepsilon)) = \text{ext}\,\varepsilon\, (\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(a) = \alpha])\ \ ‘ \qquad (\chi$$

Das muss mit (VIa) geschehen und mit dem Satze

$$‚\ \vdash \forall \mathfrak{a}\, [(\neg\ \forall \mathfrak{g}\, [\text{ext}\,\varepsilon\, (f(\varepsilon)) = \text{ext}\,\varepsilon\, (\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(a) = \mathfrak{a}]) = (f(a) = \mathfrak{a})]\ \ ‘ \qquad (\psi$$

indem man in (VIa) für ‚$f(\xi)$‘ nimmt

$$‚\ \neg\ \forall \mathfrak{g}\, [\text{ext}\,\varepsilon\, (f(\varepsilon)) = \text{ext}\,\varepsilon\, (\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(a) = \xi]\ ‘$$

und ‚a‘ durch ‚$f(a)$‘ ersetzt. (ψ) geht nach Regel (5) hervor aus

$$‚\ \vdash (\neg\ \forall \mathfrak{g}\, [\text{ext}\,\varepsilon\, (f(\varepsilon)) = \text{ext}\,\varepsilon\, (\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(a) = b]) = (f(a) = b)\ \ ‘ \qquad (\omega$$

[128] ihn zuvor durch Wendung in

[#87] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

was mit (IVa) zu beweisen ist. Dazu bedürfen wir der Sätze

$$,\ \vdash f(a) = b \rightarrow \neg\ \forall \mathfrak{g}\,[\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = \text{ext}\,\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(a) = b]\ ‘ \qquad (\alpha’$$

und■→von denen der erste durch Kontraposition nach Regel (3) folgt aus←■[129] [#88]

$$,\ \vdash \forall \mathfrak{g}\,[\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = \text{ext}\,\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(a) = b] \rightarrow \neg\ f(a) = b\ ‘ \qquad (\gamma’$$

Schreiben wir nun (IIb) in der Form

$$,\ \vdash \forall \mathfrak{g}\,[\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = \text{ext}\,\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(a) = b] \rightarrow$$
$$(\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = \text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ f(a) = b)\ ‘$$

so sehen wir, dass hieraus mit (IIIe) (γ’) folgt. ■→Der Satz (β’) folgt durch Kontraposition aus←■[130] [#89]

$$,\ \vdash \neg\ f(a) = b \rightarrow \forall \mathfrak{g}\,[\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = \text{ext}\,\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(a) = b]\ ‘ \qquad (\delta’$$

und dies nach Regel (5) aus

$$,\ \vdash \neg\ f(a) = b \rightarrow (\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = \text{ext}\,\varepsilon\,(g(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ g(a) = b)\ ‘ \qquad (\varepsilon’$$

Dieser Satz geht nach Regel (7) mit (Vb) hervor aus

$$,\ \vdash \neg\ f(a) = b \rightarrow (f(a) = g(a) \rightarrow \neg\ g(a) = b)\ ‘$$

das mit ■→Vertauschung der Vorderglieder←■[131] [#90] nur ein besonderer Fall von (IIIc) ist. Wir bauen nun hiernach den Beweis auf. Zu der Ableitung von (2) ist noch zu bemerken, dass
S.72 | bei der ersten Anziehung von (1) nach Regel (9) ‚$f(\xi)$‘ durch die Functionsmarke ‚$f(\xi, b)$‘ ersetzt ist. (IIIc) ist darauf in der Form

$$,\ \vdash \text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon, b)) = b \ni \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon, \alpha)) \rightarrow (f(a, b) = a \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon, b)) \rightarrow$$
$$f(a, b) = a \ni (b \ni \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon, \alpha))))\ ‘$$

zu denken. Bei der zweiten Anziehung von (1) ist dieses in der Form

$$,\ \vdash \text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon, b)) = b \ni \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon, \alpha))\ ‘$$

zu denken, indem statt ‚$f(\xi)$‘ gesetzt ist ‚$\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon, \xi))$‘ und statt ‚$a$‘ ‚$b$‘ und statt ‚$\varepsilon$‘ ‚$\alpha$‘ nach den Regeln (9) und (11).

§ 55. *Aufbau.*

$$\text{V b} \quad \vdash \text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = \text{ext}\,\varepsilon\,(g(\varepsilon)) \rightarrow f(a) = g(a)$$

$$(IIIc): \ - - - - - - - -$$

$$\vdash \neg\ f(a) = b \rightarrow (\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = \text{ext}\,\varepsilon\,(g(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ g(a) = b) \qquad (\alpha$$

$$\smile$$

$$\vdash \neg\ f(a) = b \rightarrow \forall \mathfrak{g}\,[\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = \text{ext}\,\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(a) = b] \qquad (\beta$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ \forall \mathfrak{g}\,[\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = \text{ext}\,\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(a) = b] \rightarrow f(a) = b \qquad (\gamma$$

$$(IVa): \ \rule{4cm}{0.4pt}$$

---

[129] von denen der erste durch Wendung nach Regel (3) folgt aus
[130] Der Satz (β’) folgt durch Wendung aus
[131] Vertauschung der Unterglieder

[#88] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#89] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#90] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

$$\vdash (f(a) = b \rightarrow \neg\ \forall \mathfrak{g}\,[\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(a) = b]) \rightarrow$$
$$(\neg\ \forall \mathfrak{g}\,[\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(a) = b]) = (\text{—}\, f(a) = b) \qquad (\delta$$

———— ● ————

III e $\vdash \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon))$

(IIb) : ————————

$$\vdash \forall \mathfrak{g}\,[\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(a) = b] \rightarrow \neg\ f(a) = b \qquad (\varepsilon$$

$\times$

$$\vdash f(a) = b \rightarrow \neg\ \forall \mathfrak{g}\,[\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(a) = b] \qquad (\zeta$$

(δ) : ————————

$$\vdash (\neg\ \forall \mathfrak{g}\,[\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(a) = b]) = (\text{—}\, f(a) = b) \qquad (\eta$$

$(IIIa)$: ————————

$$\vdash (\text{—}\, f(a) = b) = (f(a) = b) \rightarrow$$
$$(\neg\ \forall \mathfrak{g}\,[\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(a) = b]) = (f(a) = b) \qquad (\vartheta$$

$(IIIi)$ :: ————————

$$\vdash (\neg\ \forall \mathfrak{g}\,[\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(a) = b]) = (f(a) = b) \qquad (\iota$$

$\smile$

S.75

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[(\neg\ \forall \mathfrak{g}\,[\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(a) = \mathfrak{a}]) = (f(a) = \mathfrak{a})] \qquad (\kappa$$

(VIa) : ————————

$$\vdash f(a) = \text{℩}\mathrm{ext}\,\alpha\,(\neg\ \forall \mathfrak{g}\,[\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(a) = \alpha]) \qquad (\lambda$$

$(IIIa)$: ————————

$$\vdash \text{℩}\mathrm{ext}\,\alpha\,(\neg\ \forall \mathfrak{g}\,[\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(a) = \alpha]) = a \mathbin{\text{ə}} \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) \rightarrow$$
$$f(a) = a \mathbin{\text{ə}} \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) \qquad (\mu$$

(A) :: ————————

$$\vdash f(a) = a \mathbin{\text{ə}} \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) \qquad (1$$

———— ● ————

1 $\vdash f(a,b) = a \mathbin{\text{ə}} \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon, b))$

$(IIIc)$: ————————

$$\vdash \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon, b)) = b \mathbin{\text{ə}} \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon, \alpha)) \rightarrow$$
$$f(a,b) = a \mathbin{\text{ə}} (b \mathbin{\text{ə}} \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon, \alpha))) \qquad (\alpha$$

(1) :: ————————

$$\vdash f(a,b) = a \mathbin{\text{ə}} (b \mathbin{\text{ə}} \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon, \alpha))) \qquad (2$$

$(IIIc)$: ————————

$$\vdash \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon, \alpha)) = q \rightarrow f(a,b) = a \mathbin{\text{ə}} (b \mathbin{\text{ə}} q) \qquad (3$$

———— ● ————

$$\vdash \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q) \rightarrow \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{r} \mathbin{\text{ə}} p)]) = q \circ p \qquad (\mathrm{B}$$

(3) : ————————

$$(IIIc): \frac{\vdash (\neg\ \forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \text{ ə} (m \text{ ə } q) \to \neg\ d \text{ ə } (\mathfrak{r} \text{ ə } p)]) = d \text{ ə } (m \text{ ə } (q \circ p))}{\vdash \neg\ \forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \text{ ə } (m \text{ ə } q) \to \neg\ d \text{ ə } (\mathfrak{r} \text{ ə } p)] \to d \text{ ə } (m \text{ ə } (q \circ p))} \qquad \begin{matrix}(4\\(\alpha\end{matrix}$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ d \text{ ə } (m \text{ ə } (q \circ p)) \to \forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \text{ ə } (m \text{ ə } q) \to \neg\ d \text{ ə } (\mathfrak{r} \text{ ə } p)] \qquad (\beta$$

$$(IIa): \ - - - - - - - -$$

$$\vdash \neg\ d \text{ ə } (m \text{ ə } (q \circ p)) \to (e \text{ ə } (m \text{ ə } q) \to \neg\ d \text{ ə } (e \text{ ə } p)) \qquad (\gamma$$

$$\times$$

$$\vdash d \text{ ə } (e \text{ ə } p) \to (e \text{ ə } (m \text{ ə } q) \to d \text{ ə } (m \text{ ə } (q \circ p))) \qquad (5$$

S.73 |

§ 56. *Zerlegung.*

Um nun den Satz

$$„ \vdash u \text{ ə } (v \text{ ə } q :\twoheadrightarrow) \to (w \text{ ə } (u \text{ ə } p :\twoheadrightarrow) \to (\forall \mathfrak{a}\, [d \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } (q \circ p)) \to \neg\ \mathfrak{a} \text{ ə } v] \to \neg\ d \text{ ə } w)) ‘ \qquad (\alpha$$

(§ 54, π) zu beweisen, müssen wir auf (Δ) zurückgehen. Daraus leiten wir den Satz

$$„ \vdash w \text{ ə } (u \text{ ə } p :\twoheadrightarrow) \to (\forall \mathfrak{a}\, [d \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } p) \to \neg\ \mathfrak{a} \text{ ə } u] \to \neg\ d \text{ ə } w) ‘ \qquad (\beta$$

ab. Um von diesem aus (α) zu erreichen, müssen wir den Satz

$$„ \vdash \forall \mathfrak{a}\, [d \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } (q \circ p)) \to \neg\ \mathfrak{a} \text{ ə } v] \to (u \text{ ə } (v \text{ ə } q :\twoheadrightarrow) \to \forall \mathfrak{a}\, [d \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } p) \to \neg\ \mathfrak{a} \text{ ə } u]) ‘ \qquad (\gamma$$

haben, der nach Regel (5) hervorgeht aus

$$„ \vdash \forall \mathfrak{a}\, [d \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } (q \circ p)) \to \neg\ \mathfrak{a} \text{ ə } v] \to (u \text{ ə } (v \text{ ə } q :\twoheadrightarrow) \to (d \text{ ə } (e \text{ ə } p) \to \neg\ e \text{ ə } u)) ‘ \qquad (\delta$$

Wir können nun den Satz (β) auch so schreiben:

$$„ \vdash u \text{ ə } (v \text{ ə } q :\twoheadrightarrow) \to (\forall \mathfrak{a}\, [e \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q) \to \neg\ \mathfrak{a} \text{ ə } v] \to \neg\ e \text{ ə } u) ‘ \qquad (\beta$$

Um hieraus (δ) zu gewinnen, bedürfen wir des Satzes

$$„ \vdash \forall \mathfrak{a}\, [d \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } (q \circ p)) \to \neg\ \mathfrak{a} \text{ ə } v] \to (d \text{ ə } (e \text{ ə } p) \to \forall \mathfrak{a}\, [e \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q) \to \neg\ \mathfrak{a} \text{ ə } v]) ‘ \qquad (\varepsilon$$

der nach Regel (5) folgt aus

$$„ \vdash \forall \mathfrak{a}\, [d \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } (q \circ p)) \to \neg\ \mathfrak{a} \text{ ə } v] \to (d \text{ ə } (e \text{ ə } p) \to (e \text{ ə } (m \text{ ə } q) \to \neg\ m \text{ ə } v)) ‘ \qquad (\zeta$$

Dieser Satz ist leicht mit (IIa) und (5) zu beweisen. Es kommt also darauf an, den Satz (β) aus (Δ) abzuleiten. Das geschieht mit

$$„ \vdash \operatorname{ext} \alpha \operatorname{ext} \varepsilon\, (f(\varepsilon, \alpha)) = q \to (F(a \text{ ə } (b \text{ ə } q)) \to F(f(a,b))) ‘ \qquad (\eta$$

was aus (3) folgt.

§ 57. *Aufbau.*

$$3 \quad \vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha)) = q \to f(a,b) = a \,\text{ə}\, (b \,\text{ə}\, q)$$

$(IIIa):$ — — — — — — — — —

$$\vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha)) = q \to (F(a \,\text{ə}\, (b \,\text{ə}\, q)) \to F(f(a,b))) \qquad (6$$

——————— ● ———————

$$\Delta \quad \vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\text{funk}\,(q) \to \neg\ \forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q) \to \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, \alpha] \to \neg\ \mathfrak{d} \,\text{ə}\, \varepsilon])] = q :\twoheadrightarrow$$

$(6):$ ————————————

$$\vdash u \,\text{ə}\, (v \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow) \to \neg\ (\text{funk}\,(q) \to$$
$$\neg\ \forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q) \to \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, v] \to \neg\ \mathfrak{d} \,\text{ə}\, u]) \qquad (7$$

$(Ib):$ — — — — — — — — —

$$\vdash u \,\text{ə}\, (v \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow) \to \forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q) \to \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, v] \to \neg\ \mathfrak{d} \,\text{ə}\, u] \qquad (\alpha$$

$(IIa):$ — — — — — — — — —

$$\vdash u \,\text{ə}\, (v \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow) \to (\forall\mathfrak{a}\,[e \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q) \to \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, v] \to \neg\ e \,\text{ə}\, u) \qquad (8$$

——————— ● ———————

| S.74

$$5 \quad \vdash d \,\text{ə}\, (e \,\text{ə}\, p) \to (e \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, q) \to d \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, (q \circ p)))$$

$(IIa):$ — — — — — — — — —

$$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, (q \circ p)) \to \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, v] \to (d \,\text{ə}\, (e \,\text{ə}\, p) \to$$
$$(e \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, q) \to \neg\ m \,\text{ə}\, v)) \qquad (\alpha$$

$\smile$

$$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, (q \circ p)) \to \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, v] \to (d \,\text{ə}\, (e \,\text{ə}\, p) \to$$
$$\forall\mathfrak{a}\,[e \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q) \to \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, v]) \qquad (\beta$$

$(8):$ — — — — — — — — —

$$\vdash u \,\text{ə}\, (v \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow) \to (\forall\mathfrak{a}\,[d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, (q \circ p)) \to \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, v] \to$$
$$(d \,\text{ə}\, (e \,\text{ə}\, p) \to \neg\ e \,\text{ə}\, u)) \qquad (\gamma$$

$\smile$

$$\vdash u \,\text{ə}\, (v \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow) \to (\forall\mathfrak{a}\,[d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, (q \circ p)) \to \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, v] \to$$
$$\forall\mathfrak{a}\,[d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, p) \to \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, u]) \qquad (\delta$$

$(8):$ — — — — — — — — —

$$\vdash w \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, p :\twoheadrightarrow) \to (u \,\text{ə}\, (v \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow) \to$$
$$(\forall\mathfrak{a}\,[d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, (q \circ p)) \to \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, v] \to \neg\ d \,\text{ə}\, w)) \qquad (\varepsilon$$

$\smile$

$$\vdash w ə (u ə p :\twoheadrightarrow) \to (u ə (v ə q :\twoheadrightarrow) \to$$
$$\forall \mathfrak{d}\, [\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} ə (\mathfrak{a} ə (q \circ p)) \to \neg\; \mathfrak{a} ə v] \to \neg\; \mathfrak{d} ə w]) \qquad (9$$

———— ● ————

$$3 \quad \vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha)) = q \to f(a,b) = a ə (b ə q)$$
$(IIIc):$ – – – – – – – – –
$$\vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha)) = q \to (F(f(a,b)) \to F(a ə (b ə q))) \qquad (10$$

———— ● ————

$$\Delta \quad \vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\; (\text{funk}\,(q) \to \neg\; \forall \mathfrak{d}\, [\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} ə (\mathfrak{a} ə q) \to \neg\; \mathfrak{a} ə \alpha] \to$$
$$\neg\; \mathfrak{d} ə \varepsilon])] = q :\twoheadrightarrow$$
$(10):$ ————————————
$$\vdash \neg\; (\text{funk}\,(q) \to \neg\; \forall \mathfrak{d}\, [\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} ə (\mathfrak{a} ə q) \to \neg\; \mathfrak{a} ə v] \to \neg\; \mathfrak{d} ə w]) \to$$
$$w ə (v ə q :\twoheadrightarrow) \qquad (\alpha$$
$(Ie):$ – – – – – – – – –
$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (\forall \mathfrak{d}\, [\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} ə (\mathfrak{a} ə q) \to \neg\; \mathfrak{a} ə v] \to \neg\; \mathfrak{d} ə w] \to w ə (v ə q :\twoheadrightarrow)) \quad (11$$

———— ● ————

$$11 \quad \vdash \text{funk}\,(q \circ p) \to (\forall \mathfrak{d}\, [\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} ə (\mathfrak{a} ə (q \circ p)) \to \neg\; \mathfrak{a} ə v] \to \neg\; \mathfrak{d} ə w] \to$$
$$w ə (v ə (q \circ p) :\twoheadrightarrow))$$
$(9)::$ – – – – – – – – –
$$\vdash \text{funk}\,(q \circ p) \to (w ə (u ə p :\twoheadrightarrow) \to (u ə (v ə q :\twoheadrightarrow) \to w ə (v ə (q \circ p) :\twoheadrightarrow))) \qquad (12$$

§ 58. *Zerlegung.*

Wir müssen jetzt den Satz (§ 54, o)

$$,\ \vdash \text{funk}\,(p) \to (\text{funk}\,(q) \to \text{funk}\,(q \circ p))\ ‘ \qquad (\alpha$$

beweisen; d. h.: ‚die aus der p-Beziehung und der q-Beziehung zusammengesetzte Beziehung
S.76 ist eindeutig, wenn sowohl die p-Beziehung, | als auch die q-Beziehung eindeutig ist‘. Nach der Definition (Γ) ist zu beweisen

$$,\ \vdash \text{funk}\,(p) \to (\text{funk}\,(q) \to \forall \mathfrak{e}\, \forall \mathfrak{d}\, [\mathfrak{e} ə (\mathfrak{d} ə (q \circ p)) \to \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{e} ə (\mathfrak{a} ə (q \circ p)) \to \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]])\ ‘ \quad (\beta$$

was nach Regel (5) hervorgeht aus

$$,\ \vdash \text{funk}\,(p) \to (\text{funk}\,(q) \to (e ə (d ə (q \circ p)) \to (e ə (a ə (q \circ p)) \to d = a)))\ ‘ \qquad (\gamma$$

Aus der Definition (B) ist nun leicht zu folgern

$$,\ \vdash e ə (a ə (q \circ p)) \to \neg\; \forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} ə (a ə q) \to \neg\; e ə (\mathfrak{r} ə p)]\ ‘ \qquad (\delta$$

oder

$$,\ \vdash \forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} ə (a ə q) \to \neg\; e ə (\mathfrak{r} ə p)] \to \neg\; e ə (a ə (q \circ p))\ ‘ \qquad (\varepsilon$$

Mit diesem Satze gelangt man von

$$,\ \vdash \text{funk}\,(p) \to (\text{funk}\,(q) \to (e ə (d ə (q \circ p)) \to (\neg\; d = a \to$$
$$\forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} ə (a ə q) \to \neg\; e ə (\mathfrak{r} ə p)])))\ ‘ \qquad (\zeta$$

leicht zu dem Satze

$$,\ \vdash \text{funk}\,(p) \to (\text{funk}\,(q) \to (e ə (d ə (q \circ p)) \to (\neg\; d = a \to \neg\; e ə (a ə (q \circ p)))))\ ‘ \quad (\eta$$

■→aus dem (γ) durch Kontraposition folgt.←■[132] [#91] Der Satz (ζ) geht nun nach Regel (5) hervor aus

$$,\ \vdash \text{funk}\,(p) \to (\text{funk}\,(q) \to (e \text{ ə } (d \text{ ə } (q \circ p)) \to (\neg\ d = a \to (b \text{ ə } (a \text{ ə } q) \to \neg\ e \text{ ə } (b \text{ ə } p))))) \text{ ‘} \qquad (\vartheta$$

Dieser Satz ist in ähnlicher Weise mit

$$,\ \vdash \forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \text{ ə } (d \text{ ə } q) \to \neg\ e \text{ ə } (\mathfrak{r} \text{ ə } p)] \to \neg\ e \text{ ə } (d \text{ ə } (q \circ p)) \text{ ‘} \qquad (\varepsilon$$

aus

$$,\ \vdash \text{funk}\,(p) \to (e \text{ ə } (b \text{ ə } p) \to (\neg\ d = a \to (\text{funk}\,(q) \to (b \text{ ə } (a \text{ ə } q) \to (c \text{ ə } (d \text{ ə } q) \to \neg\ e \text{ ə } (c \text{ ə } p)))))) \text{ ‘} \qquad (\iota$$

abzuleiten wie (η) aus (ϑ). Es wird dabei das ‚c‘ durch das ‚$\mathfrak{r}$‘ zu ersetzen sein. Deshalb ist die Verschiedenheit der Buchstaben ‚b‘ und ‚c‘ nothwendig; sonst würde nach Regel (5) das ‚$\mathfrak{r}$‘ nicht nur an den Stellen einzuführen sein, wo jetzt ‚c‘ steht, sondern auch da, wo ‚b‘ steht. Nun folgt aus unserer Definition (Γ)

$$,\ \vdash \text{funk}\,(q) \to (b \text{ ə } (d \text{ ə } q) \to (b \text{ ə } (a \text{ ə } q) \to d = a)) \text{ ‘} \qquad (\kappa$$

und hieraus mit (IIIc)

$$,\ \vdash b = c \to (\text{funk}\,(q) \to (c \text{ ə } (d \text{ ə } q) \to (b \text{ ə } (a \text{ ə } q) \to d = a))) \text{ ‘} \qquad (\lambda$$

Wendet man hierauf den Satz (κ) an in der Form

$$,\ \vdash \text{funk}\,(p) \to (e \text{ ə } (b \text{ ə } p) \to (e \text{ ə } (c \text{ ə } p) \to b = c)) \text{ ‘} \qquad (\kappa$$

| so beweist man den Satz (ι), von dem ausgehend wir zu unserm Satze (α) gelangen können, S.77
wie wir sahen.

§ 59. *Aufbau.*

$$\Gamma \quad \vdash (\forall \mathfrak{e}\, \forall \mathfrak{d}\, [\mathfrak{e} \text{ ə } (\mathfrak{d} \text{ ə } q) \to \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{e} \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q) \to \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]]) = \text{funk}\,(q)$$

$$(IIIa): \ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to \forall \mathfrak{e}\, \forall \mathfrak{d}\, [\mathfrak{e} \text{ ə } (\mathfrak{d} \text{ ə } q) \to \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{e} \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q) \to \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]] \qquad (\alpha$$

$$(IIa): \ - - - - - - - - -$$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to \forall \mathfrak{d}\, [b \text{ ə } (\mathfrak{d} \text{ ə } q) \to \forall \mathfrak{a}\, [b \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q) \to \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]] \qquad (\beta$$

$$(IIa): \ - - - - - - - - -$$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (b \text{ ə } (d \text{ ə } q) \to \forall \mathfrak{a}\, [b \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q) \to d = \mathfrak{a}]) \qquad (\gamma$$

$$(IIa): \ - - - - - - - - -$$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (b \text{ ə } (d \text{ ə } q) \to (b \text{ ə } (a \text{ ə } q) \to d = a)) \qquad (13$$

———— ● ————

$$6 \quad \vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ f(\varepsilon, \alpha)) = q \to (a \text{ ə } (b \text{ ə } q) \to \neg\ f(a, b))$$

$$\times$$

$$\vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ f(\varepsilon, \alpha)) = q \to (f(a, b) \to \neg\ a \text{ ə } (b \text{ ə } q)) \qquad (14$$

———— ● ————

$$\mathrm{B} \quad \vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \text{ ə } (\alpha \text{ ə } q) \to \neg\ \varepsilon \text{ ə } (\mathfrak{r} \text{ ə } p)]) = q \circ p$$

$$(14): \ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

---

[132] aus dem (γ) durch Wendung folgt.

[#91] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

$$\vdash \forall \mathfrak{r}\left[\mathfrak{r} \ni (d \ni q) \rightarrow \neg\ e \ni (\mathfrak{r} \ni p)\right] \rightarrow \neg\ e \ni (d \ni (q \circ p)) \tag{15}$$

—————— • ——————

$$(IIIc): \frac{\Gamma \quad \vdash (\forall \mathfrak{e}\, \forall \mathfrak{d}\left[\mathfrak{e} \ni (\mathfrak{d} \ni q) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\left[\mathfrak{e} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \rightarrow \mathfrak{d} = \mathfrak{a}\right]\right]) = \text{funk}\,(q)}{\vdash \forall \mathfrak{e}\, \forall \mathfrak{d}\left[\mathfrak{e} \ni (\mathfrak{d} \ni q) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\left[\mathfrak{e} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \rightarrow \mathfrak{d} = \mathfrak{a}\right]\right] \rightarrow \text{funk}\,(q)} \tag{16}$$

—————— • ——————

$$13 \quad \vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (b \ni (d \ni q) \rightarrow (b \ni (a \ni q) \rightarrow d = a))$$

$$(IIIc): \overline{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxx}}$$

$$\vdash b = c \rightarrow (\text{funk}\,(q) \rightarrow (c \ni (d \ni q) \rightarrow (b \ni (a \ni q) \rightarrow d = a))) \tag{α}$$

$$(13) :: - - - - - - - -$$

$$\vdash \text{funk}\,(p) \rightarrow (e \ni (b \ni p) \rightarrow (e \ni (c \ni p) \rightarrow$$
$$(\text{funk}\,(q) \rightarrow (c \ni (d \ni q) \rightarrow (b \ni (a \ni q) \rightarrow d = a))))) \tag{β}$$

$$\times$$

$$\vdash \text{funk}\,(p) \rightarrow (e \ni (b \ni p) \rightarrow (\neg\ d = a \rightarrow$$
$$(\text{funk}\,(q) \rightarrow (b \ni (a \ni q) \rightarrow (c \ni (d \ni q) \rightarrow \neg\ e \ni (c \ni p)))))) \tag{γ}$$

$$\smile$$

$$\vdash \text{funk}\,(p) \rightarrow (e \ni (b \ni p) \rightarrow (\neg\ d = a \rightarrow$$
$$(\text{funk}\,(q) \rightarrow (b \ni (a \ni q) \rightarrow \forall \mathfrak{r}\left[\mathfrak{r} \ni (d \ni q) \rightarrow \neg\ e \ni (\mathfrak{r} \ni p)\right])))) \tag{δ}$$

$$(15) : - - - - - - - -$$

S.80

$$\vdash \text{funk}\,(p) \rightarrow (e \ni (b \ni p) \rightarrow (\neg\ d = a \rightarrow$$
$$(\text{funk}\,(q) \rightarrow (b \ni (a \ni q) \rightarrow \neg\ e \ni (d \ni (q \circ p)))))) \tag{ε}$$

$$\times$$

$$\vdash \text{funk}\,(p) \rightarrow (e \ni (d \ni (q \circ p)) \rightarrow (\neg\ d = a \rightarrow$$
$$(\text{funk}\,(q) \rightarrow (b \ni (a \ni q) \rightarrow \neg\ e \ni (b \ni p))))) \tag{ζ}$$

$$\smile$$

$\vdash$ funk $(p) \rightarrow (e \ni (d \ni (q \circ p)) \rightarrow (\neg\ d = a \rightarrow$

$(\text{funk}\,(q) \rightarrow \forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (a \ni q) \rightarrow \neg\ e \ni (\mathfrak{r} \ni p)])))$ $(\eta$

$(15):\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$

$\vdash$ funk $(p) \rightarrow (e \ni (d \ni (q \circ p)) \rightarrow (\neg\ d = a \rightarrow (\text{funk}\,(q) \rightarrow \neg\ e \ni (a \ni (q \circ p)))))$ $(\vartheta$

$\times$

$\vdash$ funk $(p) \rightarrow (\text{funk}\,(q) \rightarrow (e \ni (d \ni (q \circ p)) \rightarrow (e \ni (a \ni (q \circ p)) \rightarrow d = a)))$ $(\iota$

$\smile$

$\vdash$ funk $(p) \rightarrow (\text{funk}\,(q) \rightarrow \forall \mathfrak{e}\, \forall \mathfrak{d}\,[\mathfrak{e} \ni (\mathfrak{d} \ni (q \circ p)) \rightarrow$

$\forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{e} \ni (\mathfrak{a} \ni (q \circ p)) \rightarrow \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]])$ $(\kappa$

$(16):\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$

$\vdash$ funk $(p) \rightarrow (\text{funk}\,(q) \rightarrow \text{funk}\,(q \circ p))$ (17

---

7 $\vdash u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \rightarrow \neg\ (\text{funk}\,(q) \rightarrow$
$\neg\ \forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \ni v] \rightarrow \neg\ (\mathfrak{d} \ni u)$ #92$])$

$(Id):\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$
$\vdash u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \rightarrow \text{funk}\,(q)$ (18

$(17):\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$
$\vdash$ funk $(p) \rightarrow (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \rightarrow \text{funk}\,(q \circ p))$ $(\alpha$

$(18)::\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$
$\vdash w \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \rightarrow (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \rightarrow \text{funk}\,(q \circ p))$ $(\beta$

$(12):\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$
$\vdash w \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \rightarrow (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \rightarrow w \ni (v \ni (q \circ p) :\twoheadrightarrow))$ (19

b) Beweis des Satzes

,$\vdash v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \rightarrow$
$(\neg\ \forall \mathfrak{q}\,[u \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow \neg\ w \ni (u \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)] \rightarrow$
$\neg\ \forall \mathfrak{q}\,[v \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow \neg\ w \ni (v \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)]))$‘

und Ende des Abschnittes A.

| S.78

§ 60. *Zerlegung.*

Wir haben nun den Satz (§ 54, ν)

$$, \vdash (q \circ p)^{-1} = p^{-1} \circ q^{-1} \text{ ‘} \qquad (\alpha$$

zu beweisen. Nach den Definitionen (E) und (B) kommt dies darauf hinaus, den Satz

$$, \vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\alpha \ni (\varepsilon \ni (q \circ p))) =$$
$$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \forall\mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (\alpha \ni p^{-1}) \to \neg\ \varepsilon \ni (\mathfrak{r} \ni q^{-1})]) \text{ ‘} \qquad (\beta$$

abzuleiten. Wir können uns dazu des Satzes

$$, \vdash \forall\mathfrak{d}\,\forall\mathfrak{a}\,[f(\mathfrak{a},\mathfrak{d}) = g(\mathfrak{a},\mathfrak{d})] \to \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha)) = \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(g(\varepsilon,\alpha)) \text{ ‘} \qquad (\gamma$$

bedienen, den wir auch sonst noch brauchen werden und der durch zweimalige Anwendung des Satzes (Va) bewiesen werden kann. Um diesen Satz hier anzuwenden, müssen wir den Satz

$$, \vdash b \ni (a \ni (q \circ p)) = (\neg\ \forall\mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (b \ni p^{-1}) \to \neg\ a \ni (\mathfrak{r} \ni q^{-1})]) \text{ ‘} \qquad (\delta$$

haben, der mit (4) aus

$$, \vdash (\neg\ \forall\mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (a \ni q) \to \neg\ b \ni (\mathfrak{r} \ni p)]) =$$
$$(\neg\ \forall\mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (b \ni p^{-1}) \to \neg\ a \ni (\mathfrak{r} \ni q^{-1})]) \text{ ‘} \qquad (\varepsilon$$

folgt. (ε) ist mit (IVa) zu beweisen. Wir bedürfen dazu der Sätze

$$, \vdash \neg\ \forall\mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (b \ni p^{-1}) \to \neg\ a \ni (\mathfrak{r} \ni q^{-1})] \to$$
$$\neg\ \forall\mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (a \ni q) \to \neg\ b \ni (\mathfrak{r} \ni p)] \text{ ‘} \qquad (\zeta$$

und

$$, \vdash \neg\ \forall\mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (a \ni q) \to \neg\ b \ni (\mathfrak{r} \ni p)] \to$$
$$\neg\ \forall\mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (b \ni p^{-1}) \to \neg\ a \ni (\mathfrak{r} \ni q^{-1})] \text{ ‘} \qquad (\eta$$

Wir leiten sie aus dem Satze

$$, \vdash r \ni (a \ni q) = a \ni (r \ni q^{-1}) \text{ ‘} \qquad (\vartheta$$

ab, der leicht aus (E) folgt. Den so bewiesenen Satz (α) benutzen wir, wie in § 54 angedeutet wurde, zum Beweise des Satzes (§ 54, μ)

$$, \vdash v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (u \ni (w \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to v \ni (w \ni (q \circ p)^{-1} :\twoheadrightarrow)) \text{ ‘} \qquad (\iota$$

und leiten aus diesem und (19) den Satz (§ 54, ε) ab.

§ 61. *Aufbau.*

$$\text{Va} \quad \vdash \forall\mathfrak{a}\,[f(\mathfrak{a},d) = g(\mathfrak{a},d)] \to \text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon,d)) = \text{ext}\,\varepsilon\,(g(\varepsilon,d))$$

$$(IIa) :: \ - - - - - - - - -$$

$$\vdash \forall\mathfrak{d}\,\forall\mathfrak{a}\,[f(\mathfrak{a},\mathfrak{d}) = g(\mathfrak{a},\mathfrak{d})] \to \text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon,d)) = \text{ext}\,\varepsilon\,(g(\varepsilon,d)) \qquad (\alpha$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall\mathfrak{d}\,\forall\mathfrak{a}\,[f(\mathfrak{a},\mathfrak{d}) = g(\mathfrak{a},\mathfrak{d})] \to \forall\mathfrak{a}\,[\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon,\mathfrak{a})) = \text{ext}\,\varepsilon\,(g(\varepsilon,\mathfrak{a}))] \qquad (\beta$$

$$(Va) : \ - - - - - - - - -$$

$$\vdash \forall\mathfrak{d}\,\forall\mathfrak{a}\,[f(\mathfrak{a},\mathfrak{d}) = g(\mathfrak{a},\mathfrak{d})] \to \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha)) = \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(g(\varepsilon,\alpha)) \qquad (20$$

———————— • ————————

$$\text{E} \quad \vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\alpha \ni (\varepsilon \ni q)) = q^{-1}$$

$$(3) : \ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash r \ni (a \ni q) = a \ni (r \ni q^{-1}) \qquad (21$$

$$(IIIc) : \ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash F(r \ni (a \ni q)) \to F(a \ni (r \ni q^{-1})) \tag{22}$$

—————— • ——————

$$\begin{array}{rl} & 21 \quad \vdash r \ni (a \ni q) = a \ni (r \ni q^{-1}) \\ (IIIa): & \overline{} \\ & \vdash F(a \ni (r \ni q^{-1})) \to F(r \ni (a \ni q)) \end{array} \tag{23}$$

—————— • ——————

S.79

$$23 \quad \vdash a \ni (r \ni q^{-1}) \to r \ni (a \ni q)$$

$$(IIa): \quad - - - - - - - -$$

$$\vdash \forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \ni (a \ni q) \to \neg\ b \ni (\mathfrak{r} \ni p)] \to$$

$$(a \ni (r \ni q^{-1}) \to \neg\ b \ni (r \ni p)) \tag{α}$$

$$\times$$

$$\vdash \forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \ni (a \ni q) \to \neg\ b \ni (\mathfrak{r} \ni p)] \to$$

$$(b \ni (r \ni p) \to \neg\ a \ni (r \ni q^{-1})) \tag{β}$$

$$(23) :: \quad - - - - - - - -$$

$$\vdash \forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \ni (a \ni q) \to \neg\ b \ni (\mathfrak{r} \ni p)] \to$$

$$(r \ni (b \ni p^{-1}) \to \neg\ a \ni (r \ni q^{-1})) \tag{γ}$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \ni (a \ni q) \to \neg\ b \ni (\mathfrak{r} \ni p)] \to$$

$$\forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \ni (b \ni p^{-1}) \to \neg\ a \ni (\mathfrak{r} \ni q^{-1})] \tag{δ}$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ \forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \ni (b \ni p^{-1}) \to \neg\ a \ni (\mathfrak{r} \ni q^{-1})] \to$$

$$\neg\ \forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \ni (a \ni q) \to \neg\ b \ni (\mathfrak{r} \ni p)] \tag{ε}$$

—————— • ——————

$$22 \quad \vdash b \ni (r \ni p) \to r \ni (b \ni p^{-1})$$

$$(IIa): \quad - - - - - - - -$$

$$\vdash \forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \ni (b \ni p^{-1}) \to \neg\ a \ni (\mathfrak{r} \ni q^{-1})] \to$$

$$(b \ni (r \ni p) \to \neg\ a \ni (r \ni q^{-1})) \tag{ζ}$$

$$\times$$

$$\vdash \forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (b \ni p^{-1}) \rightarrow \neg\ a \ni (\mathfrak{r} \ni q^{-1})] \rightarrow$$

$$(a \ni (r \ni q^{-1}) \rightarrow \neg\ b \ni (r \ni p)) \qquad (\eta$$

$$(22) :: \quad - - - - - - - -$$

$$\vdash \forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (b \ni p^{-1}) \rightarrow \neg\ a \ni (\mathfrak{r} \ni q^{-1})] \rightarrow$$

$$(r \ni (a \ni q) \rightarrow \neg\ b \ni (r \ni p)) \qquad (\vartheta$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (b \ni p^{-1}) \rightarrow \neg\ a \ni (\mathfrak{r} \ni q^{-1})] \rightarrow$$

$$\forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (a \ni q) \rightarrow \neg\ b \ni (\mathfrak{r} \ni p)] \qquad (\iota$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ \forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (a \ni q) \rightarrow \neg\ b \ni (\mathfrak{r} \ni p)] \rightarrow$$

$$\neg\ \forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (b \ni p^{-1}) \rightarrow \neg\ a \ni (\mathfrak{r} \ni q^{-1})] \qquad (\kappa$$

$$(IVa) : \quad \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash (\neg\ \forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (b \ni p^{-1}) \rightarrow \neg\ a \ni (\mathfrak{r} \ni q^{-1})] \rightarrow$$

$$\neg\ \forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (a \ni q) \rightarrow \neg\ b \ni (\mathfrak{r} \ni p)]) \rightarrow$$

$$(\neg\ \forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (a \ni q) \rightarrow \neg\ b \ni (\mathfrak{r} \ni p)]) =$$

$$(\neg\ \forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (b \ni p^{-1}) \rightarrow \neg\ a \ni (\mathfrak{r} \ni q^{-1})]) \qquad (\lambda$$

$$(\varepsilon) :: \quad \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash (\neg\ \forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (a \ni q) \rightarrow \neg\ b \ni (\mathfrak{r} \ni p)]) =$$
$$(\neg\ \forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (b \ni p^{-1}) \rightarrow \neg\ a \ni (\mathfrak{r} \ni q^{-1})]) \qquad (\mu$$

$$(IIIc) : \quad \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash (\neg\ \forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (a \ni q) \rightarrow \neg\ b \ni (\mathfrak{r} \ni p)]) = b \ni (a \ni (q \circ p)) \rightarrow$$
$$b \ni (a \ni (q \circ p)) = (\neg\ \forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (b \ni p^{-1}) \rightarrow \neg\ a \ni (\mathfrak{r} \ni q^{-1})]) \qquad (\nu$$

$$(4) :: \quad \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

S.83

$$\vdash b \ni (a \ni (q \circ p)) = (\neg\ \forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (b \ni p^{-1}) \rightarrow \neg\ a \ni (\mathfrak{r} \ni q^{-1})]) \qquad (\xi$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{d}\, \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni (q \circ p)) =$$

$$(\neg\ \forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \ni (\mathfrak{d} \ni p^{-1}) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \ni (\mathfrak{r} \ni q^{-1})])] \qquad (o$$

(20) : ———————

$$\vdash \mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\alpha \ni (\varepsilon \ni (q \circ p))) =$$

$$\mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ \forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \ni (\alpha \ni p^{-1}) \rightarrow \neg\ \varepsilon \ni (\mathfrak{r} \ni q^{-1})]) \qquad (\pi$$

$(IIIc)$: ———————

$$\vdash \mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ \forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \ni (\alpha \ni p^{-1}) \rightarrow \neg\ \varepsilon \ni (\mathfrak{r} \ni q^{-1})]) = p^{-1} \circ q^{-1} \rightarrow$$

$$\mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\alpha \ni (\varepsilon \ni (q \circ p))) = p^{-1} \circ q^{-1} \qquad (\rho$$

(B) :: ———————

$$\vdash \mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\alpha \ni (\varepsilon \ni (q \circ p))) = p^{-1} \circ q^{-1} \qquad (\sigma$$

$(IIIc)$: ———————

$$\vdash \mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\alpha \ni (\varepsilon \ni (q \circ p))) = (q \circ p)^{-1} \rightarrow (q \circ p)^{-1} = p^{-1} \circ q^{-1} \qquad (\tau$$

(E) :: ———————

$$\vdash (q \circ p)^{-1} = p^{-1} \circ q^{-1} \qquad (24$$

$(IIIa)$: ———————

$$\vdash v \ni (w \ni (p^{-1} \circ q^{-1}) :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow v \ni (w \ni (q \circ p)^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \qquad (\alpha$$

(19) :: — — — — — — — —

$$\vdash v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (u \ni (w \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow v \ni (w \ni (q \circ p)^{-1} :\twoheadrightarrow\ )) \qquad (\beta$$

(IIa) : — — — — — — — —

$$\vdash \forall \mathfrak{q}\, [v \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow \neg\ w \ni (v \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow\ )] \rightarrow$$

$$(v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (u \ni (w \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow \neg\ w \ni (v \ni (q \circ p) :\twoheadrightarrow\ ))) \qquad (\gamma$$

——————— • ———————

19 $\vdash w \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow w \ni (v \ni (q \circ p) :\twoheadrightarrow\ ))$

$\times$

$$\vdash \neg\ w \ni (v \ni (q \circ p) :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow \neg\ w \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\ )) \qquad (\delta$$

(γ) :: — — — — — — — —

$$\vdash \forall \mathfrak{q}\, [v \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow \neg\ w \ni (v \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow\ )] \rightarrow$$

$$(v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow$$

$$(u \ni (w \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow \neg\ w \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\ )))) \qquad (\varepsilon$$

$\smile$

$$\vdash \forall \mathfrak{q}\, [v \mathrel{\text{ə}} (w \mathrel{\text{ə}} \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\; w \mathrel{\text{ə}} (v \mathrel{\text{ə}} \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)] \to$$
$$(v \mathrel{\text{ə}} (u \mathrel{\text{ə}} q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (u \mathrel{\text{ə}} (v \mathrel{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow) \to$$
$$\forall \mathfrak{q}\, [u \mathrel{\text{ə}} (w \mathrel{\text{ə}} \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\; w \mathrel{\text{ə}} (u \mathrel{\text{ə}} \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)])) \qquad (\zeta$$

$$\times$$

$$\vdash v \mathrel{\text{ə}} (u \mathrel{\text{ə}} q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (u \mathrel{\text{ə}} (v \mathrel{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow) \to$$
$$(\neg\; \forall \mathfrak{q}\, [u \mathrel{\text{ə}} (w \mathrel{\text{ə}} \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\; w \mathrel{\text{ə}} (u \mathrel{\text{ə}} \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)] \to$$
$$\neg\; \forall \mathfrak{q}\, [v \mathrel{\text{ə}} (w \mathrel{\text{ə}} \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\; w \mathrel{\text{ə}} (v \mathrel{\text{ə}} \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)])) \qquad (25$$

§ 62. *Zerlegung.*

S.81 Um nun den Satz (§ 54, δ) aus (25) abzuleiten, bedürfen wir des Satzes (§ 54, η) |

$$,\ \vdash u \mathrel{\text{ə}} (v \mathrel{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow) \to u \mathrel{\text{ə}} (v \mathrel{\text{ə}} (q^{-1})^{-1} :\twoheadrightarrow)\ ‘ \qquad (\alpha$$

Nach (11) haben wir dazu die Sätze

$$,\ \vdash u \mathrel{\text{ə}} (v \mathrel{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow) \to \forall \mathfrak{d}\, [\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \mathrel{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} (q^{-1})^{-1}) \to \neg\; \mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} v] \to \neg\; \mathfrak{d} \mathrel{\text{ə}} u]\ ‘ \qquad (\beta$$ [#93]

und

$$,\ \vdash u \mathrel{\text{ə}} (v \mathrel{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow) \to \text{funk}\,((q^{-1})^{-1})\ ‘ \qquad (\gamma$$

zu beweisen. (β) geht nach Regel (5) hervor aus

$$,\ \vdash u \mathrel{\text{ə}} (v \mathrel{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow) \to (\forall \mathfrak{a}\, [d \mathrel{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} (q^{-1})^{-1}) \to \neg\; \mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} v] \to \neg\; d \mathrel{\text{ə}} u)\ ‘ \qquad (\delta$$

Nach (8) haben wir nun

$$,\ \vdash u \mathrel{\text{ə}} (v \mathrel{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow) \to (\forall \mathfrak{a}\, [d \mathrel{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} q) \to \neg\; \mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} v] \to \neg\; d \mathrel{\text{ə}} u)\ ‘ \qquad (\varepsilon$$

Es bleibt also zu beweisen

$$,\ \vdash \forall \mathfrak{a}\, [d \mathrel{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} (q^{-1})^{-1}) \to \neg\; \mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} v] \to \forall \mathfrak{a}\, [d \mathrel{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} q) \to \neg\; \mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} v]\ ‘ \qquad (\zeta$$

was nach Regel (5) folgt aus

$$,\ \vdash \forall \mathfrak{a}\, [d \mathrel{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} (q^{-1})^{-1}) \to \neg\; \mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} v] \to (d \mathrel{\text{ə}} (a \mathrel{\text{ə}} q) \to \neg\; a \mathrel{\text{ə}} v)\ ‘ \qquad (\eta$$

Schreiben wir (IIa) so

$$,\ \vdash \forall \mathfrak{a}\, [d \mathrel{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} (q^{-1})^{-1}) \to \neg\; \mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} v] \to (d \mathrel{\text{ə}} (a \mathrel{\text{ə}} (q^{-1})^{-1}) \to \neg\; a \mathrel{\text{ə}} v)\ ‘ \qquad (\vartheta$$

so sehen wir, dass der Satz

$$,\ \vdash d \mathrel{\text{ə}} (a \mathrel{\text{ə}} q) \to d \mathrel{\text{ə}} (a \mathrel{\text{ə}} (q^{-1})^{-1})\ ‘ \qquad (\iota$$

abzuleiten ist, was mit (22) leicht geschehen kann.

§ 63. *Aufbau.*

$$22 \quad \vdash a \mathrel{\text{ə}} (d \mathrel{\text{ə}} q^{-1}) \to d \mathrel{\text{ə}} (a \mathrel{\text{ə}} (q^{-1})^{-1})$$

$$(22) ::\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$

[#93] im Original fehlt linkes Zeichen [interp | bonn]

$$\vdash d \ni (a \ni q) \to d \ni (a \ni (q^{-1})^{-1}) \qquad (26$$

$$(IIa): \; - - - - - - - -$$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [d \ni (\mathfrak{a} \ni (q^{-1})^{-1}) \to \neg\; \mathfrak{a} \ni v] \to (d \ni (a \ni q) \to \neg\; a \ni v) \qquad (\alpha$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [d \ni (\mathfrak{a} \ni (q^{-1})^{-1}) \to \neg\; \mathfrak{a} \ni v] \to \forall \mathfrak{a}\, [d \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \neg\; \mathfrak{a} \ni v] \qquad (\beta$$

$$(8): \; - - - - - - - -$$

$$\vdash u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \to (\forall \mathfrak{a}\, [d \ni (\mathfrak{a} \ni (q^{-1})^{-1}) \to \neg\; \mathfrak{a} \ni v] \to \neg\; d \ni u) \qquad (\gamma$$

$$\smile$$

$$\vdash u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \to$$

$$\forall \mathfrak{d}\, [\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni (q^{-1})^{-1}) \to \neg\; \mathfrak{a} \ni v] \to \neg\; \mathfrak{d} \ni u] \qquad (\delta$$

$$(11): \; - - - - - - - -$$

$$\vdash \text{funk}\,((q^{-1})^{-1}) \to (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \to u \ni (v \ni (q^{-1})^{-1} :\twoheadrightarrow)) \qquad (27$$

§ 64. *Zerlegung.*

Es fehlt uns noch der Satz (§ 62, γ). Wir beweisen zunächst

$$,\; \vdash \text{funk}\,(q) \to \text{funk}\,((q^{-1})^{-1})\;‘ \qquad (\alpha$$

woraus dann mit (18) jener folgt. Nach (16) haben wir abzuleiten

$$,\; \vdash \text{funk}\,(q) \to \forall \mathfrak{e}\, \forall \mathfrak{d}\, [\mathfrak{e} \ni (\mathfrak{d} \ni (q^{-1})^{-1}) \to \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{e} \ni (\mathfrak{a} \ni (q^{-1})^{-1}) \to \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]]\;‘ \qquad (\beta$$

| oder S.82

$$,\; \vdash \text{funk}\,(q) \to (e \ni (d \ni (q^{-1})^{-1}) \to (e \ni (a \ni (q^{-1})^{-1}) \to d = a))\;‘ \qquad (\gamma$$

Nun haben wir nach (13)

$$,\; \vdash \text{funk}\,(q) \to (e \ni (d \ni q) \to (e \ni (a \ni q) \to d = a))\;‘ \qquad (\delta$$

Hieraus folgt (γ) mit dem Satze

$$\vdash e \ni (a \ni (q^{-1})^{-1}) \to e \ni (a \ni q) \qquad (\varepsilon$$

der aus (23) ähnlich folgt wie (26) aus (22). Nachdem wir so den Satz (§ 62, γ) bewiesen haben, benutzen wir ihn, ■→um in (27) das Vorderglied ‚funk $((q^{-1})^{-1})$‘ durch Verschmelzung der Vorderglieder verschwinden zu lassen.←■[133] [#94] Darauf gelangen wir ans Ziel unseres Abschnittes A, wie in § 54 angegeben worden ist.

§ 65. *Aufbau.*

$$23 \quad \vdash e \ni (a \ni (q^{-1})^{-1}) \to a \ni (e \ni q^{-1})$$

$$(23): \; - - - - - - - -$$

[133]um in (27) das Unterglied ‚funk $((q^{-1})^{-1})$‘ durch Verschmelzung der Unterglieder verschwinden zu lassen.

[#94]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

$$\vdash e \ni (a \ni (q^{-1})^{-1}) \to e \ni (a \ni q) \qquad (28$$

$(13):$ — — — — — — — —

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (e \ni (d \ni q) \to (e \ni (a \ni (q^{-1})^{-1}) \to d = a)) \qquad (\alpha$$

$(28)::$ — — — — — — — —

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (e \ni (d \ni (q^{-1})^{-1}) \to (e \ni (a \ni (q^{-1})^{-1}) \to d = a)) \qquad (\beta$$

$$\smile$$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to \forall \mathfrak{e}\, \forall \mathfrak{d}\, [\mathfrak{e} \ni (\mathfrak{d} \ni (q^{-1})^{-1}) \to \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{e} \ni (\mathfrak{a} \ni (q^{-1})^{-1}) \to \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]] \qquad (\gamma$$

$(16):$ — — — — — — — —

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to \text{funk}\,((q^{-1})^{-1}) \qquad (29$$

$(18)::$ — — — — — — — —

$$\vdash u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \to \text{funk}\,((q^{-1})^{-1}) \qquad (30$$

$(27):$ — — — — — — — —

$$\vdash u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \to u \ni (v \ni (q^{-1})^{-1} :\twoheadrightarrow) \qquad (31$$

$(25):$ — — — — — — — —

$$\vdash u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \to (v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to$$
$$(\neg\ \forall \mathfrak{q}\, [v \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (v \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)] \to$$
$$\neg\ \forall \mathfrak{q}\, [u \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (u \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)])) \qquad (\alpha$$

$(IVa):$ — — — — — — — —

$$\vdash u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \to (v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to$$
$$((\neg\ \forall \mathfrak{q}\, [u \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (u \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)] \to$$
$$\neg\ \forall \mathfrak{q}\, [v \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (v \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)]) \to$$
$$(\neg\ \forall \mathfrak{q}\, [u \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (u \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)]) =$$
$$(\neg\ \forall \mathfrak{q}\, [v \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (v \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)]))) \qquad (\beta$$

$(25)::$ — — — — — — — —

$$\vdash v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \to$$
$$(\neg\ \forall \mathfrak{q}\, [u \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (u \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)]) =$$
$$(\neg\ \forall \mathfrak{q}\, [v \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (v \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)])) \qquad (\gamma$$

$$\smile$$

S.86

$$\vdash v \ni (u \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \to$$
$$\forall \mathfrak{a}\, [(\neg\ \forall \mathfrak{q}\, [u \ni (\mathfrak{a} \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni (u \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)]) =$$
$$(\neg\ \forall \mathfrak{q}\, [v \ni (\mathfrak{a} \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni (v \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)])]) \qquad (\delta$$

$(Va):$ — — — — — — — —

$$\vdash v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \to$$
$$\text{ext}\,\varepsilon\, (\neg\ \forall \mathfrak{q}\, [u \ni (\varepsilon \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ \varepsilon \ni (u \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)]) =$$
$$\text{ext}\,\varepsilon\, (\neg\ \forall \mathfrak{q}\, [v \ni (\varepsilon \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ \varepsilon \ni (v \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)])) \qquad (\varepsilon$$

$(IIIc):$ ————————

$$\vdash \text{ext}\,\varepsilon\, (\neg\ \forall \mathfrak{q}\, [u \ni (\varepsilon \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ \varepsilon \ni (u \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)]) = \text{anz}\,(u) \to$$
$$(v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \to$$
$$\text{anz}\,(u) = \text{ext}\,\varepsilon\, (\neg\ \forall \mathfrak{q}\, [v \ni (\varepsilon \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ \varepsilon \ni (v \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)]))) \qquad (\zeta$$

(Z) :: ————————

$$\vdash v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \to$$
$$\text{anz}\,(u) = \text{ext}\,\varepsilon\, (\neg\ \forall \mathfrak{q}\, [v \ni (\varepsilon \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ \varepsilon \ni (v \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)])) \qquad (\eta$$

$(IIIc):$ ————————

$$\vdash \text{ext}\,\varepsilon\, (\neg\ \forall \mathfrak{q}\, [v \ni (\varepsilon \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ \varepsilon \ni (v \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)]) = \text{anz}\,(u) \to$$
$$(v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \to \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(v))) \qquad (\vartheta$$

(Z) :: ————————

$$\vdash v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow) \to \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(v)) \qquad (32$$

B. Beweis des Satzes ‚$\vdash$ funk (nf)‘

a) Beweis des Satzes

$$‚\vdash \forall \mathfrak{q}\, [\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ c \ni (\mathfrak{a} \ni \mathfrak{q}^{-1})] \to (\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ b \ni (\mathfrak{a} \ni \mathfrak{q})] \to$$
$$(z \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (z \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)))] \to$$
$$(\neg\ c \ni z \to (\neg\ b \ni w \to \neg\ \text{anz}\,(w) = \text{anz}\,(z)))‘$$

| S.84

§ 66. *Zerlegung.*

Um den Satz zu beweisen, dass die Beziehung einer Anzahl zur nächstfolgenden eindeutig sei, oder, wie man auch sagen kann, dass es zu jeder Anzahl nicht mehr als eine gebe, welche auf sie unmittelbar in der Anzahlenreihe folge[134], haben wir den Satz (16) zu benutzen und demnach

$$‚\ \vdash \forall \mathfrak{e}\, \forall \mathfrak{d}\, [\mathfrak{e} \ni (\mathfrak{d} \ni \text{nf}) \to \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{e} \ni (\mathfrak{a} \ni \text{nf}) \to \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]]\ ‘ \qquad (\alpha$$

[134] Vergl. § 43.

abzuleiten, was aus

$$, \vdash e \mathbin{\text{ə}} (d \mathbin{\text{ə}} \text{nf}\,) \rightarrow (e \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} \text{nf}\,) \rightarrow d = a) \text{ ‘} \qquad (\beta$$

folgt. Aus der Definition (H) ist nun leicht

$$, \vdash e \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} \text{nf}\,) \rightarrow$$
$$\neg\ \forall \mathfrak{u}\, \forall \mathfrak{a}\, [\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{u} \rightarrow \varepsilon = \mathfrak{a}))) = e \rightarrow (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{u} \rightarrow \neg\ \text{anz}\,(\mathfrak{u}) = a)] \text{ ‘} \qquad (\gamma$$

zu folgern. Demnach wäre zu beweisen

$$, \vdash \neg\ \forall \mathfrak{u}\, \forall \mathfrak{a}\, [\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{u} \rightarrow \varepsilon = a))) = e \rightarrow (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{u} \rightarrow \neg\ \text{anz}\,(u) = d)] \rightarrow$$
$$(\neg\ \forall \mathfrak{u}\, \forall \mathfrak{a}\, [\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{u} \rightarrow \varepsilon = a))) = e \rightarrow (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{u} \rightarrow \neg\ \text{anz}\,(u) = \mathfrak{a})] \rightarrow$$
$$d = a) \text{ ‘} \qquad (\delta$$

ein Satz, ■→der durch mehrfache Kontraposition←■[135] [#95] und Einführung deutscher Buchstaben hervorgeht aus

$$, \vdash \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \rightarrow \varepsilon = c))) = e \rightarrow (c \mathbin{\text{ə}} v \rightarrow (\text{anz}\,(v) = d \rightarrow$$
$$(\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u \rightarrow \varepsilon = b))) = e \rightarrow (b \mathbin{\text{ə}} u \rightarrow (\text{anz}\,(u) = a \rightarrow$$
$$d = a))))) \text{ ‘} \qquad (\varepsilon$$

Dieser Satz kann abgeleitet werden aus

$$, \vdash c \mathbin{\text{ə}} v \rightarrow (\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u \rightarrow \varepsilon = b))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \rightarrow \varepsilon = c))) \rightarrow$$
$$(b \mathbin{\text{ə}} u \rightarrow \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(v))) \text{ ‘} \qquad (\zeta$$

Nach dem eben bewiesenen Satze (32) brauchen wir hierzu nur eine Beziehung nachzuweisen, die den u-Begriff in den v-Begriff abbildet, und deren Umkehrung den v-Begriff in den u-Begriff abbildet. Dass es nun eine Beziehung giebt, die den $\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u \rightarrow \varepsilon = b))$-Begriff in den $\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \rightarrow \varepsilon = c))$-Begriff abbildet, folgt aus der Gleichheit der diesen Begriffen zukommenden Anzahlen, was freilich noch zu beweisen sein wird. Nun unterscheidet sich der v-Begriff seinem Umfange nach nur dadurch von dem $\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \rightarrow \varepsilon = c))$-Begriffe, dass unter ihn der Gegenstand c fällt, der unter diesen nicht fällt; und es unterscheidet sich der u-Begriff von dem $\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u \rightarrow \varepsilon = b))$-Begriffe seinem Umfange nach nur dadurch, dass unter ihn der Gegenstand b fällt, der unter diesen nicht fällt. Hieraus muss
S.85 nun geschlossen | werden können, dass es auch eine Beziehung giebt, die den u-Begriff in den v-Begriff abbildet. Nach dem, was bei den Mathematikern üblich ist, möchte man etwa sagen: wir ordnen die Gegenstände, die ausser dem b noch unter den u-Begriff fallen, mit der schon bekannten Beziehung den unter den v-Begriff noch ausser dem c fallenden Gegenständen zu, und wir ordnen b dem c zu. So haben wir den u-Begriff in den v-Begriff und umgekehrt diesen in jenen abgebildet. Also sind nach dem soeben bewiesenen Satze die ihnen zukommenden Anzahlen gleich. Dies ist freilich viel kürzer, als der nun folgende Beweis, den Manche, die meine Absicht missverstehen, wegen seiner Länge tadeln werden. Was thun wir denn eigentlich, wenn wir zum Zwecke des Beweises zuordnen? Offenbar etwas Aehnliches, wie wenn wir in der Geometrie eine Hilfslinie ziehen. Euklid, dessen Methode noch vielfach als Muster von Strenge dienen kann, hat für diesen Zweck seine Forderungssätze, die angeben, dass man gewisse Linien ziehen könne. Aber das Ziehen einer Linie darf eigentlich ebensowenig als ein Schaffen angesehen werden, wie das Bestimmen eines Schnittpunkts. Wir bringen uns vielmehr in beiden Fällen nur zum Bewusstsein, fassen nur auf, was schon da war. Für den Beweis ist nur wesentlich, dass es so etwas gebe. Die Forderungssätze Euklids haben also für die Beweise die Kraft von Axiomen, die behaupten, dass es gewisse Linien, gewisse Punkte gebe. Da wir hier nun überall auf die tiefsten Grundlagen dringen

[135] der durch mehrfache Wendung

[#95] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

wollen, so fragen wir, worauf die Möglichkeit solcher Zuordnung beruhe. Wenn man einen Forderungssatz nach dem Vorgange Euklids aufstellen wollte, so könnte er etwa lauten: ‚es wird gefordert, jedem Gegenstande jeden Gegenstand zuzuordnen‘, oder ‚es ist möglich, jeden Gegenstand jedem Gegenstande zuzuordnen‘. Dies dürfte jedoch ebensowenig als ein psychologischer Satz aufgefasst werden wie ein Forderungssatz Euklids, als behauptete er ein Vermögen unserer Seelen; denn als solcher wäre er sogar falsch, da uns nicht alle Gegenstände und nicht Allen dieselben bekannt sind. So würde etwas Subjectives hineinkommen, was der Sache ganz fremd ist. Man muss auch unendlich viele Gegenstände unendlich vielen zuordnen können, obwohl von diesen unendlich vielen Zuordnungen nur wenige wirklich vollzogen werden könnten, wenn das Zuordnen ein schöpferisches Thun der Seele wäre. Vielmehr wäre der Forderungssatz etwa so zu verstehen: ‚jeder Gegenstand ist jedem Gegenstande zugeordnet‘, oder ‚es giebt zwischen jedem Gegenstande und jedem Gegenstande eine Zuordnung‘. Was wäre nun eine solche Zuordnung, wenn sie nichts Subjectives ist, was durch unser Thun erst geschaffen wird? Aber eine einzelne Zuordnung eines Gegenstandes zu einem Gegenstande ist auch nicht das, worauf es uns hier ankommen kann, und was der Hilfslinie in der Geometrie entspricht; sondern wir bedürfen einer Gattung von Zuordnungen, wie man sagen könnte, einer | Sache, die wir bisher Beziehung genannt haben und S.87
ferner nennen werden. Die gewünschte Zuordnung ist also geleistet, wenn wir eine Beziehung aufgefunden[136] haben, in welcher der Gegenstand b zum Gegenstande c steht und die den $\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\varepsilon \,\text{ə}\, u \rightarrow \varepsilon = b))$-Begriff in den $\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\varepsilon \,\text{ə}\, v \rightarrow \varepsilon = c))$- Begriff und deren Umkehrung diesen in jenen abbildet. Dabei kann eine q-Beziehung als bekannt vorausgesetzt werden, welche den $\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\varepsilon \,\text{ə}\, u \rightarrow \varepsilon = b))$-Begriff in den $\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\varepsilon \,\text{ə}\, v \rightarrow \varepsilon = c))$-Begriff und deren Umkehrung diesen in jenen abbildet. Nicht bekannt ist aber von dieser Beziehung, ob in ihr b zu irgendeinem Gegenstande stehe, noch auch, ob irgendein Gegenstand in ihr zu c stehe. Wir können nun eine Beziehung angeben, in der alle die Paare von Gegenständen stehen, die in der q-Beziehung stehen, und in der b zu c steht. Das ist die $\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,((\alpha = c \rightarrow \neg\;\varepsilon = b) \rightarrow \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q))$-Beziehung[137]. Sie hat zwar die andern gewünschten Eigenschaften, aber ob sie und ihre Umkehrung eindeutig seien, lässt sich nicht sagen, solange von der q-Beziehung nichts Näheres bekannt ist. Es wäre z. B. möglich, dass b zu einem von c verschiedenen Gegenstande d in der q-Beziehung stände. Dann stände b zu zwei Gegenständen in der angegebenen Beziehung, nämlich zu c und zu d, und diese wäre nicht eindeutig, wiewohl die q-Beziehung es der Annahme nach ist. Um dies zu vermeiden, suchen wir eine Beziehung auf, welche zwar in den für uns werthvollen Eigenschaften mit der q-Beziehung übereinstimmt, in welcher aber b zu keinem Gegenstande und in welcher auch kein Gegenstand zu c steht. Die $\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\neg\;(\neg\;\alpha = c \rightarrow \varepsilon = b) \rightarrow \neg\;\varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q)))$-Beziehung ist eine solche. Indem wir nun zunächst für ‚$\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\varepsilon \,\text{ə}\, u \rightarrow \varepsilon = b))$‘ der Kürze halber ‚$w$‘ und für ‚$\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\varepsilon \,\text{ə}\, v \rightarrow \varepsilon = c))$‘ ‚$z$‘ schreiben, haben wir den Satz zu beweisen: ‚Wenn es eine q-Beziehung giebt, die den w-Begriff in den z-Begriff und deren Umkehrung diesen in jenen abbildet, so giebt es auch eine Beziehung, die dasselbe thut, in der aber b zu keinem Gegenstande steht und in der auch zu c kein Gegenstand steht, sofern weder b unter den w-Begriff noch c unter den z-Begriff fällt‘.

[136]Nach dem Vorbilde der Geometrie könnte man ‚construirt‘ sagen, müsste sich aber immer bewusst bleiben, dass das kein Schaffen ist.

[137]Wir können für

$$‚\,(y = c \rightarrow \neg\;x = b) \rightarrow x \,\text{ə}\, (y \,\text{ə}\, q)\,‘$$

ohne wesentliche Aenderung

$$‚\,\neg\;\neg\;(y = c \rightarrow \neg\;x = b) \rightarrow x \,\text{ə}\, (y \,\text{ə}\, q)\,‘$$

schreiben. Man vergl. hierzu das über ‚oder‘ und ‚und‘ in § 12 Gesagte.

Für die Begriffsschriftableitung ist es bequemer, den durch ■→Kontraposition←■[138] [#96]
S.88 hieraus hervorgehenden Satz |

$$, \vdash \forall \mathfrak{q}\, [\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ c \ni (\mathfrak{a} \ni \mathfrak{q}^{-1})] \to (\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ b \ni (\mathfrak{a} \ni \mathfrak{q})] \to$$
$$(z \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (z \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)))] \to$$
$$(\neg\ c \ni z \to (\neg\ b \ni w \to$$
$$\forall \mathfrak{q}\, [z \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (z \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)])) \text{ ‘} \qquad (\eta$$

zu beweisen. Wir werden dann ferner den Satz ableiten: ‚Wenn es eine Beziehung giebt, die den $\operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b))$-Begriff in den $\operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c))$-Begriff und deren Umkehrung diesen in jenen abbildet und die so beschaffen ist, dass b in ihr zu keinem Gegenstande und dass kein Gegenstand in ihr zu c steht, so giebt es eine Beziehung, die den u-Begriff in den v-Begriff und deren Umkehrung diesen in jenen abbildet, sofern b unter den u-Begriff und c unter den v-Begriff fällt‘.

Für den Nachsatz kann man auch sagen: ‚so ist die Anzahl des u-Begriffes gleich der Anzahl des v-Begriffes‘. Nach einer ■→Kontraposition←■[139] [#97] sieht der Satz dann so aus

$$, \vdash \neg\ \operatorname{anz}(u) = \operatorname{anz}(v) \to (c \ni v \to (b \ni u \to$$
$$\forall \mathfrak{q}\, [\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ c \ni (\mathfrak{a} \ni \mathfrak{q}^{-1})] \to (\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ b \ni (\mathfrak{a} \ni \mathfrak{q})] \to$$
$$(\operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c)) \ni [\operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b)) \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow] \to$$
$$\neg\ \operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b)) \ni [\operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c)) \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow]))])) \text{ ‘} \qquad (\vartheta$$

Aus beiden Sätzen (η) und (ϑ) und dem oben schon erwähnten Satze

$$, \vdash \operatorname{anz}(w) = \operatorname{anz}(z) \to \neg\ \forall \mathfrak{q}\, [z \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (z \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)] \text{ ‘} \qquad (\iota$$

oder

$$, \vdash \forall \mathfrak{q}\, [z \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (z \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)] \to \neg\ \operatorname{anz}(w) = \operatorname{anz}(z) \text{ ‘} \qquad (\kappa$$

folgt unser Satz (ζ). Der Satz (κ) folgt leicht aus (Z) und

$$, \vdash \operatorname{anz}(w) = \operatorname{anz}(z) \to w \ni \operatorname{anz}(z) \text{ ‘} \qquad (\lambda$$

und dieser aus (IIIc) in der Form

$$, \vdash \operatorname{anz}(w) = \operatorname{anz}(z) \to (w \ni \operatorname{anz}(w) \to w \ni \operatorname{anz}(z)) \text{ ‘}$$

und dem Satze

$$, \vdash w \ni \operatorname{anz}(w) \text{ ‘} \qquad (\mu$$

Dieser Satz ist leicht zu beweisen, indem man zeigt, dass die Gleichheit eine Beziehung ist, welche jeden Begriff in sich abbildet und deren Umkehrung dasselbe thut. Es sind also abzuleiten die Sätze

$$, \vdash w \ni (w \ni \operatorname{ext}\alpha\, \operatorname{ext}\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha) :\twoheadrightarrow) \text{ ‘} \qquad (\nu$$

$$, \vdash w \ni (w \ni \operatorname{ext}\alpha\, \operatorname{ext}\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha)^{-1} :\twoheadrightarrow) \text{ ‘} \qquad (\xi$$

Statt (ν) beweisen wir zunächst den etwas umfassenderen Satz

$$, \vdash \forall \mathfrak{a}\, [(\text{—}\, \mathfrak{a} \ni u) = (\text{—}\, \mathfrak{a} \ni v)] \to u \ni (v \ni \operatorname{ext}\alpha\, \operatorname{ext}\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha) :\twoheadrightarrow) \text{ ‘} \qquad (o$$

den wir auch später brauchen werden. Wir bedürfen dazu der Sätze

$$, \vdash \forall \mathfrak{a}\, [(\text{—}\, \mathfrak{a} \ni u) = (\text{—}\, \mathfrak{a} \ni v)] \to$$
$$(\forall \mathfrak{a}\, [d \ni (\mathfrak{a} \ni \operatorname{ext}\alpha\, \operatorname{ext}\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha)) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni v] \to \neg\ d \ni u) \text{ ‘} \qquad (\pi$$

S.89 | und

[138] Wendung
[139] Wendung

[#96] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#97] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

$$,\ \vdash \operatorname{funk}(\operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha))\text{ ‘} \qquad (\rho$$

Dieser folgt aus (IIIc) und (16) mit (2). Um (π) zu beweisen, schreiben wir (IIa) so:

$$,\ \vdash \forall\mathfrak{a}\,[d \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } \operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha)) \to \neg\ \mathfrak{a} \text{ ə } v] \to$$
$$(d \text{ ə } (d \text{ ə } \operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha)) \to \neg\ d \text{ ə } v)\text{ ‘}$$

Es bleibt noch zu zeigen

$$,\ \vdash d \text{ ə } (d \text{ ə } \operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha))\text{ ‘} \qquad (\sigma$$

was aus (IIIe) mit (2) zu erschliessen ist. ■→Das Hinterglied ‚$\neg\ d \text{ ə } v$‘ kann mittels des Vordergliedes←■[140] [#98]

$$,\forall\mathfrak{a}\,[(\text{—}\,\mathfrak{a} \text{ ə } u) = (\text{—}\,\mathfrak{a} \text{ ə } v)]\text{ ‘}$$

leicht in ‚$\neg\ d \text{ ə } u$‘ verwandelt werden.

§ 67. *Aufbau.*

$$(IIIa):\ \frac{2 \quad \vdash f(a,b) = a \text{ ə } (b \text{ ə } \operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha)))}{\vdash F(a \text{ ə } (b \text{ ə } \operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha)))) \to F(f(a,b))} \qquad (33$$

———————— ● ————————

$$\text{IIa} \quad \vdash \forall\mathfrak{a}\,[f(e,\mathfrak{a}) \to d = \mathfrak{a}] \to (f(e,a) \to d = a)$$

(33) :: — — — — — — — —

$$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[f(e,\mathfrak{a}) \to d = \mathfrak{a}] \to (e \text{ ə } (a \text{ ə } \operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha))) \to d = a) \qquad (\alpha$$

(IIa) :: — — — — — — — —

$$\vdash \forall\mathfrak{d}\,[f(e,\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{a}\,[f(e,\mathfrak{a}) \to \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]] \to$$
$$(f(e,d) \to (e \text{ ə } (a \text{ ə } \operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha))) \to d = a)) \qquad (\beta$$

(33) :: — — — — — — — —

$$\vdash \forall\mathfrak{d}\,[f(e,\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{a}\,[f(e,\mathfrak{a}) \to \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]] \to$$
$$(e \text{ ə } (d \text{ ə } \operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha))) \to (e \text{ ə } (a \text{ ə } \operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha))) \to d = a)) \qquad (\gamma$$

(IIa) :: — — — — — — — —

$$\vdash \forall\mathfrak{e}\,\forall\mathfrak{d}\,[f(\mathfrak{e},\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{a}\,[f(\mathfrak{e},\mathfrak{a}) \to \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]] \to$$
$$(e \text{ ə } (d \text{ ə } \operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha))) \to (e \text{ ə } (a \text{ ə } \operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha))) \to d = a)) \qquad (\delta$$

$\smile$

$$\vdash \forall\mathfrak{e}\,\forall\mathfrak{d}\,[f(\mathfrak{e},\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{a}\,[f(\mathfrak{e},\mathfrak{a}) \to \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]] \to$$
$$\forall\mathfrak{e}\,\forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{e} \text{ ə } (\mathfrak{d} \text{ ə } \operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha))) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{e} \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } \operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha))) \to \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]] \qquad (\varepsilon$$

(16) : — — — — — — — —

$$\vdash \forall\mathfrak{e}\,\forall\mathfrak{d}\,[f(\mathfrak{e},\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{a}\,[f(\mathfrak{e},\mathfrak{a}) \to \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]] \to \operatorname{funk}(\operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha))) \qquad (34$$

———————— ● ————————

$$\text{IIIc} \quad \vdash e = d \to (e = a \to d = a)$$

$\smile$

[140] Das Oberglied ‚$\neg\ d \text{ ə } v$‘ kann mittels des Untergliedes

[#98] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

$$\vdash \forall \mathfrak{e}\, \forall \mathfrak{d}\, [\mathfrak{e} = \mathfrak{d} \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{e} = \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]] \qquad (\alpha$$

$(34):$ ―――――――――――

$$\vdash \text{funk}\,(\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha)) \qquad (35$$

――――――― ● ―――――――

$$2 \quad \vdash f(a,b) = a \mathbin{\text{ə}} (b \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha)))$$

$(IIIc):$ ―――――――――――

$$\vdash F(f(a,b)) \rightarrow F(a \mathbin{\text{ə}} (b \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha)))) \qquad (36$$

――――――― ● ―――――――

$$\text{IIIe} \quad \vdash d = d$$

$(36):$ ―――――――――――

S.92

$$\vdash d \mathbin{\text{ə}} (d \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha)) \qquad (37$$

$(IIa):$ ―――――――――――

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [d \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} v] \rightarrow \neg\ d \mathbin{\text{ə}} v \qquad (\alpha$$

$(IIIa):$ ―――――――――――

$$\vdash (\text{—}\, d \mathbin{\text{ə}} u) = (\text{—}\, d \mathbin{\text{ə}} v) \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{a}\, [d \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} v] \rightarrow \neg\ d \mathbin{\text{ə}} u) \qquad (\beta$$

$(IIa)::$ – – – – – – – –

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [(\text{—}\, \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} u) = (\text{—}\, \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} v)] \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{a}\, [d \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} v] \rightarrow \neg\ d \mathbin{\text{ə}} u) \qquad (\gamma$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [(\text{—}\, \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} u) = (\text{—}\, \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} v)] \rightarrow$$
$$\forall \mathfrak{d}\, [\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} v] \rightarrow \neg\ \mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} u] \qquad (\delta$$

$(11):$ – – – – – – – –

$$\vdash \text{funk}\,(\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha)) \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{a}\, [(\text{—}\, \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} u) = (\text{—}\, \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} v)] \rightarrow u \mathbin{\text{ə}} (v \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha) :\twoheadrightarrow\ )) \qquad (\varepsilon$$

$(35)::$ ―――――――――――

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [(\text{—}\, \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} u) = (\text{—}\, \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} v)] \rightarrow u \mathbin{\text{ə}} (v \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha) :\twoheadrightarrow\ ) \qquad (38$$

――――――― ● ―――――――

$$\text{IIIe} \quad \vdash (\text{—}\, a \mathbin{\text{ə}} w) = (\text{—}\, a \mathbin{\text{ə}} w)$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [(\text{—}\, \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} w) = (\text{—}\, \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} w)] \qquad (\alpha$$

$(38):$ ―――――――――――

$$\vdash w \mathbin{\text{ə}} (w \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha) :\twoheadrightarrow\ ) \qquad (39$$

§ 68. *Zerlegung.*

Um nun den Satz

$$, \vdash w \,ə\, (w \,ə\, \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha)^{-1} :\twoheadrightarrow\,)\text{ ‘}$$

zu beweisen, bedienen wir uns des Satzes

$$, \vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha) = \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha)^{-1}\text{ ‘}$$

den wir aus den Sätzen

$$, \vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\alpha,\varepsilon)) = \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha))^{-1}\text{ ‘}$$

$$, \vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha) = \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\alpha = \varepsilon)\text{ ‘}$$

ableiten. Jener wird aus (2) und der Definition (E), Dieser aus (IVe) abzuleiten sein, beidemal mit Benutzung von (20).

§ 69. *Aufbau.*

$$2 \quad \vdash f(a,b) = a \,ə\, (b \,ə\, \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha)))$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall\mathfrak{d}\,\forall\mathfrak{a}\,[f(\mathfrak{d},\mathfrak{a}) = \mathfrak{d} \,ə\, (\mathfrak{a} \,ə\, \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha)))] \qquad (\alpha$$

$$(20): \;\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\alpha,\beta)) = \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\alpha \,ə\, (\varepsilon \,ə\, \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha)))) \qquad (\beta$$

$$(IIIa): \;\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\alpha \,ə\, (\varepsilon \,ə\, \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha)))) = \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha))^{-1} \to$$
$$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\alpha,\varepsilon)) = \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha))^{-1} \qquad (\gamma$$

$$(\text{E}) :: \;\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\alpha,\varepsilon)) = \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha))^{-1} \qquad (40$$

———— • ————

$$\text{IVe} \quad \vdash (a = b) = (b = a)$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall\mathfrak{d}\,\forall\mathfrak{a}\,[(\mathfrak{a} = \mathfrak{d}) = (\mathfrak{d} = \mathfrak{a})] \qquad (\alpha$$

$$(20): \;\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha) = \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\alpha = \varepsilon) \qquad (\beta$$

$$(IIIa): \;\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\alpha = \varepsilon) = \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha)^{-1} \to$$
$$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha) = \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha)^{-1} \qquad (\gamma$$

$$(40) :: \;\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha) = \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha)^{-1} \qquad (41$$

$$(IIIc): \;\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash w \,ə\, (w \,ə\, \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha) :\twoheadrightarrow\,) \to w \,ə\, (w \,ə\, \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha)^{-1} :\twoheadrightarrow\,) \qquad (\alpha$$

$$(39) :: \;\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash w \text{ ə } (w \text{ ə } \mathrm{ext}\,\alpha\, \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha)^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \qquad (42$$

$$\text{———— ● ————}$$

$$1 \quad \vdash f(a)^{\#99} = a \text{ ə } \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)^{\#100})$$

$$(IIIc): \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = v \rightarrow f(a) = a \text{ ə } v \qquad (43$$

$$(IIIc): - - - - - - - -$$

$$\vdash \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = v \rightarrow (F(f(a)) \rightarrow F(a \text{ ə } v)) \qquad (44$$

$$\text{———— ● ————}$$

S.90 |

$$Z \quad \vdash \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \forall \mathfrak{q}\,[u \text{ ə } (\varepsilon \text{ ə } \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow \neg\ \varepsilon \text{ ə } (u \text{ ə } \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow\ )]) = \mathrm{anz}\,(u)$$

$$(44): \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash \neg\ \forall \mathfrak{q}\,[u \text{ ə } (v \text{ ə } \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow \neg\ v \text{ ə } (u \text{ ə } \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow\ )] \rightarrow v \text{ ə } \mathrm{anz}\,(u) \qquad (\alpha$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ v \text{ ə } \mathrm{anz}\,(u) \rightarrow \forall \mathfrak{q}\,[u \text{ ə } (v \text{ ə } \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow \neg\ v \text{ ə } (u \text{ ə } \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow\ )] \qquad (\beta$$

$$(IIa): - - - - - - - -$$

$$\vdash \neg\ v \text{ ə } \mathrm{anz}\,(u) \rightarrow (u \text{ ə } (v \text{ ə } q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow \neg\ v \text{ ə } (u \text{ ə } q :\twoheadrightarrow\ )) \qquad (\gamma$$

$$\times$$

$$\vdash v \text{ ə } (u \text{ ə } q :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (u \text{ ə } (v \text{ ə } q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow v \text{ ə } \mathrm{anz}\,(u)) \qquad (45$$

$$\text{———— ● ————}$$

$$43 \quad \vdash \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = v \rightarrow f(a) = a \text{ ə } v$$

$$(IIIa): - - - - - - - -$$

$$\vdash \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = v \rightarrow (F(a \text{ ə } v) \rightarrow F(f(a))) \qquad (46$$

$$\text{———— ● ————}$$

$$Z \quad \vdash \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \forall \mathfrak{q}\,[u \text{ ə } (\varepsilon \text{ ə } \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow \neg\ \varepsilon \text{ ə } (u \text{ ə } \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow\ )]) = \mathrm{anz}\,(u)$$

$$(46): \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash v \text{ ə } \mathrm{anz}\,(u) \rightarrow \neg\ \forall \mathfrak{q}\,[u \text{ ə } (v \text{ ə } \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow \neg\ v \text{ ə } (u \text{ ə } \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow\ )] \qquad (\alpha$$

$$\times$$

$$\vdash \forall \mathfrak{q}\,[u \text{ ə } (v \text{ ə } \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow \neg\ v \text{ ə } (u \text{ ə } \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow\ )] \rightarrow \neg\ v \text{ ə } \mathrm{anz}\,(u) \qquad (47$$

$$\text{———— ● ————}$$

$$45 \quad \vdash w \text{ ə } (w \text{ ə } \mathrm{ext}\,\alpha\, \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha) :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow$$

$$(w \text{ ə } (w \text{ ə } \mathrm{ext}\,\alpha\, \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha)^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow w \text{ ə } \mathrm{anz}\,(w))$$

$$(42, 39) :: \overline{\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}}$$

$$\vdash w \text{ ə } \mathrm{anz}\,(w) \qquad (48$$

$$(IIIc): \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash \text{anz}\,(w) = \text{anz}\,(z) \to w \mathbin{\text{ə}} \text{anz}\,(z) \qquad (\alpha$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ w \mathbin{\text{ə}} \text{anz}\,(z) \to \neg\ \text{anz}\,(w) = \text{anz}\,(z) \qquad (\beta$$

$(47) ::\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$

$$\vdash \forall \mathfrak{q}\,[z \mathbin{\text{ə}} (w \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \mathbin{\text{ə}} (z \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)] \to \neg\ \text{anz}\,(w) = \text{anz}\,(z) \quad (49$$

§ 70. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun den Satz

$$\text{,}\ \vdash \forall \mathfrak{q}\,[\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ c \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q}^{-1})] \to (\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ b \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q})] \to$$
$$(z \mathbin{\text{ə}} (w \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \mathbin{\text{ə}} (z \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)))] \to$$
$$(\neg\ c \mathbin{\text{ə}} z \to (\neg\ b \mathbin{\text{ə}} w \to$$
$$\forall \mathfrak{q}\,[z \mathbin{\text{ə}} (w \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \mathbin{\text{ə}} (z \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)])) \text{‘}$$

(Vergl. § 66, η.)

Wir sahen in § 66, dass

$$\text{,}\neg\ (\neg\ (\neg\ \zeta = c \to \xi = b) \to \neg\ \xi \mathbin{\text{ə}} (\zeta \mathbin{\text{ə}} q))\text{‘}$$

eine Beziehung andeutet, welche in den für uns in Betracht kommenden Eigenschaften mit der q-Beziehung übereinstimmt, in welcher aber b zu keinem Gegenstande steht und in welcher auch kein Gegenstand zu c steht. Wir schreiben deshalb (IIa) in der Form | S.91

$$\text{,}\ \vdash \forall \mathfrak{q}\,[\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ c \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q}^{-1})] \to (\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ b \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q})] \to$$
$$(z \mathbin{\text{ə}} (w \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \mathbin{\text{ə}} (z \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)))] \to$$
$$(\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ c \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q))]^{-1})] \to$$
$$(\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ b \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q))])] \to$$
$$(z \mathbin{\text{ə}} (w \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q))]^{-1} :\twoheadrightarrow) \to$$
$$\neg\ w \mathbin{\text{ə}} (z \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q))] :\twoheadrightarrow)))) \qquad \text{‘}$$

und haben nun unter andern den Satz:

$$\text{,}\ \vdash \neg\ w \mathbin{\text{ə}} (z \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q))] :\twoheadrightarrow) \to$$
$$(\neg\ c \mathbin{\text{ə}} z \to (\neg\ b \mathbin{\text{ə}} w \to \neg\ w \mathbin{\text{ə}} (z \mathbin{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow))) \qquad \text{‘}$$

■→zu beweisen, der durch Kontraposition folgt aus←■[141] [#101]

$$\text{,}\ \vdash w \mathbin{\text{ə}} (z \mathbin{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow) \to (\neg\ c \mathbin{\text{ə}} z \to (\neg\ b \mathbin{\text{ə}} w \to$$
$$w \mathbin{\text{ə}} (z \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q))] :\twoheadrightarrow))) \qquad \text{‘}$$

Wir bedürfen hierzu des Satzes

$$\text{,}\ \vdash w \mathbin{\text{ə}} (z \mathbin{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow) \to (\neg\ c \mathbin{\text{ə}} z \to (\neg\ b \mathbin{\text{ə}} w \to$$
$$(\forall \mathfrak{a}\,[d \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q))]) \to \neg\ \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} z] \to$$
$$\neg\ d \mathbin{\text{ə}} w))) \qquad \text{‘}$$

---

[141] zu beweisen, der durch Wendung folgt aus

[#101] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

Nun haben wir nach (8)

$$,\ \vdash w \,\text{ə}\, (z \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (\forall\mathfrak{a}\,[d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, z] \rightarrow \neg\ d \,\text{ə}\, w)\text{ ‘}$$

Es würde demnach etwa zu beweisen sein

$$,\forall\mathfrak{a}\,[d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\,\alpha\, \text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \rightarrow \varepsilon = b) \rightarrow \neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q))]) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, z] \rightarrow$$
$$\forall\mathfrak{a}\,[d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, z]\quad\text{‘}$$

wo ich den Urtheilstrich noch nicht gesetzt habe wegen etwa noch hinzuzufügender Bedingungen ■→(Vorderglieder)←■[142] [#102]. In dem eigentlichen Beweise dürfen ja Ausdrücke mit lateinischen Buchstaben ohne Urtheilstrich nicht vorkommen; hier, wo es sich um vorläufige Auskundschaftung handelt, mögen sie gestattet sein. Das Letzte wird nach Regel (5)
S.93 hervorgehen aus einem Ausdrucke wie |

$$,\forall\mathfrak{a}\,[d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\,\alpha\, \text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \rightarrow \varepsilon = b) \rightarrow \neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q))]) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, z] \rightarrow$$
$$(d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, q) \rightarrow \neg\ a \,\text{ə}\, z)\quad\text{‘}$$

Wir haben nun nach (IIa)

$$,\ \vdash \forall\mathfrak{a}\,[d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\,\alpha\, \text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \rightarrow \varepsilon = b) \rightarrow \neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q))]) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, z] \rightarrow$$
$$(d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, \text{ext}\,\alpha\, \text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \rightarrow \varepsilon = b) \rightarrow \neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q))]) \rightarrow \neg\ a \,\text{ə}\, z)\qquad\text{‘}$$

und es bliebe mit (36) zu beweisen

$$,\ \vdash \neg\ a = c \rightarrow (\neg\ d = b \rightarrow (d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, q) \rightarrow$$
$$d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, \text{ext}\,\alpha\, \text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \varepsilon = c \rightarrow \varepsilon = b) \rightarrow \neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q))])))\quad\text{‘}$$

wobei die ■→Vorderglieder←■[143] [#103]‚$\neg\ d = b$‘ und ‚$\neg\ a = c$‘ auftreten. Aus den beiden letzten Sätzen schliessen wir nach Regel (7) auf

$$,\ \vdash \forall\mathfrak{a}\,[d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\,\alpha\, \text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \rightarrow \varepsilon = b) \rightarrow \neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q))]) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, z] \rightarrow$$
$$(\neg\ a = c \rightarrow (\neg\ d = b \rightarrow (d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, q) \rightarrow \neg\ a \,\text{ə}\, z)))\quad\text{‘}$$

Wenn wir hier nun das deutsche ‚$\mathfrak{a}$‘ statt des lateinischen ‚a‘ nach Regel (5) einführen wollten, so würden wir nicht zum gewünschten Ziele kommen wegen des ■→Vordergliedes←■[144] [#104]‚$\neg\ a = c$‘, das ins Gebiet des ‚$\mathfrak{a}$‘ aufgenommen werden müsste. Nun haben wir nach (IIIa)

$$,\ \vdash a = c \rightarrow (\neg\ c \,\text{ə}\, z \rightarrow \neg\ a \,\text{ə}\, z)\text{ ‘}$$

■→und es kann nach Regel (8) das Vorderglied←■[145] [#105]‚$\neg\ a = c$‘ durch ‚$\neg\ c \,\text{ə}\, z$‘ ersetzt werden. ■→Später ist ebenso das Vorderglied←■[146] [#106]‚$\neg\ d = b$‘ durch ‚$\neg\ b \,\text{ə}\, w$‘ zu ersetzen.

§ 71. *Aufbau.*

$$\text{Ie}\quad \vdash \neg\ (\neg\ a = c \rightarrow d = b) \rightarrow (d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, q) \rightarrow$$
$$\neg\ (\neg\ (\neg\ a = c \rightarrow d = b) \rightarrow \neg\ d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, q)))$$
$$(If) ::\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$

[142](Unterglieder)
[143]Unterglieder
[144]Untergliedes
[145]und es kann nach Regel (8) das Unterglied
[146]Später ist ebenso das Unterglied

[#102]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#103]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#104]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#105]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#106]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

$$\vdash \neg\ a = c \to (\neg\ d = b \to (d \ni (a \ni q) \to$$
$$\neg\ (\neg\ (\neg\ a = c \to d = b) \to \neg\ d \ni (a \ni q)))) \qquad (\alpha$$

$(36):$ — — — — — — — — —

$$\vdash \neg\ a = c \to (\neg\ d = b \to (d \ni (a \ni q) \to$$
$$d \ni (a \ni \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \ni (\alpha \ni q))]))) \qquad (\beta$$

$(IIa):$ — — — — — — — — —

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[d \ni (\mathfrak{a} \ni \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \ni (\alpha \ni q))]) \to$$
$$\neg\ \mathfrak{a} \ni z] \to (\neg\ a = c \to (\neg\ d = b \to (d \ni (a \ni q) \to \neg\ a \ni z))) \qquad (\gamma$$

$(IIIa):$ ·—·—·—·—·—·—·—·

S.96

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[d \ni (\mathfrak{a} \ni \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \ni (\alpha \ni q))]) \to$$
$$\neg\ \mathfrak{a} \ni z] \to (\neg\ c \ni z \to (\neg\ d = b \to (d \ni (a \ni q) \to \neg\ a \ni z))) \qquad (\delta$$

$\smile$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[d \ni (\mathfrak{a} \ni \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \ni (\alpha \ni q))]) \to$$
$$\neg\ \mathfrak{a} \ni z] \to (\neg\ c \ni z \to (\neg\ d = b \to \forall \mathfrak{a}\,[d \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni z])) \qquad (\varepsilon$$

$(8):$ — — — — — — — — —

$$\vdash w \ni (z \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \to$$
$$(\forall \mathfrak{a}\,[d \ni (\mathfrak{a} \ni \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \ni (\alpha \ni q))]) \to$$
$$\neg\ \mathfrak{a} \ni z] \to (\neg\ c \ni z \to (\neg\ d = b \to \neg\ d \ni w))) \qquad (\zeta$$

$(IIIa):$ ·—·—·—·—·—·—·—·

$$\vdash w \ni (z \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \to (\neg\ c \ni z \to (\neg\ b \ni w \to$$
$$(\forall \mathfrak{a}\,[d \ni (\mathfrak{a} \ni \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \ni (\alpha \ni q))]) \to$$
$$\neg\ \mathfrak{a} \ni z] \to \neg\ d \ni w))) \qquad (\eta$$

$\smile$

$$\vdash w \ni (z \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \to (\neg\ c \ni z \to (\neg\ b \ni w \to$$
$$\forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \ni (\alpha \ni q))]) \to$$
$$\neg\ \mathfrak{a} \ni z] \to \neg\ \mathfrak{d} \ni w])) \qquad (\vartheta$$

$(11):$ — — — — — — — — —

$$\vdash \mathrm{funk}\,(\mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \ni (\alpha \ni q))]) \to$$
$$(w \ni (z \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \to (\neg\ c \ni z \to (\neg\ b \ni w \to$$
$$w \ni (z \ni \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \ni (\alpha \ni q))] :\twoheadrightarrow\ )))) \qquad (50$$

§ 72. *Zerlegung.*

Wir haben aus dem Satze (50)■→das Vorderglied←■[147] [#107]

$$, \text{—}\, \text{funk}\,(\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon\,\text{ə}\,(\alpha\,\text{ə}\,q))])\ ‘$$

wegzuschaffen. Dies geschieht durch den Satz

$$,\ \vdash \text{funk}\,(q) \to \text{funk}\,(\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon\,\text{ə}\,(\alpha\,\text{ə}\,q))])\ ‘$$

S.94 | zu dessen Beweise wir den Satz (34) benutzen. Wir haben dazu den Satz

$$,\ \vdash \text{funk}\,(q) \to (\neg\ (\neg\ (\neg\ d = c \to e = b) \to \neg\ e\,\text{ə}\,(d\,\text{ə}\,q)) \to$$
$$(\neg\ (\neg\ (\neg\ a = c \to e = b) \to \neg\ e\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,q)) \to d = a))\ ‘$$

nöthig, der leicht aus (13) folgt.

§ 73. *Aufbau.*

$$13 \quad \vdash \text{funk}\,(q) \to (e\,\text{ə}\,(d\,\text{ə}\,q) \to (e\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,q) \to d = a))$$

$$(Ib, Ib) :: \ = = = = = = = =$$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (\neg\ (\neg\ (\neg\ d = c \to e = b) \to \neg\ e\,\text{ə}\,(d\,\text{ə}\,q)) \to$$
$$(\neg\ (\neg\ (\neg\ a = c \to e = b) \to \neg\ e\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,q)) \to d = a)) \qquad (\alpha$$

$$\smile$$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to \forall \mathfrak{e}\, \forall \mathfrak{d}\, [\neg\ (\neg\ (\neg\ \mathfrak{d} = c \to \mathfrak{e} = b) \to \neg\ \mathfrak{e}\,\text{ə}\,(\mathfrak{d}\,\text{ə}\,q)) \to$$
$$\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ (\neg\ (\neg\ \mathfrak{a} = c \to \mathfrak{e} = b) \to \neg\ \mathfrak{e}\,\text{ə}\,(\mathfrak{a}\,\text{ə}\,q)) \to \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]] \qquad (\beta$$

$$(34) : \ - - - - - - - -$$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to \text{funk}\,(\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon\,\text{ə}\,(\alpha\,\text{ə}\,q)))) \qquad (\gamma$$

$$(18) :: \ - - - - - - - -$$

$$\vdash w\,\text{ə}\,(z\,\text{ə}\,q :\twoheadrightarrow\ ) \to$$
$$\text{funk}\,(\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon\,\text{ə}\,(\alpha\,\text{ə}\,q)))) \qquad (\delta$$

$$(50) : \ - - - - - - - -$$

$$\vdash w\,\text{ə}\,(z\,\text{ə}\,q :\twoheadrightarrow\ ) \to (\neg\ c\,\text{ə}\,z \to (\neg\ b\,\text{ə}\,w \to$$
$$w\,\text{ə}\,(z\,\text{ə}\,\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon\,\text{ə}\,(\alpha\,\text{ə}\,q))] :\twoheadrightarrow\ ))) \qquad (51$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ w\,\text{ə}\,(z\,\text{ə}\,\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon\,\text{ə}\,(\alpha\,\text{ə}\,q))] :\twoheadrightarrow\ ) \to$$
$$(\neg\ c\,\text{ə}\,z \to (\neg\ b\,\text{ə}\,w \to \neg\ w\,\text{ə}\,(z\,\text{ə}\,q :\twoheadrightarrow\ ))) \qquad (52$$

§ 74. *Zerlegung.*

[147] das Unterglied

[#107] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

Um nun noch den Satz

‚ $\vdash z \,\text{ə}\, (w \,\text{ə}\, q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (\neg\ b \,\text{ə}\, w \rightarrow (\neg\ c \,\text{ə}\, z \rightarrow$

$z \,\text{ə}\, (w \,\text{ə}\, \text{ext}\,\alpha\, \text{ext}\,\varepsilon\, [\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \rightarrow \varepsilon = b) \rightarrow \neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q))]^{-1} :\twoheadrightarrow\ )))$ ‘

zu beweisen, schreiben wir zunächst (51) so

‚ $\vdash z \,\text{ə}\, (w \,\text{ə}\, q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (\neg\ b \,\text{ə}\, w \rightarrow (\neg\ c \,\text{ə}\, z \rightarrow$

$z \,\text{ə}\, (w \,\text{ə}\, \text{ext}\,\alpha\, \text{ext}\,\varepsilon\, [\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = b \rightarrow \varepsilon = c) \rightarrow \neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q^{-1}))] :\twoheadrightarrow\ )))$ ‘

indem wir ‚q‘ mit ‚q^{-1}‘, ‚c‘ mit ‚b‘, ‚z‘ mit ‚w‘ vertauschen. Wir haben nun zu beweisen

‚ $\vdash \text{ext}\,\alpha\, \text{ext}\,\varepsilon\, (\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \rightarrow \varepsilon = b) \rightarrow \neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q)))^{-1} =$

$\text{ext}\,\alpha\, \text{ext}\,\varepsilon\, (\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \rightarrow \varepsilon = c) \rightarrow \neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q^{-1})))$ ‘

| was mit (40) aus S.95

‚ $\vdash \text{ext}\,\alpha\, \text{ext}\,\varepsilon\, (\neg\ (\neg\ (\neg\ \varepsilon = c \rightarrow \alpha = b) \rightarrow \neg\ \alpha \,\text{ə}\, (\varepsilon \,\text{ə}\, q))) =$

$\text{ext}\,\alpha\, \text{ext}\,\varepsilon\, (\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = b \rightarrow \varepsilon = c) \rightarrow \neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q^{-1})))$ ‘

folgt. Dieser Satz ist mit (20) zu beweisen. Dazu bedürfen wir des Satzes

‚ $\vdash (\neg\ (\neg\ (\neg\ a = c \rightarrow r = b) \rightarrow \neg\ r \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, q))) =$

$(\neg\ (\neg\ (\neg\ r = b \rightarrow a = c) \rightarrow \neg\ a \,\text{ə}\, (r \,\text{ə}\, q^{-1})))$ ‘

der aus (21) und dem Satze

‚ $\vdash (\neg\ (\neg\ r = b \rightarrow a = c)) = (\neg\ (\neg\ a = c \rightarrow r = b))$ ‘

folgt. Dieser ist mit (IVa) zu beweisen.

§ 75. *Aufbau.*

21 $\vdash r \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, q) = a \,\text{ə}\, (r \,\text{ə}\, q^{-1})$

$(IIIh):$ ————————

$\vdash (\neg\ (\neg\ (\neg\ a = c \rightarrow r = b) \rightarrow \neg\ r \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, q))) =$

$(\neg\ (\neg\ (\neg\ a = c \rightarrow r = b) \rightarrow \neg\ a \,\text{ə}\, (r \,\text{ə}\, q^{-1})))$ (α

$(IIIa):$ ————————

$\vdash (\neg\ (\neg\ r = b \rightarrow a = c)) = (\neg\ (\neg\ a = c \rightarrow r = b)) \rightarrow$

$(\neg\ (\neg\ (\neg\ a = c \rightarrow r = b) \rightarrow \neg\ r \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, q))) =$

$(\neg\ (\neg\ (\neg\ r = b \rightarrow a = c) \rightarrow \neg\ a \,\text{ə}\, (r \,\text{ə}\, q^{-1})))$ (β

———— • ————

If $\vdash \neg\ r = b \rightarrow (\neg\ a = c \rightarrow \neg\ (\neg\ r = b \rightarrow a = c))$

$(Id, Ic) ::$ = = = = = = = = =

$\vdash \neg\ (\neg\ a = c \rightarrow r = b) \rightarrow \neg\ (\neg\ r = b \rightarrow a = c)$ (γ

$(IVa):$ ————————

$\vdash (\neg\ (\neg\ r = b \rightarrow a = c) \rightarrow \neg\ (\neg\ a = c \rightarrow r = b)) \rightarrow$

$(\neg\ (\neg\ r = b \rightarrow a = c)) = (\neg\ (\neg\ a = c \rightarrow r = b))$ (δ

$(\gamma) ::$ ————————

$\vdash (\neg\ (\neg\ r = b \rightarrow a = c)) = (\neg\ (\neg\ a = c \rightarrow r = b))$ (ε

$(\beta):$ ————————

$$\vdash (\neg\ (\neg\ (\neg\ a = c \to r = b) \to \neg\ r \,ə\, (a \,ə\, q))) =$$
$$(\neg\ (\neg\ (\neg\ r = b \to a = c) \to \neg\ a \,ə\, (r \,ə\, q^{-1}))) \qquad (\zeta$$

S.99

$$\vdash \forall\mathfrak{a}\,\forall\mathfrak{e}\,[(\neg\ (\neg\ (\neg\ \mathfrak{e} = c \to \mathfrak{a} = b) \to \neg\ \mathfrak{a} \,ə\, (\mathfrak{e} \,ə\, q))) =$$
$$(\neg\ (\neg\ (\neg\ \mathfrak{a} = b \to \mathfrak{e} = c) \to \neg\ \mathfrak{e} \,ə\, (\mathfrak{a} \,ə\, q^{-1})))] \qquad (\eta$$

(20) :

$$\vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\neg\ (\neg\ \varepsilon = c \to \alpha = b) \to \neg\ \alpha \,ə\, (\varepsilon \,ə\, q))) =$$
$$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = b \to \varepsilon = c) \to \neg\ \varepsilon \,ə\, (\alpha \,ə\, q^{-1}))) \qquad (\vartheta$$

$(IIIc)$:

$$\vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\neg\ (\neg\ \varepsilon = c \to \alpha = b) \to \neg\ \alpha \,ə\, (\varepsilon \,ə\, q))) =$$
$$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \,ə\, (\alpha \,ə\, q)))^{-1} \to$$
$$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \,ə\, (\alpha \,ə\, q)))^{-1} =$$
$$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = b \to \varepsilon = c) \to \neg\ \varepsilon \,ə\, (\alpha \,ə\, q^{-1}))) \qquad (\iota$$

(40) ::

$$\vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \,ə\, (\alpha \,ə\, q)))^{-1} =$$
$$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = b \to \varepsilon = c) \to \neg\ \varepsilon \,ə\, (\alpha \,ə\, q^{-1}))) \qquad (\kappa$$

$(IIIa)$:

$$\vdash F(\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = b \to \varepsilon = c) \to \neg\ \varepsilon \,ə\, (\alpha \,ə\, q^{-1}))]) \to$$
$$F(\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \,ə\, (\alpha \,ə\, q))]^{-1}) \qquad (53$$

●

51 $\vdash z \,ə\, (w \,ə\, q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\neg\ b \,ə\, w \to (\neg\ c \,ə\, z \to$
$z \,ə\, (w \,ə\, \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = b \to \varepsilon = c) \to \neg\ \varepsilon \,ə\, (\alpha \,ə\, q^{-1}))] :\twoheadrightarrow)))$

(53) :

$$\vdash z \,ə\, (w \,ə\, q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\neg\ b \,ə\, w \to (\neg\ c \,ə\, z \to$$
$$z \,ə\, (w \,ə\, \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \,ə\, (\alpha \,ə\, q))]^{-1} :\twoheadrightarrow))) \qquad (54$$

S.97 |

§ 76. *Zerlegung.*

Wenn wir den Satz (IIa) wie in § 70 schreiben, so sehen wir, dass uns noch die Sätze

$$,\ \vdash \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ b \,ə\, (\mathfrak{a} \,ə\, \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \,ə\, (\alpha \,ə\, q))])] \quad `$$

und

$$,\ \vdash \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ c \,ə\, (\mathfrak{a} \,ə\, \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \,ə\, (\alpha \,ə\, q))]^{-1})] \quad `$$

fehlen, von denen dieser mit (53) auf jenen zurückgeführt werden kann, der seinerseits mit (33) zu beweisen ist.

§ 77. *Aufbau.*

33 $\vdash b \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} \operatorname{ext} \alpha \operatorname{ext} \varepsilon [\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q))]) \to$
$\neg\ (\neg\ (\neg\ a = c \to b = b) \to \neg\ b \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} q))$

$(Id):$ — — — — — — — —

$\vdash b \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} \operatorname{ext} \alpha \operatorname{ext} \varepsilon [\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q))]) \to$
$\neg\ (\neg\ a = c \to b = b)$ $(\alpha$

$(Ic):$ — — — — — — — —

$\vdash b \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} \operatorname{ext} \alpha \operatorname{ext} \varepsilon [\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q))]) \to$
$\neg\ b = b$ $(\beta$

$\times$

$\vdash b = b \to$

$\neg\ b \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} \operatorname{ext} \alpha \operatorname{ext} \varepsilon [\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q))])$ $(\gamma$

$(IIIe) ::$ ————————

$\vdash \neg\ b \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} \operatorname{ext} \alpha \operatorname{ext} \varepsilon [\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q))])$ $(\delta$

$\smile$

$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [\neg\ b \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \operatorname{ext} \alpha \operatorname{ext} \varepsilon [\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q))])]$ $(\varepsilon$

———— • ————

ε $\vdash \forall \mathfrak{a}\, [\neg\ c \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \operatorname{ext} \alpha \operatorname{ext} \varepsilon [\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = b \to \varepsilon = c) \to \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q^{-1}))])]$

$(53):$ ————————

$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [\neg\ c \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \operatorname{ext} \alpha \operatorname{ext} \varepsilon [\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q))]^{-1})]$
$(\zeta$

$(IIa):$ ————————

$\vdash \forall \mathfrak{q}\, [\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ c \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q}^{-1})] \to (\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ b \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q})] \to$
$(z \mathbin{\text{ə}} (w \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \mathbin{\text{ə}} (z \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)))] \to$
$(\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ b \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \operatorname{ext} \alpha \operatorname{ext} \varepsilon [\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q))]^{-1})] \to$
$(z \mathbin{\text{ə}} (w \mathbin{\text{ə}} \operatorname{ext} \alpha \operatorname{ext} \varepsilon [\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q))]^{-1} :\twoheadrightarrow) \to$
$\neg\ w \mathbin{\text{ə}} (z \mathbin{\text{ə}} \operatorname{ext} \alpha \operatorname{ext} \varepsilon [\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q))] :\twoheadrightarrow)))$ $(\eta$

$(\varepsilon, 54) ::$ = = = = = = = =

S.101

$\vdash \forall \mathfrak{q}\, [\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ c \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q}^{-1})] \to (\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ b \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q})] \to$
$(z \mathbin{\text{ə}} (w \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \mathbin{\text{ə}} (z \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)))] \to$
$(z \mathbin{\text{ə}} (w \mathbin{\text{ə}} q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\neg\ b \mathbin{\text{ə}} w \to (\neg\ c \mathbin{\text{ə}} z \to$
$\neg\ w \mathbin{\text{ə}} (z \mathbin{\text{ə}} \operatorname{ext} \alpha \operatorname{ext} \varepsilon [\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q))] :\twoheadrightarrow))))$ $(\vartheta$

$(52):$ — — — — — — — —

$$\vdash \forall \mathfrak{q}\,[\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ c \ni (\mathfrak{a} \ni \mathfrak{q}^{-1})] \to (\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ b \ni (\mathfrak{a} \ni \mathfrak{q})] \to$$
$$(z \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (z \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)))] \to$$
$$(\neg\ c \ni z \to (\neg\ b \ni w \to (z \ni (w \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (z \ni q :\twoheadrightarrow)))) \qquad (\iota$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{q}\,[\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ c \ni (\mathfrak{a} \ni \mathfrak{q}^{-1})] \to (\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ b \ni (\mathfrak{a} \ni \mathfrak{q})] \to$$
$$(z \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (z \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)))] \to$$
$$(\neg\ c \ni z \to (\neg\ b \ni w \to \forall \mathfrak{q}\,[z \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (z \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)])) \qquad (55$$

$(49):$ — — — — — — — —

$$\vdash \forall \mathfrak{q}\,[\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ c \ni (\mathfrak{a} \ni \mathfrak{q}^{-1})] \to (\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ b \ni (\mathfrak{a} \ni \mathfrak{q})] \to$$
$$(z \ni (w \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \neg\ w \ni (z \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)))] \to$$
$$(\neg\ c \ni z \to (\neg\ b \ni w \to \neg\ \text{anz}\,(w) = \text{anz}\,(z))) \qquad (56$$

b) Beweis des Satzes

$$,\vdash c \ni v \to$$
$$(\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c))) \to$$
$$(b \ni u \to \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(v)))\text{‘}$$

und Ende des Abschnittes B.

§ 78. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun den Satz (ϑ) des § 66, der nach Regel (5) hervorgeht aus

$$,\ \vdash \neg\ \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(v) \to (c \ni v \to (b \ni u \to$$
$$(\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ c \ni (\mathfrak{a} \ni q^{-1})] \to (\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ b \ni (\mathfrak{a} \ni q)] \to$$
$$(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c)) \ni [\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b)) \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow] \to$$
$$\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b)) \ni [\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c)) \ni q :\twoheadrightarrow]))))) \quad \text{‘}. \qquad (\alpha$$

S.98 | Für das Verständniss ist es bequemer, den ■→durch Kontraposition←■[148] [#108] hieraus sich ergebenden Satz

$$,\ \vdash \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ c \ni (\mathfrak{a} \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow)] \to$$
$$(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c)) \ni [\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b)) \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow] \to$$
$$(b \ni u \to (\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ b \ni (\mathfrak{a} \ni q)] \to$$
$$(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b)) \ni [\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c)) \ni q :\twoheadrightarrow] \to$$
$$(c \ni v \to \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(v)))))) \quad \text{‘} \qquad (\beta$$

zu betrachten. Nach (32) wird es genügen, irgendeine Beziehung anzugeben, welche den u-Begriff in den v-Begriff und deren Umkehrung diesen in jenen abbildet, um zu beweisen,

[148] durch Wendung

[#108] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

dass die Anzahl des u-Begriffes gleich der Anzahl des v-Begriffes ist. Eine solche Beziehung haben wir schon in § 66 kennen gelernt. Wir werden demnach zuerst den Satz

$$\begin{gathered}, \vdash \forall\mathfrak{a}\,[\neg\; b \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q)] \rightarrow \\ (\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\varepsilon \,\text{ə}\, u \rightarrow \varepsilon = b)) \,\text{ə}\, [\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\varepsilon \,\text{ə}\, v \rightarrow \varepsilon = c)) \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow] \rightarrow (c \,\text{ə}\, v \rightarrow \\ u \,\text{ə}\, (v \,\text{ə}\, \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[(\alpha = c \rightarrow \neg\;\varepsilon = b) \rightarrow \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q)] :\twoheadrightarrow))) \quad \text{‘} \qquad (\gamma\end{gathered}$$

und dann den Satz

$$\begin{gathered}, \vdash \forall\mathfrak{a}\,[\neg\; c \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q^{-1})] \rightarrow \\ (\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\varepsilon \,\text{ə}\, v \rightarrow \varepsilon = c)) \,\text{ə}\, [\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\varepsilon \,\text{ə}\, u \rightarrow \varepsilon = b)) \,\text{ə}\, q^{-1} :\twoheadrightarrow] \rightarrow (b \,\text{ə}\, u \rightarrow \\ v \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[(\alpha = c \rightarrow \neg\;\varepsilon = b) \rightarrow \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q)]^{-1} :\twoheadrightarrow))) \quad \text{‘} \qquad (\delta\end{gathered}$$

ableiten. Um jenen mit (11) zu beweisen, bedürfen wir zunächst des Satzes

$$\begin{gathered}, \vdash \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\varepsilon \,\text{ə}\, u \rightarrow \varepsilon = b)) \,\text{ə}\, [\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\varepsilon \,\text{ə}\, v \rightarrow \varepsilon = c)) \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow] \rightarrow (c \,\text{ə}\, v \rightarrow \\ (\forall\mathfrak{a}\,[d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[(\alpha = c \rightarrow \neg\;\varepsilon = b) \rightarrow \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q)]) \rightarrow \neg\;\mathfrak{a} \,\text{ə}\, v] \rightarrow \\ \neg\; d \,\text{ə}\, u)) \quad \text{‘} \qquad (\varepsilon\end{gathered}$$

| Es sind die Fälle $d = b$ und $\neg\; d = b$ zu unterscheiden. Wir schreiben (8) in der Form S.100

$$\begin{gathered}, \vdash \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\varepsilon \,\text{ə}\, u \rightarrow \varepsilon = b)) \,\text{ə}\, [\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\varepsilon \,\text{ə}\, v \rightarrow \varepsilon = c)) \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow] \rightarrow \\ (\forall\mathfrak{a}\,[d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q) \rightarrow \neg\;\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\varepsilon \,\text{ə}\, v \rightarrow \varepsilon = c))] \rightarrow \\ \neg\; d \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\varepsilon \,\text{ə}\, u \rightarrow \varepsilon = b))) \quad \text{‘} \qquad (\zeta\end{gathered}$$

woraus leicht folgt

$$\begin{gathered}, \vdash \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\varepsilon \,\text{ə}\, u \rightarrow \varepsilon = b)) \,\text{ə}\, [\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\varepsilon \,\text{ə}\, v \rightarrow \varepsilon = c)) \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow] \rightarrow \\ (\forall\mathfrak{a}\,[d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q) \rightarrow \neg\;\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\varepsilon \,\text{ə}\, v \rightarrow \varepsilon = c))] \rightarrow (d \,\text{ə}\, u \rightarrow d = b)) \quad \text{‘} \qquad (\eta\end{gathered}$$

Von diesem gelangen wir leicht ■→durch Kontraposition←■[149] [#109] zu unserm Satze für den Fall $\neg\; d = b$, nachdem wir bewiesen haben

$$\begin{gathered}, \vdash \forall\mathfrak{a}\,[d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[(\alpha = c \rightarrow \neg\;\varepsilon = b) \rightarrow \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q)]) \rightarrow \neg\;\mathfrak{a} \,\text{ə}\, v] \rightarrow \\ \forall\mathfrak{a}\,[d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q) \rightarrow \neg\;\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\varepsilon \,\text{ə}\, v \rightarrow \varepsilon = c))] \quad \text{‘}\,[\#110] \qquad (\vartheta\end{gathered}$$

Schreiben wir zu diesem Zwecke (IIa) in der Form

$$\begin{gathered}, \vdash \forall\mathfrak{a}\,[d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[(\alpha = c \rightarrow \neg\;\varepsilon = b) \rightarrow \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q)]) \rightarrow \neg\;\mathfrak{a} \,\text{ə}\, v] \rightarrow \\ (d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[(\alpha = c \rightarrow \neg\;\varepsilon = b) \rightarrow \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q)]) \rightarrow \neg\; a \,\text{ə}\, v) \quad \text{‘} \qquad (\iota\end{gathered}$$

so müssen wir beweisen

$$, \vdash d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, q) \rightarrow d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[(\alpha = c \rightarrow \neg\;\varepsilon = b) \rightarrow \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q)]) \quad \text{‘} \qquad (\kappa$$

was leicht mit (I) und (36) geschehen kann. Dann muss noch abgeleitet werden

$$, \vdash \neg\; a \,\text{ə}\, v \rightarrow \neg\; a \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\varepsilon \,\text{ə}\, v \rightarrow \varepsilon = c)) \quad \text{‘} \qquad (\lambda$$

aus (Ia) in der Form

$$, \vdash \neg\; a \,\text{ə}\, v \rightarrow (a \,\text{ə}\, v \rightarrow a = c) \,\text{‘} \qquad (\mu$$

und dem Satze

$$, \vdash F(\text{—}\,f(a)) \rightarrow F(\neg\; a \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\; f(\varepsilon))) \,\text{‘} \qquad (\nu$$

der aus

$$, \vdash (\text{—}\,f(a)) = (\neg\; a \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\; f(\varepsilon))) \,\text{‘} \qquad (\xi$$

folgt. Dieser Satz ist aus (1) mit (IVb) leicht zu beweisen.

[149] durch Wendung

[#109] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#110] im Original fehlt linkes Zeichen [interp | bonn]

S.102 |

§ 79. *Aufbau.*

IVb $\vdash (\text{—}\, f(a)) = (\neg\ \neg\ f(a))$

$(IIIc)$: ————————————

$\vdash (\neg\ f(a)) = a \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\, (\neg\ f(\varepsilon)) \rightarrow$
$(\text{—}\, f(a)) = (\neg\ a \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\, (\neg\ f(\varepsilon)))$ (α

(1) :: ————————————

$\vdash (\text{—}\, f(a)) = (\neg\ a \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\, (\neg\ f(\varepsilon)))$ (57

$(IIIc)$: ————————————

$\vdash F(\text{—}\, f(a)) \rightarrow F(\neg\ a \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\, (\neg\ f(\varepsilon)))$ (58

——————— • ———————

57 $\vdash (\text{—}\, f(a)) = (\neg\ \alpha \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\, (\neg\ f(\varepsilon)))$

$(IIIa)$: ————————————

$\vdash F(\neg\ a \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\, (\neg\ f(\varepsilon))) \rightarrow F(\text{—}\, f(a))$ (59

——————— • ———————

I $\vdash d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, q) \rightarrow ((a = c \rightarrow \neg\ d = b) \rightarrow d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, q))$

(36) : — — — — — — — —

$\vdash d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, q) \rightarrow$
$d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, \text{ext}\,\alpha\, \text{ext}\,\varepsilon\, [(\alpha = c \rightarrow \neg\ \varepsilon = b) \rightarrow \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q)])$ (α

(IIa) : — — — — — — — —

$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\,\alpha\, \text{ext}\,\varepsilon\, [(\alpha = c \rightarrow \neg\ \varepsilon = b) \rightarrow \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q)]) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, v] \rightarrow$
$(d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, q) \rightarrow \neg\ a \,\text{ə}\, v)$ (β

——————— • ———————

Ia $\vdash \neg\ a \,\text{ə}\, v \rightarrow (a \,\text{ə}\, v \rightarrow a = c)$

(58) : ————————————

$\vdash \neg\ a \,\text{ə}\, v \rightarrow \neg\ a \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = v \rightarrow \varepsilon = c))$ (γ

(β) :: — — — — — — — —

$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\,\alpha\, \text{ext}\,\varepsilon\, [(\alpha = c \rightarrow \neg\ \varepsilon = b) \rightarrow \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q)]) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, v] \rightarrow$
$(d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, q) \rightarrow \neg\ a \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, v \rightarrow \varepsilon = c)))$ (δ

$\smile$

$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\,\alpha\, \text{ext}\,\varepsilon\, [(a = c \rightarrow \neg\ \varepsilon = b) \rightarrow \varepsilon \,\text{ə}\, (\varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q))]) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, v] \rightarrow$
$\forall \mathfrak{a}\, [d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = v \rightarrow \varepsilon = c))]$

(8) : — — — — — — — —

$\vdash \text{ext}\,\varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, u \rightarrow \varepsilon = b)) \,\text{ə}\, [\text{ext}\,\varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, v \rightarrow \varepsilon = c)) \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow\,] \rightarrow$
$(\forall \mathfrak{a}\, [d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\,\alpha\, \text{ext}\,\varepsilon\, [(\alpha = c \rightarrow \neg\ \varepsilon = b) \rightarrow \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q)]) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, v] \rightarrow$
$\neg\ d \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, u \rightarrow \varepsilon = b)))$

(59) : — — — — — — — —

$$\vdash \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \to \varepsilon = b)) \mathrel{\text{ə}} [\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} v \to \varepsilon = c)) \mathrel{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow\ ] \to$$
$$(\forall \mathfrak{a}\,[d \mathrel{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,[(\alpha = c \to \neg\ \varepsilon = b) \to \varepsilon \mathrel{\text{ə}} (\alpha \mathrel{\text{ə}} q)]) \to \neg\ \mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} v] \to$$
$$(d \mathrel{\text{ə}} u \to d = b)) \tag{60}$$

| S.103

§ 80. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun den Satz

$$, \vdash \forall \mathfrak{a}\,[d \mathrel{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,[(\alpha = c \to \neg\ \varepsilon = b) \to \varepsilon \mathrel{\text{ə}} (\alpha \mathrel{\text{ə}} q)]) \to \neg\ \mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} v] \to$$
$$(d = b \to \neg\ c \mathrel{\text{ə}} v) \quad ‘ \qquad (\alpha$$

der mit (60) verbunden zu dem Satze (ε) § 78 führt. Schreiben wir (IIa) in der Form

$$, \vdash \forall \mathfrak{a}\,[d \mathrel{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,[(\alpha = c \to \neg\ \varepsilon = b) \to \varepsilon \mathrel{\text{ə}} (\alpha \mathrel{\text{ə}} q)]) \to \neg\ \mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} v] \to$$
$$(d \mathrel{\text{ə}} (c \mathrel{\text{ə}} \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,[(\alpha = c \to \neg\ \varepsilon = b) \to \varepsilon \mathrel{\text{ə}} (\alpha \mathrel{\text{ə}} q)]) \to \neg\ c \mathrel{\text{ə}} v) \quad ‘ \qquad (\beta$$

so ist noch

$$, \vdash d = b \to d \mathrel{\text{ə}} (c \mathrel{\text{ə}} \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,[(\alpha = c \to \neg\ \varepsilon = b) \to \varepsilon \mathrel{\text{ə}} (\alpha \mathrel{\text{ə}} q)]) \quad ‘ \qquad (\gamma$$

abzuleiten, was mit (36) folgt aus

$$, \vdash d = b \to ((c = c \to \neg\ d = b) \to d \mathrel{\text{ə}} (c \mathrel{\text{ə}} q)) \ ‘ \qquad (\delta$$

Dieser Satz ergiebt sich aus (Ia) in der Form

$$, \vdash d = b \to (\neg\ d = b \to d \mathrel{\text{ə}} (c \mathrel{\text{ə}} q)) \ ‘$$

(I) und (IIIe).

§ 81. *Aufbau.*

IIe $\vdash c = c$

(I) : ————————

$\vdash (c = c \to \neg\ d = b) \to \neg\ d = b$

(Ia) : — — — — — — — —

$\vdash d = b \to ((c = c \to \neg\ d = b) \to d \mathrel{\text{ə}} (c \mathrel{\text{ə}} q))$

(36) : — — — — — — — —

$\vdash d = b \to d \mathrel{\text{ə}} (c \mathrel{\text{ə}} \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,[(\alpha = c \to \neg\ \varepsilon = b) \to \varepsilon \mathrel{\text{ə}} (\alpha \mathrel{\text{ə}} q)])$

(IIa) : — — — — — — — —

$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[d \mathrel{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,[(\alpha = c \to \neg\ \varepsilon = b) \to \varepsilon \mathrel{\text{ə}} (\alpha \mathrel{\text{ə}} q)]) \to \neg\ \mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} v] \to$
$(d = b \to \neg\ c \mathrel{\text{ə}} v)$

(60) :: — — — — — — — —

$\vdash \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \to \varepsilon = b)) \mathrel{\text{ə}} [\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} v \to \varepsilon = c)) \mathrel{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow\ ] \to$
$(\forall \mathfrak{a}\,[d \mathrel{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,[(\alpha = c \to \neg\ \varepsilon = b) \to \varepsilon \mathrel{\text{ə}} (\alpha \mathrel{\text{ə}} q)]) \to \neg\ \mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} v] \to$
$(d \mathrel{\text{ə}} u \to \neg\ c \mathrel{\text{ə}} v))$

$\times$

$$\vdash \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = b)) \,\text{ə}\, [\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, v \to \varepsilon = c)) \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow\ ] \to (c \,\text{ə}\, v \to$$
$$(\forall \mathfrak{a}\,[d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[(\alpha = c \to \neg\ \varepsilon = b) \to \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q)]) \to \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, v] \to$$
$$\neg\ d \,\text{ə}\, u))$$

$$\smile$$

S.106

$$\vdash \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = b)) \,\text{ə}\, [\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, v \to \varepsilon = c)) \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow\ ] \to (c \,\text{ə}\, v \to$$
$$\forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[(\alpha = c \to \neg\ \varepsilon = b) \to \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q)]) \to \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, v] \to$$
$$\neg\ \mathfrak{d} \,\text{ə}\, u])$$

$(11):$ — — — — — — — —

$$\vdash \text{funk}\,(\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[(\alpha = c \to \neg\ \varepsilon = b) \to \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q)]) \to$$
$$(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = b)) \,\text{ə}\, [\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, v \to \varepsilon = c)) \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow\ ] \to (c \,\text{ə}\, v \to$$
$$u \,\text{ə}\, (v \,\text{ə}\, \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[(\alpha = c \to \neg\ \varepsilon = b) \to \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q)] :\twoheadrightarrow\ )))$$ (61

§ 82. *Zerlegung.*

Es fehlt uns der Beweis des Satzes

$$,\ \vdash \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ b \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q)] \to (\text{funk}\,(q) \to$$
$$\text{funk}\,(\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,((\alpha = c \to \neg\ \varepsilon = b) \to \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q))))\ \text{‘}$$ $(\alpha$

(vergl. § 78, γ). Um diesen mit (34) zu führen, bedürfen wir des Satzes

$$,\ \vdash \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ b \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q)] \to (\text{funk}\,(q) \to (((d = c \to \neg\ e = b) \to e \,\text{ə}\, (d \,\text{ə}\, q)) \to$$
$$(((a = c \to \neg\ e = b) \to e \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, q)) \to d = a)))\ \text{‘}$$ $(\beta$

den wir aus den Sätzen

$$,\ \vdash \text{funk}\,(q) \to (((d = c \to \neg\ e = b) \to e \,\text{ə}\, (d \,\text{ə}\, q)) \to$$
$$(((a = c \to \neg\ e = b) \to e \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, q)) \to (\neg\ e = b \to d = a)))\ \text{‘}$$ $(\gamma$

und

$$,\ \vdash e = b \to (((d = c \to \neg\ e = b) \to e \,\text{ə}\, (d \,\text{ə}\, q)) \to$$
$$(((a = c \to \neg\ e = b) \to e \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, q)) \to (\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ b \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q)] \to d = a)))\ \text{‘}$$ $(\delta$

S.104 nach Regel (8) beweisen. (γ) folgt aus (13) mit (I) in den Formen |

$$,\ \vdash ((a = c \to \neg\ e = b) \to e \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, q)) \to$$
$$((a = c \to \neg\ e = b) \to e \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, q))\ \text{‘}$$

und

$$,\ \vdash ((d = c \to \neg\ e = b) \to e \,\text{ə}\, (d \,\text{ə}\, q)) \to$$
$$((d = c \to \neg\ e = b) \to e \,\text{ə}\, (d \,\text{ə}\, q))\ \text{‘}$$

Dabei treten zunächst ■→die Vorderglieder←■[150] [#111],$a = c \to \neg\ e = b$‘ und ,$d = c \to$

[150]die Unterglieder

[#111]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

$\neg\ e = b$‘ auf. Diese können mit (I) in den Formen

$$,\ \vdash \neg\ e = b \rightarrow (a = c \rightarrow \neg\ e = b)\ ‘$$

und

$$,\ \vdash \neg\ e = b \rightarrow (d = c \rightarrow \neg\ e = b)\ ‘$$

durch ‚$\neg\ e = b$‘ ersetzt werden.

§ 83. *Aufbau.*

13 $\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (e \ni (d \ni q) \rightarrow (e \ni (a \ni q) \rightarrow d = a))$

$(I, I) ::\ = = = = = = = = =$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (((d = c \rightarrow \neg\ e = b) \rightarrow e \ni (d \ni q)) \rightarrow ((d = c \rightarrow \neg\ e = b) \rightarrow (((a = c \rightarrow \neg\ e = b) \rightarrow e \ni (a \ni q)) \rightarrow ((a = c \rightarrow \neg\ e = b) \rightarrow d = a)))) \qquad (\alpha$$

$(I, I) ::\ = = = = = = = = =$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (((d = c \rightarrow \neg\ e = b) \rightarrow e \ni (d \ni q)) \rightarrow (((a = c \rightarrow \neg\ e = b) \rightarrow e \ni (a \ni q)) \rightarrow (\neg\ e = b \rightarrow d = a))) \qquad (62$$

§ 84. *Zerlegung.*

Um nun den Satz (δ) des § 82 zu beweisen, bemerken wir, dass

$$,\ (\Delta = c \rightarrow \neg\ \Gamma = b) \rightarrow \Gamma \ni (\Delta \ni q)\ ‘$$

den Wahrheitswerth davon andeutet, dass Γ zu Δ in der q-Beziehung stehe, oder dass Γ mit b und Δ mit c zusammenfalle. Wenn wir für Γ nun b nehmen, so kann von diesen beiden Fällen nur der letzte eintreten, wenn es keinen Gegenstand giebt, zu dem b in der q-Beziehung steht; d. h. es muss dann Δ mit c zusammenfallen. Demnach wird man den Satz

$$,\ \vdash e = b \rightarrow (((a = c \rightarrow \neg\ e = b) \rightarrow e \ni (a \ni q)) \rightarrow (\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ b \ni (\mathfrak{a} \ni q)] \rightarrow a = c))\ ‘ \qquad (\alpha$$

beweisen können, der zunächst folgt aus

$$,\ \vdash ((a = c \rightarrow \neg\ b = b) \rightarrow b \ni (a \ni q)) \rightarrow (\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ b \ni (\mathfrak{a} \ni q)] \rightarrow a = c)\ ‘ \qquad (\beta$$

Schreiben wir nun (I) in der Form

$$,\ \vdash ((a = c \rightarrow \neg\ b = b) \rightarrow b \ni (a \ni q)) \rightarrow ((a = c \rightarrow \neg\ b = b) \rightarrow b \ni (a \ni q))\ ‘ \qquad (\gamma$$

so können wir darauf (Ia) in der Form

$$,\ \vdash \neg\ a = c \rightarrow (a = c \rightarrow \neg\ b = b)\ ‘$$

| anwenden und gelangen dann ■→durch Kontraposition←■[151] [#112] und mit (IIa) leicht zu unserm Satze (β). In dem Satze (α) ersetzen wir dann ‚a‘ durch ‚d‘ und gelangen mit (IIIa) in der Form S.105

$$,\ \vdash a = c \rightarrow (d = c \rightarrow d = a)\ ‘$$

an unser Ziel.

---

[151]durch Wendung

[#112]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

§ 85. *Aufbau.*

$$\text{Ia} \quad \vdash \neg\ a = c \to (a = c \to \neg\ b = b)$$

$(I):$ — — — — — — — —

$$\vdash ((a = c \to \neg\ b = b) \to b \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} q)) \to (\neg\ a = c \to b \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} q)) \qquad (\alpha$$

$$\times$$

$$\vdash ((a = c \to \neg\ b = b) \to b \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} q)) \to (\neg\ b \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} q) \to a = c) \qquad (\beta$$

$(IIa)::$ — — — — — — — —

$$\vdash ((a = c \to \neg\ b = b) \to b \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} q)) \to$$

$$(\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ b \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} q)] \to a = c) \qquad (\gamma$$

$(IIIa):$ ————————————

$$\vdash e = b \to (((a = c \to \neg\ e = b) \to e \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} q)) \to$$

$$(\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ b \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} q)] \to a = c)) \qquad (\delta$$

$(IIIa):$ — — — — — — — —

$$\vdash e = b \to (((a = c \to \neg\ e = b) \to e \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} q)) \to$$

$$(\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ b \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} q)] \to (d = c \to d = a))) \qquad (\varepsilon$$

$(\delta)::$ — — — — — — — —

$$\vdash e = b \to (((d = c \to \neg\ e = b) \to e \mathbin{\text{ə}} (d \mathbin{\text{ə}} q)) \to$$
$$(((a = c \to \neg\ e = b) \to e \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} q)) \to$$
$$(\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ b \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} q)] \to d = a))) \qquad (\zeta$$

$(62):$ ·—·—·—·—·—·—·—·

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [\neg\ b \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} q)] \to (\text{funk}\,(q) \to$$
$$(((d = c \to \neg\ e = b) \to e \mathbin{\text{ə}} (d \mathbin{\text{ə}} q)) \to$$
$$(((a = c \to \neg\ e = b) \to e \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} q)) \to d = a))) \qquad (\eta$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [\neg\ b \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} q)] \to (\text{funk}\,(q) \to$$

$$\forall \mathfrak{e}\, \forall \mathfrak{d}\, [((\mathfrak{d} = c \to \neg\ \mathfrak{e} = b) \to \mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} q)) \to$$

$$\forall \mathfrak{a}\, [((\mathfrak{a} = c \to \neg\ \mathfrak{e} = b) \to \mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} q)) \to \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]]) \qquad (\vartheta$$

$(34):$ — — — — — — — —

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ b \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q)] \to (\text{funk}\,(q) \to$$

$$\text{funk}\,(\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,((\alpha = c \to \neg\ \varepsilon = b) \to \varepsilon \text{ ə } (\alpha \text{ ə } q)))) \qquad (\iota$$

$$(61): \quad - - - - - - - -$$

S.109

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ b \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q)] \to (\text{funk}\,(q) \to$$
$$(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } u \to \varepsilon = b)) \text{ ə } [\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\varepsilon \text{ ə } v \to \varepsilon = c)] \text{ ə } q :\twoheadrightarrow] \to (c \text{ ə } v \to$$
$$u \text{ ə } (v \text{ ə } \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[(\alpha = c \to \neg\ \varepsilon = b) \to \varepsilon \text{ ə } (\alpha \text{ ə } q)] :\twoheadrightarrow)))) \qquad (\kappa$$

$$(18) :: \quad - - - - - - - -$$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[b \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q)] \to$$
$$(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } u \to \varepsilon = b)) \text{ ə } [\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } v \to \varepsilon = c)) \text{ ə } q :\twoheadrightarrow] \to (c \text{ ə } v \to$$
$$u \text{ ə } (v \text{ ə } \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,((\alpha = c \to \neg\ \varepsilon = b) \to \varepsilon \text{ ə } (\alpha \text{ ə } q)) :\twoheadrightarrow))) \qquad (63$$

§ 86. *Zerlegung.*

Wir haben hiermit den Satz (γ) des § 78 bewiesen. Um (δ) abzuleiten, vertauschen wir in (63) ‚q' mit ‚q^{-1}', ‚b' mit ‚c', ‚u' mit ‚v'. So erhalten wir (63) in der Form

$$‚\ \vdash \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ c \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q^{-1})] \to$$
$$(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } v \to \varepsilon = c)) \text{ ə } [\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } u \to \varepsilon = b)) \text{ ə } q^{-1} :\twoheadrightarrow] \to (b \text{ ə } u \to$$
$$v \text{ ə } (u \text{ ə } \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[(\alpha = b \to \neg\ \varepsilon = c) \to \varepsilon \text{ ə } (\alpha \text{ ə } q^{-1})] :\twoheadrightarrow))) \quad '$$

und wir brauchen nur den Beweis des Satzes

$$‚\ \vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,((\alpha = c \to \neg\ \varepsilon = b) \to \varepsilon \text{ ə } (\alpha \text{ ə } q))^{-1} =$$
$$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,((\alpha = b \to \neg\ \varepsilon = c) \to \varepsilon \text{ ə } (\alpha \text{ ə } q^{-1})) \quad '$$

zu liefern, der dem von § 75 (κ) ähnlich ist.

§ 87. *Aufbau.*

$$21 \quad \vdash r \text{ ə } (a \text{ ə } q) = a \text{ ə } (r \text{ ə } q^{-1})$$

$$(IIIh): \quad \overline{}$$

$$\vdash ((a = c \to \neg\ r = b) \to r \text{ ə } (a \text{ ə } q)) =$$
$$((a = c \to \neg\ r = b) \to a \text{ ə } (r \text{ ə } q^{-1})) \qquad (\alpha$$

$$(IIIa): \quad \overline{}$$

$$\vdash (r = b \to \neg\ a = c) = (a = c \to \neg\ r = b) \to$$
$$((a = c \to \neg\ r = b) \to r \text{ ə } (a \text{ ə } q)) =$$
$$((r = b \to \neg\ a = c) \to a \text{ ə } (r \text{ ə } q^{-1})) \qquad (\beta$$

——————— • ———————

$$\text{I} \quad \vdash (r = b \to \neg\ a = c) \to (r = b \to \neg\ a = c)$$

$$\times$$

$\vdash (r = b \to \neg\ a = c) \to (a = c \to \neg\ r = b)$ $(\gamma$

$(IVa):$ ―――――――――

$\vdash ((a = c \to \neg\ r = b) \to (r = b \to \neg\ a = c)) \to$

$(r = b \to \neg\ a = c) = (a = c \to \neg\ r = b)$ $(\delta$

$(\gamma) ::$ ―――――――――

$\vdash (r = b \to \neg\ a = c) = (a = c \to \neg\ r = b)$ $(\varepsilon$

$(\beta):$ ―――――――――

S.110

$\vdash ((a = c \to \neg\ r = b) \to r \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} q)) =$
$((r = b \to \neg\ a = c) \to a \mathbin{\text{ə}} (r \mathbin{\text{ə}} q^{-1}))$

$\smile$

$\vdash \forall \mathfrak{a}\, \forall \mathfrak{e}\, [((\mathfrak{e} = c \to \neg\ \mathfrak{a} = b) \to \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} q)) =$

$((\mathfrak{a} = b \to \neg\ \mathfrak{e} = c) \to \mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} q^{-1}))]$ $(\zeta$

$(20):$ ―――――――――

$\vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,((\varepsilon = c \to \neg\ \alpha = b) \to \alpha \mathbin{\text{ə}} (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} q)) =$

$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,((\alpha = b \to \neg\ \varepsilon = c) \to \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q^{-1}))$ $(\eta$

$(IIIc):$ ―――――――――

$\vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,((\varepsilon = c \to \neg\ \alpha = b) \to \alpha \mathbin{\text{ə}} (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} q)) =$
$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,((\alpha = c \to \neg\ \varepsilon = b) \to \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q))^{-1} \to$
$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,((\alpha = c \to \neg\ \varepsilon = b) \to \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q))^{-1} =$
$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,((\alpha = b \to \neg\ \varepsilon = c) \to \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q^{-1}))$ $(\vartheta$

$(40) ::$ ―――――――――

$\vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,((\alpha = c \to \neg\ \varepsilon = b) \to \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q))^{-1} =$
$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,((\alpha = b \to \neg\ \varepsilon = c) \to \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q^{-1}))$ $(\iota$

$(IIIa):$ ―――――――――

$\vdash v \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[(\alpha = b \to \neg\ \varepsilon = c) \to \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q^{-1})] :\twoheadrightarrow) \to$
$v \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[(\alpha = c \to \neg\ \varepsilon = b) \to \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q)]^{-1} :\twoheadrightarrow)$ $(\kappa$

$(63) ::$ – – – – – – – –

$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [\neg\ c \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} q^{-1})] \to$
$(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \to \varepsilon = c)) \mathbin{\text{ə}} [\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u \to \varepsilon = b)) \mathbin{\text{ə}} q^{-1} :\twoheadrightarrow] \to (b \mathbin{\text{ə}} u \to$
$v \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[(\alpha = c \to \neg\ \varepsilon = b) \to \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q)]^{-1} :\twoheadrightarrow)))$ $(\lambda$

$(32):$ – – – – – – – –

S.111

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ c \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q^{-1})] \to$$
$$(\operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon = v \to \varepsilon = c)) \text{ ə } [\operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } u \to \varepsilon = b)) \text{ ə } q^{-1} :\twoheadrightarrow] \to (b \text{ ə } u \to$$
$$(u \text{ ə } (v \text{ ə } \operatorname{ext}\alpha\,\operatorname{ext}\varepsilon\,[(\alpha = c \to \neg\ \varepsilon = b) \to \varepsilon \text{ ə } (\alpha \text{ ə } q)] :\twoheadrightarrow) \to$$
$$\operatorname{anz}(u) = \operatorname{anz}(v)))) \qquad (\mu$$

$(63) ::$ — — — — — — — —

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ c \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q^{-1})] \to$$
$$(\operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } v \to \varepsilon = c)) \text{ ə } [\operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } u \to \varepsilon = b)) \text{ ə } q^{-1} :\twoheadrightarrow] \to (b \text{ ə } u \to$$
$$(\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ b \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q)] \to$$
$$(\operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } u \to \varepsilon = b)) \text{ ə } [\operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } v \to \varepsilon = c)) \text{ ə } q :\twoheadrightarrow] \to (c \text{ ə } v \to$$
$$\operatorname{anz}(u) = \operatorname{anz}(v)))))) \qquad (\nu$$

$\times$

$$\vdash \neg\ \operatorname{anz}(u) = \operatorname{anz}(v) \to (c \text{ ə } v \to (b \text{ ə } u \to$$
$$(\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ c \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q^{-1})] \to (\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ b \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q)] \to$$
$$(\operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } v \to \varepsilon = c)) \text{ ə } [\operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } u \to \varepsilon = b)) \text{ ə } q^{-1} :\twoheadrightarrow] \to$$
$$\neg\ \operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } u \to \varepsilon = b)) \text{ ə } [\operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } v \to \varepsilon = c)) \text{ ə } q :\twoheadrightarrow]))))) \qquad (\xi$$

$\smile$

$$\vdash \neg\ \operatorname{anz}(u) = \operatorname{anz}(v) \to (c \text{ ə } v \to (b \text{ ə } u \to$$
$$\forall \mathfrak{q}\,[\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ c \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } \mathfrak{q}^{-1})] \to (\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ b \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } \mathfrak{q})] \to$$
$$(\operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } v \to \varepsilon = c)) \text{ ə } [\operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } u \to \varepsilon = b)) \text{ ə } \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow] \to$$
$$\neg\ \operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } u \to \varepsilon = b)) \text{ ə } [\operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } v \to \varepsilon = c)) \text{ ə } \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow]))])) \qquad (o$$

$(56) :$ — — — — — — — —

S.112

$$\vdash \neg\ \operatorname{anz}(u) = \operatorname{anz}(v) \to (c \text{ ə } v \to (b \text{ ə } u \to$$
$$(\neg\ c \text{ ə } \operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } v \to \varepsilon = c)) \to (\neg\ b \text{ ə } \operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } u \to \varepsilon = b)) \to$$
$$\neg\ \operatorname{anz}(\operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } u \to \varepsilon = b))) = \operatorname{anz}(\operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } v \to \varepsilon = c))))))) \qquad (64$$

———— • ————

IIIe $\vdash b = b$

$(I) :$ ————————

$$\vdash b \text{ ə } u \to b = b \qquad (\alpha$$

$(58) :$ ————————

$$\vdash \neg\ b \text{ ə } \operatorname{ext}\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } u \to \varepsilon = b)) \qquad (65$$

$(64) :$ ————————

$\vdash \neg\ \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(v) \to (c\,ə\,v \to (b\,ə\,u \to$
$(\neg\ c\,ə\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,ə\,v \to \varepsilon = c)) \to$
$\neg\ \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,ə\,u \to \varepsilon = b))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,ə\,v \to \varepsilon = c))))))$ $(\alpha$

$(65) ::$ ————————————

$\vdash \neg\ \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(v) \to (c\,ə\,v \to (b\,ə\,u \to$
$\neg\ \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,ə\,u \to \varepsilon = b))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,ə\,v \to \varepsilon = c)))))$ $(\beta$

$\times$

$\vdash c\,ə\,v \to$

$(\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,ə\,u \to \varepsilon = b))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,ə\,v \to \varepsilon = c))) \to$

$(b\,ə\,u \to \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(v)))$ (66

$(IIIa) :$ — — — — — — — —

$\vdash c\,ə\,v \to$
$(\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,ə\,u \to \varepsilon = b))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,ə\,v \to \varepsilon = c))) \to$
$(b\,ə\,u \to (\neg\ \text{anz}\,(v) = a \to \neg\ \text{anz}\,(u) = a)))$ $(\alpha$

$(IIIc) :$ ————————————

$\vdash \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,ə\,v \to \varepsilon = c))) = e \to (c\,ə\,v \to (\neg\ \text{anz}\,(v) = a \to$
$(\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,ə\,u \to \varepsilon = b))) = e \to (b\,ə\,u \to \neg\ \text{anz}\,(u) = a))))$ $(\beta$

$\smile$

$\vdash \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,ə\,v \to \varepsilon = c))) = e \to (c\,ə\,v \to (\neg\ \text{anz}\,(v) = a \to$

$\forall\mathfrak{u}\,\forall\mathfrak{a}\,[\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,ə\,\mathfrak{u} \to \varepsilon = \mathfrak{a}))) = e \to (\mathfrak{a}\,ə\,\mathfrak{u} \to \neg\ \text{anz}\,(\mathfrak{u}) = a)]))$ (67

——————— • ———————

H $\vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ \forall\mathfrak{u}\,\forall\mathfrak{a}\,[\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,ə\,\mathfrak{u} \to \varepsilon = \mathfrak{a}))) = \varepsilon \to$
$(\mathfrak{a}\,ə\,\mathfrak{u} \to \neg\ \text{anz}\,(\mathfrak{u}) = \alpha)]] = \text{nf}$

$(14) :$ ————————————

$\vdash \forall\mathfrak{u}\,\forall\mathfrak{a}\,[\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,ə\,\mathfrak{u} \to \varepsilon = \mathfrak{a}))) = e \to$
$(\mathfrak{a}\,ə\,\mathfrak{u} \to \neg\ \text{anz}\,(\mathfrak{u}) = a)] \to \neg\ e\,ə\,(a\,ə\,\text{nf}\,)$ (68

$(67) ::$ — — — — — — — —

$\vdash \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,ə\,v \to \varepsilon = c))) = e \to$
$(c\,ə\,v \to (\neg\ \text{anz}\,(v) = a \to \neg\ e\,ə\,(a\,ə\,\text{nf}\,)))$ (69

$(IIIc) :$ ————————————

S.113

$\vdash \text{anz}\,(v) = d \to (\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,ə\,v \to \varepsilon = c))) = e \to$
$(c\,ə\,v \to (\neg\ d = a \to \neg\ e\,ə\,(a\,ə\,\text{nf}\,))))$ $(\alpha$

$\times$

$$\vdash e ə (a ə \text{nf}) \rightarrow (\neg\ d = a \rightarrow$$

$$(\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon ə v \rightarrow \varepsilon = c))) = e \rightarrow (c ə v \rightarrow \neg\ \text{anz}\,(v) = d))) \qquad (\beta$$

$$\smile$$

$$\vdash e ə (a ə \text{nf}) \rightarrow (\neg\ d ə a \rightarrow$$

$$\forall\mathfrak{u}\,\forall\mathfrak{a}\,[\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon ə \mathfrak{u} \rightarrow \varepsilon = \mathfrak{a}))) = e \rightarrow (\mathfrak{a} ə \mathfrak{u} \rightarrow \neg\ \text{anz}\,(\mathfrak{u}) = d)]) \qquad (\gamma$$

(68) : — — — — — — — —

$$\vdash e ə (a ə \text{nf}) \rightarrow (\neg\ d = a \rightarrow \neg\ e ə (d ə \text{nf})) \qquad (\delta$$

$$\times$$

$$\vdash e ə (d ə \text{nf}) \rightarrow (e ə (a ə \text{nf}) \rightarrow d = a) \qquad (70$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall\mathfrak{e}\,\forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{e} ə (\mathfrak{d} ə \text{nf}) \rightarrow \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{e} ə (\mathfrak{a} ə \text{nf}) \rightarrow \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]] \qquad (\alpha$$

(16) : ————————————

$$\vdash \text{funk}\,(\text{nf}) \qquad (71$$

Γ. Beweis des Satzes ‚$\vdash$ funk (anz (nf))‘..

a) Beweis des Satzes

$$‚\vdash u ə (v ə q :\twoheadrightarrow) \rightarrow (b ə (n ə q) \rightarrow (\text{funk}\,(q^{-1}) \rightarrow (c ə (m ə q^{-1}) \rightarrow$$
$$\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon ə \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon ə u \rightarrow \varepsilon = b)) \rightarrow \varepsilon = m)) ə$$
$$(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\varepsilon ə \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon ə v \rightarrow \varepsilon = c)) \rightarrow \varepsilon = n)] ə$$
$$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \rightarrow \varepsilon = b) \rightarrow \neg\ \varepsilon ə (\alpha ə q))] :\twoheadrightarrow))))‘$$

§ 88. *Zerlegung.*

Wir wollen jetzt den Satz beweisen, dass es zu jeder Anzahl nicht mehr als eine gebe, die ihr unmittelbar in der Anzahlenreihe vorhergehe. Dies führt zurück auf den Satz

$$‚\ \vdash d ə (e ə \text{nf}) \rightarrow (a ə (e ə \text{nf}) \rightarrow d = a)\ ‘ \qquad (\alpha$$

Führen wir hier die aus der Definition (H) folgenden Ausdrücke ein, so haben wir | S.107

$$‚\ \vdash \neg\ \forall\mathfrak{u}\,\forall\mathfrak{a}\,[\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon ə \mathfrak{u} \rightarrow \varepsilon = \mathfrak{a}))) = d \rightarrow (\mathfrak{a} ə \mathfrak{u} \rightarrow \neg\ \text{anz}\,(\mathfrak{u}) = e)] \rightarrow$$
$$(\neg\ \forall\mathfrak{u}\,\forall\mathfrak{a}\,[\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon ə \mathfrak{u} \rightarrow \varepsilon = \mathfrak{a}))) = a \rightarrow (\mathfrak{a} ə \mathfrak{u} \rightarrow \neg\ \text{anz}\,(\mathfrak{u}) = e)] \rightarrow$$
$$d = a)\quad ‘ \qquad (\beta$$

einen Satz, der ■→durch wiederholte Kontraposition←■[152] [#113] und Einführung deutscher

[152] durch wiederholte Wendung

[#113] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

Buchstaben hervorgeht aus

$$\begin{aligned}&,\ \vdash \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \to \varepsilon = c))) = a \to\\ &(c \mathbin{\text{ə}} v \to (\text{anz}\,(v) = e \to\\ &(\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u \to \varepsilon = b))) = d \to (b \mathbin{\text{ə}} u \to (\text{anz}\,(u) = e \to\\ &d = a)))))\quad \text{‘}\end{aligned}\qquad (\gamma$$

Dieser Satz kann abgeleitet werden aus

$$\begin{aligned}&,\ \vdash \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(v) \to (c \mathbin{\text{ə}} v \to (b \mathbin{\text{ə}} u \to\\ &\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u \to \varepsilon = b))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \to \varepsilon = c)))))\quad \text{‘}\end{aligned}\qquad (\delta$$

Nach dem Satze (32) brauchen wir nur eine Beziehung aufzuzeigen, die den $\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u \to \varepsilon = b))$-Begriff in den $\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \to \varepsilon = c))$-Begriff und deren Umkehrung diesen in jenen abbildet. ■→Das Vorderglied←■[153] [#114],$\text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(v)$‘ sagt uns nun, dass es eine Beziehung giebt, die den u-Begriff in den v-Begriff und deren Umkehrung diesen in jenen abbildet. Die q-Beziehung sei eine solche. Wir wissen nun von der $\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q)))$-Beziehung, dass kein Gegenstand zu c und dass b zu keinem Gegenstande in dieser Beziehung steht[154]. Ferner steht kein Gegenstand zu n und m steht zu keinem Gegenstande in dieser Beziehung, wenn m zu c und b zu n in der q-Beziehung steht, weil diese ebenso wie ihre Umkehrung eindeutig ist. Jene Beziehung bildet den $\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u \to \varepsilon = b)) \to \varepsilon = m))$-Begriff in den $\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \to \varepsilon = c)) \to \varepsilon = n))$-Begriff ab, und ihre Umkehrung bildet diesen in jenen ab. Nach (32) ist dann die Anzahl dieses Begriffes gleich der Anzahl jenes. Mit (66) können wir dann hoffen zum Ziele zu gelangen.

Zunächst wenden wir uns dem Beweise des Satzes

$$\begin{aligned}&,\ \vdash u \mathbin{\text{ə}} (v \mathbin{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow\ ) \to (b \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} q) \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to (c \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}} q^{-1}) \to\\ &\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u \to \varepsilon = b)) \to \varepsilon = m)) \mathbin{\text{ə}}\\ &(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \to \varepsilon = c)) \to \varepsilon = n)] \mathbin{\text{ə}}\\ &\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q))] :\twoheadrightarrow\ ))))\quad \text{‘}\end{aligned}\qquad (\varepsilon$$

S.108 | zu. Schreiben wir (51) in der Form

$$\begin{aligned}&,\ \vdash \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u \to \varepsilon = b)) \to \varepsilon = m)) \mathbin{\text{ə}}\\ &(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \to \varepsilon = c)) \to \varepsilon = n)] \mathbin{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow\ ) \to\\ &(\neg\ c \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \to \varepsilon = c)) \to \varepsilon = n)) \to\\ &(\neg\ b \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u \to \varepsilon = b)) \to \varepsilon = m)) \to\\ &\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u \to \varepsilon = b)) \to \varepsilon = m)) \mathbin{\text{ə}}\\ &(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \to \varepsilon = c)) \to \varepsilon = n)] \mathbin{\text{ə}}\\ &\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q))] :\twoheadrightarrow\ )))\quad \text{‘}\end{aligned}$$

so sehen wir, dass hauptsächlich noch zu beweisen bleibt

$$\begin{aligned}&,\ \vdash u \mathbin{\text{ə}} (v \mathbin{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow\ ) \to (b \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} q) \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to (m \mathbin{\text{ə}} (c \mathbin{\text{ə}} q) \to\\ &\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u \to \varepsilon = b)) \to \varepsilon = m)) \mathbin{\text{ə}}\\ &(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \to \varepsilon = c)) \to \varepsilon = n)] \mathbin{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow\ ))))\quad \text{‘}\end{aligned}\qquad (\zeta$$

denn der Satz

$$,\ \vdash \neg\ b \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u \to \varepsilon = b)) \to \varepsilon = m))\quad \text{‘}$$

[153] Das Unterglied

[154] Vergl. § 66.

[#114] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

bietet keine Schwierigkeit. Wenn wir nun den Satz

, $\vdash u \,\text{ə}\, (v \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow\ ) \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to (b \,\text{ə}\, (n \,\text{ə}\, q) \to$
$\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = b)) \,\text{ə}\, [\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, v \to \varepsilon = n)) \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow\ ]))$ ‘ (η

bewiesen haben, so können wir ihn zweimal anwenden und dadurch zum Satze

, $\vdash u \,\text{ə}\, (v \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow\ ) \to (b \,\text{ə}\, (n \,\text{ə}\, q) \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to (m \,\text{ə}\, (c \,\text{ə}\, q) \to$
$\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = b)) \to \varepsilon = m)) \,\text{ə}$
$(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, v \to \varepsilon = n)) \to \varepsilon = c)] \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow\ ))))$ ‘ (ϑ

gelangen. Wir bedürfen nun noch der Sätze

, $\vdash \text{ext}\,\varepsilon\,(g(\varepsilon, f(\varepsilon))) = \text{ext}\,\varepsilon\,(g(\varepsilon, \varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon))))$ ‘ (ι

| und S.114

, $\vdash \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\neg\ (h(\varepsilon) \to g(\varepsilon)) \to f(\varepsilon))) = \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\neg\ (h(\varepsilon) \to f(\varepsilon)) \to g(\varepsilon)))$ ‘ (κ

um

, $\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, v \to \varepsilon = n)) \to \varepsilon = c))$ ‘

durch

, $\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, v \to \varepsilon = c)) \to \varepsilon = n))$ ‘

ersetzen zu können. Diese Sätze leiten wir zunächst ab.

§ 89. *Aufbau.*

If $\vdash h(a) \to (\neg\ g(a) \to \neg\ (h(a) \to g(a)))$

$(I):$ – – – – – – – –

$\vdash (\neg\ (h(a) \to g(a)) \to f(a)) \to (\neg\ g(a) \to (h(a) \to f(a)))$ (α

$\times$

$\vdash (\neg\ (h(a) \to g(a)) \to f(a)) \to (\neg\ (h(a) \to f(a)) \to g(a))$ (β

$\times$

$\vdash \neg\ (\neg\ (h(a) \to f(a)) \to g(a)) \to \neg\ (\neg\ (h(a) \to g(a)) \to f(a))$ (γ

$(IVa):$ ―――――――――

$\vdash (\neg\ (\neg\ (h(a) \to g(a)) \to f(a)) \to \neg\ (\neg\ (h(a) \to f(a)) \to g(a))) \to$
$(\neg\ (\neg\ (h(a) \to g(a)) \to f(a))) = (\neg\ (\neg\ (h(a) \to f(a)) \to g(a)))$ (δ

$(\gamma) ::$ ―――――――――

$\vdash (\neg\ (\neg\ (h(a) \to g(a)) \to f(a))) = (\neg\ (\neg\ (h(a) \to f(a)) \to g(a)))$ (ε

$\smile$

$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[(\neg\ (\neg\ (h(\mathfrak{a}) \to g(\mathfrak{a})) \to f(\mathfrak{a}))) = (\neg\ (\neg\ (h(\mathfrak{a}) \to f(\mathfrak{a})) \to g(\mathfrak{a})))]$ (ζ

$(Va):$ ―――――――――

$$\vdash \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\neg\ (h(\varepsilon) \to g(\varepsilon)) \to f(\varepsilon))) = \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\neg\ (h(\varepsilon) \to f(\varepsilon)) \to g(\varepsilon))) \quad (\eta$$

$(IIIa):$ ——————————

$$\vdash F(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (h(\varepsilon) \to f(\varepsilon)) \to g(\varepsilon))]) \to$$
$$F(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (h(\varepsilon) \to g(\varepsilon)) \to f(\varepsilon))]) \quad (72$$

———— • ————

$$1 \quad \vdash f(a) = a \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon))$$

$(IIIh):$ ——————————

$$\vdash g(a, f(a)) = g(a, a \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon))) \quad (\alpha$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[g(\mathfrak{a}, f(\mathfrak{a})) = g(\mathfrak{a}, \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)))] \quad (\beta$$

$(Va):$ ——————————

$$\vdash \text{ext}\,\varepsilon\,(g(\varepsilon, f(\varepsilon))) = \text{ext}\,\varepsilon\,(g(\varepsilon, \varepsilon \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)))) \quad (73$$

$(IIIa):$ ——————————

$$\vdash F(\text{ext}\,\varepsilon\,(g(\varepsilon, \varepsilon \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon))))) \to F(\text{ext}\,\varepsilon\,(g(\varepsilon, f(\varepsilon)))) \quad (74$$

———— • ————

$$73 \quad \vdash \text{ext}\,\varepsilon\,(g(\varepsilon, f(\varepsilon))) = \text{ext}\,\varepsilon\,(g(\varepsilon, \varepsilon \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon))))$$

$(IIIc):$ ——————————

S.117

$$\vdash F(\text{ext}\,\varepsilon\,(g(\varepsilon, f(\varepsilon)))) \to F(\text{ext}\,\varepsilon\,(g(\varepsilon, \varepsilon \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon))))) \quad (75$$

———— • ————

$$74 \quad \vdash F(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \to \varepsilon = n)) \to \varepsilon = c)]) \to$$
$$F(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \to \varepsilon = n) \to \varepsilon = c)])$$

$(72):$ – – – – – – – – –

$$\vdash F(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \to \varepsilon = n)) \to \varepsilon = c)]) \to$$
$$F(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \to \varepsilon = c) \to \varepsilon = n)]) \quad (\alpha$$

$(75):$ – – – – – – – – –

$$\vdash F(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \to \varepsilon = n)) \to \varepsilon = c)]) \to$$
$$F(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \to \varepsilon = c)) \to \varepsilon = n)]) \quad (76$$

§ 90. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun den Satz (η) des § 88. Wenn die q-Beziehung den u-Begriff in den v-Begriff abbildet, so giebt es zu jedem unter den u-Begriff fallenden Gegenstande einen unter den v-Begriff fallenden, zu dem er in der q-Beziehung steht. Nun fällt jeder unter den $\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u \to \varepsilon = b))$-Begriff fallende Gegenstand unter den u-Begriff, und es giebt also bei unserer Bedingung zu jedem unter den $\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u \to \varepsilon = b))$-Begriff fallenden Gegenstande einen unter den v-Begriff fallenden, zu dem er in der q-Beziehung steht; aber unter den v-Begriff fällt n, das nicht unter den $\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \to \varepsilon = n))$-Begriff fällt. Wenn nun unter den $\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u \to \varepsilon = b))$-Begriff ein Gegenstand fiele, der zu n in der q-Beziehung stände, so brauchte es keinen Gegenstand zu geben, zu dem er in der q-Beziehung stände, und der unter den $\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon ə v \to \varepsilon = n))$-Begriff fiele. Aber dieser Fall ist durch ■→die Vorderglieder←■[155] [#115],— $b ə (n ə q)$‘ und ‚$\text{funk}\,(q^{-1})$‘ ausgeschlossen.

§ 91. *Aufbau.*

$$1 \quad \vdash f(a) = a ə \text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon))$$

$$(IIIc): \overline{}$$

$$\vdash F(f(a)) \to F(a ə \text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon))) \qquad (77$$

———— ● ————

$$13 \quad \vdash \text{funk}\,(q^{-1}) \to (n ə (d ə q^{-1}) \to (n ə (b ə q^{-1}) \to d = b))$$

$$(22) :: - - - - - - - -$$

$$\vdash \text{funk}\,(q^{-1}) \to (n ə (d ə q^{-1}) \to (b ə (n ə q) \to d = b)) \qquad (78$$

$$(22) :: - - - - - - - -$$

$$\vdash \text{funk}\,(q^{-1}) \to (d ə (n ə q) \to (b ə (n ə q) \to d = b)) \qquad (79$$

$$(IIIa): \overline{}$$

$$\vdash a = n \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to (d ə (a ə q) \to (b ə (n ə q) \to d = b))) \qquad (\alpha$$

$$(I) :: - - - - - - - -$$

S.118

$$\vdash (a ə v \to a = n) \to (a ə v \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to (d ə (a ə q) \to (b ə (n ə q) \to d = b)))) \qquad (\beta$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ d = b \to (a ə v \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to (d ə (a ə q) \to (b ə (n ə q) \to \neg\ (a ə v \to a = n))))) \qquad (\gamma$$

$$(77): - - - - - - - -$$

$$\vdash \neg\ d = b \to (a ə v \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to (d ə (a ə q) \to (b ə (n ə q) \to a ə \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon ə v \to \varepsilon = n)))))) \qquad (\delta$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ d = b \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to (b ə (n ə q) \to (\neg\ a ə \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon ə v \to \varepsilon = n)) \to (d ə (a ə q) \to \neg\ a ə v)))) \qquad (\varepsilon$$

$$(IIa) :: - - - - - - - -$$

[155] die Unterglieder

[#115] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

$$\vdash \neg\ d = b \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to (b \ni (n \ni q) \to$$
$$(\forall \mathfrak{a}\,[d \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = n))] \to$$
$$(d \ni (a \ni q) \to \neg\ a \ni v)))) \qquad (\zeta$$

$$\smile$$

$$\vdash \neg\ d = b \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to (b \ni (n \ni q) \to$$
$$(\forall \mathfrak{a}\,[d \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = n))] \to$$
$$\forall \mathfrak{a}\,[d \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni v]))) \qquad (\eta$$

$(8):$ — — — — — — — —

$$\vdash u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \to (\neg\ d = b \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to (b \ni (n \ni q) \to$$
$$(\forall \mathfrak{a}\,[d \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = n))] \to \neg\ d \ni u)))) \qquad (\vartheta$$

$$\times$$

$$\vdash u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to (b \ni (n \ni q) \to$$
$$(\forall \mathfrak{a}\,[d \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = n))] \to$$
$$(d \ni u \to d = b)))) \qquad (\iota$$

$(58):$ — — — — — — — —

$$\vdash u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to (b \ni (n \ni q) \to$$
$$(\forall \mathfrak{a}\,[d \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = n))] \to$$
$$\neg\ d \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b))))) \qquad (\kappa$$

$$\smile$$

$$\vdash u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to (b \ni (n \ni q) \to$$
$$\forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = n))] \to$$
$$\neg\ \mathfrak{d} \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b))])) \qquad (\lambda$$

$(11):$ — — — — — — — —

S.119

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to (b \ni (n \ni q) \to$$
$$\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b)) \ni [\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = n)) \ni q :\twoheadrightarrow\ ]))) \qquad (\mu$$

$(18)::$ — — — — — — — —

$$\vdash u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to (b \ni (n \ni q) \to$$
$$\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b)) \ni [\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = n)) \ni q :\twoheadrightarrow\ ])) \qquad (80$$

$(80):$ — — — — — — — —

$$\vdash u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \to (b \ni (n \ni q) \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to (m \ni (c \ni q) \to$$
$$\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b)) \to \varepsilon = m)) \ni$$
$$(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\varepsilon \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = n)) \to \varepsilon = c)] \ni q :\twoheadrightarrow\ )))) \qquad (\alpha$$

$(76):$ — — — — — — — —

$$\vdash u \,\text{ə}\, (v \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow) \to (b \,\text{ə}\, (n \,\text{ə}\, q) \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to (m \,\text{ə}\, (c \,\text{ə}\, q) \to$$
$$\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = b)) \to \varepsilon = m)) \,\text{ə}$$
$$(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, v \to \varepsilon = c)) \to \varepsilon = n)] \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow)))) \qquad (\beta$$

$(51):$ — — — — — — — —

$$\vdash u \,\text{ə}\, (v \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow) \to (b \,\text{ə}\, (n \,\text{ə}\, q) \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to (m \,\text{ə}\, (c \,\text{ə}\, q) \to$$
$$(\neg\ c \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, v \to \varepsilon = c)) \to \varepsilon = n)) \to$$
$$(\neg\ b \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = b)) \to \varepsilon = m)) \to$$
$$\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = b)) \to \varepsilon = m)) \,\text{ə}$$
$$(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, v \to \varepsilon = c)) \to \varepsilon = n)] \,\text{ə}$$
$$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q))] :\twoheadrightarrow)))))) \qquad (81$$

———— • ————

S.115

$$(IIIa):\quad \frac{1 \quad \vdash f(a) = a \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon))}{\vdash F(a \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon))) \to F(f(a))} \qquad (82$$

———— • ————

$$\text{Id} \quad \vdash \neg\ (b \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = b)) \to b = m) \to$$
$$b \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = b)) \qquad (\alpha$$

$(82) ::$ — — — — — — — —

$$\vdash b \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = b)) \to \varepsilon = m)) \to$$
$$b \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = b)) \qquad (\beta$$

$\times$

$$\vdash \neg\ b \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = b)) \to$$
$$\neg\ b \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = b)) \to \varepsilon = m)) \qquad (\gamma$$

$(65) ::$ ————————

$$\vdash \neg\ b \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = b)) \to \varepsilon = m)) \qquad (\delta$$

$(81):$ ————————

$$\vdash u \,\text{ə}\, (v \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow) \to (b \,\text{ə}\, (n \,\text{ə}\, q) \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to (m \,\text{ə}\, (c \,\text{ə}\, q) \to$$
$$(\neg\ c \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, v \to \varepsilon = c)) \to \varepsilon = n)) \to$$
$$\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = b)) \to \varepsilon = m)) \,\text{ə}$$
$$(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, v \to \varepsilon = c)) \to \varepsilon = n)] \,\text{ə}$$
$$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q))] :\twoheadrightarrow))))) \qquad (\varepsilon$$

$(\delta) ::$ ————————

$$\vdash u \,\text{ə}\, (v \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow) \to (b \,\text{ə}\, (n \,\text{ə}\, q) \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to (m \,\text{ə}\, (c \,\text{ə}\, q) \to$$
$$\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = b)) \to \varepsilon = m)) \,\text{ə}$$
$$(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, v \to \varepsilon = c)) \to \varepsilon = n)] \,\text{ə}$$
$$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q))] :\twoheadrightarrow)))) \qquad (83$$

$(23) ::$ — — — — — — — —

$$\vdash u \,\text{ə}\, (v \,\text{ə}\, q :\twoheadrightarrow) \to (b \,\text{ə}\, (n \,\text{ə}\, q) \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to (c \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, q^{-1}) \to$$
$$\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = b)) \to \varepsilon = m)) \,\text{ə}$$
$$(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, v \to \varepsilon = c)) \to \varepsilon = n)] \,\text{ə}$$
$$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q))] :\twoheadrightarrow)))) \qquad (84$$

S.116 |

b) Beweis des Satzes

$$,\vdash c \,\text{ə}\, v \to (b \,\text{ə}\, u \to$$
$$(\neg\ \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = b))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, v \to \varepsilon = c))) \to$$
$$\neg\ \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(v)))\text{‘}$$

und Schluss des Abschnittes Γ.

§ 92. *Zerlegung.*

Aus (83 können wir mit (53) und (22) den Satz

$$,\ \vdash v \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (c \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, q^{-1}) \to (\text{funk}\,((q^{-1})^{-1}) \to (b \,\text{ə}\, (n \,\text{ə}\, q) \to$$
$$\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, v \to \varepsilon = c)) \to \varepsilon = n)) \,\text{ə}$$
$$(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = b)) \to \varepsilon = m)] \,\text{ə}$$
$$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q))]^{-1} :\twoheadrightarrow)))) \quad \text{‘}\,\#116 \qquad (\alpha$$

ableiten. Von diesem Satze und (84) gelangen wir dann mit (66) zu einem Satze ■→mit dem Hintergliede←■[156] [#117]

$$,\ \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = b))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, v \to \varepsilon = c))) \quad \text{‘}$$

§ 93. *Aufbau.*

$$83 \quad \vdash v \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (c \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, q^{-1}) \to (\text{funk}\,((q^{-1})^{-1}) \to (n \,\text{ə}\, (b \,\text{ə}\, q^{-1}) \to$$
$$\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, v \to \varepsilon = c)) \to \varepsilon = n)) \,\text{ə}$$
$$(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = b)) \to \varepsilon = m)] \,\text{ə}$$
$$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = b \to \varepsilon = c) \to \neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q^{-1}))] :\twoheadrightarrow))))$$

$$(53) : \quad - - - - - - - -$$

$$\vdash v \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (c \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, q^{-1}) \to (\text{funk}\,((q^{-1})^{-1}) \to (n \,\text{ə}\, (b \,\text{ə}\, q^{-1}) \to$$
$$\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, v \to \varepsilon = c)) \to \varepsilon = n)) \,\text{ə}$$
$$(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = b)) \to \varepsilon = m)] \,\text{ə}$$
$$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \to \varepsilon = b) \to \neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, (\alpha \,\text{ə}\, q))]^{-1} :\twoheadrightarrow)))) \qquad (\alpha$$

$$(22) :: \quad - - - - - - - -$$

---

[156] mit dem Obergliede

[#116] im Original fehlt rechtes Zeichen [interp | bonn]
[#117] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

S.122

$$\vdash v \mathrel{\text{ə}} (u \mathrel{\text{ə}} q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (c \mathrel{\text{ə}} (m \mathrel{\text{ə}} q^{-1}) \rightarrow (\text{funk}\,((q^{-1})^{-1}) \rightarrow (b \mathrel{\text{ə}} (n \mathrel{\text{ə}} q) \rightarrow$$
$$\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} v \rightarrow \varepsilon = c)) \rightarrow \varepsilon = n)) \mathrel{\text{ə}}$$
$$(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow \varepsilon = b)) \rightarrow \varepsilon = m)] \mathrel{\text{ə}}$$
$$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \rightarrow \varepsilon = b) \rightarrow \neg\ \varepsilon \mathrel{\text{ə}} (\alpha \mathrel{\text{ə}} q))]^{-1} :\twoheadrightarrow\ )))) \qquad (\beta$$

$(32):$ — — — — — — — —

$$\vdash v \mathrel{\text{ə}} (u \mathrel{\text{ə}} q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (c \mathrel{\text{ə}} (m \mathrel{\text{ə}} q^{-1}) \rightarrow (\text{funk}\,((q^{-1})^{-1}) \rightarrow (b \mathrel{\text{ə}} (n \mathrel{\text{ə}} q) \rightarrow$$
$$(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow \varepsilon = b)) \rightarrow \varepsilon = m)) \mathrel{\text{ə}}$$
$$(\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} v \rightarrow \varepsilon = c)) \rightarrow \varepsilon = n)] \mathrel{\text{ə}}$$
$$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\neg\ (\neg\ \alpha = c \rightarrow \varepsilon = b) \rightarrow \neg\ \varepsilon \mathrel{\text{ə}} (\alpha \mathrel{\text{ə}} q))] :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow$$
$$\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow \varepsilon = b)) \rightarrow \varepsilon = m))) =$$
$$\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} v \rightarrow \varepsilon = c)) \rightarrow \varepsilon = n))))))) \qquad (\gamma$$

$(84)::$ — — — — — — — —

$$\vdash v \mathrel{\text{ə}} (u \mathrel{\text{ə}} q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (\text{funk}\,((q^{-1})^{-1}) \rightarrow (u \mathrel{\text{ə}} (v \mathrel{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow$$
$$(b \mathrel{\text{ə}} (n \mathrel{\text{ə}} q) \rightarrow (\text{funk}\,(q^{-1}) \rightarrow (c \mathrel{\text{ə}} (m \mathrel{\text{ə}} q^{-1}) \rightarrow$$
$$\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow \varepsilon = b)) \rightarrow \varepsilon = m))) =$$
$$\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} v \rightarrow \varepsilon = c)) \rightarrow \varepsilon = n)))))))) \qquad (\delta$$

$(66):$ — — — — — — — —

$$\vdash n \mathrel{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} v \rightarrow \varepsilon = c)) \rightarrow$$
$$(v \mathrel{\text{ə}} (u \mathrel{\text{ə}} q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (\text{funk}\,((q^{-1})^{-1}) \rightarrow (u \mathrel{\text{ə}} (v \mathrel{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow$$
$$(b \mathrel{\text{ə}} (n \mathrel{\text{ə}} q) \rightarrow (\text{funk}\,(q^{-1}) \rightarrow (c \mathrel{\text{ə}} (m \mathrel{\text{ə}} q^{-1}) \rightarrow$$
$$(m \mathrel{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow \varepsilon = b)) \rightarrow$$
$$\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow \varepsilon = b))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} v \rightarrow \varepsilon = c))))))))))$$

$\times$

S.123

$$\vdash \neg\ \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow \varepsilon = b))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} v \rightarrow \varepsilon = c))) \rightarrow$$
$$(v \mathrel{\text{ə}} (u \mathrel{\text{ə}} q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (\text{funk}\,((q^{-1})^{-1}) \rightarrow (u \mathrel{\text{ə}} (v \mathrel{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow$$
$$(\text{funk}\,(q^{-1}) \rightarrow (c \mathrel{\text{ə}} (m \mathrel{\text{ə}} q^{-1}) \rightarrow$$
$$(m \mathrel{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow \varepsilon = b)) \rightarrow (b \mathrel{\text{ə}} (n \mathrel{\text{ə}} q) \rightarrow$$
$$\neg\ n \mathrel{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} v \rightarrow \varepsilon = c))))))))) \qquad (\zeta$$

$\smile$

$$\vdash \neg\ \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow \varepsilon = b))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} v \rightarrow \varepsilon = c))) \rightarrow$$
$$(v \mathrel{\text{ə}} (u \mathrel{\text{ə}} q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (\text{funk}\,((q^{-1})^{-1}) \rightarrow (u \mathrel{\text{ə}} (v \mathrel{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (\text{funk}\,(q^{-1}) \rightarrow$$
$$(c \mathrel{\text{ə}} (m \mathrel{\text{ə}} q^{-1}) \rightarrow (m \mathrel{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow \varepsilon = b)) \rightarrow$$
$$\forall \mathfrak{a}\,[b \mathrel{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} q) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} v \rightarrow \varepsilon = c))]))))) \qquad (85$$

§ 94. *Zerlegung.*

Die letzten beiden Uebergänge deuten schon auf den Weg hin, der nun weiter zu verfolgen sein wird. In (ε) hatten wir n und m als Hilfsgegenstände ähnlich den Hilfslinien in der Geometrie. Sie sollen in unserm Satze nicht vorkommen, müssen also entfernt werden. Dies geschieht wie immer dadurch, dass man zeigt, es gebe etwas von der verlangten Beschaffenheit, oder, was begriffsschriftlich bequemer ist, wenn es etwas der Art nicht gebe, so gelte eine der Voraussetzungen nicht, die wir machen. Wir nehmen uns nun vor, den Satz

$$,\ \vdash u \mathbin{\text{ə}} (v \mathbin{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow) \to (\forall \mathfrak{a}\, [b \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} q) \to \neg\ \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \operatorname{ext} \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \to \varepsilon = c))] \to (\neg\ b \mathbin{\text{ə}} (c \mathbin{\text{ə}} q) \to \neg\ b \mathbin{\text{ə}} u))\ ` \qquad (\alpha$$

zu beweisen. Hierdurch bekommen wir zwar ■→das Vorderglied←■[157] [#118] ,$\neg\ b \mathbin{\text{ə}} (c \mathbin{\text{ə}} q)$‘ herein; aber wir können auch bei ■→dem entgegengesetzten Vordergliede←■[158] [#119] ,— $b \mathbin{\text{ə}} (c \mathbin{\text{ə}} q)$‘
S.120 den im Uebrigen unveränderten Satz beweisen. Um (α) | aus (8) abzuleiten, bedürfen wir des Satzes

$$,\ \vdash \forall \mathfrak{a}\, [b \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} q) \to \neg\ \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \operatorname{ext} \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \to \varepsilon = c))] \to (\neg\ b \mathbin{\text{ə}} (c \mathbin{\text{ə}} q) \to \forall \mathfrak{a}\, [b \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} q) \to \neg\ \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} v])\ `$$

der aus (77) folgt. Ebenso wie ,n‘ entfernen wir auch ,m‘ aus unserm Satze und beweisen dann, wie eben angedeutet worden ist, den Satz

$$,\ v \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} q^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\operatorname{funk}((q^{-1})^{-1}) \to (u \mathbin{\text{ə}} (v \mathbin{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow) \to (\operatorname{funk}(q^{-1}) \to (b \mathbin{\text{ə}} (c \mathbin{\text{ə}} q) \to \operatorname{anz}(\operatorname{ext} \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u \to \varepsilon = b))) = \operatorname{anz}(\operatorname{ext} \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \to \varepsilon = c)))))))\ `$$

mit (80) und (32) und schaffen nun nach Regel (8)■→die Vorderglieder←■[159] [#120] ,— $b \mathbin{\text{ə}} (c \mathbin{\text{ə}} q)$‘ und ,$\neg\ b \mathbin{\text{ə}} (c \mathbin{\text{ə}} q)$‘ weg. Nachdem dann ■→die Vorderglieder←■[160] [#121] ,funk (q^{-1})‘ und ,funk $((q^{-1})^{-1})$‘ mit (30) und (18) entfernt sind, gelangen wir mit (49) zum Ziele unseres Abschnittes (b) und darauf, wie im § 88 angedeutet worden ist, mit (68) zum Satze ,$\vdash \operatorname{funk}(\mathrm{nf}^{-1})$‘.

§ 95. *Aufbau.*

$$77 \quad \vdash \neg\ (a \mathbin{\text{ə}} v \to a = c) \to a \mathbin{\text{ə}} \operatorname{ext} \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \to \varepsilon = c))$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ a \mathbin{\text{ə}} \operatorname{ext} \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \to \varepsilon = c)) \to (a \mathbin{\text{ə}} v \to a = c) \qquad (\alpha$$

$(IIIa):$ — — — — — — — — —

$$\vdash \neg\ a \mathbin{\text{ə}} \operatorname{ext} \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} v \to \varepsilon = c)) \to (a \mathbin{\text{ə}} v \to (\neg\ b \mathbin{\text{ə}} (c \mathbin{\text{ə}} q) \to \neg\ b \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} q))) \qquad (\beta$$

$$\times$$

[157] das Unterglied
[158] dem entgegengesetzten Untergliede
[159] die Unterglieder
[160] die Unterglieder

[#118] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#119] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#120] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#121] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

$$\vdash \neg\ a \ni \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c)) \to$$
$$(\neg\ b \ni (c \ni q) \to (b \ni (a \ni q) \to \neg\ a \ni v)) \qquad (\gamma$$

$(IIa) ::$ — — — — — — — —

$$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[b \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c))] \to$$
$$(\neg\ b \ni (c \ni q) \to (b \ni (a \ni q) \to \neg\ a \ni v)) \qquad (\delta$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[b \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c))] \to$$
$$(\neg\ b \ni (c \ni q) \to \forall\mathfrak{a}\,[b \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni v]) \qquad (\varepsilon$$

$(8) :$ — — — — — — — —

$$\vdash u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \to$$
$$(\forall\mathfrak{a}\,[b \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c))] \to$$
$$(\neg\ b \ni (c \ni q) \to \neg\ b \ni u)) \qquad (\zeta$$

$(85) ::$ — — — — — — — —

$$\vdash \neg\ \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b))) = \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c))) \to$$
$$(v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to (\mathrm{funk}\,((q^{-1})^{-1}) \to (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \to (\mathrm{funk}\,(q^{-1}) \to$$
$$(c \ni (m \ni q^{-1}) \to (m \ni \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b)) \to$$
$$(\neg\ b \ni (c \ni q) \to \neg\ b \ni u))))))) \qquad (\eta$$

$$\times$$

S.125

$$\vdash \neg\ \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b))) = \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c))) \to$$
$$(v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to (\mathrm{funk}\,((q^{-1})^{-1}) \to (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \to (\mathrm{funk}\,(q^{-1}) \to$$
$$(b \ni u \to (\neg\ b \ni (c \ni q) \to$$
$$(c \ni (m \ni q^{-1}) \to \neg\ m \ni \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b))))))))) \qquad (\vartheta$$

$$\smile$$

$$\vdash \neg\ \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b))) = \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c))) \to$$
$$(v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to (\mathrm{funk}\,((q^{-1})^{-1}) \to (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \to (\mathrm{funk}\,(q^{-1}) \to$$
$$(b \ni u \to (\neg\ b \ni (c \ni q) \to$$
$$\forall\mathfrak{a}\,[c \ni (\mathfrak{a} \ni q^{-1}) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b))])))))) \qquad (\iota$$

$(\zeta) :$ — — — — — — — —

$$\vdash \neg\ \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b))) = \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c))) \to$$
$$(v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to (\mathrm{funk}\,((q^{-1})^{-1}) \to (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \to (\mathrm{funk}\,(q^{-1}) \to$$
$$(b \ni u \to (\neg\ b \ni (c \ni q) \to (\neg\ c \ni (b \ni q^{-1}) \to \neg\ c \ni v))))))) \qquad (\kappa$$

$(22) ::$ — — — — — — — —

$\vdash \neg\ \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c))) \to$
$(v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to (\text{funk}\,((q^{-1})^{-1}) \to (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to$
$(b \ni u \to (\neg\ b \ni (c \ni q) \to \neg\ c \ni v))))))$ $\quad(\lambda$

$\times$

S.126

$\vdash c \ni v \to (v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to (\text{funk}\,((q^{-1})^{-1}) \to$

$(u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to (b \ni u \to (\neg\ b \ni (c \ni q) \to$

$\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c)))))))))$ $\quad(86$

———— • ————

32 $\vdash \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c)) \ni [\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b)) \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ] \to$
$(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b)) \ni [\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c)) \ni q :\twoheadrightarrow\ ] \to$
$\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c))))$

$(80) ::$ — — — — — — — —
$\vdash v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to (\text{funk}\,((q^{-1})^{-1}) \to (c \ni (b \ni q^{-1}) \to$
$(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b)) \ni [\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c)) \ni q :\twoheadrightarrow\ ] \to$
$\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c))))))$ $\quad(\alpha$

$(22) ::$ — — — — — — — —
$\vdash v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to (\text{funk}\,((q^{-1})^{-1}) \to (b \ni (c \ni q) \to$
$(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b)) \ni [\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c)) \ni q :\twoheadrightarrow\ ] \to$
$\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c))))))$ $\quad(\beta$

$(80) ::$ — — — — — — — —
$\vdash v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to (\text{funk}\,((q^{-1})^{-1}) \to (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to$
$(b \ni (c \ni q) \to$
$\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c)))))))$ $\quad(\gamma$

$(86) :$ ·—·—·—·—·—·—·
$\vdash c \ni v \to (b \ni u \to$
$(v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to (\text{funk}\,((q^{-1})^{-1}) \to (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \to (\text{funk}\,(q^{-1}) \to$
$\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c))))))))$ $\quad(\delta$

$(30, 18) ::$ = = = = = = = =
$\vdash c \ni v \to (b \ni u \to (v \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to (u \ni (v \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \to$
$\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = b))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c))))))$ $\quad(\varepsilon$

$\times$

$$\vdash c \mathrel{\text{ə}} v \to (b \mathrel{\text{ə}} u \to$$
$$(\neg\ \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \to \varepsilon = b))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} v \to \varepsilon = c))) \to$$
$$(v \mathrel{\text{ə}} (u \mathrel{\text{ə}} q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to \neg\ u \mathrel{\text{ə}} (v \mathrel{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow\ )))) \qquad (\zeta$$

$\smile$

$$\vdash c \mathrel{\text{ə}} v \to (b \mathrel{\text{ə}} u \to$$
$$(\neg\ \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \to \varepsilon = b))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} v \to \varepsilon = c))) \to$$
$$\forall \mathfrak{q}\,[v \mathrel{\text{ə}} (u \mathrel{\text{ə}} \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to \neg\ u \mathrel{\text{ə}} (v \mathrel{\text{ə}} \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow\ )])) \qquad (\eta$$

$(49):$ — — — — — — — —

$$\vdash c \mathrel{\text{ə}} v \to (b \mathrel{\text{ə}} u \to$$
$$(\neg\ \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \to \varepsilon = b))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} v \to \varepsilon = c))) \to$$
$$\neg\ \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(v))) \qquad (\vartheta$$

$(IIIc) ::$ ———————

$$\vdash \neg\ d = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} v \to \varepsilon = c))) \to (c \mathrel{\text{ə}} v \to$$
$$(\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \to \varepsilon = b))) = d \to (b \mathrel{\text{ə}} u \to \neg\ \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(v)))) \qquad (\iota$$

$\smile$

S.127

$$\vdash \neg\ d = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} v \to \varepsilon = c))) \to (c \mathrel{\text{ə}} v \to$$
$$\forall \mathfrak{u}\,\forall \mathfrak{a}\,[\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} \mathfrak{u} \to \varepsilon = \mathfrak{a}))) = d \to (\mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} \mathfrak{u} \to \neg\ \text{anz}\,(\mathfrak{u}) = \text{anz}\,(v))]) \qquad (\kappa$$

$(68):$ — — — — — — — —

$$\vdash \neg\ d = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} v \to \varepsilon = c))) \to$$
$$(c \mathrel{\text{ə}} v \to \neg\ d \mathrel{\text{ə}} (\text{anz}\,(v) \mathrel{\text{ə}} \text{nf}\,)) \qquad (87$$

$(IIIc):$ ———————

$$\vdash \text{anz}\,(v) = e \to (\neg\ d = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} v \to \varepsilon = c))) \to$$
$$(c \mathrel{\text{ə}} v \to \neg\ d \mathrel{\text{ə}} (e \mathrel{\text{ə}} \text{nf}\,))) \qquad (\alpha$$

$\times$

$$\vdash d \mathrel{\text{ə}} (e \mathrel{\text{ə}} \text{nf}\,) \to (\neg\ d = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} v \to \varepsilon = c))) \to$$
$$(c \mathrel{\text{ə}} v \to \neg\ \text{anz}\,(v) = e)) \qquad (\beta$$

$(IIIc):$ ———————

$$\vdash d \mathrel{\text{ə}} (e \mathrel{\text{ə}} \text{nf}\,) \to (\neg\ d = a \to (\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathrel{\text{ə}} v \to \varepsilon = c))) = a \to$$
$$(c \mathrel{\text{ə}} v \to \neg\ \text{anz}\,(v) = e))) \qquad (\gamma$$

$\smile$

$\vdash d \ni (e \ni \text{nf}) \to (\neg\ d = a \to$

$\forall \mathfrak{u}\, \forall \mathfrak{a}\, [\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni \mathfrak{u} \to \varepsilon = \mathfrak{a}))) = a \to (\mathfrak{a} \ni \mathfrak{u} \to \neg\ \text{anz}\,(\mathfrak{u}) = e)])$ (δ

$(68):$ – – – – – – – – –

$\vdash d \ni (e \ni \text{nf}) \to (\neg\ d = a \to \neg\ a \ni (e \ni \text{nf}))$ (ε

$\times$

$\vdash d \ni (e \ni \text{nf}) \to (a \ni (e \ni \text{nf}) \to d = a)$ (88

$(23, 23)::$ = = = = = = = =

$\vdash e \ni (d \ni \text{nf}^{-1}) \to (e \ni (a \ni \text{nf}^{-1}) \to d = a)$ (α

$\smile$

$\vdash \forall \mathfrak{e}\, \forall \mathfrak{d}\, [\mathfrak{e} \ni (\mathfrak{d} \ni \text{nf}^{-1}) \to \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{e} \ni (\mathfrak{a} \ni \text{nf}^{-1}) \to \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]]$ (β

$(16):$ ————————————

$\vdash \text{funk}\,(\text{nf}^{-1})$ (89

$(Ie):$ ————————————

$\vdash \text{funk}\,(\text{nf}) \to \neg\ (\text{funk}\,(\text{nf}^{-1}) \to \neg\ \text{funk}\,(\text{nf}))$ (α

$(71)::$ ————————————

$\vdash \neg\ (\text{funk}\,(\text{nf}^{-1}) \to \neg\ \text{funk}\,(\text{nf}))$ (90

$\triangle$. Beweise einiger Sätze von der Anzahl Null.

a) Beweis des Satzes

,$\vdash \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon))) = \text{anz}\,(0) \to \neg\ f(a)$‘

§ 96. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun den Satz, dass kein Gegenstand unter einen Begriff fällt, dessen zugehörige Anzahl anz (0) ist. Der in der Ueberschrift genannte Satz ist eigentlich etwas allgemei-
S.121 ner, weil der Functionsbuchstabe ,f‘ nicht nur Begriffe an- | deutet. Unser Satz folgt leicht aus dem Satze

$$,\ \vdash a \ni u \to \neg\ \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(0)\ ‘$$

Nach der Definition (Θ) haben wir

$$,\ \vdash a \ni u \to \neg\ \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon))\ ‘$$

zu beweisen, was mit (49) geschehen kann, indem wir ,$\vdash\ u \ni (\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon) \ni q\ :\twoheadrightarrow) \to \neg\ a \ni u$‘ ableiten. Hierzu benutzen wir (8) und bedürfen des Satzes ,$\vdash a \ni (b \ni q) \to \neg\ b \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon)$‘, der sich leicht aus (58) ergiebt.

§ 97. *Aufbau.*

$$\begin{array}{rl} & \Theta \quad \vdash \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon)) = \text{anz}\,(0) \\ (IIIc): & \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ & \vdash F(\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon))) \to F(\text{anz}\,(0)) \end{array} \tag{91}$$

———— • ————

$$\begin{array}{rl} \text{IIIe} & \vdash b = b \\ (58): & \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ & \vdash \neg\ b \mathbin{\text{ә}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon) \end{array} \tag{92}$$

$$\begin{array}{rl} (I): & \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ & \vdash a \mathbin{\text{ә}} (b \mathbin{\text{ә}} q) \to \neg\ b \mathbin{\text{ә}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon) \end{array} \tag{α}$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [a \mathbin{\text{ә}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ә}} q) \to \neg\ \mathfrak{a} \mathbin{\text{ә}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon)] \tag{β}$$

$$\begin{array}{rl} (8): & \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ & \vdash u \mathbin{\text{ә}} (\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon) \mathbin{\text{ә}} q :\twoheadrightarrow\ ) \to \neg\ a \mathbin{\text{ә}} u \end{array} \tag{γ}$$

$$\times$$

$$\vdash a \mathbin{\text{ә}} u \to \neg\ u \mathbin{\text{ә}} (\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon) \mathbin{\text{ә}} q :\twoheadrightarrow\ ) \tag{δ}$$

$$\begin{array}{rl} (I): & \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ & \vdash a \mathbin{\text{ә}} u \to \\ & (\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon) \mathbin{\text{ә}} (u \mathbin{\text{ә}} q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to \neg\ u \mathbin{\text{ә}} (\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon) \mathbin{\text{ә}} q :\twoheadrightarrow\ )) \end{array} \tag{ε}$$

$$\smile$$

$$\begin{array}{l} \vdash a \mathbin{\text{ә}} u \to \\ \forall \mathfrak{q}\, [\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon) \mathbin{\text{ә}} (u \mathbin{\text{ә}} \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to \neg\ u \mathbin{\text{ә}} (\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon) \mathbin{\text{ә}} \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow\ )] \end{array} \tag{ζ}$$

$$\begin{array}{rl} (49): & - - - - - - - - \\ & \vdash a \mathbin{\text{ә}} u \to \neg\ \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon)) \end{array} \tag{η}$$

$$\begin{array}{rl} (91): & \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ & \vdash a \mathbin{\text{ә}} u \to \neg\ \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(0) \end{array} \tag{93}$$

$$\times$$

$$\vdash \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(0) \to \neg\ a \mathbin{\text{ә}} u \tag{94}$$

———— • ————

$$\begin{array}{rl} 94 & \vdash \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon))) = \text{anz}\,(0) \to \neg\ a \mathbin{\text{ә}} \text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) \\ (82): & - - - - - - - - \\ & \vdash \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon))) = \text{anz}\,(0) \to \neg\ f(a) \end{array} \tag{95}$$

b) Beweis des Satzes

$,\vdash \forall\mathfrak{a}\,[\neg\;\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} u] \rightarrow \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(0)$‘

und einiger Folgesätze.

§ 98. *Zerlegung.*

Der in der Ueberschrift genannte Satz ist etwas allgemeiner als der, den wir in Worten so aussprechen: „Wenn unter einen Begriff kein Gegenstand fällt, so ist Null die Anzahl, die diesem Begriffe zukommt.“ Wir beweisen zunächst mit (32) und (38) den Satz

$$,\;\vdash \forall\mathfrak{a}\,[(\text{—}\,\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} u) = (\text{—}\,\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} v)] \rightarrow \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(v)\;‘$$

und dann

$$,\;\vdash \forall\mathfrak{a}\,[\neg\;\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} u] \rightarrow (\text{—}\,a \mathbin{\text{ə}} u) = (\text{—}\,a \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;\varepsilon = \varepsilon))\;‘$$

S.124 |

§ 99. *Aufbau.*

IIIf $\vdash (\text{—}\,a \mathbin{\text{ə}} u) = (\text{—}\,a \mathbin{\text{ə}} v) \rightarrow (\text{—}\,a \mathbin{\text{ə}} v) = (\text{—}\,a \mathbin{\text{ə}} u)$

(IIa) :: $-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-$

$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[(\text{—}\,\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} u) = (\text{—}\,\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} v)] \rightarrow (\text{—}\,a \mathbin{\text{ə}} v) = (\text{—}\,a \mathbin{\text{ə}} u)$ $(\alpha$

$\smile$

$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[(\text{—}\,\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} u) = (\text{—}\,\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} v)] \rightarrow \forall\mathfrak{a}\,[(\text{—}\,\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} v) = (\text{—}\,\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} u)]$ $(\beta$

(38) : $-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-$

$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[(\text{—}\,\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} u) = (\text{—}\,\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} v)] \rightarrow v \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha) :\twoheadrightarrow)$ $(\gamma$

$(IIIc)$: ————————

$\vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha) = \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha)^{-1} \rightarrow$
$(\forall\mathfrak{a}\,[(\text{—}\,\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} u) = (\text{—}\,\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} v)] \rightarrow v \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha)^{-1} :\twoheadrightarrow))$ $(\delta$

(41) :: ————————

$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[(\text{—}\,\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} u) = (\text{—}\,\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} v)] \rightarrow v \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha)^{-1} :\twoheadrightarrow)$ $(\varepsilon$

(32) : $-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-$

$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[(\text{—}\,\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} u) = (\text{—}\,\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} v)] \rightarrow$
$(u \mathbin{\text{ə}} (v \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha) :\twoheadrightarrow) \rightarrow \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(v))$ $(\zeta$

(38) :: $-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-$

$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[(\text{—}\,\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} u) = (\text{—}\,\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} v)] \rightarrow \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(v)$ (96

———— • ————

92 $\vdash \neg\;a \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;\varepsilon = \varepsilon)$

(Ia) : ————————

$\vdash a \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;\varepsilon = \varepsilon) \rightarrow a \mathbin{\text{ə}} u$ $(\alpha$

(IVa) : ————————

$$\vdash (a \ni u \to a \ni \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon)) \to$$
$$(\text{—}\,a \ni u) = (\text{—}\,a \ni \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon)) \qquad (\beta$$

———————— ● ————————

IIa $\vdash \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \ni u] \to \neg\ a \ni u$

(Ia) : — — — — — — — — —

$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \ni u] \to (a \ni u \to a \ni \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon))$ (γ

(β) : — — — — — — — — —

$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \ni u] \to (\text{—}\,a \ni u) = (\text{—}\,a \ni \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon))$ (δ

$\smile$

$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \ni u] \to \forall\mathfrak{a}\,[(\text{—}\,\mathfrak{a} \ni u) = (\text{—}\,\mathfrak{a} \ni (\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon)))]$ (ε

(96) : — — — — — — — — —

$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \ni u] \to \mathrm{anz}\,(u) = \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon))$ (ζ

(91) : ————————————

$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \ni u] \to \mathrm{anz}\,(u) = \mathrm{anz}\,(0)$ (97

§ 100. *Zerlegung.*

Wir ziehen aus (97) zunächst einige einfache Folgerungen und wenden uns dann dem Satze zu: „Wenn eine Anzahl nicht die Null ist, so giebt es eine ihr in der Anzahlenreihe unmittelbar vorhergehende“, in Zeichen:

‚ $\vdash \neg\ \forall\mathfrak{u}\,[\neg\ \mathrm{anz}\,(\mathfrak{u}) = a] \to (\neg\ a = \mathrm{anz}\,(0) \to \neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \ni (a \ni \mathrm{nf}\,)])$ ‘

Wir leiten zuerst den einfachern Satz

‚ $\vdash \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \ni (\mathrm{anz}\,(u) \ni \mathrm{nf}\,)] \to \neg\ c \ni u$ ‘

ab. Hierzu bedürfen wir des Satzes

‚ $\vdash c \ni u \to \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = c))) \ni (\mathrm{anz}\,(u) \ni \mathrm{nf}\,)$ ‘

der aus der Definition (H) folgt.

§ 101. *Aufbau.*

94 $\vdash \mathrm{anz}\,(u) = \mathrm{anz}\,(0) \to \neg\ a \ni u$

(I) : ————————————

$\vdash \mathrm{anz}\,(u) = \mathrm{anz}\,(0) \to (a \ni v \to \neg\ a \ni u)$ (α

(58) : — — — — — — — — —

S.130

$\vdash \mathrm{anz}\,(u) = \mathrm{anz}\,(0) \to \neg\ a \ni \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \neg\ \varepsilon \ni u))$ (β

$\smile$

$\vdash \mathrm{anz}\,(u) = \mathrm{anz}\,(0) \to \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \ni \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \neg\ \varepsilon \ni u))]$ (γ

(97) : — — — — — — — — —

$\vdash \mathrm{anz}\,(u) = \mathrm{anz}\,(0) \to \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni v \to \neg\ \varepsilon \ni u))) = \mathrm{anz}\,(0)$ (98

$$\text{———————— ● ————————}$$

93 $\vdash a \ni u \to \neg\ \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(0)$

$(IIa) ::$ — — — — — — — —

$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{a} \ni v \to \mathfrak{a} \ni u] \to (a \ni v \to \neg\ \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(0))$ $(\alpha$

$\times$

$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{a} \ni v \to \mathfrak{a} \ni u] \to (\text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(0) \to \neg\ a \ni v)$ $(\beta$

$\smile$

$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{a} \ni v \to \mathfrak{a} \ni u] \to (\text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(0) \to \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \ni v])$ $(\gamma$

$(97) :$ — — — — — — — —

$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{a} \ni v \to \mathfrak{a} \ni u] \to (\text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(0) \to \text{anz}\,(v) = \text{anz}\,(0))$ (99

$$\text{———————— ● ————————}$$

10 $\vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ f(\varepsilon,\alpha)) = q \to (\neg\ f(a,b) \to a \ni (b \ni q))$

$\times$

$\vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ f(\varepsilon,\alpha)) = q \to (\neg\ a \ni (b \ni q) \to f(a,b))$ (100

$$\text{———————— ● ————————}$$

H $\vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ \forall \mathfrak{u}\,\forall \mathfrak{a}\,[\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni \mathfrak{u} \to \varepsilon = \mathfrak{a}))) = \varepsilon \to$
$(\mathfrak{a} \ni \mathfrak{u} \to \neg\ \text{anz}\,(\mathfrak{u}) = \alpha)]] = \text{nf}$

$(100) :$ ————————————————

$\vdash \neg\ m \ni (n \ni \text{nf}\,) \to$
$\forall \mathfrak{u}\,\forall \mathfrak{a}\,[\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni \mathfrak{u} \to \varepsilon = \mathfrak{a}))) = m \to (\mathfrak{a} \ni \mathfrak{u} \to \neg\ \text{anz}\,(\mathfrak{u}) = n)]$ $(\alpha$

$(IIa) :$ — — — — — — — —

$\vdash \neg\ m \ni (n \ni \text{nf}\,) \to$
$\forall \mathfrak{a}\,[\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = \mathfrak{a}))) = m \to (\mathfrak{a} \ni u \to \neg\ \text{anz}\,(u) = n)]$ $(\beta$

$(IIa) :$ — — — — — — — —

$\vdash \neg\ m \ni (n \ni \text{nf}\,) \to$
$(\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = c))) = m \to (c \ni u \to \neg\ \text{anz}\,(u) = n))$ $(\gamma$

$\times$

$\vdash \text{anz}\,(u) = n \to (\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = c))) = m \to (c \ni u \to$
$m \ni (n \ni \text{nf}\,)))$ (101

$$\text{———————— ● ————————}$$

IIIe $\vdash \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(u)$

$(101) :$ ————————————————

$\vdash \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \to \varepsilon = c))) = m \to (c \ni u \to m \ni (\text{anz}\,(u) \ni \text{nf}\,))$ (102

IIIe $\vdash \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = c))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = c)))$

$(102):$ ―――――――――

$$\vdash c \,\text{ə}\, u \to \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = c)))\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(u)\,\text{ə}\,\text{nf}\,) \qquad (103$$

$\times$

S.131

$$\vdash \neg\;\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\;(\varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon = c)))\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(u)\,\text{ə}\,\text{nf}\,) \to \neg\; c \,\text{ə}\, u \qquad (\alpha$$

$(IIa) ::$ – – – – – – – – –

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[\neg\;\mathfrak{a}\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(u)\,\text{ə}\,\text{nf}\,)] \to \neg\; c \,\text{ə}\, u \qquad (104$$

$\smile$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[\neg\;\mathfrak{a}\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(u)\,\text{ə}\,\text{nf}\,)] \to \forall \mathfrak{a}\,[\neg\;\mathfrak{a}\,\text{ə}\,u] \qquad (\alpha$$

$(97):$ – – – – – – – – –

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[\neg\;\mathfrak{a}\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(u)\,\text{ə}\,\text{nf}\,)] \to \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(0) \qquad (105$$

$\times$

$$\vdash \neg\;\text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(0) \to \neg\;\forall \mathfrak{a}\,[\neg\;\mathfrak{a}\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(u)\,\text{ə}\,\text{nf}\,)] \qquad (106$$

$(IIId):$ ―――――――――

$$\vdash \neg\;(\neg\; a = \text{anz}\,(0) \to \neg\;\forall \mathfrak{a}\,[\neg\;\mathfrak{a}\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,\text{nf}\,)]) \to \neg\;\text{anz}\,(u) = a \qquad (\alpha$$

$\smile$

$$\vdash \neg\;(\neg\; a = \text{anz}\,(0) \to \neg\;\forall \mathfrak{a}\,[\neg\;\mathfrak{a}\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,\text{nf}\,)]) \to \forall \mathfrak{u}\,[\neg\;\text{anz}\,(\mathfrak{u}) = a] \qquad (\beta$$

$\times$

$$\vdash \neg\;\forall \mathfrak{u}\,[\neg\;\text{anz}\,(\mathfrak{u}) = a] \to (\neg\; a = \text{anz}\,(0) \to \neg\;\forall \mathfrak{a}\,[\neg\;\mathfrak{a}\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,\text{nf}\,)]) \qquad (107$$

E. Beweise einiger Sätze von der Anzahl Eins.

§ 102. *Zerlegung.*

Wir beweisen den Satz

$$,\ \vdash \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(1) \to \neg\;\forall \mathfrak{a}\,[\neg\;\mathfrak{a}\,\text{ə}\,u]\,\text{‘} \qquad (\alpha$$

den wir in Worten so aussprechen:

„Es giebt einen Gegenstand, der unter einen Begriff fällt, wenn Eins die Anzahl dieses Begriffes ist.“

Wäre dies nicht richtig, so würde zufolge des Satzes (97) die Anzahl Eins mit der Anzahl Null zusammenfallen. Es ist zu zeigen, dass dies nicht sein kann. Wir beweisen zu diesem

Zwecke die Sätze

$$, \vdash \text{anz}\,(0) \ni (\text{anz}\,(1) \ni \text{nf}\,)\ ‘, \qquad (\beta$$

$$, \vdash \neg\ \text{anz}\,(0) \ni (\text{anz}\,(0) \ni \text{nf}\,)\ ‘ \qquad (\gamma$$

Von diesen folgt (β) aus (101) mit der Definition (I), (γ) aus (68) mit dem Satze (93).

§ 103. *Aufbau.*

93 $\vdash a \ni u \rightarrow \neg\ \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(0)$

(I) : ———

$\vdash \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni u \rightarrow \varepsilon = a))) = c \rightarrow (a \ni u \rightarrow \neg\ \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(0))$ (α

$\smile$

$\vdash \forall\mathfrak{u}\,\forall\mathfrak{a}\,[\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni \mathfrak{u} \rightarrow \varepsilon = \mathfrak{a}))) = c \rightarrow (\mathfrak{a} \ni \mathfrak{u} \rightarrow \neg\ \text{anz}\,(\mathfrak{u}) = \text{anz}\,(0))]$ (β

(68) : ———

$\vdash \neg\ c \ni (\text{anz}\,(0) \ni \text{nf}\,)$ (108

———— • ————

IIIe $\vdash c = c$

(77) : ———

$\vdash c \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = c)$ (109

———— • ————

82 $\vdash a \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \text{anz}\,(0)) \rightarrow a = \text{anz}\,(0)$

(58) : ———

$\vdash \neg\ a \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \text{anz}\,(0)) \rightarrow \varepsilon = \text{anz}\,(0)))$ (α

$\smile$

S.132

$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \text{anz}\,(0)) \rightarrow \varepsilon = \text{anz}\,(0)))]$ (β

(97) : ———

$\vdash \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \text{anz}\,(0)) \rightarrow \varepsilon = \text{anz}\,(0)))) = \text{anz}\,(0)$ (γ

(101) : ———

$\vdash \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \text{anz}\,(0))) = \text{anz}\,(1) \rightarrow (\text{anz}\,(0) \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \text{anz}\,(0)) \rightarrow$
$\text{anz}\,(0) \ni (\text{anz}\,(1) \ni \text{nf}\,))$ (δ

$(109, \text{I})$ :: ═══

$\vdash \text{anz}\,(0) \ni (\text{anz}\,(1) \ni \text{nf}\,)$ (110

$(IIIb)$: ———

$\vdash \neg\ \text{anz}\,(0) \ni (\text{anz}\,(0) \ni \text{nf}\,) \rightarrow \neg\ \text{anz}\,(0) = \text{anz}\,(1)$ (α

(108) :: ———

$\vdash \neg\ \text{anz}\,(0) = \text{anz}\,(1)$ (111

$$97 \quad \vdash \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \ni u] \to \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(0)$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(0) \to \neg\ \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \ni u] \qquad (112$$

$$(IIId) :: \ - - - - - - - -$$

$$\vdash \neg\ \text{anz}\,(0) = \text{anz}\,(1) \to (\text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(1) \to \neg\ \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \ni u])$$

$$(111) :: \ \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(1) \to \neg\ \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \ni u] \qquad (113$$

§ 104. *Zerlegung.*

Mit (110) und (71) können wir leicht den Satz beweisen, dass eine Anzahl die Eins ist, wenn sie in der Anzahlenreihe unmittelbar auf die Null folgt.

Um den Satz

$$,\ \vdash d \ni u \to (\text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(1) \to (a \ni u \to d = a))\ ` \qquad (\alpha$$

zu beweisen, wenden wir (49) an in der Form

$$,\ \vdash \forall \mathfrak{q}\,[\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \text{anz}\,(0)) \ni (u \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to \neg\ u \ni (\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \text{anz}\,(0)) \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow\ )] \to$$
$$\neg\ \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \text{anz}\,(0)))\ `$$

und bedürfen nun des Satzes

$$,\ \vdash d \ni u \to (a \ni u \to (u \ni (\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \text{anz}\,(0)) \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \to$$
$$(\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \text{anz}\,(0)) \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to d = a)))\ ` \qquad (\beta$$

Nach (79) und (18) haben wir den Satz

$$,\ \vdash \text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \text{anz}\,(0)) \ni (u \ni q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to (d \ni (\text{anz}\,(0) \ni q) \to (a \ni (\text{anz}\,(0) \ni q) \to d = a))\ ` \qquad (\gamma$$

und wenden nun den Satz

$$,\ \vdash u \ni (\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = c) \ni q :\twoheadrightarrow\ ) \to (a \ni u \to a \ni (c \ni q))\ `$$

an, der sich mit (77) und (8) leicht ableiten lässt.

§ 105. *Aufbau.*

$$13 \quad \vdash \text{funk}\,(\text{nf}\,) \to (\text{anz}\,(0) \ni (a \ni \text{nf}\,) \to$$
$$(\text{anz}\,(0) \ni (\text{anz}\,(1) \ni \text{nf}\,) \to a = \text{anz}\,(1)))$$

$$(110, 71) :: \ \overline{\overline{\qquad\qquad\qquad}}$$

$$\vdash \text{anz}\,(0) \ni (a \ni \text{nf}\,) \to a = \text{anz}\,(1) \qquad (114$$

$$\text{IIId} \quad \vdash \neg\ a \ni (c \ni q) \to (a \ni (e \ni q) \to \neg\ e = c)$$

$$(77) : \ \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash \neg\; a \text{ ə } (c \text{ ə } q) \to (a \text{ ə } (e \text{ ə } q) \to \neg\; e \text{ ə } \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = c)) \qquad (\alpha$$

$$\smile$$

S.133

$$\vdash \neg\; a \text{ ə } (c \text{ ə } q) \to \forall \mathfrak{a}\,[a \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q) \to \neg\; \mathfrak{a} \text{ ə } \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = c)] \qquad (\beta$$

$(8):$ — — — — — — — —

$$\vdash u \text{ ə } (\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = c) \text{ ə } q :\twoheadrightarrow\ ) \to (\neg\; a \text{ ə } (c \text{ ə } q) \to \neg\; a \text{ ə } u) \qquad (\gamma$$

$$\times$$

$$\vdash u \text{ ə } (\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = c) \text{ ə } q :\twoheadrightarrow\ ) \to (a \text{ ə } u \to a \text{ ə } (c \text{ ə } q)) \qquad (115$$

————————— • —————————

I $\vdash \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \mathrm{anz}\,(0))) = \mathrm{anz}\,(1)$

$(IIIc):$ ————————————————

$$\vdash F(\mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \mathrm{anz}\,(0)))) \to F(\mathrm{anz}\,(1)) \qquad (116$$

————————— • —————————

18 $\vdash \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \mathrm{anz}\,(0)) \text{ ə } (u \text{ ə } q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to \mathrm{funk}\,(q^{-1})$

$(79):$ — — — — — — — —

$$\vdash \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \mathrm{anz}\,(0)) \text{ ə } (u \text{ ə } q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to$$
$$(d \text{ ə } (\mathrm{anz}\,(0) \text{ ə } q) \to (a \text{ ə } (\mathrm{anz}\,(0) \text{ ə } q) \to d = a)) \qquad (\alpha$$

$(115, 115) ::$ = = = = = = = =

$$\vdash \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \mathrm{anz}\,(0)) \text{ ə } (u \text{ ə } q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to$$
$$(d \text{ ə } u \to (u \text{ ə } (\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \mathrm{anz}\,(0)) \text{ ə } q :\twoheadrightarrow\ ) \to (a \text{ ə } u \to d = a))) \qquad (\beta$$

$$\times$$

$$\vdash d \text{ ə } u \to (\neg\; d = a \to (a \text{ ə } u \to$$
$$(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \mathrm{anz}\,(0)) \text{ ə } (u \text{ ə } q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to$$
$$\neg\; u \text{ ə } (\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \mathrm{anz}\,(0)) \text{ ə } q :\twoheadrightarrow\ )))) \qquad (\gamma$$

$$\smile$$

$$\vdash d \text{ ə } u \to (\neg\; d = a \to (a \text{ ə } u \to$$
$$\forall \mathfrak{q}\,[\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \mathrm{anz}\,(0)) \text{ ə } (u \text{ ə } \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to$$
$$\neg\; u \text{ ə } (\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \mathrm{anz}\,(0)) \text{ ə } \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow\ )])) \qquad (\delta$$

$(49):$ — — — — — — — —

$$\vdash d \text{ ə } u \to (\neg\; d = a \to (a \text{ ə } u \to \neg\; \mathrm{anz}\,(u) = \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \mathrm{anz}\,(0))))) \qquad (\varepsilon$$

$(116):$ ————————————————

$$\vdash d \text{ ə } u \to (\neg\; d = a \to (a \text{ ə } u \to \neg\; \mathrm{anz}\,(u) = \mathrm{anz}\,(1))) \qquad (\zeta$$

$$\times$$

$$\vdash d \mathrel{\text{ə}} u \to (\text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(1) \to (a \mathrel{\text{ə}} u \to d = a)) \qquad (117$$

———— ● ————

§ 106. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun den Satz

$$,\ \vdash \forall \mathfrak{d}\,[\mathfrak{d} \mathrel{\text{ə}} u \to \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} u \to \mathfrak{a} = \mathfrak{d}]] \to (\neg\ \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{e} \mathrel{\text{ə}} u] \to \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(1))\text{ ‘} \qquad (\alpha$$

d. h. „Eins ist die Anzahl eines Begriffes, unter welchen ein Gegenstand fällt, wenn allgemein daraus, dass ein Gegenstand a und dass ein Gegenstand d unter den Begriff falle, folgt, dass a dasselbe sei wie d“.

Dieser Satz ist eine Folge des Satzes

$$,\ \vdash c \mathrel{\text{ə}} u \to (\forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} u \to \mathfrak{a} = c] \to \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(1))\text{ ‘} \qquad (\beta$$

den wir auf den folgenden

$$,\ \vdash \text{anz}\,(1) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = c))\text{ ‘}$$

oder

$$,\ \vdash \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = n)) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = c))\text{ ‘} \qquad (\gamma$$

zurückführen. Als abbildende Beziehung bietet sich die $\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c))$-
| Beziehung dar. Dieser und ihrer Umkehrung Eindeutigkeit muss bewiesen werden. S.128

§ 107. *Aufbau.*

$$\text{IIIa} \quad \vdash d = c \to (a = c \to d = a)$$

$$(Ib, Ib) :: \quad = = = = = = = = =$$

$$\vdash \neg\ (e = n \to \neg\ d = c) \to (\neg\ (e = n \to \neg\ a = c) \to d = a) \qquad (\alpha$$

$$(33, 33) :: \quad = = = = = = = = =$$

$$\vdash e \mathrel{\text{ə}} [d \mathrel{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c))] \to$$
$$(e \mathrel{\text{ə}} [a \mathrel{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c))] \to d = a) \qquad (\beta$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{e}\,\forall \mathfrak{d}\,[\mathfrak{e} \mathrel{\text{ə}} [\mathfrak{d} \mathrel{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c))] \to$$
$$\forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{e} \mathrel{\text{ə}} [\mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c))] \to \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]] \qquad (\gamma$$

$$(16) : \quad \overline{}$$

$$\vdash \text{funk}\,(\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c))) \qquad (\delta$$

———— ● ————

$$\text{Ie} \quad \vdash b \to (a \to \neg\ (b \to \neg\ a))$$

$$(Ib, Id) :: \quad = = = = = = = = =$$

$$\vdash \neg\ (a \to \neg\ b) \to \neg\ (b \to \neg\ a) \qquad (\varepsilon$$

$$(IVa) : \quad \overline{}$$

$$\vdash (\neg\ (b \to \neg\ a) \to \neg\ (a \to \neg\ b)) \to$$
$$(\neg\ (b \to \neg\ a)) = (\neg\ (a \to \neg\ b)) \qquad (\zeta$$

$$(\varepsilon) :: \quad \overline{}$$

$$\vdash (\neg\ (b \to \neg\ a)) = (\neg\ (a \to \neg\ b)) \qquad (\eta$$

$$\eta \quad \vdash (\neg\ (x = c \to \neg\ y = n)) = (\neg\ (y = n \to \neg\ x = c))$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [(\neg\ (\mathfrak{a} = c \to \neg\ y = n)) = (\neg\ (y = n \to \neg\ \mathfrak{a} = c))] \qquad (\vartheta$$

$$(Va) : \quad \rule{8em}{0.4pt}$$

$$\vdash \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = c \to \neg\ y = n)) = \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (y = n \to \neg\ \varepsilon = c)) \qquad (\iota$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [\mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = c \to \neg\ \mathfrak{a} = n)) = \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\mathfrak{a} = n \to \neg\ \varepsilon = c))] \qquad (\kappa$$

$$(Va) : \quad \rule{8em}{0.4pt}$$

$$\vdash \mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = c \to \neg\ \alpha = n)) = \mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\alpha = n \to \neg\ \varepsilon = c)) \quad (\lambda$$

$$(IIIc) : \quad \rule{8em}{0.4pt}$$

$$\vdash F[\mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = c \to \neg\ \alpha = n))] \to$$
$$F[\mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\alpha = n \to \neg\ \varepsilon = c))] \qquad (\mu$$

$$(IIIc) : \quad \rule{8em}{0.4pt}$$

$$\vdash \mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\alpha = n \to \neg\ \varepsilon = c)) =$$
$$\mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c))^{-1} \to$$
$$(F[\mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = c \to \neg\ \alpha = n))] \to$$
$$F[\mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c))^{-1}]) \qquad (\nu$$

$$(40) :: \quad \rule{8em}{0.4pt}$$

S.135

$$\vdash F[\mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = c \to \neg\ \alpha = n))] \to$$
$$F[\mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c))^{-1}] \qquad (\xi$$

$$36 \quad \vdash \neg\ (d = n \to \neg\ c = c) \to$$
$$d \,ə\, [c \,ə\, \mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c))]$$

$$(Ie) :: \quad - - - - - - - -$$

$$\vdash d = n \to (c = c \to d \,ə\, [c \,ə\, \mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c))]) \qquad (o$$

$$(IIIe) :: \quad \rule{8em}{0.4pt}$$

$$\vdash d = n \to d \,ə\, [c \,ə\, \mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c))] \qquad (\pi$$

$$(82) :: \quad - - - - - - - -$$

$$\vdash d \,ə\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = n) \to d \,ə\, [c \,ə\, \mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c))] \qquad (\rho$$

$$\times$$

$$\vdash d \,ə\, [c \,ə\, \mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c))] \to \neg\ d \,ə\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = n) \qquad (\sigma$$

IIa $\vdash \forall \mathfrak{a}\, [d \,\text{ə}\, [\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\, \alpha\, \text{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c))] \to \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = c)] \to$
$(d \,\text{ə}\, [c \,\text{ə}\, \text{ext}\, \alpha\, \text{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c))] \to \neg\ c \,\text{ə}\, \text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = c))$

$\times$

$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [d \,\text{ə}\, [\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\, \alpha\, \text{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c))] \to \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = c)] \to$
$(c \,\text{ə}\, \text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = c) \to \neg\ d \,\text{ə}\, [c \,\text{ə}\, \text{ext}\, \alpha\, \text{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c))])$ (τ

(109) :: ———————

$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [d \,\text{ə}\, [\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\, \alpha\, \text{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c))] \to \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = c)] \to$
$\neg\ d \,\text{ə}\, [c \,\text{ə}\, \text{ext}\, \alpha\, \text{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c))]$ (υ

(σ) : – – – – – – – –

$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [d \,\text{ə}\, [\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\, \alpha\, \text{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c))] \to \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = c)] \to$
$\neg\ d \,\text{ə}\, \text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = n)$ (ϕ

$\smile$

$\vdash \forall \mathfrak{d}\, [\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \,\text{ə}\, [\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\, \alpha\, \text{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c))] \to \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, \text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = c)] \to$
$\neg\ \mathfrak{d} \,\text{ə}\, \text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = n)]$ (χ

(11) : ———————

$\vdash \text{funk}\, (\text{ext}\, \alpha\, \text{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c))) \to$
$\text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = n) \,\text{ə}\, [\text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = c) \,\text{ə}\, \text{ext}\, \alpha\, \text{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c)) :\twoheadrightarrow]$ (ψ

(δ) :: ———————

$\vdash \text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = n) \,\text{ə}\, [\text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = c) \,\text{ə}\, \text{ext}\, \alpha\, \text{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c)) :\twoheadrightarrow]$ (ω

(32) : ———————

$\vdash \text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = c) \,\text{ə}\, [\text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = n) \,\text{ə}\, \text{ext}\, \alpha\, \text{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = n \to \neg\ \alpha = c))^{-1} :\twoheadrightarrow] \to$
$\text{anz}\, (\text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = n)) = \text{anz}\, (\text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = c))$ (α’

(ξ) :: – – – – – – – –

S.136

$\vdash \text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = c) \,\text{ə}\, [\text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = n) \,\text{ə}\, \text{ext}\, \alpha\, \text{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon = c \to \neg\ \alpha = n)) :\twoheadrightarrow] \to$
$\text{anz}\, (\text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = n)) = \text{anz}\, (\text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = c))$ (β’

(ω) :: ———————

$\vdash \text{anz}\, (\text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = n)) = \text{anz}\, (\text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = c))$ (118

———— • ————

118 $\vdash \text{anz}\, (\text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = \text{anz}\, (0))) = \text{anz}\, (\text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = c))$

(116) : ———————

$\vdash \text{anz}\, (1) = \text{anz}\, (\text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = c))$ (119

$(IIIa)$: ———————

$\vdash F(\text{anz}\, (\text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = c))) \to F(\text{anz}\, (1))$ (120

IIIa $\vdash c \ni u \rightarrow (a = c \rightarrow a \ni u)$

(IVa) :: — — — — — — — —

$\vdash c \ni u \rightarrow ((a \ni u \rightarrow a = c) \rightarrow (\text{—}\, a \ni u) = (\text{—}\, a = c))$ (α

(IIa) :: — — — — — — — —

$\vdash c \ni u \rightarrow (\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{a} \ni u \rightarrow \mathfrak{a} = c] \rightarrow (\text{—}\, a \ni u) = (\text{—}\, a = c))$ (β

(77) : ————————————

$\vdash c \ni u \rightarrow (\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{a} \ni u \rightarrow \mathfrak{a} = c] \rightarrow (\text{—}\, a \ni u) = (\text{—}\, a \ni \text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = c)))$ (γ

$\smile$

$\vdash c \ni u \rightarrow (\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{a} \ni u \rightarrow \mathfrak{a} = c] \rightarrow$

$\forall \mathfrak{a}\, [(\text{—}\, \mathfrak{a} \ni u) = (\text{—}\, \mathfrak{a} \ni \text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = c))])$ (δ

(96) : — — — — — — — —

$\vdash c \ni u \rightarrow (\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{a} \ni u \rightarrow \mathfrak{a} = c] \rightarrow \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(\text{ext}\, \varepsilon\, (\varepsilon = c)))$ (ε

(120) : ————————————

$\vdash c \ni u \rightarrow (\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{a} \ni u \rightarrow \mathfrak{a} = c] \rightarrow \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(1))$ (121

(IIa) :: — — — — — — — —

$\vdash c \ni u \rightarrow (\forall \mathfrak{d}\, [\mathfrak{d} \ni u \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{a} \ni u \rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{d}]] \rightarrow \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(1))$ (α

$\times$

$\vdash \forall \mathfrak{d}\, [\mathfrak{d} \ni u \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{a} \ni u \rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{d}]] \rightarrow$

$(\neg\ \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(1) \rightarrow \neg\ c \ni u)$ (β

$\smile$

$\vdash \forall \mathfrak{d}\, [\mathfrak{d} \ni u \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{a} \ni u \rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{d}]] \rightarrow$

$(\neg\ \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(1) \rightarrow \forall \mathfrak{e}\, [\neg\ \mathfrak{e} \ni u])$ (γ

$\times$

$\vdash \forall \mathfrak{d}\, [\mathfrak{d} \ni u \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{a} \ni u \rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{d}]] \rightarrow$

$(\neg\ \forall \mathfrak{e}\, [\neg\ \mathfrak{e} \ni u] \rightarrow \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(1))$ (122

S.129 |

Z. **Beweis des Satzes**

$, \vdash \mathrm{anz}\,(0) \text{ ə } (b \text{ ə } \leq_{\mathrm{nf}}) \to \neg\; b \text{ ə } (b \text{ ə } <_{\mathrm{nf}})$'

a) **Beweis des Satzes**

$, \vdash \neg\; a \text{ ə } (\mathrm{anz}\,(0) \text{ ə } <_{\mathrm{nf}})$'

§ 108. *Zerlegung.*

Der in der Hauptüberschrift aufgeführte Satz besagt, dass kein Gegenstand, der der mit Null anfangenden Anzahlenreihe angehört, auf sich selbst in der Anzahlenreihe folge. Wir können dafür auch sagen: „Keine **endliche** Anzahl folgt auf sich selbst in der Anzahlenreihe." Die Wichtigkeit dieses Satzes wird klarer durch folgende Ueberlegung erkannt. Wenn wir die zu einem Begriffe $\Phi(\xi)$ gehörende Anzahl bestimmen, oder, wie man gewöhnlich sagt, wenn wir die unter den Begriff $\Phi(\xi)$ fallenden Gegenstände zählen, so ordnen wir diese den Zahlwörtern von Eins an der Reihe nach zu bis zu einem Zahlworte ‚N', das dadurch bestimmt wird, dass die zuordnende Beziehung den Begriff $\Phi(\xi)$ in den Begriff „Glied der Reihe der Zahlwörter von ‚Eins' bis ‚N'" und dass die umgekehrte Beziehung diesen Begriff in jenen abbildet. Dann bezeichnet ‚N' die gesuchte Anzahl; d. h. N ist diese Anzahl. Dieses Verfahren lässt mannichfache Ausführungen zu, da die zuordnende Beziehung nicht völlig bestimmt ist. Es entsteht die Frage, ob man bei einer andern Wahl dieser Beziehung zu einem andern Zahlworte ‚M' gelangen könnte. Dann wäre nach unsern Bestimmungen M dieselbe Anzahl wie N, zugleich aber folgte das eine der beiden Zahlwörter auf das andere, z. B. ‚N' auf ‚M'. Dann folgte auch N in der Anzahlenreihe auf M, das hiesse auf sich selbst. Das schliesst unser Satz für endliche Anzahlen aus. Wir beweisen ihn mit den Sätzen

$$, \vdash a \text{ ə } (b \text{ ə } \leq_q) \to (\forall \mathfrak{d}\, [F(\mathfrak{d}) \to \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q) \to F(\mathfrak{a})]] \to (F(a) \to F(b)))\text{'}^{\#122} \qquad (\alpha$$

$$, \vdash \neg\; d \text{ ə } (d \text{ ə } <_{\mathrm{nf}}) \to (d \text{ ə } (a \text{ ə } \mathrm{nf}) \to \neg\; a \text{ ə } (a \text{ ə } <_{\mathrm{nf}}))\text{'}$$

und

$$, \vdash \neg\; \mathrm{anz}\,(0) \text{ ə } (\mathrm{anz}\,(0) \text{ ə } <_{\mathrm{nf}})\text{'}$$

Der letzte ist ein besonderer Fall von

$$, \vdash \neg\; a \text{ ə } (\mathrm{anz}\,(0) \text{ ə } <_{\mathrm{nf}})\text{'}$$

der besagt, dass die Anzahl $\mathrm{anz}\,(0)$ auf keinen Gegenstand in der Anzahlenreihe folge. Diesen beweisen wir zuerst. Wir brauchen hierzu den Satz

$$, \vdash \forall \mathfrak{e}\, [\neg\; \mathfrak{e} \text{ ə } (b \text{ ə } q)] \to \neg\; a \text{ ə } (b \text{ ə } <_q)\text{'}$$

und (108). Jener besagt, dass ein Gegenstand auf keinen Gegenstand in der q-Reihe folge, wenn kein Gegenstand zu ihm in der q-Be- | ziehung stehe. Um ihn zu beweisen, brauchen wir den Satz S.134

$$, \vdash a \text{ ə } (b \text{ ə } <_q) \to (\forall \mathfrak{d}\, [F(\mathfrak{d}) \to \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q) \to F(\mathfrak{a})]] \to (\forall \mathfrak{a}\, [a \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q) \to F(\mathfrak{a})] \to F(b)))\text{'}$$

der aus (K) mit (6) folgt. Wir ersetzen dann die Functionsmarke ‚$F(\xi)$' durch ‚$\neg\; \forall \mathfrak{e}\, [\neg\; (\mathfrak{e} \text{ ə } (\xi \text{ ə } q))]$' und haben dann die Sätze

$$, \vdash \forall \mathfrak{d}\, [\neg\; \forall \mathfrak{e}\, [\neg\; (\mathfrak{e} \text{ ə } (\mathfrak{d} \text{ ə } q))] \to \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q) \to \neg\; \forall \mathfrak{e}\, [\neg\; (\mathfrak{e} \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q))]]]\text{'}$$

[#122] im Original fehlt linkes Zeichen [interp | bonn]

und

$$,\vdash \forall\mathfrak{a}\,[a \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (\mathfrak{e} \ni (\mathfrak{a} \ni q))]]\text{ ‘}$$

zu beweisen, die beide aus

$$,\vdash d \ni (b \ni q) \to \neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (\mathfrak{e} \ni (b \ni q))]\text{ ‘}$$

folgen.

§ 109. *Aufbau.*

$$\text{K}\quad \vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\forall\mathfrak{F}\,[\forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{F}(\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})]] \to (\forall\mathfrak{a}\,[\varepsilon \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})] \to \mathfrak{F}(\alpha))]] = <_q$$

$$(6):\ \overline{\hspace{10em}}$$

$$\vdash a \ni (b \ni\ <_q) \to \forall\mathfrak{F}\,[\forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{F}(\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})]] \to (\forall\mathfrak{a}\,[a \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})] \to \mathfrak{F}(b))] \qquad (\alpha$$

$$(IIb):\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$

$$\vdash a \ni (b \ni\ <_q) \to (\forall\mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{a})]] \to (\forall\mathfrak{a}\,[a \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{a})] \to F(b))) \qquad (123$$

———— ● ————

$$\text{IIa}\quad \vdash \forall\mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{e} \ni (b \ni q)] \to \neg\ d \ni (b \ni q)$$

$$\times$$

$$\vdash d \ni (b \ni q) \to \neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (\mathfrak{e} \ni (b \ni q))] \qquad (\alpha$$

$$(I):\ \overline{\hspace{10em}}$$

$$\vdash \neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (\mathfrak{e} \ni (d \ni q))] \to (d \ni (b \ni q) \to \neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (\mathfrak{e} \ni (b \ni q))]) \qquad (\beta$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall\mathfrak{d}\,[\neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (\mathfrak{e} \ni (\mathfrak{d} \ni q))] \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (\mathfrak{e} \ni (\mathfrak{a} \ni q))]]] \qquad (\gamma$$

$$(123):\ \overline{\hspace{10em}}$$

$$\vdash a \ni (b \ni\ <_q) \to (\forall\mathfrak{a}\,[a \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (\mathfrak{e} \ni (\mathfrak{a} \ni q))]] \to \neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (\mathfrak{e} \ni (b \ni q))]) \qquad (\delta$$

———— ● ————

$$\alpha\quad \vdash a \ni (b \ni q) \to \neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (\mathfrak{e} \ni (b \ni q))]$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[a \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (\mathfrak{e} \ni (\mathfrak{a} \ni q))]] \qquad (\varepsilon$$

$$(\delta):\ \overline{\hspace{10em}}$$

$$\vdash a \,ə\, (b \,ə\, <_q) \to \neg\ \forall \mathfrak{e}\, [\neg\ (\mathfrak{e} \,ə\, (b \,ə\, q))] \qquad (124$$

$$\times$$

$$\vdash \forall \mathfrak{e}\, [\neg\ \mathfrak{e} \,ə\, (b \,ə\, q)] \to \neg\ a \,ə\, (b \,ə\, <_q) \qquad (125$$

———————— ● ————————

108 $\quad \vdash \neg\ c \,ə\, (\text{anz}\,(0) \,ə\, \text{nf}\,)$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{e}\, [\neg\ \mathfrak{e} \,ə\, (\text{anz}\,(0) \,ə\, \text{nf}\,)] \qquad (\alpha$$

$(125):$ ————————————

$$\vdash \neg\ a \,ə\, (\text{anz}\,(0) \,ə\, <_{\text{nf}}\,) \qquad (126$$

———————— ● ————————

| S.137

b) Beweis des Satzes

$, \vdash \forall \mathfrak{d}\, [\neg\ \mathfrak{d} \,ə\, (\mathfrak{d} \,ə\, <_{\text{nf}}\,) \to$
$\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \,ə\, (\mathfrak{a} \,ə\, \text{nf}\,) \to \neg\ \mathfrak{a} \,ə\, (\mathfrak{a} \,ə\, <_{\text{nf}}\,)]]$‘

und Schluss des Abschnittes Z.

§ 110. *Zerlegung.*

Der Satz

$$, \vdash \neg\ d \,ə\, (d \,ə\, <_{\text{nf}}\,) \to (d \,ə\, (a \,ə\, \text{nf}\,) \to \neg\ a \,ə\, (a \,ə\, <_{\text{nf}}\,))\text{ ‘} \qquad (\alpha$$

geht ■→durch Kontraposition←■[161] [#123] hervor aus

$$, \vdash a \,ə\, (a \,ə\, <_{\text{nf}}\,) \to (d \,ə\, (a \,ə\, \text{nf}\,) \to d \,ə\, (d \,ə\, <_{\text{nf}}\,))\text{ ‘} \qquad (\beta$$

Dieser Satz kann erschlossen werden aus den Sätzen

$$, \vdash d \,ə\, (a \,ə\, \text{nf}\,) \to (a \,ə\, (a \,ə\, <_{\text{nf}}\,) \to a \,ə\, (d \,ə\, \leq_{\text{nf}}\,))\text{ ‘} \qquad (\gamma$$

und

$$, \vdash a \,ə\, (c \,ə\, \leq_q) \to (d \,ə\, (a \,ə\, q) \to d \,ə\, (c \,ə\, <_q))\text{ ‘} \qquad (\delta$$

indem man in diesem für ‚c‘ ‚d‘ und für ‚q‘ ‚nf ‘ setzt. Wir beweisen (δ) aus den Sätzen

$$, \vdash F(a \,ə\, (c \,ə\, \leq_q)) \to F((\neg\ a \,ə\, (c \,ə\, <_q) \to c = a))\text{ ‘} \qquad (\varepsilon$$

$$, \vdash c = a \to (d \,ə\, (a \,ə\, q) \to d \,ə\, (c \,ə\, <_q))\text{ ‘} \qquad (\zeta$$

und

$$, \vdash a \,ə\, (c \,ə\, <_q) \to (d \,ə\, (a \,ə\, q) \to d \,ə\, (c \,ə\, <_q))\text{ ‘} \qquad (\eta$$

die leicht aus (Λ), (K) und (123) folgen.

---

[161] durch Wendung

[#123] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

§ 111. *Aufbau.*

$$\text{K}\quad \vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\forall\mathfrak{F}\,[\forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{F}(\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d}\,\text{ə}\,(\mathfrak{a}\,\text{ə}\,q) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})]] \to$$
$$(\forall\mathfrak{a}\,[\varepsilon\,\text{ə}\,(\mathfrak{a}\,\text{ə}\,q) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})] \to \mathfrak{F}(\alpha))]] =<_q$$
$$(10):\ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\vdash \forall\mathfrak{F}\,[\forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{F}(\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d}\,\text{ə}\,(\mathfrak{a}\,\text{ə}\,q) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})]] \to$$
$$(\forall\mathfrak{a}\,[a\,\text{ə}\,(\mathfrak{a}\,\text{ə}\,q) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})] \to \mathfrak{F}(b))] \to a\,\text{ə}\,(b\,\text{ə}\ <_q) \tag{127}$$

———— ● ————

$$\text{IIa}\quad \vdash \forall\mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d}\,\text{ə}\,(\mathfrak{a}\,\text{ə}\,q) \to F(\mathfrak{a})]] \to$$
$$(F(a) \to \forall\mathfrak{a}\,[a\,\text{ə}\,(\mathfrak{a}\,\text{ə}\,q) \to F(\mathfrak{a})])$$
$$(123):\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$
$$\vdash a\,\text{ə}\,(c\,\text{ə}\ <_q) \to (\forall\mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d}\,\text{ə}\,(\mathfrak{a}\,\text{ə}\,q) \to F(\mathfrak{a})]] \to$$
$$(F(a) \to F(c))) \tag{128}$$
$$(IIa)::\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$

S.140

$$\vdash a\,\text{ə}\,(c\,\text{ə}\ <_q) \to (d\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,q) \to$$
$$(\forall\mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d}\,\text{ə}\,(\mathfrak{a}\,\text{ə}\,q) \to F(\mathfrak{a})]] \to$$
$$(\forall\mathfrak{a}\,[d\,\text{ə}\,(\mathfrak{a}\,\text{ə}\,q) \to F(\mathfrak{a})] \to F(c)))) \tag{α}$$

$$\vdash a\,\text{ə}\,(c\,\text{ə}\ <_q) \to (d\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,q) \to$$
$$\forall\mathfrak{F}\,[\forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{F}(\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d}\,\text{ə}\,(\mathfrak{a}\,\text{ə}\,q) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})]] \to$$
$$(\forall\mathfrak{a}\,[d\,\text{ə}\,(\mathfrak{a}\,\text{ə}\,q) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})] \to \mathfrak{F}(c))]) \tag{β}$$
$$(127):\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$
$$\vdash a\,\text{ə}\,(c\,\text{ə}\ <_q) \to (d\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,q) \to d\,\text{ə}\,(c\,\text{ə}\ <_q)) \tag{129}$$

———— ● ————

$$\Lambda\quad \vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon\,\text{ə}\,(\alpha\,\text{ə}\ <_q) \to \alpha = \varepsilon) =\leq_q$$
$$(6):\ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\vdash F(a\,\text{ə}\,(c\,\text{ə}\ \leq_q)) \to F((\neg\ a\,\text{ə}\,(c\,\text{ə}\ <_q) \to c = a)) \tag{130}$$

———— ● ————

$$\text{IIa}\quad \vdash \forall\mathfrak{a}\,[d\,\text{ə}\,(\mathfrak{a}\,\text{ə}\,q) \to F(\mathfrak{a})] \to (d\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,q) \to F(a))$$
$$(I):\ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash d \ni (a \ni q) \to (\forall \mathfrak{d}\, [F(\mathfrak{d}) \to \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{a})]] \to$$
$$(\forall \mathfrak{a}\, [d \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{a})] \to F(a))) \qquad (\alpha$$

$$\smile$$

$$\vdash d \ni (a \ni q) \to \forall \mathfrak{F}\, [\forall \mathfrak{d}\, [\mathfrak{F}(\mathfrak{d}) \to \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})]] \to$$
$$(\forall \mathfrak{a}\, [d \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})] \to \mathfrak{F}(a))] \qquad (\beta$$

$$(127): \; - - - - - - - -$$

$$\vdash d \ni (a \ni q) \to d \ni (a \ni\, <_q) \qquad (131$$

$$(IIIa): \; \overline{\hspace{6cm}}$$

$$\vdash c = a \to (d \ni (a \ni q) \to d \ni (c \ni\, <_q)) \qquad (\alpha$$

$$(130) :: \; - - - - - - - -$$

$$\vdash a \ni (c \ni\, \leq_q) \to (\neg\; a \ni (c \ni\, <_q) \to$$
$$(d \ni (a \ni q) \to d \ni (c \ni\, <_q))) \qquad (\beta$$

$$(129): \; \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot$$

$$\vdash a \ni (c \ni\, \leq_q) \to (d \ni (a \ni q) \to d \ni (c \ni\, <_q)) \qquad (132$$

§ 112. *Zerlegung.*

Wir haben nun den Satz (γ) des § 110 zu beweisen. Er ist ein besonderer Fall von

$$,\; \vdash d \ni (b \ni \mathrm{nf}\,) \to (a \ni (b \ni\, <_{\mathrm{nf}}\,) \to a \ni (d \ni\, \leq_{\mathrm{nf}}\,))\text{‘}$$

in Worten:

„Wenn eine Anzahl (b) auf eine zweite Anzahl (a) in der Anzahlenreihe folgt und auf eine dritte (d) in der Anzahlenreihe unmittelbar folgt, so gehört die dritte (d) der mit der zweiten (a) anfangenden Anzahlenreihe an.“

Offenbar würde das Entsprechende in einer beliebigen Reihe im Allgemeinen nicht gelten. Es ist hier | wesentlich, dass der Rückgang in der Anzahlenreihe eindeutig stattfindet S.138
(88). Wir stützen uns auf den Satz, dass, wenn in irgendeiner (q-)Reihe ein Gegenstand (b) auf einen zweiten (a) folgt, es einen Gegenstand giebt, der der mit dem zweiten (a) anfangenden (q-)Reihe angehört und zum ersten in der reihenbildenden (q-)Beziehung steht; in Zeichen:

$$,\; \vdash a \ni (b \ni\, <_q) \to \neg\; \forall \mathfrak{e}\, [\mathfrak{e} \ni (b \ni q) \to \neg\; a \ni (\mathfrak{e} \ni\, \leq_q)]\text{‘} \qquad (\alpha$$

Wenn man nun weiss, dass es nicht mehr als einen Gegenstand giebt, der zum ersten (b) in der (q-)Beziehung steht, so muss dieser auch der mit dem zweiten (a) anfangenden (q-)Reihe angehören. Zum Beweise dieses Satzes gebrauchen wir (123), indem wir die Functionsmarke ‚$F(\xi)$‘ durch ‚$\neg\; \forall \mathfrak{e}\, [\mathfrak{e} \ni (\xi \ni q) \to \neg\; a \ni (\mathfrak{e} \ni\, \leq_q)]$‘ ersetzen. Wir bedürfen also der beiden Sätze

$$,\; \vdash a \ni (d \ni q) \to \neg\; \forall \mathfrak{e}\, [\mathfrak{e} \ni (d \ni q) \to \neg\; a \ni (\mathfrak{e} \ni\, \leq_q)]\text{‘} \qquad (\beta$$

und

$$,\ \vdash \neg\ \forall \mathfrak{e}\, [\mathfrak{e} \ni (m \ni q) \rightarrow \neg\ a \ni (\mathfrak{e} \ni\ \leq_q)] \rightarrow (m \ni (n \ni q) \rightarrow$$
$$\neg\ \forall \mathfrak{e}\, [\mathfrak{e} \ni (n \ni q) \rightarrow \neg\ a \ni (\mathfrak{e} \ni\ \leq_q)])\ ‘ \qquad (\gamma$$

Jener folgt mit (IIa) aus dem Satze

$$,\ \vdash a \ni (a \ni\ \leq_q)\ ‘$$

der eine Folge der Definition (Λ) ist. Dieser geht durch Einführung des deutschen ‚$\mathfrak{e}$‘■→und Kontraposition←■[162] [#124] hervor aus

$$,\ \vdash \forall \mathfrak{e}\, [\mathfrak{e} \ni (n \ni q) \rightarrow \neg\ a \ni (\mathfrak{e} \ni\ \leq_q)] \rightarrow (m \ni (n \ni q) \rightarrow$$
$$(e \ni (m \ni q) \rightarrow \neg\ a \ni (e \ni\ \leq_q)))\ ‘ \qquad (\delta$$

Nach (IIa) haben wir nun

$$,\ \vdash \forall \mathfrak{e}\, [\mathfrak{e} \ni (n \ni q) \rightarrow \neg\ a \ni (\mathfrak{e} \ni\ \leq_q)] \rightarrow$$
$$(m \ni (n \ni q) \rightarrow \neg\ a \ni (m \ni\ \leq_q))\ ‘$$

Es bleibt noch zu zeigen

$$,\ \vdash \neg\ a \ni (m \ni\ \leq_q) \rightarrow (e \ni (m \ni q) \rightarrow \neg\ a \ni (e \ni\ \leq_q))\ ‘$$

oder

$$,\ \vdash a \ni (e \ni\ \leq_q) \rightarrow (e \ni (m \ni q) \rightarrow a \ni (m \ni\ \leq_q))\ ‘ \qquad (\varepsilon$$

(ε) ist eine Folge von

$$,\ \vdash a \ni (m \ni\ <_q) \rightarrow a \ni (m \ni\ \leq_q)\ ‘ \qquad (\zeta$$

und

$$,\ \vdash a \ni (e \ni\ \leq_q) \rightarrow (e \ni (m \ni q) \rightarrow a \ni (m \ni\ <_q))\ ‘ \qquad (\eta$$

Dieser Satz ist in ähnlicher Weise wie (132) zu beweisen.

§ 113. *Aufbau.*

$$\text{IIa} \quad \vdash \forall \mathfrak{d}\, [F(\mathfrak{d}) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \rightarrow F(\mathfrak{a})]] \rightarrow$$
$$(F(e) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [e \ni (\mathfrak{a} \ni q) \rightarrow F(\mathfrak{a})])$$
$$(IIa): \ - - - - - - - -$$
$$\vdash \forall \mathfrak{d}\, [F(\mathfrak{d}) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \rightarrow F(\mathfrak{a})]] \rightarrow$$
$$(F(e) \rightarrow (e \ni (m \ni q) \rightarrow F(m))) \qquad (\alpha$$
$$(123) :: \ - - - - - - - -$$

S.142

$$\vdash a \ni (e \ni\ <_q) \rightarrow (e \ni (m \ni q) \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{d}\, [F(\mathfrak{d}) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \rightarrow F(\mathfrak{a})]] \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{a}\, [a \ni (\mathfrak{a} \ni q) \rightarrow F(\mathfrak{a})] \rightarrow F(m)))) \qquad (\beta$$

$\smile$

[162] und Wendung

[#124] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

$$\vdash a \ni (e \ni \ <_q) \to (e \ni (m \ni q) \to$$

$$\forall \mathfrak{F}\, [\forall \mathfrak{d}\, [\mathfrak{F}(\mathfrak{d}) \to \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})]] \to$$

$$(\forall \mathfrak{a}\, [a \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})] \to \mathfrak{F}(m))]) \qquad (\gamma$$

(127) : — — — — — — — —

$$\vdash a \ni (e \ni \ <_q) \to (e \ni (m \ni q) \to a \ni (m \ni \ <_q)) \qquad (133$$

131 $\vdash a \ni (m \ni q) \to a \ni (m \ni \ <_q)$

$(IIIa)$: ————————

$$\vdash e = a \to (e \ni (m \ni q) \to a \ni (m <_q)) \qquad (\alpha$$

(130) :: — — — — — — — —

$$\vdash a \ni (e \ni \ \leq_q) \to (\neg\ a \ni (e \ni \ <_q) \to$$

$$(e \ni (m \ni q) \to a \ni (m \ni \ <_q))) \qquad (\beta$$

(133) : ·—·—·—·—·—·—·—·

$$\vdash a \ni (e \ni \ \leq_q) \to (e \ni (m \ni q) \to a \ni (m \ni \ <_q)) \qquad (134$$

Λ $\vdash \text{ext}\, \alpha\, \text{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ \varepsilon \ni (\alpha \ni \ <_q) \to \alpha = \varepsilon) = \leq_q$

(10) : ————————

$$\vdash F((\neg\ a \ni (m \ni \ <_q) \to m = a)) \to F(a \ni (m \ni \ \leq_q)) \qquad (135$$

135 $\vdash (\neg\ a \ni (m \ni \ <_q) \to m = a) \to a \ni (m \ni \ \leq_q)$

(Ia) :: — — — — — — — —

$$\vdash a \ni (m \ni \ <_q) \to a \ni (m \ni \ \leq_q) \qquad (136$$

(134) :: — — — — — — — —

$$\vdash a \ni (e \ni \ \leq_q) \to (e \ni (m \ni q) \to a \ni (m \ni \ \leq_q)) \qquad (137$$

×

$$\vdash \neg\ a \ni (m \ni \ \leq_q) \to (e \ni (m \ni q) \to \neg\ a \ni (e \ni \ \leq_q)) \qquad (\alpha$$

(IIa) :: — — — — — — — —

$$\vdash \forall \mathfrak{e}\, [\mathfrak{e} \ni (n \ni q) \to \neg\ a \ni (\mathfrak{e} \ni \ \leq_q)] \to$$

$$(m \ni (n \ni q) \to (e \ni (m \ni q) \to \neg\ a \ni (e \ni \ \leq_q))) \qquad (\beta$$

‿

$$\vdash \forall\mathfrak{e}\,[\mathfrak{e}\ni(n\ni q)\rightarrow\neg\ a\ni(\mathfrak{e}\ni\ \leq_q)]\rightarrow$$

$$(m\ni(n\ni q)\rightarrow\forall\mathfrak{e}\,[\mathfrak{e}\ni(m\ni q)\rightarrow\neg\ a\ni(\mathfrak{e}\ni\ \leq_q)])\qquad(\gamma$$

$$\times$$

$$\vdash\neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\mathfrak{e}\ni(m\ni q)\rightarrow\neg\ a\ni(\mathfrak{e}\ni\ \leq_q)]\rightarrow$$

$$(m\ni(n\ni q)\rightarrow\neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\mathfrak{e}\ni(n\ni q)\rightarrow\neg\ a\ni(\mathfrak{e}\ni\ \leq_q)])\qquad(\delta$$

$$\smile$$

$$\vdash\forall\mathfrak{d}\,[\neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\mathfrak{e}\ni(\mathfrak{d}\ni q)\rightarrow\neg\ a\ni(\mathfrak{e}\ni\ \leq_q)]\rightarrow$$

$$\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d}\ni(\mathfrak{a}\ni q)\rightarrow\neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\mathfrak{e}\ni(\mathfrak{a}\ni q)\rightarrow\neg\ a\ni(\mathfrak{e}\ni\ \leq_q)]]]\qquad(\varepsilon$$

$(123):$ ————————

S.143

$$\vdash a\ni(b\ni\ <_q)\rightarrow$$

$$(\forall\mathfrak{a}\,[a\ni(\mathfrak{a}\ni q)\rightarrow\neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\mathfrak{e}\ni(\mathfrak{a}\ni q)\rightarrow\neg\ a\ni(\mathfrak{e}\ni\ \leq_q)]]\rightarrow$$

$$\neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\mathfrak{e}\ni(b\ni q)\rightarrow\neg\ a\ni(\mathfrak{e}\ni\ \leq_q)])\qquad(138$$

———— • ————

135 $\quad\vdash(\neg\ a\ni(b\ni\ <_q)\rightarrow b=a)\rightarrow a\ni(b\ni\ \leq_q)$

$(I)::$ – – – – – – – –

$$\vdash b=a\rightarrow a\ni(b\ni\ \leq_q)\qquad(139$$

———— • ————

IIIe $\quad\vdash a=a$

$(139):$ ————————

$$\vdash a\ni(a\ni\ \leq_q)\qquad(140$$

———— • ————

IIa $\quad\vdash\forall\mathfrak{e}\,[\mathfrak{e}\ni(d\ni q)\rightarrow\neg\ a\ni(\mathfrak{e}\ni\ \leq_q)]\rightarrow$

$$(a\ni(d\ni q)\rightarrow\neg\ a\ni(a\ni\ \leq_q))$$

$$\times$$

$$\vdash a\ni(a\ni\ \leq_q)\rightarrow(a\ni(d\ni q)\rightarrow$$

$$\neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\mathfrak{e}\ni(d\ni q)\rightarrow\neg\ a\ni(\mathfrak{e}\ni\ \leq_q)])\qquad(\alpha$$

$(140)::$ ————————

$\vdash a\,ə\,(d\,ə\,q) \to \neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\mathfrak{e}\,ə\,(d\,ə\,q) \to \neg\ a\,ə\,(\mathfrak{e}\,ə\ \leq_q)]$ $(\beta$

$\smile$

$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[a\,ə\,(\mathfrak{a}\,ə\,q) \to \neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\mathfrak{e}\,ə\,(\mathfrak{a}\,ə\,q) \to \neg\ a\,ə\,(\mathfrak{e}\,ə\ \leq_q)]]$ $(\gamma$

$(138):$ ———————————

$\vdash a\,ə\,(b\,ə\ <_q) \to \neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\mathfrak{e}\,ə\,(b\,ə\,q) \to \neg\ a\,ə\,(\mathfrak{e}\,ə\ \leq_q)]$ (141

$\times$

$\vdash \forall\mathfrak{e}\,[\mathfrak{e}\,ə\,(b\,ə\,q) \to \neg\ a\,ə\,(\mathfrak{e}\,ə\ \leq_q)] \to \neg\ a\,ə\,(b\,ə\ <_q)$ (142

——————— • ———————

IIIc $\vdash \neg\ a\,ə\,(d\,ə\ \leq_{\mathrm{nf}}) \to (d = c \to \neg\ a\,ə\,(c\,ə\ \leq_{\mathrm{nf}}))$

$(88) ::$ — — — — — — — —

$\vdash \neg\ a\,ə\,(d\,ə\ \leq_{\mathrm{nf}}) \to (d\,ə\,(b\,ə\,\mathrm{nf}) \to$

$(c\,ə\,(b\,ə\,\mathrm{nf}) \to \neg\ a\,ə\,(c\,ə\ \leq_{\mathrm{nf}})))$ $(\alpha$

$\smile$

$\vdash \neg\ a\,ə\,(d\,ə\ \leq_{\mathrm{nf}}) \to (d\,ə\,(b\,ə\,\mathrm{nf}) \to$

$\forall\mathfrak{e}\,[\mathfrak{e}\,ə\,(b\,ə\,\mathrm{nf}) \to \neg\ a\,ə\,(\mathfrak{e}\,ə\ \leq_{\mathrm{nf}})])$ $(\beta$

$(142):$ — — — — — — — —

$\vdash \neg\ a\,ə\,(d\,ə\ \leq_{\mathrm{nf}}) \to (d\,ə\,(b\,ə\,\mathrm{nf}) \to \neg\ a\,ə\,(b\,ə\ <_{\mathrm{nf}}))$ $(\gamma$

$\times$

$\vdash d\,ə\,(b\,ə\,\mathrm{nf}) \to (a\,ə\,(b\,ə\ <_{\mathrm{nf}}) \to a\,ə\,(d\,ə\ \leq_{\mathrm{nf}}))$ (143

——————— • ———————

130 $\vdash a\,ə\,(b\,ə\ \leq_q) \to (\neg\ a\,ə\,(b\,ə\ <_q) \to b = a)$

$(IIIa):$ — — — — — — — —

$\vdash a\,ə\,(b\,ə\ \leq_q) \to (\neg\ a\,ə\,(b\,ə\ <_q) \to (F(a) \to F(b)))$ $(\alpha$

$(128):$ $\cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot$

$\vdash a\,ə\,(b\,ə\ \leq_q) \to (\forall\mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d}\,ə\,(\mathfrak{a}\,ə\,q) \to F(\mathfrak{a})]] \to$
$(F(a) \to F(b)))$ (144

——————— • ———————

132 $\vdash a\,ə\,(d\,ə\ \leq_{\mathrm{nf}}) \to (d\,ə\,(a\,ə\,\mathrm{nf}) \to d\,ə\,(d\,ə\ <_{\mathrm{nf}}))$

$(143) ::$ — — — — — — — —

$$\vdash a \,ə\, (a \,ə\, <_{\text{nf}}) \rightarrow (d \,ə\, (a \,ə\, \text{nf}) \rightarrow d \,ə\, (d \,ə\, <_{\text{nf}})) \qquad (\alpha$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ d \,ə\, (d \,ə\, <_{\text{nf}}) \rightarrow (d \,ə\, (a \,ə\, \text{nf}) \rightarrow \neg\ a \,ə\, (a \,ə\, <_{\text{nf}})) \qquad (\beta$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{d}\, [\neg\ \mathfrak{d} \,ə\, (\mathfrak{d} \,ə\, <_{\text{nf}}) \rightarrow$$
$$\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \,ə\, (\mathfrak{a} \,ə\, \text{nf}) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \,ə\, (\mathfrak{a} \,ə\, <_{\text{nf}})]] \qquad (\gamma$$

$(144) :$ ———————

$$\vdash \text{anz}\,(0) \,ə\, (b \,ə\, \leq_{\text{nf}}) \rightarrow (\neg\ \text{anz}\,(0) \,ə\, (\text{anz}\,(0) \,ə\, <_{\text{nf}}) \rightarrow \neg\ b \,ə\, (b \,ə\, <_{\text{nf}})) \qquad (\delta$$

$(126) ::$ ———————

$$\vdash \text{anz}\,(0) \,ə\, (b \,ə\, \leq_{\text{nf}}) \rightarrow \neg\ b \,ə\, (b \,ə\, <_{\text{nf}}) \qquad (145$$

H. Beweis des Satzes

$$,\vdash \text{anz}\,(0) \,ə\, (b \,ə\, \leq_{\text{nf}}) \rightarrow b \,ə\, (\text{anz}\,(b \,ə\, \leq_{\text{nf}}) \,ə\, \text{nf})‘$$

§ 114. *Zerlegung.*

Wir wollen den Satz beweisen, dass die Anzahl, die dem Begriffe

der mit b endenden Anzahlenreihe angehörend

zukommt, auf b in der Anzahlenreihe unmittelbar folgt, wenn b eine endliche Anzahl ist. Hieran schliesst sich dann gleich die Folgerung, dass die Anzahlenreihe unendlich ist; d. h. dass es zu jeder endlichen Anzahl eine unmittelbar auf sie folgende giebt.

Wir versuchen den Beweis zunächst mit dem Satze (144), indem wir die Functionsmarke ‚$F(\xi)$‘ durch ‚$\xi \,ə\, (\text{anz}\,(\xi \,ə\, \leq_{\text{nf}}) \,ə\, \text{nf})$‘ ersetzen. Dazu bedürfen wir des Satzes

$$,\ \vdash d \,ə\, (\text{anz}\,(d \,ə\, \leq_{\text{nf}}) \,ə\, \text{nf}) \rightarrow (d \,ə\, (a \,ə\, \text{nf}) \rightarrow a \,ə\, (\text{anz}\,(a \,ə\, \leq_{\text{nf}}) \,ə\, \text{nf}))‘ \text{[163]} \qquad (\alpha$$

Setzen wir in (102) für ‚u‘ ‚$(a \,ə\, \leq_{\text{nf}})$‘ und für ‚$m$‘ und für ‚$c$‘ ‚$a$‘, so erhalten wir

$$,\ \vdash \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,ə\, (a \,ə\, \leq_{\text{nf}}) \rightarrow \varepsilon = a))) = a \rightarrow$$
$$(a \,ə\, (a \,ə\, \leq_{\text{nf}}) \rightarrow a \,ə\, (\text{anz}\,(a \,ə\, \leq_{\text{nf}}) \,ə\, \text{nf}))\ ‘$$

woraus wir ■→das Vorderglied←■[164] [#125]

$$,— a \,ə\, (a \,ə\, \leq_{\text{nf}})\ ‘$$

---

[163]Dieser Satz ist, wie es scheint, unbeweisbar, wird hier aber auch nicht als wahr behauptet, da er in Anführungszeichen steht.

[164]das Unterglied

[#125]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

mit (140) entfernen können. Es fragt sich, ob ■→das Vorderglied←■[165] [#126]

$$,\text{—}\,\mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\ \leq_{\mathrm{nf}}) \rightarrow \varepsilon = a))) = a\ \ ‘$$

als Folge von

$$,\,d\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,\mathrm{nf})\,‘$$

und

$$,\,d\,\text{ə}\,(\mathrm{anz}\,(d\,\text{ə}\ \leq_{\mathrm{nf}})\,\text{ə}\,\mathrm{nf})\,‘$$

nachgewiesen werden könne. Wegen der Eindeutigkeit des Fortschrittes in der Anzahlenreihe (70) haben wir

$$,\ \vdash d\,\text{ə}\,(\mathrm{anz}\,(d\,\text{ə}\ \leq_{\mathrm{nf}})\,\text{ə}\,\mathrm{nf}) \rightarrow (d\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,\mathrm{nf}) \rightarrow \mathrm{anz}\,(d\,\text{ə}\ \leq_{\mathrm{nf}}) = a)\,‘ \qquad (\beta$$

Wir versuchen also, ob sich

$$,\,\mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\ \leq_{\mathrm{nf}}) \rightarrow \varepsilon = a))) = \mathrm{anz}\,(d\,\text{ə}\ \leq_{\mathrm{nf}})\ \ ‘$$

| als Folge von ‚$d\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,\mathrm{nf})$‘ nachweisen lasse. Das muss mit (96) geschehen. Dazu ist nöthig S.139

$$,\,(\neg\ (b\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\ \leq_{\mathrm{nf}}) \rightarrow b = a)) = (\text{—}\,b\,\text{ə}\,(d\,\text{ə}\ \leq_{\mathrm{nf}}))\ \ ‘$$

als Folge von ‚$d\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,\mathrm{nf})$‘ nachzuweisen, wozu (IVa) zu benutzen sein wird. Es wäre also zu zeigen, dass dieselben Anzahlen der mit einer ersten Anzahl (a) endenden Anzahlenreihe angehören, ohne diese selbst zu sein, die der mit einer zweiten Anzahl (d) endenden Anzahlenreihe angehören, wenn die erste Anzahl (a) in der Anzahlenreihe unmittelbar auf die zweite (d) folgt. Dazu ist nöthig,

$$,\,b\,\text{ə}\,(d\,\text{ə}\ \leq_{\mathrm{nf}}) \rightarrow \neg\ (b\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\ \leq_{\mathrm{nf}}) \rightarrow b = a)\,‘$$

und

$$,\,\neg\ (b\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\ \leq_{\mathrm{nf}}) \rightarrow b = a) \rightarrow b\,\text{ə}\,(d\,\text{ə}\ \leq_{\mathrm{nf}})\,‘$$

als Folgen von ‚$d\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,\mathrm{nf})$‘ nachzuweisen. Es zeigt sich aber, dass noch eine Bedingung hinzuzufügen ist. Es wäre nämlich ‚$\neg\ b = a$‘ als Folge von ‚$b\,\text{ə}\,(d\,\text{ə}\ \leq_{\mathrm{nf}})$‘ und von ‚$d\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,\mathrm{nf})$‘ zu erweisen. Wir haben nun nach (134)

$$,\ \vdash b\,\text{ə}\,(d\,\text{ə}\ \leq_{\mathrm{nf}}) \rightarrow (d\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,\mathrm{nf}) \rightarrow b\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\ <_{\mathrm{nf}}))\,‘$$

Fiele nun b mit a zusammen, so ginge ■→das Hinterglied←■[166] [#127] über in ‚$\text{—}\,a\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\ <_{\mathrm{nf}})$‘. Nach (145) ist das ausgeschlossen, wenn a eine endliche Anzahl ist. Es kommt also noch ■→das Vorderglied←■[167] [#128]

$$,\,\text{—}\,\mathrm{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\ \leq_{\mathrm{nf}})\,‘$$

hinzu. Dadurch wird freilich die Anwendung von (144) so, wie wir gewollt hatten, unmöglich; wir können aber mit (137)■→dieses Vorderglied←■[168] [#129]durch ‚$\text{—}\,\mathrm{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(d\,\text{ə}\ \leq_{\mathrm{nf}})$‘ ersetzen und aus (144) den Satz

$$\begin{aligned}
&,\ \vdash a\,\text{ə}\,(b\,\text{ə}\ \leq_q) \rightarrow\\
&(\forall\mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{d}) \rightarrow (a\,\text{ə}\,(\mathfrak{d}\,\text{ə}\ \leq_q) \rightarrow \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d}\,\text{ə}\,(\mathfrak{a}\,\text{ə}\,q) \rightarrow F(\mathfrak{a})])] \rightarrow\\
&(F(a) \rightarrow F(b)))\,‘ \qquad (\gamma
\end{aligned}$$

---

[165]das Unterglied
[166]das Oberglied
[167]das Unterglied
[168]dieses Unterglied

[#126]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#127]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#128]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#129]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

ableiten, der uns dann zum Ziele führt. Zunächst müssen wir, um den Satz

$$, \vdash d ə (a ə \mathrm{nf}) \to (\mathrm{anz}\,(0) ə (a ə \leq_{\mathrm{nf}}) \to (b ə (d ə \leq_{\mathrm{nf}}) \to \neg\ (b ə (a ə \leq_{\mathrm{nf}}) \to b = a)))\ ‘ \qquad (\delta$$

vollständig zu haben, den Satz (137) in der Form

$$, \vdash b ə (d ə \leq_{\mathrm{nf}}) \to (d ə (a ə \mathrm{nf}) \to b ə (a ə \leq_{\mathrm{nf}}))\ ‘$$

heranziehen. Dann bleibt noch der Satz

$$, \vdash d ə (a ə \mathrm{nf}) \to (\neg\ (b ə (a ə \leq_{\mathrm{nf}}) \to b = a) \to b ə (d ə \leq_{\mathrm{nf}}))\ ‘ \qquad (\varepsilon$$

zu beweisen. Nach (143) haben wir

$$, \vdash d ə (a ə \mathrm{nf}) \to (b ə (a ə <_{\mathrm{nf}}) \to b ə (d ə \leq_{\mathrm{nf}}))\ ‘$$

Dazu bedürfen wir nun noch des Satzes

$$, \vdash \neg\ (b ə (a ə \leq_q) \to b = a) \to b ə (a ə <_q)\ ‘ \qquad (\zeta$$

der leicht aus (130) folgt.

S.141 |

§ 115. *Aufbau.*

$$130 \quad \vdash b ə (a ə \leq_q) \to (\neg\ b ə (a ə <_q) \to a = b)$$

$(IIIf):$ — — — — — — — —

$$\vdash \neg\ b ə (a ə <_q) \to (b ə (a ə \leq_q) \to b = a) \qquad (146$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ (b ə (a ə \leq_q) \to b = a) \to b ə (a ə <_q) \qquad (147$$

———— • ————

$$147 \quad \vdash \neg\ (b ə (a ə \leq_{\mathrm{nf}}) \to b = a) \to b ə (a ə <_{\mathrm{nf}})$$

$(143):$ — — — — — — — —

$$\vdash d ə (a ə \mathrm{nf}) \to (\neg\ (b ə (a ə \leq_{\mathrm{nf}}) \to b = a) \to b ə (d ə \leq_{\mathrm{nf}})) \qquad (\alpha$$

$(IVa):$ — — — — — — — —

$$\vdash (b ə (d ə \leq_{\mathrm{nf}}) \to \neg\ (b ə (a ə \leq_{\mathrm{nf}}) \to b = a)) \to (d ə (a ə \mathrm{nf}) \to (\neg\ (b ə (a ə \leq_{\mathrm{nf}}) \to b = a)) = (\text{—}\, b ə (d ə \leq_{\mathrm{nf}}))) \qquad (\beta$$

———— • ————

$$134 \quad \vdash b ə (d ə \leq_{\mathrm{nf}}) \to (d ə (a ə \mathrm{nf}) \to b ə (a ə <_{\mathrm{nf}}))$$

$(IIId):$ — — — — — — — —

$$\vdash \neg\ a ə (a ə <_{\mathrm{nf}}) \to (b ə (d ə \leq_{\mathrm{nf}}) \to (d ə (a ə \mathrm{nf}) \to \neg\ b = a)) \qquad (\gamma$$

$(145) ::$ — — — — — — — —

$$\vdash \mathrm{anz}\,(0) ə (a ə \leq_{\mathrm{nf}}) \to (b ə (d ə \leq_{\mathrm{nf}}) \to (d ə (a ə \mathrm{nf}) \to \neg\ b = a)) \qquad (\delta$$

$(If):$ — — — — — — — —

$\vdash b \ni (a \ni \leq_{\text{nf}}) \to (\text{anz}\,(0) \ni (a \ni \leq_{\text{nf}}) \to (b \ni (d \ni \leq_{\text{nf}}) \to$

$(d \ni (a \ni \text{nf}) \to \neg\ (b \ni (a \ni \leq_{\text{nf}}) \to b = a))))$ $(\varepsilon$

$(137) ::$ — — — — — — — —

$\vdash d \ni (a \ni \text{nf}) \to (\text{anz}\,(0) \ni (a \ni \leq_{\text{nf}}) \to (b \ni (d \ni \leq_{\text{nf}}) \to$

$\neg\ (b \ni (a \ni \leq_{\text{nf}}) \to b = a)))$ $(\zeta$

$(\beta) :$ — — — — — — — —

$\vdash d \ni (a \ni \text{nf}) \to (\text{anz}\,(0) \ni (a \ni \leq_{\text{nf}}) \to$
$(\neg\ (b \ni (a \ni \leq_{\text{nf}}) \to b = a)) = (\text{—}\, b \ni (d \ni \leq_{\text{nf}})))$ $(\eta$

$(77) :$ — — — — — — — —

$\vdash d \ni (a \ni \text{nf}) \to (\text{anz}\,(0) \ni (a \ni \leq_{\text{nf}}) \to$
$[\text{—}\, b \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni (a \ni \leq_{\text{nf}}) \to \varepsilon = a))] =$
$(\text{—}\, b \ni (d \ni \leq_{\text{nf}})))$ (148

$\smile$

$\vdash d \ni (a \ni \text{nf}) \to (\text{anz}\,(0) \ni (a \ni \leq_{\text{nf}}) \to$

$\forall \mathfrak{a}\, [[\text{—}\, \mathfrak{a} \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni (a \ni \leq_{\text{nf}}) \to \varepsilon = a))] =$

$(\text{—}\, \mathfrak{a} \ni (d \ni \leq_{\text{nf}}))])$ $(\alpha$

$(96) :$ — — — — — — — —

S.147

$\vdash d \ni (a \ni \text{nf}) \to (\text{anz}\,(0) \ni (a \ni \leq_{\text{nf}}) \to$
$\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni (a \ni \leq_{\text{nf}}) \to \varepsilon = a))) = \text{anz}\,(d \ni \leq_{\text{nf}}))$ (149

(102) #130 : — — — — — — — —

$\vdash d \ni (a \ni \text{nf}) \to (\text{anz}\,(0) \ni (a \ni \leq_{\text{nf}}) \to (a \ni (a \ni \leq_{\text{nf}}) \to$
$\text{anz}\,(d \ni \leq_{\text{nf}}) \ni (\text{anz}\,(a \ni \leq_{\text{nf}}) \ni \text{nf})))$ $(\alpha$

$(140) ::$ ————————

$\vdash d \ni (a \ni \text{nf}) \to (\text{anz}\,(0) \ni (a \ni \leq_{\text{nf}}) \to$
$\text{anz}\,(d \ni \leq_{\text{nf}}) \ni (\text{anz}\,(a \ni \leq_{\text{nf}}) \ni \text{nf}))$ $(\beta$

$(IIIc) :$ ————————

$\vdash \text{anz}\,(d \ni \leq_{\text{nf}}) = a \to (d \ni (a \ni \text{nf}) \to$
$(\text{anz}\,(0) \ni (a \ni \leq_{\text{nf}}) \to a \ni (\text{anz}\,(a \ni \leq_{\text{nf}}) \ni \text{nf})))$ $(\gamma$

$(70) ::$ — — — — — — — —

$\vdash d \ni (\text{anz}\,(d \ni \leq_{\text{nf}}) \ni \text{nf}) \to (d \ni (a \ni \text{nf}) \to$
$(\text{anz}\,(0) \ni (a \ni \leq_{\text{nf}}) \to a \ni (\text{anz}\,(a \ni \leq_{\text{nf}}) \ni \text{nf})))$ $(\delta$

$(137) ::$ — — — — — — — —

$$\vdash d \text{ ə } (\text{anz}\,(d \text{ ə } \leq_{\text{nf}}) \text{ ə } \text{nf}) \rightarrow (\text{anz}\,(0) \text{ ə } (d \text{ ə } \leq_{\text{nf}}) \rightarrow$$
$$(d \text{ ə } (a \text{ ə } \text{nf}) \rightarrow a \text{ ə } (\text{anz}\,(a \text{ ə } \leq_{\text{nf}}) \text{ ə } \text{nf}))) \qquad (\varepsilon$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{d}\, [\mathfrak{d} \text{ ə } (\text{anz}\,(\mathfrak{d} \text{ ə } \leq_{\text{nf}}) \text{ ə } \text{nf}) \rightarrow (\text{anz}\,(0) \text{ ə } (\mathfrak{d} \text{ ə } \leq_{\text{nf}}) \rightarrow$$
$$\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } \text{nf}) \rightarrow \mathfrak{a} \text{ ə } (\text{anz}\,(\mathfrak{a} \text{ ə } \leq_{\text{nf}}) \text{ ə } \text{nf})])] \qquad (150$$

§ 116. *Zerlegung.*

Um den Satz (γ) des § 114 zu beweisen, setzen wir in (144) an die Stelle der Functionsmarke ‚$F(\xi)$' ‚$\neg\ (a \text{ ə } (\xi \text{ ə } \leq_q) \rightarrow \neg\ F(\xi))$'. Wir haben dann zu beweisen

$$\text{‚}\ \vdash \forall \mathfrak{d}\, [F(\mathfrak{d}) \rightarrow (a \text{ ə } (\mathfrak{d} \text{ ə } \leq_q) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q) \rightarrow F(\mathfrak{a})])] \rightarrow$$
$$(\neg\ (a \text{ ə } (d \text{ ə } \leq_q) \rightarrow \neg\ F(d)) \rightarrow (d \text{ ə } (b \text{ ə } q) \rightarrow \neg\ (a \text{ ə } (b \text{ ə } \leq_q) \rightarrow \neg\ F(b)))) \text{'}$$

was leicht mit (137) geschehen kann. Für den Uebergang zu (γ) vergleiche man S. 68.

§ 117. *Aufbau.*

$$\text{IIa} \quad \vdash \forall \mathfrak{d}\, [F(\mathfrak{d}) \rightarrow (a \text{ ə } (\mathfrak{d} \text{ ə } \leq_q) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q) \rightarrow F(\mathfrak{a})])] \rightarrow$$
$$(F(d) \rightarrow (a \text{ ə } (d \text{ ə } \leq_q) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [d \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q) \rightarrow F(\mathfrak{a})]))$$

$(IIa):$ — — — — — — — —

$$\vdash \forall \mathfrak{d}\, [F(\mathfrak{d}) \rightarrow (a \text{ ə } (\mathfrak{d} \text{ ə } \leq_q) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q) \rightarrow F(\mathfrak{a})])] \rightarrow$$
$$(F(d) \rightarrow (a \text{ ə } (d \text{ ə } \leq_q) \rightarrow (d \text{ ə } (b \text{ ə } q) \rightarrow F(b)))) \qquad (\alpha$$

$$\times$$

$$\vdash \forall \mathfrak{d}\, [F(\mathfrak{d}) \rightarrow (a \text{ ə } (\mathfrak{d} \text{ ə } \leq_q) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q) \rightarrow F(\mathfrak{a})])] \rightarrow$$
$$(\neg\ F(b) \rightarrow (a \text{ ə } (d \text{ ə } \leq_q) \rightarrow (d \text{ ə } (b \text{ ə } q) \rightarrow \neg\ F(d)))) \qquad (\beta$$

$(I)::$ — — — — — — — —

S.148

$$\vdash \forall \mathfrak{d}\, [F(\mathfrak{d}) \rightarrow (a \text{ ə } (\mathfrak{d} \text{ ə } \leq_q) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q) \rightarrow F(\mathfrak{a})])] \rightarrow$$
$$((a \text{ ə } (b \text{ ə } \leq_q) \rightarrow \neg\ F(b)) \rightarrow$$
$$(a \text{ ə } (b \text{ ə } \leq_q) \rightarrow (a \text{ ə } (d \text{ ə } \leq_q) \rightarrow (d \text{ ə } (b \text{ ə } q) \rightarrow \neg\ F(d))))) \qquad (\gamma$$

(137) :: — — — — — — — —

$\vdash \forall\mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{d}) \to (a \ni (\mathfrak{d} \ni\ \leq_q) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{a})])] \to$

$((a \ni (b \ni\ \leq_q) \to \neg\ F(b)) \to$

$(d \ni (b \ni q) \to (a \ni (d \ni\ \leq_q) \to \neg\ F(d))))$ (δ

$\times$

$\vdash \forall\mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{d}) \to (a \ni (\mathfrak{d} \ni\ \leq_q) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{a})])] \to$

$(\neg\ (a \ni (d \ni\ \leq_q) \to \neg\ F(d)) \to$

$(d \ni (b \ni q) \to \neg\ (a \ni (b \ni\ \leq_q) \to \neg\ F(b))))$ (ε

$\smile$

$\vdash \forall\mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{d}) \to (a \ni (\mathfrak{d} \ni\ \leq_q) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{a})])] \to$

$\forall\mathfrak{d}\,[\neg\ (a \ni (\mathfrak{d} \ni\ \leq_q) \to \neg\ F(\mathfrak{d})) \to$

$\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \neg\ (a \ni (\mathfrak{a} \ni\ \leq_q) \to \neg\ F(\mathfrak{a}))]]$ (151

———— • ————

140 $\vdash a \ni (a \ni\ \leq_q)$

(Ie) ————————

$\vdash F(a) \to \neg\ (a \ni (a \ni\ \leq_q) \to \neg\ F(a))$ (α

(144) : — — — — — — — —

$\vdash a \ni (b \ni\ \leq_q) \to (\forall\mathfrak{d}\,[\neg\ (a \ni (\mathfrak{d} \ni\ \leq_q) \to \neg\ F(\mathfrak{d})) \to$
$\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \neg\ (a \ni (\mathfrak{a} \ni\ \leq_q) \to \neg\ F(\mathfrak{a}))]] \to$
$(F(a) \to \neg\ (a \ni (b \ni\ \leq_q) \to \neg\ F(b))))$ (β

(151) :: — — — — — — — —

$\vdash a \ni (b \ni\ \leq_q) \to$
$(\forall\mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{d}) \to (a \ni (\mathfrak{d} \ni\ \leq_q) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{a})])] \to$
$(F(a) \to \neg\ (a \ni (b \ni\ \leq_q) \to \neg\ F(b))))$ (γ

(Ib) : — — — — — — — —

$\vdash a \ni (b \ni\ \leq_q) \to$
$(\forall\mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{d}) \to (a \ni (\mathfrak{d} \ni\ \leq_q) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{a})])] \to$
$(F(a) \to F(b)))$ (152

———— • ————

150 $\vdash \forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathrm{anz}\,(\mathfrak{d} \ni\ \leq_{\mathrm{nf}}) \ni \mathrm{nf}) \to (\mathrm{anz}\,(0) \ni (\mathfrak{d} \ni\ \leq_{\mathrm{nf}}) \to$
$\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni \mathrm{nf}) \to \mathfrak{a} \ni (\mathrm{anz}\,(\mathfrak{a} \ni\ \leq_{\mathrm{nf}}) \ni \mathrm{nf})])]$

(152) : ————————

$$\vdash \text{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(b\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow (\text{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(\text{anz}\,(0)\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}})\,\text{ə}\,\text{nf}) \rightarrow b\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(b\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}})\,\text{ə}\,\text{nf})) \qquad (153$$

———————— • ————————

S.145 |

§ 118. *Zerlegung.*

Es bleibt noch der Satz

$$,\ \vdash \text{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(\text{anz}\,(0)\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}})\,\text{ə}\,\text{nf})\ ‘$$

zu beweisen. Wir haben nach (102)

$$,\ \vdash \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(0)\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow \varepsilon = \text{anz}\,(0)))) = \text{anz}\,(0) \rightarrow (\text{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(0)\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow \text{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(\text{anz}\,(0)\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}})\,\text{ə}\,\text{nf}))\ ‘$$

Hier können wir (140) anwenden. Wir haben dann auch noch den Satz

$$,\ \vdash \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(0)\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow \varepsilon = \text{anz}\,(0)))) = \text{anz}\,(0)\ ‘$$

zu beweisen. Wir benutzen den Satz (97), indem wir zeigen, dass unter den $\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(0)\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow \varepsilon = \text{anz}\,(0)))$-Begriff kein Gegenstand fällt. Dies folgt leicht aus

$$,\ \vdash a\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(0)\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow a = \text{anz}\,(0)\ ‘$$

d. h. der mit $\text{anz}\,(0)$ endenden Anzahlenreihe gehört nur $\text{anz}\,(0)$ selbst an. Dieser Satz folgt aus (126) und (130).

§ 119. *Aufbau.*

126 $\vdash \neg\ a\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(0)\,\text{ə}\ <_{\text{nf}})$

$(130):$ ————————

$\vdash a\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(0)\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow \text{anz}\,(0) = a$ $\qquad(\alpha$

$(IIIf):$ – – – – – – – – –

$\vdash a\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(0)\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow a = \text{anz}\,(0)$ $\qquad(\beta$

$(58):$ ————————

$\vdash \neg\ a\,\text{ə}\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(0)\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow \varepsilon = \text{anz}\,(0)))$ $\qquad(\gamma$

$\smile$

$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a}\,\text{ə}\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(0)\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow \varepsilon = \text{anz}\,(0)))]$ $\qquad(\delta$

$(97):$ ————————

$\vdash \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(0)\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow \varepsilon = \text{anz}\,(0)))) = \text{anz}\,(0)$ $\qquad(\varepsilon$

$(102):$ ————————

$\vdash \text{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(0)\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow \text{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(\text{anz}\,(0)\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}})\,\text{ə}\,\text{nf})$ $\qquad(\zeta$

$(140)::$ ————————

$\vdash \text{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(\text{anz}\,(0)\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}})\,\text{ə}\,\text{nf})$ $\qquad(154$

$(153):$ ————————

$\vdash \text{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(b\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow b\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(b\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}})\,\text{ə}\,\text{nf})$ $\qquad(155$

Θ. Einige Folgesätze.

§ 120. *Zerlegung.*

Wir können zunächst aus (155) leicht folgern, dass es zu jeder endlichen Anzahl eine unmittelbar auf sie folgende giebt. Hiermit ist gesagt, dass die mit anz (0) anfangende Anzahlenreihe ohne Ende fortläuft.

Ferner beweisen wir einen Satz, der unser Zählen begründet, indem er besagt, dass n die Anzahl ist, die einem Begriffe zukommt, wenn eine Beziehung diesen Begriff in die Anzahlenreihe bis n einschliesslich und mit Ausschluss der anz (0) abbildet und wenn die Umkehrung dieser Beziehung jene Anzahlenreihe in den Begriff abbildet, falls n eine endliche Anzahl ist.

Dieser Satz folgt leicht aus dem Satze

$$, \vdash \text{anz}\,(0) \text{ ə } (n \text{ ə } \leq_{\text{nf}}) \rightarrow n = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } (n \text{ ə } \leq_{\text{nf}}) \rightarrow \varepsilon = \text{anz}\,(0)))) \quad ‘$$

den wir mit (87) und (155) beweisen.

| S.146

§ 121. *Aufbau.*

$$155 \quad \vdash \text{anz}\,(0) \text{ ə } (b \text{ ə } \leq_{\text{nf}}) \rightarrow b \text{ ə } (\text{anz}\,(b \text{ ə } \leq_{\text{nf}}) \text{ ə nf})$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ b \text{ ə } (\text{anz}\,(b \text{ ə } \leq_{\text{nf}}) \text{ ə nf}) \rightarrow \neg\ \text{anz}\,(0) \text{ ə } (b \text{ ə } \leq_{\text{nf}}) \qquad (\alpha$$

$$(IIa) :: \text{— — — — — — — —}$$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ b \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə nf})] \rightarrow \neg\ \text{anz}\,(0) \text{ ə } (b \text{ ə } \leq_{\text{nf}}) \qquad (156$$

$$\times$$

$$\vdash \text{anz}\,(0) \text{ ə } (b \text{ ə } \leq_{\text{nf}}) \rightarrow \neg\ \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ b \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə nf})] \qquad (157$$

———— • ————

$$87 \quad \vdash \neg\ n = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } v \rightarrow \varepsilon = c))) \rightarrow (c \text{ ə } v \rightarrow \neg\ n \text{ ə } (\text{anz}\,(v) \text{ ə nf}))$$

$$\times$$

$$\vdash n \text{ ə } (\text{anz}\,(v) \text{ ə nf}) \rightarrow (c \text{ ə } v \rightarrow n = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } v \rightarrow \varepsilon = c)))) \qquad (158$$

$$(IIIa) : \text{————————}$$

$$\vdash a = \text{anz}\,(v) \rightarrow (n \text{ ə } (a \text{ ə nf}) \rightarrow (c \text{ ə } v \rightarrow n = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } v \rightarrow \varepsilon = c))))) \qquad (159$$

———— • ————

$$155 \quad \vdash \text{anz}\,(0) \text{ ə } (n \text{ ə } \leq_{\text{nf}}) \rightarrow n \text{ ə } (\text{anz}\,(n \text{ ə } \leq_{\text{nf}}) \text{ ə nf})$$

$$(158) : \text{— — — — — — — —}$$

$$\vdash \text{anz}\,(0) \text{ ə } (n \text{ ə } \leq_{\text{nf}}) \rightarrow n = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \text{ ə } (n \text{ ə } \leq_{\text{nf}}) \rightarrow \varepsilon = \text{anz}\,(0)))) \qquad (160$$

$$(IIIa) : \text{— — — — — — — —}$$

$$\vdash \text{anz}(0) \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}) \rightarrow$$
$$(\text{anz}(u) = \text{anz}(\text{ext}\,\varepsilon(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}) \rightarrow \varepsilon = \text{anz}(0)))) \rightarrow \text{anz}(u) = n) \qquad (\alpha$$

$$(32) :: \quad - - - - - - - - - -$$

$$\vdash \text{anz}(0) \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}) \rightarrow$$
$$(\text{ext}\,\varepsilon(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}) \rightarrow \varepsilon = \text{anz}(0))) \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} q^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow$$
$$(u \mathbin{\text{ə}} [\text{ext}\,\varepsilon(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}) \rightarrow \varepsilon = \text{anz}(0))) \mathbin{\text{ə}} q :\twoheadrightarrow] \rightarrow \text{anz}(u) = n)) \qquad (161$$

I. Beweis einiger Sätze von der Anzahl Endlos.

a) Beweis des Satzes

$$,\vdash \neg\ \text{anz}(0) \mathbin{\text{ə}} (\infty \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}})‘$$

§ 122. *Zerlegung.*

Es giebt Anzahlen, die nicht der mit anz (0) anfangenden Anzahlenreihe angehören, oder, wie wir auch sagen, die nicht endlich, die unendlich sind. Eine solche ist die des Begriffes *endliche Anzahl*; ich will sie *Endlos* nennen und mit ,∞‘ bezeichnen. Ich definire sie so:

$$\infty := \text{anz}(\text{anz}(0) \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}^{-1}) \qquad (\text{M}$$

Es ist nämlich anz $(0) \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}^{-1}$ der Umfang des Begriffes *endliche Anzahl*. Der in der Ueberschrift genannte Satz besagt nun, dass die Anzahl Endlos keine endliche Anzahl ist. Wir beweisen ihn, wie im § 84 meiner Grundlagen angedeutet ist, indem wir zeigen, dass die Anzahl Endlos auf sich selbst in der Anzahlenreihe folgt, was nach (145) keine endliche Anzahl thut. Zunächst ist zu zeigen, dass Endlos zu sich selbst in der nf-Beziehung steht:

$$,\ \vdash \infty \mathbin{\text{ə}} (\infty \mathbin{\text{ə}} \text{nf})‘ \qquad (\alpha$$

S.149 | Diesen Satz führen wir zurück auf

$$,\ \vdash \text{anz}(\text{ext}\,\varepsilon(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}(0) \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}^{-1}) \rightarrow \varepsilon = \text{anz}(0)))) = \infty\ ‘ \qquad (\beta$$

der aus den Sätzen

$$,\ \vdash \text{ext}\,\varepsilon(\text{anz}(0) \mathbin{\text{ə}} (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}})) \mathbin{\text{ə}} [\text{ext}\,\varepsilon(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}(0) \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}^{-1}) \rightarrow \varepsilon = \text{anz}(0))) \mathbin{\text{ə}} \text{nf} :\twoheadrightarrow]\ ‘ \qquad (\gamma$$

und

$$,\ \vdash \text{ext}\,\varepsilon(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}(0) \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}^{-1}) \rightarrow \varepsilon = \text{anz}(0))) \mathbin{\text{ə}}$$
$$(\text{ext}\,\varepsilon(\text{anz}(0) \mathbin{\text{ə}} (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}})) \mathbin{\text{ə}} \text{nf}^{-1} :\twoheadrightarrow)\ ‘ \qquad (\delta$$

folgt. Um (γ) abzuleiten, haben wir nach (11) zu zeigen

$$,\ \vdash \forall a\,[d \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \text{nf}) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}(0) \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}^{-1}) \rightarrow \varepsilon = \text{anz}(0)))] \rightarrow$$
$$\neg\ d \mathbin{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon(\text{anz}(0) \mathbin{\text{ə}} (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}))\ ‘ \qquad (\varepsilon$$

was leicht zurückzuführen ist auf den Satz

$$,\ \vdash (a \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}(0) \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}^{-1}) \rightarrow a = \text{anz}(0)) \rightarrow (d \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} \text{nf}) \rightarrow \neg\ \text{anz}(0) \mathbin{\text{ə}} (d \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}))\ ‘ \qquad (\zeta$$

der in die Sätze

$$,\ \vdash d \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} \text{nf}) \rightarrow (\text{anz}(0) \mathbin{\text{ə}} (d \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}) \rightarrow \neg\ a = \text{anz}(0))\ ‘ \qquad (\eta$$

und (137) zerfällt.

§ 123. *Aufbau.*

$$
\begin{array}{rll}
126 & \vdash \neg\ \text{anz}\,(0) \ni (\text{anz}\,(0) \ni\ <_{\text{nf}}) & \\
(IIId): & \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} & \\
 & \vdash \text{anz}\,(0) \ni (a \ni\ <_{\text{nf}}) \to \neg\ a = \text{anz}\,(0) & (\alpha \\
(134) :: & - - - - - - - - & \\
 & \vdash \text{anz}\,(0) \ni (d \ni\ \leq_{\text{nf}}) \to (d \ni (a \ni \text{nf}) \to \neg\ a = \text{anz}\,(0)) & (\beta \\
(If): & - - - - - - - - & \\
 & \vdash a \ni (\text{anz}\,(0) \ni\ \leq_{\text{nf}}^{-1}) \to (\text{anz}\,(0) \ni (d \ni\ \leq_{\text{nf}}) \to (d \ni (a \ni \text{nf}) \to & \\
 & \neg\ (a \ni (\text{anz}\,(0) \ni\ \leq_{\text{nf}}^{-1}) \to a = \text{anz}\,(0)))) & (\gamma \\
(22) :: & - - - - - - - - & \\
 & \vdash \text{anz}\,(0) \ni (a \ni\ \leq_{\text{nf}}) \to (\text{anz}\,(0) \ni (d \ni\ \leq_{\text{nf}}) \to (d \ni (a \ni \text{nf}) \to & \\
 & \neg\ (a \ni (\text{anz}\,(0) \ni\ \leq_{\text{nf}}^{-1}) \to a = \text{anz}\,(0)))) & (\delta \\
(137) :: & - - - - - - - - & \\
 & \vdash \text{anz}\,(0) \ni (d \ni\ \leq_{\text{nf}}) \to (d \ni (a \ni \text{nf}) \to & \\
 & \neg\ (a \ni (\text{anz}\,(0) \ni\ \leq_{\text{nf}}^{-1}) \to a = \text{anz}\,(0))) & (\varepsilon
\end{array}
$$

$$\times$$

$$
\begin{array}{rll}
 & \vdash (a \ni (\text{anz}\,(0) \ni\ \leq_{\text{nf}}^{-1}) \to a = \text{anz}\,(0)) \to & \\
 & (d \ni (a \ni \text{nf}) \to \neg\ \text{anz}\,(0) \ni (d \ni\ \leq_{\text{nf}})) & (\zeta \\
(59) :: & - - - - - - - - & \\
 & \vdash \neg\ a \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni (\text{anz}\,(0) \ni\ \leq_{\text{nf}}^{-1}) \to \varepsilon = \text{anz}\,(0))) \to & \\
 & (d \ni (a \ni \text{nf}) \to \neg\ \text{anz}\,(0) \ni (d \ni\ \leq_{\text{nf}})) & \\
(IIa) :: & - - - - - - - - & \\
 & \vdash \forall \mathfrak{a}\,[d \ni (\mathfrak{a} \ni \text{nf}) \to & \\
 & \neg\ \mathfrak{a} \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni (\text{anz}\,(0) \ni\ \leq_{\text{nf}}^{-1}) \to \varepsilon = \text{anz}\,(0)))] \to & \\
 & (d \ni (a \ni \text{nf}) \to \neg\ \text{anz}\,(0) \ni (d \ni\ \leq_{\text{nf}})) &
\end{array}
$$

$$\times$$

S.152

$$
\begin{array}{l}
\vdash \forall \mathfrak{a}\,[d \ni (\mathfrak{a} \ni \text{nf}) \to \\
\neg\ \mathfrak{a} \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni (\text{anz}\,(0) \ni\ \leq_{\text{nf}}^{-1}) \to \varepsilon = \text{anz}\,(0)))] \to \\
(\text{anz}\,(0) \ni (d \ni\ \leq_{\text{nf}}) \to \neg\ d \ni (a \ni \text{nf}))
\end{array}
$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \mathrm{nf}) \rightarrow$$
$$\neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \le_{\mathrm{nf}}^{-1}) \rightarrow \varepsilon = \mathrm{anz}\,(0)))] \rightarrow$$
$$(\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, (d \,\text{ə}\, \le_{\mathrm{nf}}) \rightarrow \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \mathrm{nf})])$$

(156) : — — — — — — — — —

$$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \mathrm{nf}) \rightarrow$$
$$\neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \le_{\mathrm{nf}}^{-1}) \rightarrow \varepsilon = \mathrm{anz}\,(0)))] \rightarrow$$
$$(\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, (d \,\text{ə}\, \le_{\mathrm{nf}}) \rightarrow \neg\ \mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, (d \,\text{ə}\, \le_{\mathrm{nf}}))$$

(Ig) : — — — — — — — — —

$$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \mathrm{nf}) \rightarrow$$
$$\neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \le_{\mathrm{nf}}^{-1}) \rightarrow \varepsilon = \mathrm{anz}\,(0)))] \rightarrow$$
$$\neg\ \mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, (d \,\text{ə}\, \le_{\mathrm{nf}})$$

(77) : ————————————

$$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \mathrm{nf}) \rightarrow$$
$$\neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \le_{\mathrm{nf}}^{-1}) \rightarrow \varepsilon = \mathrm{anz}\,(0)))] \rightarrow$$
$$\neg\ d \,\text{ə}\, \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, (\varepsilon \,\text{ə}\, \le_{\mathrm{nf}}))$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \mathrm{nf}) \rightarrow$$
$$\neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \le_{\mathrm{nf}}^{-1}) \rightarrow \varepsilon = \mathrm{anz}\,(0)))] \rightarrow$$
$$\neg\ \mathfrak{d} \,\text{ə}\, \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, (\varepsilon \,\text{ə}\, \le_{\mathrm{nf}}))]$$

(11) : ————————————

$$\vdash \mathrm{funk}\,(\mathrm{nf}) \rightarrow \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, (\varepsilon \,\text{ə}\, \le_{\mathrm{nf}})) \,\text{ə}$$
$$[\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \le_{\mathrm{nf}}^{-1}) \rightarrow \varepsilon = \mathrm{anz}\,(0))) \,\text{ə}\, \mathrm{nf}\ :\twoheadrightarrow]$$

(71) :: ————————————

$$\vdash \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, (\varepsilon \,\text{ə}\, \le_{\mathrm{nf}})) \,\text{ə}$$
$$[\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \le_{\mathrm{nf}}^{-1}) \rightarrow \varepsilon = \mathrm{anz}\,(0))) \,\text{ə}\, \mathrm{nf}\ :\twoheadrightarrow] \qquad (162$$

§ 124. *Zerlegung.*

Statt des Satzes (δ) des § 122 beweisen wir zunächst den folgenden

$$,\ \vdash \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, (c \,\text{ə}\, \le_q^{-1}) \rightarrow \varepsilon = c)) \,\text{ə}\, (\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(c \,\text{ə}\, (\varepsilon \,\text{ə}\, \le_q)) \,\text{ə}\, q^{-1} :\twoheadrightarrow)\ ‘$$

Dazu bedürfen wir des Satzes

$$,\ \vdash \forall\mathfrak{a}\,[d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q^{-1}) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(c \,\text{ə}\, (\varepsilon \,\text{ə}\, \le_q))] \rightarrow$$
$$\neg\ d \,\text{ə}\, \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, (c \,\text{ə}\, \le_q^{-1}) \rightarrow \varepsilon = c))\ ‘$$

der auf den Satz

$$,\ \vdash \forall\mathfrak{e}\,[\mathfrak{e} \,\text{ə}\, (d \,\text{ə}\, q) \rightarrow \neg\ c \,\text{ə}\, (\mathfrak{e} \,\text{ə}\, \le_q)] \rightarrow (c \,\text{ə}\, (d \,\text{ə}\, \le_q) \rightarrow d = c)\ ‘$$

zurückzuführen ist. Dieser folgt leicht aus (142).

§ 125. *Aufbau.*

130 $\vdash c \mathbin{ə} (d \mathbin{ə} \le_q) \to (\neg\ c \mathbin{ə} (d \mathbin{ə} <_q) \to d = c)$

(142) :: — — — — — — — — —

$\vdash c \mathbin{ə} (d \mathbin{ə} \le_q) \to (\forall \mathfrak{e}\, [\mathfrak{e} \mathbin{ə} (d \mathbin{ə} q) \to \neg\ c \mathbin{ə} (\mathfrak{e} \mathbin{ə} \le_q)] \to d = c)$ (α

———— • ————

22 $\vdash a \mathbin{ə} (d \mathbin{ə} q) \to d \mathbin{ə} (a \mathbin{ə} q^{-1})$

(IIa) : — — — — — — — —

S.153

$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [d \mathbin{ə} (\mathfrak{a} \mathbin{ə} q^{-1}) \to \neg\ \mathfrak{a} \mathbin{ə} \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (c \mathbin{ə} (\varepsilon \mathbin{ə} \le_q))] \to$
$(a \mathbin{ə} (d \mathbin{ə} q) \to \neg\ a \mathbin{ə} \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (c \mathbin{ə} (\varepsilon \mathbin{ə} \le_q)))$ (β

(82) : ————————

$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [d \mathbin{ə} (\mathfrak{a} \mathbin{ə} q^{-1}) \to \neg\ \mathfrak{a} \mathbin{ə} \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (c \mathbin{ə} (\varepsilon \mathbin{ə} \le_q))] \to$
$(a \mathbin{ə} (d \mathbin{ə} q) \to \neg\ c \mathbin{ə} (a \mathbin{ə} \le_q))$ (γ

$\smile$

$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [d \mathbin{ə} (\mathfrak{a} \mathbin{ə} q^{-1}) \to \neg\ \mathfrak{a} \mathbin{ə} \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (c \mathbin{ə} (\varepsilon \mathbin{ə} \le_q))] \to$
$\forall \mathfrak{e}\, [\mathfrak{e} \mathbin{ə} (d \mathbin{ə} q) \to \neg\ c \mathbin{ə} (\mathfrak{e} \mathbin{ə} \le_q)]$ (δ

(α) : — — — — — — — —

$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [d \mathbin{ə} (\mathfrak{a} \mathbin{ə} q^{-1}) \to \neg\ \mathfrak{a} \mathbin{ə} \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (c \mathbin{ə} (\varepsilon \mathbin{ə} \le_q))] \to$
$(c \mathbin{ə} (d \mathbin{ə} \le_q) \to d = c)$ (ε

(23) :: — — — — — — — —

$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [d \mathbin{ə} (\mathfrak{a} \mathbin{ə} q^{-1}) \to \neg\ \mathfrak{a} \mathbin{ə} \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (c \mathbin{ə} (\varepsilon \mathbin{ə} \le_q))] \to$
$(d \mathbin{ə} (c \mathbin{ə} \le_q^{-1}) \to d = c)$ (ζ

(58) : ————————

$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [d \mathbin{ə} (\mathfrak{a} \mathbin{ə} q^{-1}) \to \neg\ \mathfrak{a} \mathbin{ə} \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (c \mathbin{ə} (\varepsilon \mathbin{ə} \le_q))] \to$
$\neg\ d \mathbin{ə} \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \mathbin{ə} (c \mathbin{ə} \le_q^{-1}) \to \varepsilon = c))$ (η

$\smile$

$\vdash \forall \mathfrak{d}\, [\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \mathbin{ə} (\mathfrak{a} \mathbin{ə} q^{-1}) \to \neg\ \mathfrak{a} \mathbin{ə} \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (c \mathbin{ə} (\varepsilon \mathbin{ə} \le_q))] \to$
$\neg\ \mathfrak{d} \mathbin{ə} \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \mathbin{ə} (c \mathbin{ə} \le_q^{-1}) \to \varepsilon = c))]$ (ϑ

(11) : ————————

$\vdash \mathrm{funk}\, (q^{-1}) \to$
$\mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \mathbin{ə} (c \mathbin{ə} \le_q^{-1}) \to \varepsilon = c)) \mathbin{ə} (\mathrm{ext}\, \varepsilon\, (c \mathbin{ə} (\varepsilon \mathbin{ə} \le_q)) \mathbin{ə} q^{-1} :\twoheadrightarrow)$ (163

———— • ————

E $\vdash \mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\alpha \mathbin{ə} (\varepsilon \mathbin{ə} q)) = q^{-1}$

(44) : ————————

$\vdash F(\mathrm{ext}\, \varepsilon\, (a \mathbin{ə} (\varepsilon \mathbin{ə} q))) \to F(a \mathbin{ə} q^{-1})$ (164

———— • ————

89 $\vdash \text{funk}\,(\text{nf}^{-1})$

$(163):$ ————————

$\vdash \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}^{-1}) \to \varepsilon = \text{anz}\,(0))) \mathbin{\text{ə}}$
$(\text{ext}\,\varepsilon\,(\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}})) \mathbin{\text{ə}} \text{nf}^{-1} :\twoheadrightarrow)$ $(\alpha$

$(32):$ ————————

$\vdash \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}})) \mathbin{\text{ə}}$
$[\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}^{-1}) \to \varepsilon = \text{anz}\,(0))) \mathbin{\text{ə}} \text{nf} :\twoheadrightarrow] \to$
$\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}))) =$
$\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}^{-1}) \to \varepsilon = \text{anz}\,(0))))$ $(\beta$

$(162)::$ ————————

$\vdash \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}))) =$
$\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}^{-1}) \to \varepsilon = \text{anz}\,(0))))$ $(\gamma$

$(164):$ ————————

$\vdash \text{anz}\,(\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}^{-1}) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}^{-1}) \to \varepsilon = \text{anz}\,(0))))$ $(\delta$

$(IIIc):$ ————————

S.154

$\vdash \text{anz}\,(\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}^{-1})^{\#131} = \infty \to$
$\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}^{-1}) \to \varepsilon = \text{anz}\,(0)))) = \infty$ $(\varepsilon$

$(101):$ – – – – – – – –

$\vdash \text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}^{-1}) \to (\text{anz}\,(\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}^{-1}) = \infty \to \infty \mathbin{\text{ə}} (\infty \mathbin{\text{ə}} \text{nf}))$ $(\zeta$

$(22, \text{M})::$ = = = = = = = =

$\vdash \text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}) \to \infty \mathbin{\text{ə}} (\infty \mathbin{\text{ə}} \text{nf})$ $(\eta$

$(140)::$ ————————

$\vdash \infty \mathbin{\text{ə}} (\infty \mathbin{\text{ə}} \text{nf})$ (165

$(131):$ ————————

$\vdash \infty \mathbin{\text{ə}} (\infty \mathbin{\text{ə}} <_{\text{nf}})$ (166

———— • ————

145 $\vdash \text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (\infty \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}) \to \neg\ \infty \mathbin{\text{ə}} (\infty \mathbin{\text{ə}} <_{\text{nf}})$

$\times$

$\vdash \infty \mathbin{\text{ə}} (\infty \mathbin{\text{ə}} <_{\text{nf}}) \to \neg\ \text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (\infty \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}})$ $(\alpha$

$(166)::$ ————————

$\vdash \neg\ \text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (\infty \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}})$ (167

b) Beweis des Satzes

$$,\vdash \text{anz}\,(0) \ni (\text{anz}\,(v) \ni \ \leq_{\text{nf}}\,) \rightarrow (\infty = \text{anz}\,(u) \rightarrow$$
$$\infty = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \ \varepsilon \ni u \rightarrow \varepsilon \ni v)))`$$

§ 126. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun den Satz:

„Wenn Endlos die Anzahl eines Begriffes ist und wenn die Anzahl eines andern Begriffes endlich ist, so ist Endlos die Anzahl des Begriffes *unter den ersten oder unter den zweiten Begriff fallend*"

mit (144), indem wir statt der Functionsmarke ‚$F(\xi)$' nehmen

$$,\forall \mathfrak{v}\,[\xi = \text{anz}\,(\mathfrak{v}) \rightarrow \infty = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \ \varepsilon \ni u \rightarrow \varepsilon \ni \mathfrak{v}))]\quad `$$

und haben zunächst den Satz

$$,\forall \mathfrak{v}\,[d = \text{anz}\,(\mathfrak{v}) \rightarrow \infty = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \ \varepsilon \ni u \rightarrow \varepsilon \ni \mathfrak{v}))] \rightarrow (d \ni (a \ni \text{nf}\,) \rightarrow$$
$$(a = \text{anz}\,(v) \rightarrow \infty = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \ \varepsilon \ni u \rightarrow \varepsilon \ni v))))\quad ` \qquad (\alpha$$

abzuleiten. Wir haben nach (IIa)

$$,\ \vdash \forall \mathfrak{v}\,[d = \text{anz}\,(\mathfrak{v}) \rightarrow \infty = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \ \varepsilon \ni u \rightarrow \varepsilon \ni \mathfrak{v}))] \rightarrow$$
$$(d = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \ (\varepsilon \ni v \rightarrow \varepsilon = c))) \rightarrow$$
$$\infty = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \ \varepsilon \ni u \rightarrow \varepsilon \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \ (\varepsilon \ni v \rightarrow \varepsilon = c)))))\quad `$$

Hierauf können wir nun (159) anwenden. Um ■→das gewünschte Hinterglied←■[169] [#132] zu erhalten, müssen wir den Satz

$$,\ \vdash \infty = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \ \varepsilon \ni u \rightarrow \varepsilon \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \ (\varepsilon \ni v \rightarrow \varepsilon = c)))) \rightarrow$$
$$\infty = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \ \varepsilon \ni u \rightarrow \varepsilon \ni v))\quad ` \qquad (\beta$$

beweisen. Zu diesem Zwecke unterscheiden wir die Fälle, dass c unter den u-Begriff fällt, und den entgegengesetzten. Wir haben so die Sätze | S.150

$$,\ \vdash c \ni u \rightarrow \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \ \varepsilon \ni u \rightarrow \varepsilon \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \ (\varepsilon \ni v \rightarrow \varepsilon = c))) =$$
$$\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \ \varepsilon \ni u \rightarrow \varepsilon \ni v)\quad ` \qquad (\gamma$$

$$,\ \vdash \neg\ \ c \ni u \rightarrow \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \ \varepsilon \ni u \rightarrow \varepsilon \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \ (\varepsilon \ni v \rightarrow \varepsilon = c))) =$$
$$\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \ (\varepsilon \ni \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \ \varepsilon \ni u \rightarrow \varepsilon \ni v) \rightarrow \varepsilon = c))\quad ` \qquad (\delta$$

Im zweiten Falle bedürfen wir noch des Satzes

$$,\ \vdash \infty = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \ (\varepsilon \ni w \rightarrow \varepsilon = c))) \rightarrow \infty = \text{anz}\,(w)\quad `$$

der leicht aus (165) und (69) folgt.

§ 127. *Aufbau.*

$$\text{IIId}\quad \vdash \neg\ \ c \ni w \rightarrow (a \ni w \rightarrow \neg\ \ a = c)$$
$$(If):\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$
$$\vdash \neg\ \ c \ni w \rightarrow (a \ni w \rightarrow \neg\ \ (a \ni w \rightarrow a = c)) \qquad (\alpha$$
$$(IVa):\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$

[169]das gewünschte Oberglied

[#132]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

$$\vdash (\neg\ (a \text{ ə } w \to a = c) \to a \text{ ə } w) \to$$
$$(\neg\ c \text{ ə } w \to (\text{—} a \text{ ə } w) = (\neg\ (a \text{ ə } w \to a = c))) \qquad (\beta$$

(Id) :: ————————————

$$\vdash \neg\ c \text{ ə } w \to (\text{—} a \text{ ə } w) = (\neg\ (a \text{ ə } w \to a = c)) \qquad (\gamma$$

(77) : ————————————

$$\vdash \neg\ c \text{ ə } w \to (\text{—} a \text{ ə } w) = [\text{—} a \text{ ə } \text{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \text{ ə } w \to \varepsilon = c))] \qquad (\delta$$

$$\smile$$

$$\vdash \neg\ c \text{ ə } w \to \forall \mathfrak{a}\, [(\text{—} \mathfrak{a} \text{ ə } w) = [\text{—} \mathfrak{a} \text{ ə } \text{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \text{ ə } w \to \varepsilon = c))]] \qquad (\varepsilon$$

(96) : – – – – – – – – –

$$\vdash \neg\ c \text{ ə } w \to \text{anz}\,(w) = \text{anz}\,(\text{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \text{ ə } w \to \varepsilon = c))) \qquad (\zeta$$

$(IIIa)$: – – – – – – – – –

$$\vdash \neg\ c \text{ ə } w \to (n = \text{anz}\,(\text{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \text{ ə } w \to \varepsilon = c))) \to n = \text{anz}\,(w)) \qquad (168$$

———— • ————

69 $\vdash \text{anz}\,(\text{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \text{ ə } w \to \varepsilon = c))) = m \to$
$(c \text{ ə } w \to (\neg\ \text{anz}\,(w) = n \to \neg\ m \text{ ə } (n \text{ ə } \text{nf})))$

$$\times$$

$$\vdash \text{anz}\,(\text{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \text{ ə } w \to \varepsilon = c))) = m \to$$
$$(c \text{ ə } w \to (m \text{ ə } (n \text{ ə } \text{nf}) \to \text{anz}\,(w) = n)) \qquad (169$$

$(IIIf)$ :: – – – – – – – – –

$$\vdash m = \text{anz}\,(\text{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \text{ ə } w \to \varepsilon = c))) \to$$
$$(c \text{ ə } w \to (m \text{ ə } (n \text{ ə } \text{nf}) \to \text{anz}\,(w) = n)) \qquad (\alpha$$

$(IIIf)$: – – – – – – – – –

S.156

$$\vdash m = \text{anz}\,(\text{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \text{ ə } w \to \varepsilon = c))) \to$$
$$(c \text{ ə } w \to (m \text{ ə } (n \text{ ə } \text{nf}) \to n = \text{anz}\,(w))) \qquad (170$$

———— • ————

165 $\vdash \infty \text{ ə } (\infty \text{ ə } \text{nf})$

(170) : ————————————

$$\vdash \infty = \text{anz}\,(\text{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \text{ ə } w \to \varepsilon = c))) \to (c \text{ ə } w \to \infty = \text{anz}\,(w)) \qquad (\alpha$$

(168) : ·—·—·—·—·—·—·—·

$$\vdash \infty = \text{anz}\,(\text{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \text{ ə } w \to \varepsilon = c))) \to \infty = \text{anz}\,(w) \qquad (171$$

———— • ————

If $\vdash a \text{ ə } v \to (\neg\ a = c \to \neg\ (a \text{ ə } v \to a = c))$

(Ic, Id) :: = = = = = = = =

$$\vdash \neg\ ((\neg\ a \text{ ə } u \to a \text{ ə } v) \to a = c) \to$$
$$(\neg\ a \text{ ə } u \to \neg\ (a \text{ ə } v \to a = c)) \qquad (\alpha$$

(IVa) : ————————————

$$\vdash ((\neg\ a \ni u \to \neg\ (a \ni v \to a = c)) \to$$
$$\neg\ ((\neg\ a \ni u \to a \ni v) \to a = c)) \to$$
$$(\neg\ a \ni u \to \neg\ (a \ni v \to a = c)) =$$
$$(\neg\ ((\neg\ a \ni u \to a \ni v) \to a = c)) \qquad (\beta$$

———— ● ————

$$\text{Ic} \quad \vdash \neg\ (a \ni v \to a = c) \to \neg\ a = c$$
$$(I) :: \quad - - - - - - - -$$
$$\vdash (\neg\ a \ni u \to \neg\ (a \ni v \to a = c)) \to (\neg\ a \ni u \to \neg\ a = c) \qquad (\gamma$$
$$(IIId) : \quad \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot$$
$$\vdash \neg\ c \ni u \to ((\neg\ a \ni u \to \neg\ (a \ni v \to a = c)) \to \neg\ a = c) \qquad (\delta$$
$$(If) : \quad - - - - - - - -$$
$$\vdash (\neg\ a \ni u \to a \ni v) \to (\neg\ c \ni u \to$$
$$((\neg\ a \ni u \to \neg\ (a \ni v \to a = c)) \to$$
$$\neg\ ((\neg\ a \ni u \to a \ni v) \to a = c))) \qquad (\varepsilon$$

———— ● ————

$$\text{Id} \quad \vdash \neg\ (a \ni v \to a = c) \to a \ni v$$
$$(I) :: \quad - - - - - - - -$$
$$\vdash (\neg\ a \ni u \to \neg\ (a \ni v \to a \ni c)) \to (\neg\ a \ni u \to a \ni v) \qquad (\zeta$$
$$(\varepsilon) : \quad - - - - - - - -$$
$$\vdash \neg\ c \ni u \to ((\neg\ a \ni u \to \neg\ (a \ni v \to a = c)) \to$$
$$\neg\ ((\neg\ a \ni u \to a \ni v) \to a = c)) \qquad (\eta$$
$$(\beta) : \quad - - - - - - - -$$

S.157

$$\vdash \neg\ c \ni u \to (\neg\ a \ni u \to \neg\ (a \ni v \to a = c)) =$$
$$(\neg\ ((\neg\ a \ni u \to a \ni v) \to a = c)) \qquad (\vartheta$$
$$(77) : \quad \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\vdash \neg\ c \ni u \to (\neg\ a \ni u \to \neg\ (a \ni v \to a = c)) =$$
$$(\neg\ (a \ni \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ \varepsilon \ni u \to \varepsilon \ni v) \to a = c)) \qquad (\iota$$

$$\smile$$

$$\vdash \neg\ c \ni u \to \forall \mathfrak{a}\, [(\neg\ \mathfrak{a} \ni u \to \neg\ (\mathfrak{a} \ni v \to \mathfrak{a} = c)) =$$
$$(\neg\ (\mathfrak{a} \ni \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ \varepsilon \ni u \to \varepsilon \ni v) \to \mathfrak{a} = c))] \qquad (\kappa$$
$$(Va) : \quad - - - - - - - -$$
$$\vdash \neg\ c \ni u \to \mathrm{anz}\, (\mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ \varepsilon \ni u \to \neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c))) =$$
$$\mathrm{anz}\, (\mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \ni \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ \varepsilon \ni u \to \varepsilon \ni v) \to \varepsilon = c))) \qquad (\lambda$$
$$(IIIc) : \quad - - - - - - - -$$
$$\vdash \neg\ c \ni u \to (\infty = \mathrm{anz}\, (\mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ \varepsilon \ni u \to \neg\ (\varepsilon \ni v \to \varepsilon = c))) \to$$
$$\infty = \mathrm{anz}\, (\mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ (\varepsilon \ni \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\neg\ \varepsilon \ni u \to \varepsilon \ni v) \to \varepsilon = c)))) \qquad (\mu$$
$$(171) : \quad - - - - - - - -$$

$\vdash \neg\ c \ni u \rightarrow (\infty = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \ni u \rightarrow \neg\ (\varepsilon \ni v \rightarrow \varepsilon = c))) \rightarrow$
$\infty = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \ni u \rightarrow \varepsilon \ni v)))$ $(\nu$

———— • ————

Ia $\vdash B \rightarrow (\neg\ B \rightarrow A)$
$(I):$ — — — — — — — —
$\vdash B \rightarrow ((\neg\ B \rightarrow C) \rightarrow (\neg\ B \rightarrow A))$ $(\xi$
$(IVa):$ — — — — — — — —
$\vdash B \rightarrow (((\neg\ B \rightarrow A) \rightarrow (\neg\ B \rightarrow C)) \rightarrow$
$(\neg\ B \rightarrow A) = (\neg\ B \rightarrow C))$ $(o$
$(\xi)::$ — — — — — — — —
$\vdash B \rightarrow (\neg\ B \rightarrow A) = (\neg\ B \rightarrow C)$ $(\pi$

———— • ————

Id $\vdash \neg\ (a \ni v \rightarrow a = c) \rightarrow a \ni v$
$(IVa):$ ————————
$\vdash (a \ni v \rightarrow \neg\ (a \ni v \rightarrow a = c)) \rightarrow$
$(\neg\ (a \ni v \rightarrow a = c)) = (\text{—}\, a \ni v)$ $(\rho$
$(If)::$ — — — — — — — —

S.158

$\vdash \neg\ a = c \rightarrow (\neg\ (a \ni v \rightarrow a = c)) = (\text{—}\, a \ni v)$ $(\sigma$
$(IIIb)::$ — — — — — — — —
$\vdash \neg\ a \ni u \rightarrow (c \ni u \rightarrow (\neg\ (a \ni v \rightarrow a = c)) = (\text{—}\, a \ni v))$ $(\tau$
$(IIIh):$ — — — — — — — —
$\vdash \neg\ a \ni u \rightarrow (c \ni u \rightarrow$
$(\neg\ a \ni u \rightarrow \neg\ (a \ni v \rightarrow a = c)) = (\neg\ a \ni u \rightarrow a \ni v))$ $(\upsilon$
$(\pi):$ ·—·—·—·—·—·—·—·
$\vdash c \ni u \rightarrow (\neg\ a \ni u \rightarrow \neg\ (a \ni v \rightarrow a = c)) = (\neg\ a \ni u \rightarrow a \ni v)$ $(\phi$

$\vdash c \ni u \rightarrow$
$\forall \mathfrak{a}\,[(\neg\ \mathfrak{a} \ni u \rightarrow \neg\ (\mathfrak{a} \ni v \rightarrow \mathfrak{a} = c)) = (\neg\ \mathfrak{a} \ni u \rightarrow \mathfrak{a} \ni v)]$ $(\chi$
$(Va):$ — — — — — — — —
$\vdash c \ni u \rightarrow$
$\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \ni u \rightarrow \neg\ (\varepsilon \ni v \rightarrow \varepsilon = c))) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \ni u \rightarrow \varepsilon \ni v))$ $(\psi$
$(IIIc):$ — — — — — — — —
$\vdash c \ni u \rightarrow (\infty = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \ni u \rightarrow \neg\ (\varepsilon \ni v \rightarrow \varepsilon = c))) \rightarrow$
$\infty = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \ni u \rightarrow \varepsilon \ni v)))$ $(\omega$
$(\nu):$ ·—·—·—·—·—·—·—·

$$\vdash \infty = \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, u \to \neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, v \to \varepsilon = c))) \to$$
$$\infty = \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon \,\text{ə}\, v)) \qquad (\alpha\text{'}$$

(75) : ―――――――――――

$$\vdash \infty = \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon \,\text{ə}\, \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, v \to \varepsilon = c)))) \to$$
$$\infty = \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon \,\text{ə}\, v)) \qquad (\beta\text{'}$$

(IIa) :: – – – – – – – –

$$\vdash \forall \mathfrak{v}\,[d = \mathrm{anz}\,(\mathfrak{v}) \to \infty = \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon \,\text{ə}\, \mathfrak{v}))] \to$$
$$(d = \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \,\text{ə}\, v \to \varepsilon = c))) \to \infty = \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon \,\text{ə}\, v))) \qquad (\gamma\text{'}$$

(159) :: – – – – – – – –

$$\vdash \forall \mathfrak{v}\,[d = \mathrm{anz}\,(\mathfrak{v}) \to \infty = \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon \,\text{ə}\, \mathfrak{v}))] \to (a = \mathrm{anz}\,(v) \to$$
$$(d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, \mathrm{nf}\,) \to (c \,\text{ə}\, v \to \infty = \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon \,\text{ə}\, v))))) \qquad (\delta\text{'}$$

$\times$

$$\vdash \forall \mathfrak{v}\,[d = \mathrm{anz}\,(\mathfrak{v}) \to \infty = \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon \,\text{ə}\, \mathfrak{v}))] \to (a = \mathrm{anz}\,(v) \to$$
$$(d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, \mathrm{nf}\,) \to (\neg\ \infty = \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon \,\text{ə}\, v)) \to \neg\ c \,\text{ə}\, v))) \qquad (\varepsilon\text{'}$$

$\smile$

$$\vdash \forall \mathfrak{v}\,[d = \mathrm{anz}\,(\mathfrak{v}) \to \infty = \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon \,\text{ə}\, \mathfrak{v}))] \to (a = \mathrm{anz}\,(v) \to$$
$$(d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, \mathrm{nf}\,) \to (\neg\ \infty = \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon \,\text{ə}\, v)) \to \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, v]))) \qquad (\zeta\text{'}$$

―――――― • ――――――

| S.151

$$108 \quad \vdash \neg\ d \,\text{ə}\, (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \mathrm{nf}\,)$$

$(IIIa)$: ―――――――――――

$$\vdash a = \mathrm{anz}\,(0) \to \neg\ d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, \mathrm{nf}\,) \qquad (\eta\text{'}$$

$(IIIa)$: ―――――――――――

$$\vdash \mathrm{anz}\,(v) = \mathrm{anz}\,(0) \to (a = \mathrm{anz}\,(v) \to \neg\ d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, \mathrm{nf}\,)) \qquad (\vartheta\text{'}$$

(97) :: – – – – – – – –

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, v] \to (a = \mathrm{anz}\,(v) \to \neg\ d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, \mathrm{nf}\,)) \qquad (\iota\text{'}$$

(ζ') :: – – – – – – – –

$$\vdash \forall \mathfrak{v}\,[d = \mathrm{anz}\,(\mathfrak{v}) \to \infty = \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon \,\text{ə}\, \mathfrak{v}))] \to (d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, \mathrm{nf}\,) \to$$
$$(\neg\ \infty = \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon \,\text{ə}\, v)) \to (a = \mathrm{anz}\,(v) \to \neg\ d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, \mathrm{nf}\,)))) \qquad (\kappa\text{'}$$

$\times$

$$\vdash \forall \mathfrak{v}\,[d = \mathrm{anz}\,(\mathfrak{v}) \to \infty = \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon \,\text{ə}\, \mathfrak{v}))] \to (d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, \mathrm{nf}\,) \to$$
$$(a = \mathrm{anz}\,(v) \to \infty = \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \,\text{ə}\, u \to \varepsilon \,\text{ə}\, v)))) \qquad (\lambda\text{'}$$

$\smile$

$$\vdash \forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{v}\,[\mathfrak{d} = \text{anz}\,(\mathfrak{v}) \rightarrow \infty = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow \varepsilon \mathrel{\text{ə}} \mathfrak{v}))] \rightarrow$$
$$\forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \mathrel{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} \text{nf}\,) \rightarrow$$
$$\forall \mathfrak{v}\,[\mathfrak{a} = \text{anz}\,(\mathfrak{v}) \rightarrow \infty = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow \varepsilon \mathrel{\text{ə}} \mathfrak{v}))]]] \qquad (\mu\text{’}$$

(144) : ———————————

$$\vdash \text{anz}\,(0) \mathrel{\text{ə}} (\text{anz}\,(v) \mathrel{\text{ə}}\ \leq_{\text{nf}}\,) \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{v}\,[\text{anz}\,(0) = \text{anz}\,(\mathfrak{v}) \rightarrow \infty = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow \varepsilon \mathrel{\text{ə}} \mathfrak{v}))] \rightarrow$$
$$\forall \mathfrak{v}\,[\text{anz}\,(v) = \text{anz}\,(\mathfrak{v}) \rightarrow \infty = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow \varepsilon \mathrel{\text{ə}} \mathfrak{v}))]) \qquad (\nu\text{’}$$

——— • ———

Ia $\vdash a \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow (\neg\ a \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow a \mathrel{\text{ə}} v)$

(IVa) : ———————————

$$\vdash ((\neg\ a \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow a \mathrel{\text{ə}} v) \rightarrow a \mathrel{\text{ə}} u) \rightarrow (\neg\ a \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow a \mathrel{\text{ə}} v) = (\text{—}\, a \mathrel{\text{ə}} u) \qquad (\xi\text{’}$$

——— • ———

I $\vdash (\neg\ a \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow a \mathrel{\text{ə}} v) \rightarrow (\neg\ a \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow a \mathrel{\text{ə}} v)$

$\times$

$$\vdash \neg\ a \mathrel{\text{ə}} v \rightarrow ((\neg\ a \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow a \mathrel{\text{ə}} v) \rightarrow a \mathrel{\text{ə}} u) \qquad (\text{o’}$$

(ξ') : — — — — — — — —

$$\vdash \neg\ a \mathrel{\text{ə}} v \rightarrow (\neg\ a \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow a \mathrel{\text{ə}} v) = (\text{—}\, a \mathrel{\text{ə}} u) \qquad (\pi\text{’}$$

(94) :: — — — — — — — —

$$\vdash \text{anz}\,(v) = \text{anz}\,(0) \rightarrow (\neg\ a \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow a \mathrel{\text{ə}} v) = (\text{—}\, a \mathrel{\text{ə}} u) \qquad (\rho\text{’}$$

(77) : ———————————

$$\vdash \text{anz}\,(v) = \text{anz}\,(0) \rightarrow [\text{—}\, a \mathrel{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow \varepsilon \mathrel{\text{ə}} v)] = (\text{—}\, a \mathrel{\text{ə}} u) \qquad (\sigma\text{’}$$

$\smile$

$$\vdash \text{anz}\,(v) = \text{anz}\,(0) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\,[[\text{—}\, \mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow \varepsilon \mathrel{\text{ə}} v)] = (\text{—}\, \mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} u)] \qquad (\tau\text{’}$$

(96) : — — — — — — — —

S.160

$$\vdash \text{anz}\,(v) = \text{anz}\,(0) \rightarrow \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow \varepsilon \mathrel{\text{ə}} v)) = \text{anz}\,(u) \qquad (\upsilon\text{’}$$

$(IIIf)$ :: — — — — — — — —

$$\vdash \text{anz}\,(0) = \text{anz}\,(v) \rightarrow \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow \varepsilon \mathrel{\text{ə}} v)) = \text{anz}\,(u) \qquad (\phi\text{’}$$

$(IIIa)$: — — — — — — — —

$$\vdash \infty = \text{anz}\,(u) \rightarrow (\text{anz}\,(0) = \text{anz}\,(v) \rightarrow \infty = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow \varepsilon \mathrel{\text{ə}} v))) \qquad (\chi\text{’}$$

$\smile$

$$\vdash \infty = \text{anz}\,(u) \rightarrow \forall \mathfrak{v}\,[\text{anz}\,(0) = \text{anz}\,(\mathfrak{v}) \rightarrow \infty = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow \varepsilon \mathrel{\text{ə}} \mathfrak{v}))] \qquad (\psi\text{’}$$

(ν') : — — — — — — — —

$$\vdash \text{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(v)\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow (\infty = \text{anz}\,(u) \rightarrow$$
$$\forall \mathfrak{v}\,[\text{anz}\,(v) = \text{anz}\,(\mathfrak{v}) \rightarrow \infty = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon\,\text{ə}\,u \rightarrow \varepsilon\,\text{ə}\,\mathfrak{v}))]) \qquad (\omega'$$
$$(IIa): \ - - - - - - - -$$
$$\vdash \text{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(v)\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow (\infty = \text{anz}\,(u) \rightarrow$$
$$(\text{anz}\,(v) = \text{anz}\,(v) \rightarrow \infty = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon\,\text{ə}\,u \rightarrow \varepsilon\,\text{ə}\,v)))) \qquad (\alpha''$$
$$(IIIe) :: \ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\vdash \text{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(v)\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow (\infty = \text{anz}\,(u) \rightarrow$$
$$\infty = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon\,\text{ə}\,u \rightarrow \varepsilon\,\text{ə}\,v))) \qquad (172$$

c) Beweis des Satzes

$$,\vdash \infty = \text{anz}\,(u) \rightarrow$$
$$\neg\ \forall \mathfrak{q}\,[\text{funk}\,(\mathfrak{q}) \rightarrow (\forall \mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i}\,\text{ə}\,(\mathfrak{i}\,\text{ə}\ <_{\mathfrak{q}})] \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d}\,\text{ə}\,(\mathfrak{e}\,\text{ə}\,\mathfrak{q})] \rightarrow \neg\ \mathfrak{d}\,\text{ə}\,u] \rightarrow$$
$$\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(-\varepsilon\,\text{ə}\,u) = \mathfrak{a}\,\text{ə}\ \leq_{\mathfrak{q}}^{-1}]))]\text{‘}$$

§ 128. *Zerlegung.*

Den nun zu beweisenden Satz können wir in Worten so wiedergeben:

„Wenn Endlos die Anzahl eines Begriffes ist, so können die unter diesen Begriff fallenden Gegenstände in eine unverzweigte Reihe geordnet werden, die mit einem bestimmten Gegenstande anfängt und, ohne in sich zurückzukehren, endlos fortläuft.“

Wenn ∞ die Anzahl des u-Begriffes ist, so muss es eine Beziehung geben, die den Begriff *endliche Anzahl* in den u-Begriff und deren Umkehrung diesen in jenen abbildet. Es sei die p-Beziehung dieser Art; wir fragen nun, ob dann die $(p \circ \text{nf} \circ p^{-1})$-Beziehung als reihenbildende unsern Anforderungen genüge, wenn wir als Anfangsglied das nehmen, zu dem anz (0) in der p-Beziehung steht. Mit (17), (18) und (71) beweisen wir leicht die Eindeutigkeit unserer reihenbildenden Beziehung. Dass die Reihe ohne Ende fortlaufe, werden wir aus (156) und (8) ableiten können.

| S.155

§ 129. *Aufbau.*

$$71 \quad \vdash \text{funk}\,(\text{nf})$$
$$(17): \ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow \text{funk}\,(\text{nf} \circ p^{-1}) \qquad (\alpha$$
$$(17): \ - - - - - - - -$$
$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (\text{funk}\,(p) \rightarrow \text{funk}\,(p \circ \text{nf} \circ p^{-1})) \qquad (\beta$$
$$(18, 18) :: \ = = = = = = = =$$
$$\vdash u\,\text{ə}\,(v\,\text{ə}\,p^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow (v\,\text{ə}\,(u\,\text{ə}\,p :\twoheadrightarrow) \rightarrow \text{funk}\,(p \circ \text{nf} \circ p^{-1})) \qquad (173$$

———— • ————

$$5 \quad \vdash d\,\text{ə}\,(b\,\text{ə}\,p^{-1}) \rightarrow (b\,\text{ə}\,(c\,\text{ə}\,q) \rightarrow d\,\text{ə}\,(c\,\text{ə}\,(q \circ p^{-1})))$$
$$(5): \ - - - - - - - -$$

$$\vdash d \ni (b \ni p^{-1}) \to (b \ni (c \ni q) \to$$
$$(c \ni (e \ni p) \to d \ni (e \ni (p \circ q \circ p^{-1})))) \qquad (174$$

$$\times$$

$$\vdash d \ni (b \ni p^{-1}) \to (b \ni (c \ni q) \to$$
$$(\neg\ d \ni (e \ni (p \circ q \circ p^{-1})) \to \neg\ c \ni (e \ni p))) \qquad (\alpha$$

$$(IIa) :: \ - - - - - - - -$$

$$\vdash d \ni (b \ni p^{-1}) \to (b \ni (c \ni q) \to$$
$$(\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ d \ni (\mathfrak{e} \ni (p \circ q \circ p^{-1}))] \to \neg\ c \ni (e \ni p))) \qquad (\beta$$

$$(Ia) : \ - - - - - - - -$$

$$\vdash d \ni (b \ni p^{-1}) \to (b \ni (c \ni q) \to$$
$$(\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ d \ni (\mathfrak{e} \ni (p \circ q \circ p^{-1}))] \to$$
$$(c \ni (e \ni p) \to \neg\ e \ni u))) \qquad (\gamma$$

$$\smile$$

$$\vdash d \ni (b \ni p^{-1}) \to (b \ni (c \ni q) \to$$
$$(\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ d \ni (\mathfrak{e} \ni (p \circ q \circ p^{-1}))] \to$$
$$\forall \mathfrak{a}\, [c \ni (\mathfrak{a} \ni p) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni u])) \qquad (\delta$$

$$(8) : \ - - - - - - - -$$

$$\vdash m \ni\ \leq_q^{-1}\ \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to (d \ni (b \ni p^{-1}) \to (b \ni (c \ni q) \to$$
$$(\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ d \ni (\mathfrak{e} \ni (p \circ q \circ p^{-1}))] \to$$
$$\neg\ c \ni (m \ni\ \leq_q^{-1})))) \qquad (\varepsilon$$

———— • ————

137 $\vdash \text{anz}\,(0) \ni (b \ni\ \leq_{\text{nf}}) \to (b \ni (c \ni \text{nf}) \to \text{anz}\,(0) \ni (c \ni\ \leq_{\text{nf}}))$

$$(22) : \ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash \text{anz}\,(0) \ni (b \ni\ \leq_{\text{nf}}) \to (b \ni (c \ni \text{nf}) \to c \ni (\text{anz}\,(0) \ni\ \leq_{\text{nf}}^{-1})) \qquad (\zeta$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ c \ni (\text{anz}\,(0) \ni\ \leq_{\text{nf}}^{-1}) \to (b \ni (c \ni \text{nf}\,) \to \neg\ \text{anz}\,(0) \ni (b \ni\ \leq_{\text{nf}}\,)) \qquad (\eta$$

$(\varepsilon) ::\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$

$$\vdash \text{anz}\,(0) \ni\ \leq_{\text{nf}}^{-1}\ \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\,) \to (d \ni (b \ni p^{-1}) \to$$
$$(\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ d \ni (\mathfrak{e} \ni (p \circ \text{nf} \circ p^{-1}))] \to$$
$$(b \ni (c \ni \text{nf}\,) \to \neg\ \text{anz}\,(0) \ni (b \ni\ \leq_{\text{nf}}\,)))) \qquad (\vartheta$$

$$\times$$

$$\vdash \text{anz}\,(0) \ni\ \leq_{\text{nf}}^{-1}\ \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\,) \to (d \ni (b \ni p^{-1}) \to$$
$$(\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ d \ni (\mathfrak{e} \ni (p \circ \text{nf} \circ p^{-1}))] \to$$
$$(\text{anz}\,(0) \ni (b \ni\ \leq_{\text{nf}}\,) \to \neg\ b \ni (c \ni \text{nf}\,)))) \qquad (\iota$$

$$\smile$$

$$\vdash \text{anz}\,(0) \ni\ \leq_{\text{nf}}^{-1}\ \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\,) \to (d \ni (b \ni p^{-1}) \to$$
$$(\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ d \ni (\mathfrak{e} \ni (p \circ \text{nf} \circ p^{-1}))] \to$$
$$(\text{anz}\,(0) \ni (b \ni\ \leq_{\text{nf}}\,) \to \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ b \ni (\mathfrak{a} \ni \text{nf}\,)]))) \qquad (\kappa$$

$$\times$$

S.162

$$\vdash \text{anz}\,(0) \ni\ \leq_{\text{nf}}^{-1}\ \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\,) \to (d \ni (b \ni p^{-1}) \to$$
$$(\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ d \ni (\mathfrak{e} \ni (p \circ \text{nf} \circ p^{-1}))] \to$$
$$(\neg\ \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ b \ni (\mathfrak{a} \ni \text{nf}\,)] \to \neg\ \text{anz}\,(0) \ni (b \ni\ \leq_{\text{nf}}\,)))) \qquad (\lambda$$

$(156) :\ \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot$

$$\vdash \text{anz}\,(0) \ni\ \leq_{\text{nf}}^{-1}\ \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\,) \to (d \ni (b \ni p^{-1}) \to$$
$$(\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ d \ni (\mathfrak{e} \ni (p \circ \text{nf} \circ p^{-1}))] \to \neg\ \text{anz}\,(0) \ni (b \ni\ \leq_{\text{nf}}\,))) \qquad (\mu$$

$(22) :$ ———————————

$$\vdash \text{anz}\,(0) \ni\ \leq_{\text{nf}}^{-1}\ \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\,) \to (\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ d \ni (\mathfrak{e} \ni (p \circ \text{nf} \circ p^{-1}))] \to$$
$$(d \ni (b \ni p^{-1}) \to \neg\ b \ni (\text{anz}\,(0) \ni\ \leq_{\text{nf}}^{-1}))) \qquad (\nu$$

$$\smile$$

$$\vdash \mathrm{anz}\,(0) \frown \leq^{-1}_{\mathrm{nf}} \frown (u \frown p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ d \frown (\mathfrak{e} \frown (p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1}))] \rightarrow$$
$$\forall \mathfrak{a}\, [d \frown (\mathfrak{a} \frown p^{-1}) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \frown (\mathrm{anz}\,(0) \frown \leq^{-1}_{\mathrm{nf}})]) \qquad (\xi$$

$$(8):\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$

$$\vdash u \frown (\mathrm{anz}\,(0) \frown \leq^{-1}_{\mathrm{nf}} \frown p^{-1} :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (\mathrm{anz}\,(0) \frown \leq^{-1}_{\mathrm{nf}} \frown (u \frown p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ d \frown (\mathfrak{e} \frown (p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1}))] \rightarrow \neg\ d \frown u)) \qquad (175$$

§ 130. *Zerlegung.*

Dass kein Gegenstand in der $(p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})$-Reihe auf sich selber folge, kann nicht bewiesen werden, sondern nur, dass kein unter den u-Begriff fallender Gegenstand in dieser Reihe auf sich selber folge, wenn der u-Begriff in den Begriff *endliche Anzahl* durch die p^{-1}-Beziehung abgebildet wird. Wir begnügen uns einstweilen mit einer solchen Reihe, um dann mit unserer $(p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})$-Beziehung eine andere zu definiren, die mit ihr in den übrigen hier in Betracht kommenden Eigenschaften übereinstimmt, dazu aber noch die hat, dass kein Gegenstand in ihrer Reihe auf sich selbst folgt.

Den Satz

$$,\ \vdash u \frown (\mathrm{anz}\,(0) \frown \leq^{-1}_{\mathrm{nf}} \frown p^{-1} :\twoheadrightarrow\,)' \rightarrow \forall \mathfrak{i}\, [\mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown <_{(p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})}) \rightarrow \neg\ \mathfrak{i} \frown u]\ `$$

beweisen wir aus den Sätzen

$$,\ \vdash x \frown (y \frown <_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \rightarrow (\mathrm{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow x \frown (y \frown (p \circ <_q \circ p^{-1})))\ ` \qquad (\alpha$$

und

$$,\ \vdash u \frown (\mathrm{anz}\,(0) \frown \leq^{-1}_{\mathrm{nf}} \frown p^{-1} :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (\mathrm{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow$$
$$(x \frown (x \frown (p \circ <_{\mathrm{nf}} \circ p^{-1})) \rightarrow \neg\ x \frown u))\ ` \qquad (\beta$$

Jenen beweisen wir mit (123) und bedürfen dazu des Satzes

$$,\ \vdash \mathrm{funk}\,(q^{-1}) \rightarrow (x \frown (d \frown (p \circ <_q \circ p^{-1})) \rightarrow$$
$$(d \frown (a \frown (p \circ q \circ p^{-1})) \rightarrow x \frown (a \frown (p \circ <_q \circ p^{-1}))))\ ` \qquad (\gamma$$

den wir aus dem allgemeinern Satze

$$,\ \vdash \mathrm{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (\forall \mathfrak{d}\, [\mathfrak{m} \frown (\mathfrak{d} \frown t) \rightarrow \forall \mathfrak{m}\, [\mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{m} \frown (\mathfrak{a} \frown t)]]] \rightarrow$$
$$(x \frown (d \frown (p \circ t \circ p^{-1})) \rightarrow$$
$$(d \frown (a \frown (p \circ q \circ p^{-1})) \rightarrow x \frown (a \frown (p \circ t \circ p^{-1})))))\ ` \qquad (\delta$$

ableiten. Zum Beweise von (δ) gehen wir auf die Gegenstände, etwa m, b, c zurück, die zu x, d, a in der p-Beziehung stehen. Mit (15) ist zu zeigen, dass es solche Gegenstände giebt. b kommt dabei zwiefach vor: erstens, indem m zu ihm in der t-Beziehung steht, und zweitens
S.159 als in der q-Beziehung zu c stehend. Folgendes Bild mag die Uebersicht erleichtern. |

$$\begin{array}{lcl} & c \xrightarrow[p]{} a \\ q\uparrow & & \\ & b \xrightarrow[p]{} d \\ t\uparrow & & \\ & m \xrightarrow[p]{} x \end{array}$$

Aus der Eindeutigkeit der Umkehrung der p-Beziehung muss geschlossen werden, dass es nur einen einzigen Gegenstand der Art giebt, der für uns in Betracht kommen kann.

§ 131. *Aufbau.*

174 $\vdash x \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, p^{-1}) \to (m \,\text{ə}\, (c \,\text{ə}\, t) \to$

$(c \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, p) \to x \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, (p \circ t \circ p^{-1}))))$

$(IIa) ::$ − − − − − − − −

$\vdash x \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, p^{-1}) \to (\forall \mathfrak{a}\, [b \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q) \to m \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, t)] \to$

$(b \,\text{ə}\, (c \,\text{ə}\, q) \to (c \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, p) \to x \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, (p \circ t \circ p^{-1})))))$ $(\alpha$

$(IIIc) :$ ————————

$\vdash b = e \to (x \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, p^{-1}) \to (\forall \mathfrak{a}\, [e \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q) \to m \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, t)] \to$

$(b \,\text{ə}\, (c \,\text{ə}\, q) \to (c \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, p) \to x \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, (p \circ t \circ p^{-1}))))))$ $(\beta$

(78) :: − − − − − − − −

$\vdash \text{funk}\, (p^{-1}) \to (d \,\text{ə}\, (b \,\text{ə}\, p^{-1}) \to (e \,\text{ə}\, (d \,\text{ə}\, p) \to$

$(x \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, p^{-1}) \to (\forall \mathfrak{a}\, [e \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q) \to m \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, t)] \to$

$(b \,\text{ə}\, (c \,\text{ə}\, q) \to (c \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, p) \to x \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, (p \circ t \circ p^{-1}))))))))$ $(\gamma$

$\times$

$\vdash \text{funk}\, (p^{-1}) \to (\neg\; x \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, (p \circ t \circ p^{-1})) \to (e \,\text{ə}\, (d \,\text{ə}\, p) \to$

$(x \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, p^{-1}) \to (\forall \mathfrak{a}\, [e \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q) \to m \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, t)] \to$

$(c \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, p) \to (b \,\text{ə}\, (c \,\text{ə}\, q) \to \neg\; d \,\text{ə}\, (b \,\text{ə}\, p^{-1})))))))$ $(\delta$

$\smile$

$\vdash \text{funk}\, (p^{-1}) \to (\neg\; x \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, (p \circ t \circ p^{-1})) \to (e \,\text{ə}\, (d \,\text{ə}\, p) \to$

$(x \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, p^{-1}) \to (\forall \mathfrak{a}\, [e \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q) \to m \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, t)] \to$

$(c \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, p) \to \forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \,\text{ə}\, (c \,\text{ə}\, q) \to \neg\; d \,\text{ə}\, (\mathfrak{r} \,\text{ə}\, p^{-1})]))))$ $(\varepsilon$

(15) : − − − − − − − −

$\vdash \text{funk}\, (p^{-1}) \to (\neg\; x \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, (p \circ t \circ p^{-1})) \to (e \,\text{ə}\, (d \,\text{ə}\, p) \to$

$(x \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, p^{-1}) \to (\forall \mathfrak{a}\, [e \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q) \to m \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, t)] \to$

$(c \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, p) \to \neg\; d \,\text{ə}\, (c \,\text{ə}\, (q \circ p^{-1})))))))$ $(\zeta$

$\smile$

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (\neg\ x \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, (p \circ t \circ p^{-1})) \to (e \,\text{ə}\, (d \,\text{ə}\, p) \to$$
$$(x \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, p^{-1}) \to (\forall \mathfrak{a}\, [e \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q) \to m \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, t)] \to$$
$$\forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, p) \to \neg\ d \,\text{ə}\, (\mathfrak{r} \,\text{ə}\, (q \circ p^{-1}))])))) \qquad (\eta$$

$(15):\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$

S.164

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (\neg\ x \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, (p \circ t \circ p^{-1})) \to (e \,\text{ə}\, (d \,\text{ə}\, p) \to$$
$$(x \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, p^{-1}) \to (\forall \mathfrak{a}\, [e \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q) \to m \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, t)] \to$$
$$\neg\ d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, (p \circ q \circ p^{-1})))))) \qquad (\vartheta$$

$\times$

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (\neg\ x \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, (p \circ t \circ p^{-1})) \to (e \,\text{ə}\, (d \,\text{ə}\, p) \to$$
$$(d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, (p \circ q \circ p^{-1})) \to$$
$$(\forall \mathfrak{a}\, [e \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q) \to m \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, t)] \to \neg\ x \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, p^{-1}))))) \qquad (\iota$$

$(IIa) ::\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (\neg\ x \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, (p \circ t \circ p^{-1})) \to (e \,\text{ə}\, (d \,\text{ə}\, p) \to$$
$$(d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, (p \circ q \circ p^{-1})) \to$$
$$(\forall \mathfrak{m}\, [\mathfrak{m} \,\text{ə}\, (e \,\text{ə}\, t) \to \forall \mathfrak{a}\, [e \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q) \to \mathfrak{m} \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, t)]] \to$$
$$(m \,\text{ə}\, (e \,\text{ə}\, t) \to \neg\ x \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, p^{-1})))))) \qquad (\kappa$$

$\smile$

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (\neg\ x \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, (p \circ t \circ p^{-1})) \to (e \,\text{ə}\, (d \,\text{ə}\, p) \to$$
$$(d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, (p \circ q \circ p^{-1})) \to$$
$$(\forall \mathfrak{m}\, [\mathfrak{m} \,\text{ə}\, (e \,\text{ə}\, t) \to \forall \mathfrak{a}\, [e \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q) \to \mathfrak{m} \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, t)]] \to$$
$$\forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \,\text{ə}\, (e \,\text{ə}\, t) \to \neg\ x \,\text{ə}\, (\mathfrak{r} \,\text{ə}\, p^{-1})]))))) \qquad (\lambda$$

(15) #133 $:\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (\neg\ x \ni (a \ni (p \circ t \circ p^{-1})) \to (e \ni (d \ni p) \to$$
$$(d \ni (a \ni (p \circ q \circ p^{-1})) \to$$
$$(\forall \mathfrak{m}\,[\mathfrak{m} \ni (e \ni t) \to \forall \mathfrak{a}\,[e \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \mathfrak{m} \ni (\mathfrak{a} \ni t)]] \to$$
$$\neg\ x \ni (e \ni (t \circ p^{-1})))))) \qquad (\mu$$

$(IIa) ::$ — — — — — — — —

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (\neg\ x \ni (a \ni (p \circ t \circ p^{-1})) \to$$
$$(d \ni (a \ni (p \circ q \circ p^{-1})) \to$$
$$(\forall \mathfrak{d}\,\forall \mathfrak{m}\,[\mathfrak{m} \ni (\mathfrak{d} \ni t) \to \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \mathfrak{m} \ni (\mathfrak{a} \ni t)]] \to$$
$$(e \ni (d \ni p) \to \neg\ x \ni (e \ni (t \circ p^{-1})))))) \qquad (\nu$$

$$\smile$$

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (\neg\ x \ni (a \ni (p \circ t \circ p^{-1})) \to$$
$$(d \ni (a \ni (p \circ q \circ p^{-1})) \to$$
$$(\forall \mathfrak{d}\,\forall \mathfrak{m}\,[\mathfrak{m} \ni (\mathfrak{d} \ni t) \to \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \mathfrak{m} \ni (\mathfrak{a} \ni t)]] \to$$
$$\forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (d \ni p) \to \neg\ x \ni (\mathfrak{r} \ni (t \circ p^{-1}))]))) \qquad (\xi$$

$(15) :$ — — — — — — — —

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (\neg\ x \ni (a \ni (p \circ t \circ p^{-1})) \to$$
$$(d \ni (a \ni (p \circ q \circ p^{-1})) \to$$
$$(\forall \mathfrak{d}\,\forall \mathfrak{m}\,[\mathfrak{m} \ni (\mathfrak{d} \ni t) \to \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \mathfrak{m} \ni (\mathfrak{a} \ni t)]] \to$$
$$\neg\ x \ni (d \ni (p \circ t \circ p^{-1}))))) \qquad (o$$

$$\times$$

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (\forall \mathfrak{d}\,\forall \mathfrak{m}\,[\mathfrak{m} \ni (\mathfrak{d} \ni t) \to \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \mathfrak{m} \ni (\mathfrak{a} \ni t)]] \to$$
$$(x \ni (d \ni (p \circ t \circ p^{-1})) \to$$
$$(d \ni (a \ni (p \circ q \circ p^{-1})) \to x \ni (a \ni (p \circ t \circ p^{-1}))))) \qquad (\pi$$

$$\smile$$

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (\forall \mathfrak{d}\,\forall \mathfrak{m}\,[\mathfrak{m} \ni (\mathfrak{d} \ni t) \to \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to \mathfrak{m} \ni (\mathfrak{a} \ni t)]] \to$$
$$\forall \mathfrak{d}\,[x \ni (\mathfrak{d} \ni (p \circ t \circ p^{-1})) \to$$
$$\forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni (p \circ q \circ p^{-1})) \to x \ni (\mathfrak{a} \ni (p \circ t \circ p^{-1}))]]]) \qquad (176$$

133 $\vdash a \,\text{ə}\, (e \,\text{ə}\, <_q) \to (e \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, q) \to a \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, <_q))$

$\smile$

$\vdash \forall \mathfrak{d}\, \forall \mathfrak{m}\, [\mathfrak{m} \,\text{ə}\, (\mathfrak{d} \,\text{ə}\, <_q) \to \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q) \to \mathfrak{m} \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, <_q)]]$ $(\alpha$

(176) : ————————

$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to \forall \mathfrak{d}\, [x \,\text{ə}\, (\mathfrak{d} \,\text{ə}\, (p \circ <_q \circ p^{-1})) \to$

$\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, (p \circ q \circ p^{-1})) \to x \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, (p \circ <_q \circ p^{-1}))]]$ $(\beta$

(123) : — — — — — — — —

$\vdash x \,\text{ə}\, (y \,\text{ə}\, <_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \to (\text{funk}\,(p^{-1}) \to$

$(\forall \mathfrak{a}\, [x \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, (p \circ q \circ p^{-1})) \to x \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, (p \circ <_q \circ p^{-1}))] \to$

$x \,\text{ə}\, (y \,\text{ə}\, (p \circ <_q \circ p^{-1}))))$ $(\gamma$

———— • ————

131 $\vdash m \,\text{ə}\, (c \,\text{ə}\, q) \to m \,\text{ə}\, (c \,\text{ə}\, <_q)$

(174) : — — — — — — — —

$\vdash x \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, p^{-1}) \to (m \,\text{ə}\, (c \,\text{ə}\, q) \to$

$(c \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, p) \to x \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, (p \circ <_q \circ p^{-1}))))$ $(\delta$

$\times$

$\vdash \neg\; x \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, (p \circ <_q \circ p^{-1})) \to (c \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, p) \to$

$(m \,\text{ə}\, (c \,\text{ə}\, q) \to \neg\; x \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, p^{-1})))$ $(\varepsilon$

$\smile$

$\vdash \neg\; x \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, (p \circ <_q \circ p^{-1})) \to (c \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, p) \to$

$\forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \,\text{ə}\, (c \,\text{ə}\, q) \to \neg\; x \,\text{ə}\, (\mathfrak{r} \,\text{ə}\, p^{-1})])$ $(\zeta$

(15) : — — — — — — — —

$\vdash \neg\; x \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, (p \circ <_q \circ p^{-1})) \to$

$(c \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, p) \to \neg\; x \,\text{ə}\, (c \,\text{ə}\, (q \circ p^{-1})))$ $(\eta$

$\smile$

$\vdash \neg\; x \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, (p \circ <_q \circ p^{-1})) \to$

$\forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, p) \to \neg\; x \,\text{ə}\, (\mathfrak{r} \,\text{ə}\, (q \circ p^{-1}))]$ $(\vartheta$

(15) : — — — — — — — —

$$\vdash \neg\ x \ni (a \ni (p \circ \ <_q \circ p^{-1})) \to \neg\ x \ni (a \ni (p \circ q \circ p^{-1})) \qquad (\iota$$

$$\times$$

$$\vdash x \ni (a \ni (p \circ q \circ p^{-1})) \to x \ni (a \ni (p \circ \ <_q \circ p^{-1})) \qquad (\kappa$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [x \ni (\mathfrak{a} \ni (p \circ q \circ p^{-1})) \to x \ni (\mathfrak{a} \ni (p \circ \ <_q \circ p^{-1}))] \qquad (\lambda$$

$$(\gamma) : \ \overline{\hspace{6cm}}$$

$$\vdash x \ni (y \ni \ <_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \to (\text{funk}\, (p^{-1}) \to x \ni (y \ni (p \circ \ <_q \circ p^{-1}))) \qquad (177$$

§ 132. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun den Satz (β) des § 130, indem wir aus der Eindeutigkeit der p^{-1}-Beziehung folgern, dass es nur einen Gegenstand gebe, der zu x in dieser Beziehung stehe, während es, wenn x zu sich selbst in der $(p\circ <_{\text{nf}} \circ p^{-1})$-Beziehung stände, nach (15) mindestens einen solchen Gegenstand geben müsste, der auf sich selbst in der Anzahlenreihe folgte und der dann nach (145) keine endliche Anzahl sein könnte. Daraus folgte dann nach (8), dass x nicht unter den u-Begriff fallen könnte, wenn der u-Begriff durch die p^{-1}-Beziehung in den Begriff *endliche Anzahl* abgebildet wird.

§ 133. *Aufbau.*

$$145 \quad \vdash \text{anz}\,(0) \ni (b \ni \ \leq_{\text{nf}}) \to \neg\ b \ni (b \ni \ <_{\text{nf}})$$

$$(IIIa) : \ \overline{\hspace{6cm}}$$

$$\vdash m = b \to (\text{anz}\,(0) \ni (b \ni \ \leq_{\text{nf}}) \to \neg\ m \ni (b \ni \ <_{\text{nf}})) \qquad (\alpha$$

$$(13) :: \ - - - - - - - -$$

S.166

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (x \ni (m \ni p^{-1}) \to (x \ni (b \ni p^{-1}) \to$$
$$(\text{anz}\,(0) \ni (b \ni \ \leq_{\text{nf}}) \to \neg\ m \ni (b \ni \ <_{\text{nf}})))) \qquad (\beta$$

$$\times$$

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (x \ni (b \ni p^{-1}) \to (\text{anz}\,(0) \ni (b \ni \ \leq_{\text{nf}}) \to$$
$$(m \ni (b \ni \ <_{\text{nf}}) \to \neg\ x \ni (m \ni p^{-1})))) \qquad (\gamma$$

$$\smile$$

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (x \ni (b \ni p^{-1}) \rightarrow (\text{anz}\,(0) \ni (b \ni \ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow$$

$$\forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (b \ni \ <_{\text{nf}}) \rightarrow \neg\ x \ni (\mathfrak{r} \ni p^{-1})]))) \qquad (\delta$$

$(15):$ — — — — — — — —

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (x \ni (b \ni p^{-1}) \rightarrow (\text{anz}\,(0) \ni (b \ni \ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow$$

$$\neg\ x \ni (b \ni (<_{\text{nf}} \circ p^{-1})))) \qquad (\varepsilon$$

$(23)::$ — — — — — — — —

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (x \ni (b \ni p^{-1}) \rightarrow (b \ni (\text{anz}\,(0) \ni \ \leq_{\text{nf}}^{-1}) \rightarrow$$

$$\neg\ x \ni (b \ni (<_{\text{nf}} \circ p^{-1})))) \qquad (\zeta$$

$(IIIa):$ ————————————

$$\vdash n = b \rightarrow (\text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (x \ni (b \ni p^{-1}) \rightarrow$$

$$(n \ni (\text{anz}\,(0) \ni \ \leq_{\text{nf}}^{-1}) \rightarrow \neg\ x \ni (b \ni (<_{\text{nf}} \circ p^{-1}))))) \qquad (\eta$$

$(13)::$ — — — — — — — —

$$\vdash x \ni (n \ni p^{-1}) \rightarrow (\text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (x \ni (b \ni p^{-1}) \rightarrow$$

$$(n \ni (\text{anz}\,(0) \ni \ \leq_{\text{nf}}^{-1}) \rightarrow \neg\ x \ni (b \ni (<_{\text{nf}} \circ p^{-1}))))) \qquad (\vartheta$$

$(22)::$ — — — — — — — —

$$\vdash x \ni (n \ni p^{-1}) \rightarrow (\text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (n \ni (\text{anz}\,(0) \ni \ \leq_{\text{nf}}^{-1}) \rightarrow$$

$$(b \ni (x \ni p) \rightarrow \neg\ x \ni (b \ni (<_{\text{nf}} \circ p^{-1}))))) \qquad (\iota$$

$$\smile$$

$$\vdash x \ni (n \ni p^{-1}) \rightarrow (\text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (n \ni (\text{anz}\,(0) \ni \ \leq_{\text{nf}}^{-1}) \rightarrow$$

$$\forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (x \ni p) \rightarrow \neg\ x \ni (\mathfrak{r} \ni (<_{\text{nf}} \circ p^{-1}))]))) \qquad (\kappa$$

$(15):$ — — — — — — — —

$$\vdash x \ni (n \ni p^{-1}) \rightarrow (\text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (n \ni (\text{anz}\,(0) \ni \ \leq_{\text{nf}}^{-1}) \rightarrow$$

$$\neg\ x \ni (x \ni (p \circ \ <_{\text{nf}} \circ p^{-1})))) \qquad (\lambda$$

$$\times$$

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (x \ni (x \ni (p \circ <_{\text{nf}} \circ p^{-1})) \to$$
$$(x \ni (n \ni p^{-1}) \to \neg\ n \ni (\text{anz}\,(0) \ni \leq_{\text{nf}}^{-1}))) \qquad (\mu$$

$$\smile$$

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (x \ni (x \ni (p \circ <_{\text{nf}} \circ p^{-1})) \to$$
$$\forall \mathfrak{a}\,[x \ni (\mathfrak{a} \ni p^{-1}) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni (\text{anz}\,(0) \ni \leq_{\text{nf}}^{-1})]) \qquad (\nu$$

$(8):$ — — — — — — — —

$$\vdash u \ni (\text{anz}\,(0) \ni \leq_{\text{nf}}^{-1} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\text{funk}\,(p^{-1}) \to$$
$$(x \ni (x \ni (p \circ <_{\text{nf}} \circ p^{-1})) \to \neg\ x \ni u)) \qquad (\xi$$

$(177)::$ — — — — — — — —

$$\vdash u \ni (\text{anz}\,(0) \ni \leq_{\text{nf}}^{-1} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\text{funk}\,(p^{-1}) \to$$
$$(x \ni (x \ni <_{(p \circ \text{nf} \circ p^{-1})}) \to \neg\ x \ni u)) \qquad (o$$

$(18)::$ — — — — — — — —

$$\vdash u \ni (\text{anz}\,(0) \ni \leq_{\text{nf}}^{-1} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to$$
$$(x \ni (x \ni <_{(p \circ \text{nf} \circ p^{-1})}) \to \neg\ x \ni u) \qquad (\pi$$

$$\smile$$

$$\vdash u \ni (\text{anz}\,(0) \ni \leq_{\text{nf}}^{-1} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to$$
$$\forall \mathfrak{i}\,[\mathfrak{i} \ni (\mathfrak{i} \ni <_{(p \circ \text{nf} \circ p^{-1})}) \to \neg\ \mathfrak{i} \ni u] \qquad (178$$

| S.163

§ 134. *Zerlegung.*

Es bleibt nun noch übrig zu zeigen, dass alle Glieder unserer Reihe unter den u-Begriff fallen, und umgekehrt, dass alle unter den u-Begriff fallenden Gegenstände Glieder unserer Reihe sind. Das sind die beiden Sätze

$$,\ \vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (m \ni \leq_q^{-1} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to (m \ni (x \ni p) \to$$
$$(x \ni (y \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \to y \ni u)))\text{‘} \qquad (\alpha$$

und

$$,\ \vdash u \ni (m \ni \leq_q^{-1} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (m \ni \leq_q^{-1} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to (m \ni (x \ni p) \to$$
$$(y \ni u \to x \ni (y \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}))))\text{‘} \qquad (\beta$$

wo für die Anzahlenreihe allgemeiner die mit m anfangende q-Reihe genommen ist. Wir beweisen (α) aus den Sätzen

$$,\ \vdash x \ni (y \ni\ \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \to (\text{funk}\,(p^{-1}) \to (m \ni (x \ni p) \to x \ni (y \ni (p \circ\ \leq_q \circ p^{-1})))) \text{‘} \qquad (\gamma$$

und

$$,\ \vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (m \ni\ \leq_q^{-1}\ \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\ ) \to (x \ni (y \ni (p \circ\ \leq_q \circ p^{-1})) \to (m \ni (x \ni p) \to y \ni u))) \text{‘} \qquad (\delta$$

von denen (γ) leicht wie (177) abgeleitet wird. Um (δ) zu beweisen, folgern wir aus der Eindeutigkeit der p^{-1}-Beziehung, dass es nur einen Gegenstand giebt, der zu x in der p^{-1}-Beziehung steht, und daraus, dass x zu y in der $(p \circ\ \leq_q \circ p^{-1})$-Beziehung steht, schliessen wir, dass es einen solchen Gegenstand giebt, welcher einer q-Reihe angehört, die endet mit einem zu y in der p-Beziehung stehenden Gegenstande n. Wenn also der Gegenstand m zu x in der p^{-1}-Beziehung steht, so wird er auch der mit n endenden q-Reihe angehören. Wir beweisen ferner den Satz

$$,\ \vdash v \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\ ) \to (\neg\ y \ni u \to (n \ni (y \ni p) \to \neg\ n \ni v)) \text{‘}$$

und gelangen zu unserm Ziele, indem wir hierin als v-Begriff den $(m \ni\ \leq_q^{-1})$-Begriff nehmen.

§ 135. *Aufbau.*

IIIc $\vdash \neg\ y \ni u \to (y = a \to \neg\ a \ni u)$

(13) :: $- - - - - - - - -$

$$\vdash \neg\ y \ni u \to (\text{funk}\,(p) \to (n \ni (y \ni p) \to (n \ni (a \ni p) \to \neg\ a \ni u))) \qquad (\alpha$$

$$\smile$$

$$\vdash y \ni u \to (\text{funk}\,(p) \to (n \ni (y \ni p) \to \forall \mathfrak{a}\, [n \ni (\mathfrak{a} \ni p) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni u])) \qquad (\beta$$

(8) : $- - - - - - - - -$

$$\vdash v \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\ ) \to (\neg\ y \ni u \to (\text{funk}\,(p) \to (n \ni (y \ni p) \to \neg\ n \ni v))) \qquad (\gamma$$

(18) :: $- - - - - - - - -$

S.168

$$\vdash v \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\ ) \to (\neg\ y \ni u \to (n \ni (y \ni p) \to \neg\ n \ni v)) \qquad (179$$

22 $\vdash m \ni (n \ni\ \leq_q) \to n \ni (m \ni\ \leq_q^{-1})$

$(IIIa)$: ―――――――――

$$\vdash a = m \to (a \ni (n \ni\ \leq_q) \to n \ni (m \ni\ \leq_q^{-1})) \qquad (\alpha$$

(13) :: $- - - - - - - - -$

$\vdash \mathrm{funk}\,(p^{-1}) \to (x \ni (a \ni p^{-1}) \to (x \ni (m \ni p^{-1}) \to$

$(a \ni (n \ni \ \leq_q) \to n \ni (m \ni \ \leq_q^{-1})))) \qquad (\beta$

$\times$

$\vdash \mathrm{funk}\,(p^{-1}) \to (\neg\ n \ni (m \ni \ \leq_q^{-1}) \to (x \ni (m \ni p^{-1}) \to$

$(a \ni (n \ni \ \leq_q) \to \neg\ x \ni (a \ni p^{-1})))) \qquad (\gamma$

$\smile$

$\vdash \mathrm{funk}\,(p^{-1}) \to (\neg\ n \ni (m \ni \ \leq_q^{-1}) \to (x \ni (m \ni p^{-1}) \to$

$\forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \ni (n \ni \ \leq_q) \to \neg\ x \ni (\mathfrak{r} \ni p^{-1})])) \qquad (\delta$

$(15):\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$

$\vdash \mathrm{funk}\,(p^{-1}) \to (\neg\ n \ni (m \ni \ \leq_q^{-1}) \to (x \ni (m \ni p^{-1}) \to$

$\neg\ x \ni (n \ni (\leq_q \circ p^{-1})))) \qquad (\varepsilon$

$(179) ::\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$

$\vdash \mathrm{funk}\,(p^{-1}) \to (m \ni \ \leq_q^{-1}\ \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to (\neg\ y \ni u \to$

$(x \ni (m \ni p^{-1}) \to (n \ni (y \ni p) \to \neg\ x \ni (n \ni (\leq_q \circ p^{-1})))))) \qquad (\zeta$

$\smile$

$\vdash \mathrm{funk}\,(p^{-1}) \to (m \ni \ \leq_q^{-1}\ \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to (\neg\ y \ni u \to$

$(x \ni (m \ni p^{-1}) \to \forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \ni (y \ni p) \to \neg\ x \ni (\mathfrak{r} \ni (\leq_q \circ p^{-1}))])))) \qquad (\eta$

$(15):\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$

$\vdash \mathrm{funk}\,(p^{-1}) \to (m \ni \ \leq_q^{-1}\ \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to (\neg\ y \ni u \to$

$(x \ni (m \ni p^{-1}) \to \neg\ x \ni (y \ni (p \circ \ \leq_q \circ p^{-1}))))) \qquad (\vartheta$

$\times$

$\vdash \mathrm{funk}\,(p^{-1}) \to (m \ni \ \leq_q^{-1}\ \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to (x \ni (y \ni (p \circ \ \leq_q \circ p^{-1})) \to$

$(x \ni (m \ni p^{-1}) \to y \ni u))) \qquad (\iota$

$(22) ::\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (m \,\text{ə}\, \leq_q^{-1} \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, p :\twoheadrightarrow) \to (x \,\text{ə}\, (y \,\text{ə}\, (p \circ \leq_q \circ p^{-1})) \to$$

$$(m \,\text{ə}\, (x \,\text{ə}\, p) \to y \,\text{ə}\, u))) \qquad (\kappa$$

137 $\vdash a \,\text{ə}\, (e \,\text{ə}\, \leq_q) \to (e \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, q) \to a \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, \leq_q))$

$$\vdash \forall \mathfrak{d}\, \forall \mathfrak{m}\, [\mathfrak{m} \,\text{ə}\, (\mathfrak{d} \,\text{ə}\, \leq_q) \to \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q) \to \mathfrak{m} \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \leq_q)]] \qquad (\lambda$$

(176) : ――――――――

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to \forall \mathfrak{d}\, [x \,\text{ə}\, (\mathfrak{d} \,\text{ə}\, (p \circ \leq_q \circ p^{-1})) \to$$

$$\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, (p \circ q \circ p^{-1})) \to x \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, (p \circ \leq_q \circ p^{-1}))]] \qquad (\mu$$

(144) : – – – – – – – –

$$\vdash x \,\text{ə}\, (y \,\text{ə}\, \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \to (\text{funk}\,(p^{-1}) \to$$

$$(x \,\text{ə}\, (x \,\text{ə}\, (p \circ \leq_q \circ p^{-1})) \to x \,\text{ə}\, (y \,\text{ə}\, (p \circ \leq_q \circ p^{-1})))) \qquad (\nu$$

(174) :: – – – – – – – –

S.169

$$\vdash x \,\text{ə}\, (y \,\text{ə}\, \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \to (\text{funk}\,(p^{-1}) \to (x \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, p^{-1}) \to$$

$$(m \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, \leq_q) \to (m \,\text{ə}\, (x \,\text{ə}\, p) \to x \,\text{ə}\, (y \,\text{ə}\, (p \circ \leq_q \circ p^{-1})))))) \qquad (\xi$$

(22, 140) :: ═ ═ ═ ═ ═ ═ ═ ═

$$\vdash x \,\text{ə}\, (y \,\text{ə}\, \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \to (\text{funk}\,(p^{-1}) \to$$

$$(m \,\text{ə}\, (x \,\text{ə}\, p) \to x \,\text{ə}\, (y \,\text{ə}\, (p \circ \leq_q \circ p^{-1})))) \qquad (180$$

(κ) : – – – – – – – –

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (m \,\text{ə}\, \leq_q^{-1} \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, p :\twoheadrightarrow) \to$$

$$(m \,\text{ə}\, (x \,\text{ə}\, p) \to (x \,\text{ə}\, (y \,\text{ə}\, \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \to y \,\text{ə}\, u))) \qquad (\alpha$$

(18) :: – – – – – – – –

$$\vdash u \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, \leq_q^{-1} \,\text{ə}\, p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (m \,\text{ə}\, \leq_q^{-1} \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, p :\twoheadrightarrow) \to$$

$$(m \,\text{ə}\, (x \,\text{ə}\, p) \to (x \,\text{ə}\, (y \,\text{ə}\, \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \to y \,\text{ə}\, u))) \qquad (181$$

§ 136. *Zerlegung.*

Wir haben nun den Satz (β) des § 134 zu beweisen. Daraus, dass der u-Begriff durch die p^{-1}-Beziehung in den $(m \,\text{ə}\, \leq_q^{-1})$-Begriff abgebildet wird und dass y unter den u-Begriff fällt, können wir schliessen, dass es einen Gegenstand (n) giebt, zu dem y in der p^{-1}-Beziehung steht und der unter den $(m \,\text{ə}\, \leq_q^{-1})$-Begriff fällt, d. h. der mit m anfangenden

q-Reihe angehört. Wir beweisen nun den Satz

$$, \vdash m \ni (n \ni \leq_q) \to (m \ni \leq_q^{-1} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to (m \ni (x \ni p) \to (n \ni (y \ni p) \to x \ni (y \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})))) \text{ ‘} \qquad (\alpha$$

mit (152). Wir bedürfen dazu des Satzes

$$, \vdash m \ni \leq_q^{-1} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to (\forall \mathfrak{e}\, [d \ni (\mathfrak{e} \ni p) \to x \ni (\mathfrak{e} \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})] \to (m \ni (d \ni \leq_q) \to (d \ni (a \ni q) \to \forall \mathfrak{e}\, [a \ni (\mathfrak{e} \ni p) \to x \ni (\mathfrak{e} \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})])))) \text{ ‘} \qquad (\beta$$

Daraus, dass der $(m \ni \leq_q^{-1})$-Begriff in den u-Begriff durch die p-Beziehung abgebildet wird, schliessen wir, dass es einen Gegenstand (e) giebt, zu dem d in der p-Beziehung steht, wenn d der mit m anfangenden q-Reihe angehört. Hieraus und aus dem Satze

$$, \vdash x \ni (e \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \to (d \ni (e \ni p) \to (d \ni (a \ni q) \to (a \ni (c \ni p) \to x \ni (c \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})))) \text{ ‘} \qquad (\gamma$$

folgt leicht (β).

§ 137. *Aufbau.*

139 $\vdash e = x \to x \ni (e \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})$

(13) :: — — — — — — — —

$$\vdash \text{funk}\,(p) \to (m \ni (x \ni p) \to (m \ni (e \ni p) \to x \ni (e \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}))) \qquad (\alpha$$

$$\smile$$

$$\vdash \text{funk}\,(p) \to (m \ni (x \ni p) \to \forall \mathfrak{e}\, [m \ni (\mathfrak{e} \ni p) \to x \ni (\mathfrak{e} \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})]) \qquad (\beta$$

(18) :: — — — — — — — —

$$\vdash v \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to (m \ni (x \ni p) \to \forall \mathfrak{e}\, [m \ni (\mathfrak{e} \ni p) \to x \ni (\mathfrak{e} \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})]) \qquad (182$$

———— • ————

| S.165

IIa $\vdash \forall \mathfrak{a}\, [\neg\, d \ni (\mathfrak{a} \ni p)] \to \neg\, d \ni (a \ni p)$

(Ia) : — — — — — — — —

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [\neg\, d \ni (\mathfrak{a} \ni p)] \to (d \ni (a \ni p) \to \neg\, a \ni u) \qquad (\alpha$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [\neg\, d \ni (\mathfrak{a} \ni p)] \to \forall \mathfrak{a}\, [d \ni (\mathfrak{a} \ni p) \to \neg\, \mathfrak{a} \ni u] \qquad (\beta$$

(8) : — — — — — — — —

$$\vdash v \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to (\forall \mathfrak{a}\, [\neg\, d \ni (\mathfrak{a} \ni p)] \to \neg\, d \ni v) \qquad (183$$

174 $\vdash e \ni (d \ni p^{-1}) \to (d \ni (a \ni q) \to (a \ni (c \ni p) \to$

$e \ni (c \ni (p \circ q \circ p^{-1}))))$

(22) :: $- - - - - - - -$

$\vdash d \ni (e \ni p) \to (d \ni (a \ni q) \to (a \ni (c \ni p) \to$

$e \ni (c \ni (p \circ q \circ p^{-1}))))$ (184

(137) : $- - - - - - - -$

$\vdash x \ni (e \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \to (d \ni (e \ni p) \to$

$(d \ni (a \ni q) \to (a \ni (c \ni p) \to x \ni (c \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}))))$ (α

(IIa) :: $- - - - - - - -$

$\vdash \forall \mathfrak{e}\, [d \ni (\mathfrak{e} \ni p) \to x \ni (\mathfrak{e} \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})] \to (d \ni (e \ni p) \to$

$(d \ni (a \ni q) \to (a \ni (c \ni p) \to x \ni (c \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}))))$ (β

$\times$

$\vdash \forall \mathfrak{e}\, [d \ni (\mathfrak{e} \ni p) \to x \ni (\mathfrak{e} \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})] \to$

$(\neg\ x \ni (c \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \to (d \ni (a \ni q) \to (a \ni (c \ni p) \to$

$\neg\ d \ni (e \ni p))))$ (γ

$\smile$

$\vdash \forall \mathfrak{e}\, [d \ni (\mathfrak{e} \ni p) \to x \ni (\mathfrak{e} \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})] \to$

$(\neg\ x \ni (c \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \to (d \ni (a \ni q) \to (a \ni (c \ni p) \to$

$\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ d \ni (\mathfrak{a} \ni p)])))$ (185

(183) : $- - - - - - - -$

$$\vdash m \ni \leq_q^{-1} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{e}\, [d \ni (\mathfrak{e} \ni p) \rightarrow x \ni (\mathfrak{e} \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})] \rightarrow$$
$$(\neg\ x \ni (c \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \rightarrow (d \ni (a \ni q) \rightarrow (a \ni (c \ni p) \rightarrow$$
$$\neg\ d \ni (m \ni \leq_q^{-1})))))$$ (α

$$\times$$

$$\vdash m \ni \leq_q^{-1} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{e}\, [d \ni (\mathfrak{e} \ni p) \rightarrow x \ni (\mathfrak{e} \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})] \rightarrow$$
$$(d \ni (m \ni \leq_q^{-1}) \rightarrow (d \ni (a \ni q) \rightarrow (a \ni (c \ni p) \rightarrow$$
$$x \ni (c \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})))))$$ (β

(22) :: — — — — — — — —

$$\vdash m \ni \leq_q^{-1} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{e}\, [d \ni (\mathfrak{e} \ni p) \rightarrow x \ni (\mathfrak{e} \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})] \rightarrow$$
$$(m \ni (d \ni \leq_q) \rightarrow (d \ni (a \ni q) \rightarrow (a \ni (c \ni p) \rightarrow$$
$$x \ni (c \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})))))$$ (γ

$$\smile$$

S.171

$$\vdash m \ni \leq_q^{-1} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \rightarrow$$
$$\forall \mathfrak{d}\, [\forall \mathfrak{e}\, [\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{e} \ni p) \rightarrow x \ni (\mathfrak{e} \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})] \rightarrow$$
$$(m \ni (\mathfrak{d} \ni \leq_q) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \rightarrow$$
$$\forall \mathfrak{e}\, [\mathfrak{a} \ni (\mathfrak{e} \ni p) \rightarrow x \ni (\mathfrak{e} \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})]]])]$$ (δ

(152) : — — — — — — — —

$$\vdash m \ni (n \ni \leq_q) \rightarrow (m \ni \leq_q^{-1} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{e}\, [m \ni (\mathfrak{e} \ni p) \rightarrow x \ni (\mathfrak{e} \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})] \rightarrow$$
$$\forall \mathfrak{e}\, [n \ni (\mathfrak{e} \ni p) \rightarrow x \ni (\mathfrak{e} \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})]))$$ (ε

(182) :: — — — — — — — —

$$\vdash m \ni (n \ni \ \leq_q) \rightarrow (m \ni \ \leq_q^{-1} \ \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (m \ni (x \ni p) \rightarrow$$

$$\forall \mathfrak{e}\,[n \ni (\mathfrak{e} \ni p) \rightarrow x \ni (\mathfrak{e} \ni \ \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})])) \qquad (\zeta$$

$$(IIa): \ - - - - - - - -$$

$$\vdash m \ni (n \ni \ \leq_q) \rightarrow (m \ni \ \leq_q^{-1} \ \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (m \ni (x \ni p) \rightarrow$$

$$(n \ni (y \ni p) \rightarrow x \ni (y \ni \ \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})))) \qquad (\eta$$

$$(23, 23) :: \ = = = = = = = =$$

$$\vdash n \ni (m \ni \ \leq_q^{-1}) \rightarrow (m \ni \ \leq_q^{-1} \ \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (m \ni (x \ni p) \rightarrow$$

$$(y \ni (n \ni p^{-1}) \rightarrow x \ni (y \ni \ \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})))) \qquad (\vartheta$$

$$\times$$

$$\vdash \neg \ x \ni (y \ni \ \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \rightarrow (m \ni \ \leq_q^{-1} \ \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (m \ni (x \ni p) \rightarrow$$

$$(y \ni (n \ni p^{-1}) \rightarrow \neg \ n \ni (m \ni \ \leq_q^{-1})))) \qquad (\iota$$

$$\smile$$

$$\vdash \neg \ x \ni (y \ni \ \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \rightarrow (m \ni \ \leq_q^{-1} \ \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (m \ni (x \ni p) \rightarrow$$

$$\forall \mathfrak{a}\,[y \ni (\mathfrak{a} \ni p^{-1}) \rightarrow \neg \ \mathfrak{a} \ni (m \ni \ \leq_q^{-1})])) \qquad (\kappa$$

$$(8): \ - - - - - - - -$$

$$\vdash u \ni (m \ni \ \leq_q^{-1} \ \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (\neg \ x \ni (y \ni \ \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \rightarrow$$

$$(m \ni \ \leq_q^{-1} \ \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (m \ni (x \ni p) \rightarrow \neg \ y \ni u))) \qquad (\lambda$$

$$\times$$

$$\vdash u \ni (m \ni \ \leq_q^{-1} \ \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (m \ni \ \leq_q^{-1} \ \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow$$

$$(m \ni (x \ni p) \rightarrow (y \ni u \rightarrow x \ni (y \ni \ \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})))) \qquad (186$$

§ 138. *Zerlegung.*

Wir definiren nun, wie im § 130 angekündigt war, eine Beziehung der Art, dass kein Gegenstand in ihrer Reihe auf sich selbst folgt und die sonst in den für uns werthvollen Eigenschaften mit der $(p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})$-Beziehung übereinstimmt.

$$q\,|^u := \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg \ (\alpha \ni u \rightarrow \neg \ \varepsilon \ni (\alpha \ni q))) \qquad (\mathrm{N}$$

Wir zeigen nun, dass die $(q\,|^u)$-Beziehung jene Eigenschaften hat, wenn die q-Beziehung sie hat, und dass kein Gegenstand in der $(q\,|^u)$-Reihe auf sich selbst folgt, wenn kein unter den u-Begriff fallender Gegenstand in der q-Reihe auf sich selbst folgt. Wir beweisen zuerst die

Sätze

$$„\vdash \mathrm{funk}\,(q) \to \mathrm{funk}\,(q\,|^{u})“, \qquad (\alpha$$

$$„\vdash \forall \mathfrak{i}\,[\mathfrak{i}\,ə\,(\mathfrak{i}\,ə\,<_{q}) \to \neg\,\mathfrak{i}\,ə\,u] \to \forall \mathfrak{i}\,[\neg\,\mathfrak{i}\,ə\,(\mathfrak{i}\,ə\,<_{(q|^{u})})]“ \qquad (\beta$$

| Der erste bietet keine Schwierigkeit; (β) kann zerlegt werden in die Sätze S.167

$$„\vdash x\,ə\,(y\,ə\,<_{(q|^{u})}) \to y\,ə\,u“ \qquad (\gamma$$

$$„\vdash x\,ə\,(y\,ə\,<_{(q|^{u})}) \to x\,ə\,(y\,ə\,<_{q})“ \qquad (\delta$$

§ 139. *Aufbau.*

$$\mathrm{N} \quad \vdash \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\,(\alpha\,ə\,u \to \neg\,\varepsilon\,ə\,(\alpha\,ə\,q))) = q\,|^{u}$$

$(6):$ ————————

$$\vdash e\,ə\,(a\,ə\,(q\,|^{u})) \to \neg\,(a\,ə\,u \to \neg\,e\,ə\,(a\,ə\,q)) \qquad (187$$

$(Ib):$ — — — — — — — — —

$$\vdash e\,ə\,(a\,ə\,(q\,|^{u})) \to e\,ə\,(a\,ə\,q) \qquad (188$$

$(13):$ — — — — — — — — —

$$\vdash \mathrm{funk}\,(q) \to (e\,ə\,(d\,ə\,q) \to (e\,ə\,(a\,ə\,(q\,|^{u})) \to d = a)) \qquad (\alpha$$

$(188)::$ — — — — — — — — —

$$\vdash \mathrm{funk}\,(q) \to (e\,ə\,(d\,ə\,(q\,|^{u})) \to (e\,ə\,(a\,ə\,(q\,|^{u})) \to d = a)) \qquad (\beta$$

$\smile$

$$\vdash \mathrm{funk}\,(q) \to \forall \mathfrak{e}\,\forall \mathfrak{d}\,[\mathfrak{e}\,ə\,(\mathfrak{d}\,ə\,(q\,|^{u})) \to \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{e}\,ə\,(\mathfrak{a}\,ə\,(q\,|^{u})) \to \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]] \qquad (\gamma$$

$(16):$ — — — — — — — — —

$$\vdash \mathrm{funk}\,(q) \to \mathrm{funk}\,(q\,|^{u}) \qquad (189$$

——————— • ———————

$$189 \quad \vdash \mathrm{funk}\,(p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1}) \to \mathrm{funk}\,((p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})\,|^{u})$$

$(173)::$ — — — — — — — — —

$$\vdash u\,ə\,(v\,ə\,p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (v\,ə\,(u\,ə\,p :\twoheadrightarrow) \to \mathrm{funk}\,((p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})\,|^{u})) \qquad (190$$

——————— • ———————

$$187 \quad \vdash d\,ə\,(y\,ə\,(q\,|^{u})) \to \neg\,(y\,ə\,u \to \neg\,d\,ə\,(y\,ə\,q))$$

$(Id):$ — — — — — — — — —

$$\vdash d\,ə\,(y\,ə\,(q\,|^{u})) \to y\,ə\,u \qquad (191$$

$\times$

$$\vdash \neg\,y\,ə\,u \to \neg\,d\,ə\,(y\,ə\,(q\,|^{u})) \qquad (192$$

$\smile$

$\vdash \neg\ y \ni u \to \forall\mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{e} \ni (y \ni (q\,|^{u}))]$ (α

$(125):$ — — — — — — — —

$\vdash \neg\ y \ni u \to \neg\ x \ni (y \ni\ <_{(q|^{u})})$ (193

———— • ————

188 $\vdash d \ni (a \ni (q\,|^{u})) \to d \ni (a \ni q)$

$(133):$ — — — — — — — —

$\vdash x \ni (d \ni\ <_{q}) \to (d \ni (a \ni (q\,|^{u})) \to x \ni (a \ni\ <_{q}))$ (α

$\smile$

$\vdash \forall\mathfrak{d}\,[x \ni (\mathfrak{d} \ni\ <_{q}) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni (q\,|^{u})) \to x \ni (\mathfrak{a} \ni\ <_{q})]]$ (β

$(123):$ ————————

$\vdash x \ni (y \ni\ <_{(q|^{u})}) \to$

$(\forall\mathfrak{a}\,[x \ni (\mathfrak{a} \ni (q\,|^{u})) \to x \ni (\mathfrak{a} \ni\ <_{q})] \to x \ni (y \ni\ <_{q}))$ (γ

———— • ————

188 $\vdash x \ni (a \ni (q\,|^{u})) \to x \ni (a \ni q)$

$(131):$ — — — — — — — —

$\vdash x \ni (a \ni (q\,|^{u})) \to x \ni (a \ni\ <_{q})$ (δ

$\smile$

$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[x \ni (\mathfrak{a} \ni (q\,|^{u})) \to x \ni (\mathfrak{a} \ni\ <_{q})]$ (ε

$(\gamma):$ ————————

S.173

$\vdash x \ni (y \ni\ <_{(q|^{u})}) \to x \ni (y \ni\ <_{q})$ (194

———— • ————

194 $\vdash y \ni (y \ni\ <_{(q|^{u})}) \to y \ni (y \ni\ <_{q})$

$(IIa):$ — — — — — — — —

$\vdash \forall\mathfrak{i}\,[\mathfrak{i} \ni (\mathfrak{i} \ni\ <_{q}) \to \neg\ \mathfrak{i} \ni u] \to (y \ni (y \ni\ <_{(q|^{u})}) \to \neg\ y \ni u)$ (α

$\times$

$\vdash \forall\mathfrak{i}\,[\mathfrak{i} \ni (\mathfrak{i} \ni\ <_{q}) \to \neg\ \mathfrak{i} \ni u] \to (y \ni u \to \neg\ y \ni (y \ni\ <_{(q|^{u})}))$ (β

$(193):$ ·—·—·—·—·—·—·—·

$$\vdash \forall \mathfrak{i}\,[\mathfrak{i} \ni (\mathfrak{i} \ni\ <_q) \to \neg\ \mathfrak{i} \ni u] \to \neg\ y \ni (y \ni\ <_{(q\,|^u)}) \qquad (\gamma$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{i}\,[\mathfrak{i} \ni (\mathfrak{i} \ni\ <_q) \to \neg\ \mathfrak{i} \ni u] \to \forall \mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i} \ni (\mathfrak{i} \ni\ <_{(q\,|^u)})] \qquad (195$$

———— • ————

$$\begin{array}{rl} 178 & \vdash u \ni (\text{anz}\,(0) \ni\ \leq_{\text{nf}}^{-1}\ \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \\ & \forall \mathfrak{i}\,[\mathfrak{i} \ni (\mathfrak{i} \ni\ <_{(p \circ \text{nf} \circ p^{-1})}) \to \neg\ \mathfrak{i} \ni u] \\ (195): & -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ - \\ & \vdash u \ni (\text{anz}\,(0) \ni\ \leq_{\text{nf}}^{-1}\ \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to \\ & \forall \mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i} \ni (\mathfrak{i} \ni\ <_{((p \circ \text{nf} \circ p^{-1})\,|^u)})] \qquad (196 \end{array}$$

§ 140. *Zerlegung.*

Wir haben nun zu beweisen, dass unter unsern Voraussetzungen die $((p \circ \text{nf} \circ p^{-1})\,|^u)$-Reihe endlos fortläuft. Es kommt dabei auf den Satz

$$\begin{array}{l} ,\ \vdash u \ni (\text{anz}\,(0) \ni\ \leq_{\text{nf}}^{-1}\ \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\text{anz}\,(0) \ni\ \leq_{\text{nf}}^{-1}\ \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to \\ (\text{anz}\,(0) \ni (x \ni p) \to (d \ni u \to (\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ d \ni (\mathfrak{e} \ni ((p \circ \text{nf} \circ p^{-1})\,|^u))] \to \\ \neg\ d \ni (a \ni (p \circ \text{nf} \circ p^{-1})))))\ \text{‘} \qquad (\alpha \end{array}$$

an. Er ist mit dem Satze

$$,\ \vdash a \ni u \to (d \ni (a \ni q) \to d \ni (a \ni (q\,|^u)))\ \text{‘}$$

zu beweisen, der aus (N) folgt.

§ 141. *Aufbau.*

$$\begin{array}{rl} \text{N} & \vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\alpha \ni u \to \neg\ \varepsilon \ni (\alpha \ni q))) = q\,|^u \\ (10): & \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ & \vdash \neg\ (a \ni u \to \neg\ d \ni (a \ni q)) \to d \ni (a \ni (q\,|^u)) \qquad (\alpha \\ (Ie) :: & -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ - \\ & \vdash a \ni u \to (d \ni (a \ni q) \to d \ni (a \ni (q\,|^u))) \qquad (197 \end{array}$$

———— • ————

$$\begin{array}{rl} 137 & \vdash x \ni (d \ni\ \leq_{(p \circ \text{nf} \circ p^{-1})}) \to \\ & (d \ni (a \ni (p \circ \text{nf} \circ p^{-1})) \to x \ni (a \ni\ \leq_{(p \circ \text{nf} \circ p^{-1})})) \\ (181): & -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ - \end{array}$$

$\vdash u \mathrel{ə} (\text{anz}\,(0) \mathrel{ə} \leq_{\text{nf}}^{-1} \mathrel{ə} p^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow (\text{anz}\,(0) \mathrel{ə} \leq_{\text{nf}}^{-1} \mathrel{ə} (u \mathrel{ə} p :\twoheadrightarrow) \rightarrow$

$(\text{anz}\,(0) \mathrel{ə} (x \mathrel{ə} p) \rightarrow (x \mathrel{ə} (d \mathrel{ə} \leq_{(p \circ \text{nf} \circ p^{-1})}) \rightarrow$

$(d \mathrel{ə} (a \mathrel{ə} (p \circ \text{nf} \circ p^{-1})) \rightarrow a \mathrel{ə} u))))$ $(\alpha$

$(197) :$ — — — — — — — —

$\vdash u \mathrel{ə} (\text{anz}\,(0) \mathrel{ə} \leq_{\text{nf}}^{-1} \mathrel{ə} p^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow (\text{anz}\,(0) \mathrel{ə} \leq_{\text{nf}}^{-1} \mathrel{ə} (u \mathrel{ə} p :\twoheadrightarrow) \rightarrow$

$(\text{anz}\,(0) \mathrel{ə} (x \mathrel{ə} p) \rightarrow (x \mathrel{ə} (d \mathrel{ə} \leq_{(p \circ \text{nf} \circ p^{-1})}) \rightarrow$

$(d \mathrel{ə} (a \mathrel{ə} (p \circ \text{nf} \circ p^{-1})) \rightarrow d \mathrel{ə} (a \mathrel{ə} ((p \circ \text{nf} \circ p^{-1}) \,|^{u}))))))$ (198

$(186) ::$ — — — — — — — —

$\vdash u \mathrel{ə} (\text{anz}\,(0) \mathrel{ə} \leq_{\text{nf}}^{-1} \mathrel{ə} p^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow (\text{anz}\,(0) \mathrel{ə} \leq_{\text{nf}}^{-1} \mathrel{ə} (u \mathrel{ə} p :\twoheadrightarrow) \rightarrow$

$(\text{anz}\,(0) \mathrel{ə} (x \mathrel{ə} p) \rightarrow (d \mathrel{ə} u \rightarrow$

$(d \mathrel{ə} (a \mathrel{ə} (p \circ \text{nf} \circ p^{-1})) \rightarrow d \mathrel{ə} (a \mathrel{ə} ((p \circ \text{nf} \circ p^{-1}) \,|^{u}))))))$ $(\alpha$

$\times$

S.174

$\vdash u \mathrel{ə} (\text{anz}\,(0) \mathrel{ə} \leq_{\text{nf}}^{-1} \mathrel{ə} p^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow (\text{anz}\,(0) \mathrel{ə} \leq_{\text{nf}}^{-1} \mathrel{ə} (u \mathrel{ə} p :\twoheadrightarrow) \rightarrow$

$(\text{anz}\,(0) \mathrel{ə} (x \mathrel{ə} p) \rightarrow (d \mathrel{ə} u \rightarrow$

$(\neg\ d \mathrel{ə} (a \mathrel{ə} ((p \circ \text{nf} \circ p^{-1}) \,|^{u})) \rightarrow \neg\ d \mathrel{ə} (a \mathrel{ə} (p \circ \text{nf} \circ p^{-1}))))))$ $(\beta$

$(IIa) ::$ — — — — — — — —

$\vdash u \mathrel{ə} (\text{anz}\,(0) \mathrel{ə} \leq_{\text{nf}}^{-1} \mathrel{ə} p^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow (\text{anz}\,(0) \mathrel{ə} \leq_{\text{nf}}^{-1} \mathrel{ə} (u \mathrel{ə} p :\twoheadrightarrow) \rightarrow$

$(\text{anz}\,(0) \mathrel{ə} (x \mathrel{ə} p) \rightarrow (d \mathrel{ə} u \rightarrow$

$(\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ d \mathrel{ə} (\mathfrak{e} \mathrel{ə} ((p \circ \text{nf} \circ p^{-1}) \,|^{u}))] \rightarrow \neg\ d \mathrel{ə} (a \mathrel{ə} (p \circ \text{nf} \circ p^{-1}))))))$ $(\gamma$

$\smile$

$$\vdash u \ni (\text{anz}\,(0) \ni \leq_{\text{nf}}^{-1} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\text{anz}\,(0) \ni \leq_{\text{nf}}^{-1} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to$$
$$(\text{anz}\,(0) \ni (x \ni p) \to (d \ni u \to$$
$$(\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ d \ni (\mathfrak{e} \ni ((p \circ \text{nf} \circ p^{-1})\ |^{u}))] \to \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ d \ni (\mathfrak{e} \ni (p \circ \text{nf} \circ p^{-1}))]))))\qquad (\delta$$

$$\times$$

$$\vdash u \ni (\text{anz}\,(0) \ni \leq_{\text{nf}}^{-1} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\text{anz}\,(0) \ni \leq_{\text{nf}}^{-1} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to$$
$$(\text{anz}\,(0) \ni (x \ni p) \to (\neg\ \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ d \ni (\mathfrak{e} \ni (p \circ \text{nf} \circ p^{-1}))] \to$$
$$(\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ d \ni (\mathfrak{e} \ni ((p \circ \text{nf} \circ p^{-1})\ |^{u}))] \to \neg\ d \ni u))))\qquad (\varepsilon$$

$(175):\ \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot$

$$\vdash u \ni (\text{anz}\,(0) \ni \leq_{\text{nf}}^{-1} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\text{anz}\,(0) \ni \leq_{\text{nf}}^{-1} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to$$
$$(\text{anz}\,(0) \ni (x \ni p) \to (\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ d \ni (\mathfrak{e} \ni ((p \circ \text{nf} \circ p^{-1})\ |^{u}))] \to \neg\ d \ni u)))\qquad (\zeta$$

$$\smile$$

$$\vdash u \ni (\text{anz}\,(0) \ni \leq_{\text{nf}}^{-1} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\text{anz}\,(0) \ni \leq_{\text{nf}}^{-1} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to$$
$$(\text{anz}\,(0) \ni (x \ni p) \to \forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \ni (\mathfrak{e} \ni ((p \circ \text{nf} \circ p^{-1})\ |^{u}))] \to \neg\ \mathfrak{d} \ni u]))\qquad (\eta$$

$$\times$$

$$\vdash u \ni (\text{anz}\,(0) \ni \leq_{\text{nf}}^{-1} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\text{anz}\,(0) \ni \leq_{\text{nf}}^{-1} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to$$
$$(\neg\ \forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \ni (\mathfrak{e} \ni ((p \circ \text{nf} \circ p^{-1})\ |^{u}))] \to \neg\ \mathfrak{d} \ni u] \to \neg\ \text{anz}\,(0) \ni (x \ni p)))$$
(199

§ 142. *Zerlegung.*

Es bleibt nun noch der Satz

$$,\ \vdash u \ni (\text{anz}\,(0) \ni \leq_{\text{nf}}^{-1} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\text{anz}\,(0) \ni \leq_{\text{nf}}^{-1} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to (\text{anz}\,(0) \ni (x \ni p) \to$$
$$(\text{—}\,y \ni u) = x \ni (y \ni \leq_{((p \circ \text{nf} \circ p^{-1})|^{u})}))) \text{'}\qquad (\alpha$$

zu beweisen. Mit den Sätzen (181) und (186) ist dieser zurückzuführen auf die Sätze

$$,\ \vdash x \ni (y \ni \leq_{(q|^{u})}) \to x \ni (y \ni \leq_{q}) \text{'}\qquad (\beta$$

und

$$,\ \vdash x \ni (y \ni \leq_{(p \circ \text{nf} \circ p^{-1})}) \to (u \ni (\text{anz}\,(0) \ni \leq_{\text{nf}}^{-1} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to$$
$$(\text{anz}\,(0) \ni \leq_{\text{nf}}^{-1} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to (\text{anz}\,(0) \ni (x \ni p) \to$$
$$x \ni (y \ni \leq_{((p \circ \text{nf} \circ p^{-1})|^{u})})))) \text{'}\qquad (\gamma$$

Von diesen kann (β) aus (194) abgeleitet werden, während (γ) mit (152) zu beweisen ist. Wir bedürfen dazu des Satzes

$, \vdash u \,ə\, (\text{anz}\,(0) \,ə\, \leq_{\text{nf}}^{-1} \,ə\, p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\text{anz}\,(0) \,ə\, \leq_{\text{nf}}^{-1} \,ə\, (u \,ə\, p :\twoheadrightarrow) \to (\text{anz}\,(0) \,ə\, (x \,ə\, p) \to$
$(x \,ə\, (d \,ə\, \leq_{((p\circ\text{nf}\circ p^{-1})|^{u})}) \to (x \,ə\, (d \,ə\, \leq_{(p\circ\text{nf}\circ p^{-1})}) \to$
$(d \,ə\, (a \,ə\, (p \circ \text{nf} \circ p^{-1})) \to x \,ə\, (a \,ə\, \leq_{((p\circ\text{nf}\circ p^{-1})|^{u})})))))) \text{‘}$ (δ

S.170 der aus (198) und (137) folgt. |

Wir gelangen dann leicht an das Ende unseres Abschnittes (c).

§ 143. *Aufbau.*

$$130 \quad \vdash x \,ə\, (y \,ə\, \leq_q) \to (\neg\; x \,ə\, (y \,ə\, <_q) \to y = x)$$

$$\times$$

$$\vdash x \,ə\, (y \,ə\, \leq_q) \to (\neg\; y = x \to x \,ə\, (y \,ə\, <_q)) \qquad (200$$

$$136 \quad \vdash x \,ə\, (y \,ə\, <_q) \to x \,ə\, (y \,ə\, \leq_q)$$
$$(194) :: \quad - - - - - - - -$$
$$\vdash x \,ə\, (y \,ə\, <_{(q|^{u})}) \to x \,ə\, (y \,ə\, \leq_q) \qquad (\alpha$$
$$(200) :: \quad - - - - - - - -$$
$$\vdash x \,ə\, (y \,ə\, \leq_{(q|^{u})}) \to (\neg\; y = x \to x \,ə\, (y \,ə\, \leq_q)) \qquad (\beta$$
$$(139) : \quad \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot$$
$$\vdash x \,ə\, (y \,ə\, \leq_{(q|^{u})}) \to x \,ə\, (y \,ə\, \leq_q) \qquad (201$$

$$201 \quad \vdash x \,ə\, (y \,ə\, \leq_{((p\circ\text{nf}\circ p^{-1})|^{u})}) \to x \,ə\, (y \,ə\, \leq_{(p\circ\text{nf}\circ p^{-1})})$$
$$(181) : \quad - - - - - - - -$$
$$\vdash u \,ə\, (\text{anz}\,(0) \,ə\, \leq_{\text{nf}}^{-1} \,ə\, p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\text{anz}\,(0) \,ə\, \leq_{\text{nf}}^{-1} \,ə\, (u \,ə\, p :\twoheadrightarrow) \to$$
$$(\text{anz}\,(0) \,ə\, (x \,ə\, p) \to (x \,ə\, (y \,ə\, \leq_{((p\circ\text{nf}\circ p^{-1})|^{u})}) \to y \,ə\, u))) \qquad (202$$

$$130 \quad \vdash F(\text{—}\, a \,ə\, (c \,ə\, \leq_q)) \to F((\neg\; a \,ə\, (c \,ə\, <_q) \to c = a))$$
$$(135) : \quad - - - - - - - -$$
$$\vdash F(\text{—}\, a \,ə\, (c \,ə\, \leq_q)) \to F(a \,ə\, (c \,ə\, \leq_q)) \qquad (203$$

$$140 \quad \vdash a \,ə\, (a \,ə\, \leq_q)$$
$$(22) : \quad \overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$\vdash a \,ə\, (a \,ə\, \leq_q^{-1}) \qquad (204$$

$$\text{M} \quad \vdash \text{anz}\,(\text{anz}\,(0) \,ə\, \leq_{\text{nf}}^{-1}) = \infty$$
$$(IIIc) : \quad \overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$\vdash F(\text{anz}\,(\text{anz}\,(0) \,ə\, \leq_{\text{nf}}^{-1})) \to F(\infty) \qquad (205$$

———— • ————

137 $\vdash x \,\text{ə}\, (d \,\text{ə}\, \leq_{((p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})|^{u})}) \rightarrow$
$(d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, ((p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1}) \,|^{u})) \rightarrow$
$x \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, \leq_{((p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})|^{u})}))$

(198) :: – – – – – – – –

$\vdash u \,\text{ə}\, (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, p^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, p :\twoheadrightarrow) \rightarrow$
$(\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, (x \,\text{ə}\, p) \rightarrow (x \,\text{ə}\, (d \,\text{ə}\, \leq_{((p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})|^{u})}) \rightarrow$
$(x \,\text{ə}\, (d \,\text{ə}\, \leq_{(p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})}) \rightarrow (d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, (p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})) \rightarrow$
$x \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, \leq_{((p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})|^{u})}))))))$ $(\alpha$

$\smile$

$\vdash u \,\text{ə}\, (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, p^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, p :\twoheadrightarrow) \rightarrow$
$(\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, (x \,\text{ə}\, p) \rightarrow$
$\forall \mathfrak{d}\, [x \,\text{ə}\, (\mathfrak{d} \,\text{ə}\, \leq_{((p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})|^{u})}) \rightarrow (x \,\text{ə}\, (\mathfrak{d} \,\text{ə}\, \leq_{(p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})}) \rightarrow$
$\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, (p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})) \rightarrow x \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \leq_{((p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})|^{u})})])]))$ $(\beta$

(152) : – – – – – – – –

$\vdash x \,\text{ə}\, (y \,\text{ə}\, \leq_{(p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})}) \rightarrow (u \,\text{ə}\, (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, p^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow$
$(\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, p :\twoheadrightarrow) \rightarrow (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, (x \,\text{ə}\, p) \rightarrow$
$(x \,\text{ə}\, (x \,\text{ə}\, \leq_{((p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})|^{u})}) \rightarrow$
$x \,\text{ə}\, (y \,\text{ə}\, \leq_{((p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})|^{u})})))))$ $(\gamma$

(140) :: ————————

$\vdash x \,\text{ə}\, (y \,\text{ə}\, \leq_{(p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})}) \rightarrow (u \,\text{ə}\, (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, p^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow$
$(\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, p :\twoheadrightarrow) \rightarrow (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, (x \,\text{ə}\, p) \rightarrow$
$x \,\text{ə}\, (y \,\text{ə}\, \leq_{((p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})|^{u})}))))$ $(\delta$

(186) :: – – – – – – – –

S.176

$\vdash u \,\text{ə}\, (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, p^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, p :\twoheadrightarrow) \rightarrow$
$(\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, (x \,\text{ə}\, p) \rightarrow (y \,\text{ə}\, u \rightarrow x \,\text{ə}\, (y \,\text{ə}\, \leq_{((p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})|^{u})}))))$ $(\varepsilon$

(IVa) : – – – – – – – –

$$\vdash (x \,\text{ə}\, (y \,\text{ə}\, \leq_{((p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})|^{u})}) \to y \,\text{ə}\, u) \to$$

$$(u \,\text{ə}\, (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, p :\twoheadrightarrow) \to$$

$$(\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, (x \,\text{ə}\, p) \to$$

$$(\text{—}\, y \,\text{ə}\, u) = [\text{—}\, x \,\text{ə}\, (y \,\text{ə}\, \leq_{((p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})|^{u})})])))) \qquad (\zeta$$

(202) :: $- \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; -$

$$\vdash u \,\text{ə}\, (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, p :\twoheadrightarrow) \to$$

$$(\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, (x \,\text{ə}\, p) \to$$

$$(\text{—}\, y \,\text{ə}\, u) = [\text{—}\, x \,\text{ə}\, (y \,\text{ə}\, \leq_{((p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})|^{u})})]))) \qquad (\eta$$

(203) : ————————————

$$\vdash u \,\text{ə}\, (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, p :\twoheadrightarrow) \to$$

$$(\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, (x \,\text{ə}\, p) \to$$

$$(\text{—}\, y \,\text{ə}\, u) = x \,\text{ə}\, (y \,\text{ə}\, \leq_{((p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})|^{u})}))) \qquad (\vartheta$$

$$\smile$$

$$\vdash u \,\text{ə}\, (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, p :\twoheadrightarrow) \to$$

$$(\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, (x \,\text{ə}\, p) \to$$

$$\forall \mathfrak{a}\, [(\text{—}\, \mathfrak{a} \,\text{ə}\, u) = x \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \leq_{((p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})|^{u})})])) \qquad (\iota$$

(Va) : $- \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; -$

$$\vdash u \,\text{ə}\, (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, p :\twoheadrightarrow) \to$$

$$(\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, (x \,\text{ə}\, p) \to$$

$$\mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\text{—}\, \varepsilon \,\text{ə}\, u) = \mathrm{ext}\, \varepsilon\, [x \,\text{ə}\, (\varepsilon \,\text{ə}\, \leq_{((p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})|^{u})})])) \qquad (\kappa$$

(164) : ————————————

$$\vdash u \,\text{ə}\, (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, p :\twoheadrightarrow) \to$$

$$(\mathrm{anz}\,(0) \,\text{ə}\, (x \,\text{ə}\, p) \to$$

$$\mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\text{—}\, \varepsilon \,\text{ə}\, u) = x \,\text{ə}\, \leq_{((p \circ \mathrm{nf} \circ p^{-1})|^{u})}^{-1})) \qquad (\lambda$$

$$\times$$

$$\vdash u \,\text{ə}\, (\text{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\text{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\text{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\text{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, p :\twoheadrightarrow) \to$$

$$(\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\,\varepsilon \,\text{ə}\, u) = x \,\text{ə}\, \leq^{-1}_{((p\circ\text{nf}\,\circ p^{-1})|^{u})} \to$$

$$\neg\ \text{anz}\,(0) \,\text{ə}\, (x \,\text{ə}\, p))) \qquad (\mu$$

$$(IIa) ::\ - - - - - - - -$$

S.177

$$\vdash u \,\text{ə}\, (\text{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\text{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\text{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\text{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, p :\twoheadrightarrow) \to$$

$$(\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\,\varepsilon \,\text{ə}\, u) = \mathfrak{a} \,\text{ə}\, \leq^{-1}_{((p\circ\text{nf}\,\circ p^{-1})|^{u})}] \to$$

$$\neg\ \text{anz}\,(0) \,\text{ə}\, (x \,\text{ə}\, p))) \qquad (\nu$$

$$(IIa) ::\ - - - - - - - -$$

$$\vdash u \,\text{ə}\, (\text{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\text{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\text{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\text{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, p :\twoheadrightarrow) \to$$

$$(\forall \mathfrak{q}\,[\text{funk}\,(\mathfrak{q}) \to (\forall \mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i} \,\text{ə}\, (\mathfrak{i} \,\text{ə}\, <_{\mathfrak{q}})] \to$$

$$(\forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \,\text{ə}\, (\mathfrak{e} \,\text{ə}\, \mathfrak{q})] \to \neg\ \mathfrak{d} \,\text{ə}\, u] \to$$

$$\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\,\varepsilon \,\text{ə}\, u) = \mathfrak{a} \,\text{ə}\, \leq_{\mathfrak{q}}^{-1}]))] \to$$

$$(\text{funk}\,((p \circ \text{nf}\ \circ p^{-1})\ |^{u}) \to (\forall \mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i} \,\text{ə}\, (\mathfrak{i} \,\text{ə}\, <_{((p\circ\text{nf}\,\circ p^{-1})|^{u})})] \to$$

$$(\forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \,\text{ə}\, (\mathfrak{e} \,\text{ə}\, ((p \circ \text{nf}\ \circ p^{-1})\ |^{u}))] \to \neg\ \mathfrak{d} \,\text{ə}\, u] \to$$

$$\neg\ \text{anz}\,(0) \,\text{ə}\, (x \,\text{ə}\, p)))))) \qquad (\xi$$

$$(196, 190) ::\ = = = = = = = =$$

$$\vdash \forall \mathfrak{q}\,[\text{funk}\,(\mathfrak{q}) \to (\forall \mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i} \,\text{ə}\, (\mathfrak{i} \,\text{ə}\, <_{\mathfrak{q}})] \to$$

$$(\forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \,\text{ə}\, (\mathfrak{e} \,\text{ə}\, \mathfrak{q})] \to \neg\ \mathfrak{d} \,\text{ə}\, u] \to$$

$$\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\,\varepsilon \,\text{ə}\, u) = \mathfrak{a} \,\text{ə}\, \leq_{\mathfrak{q}}^{-1}]))] \to$$

$$(u \,\text{ə}\, (\text{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\text{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\text{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\text{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, p :\twoheadrightarrow) \to$$

$$(\forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \,\text{ə}\, (\mathfrak{e} \,\text{ə}\, ((p \circ \text{nf}\ \circ p^{-1})\ |^{u}))] \to \neg\ \mathfrak{d} \,\text{ə}\, u] \to$$

$$\neg\ \text{anz}\,(0) \,\text{ə}\, (x \,\text{ə}\, p)))) \qquad (o$$

$$(199) :\ \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot$$

$$\vdash \forall \mathfrak{q}\,[\text{funk}\,(\mathfrak{q}) \to (\forall \mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i} \,\text{ə}\, (\mathfrak{i} \,\text{ə}\, <_{\mathfrak{q}})] \to$$

$$(\forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \,\text{ə}\, (\mathfrak{e} \,\text{ə}\, \mathfrak{q})] \to \neg\ \mathfrak{d} \,\text{ə}\, u] \to$$

$$\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\,\varepsilon \,\text{ə}\, u) = \mathfrak{a} \,\text{ə}\, \leq_{\mathfrak{q}}^{-1}]))] \to$$

$$(u \,\text{ə}\, (\text{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\text{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\text{anz}\,(0) \,\text{ə}\, \leq_{\text{nf}}^{-1} \,\text{ə}\, (u \,\text{ə}\, p :\twoheadrightarrow) \to$$

$$\neg\ \text{anz}\,(0) \,\text{ə}\, (x \,\text{ə}\, p))) \qquad (\pi$$

$$\vdash \forall \mathfrak{q}\,[\text{funk}\,(\mathfrak{q}) \rightarrow (\forall \mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{i} \mathbin{\text{ə}}\ <_{\mathfrak{q}})] \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q})] \rightarrow \neg\ \mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} u] \rightarrow$$
$$\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\,\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u) = \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{\mathfrak{q}}^{-1}]))] \rightarrow$$
$$(u \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{\text{nf}}^{-1}\ \mathbin{\text{ə}} p^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow (\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{\text{nf}}^{-1}\ \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} p :\twoheadrightarrow) \rightarrow$$
$$\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} p)]])) \qquad (\rho$$

(183) : — — — — — — — —

$$\vdash \forall \mathfrak{q}\,[\text{funk}\,(\mathfrak{q}) \rightarrow (\forall \mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{i} \mathbin{\text{ə}}\ <_{\mathfrak{q}})] \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q})] \rightarrow \neg\ \mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} u] \rightarrow$$
$$\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\,\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u) = \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{\mathfrak{q}}^{-1}]))] \rightarrow$$
$$(u \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{\text{nf}}^{-1}\ \mathbin{\text{ə}} p^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow (\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{\text{nf}}^{-1}\ \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} p :\twoheadrightarrow) \rightarrow$$
$$\neg\ \text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{\text{nf}}^{-1}))) \qquad (\sigma$$

$$\times$$

$$\vdash \forall \mathfrak{q}\,[\text{funk}\,(\mathfrak{q}) \rightarrow (\forall \mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{i} \mathbin{\text{ə}}\ <_{\mathfrak{q}})] \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q})] \rightarrow \neg\ \mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} u] \rightarrow$$
$$\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\,\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u) = \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{\mathfrak{q}}^{-1}]))] \rightarrow$$
$$(u \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{\text{nf}}^{-1}\ \mathbin{\text{ə}} p^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow (\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{\text{nf}}^{-1}) \rightarrow$$
$$\neg\ \text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{\text{nf}}^{-1}\ \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} p :\twoheadrightarrow))) \qquad (\tau$$

(204) :: ————————

$$\vdash \forall \mathfrak{q}\,[\text{funk}\,(\mathfrak{q}) \rightarrow (\forall \mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{i} \mathbin{\text{ə}}\ <_{\mathfrak{q}})] \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q})] \rightarrow \neg\ \mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} u] \rightarrow$$
$$\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\,\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u) = \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{\mathfrak{q}}^{-1}]))] \rightarrow$$
$$(u \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{\text{nf}}^{-1}\ \mathbin{\text{ə}} p^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow \neg\ \text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{\text{nf}}^{-1}\ \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} p :\twoheadrightarrow)) \qquad (\upsilon$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{q}\,[\text{funk}\,(\mathfrak{q}) \rightarrow (\forall \mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{i} \mathbin{\text{ə}}\ <_{\mathfrak{q}})] \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q})] \rightarrow \neg\ \mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} u] \rightarrow$$
$$\forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\,\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u) = \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{\mathfrak{q}}^{-1}]))] \rightarrow$$
$$\forall \mathfrak{q}\,[u \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{\text{nf}}^{-1}\ \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow \neg\ \text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{\text{nf}}^{-1}\ \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)] \qquad (\phi$$

(49) : — — — — — — — —

$$\begin{array}{ll}
 & \vdash \forall \mathfrak{q}\, [\text{funk}\,(\mathfrak{q}) \rightarrow (\forall \mathfrak{i}\, [\neg\ \mathfrak{i} \text{ ə } (\mathfrak{i} \text{ ə } <_{\mathfrak{q}})] \rightarrow \\
 & (\forall \mathfrak{d}\, [\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ \mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{e} \text{ ə } \mathfrak{q})] \rightarrow \neg\ \mathfrak{d} \text{ ə } u] \rightarrow \\
 & \forall \mathfrak{a}\, [\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(-\varepsilon \text{ ə } u) = \mathfrak{a} \text{ ə } \leq_{\mathfrak{q}}^{-1}]))] \rightarrow \\
 & \neg\ \text{anz}\,(\text{anz}\,(0) \text{ ə } \leq_{\text{nf}}^{-1}) = \text{anz}\,(u) \qquad (\chi \\
(205): & \overline{} \\
 & \vdash \forall \mathfrak{q}\, [\text{funk}\,(\mathfrak{q}) \rightarrow (\forall \mathfrak{i}\, [\neg\ \mathfrak{i} \text{ ə } (\mathfrak{i} \text{ ə } <_{\mathfrak{q}})] \rightarrow \\
 & (\forall \mathfrak{d}\, [\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ \mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{e} \text{ ə } \mathfrak{q})] \rightarrow \neg\ \mathfrak{d} \text{ ə } u] \rightarrow \\
 & \forall \mathfrak{a}\, [\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(-\varepsilon \text{ ə } u) = \mathfrak{a} \text{ ə } \leq_{\mathfrak{q}}^{-1}]))] \rightarrow \\
 & \neg\ \infty = \text{anz}\,(u) \qquad (206
\end{array}$$

$$\times$$

$$\begin{array}{l}
\vdash \infty = \text{anz}\,(u) \rightarrow \\
\neg\ \forall \mathfrak{q}\, [\text{funk}\,(\mathfrak{q}) \rightarrow (\forall \mathfrak{i}\, [\neg\ \mathfrak{i} \text{ ə } (\mathfrak{i} \text{ ə } <_{\mathfrak{q}})] \rightarrow \\
(\forall \mathfrak{d}\, [\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ \mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{e} \text{ ə } \mathfrak{q})] \rightarrow \neg\ \mathfrak{d} \text{ ə } u] \rightarrow \\
\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(-\varepsilon \text{ ə } u) = \mathfrak{a} \text{ ə } \leq_{\mathfrak{q}}^{-1}]))] \qquad (207
\end{array}$$

d) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l}
,\vdash \neg\ \forall \mathfrak{q}\, [\text{funk}\,(\mathfrak{q}) \rightarrow (\forall \mathfrak{i}\, [\neg\ \mathfrak{i} \text{ ə } (\mathfrak{i} \text{ ə } <_{\mathfrak{q}})] \rightarrow \\
(\forall \mathfrak{d}\, [\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ \mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{e} \text{ ə } \mathfrak{q})] \rightarrow \neg\ \mathfrak{d} \text{ ə } u] \rightarrow \\
\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ u = \mathfrak{a} \text{ ə } \leq_{\mathfrak{q}}^{-1}]))] \rightarrow \\
\infty = \text{anz}\,(u)\text{‘}
\end{array}$$

| S.172

§ 144. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun die Umkehrung des Satzes (207), dass nämlich Endlos die Anzahl ist, die einem Begriffe zukommt, wenn sich die unter diesen Begriff fallenden Gegenstände in eine Reihe ordnen lassen, die mit einem gewissen Gegenstande anfängt und endlos fortläuft, ohne in sich zurückzulaufen und ohne sich zu verzweigen. Es kommt darauf an zu zeigen, dass Endlos die Anzahl ist, die dem Begriffe *Glied einer solchen Reihe* zukommt, in Zeichen:

$$\begin{array}{l}
,\ \vdash \forall \mathfrak{i}\, [\neg\ \mathfrak{i} \text{ ə } (\mathfrak{i} \text{ ə } <_{q})] \rightarrow (\text{funk}\,(q) \rightarrow \\
(\forall \mathfrak{d}\, [\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ \mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{e} \text{ ə } q)] \rightarrow \neg\ \mathfrak{d} \text{ ə } (x \text{ ə } \leq_{q}^{-1})] \rightarrow \infty = \text{anz}\,(x \text{ ə } \leq_{q}^{-1})))\text{‘} \qquad (\alpha
\end{array}$$

Wir benutzen hierzu den Satz (32) und haben eine Beziehung nachzuweisen, welche die Anzahlenreihe in die mit x anfangende q-Reihe und deren Umkehrung diese in jene abbildet. Es liegt nahe, die $\text{anz}\,(0)$ dem x, die $\text{anz}\,(1)$ dem auf x nächstfolgenden Gliede der q-Reihe und so immer die nächstfolgende Anzahl dem nächstfolgenden Gliede der q-Reihe zuzuordnen. Wir fassen immer ein Glied der Anzahlenreihe und ein Glied der q-Reihe zu einem Paare zusammen und bilden aus diesen Paaren eine Reihe. Die reihenbildende Beziehung ist dadurch bestimmt, dass ein Paar zu einem zweiten Paare dann in ihr steht, wenn das erste Glied des ersten Paares zum ersten Gliede des zweiten Paares in der nf-Beziehung und das zweite Glied des ersten Paares zum zweiten Gliede des zweiten Paares in der q-Beziehung steht. Wenn dann das Paar $((n, y))$ unserer mit dem Paare $((\text{anz}\,(0), x))$ anfangenden Reihe angehört, so steht n zu y in der aufzuweisenden abbildenden Beziehung. Wir definiren nun das Paar so:

$$(o, a) := \text{ext}\,\varepsilon\,(o \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} \varepsilon)) \qquad (\Xi$$

Das Semikolon ist hierbei zweiseitiges Functionszeichen. Der Ausdruck

$$‚\,\Pi \mathbin{\text{ə}} ((\Gamma, \Delta))\,‘$$

ist demnach gleichbedeutend mit

$$‚\,\Gamma \mathbin{\text{ə}} (\Delta \mathbin{\text{ə}} \Pi)\,‘,$$

wenn ‚Γ‘, ‚Δ‘, ‚Π‘ Gegenstände bedeuten. Für den Umfang der Beziehung, die in der oben angegebenen Weise aus der p-Beziehung und der q-Beziehung, wie ich sage, **gekoppelt** ist, führe ich ein einfaches Zeichen ein, indem ich definire:

$$p \otimes q :=$$
$$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ \forall\mathfrak{a}\,\forall\mathfrak{o}\,[\alpha = (\mathfrak{o}, \mathfrak{a}) \to \forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} q) \to \forall\mathfrak{c}\,[\varepsilon = (\mathfrak{c}, \mathfrak{d}) \to \neg\ \mathfrak{c} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{o} \mathbin{\text{ə}} p)]]]] \qquad (\mathrm{O}$$

Danach deutet

$$‚\,(\text{anz}\,(0), x) \mathbin{\text{ə}} ((\xi, \zeta) \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{(\text{nf}\,\otimes q)})\,‘$$

unsere abbildende Beziehung und

$$‚\,\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,((\text{anz}\,(0), x) \mathbin{\text{ə}} ((\varepsilon, \alpha) \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{(\text{nf}\,\otimes q)}))\,‘$$

deren Umfang an. Wir definiren nun

$$A \angle t := \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(A \mathbin{\text{ə}} ((\varepsilon, \alpha) \mathbin{\text{ə}}\ \leq_t)) \qquad (\Pi$$

S.175 | Es sind dann die Sätze

$$‚\ \vdash \text{funk}\,(q) \to (\forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} q)] \to \neg\ \mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (x \mathbin{\text{ə}}\ \leq_q^{-1})] \to$$
$$\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{\text{nf}}^{-1}\ \mathbin{\text{ə}} (x \mathbin{\text{ə}}\ \leq_q^{-1}\ \mathbin{\text{ə}} ((\text{anz}\,(0), x) \angle (\text{nf}\ \otimes q)) \mathrel{:\twoheadrightarrow}\ ))\,‘ \qquad (\beta$$

und

$$‚\ \vdash \text{funk}\,(q) \to (\forall\mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{i} \mathbin{\text{ə}}\ <_q)] \to$$
$$x \mathbin{\text{ə}}\ \leq_q^{-1}\ \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{\text{nf}}^{-1}\ \mathbin{\text{ə}} ((\text{anz}\,(0), x) \angle (\text{nf}\ \otimes q))^{-1} \mathrel{:\twoheadrightarrow}\ ))\,‘ \qquad (\gamma$$

zu beweisen. Statt (β) beweisen wir zunächst den etwas allgemeinern Satz

$$‚\ \vdash \text{funk}\,(q) \to (\text{funk}\,(p) \to (\forall\mathfrak{i}\,[m \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{i} \mathbin{\text{ə}}\ \leq_p) \to \neg\ \mathfrak{i} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{i} \mathbin{\text{ə}}\ <_p)] \to$$
$$(\forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} q)] \to \neg\ \mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (x \mathbin{\text{ə}}\ \leq_q^{-1})] \to$$
$$m \mathbin{\text{ə}}\ \leq_p^{-1}\ \mathbin{\text{ə}} (x \mathbin{\text{ə}}\ \leq_q^{-1}\ \mathbin{\text{ə}} ((m, x) \angle (p \otimes q)) \mathrel{:\twoheadrightarrow}\ ))))\,‘ \qquad (\delta$$

den wir dann auch beim Beweise von (γ) verwenden können. Wir benutzen (11) und müssen demnach den Satz

$$‚\ \vdash \forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} q)] \to \neg\ \mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (x \mathbin{\text{ə}}\ \leq_q^{-1})] \to$$
$$(\forall\mathfrak{a}\,[n \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} ((m, x) \angle (p \otimes q))) \to \neg\ \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} (x \mathbin{\text{ə}}\ \leq_q^{-1})] \to$$
$$\neg\ n \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}}\ \leq_p^{-1}))\,‘ \qquad (\varepsilon$$

ableiten. Der Satz

$$‚\ \vdash \forall\mathfrak{a}\,[n \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} ((m, x) \angle (p \otimes q))) \to \neg\ \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} (x \mathbin{\text{ə}}\ \leq_q^{-1})] \to$$
$$\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ n \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} ((m, x) \angle (p \otimes q)))]\,‘ \qquad (\zeta$$

ist leicht aus dem Satze

$$‚\ \vdash n \mathbin{\text{ə}} (y \mathbin{\text{ə}} ((m, x) \angle (p \otimes q))) \to x \mathbin{\text{ə}} (y \mathbin{\text{ə}}\ \leq_q)\,‘ \qquad (\eta$$

abzuleiten, und wir können damit (ε) auf

$$‚\ \vdash \forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} q)] \to \neg\ \mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (x \mathbin{\text{ə}}\ \leq_q^{-1})] \to$$
$$(\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ n \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} ((m, x) \angle (p \otimes q)))] \to \neg\ n \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}}\ \leq_p^{-1}))\,‘ \qquad (\vartheta$$

zurückführen. Wir beweisen diesen Satz mit (144), indem wir für ‚$F(\xi)$' die Functionsmarke

$$‚\neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\neg\ \xi \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} ((m,x)\angle(p\otimes q)))]\ ‘$$

setzen. Wir haben dann den Satz

$$‚\ \vdash \forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} q)] \to \neg\ \mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (x \mathbin{\text{ə}}\ \leq_q^{-1})] \to$$
$$(\neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\neg\ c \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} ((m,x)\angle(p\otimes q)))] \to (c \mathbin{\text{ə}} (o \mathbin{\text{ə}} p) \to$$
$$\neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\neg\ o \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} ((m,x)\angle(p\otimes q)))]))\ ‘ \qquad (\iota$$

nöthig. Ich stelle zur bessern Verständigung die p-Reihe und die q-Reihe hier bildlich neben einander dar:

p-Reihe	q-Reihe
m	x
$\vdots$	$\vdots$
c	d
o	a

Es ist zu zeigen:

„Wenn die mit x anfangende q-Reihe ohne Ende fortläuft und | wenn es einen Gegenstand (d) giebt, der mit c zusammen ein Paar bildet, das der mit dem Paare (m,x) anfangenden $(p\otimes q)$-Reihe angehört, so giebt es auch einen Gegenstand (a), der mit o zusammen ein solches Paar bildet, sofern c zu o in der p-Beziehung steht." S.179

Wir beweisen zunächst den Satz

$$‚\ \vdash c \mathbin{\text{ə}} (d \mathbin{\text{ə}} (A\angle(p\otimes q))) \to (c \mathbin{\text{ə}} (o \mathbin{\text{ə}} p) \to$$
$$(d \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} q) \to o \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} (A\angle(p\otimes q)))))\ ‘\ [170] \qquad (\kappa$$

wofür wir wegen der Definition (Π)

$$‚\ \vdash A \mathbin{\text{ə}} ((c,d) \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{(p\otimes q)}) \to (c \mathbin{\text{ə}} (o \mathbin{\text{ə}} p) \to$$
$$(d \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} q) \to A \mathbin{\text{ə}} ((o,a) \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{(p\otimes q)})))\ ‘ \qquad (\lambda$$

schreiben können. Dies kann leicht mit dem Satze

$$‚\ \vdash c \mathbin{\text{ə}} (o \mathbin{\text{ə}} p) \to (d \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} q) \to (c,d) \mathbin{\text{ə}} ((o,a) \mathbin{\text{ə}} (p\otimes q)))\ ‘ \qquad (\mu$$

bewiesen werden, der aus der Definition (O) folgt.

§ 145. *Aufbau.*

$$\text{O}\quad \vdash \operatorname{ext}\alpha\operatorname{ext}\varepsilon\,[\neg\ \forall\mathfrak{a}\,\forall\mathfrak{o}\,[\alpha = (\mathfrak{o},\mathfrak{a}) \to \forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} q) \to$$
$$\forall\mathfrak{c}\,[\varepsilon = (\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \to \neg\ \mathfrak{c} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{o} \mathbin{\text{ə}} p)]]]] = p\otimes q$$

(100) : ———————————

$$\vdash \neg\ (c,d) \mathbin{\text{ə}} ((o,a) \mathbin{\text{ə}} (p\otimes q)) \to \forall\mathfrak{a}\,\forall\mathfrak{o}\,[(o,a) = (\mathfrak{o},\mathfrak{a}) \to$$
$$\forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} q) \to \forall\mathfrak{c}\,[(c,d) = (\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \to \neg\ \mathfrak{c} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{o} \mathbin{\text{ə}} p)]]] \qquad (\alpha$$

(IIa) : — — — — — — — —

$$\vdash \neg\ (c,d) \mathbin{\text{ə}} ((o,a) \mathbin{\text{ə}} (p\otimes q)) \to \forall\mathfrak{o}\,[(o,a) = (\mathfrak{o},a) \to$$
$$\forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} q) \to \forall\mathfrak{c}\,[(c,d) = (\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \to \neg\ \mathfrak{c} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{o} \mathbin{\text{ə}} p)]]] \qquad (\beta$$

(IIa) : — — — — — — — —

[170] Hier ist für „(m,x)" „A" geschrieben.

$$\vdash \neg\ (c,d) \ni ((o,a) \ni (p \otimes q)) \to ((o,a) = (o,a) \to$$
$$\forall \mathfrak{d}\, [\mathfrak{d} \ni (a \ni q) \to \forall \mathfrak{c}\, [(c,d) = (\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \to \neg\ \mathfrak{c} \ni (o \ni p)]]) \qquad (\gamma$$

$(IIIe)$ :: ———

S.182

$$\vdash \neg\ (c,d) \ni ((o,a) \ni (p \otimes q)) \to$$
$$\forall \mathfrak{d}\, [\mathfrak{d} \ni (a \ni q) \to \forall \mathfrak{c}\, [(c,d) = (\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \to \neg\ \mathfrak{c} \ni (o \ni p)]] \qquad (\delta$$

(IIa) : – – – – – – – –

$$\vdash \neg\ (c,d) \ni ((o,a) \ni (p \otimes q)) \to$$
$$(d \ni (a \ni q) \to \forall \mathfrak{c}\, [(c,d) = (\mathfrak{c},d) \to \neg\ \mathfrak{c} \ni (o \ni p)]) \qquad (\varepsilon$$

(IIa) : – – – – – – – –

$$\vdash \neg\ (c,d) \ni ((o,a) \ni (p \otimes q)) \to$$
$$(d \ni (a \ni q) \to ((c,d) = (c,d) \to \neg\ c \ni (o \ni p))) \qquad (\zeta$$

$(IIIe)$ :: ———

$$\vdash \neg\ (c,d) \ni ((o,a) \ni (p \otimes q)) \to (d \ni (a \ni q) \to \neg\ c \ni (o \ni p)) \qquad (\eta$$

$\times$

$$\vdash c \ni (o \ni p) \to (d \ni (a \ni q) \to (c,d) \ni ((o,a) \ni (p \otimes q))) \qquad (208$$

(137) : – – – – – – – –

$$\vdash A \ni ((c,d) \ni\ \leq_{(p\otimes q)}) \to (c \ni (o \ni p) \to$$
$$(d \ni (a \ni q) \to A \ni ((o,a) \ni\ \leq_{(p\otimes q)}))) \qquad (209$$

———•———

$$\Pi \quad \vdash \operatorname{ext} \alpha \operatorname{ext} \varepsilon\, (A \ni ((\varepsilon,\alpha) \ni\ \leq_t)) = A\angle t$$

(10) : ———

$$\vdash F(A \ni ((o,a) \ni\ \leq_t)) \to F(o \ni (a \ni (A\angle t))) \qquad (210$$

———•———

210 $\vdash A \ni ((o,a) \ni\ \leq_{(p\otimes q)}) \to o \ni (a \ni (A\angle(p \otimes q)))$

(209) :: – – – – – – – –

$$\vdash A \ni ((c,d) \ni\ \leq_{(p\otimes q)}) \to (c \ni (o \ni p) \to$$
$$(d \ni (a \ni q) \to o \ni (a \ni (A\angle(p \otimes q))))) \qquad (\alpha$$

(210) : ———

$$\vdash c \ni (d \ni (A\angle(p \otimes q))) \to (c \ni (o \ni p) \to$$

$$(d \ni (a \ni q) \to o \ni (a \ni (A\angle(p \otimes q))))) \quad (211$$

$$\times$$

$$\vdash c \ni (d \ni (A\angle(p \otimes q))) \to (c \ni (o \ni p) \to$$

$$(\neg\ o \ni (a \ni (A\angle(p \otimes q))) \to \neg\ d \ni (a \ni q))) \quad (\alpha$$

$$(IIa) :: \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ -$$

$$\vdash c \ni (d \ni (A\angle(p \otimes q))) \to (c \ni (o \ni p) \to$$

$$(\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ o \ni (\mathfrak{e} \ni (A\angle(p \otimes q)))] \to \neg\ d \ni (a \ni q))) \quad (\beta$$

$$\smile$$

$$\vdash c \ni (d \ni (A\angle(p \otimes q))) \to (c \ni (o \ni p) \to$$

$$(\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ o \ni (\mathfrak{e} \ni (A\angle(p \otimes q)))] \to \forall \mathfrak{e}\, [\neg\ d \ni (\mathfrak{e} \ni q)])) \quad (\gamma$$

$$(IIa) : \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ -$$

$$\vdash \forall \mathfrak{d}\, [\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ \mathfrak{d} \ni (\mathfrak{e} \ni q)] \to \neg\ \mathfrak{d} \ni (x \ni\ \leq_q^{-1})] \to$$

$$(c \ni (d \ni (A\angle(p \otimes q))) \to (c \ni (o \ni p) \to$$

$$(\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ o \ni (\mathfrak{e} \ni (A\angle(p \otimes q)))] \to \neg\ d \ni (x \ni\ \leq_q^{-1})))) \quad (\delta$$

$$(23) : \ \overline{}$$

$$\vdash \forall \mathfrak{d}\, [\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ \mathfrak{d} \ni (\mathfrak{e} \ni q)] \to \neg\ \mathfrak{d} \ni (x \ni\ \leq_q^{-1})] \to$$

$$(c \ni (d \ni (A\angle(p \otimes q))) \to (c \ni (o \ni p) \to$$

$$(\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ o \ni (\mathfrak{e} \ni (A\angle(p \otimes q)))] \to \neg\ x \ni (d \ni\ \leq_q)))) \quad (\varepsilon$$

$$\times$$

$$\vdash \forall \mathfrak{d}\, [\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ \mathfrak{d} \ni (\mathfrak{e} \ni q)] \to \neg\ \mathfrak{d} \ni (x \ni\ \leq_q^{-1})] \to$$

$$(x \ni (d \ni\ \leq_q) \to (c \ni (o \ni p) \to$$

$$(\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ o \ni (\mathfrak{e} \ni (A\angle(p \otimes q)))] \to \neg\ c \ni (d \ni (A\angle(p \otimes q)))))) \quad (212$$

§ 146. *Zerlegung.*

Es ist nun in (212)■→das Vorderglied←■[171] [#134]

$$,\!-\!\!-x \ni (d \ni \ \leq_q)\text{ ‘}$$

wegzuschaffen. Wir benutzen dazu den Satz (η) des § 144, der aus

$$,\ \vdash (m,x) \ni ((c,d) \ni \ \leq_{(p \otimes q)}) \rightarrow x \ni (d \ni \ \leq_q)\text{ ‘} \qquad (\alpha$$

folgt. Wir beweisen zunächst den Satz

$$,\ \vdash (m,x) \ni ((c,d) \ni \ <_{(p \otimes q)}) \rightarrow \neg\ (x \ni (d \ni \ <_q) \rightarrow \neg\ m \ni (c \ni \ <_p))\text{ ‘} \qquad (\beta$$

den wir auch sonst brauchen werden. Hierzu bedürfen wir des Satzes

$$\begin{aligned}&,\ \vdash (m,x) \ni ((n,y) \ni \ <_{(p \otimes q)}) \rightarrow \\ &(\forall \mathfrak{c}\, \forall \mathfrak{d}\, [F(\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \rightarrow \forall \mathfrak{o}\, [\mathfrak{c} \ni (\mathfrak{o} \ni p) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \rightarrow F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]]] \rightarrow \\ &(\forall \mathfrak{o}\, [m \ni (\mathfrak{o} \ni p) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [x \ni (\mathfrak{a} \ni q) \rightarrow F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]] \rightarrow F(n,y)))\text{ ‘} \qquad (\gamma\end{aligned}$$

der ähnlich dem Satze (123) ist und mit ihm bewiesen werden kann. Wir schreiben (123) dazu in der Form

$$\begin{aligned}&,\ \vdash (m,x) \ni ((n,y) \ni \ <_{(p \otimes q)}) \rightarrow \\ &(\forall \mathfrak{d}\, [\mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (F(\varepsilon,\alpha)) \ni \mathfrak{d} \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni (p \otimes q)) \rightarrow \mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (F(\varepsilon,\alpha)) \ni \mathfrak{a}]] \rightarrow \\ &(\forall \mathfrak{a}\, [(m,x) \ni (\mathfrak{a} \ni (p \otimes q)) \rightarrow \mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (F(\varepsilon,\alpha)) \ni \mathfrak{a}] \rightarrow \mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (F(\varepsilon,\alpha)) \ni ((n,y))))\text{ ‘}\end{aligned}$$

Es ist nun zunächst der Satz

$$\begin{aligned}&,\ \vdash \forall \mathfrak{o}\, [m \ni (\mathfrak{o} \ni p) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [x \ni (\mathfrak{a} \ni q) \rightarrow F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]] \rightarrow \\ &((m,x) \ni (A \ni (p \otimes q)) \rightarrow \mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (F(\varepsilon,\alpha)) \ni A)\text{ ‘} \qquad (\delta\end{aligned}$$

zu beweisen, aus dem weiter der Satz

$$\begin{aligned}&,\ \vdash \forall \mathfrak{c}\, \forall \mathfrak{d}\, [F(\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \rightarrow \forall \mathfrak{o}\, [\mathfrak{c} \ni (\mathfrak{o} \ni p) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \rightarrow F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]]] \rightarrow \\ &(\mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (F(\varepsilon,\alpha)) \ni D \rightarrow (D \ni (A \ni (p \otimes q)) \rightarrow \mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (F(\varepsilon,\alpha)) \ni A))\text{ ‘} \qquad (\varepsilon\end{aligned}$$

folgt, den wir auch brauchen. Aus den Sätzen

$$,\ \vdash F(o,a) \rightarrow \mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (F(\varepsilon,\alpha)) \ni ((o,a))\text{ ‘} \qquad (\zeta$$

$$,\ \vdash (m,x) \ni ((o,a) \ni (p \otimes q)) \rightarrow x \ni (a \ni q)\text{ ‘} \qquad (\eta$$

$$,\ \vdash (m,x) \ni ((o,a) \ni (p \otimes q)) \rightarrow m \ni (o \ni p)\text{ ‘} \qquad (\vartheta$$

können wir leicht einen Satz gewinnen, der sich von (δ) nur dadurch unterscheidet, dass statt ‚A‘ ‚(o,a)‘ steht. Wir können dann das aus den beiden ersten Zeilen bestehende ■→Hinterglied←■[172] [#135] ersetzen durch

$$,\neg\ \forall \mathfrak{a}\, \forall \mathfrak{o}\, [\neg\ A = (\mathfrak{o},\mathfrak{a})] \rightarrow ((m,x) \ni (A \ni (p \otimes q)) \rightarrow \mathrm{ext}\, \alpha\, \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (F(\varepsilon,\alpha)) \ni A)\text{ ‘}$$

Um ■→das Vorderglied ←■[173] [#136]‚$\neg\ \forall \mathfrak{a}\, \forall \mathfrak{o}\, [\neg\ A = (\mathfrak{o},\mathfrak{a})]$‘ wegzuschaffen, benutzen wir den Satz

$$,\ \vdash D \ni (A \ni (p \otimes q)) \rightarrow \neg\ \forall \mathfrak{a}\, \forall \mathfrak{o}\, [\neg\ A = (\mathfrak{o},\mathfrak{a})]\text{ ‘} \qquad (\iota$$

der aus (O) folgt.

S.181 |

[171] das Unterglied
[172] Oberglied
[173] das Unterglied

[#134] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#135] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#136] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

§ 147. *Aufbau.*

O $\vdash \operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\,[\neg\ \forall\mathfrak{a}\,\forall\mathfrak{o}\,[\alpha = (\mathfrak{o},\mathfrak{a}) \to \forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q) \to$
$\forall\mathfrak{c}\,[\varepsilon = (\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \to \neg\ \mathfrak{c} \text{ ə } (\mathfrak{o} \text{ ə } p)]]]] = p \otimes q$

(14) : ―――――――――――

$\vdash \forall\mathfrak{a}\,\forall\mathfrak{o}\,[A = (\mathfrak{o},\mathfrak{a}) \to \forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q) \to$
$\forall\mathfrak{c}\,[D = (\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \to \neg\ \mathfrak{c} \text{ ə } (\mathfrak{o} \text{ ə } p)]]] \to \neg\ D \text{ ə } (A \text{ ə } (p \otimes q))$ (213

――――― ● ―――――

IIa $\vdash \forall\mathfrak{a}\,\forall\mathfrak{o}\,[\neg\ A = (\mathfrak{o},\mathfrak{a})] \to \forall\mathfrak{o}\,[\neg\ A = (\mathfrak{o},a)]$

(IIa) : − − − − − − − −

$\vdash \forall\mathfrak{a}\,\forall\mathfrak{o}\,[\neg\ A = (\mathfrak{o},\mathfrak{a})] \to \neg\ A = (o,a)$ (α

(Ia) : − − − − − − − −

$\vdash \forall\mathfrak{a}\,\forall\mathfrak{o}\,[\neg\ A = (\mathfrak{o},\mathfrak{a})] \to (A = (o,a) \to (d \text{ ə } (a \text{ ə } q) \to$

$(D = (c,d) \to \neg\ c \text{ ə } (o \text{ ə } p))))$ (β

$\smile$

$\vdash \forall\mathfrak{a}\,\forall\mathfrak{o}\,[\neg\ A = (\mathfrak{o},\mathfrak{a})] \to \forall\mathfrak{a}\,\forall\mathfrak{o}\,[A = (\mathfrak{o},\mathfrak{a}) \to \forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q) \to$

$\forall\mathfrak{c}\,[D = (\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \to \neg\ \mathfrak{c} \text{ ə } (\mathfrak{o} \text{ ə } p)]]]$ (γ

(213) : − − − − − − − −

$\vdash \forall\mathfrak{a}\,\forall\mathfrak{o}\,[\neg\ A = (\mathfrak{o},\mathfrak{a})] \to \neg\ D \text{ ə } (A \text{ ə } (p \otimes q))$ (214

――――― ● ―――――

Ξ $\vdash \operatorname{ext}\varepsilon\,(o \text{ ə } (a \text{ ə } \varepsilon)) = (o,a)$

$(IIIh)$: ―――――――――――

$\vdash q \text{ ə } \operatorname{ext}\varepsilon\,(o \text{ ə } (a \text{ ə } \varepsilon)) = q \text{ ə } ((o,a))$ (α

(82) : ―――――――――――

$\vdash o \text{ ə } (a \text{ ə } q) = q \text{ ə } ((o,a))$ (215

――――― ● ―――――

215 $\vdash o \text{ ə } (a \text{ ə } \operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\,(F(\varepsilon,\alpha))) = \operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\,(F(\varepsilon,\alpha)) \text{ ə } ((o,a))$

(33) : ―――――――――――

$\vdash F(o,a) = \operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\,(F(\varepsilon,\alpha)) \text{ ə } ((o,a))$ (216

$(IIIc)$: ―――――――――――

$\vdash G(F(o,a)) \to G(\operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\,(F(\varepsilon,\alpha)) \text{ ə } ((o,a)))$ (217

――――― ● ―――――

§ 148. *Zerlegung.*

Um die Sätze (η) und (ϑ) des § 146 zu beweisen, benutzen wir (213) und bedürfen dazu des Satzes

$$,\vdash (x \text{ ə } (a \text{ ə } q) \to \neg\ m \text{ ə } (o \text{ ə } p)) \to ((o,a) = (e,i) \to (d \text{ ə } (i \text{ ə } q) \to ((m,x) = (c,d) \to \neg\ c \text{ ə } (e \text{ ə } p))))\text{`} \qquad (\alpha$$

den wir mit dem Satze

$$,\vdash (m,x) = (c,d) \to \neg\ (x = d \to \neg\ m = c)\text{`}$$

beweisen können. Dieser folgt aus (Ξ).

§ 149. *Aufbau.*

$$\Xi \quad \vdash \text{ext}\,\varepsilon\,(m \text{ ə } (x \text{ ə } \varepsilon)) = (m,x)$$

$(IIIc)$: ―――――――――――

$$\vdash (m,x) = (c,d) \to \text{ext}\,\varepsilon\,(m \text{ ə } (x \text{ ə } \varepsilon)) = (c,d) \qquad (\alpha$$

$(IIIa)$: ―――――――――――

S.185

$$\vdash \text{ext}\,\varepsilon\,(c \text{ ə } (d \text{ ə } \varepsilon)) = (c,d) \to ((m,x) = (c,d) \to \text{ext}\,\varepsilon\,(m \text{ ə } (x \text{ ə } \varepsilon)) = \text{ext}\,\varepsilon\,(c \text{ ə } (d \text{ ə } \varepsilon))) \qquad (\beta$$

(Ξ) :: ―――――――――――

$$\vdash (m,x) = (c,d) \to \text{ext}\,\varepsilon\,(m \text{ ə } (x \text{ ə } \varepsilon)) = \text{ext}\,\varepsilon\,(c \text{ ə } (d \text{ ə } \varepsilon)) \qquad (\gamma$$

(Vb): – – – – – – – –

$$\vdash (m,x) = (c,d) \to m \text{ ə } [x \text{ ə } \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\alpha = d \to \neg\ \varepsilon = c))] = c \text{ ə } [d \text{ ə } \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\alpha = d \to \neg\ \varepsilon = c))] \qquad (\delta$$

(33): ―――――――――――

$$\vdash (m,x) = (c,d) \to (\neg\ (x = d \to \neg\ m = c)) = c \text{ ə } [d \text{ ə } \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\alpha = d \to \neg\ \varepsilon = c))] \qquad (\varepsilon$$

(33): ―――――――――――

$$\vdash (m,x) = (c,d) \to (\neg\ (x = d \to \neg\ m = c)) = (\neg\ (d = d \to \neg\ c = c)) \qquad (\zeta$$

$(IIIa)$: – – – – – – – –

$$\vdash (m,x) = (c,d) \to (\neg\ (d = d \to \neg\ c = c) \to \neg\ (x = d \to \neg\ m = c)) \qquad (\eta$$

(Ie) :: – – – – – – – –

$$\vdash (m,x) = (c,d) \to (d = d \to (c = c \to \neg\ (x = d \to \neg\ m = c))) \qquad (\vartheta$$

$(IIIe, IIIe)$ :: ═══════════

$$\vdash (m,x) = (c,d) \to \neg\ (x = d \to \neg\ m = c) \qquad (218$$

(Id): – – – – – – – –

$$\vdash (m,x) = (c,d) \to x = d \qquad (219$$

218 $\vdash (m,x) = (c,d) \to \neg\ (x = d \to \neg\ m = c)$

(Ib) : — — — — — — — —

$\vdash (m,x) = (c,d) \to m = c$ (220

$(IIIh)$: — — — — — — — —

$\vdash (m,x) = (c,d) \to f(m,x) = f(c,x)$ (α

$(IIIc)$: ————————————

$\vdash x = d \to ((m,x) = (c,d) \to f(m,x) = f(c,d))$ (β

(219) :: — — — — — — — —

$\vdash (m,x) = (c,d) \to f(m,x) = f(c,d)$ (221

$(IIIc)$: — — — — — — — —

$\vdash (m,x) = (c,d) \to (f(m,x) \to f(c,d))$ (222

———————— • ————————

222 $\vdash (x \text{ ə } (a \text{ ə } q) \to \neg\ m \text{ ə } (o \text{ ə } p)) \to$

$(d \text{ ə } (a \text{ ə } q) \to ((m,x) = (c,d) \to \neg\ c \text{ ə } (o \text{ ə } p)))$

(222) : ————————————

$\vdash (x \text{ ə } (a \text{ ə } q) \to \neg\ m \text{ ə } (o \text{ ə } p)) \to$

$((o,a) = (e,i) \to (d \text{ ə } (i \text{ ə } q) \to ((m,x) = (c,d) \to \neg\ c \text{ ə } (e \text{ ə } p))))$ (α

$\smile$

S.186

$\vdash (x \text{ ə } (a \text{ ə } q) \to \neg\ m \text{ ə } (o \text{ ə } p)) \to$

$\forall \mathfrak{a}\, \forall \mathfrak{o}\, [(o,a) = (\mathfrak{o},\mathfrak{a}) \to \forall \mathfrak{d}\, [\mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q) \to$

$\forall \mathfrak{c}\, [(m,x) = (\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \to \neg\ \mathfrak{c} \text{ ə } (\mathfrak{o} \text{ ə } p)]]]$ (β

(213) : — — — — — — — —

$\vdash (x \text{ ə } (a \text{ ə } q) \to \neg\ m \text{ ə } (o \text{ ə } p)) \to \neg\ (m,x) \text{ ə } ((o,a) \text{ ə } (p \otimes q))$ (γ

$\times$

$\vdash (m,x) \text{ ə } ((o,a) \text{ ə } (p \otimes q)) \to \neg\ (x \text{ ə } (a \text{ ə } q) \to \neg\ m \text{ ə } (o \text{ ə } p))$ (223

(Id) : — — — — — — — —

$\vdash (m,x) \text{ ə } ((o,a) \text{ ə } (p \otimes q)) \to x \text{ ə } (a \text{ ə } q)$ (224

223 $\vdash (m,x) \ni ((o,a) \ni (p \otimes q)) \to \neg\ (x \ni (a \ni q) \to \neg\ m \ni (o \ni p))$

(Ib) : — — — — — — — —

$\vdash (m,x) \ni ((o,a) \ni (p \otimes q)) \to m \ni (o \ni p)$ (225

(IIa) : — — — — — — — —

$\vdash \forall \mathfrak{o}\, [m \ni (\mathfrak{o} \ni p) \to \forall \mathfrak{a}\, [x \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]] \to$
$((m,x) \ni ((o,a) \ni (p \otimes q)) \to \forall \mathfrak{a}\, [x \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(o,\mathfrak{a})])$ (α

(IIa) : — — — — — — — —

$\vdash \forall \mathfrak{o}\, [m \ni (\mathfrak{o} \ni p) \to \forall \mathfrak{a}\, [x \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]] \to$
$((m,x) \ni ((o,a) \ni (p \otimes q)) \to (x \ni (a \ni q) \to F(o,a)))$ (β

(224) :: — — — — — — — —

$\vdash \forall \mathfrak{o}\, [m \ni (\mathfrak{o} \ni p) \to \forall \mathfrak{a}\, [x \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]] \to$
$((m,x) \ni ((o,a) \ni (p \otimes q)) \to F(o,a))$ (γ

(217) : ————————————

$\vdash \forall \mathfrak{o}\, [m \ni (\mathfrak{o} \ni p) \to \forall \mathfrak{a}\, [x \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]] \to$
$((m,x) \ni ((o,a) \ni (p \otimes q)) \to \text{ext}\, \alpha\, \text{ext}\, \varepsilon\, (F(\varepsilon,\alpha)) \ni ((o,a)))$ (δ

$(IIIb)$: — — — — — — — —

$\vdash \neg\ ((m,x) \ni (A \ni (p \otimes q)) \to \text{ext}\, \alpha\, \text{ext}\, \varepsilon\, (F(\varepsilon,\alpha)) \ni A) \to$
$(\forall \mathfrak{o}\, [m \ni (\mathfrak{o} \ni p) \to \forall \mathfrak{a}\, [x \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]] \to \neg\ A = (o,a))$ (ε

$\smile$

$\vdash \neg\ ((m,x) \ni (A \ni (p \otimes q)) \to \text{ext}\, \alpha\, \text{ext}\, \varepsilon\, (F(\varepsilon,\alpha)) \ni A) \to$
$(\forall \mathfrak{o}\, [m \ni (\mathfrak{o} \ni p) \to \forall \mathfrak{a}\, [x \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]] \to$
$\forall \mathfrak{a}\, \forall \mathfrak{o}\, [\neg\ A = (\mathfrak{o},\mathfrak{a})])$ (ζ

(214) : — — — — — — — —

$\vdash \neg\ ((m,x) \ni (A \ni (p \otimes q)) \to \text{ext}\, \alpha\, \text{ext}\, \varepsilon\, (F(\varepsilon,\alpha)) \ni A) \to$
$(\forall \mathfrak{o}\, [m \ni (\mathfrak{o} \ni p) \to \forall \mathfrak{a}\, [x \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]] \to$
$\neg\ (m,x) \ni (A \ni (p \otimes q)))$ (η

$\times$

$\vdash \forall \mathfrak{o}\, [m \ni (\mathfrak{o} \ni p) \to \forall \mathfrak{a}\, [x \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]] \to$

$((m,x) \ni (A \ni (p \otimes q)) \to \text{ext}\, \alpha\, \text{ext}\, \varepsilon\, (F(\varepsilon,\alpha)) \ni A)$ (226

$\smile$

S.187

$\vdash \forall \mathfrak{o}\, [m \ni (\mathfrak{o} \ni p) \to \forall \mathfrak{a}\, [x \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]] \to$

$\forall \mathfrak{a}\, [(m,x) \ni (\mathfrak{a} \ni (p \otimes q)) \to \text{ext}\, \alpha\, \text{ext}\, \varepsilon\, (F(\varepsilon,\alpha)) \ni \mathfrak{a}]$ (227

IIa $\vdash \forall\mathfrak{d}\,\forall\mathfrak{c}\,[\neg\ D = (\mathfrak{c},\mathfrak{d})] \to \forall\mathfrak{c}\,[\neg\ D = (\mathfrak{c}, d)]$

$(IIa):$ — — — — — — — —

$\vdash \forall\mathfrak{d}\,\forall\mathfrak{c}\,[\neg\ D = (\mathfrak{c},\mathfrak{d})] \to \neg\ D = (c, d)$ $(\alpha$

$(Ia):$ — — — — — — — —

$\vdash \forall\mathfrak{d}\,\forall\mathfrak{c}\,[\neg\ D = (\mathfrak{c},\mathfrak{d})] \to (A = (o, a) \to (d \ni (a \ni q) \to$

$(D = (c, d) \to \neg\ c \ni (o \ni p))))$ $(\beta$

$\vdash \forall\mathfrak{d}\,\forall\mathfrak{c}\,[\neg\ D = (\mathfrak{c},\mathfrak{d})] \to \forall\mathfrak{a}\,\forall\mathfrak{o}\,[A = (\mathfrak{o},\mathfrak{a}) \to \forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to$

$\forall\mathfrak{c}\,[D = (\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \to \neg\ \mathfrak{c} \ni (\mathfrak{o} \ni p)]]]$ $(\gamma$

$(213):$ — — — — — — — —

$\vdash \forall\mathfrak{d}\,\forall\mathfrak{c}\,[\neg\ D = (\mathfrak{c},\mathfrak{d})] \to \neg\ D \ni (A \ni (p \otimes q))$ (228

216 $\vdash F(n, y) = \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(F(\varepsilon,\alpha)) \ni ((n, y))$

$(IIIa):$ ————————

$\vdash G(\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(F(\varepsilon,\alpha)) \ni ((n, y))) \to G(F(n, y))$ (229

IIa $\vdash \forall\mathfrak{c}\,\forall\mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{o}\,[\mathfrak{c} \ni (\mathfrak{o} \ni p) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]]] \to$
$\forall\mathfrak{d}\,[F(c,\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{o}\,[c \ni (\mathfrak{o} \ni p) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]]]$

$(IIa):$ — — — — — — — —

$\vdash \forall\mathfrak{c}\,\forall\mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{o}\,[\mathfrak{c} \ni (\mathfrak{o} \ni p) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]]] \to$
$(F(c, d) \to \forall\mathfrak{o}\,[c \ni (\mathfrak{o} \ni p) \to \forall\mathfrak{a}\,[d \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]])$ $(\alpha$

$(226):$ — — — — — — — —

$\vdash \forall\mathfrak{c}\,\forall\mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{o}\,[\mathfrak{c} \ni (\mathfrak{o} \ni p) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]]] \to$
$(F(c, d) \to ((c, d) \ni (A \ni (p \otimes q)) \to \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(F(\varepsilon,\alpha)) \ni A))$ $(\beta$

$(217):$ ————————

$\vdash \forall\mathfrak{c}\,\forall\mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{o}\,[\mathfrak{c} \ni (\mathfrak{o} \ni p) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]]] \to$
$(\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(F(\varepsilon,\alpha)) \ni ((c, d)) \to$
$((c, d) \ni (A \ni (p \otimes q)) \to \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(F(\varepsilon,\alpha)) \ni A))$ $(\gamma$

$(IIIb):$ — — — — — — — —

$\vdash \neg\ (\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(F(\varepsilon,\alpha)) \ni D \to$
$(D \ni (A \ni (p \otimes q)) \to \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(F(\varepsilon,\alpha)) \ni A)) \to$
$(\forall\mathfrak{c}\,\forall\mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{o}\,[\mathfrak{c} \ni (\mathfrak{o} \ni p) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]]] \to$
$\neg\ D = (c, d))$ $(\delta$

$$\vdash \neg\ (\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(F(\varepsilon,\alpha)) \ni D \to$$
$$(D \ni (A \ni (p \otimes q)) \to \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(F(\varepsilon,\alpha)) \ni A)) \to$$
$$(\forall \mathfrak{c}\,\forall \mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \to \forall \mathfrak{o}\,[\mathfrak{c} \ni (\mathfrak{o} \ni p) \to \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]]] \to$$
$$\forall \mathfrak{d}\,\forall \mathfrak{c}\,[\neg\ D = (\mathfrak{c},\mathfrak{d})]) \qquad (\varepsilon$$

$(228):$ — — — — — — — — —

S.188

$$\vdash \neg\ (\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(F(\varepsilon,\alpha)) \ni D \to$$
$$(D \ni (A \ni (p \otimes q)) \to \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(F(\varepsilon,\alpha)) \ni A)) \to$$
$$(\forall \mathfrak{c}\,\forall \mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \to \forall \mathfrak{o}\,[\mathfrak{c} \ni (\mathfrak{o} \ni p) \to \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]]] \to$$
$$\neg\ D \ni (A \ni (p \otimes q))) \qquad (\zeta$$

$$\times$$

$$\vdash \forall \mathfrak{c}\,\forall \mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \to \forall \mathfrak{o}\,[\mathfrak{c} \ni (\mathfrak{o} \ni p) \to \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]]] \to$$
$$(\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(F(\varepsilon,\alpha)) \ni D \to$$
$$(D \ni (A \ni (p \otimes q)) \to \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(F(\varepsilon,\alpha)) \ni A)) \qquad (\eta$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{c}\,\forall \mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \to \forall \mathfrak{o}\,[\mathfrak{c} \ni (\mathfrak{o} \ni p) \to \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]]] \to$$
$$\forall \mathfrak{d}\,[\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(F(\varepsilon,\alpha)) \ni \mathfrak{d} \to$$
$$\forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni (p \otimes q)) \to \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(F(\varepsilon,\alpha)) \ni \mathfrak{a}]] \qquad (230$$

$(123):$ — — — — — — — — —

$$\vdash (m,x) \ni ((n,y) \ni\ <_{(p\otimes q)}) \to$$
$$(\forall \mathfrak{c}\,\forall \mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \to \forall \mathfrak{o}\,[\mathfrak{c} \ni (\mathfrak{o} \ni p) \to \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]]] \to$$
$$(\forall \mathfrak{a}\,[(m,x) \ni (\mathfrak{a} \ni (p \otimes q)) \to \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(F(\varepsilon,\alpha)) \ni \mathfrak{a}] \to$$
$$\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(F(\varepsilon,\alpha)) \ni ((n,y)))) \qquad (\alpha$$

$(229):$ — — — — — — — — —

$$\vdash (m,x) \ni ((n,y) \ni\ <_{(p\otimes q)}) \to$$
$$(\forall \mathfrak{c}\,\forall \mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \to \forall \mathfrak{o}\,[\mathfrak{c} \ni (\mathfrak{o} \ni p) \to \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]]] \to$$
$$(\forall \mathfrak{a}\,[(m,x) \ni (\mathfrak{a} \ni (p \otimes q)) \to \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(F(\varepsilon,\alpha)) \ni \mathfrak{a}] \to F(n,y))) \qquad (\beta$$

$(227)::$ — — — — — — — — —

$$\vdash (m,x) \ni ((n,y) \ni\ <_{(p\otimes q)}) \to$$
$$(\forall \mathfrak{c}\,\forall \mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \to \forall \mathfrak{o}\,[\mathfrak{c} \ni (\mathfrak{o} \ni p) \to \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]]] \to$$
$$(\forall \mathfrak{o}\,[m \ni (\mathfrak{o} \ni p) \to \forall \mathfrak{a}\,[x \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]] \to F(n,y))) \qquad (231$$

S.183 |

§ 150. *Zerlegung.*

Um nun den Satz (β) des § 146 abzuleiten, ersetzen wir in (231) die Functionsmarke

‚$F(\xi, \zeta)$‘ durch

$$‚ \neg\ (x \text{ ə} (\zeta \text{ ə } <_q) \to \neg\ m \text{ ə} (\xi \text{ ə } <_p))‘$$

Die dazu erforderlichen Sätze beweisen wir leicht aus (133) und (131).

§ 151. *Aufbau.*

133 $\vdash m \text{ ə} (c \text{ ə } <_p) \to (c \text{ ə} (o \text{ ə } p) \to m \text{ ə} (o \text{ ə } <_p))$

$(Ie):$ — — — — — — — —

$\vdash x \text{ ə} (a \text{ ə } <_q) \to (m \text{ ə} (c \text{ ə } <_p) \to$

$(c \text{ ə} (o \text{ ə } p) \to \neg\ (x \text{ ə} (a \text{ ə } <_q) \to \neg\ m \text{ ə} (o \text{ ə } <_p))))$ (α

$(133) ::$ — — — — — — — —

$\vdash x \text{ ə} (d \text{ ə } <_q) \to (d \text{ ə} (a \text{ ə } q) \to (m \text{ ə} (c \text{ ə } <_p) \to$

$(c \text{ ə} (o \text{ ə } p) \to \neg\ (x \text{ ə} (a \text{ ə } <_q) \to \neg\ m \text{ ə} (o \text{ ə } <_p)))))$ (β

$(Ib, Id) ::$ = = = = = = = =

$\vdash \neg\ (x \text{ ə} (d \text{ ə } <_q) \to \neg\ m \text{ ə} (c \text{ ə } <_p)) \to (c \text{ ə} (o \text{ ə } p) \to$

$(d \text{ ə} (a \text{ ə } q) \to \neg\ (x \text{ ə} (a \text{ ə } <_q) \to \neg\ m \text{ ə} (o \text{ ə } <_p))))$ (γ

$\smile$

$\vdash \forall \mathfrak{c}\, \forall \mathfrak{d}\, [\neg\ (x \text{ ə} (\mathfrak{d} \text{ ə } <_q) \to \neg\ m \text{ ə} (\mathfrak{c} \text{ ə } <_p)) \to \forall \mathfrak{o}\, [\mathfrak{c} \text{ ə} (\mathfrak{o} \text{ ə } p) \to$

$\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \text{ ə} (\mathfrak{a} \text{ ə } q) \to \neg\ (x \text{ ə} (\mathfrak{a} \text{ ə } <_q) \to \neg\ m \text{ ə} (\mathfrak{o} \text{ ə } <_p))]]]$ (δ

$(231) :$ ————————————

$\vdash (m, x) \text{ ə} ((c, d) \text{ ə } <_{(p \otimes q)}) \to$

$(\forall \mathfrak{o}\, [m \text{ ə} (\mathfrak{o} \text{ ə } p) \to \forall \mathfrak{a}\, [x \text{ ə} (\mathfrak{a} \text{ ə } q) \to$

$\neg\ (x \text{ ə} (\mathfrak{a} \text{ ə } <_q) \to \neg\ m \text{ ə} (\mathfrak{o} \text{ ə } <_p))]] \to$

$\neg\ (x \text{ ə} (d \text{ ə } <_q) \to \neg\ m \text{ ə} (c \text{ ə } <_p)))$ (ε

———————— • ————————

Ie $\vdash x \text{ ə} (a \text{ ə } <_q) \to (m \text{ ə} (o \text{ ə } <_p) \to$

$\neg\ (x \text{ ə} (a \text{ ə } <_q) \to \neg\ m \text{ ə} (o \text{ ə } <_p)))$

$(131, 131) ::$ = = = = = = = =

$\vdash m \text{ ə} (o \text{ ə } p) \to (x \text{ ə} (a \text{ ə } q) \to$

$\neg\ (x \text{ ə} (a \text{ ə } <_q) \to \neg\ m \text{ ə} (o \text{ ə } <_p)))$ (ζ

$\smile$

$$\vdash \forall \mathfrak{o}\,[m \ni (\mathfrak{o} \ni p) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\,[x \ni (\mathfrak{a} \ni q) \rightarrow$$

$$\neg\ (x \ni (\mathfrak{a} \ni\ <_q) \rightarrow \neg\ m \ni (\mathfrak{o} \ni\ <_p))]] \qquad (\eta$$

(ε) : ———————

$$\vdash (m,x) \ni ((c,d) \ni\ <_{(p\otimes q)}) \rightarrow$$
$$\neg\ (x \ni (d \ni\ <_q) \rightarrow \neg\ m \ni (c \ni\ <_p)) \qquad (232$$

(Id) : — — — — — — — —

$$\vdash (m,x) \ni ((c,d) \ni\ <_{(p\otimes q)}) \rightarrow x \ni (d \ni\ <_q) \qquad (233$$

(136) : — — — — — — — —

$$\vdash (m,x) \ni ((c,d) \ni\ <_{(p\otimes q)}) \rightarrow x \ni (d \ni\ \leq_q) \qquad (\alpha$$

(200) :: — — — — — — — —

$$\vdash (m,x) \ni ((c,d) \ni\ \leq_{(p\otimes q)}) \rightarrow$$
$$(\neg\ (c,d) = (m,x) \rightarrow x \ni (d \ni\ \leq_q)) \qquad (\beta$$

———— • ————

139 $\vdash d = x \rightarrow x \ni (d \ni\ \leq_q)$

(219) :: — — — — — — — —

$$\vdash (c,d) = (m,x) \rightarrow x \ni (d \ni\ \leq_q) \qquad (\gamma$$

(β) : ·—·—·—·—·—·—·—·

S.190

$$\vdash (m,x) \ni ((c,d) \ni\ \leq_{(p\otimes q)}) \rightarrow x \ni (d \ni\ \leq_q) \qquad (234$$

(210) : ———————

$$\vdash c \ni (d \ni ((m,x)\angle(p \otimes q))) \rightarrow x \ni (d \ni\ \leq_q) \qquad (235$$

$\times$

$$\vdash \neg\ x \ni (d \ni\ \leq_q) \rightarrow \neg\ c \ni (d \ni ((m,x)\angle(p \otimes q))) \qquad (236$$

(212) : ·—·—·—·—·—·—·—·

$$\vdash \forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \ni (\mathfrak{e} \ni q)] \rightarrow \neg\ \mathfrak{d} \ni (x \ni\ \leq_q^{-1})] \rightarrow (c \ni (o \ni p) \rightarrow$$

$$(\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ o \ni (\mathfrak{e} \ni ((m,x)\angle(p \otimes q)))] \rightarrow$$

$$\neg\ c \ni (d \ni ((m,x)\angle(p \otimes q))))) \qquad (\alpha$$

$\smile$

$$\vdash \forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \ni (\mathfrak{e} \ni q)] \to \neg\ \mathfrak{d} \ni (x \ni\ \leq_q^{-1})] \to (c \ni (o \ni p) \to$$
$$(\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ o \ni (\mathfrak{e} \ni ((m,x)\angle(p \otimes q)))] \to$$
$$\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ c \ni (\mathfrak{e} \ni ((m,x)\angle(p \otimes q)))]))$$ (β

$$\times$$

$$\vdash \forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \ni (\mathfrak{e} \ni q)] \to \neg\ \mathfrak{d} \ni (x \ni\ \leq_q^{-1})] \to$$
$$(\neg\ \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ c \ni (\mathfrak{e} \ni ((m,x)\angle(p \otimes q)))] \to$$
$$(c \ni (o \ni p) \to \neg\ \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ o \ni (\mathfrak{e} \ni ((m,x)\angle(p \otimes q)))]))$$ (γ

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \ni (\mathfrak{e} \ni q)] \to \neg\ \mathfrak{d} \ni (x \ni\ \leq_q^{-1})] \to$$
$$\forall \mathfrak{d}\,[\neg\ \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \ni (\mathfrak{e} \ni ((m,x)\angle(p \otimes q)))] \to$$
$$\forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni p) \to \neg\ \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{a} \ni (\mathfrak{e} \ni ((m,x)\angle(p \otimes q)))]]]$$ (δ

(144) : $- - - - - - - -$

$$\vdash m \ni (n \ni\ \leq_p) \to$$
$$(\forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \ni (\mathfrak{e} \ni q)] \to \neg\ \mathfrak{d} \ni (x \ni\ \leq_q^{-1})] \to$$
$$(\neg\ \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ m \ni (\mathfrak{e} \ni ((m,x)\angle(p \otimes q)))] \to$$
$$\neg\ \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ n \ni (\mathfrak{e} \ni ((m,x)\angle(p \otimes q)))]))$$ (237

———— • ————

$$(210) : \frac{140 \quad \vdash (m,x) \ni ((m,x) \ni\ \leq_t)}{\vdash m \ni (x \ni ((m,x)\angle t))}$$ (238

———— • ————

IIa $\vdash \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ m \ni (\mathfrak{e} \ni ((m,x)\angle t))] \to \neg\ m \ni (x \ni ((m,x)\angle t))$

$$\times$$

$$\vdash m \ni (x \ni ((m,x)\angle t)) \to \neg\ \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ m \ni (\mathfrak{e} \ni ((m,x)\angle t))]$$ (α

(238) :: ————————

$$\vdash \neg\ \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ m \ni (\mathfrak{e} \ni ((m,x)\angle t))]$$ (239

239 $\vdash \neg\ \forall \mathfrak{e}\, [\neg\ m \ni (\mathfrak{e} \ni ((m,x)\angle(p\otimes q)))]$

(237) : ―――――――――――――

$\vdash m \ni (n \ni\ \leq_p) \to (\forall \mathfrak{d}\, [\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ \mathfrak{d} \ni (\mathfrak{e} \ni q)] \to \neg\ \mathfrak{d} \ni (x \ni\ \leq_q^{-1})] \to$

$\neg\ \forall \mathfrak{e}\, [\neg\ n \ni (\mathfrak{e} \ni ((m,x)\angle(p\otimes q)))])$ (α

(22) : ―――――――――――――

$\vdash n \ni (m \ni\ \leq_p^{-1}) \to (\forall \mathfrak{d}\, [\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ \mathfrak{d} \ni (\mathfrak{e} \ni q)] \to \neg\ \mathfrak{d} \ni (x \ni\ \leq_q^{-1})] \to$

$\neg\ \forall \mathfrak{e}\, [\neg\ n \ni (\mathfrak{e} \ni ((m,x)\angle(p\otimes q)))])$ (β

$\times$

$\vdash \forall \mathfrak{d}\, [\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ \mathfrak{d} \ni (\mathfrak{e} \ni q)] \to \neg\ \mathfrak{d} \ni (x \ni\ \leq_q^{-1})] \to$

$(\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ n \ni (\mathfrak{e} \ni ((m,x)\angle(p\otimes q)))] \to \neg\ n \ni (m \ni\ \leq_p^{-1}))$ (240

---

236 $\vdash \neg\ x \ni (y \ni\ \leq_q) \to \neg\ n \ni (y \ni ((m,x)\angle(p\otimes q)))$

(22) : ―――――――――――――

$\vdash \neg\ y \ni (x \ni\ \leq_q^{-1}) \to \neg\ n \ni (y \ni ((m,x)\angle(p\otimes q)))$ (α

(IIa) :: – – – – – – – –

$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [n \ni (\mathfrak{a} \ni ((m,x)\angle(p\otimes q))) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni (x \ni\ \leq_q^{-1})] \to$

$(n \ni (y \ni ((m,x)\angle(p\otimes q))) \to \neg\ n \ni (y \ni ((m,x)\angle(p\otimes q))))$ (β

(Ig) : – – – – – – – –

$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [n \ni (\mathfrak{a} \ni ((m,x)\angle(p\otimes q))) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni (x \ni\ \leq_q^{-1})] \to$

$\neg\ n \ni (y \ni ((m,x)\angle(p\otimes q)))$ (γ

$\smile$

$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [n \ni (\mathfrak{a} \ni ((m,x)\angle(p\otimes q))) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni (x \ni\ \leq_q^{-1})] \to$

$\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ n \ni (\mathfrak{e} \ni ((m,x)\angle(p\otimes q)))]$ (δ

(240) : – – – – – – – –

S.191

$$\vdash \forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{e} \text{ ə } q)] \rightarrow \neg\ \mathfrak{d} \text{ ə } (x \text{ ə } \leq_q^{-1})] \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{a}\,[n \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } ((m,x)\angle(p\otimes q))) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \text{ ə } (x \text{ ə } \leq_q^{-1})] \rightarrow$$
$$\neg\ n \text{ ə } (m \text{ ə } \leq_p^{-1})) \qquad (\varepsilon$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{e} \text{ ə } q)] \rightarrow \neg\ \mathfrak{d} \text{ ə } (x \text{ ə } \leq_q^{-1})] \rightarrow$$
$$\forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } ((m,x)\angle(p\otimes q))) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \text{ ə } (x \text{ ə } \leq_q^{-1})] \rightarrow$$
$$\neg\ \mathfrak{d} \text{ ə } (m \text{ ə } \leq_p^{-1})] \qquad (\zeta$$

$$(11): \ - - - - - - - -$$

$$\vdash \text{funk}\,((m,x)\angle(p\otimes q)) \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{e} \text{ ə } q)] \rightarrow \neg\ \mathfrak{d} \text{ ə } (x \text{ ə } \leq_q^{-1})] \rightarrow$$
$$m \text{ ə } \leq_p^{-1} \text{ ə } (x \text{ ə } \leq_q^{-1} \text{ ə } ((m,x)\angle(p\otimes q)) :\twoheadrightarrow)) \qquad (241$$

§ 152. *Zerlegung.*

Wir haben in (241)■→das Vorderglied←■[174] [#137]

$$\text{,}\ — \text{funk}\,((m,x)\angle(p\otimes q))\ \text{‘}$$

durch andere zu ersetzen, um unsern Satz (δ) des § 144 zu erhalten. Der Gedankengang ist dabei folgender. Wenn die Paare $((b,d))$ und $((b,a))$ der mit $((m,x))$ anfangenden $(p\otimes q)$-Reihe angehören, so muss $((b,d))$ der mit $((b,a))$ anfangenden $(p\otimes q)$-Reihe angehören oder auf $((b,d))$ in dieser Reihe folgen, sofern die $(p\otimes q)$-Beziehung eindeutig ist. Sowohl wenn $((b,a))$ auf $((b,d))$, als auch wenn $((b,d))$ auf $((b,a))$ in dieser Reihe folgte, müsste b auf sich selbst in der p-Reihe folgen, was gegen unser ■→Vorderglied←■[175] [#138]

$$\text{,}\ \forall \mathfrak{i}\,[m \text{ ə } (\mathfrak{i} \text{ ə } \leq_p) \rightarrow \neg\ \mathfrak{i} \text{ ə } (\mathfrak{i} \text{ ə } <_p)]\ \text{‘}$$

verstossen würde. Es bleibt also nur die Möglichkeit, dass $((b,d))$ mit $((b,a))$ zusammenfällt. Dann fällt auch d mit a zusammen.

Wir bedürfen demnach des Satzes

$$\text{,}\ \vdash m \text{ ə } (r \text{ ə } \leq_p) \rightarrow (\text{funk}\,(p) \rightarrow (m \text{ ə } (n \text{ ə } \leq_p) \rightarrow$$
$$(\neg\ n \text{ ə } (r \text{ ə } <_p) \rightarrow r \text{ ə } (n \text{ ə } \leq_p))))\ \text{‘} \qquad (\alpha$$

in Worten: „Wenn ein erster und ein zweiter Gegenstand der mit einem dritten anfangenden p-Reihe angehören, so geht der erste dem zweiten vorher oder gehört der mit dem zweiten anfangenden Reihe an, falls die reihende Beziehung eindeutig ist.“

Wir beweisen diesen Satz mit (144), indem wir die Functionsmarke ‚$F(\xi)$‘ durch

---

[174] das Unterglied
[175] Unterglied

[#137] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#138] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

‚$\neg\ n \,\text{ə}\, (\xi \,\text{ə}\, <_p) \to \xi \,\text{ə}\, (n \,\text{ə}\, \leq_p)$‘ ersetzen. Wir haben dann den Satz

$$‚\ \vdash \text{funk}\,(p) \to ((\neg\ n \,\text{ə}\, (d \,\text{ə}\, <_p) \to d \,\text{ə}\, (n \,\text{ə}\, \leq_p)) \to (d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, p) \to (\neg\ n \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, <_p) \to a \,\text{ə}\, (n \,\text{ə}\, \leq_p))))\ ‘ \qquad (\beta$$

zu beweisen. Dazu brauchen wir den Satz

$$‚\ \vdash d \,\text{ə}\, (n \,\text{ə}\, <_p) \to (\text{funk}\,(p) \to (d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, p) \to a \,\text{ə}\, (n \,\text{ə}\, \leq_p)))\ ‘ \qquad (\gamma$$

den wir aus den Sätzen

$$‚\ \vdash d \,\text{ə}\, (n \,\text{ə}\, <_p) \to (\forall \mathfrak{a}\, [d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, p) \to a \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \leq_p)] \to a \,\text{ə}\, (n \,\text{ə}\, \leq_p))\ ‘ \qquad (\delta$$

S.184 | und

$$‚\ \vdash \text{funk}\,(p) \to (d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, p) \to \forall \mathfrak{a}\, [d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, p) \to a \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \leq_p)])\ ‘ \qquad (\varepsilon$$

ableiten.

§ 153. *Aufbau.*

$$137 \quad \vdash a \,\text{ə}\, (e \,\text{ə}\, \leq_p) \to (e \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, p) \to a \,\text{ə}\, (m \,\text{ə}\, \leq_p))$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{d}\, [a \,\text{ə}\, (\mathfrak{d} \,\text{ə}\, \leq_p) \to \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, p) \to a \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \leq_p)]] \qquad (\alpha$$

$$(123): \quad \rule{6cm}{0.4pt}$$

$$\vdash d \,\text{ə}\, (n \,\text{ə}\, <_p) \to (\forall \mathfrak{a}\, [d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, p) \to a \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \leq_p)] \to a \,\text{ə}\, (n \,\text{ə}\, \leq_p)) \qquad (\beta$$

———— • ————

$$13 \quad \vdash \text{funk}\,(p) \to (d \,\text{ə}\, (b \,\text{ə}\, p) \to (d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, p) \to b = a))$$

$$(139): \quad - - - - - - - -$$

$$\vdash \text{funk}\,(p) \to (d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, p) \to (d \,\text{ə}\, (b \,\text{ə}\, p) \to a \,\text{ə}\, (b \,\text{ə}\, \leq_p))) \qquad (\gamma$$

$$\smile$$

$$\vdash \text{funk}\,(p) \to (d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, p) \to \forall \mathfrak{a}\, [d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, p) \to a \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, \leq_p)]) \qquad (\delta$$

$$(\beta): \quad - - - - - - - -$$

$$\vdash d \,\text{ə}\, (n \,\text{ə}\, <_p) \to (\text{funk}\,(p) \to (d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, p) \to a \,\text{ə}\, (n \,\text{ə}\, \leq_p))) \qquad (242$$

———— • ————

$$131 \quad \vdash n \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, p) \to n \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, <_p)$$

$$(IIIc): \quad \rule{6cm}{0.4pt}$$

$$\vdash n = d \to (d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, p) \to n \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, <_p)) \qquad (\alpha$$

$$(130) :: \quad - - - - - - - -$$

$$\vdash d \,\text{ə}\, (n \,\text{ə}\, \leq_p) \to (\neg\ d \,\text{ə}\, (n \,\text{ə}\, <_p) \to (d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, p) \to n \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, <_p))) \qquad (\beta$$

$$(Ia): \quad - - - - - - - -$$

$\vdash d \ni (n \ni \leq_p) \rightarrow (\neg\ d \ni (n \ni <_p) \rightarrow (d \ni (a \ni p) \rightarrow$
$(\neg\ n \ni (a \ni <_p) \rightarrow a \ni (n \ni \leq_p))))$ (γ

$(242):$ $\cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot$

$\vdash \text{funk}\,(p) \rightarrow (d \ni (n \ni \leq_p) \rightarrow (d \ni (a \ni p) \rightarrow$
$(\neg\ n \ni (a \ni <_p) \rightarrow a \ni (n \ni \leq_p))))$ (δ

$(I) ::$ $- - - - - - - -$

$\vdash \text{funk}\,(p) \rightarrow ((\neg\ n \ni (d \ni <_p) \rightarrow d \ni (n \ni \leq_p)) \rightarrow (\neg\ n \ni (d \ni <_p) \rightarrow$
$(d \ni (a \ni p) \rightarrow (\neg\ n \ni (a \ni <_p) \rightarrow a \ni (n \ni \leq_p)))))$ (ε

———— • ————

133 $\vdash n \ni (d \ni <_p) \rightarrow (d \ni (a \ni p) \rightarrow n \ni (a \ni <_p))$

$\times$

$\vdash \neg\ n \ni (a \ni <_p) \rightarrow (d \ni (a \ni p) \rightarrow \neg\ n \ni (d \ni <_p))$ (ζ

$(\varepsilon):$ $- - - - - - - -$

S.193

$\vdash \text{funk}\,(p) \rightarrow ((\neg\ n \ni (d \ni <_p) \rightarrow d \ni (n \ni \leq_p)) \rightarrow$
$(d \ni (a \ni p) \rightarrow (\neg\ n \ni (a \ni <_p) \rightarrow a \ni (n \ni \leq_p))))$ (η

$\smile$

$\vdash \text{funk}\,(p) \rightarrow \forall \mathfrak{d}\, [(\neg\ n \ni (\mathfrak{d} \ni <_p) \rightarrow \mathfrak{d} \ni (n \ni \leq_p)) \rightarrow$

$\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni p) \rightarrow (\neg\ n \ni (\mathfrak{a} \ni <_p) \rightarrow \mathfrak{a} \ni (n \ni \leq_p))]]$ (ϑ

$(144):$ $- - - - - - - -$

$\vdash m \ni (r \ni \leq_p) \rightarrow (\text{funk}\,(p) \rightarrow ((\neg\ n \ni (m \ni <_p) \rightarrow m \ni (n \ni \leq_p)) \rightarrow$

$(\neg\ n \ni (r \ni <_p) \rightarrow r \ni (n \ni \leq_p))))$ (ι

$(I) ::$ $- - - - - - - -$

$\vdash m \ni (r \ni \leq_p) \rightarrow (\text{funk}\,(p) \rightarrow (m \ni (n \ni \leq_p) \rightarrow$

$(\neg\ n \ni (r \ni <_p) \rightarrow r \ni (n \ni \leq_p))))$ (243

———— • ————

232 $\vdash (m, x) \ni ((b, d) \ni <_{(p \otimes q)}) \rightarrow$

$\neg\ (x \ni (d \ni <_q) \rightarrow \neg\ m \ni (b \ni <_p))$

$(Ib):$ $- - - - - - - -$

$$\vdash (m,x) \ni ((b,d) \ni\ <_{(p\otimes q)}) \to m \ni (b \ni\ <_p) \qquad (244$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ m \ni (b \ni\ <_p) \to \neg\ (m,x) \ni ((b,d) \ni\ <_{(p\otimes q)}) \qquad (245$$

———— • ————

$$\begin{array}{rll}
136 & \vdash m \ni (b \ni\ <_p) \to m \ni (b \ni\ \leq_p) & \\
(244) :: & - - - - - - - - & \\
& \vdash (m,x) \ni ((b,d) \ni\ <_{(p\otimes q)}) \to m \ni (b \ni\ \leq_p) & (\alpha \\
(200) :: & - - - - - - - - & \\
& \vdash (m,x) \ni ((b,d) \ni\ \leq_{(p\otimes q)}) \to (\neg\ (b,d) = (m,x) \to m \ni (b \ni\ \leq_p)) & (\beta
\end{array}$$

———— • ————

$$\begin{array}{rll}
139 & \vdash b = m \to m \ni (b \ni\ \leq_p) & \\
(220) :: & - - - - - - - - & \\
& \vdash (b,d) = (m,x) \to m \ni (b \ni\ \leq_p) & (\gamma \\
(\beta) : & \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot & \\
& \vdash (m,x) \ni ((b,d) \ni\ \leq_{(p\otimes q)}) \to m \ni (b \ni\ \leq_p) & (246
\end{array}$$

———— • ————

$$\begin{array}{rll}
\Pi & \vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(A \ni ((\varepsilon,\alpha) \ni\ \leq_t)) = A\angle t & \\
(6) : & \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} & \\
& \vdash F(b \ni (d \ni (A\angle t))) \to F(A \ni ((b,d) \ni\ \leq_t)) & (247
\end{array}$$

———— • ————

$$\begin{array}{rll}
243 & \vdash (m,x) \ni ((b,a) \ni\ \leq_{(p\otimes q)}) \to (\text{funk}\,(p \otimes q) \to & \\
& ((m,x) \ni ((b,d) \ni\ \leq_{(p\otimes q)}) \to (\neg\ (b,d) \ni ((b,a) \ni\ <_{(p\otimes q)}) \to & \\
& (b,a) \ni ((b,d) \ni\ \leq_{(p\otimes q)})))) & \\
(130) : & - - - - - - - - & \\
& \vdash (m,x) \ni ((b,a) \ni\ \leq_{(p\otimes q)}) \to (\text{funk}\,(p \otimes q) \to & \\
& ((m,x) \ni ((b,d) \ni\ \leq_{(p\otimes q)}) \to (\neg\ (b,d) \ni ((b,a) \ni\ <_{(p\otimes q)}) \to & \\
& (\neg\ (b,a) \ni ((b,d) \ni\ <_{(p\otimes q)}) \to (b,d) = (b,a))))) & (\alpha \\
(245, 245) :: & = = = = = = = = & \\
& \vdash (m,x) \ni ((b,a) \ni\ \leq_{(p\otimes q)}) \to (\text{funk}\,(p \otimes q) \to & \\
& ((m,x) \ni ((b,d) \ni\ \leq_{(p\otimes q)}) \to (\neg\ b \ni (b \ni\ <_p) \to (b,d) = (b,a)))) & (\beta \\
(219) : & - - - - - - - - &
\end{array}$$

$$\vdash (m,x)\,\text{ə}\,((b,a)\,\text{ə}\ \leq_{(p\otimes q)}) \to (\text{funk}\,(p\otimes q) \to$$
$$((m,x)\,\text{ə}\,((b,d)\,\text{ə}\ \leq_{(p\otimes q)}) \to (\neg\ b\,\text{ə}\,(b\,\text{ə}\ <_p) \to d=a))) \qquad (\gamma$$

(IIa) :: — — — — — — — —

S.194

$$\vdash (m,x)\,\text{ə}\,((b,a)\,\text{ə}\ \leq_{(p\otimes q)}) \to (\text{funk}\,(p\otimes q) \to$$
$$((m,x)\,\text{ə}\,((b,d)\,\text{ə}\ \leq_{(p\otimes q)}) \to$$
$$(\forall\mathfrak{i}\,[m\,\text{ə}\,(\mathfrak{i}\,\text{ə}\ \leq_p) \to \neg\ \mathfrak{i}\,\text{ə}\,(\mathfrak{i}\,\text{ə}\ <_p)] \to$$
$$(m\,\text{ə}\,(b\,\text{ə}\ \leq_p) \to d=a)))) \qquad (\delta$$

(246) :: — — — — — — — —

$$\vdash (m,x)\,\text{ə}\,((b,a)\,\text{ə}\ \leq_{(p\otimes q)}) \to (\text{funk}\,(p\otimes q) \to$$
$$((m,x)\,\text{ə}\,((b,d)\,\text{ə}\ \leq_{(p\otimes q)}) \to$$
$$(\forall\mathfrak{i}\,[m\,\text{ə}\,(\mathfrak{i}\,\text{ə}\ \leq_p) \to \neg\ \mathfrak{i}\,\text{ə}\,(\mathfrak{i}\,\text{ə}\ <_p)] \to d=a))) \qquad (\varepsilon$$

$(247, 247)$ :: = = = = = = = =

$$\vdash \text{funk}\,(p\otimes q) \to (\forall\mathfrak{i}\,[m\,\text{ə}\,(\mathfrak{i}\,\text{ə}\ \leq_p) \to \neg\ \mathfrak{i}\,\text{ə}\,(\mathfrak{i}\,\text{ə}\ <_p)] \to$$
$$(b\,\text{ə}\,(d\,\text{ə}\,((m,x)\angle(p\otimes q))) \to$$
$$(b\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,((m,x)\angle(p\otimes q))) \to d=a))) \qquad (\zeta$$

$$\smile$$

$$\vdash \text{funk}\,(p\otimes q) \to (\forall\mathfrak{i}\,[m\,\text{ə}\,(\mathfrak{i}\,\text{ə}\ \leq_p) \to \neg\ \mathfrak{i}\,\text{ə}\,(\mathfrak{i}\,\text{ə}\ <_p)] \to$$
$$\forall\mathfrak{e}\,\forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{e}\,\text{ə}\,(\mathfrak{d}\,\text{ə}\,((m,x)\angle(p\otimes q))) \to$$
$$\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{e}\,\text{ə}\,(\mathfrak{a}\,\text{ə}\,((m,x)\angle(p\otimes q))) \to \mathfrak{d}=\mathfrak{a}]]) \qquad (\eta$$

(16) : — — — — — — — —

$$\vdash \text{funk}\,(p\otimes q) \to (\forall\mathfrak{i}\,[m\,\text{ə}\,(\mathfrak{i}\,\text{ə}\ \leq_p) \to \neg\ \mathfrak{i}\,\text{ə}\,(\mathfrak{i}\,\text{ə}\ <_p)] \to$$
$$\text{funk}\,((m,x)\angle(p\otimes q))) \qquad (248$$

§ 154. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun noch den Satz

$$,\ \vdash \text{funk}\,(q) \to (\text{funk}\,(p) \to \text{funk}\,(p\otimes q))\ ‘ \qquad (\alpha$$

Dazu bedürfen wir des Satzes

$$,\ \vdash a=i \to (o=e \to (o,a)=(e,i))\ ‘ \qquad (\beta$$

der aus (Ξ) abzuleiten ist. Mit (13) gewinnen wir hieraus den Satz

$$,\ \vdash \text{funk}\,(q) \to (d \,ə\, (a \,ə\, q) \to (d \,ə\, (i \,ə\, q) \to (\text{funk}\,(p) \to (c \,ə\, (o \,ə\, p) \to (c \,ə\, (e \,ə\, p) \to (o, a) = (e, i)))))) \text{ ‘} \qquad (\gamma$$

Für ‚(o, a)‘ führen wir ‚D‘ und für ‚(e, i)‘ ‚A‘ ein und wenden dann nach Einführung deutscher Buchstaben (213) an.

§ 155. *Aufbau.*

$$\Xi \quad \vdash \text{ext}\,\varepsilon\,(o \,ə\, (a \,ə\, \varepsilon)) = (o, a)$$

$(IIIc)$: ————————

$$\vdash F(\text{ext}\,\varepsilon\,(o \,ə\, (a \,ə\, \varepsilon))) \to F((o, a)) \qquad (249$$

————— • —————

$$221 \quad \vdash (m, x) = (c, d) \to f(m, x) = f(c, d)$$

$(IIIa)$: – – – – – – – – –

$$\vdash (m, x) = (c, d) \to (f(c, d) \to f(m, x)) \qquad (250$$

————— • —————

$$\text{IIIh} \quad \vdash o = e \to o \,ə\, (i \,ə\, t) = e \,ə\, (i \,ə\, t)$$

$(IIIa)$: ————————

$$\vdash a = i \to (o = e \to o \,ə\, (a \,ə\, t) = e \,ə\, (i \,ə\, t)) \qquad (\alpha$$

S.195

$$\vdash a = i \to (o = e \to \forall \mathfrak{a}\,[o \,ə\, (a \,ə\, \mathfrak{a}) = e \,ə\, (i \,ə\, \mathfrak{a})]) \qquad (\beta$$

(Va) : – – – – – – – – –

$$\vdash a = i \to (o = e \to \text{ext}\,\varepsilon\,(o \,ə\, (a \,ə\, \varepsilon)) = \text{ext}\,\varepsilon\,(e \,ə\, (i \,ə\, \varepsilon))) \qquad (\gamma$$

(249) : ————————

$$\vdash a = i \to (o = e \to (o, a) = \text{ext}\,\varepsilon\,(e \,ə\, (i \,ə\, \varepsilon))) \qquad (\delta$$

(249) : ————————

$$\vdash a = i \to (o = e \to (o, a) = (e, i)) \qquad (251$$

$(13, 13)$ :: = = = = = = = = =

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (d \,ə\, (a \,ə\, q) \to (d \,ə\, (i \,ə\, q) \to (\text{funk}\,(p) \to (c \,ə\, (o \,ə\, p) \to (c \,ə\, (e \,ə\, p) \to (o, a) = (e, i)))))) \qquad (\alpha$$

$(IIIa)$: ————————

$$\vdash D = (o, a) \to (\text{funk}\,(q) \to (d \,ə\, (a \,ə\, q) \to (d \,ə\, (i \,ə\, q) \to (\text{funk}\,(p) \to (c \,ə\, (o \,ə\, p) \to (c \,ə\, (e \,ə\, p) \to D = (e, i))))))) \qquad (\beta$$

$$\vdash D=(o,a)\rightarrow(\text{funk}\,(q)\rightarrow(d\,ə\,(a\,ə\,q)\rightarrow(d\,ə\,(i\,ə\,q)\rightarrow(\text{funk}\,(p)\rightarrow$$

$$(\neg\ D=(e,i)\rightarrow(c\,ə\,(e\,ə\,p)\rightarrow\neg\ c\,ə\,(o\,ə\,p)))))))\qquad(\gamma$$

$(250):$ ————————————

$$\vdash (m,x)=(c,d)\rightarrow(D=(o,a)\rightarrow(\text{funk}\,(q)\rightarrow(x\,ə\,(a\,ə\,q)\rightarrow$$

$$(d\,ə\,(i\,ə\,q)\rightarrow(\text{funk}\,(p)\rightarrow$$

$$(\neg\ D=(e,i)\rightarrow(c\,ə\,(e\,ə\,p)\rightarrow\neg\ m\,ə\,(o\,ə\,p))))))))\qquad(\delta$$

$(IIIa):$ ————————————

$$\vdash E=(c,d)\rightarrow(\text{funk}\,(q)\rightarrow(d\,ə\,(i\,ə\,q)\rightarrow(\text{funk}\,(p)\rightarrow$$

$$(\neg\ D=(e,i)\rightarrow(c\,ə\,(e\,ə\,p)\rightarrow(D=(o,a)\rightarrow$$

$$(x\,ə\,(a\,ə\,q)\rightarrow(E=(m,x)\rightarrow\neg\ m\,ə\,(o\,ə\,p)))))))))\qquad(\varepsilon$$

$$\smile$$

$$\vdash E=(c,d)\rightarrow(\text{funk}\,(q)\rightarrow(d\,ə\,(i\,ə\,q)\rightarrow(\text{funk}\,(p)\rightarrow$$

$$(\neg\ D=(e,i)\rightarrow(c\,ə\,(e\,ə\,p)\rightarrow\forall\mathfrak{a}\,\forall\mathfrak{o}\,[D=(\mathfrak{o},\mathfrak{a})\rightarrow$$

$$\forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{d}\,ə\,(\mathfrak{a}\,ə\,q)\rightarrow\forall\mathfrak{c}\,[E=(\mathfrak{c},\mathfrak{d})\rightarrow\neg\ \mathfrak{c}\,ə\,(\mathfrak{o}\,ə\,p)]]]))))))\qquad(\zeta$$

$(213):$ — — — — — — — —

$$\vdash E=(c,d)\rightarrow(\text{funk}\,(q)\rightarrow(d\,ə\,(i\,ə\,q)\rightarrow(\text{funk}\,(p)\rightarrow(\neg\ D=(e,i)\rightarrow$$

$$(c\,ə\,(e\,ə\,p)\rightarrow\neg\ E\,ə\,(D\,ə\,(p\otimes q)))))))\qquad(\eta$$

$$\times$$

S.196

$$\vdash \text{funk}\,(q)\rightarrow(\text{funk}\,(p)\rightarrow(\neg\ D=(e,i)\rightarrow(E\,ə\,(D\,ə\,(p\otimes q))\rightarrow$$

$$(d\,ə\,(i\,ə\,q)\rightarrow(E=(c,d)\rightarrow\neg\ c\,ə\,(e\,ə\,p))))))\qquad(\vartheta$$

$(IIIa):$ ————————————

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (\text{funk}\,(p) \to (\neg\ D = A \to (E \,\text{ə}\, (D \,\text{ə}\, (p \otimes q)) \to$$
$$(A = (e,i) \to (d \,\text{ə}\, (i \,\text{ə}\, q) \to (E = (c,d) \to \neg\ c \,\text{ə}\, (e \,\text{ə}\, p)))))))$$ (ι

$$\smile$$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (\text{funk}\,(p) \to (\neg\ D = A \to (E \,\text{ə}\, (D \,\text{ə}\, (p \otimes q)) \to$$
$$\forall\mathfrak{a}\,\forall\mathfrak{o}\,[A = (\mathfrak{o},\mathfrak{a}) \to \forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{d} \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, q) \to$$
$$\forall\mathfrak{c}\,[E = (\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \to \neg\ \mathfrak{c} \,\text{ə}\, (\mathfrak{o} \,\text{ə}\, p)]]]))))$$ (κ

$(213):$ — — — — — — — —

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (\text{funk}\,(p) \to$$
$$(\neg\ D = A \to (E \,\text{ə}\, (D \,\text{ə}\, (p \otimes q)) \to \neg\ E \,\text{ə}\, (A \,\text{ə}\, (p \otimes q)))))$$ (λ

$$\times$$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (\text{funk}\,(p) \to$$
$$(E \,\text{ə}\, (D \,\text{ə}\, (p \otimes q)) \to (E \,\text{ə}\, (A \,\text{ə}\, (p \otimes q)) \to D = A)))$$ (μ

$$\smile$$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (\text{funk}\,(p) \to$$
$$\forall\mathfrak{e}\,\forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{e} \,\text{ə}\, (\mathfrak{d} \,\text{ə}\, (p \otimes q)) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{e} \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, (p \otimes q)) \to \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]])$$ (ν

$(16):$ — — — — — — — —

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (\text{funk}\,(p) \to \text{funk}\,(p \otimes q))$$ (252

$(248):$ — — — — — — — —

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (\text{funk}\,(p) \to (\forall\mathfrak{i}\,[m \,\text{ə}\, (\mathfrak{i} \,\text{ə}\, \leq_p) \to \neg\ \mathfrak{i} \,\text{ə}\, (\mathfrak{i} \,\text{ə}\, <_p)] \to$$
$$\text{funk}\,((m,x)\angle(p \otimes q))))$$ (253

$(241):$ — — — — — — — —

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (\text{funk}\,(p) \to (\forall\mathfrak{i}\,[m \,\text{ə}\, (\mathfrak{i} \,\text{ə}\, \leq_p) \to \neg\ \mathfrak{i} \,\text{ə}\, (\mathfrak{i} \,\text{ə}\, <_p)] \to$$
$$(\forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \,\text{ə}\, (\mathfrak{e} \,\text{ə}\, q)] \to \neg\ \mathfrak{d} \,\text{ə}\, (x \,\text{ə}\, \leq_q^{-1})] \to$$
$$m \,\text{ə}\, \leq_p^{-1} \,\text{ə}\, (x \,\text{ə}\, \leq_q^{-1} \,\text{ə}\, ((m,x)\angle(p \otimes q)) :\twoheadrightarrow))))$$ (254

———— • ————

145 $\vdash \text{anz}\,(0) \,\text{ə}\, (b \,\text{ə}\, \leq_{\text{nf}}) \to \neg\ b \,\text{ə}\, (b \,\text{ə}\, \leq_{\text{nf}})$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{i}\,[\text{anz}\,(0)\,ə\,(\mathfrak{i}\,ə\,<_{\text{nf}}) \to \neg\ \mathfrak{i}\,ə\,(\mathfrak{i}\,ə\,\leq_{\text{nf}})] \qquad (255$$

$(254):$ ————————

S.197

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (\text{funk}\,(\text{nf}) \to (\forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d}\,ə\,(\mathfrak{e}\,ə\,q)] \to \neg\ \mathfrak{d}\,ə\,(x\,ə\,\leq_q^{-1})] \to$$
$$\text{anz}\,(0)\,ə\,\leq_{\text{nf}}^{-1}\,ə\,(x\,ə\,\leq_q^{-1}\,ə\,((\text{anz}\,(0), x)\angle(\text{nf}\otimes q)) :\twoheadrightarrow))) \qquad (\alpha$$

$(71) ::$ ————————

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (\forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d}\,ə\,(\mathfrak{e}\,ə\,q)] \to \neg\ \mathfrak{d}\,ə\,(x\,ə\,\leq_q^{-1})] \to$$
$$\text{anz}\,(0)\,ə\,\leq_{\text{nf}}^{-1}\,ə\,(x\,ə\,\leq_q^{-1}\,ə\,((\text{anz}\,(0), x)\angle(\text{nf}\otimes q)) :\twoheadrightarrow)) \qquad (256$$

§ 156. *Zerlegung.*

In (256) haben wir den Satz (β) des § 144. Es ist nun noch (γ) zu beweisen. Wir gebrauchen dazu (254), indem wir für ‚p' ‚q', für ‚x' ‚anz (0)', für ‚m' ‚x' und für ‚q' ‚nf' schreiben. Das dann auftretende ■→Vorderglied←■[176] [#139]

$$‚\ \forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d}\,ə\,(\mathfrak{e}\,ə\,\text{nf})] \to \neg\ \mathfrak{d}\,ə\,(\text{anz}\,(0)\,ə\,\leq_{\text{nf}}^{-1})]\ ‘$$

können wir mit (156) wegschaffen. Es bleibt noch der Satz

$$‚\ \vdash (x, m)\angle(q\otimes p) = ((m, x)\angle(p\otimes q))^{-1}\ ‘ \qquad (\alpha$$

abzuleiten, wo allgemeiner statt ‚anz (0)' ‚x' und statt ‚nf' ‚p' geschrieben ist. Dieser Satz ist auf

$$‚\ \vdash (x, m)\,ə\,((y, n)\,ə\,\leq_{(q\otimes p)}) = (m, x)\,ə\,((n, y)\,ə\,\leq_{(p\otimes q)})\ ‘ \qquad (\beta$$

zurückzuführen. Wir leiten (β) aus

$$‚\ \vdash (m, x)\,ə\,((n, y)\,ə\,\leq_{(p\otimes q)}) \to (x, m)\,ə\,((y, n)\,ə\,\leq_{(q\otimes p)})\ ‘ \qquad (\gamma$$

ab, den wir mit dem Satze

$$‚\ \vdash (m, x)\,ə\,((n, y)\,ə\,\leq_{(p\otimes q)}) \to (\forall \mathfrak{c}\,\forall \mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{c}, \mathfrak{d}) \to \forall \mathfrak{o}\,[\mathfrak{c}\,ə\,(\mathfrak{o}\,ə\,p) \to$$
$$\forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d}\,ə\,(\mathfrak{a}\,ə\,q) \to F(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})]]]] \to (F(m, x) \to F(n, y)))\ ‘ \qquad (\delta$$

beweisen. (δ) folgt aus (230) und (144).

| S.189

§ 157. *Aufbau.*

$$144 \quad \vdash (m, x)\,ə\,((n, y)\,ə\,\leq_{(p\otimes q)}) \to$$
$$(\forall \mathfrak{d}\,[\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(F(\varepsilon, \alpha))\,ə\,\mathfrak{d} \to \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d}\,ə\,(\mathfrak{a}\,ə\,(p\otimes q)) \to \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(F(\varepsilon, \alpha))\,ə\,\mathfrak{a}]] \to$$
$$(\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(F(\varepsilon, \alpha))\,ə\,((m, x)) \to \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(F(\varepsilon, \alpha))\,ə\,((n, y))))$$

$(230) ::$ – – – – – – – –

[176] Unterglied

[#139] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

$\vdash (m,x) \ni ((n,y) \ni \ \leq_{(p\otimes q)}) \rightarrow$
$(\forall \mathfrak{c}\, \forall \mathfrak{d}\, [F(\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \rightarrow \forall \mathfrak{o}\, [\mathfrak{c} \ni (\mathfrak{o} \ni p) \rightarrow$
$\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \rightarrow F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]]] \rightarrow$
$(\text{ext}\,\alpha\, \text{ext}\,\varepsilon\, (F(\varepsilon,\alpha)) \ni ((m,x)) \rightarrow \text{ext}\,\alpha\, \text{ext}\,\varepsilon\, (F(\varepsilon,\alpha)) \ni ((n,y))))$ $(\alpha$

(229) : ———————

$\vdash (m,x) \ni ((n,y) \ni \ \leq_{(p\otimes q)}) \rightarrow$
$(\forall \mathfrak{c}\, \forall \mathfrak{d}\, [F(\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \rightarrow \forall \mathfrak{o}\, [\mathfrak{c} \ni (\mathfrak{o} \ni p) \rightarrow$
$\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \rightarrow F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]]] \rightarrow$
$(\text{ext}\,\alpha\, \text{ext}\,\varepsilon\, (F(\varepsilon,\alpha)) \ni ((m,x)) \rightarrow F(n,y)))$ $(\beta$

(229) : ———————

$\vdash (m,x) \ni ((n,y) \ni \ \leq_{(p\otimes q)}) \rightarrow$
$(\forall \mathfrak{c}\, \forall \mathfrak{d}\, [F(\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \rightarrow \forall \mathfrak{o}\, [\mathfrak{c} \ni (\mathfrak{o} \ni p) \rightarrow$
$\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \rightarrow F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]]] \rightarrow$
$(F(m,x) \rightarrow F(n,y)))$ (257

——— • ———

209 $\vdash (x,m) \ni ((d,c) \ni \ \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow (c \ni (o \ni p) \rightarrow$
$(d \ni (a \ni q) \rightarrow (x,m) \ni ((a,o) \ni \ \leq_{(q\otimes p)})))$

$\smile$

$\vdash \forall \mathfrak{c}\, \forall \mathfrak{d}\, [(x,m) \ni ((\mathfrak{d},\mathfrak{c}) \ni \ \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow \forall \mathfrak{o}\, [\mathfrak{c} \ni (\mathfrak{o} \ni p) \rightarrow$

$\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \rightarrow (x,m) \ni ((\mathfrak{a},\mathfrak{o}) \ni \ \leq_{(q\otimes p)})]]]$ $(\alpha$

(257) : ———————

S.199

$\vdash (m,x) \ni ((n,y) \ni \ \leq_{(p\otimes q)}) \rightarrow ((x,m) \ni ((x,m) \ni \ \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow$

$(x,m) \ni ((y,n) \ni \ \leq_{(q\otimes p)}))$ $(\beta$

(140) :: ———————

$\vdash (m,x) \ni ((n,y) \ni \ \leq_{(p\otimes q)}) \rightarrow (x,m) \ni ((y,n) \ni \ \leq_{(q\otimes p)})$ (258

(IVa) : ———————

$\vdash ((x,m) \ni ((y,n) \ni \ \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow (m,x) \ni ((n,y) \ni \ \leq_{(p\otimes q)})) \rightarrow$

$(—\, (x,m) \ni ((y,n) \ni \ \leq_{(q\otimes p)})) = (—\, (m,x) \ni ((n,y) \ni \ \leq_{(p\otimes q)}))$ $(\alpha$

(258) :: ———————

$\vdash (—\, (x,m) \ni ((y,n) \ni \ \leq_{(q\otimes p)})) = (—\, (m,x) \ni ((n,y) \ni \ \leq_{(p\otimes q)}))$ $(\beta$

(203) : ———————

$$\vdash (x,m) \,\text{ə}\, ((y,n) \,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)}) = (\text{—}\,(m,x) \,\text{ə}\, ((n,y) \,\text{ə}\, \leq_{(p\otimes q)})) \qquad (\gamma$$

$(203):$ ————————

$$\vdash (x,m) \,\text{ə}\, ((y,n) \,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)}) = (m,x) \,\text{ə}\, ((n,y) \,\text{ə}\, \leq_{(p\otimes q)}) \qquad (\delta$$

$(210):$ ————————

$$\vdash (x,m) \,\text{ə}\, ((y,n) \,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)}) = n \,\text{ə}\, (y \,\text{ə}\, ((m,x)\angle(p\otimes q))) \qquad (\varepsilon$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [(x,m) \,\text{ə}\, ((\mathfrak{a},n) \,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)}) = n \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, ((m,x)\angle(p\otimes q)))] \qquad (\zeta$$

$(Va):$ ————————

$$\vdash \operatorname{ext}\varepsilon\, ((x,m) \,\text{ə}\, ((\varepsilon,n) \,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)})) = \operatorname{ext}\varepsilon\, [n \,\text{ə}\, (\varepsilon \,\text{ə}\, ((m,x)\angle(p\otimes q)))] \qquad (\eta$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [\operatorname{ext}\varepsilon\, ((x,m) \,\text{ə}\, ((\varepsilon,\mathfrak{a}) \,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)})) = \operatorname{ext}\varepsilon\, [\mathfrak{a} \,\text{ə}\, (\varepsilon \,\text{ə}\, ((m,x)\angle(p\otimes q)))]] \qquad (\vartheta$$

$(Va):$ ————————

$$\vdash \operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\, ((x,m) \,\text{ə}\, ((\varepsilon,\alpha) \,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)})) =$$
$$\operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\, [\alpha \,\text{ə}\, (\varepsilon \,\text{ə}\, ((m,x)\angle(p\otimes q)))] \qquad (\iota$$

$(IIIc):$ ————————

$$\vdash \operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\, [\alpha \,\text{ə}\, (\varepsilon \,\text{ə}\, ((m,x)\angle(p\otimes q)))] = ((m,x)\angle(p\otimes q))^{-1} \rightarrow$$
$$\operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\, ((x,m) \,\text{ə}\, ((\varepsilon,\alpha) \,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)})) = ((m,x)\angle(p\otimes q))^{-1} \qquad (\kappa$$

(E) :: ————————

$$\vdash \operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\, ((x,m) \,\text{ə}\, ((\varepsilon,\alpha) \,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)})) = ((m,x)\angle(p\otimes q))^{-1} \qquad (\lambda$$

$(IIIc):$ ————————

$$\vdash \operatorname{ext}\alpha \operatorname{ext}\varepsilon\, ((x,m) \,\text{ə}\, ((\varepsilon,\alpha) \,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)})) = (x,m)\angle(q\otimes p) \rightarrow$$
$$(x,m)\angle(q\otimes p) = ((m,x)\angle(p\otimes q))^{-1} \qquad (\mu$$

(Π) :: ————————

$$\vdash (x,m)\angle(q\otimes p) = ((m,x)\angle(p\otimes q))^{-1} \qquad (259$$

$(IIIc):$ ————————

$$\vdash F((x,m)\angle(q\otimes p)) \rightarrow F(((m,x)\angle(p\otimes q))^{-1}) \qquad (260$$

———— • ————

| S.192

$$\text{I} \quad \vdash f(i) \rightarrow (g(i) \rightarrow f(i))$$

$(IIa)::$ – – – – – – – –

$$\vdash \forall \mathfrak{i}\, [f(\mathfrak{i})] \rightarrow (g(i) \rightarrow f(i)) \qquad (\alpha$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{i}\,[f(\mathfrak{i})] \to \forall \mathfrak{i}\,[g(\mathfrak{i}) \to f(\mathfrak{i})] \tag{261}$$

———— • ————

156 $\vdash \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ b \,ə\, (\mathfrak{e} \,ə\, \mathrm{nf}\,)] \to \neg\ \mathrm{anz}\,(0) \,ə\, (b \,ə\, \leq_{\mathrm{nf}}\,)$

$(22):$ ——————

$\vdash \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ b \,ə\, (\mathfrak{e} \,ə\, \mathrm{nf}\,)] \to \neg\ b \,ə\, (\mathrm{anz}\,(0) \,ə\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1})$ (α

$\smile$

$\vdash \forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \,ə\, (\mathfrak{e} \,ə\, \mathrm{nf}\,)] \to \neg\ \mathfrak{d} \,ə\, (\mathrm{anz}\,(0) \,ə\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1})]$ (β

$(254):$ ——————

$\vdash \mathrm{funk}\,(\mathrm{nf}\,) \to (\mathrm{funk}\,(q) \to (\forall \mathfrak{i}\,[x \,ə\, (\mathfrak{i} \,ə\, \leq_q) \to \neg\ \mathfrak{i} \,ə\, (\mathfrak{i} \,ə\, <_q)] \to$

$x \,ə\, \leq_q^{-1} \,ə\, (\mathrm{anz}\,(0) \,ə\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,ə\, ((x, \mathrm{anz}\,(0)) \angle (q \otimes \mathrm{nf}\,))\ :\twoheadrightarrow\ )))$ (γ

$(261, 71)::$ = = = = = = = =

$\vdash \mathrm{funk}\,(q) \to (\forall \mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i} \,ə\, (\mathfrak{i} \,ə\, <_q)] \to$

$x \,ə\, \leq_q^{-1} \,ə\, (\mathrm{anz}\,(0) \,ə\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,ə\, ((x, \mathrm{anz}\,(0)) \angle (q \otimes \mathrm{nf}\,))\ :\twoheadrightarrow\ ))$ (δ

$(260):$ ——————

$\vdash \mathrm{funk}\,(q) \to (\forall \mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i} \,ə\, (\mathfrak{i} \,ə\, <_q)] \to$

$x \,ə\, \leq_q^{-1} \,ə\, (\mathrm{anz}\,(0) \,ə\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,ə\, ((\mathrm{anz}\,(0), x) \angle (\mathrm{nf}\ \otimes q))^{-1}\ :\twoheadrightarrow\ ))$ (ε

$(32):$ – – – – – – – –

$\vdash \mathrm{funk}\,(q) \to (\forall \mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i} \,ə\, (\mathfrak{i} \,ə\, <_q)] \to$

$(\mathrm{anz}\,(0) \,ə\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1} \,ə\, (x \,ə\, \leq_q^{-1} \,ə\, ((\mathrm{anz}\,(0), x) \angle (\mathrm{nf}\ \otimes q))\ :\twoheadrightarrow\ ) \to$

$\mathrm{anz}\,(\mathrm{anz}\,(0) \,ə\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1}) = \mathrm{anz}\,(x \,ə\, \leq_q^{-1})))$ (ζ

$(256)::$ – – – – – – – –

$\vdash \forall \mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i} \,ə\, (\mathfrak{i} \,ə\, <_q)] \to (\mathrm{funk}\,(q) \to$

$(\forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \,ə\, (\mathfrak{e} \,ə\, q)] \to \neg\ \mathfrak{d} \,ə\, (x \,ə\, \leq_q^{-1})] \to$

$\mathrm{anz}\,(\mathrm{anz}\,(0) \,ə\, \leq_{\mathrm{nf}}^{-1}) = \mathrm{anz}\,(x \,ə\, \leq_q^{-1})))$ (η

$(205):$ ——————

$$\vdash \forall\mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i}\,\text{ə}\,(\mathfrak{i}\,\text{ə}\ <_q)] \to (\mathrm{funk}\,(q) \to$$
$$(\forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d}\,\text{ə}\,(\mathfrak{e}\,\text{ə}\,q)] \to \neg\ \mathfrak{d}\,\text{ə}\,(x\,\text{ə}\ \leq_q^{-1})] \to$$
$$\infty = \mathrm{anz}\,(x\,\text{ə}\ \leq_q^{-1}))) \tag{262}$$

$(IIIa)$: ———

S.201

$$\vdash u = x\,\text{ə}\ \leq_q^{-1} \to (\forall\mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i}\,\text{ə}\,(\mathfrak{i}\,\text{ə}\ <_q)] \to (\mathrm{funk}\,(q) \to$$
$$(\forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d}\,\text{ə}\,(\mathfrak{e}\,\text{ə}\,q)] \to \neg\ \mathfrak{d}\,\text{ə}\,u] \to \infty = \mathrm{anz}\,(u)))) \tag{α}$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ \infty = \mathrm{anz}\,(u) \to (\mathrm{funk}\,(q) \to (\forall\mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i}\,\text{ə}\,(\mathfrak{i}\,\text{ə}\ <_q)] \to$$
$$(\forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d}\,\text{ə}\,(\mathfrak{e}\,\text{ə}\,q)] \to \neg\ \mathfrak{d}\,\text{ə}\,u] \to \neg\ u = x\,\text{ə}\ \leq_q^{-1}))) \tag{β}$$

$$\smile$$

$$\vdash \neg\ \infty = \mathrm{anz}\,(u) \to \forall\mathfrak{q}\,[\mathrm{funk}\,(\mathfrak{q}) \to (\forall\mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i}\,\text{ə}\,(\mathfrak{i}\,\text{ə}\ <_{\mathfrak{q}})] \to$$
$$(\forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d}\,\text{ə}\,(\mathfrak{e}\,\text{ə}\,\mathfrak{q})] \to \neg\ \mathfrak{d}\,\text{ə}\,u] \to \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ u = \mathfrak{a}\,\text{ə}\ \leq_{\mathfrak{q}}^{-1}]))] \tag{γ}$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ \forall\mathfrak{q}\,[\mathrm{funk}\,(\mathfrak{q}) \to (\forall\mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i}\,\text{ə}\,(\mathfrak{i}\,\text{ə}\ <_{\mathfrak{q}})] \to$$
$$(\forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d}\,\text{ə}\,(\mathfrak{e}\,\text{ə}\,\mathfrak{q})] \to \neg\ \mathfrak{d}\,\text{ə}\,u] \to$$
$$\forall\mathfrak{a}\,[\neg\ u = \mathfrak{a}\,\text{ə}\ \leq_{\mathfrak{q}}^{-1}]))] \to$$
$$\infty = \mathrm{anz}\,(u) \tag{263}$$

K. Beweis des Satzes

,$\vdash \neg\ \forall\mathfrak{A}\,\forall\mathfrak{q}\,[\neg\ u = \mathrm{zw}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \to \mathrm{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(\mathrm{anz}\,(u)\,\text{ə}\ \leq_{\mathrm{nf}})$‘

a) Beweis des Satzes

,$\vdash (x, \mathrm{anz}\,(1))\,\text{ə}\,((y,n)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes\mathrm{nf})}) \to (\mathrm{funk}\,(q) \to (\neg\ y\,\text{ə}\,(y\,\text{ə}\ <_q) \to$
$\mathrm{anz}\,(\mathrm{zw}^{q}_{(x,y)}) = \mathrm{anz}\,(\mathrm{zw}^{\mathrm{nf}}_{(\mathrm{anz}\,(1),n)})))$‘

§ 158. *Zerlegung.*

Wir können für endliche Anzahlen einen dem letzten ähnlichen Satz beweisen, dass nämlich die Anzahl eines Begriffes endlich ist, wenn sich die unter ihn fallenden Gegenstände in eine *einfache* (unverzweigte, nicht in sich zurücklaufende) Reihe ordnen lassen, die mit einem gewissen Gegenstande anfängt und mit einem gewissen Gegenstande endet. Wir bedürfen dazu einer Abkürzung, die wir im Folgenden einführen:

$$\mathrm{zw}\,^{q}_{A} := \mathrm{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\mathrm{funk}\,(q) \to \forall\mathfrak{n}\,\forall\mathfrak{m}\,[A = (\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \to (\neg\ \mathfrak{n} \text{ ə } (\mathfrak{n} \text{ ə } <_q) \to (\mathfrak{m} \text{ ə } (\varepsilon \text{ ə } \leq_q) \to \neg\ \varepsilon \text{ ə } (\mathfrak{n} \text{ ə } \leq_q)))])] \qquad \text{(P}$$

Wenn Γ, Δ, Θ Gegenstände sind und Υ der Umfang einer Beziehung ist, so drückt

$$\text{‚}\, \Gamma \text{ ə } (\mathrm{zw}\,^{\Upsilon}_{(\Delta,\Theta)})\ \text{‘}$$

aus, dass Γ der mit Δ anfangenden und der mit Θ endenden Υ-Reihe angehöre, wobei die Υ-Beziehung eindeutig sei und Θ in der Υ-Reihe nicht auf sich selbst folge. Wir sprechen dies in Worten kurz so aus: „Γ *gehört der von* Δ *bis* Θ *laufenden* Υ*-Reihe an.*“ Mit der so erklärten Bezeichnung stellt sich unser Satz in der Form dar, wie ihn die Hauptüberschrift zeigt. Es ist nämlich

$$\mathrm{zw}\,^{\Upsilon}_{(\Delta,\Theta)}$$

S.198 der Umfang des Begriffes *der von* | Δ *bis* Θ *laufenden* Υ*-Reihe angehörig*.

Wir beweisen zunächst den Satz

$$\text{‚}\, \vdash (x, \mathrm{anz}\,(1)) \text{ ə } ((y,n) \text{ ə } \leq_{(q\otimes\mathrm{nf})}) \to (\mathrm{funk}\,(q) \to (\neg\ y \text{ ə } (y \text{ ə } <_q) \to \mathrm{anz}\,(0) \text{ ə } (\mathrm{anz}\,(\mathrm{zw}\,^{q}_{(x,y)}) \text{ ə } \leq_{\mathrm{nf}})))\ \text{‘} \qquad (\alpha$$

aus dem dann ■→die Vorderglieder←■[177] [#140] wegzuschaffen sein werden. Wir leiten (α) aus (234) in der Form

$$\text{‚}\, \vdash (x, \mathrm{anz}\,(1)) \text{ ə } ((y,n) \text{ ə } \leq_{(q\otimes\mathrm{nf})}) \to \mathrm{anz}\,(1) \text{ ə } (n \text{ ə } \leq_{\mathrm{nf}})\ \text{‘}$$

und dem Satze

$$\text{‚}\, \vdash \mathrm{anz}\,(0) \text{ ə } (n \text{ ə } \leq_{\mathrm{nf}}) \to ((x, \mathrm{anz}\,(1)) \text{ ə } ((y,n) \text{ ə } \leq_{(q\otimes\mathrm{nf})}) \to (\mathrm{funk}\,(q) \to (\neg\ y \text{ ə } (y \text{ ə } <_q) \to \mathrm{anz}\,(\mathrm{zw}\,^{q}_{(x,y)}) = n)))\ \text{‘} \qquad (\beta$$

ab, den wir mit den Sätzen

$$\text{‚}\, \vdash (x, \mathrm{anz}\,(1)) \text{ ə } ((y,n) \text{ ə } \leq_{(q\otimes\mathrm{nf})}) \to (\mathrm{funk}\,(q) \to (\neg\ y \text{ ə } (y \text{ ə } <_q) \to \mathrm{anz}\,(\mathrm{zw}\,^{q}_{(x,y)}) = \mathrm{anz}\,(\mathrm{zw}\,^{\mathrm{nf}}_{(\mathrm{anz}\,(1),n)})))\ \text{‘}\ ^{\#141} \qquad (\gamma$$

$$\text{‚}\, \vdash \mathrm{anz}\,(0) \text{ ə } (n \text{ ə } \leq_{\mathrm{nf}}) \to n = \mathrm{anz}\,(\mathrm{zw}\,^{\mathrm{nf}}_{(\mathrm{anz}\,(1),n)})\ \text{‘} \qquad (\delta$$

beweisen. (γ) ist auf den allgemeinern Satz

$$\text{‚}\, \vdash \forall\mathfrak{i}\,[m \text{ ə } (\mathfrak{i} \text{ ə } \leq_p) \to \neg\ \mathfrak{i} \text{ ə } (\mathfrak{i} \text{ ə } <_p)] \to ((x,m) \text{ ə } ((y,n) \text{ ə } \leq_{(q\otimes p)}) \to (\mathrm{funk}\,(p) \to (\mathrm{funk}\,(q) \to (\forall\mathfrak{i}\,[x \text{ ə } (\mathfrak{i} \text{ ə } \leq_q) \to \neg\ \mathfrak{i} \text{ ə } (\mathfrak{i} \text{ ə } <_q)] \to \mathrm{anz}\,(\mathrm{zw}\,^{q}_{(x,y)}) = \mathrm{anz}\,(\mathrm{zw}\,^{p}_{(m,n)})))))\ \text{‘} \qquad (\varepsilon$$

zurückzuführen, zu dessen Beweise wir des Satzes

$$\text{‚}\, \vdash \forall\mathfrak{i}\,[m \text{ ə } (\mathfrak{i} \text{ ə } \leq_p) \to \neg\ \mathfrak{i} \text{ ə } (\mathfrak{i} \text{ ə } <_p)] \to ((x,m) \text{ ə } ((y,n) \text{ ə } \leq_{(q\otimes p)}) \to (\mathrm{funk}\,(p) \to (\mathrm{funk}\,(q) \to (\forall\mathfrak{i}\,[x \text{ ə } (\mathfrak{i} \text{ ə } \leq_q) \to \neg\ \mathfrak{i} \text{ ə } (\mathfrak{i} \text{ ə } <_q)] \to \mathrm{zw}\,^{q}_{(x,y)} \text{ ə } (\mathrm{zw}\,^{p}_{(m,n)} \text{ ə } ((x,m) \angle (q \otimes p)) :\twoheadrightarrow)))))\ \text{‘} \qquad (\zeta$$

[177] die Unterglieder

[#140] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

[#141] im Original fehlt linkes Zeichen [interp | bonn]

bedürfen. Dieser löst sich nach (11) in die Sätze (253) und

$$\begin{gathered}, \vdash \text{funk}\,(p) \to ((x,m)\,\text{ə}\,((y,n)\,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)}) \to (\neg\ n\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\, <_p) \to \\ (\forall\mathfrak{a}\,[d\,\text{ə}\,(\mathfrak{a}\,\text{ə}\,((x,m)\angle(q\otimes p))) \to \neg\ \mathfrak{a}\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{p}_{(m,n)})] \to \\ \neg\ d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{q}_{(x,y)})))) \text{ ‘} \qquad (\eta\end{gathered}$$

auf. Wir leiten (η) aus

$$\begin{gathered}, \vdash \text{funk}\,(p) \to ((x,m)\,\text{ə}\,((y,n)\,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)}) \to (\neg\ n\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\, <_p) \to \\ (\neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m)\,\text{ə}\,((d,\mathfrak{e})\,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)})] \to \\ (\forall\mathfrak{a}\,[d\,\text{ə}\,(\mathfrak{a}\,\text{ə}\,((x,m)\angle(q\otimes p))) \to \neg\ \mathfrak{a}\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{p}_{(m,n)})] \to \\ \neg\ d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{q}_{(x,y)}))))) \text{ ‘} \qquad (\vartheta\end{gathered}$$

ab, indem wir ■→das Vorderglied←■[178] [#142]

$$, \neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m)\,\text{ə}\,((d,\mathfrak{e})\,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)})] \text{ ‘}$$

| wegschaffen. Wir beweisen (ϑ) mit dem Satze S.200

$$\begin{gathered}, \vdash \text{funk}\,(p) \to ((x,m)\,\text{ə}\,((y,n)\,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)}) \to (d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{q}_{(x,y)}) \to \\ (\neg\ n\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\, <_p) \to ((x,m)\,\text{ə}\,((d,c)\,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)}) \to c\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{p}_{(m,n)}))))) \text{ ‘} \qquad (\iota\end{gathered}$$

der auf die Sätze (234) in der Form

$$, \vdash (x,m)\,\text{ə}\,((d,c)\,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)}) \to m\,\text{ə}\,(c\,\text{ə}\, \leq_p) \text{ ‘}$$

und

$$\begin{gathered}, \vdash (x,m)\,\text{ə}\,((d,c)\,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)}) \to (\text{funk}\,(p) \to ((x,m)\,\text{ə}\,((y,n)\,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)}) \to \\ (d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{q}_{(x,y)}) \to c\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\, \leq_p)))) \text{ ‘} \qquad (\kappa\end{gathered}$$

zurückgeht. Nach (243) haben wir

$$\begin{gathered}, \vdash (x,m)\,\text{ə}\,((d,c)\,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)}) \to (\text{funk}\,(q\otimes p) \to ((x,m)\,\text{ə}\,((y,n)\,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)}) \to \\ (\neg\ (y,n)\,\text{ə}\,((d,c)\,\text{ə}\, <_{(q\otimes p)}) \to (d,c)\,\text{ə}\,((y,n)\,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)})))) \text{ ‘}\end{gathered}$$

Mit (244) beweisen wir

$$, \vdash d\,\text{ə}\,(y\,\text{ə}\, \leq_q) \to ((y,n)\,\text{ə}\,((d,c)\,\text{ə}\, <_{(q\otimes p)}) \to y\,\text{ə}\,(y\,\text{ə}\, <_q)) \text{ ‘} \qquad (\lambda$$

womit wir ■→das Vorderglied←■[179] [#143]

$$, \neg\ (y,n)\,\text{ə}\,((d,c)\,\text{ə}\, <_{(q\otimes p)}) \text{ ‘}$$

wegschaffen können.

Zunächst ziehen wir die unmittelbaren Folgerungen aus unserer Definition (P).

§ 159. *Aufbau.*

$$\begin{array}{rl} \mathrm{P} & \vdash \text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\text{funk}\,(q) \to \forall\mathfrak{n}\,\forall\mathfrak{m}\,[A = (\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \to (\neg\ \mathfrak{n}\,\text{ə}\,(\mathfrak{n}\,\text{ə}\, <_q) \to \\ & (\mathfrak{m}\,\text{ə}\,(\varepsilon\,\text{ə}\, \leq_q) \to \neg\ \varepsilon\,\text{ə}\,(\mathfrak{n}\,\text{ə}\, \leq_q)))])] = \text{zw}\,^{q}_{A} \\ (46): & \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ & \vdash d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{q}_{A}) \to \neg\ (\text{funk}\,(q) \to \\ & \forall\mathfrak{n}\,\forall\mathfrak{m}\,[A = (\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \to (\neg\ \mathfrak{n}\,\text{ə}\,(\mathfrak{n}\,\text{ə}\, <_q) \to \\ & (\mathfrak{m}\,\text{ə}\,(d\,\text{ə}\, \leq_q) \to \neg\ d\,\text{ə}\,(\mathfrak{n}\,\text{ə}\, \leq_q)))]) \qquad (264 \\ (Id): & -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ - \end{array}$$

[178]das Unterglied
[179]das Unterglied

[#142]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#143]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

$\vdash d \ni (\text{zw}^{q}_{A}) \rightarrow \text{funk}\,(q)$ (265

———— • ————

264 $\vdash d \ni (\text{zw}^{q}_{A}) \rightarrow \neg\ (\text{funk}\,(q) \rightarrow$

$\forall \mathfrak{n}\, \forall \mathfrak{m}\, [A = (\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \rightarrow (\neg\ \mathfrak{n} \ni (\mathfrak{n} \ni\ <_q) \rightarrow$

$(\mathfrak{m} \ni (d \ni\ \leq_q) \rightarrow \neg\ d \ni (\mathfrak{n} \ni\ \leq_q))))])$

$(Ic):$ — — — — — — — —

S.204

$\vdash d \ni (\text{zw}^{q}_{A}) \rightarrow$

$\neg\ \forall \mathfrak{n}\, \forall \mathfrak{m}\, [A = (\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \rightarrow (\neg\ \mathfrak{n} \ni (\mathfrak{n} \ni\ <_q) \rightarrow$

$(\mathfrak{m} \ni (d \ni\ \leq_q) \rightarrow \neg\ d \ni (\mathfrak{n} \ni\ \leq_q)))]$ $(\alpha$

$\times$

$\vdash \forall \mathfrak{n}\, \forall \mathfrak{m}\, [A = (\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \rightarrow (\neg\ \mathfrak{n} \ni (\mathfrak{n} \ni\ <_q) \rightarrow$

$(\mathfrak{m} \ni (d \ni\ \leq_q) \rightarrow \neg\ d \ni (\mathfrak{n} \ni\ \leq_q)))] \rightarrow$

$\neg\ d \ni (\text{zw}^{q}_{A})$ (266

———— • ————

222 $\vdash (\neg\ y \ni (y \ni\ <_q) \rightarrow (x \ni (d \ni\ \leq_q) \rightarrow \neg\ d \ni (y \ni\ \leq_q))) \rightarrow$

$((x, y) = (m, n) \rightarrow (\neg\ n \ni (n \ni\ <_q) \rightarrow$

$(m \ni (d \ni\ \leq_q) \rightarrow \neg\ d \ni (n \ni\ \leq_q))))$

$\smile$

$\vdash (\neg\ y \ni (y \ni\ <_q) \rightarrow (x \ni (d \ni\ \leq_q) \rightarrow \neg\ d \ni (y \ni\ \leq_q))) \rightarrow$

$\forall \mathfrak{n}\, \forall \mathfrak{m}\, [(x, y) = (\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \rightarrow (\neg\ \mathfrak{n} \ni (\mathfrak{n} \ni\ <_q) \rightarrow$

$(\mathfrak{m} \ni (d \ni\ \leq_q) \rightarrow \neg\ d \ni (\mathfrak{n} \ni\ \leq_q)))]$ $(\alpha$

$(266):$ — — — — — — — —

$\vdash (\neg\ y \ni (y \ni\ <_q) \rightarrow (x \ni (d \ni\ \leq_q) \rightarrow \neg\ d \ni (y \ni\ \leq_q))) \rightarrow$

$\neg\ d \ni (\text{zw}^{q}_{(x,y)})$ $(\beta$

$\times$

$\vdash d \ni (\text{zw}^q_{(x,y)}) \rightarrow$

$\neg\ (\neg\ y \ni (y \ni\ <_q) \rightarrow (x \ni (d \ni\ \leq_q) \rightarrow \neg\ d \ni (y \ni\ \leq_q)))$ (267

$(Ic):$ — — — — — — — —

$\vdash d \ni (\text{zw}^q_{(x,y)}) \rightarrow \neg\ (x \ni (d \ni\ \leq_q) \rightarrow \neg\ d \ni (y \ni\ \leq_q))$ (268

$(Ib):$ — — — — — — — —

$\vdash d \ni (\text{zw}^q_{(x,y)}) \rightarrow d \ni (y \ni\ \leq_q)$ (269

———— • ————

268 $\vdash d \ni (\text{zw}^q_{(x,y)}) \rightarrow \neg\ (x \ni (d \ni\ \leq_q) \rightarrow \neg\ d \ni (y \ni\ \leq_q))$

$(Id):$ — — — — — — — —

$\vdash d \ni (\text{zw}^q_{(x,y)}) \rightarrow x \ni (d \ni\ \leq_q)$ (270

———— • ————

267 $\vdash d \ni (\text{zw}^q_{(x,y)}) \rightarrow$

$\neg\ (\neg\ y \ni (y \ni\ <_q) \rightarrow (x \ni (d \ni\ \leq_q) \rightarrow \neg\ d \ni (y \ni\ \leq_q)))$

$(Id):$ — — — — — — — —

$\vdash d \ni (\text{zw}^q_{(x,y)}) \rightarrow \neg\ y \ni (y \ni\ <_q)$ (271

$\times$

$\vdash y \ni (y \ni\ <_q) \rightarrow \neg\ d \ni (\text{zw}^q_{(x,y)})$ (272

———— • ————

P $\vdash \text{ext}\,\varepsilon\, [\neg\ (\text{funk}\,(p) \rightarrow \forall \mathfrak{n}\, \forall \mathfrak{m}\, [(m,n) = (\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \rightarrow (\neg\ \mathfrak{n} \ni (\mathfrak{n} \ni\ <_p) \rightarrow$

$(\mathfrak{m} \ni (\varepsilon \ni\ \leq_p) \rightarrow \neg\ \varepsilon \ni (\mathfrak{n} \ni\ \leq_p))))])] = \text{zw}^p_{(m,n)}$

$(44):$ ————————

S.205

$\vdash \neg\ (\text{funk}\,(p) \rightarrow \forall \mathfrak{n}\, \forall \mathfrak{m}\, [(m,n) = (\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \rightarrow (\neg\ \mathfrak{n} \ni (\mathfrak{n} \ni\ <_p) \rightarrow$

$(\mathfrak{m} \ni (c \ni\ \leq_p) \rightarrow \neg\ c \ni (\mathfrak{n} \ni\ \leq_p))))]) \rightarrow$

$c \ni (\text{zw}^p_{(m,n)})$ (α

$(If)::$ — — — — — — — —

$$\vdash \text{funk}\,(p) \rightarrow$$
$$(\neg\ \forall\mathfrak{n}\,\forall\mathfrak{m}\,[(m,n) = (\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \rightarrow (\neg\ \mathfrak{n}\,\text{ə}\,(\mathfrak{n}\,\text{ə}\ <_p) \rightarrow$$
$$(\mathfrak{m}\,\text{ə}\,(c\,\text{ə}\ \leq_p) \rightarrow \neg\ c\,\text{ə}\,(\mathfrak{n}\,\text{ə}\ \leq_p)))] \rightarrow$$
$$c\,\text{ə}\,(\text{zw}^{p}_{(m,n)})) \qquad (\beta$$

$$\times$$

$$\vdash \text{funk}\,(p) \rightarrow (\neg\ c\,\text{ə}\,(\text{zw}^{p}_{(m,n)}) \rightarrow$$
$$\forall\mathfrak{n}\,\forall\mathfrak{m}\,[(m,n) = (\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \rightarrow (\neg\ \mathfrak{n}\,\text{ə}\,(\mathfrak{n}\,\text{ə}\ <_p) \rightarrow$$
$$(\mathfrak{m}\,\text{ə}\,(c\,\text{ə}\ \leq_p) \rightarrow \neg\ c\,\text{ə}\,(\mathfrak{n}\,\text{ə}\ \leq_p)))]) \qquad (\gamma$$

(IIa) : − − − − − − − −

$$\vdash \text{funk}\,(p) \rightarrow (\neg\ c\,\text{ə}\,(\text{zw}^{p}_{(m,n)}) \rightarrow$$
$$\forall\mathfrak{m}\,[(m,n) = (\mathfrak{m},n) \rightarrow (\neg\ n\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ <_p) \rightarrow$$
$$(\mathfrak{m}\,\text{ə}\,(c\,\text{ə}\ \leq_p) \rightarrow \neg\ c\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ \leq_p)))]) \qquad (\delta$$

(IIa) : − − − − − − − −

$$\vdash \text{funk}\,(p) \rightarrow (\neg\ c\,\text{ə}\,(\text{zw}^{p}_{(m,n)}) \rightarrow$$
$$((m,n) = (m,n) \rightarrow (\neg\ n\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ <_p) \rightarrow$$
$$(m\,\text{ə}\,(c\,\text{ə}\ \leq_p) \rightarrow \neg\ c\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ \leq_p))))) \qquad (\varepsilon$$

$(IIIe)$ :: ————————

$$\vdash \text{funk}\,(p) \rightarrow (\neg\ c\,\text{ə}\,(\text{zw}^{p}_{(m,n)}) \rightarrow (\neg\ n\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ <_p) \rightarrow$$
$$(m\,\text{ə}\,(c\,\text{ə}\ \leq_p) \rightarrow \neg\ c\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ \leq_p)))) \qquad (273$$

$$\times$$

$$\vdash \text{funk}\,(p) \rightarrow (c\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ \leq_p) \rightarrow (\neg\ n\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ <_p) \rightarrow$$
$$(m\,\text{ə}\,(c\,\text{ə}\ \leq_p) \rightarrow c\,\text{ə}\,(\text{zw}^{p}_{(m,n)})))) \qquad (274$$

———— • ————

133 $\vdash x\,\text{ə}\,(d\,\text{ə}\ <_q) \rightarrow (d\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,q) \rightarrow x\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\ <_q))$

$$\smile$$

$$\vdash \forall\mathfrak{d}\,[x \ni (\mathfrak{d} \ni\ <_q) \to \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to x \ni (\mathfrak{a} \ni\ <_q)]] \qquad (\alpha$$

$(128):$ ———————

$$\vdash d \ni (y \ni\ <_q) \to (x \ni (d \ni\ <_q) \to x \ni (y \ni\ <_q)) \qquad (275$$

$(200) ::$ – – – – – – – –

$$\vdash d \ni (y \ni\ \leq_q) \to (\neg\ y = d \to (x \ni (d \ni\ <_q) \to x \ni (y \ni\ <_q))) \qquad (\alpha$$

$(IIIa):$ ·–·–·–·–·–·–·–·

$$\vdash d \ni (y \ni\ \leq_q) \to (x \ni (d \ni\ <_q) \to x \ni (y \ni\ <_q)) \qquad (276$$

———— • ————

244 $\vdash (y, n) \ni ((d, c) \ni\ <_{(q\otimes p)}) \to y \ni (d \ni\ <_q)$

$(276):$ – – – – – – – –

$$\vdash d \ni (y \ni\ \leq_q) \to ((y, n) \ni ((d, c) \ni\ <_{(q\otimes p)}) \to y \ni (y \ni\ <_q)) \qquad (\alpha$$

$\times$

$$\vdash d \ni (y \ni\ \leq_q) \to (\neg\ y \ni (y \ni\ <_q) \to$$
$$\neg\ (y, n) \ni ((d, c) \ni\ <_{(q\otimes p)})) \qquad (\beta$$

$(271, 269) ::$ = = = = = = = =

$$\vdash d \ni (\mathrm{zw}\,^q_{(x,y)}) \to \neg\ (y, n) \ni ((d, c) \ni\ <_{(q\otimes p)}) \qquad (\gamma$$

$(243):$ – – – – – – – –

S.206

$$\vdash (x, m) \ni ((d, c) \ni\ \leq_{(q\otimes p)}) \to (\mathrm{funk}\,(q \otimes p) \to$$
$$((x, m) \ni ((y, n) \ni\ \leq_{(q\otimes p)}) \to (d \ni (\mathrm{zw}\,^q_{(x,y)}) \to$$
$$(d, c) \ni ((y, n) \ni\ \leq_{(q\otimes p)})))) \qquad (\delta$$

$(252) ::$ – – – – – – – –

$\vdash (x,m) \ni ((d,c) \ni \leq_{(q\otimes p)}) \to (\text{funk}\,(p) \to (\text{funk}\,(q) \to$

$((x,m) \ni ((y,n) \ni \leq_{(q\otimes p)}) \to (d \ni (\text{zw}\,^{q}_{(x,y)}) \to$

$(d,c) \ni ((y,n) \ni \leq_{(q\otimes p)})))))$ $(\varepsilon$

$(265) :: - - - - - - - -$

$\vdash (x,m) \ni ((d,c) \ni \leq_{(q\otimes p)}) \to (\text{funk}\,(p) \to$

$((x,m) \ni ((y,n) \ni \leq_{(q\otimes p)}) \to (d \ni (\text{zw}\,^{q}_{(x,y)}) \to$

$(d,c) \ni ((y,n) \ni \leq_{(q\otimes p)}))))$ $(\zeta$

$(234) : - - - - - - - -$

$\vdash (x,m) \ni ((d,c) \ni \leq_{(q\otimes p)}) \to (\text{funk}\,(p) \to$

$((x,m) \ni ((y,n) \ni \leq_{(q\otimes p)}) \to (d \ni (\text{zw}\,^{q}_{(x,y)}) \to$

$c \ni (n \ni \leq_{p}))))$ $(\eta$

$(274) : - - - - - - - -$

$\vdash (x,m) \ni ((d,c) \ni \leq_{(q\otimes p)}) \to (\text{funk}\,(p) \to$

$((x,m) \ni ((y,n) \ni \leq_{(q\otimes p)}) \to (d \ni (\text{zw}\,^{q}_{(x,y)}) \to$

$(\neg\ n \ni (n \ni <_{p}) \to (m \ni (c \ni \leq_{p}) \to c \ni (\text{zw}\,^{p}_{(m,n)}))))))$ $(\vartheta$

$(234) :: - - - - - - - -$

$\vdash \text{funk}\,(p) \to ((x,m) \ni ((y,n) \ni \leq_{(q\otimes p)}) \to (d \ni (\text{zw}\,^{q}_{(x,y)}) \to$

$(\neg\ n \ni (n \ni <_{p}) \to ((x,m) \ni ((d,c) \ni \leq_{(q\otimes p)}) \to$

$c \ni (\text{zw}\,^{p}_{(m,n)})))))$ $(\iota$

$\times$

$$\vdash \text{funk}\,(p) \rightarrow ((x,m)\,\text{ə}\,((y,n)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow (\neg\ c\,\text{ə}\,(\text{zw}^{\,p}_{(m,n)}) \rightarrow$$

$$(\neg\ n\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ <_p) \rightarrow ((x,m)\,\text{ə}\,((d,c)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow$$

$$\neg\ d\,\text{ə}\,(\text{zw}^{\,q}_{(x,y)}))))) \qquad (\kappa$$

(IIa) :: $-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$

$$\vdash \text{funk}\,(p) \rightarrow ((x,m)\,\text{ə}\,((y,n)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow$$

$$(\forall \mathfrak{a}\,[d\,\text{ə}\,(\mathfrak{a}\,\text{ə}\,((x,m)\angle(q\otimes p))) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a}\,\text{ə}\,(\text{zw}^{\,p}_{(m,n)})] \rightarrow$$

$$(d\,\text{ə}\,(c\,\text{ə}\,((x,m)\angle(q\otimes p))) \rightarrow (\neg\ n\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ <_p) \rightarrow$$

$$((x,m)\,\text{ə}\,((d,c)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow \neg\ d\,\text{ə}\,(\text{zw}^{\,q}_{(x,y)})))))) \qquad (\lambda$$

(210) :: $-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$

$$\vdash \text{funk}\,(p) \rightarrow ((x,m)\,\text{ə}\,((y,n)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow$$

$$(\forall \mathfrak{a}\,[d\,\text{ə}\,(\mathfrak{a}\,\text{ə}\,((x,m)\angle(q\otimes p))) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a}\,\text{ə}\,(\text{zw}^{\,p}_{(m,n)})] \rightarrow$$

$$((x,m)\,\text{ə}\,((d,c)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow (\neg\ n\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ <_p) \rightarrow$$

$$\neg\ d\,\text{ə}\,(\text{zw}^{\,q}_{(x,y)}))))) \qquad (\mu$$

$$\times$$

$$\vdash \text{funk}\,(p) \rightarrow ((x,m)\,\text{ə}\,((y,n)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow$$

$$(\forall \mathfrak{a}\,[d\,\text{ə}\,(\mathfrak{a}\,\text{ə}\,((x,m)\angle(q\otimes p))) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a}\,\text{ə}\,(\text{zw}^{\,q}_{(m,n)})] \rightarrow$$

$$(d\,\text{ə}\,(\text{zw}^{\,q}_{(x,y)}) \rightarrow (\neg\ n\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ <_p) \rightarrow$$

$$\neg\ (x,m)\,\text{ə}\,((d,c)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}))))) \qquad (\nu$$

$$\smile$$

$$\vdash \text{funk}\,(p) \rightarrow ((x,m)\,\text{ə}\,((y,n)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow$$

$$(\forall \mathfrak{a}\,[d\,\text{ə}\,(\mathfrak{a}\,\text{ə}\,((x,m)\angle(q\otimes p))) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a}\,\text{ə}\,(\text{zw}^{\,p}_{(m,n)})] \rightarrow$$

$$(d\,\text{ə}\,(\text{zw}^{\,q}_{(x,y)}) \rightarrow (\neg\ n\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ <_p) \rightarrow$$

$$\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m)\,\text{ə}\,((d,\mathfrak{e})\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)})])))) \qquad (\xi$$

$$\times$$

S.207

$$\vdash \text{funk}\,(p) \to ((x,m) \,\text{ə}\, ((y,n) \,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)}) \to$$
$$(\neg\ n \,\text{ə}\, (n \,\text{ə}\, <_p) \to (\neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m) \,\text{ə}\, ((d,\mathfrak{e}) \,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)})] \to$$
$$(\forall\mathfrak{a}\,[d \,\text{ə}\, (\mathfrak{a} \,\text{ə}\, ((x,m)\angle(q\otimes p))) \to \neg\ \mathfrak{a} \,\text{ə}\, (\text{zw}^{\,p}_{(m,n)})] \to$$
$$\neg\ d \,\text{ə}\, (\text{zw}^{\,q}_{(x,y)})))))) \qquad (277$$

§ 160. *Zerlegung.*

Es muss nun ■→das Vorderglied←■[180] [#144]

$$,\neg\ \forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m) \,\text{ə}\, ((d,\mathfrak{e}) \,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)})]\text{`}$$

weggeschafft werden (vergl. § 158). Dies geschieht mit dem Satze

$$,\vdash (x,m) \,\text{ə}\, ((y,n) \,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)}) \to$$
$$(\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m) \,\text{ə}\, ((d,\mathfrak{e}) \,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)})] \to \neg\ d \,\text{ə}\, (\text{zw}^{\,q}_{(x,y)}))\text{`} \qquad (\alpha$$

den wir mit (257) beweisen, indem wir die Functionsmarke ,$F(\xi,\zeta)$' durch

$$,\neg\ ((x,m) \,\text{ə}\, ((\xi,\zeta) \,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)}) \to$$
$$\neg\ \forall\mathfrak{r}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m) \,\text{ə}\, ((\mathfrak{r},\mathfrak{e}) \,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)})] \to \neg\ \mathfrak{r} \,\text{ə}\, (\text{zw}^{\,q}_{(x,\xi)})])\text{`}$$

ersetzen. Wir bedürfen dazu des Satzes

$$,\vdash \neg\ ((x,m) \,\text{ə}\, ((c,d) \,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)}) \to$$
$$\neg\ \forall\mathfrak{r}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m) \,\text{ə}\, ((\mathfrak{r},\mathfrak{e}) \,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)})] \to \neg\ \mathfrak{r} \,\text{ə}\, (\text{zw}^{\,q}_{(x,c)})]) \to$$
$$(c \,\text{ə}\, (o \,\text{ə}\, q) \to (d \,\text{ə}\, (a \,\text{ə}\, p) \to \neg\ ((x,m) \,\text{ə}\, ((o,a) \,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)}) \to$$
$$\neg\ \forall\mathfrak{r}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m) \,\text{ə}\, ((\mathfrak{r},\mathfrak{e}) \,\text{ə}\, \leq_{(q\otimes p)})] \to \neg\ \mathfrak{r} \,\text{ə}\, (\text{zw}^{\,q}_{(x,o)})]))))\text{`} \qquad (\beta$$

Dieser ist auf den Satz

$$,\vdash x \,\text{ə}\, (c \,\text{ə}\, \leq_q) \to (\neg\ o = r \to (c \,\text{ə}\, (o \,\text{ə}\, q) \to (r \,\text{ə}\, (\text{zw}^{\,q}_{(x,o)}) \to$$
$$r \,\text{ə}\, (\text{zw}^{\,q}_{(x,c)}))))\text{`} \qquad (\gamma$$

zurückzuführen, der aus

$$,\vdash x \,\text{ə}\, (r \,\text{ə}\, \leq_q) \to (x \,\text{ə}\, (c \,\text{ə}\, \leq_q) \to (r \,\text{ə}\, (o \,\text{ə}\, <_q) \to (\neg\ o \,\text{ə}\, (o \,\text{ə}\, <_q) \to$$
$$(\text{funk}\,(q) \to (c \,\text{ə}\, (o \,\text{ə}\, q) \to r \,\text{ə}\, (c \,\text{ə}\, \leq_q))))))\text{`} \qquad (\delta$$

folgt. Um (δ) zu beweisen, benutzen wir den Satz (243) in der Form

$$,\vdash x \,\text{ə}\, (r \,\text{ə}\, \leq_q) \to (\text{funk}\,(q) \to (x \,\text{ə}\, (c \,\text{ə}\, \leq_q) \to (\neg\ c \,\text{ə}\, (r \,\text{ə}\, <_q) \to$$
$$r \,\text{ə}\, (c \,\text{ə}\, \leq_q))))\text{`}$$

und zeigen, dass bei unsern Bedingungen r nicht auf c in der q-Reihe folgen kann, weil dann nach (242) r der mit o anfangenden q-Reihe angehörte, und mithin o auf sich selbst in der q-Reihe folgte.

---

[180]das Unterglied

[#144]Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

§ 161. *Aufbau.*

$$134 \quad \vdash a \ni (d \ni \leq_q) \rightarrow (d \ni (a \ni q) \rightarrow a \ni (a \ni <_q))$$

$$(242) :: \; - - - - - - - -$$

$$\vdash d \ni (d \ni <_q) \rightarrow (\text{funk}\,(q) \rightarrow (d \ni (a \ni q) \rightarrow a \ni (a \ni <_q))) \qquad (278$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ a \ni (a \ni <_q) \rightarrow (\text{funk}\,(q) \rightarrow (d \ni (a \ni q) \rightarrow \neg\ d \ni (d \ni <_q))) \qquad (279$$

———— • ————

$$275 \quad \vdash d \ni (y \ni <_q) \rightarrow (x \ni (d \ni <_q) \rightarrow x \ni (y \ni <_q))$$

$$(200) :: \; - - - - - - - -$$

S.208

$$\vdash d \ni (y \ni <_q) \rightarrow (x \ni (d \ni \leq_q) \rightarrow (\neg\ d = x \rightarrow x \ni (y \ni <_q))) \qquad (\alpha$$

$$(IIIc) : \; \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot$$

$$\vdash d \ni (y \ni <_q) \rightarrow (x \ni (d \ni \leq_q) \rightarrow x \ni (y \ni <_q)) \qquad (280$$

———— • ————

$$280 \quad \vdash r \ni (o \ni <_q) \rightarrow (o \ni (r \ni \leq_q) \rightarrow o \ni (o \ni <_q))$$

$$(242) :: \; - - - - - - - -$$

$$\vdash r \ni (o \ni <_q) \rightarrow (c \ni (r \ni <_q) \rightarrow (\text{funk}\,(q) \rightarrow$$

$$(c \ni (o \ni q) \rightarrow o \ni (o \ni <_q)))) \qquad (\alpha$$

$$\times$$

$$\vdash r \ni (o \ni <_q) \rightarrow (\neg\ o \ni (o \ni <_q) \rightarrow (\text{funk}\,(q) \rightarrow$$

$$(c \ni (o \ni q) \rightarrow \neg\ c \ni (r \ni <_q)))) \qquad (\beta$$

$$(243) : \; - - - - - - - -$$

$$\vdash x \ni (r \ni \leq_q) \rightarrow (x \ni (c \ni \leq_q) \rightarrow$$

$$(r \ni (o \ni <_q) \rightarrow (\neg\ o \ni (o \ni <_q) \rightarrow (\text{funk}\,(q) \rightarrow$$

$$(c \ni (o \ni q) \rightarrow r \ni (c \ni \leq_q)))))) \qquad (\gamma$$

$$(274) : \; - - - - - - - -$$

$$\vdash x \,ə\, (c \,ə\, \leq_q) \to (r \,ə\, (o \,ə\, <_q) \to$$

$$(\neg\; o \,ə\, (o \,ə\, <_q) \to (\text{funk}\,(q) \to (c \,ə\, (o \,ə\, q) \to$$

$$(\neg\; c \,ə\, (c \,ə\, <_q) \to (x \,ə\, (r \,ə\, \leq_q) \to r \,ə\, (\text{zw}\,^{q}_{(x,c)})))))))) \qquad (\delta$$

$$(279, 200) :: \; = = = = = = = =$$

$$\vdash x \,ə\, (c \,ə\, \leq_q) \to (r \,ə\, (o \,ə\, \leq_q) \to (\neg\; o = r \to$$

$$(\neg\; o \,ə\, (o \,ə\, <_q) \to (\text{funk}\,(q) \to (c \,ə\, (o \,ə\, q) \to$$

$$(x \,ə\, (r \,ə\, \leq_q) \to r \,ə\, (\text{zw}\,^{q}_{(x,c)}))))))) \qquad (\varepsilon$$

$$(269, 270) :: \; = = = = = = = =$$

$$\vdash x \,ə\, (c \,ə\, \leq_q) \to (\neg\; o = r \to$$

$$(\neg\; o \,ə\, (o \,ə\, <_q) \to (\text{funk}\,(q) \to (c \,ə\, (o \,ə\, q) \to$$

$$(r \,ə\, (\text{zw}\,^{q}_{(x,o)}) \to r \,ə\, (\text{zw}\,^{q}_{(x,c)})))))) \qquad (\zeta$$

$$(271, 265) :: \; = = = = = = = =$$

$$\vdash x \,ə\, (c \,ə\, \leq_q) \to (\neg\; o = r \to (c \,ə\, (o \,ə\, q) \to$$

$$(r \,ə\, (\text{zw}\,^{q}_{(x,o)}) \to r \,ə\, (\text{zw}\,^{q}_{(x,c)})))) \qquad (\eta$$

$$\times$$

$$\vdash x \,ə\, (c \,ə\, \leq_q) \to (\neg\; o = r \to (c \,ə\, (o \,ə\, q) \to$$

$$(\neg\; r \,ə\, (\text{zw}\,^{q}_{(x,c)}) \to \neg\; r \,ə\, (\text{zw}\,^{q}_{(x,o)})))) \qquad (\vartheta$$

———————— ● ————————

$$\text{IIa} \quad \vdash \forall \mathfrak{e}\, [\neg\; (x, m) \,ə\, ((r, \mathfrak{e}) \,ə\, \leq_{(q \otimes p)})] \to$$

$$\neg\; (x, m) \,ə\, ((r, a) \,ə\, \leq_{(q \otimes p)})$$

$$(IIIa) : \quad \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash o = r \to (\forall \mathfrak{e}\, [\neg\; (x, m) \,ə\, ((r, \mathfrak{e}) \,ə\, \leq_{(q \otimes p)})] \to$$

$$\neg\; (x, m) \,ə\, ((o, a) \,ə\, \leq_{(q \otimes p)})) \qquad (\iota$$

$$(Ia) : \; - - - - - - - -$$

$$\vdash o = r \to (\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m)\,\text{ə}\,((r,\mathfrak{e})\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)})] \to$$

$$((x,m)\,\text{ə}\,((o,a)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \to \neg\ r\,\text{ə}\,(\text{zw}^{\,q}_{(x,o)}))) \qquad (\kappa$$

$$(\vartheta):\ \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot$$

S.209

$$\vdash x\,\text{ə}\,(c\,\text{ə}\ \leq_q) \to (c\,\text{ə}\,(o\,\text{ə}\,q) \to$$
$$(\neg\ r\,\text{ə}\,(\text{zw}^{\,q}_{(x,c)}) \to (\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m)\,\text{ə}\,((r,\mathfrak{e})\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)})] \to$$
$$((x,m)\,\text{ə}\,((o,a)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \to \neg\ r\,\text{ə}\,(\text{zw}^{\,q}_{(x,o)}))))) \qquad (\lambda$$

$$(IIa) ::\ - - - - - - - -$$

$$\vdash x\,\text{ə}\,(c\,\text{ə}\ \leq_q) \to (c\,\text{ə}\,(o\,\text{ə}\,q) \to$$
$$(\forall \mathfrak{r}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m)\,\text{ə}\,((\mathfrak{r},\mathfrak{e})\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)})] \to \neg\ \mathfrak{r}\,\text{ə}\,(\text{zw}^{\,q}_{(x,c)})] \to$$
$$((x,m)\,\text{ə}\,((o,a)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \to$$
$$(\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m)\,\text{ə}\,((r,\mathfrak{e})\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)})] \to \neg\ r\,\text{ə}\,(\text{zw}^{\,q}_{(x,o)}))))) \qquad (\mu$$

$$\smile$$

$$\vdash x\,\text{ə}\,(c\,\text{ə}\ \leq_q) \to (c\,\text{ə}\,(o\,\text{ə}\,q) \to$$

$$(\forall \mathfrak{r}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m)\,\text{ə}\,((\mathfrak{r},\mathfrak{e})\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)})] \to \neg\ \mathfrak{r}\,\text{ə}\,(\text{zw}^{\,q}_{(x,c)})] \to$$

$$((x,m)\,\text{ə}\,((o,a)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \to$$

$$\forall \mathfrak{r}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m)\,\text{ə}\,((\mathfrak{r},\mathfrak{e})\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)})] \to \neg\ \mathfrak{r}\,\text{ə}\,(\text{zw}^{\,q}_{(x,o)})]))) \qquad (\nu$$

$$(Ie):\ - - - - - - - -$$

$$\vdash x\,\text{ə}\,(c\,\text{ə}\ \leq_q) \to (c\,\text{ə}\,(o\,\text{ə}\,q) \to$$

$$(\forall \mathfrak{r}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m)\,\text{ə}\,((\mathfrak{r},\mathfrak{e})\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)})] \to \neg\ \mathfrak{r}\,\text{ə}\,(\text{zw}^{\,q}_{(x,c)})] \to$$

$$((x,m)\,\text{ə}\,((o,a)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \to \neg\ ((x,m)\,\text{ə}\,((o,a)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \to$$

$$\neg\ \forall \mathfrak{r}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m)\,\text{ə}\,((\mathfrak{r},\mathfrak{e})\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)})] \to \neg\ \mathfrak{r}\,\text{ə}\,(\text{zw}^{\,q}_{(x,o)})])))) \qquad (\xi$$

$$(209, 246) ::\ = = = = = = = =$$

$$\vdash \forall \mathfrak{r}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m)\,\text{ə}\,((\mathfrak{r},\mathfrak{e})\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)})] \to \neg\ \mathfrak{r}\,\text{ə}\,(\text{zw}^{\,q}_{(x,c)})] \to$$

$$((x,m)\,\text{ə}\,((c,d)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \to (c\,\text{ə}\,(o\,\text{ə}\,q) \to$$

$$(d\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,p) \to \neg\ ((x,m)\,\text{ə}\,((o,a)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \to$$

$$\neg\ \forall \mathfrak{r}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m)\,\text{ə}\,((\mathfrak{r},\mathfrak{e})\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)})] \to \neg\ \mathfrak{r}\,\text{ə}\,(\text{zw}^{\,q}_{(x,o)})])))) \qquad (o$$

$$(Id, Ib) ::\ = = = = = = = =$$

$$\vdash \neg\ ((x,m)\,\text{ə}\,((c,d)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow$$
$$\neg\ \forall\mathfrak{r}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m)\,\text{ə}\,((\mathfrak{r},\mathfrak{e})\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)})] \rightarrow \neg\ \mathfrak{r}\,\text{ə}\,(\mathrm{zw}\,^{q}_{(x,c)})]) \rightarrow$$
$$(c\,\text{ə}\,(o\,\text{ə}\,q) \rightarrow (d\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,p) \rightarrow \neg\ ((x,m)\,\text{ə}\,((o,a)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow$$
$$\neg\ \forall\mathfrak{r}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m)\,\text{ə}\,((\mathfrak{r},\mathfrak{e})\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)})] \rightarrow \neg\ \mathfrak{r}\,\text{ə}\,(\mathrm{zw}\,^{q}_{(x,o)})]))) \qquad (\pi$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall\mathfrak{c}\,\forall\mathfrak{d}\,[\neg\ ((x,m)\,\text{ə}\,((\mathfrak{c},\mathfrak{d})\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow$$
$$\neg\ \forall\mathfrak{r}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m)\,\text{ə}\,((\mathfrak{r},\mathfrak{e})\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)})] \rightarrow \neg\ \mathfrak{r}\,\text{ə}\,(\mathrm{zw}\,^{q}_{(x,\mathfrak{c})})]) \rightarrow$$
$$\forall\mathfrak{o}\,[\mathfrak{c}\,\text{ə}\,(\mathfrak{o}\,\text{ə}\,q) \rightarrow \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d}\,\text{ə}\,(\mathfrak{a}\,\text{ə}\,p) \rightarrow \neg\ ((x,m)\,\text{ə}\,((\mathfrak{o},\mathfrak{a})\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow$$
$$\neg\ \forall\mathfrak{r}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m)\,\text{ə}\,((\mathfrak{r},\mathfrak{e})\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)})] \rightarrow \neg\ \mathfrak{r}\,\text{ə}\,(\mathrm{zw}\,^{q}_{(x,\mathfrak{o})})])]]] \qquad (\rho$$

$(257):$ ―――――――――――

$$\vdash (x,m)\,\text{ə}\,((y,n)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow$$
$$(\neg\ ((x,m)\,\text{ə}\,((x,m)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow$$
$$\neg\ \forall\mathfrak{r}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m)\,\text{ə}\,((\mathfrak{r},\mathfrak{e})\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)})] \rightarrow \neg\ \mathfrak{r}\,\text{ə}\,(\mathrm{zw}\,^{q}_{(x,x)})]) \rightarrow$$
$$\neg\ ((x,m)\,\text{ə}\,((y,n)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow$$
$$\neg\ \forall\mathfrak{r}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m)\,\text{ə}\,((\mathfrak{r},\mathfrak{e})\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)})] \rightarrow \neg\ \mathfrak{r}\,\text{ə}\,(\mathrm{zw}\,^{q}_{(x,y)})])) \qquad (\sigma$$

$(Ib):$ – – – – – – – –

$$\vdash (x,m)\,\text{ə}\,((y,n)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow$$
$$(\neg\ ((x,m)\,\text{ə}\,((x,m)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow$$
$$\neg\ \forall\mathfrak{r}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m)\,\text{ə}\,((\mathfrak{r},\mathfrak{e})\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)})] \rightarrow \neg\ \mathfrak{r}\,\text{ə}\,(\mathrm{zw}\,^{q}_{(x,x)})]) \rightarrow$$
$$\forall\mathfrak{r}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m)\,\text{ə}\,((\mathfrak{r},\mathfrak{e})\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)})] \rightarrow \neg\ \mathfrak{r}\,\text{ə}\,(\mathrm{zw}\,^{q}_{(x,y)})]) \qquad (\tau$$

$(Ie)::$ – – – – – – – –

$$\vdash (x,m)\,\text{ə}\,((y,n)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow ((x,m)\,\text{ə}\,((x,m)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow$$
$$(\forall\mathfrak{r}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m)\,\text{ə}\,((\mathfrak{r},\mathfrak{e})\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)})] \rightarrow \neg\ \mathfrak{r}\,\text{ə}\,(\mathrm{zw}\,^{q}_{(x,x)})] \rightarrow$$
$$\forall\mathfrak{r}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m)\,\text{ə}\,((\mathfrak{r},\mathfrak{e})\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes p)})] \rightarrow \neg\ \mathfrak{r}\,\text{ə}\,(\mathrm{zw}\,^{q}_{(x,y)})])) \qquad (\upsilon$$

$(140)::$ ―――――――――――

$\vdash (x,m) \ni ((y,n) \ni \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow$

$(\forall \mathfrak{r} [\forall \mathfrak{e} [\neg (x,m) \ni ((\mathfrak{r},\mathfrak{e}) \ni \leq_{(q\otimes p)})] \rightarrow \neg \mathfrak{r} \ni (\mathrm{zw}^{q}_{(x,x)})] \rightarrow$

$\forall \mathfrak{r} [\forall \mathfrak{e} [\neg (x,m) \ni ((\mathfrak{r},\mathfrak{e}) \ni \leq_{(q\otimes p)})] \rightarrow \neg \mathfrak{r} \ni (\mathrm{zw}^{q}_{(x,y)})])$ (281

---

270 $\vdash r \ni (\mathrm{zw}^{q}_{(x,x)}) \rightarrow x \ni (r \ni \leq_q)$

(200) : — — — — — — — —

$\vdash r \ni (\mathrm{zw}^{q}_{(x,x)}) \rightarrow (\neg r = x \rightarrow x \ni (r \ni <_q))$ (α

(276) : — — — — — — — —

$\vdash r \ni (x \ni \leq_q) \rightarrow (r \ni (\mathrm{zw}^{q}_{(x,x)}) \rightarrow (\neg r = x \rightarrow x \ni (x \ni <_q)))$ (β

(269) :: — — — — — — — —

$\vdash r \ni (\mathrm{zw}^{q}_{(x,x)}) \rightarrow (\neg r = x \rightarrow x \ni (x \ni <_q))$ (γ

$\times$

$\vdash r \ni (\mathrm{zw}^{q}_{(x,x)}) \rightarrow (\neg x \ni (x \ni <_q) \rightarrow r = x)$ (δ

(271) :: — — — — — — — —

$\vdash r \ni (\mathrm{zw}^{q}_{(x,x)}) \rightarrow r = x$ (282

$(IIIa)$: — — — — — — — —

$\vdash r \ni (\mathrm{zw}^{q}_{(x,x)}) \rightarrow ((x,m) \ni ((x,m) \ni \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow$

$(x,m) \ni ((r,m) \ni \leq_{(q\otimes p)}))$ (α

(140) :: ————————

$\vdash r \ni (\mathrm{zw}^{q}_{(x,x)}) \rightarrow (x,m) \ni ((r,m) \ni \leq_{(q\otimes p)})$ (β

$\times$

$\vdash \neg (x,m) \ni ((r,m) \ni \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow \neg r \ni (\mathrm{zw}^{q}_{(x,x)})$ (γ

(IIa) :: — — — — — — — —

$\vdash \forall \mathfrak{e} [\neg (x,m) \ni ((r,\mathfrak{e}) \ni \leq_{(q\otimes p)})] \rightarrow \neg r \ni (\mathrm{zw}^{q}_{(x,x)})$ (δ

$\smile$

$$\vdash \forall \mathfrak{r}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m) \ni ((\mathfrak{r},\mathfrak{e}) \ni\ \leq_{(q\otimes p)})] \to \neg\ \mathfrak{r} \ni (\mathrm{zw}^{\,q}_{\,(x,x)})] \qquad (\varepsilon$$

(281) : ————————————

$$\vdash (x,m) \ni ((y,n) \ni\ \leq_{(q\otimes p)}) \to$$

$$\forall \mathfrak{r}\,[\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m) \ni ((\mathfrak{r},\mathfrak{e}) \ni\ \leq_{(q\otimes p)})] \to \neg\ \mathfrak{r} \ni (\mathrm{zw}^{\,q}_{\,(x,y)})] \qquad (\zeta$$

(IIa) : — — — — — — — —

$$\vdash (x,m) \ni ((y,n) \ni\ \leq_{(q\otimes p)}) \to$$

$$(\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x,m) \ni ((d,\mathfrak{e}) \ni\ \leq_{(q\otimes p)})] \to \neg\ d \ni (\mathrm{zw}^{\,q}_{\,(x,y)})) \qquad (\eta$$

(277) : ·—·—·—·—·—·—·—·

$$\vdash \mathrm{funk}\,(p) \to ((x,m) \ni ((y,n) \ni\ \leq_{(q\otimes p)}) \to (\neg\ n \ni (n \ni\ <_p) \to$$

$$(\forall \mathfrak{a}\,[d \ni (\mathfrak{a} \ni ((x,m)\angle(q \otimes p))) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni (\mathrm{zw}^{\,p}_{\,(m,n)})] \to$$

$$\neg\ d \ni (\mathrm{zw}^{\,q}_{\,(x,y)})))) \qquad (\vartheta$$

$$\smile$$

$$\vdash \mathrm{funk}\,(p) \to ((x,m) \ni ((y,n) \ni\ \leq_{(q\otimes p)}) \to (\neg\ n \ni (n \ni\ <_p) \to$$

$$\forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni ((x,m)\angle(q \otimes p))) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni (\mathrm{zw}^{\,p}_{\,(m,n)})] \to$$

$$\neg\ \mathfrak{d} \ni (\mathrm{zw}^{\,q}_{\,(x,y)})])) \qquad (\iota$$

(11) : — — — — — — — —

$$\vdash \mathrm{funk}\,(p) \to ((x,m) \ni ((y,n) \ni\ \leq_{(q\otimes p)}) \to (\neg\ n \ni (n \ni\ <_p) \to$$

$$(\mathrm{funk}\,((x,m)\angle(q \otimes p))^{\#145} \to \mathrm{zw}^{\,q}_{\,(x,y)} \ni (\mathrm{zw}^{\,p}_{\,(m,n)} \ni ((x,m)\angle(q \otimes p)) :\twoheadrightarrow)))) \qquad (\kappa$$

(253) :: — — — — — — — —

S.212

$$\vdash (x,m) \ni ((y,n) \ni\ \leq_{(q\otimes p)}) \to (\neg\ n \ni (n \ni\ <_p) \to (\mathrm{funk}\,(p) \to$$
$$(\mathrm{funk}\,(q) \to (\forall \mathfrak{i}\,[x \ni (\mathfrak{i} \ni\ \leq_q) \to \neg\ \mathfrak{i} \ni (\mathfrak{i} \ni\ <_q)] \to$$
$$\mathrm{zw}^{\,q}_{\,(x,y)} \ni (\mathrm{zw}^{\,p}_{\,(m,n)} \ni ((x,m)\angle(q \otimes p)) :\twoheadrightarrow))))) \qquad (\lambda$$

———————— • ————————

234 $\vdash (x,m) \ni ((y,n) \ni\ \leq_{(q\otimes p)}) \to m \ni (n \ni\ \leq_p)$

(IIa) : — — — — — — — —

$$\vdash \forall \mathfrak{i}\,[m \ni (\mathfrak{i} \ni\ \leq_p) \to \neg\ \mathfrak{i} \ni (\mathfrak{i} \ni\ <_p)] \to$$
$$((x,m) \ni ((y,n) \ni\ \leq_{(q\otimes p)}) \to \neg\ n \ni (n \ni\ <_p)) \qquad (\mu$$

(λ) : — — — — — — — —

$$\vdash \forall \mathfrak{i}\,[m \ni (\mathfrak{i} \ni\ \leq_p) \to \neg\ \mathfrak{i} \ni (\mathfrak{i} \ni\ <_p)] \to$$
$$((x,m) \ni ((y,n) \ni\ \leq_{(q\otimes p)}) \to (\text{funk}\,(p) \to (\text{funk}\,(q) \to$$
$$(\forall \mathfrak{i}\,[x \ni (\mathfrak{i} \ni\ \leq_q) \to \neg\ \mathfrak{i} \ni (\mathfrak{i} \ni\ <_q)] \to$$
$$\text{zw}\,^q_{(x,y)} \ni (\text{zw}\,^p_{(m,n)} \ni ((x,m)\angle(q \otimes p)) :\twoheadrightarrow)))))\qquad (283$$

———— • ————

260 $\vdash \text{zw}\,^p_{(m,n)} \ni (\text{zw}\,^q_{(x,y)} \ni ((m,x)\angle(p \otimes q)) :\twoheadrightarrow) \to$
$\text{zw}\,^p_{(m,n)} \ni (\text{zw}\,^q_{(x,y)} \ni ((x,m)\angle(q \otimes p))^{-1} :\twoheadrightarrow)$

(32) : — — — — — — — —

$\vdash \text{zw}\,^p_{(m,n)} \ni (\text{zw}\,^q_{(x,y)} \ni ((m,x)\angle(p \otimes q)) :\twoheadrightarrow) \to$
$(\text{zw}\,^q_{(x,y)} \ni (\text{zw}\,^p_{(m,n)} \ni ((x,m)\angle(q \otimes p)) :\twoheadrightarrow) \to$
$\text{anz}\,(\text{zw}\,^q_{(x,y)}) = \text{anz}\,(\text{zw}\,^p_{(m,n)}))$ $(\alpha$

$(283, 283)$ [#146] :: = = = = = = = =

$\vdash (m,x) \ni ((n,y) \ni\ \leq_{(p\otimes q)}) \to$
$(\forall \mathfrak{i}\,[m \ni (\mathfrak{i} \ni\ \leq_p) \to \neg\ \mathfrak{i} \ni (\mathfrak{i} \ni\ <_p)] \to$
$((x,m) \ni ((y,n) \ni\ \leq_{(q\otimes p)}) \to (\text{funk}\,(p) \to (\text{funk}\,(q) \to$
$(\forall \mathfrak{i}\,[x \ni (\mathfrak{i} \ni\ \leq_q) \to \neg\ \mathfrak{i} \ni (\mathfrak{i} \ni\ <_q)] \to$
$\text{anz}\,(\text{zw}\,^q_{(x,y)}) = \text{anz}\,(\text{zw}\,^p_{(m,n)}))))))$ $(\beta$

(258) :: — — — — — — — —

S.213

$\vdash \forall \mathfrak{i}\,[m \ni (\mathfrak{i} \ni\ \leq_p) \to \neg\ \mathfrak{i} \ni (\mathfrak{i} \ni\ <_p)] \to$
$((x,m) \ni ((y,n) \ni\ \leq_{(q\otimes p)}) \to (\text{funk}\,(p) \to (\text{funk}\,(q) \to$
$(\forall \mathfrak{i}\,[x \ni (\mathfrak{i} \ni\ \leq_q) \to \neg\ \mathfrak{i} \ni (\mathfrak{i} \ni\ <_q)] \to$
$\text{anz}\,(\text{zw}\,^q_{(x,y)}) = \text{anz}\,(\text{zw}\,^p_{(m,n)})))))$ (284

———— • ————

136 $\vdash d \ni (y \ni\ <_q) \to d \ni (y \ni\ \leq_q)$

(132) :: — — — — — — — —

$\vdash a \ni (y \ni\ \leq_q) \to (d \ni (a \ni q) \to d \ni (y \ni\ \leq_q))$ (285

———— • ————

145 $\vdash \text{anz}\,(0) \ni (b \ni\ \leq_{\text{nf}}) \to \neg\ b \ni (b \ni\ <_{\text{nf}})$

(285) :: — — — — — — — —

$\vdash \text{anz}\,(1) \ni (b \ni\ \leq_{\text{nf}}) \to (\text{anz}\,(0) \ni (\text{anz}\,(1) \ni \text{nf}) \to \neg\ b \ni (b \ni\ <_{\text{nf}}))$ $(\alpha$

(110) :: ————————

$\vdash \text{anz}\,(1) \ni (b \ni\ \leq_{\text{nf}}) \to \neg\ b \ni (b \ni\ <_{\text{nf}})$ (286

$\smile$

$\vdash \forall \mathfrak{i}\,[\text{anz}\,(1) \ni (\mathfrak{i} \ni\ \leq_{\text{nf}}) \to \neg\ \mathfrak{i} \ni (\mathfrak{i} \ni\ <_{\text{nf}})]$ (287

(284) : ————————

$$\vdash (x, \text{anz}\,(1))\,\text{ə}\,((y,n)\,\text{ə}\,\leq_{(q\otimes \text{nf}\,)}) \rightarrow (\text{funk}\,(\text{nf}\,) \rightarrow (\text{funk}\,(q) \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{i}\,[x\,\text{ə}\,(\mathfrak{i}\,\text{ə}\,\leq_q) \rightarrow \neg\ \mathfrak{i}\,\text{ə}\,(\mathfrak{i}\,\text{ə}\,<_q)] \rightarrow$$
$$\text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{q}_{(x,y)}) = \text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{\text{nf}}_{(\text{anz}\,(1),n)})))) \qquad (\alpha$$

$(71) ::$ ———————————

$$\vdash (x, \text{anz}\,(1))\,\text{ə}\,((y,n)\,\text{ə}\,\leq_{(q\otimes \text{nf}\,)}) \rightarrow (\text{funk}\,(q) \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{i}\,[x\,\text{ə}\,(\mathfrak{i}\,\text{ə}\,\leq_q) \rightarrow \neg\ \mathfrak{i}\,\text{ə}\,(\mathfrak{i}\,\text{ə}\,<_q)] \rightarrow$$
$$\text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{q}_{(x,y)}) = \text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{\text{nf}}_{(\text{anz}\,(1),n)}))) \qquad (\beta$$

$(261) ::$ — — — — — — — —

$$\vdash (x, \text{anz}\,(1))\,\text{ə}\,((y,n)\,\text{ə}\,\leq_{(q\otimes \text{nf}\,)}) \rightarrow (\text{funk}\,(q) \rightarrow (\forall \mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i}\,\text{ə}\,(\mathfrak{i}\,\text{ə}\,<_q)] \rightarrow$$
$$\text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{q}_{(x,y)}) = \text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{\text{nf}}_{(\text{anz}\,(1),n)}))) \qquad (288$$

§ 162. *Zerlegung.*

Um in (288)■→das Vorderglied←■[181] [#147]

$$,\forall \mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i}\,\text{ə}\,(\mathfrak{i}\,\text{ə}\,<_q)]\text{‘}$$

durch ‚$\neg\ y\,\text{ə}\,(y\,\text{ə}\,<_q)$‘ zu ersetzen, vertauschen wir in (288) ‚q‘ mit ‚$y\,\text{ə}\,q\,|^{\leq_q}$‘. Es ist nämlich leicht der Satz

$$,\ \vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\neg\ y\,\text{ə}\,(y\,\text{ə}\,<_q) \rightarrow \neg\ i\,\text{ə}\,(i\,\text{ə}\,<_{(q|^{y}\,\text{ə}\,\leq_q)}))\text{‘} \qquad (\alpha$$

zu beweisen. Damit dann für ‚$y\,\text{ə}\,q\,|^{\leq_q}$‘ wieder ‚$q$‘ in den Satz komme, sind die Sätze (189),

$$,\ \vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\neg\ y\,\text{ə}\,(y\,\text{ə}\,<_q) \rightarrow \text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{q}_{(x,y)}) = \text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{(q|^{y}\,\text{ə}\,\leq_q)}_{(x,y)}))\text{‘} \qquad (\beta$$

und

$$,\ \vdash (x, \text{anz}\,(1))\,\text{ə}\,((y,n)\,\text{ə}\,\leq_{(q\otimes \text{nf}\,)}) \rightarrow (x, \text{anz}\,(1))\,\text{ə}\,((y,n)\,\text{ə}\,\leq_{(q|^{y}\,\text{ə}\,\leq_q\otimes \text{nf}\,)})\text{‘} \qquad (\gamma$$

anzuwenden. Wir beweisen mit (257) den allgemeinern Satz, der aus (γ) durch Ersetzung von ‚$\text{anz}\,(1)$‘ durch ‚m‘ und von ‚nf‘ durch ‚p‘ entsteht. Wir haben dazu den Satz

$$,\ \vdash (d\,\text{ə}\,(y\,\text{ə}\,\leq_q) \rightarrow (x,m)\,\text{ə}\,((d,c)\,\text{ə}\,\leq_{(q|^{y}\,\text{ə}\,\leq_q\otimes p)})) \rightarrow$$
$$(d\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,q) \rightarrow (c\,\text{ə}\,(o\,\text{ə}\,p) \rightarrow (a\,\text{ə}\,(y\,\text{ə}\,\leq_q) \rightarrow$$
$$(x,m)\,\text{ə}\,((a,o)\,\text{ə}\,\leq_{(q|^{y}\,\text{ə}\,\leq_q\otimes p)}))))\text{‘} \qquad (\delta$$

nöthig, der aus (209) und (197) folgt.

S.202 |

[181] das Unterglied

[#147] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

§ 163. *Aufbau.*

$$197 \quad \vdash a ə (y ə \leq_q) \to (d ə (a ə q) \to d ə (a ə (q \,|^{y ə \leq_q})))$$

$(209):$ – – – – – – – –

$$\vdash (x,m) ə ((d,c) ə \leq_{(q|^{y ə \leq_q} \otimes p)}) \to$$
$$(a ə (y ə \leq_q) \to (d ə (a ə q) \to (c ə (o ə p) \to$$
$$(x,m) ə ((a,o) ə \leq_{(q|^{y ə \leq_q} \otimes p)})))) \qquad (\alpha$$

$(I)::$ – – – – – – – –

$$\vdash (d ə (y ə \leq_q) \to (x,m) ə ((d,c) ə \leq_{(q|^{y ə \leq_q} \otimes p)})) \to$$
$$(d ə (y ə \leq_q) \to (a ə (y ə \leq_q) \to (d ə (a ə q) \to (c ə (o ə p) \to$$
$$(x,m) ə ((a,o) ə \leq_{(q|^{y ə \leq_q} \otimes p)}))))) \qquad (\beta$$

$(285)::$ – – – – – – – –

$$\vdash (d ə (y ə \leq_q) \to (x,m) ə ((d,c) ə \leq_{(q|^{y ə \leq_q} \otimes p)})) \to$$
$$(d ə (a ə q) \to (c ə (o ə p) \to (a ə (y ə \leq_q) \to$$
$$(x,m) ə ((a,o) ə \leq_{(q|^{y ə \leq_q} \otimes p)})))) \qquad (\gamma$$

$$\vdash \forall \mathfrak{c}\, \forall \mathfrak{d}\, [(\mathfrak{c} ə (y ə \leq_q) \to (x,m) ə ((\mathfrak{c},\mathfrak{d}) ə \leq_{(q|^{y ə \leq_q} \otimes p)})) \to$$
$$\forall \mathfrak{o}\, [\mathfrak{c} ə (\mathfrak{o} ə q) \to \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} ə (\mathfrak{a} ə p) \to (\mathfrak{o} ə (y ə \leq_q) \to$$
$$(x,m) ə ((\mathfrak{o},\mathfrak{a}) ə \leq_{(q|^{y ə \leq_q} \otimes p)}))]]] \qquad (\delta$$

$(257):$ ————————

$$\vdash (x,m) ə ((a,o) ə \leq_{(q \otimes p)}) \to$$
$$((x ə (y ə \leq_q) \to (x,m) ə ((x,m) ə \leq_{(q|^{y ə \leq_q} \otimes p)})) \to$$
$$(a ə (y ə \leq_q) \to (x,m) ə ((a,o) ə \leq_{(q|^{y ə \leq_q} \otimes p)}))) \qquad (\varepsilon$$

$(I)::$ – – – – – – – –

$$\vdash (x,m) ə ((a,o) ə \leq_{(q \otimes p)}) \to$$
$$((x,m) ə ((x,m) ə \leq_{(q|^{y ə \leq_q} \otimes p)}) \to$$
$$(a ə (y ə \leq_q) \to (x,m) ə ((a,o) ə \leq_{(q|^{y ə \leq_q} \otimes p)}))) \qquad (\zeta$$

$(140)::$ ————————

$$\vdash (x,m)\,ə\,((a,o)\,ə\ \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow$$

$$(a\,ə\,(y\,ə\ \leq_q) \rightarrow (x,m)\,ə\,((a,o)\,ə\ \leq_{(q|^{y}\,ə\,\leq_q\otimes p)})) \qquad (289$$

———————— ● ————————

$$140 \quad \vdash y\,ə\,(y\,ə\ \leq_q)$$

$$(289): \quad \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash (x,m)\,ə\,((y,n)\,ə\ \leq_{(q\otimes p)}) \rightarrow$$

$$(x,m)\,ə\,((y,n)\,ə\ \leq_{(q|^{y}\,ə\,\leq_q\otimes p)}) \qquad (290$$

§ 164. *Zerlegung.*

Um den Satz (β) des § 162 zu beweisen, brauchen wir die Sätze

$$,\ \vdash x\,ə\,(d\,ə\ \leq_q) \rightarrow (d\,ə\,(y\,ə\ \leq_q) \rightarrow x\,ə\,(d\,ə\ \leq_{(q|^{y}\,ə\,\leq_q)}))\ ‘ \qquad (\alpha$$

(194) und (189). Wir beweisen (α) mit (144).

§ 165. *Aufbau.*

$$194 \quad \vdash x\,ə\,(y\,ə\ <_{(q|^{u})}) \rightarrow x\,ə\,(y\,ə\ <_q)$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ x\,ə\,(y\,ə\ <_q) \rightarrow \neg\ x\,ə\,(y\,ə\ <_{(q|^{u})}) \qquad (291$$

———————— ● ————————

$$137 \quad \vdash x\,ə\,(d\,ə\ \leq_{(q|^{y}\,ə\,\leq_q)}) \rightarrow$$

$$(d\,ə\,(a\,ə\,(q\ |^{y\,ə\,\leq_q})) \rightarrow x\,ə\,(a\,ə\ \leq_{(q|^{y}\,ə\,\leq_q)}))$$

$$(197) :: \quad -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$

$$\vdash x\,ə\,(d\,ə\ \leq_{(q|^{y}\,ə\,\leq_q)}) \rightarrow (a\,ə\,(y\,ə\ \leq_q) \rightarrow$$

$$(d\,ə\,(a\,ə\,q) \rightarrow x\,ə\,(a\,ə\ \leq_{(q|^{y}\,ə\,\leq_q)}))) \qquad (\alpha$$

$$(I) :: \quad -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$

$$\vdash (d\,ə\,(y\,ə\ \leq_q) \rightarrow x\,ə\,(d\,ə\ \leq_{(q|^{y}\,ə\,\leq_q)})) \rightarrow$$

$$(d\,ə\,(y\,ə\ \leq_q) \rightarrow (a\,ə\,(y\,ə\ \leq_q) \rightarrow (d\,ə\,(a\,ə\,q) \rightarrow$$

$$x\,ə\,(a\,ə\ \leq_{(q|^{y}\,ə\,\leq_q)})))) \qquad (\beta$$

$$(285) :: \quad -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$

$$\vdash (d \ni (y \ni \leq_q) \to x \ni (d \ni \leq_{(q|^{y} \ni \leq_q)})) \to$$
$$(d \ni (a \ni q) \to (a \ni (y \ni \leq_q) \to$$
$$x \ni (a \ni \leq_{(q|^{y} \ni \leq_q)}))) \qquad (\gamma$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{d}\, [(\mathfrak{d} \ni (y \ni \leq_q) \to x \ni (\mathfrak{d} \ni \leq_{(q|^{y} \ni \leq_q)})) \to$$
$$\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to (\mathfrak{a} \ni (y \ni \leq_q) \to$$
$$x \ni (\mathfrak{a} \ni \leq_{(q|^{y} \ni \leq_q)}))]] \qquad (\delta$$

$(144) :$ ―――――――――

$$\vdash x \ni (d \ni \leq_q) \to$$
$$((x \ni (y \ni \leq_q) \to x \ni (x \ni \leq_{(q|^{y} \ni \leq_q)})) \to$$
$$(d \ni (y \ni \leq_q) \to x \ni (d \ni \leq_{(p|^{y} \ni \leq_q)}))) \qquad (\varepsilon$$

$(I) ::$ − − − − − − − −

$$\vdash x \ni (d \ni \leq_q) \to (x \ni (x \ni \leq_{(q|^{y} \ni \leq_q)}) \to$$
$$(d \ni (y \ni \leq_q) \to x \ni (d \ni \leq_{(q|^{y} \ni \leq_q)}))) \qquad (\zeta$$

$(140) ::$ ―――――――――

$$\vdash x \ni (d \ni \leq_q) \to (d \ni (y \ni \leq_q) \to x \ni (d \ni \leq_{(q|^{y} \ni \leq_q)})) \qquad (292$$

――――― • ―――――

140 $\vdash y \ni (y \ni \leq_q)$

$(292) :$ ―――――――――

$$\vdash d \ni (y \ni \leq_q) \to d \ni (y \ni \leq_{(q|^{y} \ni \leq_q)}) \qquad (293$$

$(274) :$ − − − − − − − −

$$\vdash \text{funk}\,(q\,|^{y \ni \leq_q}) \to$$
$$(d \ni (y \ni \leq_q) \to (\neg\; y \ni (y \ni <_{(q|^{y} \ni \leq_q)}) \to$$
$$(x \ni (d \ni \leq_{(q|^{y} \ni \leq_q)}) \to d \ni (\text{zw}\,{}^{(q|^{y} \ni \leq_q)}_{(x,y)})))) \qquad (\alpha$$

$(291, 292) ::$ = = = = = = = =

S.216

$$\vdash \text{funk}\,(q\,|^{y \ni \leq_q}) \to$$
$$(\neg\; y \ni (y \ni <_q) \to (x \ni (d \ni \leq_q) \to$$
$$(d \ni (y \ni \leq_q) \to d \ni (\text{zw}\,{}^{(q|^{y} \ni \leq_q)}_{(x,y)})))) \qquad (\beta$$

$(269, 270) ::$ = = = = = = = =

$$\vdash \text{funk}\,(q\,|^{y\,\text{ə}\,\leq_q}) \to (\neg\ y\,\text{ə}\,(y\,\text{ə}\ <_q) \to (d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{q}_{(x,y)}) \to$$

$$d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{(q|^{y\,\text{ə}\,\leq_q})}_{(x,y)}))) \qquad (\gamma$$

$$(189) :: \ - - - - - - - -$$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (\neg\ y\,\text{ə}\,(y\,\text{ə}\ <_q) \to (d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{q}_{(x,y)}) \to$$

$$d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{(q|^{y\,\text{ə}\,\leq_q})}_{(x,y)}))) \qquad (\delta$$

$$(271, 265) :: \ = = = = = = = =$$

$$\vdash d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{q}_{(x,y)}) \to d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{(q|^{y\,\text{ə}\,\leq_q})}_{(x,y)}) \qquad (294$$

$$274 \quad \vdash \text{funk}\,(q) \to (d\,\text{ə}\,(y\,\text{ə}\ \leq_q) \to (\neg\ y\,\text{ə}\,(y\,\text{ə}\ <_q) \to$$

$$(x\,\text{ə}\,(d\,\text{ə}\ \leq_q) \to d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{q}_{(x,y)}))))$$

$$(201, 201) :: \ = = = = = = = =$$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (d\,\text{ə}\,(y\,\text{ə}\ \leq_{(q|^{y\,\text{ə}\,\leq_q})}) \to (\neg\ y\,\text{ə}\,(y\,\text{ə}\ <_q) \to$$

$$(x\,\text{ə}\,(d\,\text{ə}\ \leq_{(q|^{y\,\text{ə}\,\leq_q})}) \to d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{q}_{(x,y)})))) \qquad (\alpha$$

$$(269, 270) :: \ = = = = = = = =$$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (\neg\ y\,\text{ə}\,(y\,\text{ə}\ <_q) \to$$

$$(d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{(q|^{y\,\text{ə}\,\leq_q})}_{(x,y)}) \to d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{q}_{(x,y)}))) \qquad (\beta$$

$$(IVa) : \ - - - - - - - -$$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (\neg\ y\,\text{ə}\,(y\,\text{ə}\ <_q) \to$$

$$((d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{q}_{(x,y)}) \to d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{(q|^{y\,\text{ə}\,\leq_q})}_{(x,y)})) \to$$

$$(—\,d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{q}_{(x,y)})) = (—\,d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{(q|^{y\,\text{ə}\,\leq_q})}_{(x,y)})))) \qquad (\gamma$$

$$(294) :: \ \overline{\hspace{6cm}}$$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (\neg\ y\,\text{ə}\,(y\,\text{ə}\ <_q) \to$$

$$(—\,d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{q}_{(x,y)})) = (—\,d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{(q|^{y\,\text{ə}\,\leq_q})}_{(x,y)}))) \qquad (\delta$$

$$\smile$$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (\neg\ y\,\text{ə}\,(y\,\text{ə}\ <_q) \to$$

$$\forall \mathfrak{a}\,[(—\,\mathfrak{a}\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{q}_{(x,y)})) = (—\,\mathfrak{a}\,\text{ə}\,(\text{zw}\,^{(q|^{y\,\text{ə}\,\leq_q})}_{(x,y)}))]) \qquad (\varepsilon$$

$$(96) : \ - - - - - - - -$$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\neg\ y \ni (y \ni\ <_q) \rightarrow$$

$$\text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{y}_{(x,y)}) = \text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{(q|^{y} \ni\, \leq_q)}_{(x,y)})) \tag{295}$$

———————— • ————————

278 $\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (d \ni (d \ni\ <_q) \rightarrow (d \ni (a \ni q) \rightarrow a \ni (a \ni\ <_q)))$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow \forall \mathfrak{d}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{d} \ni\ <_q) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \rightarrow \mathfrak{a} \ni (\mathfrak{a} \ni\ <_q)]] \qquad (\alpha$$

$(144):$ — — — — — — — —

S.217

$$\vdash i \ni (y \ni\ \leq_q) \rightarrow (\text{funk}\,(q) \rightarrow (i \ni (i \ni\ <_q) \rightarrow y \ni (y \ni\ <_q))) \tag{296}$$

$(194)::$ — — — — — — — —

$$\vdash i \ni (y \ni\ \leq_q) \rightarrow$$

$$(\text{funk}\,(q) \rightarrow (i \ni (i \ni\ <_{(q|^{y} \ni\, \leq_q)}) \rightarrow y \ni (y \ni\ <_q))) \qquad (\alpha$$

$\times$

$$\vdash i \ni (y \ni\ \leq_q) \rightarrow$$

$$(\text{funk}\,(q) \rightarrow (\neg\ y \ni (y \ni\ <_q) \rightarrow \neg\ i \ni (i \ni\ <_{(q|^{y} \ni\, \leq_q)}))) \qquad (\beta$$

$(193):$ ·—·—·—·—·—·—·

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\neg\ y \ni (y \ni\ <_q) \rightarrow \neg\ i \ni (i \ni\ <_{(q|^{y} \ni\, \leq_q)})) \qquad (\gamma$$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\neg\ y \ni (y \ni\ <_q) \rightarrow \forall \mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i} \ni (\mathfrak{i} \ni\ <_{(q|^{y} \ni\, \leq_q)})]) \tag{297}$$

$(288):$ — — — — — — — —

$$\vdash (x, \text{anz}\,(1)) \ni ((y,n) \ni\ \leq_{(q|^{y} \ni\, \leq_q \otimes \text{nf})}) \rightarrow$$

$$(\text{funk}\,(q\,|^{y \ni\, \leq_q}) \rightarrow (\text{funk}\,(q) \rightarrow (\neg\ y \ni (y \ni\ <_q) \rightarrow$$

$$\text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{(q|^{y} \ni\, \leq_q)}_{(x,y)}) = \text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{\text{nf}}_{(\text{anz}\,(1),n)})))) \qquad (\alpha$$

$(290, 189)::$ = = = = = = = =

$$\vdash (x, \text{anz}\,(1)) \ni ((y,n) \ni\ \leq_{(q \otimes \text{nf})}) \rightarrow (\text{funk}\,(q) \rightarrow (\neg\ y \ni (y \ni\ <_q) \rightarrow$$

$$\text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{(q|^{y} \ni\, \leq_q)}_{(x,y)}) = \text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{\text{nf}}_{(\text{anz}\,(1),n)}))) \qquad (\beta$$

$(IIIa):$ ————————————

$$\vdash \text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{q}_{(x,y)}) = \text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{(q|^{y\,\text{ə}\,\leq_q})}_{(x,y)}) \to$$
$$((x, \text{anz}\,(1))\,\text{ə}\,((y,n)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes\text{nf}\,)}) \to (\text{funk}\,(q) \to (\neg\ y\,\text{ə}\,(y\,\text{ə}\ <_q) \to$$
$$\text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{q}_{(x,y)}) = \text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{\text{nf}}_{(\text{anz}\,(1),n)})))) \qquad (\gamma$$

$(295) ::\ - - - - - - - - -$

$$\vdash (x, \text{anz}\,(1))\,\text{ə}\,((y,n)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes\text{nf}\,)}) \to (\text{funk}\,(q) \to (\neg\ y\,\text{ə}\,(y\,\text{ə}\ <_q) \to$$
$$\text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{q}_{(x,y)}) = \text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{\text{nf}}_{(\text{anz}\,(1),n)}))) \qquad (298$$

b) Beweis des Satzes
‚ $\vdash \text{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}\,) \to n = \text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{\text{nf}}_{(\text{anz}\,(1),n)})$‘
und Schluss des Abschnittes K.

§ 166. *Zerlegung.*

Wir beweisen den Satz (δ) des § 158 mit (160). Dazu brauchen wir den Satz

$$‚\ \vdash \text{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}\,) \to$$
$$\text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{\text{nf}}_{(\text{anz}\,(1),n)}) = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}\,) \to \varepsilon = \text{anz}\,(0))))\ ‘ \qquad (\alpha$$

der mit (IVa) und (96) aus den Sätzen

$$‚\ \vdash a\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}\,) \to (\text{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}\,) \to (\neg\ a = \text{anz}\,(0) \to a\,\text{ə}\,(\text{zw}\,{}^{\text{nf}}_{(\text{anz}\,(1),n)})))\ ‘ \qquad (\beta$$

$$‚\ \vdash a\,\text{ə}\,(\text{zw}\,{}^{\text{nf}}_{(\text{anz}\,(1),n)}) \to \neg\ (a\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}\,) \to a = \text{anz}\,(0))\ ‘ \qquad (\gamma$$

folgt. (β) ist auf den Satz

$$‚\ \vdash a\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}\,) \to (\text{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}\,) \to (\neg\ a = \text{anz}\,(0) \to \text{anz}\,(1)\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}\,)))\ ‘ \qquad (\delta$$

zurückzuführen, der aus (242) abzuzuleiten ist. Wir erhalten zunächst

$$‚\ \vdash \text{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\ <_{\text{nf}}\,) \to \text{anz}\,(1)\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}\,)\ ‘ \qquad (\varepsilon$$

S.203 | Es kommt nun darauf an, den Satz

$$‚\ \vdash a\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}\,) \to (\text{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}\,) \to \text{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}\,))\ ‘ \qquad (\zeta$$

zu beweisen. Dieser folgt aus dem Satze

$$‚\ \vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (n\,\text{ə}\,(r\,\text{ə}\ \leq_p) \to (m\,\text{ə}\,(r\,\text{ə}\ \leq_p) \to$$
$$(\neg\ n\,\text{ə}\,(m\,\text{ə}\ <_p) \to m\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ \leq_p))))\ ‘ \qquad (\eta$$

der ähnlich (243) ist und daraus abgeleitet werden kann. Schreiben wir (243) so

$$‚\ \vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (r\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ \leq_{p^{-1}}) \to (r\,\text{ə}\,(m\,\text{ə}\ \leq_{p^{-1}}) \to$$
$$(\neg\ m\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ <_{p^{-1}}) \to n\,\text{ə}\,(m\,\text{ə}\ \leq_{p^{-1}}))))\ ‘$$

so bleiben die Sätze

$$‚\ \vdash n\,\text{ə}\,(m\,\text{ə}\ <_{p^{-1}}) \to m\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ <_p)\ ‘ \qquad (\vartheta$$

$$‚\ \vdash m\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ <_p) \to n\,\text{ə}\,(m\,\text{ə}\ <_{p^{-1}})\ ‘ \qquad (\iota$$

und ähnliche zu beweisen, was mit (123) geschehen kann.

§ 167. *Aufbau.*

$$23 \quad \vdash d \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} p^{-1}) \to a \mathbin{\text{ə}} (d \mathbin{\text{ə}} p)$$

$$(129): \quad - - - - - - - -$$

$$\vdash d \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} <_p) \to (d \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} p^{-1}) \to a \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} <_p)) \qquad (\alpha$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{d}\, [\mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} <_p) \to \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} p^{-1}) \to \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} <_p)]] \qquad (\beta$$

$$(123): \quad \rule{8em}{0.4pt}$$

$$\vdash n \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}} <_{p^{-1}}) \to$$
$$(\forall \mathfrak{a}\, [n \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} p^{-1}) \to \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} <_p)] \to m \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} <_p)) \qquad (\gamma$$

———— • ————

$$131 \quad \vdash a \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} p) \to a \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} <_p)$$

$$(23) :: \quad - - - - - - - -$$

$$\vdash n \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} p^{-1}) \to a \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} <_p) \qquad (\delta$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [n \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} p^{-1}) \to \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} <_p)] \qquad (\varepsilon$$

$$(\gamma): \quad \rule{8em}{0.4pt}$$

$$\vdash n \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}} <_{p^{-1}}) \to m \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} <_p) \qquad (299$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\, m \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} <_p) \to \neg\, n \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}} <_{p^{-1}}) \qquad (300$$

———— • ————

$$\text{IIIf} \quad \vdash m = n \to n = m$$
$$(139): \quad - - - - - - - -$$
$$\vdash m = n \to m \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_p) \qquad (301$$

———— • ————

$$22 \quad \vdash d \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} p) \to a \mathbin{\text{ə}} (d \mathbin{\text{ə}} p^{-1})$$

$$(129): \quad - - - - - - - -$$

$$\vdash d \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}} <_{p^{-1}}) \to (d \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} p) \to a \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}} <_{p^{-1}})) \qquad (\alpha$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{d}\,[\mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}} <_{p^{-1}}) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} p) \rightarrow \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}} <_{p^{-1}})]] \qquad (\beta$$

$$(123):\ \overline{}$$

$$\vdash m \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} <_p) \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{a}\,[m \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} p) \rightarrow \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}} <_{p^{-1}})] \rightarrow n \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}} <_{p^{-1}})) \qquad (\gamma$$

———— • ————

S.214 |

$$131 \quad \vdash a \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}} p^{-1}) \rightarrow a \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}} <_{p^{-1}})$$
$$(22) :: \ - - - - - - - - -$$
$$\vdash m \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} p) \rightarrow a \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}} <_{p^{-1}}) \qquad (\delta$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[m \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} p) \rightarrow \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}} <_{p^{-1}})] \qquad (\varepsilon$$
$$(\gamma):\ \overline{}$$
$$\vdash m \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} <_p) \rightarrow n \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}} <_{p^{-1}}) \qquad (302$$
$$(136):\ - - - - - - - - -$$
$$\vdash m \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} <_p) \rightarrow n \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}} \leq_{p^{-1}}) \qquad (\alpha$$
$$(200) :: \ - - - - - - - - -$$
$$\vdash m \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_p) \rightarrow (\neg\ n = m \rightarrow n \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}} \leq_{p^{-1}})) \qquad (\beta$$
$$(301):\ \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot$$
$$\vdash m \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_p) \rightarrow n \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}} \leq_{p^{-1}}) \qquad (303$$

———— • ————

$$299 \quad \vdash n \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}} <_{p^{-1}}) \rightarrow m \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} <_p)$$
$$(136):\ - - - - - - - - -$$
$$\vdash n \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}} <_{p^{-1}}) \rightarrow m \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_p) \qquad (\alpha$$
$$(200) :: \ - - - - - - - - -$$
$$\vdash n \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}} \leq_{p^{-1}}) \rightarrow (\neg\ m = n \rightarrow m \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_p)) \qquad (\beta$$
$$(301):\ \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot$$
$$\vdash n \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}} \leq_{p^{-1}}) \rightarrow m \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_p) \qquad (304$$
$$(243) :: \ - - - - - - - - -$$
$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (r \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_{p^{-1}}) \rightarrow (r \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}} \leq_{p^{-1}}) \rightarrow$$
$$(\neg\ m \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} <_{p^{-1}}) \rightarrow m \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_p)))) \qquad (\alpha$$
$$(303, 303) :: \ = = = = = = = = =$$
$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (n \mathbin{\text{ə}} (r \mathbin{\text{ə}} \leq_p) \rightarrow (m \mathbin{\text{ə}} (r \mathbin{\text{ə}} \leq_p) \rightarrow$$
$$(\neg\ m \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} <_{p^{-1}}) \rightarrow m \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_p)))) \qquad (\beta$$
$$(300) :: \ - - - - - - - - -$$
$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (n \mathbin{\text{ə}} (r \mathbin{\text{ə}} \leq_p) \rightarrow (m \mathbin{\text{ə}} (r \mathbin{\text{ə}} \leq_p) \rightarrow$$
$$(\neg\ n \mathbin{\text{ə}} (m \mathbin{\text{ə}} <_p) \rightarrow m \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_p)))) \qquad (305$$

$$242 \quad \vdash \mathrm{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\;<_{\mathrm{nf}}) \rightarrow (\mathrm{funk}\,(\mathrm{nf}) \rightarrow$$
$$(\mathrm{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(\mathrm{anz}\,(1)\,\text{ə}\,\mathrm{nf}) \rightarrow \mathrm{anz}\,(1)\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\;\leq_{\mathrm{nf}})))$$
$$(110,71) :: \;=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=$$
$$\vdash \mathrm{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\;<_{\mathrm{nf}}) \rightarrow \mathrm{anz}\,(1)\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\;\leq_{\mathrm{nf}}) \qquad (306$$

—— • ——

$$305 \quad \vdash \mathrm{funk}\,(\mathrm{nf}^{-1}) \rightarrow (a\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\;\leq_{\mathrm{nf}}) \rightarrow (\mathrm{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\;\leq_{\mathrm{nf}}) \rightarrow$$
$$(\neg\; a\,\text{ə}\,(\mathrm{anz}\,(0)\,\text{ə}\;<_{\mathrm{nf}}) \rightarrow \mathrm{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\;\leq_{\mathrm{nf}}))))$$
$$(126,89) :: \;=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=$$
$$\vdash a\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\;\leq_{\mathrm{nf}}) \rightarrow (\mathrm{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\;\leq_{\mathrm{nf}}) \rightarrow \mathrm{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\;\leq_{\mathrm{nf}})) \qquad (307$$
$$(200) : \;- - - - - - - - -$$
$$\vdash a\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\;\leq_{\mathrm{nf}}) \rightarrow (\mathrm{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\;\leq_{\mathrm{nf}}) \rightarrow$$
$$(\neg\; a = \mathrm{anz}\,(0) \rightarrow \mathrm{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\;<_{\mathrm{nf}}))) \qquad (\alpha$$
$$(306) : \;- - - - - - - - -$$
$$\vdash a\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\;\leq_{\mathrm{nf}}) \rightarrow (\mathrm{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\;\leq_{\mathrm{nf}}) \rightarrow$$
$$(\neg\; a = \mathrm{anz}\,(0) \rightarrow \mathrm{anz}\,(1)\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\;\leq_{\mathrm{nf}}))) \qquad (308$$

—— • ——

| S.218

$$274 \quad \vdash \mathrm{funk}\,(\mathrm{nf}) \rightarrow (a\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\;\leq_{\mathrm{nf}}) \rightarrow (\neg\; n\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\;<_{\mathrm{nf}}) \rightarrow$$
$$(\mathrm{anz}\,(1)\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\;\leq_{\mathrm{nf}}) \rightarrow a\,\text{ə}\,(\mathrm{zw}^{\mathrm{nf}}_{(\mathrm{anz}\,(1),n)}))))$$
$$(145,71) :: \;= = = = = = = = =$$
$$\vdash a\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\;\leq_{\mathrm{nf}}) \rightarrow (\mathrm{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\;\leq_{\mathrm{nf}}) \rightarrow$$
$$(\mathrm{anz}\,(1)\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\;\leq_{\mathrm{nf}}) \rightarrow a\,\text{ə}\,(\mathrm{zw}^{\mathrm{nf}}_{(\mathrm{anz}\,(1),n)}))) \qquad (309$$
$$(308) :: \;- - - - - - - - -$$
$$\vdash a\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\;\leq_{\mathrm{nf}}) \rightarrow (\mathrm{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\;\leq_{\mathrm{nf}}) \rightarrow$$
$$(\neg\; a = \mathrm{anz}\,(0) \rightarrow a\,\text{ə}\,(\mathrm{zw}^{\mathrm{nf}}_{(\mathrm{anz}\,(1),n)}))) \qquad (\alpha$$
$$(Ic, Id) :: \;= = = = = = = = =$$
$$\vdash \mathrm{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\;\leq_{\mathrm{nf}}) \rightarrow$$
$$(\neg\; (a\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\;\leq_{\mathrm{nf}}) \rightarrow a = \mathrm{anz}\,(0)) \rightarrow a\,\text{ə}\,(\mathrm{zw}^{\mathrm{nf}}_{(\mathrm{anz}\,(1),n)})) \qquad (310$$

—— • ——

$$270 \quad \vdash a\,\text{ə}\,(\mathrm{zw}^{\mathrm{nf}}_{(\mathrm{anz}\,(1),n)}) \rightarrow \mathrm{anz}\,(1)\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\;\leq_{\mathrm{nf}})$$
$$(132) : \;- - - - - - - - -$$
$$\vdash a\,\text{ə}\,(\mathrm{zw}^{\mathrm{nf}}_{(\mathrm{anz}\,(1),n)}) \rightarrow (\mathrm{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(\mathrm{anz}\,(1)\,\text{ə}\,\mathrm{nf}) \rightarrow \mathrm{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\;<_{\mathrm{nf}})) \qquad (\alpha$$
$$(110) :: \;\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\vdash a\,\text{ə}\,(\mathrm{zw}^{\mathrm{nf}}_{(\mathrm{anz}\,(1),n)}) \rightarrow \mathrm{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\;<_{\mathrm{nf}}) \qquad (311$$
$$(IIId) : \;- - - - - - - - -$$
$$\vdash \neg\; \mathrm{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(\mathrm{anz}\,(0)\,\text{ə}\;<_{\mathrm{nf}}) \rightarrow (a\,\text{ə}\,(\mathrm{zw}^{\mathrm{nf}}_{(\mathrm{anz}\,(1),n)}) \rightarrow \neg\; a = \mathrm{anz}\,(0)) \qquad (\alpha$$
$$(126) :: \;\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash a \mathbin{\text{ə}} (\mathrm{zw}^{\mathrm{nf}}_{(\mathrm{anz}\,(1),n)}) \to \neg\ a = \mathrm{anz}\,(0) \qquad (312$$

$$(If): \quad - - - - - - - - -$$

$$\vdash a \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_{\mathrm{nf}}) \to (a \mathbin{\text{ə}} (\mathrm{zw}^{\mathrm{nf}}_{(\mathrm{anz}\,(1),n)}) \to \neg\ (a \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_{\mathrm{nf}}) \to a = \mathrm{anz}\,(0))) \qquad (\alpha$$

$$(269) :: \quad - - - - - - - - -$$

$$\vdash a \mathbin{\text{ə}} (\mathrm{zw}^{\mathrm{nf}}_{(\mathrm{anz}\,(1),n)}) \to \neg\ (a \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_{\mathrm{nf}}) \to a = \mathrm{anz}\,(0)) \qquad (\beta$$

$$(IVa): \quad \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash (\neg\ (a \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_{\mathrm{nf}}) \to a = \mathrm{anz}\,(0)) \to a \mathbin{\text{ə}} (\mathrm{zw}^{\mathrm{nf}}_{(\mathrm{anz}\,(1),n)})) \to$$
$$(\!-\!\!-\, a \mathbin{\text{ə}} (\mathrm{zw}^{\mathrm{nf}}_{(\mathrm{anz}\,(1),n)})) = (\!-\!\!-\neg\ (a \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_{\mathrm{nf}}) \to a = \mathrm{anz}\,(0))^{\#148}) \qquad (\gamma$$

$$(310) :: \quad - - - - - - - - -$$

$$\vdash \mathrm{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_{\mathrm{nf}}) \to$$
$$(\!-\!\!-\, a \mathbin{\text{ə}} (\mathrm{zw}^{\mathrm{nf}}_{(\mathrm{anz}\,(1),n)})) = (\!-\!\!-\neg\ (a \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_{\mathrm{nf}}) \to a = \mathrm{anz}\,(0))^{\#149}) \qquad (\delta$$

$$(77): \quad \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash \mathrm{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_{\mathrm{nf}}) \to$$
$$(\!-\!\!-\, a \mathbin{\text{ə}} (\mathrm{zw}^{\mathrm{nf}}_{(\mathrm{anz}\,(1),n)})) = [\!-\!\!-\, a \mathbin{\text{ə}} \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_{\mathrm{nf}}) \to \varepsilon = \mathrm{anz}\,(0)))] \qquad (\varepsilon$$

$$\smile$$

$$\vdash \mathrm{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_{\mathrm{nf}}) \to$$
$$\forall \mathfrak{a}\, [(\!-\!\!-\, \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} (\mathrm{zw}^{\mathrm{nf}}_{(\mathrm{anz}\,(1),n)})) = [\!-\!\!-\, \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_{\mathrm{nf}}) \to \varepsilon = \mathrm{anz}\,(0)))]] \qquad (\zeta$$

$$(96): \quad - - - - - - - - -$$

S.221

$$\vdash \mathrm{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_{\mathrm{nf}}) \to$$
$$\mathrm{anz}\,(\mathrm{zw}^{\mathrm{nf}}_{(\mathrm{anz}\,(1),n)}) = \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_{\mathrm{nf}}) \to \varepsilon = \mathrm{anz}\,(0)))) \qquad (313$$

$$(IIIa): \quad - - - - - - - - -$$

$$\vdash \mathrm{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_{\mathrm{nf}}) \to$$
$$(n = \mathrm{anz}\,(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_{\mathrm{nf}}) \to \varepsilon = \mathrm{anz}\,(0)))) \to n = \mathrm{anz}\,(\mathrm{zw}^{\mathrm{nf}}_{(\mathrm{anz}\,(1),n)})) \qquad (\alpha$$

$$(160) :: \quad - - - - - - - - -$$

$$\vdash \mathrm{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_{\mathrm{nf}}) \to n = \mathrm{anz}\,(\mathrm{zw}^{\mathrm{nf}}_{(\mathrm{anz}\,(1),n)}) \qquad (314$$

$$(IIIa): \quad - - - - - - - - -$$

$$\vdash \mathrm{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_{\mathrm{nf}}) \to (\mathrm{anz}\,(\mathrm{zw}^{q}_{(x,y)}) = \mathrm{anz}\,(\mathrm{zw}^{\mathrm{nf}}_{(\mathrm{anz}\,(1),n)}) \to \mathrm{anz}\,(\mathrm{zw}^{q}_{(x,y)}) = n) \qquad (\alpha$$

$$(298) :: \quad - - - - - - - - -$$

$$\vdash \mathrm{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_{\mathrm{nf}}) \to ((x, \mathrm{anz}\,(1)) \mathbin{\text{ə}} ((y,n) \mathbin{\text{ə}} \leq_{(q \otimes \mathrm{nf})}) \to (\mathrm{funk}\,(q) \to$$
$$(\neg\ y \mathbin{\text{ə}} (y \mathbin{\text{ə}} <_q) \to \mathrm{anz}\,(\mathrm{zw}^{q}_{(x,y)}) = n))) \qquad (\beta$$

$$(IIIa): \quad - - - - - - - - -$$

$\vdash \text{anz}\,(0) ə (n ə \le_{\text{nf}}) \to ((x, \text{anz}\,(1)) ə ((y, n) ə \le_{(q \otimes \text{nf})}) \to (\text{funk}\,(q) \to$
$(\neg\; y ə (y ə <_q) \to \text{anz}\,(0) ə (\text{anz}\,(\text{zw}^{\,q}_{(x,y)}) ə \le_{\text{nf}})^{\#150})))$ (315

110 $\vdash \text{anz}\,(0) ə (\text{anz}\,(1) ə \text{nf})$

(285) : ————————————

$\vdash \text{anz}\,(1) ə (n ə \le_{\text{nf}}) \to \text{anz}\,(0) ə (n ə \le_{\text{nf}})$ (316

(234) :: — — — — — — — —

$\vdash (x, \text{anz}\,(1)) ə ((y, n) ə \le_{(q \otimes \text{nf})}) \to \text{anz}\,(0) ə (n ə \le_{\text{nf}})$ (317

(315) : — — — — — — — —

$\vdash (x, \text{anz}\,(1)) ə ((y, n) ə \le_{(q \otimes \text{nf})}) \to (\text{funk}\,(q) \to (\neg\; y ə (y ə <_q) \to$

$\text{anz}\,(0) ə (\text{anz}\,(\text{zw}^{\,q}_{(x,y)}) ə \le_{\text{nf}})))$ (α

$\times$

$\vdash \neg\; \text{anz}\,(0) ə (\text{anz}\,(\text{zw}^{\,q}_{(x,y)}) ə \le_{\text{nf}}) \to (\text{funk}\,(q) \to (\neg\; y ə (y ə <_q) \to$

$\neg\; (x, \text{anz}\,(1)) ə ((y, n) ə \le_{(q \otimes \text{nf})})))$ (β

$\smile$

$\vdash \neg\; \text{anz}\,(0) ə (\text{anz}\,(\text{zw}^{\,q}_{(x,y)}) ə \le_{\text{nf}}) \to (\text{funk}\,(q) \to (\neg\; y ə (y ə <_q) \to$

$\forall \mathfrak{e}\, [\neg\; (x, \text{anz}\,(1)) ə ((y, \mathfrak{e}) ə \le_{(q \otimes \text{nf})})]))$ (318

§ 168. *Zerlegung.*

Die letzten beiden Uebergänge dienen zur Wegschaffang des ‚n‘. Wir beweisen nun den Satz

‚ $\vdash x ə (y ə \le_q) \to \neg\; \forall \mathfrak{e}\, [\neg\; (x, \text{anz}\,(1)) ə ((y, \mathfrak{e}) ə \le_{(q \otimes \text{nf})})]$ ‘ (α

mit (144) und brauchen dazu den Satz

‚ $\vdash \neg\; \forall \mathfrak{e}\, [\neg\; (x, \text{anz}\,(1)) ə ((d, \mathfrak{e}) ə \le_{(q \otimes \text{nf})})] \to (d ə (a ə q) \to$
$\neg\; \forall \mathfrak{e}\, [\neg\; (x, \text{anz}\,(1)) ə ((a, \mathfrak{e}) ə \le_{(q \otimes \text{nf})})])$ ‘ (β

den wir aus (209) ableiten.

§ 169. *Aufbau.*

209 $\vdash (x, \text{anz}\,(1)) ə ((d, c) ə \le_{(q \otimes \text{nf})}) \to (d ə (a ə q) \to$

$(c ə (o ə \text{nf}) \to (x, \text{anz}\,(1)) ə ((a, o) ə \le_{(q \otimes \text{nf})})))$

$\times$

$$\vdash (x, \text{anz}\,(1))\,\text{ə}\,((d, c)\,\text{ə}\, \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)}) \to (d\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,q) \to$$

$$(\neg\ (x, \text{anz}\,(1))\,\text{ə}\,((a, o)\,\text{ə}\, \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)}) \to \neg\ c\,\text{ə}\,(o\,\text{ə}\,\text{nf}\,))) \qquad (\alpha$$

$$(IIa) :: \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ -$$

$$\vdash (x, \text{anz}\,(1))\,\text{ə}\,((d, c)\,\text{ə}\, \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)}) \to (d\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,q) \to$$

$$(\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x, \text{anz}\,(1))\,\text{ə}\,((a, \mathfrak{e})\,\text{ə}\, \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)})] \to \neg\ c\,\text{ə}\,(o\,\text{ə}\,\text{nf}\,))) \qquad (\beta$$

$$\smile$$

S.222

$$\vdash (x, \text{anz}\,(1))\,\text{ə}\,((d, c)\,\text{ə}\, \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)}) \to (d\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,q) \to$$

$$(\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x, \text{anz}\,(1))\,\text{ə}\,((a, \mathfrak{e})\,\text{ə}\, \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)})] \to \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ c\,\text{ə}\,(\mathfrak{a}\,\text{ə}\,\text{nf}\,)])) \qquad (\gamma$$

$$(156) : \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ -$$

$$\vdash (x, \text{anz}\,(1))\,\text{ə}\,((d, c)\,\text{ə}\, \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)}) \to (d\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,q) \to$$

$$(\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x, \text{anz}\,(1))\,\text{ə}\,((a, \mathfrak{e})\,\text{ə}\, \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)})] \to \neg\ \text{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(c\,\text{ə}\, \leq_{\text{nf}}\,))) \qquad (\delta$$

$$\times$$

$$\vdash (x, \text{anz}\,(1))\,\text{ə}\,((d, c)\,\text{ə}\, \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)}) \to (\text{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(c\,\text{ə}\, \leq_{\text{nf}}\,) \to$$

$$(\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x, \text{anz}\,(1))\,\text{ə}\,((a, \mathfrak{e})\,\text{ə}\, \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)})] \to \neg\ d\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,q))) \qquad (\varepsilon$$

$$(317) :: \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ -$$

$$\vdash (x, \text{anz}\,(1))\,\text{ə}\,((d, c)\,\text{ə}\, \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)}) \to$$

$$(\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x, \text{anz}\,(1))\,\text{ə}\,((a, \mathfrak{e})\,\text{ə}\, \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)})] \to \neg\ d\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,q)) \qquad (\zeta$$

$$\times$$

$$\vdash d\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,q) \to (\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x, \text{anz}\,(1))\,\text{ə}\,((a, \mathfrak{e})\,\text{ə}\, \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)})] \to$$

$$\neg\ (x, \text{anz}\,(1))\,\text{ə}\,((d, c)\,\text{ə}\, \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)})) \qquad (\eta$$

$$\smile$$

$$\vdash d\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,q) \to (\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x, \text{anz}\,(1))\,\text{ə}\,((a, \mathfrak{e})\,\text{ə}\, \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)})] \to$$

$$\forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x, \text{anz}\,(1))\,\text{ə}\,((d, \mathfrak{e})\,\text{ə}\, \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)})]) \qquad (\vartheta$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x, \text{anz}\,(1)) \text{ ə } ((d, \mathfrak{e}) \text{ ə } \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)})] \rightarrow$$

$$(d \text{ ə } (a \text{ ə } q) \rightarrow \neg\ \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x, \text{anz}\,(1)) \text{ ə } ((a, \mathfrak{e}) \text{ ə } \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)})]) \qquad (\iota$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{d}\,[\neg\ \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x, \text{anz}\,(1)) \text{ ə } ((\mathfrak{d}, \mathfrak{e}) \text{ ə } \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)})] \rightarrow$$

$$\forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q) \rightarrow \neg\ \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x, \text{anz}\,(1)) \text{ ə } ((\mathfrak{a}, \mathfrak{e}) \text{ ə } \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)})]]] \qquad (\kappa$$

(144) : ————————————

$$\vdash x \text{ ə } (y \text{ ə } \leq_q) \rightarrow (\neg\ \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x, \text{anz}\,(1)) \text{ ə } ((x, \mathfrak{e}) \text{ ə } \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)})] \rightarrow$$

$$\neg\ \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x, \text{anz}\,(1)) \text{ ə } ((y, \mathfrak{e}) \text{ ə } \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)})]) \qquad (\lambda$$

———————— • ————————

$$\text{IIa} \quad \vdash \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x, \text{anz}\,(1)) \text{ ə } ((x, \mathfrak{e}) \text{ ə } \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)})] \rightarrow$$

$$\neg\ (x, \text{anz}\,(1)) \text{ ə } ((x, \text{anz}\,(1)) \text{ ə } \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)})$$

$$\times$$

$$\vdash (x, \text{anz}\,(1)) \text{ ə } ((x, \text{anz}\,(1)) \text{ ə } \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)}) \rightarrow$$

$$\neg\ \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x, \text{anz}\,(1)) \text{ ə } ((x, \mathfrak{e}) \text{ ə } \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)})] \qquad (\mu$$

(140) :: ————————————

$$\vdash \neg\ \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x, \text{anz}\,(1)) \text{ ə } ((x, \mathfrak{e}) \text{ ə } \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)})] \qquad (\nu$$

(λ) : ————————————

$$\vdash x \text{ ə } (y \text{ ə } \leq_q) \rightarrow \neg\ \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x, \text{anz}\,(1)) \text{ ə } ((y, \mathfrak{e}) \text{ ə } \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)})] \qquad (319$$

$$\times$$

$$\vdash \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (x, \text{anz}\,(1)) \text{ ə } ((y, \mathfrak{e}) \text{ ə } \leq_{(q \otimes \text{nf}\,)})] \rightarrow \neg\ x \text{ ə } (y \text{ ə } \leq_q) \qquad (320$$

(318) :: – – – – – – – –

$$\vdash \neg\ \text{anz}\,(0) \text{ ə } (\text{anz}\,(\text{zw}\,^{q}_{(x,y)}) \text{ ə } \leq_{\text{nf}}\,) \rightarrow$$

$$(\text{funk}\,(q) \rightarrow (\neg\ y \text{ ə } (y \text{ ə } <_q) \rightarrow \neg\ x \text{ ə } (y \text{ ə } \leq_q))) \qquad (\alpha$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ (\text{funk}\,(q) \to (\neg\ y \ni (y \ni\ <_q) \to \neg\ x \ni (y \ni\ \leq_q))) \to$$

$$\text{anz}\,(0) \ni (\text{anz}\,(\text{zw}\,^q_{(x,y)}) \ni\ \leq_{\text{nf}}) \qquad (321$$

§ 170. *Zerlegung.*

Es soll nun ■→das Vorderglied←■[182] [#151] in (321) weggeschafft werden. Wir beweisen dazu den Satz

$$‚ \vdash (\text{funk}\,(q) \to (\neg\ y \ni (y \ni\ <_q) \to \neg\ x \ni (y \ni\ \leq_q))) \to \text{anz}\,(\text{zw}\,^q_{(x,y)}) = \text{anz}\,(0)\ ‘ \qquad (\alpha$$

mit (97), (271), (265) und dem Satze

$$‚ \vdash d \ni (\text{zw}\,^q_{(x,y)}) \to x \ni (y \ni\ \leq_q)\ ‘ \qquad (\beta$$

der aus (269) und (270) mit dem Satze

$$‚ \vdash d \ni (y \ni\ \leq_q) \to (x \ni (d \ni\ \leq_q) \to x \ni (y \ni\ \leq_q))\ ‘ \qquad (\gamma$$

folgt, den wir mit (144) beweisen.

S.219 |

§ 171. *Aufbau.*

$$137 \quad \vdash x \ni (d \ni\ \leq_q) \to (d \ni (a \ni q) \to x \ni (a \ni\ \leq_q))$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{d}\, [x \ni (\mathfrak{d} \ni\ \leq_q) \to \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \to x \ni (\mathfrak{a} \ni\ \leq_q)]] \qquad (\alpha$$

$$(144) : \ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash d \ni (y \ni\ \leq_q) \to (x \ni (d \ni\ \leq_q) \to x \ni (y \ni\ \leq_q)) \qquad (322$$

$$(269, 270) :: \ = = = = = = = =$$

$$\vdash d \ni (\text{zw}\,^q_{(x,y)}) \to x \ni (y \ni\ \leq_q) \qquad (323$$

$$(Ie) : \ - - - - - - - -$$

$$\vdash \neg\ y \ni (y \ni\ <_q) \to (d \ni (\text{zw}\,^q_{(x,y)}) \to$$

$$\neg\ (\neg\ y \ni (y \ni\ <_q) \to \neg\ x \ni (y \ni\ \leq_q))) \qquad (\alpha$$

$$(271) :: \ - - - - - - - -$$

$$\vdash d \ni (\text{zw}\,^q_{(x,y)}) \to \neg\ (\neg\ y \ni (y \ni\ <_q) \to \neg\ x \ni (y \ni\ \leq_q)) \qquad (\beta$$

$$(If) : \ - - - - - - - -$$

[182] das Unterglied

[#151] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (d \mathbin{\text{ə}} (\text{zw}\,^{q}_{(x,y)}) \rightarrow$

$\neg\ (\text{funk}\,(q) \rightarrow (\neg\ y \mathbin{\text{ə}} (y \mathbin{\text{ə}}\ <_q) \rightarrow \neg\ x \mathbin{\text{ə}} (y \mathbin{\text{ə}}\ \leq_q))))$ $(\gamma$

$(265) ::$ — — — — — — — —

$\vdash d \mathbin{\text{ə}} (\text{zw}\,^{q}_{(x,y)}) \rightarrow$

$\neg\ (\text{funk}\,(q) \rightarrow (\neg\ y \mathbin{\text{ə}} (y \mathbin{\text{ə}}\ <_q) \rightarrow \neg\ x \mathbin{\text{ə}} (y \mathbin{\text{ə}}\ \leq_q)))$ $(\delta$

$\times$

$\vdash (\text{funk}\,(q) \rightarrow (\neg\ y \mathbin{\text{ə}} (y \mathbin{\text{ə}}\ <_q) \rightarrow \neg\ x \mathbin{\text{ə}} (y \mathbin{\text{ə}}\ \leq_q))) \rightarrow$

$\neg\ d \mathbin{\text{ə}} (\text{zw}\,^{q}_{(x,y)})$ (324

$\smile$

$\vdash (\text{funk}\,(q) \rightarrow (\neg\ y \mathbin{\text{ə}} (y \mathbin{\text{ə}}\ <_q) \rightarrow \neg\ x \mathbin{\text{ə}} (y \mathbin{\text{ə}}\ \leq_q))) \rightarrow$

$\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} (\text{zw}\,^{q}_{(x,y)})]$ $(\alpha$

$(97) :$ — — — — — — — —

$\vdash (\text{funk}\,(q) \rightarrow (\neg\ y \mathbin{\text{ə}} (y \mathbin{\text{ə}}\ <_q) \rightarrow \neg\ x \mathbin{\text{ə}} (y \mathbin{\text{ə}}\ \leq_q))) \rightarrow$

$\text{anz}\,(\text{zw}\,^{q}_{(x,y)}) = \text{anz}\,(0)$ $(\beta$

$(139) :$ — — — — — — — —

$\vdash (\text{funk}\,(q) \rightarrow (\neg\ y \mathbin{\text{ə}} (y \mathbin{\text{ə}}\ <_q) \rightarrow \neg\ x \mathbin{\text{ə}} (y \mathbin{\text{ə}}\ \leq_q))) \rightarrow$

$\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}\,(\text{zw}\,^{q}_{(x,y)}) \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{\text{nf}})$ $(\gamma$

$(321) :$ ·—·—·—·—·—·—·—·

$\vdash \text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}\,(\text{zw}\,^{q}_{(x,y)}) \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{\text{nf}})$ (325

$(IIIa) :$ ————————

$\vdash A = (x,y) \rightarrow \text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}\,(\text{zw}\,^{q}_{A}) \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{\text{nf}})$ $(\alpha$

$\times$

$\vdash \neg\ \text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}\,(\text{zw}\,^{q}_{A}) \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow \neg\ A = (x,y)$ $(\beta$

$(Ia) :$ — — — — — — — —

$\vdash \neg\ \text{anz}\,(0) \ni (\text{anz}\,(\text{zw}\,^{q}_{A}) \ni\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow$

$(A = (x,y) \rightarrow (\neg\ y \ni (y \ni\ <_q) \rightarrow$

$(x \ni (d \ni\ \leq_q) \rightarrow \neg\ d \ni (y \ni\ \leq_q))))$ $(\gamma$

$\smile$

$\vdash \neg\ \text{anz}\,(0) \ni (\text{anz}\,(\text{zw}\,^{q}_{A}) \ni\ \leq_q) \rightarrow$

$\forall \mathfrak{n}\, \forall \mathfrak{m}\, [A = (\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \rightarrow (\neg\ \mathfrak{n} \ni (\mathfrak{n} \ni\ <_q) \rightarrow$

$(\mathfrak{m} \ni (d \ni\ \leq_q) \rightarrow \neg\ d \ni (\mathfrak{n} \ni\ \leq_q)))]$ $(\delta$

$(266):$ $-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$

$\vdash \neg\ \text{anz}\,(0) \ni (\text{anz}\,(\text{zw}\,^{q}_{A}) \ni\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow \neg\ d \ni (\text{zw}\,^{q}_{A})$ $(\varepsilon$

$\smile$

$\vdash \neg\ \text{anz}\,(0) \ni (\text{anz}\,(\text{zw}\,^{q}_{A}) \ni\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\, [\neg\ \mathfrak{a} \ni (\text{zw}\,^{q}_{A})]$ $(\zeta$

$(97):$ $-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$

S.224

$\vdash \neg\ \text{anz}\,(0) \ni (\text{anz}\,(\text{zw}\,^{q}_{A}) \ni\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow \text{anz}\,(\text{zw}\,^{q}_{A}) = \text{anz}\,(0)$ $(\eta$

$\times$

$\vdash \neg\ \text{anz}\,(\text{zw}\,^{q}_{A}) = \text{anz}\,(0) \rightarrow \text{anz}\,(0) \ni (\text{anz}\,(\text{zw}\,^{q}_{A}) \ni\ \leq_{\text{nf}})$ $(\vartheta$

$(139):$ $\cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot$

$\vdash \text{anz}\,(0) \ni (\text{anz}\,(\text{zw}\,^{q}_{A}) \ni\ \leq_{\text{nf}})$ (326

$(IIIb):$ ———————

$\vdash \neg\ \text{anz}\,(0) \ni (\text{anz}\,(u) \ni\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow \neg\ u = \text{zw}\,^{q}_{A}$ $(\alpha$

$\smile$

$\vdash \neg\ \text{anz}\,(0) \ni (\text{anz}\,(u) \ni\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow \forall \mathfrak{A}\, \forall \mathfrak{q}\, [\neg\ u = \text{zw}\,^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}]$ $(\beta$

$\times$

$\vdash \neg\ \forall \mathfrak{A}\, \forall \mathfrak{q}\, [\neg\ u = \text{zw}\,^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \rightarrow \text{anz}\,(0) \ni (\text{anz}\,(u) \ni\ \leq_{\text{nf}})$ (327

Λ. Beweis des Satzes

‚$\vdash \text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}\,(u) \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}) \to \neg\ \forall\mathfrak{A}\,\forall\mathfrak{q}\,[\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(-\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u) = \text{zw}\,{}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}]$‘

§ 172. *Zerlegung.*

Wir versuchen den zu beweisenden Satz in Worten so wiederzugeben:

„Wenn die Anzahl eines Begriffes endlich ist, so lassen sich die unter ihn fallenden Gegenstände in eine einfache Reihe ordnen, die von einem bestimmten Gegenstande bis zu einem bestimmten Gegenstande läuft.“

Dieser Ausdruck ist insofern unvollkommen, als danach der Satz für die Anzahl Null nicht zu gelten scheint. Wir können aber eine reihende Beziehung so annehmen, dass ihrer von Δ bis Θ laufenden Reihe kein Gegenstand angehört, indem das niemals eintritt, was die Definition (P) fordert, damit ein Gegenstand dieser von Δ bis Θ laufenden Reihe angehöre.

Wir haben nach (314)

$$‚\ \vdash \text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}\,(u) \mathbin{\text{ə}} \leq_{\text{nf}}) \to \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{\text{nf}}_{(\text{anz}\,(1),\text{anz}\,(u))})\ ‘$$

Danach giebt es eine Beziehung, die den $((\text{anz}\,(1), \text{zw}\,{}^{\text{nf}}_{\text{anz}\,(u)}))$-Begriff in den u-Begriff und deren Umkehrung diesen in jenen abbildet. Es sei dies die p-Beziehung. Wir zeigen nun, dass wir die $(p \circ \text{nf} \circ p^{-1})$-Beziehung als reihende nehmen können. Es ist zunächst zu zeigen, dass jeder unter den u-Begriff fallende Gegenstand der von x bis y laufenden $(p \circ \text{nf} \circ p^{-1})$-Reihe angehört, wo $\text{anz}\,(1)$ zu x und $\text{anz}\,(u)$ zu y in der p-Beziehung steht. Wir schreiben allgemeiner statt ‚$\text{anz}\,(1)$‘ ‚m‘, statt ‚$\text{anz}\,(u)$‘ ‚n‘ und statt ‚nf‘ ‚q‘ und beweisen den Satz

$$‚\ \vdash n \mathbin{\text{ə}} (y \mathbin{\text{ə}} p) \to (u \mathbin{\text{ə}} (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \mathbin{\text{ə}} p^{-1} :\twoheadrightarrow) \to (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} p :\twoheadrightarrow) \to$$
$$(m \mathbin{\text{ə}} (x \mathbin{\text{ə}} p) \to (c \mathbin{\text{ə}} u \to c \mathbin{\text{ə}} (\text{zw}\,{}^{(p\circ q\circ p^{-1})}_{(x,y)})))))\ ‘ \qquad (\alpha$$

der mit (8) aus

$$‚\ \vdash n \mathbin{\text{ə}} (y \mathbin{\text{ə}} p) \to (\text{funk}\,(p^{-1}) \to (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} p :\twoheadrightarrow) \to (m \mathbin{\text{ə}} (x \mathbin{\text{ə}} p) \to$$
$$(a \mathbin{\text{ə}} (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)}) \to (c \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} p^{-1}) \to c \mathbin{\text{ə}} (\text{zw}\,{}^{(p\circ q\circ p^{-1})}_{(x,y)}))))))\ ‘ \qquad (\beta$$

| folgt. Folgendes Bild erleichtere das Verständniss: S.220

$$\begin{array}{rl} & n \xrightarrow[p]{} y \\ \leq_q\uparrow & \\ & a \xrightarrow[p]{} c \\ \leq_q\uparrow & \\ & m \xrightarrow[p]{} x \end{array}$$

Um (β) zu beweisen, brauchen wir unter andern folgende Sätze

$$‚\ \vdash \text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} p :\twoheadrightarrow) \to (m \mathbin{\text{ə}} (x \mathbin{\text{ə}} p) \to (a \mathbin{\text{ə}} (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)}) \to$$
$$(a \mathbin{\text{ə}} (c \mathbin{\text{ə}} p) \to x \mathbin{\text{ə}} (c \mathbin{\text{ə}} \leq_{(p\circ q\circ p^{-1})}))))\ ‘ \qquad (\gamma$$

und

$$‚\ \vdash \text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} p :\twoheadrightarrow) \to (a \mathbin{\text{ə}} (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)}) \to (a \mathbin{\text{ə}} (c \mathbin{\text{ə}} p) \to$$
$$(n \mathbin{\text{ə}} (y \mathbin{\text{ə}} p) \to c \mathbin{\text{ə}} (y \mathbin{\text{ə}} \leq_{(p\circ q\circ p^{-1})}))))\ ‘ \qquad (\delta$$

die wir aus

$$‚\ \vdash s \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} \leq_q) \to (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} p :\twoheadrightarrow) \to (b \mathbin{\text{ə}} (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)}) \to$$
$$(m \mathbin{\text{ə}} (s \mathbin{\text{ə}} \leq_q) \to (s \mathbin{\text{ə}} (r \mathbin{\text{ə}} p) \to (a \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \leq_q) \to$$
$$(a \mathbin{\text{ə}} (c \mathbin{\text{ə}} p) \to r \mathbin{\text{ə}} (c \mathbin{\text{ə}} \leq_{(p\circ q\circ p^{-1})})))))))\ ‘ \qquad (\varepsilon$$

ableiten, indem wir einmal r mit x, s mit m und b mit a, das andere Mal c mit y, a mit n und b mit s zusammenfallen lassen und dann für ‚s' ‚a' und für ‚r' ‚c' schreiben. Man vergleiche hierzu folgendes Bild.

$$\begin{array}{ll} & n \underset{p}{\longrightarrow} y \\ \leq_q\uparrow & \\ & a \underset{p}{\longrightarrow} c \\ \leq_q\uparrow & \\ & s \underset{p}{\longrightarrow} r \\ \leq_q\uparrow & \\ & m \underset{p}{\longrightarrow} x \end{array}$$

Wir gebrauchen, um (ε) abzuleiten, (152), indem wir die Functionsmarke ‚$F(\xi)$' durch

$$‚\, \xi \ni (n \ni \ \leq_q) \rightarrow \forall \mathfrak{e}\, [\xi \ni (\mathfrak{e} \ni p) \rightarrow r \ni (\mathfrak{e} \ni \ \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})]\, '$$

ersetzen. Dabei werden wie im Beweise von (186) die Sätze (183) und (185) angewendet, wodurch ■→das Vorderglied←■[183] [#152]

$$‚\, \text{—zw}^{\,q}_{\,(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow)\, '$$

eingeführt wird.

§ 173. *Aufbau.*

$$\begin{array}{rl}
183 & \vdash \text{zw}^{\,q}_{\,(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \rightarrow (\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ d \ni (\mathfrak{a} \ni p)] \rightarrow \\
& \neg\ d \ni (\text{zw}^{\,q}_{\,(m,n)})) \\
(273): & - - - - - - - - \\
& \vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{zw}^{\,q}_{\,(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \rightarrow (\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ d \ni (\mathfrak{a} \ni p)] \rightarrow \\
& (\neg\ n \ni (n \ni\ <_q) \rightarrow (m \ni (d \ni\ \leq_q) \rightarrow \neg\ d \ni (n \ni\ \leq_q))))) \qquad (\alpha \\
(271, 265) :: & = = = = = = = = \\
& \vdash \text{zw}^{\,q}_{\,(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \rightarrow (\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ d \ni (\mathfrak{a} \ni p)] \rightarrow \\
& (b \ni (\text{zw}^{\,q}_{\,(m,n)}) \rightarrow (m \ni (d \ni\ \leq_q) \rightarrow \neg\ d \ni (n \ni\ \leq_q)))) \qquad (\beta \\
(185) :: & - - - - - - - -
\end{array}$$

[183] das Unterglied

[#152] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

$$\vdash \mathrm{zw}^{q}_{(m,n)}\ \text{ə}\ (u\ \text{ə}\ p :\twoheadrightarrow\ ) \to$$
$$(\forall \mathfrak{e}\ [d\ \text{ə}\ (\mathfrak{e}\ \text{ə}\ p) \to r\ \text{ə}\ (\mathfrak{e}\ \text{ə}\ \leq_{(p\circ q\circ p^{-1})})] \to$$
$$(\neg\ r\ \text{ə}\ (c\ \text{ə}\ \leq_{(p\circ q\circ p^{-1})}) \to$$
$$(d\ \text{ə}\ (a\ \text{ə}\ q) \to (a\ \text{ə}\ (c\ \text{ə}\ p) \to (b\ \text{ə}\ (\mathrm{zw}^{q}_{(m,n)}) \to$$
$$(m\ \text{ə}\ (d\ \text{ə}\ \leq_q) \to \neg\ d\ \text{ə}\ (n\ \text{ə}\ \leq_q))))))) \qquad (\gamma$$

$$\times$$

S.226

$$\vdash \mathrm{zw}^{q}_{(m,n)}\ \text{ə}\ (u\ \text{ə}\ p :\twoheadrightarrow\ ) \to$$
$$(\forall \mathfrak{e}\ [d\ \text{ə}\ (\mathfrak{e}\ \text{ə}\ p) \to r\ \text{ə}\ (\mathfrak{e}\ \text{ə}\ \leq_{(p\circ q\circ p^{-1})})] \to$$
$$(d\ \text{ə}\ (n\ \text{ə}\ \leq_q) \to (d\ \text{ə}\ (a\ \text{ə}\ q) \to (a\ \text{ə}\ (c\ \text{ə}\ p) \to$$
$$(b\ \text{ə}\ (\mathrm{zw}^{q}_{(m,n)}) \to (m\ \text{ə}\ (d\ \text{ə}\ \leq_q) \to$$
$$r\ \text{ə}\ (c\ \text{ə}\ \leq_{(p\circ q\circ p^{-1})}))))))) \qquad (\delta$$
$$(I) :: \ - - - - - - - -$$
$$\vdash \mathrm{zw}^{q}_{(m,n)}\ \text{ə}\ (u\ \text{ə}\ p :\twoheadrightarrow\ ) \to$$
$$((d\ \text{ə}\ (n\ \text{ə}\ \leq_q) \to$$
$$\forall \mathfrak{e}\ [d\ \text{ə}\ (\mathfrak{e}\ \text{ə}\ p) \to r\ \text{ə}\ (\mathfrak{e}\ \text{ə}\ \leq_{(p\circ q\circ p^{-1})})]) \to$$
$$(d\ \text{ə}\ (n\ \text{ə}\ \leq_q) \to (d\ \text{ə}\ (a\ \text{ə}\ q) \to (a\ \text{ə}\ (c\ \text{ə}\ p) \to$$
$$(b\ \text{ə}\ (\mathrm{zw}^{q}_{(m,n)}) \to (m\ \text{ə}\ (d\ \text{ə}\ \leq_q) \to$$
$$r\ \text{ə}\ (c\ \text{ə}\ \leq_{(p\circ q\circ p^{-1})}))))))) \qquad (\varepsilon$$
$$(285) :: \ - - - - - - - -$$

$$\vdash \mathrm{zw}^{\,q}_{(m,n)} \text{ ə } (u \text{ ə } p :\twoheadrightarrow) \rightarrow (b \text{ ə } (\mathrm{zw}^{\,q}_{(m,n)}) \rightarrow$$

$$((d \text{ ə } (n \text{ ə } \leq_q) \rightarrow$$

$$\forall \mathfrak{e}\,[d \text{ ə } (\mathfrak{e} \text{ ə } p) \rightarrow r \text{ ə } (\mathfrak{e} \text{ ə } \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})\ \#153})]) \rightarrow$$
$$(m \text{ ə } (d \text{ ə } \leq_q) \rightarrow (d \text{ ə } (a \text{ ə } q) \rightarrow (a \text{ ə } (n \text{ ə } \leq_q) \rightarrow$$
$$(a \text{ ə } (c \text{ ə } p) \rightarrow r \text{ ə } (c \text{ ə } \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}))))))) \qquad (\zeta$$

$$(322) :: \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ -$$

$$\vdash \mathrm{zw}^{\,q}_{(m,n)} \text{ ə } (u \text{ ə } p :\twoheadrightarrow) \rightarrow (b \text{ ə } (\mathrm{zw}^{\,q}_{(m,n)}) \rightarrow (m \text{ ə } (s \text{ ə } \leq_q) \rightarrow$$
$$((d \text{ ə } (n \text{ ə } \leq_q) \rightarrow$$
$$\forall \mathfrak{e}\,[d \text{ ə } (\mathfrak{e} \text{ ə } p) \rightarrow r \text{ ə } (\mathfrak{e} \text{ ə } \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})]) \rightarrow$$
$$(s \text{ ə } (d \text{ ə } \leq_q) \rightarrow (d \text{ ə } (a \text{ ə } q) \rightarrow (a \text{ ə } (n \text{ ə } \leq_q) \rightarrow$$
$$(a \text{ ə } (c \text{ ə } p) \rightarrow r \text{ ə } (c \text{ ə } \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})))))))) \qquad (\eta$$

$$\smile$$

$$\vdash \mathrm{zw}^{\,q}_{(m,n)} \text{ ə } (u \text{ ə } p :\twoheadrightarrow) \rightarrow (b \text{ ə } (\mathrm{zw}^{\,q}_{(m,n)}) \rightarrow (m \text{ ə } (s \text{ ə } \leq_q) \rightarrow$$

$$\forall \mathfrak{d}\,[(\mathfrak{d} \text{ ə } (n \text{ ə } \leq_q) \rightarrow$$

$$\forall \mathfrak{e}\,[\mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{e} \text{ ə } p) \rightarrow r \text{ ə } (\mathfrak{e} \text{ ə } \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})]) \rightarrow$$

$$(s \text{ ə } (\mathfrak{d} \text{ ə } \leq_q) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \text{ ə } (\mathfrak{a} \text{ ə } q) \rightarrow (\mathfrak{a} \text{ ə } (n \text{ ə } \leq_q) \rightarrow$$

$$\forall \mathfrak{e}\,[\mathfrak{a} \text{ ə } (\mathfrak{e} \text{ ə } p) \rightarrow r \text{ ə } (\mathfrak{e} \text{ ə } \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})]])])) \qquad (\vartheta$$

$$(152) : \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ -$$

$$\vdash s \text{ ə } (a \text{ ə } \leq_q) \rightarrow (\mathrm{zw}^{\,q}_{(m,n)} \text{ ə } (u \text{ ə } p :\twoheadrightarrow) \rightarrow$$

$$(b \text{ ə } (\mathrm{zw}^{\,q}_{(m,n)}) \rightarrow (m \text{ ə } (s \text{ ə } \leq_q) \rightarrow$$

$$((s \text{ ə } (n \text{ ə } \leq_q) \rightarrow$$

$$\forall \mathfrak{e}\,[s \text{ ə } (\mathfrak{e} \text{ ə } p) \rightarrow r \text{ ə } (\mathfrak{e} \text{ ə } \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})]) \rightarrow$$

$$(a \text{ ə } (n \text{ ə } \leq_q) \rightarrow \forall \mathfrak{e}\,[a \text{ ə } (\mathfrak{e} \text{ ə } p) \rightarrow r \text{ ə } (\mathfrak{e} \text{ ə } \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})]))))) \qquad (\iota$$

$$(I) :: \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ -$$

$$\vdash s \ni (a \ni \leq_q) \to (\text{zw}^{\,q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to$$
$$(b \ni (\text{zw}^{\,q}_{(m,n)}) \to (m \ni (s \ni \leq_q) \to$$
$$(\forall \mathfrak{e}\, [s \ni (\mathfrak{e} \ni p) \to r \ni (\mathfrak{e} \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})] \to$$
$$(a \ni (n \ni \leq_q) \to$$
$$\forall \mathfrak{e}\, [a \ni (\mathfrak{e} \ni p) \to r \ni (\mathfrak{e} \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})]))))) \quad (\kappa$$

$(182) ::$ $- - - - - - - -$

$$\vdash s \ni (a \ni \leq_q) \to (\text{zw}^{\,q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to (b \ni (\text{zw}^{\,q}_{(m,n)}) \to$$
$$(m \ni (s \ni \leq_q) \to (s \ni (r \ni p) \to (a \ni (n \ni \leq_q) \to$$
$$\forall \mathfrak{e}\, [a \ni (\mathfrak{e} \ni p) \to r \ni (\mathfrak{e} \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})]))))) \quad (\lambda$$

$(IIa) :$ $- - - - - - - -$

S.227

$$\vdash s \ni (a \ni \leq_q) \to (\text{zw}^{\,q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to (b \ni (\text{zw}^{\,q}_{(m,n)}) \to$$
$$(m \ni (s \ni \leq_q) \to (s \ni (r \ni p) \to (a \ni (n \ni \leq_q) \to$$
$$(a \ni (c \ni p) \to r \ni (c \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}))))))) \quad (328$$

———— • ————

140 $\vdash m \ni (m \ni \leq_q)$

$(328) :$ ————————

$$\vdash m \ni (a \ni \leq_q) \to (\text{zw}^{\,q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to$$
$$(a \ni (\text{zw}^{\,q}_{(m,n)}) \to (m \ni (x \ni p) \to (a \ni (n \ni \leq_q) \to$$
$$(a \ni (c \ni p) \to x \ni (c \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})))))) \quad (\alpha$$

$(269, 270) ::$ $= = = = = = = =$

$$\vdash \text{zw}^{\,q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to (m \ni (x \ni p) \to (a \ni (\text{zw}^{\,q}_{(m,n)}) \to$$
$$(a \ni (c \ni p) \to x \ni (c \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})))) \quad (329$$

———— • ————

140 $\vdash n \ni (n \ni \leq_q)$

$(328) :$ ————————

$$\vdash a \ni (n \ni \leq_q) \to (\text{zw}^{\,q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to (a \ni (\text{zw}^{\,q}_{(m,n)}) \to$$
$$(m \ni (a \ni \leq_q) \to (a \ni (c \ni p) \to$$
$$(n \ni (y \ni p) \to c \ni (y \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})))))) \quad (\alpha$$

$(269, 270) ::$ $= = = = = = = =$

$$\vdash \text{zw}^{\,q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to (a \ni (\text{zw}^{\,q}_{(m,n)}) \to (a \ni (c \ni p) \to$$
$$(n \ni (y \ni p) \to c \ni (y \ni \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})})))) \quad (\beta$$

$(274) :$ $- - - - - - - -$

$$\vdash \text{funk}\,(p \circ q \circ p^{-1}) \to (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)}\, ə\,(u\, ə\, p :\twoheadrightarrow\,) \to (a\, ə\,(\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)}) \to$$
$$(a\, ə\,(c\, ə\, p) \to (n\, ə\,(y\, ə\, p) \to (\neg\ y\, ə\,(y\, ə\ <_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \to$$
$$(x\, ə\,(c\, ə\ \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \to c\, ə\,(\text{zw}\,{}^{(p \circ q \circ p^{-1})}_{(x,y)})))))))) \qquad (\gamma$$

$$(329) :: \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ -$$

$$\vdash \text{funk}\,(p \circ q \circ p^{-1}) \to (n\, ə\,(y\, ə\, p) \to$$
$$(\neg\ y\, ə\,(y\, ə\ <_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \to (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)}\, ə\,(u\, ə\, p :\twoheadrightarrow\,) \to$$
$$(m\, ə\,(x\, ə\, p) \to (a\, ə\,(\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)}) \to (a\, ə\,(c\, ə\, p) \to$$
$$c\, ə\,(\text{zw}\,{}^{(p \circ q \circ p^{-1})}_{(x,y)}))))))) \qquad (330$$

§ 174. *Zerlegung.*

Um■→das Vorderglied←■[184] [#154]

$$,\neg\ y\, ə\,(y\, ə\ <_{(p \circ q \circ p^{-1})})\,‘$$

wegzuschaffen, beweisen wir den Satz

$$,\ \vdash n\, ə\,(y\, ə\, p) \to (m\, ə\,(x\, ə\, p) \to (x\, ə\,(y\, ə\ <_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \to$$
$$(\text{funk}\,(p^{-1}) \to m\, ə\,(n\, ə\ <_{q}))))\,‘ \qquad (\alpha$$

den wir mit (177) auf

$$,\ \vdash n\, ə\,(y\, ə\, p) \to (\text{funk}\,(p^{-1}) \to (m\, ə\,(x\, ə\, p) \to (x\, ə\,(y\, ə\,(p \circ t \circ p^{-1})) \to$$
$$m\, ə\,(n\, ə\, t))))\,‘ \qquad (\beta$$

zurückführen. Wir zeigen, dass es Gegenstände s und a giebt der Art, dass s zu x und a zu y in der p-Beziehung stehen, und dass a auf s in der q-Reihe folgt. Aus der Eindeutigkeit der
S.223 umgekehrten p-Beziehung folgt dann, dass s mit $m\ |$ und a mit n zusammenfällt, dass also n auf m in der q-Reihe folgt. Auch ■→das Vorderglied←■[185] [#155]

$$, \text{—}\, \text{funk}\,(p \circ q \circ p^{-1})\,‘$$

ist zu entfernen. Das geschieht leicht mit (17).

§ 175. *Aufbau.*

$$\text{IIIa} \quad \vdash s = m \to (\neg\ m\, ə\,(n\, ə\, t) \to \neg\ s\, ə\,(n\, ə\, t))$$

$$(78) :: \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ -$$

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (x\, ə\,(s\, ə\, p^{-1}) \to (m\, ə\,(x\, ə\, p) \to (\neg\ m\, ə\,(n\, ə\, t) \to$$
$$\neg\ s\, ə\,(n\, ə\, t)))) \qquad (\alpha$$

$\times$

---

[184] das Unterglied
[185] das Unterglied

[#154] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!
[#155] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (m \ni (x \ni p) \to (\neg\ m \ni (n \ni t) \to$$

$$(s \ni (n \ni t) \to \neg\ x \ni (s \ni p^{-1})))) \qquad (\beta$$

$$\smile$$

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (m \ni (x \ni p) \to (\neg\ m \ni (n \ni t) \to$$

$$\forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (n \ni t) \to \neg\ x \ni (\mathfrak{r} \ni p^{-1})])) \qquad (\gamma$$

$$(15): - - - - - - - -$$

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (m \ni (x \ni p) \to (\neg\ m \ni (n \ni t) \to$$

$$\neg\ x \ni (n \ni (t \circ p^{-1})))) \qquad (\delta$$

$$(IIIa): \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash a = n \to (\text{funk}\,(p^{-1}) \to (m \ni (x \ni p) \to (\neg\ m \ni (n \ni t) \to$$

$$\neg\ x \ni (a \ni (t \circ p^{-1}))))) \qquad (\varepsilon$$

$$(79) :: - - - - - - - -$$

$$\vdash n \ni (y \ni p) \to (\text{funk}\,(p^{-1}) \to (m \ni (x \ni p) \to (\neg\ m \ni (n \ni t) \to$$

$$(a \ni (y \ni p) \to \neg\ x \ni (a \ni (t \circ p^{-1})))))) \qquad (\zeta$$

$$\smile$$

$$\vdash n \ni (y \ni p) \to (\text{funk}\,(p^{-1}) \to (m \ni (x \ni p) \to (\neg\ m \ni (n \ni t) \to$$

$$\forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (y \ni p) \to \neg\ x \ni (\mathfrak{r} \ni (t \circ p^{-1}))]))) \qquad (\eta$$

$$(15): - - - - - - - -$$

$$\vdash n \ni (y \ni p) \to (\text{funk}\,(p^{-1}) \to (m \ni (x \ni p) \to (\neg\ m \ni (n \ni t) \to$$

$$\neg\ x \ni (y \ni (p \circ t \circ p^{-1}))))) \qquad (\vartheta$$

$$\times$$

$$\vdash n \ni (y \ni p) \to (\text{funk}\,(p^{-1}) \to (m \ni (x \ni p) \to$$

$$(x \ni (y \ni (p \circ t \circ p^{-1})) \to m \ni (n \ni t)))) \qquad (331$$

———————— • ————————

$$177 \quad \vdash x \ni (y \ni\ <_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \to (\text{funk}\,(p^{-1}) \to x \ni (y \ni (p \circ\ <_q \circ p^{-1})))$$

$$(331): - - - - - - - -$$

$$\vdash n \ni (y \ni p) \to (m \ni (x \ni p) \to (x \ni (y \ni\ <_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \to$$

$$(\text{funk}\,(p^{-1}) \to m \ni (n \ni\ <_q)))) \qquad (332$$

332 $\vdash n \ni (y \ni p) \to (y \ni (y \ni \ <_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \to$

$(\text{funk}\,(p^{-1}) \to n \ni (n \ni \ <_q)))$

$\times$

S.229

$\vdash n \ni (y \ni p) \to (\neg\ n \ni (n \ni \ <_q) \to$

$(\text{funk}\,(p^{-1}) \to \neg\ y \ni (y \ni \ <_{(p \circ q \circ p^{-1})})))$ (α

$(271) ::$ – – – – – – – –

$\vdash n \ni (y \ni p) \to (a \ni (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)}) \to$

$(\text{funk}\,(p^{-1}) \to \neg\ y \ni (y \ni \ <_{(p \circ q \circ p^{-1})})))$ (333

17 $\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (\text{funk}\,(q) \to \text{funk}\,(q \circ p^{-1}))$

$(17) :$ – – – – – – – –

$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (\text{funk}\,(q) \to (\text{funk}\,(p) \to \text{funk}\,(p \circ q \circ p^{-1})))$ (α

$(265, 18) ::$ = = = = = = = =

$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (a \ni (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)}) \to (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to$

$\text{funk}\,(p \circ q \circ p^{-1})))$ (β

$(330) :$ – – – – – – – –

$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (n \ni (y \ni p) \to (\neg\ y \ni (y \ni \ <_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \to$

$(\text{zw}\,^{q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow) \to (m \ni (x \ni p) \to (a \ni (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)}) \to$

$(a \ni (c \ni p) \to c \ni (\text{zw}\,^{(p \circ q \circ p^{-1})}_{(x,y)})))))))$ (γ

$(23, 333) ::$ = = = = = = = =

$$\vdash n \mathrel{\text{ə}} (y \mathrel{\text{ə}} p) \rightarrow (\text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow$$
$$(\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \mathrel{\text{ə}} (u \mathrel{\text{ə}} p :\twoheadrightarrow) \rightarrow (m \mathrel{\text{ə}} (x \mathrel{\text{ə}} p) \rightarrow (a \mathrel{\text{ə}} (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)}) \rightarrow$$
$$(c \mathrel{\text{ə}} (a \mathrel{\text{ə}} p^{-1}) \rightarrow c \mathrel{\text{ə}} (\text{zw}\,{}^{(p \circ q \circ p^{-1})}_{(x,y)}))))))) \qquad (\delta$$

$$\times$$

$$\vdash n \mathrel{\text{ə}} (y \mathrel{\text{ə}} p) \rightarrow (\text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \mathrel{\text{ə}} (u \mathrel{\text{ə}} p :\twoheadrightarrow) \rightarrow$$
$$(m \mathrel{\text{ə}} (x \mathrel{\text{ə}} p) \rightarrow (\neg\ c \mathrel{\text{ə}} (\text{zw}\,{}^{(p \circ q \circ p^{-1})}_{(x,y)}) \rightarrow$$
$$(c \mathrel{\text{ə}} (a \mathrel{\text{ə}} p^{-1}) \rightarrow \neg\ a \mathrel{\text{ə}} (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)})))))) \qquad (\varepsilon$$

$$\smile$$

$$\vdash n \mathrel{\text{ə}} (y \mathrel{\text{ə}} p) \rightarrow (\text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \mathrel{\text{ə}} (u \mathrel{\text{ə}} p :\twoheadrightarrow) \rightarrow$$
$$(m \mathrel{\text{ə}} (x \mathrel{\text{ə}} p) \rightarrow (\neg\ c \mathrel{\text{ə}} (\text{zw}\,{}^{(p \circ q \circ p^{-1})}_{(x,y)}) \rightarrow$$
$$\forall \mathfrak{a}\, [c \mathrel{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} p^{-1}) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \mathrel{\text{ə}} (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)})])))) \qquad (\zeta$$

$(8):$ — — — — — — — —

$$\vdash u \mathrel{\text{ə}} (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \mathrel{\text{ə}} p^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow (n \mathrel{\text{ə}} (y \mathrel{\text{ə}} p) \rightarrow (\text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow$$
$$(\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \mathrel{\text{ə}} (u \mathrel{\text{ə}} p :\twoheadrightarrow) \rightarrow (m \mathrel{\text{ə}} (x \mathrel{\text{ə}} p) \rightarrow$$
$$(\neg\ c \mathrel{\text{ə}} (\text{zw}\,{}^{(p \circ q \circ p^{-1})}_{(x,y)}) \rightarrow \neg\ c \mathrel{\text{ə}} u))))) \qquad (\eta$$

$(18) ::$ — — — — — — — —

$$\vdash n \mathrel{\text{ə}} (y \mathrel{\text{ə}} p) \rightarrow (u \mathrel{\text{ə}} (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \mathrel{\text{ə}} p^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow$$
$$(\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \mathrel{\text{ə}} (u \mathrel{\text{ə}} p :\twoheadrightarrow) \rightarrow (m \mathrel{\text{ə}} (x \mathrel{\text{ə}} p) \rightarrow$$
$$(\neg\ c \mathrel{\text{ə}} (\text{zw}\,{}^{(p \circ q \circ p^{-1})}_{(x,y)}) \rightarrow \neg\ c \mathrel{\text{ə}} u)))) \qquad (\vartheta$$

$$\times$$

$$\vdash n \mathrel{\text{ə}} (y \mathrel{\text{ə}} p) \rightarrow (u \mathrel{\text{ə}} (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \mathrel{\text{ə}} p^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow$$
$$(\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \mathrel{\text{ə}} (u \mathrel{\text{ə}} p :\twoheadrightarrow) \rightarrow (m \mathrel{\text{ə}} (x \mathrel{\text{ə}} p) \rightarrow$$
$$(c \mathrel{\text{ə}} u \rightarrow c \mathrel{\text{ə}} (\text{zw}\,{}^{(p \circ q \circ p^{-1})}_{(x,y)}))))) \qquad (334$$

§ 176. *Zerlegung.*

S.225 Wir haben nun den Satz (α) des § 172 bewiesen. Es bleibt uns noch der Satz |

$$\text{,}\ \vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{zw}^{\,q}_{\,(m,n)}\ ə\,(u\,ə\,p :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (\neg\ n\,ə\,(n\,ə\ <_q) \rightarrow (n\,ə\,(y\,ə\,p) \rightarrow$$
$$(u\,ə\,(\text{zw}^{\,q}_{\,(m,n)}\ ə\,p^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow (m\,ə\,(x\,ə\,p) \rightarrow$$
$$(c\,ə\,(\text{zw}^{\,(p\circ q\circ p^{-1})}_{\,(x,y)}) \rightarrow c\,ə\,u))))))\text{ ‘} \qquad (\alpha$$

abzuleiten. Dieser ist mit (179) aus den Sätzen

$$\text{,}\ \vdash \forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r}\,ə\,(c\,ə\,p) \rightarrow \neg\ m\,ə\,(\mathfrak{r}\,ə\ \leq_q)] \rightarrow$$
$$(\text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (m\,ə\,(x\,ə\,p) \rightarrow \neg\ x\,ə\,(c\,ə\ \leq_{(p\circ q\circ p^{-1})})))\text{ ‘} \qquad (\beta$$

und

$$\text{,}\ \vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (\forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r}\,ə\,(c\,ə\,p) \rightarrow \neg\ \mathfrak{r}\,ə\,(n\,ə\ \leq_q)] \rightarrow$$
$$(n\,ə\,(y\,ə\,p) \rightarrow \neg\ c\,ə\,(y\,ə\ \leq_{(p\circ q\circ p^{-1})})))\text{ ‘} \qquad (\gamma$$

abzuleiten, indem aus der Eindeutigkeit der p^{-1}-Beziehung geschlossen wird, dass derselbe Gegenstand, der zu c in der p-Beziehung steht, auch der mit m anfangenden und auch der mit n endenden q-Reihe angehört. Statt (β) und (γ) beweisen wir zunächst die Sätze, ■→die bei denselben Vordergliedern als Hinterglieder haben←■[186] [#156]

$$\text{,}\neg\ x\,ə\,(c\,ə\,(p\circ\ \leq_q \circ p^{-1}))\text{ ‘}$$

und

$$\text{,}\neg\ c\,ə\,(y\,ə\,(p\circ\ \leq_q \circ p^{-1}))\text{ ‘}$$

Mit dem Satze (180) gehen wir zu (β) über. Um zu (γ) überzugehen, bedürfen wir des ähnlichen Satzes

$$\text{,}\ \vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (c\,ə\,(y\,ə\ \leq_{(p\circ q\circ p^{-1})}) \rightarrow$$
$$(n\,ə\,(y\,ə\,p) \rightarrow c\,ə\,(y\,ə\,(p\circ\ \leq_q \circ p^{-1}))))\text{ ‘} \qquad (\delta$$

den wir aus (177) ableiten.

§ 177. *Aufbau.*

$$136 \quad \vdash a\,ə\,(n\,ə\ <_q) \rightarrow a\,ə\,(n\,ə\ \leq_q)$$

$$(174) : \ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$

$$\vdash c\,ə\,(a\,ə\,p^{-1}) \rightarrow (a\,ə\,(n\,ə\ <_q) \rightarrow$$
$$(n\,ə\,(y\,ə\,p) \rightarrow c\,ə\,(y\,ə\,(p\circ\ \leq_q \circ p^{-1})))) \qquad (\alpha$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ c\,ə\,(y\,ə\,(p\circ\ \leq_q \circ p^{-1})) \rightarrow (n\,ə\,(y\,ə\,p) \rightarrow$$
$$(a\,ə\,(n\,ə\ <_q) \rightarrow \neg\ c\,ə\,(a\,ə\,p^{-1}))) \qquad (\beta$$

$$\smile$$

[186] die bei denselben Untergliedern als Oberglieder haben

[#156] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

$\vdash \neg\ c \ni (y \ni (p \circ\ \leq_q \circ p^{-1})) \rightarrow (n \ni (y \ni p) \rightarrow$

$\forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \ni (n \ni\ <_q) \rightarrow \neg\ c \ni (\mathfrak{r} \ni p^{-1})])$ (γ

$(15):\ - - - - - - - -$

$\vdash \neg\ c \ni (y \ni (p \circ\ \leq_q \circ p^{-1})) \rightarrow$

$(n \ni (y \ni p) \rightarrow \neg\ c \ni (n \ni (<_q \circ p^{-1})))$ (δ

$\smile$

$\vdash \neg\ c \ni (y \ni (p \circ\ \leq_q \circ p^{-1})) \rightarrow$

$\forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \ni (y \ni p) \rightarrow \neg\ c \ni (\mathfrak{r} \ni (<_q \circ p^{-1}))]$ (ε

$(15):\ - - - - - - - -$

$\vdash \neg\ c \ni (y \ni (p \circ\ \leq_q \circ p^{-1})) \rightarrow \neg\ c \ni (y \ni (p \circ\ <_q \circ p^{-1}))$ (ζ

$\times$

$\vdash c \ni (y \ni (p \circ\ <_q \circ p^{-1})) \rightarrow c \ni (y \ni (p \circ\ \leq_q \circ p^{-1}))$ (η

$(177) ::\ - - - - - - - -$

$\vdash c \ni (y \ni\ <_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \rightarrow (\text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow c \ni (y \ni (p \circ\ \leq_q \circ p^{-1})))$ (ϑ

———————— • ————————

140 $\vdash n \ni (n \ni\ \leq_q)$

$(184):$ ————————————

$\vdash n \ni (y \ni p) \rightarrow y \ni (y \ni (p \circ\ \leq_q \circ p^{-1}))$ (ι

$(IIIc):$ ————————————

S.231

$\vdash y = c \rightarrow (n \ni (y \ni p) \rightarrow c \ni (y \ni (p \circ\ \leq_q \circ p^{-1})))$ (κ

$(130) ::\ - - - - - - - -$

$\vdash c \ni (y \ni\ \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \rightarrow (\neg\ c \ni (y \ni\ <_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \rightarrow$

$(n \ni (y \ni p) \rightarrow c \ni (y \ni (p \circ\ \leq_q \circ p^{-1}))))$ (λ

$(\vartheta):\ \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot$

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (c \ni (y \ni \ \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \to$$
$$(n \ni (y \ni p) \to c \ni (y \ni (p \circ \ \leq_q \circ p^{-1})))) \qquad (335$$

$$\times$$

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (\neg\ c \ni (y \ni (p \circ \ \leq_q \circ p^{-1})) \to$$

$$(n \ni (y \ni p) \to \neg\ c \ni (y \ni \ \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}))) \qquad (336$$

———————— • ————————

23 $\vdash c \ni (a \ni p^{-1}) \to a \ni (c \ni p)$

$(IIa):$ — — — — — — — —

$$\vdash \forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (c \ni p) \to \neg\ \mathfrak{r} \ni (n \ni \ \leq_q)] \to$$

$$(c \ni (a \ni p^{-1}) \to \neg\ a \ni (n \ni \ \leq_q)) \qquad (\alpha$$

$$\times$$

$$\vdash \forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (c \ni p) \to \neg\ \mathfrak{r} \ni (n \ni \ \leq_q)] \to$$

$$(a \ni (n \ni \ \leq_q) \to \neg\ c \ni (a \ni p^{-1})) \qquad (\beta$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (c \ni p) \to \neg\ \mathfrak{r} \ni (n \ni \ \leq_q)] \to$$

$$\forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (n \ni \ \leq_q) \to \neg\ c \ni (\mathfrak{r} \ni p^{-1})] \qquad (\gamma$$

$(15):$ — — — — — — — —

$$\vdash \forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (c \ni p) \to \neg\ \mathfrak{r} \ni (n \ni \ \leq_q)] \to \neg\ c \ni (n \ni (\leq_q \circ p^{-1})) \qquad (\delta$$

$(IIIa):$ ————————————

$$\vdash e = n \to (\forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (c \ni p) \to \neg\ \mathfrak{r} \ni (n \ni \ \leq_q)] \to$$

$$\neg\ c \ni (e \ni (\leq_q \circ p^{-1})^{\#157})) \qquad (\varepsilon$$

$(79)::$ — — — — — — — —

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (n \ni (y \ni p) \to (\forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (c \ni p) \to \neg\ \mathfrak{r} \ni (n \ni \ \leq_q)] \to$$
$$(e \ni (y \ni p) \to \neg\ c \ni (e \ni (\leq_q \circ p^{-1}))))) \qquad (\zeta$$

$$\smile$$

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (n \ni (y \ni p) \to (\forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (c \ni p) \to \neg\ \mathfrak{r} \ni (n \ni \ \leq_q)] \to$$

$$\forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (y \ni p) \to \neg\ c \ni (\mathfrak{r} \ni (\leq_q \circ p^{-1}))]))) \qquad (\eta$$

$(15):$ — — — — — — — —

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (n \ni (y \ni p) \to (\forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (c \ni p) \to \neg\ \mathfrak{r} \ni (n \ni\ \leq_q)] \to$$

$$\neg\ c \ni (y \ni (p \circ\ \leq_q \circ p^{-1})))) \qquad (\vartheta$$

$$(336) :\ - - - - - - - -$$

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (\forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (c \ni p) \to \neg\ \mathfrak{r} \ni (n \ni\ \leq_q)] \to (n \ni (y \ni p) \to$$

$$\neg\ c \ni (y \ni\ \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}))) \qquad (337$$

$$\text{IIIa} \quad \vdash s = m \to (\neg\ m \ni (a \ni\ \leq_q) \to \neg\ s \ni (a \ni\ \leq_q))$$

$$(IIa) ::\ - - - - - - - -$$

$$\vdash s = m \to (\forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (c \ni p) \to \neg\ m \ni (\mathfrak{r} \ni\ \leq_q)] \to (a \ni (c \ni p) \to$$

$$\neg\ s \ni (a \ni\ \leq_q))) \qquad (\alpha$$

$$(78) ::\ - - - - - - - -$$

S.232

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (x \ni (s \ni p^{-1}) \to (m \ni (x \ni p) \to$$

$$(\forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (c \ni p) \to \neg\ m \ni (\mathfrak{r} \ni\ \leq_q)] \to (a \ni (c \ni p) \to$$

$$\neg\ s \ni (a \ni\ \leq_q))))) \qquad (\beta$$

$$\times$$

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (m \ni (x \ni p) \to$$

$$(\forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (c \ni p) \to \neg\ m \ni (\mathfrak{r} \ni\ \leq_q)] \to (a \ni (c \ni p) \to$$

$$(s \ni (a \ni\ \leq_q) \to \neg\ x \ni (s \ni p^{-1}))))) \qquad (\gamma$$

$$\smile$$

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (m \ni (x \ni p) \to$$

$$(\forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (c \ni p) \to \neg\ m \ni (\mathfrak{r} \ni\ \leq_q)] \to (a \ni (c \ni p) \to$$

$$\forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (a \ni\ \leq_q) \to \neg\ x \ni (\mathfrak{r} \ni p^{-1})]))) \qquad (\delta$$

$$(15) :\ - - - - - - - -$$

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (m \ni (x \ni p) \to (\forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (c \ni p) \to \neg\ m \ni (\mathfrak{r} \ni\ \leq_q)] \to$$

$$(a \ni (c \ni p) \to \neg\ x \ni (a \ni (\leq_q \circ p^{-1}))))) \qquad (\varepsilon$$

$$\smile$$

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (m \ni (x \ni p) \to (\forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (c \ni p) \to \neg\ m \ni (\mathfrak{r} \ni\ \leq_q)] \to$$
$$\forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (c \ni p) \to \neg\ x \ni (\mathfrak{r} \ni (\leq_q \circ p^{-1}))]])) \qquad (\zeta$$

$(15):$ — — — — — — — —

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (m \ni (x \ni p) \to (\forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (c \ni p) \to \neg\ m \ni (\mathfrak{r} \ni\ \leq_q)] \to$$
$$\neg\ x \ni (c \ni (p \circ\ \leq_q \circ p^{-1})))) \qquad (\eta$$

———— • ————

180 $\vdash x \ni (c \ni\ \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \to$
$(\text{funk}\,(p^{-1}) \to (m \ni (x \ni p) \to x \ni (c \ni (p \circ\ \leq_q \circ p^{-1}))))$

$\times$

$\vdash \neg\ x \ni (c \ni (p \circ\ \leq_q \circ p^{-1})) \to$

$(\text{funk}\,(p^{-1}) \to (m \ni (x \ni p) \to \neg\ x \ni (c \ni\ \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}))) \qquad (\vartheta$

$(\eta) ::$ — — — — — — — —

$\vdash \forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (c \ni p) \to \neg\ m \ni (\mathfrak{r} \ni\ \leq_q)] \to$
$(\text{funk}\,(p^{-1}) \to (m \ni (x \ni p) \to \neg\ x \ni (c \ni\ \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}))) \qquad (338$

———— • ————

IIa $\vdash \forall \mathfrak{a}\,[g(\mathfrak{a}) = (\text{—}\,\mathfrak{a} \ni u)] \to g(a) = (\text{—}\,a \ni u)$

$(46):$ — — — — — — — —

$\vdash \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\,f(\varepsilon)) = u \to (\forall \mathfrak{a}\,[g(\mathfrak{a}) = (\text{—}\,\mathfrak{a} \ni u)] \to g(a) = (\text{—}\,f(a))) \qquad (\alpha$

$\smile$

$\vdash \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\,f(\varepsilon)) = u \to (\forall \mathfrak{a}\,[g(\mathfrak{a}) = (\text{—}\,\mathfrak{a} \ni u)] \to \forall \mathfrak{a}\,[g(\mathfrak{a}) = (\text{—}\,f(\mathfrak{a}))]) \qquad (\beta$

$(Va):$ — — — — — — — —

$\vdash \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\,f(\varepsilon)) = u \to (\forall \mathfrak{a}\,[g(\mathfrak{a}) = (\text{—}\,\mathfrak{a} \ni u)] \to$
$\text{ext}\,\varepsilon\,(g(\varepsilon)) = \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\,f(\varepsilon))) \qquad (\gamma$

$(IIIc):$ ————————

$\vdash \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\,f(\varepsilon)) = u \to (\forall \mathfrak{a}\,[g(\mathfrak{a}) = (\text{—}\,\mathfrak{a} \ni u)] \to \text{ext}\,\varepsilon\,(g(\varepsilon)) = u) \qquad (339$

———— • ————

S.228 |

P $\vdash \text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\text{funk}\,(q) \to \forall \mathfrak{n}\,\forall \mathfrak{m}\,[A = (\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \to (\neg\ \mathfrak{n} \ni (\mathfrak{n} \ni\ <_q) \to$
$(\mathfrak{m} \ni (\varepsilon \ni\ \leq_q) \to \neg\ \varepsilon \ni (\mathfrak{n} \ni\ \leq_q)))]])] = \text{zw}\,{}^q_A$

$(339):$ ————————

$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[g(\mathfrak{a}) = (\text{—}\,\mathfrak{a} \ni (\text{zw}\,{}^q_A))] \to \text{ext}\,\varepsilon\,(g(\varepsilon)) = \text{zw}\,{}^q_A \qquad (340$

———— • ————

179 $\vdash \text{zw}^{\,q}_{(m,n)} \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (\neg\; c \mathbin{\text{ə}} u \rightarrow (a \mathbin{\text{ə}} (c \mathbin{\text{ə}} p) \rightarrow$
$\neg\; a \mathbin{\text{ə}} (\text{zw}^{\,q}_{(m,n)})))$

(273) : — — — — — — — —

$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{zw}^{\,q}_{(m,n)} \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (\neg\; c \mathbin{\text{ə}} u \rightarrow (a \mathbin{\text{ə}} (c \mathbin{\text{ə}} p) \rightarrow$
$(\neg\; n \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}}\; <_q) \rightarrow (m \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}}\; \leq_q) \rightarrow \neg\; a \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}}\; \leq_q))))))$ $(\alpha$

$(IIIa)$: ————————————

$\vdash s = a \rightarrow (\text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{zw}^{\,q}_{(m,n)} \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow$
$(\neg\; c \mathbin{\text{ə}} u \rightarrow (s \mathbin{\text{ə}} (c \mathbin{\text{ə}} p) \rightarrow$
$(\neg\; n \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}}\; <_q) \rightarrow (m \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}}\; \leq_q) \rightarrow \neg\; s \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}}\; \leq_q)))))))$ $(\beta$

(79) :: — — — — — — — —

$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (a \mathbin{\text{ə}} (c \mathbin{\text{ə}} p) \rightarrow (\text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{zw}^{\,q}_{(m,n)} \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow$
$(\neg\; c \mathbin{\text{ə}} u \rightarrow (\neg\; n \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}}\; <_q) \rightarrow (m \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}}\; \leq_q) \rightarrow$
$(s \mathbin{\text{ə}} (c \mathbin{\text{ə}} p) \rightarrow \neg\; s \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}}\; \leq_q))))))))$ $(\gamma$

$\smile$

$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (a \mathbin{\text{ə}} (c \mathbin{\text{ə}} p) \rightarrow (\text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{zw}^{\,q}_{(m,n)} \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow$
$(\neg\; c \mathbin{\text{ə}} u \rightarrow (\neg\; n \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}}\; <_q) \rightarrow (m \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}}\; \leq_q) \rightarrow$
$\forall \mathfrak{r}\, [\mathfrak{r} \mathbin{\text{ə}} (c \mathbin{\text{ə}} p) \rightarrow \neg\; \mathfrak{r} \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}}\; \leq_q)])))))))$ $(\delta$

(337) : — — — — — — — —

$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (a \mathbin{\text{ə}} (c \mathbin{\text{ə}} p) \rightarrow (\text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{zw}^{\,q}_{(m,n)} \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow$
$(\neg\; c \mathbin{\text{ə}} u \rightarrow (\neg\; n \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}}\; <_q) \rightarrow (m \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}}\; \leq_q) \rightarrow$
$(n \mathbin{\text{ə}} (y \mathbin{\text{ə}} p) \rightarrow \neg\; c \mathbin{\text{ə}} (y \mathbin{\text{ə}}\; \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}))))))))$ $(\varepsilon$

$\times$

$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (\text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{zw}^{\,q}_{(m,n)} \mathbin{\text{ə}} (u \mathbin{\text{ə}} p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow$
$(\neg\; c \mathbin{\text{ə}} u \rightarrow (\neg\; n \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}}\; <_q) \rightarrow (c \mathbin{\text{ə}} (y \mathbin{\text{ə}}\; \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \rightarrow$
$(n \mathbin{\text{ə}} (y \mathbin{\text{ə}} p) \rightarrow (a \mathbin{\text{ə}} (c \mathbin{\text{ə}} p) \rightarrow \neg\; m \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}}\; \leq_q))))))))$ $(\zeta$

$\smile$

$$\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (\text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow$$
$$(\neg\ c \ni u \rightarrow (\neg\ n \ni (n \ni\ <_q) \rightarrow (c \ni (y \ni\ \leq_{(p\circ q\circ p^{-1})}) \rightarrow$$
$$(n \ni (y \ni p) \rightarrow \forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \ni (c \ni p) \rightarrow \neg\ m \ni (\mathfrak{r} \ni\ \leq_q)])))))) \qquad (\eta$$

$(338):\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (\neg\ c \ni u \rightarrow (\neg\ n \ni (n \ni\ <_q) \rightarrow$$
$$(c \ni (y \ni\ \leq_{(p\circ q\circ p^{-1})}) \rightarrow (n \ni (y \ni p) \rightarrow$$
$$(\text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (m \ni (x \ni p) \rightarrow \neg\ x \ni (c \ni\ \leq_{(p\circ q\circ p^{-1})})))))))) \qquad (\vartheta$$

$$\times$$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (x \ni (c \ni\ \leq_{(p\circ q\circ p^{-1})}) \rightarrow$$
$$(\neg\ n \ni (n \ni\ <_q) \rightarrow (c \ni (y \ni\ \leq_{(p\circ q\circ p^{-1})}) \rightarrow$$
$$(n \ni (y \ni p) \rightarrow (\text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (m \ni (x \ni p) \rightarrow c \ni u))))))) \qquad (\iota$$

$(269, 270) ::\ =\ =\ =\ =\ =\ =\ =\ =$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow$$
$$(\neg\ n \ni (n \ni\ <_q) \rightarrow (c \ni (\text{zw}\,{}^{(p\circ q\circ p^{-1})}_{(x,y)}) \rightarrow$$
$$(n \ni (y \ni p) \rightarrow (\text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow (m \ni (x \ni p) \rightarrow c \ni u)))))) \qquad (\kappa$$

$(18) ::\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (\neg\ n \ni (n \ni\ <_q) \rightarrow$$
$$(n \ni (y \ni p) \rightarrow (u \ni (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (m \ni (x \ni p) \rightarrow$$
$$(c \ni (\text{zw}\,{}^{(p\circ q\circ p^{-1})}_{(x,y)}) \rightarrow c \ni u)))))) \qquad (\lambda$$

$(IVa):\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (\neg\; n \ni (n \ni\; <_q) \rightarrow$$

$$(n \ni (y \ni p) \rightarrow (u \ni (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (m \ni (x \ni p) \rightarrow$$

$$((c \ni u \rightarrow c \ni (\text{zw}\,^{(p\circ q\circ p^{-1})}_{(x,y)})) \rightarrow$$

$$(\text{—}\, c \ni u) = (\text{—}\, c \ni (\text{zw}\,^{(p\circ q\circ p^{-1})}_{(x,y)}))))))))) \qquad (\mu$$

$(334) ::\;\; - - - - - - - -$

S.235

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (\neg\; n \ni (n \ni\; <_q) \rightarrow$$

$$(n \ni (y \ni p) \rightarrow (u \ni (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (m \ni (x \ni p) \rightarrow$$

$$(\text{—}\, c \ni u) = (\text{—}\, c \ni (\text{zw}\,^{(p\circ q\circ p^{-1})}_{(x,y)}))))))) \qquad (\nu$$

$$\smile$$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (\neg\; n \ni (n \ni\; <_q) \rightarrow$$

$$(n \ni (y \ni p) \rightarrow (u \ni (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (m \ni (x \ni p) \rightarrow$$

$$\forall \mathfrak{a}\, [(\text{—}\, \mathfrak{a} \ni u) = (\text{—}\, \mathfrak{a} \ni (\text{zw}\,^{(p\circ q\circ p^{-1})}_{(x,y)}))]))))) \qquad (\xi$$

$(340) :\;\; - - - - - - - -$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (\neg\; n \ni (n \ni\; <_q) \rightarrow$$

$$(n \ni (y \ni p) \rightarrow (u \ni (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (m \ni (x \ni p) \rightarrow$$

$$\text{ext}\,\varepsilon\, (\text{—}\, \varepsilon \ni u) = \text{zw}\,^{(p\circ q\circ p^{-1})}_{(x,y)}))))) \qquad (o$$

$$\times$$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (\neg\; n \ni (n \ni\; <_q) \rightarrow$$

$$(n \ni (y \ni p) \rightarrow (u \ni (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow$$

$$(\neg\; \text{ext}\,\varepsilon\, (\text{—}\, \varepsilon \ni u) = \text{zw}\,^{(p\circ q\circ p^{-1})}_{(x,y)} \rightarrow \neg\; m \ni (x \ni p)))))) \qquad (\pi$$

$(IIa) ::\;\; - - - - - - - -$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (\neg\; n \ni (n \ni\; <_q) \rightarrow$$

$$(n \ni (y \ni p) \rightarrow (u \ni (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow$$

$$(\forall \mathfrak{q}\, [\neg\; \text{ext}\,\varepsilon\, (\text{—}\, \varepsilon \ni u) = \text{zw}\,^{\mathfrak{q}}_{(x,y)}] \rightarrow \neg\; m \ni (x \ni p)))))) \qquad (\rho$$

$(IIa) ::\;\; - - - - - - - -$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (\neg\; n \ni (n \ni\; <_q) \rightarrow$$
$$(n \ni (y \ni p) \rightarrow (u \ni (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{A}\, \forall \mathfrak{q}\, [\neg\; \text{ext}\, \varepsilon\, (\text{—}\, \varepsilon \ni u) = \text{zw}\,{}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \rightarrow \neg\; m \ni (x \ni p)))))) \qquad (\sigma$$

$(Ia):$ — — — — — — — — —

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (\neg\; n \ni (n \ni\; <_q) \rightarrow$$
$$(n \ni (y \ni p) \rightarrow (u \ni (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{A}\, \forall \mathfrak{q}\, [\neg\; \text{ext}\, \varepsilon\, (\text{—}\, \varepsilon \ni u) = \text{zw}\,{}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \rightarrow$$
$$(m \ni (x \ni p) \rightarrow \neg\; x \ni u)))))) \qquad (\tau$$

$\smile$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (\neg\; n \ni (n \ni\; <_q) \rightarrow$$
$$(n \ni (y \ni p) \rightarrow (u \ni (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{A}\, \forall \mathfrak{q}\, [\neg\; \text{ext}\, \varepsilon\, (\text{—}\, \varepsilon \ni u) = \text{zw}\,{}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \rightarrow$$
$$\forall \mathfrak{a}\, [m \ni (\mathfrak{a} \ni p) \rightarrow \neg\; \mathfrak{a} \ni u]))))) \qquad (341$$

———————— • ————————

S.230 |

140 $\vdash m \ni (m \ni\; \leq_q)$

(273) : ————————————

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\neg\; m \ni (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)}) \rightarrow$$
$$(\neg\; n \ni (n \ni\; <_q) \rightarrow \neg\; m \ni (n \ni\; \leq_q))) \qquad (342$$

(8) :: — — — — — — — — —

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (\forall \mathfrak{a}\, [m \ni (\mathfrak{a} \ni p) \rightarrow \neg\; \mathfrak{a} \ni u] \rightarrow$$
$$(\neg\; n \ni (n \ni\; <_q) \rightarrow \neg\; m \ni (n \ni\; \leq_q)))) \qquad (\alpha$$

(341) :: — — — — — — — — —

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (n \ni (y \ni p) \rightarrow$$
$$(u \ni (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (\forall \mathfrak{A}\, \forall \mathfrak{q}\, [\neg\; \text{ext}\, \varepsilon\, (\text{—}\, \varepsilon \ni u) = \text{zw}\,{}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \rightarrow$$
$$(\neg\; n \ni (n \ni\; <_q) \rightarrow \neg\; m \ni (n \ni\; \leq_q)))))) \qquad (\beta$$

$(Ia):$ — — — — — — — — —

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow$$
$$(u \ni (\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow\,) \rightarrow (\forall \mathfrak{A}\, \forall \mathfrak{q}\, [\neg\; \text{ext}\, \varepsilon\, (\text{—}\, \varepsilon \ni u) = \text{zw}\,{}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \rightarrow$$
$$(\neg\; n \ni (n \ni\; <_q) \rightarrow (m \ni (n \ni\; \leq_q) \rightarrow$$
$$(n \ni (y \ni p) \rightarrow \neg\; y \ni u)))))) \qquad (\gamma$$

$\smile$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\ ) \to$$
$$(u \ni (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to (\forall\mathfrak{A}\,\forall\mathfrak{q}\,[\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\varepsilon \ni u) = \text{zw}\,^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \to$$
$$(\neg\ n \ni (n \ni\ <_q) \to (m \ni (n \ni\ \leq_q) \to$$
$$\forall\mathfrak{a}\,[n \ni (\mathfrak{a} \ni p) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni u])))))\qquad (343$$

———————— • ————————

140 $\vdash n \ni (n \ni\ \leq_q)$

$(274):$ ————————

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (\neg\ n \ni (n \ni\ <_q) \to (m \ni (n \ni\ \leq_q) \to n \ni (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)})))\qquad (344$$

$\times$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (\neg\ n \ni (n \ni\ <_q) \to (\neg\ n \ni (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)}) \to \neg\ m \ni (n \ni\ \leq_q)))\qquad (\alpha$$

$(8) ::$ — — — — — — — —

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (\neg\ n \ni (n \ni\ <_q) \to (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\ ) \to$$
$$(\forall\mathfrak{a}\,[n \ni (\mathfrak{a} \ni p) \to \neg\ \mathfrak{a} \ni u] \to \neg\ m \ni (n \ni\ \leq_q))))\qquad (\beta$$

$(343) ::$ — — — — — — — —

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\ ) \to$$
$$(u \ni (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to (\forall\mathfrak{A}\,\forall\mathfrak{q}\,[\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\varepsilon \ni u) = \text{zw}\,^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \to$$
$$(\neg\ n \ni (n \ni\ <_q) \to (m \ni (n \ni\ \leq_q) \to \neg\ m \ni (n \ni\ \leq_q))))))\qquad (\gamma$$

$(Ig):$ — — — — — — — —

$$\vdash \text{zw}\,^{q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\ ) \to$$
$$(u \ni (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to (\forall\mathfrak{A}\,\forall\mathfrak{q}\,[\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\varepsilon \ni u) = \text{zw}\,^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \to$$
$$(\text{funk}\,(q) \to (\neg\ n \ni (n \ni\ <_q) \to \neg\ m \ni (n \ni\ \leq_q)))))\qquad (\delta$$

$(324):$ — — — — — — — —

$$\vdash \text{zw}\,^{q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\ ) \to$$
$$(u \ni (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to (\forall\mathfrak{A}\,\forall\mathfrak{q}\,[\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\varepsilon \ni u) = \text{zw}\,^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \to$$
$$\neg\ a \ni (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)})))\qquad (\varepsilon$$

$(I):$ ————————

$$\vdash \text{zw}\,^{q}_{(m,n)} \ni (u \ni p :\twoheadrightarrow\ ) \to$$
$$(u \ni (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)} \ni p^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to (\forall\mathfrak{A}\,\forall\mathfrak{q}\,[\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\varepsilon \ni u) = \text{zw}\,^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \to$$
$$(c \ni (a \ni p^{-1}) \to \neg\ a \ni (\text{zw}\,^{q}_{(m,n)}))))\qquad (\zeta$$

$\smile$

$$\vdash \mathrm{zw}^{q}_{(m,n)} \text{ə} (u \text{ə} p :\twoheadrightarrow) \rightarrow$$

$$(u \text{ə} (\mathrm{zw}^{q}_{(m,n)} \text{ə} p^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow (\forall\mathfrak{A}\,\forall\mathfrak{q}\,[\neg\ \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(—\varepsilon \text{ə} u) = \mathrm{zw}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \rightarrow$$

$$\forall\mathfrak{a}\,[c \text{ə} (\mathfrak{a} \text{ə} p^{-1}) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \text{ə} (\mathrm{zw}^{q}_{(m,n)})])) \qquad (\eta$$

$$(8): \quad - - - - - - - -$$

$$\vdash \mathrm{zw}^{q}_{(m,n)} \text{ə} (u \text{ə} p :\twoheadrightarrow) \rightarrow (u \text{ə} (\mathrm{zw}^{q}_{(m,n)} \text{ə} p^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow$$

$$(\forall\mathfrak{A}\,\forall\mathfrak{q}\,[\neg\ \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(—\varepsilon \text{ə} u) = \mathrm{zw}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \rightarrow \neg\ c \text{ə} u)) \qquad (\vartheta$$

$$\times$$

$$\vdash c \text{ə} u \rightarrow (\forall\mathfrak{A}\,\forall\mathfrak{q}\,[\neg\ \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(—\varepsilon \text{ə} u) = \mathrm{zw}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \rightarrow$$

$$(u \text{ə} (\mathrm{zw}^{q}_{(m,n)} \text{ə} p^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow \neg\ \mathrm{zw}^{q}_{(m,n)} \text{ə} (u \text{ə} p :\twoheadrightarrow))) \qquad (\iota$$

$$\smile$$

$$\vdash c \text{ə} u \rightarrow (\forall\mathfrak{A}\,\forall\mathfrak{q}\,[\neg\ \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(—\varepsilon \text{ə} u) = \mathrm{zw}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \rightarrow$$

$$\forall\mathfrak{q}\,[u \text{ə} (\mathrm{zw}^{q}_{(m,n)} \text{ə} \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow) \rightarrow \neg\ \mathrm{zw}^{q}_{(m,n)} \text{ə} (u \text{ə} \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow)]) \qquad (\kappa$$

$$(49): \quad - - - - - - - -$$

$$\vdash c \text{ə} u \rightarrow (\forall\mathfrak{A}\,\forall\mathfrak{q}\,[\neg\ \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(—\varepsilon \text{ə} u) = \mathrm{zw}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \rightarrow \neg\ \mathrm{anz}\,(\mathrm{zw}^{q}_{(m,n)}) = \mathrm{anz}\,(u)) \qquad (\lambda$$

$$\times$$

$$\vdash \mathrm{anz}\,(\mathrm{zw}^{q}_{(m,n)}) = \mathrm{anz}\,(u) \rightarrow (\forall\mathfrak{A}\,\forall\mathfrak{q}\,[\neg\ \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(—\varepsilon \text{ə} u) = \mathrm{zw}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \rightarrow \neg\ c \text{ə} u) \qquad (\mu$$

$$\smile$$

$$\vdash \mathrm{anz}\,(\mathrm{zw}^{q}_{(m,n)}) = \mathrm{anz}\,(u) \rightarrow$$

$$(\forall\mathfrak{A}\,\forall\mathfrak{q}\,[\neg\ \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(—\varepsilon \text{ə} u) = \mathrm{zw}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \rightarrow \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \text{ə} u]) \qquad (\nu$$

$$\times$$

$$\vdash \mathrm{anz}\,(\mathrm{zw}^{q}_{(m,n)}) = \mathrm{anz}\,(u) \rightarrow$$

$$(\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \text{ə} u] \rightarrow \neg\ \forall\mathfrak{A}\,\forall\mathfrak{q}\,[\neg\ \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(—\varepsilon \text{ə} u) = \mathrm{zw}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}]) \qquad (345$$

§ 178. *Zerlegung.*

Wir schaffen ■→das Vorderglied←■[187] [#158]

$$,\neg\ \forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \text{ə} u]\,‘$$

weg, indem wir eine reihende Beziehung angeben, der Art, dass kein Gegenstand ihrer von einem Gegenstande bis zu einem Gegenstande laufenden Reihe angehört, wie im § 172 gesagt

[187] das Unterglied

[#158] Textkorrektur infolge modernisierter Formelnotation!

war. Eine solche Beziehung ist die Gleichheit, weil jeder Gegenstand in der Reihe dieser Beziehung auf sich selbst folgt.

§ 179. *Aufbau.*

$$37 \quad \vdash y \ni (y \ni \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \alpha))$$

$$(131): \quad \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash y \ni (y \ni <_{\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon=\alpha)}) \qquad (\alpha$$

$$(272): \quad \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash \neg\ c \ni (\text{zw}^{\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon=\alpha)}_{(x,y)}) \qquad (\beta$$

$$(Ia): \quad \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash c \ni (\text{zw}^{\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon=\alpha)}_{(x,y)}) \to c \ni u \qquad (\gamma$$

$$(IVa): \quad \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash (c \ni u \to c \ni (\text{zw}^{\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon=\alpha)}_{(x,y)})) \to$$
$$(\text{—}\, c \ni u) = (\text{—}\, c \ni (\text{zw}^{\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon=\alpha)}_{(x,y)})) \qquad (\delta$$

———— • ————

$$\text{IIa} \quad \vdash \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \ni u] \to \neg\ c \ni u$$

$$(Ia): \quad - - - - - - - -$$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \ni u] \to (c \ni u \to c \ni (\text{zw}^{\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon=\alpha)}_{(x,y)})) \qquad (\varepsilon$$

$$(\delta): \quad - - - - - - - -$$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \ni u] \to (\text{—}\, c \ni u) = (\text{—}\, c \ni (\text{zw}^{\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon=\alpha)}_{(x,y)})) \qquad (\zeta$$

$$\smile$$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \ni u] \to \forall \mathfrak{a}\,[(\text{—}\, \mathfrak{a} \ni u) = (\text{—}\, \mathfrak{a} \ni (\text{zw}^{\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon=\alpha)}_{(x,y)}))] \qquad (\eta$$

$$(340): \quad - - - - - - - -$$

S.238

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \ni u] \to \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\, \varepsilon \ni u) = \text{zw}^{\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon=\alpha)}_{(x,y)} \qquad (\vartheta$$

$$\times$$

$$\vdash \neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\, \varepsilon \ni u) = \text{zw}^{\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon=\alpha)}_{(x,y)} \to \neg\ \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \ni u] \qquad (\iota$$

$$(IIa):: \quad - - - - - - - -$$

$$\vdash \forall \mathfrak{q}\,[\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\, \varepsilon \ni u) = \text{zw}^{\mathfrak{q}}_{(x,y)}] \to \neg\ \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \ni u] \qquad (\kappa$$

$$(IIa):: \quad - - - - - - - -$$

$$\vdash \forall \mathfrak{A}\,\forall \mathfrak{q}\,[\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\, \varepsilon \ni u) = \text{zw}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \to \neg\ \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \ni u] \qquad (\lambda$$

$$\times$$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \ni u] \to \neg\ \forall \mathfrak{A}\,\forall \mathfrak{q}\,[\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\, \varepsilon \ni u) = \text{zw}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \qquad (\mu$$

$$(345): \quad \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot$$

$$\vdash \text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)}) = \text{anz}\,(u) \to \neg\ \forall\mathfrak{A}\,\forall\mathfrak{q}\,[\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\,\varepsilon \ni u) = \text{zw}\,{}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \qquad (346$$

$(IIIf)$ :: — — — — — — — —

$$\vdash \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)}) \to \neg\ \forall\mathfrak{A}\,\forall\mathfrak{q}\,[\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\,\varepsilon \ni u) = \text{zw}\,{}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \qquad (347$$

———————— ● ————————

$$347 \quad \vdash \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{\text{nf}}_{(\text{anz}\,(1),\text{anz}\,(u))}) \to \neg\ \forall\mathfrak{A}\,\forall\mathfrak{q}\,[\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\,\varepsilon \ni u) = \text{zw}\,{}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}]$$

(314) :: — — — — — — — —

$$\vdash \text{anz}\,(0) \ni (\text{anz}\,(u) \ni\ \leq_{\text{nf}}) \to \neg\ \forall\mathfrak{A}\,\forall\mathfrak{q}\,[\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\,\varepsilon \ni u) = \text{zw}\,{}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \qquad (348$$

| S.233

Anhänge.

1. Tafel der Grundgesetze

und der aus ihnen zunächst folgenden Sätze.

$\vdash a \to (b \to a)$ (I (§ 18)

$\vdash \neg\ a \to (a \to b)$ (Ia (§ 49)

$\vdash \neg\ (b \to \neg\ a) \to a$ (Ib (§ 49)

$\vdash \neg\ (b \to a) \to \neg\ a$ (Ic (§ 49)

$\vdash \neg\ (a \to b) \to a$ (Id (§ 49)

$\vdash b \to (a \to \neg\ (b \to \neg\ a))$ (Ie (§ 49)

$b \to (\neg\ a \to \neg\ (b \to a))$ (If (§ 49)

$\vdash (a \to \neg\ a) \to \neg\ a$ (Ig (§ 49)

$\vdash \forall\mathfrak{a}\,[f(\mathfrak{a})] \to f(a)$ (IIa (§ 20)

$\vdash \forall\mathfrak{f}\,[M_\beta(\mathfrak{f}(\beta))] \to M_\beta(f(\beta))$ (IIb (§ 25)

$\vdash g(a = b) \to g(\forall\mathfrak{f}\,[\mathfrak{f}(b) \to \mathfrak{f}(a)])$ (III (§ 20)

$\vdash a = b \to (f(b) \to f(a))$ (IIIa (§ 50)

$\vdash \neg\ f(a) \to (f(b) \to \neg\ a = b)$ (IIIb (§ 50)

$\vdash a = b \to (f(a) \to f(b))$ (IIIc (§ 50)

$\vdash \neg\ f(b) \to (f(a) \to \neg\ a = b)$ (IIId (§ 50)

| S.236

$\vdash a = a$ (IIIe (§ 50)

$\vdash a = b \to b = a$ (IIIf (§ 50)

$$\vdash \neg\ (\!-\!\!-a) = (\neg\ a) \qquad \text{(IIIg (§ 50)}$$

$$\vdash a = b \rightarrow f(a) = f(b) \qquad \text{(IIIh (§ 50)}$$

$$\vdash (\!-\!\!-a = b) = (a = b) \qquad \text{(IIIi (§ 50)}$$

$$\vdash \neg\ (\!-\!\!-a) = (\neg\ b) \rightarrow (\!-\!\!-a) = (\!-\!\!-b) \qquad \text{(IV (§ 18)}$$

$$\vdash (b \rightarrow a) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (\!-\!\!-a) = (\!-\!\!-b)) \qquad \text{(IVa (§ 51)}$$

$$\vdash (\!-\!\!-a) = (\neg\ \neg\ a) \qquad \text{(IVb (§ 51)}$$

$$\vdash f(\neg\ \neg\ a) \rightarrow f(\!-\!\!-a) \qquad \text{(IVc (§ 51)}$$

$$\vdash f(\!-\!\!-a) \rightarrow f(\neg\ \neg\ a) \qquad \text{(IVd (§ 51)}$$

$$\vdash (a = b) = (b = a) \qquad \text{(IVe (§ 51)}$$

$$\vdash (\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = \mathrm{ext}\,\alpha\,(g(\alpha))) = (\forall \mathfrak{a}\,[f(\mathfrak{a})] = g(\mathfrak{a})) \qquad \text{(V (§ 20)}$$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})] \rightarrow F(\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon))) = F(\mathrm{ext}\,\alpha\,(g(\alpha))) \qquad \text{(Va (§ 52)}$$

$$\vdash \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) = \mathrm{ext}\,\alpha\,(g(\alpha)) \rightarrow f(a) = g(a) \qquad \text{(Vb (§ 52)}$$

$$\vdash a = \text{ɿ}\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(a = \varepsilon) \qquad \text{(VI (§ 18)}$$

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[f(\mathfrak{a}) = (a = \mathfrak{a})] \rightarrow a = \text{ɿ}\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) \qquad \text{(VIa (§ 52)}$$

2. Tafel der Definitionen.

$$a \mathbin{\text{ə}} u := \text{ɿ}\mathrm{ext}\,\alpha\,(\neg\ \forall \mathfrak{g}\,[u = \mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \rightarrow \neg\ \mathfrak{g}(a) = \alpha]) \qquad \text{(A}$$

(Beziehung des Hineinfallens eines Gegenstandes in einen Begriffsumfang. § 34, S. 53.)[188]

$$q \circ p := \mathrm{ext}\,\alpha\,\mathrm{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \forall \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r} \mathbin{\text{ə}} (\alpha \mathbin{\text{ə}} q) \rightarrow \neg\ \varepsilon \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{r} \mathbin{\text{ə}} p)]) \qquad \text{(B}$$

(Zusammengesetzte Beziehung. § 54, S. 72.)

$$\mathrm{funk}\,(p) := (\forall \mathfrak{e}\, \forall \mathfrak{d}\,[\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} p) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} p) \rightarrow \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]]) \qquad (\Gamma$$

(Eindeutigkeit einer Beziehung. § 37, S. 55.)

S.239 |

[188] Diese kurzen Hindeutungen, die ich in Worten den Begriffsschriftdefinitionen hinzufüge, erschöpfen die Sache nicht und machen keinen Anspruch auf strengste Genauigkeit.

$$p :\twoheadrightarrow\ := \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\text{funk}\,(p) \rightarrow \neg\ \forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni p) \rightarrow \neg\ \mathfrak{a} \ni \alpha] \rightarrow \neg\ \mathfrak{d} \ni \varepsilon]))] \qquad (\Delta$$

(Abbildung durch eine Beziehung. § 38, S. 56.)

$$p^{-1} := \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\alpha \ni (\varepsilon \ni p)) \qquad (\mathrm{E}$$

(Umkehrung einer Beziehung. § 39, S. 57.)

$$\text{anz}\,(u) := \text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \forall\mathfrak{q}\,[u \ni (\varepsilon \ni \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \rightarrow \neg\ \varepsilon \ni (u \ni \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow\ )]) \qquad (\mathrm{Z}$$

(Die Anzahl eines Begriffes; d. h. die Anzahl der unter einen Begriff fallenden Gegenstände. § 40, S. 57.)

$$\text{nf}\ := \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ \forall\mathfrak{u}\,\forall\mathfrak{a}\,[\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \ni \mathfrak{u} \rightarrow \varepsilon = \mathfrak{a}))) = \varepsilon \rightarrow (\mathfrak{a} \ni \mathfrak{u} \rightarrow \neg\ \text{anz}\,(\mathfrak{u}) = \alpha)]] \qquad (\mathrm{H}$$

(Beziehung einer Anzahl zur nächstfolgenden. § 43, S. 58.)

$$\text{anz}\,(0) := \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon = \varepsilon)) \qquad (\Theta$$

(Die Anzahl Null. § 41, S. 58.)

$$\text{anz}\,(1) := \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\varepsilon = \text{anz}\,(0))) \qquad (\mathrm{I}$$

(Die Anzahl Eins. § 42, S. 58.)

$$<_q := \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\forall\mathfrak{F}\,[\forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{F}(\mathfrak{d}) \rightarrow \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{a})]] \rightarrow (\forall\mathfrak{a}\,[\varepsilon \ni (\mathfrak{a} \ni q) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{a})] \rightarrow \mathfrak{F}(\alpha))]] \qquad (\mathrm{K}$$

(Das Folgen eines Gegenstandes auf einen Gegenstand in der Reihe einer Beziehung. § 45, S. 60.)

$$\leq_q := \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ \varepsilon \ni (\alpha \ni\ <_q) \rightarrow \alpha = \varepsilon) \qquad (\Lambda$$

(Die Beziehung, dass ein Gegenstand der mit einem Gegenstande anfangenden Reihe einer Beziehung angehört. § 46, S. 60.)

$$\infty := \text{anz}\,(\text{anz}\,(0) \ni\ \leq_{\text{nf}}^{-1}) \qquad (\mathrm{M}$$

(Die Anzahl Endlos. § 122, S. 150.)

$$q\,|^{u} := \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\alpha \ni u \rightarrow \neg\ \varepsilon \ni (\alpha \ni q))) \qquad (\mathrm{N}$$

(§ 138, S. 171.)

$$(o, a) := \text{ext}\,\varepsilon\,(o \ni (a \ni \varepsilon)) \qquad (\Xi$$

(Das Paar. § 144, S. 179.)

$$p \otimes q := \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ \forall\mathfrak{a}\,\forall\mathfrak{o}\,[\alpha = (\mathfrak{o}, \mathfrak{a}) \rightarrow \forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{d} \ni (\mathfrak{a} \ni q) \rightarrow \forall\mathfrak{c}\,[\varepsilon = (\mathfrak{c}, \mathfrak{d}) \rightarrow \neg\ \mathfrak{c} \ni (\mathfrak{o} \ni p)]]]] \qquad (\mathrm{O}$$

(Koppelung einer Beziehung mit einer Beziehung. § 144, S. 179.)

$$A\angle t := \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(A \ni ((\varepsilon, \alpha) \ni\ \leq_t)) \qquad (\Pi$$

(§ 144, S. 179.)

$\text{zw}^{q}_{A} := \text{ext}\,\varepsilon\,[\neg\ (\text{funk}\,(q) \rightarrow \forall\mathfrak{n}\,\forall\mathfrak{m}\,[A = (\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \rightarrow (\neg\ \mathfrak{n}\,\text{ə}\,(\mathfrak{n}\,\text{ə}\ <_q) \rightarrow (\mathfrak{m}\,\text{ə}\,(\varepsilon\,\text{ə}\ \leq_q) \rightarrow \neg\ \varepsilon\,\text{ə}\,(\mathfrak{n}\,\text{ə}\ \leq_q)))])]$ (P

(Der Umstand, dass ein Gegenstand einer von einem Gegenstande bis zu einem Gegenstande laufenden Reihe angehört. § 158, S. 201.)

S.240 | 3. Tafel der wichtigeren Lehrsätze.

$$\vdash f(a) = a\,\text{ə}\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon)) \qquad (1$$

$$\vdash F(f(a)) \rightarrow F(a\,\text{ə}\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon))) \qquad (77$$

$$\vdash F(a\,\text{ə}\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon))) \rightarrow F(f(a)) \qquad (82$$

$$\vdash f(a,b) = a\,\text{ə}\,(b\,\text{ə}\,\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha))) \qquad (2$$

$$\vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha)) = q \rightarrow (F(a\,\text{ə}\,(b\,\text{ə}\,q)) \rightarrow F(f(a,b))) \qquad (6$$

$$\vdash \text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha)) = q \rightarrow (F(f(a,b)) \rightarrow F(a\,\text{ə}\,(b\,\text{ə}\,q))) \qquad (10$$

$$\vdash F(a\,\text{ə}\,(b\,\text{ə}\,\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha)))) \rightarrow F(f(a,b)) \qquad (33$$

$$\vdash F(f(a,b)) \rightarrow F(a\,\text{ə}\,(b\,\text{ə}\,\text{ext}\,\alpha\,\text{ext}\,\varepsilon\,(f(\varepsilon,\alpha)))) \qquad (36$$

$$\vdash F(\text{—}\,f(a)) \rightarrow F(\neg\ a\,\text{ə}\,\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ f(\varepsilon))) \qquad (58$$

$$\vdash d\,\text{ə}\,(e\,\text{ə}\,p) \rightarrow (e\,\text{ə}\,(m\,\text{ə}\,q) \rightarrow d\,\text{ə}\,(m\,\text{ə}\,(q \circ p))) \qquad (5$$

Wenn ein Gegenstand (d) zu einem zweiten (e) in einer (p-)Beziehung steht und wenn der zweite Gegenstand (e) zu einem dritten (m) in einer zweiten (q-)Beziehung steht, so steht der erste Gegenstand zum dritten in der aus der ersten und zweiten zusammengesetzten Beziehung[189].

$$\vdash d\,\text{ə}\,(b\,\text{ə}\,p^{-1}) \rightarrow (b\,\text{ə}\,(c\,\text{ə}\,q) \rightarrow (c\,\text{ə}\,(e\,\text{ə}\,p) \rightarrow d\,\text{ə}\,(e\,\text{ə}\,(p \circ q \circ p^{-1})))) \qquad (174$$

$$\vdash \forall\mathfrak{r}\,[\mathfrak{r}\,\text{ə}\,(d\,\text{ə}\,q) \rightarrow \neg\ e\,\text{ə}\,(\mathfrak{r}\,\text{ə}\,p)] \rightarrow \neg\ e\,\text{ə}\,(d\,\text{ə}\,(q \circ p)) \qquad (15$$

$$\vdash \forall\mathfrak{e}\,\forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{e}\,\text{ə}\,(\mathfrak{d}\,\text{ə}\,q) \rightarrow \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{e}\,\text{ə}\,(\mathfrak{a}\,\text{ə}\,q) \rightarrow \mathfrak{d} = \mathfrak{a}]] \rightarrow \text{funk}\,(q) \qquad (16$$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (b\,\text{ə}\,(d\,\text{ə}\,q) \rightarrow (b\,\text{ə}\,(a\,\text{ə}\,q) \rightarrow d = a)) \qquad (13$$

[189] Die Uebersetzungen, die ich den Begriffsschriftsätzen anhänge, geben zwar den Hauptinhalt wieder, erschöpfen aber nicht immer den ganzen Inhalt.

Wenn eine Beziehung eindeutig ist und wenn ein Gegenstand (b) zu einem zweiten (d) und einem dritten (a) in dieser Beziehung steht, so fällt der zweite (d) mit dem dritten (a) zusammen.

$$\vdash \text{funk}\,(p) \to (\text{funk}\,(q) \to \text{funk}\,(q \circ p)) \qquad (17$$

Eine aus zwei Beziehungen zusammengesetzte Beziehung ist eindeutig, wenn jene es sind. | S.241

$$\vdash u \mathbin{ə} (v \mathbin{ə} q :\twoheadrightarrow\ ) \to \text{funk}\,(q) \qquad (18$$

———————— ● ————————

$$\vdash u \mathbin{ə} (v \mathbin{ə} q :\twoheadrightarrow\ ) \to (\forall \mathfrak{a}\,[e \mathbin{ə} (\mathfrak{a} \mathbin{ə} q) \to \neg\ \mathfrak{a} \mathbin{ə} v] \to \neg\ e \mathbin{ə} u) \qquad (8$$

———————— ● ————————

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to (\forall \mathfrak{d}\,[\forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \mathbin{ə} (\mathfrak{a} \mathbin{ə} q) \to \neg\ \mathfrak{a} \mathbin{ə} v] \to \neg\ \mathfrak{d} \mathbin{ə} w] \to w \mathbin{ə} (v \mathbin{ə} q :\twoheadrightarrow\ )) \qquad (11$$

———————— ● ————————

$$\vdash w \mathbin{ə} (u \mathbin{ə} p :\twoheadrightarrow\ ) \to (u \mathbin{ə} (v \mathbin{ə} q :\twoheadrightarrow\ ) \to w \mathbin{ə} (v \mathbin{ə} (q \circ p) :\twoheadrightarrow\ )) \qquad (19$$

Wenn ein Begriff in einen zweiten durch eine erste Beziehung und dieser zweite Begriff in einen dritten durch eine zweite (q-)Beziehung abgebildet wird, so bildet die aus der ersten und zweiten Beziehung zusammengesetzte Beziehung den ersten Begriff in den dritten ab.

$$\vdash F(r \mathbin{ə} (a \mathbin{ə} q)) \to F(a \mathbin{ə} (r \mathbin{ə} q^{-1})) \qquad (22$$

———————— ● ————————

$$\vdash F(a \mathbin{ə} (r \mathbin{ə} q^{-1})) \to F(r \mathbin{ə} (a \mathbin{ə} q)) \qquad (23$$

———————— ● ————————

$$\vdash (q \circ p)^{-1} = p^{-1} \circ q^{-1} \qquad (24$$

Die Umkehrung einer Beziehung, die aus einer ersten und einer zweiten zusammengesetzt ist, ist zusammengesetzt aus der Umkehrung der zweiten und der Umkehrung der ersten.

$$\vdash \forall \mathfrak{q}\,[z \mathbin{ə} (w \mathbin{ə} \mathfrak{q}^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to \neg\ w \mathbin{ə} (z \mathbin{ə} \mathfrak{q} :\twoheadrightarrow\ )] \to \neg\ \text{anz}\,(w) = \text{anz}\,(z) \qquad (49$$

Die Anzahl der unter einen ersten (w-)Begriff fallenden Gegenstände fällt nicht zusammen mit der Anzahl der unter einen zweiten (z-)Begriff fallenden, wenn es keine Beziehung giebt, die den ersten Begriff in den zweiten und deren Umkehrung zugleich den zweiten in den ersten abbildet.

$$\vdash v \mathbin{ə} (u \mathbin{ə} q^{-1} :\twoheadrightarrow\ ) \to (u \mathbin{ə} (v \mathbin{ə} q :\twoheadrightarrow\ ) \to \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(v)) \qquad (32$$

Die Anzahl der unter einen ersten (u-)Begriff fallenden Gegenstände fällt zusammen mit der Anzahl der unter einen zweiten (v-)Begriff fallenden, wenn eine Beziehung den ersten in den zweiten Begriff abbildet, deren Umkehrung den zweiten in den ersten abbildet.

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[(\text{—}\,\mathfrak{a} \mathbin{ə} u) = (\text{—}\,\mathfrak{a} \mathbin{ə} v)] \to \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(v) \qquad (96$$

———————— ● ————————

$$\vdash \forall \mathfrak{u}\, \forall \mathfrak{a}\,[\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{ə} \mathfrak{u} \to \varepsilon = \mathfrak{a}))) = e \to$$
$$(\mathfrak{a} \mathbin{ə} \mathfrak{u} \to \neg\ \text{anz}\,(\mathfrak{u}) = a)] \to \neg\ e \mathbin{ə} (a \mathbin{ə} \text{nf}\,) \qquad (68$$

———————— ● ————————

$$\vdash \text{funk}\,(\text{nf}\,) \qquad (71$$

Die Beziehung einer Anzahl zur nächstfolgenden in der Anzahlenreihe ist eindeutig.

$$\vdash \text{funk}\,(\text{nf}^{\,-1}) \qquad (89$$

Die Beziehung einer Anzahl zur nächstvorhergehenden in der Anzahlenreihe ist eindeutig.

$$\vdash \text{anz}\,(u) = n \rightarrow (\text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\ (\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u \rightarrow \varepsilon = c))) = m \rightarrow (c \mathbin{\text{ə}} u \rightarrow m \mathbin{\text{ə}} (n \mathbin{\text{ə}} \text{nf}\,))) \qquad \text{(101}$$

———————— • ————————

S.242 |

$$\vdash \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(0) \rightarrow \neg\ a \mathbin{\text{ə}} u \qquad \text{(94}$$

Wenn Null die Anzahl der Gegenstände ist, die unter einen Begriff fallen, so fällt kein Gegenstand unter diesen Begriff.

$$\vdash \neg\ c \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} \text{nf}\,) \qquad \text{(108}$$

In der Anzahlenreihe geht der Null nichts unmittelbar vorher.

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} u] \rightarrow \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(0) \qquad \text{(97}$$

Wenn kein Gegenstand unter einen Begriff fällt, so ist Null die Anzahl der unter diesen Begriff fallenden Gegenstände.

$$\vdash \neg\ \forall \mathfrak{u}\,[\neg\ \text{anz}\,(\mathfrak{u}) = a] \rightarrow (\neg\ a = \text{anz}\,(0) \rightarrow \neg\ \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} \text{nf}\,)]) \qquad \text{(107}$$

Zu jeder von der Null verschiedenen Anzahl giebt es eine ihr in der Anzahlenreihe unmittelbar vorhergehende.

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} v \rightarrow \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} u] \rightarrow (\text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(0) \rightarrow \text{anz}\,(v) = \text{anz}\,(0)) \qquad \text{(99}$$

Wenn Null die Anzahl der unter einen ersten Begriff fallenden Gegenstände ist, so ist Null auch die Anzahl der Gegenstände, die unter einen dem ersten untergeordneten Begriff fallen.

$$\vdash d \mathbin{\text{ə}} u \rightarrow (\text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(1) \rightarrow (a \mathbin{\text{ə}} u \rightarrow d = a)) \qquad \text{(117}$$

Wenn Eins die Anzahl der unter einen Begriff fallenden Gegenstände ist und wenn ein erster Gegenstand unter diesen Begriff fällt und ebenso ein zweiter, so fallen beide Gegenstände zusammen.

$$\vdash c \mathbin{\text{ə}} u \rightarrow (\forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} u \rightarrow \mathfrak{a} = c] \rightarrow \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(1)) \qquad \text{(121}$$

Wenn ein Gegenstand unter einen Begriff fällt und wenn jeder Gegenstand, der unter diesen Begriff fällt, mit jenem zusammenfällt, so ist Eins die Anzahl der unter den Begriff fallenden Gegenstände.

$$\vdash \forall \mathfrak{d}\,[\mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} u \rightarrow \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} u \rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{d}]] \rightarrow (\neg\ \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} u] \rightarrow \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(1)) \qquad \text{(122}$$

Eins ist die Anzahl der unter einen Begriff fallenden Gegenstände, wenn es einen Gegenstand giebt, der unter diesen Begriff fällt, und wenn jeder unter den Begriff fallende Gegenstand mit jedem Gegenstande zusammenfällt, der unter den Begriff fällt.

$$\vdash \text{anz}\,(0) \mathbin{\text{ə}} (\text{anz}\,(1) \mathbin{\text{ə}} \text{nf}\,) \qquad \text{(110}$$

Die Anzahl Eins folgt in der Anzahlenreihe unmittelbar auf die Anzahl Null.

$$\vdash \neg\ \text{anz}\,(0) = \text{anz}\,(1) \qquad \text{(111}$$

Die Anzahl Null ist von der Anzahl Eins verschieden.

$$\vdash \text{anz}\,(u) = \text{anz}\,(1) \rightarrow \neg\ \forall \mathfrak{a}\,[\neg\ \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} u] \qquad \text{(113}$$

Wenn Eins die Anzahl der unter einen Begriff fallenden Gegenstände ist, so giebt es einen
S.243 unter diesen Begriff fallenden Gegenstand. |

$$\vdash a \mathbin{\text{ə}} (b \mathbin{\text{ə}}\ <_q) \rightarrow (\forall \mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{d}) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} q) \rightarrow F(\mathfrak{a})]] \rightarrow (\forall \mathfrak{a}\,[a \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} q) \rightarrow F(\mathfrak{a})] \rightarrow F(b))) \qquad \text{(123}$$

———————— • ————————

$$\vdash a \mathbin{\text{ə}} (b \mathbin{\text{ə}}\ <_q) \rightarrow \neg\ \forall \mathfrak{e}\,[\neg\ (\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} (b \mathbin{\text{ə}} q))] \qquad \text{(124}$$

Wenn ein Gegenstand auf einen Gegenstand in einer Reihe folgt, so giebt es einen Gegenstand, der zu dem ersten in der reihenden Beziehung steht.

$$\vdash \neg\ a ə (\text{anz}\,(0) ə <_{\text{nf}}) \tag*{(126}$$

Der Anzahl Null geht nichts in der Anzahlenreihe vorher.

$$\vdash \forall \mathfrak{F}\,[\forall \mathfrak{d}\,[\mathfrak{F}(\mathfrak{d}) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} ə (\mathfrak{a} ə q) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{a})]] \rightarrow$$
$$(\forall \mathfrak{a}\,[a ə (\mathfrak{a} ə q) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{a})] \rightarrow \mathfrak{F}(b))] \rightarrow a ə (b ə <_q) \tag*{(127}$$

——— ● ———

$$\vdash d ə (a ə q) \rightarrow d ə (a ə <_q) \tag*{(131}$$

Ein erster Gegenstand geht einem zweiten in einer Reihe vorher, wenn er zu ihm in der reihenden Beziehung steht.

$$\vdash a ə (e ə <_q) \rightarrow (e ə (m ə q) \rightarrow a ə (m ə <_q)) \tag*{(133}$$

Wenn ein Gegenstand auf einen zweiten in einer Reihe folgt und zu einem dritten in der reihenden Beziehung steht, so folgt auch der dritte auf den zweiten in dieser Reihe.

$$\vdash d ə (y ə <_q) \rightarrow (x ə (d ə <_q) \rightarrow x ə (y ə <_q)) \tag*{(275}$$

Wenn ein Gegenstand auf einen zweiten in einer Reihe folgt und einem dritten in dieser Reihe vorhergeht, so folgt auch der dritte auf den zweiten in dieser Reihe.

$$\vdash x ə (y ə <_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \rightarrow (\text{funk}\,(p^{-1}) \rightarrow x ə (y ə (p \circ <_q \circ p^{-1}))) \tag*{(177}$$

——— ● ———

$$\vdash a ə (c ə <_q) \rightarrow (d ə (a ə q) \rightarrow d ə (c ə <_q)) \tag*{(129}$$

——— ● ———

$$\vdash m ə (n ə <_p) \rightarrow n ə (m ə <_{p^{-1}}) \tag*{(302}$$

——— ● ———

$$\vdash n ə (m ə <_{p^{-1}}) \rightarrow m ə (n ə <_p) \tag*{(299}$$

Ein Gegenstand folgt auf einen zweiten in der Reihe einer Beziehung, wenn der zweite auf den ersten in der Reihe der umgekehrten Beziehung folgt.

$$\vdash F(a ə (c ə \leq_q)) \rightarrow F((\neg\ a ə (c ə <_q) \rightarrow c = a)) \tag*{(130}$$

——— ● ———

$$\vdash x ə (y ə \leq_q) \rightarrow (\neg\ y = x \rightarrow x ə (y ə <_q)) \tag*{(200}$$

Wenn ein Gegenstand einer mit einem zweiten anfangenden Reihe angehört, so fällt er entweder mit ihm zusammen oder er folgt auf ihn in dieser Reihe.

$$\vdash d ə (y ə \leq_q) \rightarrow (x ə (d ə <_q) \rightarrow x ə (y ə <_q)) \tag*{(276}$$

——— ● ———

| S.244

$$\vdash d ə (y ə <_q) \rightarrow (x ə (d ə \leq_q) \rightarrow x ə (y ə <_q)) \tag*{(280}$$

——— ● ———

$$\vdash a ə (b ə \leq_q) \rightarrow (\forall \mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{d}) \rightarrow \forall \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} ə (\mathfrak{a} ə q) \rightarrow F(\mathfrak{a})]] \rightarrow$$
$$(F(a) \rightarrow F(b))) \tag*{(144}$$

——— ● ———

$$\vdash a ə (e ə \leq_q) \rightarrow (e ə (m ə q) \rightarrow a ə (m ə <_q)) \tag*{(134}$$

Wenn ein Gegenstand einer mit einem zweiten anfangenden Reihe angehört und zu einem dritten in der reihenden Beziehung steht, so folgt der dritte auf den zweiten in dieser Reihe.

$$\vdash a ə (c ə \leq_q) \rightarrow (d ə (a ə q) \rightarrow d ə (c ə <_q)) \tag*{(132}$$

Wenn ein Gegenstand einer mit einem zweiten endenden Reihe angehört und wenn ein dritter zu ihm in der reihenden Beziehung steht, so folgt der zweite auf den dritten in dieser Reihe.

$$\vdash a \,ə\, (m \,ə\, <_q) \to a \,ə\, (m \,ə\, \leq_q) \qquad (136$$

$$\vdash a \,ə\, (e \,ə\, \leq_q) \to (e \,ə\, (m \,ə\, q) \to a \,ə\, (m \,ə\, \leq_q)) \qquad (137$$

$$\vdash d \,ə\, (y \,ə\, \leq_q) \to (x \,ə\, (d \,ə\, \leq_q) \to x \,ə\, (y \,ə\, \leq_q)) \qquad (322$$

Wenn ein Gegenstand (d) der mit einem zweiten (y) endenden und zugleich der mit einem dritten (x) anfangenden Reihe derselben Beziehung angehört, so gehört der zweite ebenfalls der mit dem dritten anfangenden Reihe an.

$$\vdash a \,ə\, (y \,ə\, \leq_q) \to (d \,ə\, (a \,ə\, q) \to d \,ə\, (y \,ə\, \leq_q)) \qquad (285$$

$$\vdash b = a \to a \,ə\, (b \,ə\, \leq_q) \qquad (139$$

$$\vdash a \,ə\, (a \,ə\, \leq_q) \qquad (140$$

Jeder Gegenstand gehört der mit ihm selbst anfangenden Reihe irgendeiner Beziehung an.

$$\begin{gathered}\vdash \text{funk}\,(p^{-1}) \to (c \,ə\, (y \,ə\, \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \to \\ (n \,ə\, (y \,ə\, p) \to c \,ə\, (y \,ə\, (p \circ \leq_q \circ p^{-1})))) \end{gathered} \qquad (335$$

$$\begin{gathered}\vdash x \,ə\, (y \,ə\, \leq_{(p \circ q \circ p^{-1})}) \to (\text{funk}\,(p^{-1}) \to \\ (m \,ə\, (x \,ə\, p) \to x \,ə\, (y \,ə\, (p \circ \leq_q \circ p^{-1})))) \end{gathered} \qquad (180$$

$$\begin{aligned}&\vdash a \,ə\, (b \,ə\, \leq_q) \to \\ &(\forall \mathfrak{d}\, [F(\mathfrak{d}) \to (a \,ə\, (\mathfrak{d} \,ə\, \leq_q) \to \forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \,ə\, (\mathfrak{a} \,ə\, q) \to F(\mathfrak{a})])] \to \\ &(F(a) \to F(b))) \end{aligned} \qquad (152$$

$$\vdash a \,ə\, (b \,ə\, <_q) \to \neg\ \forall \mathfrak{e}\, [\mathfrak{e} \,ə\, (b \,ə\, q) \to \neg\ a \,ə\, (\mathfrak{e} \,ə\, \leq_q)] \qquad (141$$

Wenn ein Gegenstand (b) auf einen zweiten (a) in einer Reihe folgt, so giebt es einen Gegen-
S.245 stand, welcher zu dem ersten (b) in der reihen- | den Beziehung steht und welcher der mit dem zweiten (a) anfangenden Reihe dieser Beziehung angehört (S. 143).

$$\vdash \text{anz}\,(0) \,ə\, (b \,ə\, \leq_{\text{nf}}) \to \neg\ b \,ə\, (b \,ə\, <_{\text{nf}}) \qquad (145$$

Keine endliche Anzahl folgt auf sich selbst in der Anzahlenreihe (S. 137 u. 144).

$$\vdash \text{anz}\,(0) \,ə\, (b \,ə\, \leq_{\text{nf}}) \to b \,ə\, (\text{anz}\,(b \,ə\, \leq_{\text{nf}}) \,ə\, \text{nf}) \qquad (155$$

Die Anzahl der Glieder der mit einer endlichen Anzahl (b) endenden Anzahlenreihe folgt in der Anzahlenreihe unmittelbar auf diese Anzahl (b.)

$$\vdash \text{anz}\,(0) \,ə\, (b \,ə\, \leq_{\text{nf}}) \to \neg\ \forall \mathfrak{a}\, [\neg\ b \,ə\, (\mathfrak{a} \,ə\, \text{nf})] \qquad (157$$

Zu jeder endlichen Anzahl giebt es ein unmittelbar folgendes Glied der Anzahlenreihe.

$$\vdash m \,ə\, (n \,ə\, \leq_p) \to n \,ə\, (m \,ə\, \leq_{p^{-1}}) \qquad (303$$

$$\vdash n \,ə\, (m \,ə\, \leq_{p^{-1}}) \to m \,ə\, (n \,ə\, \leq_p) \qquad (304$$

Ein Gegenstand (n) gehört der mit einem zweiten (m) anfangenden Reihe einer (p-)Beziehung an, wenn der zweite (m) der mit dem ersten (n) anfangenden Reihe der umgekehrten Beziehung angehört.

$$\vdash d \,ə\, (n \,ə\, <_p) \to (\text{funk}\,(p) \to (d \,ə\, (a \,ə\, p) \to a \,ə\, (n \,ə\, \leq_p))) \qquad (242$$

Wenn ein Gegenstand (d) einem zweiten (n) in einer Reihe vorhergeht, deren reihende Beziehung eindeutig ist, und wenn er zu einem dritten (a) in dieser Beziehung steht, so gehört der zweite (n) der mit dem dritten (a) anfangenden Reihe dieser Beziehung an.

$$\vdash m \,ə\, (r \,ə\, \leq_p) \to (\text{funk}\,(p) \to (m \,ə\, (n \,ə\, \leq_p) \to$$
$$(\neg\; n \,ə\, (r \,ə\, <_p) \to r \,ə\, (n \,ə\, \leq_p)))) \qquad (243$$

Wenn ein Gegenstand (r) der mit einem zweiten (m) anfangenden Reihe angehört, deren reihende Beziehung eindeutig ist und wenn derselben Reihe ein dritter Gegenstand (n) angehört, so gehört dieser (n) der mit dem ersten (r) anfangenden Reihe dieser Beziehung an oder geht diesem in der Reihe vorher.

$$\vdash \text{anz}\,(0) \,ə\, (a \,ə\, <_{\text{nf}}) \to \text{anz}\,(1) \,ə\, (a \,ə\, \leq_{\text{nf}}) \qquad (306$$

Wenn ein Gegenstand auf Null in der Anzahlenreihe folgt, so gehört er der mit Eins anfangenden Anzahlenreihe an.

$$\vdash a \,ə\, (n \,ə\, \leq_{\text{nf}}) \to (\text{anz}\,(0) \,ə\, (n \,ə\, \leq_{\text{nf}}) \to \text{anz}\,(0) \,ə\, (a \,ə\, \leq_{\text{nf}})) \qquad (307$$

Wenn ein Gegenstand der mit einer endlichen Anzahl endenden Anzahlenreihe angehört, so ist er selber eine endliche Anzahl.

$$\vdash i \,ə\, (y \,ə\, \leq_q) \to (\text{funk}\,(q) \to (i \,ə\, (i \,ə\, <_q) \to y \,ə\, (y \,ə\, <_q))) \qquad (296$$

Wenn ein Gegenstand (y) einer mit einem zweiten (i) anfangenden Reihe angehört, deren reihende Beziehung eindeutig ist, und wenn der zweite Gegenstand (i) auf sich selbst in der Reihe dieser Beziehung folgt, | so folgt auch der erste (y) auf sich selbst. S.246

$$\vdash F(\text{anz}\,(\text{anz}\,(0) \,ə\, \leq_{\text{nf}}^{-1})) \to F(\infty) \qquad (205$$

$$\vdash \infty \,ə\, (\infty \,ə\, \text{nf}) \qquad (165$$

Endlos folgt auf sich selbst unmittelbar in der Anzahlenreihe.

$$\vdash \text{anz}\,(0) \,ə\, (\text{anz}\,(v) \,ə\, \leq_{\text{nf}}) \to (\infty = \text{anz}\,(u) \to$$
$$\infty = \text{anz}\,(\text{ext}\,\varepsilon\,(\neg\; \varepsilon \,ə\, u \to \varepsilon \,ə\, v))) \qquad (172$$

Wenn Endlos die Anzahl eines Begriffes ist und wenn die Anzahl eines andern Begriffes endlich ist, so ist Endlos die Anzahl des Begriffes *unter den ersten oder unter den zweiten Begriff fallend* (S. 154).

$$\vdash \neg\; \text{anz}\,(0) \,ə\, (\infty \,ə\, \leq_{\text{nf}}) \qquad (167$$

Endlos ist keine endliche Anzahl.

$$\vdash e \,ə\, (a \,ə\, (q\,|^u)) \to e \,ə\, (a \,ə\, q) \qquad (188$$

$$\vdash \text{funk}\,(q) \to \text{funk}\,(q\,|^u) \qquad (189$$

$$\vdash x \,ə\, (y \,ə\, <_{(q|^u)}) \to x \,ə\, (y \,ə\, <_q) \qquad (194$$

$$\vdash x \,ə\, (y \,ə\, \leq_{(q|^u)}) \to x \,ə\, (y \,ə\, \leq_q) \qquad (201$$

$$\vdash d \,ə\, (y \,ə\, (q\,|^u)) \to y \,ə\, u \qquad (191$$

$$\vdash a \,ə\, u \to (d \,ə\, (a \,ə\, q) \to d \,ə\, (a \,ə\, (q\,|^u))) \qquad (197$$

——— ● ———

$$\begin{aligned}&\vdash \infty = \text{anz}\,(u) \rightarrow \\ &\neg\ \forall\mathfrak{q}\,[\text{funk}\,(\mathfrak{q}) \rightarrow (\forall\mathfrak{i}\,[\neg\ \mathfrak{i} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{i} \mathbin{\text{ə}}\ <_{\mathfrak{q}})] \rightarrow \\ &(\forall\mathfrak{d}\,[\forall\mathfrak{e}\,[\neg\ \mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{e} \mathbin{\text{ə}} \mathfrak{q})] \rightarrow \neg\ \mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} u] \rightarrow \\ &\forall\mathfrak{a}\,[\neg\ \text{ext}\,\varepsilon\,(\text{—}\varepsilon \mathbin{\text{ə}} u) = \mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{\mathfrak{q}}^{-1}])))]\end{aligned} \qquad \text{(207}$$

Wenn Endlos die Anzahl der unter einen Begriff fallenden Gegenstände ist, so können diese in eine unverzweigte Reihe geordnet werden, die mit einem bestimmten Gegenstande anfängt und, ohne in sich zurückzukehren, endlos fortläuft (S. 160).

$$\vdash F(\text{ext}\,\varepsilon\,(o \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} \varepsilon))) \rightarrow F((o,a)) \qquad \text{(249}$$

——— ● ———

$$\vdash a = i \rightarrow (o = e \rightarrow (o,a) = (e,i)) \qquad \text{(251}$$

Wenn ein Gegenstand mit einem zweiten und ein dritter Gegenstand mit einem vierten zusammenfällt, so fällt das aus dem ersten und dritten bestehende Paar zusammen mit dem aus dem zweiten und vierten bestehenden.

$$\vdash o \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} q) = q \mathbin{\text{ə}} ((o,a)) \qquad \text{(215}$$

——— ● ———

$$\vdash (m,x) = (c,d) \rightarrow x = d \qquad \text{(219}$$

Wenn ein Paar mit einem zweiten zusammenfällt, so fällt das zweite Glied des ersten mit dem zweiten Gliede des zweiten zusammen.

$$\vdash (m,x) = (c,d) \rightarrow m = c \qquad \text{(220}$$

——— ● ———

$$\vdash (m,x) = (c,d) \rightarrow f(m,x) = f(c,d) \qquad \text{(221}$$

——— ● ———

S.247 |

$$\begin{aligned}&\vdash \forall\mathfrak{a}\,\forall\mathfrak{o}\,[A = (\mathfrak{o},\mathfrak{a}) \rightarrow \forall\mathfrak{d}\,[\mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} q) \rightarrow \\ &\forall\mathfrak{c}\,[D = (\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \rightarrow \neg\ \mathfrak{c} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{o} \mathbin{\text{ə}} p)]]] \rightarrow \neg\ D \mathbin{\text{ə}} (A \mathbin{\text{ə}} (p \otimes q))\end{aligned} \qquad \text{(213}$$

——— ● ———

$$\vdash (m,x) \mathbin{\text{ə}} ((o,a) \mathbin{\text{ə}} (p \otimes q)) \rightarrow x \mathbin{\text{ə}} (a \mathbin{\text{ə}} q) \qquad \text{(224}$$

——— ● ———

$$\vdash (m,x) \mathbin{\text{ə}} ((o,a) \mathbin{\text{ə}} (p \otimes q)) \rightarrow m \mathbin{\text{ə}} (o \mathbin{\text{ə}} p) \qquad \text{(225}$$

——— ● ———

$$\begin{aligned}&\vdash (m,x) \mathbin{\text{ə}} ((n,y) \mathbin{\text{ə}}\ <_{(p \otimes q)}) \rightarrow \\ &(\forall\mathfrak{c}\,\forall\mathfrak{d}\,[F(\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \rightarrow \forall\mathfrak{o}\,[\mathfrak{c} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{o} \mathbin{\text{ə}} p) \rightarrow \forall\mathfrak{a}\,[\mathfrak{d} \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} q) \rightarrow F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]]] \rightarrow \\ &(\forall\mathfrak{o}\,[m \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{o} \mathbin{\text{ə}} p) \rightarrow \forall\mathfrak{a}\,[x \mathbin{\text{ə}} (\mathfrak{a} \mathbin{\text{ə}} q) \rightarrow F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]] \rightarrow F(n,y)))\end{aligned} \qquad \text{(231}$$

——— ● ———

$$\vdash (m,x) \mathbin{\text{ə}} ((c,d) \mathbin{\text{ə}}\ <_{(p \otimes q)}) \rightarrow x \mathbin{\text{ə}} (d \mathbin{\text{ə}}\ <_q) \qquad \text{(233}$$

Wenn ein Paar auf ein zweites in der Reihe einer gekoppelten Beziehung folgt, so folgt das zweite Glied des ersten Paares (d) auf das zweite Glied des zweiten Paares (x) in einer Reihe, deren reihende Beziehung das zweite Glied der gekoppelten Beziehung ist.

$$\vdash (m,x) \mathbin{\text{ə}} ((c,d) \mathbin{\text{ə}}\ \leq_{(p \otimes q)}) \rightarrow x \mathbin{\text{ə}} (d \mathbin{\text{ə}}\ \leq_q) \qquad \text{(234}$$

——— ● ———

$$\vdash (m,x) \mathbin{\text{ə}} ((b,d) \mathbin{\text{ə}}\ <_{(p \otimes q)}) \rightarrow m \mathbin{\text{ə}} (b \mathbin{\text{ə}}\ <_p) \qquad \text{(244}$$

———●———

$$\vdash (m,x) \mathbin{ə} ((b,d) \mathbin{ə} \leq_{(p\otimes q)}) \rightarrow m \mathbin{ə} (b \mathbin{ə} \leq_p) \qquad (246$$

———●———

$$\begin{aligned}&\vdash (m,x) \mathbin{ə} ((n,y) \mathbin{ə} \leq_{(p\otimes q)}) \rightarrow\\ &(\forall \mathfrak{c}\, \forall \mathfrak{d}\, [F(\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \rightarrow \forall \mathfrak{o}\, [\mathfrak{c} \mathbin{ə} (\mathfrak{o} \mathbin{ə} p) \rightarrow\\ &\forall \mathfrak{a}\, [\mathfrak{d} \mathbin{ə} (\mathfrak{a} \mathbin{ə} q) \rightarrow F(\mathfrak{o},\mathfrak{a})]]] \rightarrow\\ &(F(m,x) \rightarrow F(n,y))) \qquad (257\end{aligned}$$

———●———

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{funk}\,(p) \rightarrow \text{funk}\,(p \otimes q)) \qquad (252$$

Wenn eine Beziehung eindeutig ist und ebenso eine zweite, so ist die aus der ersten und zweiten Beziehung gekoppelte ebenfalls eindeutig. | S.248

$$\vdash c \mathbin{ə} (o \mathbin{ə} p) \rightarrow (d \mathbin{ə} (a \mathbin{ə} q) \rightarrow (c,d) \mathbin{ə} ((o,a) \mathbin{ə} (p \otimes q))) \qquad (208$$

Wenn ein Gegenstand (c) zu einem zweiten (o) in einer (p-)Beziehung steht und wenn ein dritter Gegenstand (d) zu einem vierten (a) in einer zweiten (q-)Beziehung steht, so steht das aus dem ersten und dritten Gegenstande bestehende Paar ((c,d)) zu dem aus dem zweiten und vierten bestehenden Paare ((o,a)) in der aus der ersten und zweiten Beziehung gekoppelten Beziehung.

$$\begin{aligned}&\vdash A \mathbin{ə} ((c,d) \mathbin{ə} \leq_{(p\otimes q)}) \rightarrow (c \mathbin{ə} (o \mathbin{ə} p) \rightarrow\\ &(d \mathbin{ə} (a \mathbin{ə} q) \rightarrow A \mathbin{ə} ((o,a) \mathbin{ə} \leq_{(p\otimes q)}))) \qquad (209\end{aligned}$$

———●———

$$\vdash (m,x) \mathbin{ə} ((n,y) \mathbin{ə} \leq_{(p\otimes q)}) \rightarrow (x,m) \mathbin{ə} ((y,n) \mathbin{ə} \leq_{(q\otimes p)}) \qquad (258$$

———●———

$$\vdash F(b \mathbin{ə} (d \mathbin{ə} (A\angle t))) \rightarrow F(A \mathbin{ə} ((b,d) \mathbin{ə} \leq_t)) \qquad (247$$

———●———

$$\begin{aligned}&\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\text{funk}\,(p) \rightarrow (\forall \mathfrak{i}\, [m \mathbin{ə} (\mathfrak{i} \mathbin{ə} \leq_p) \rightarrow \neg\ \mathfrak{i} \mathbin{ə} (\mathfrak{i} \mathbin{ə} <_p)] \rightarrow\\ &\text{funk}\,((m,x)\angle(p \otimes q)))) \qquad (253\end{aligned}$$

———●———

$$\vdash F(A \mathbin{ə} ((o,a) \mathbin{ə} \leq_t)) \rightarrow F(o \mathbin{ə} (a \mathbin{ə} (A\angle t))) \qquad (210$$

———●———

$$\vdash m \mathbin{ə} (x \mathbin{ə} ((m,x)\angle t)) \qquad (238$$

———●———

$$\vdash c \mathbin{ə} (d \mathbin{ə} ((m,x)\angle(p \otimes q))) \rightarrow x \mathbin{ə} (d \mathbin{ə} \leq_q) \qquad (235$$

———●———

$$\begin{aligned}&\vdash c \mathbin{ə} (d \mathbin{ə} (A\angle(p \otimes q))) \rightarrow (c \mathbin{ə} (o \mathbin{ə} p) \rightarrow\\ &(d \mathbin{ə} (a \mathbin{ə} q) \rightarrow o \mathbin{ə} (a \mathbin{ə} (A\angle(p \otimes q))))) \qquad (211\end{aligned}$$

———●———

$$\vdash (x,m)\angle(q \otimes p) = ((m,x)\angle(p \otimes q))^{-1} \qquad (259$$

———●———

$$\begin{aligned}&\vdash \neg\ \forall \mathfrak{q}\, [\text{funk}\,(\mathfrak{q}) \rightarrow (\forall \mathfrak{i}\, [\neg\ \mathfrak{i} \mathbin{ə} (\mathfrak{i} \mathbin{ə} <_{\mathfrak{q}})] \rightarrow\\ &(\forall \mathfrak{d}\, [\forall \mathfrak{e}\, [\neg\ \mathfrak{d} \mathbin{ə} (\mathfrak{e} \mathbin{ə} \mathfrak{q})] \rightarrow \neg\ \mathfrak{d} \mathbin{ə} u] \rightarrow\\ &\forall \mathfrak{a}\, [\neg\ u = \mathfrak{a} \mathbin{ə} \leq_{\mathfrak{q}}^{-1}]))] \rightarrow\\ &\infty = \text{anz}\,(u) \qquad (263\end{aligned}$$

Endlos ist die Anzahl der unter einen Begriff fallenden Gegenstände, wenn sich diese in eine Reihe ordnen lassen, die mit einem gewissen Gegenstande anfängt und endlos fortläuft, ohne sich zu verzweigen und ohne in sich zurückzukehren (S. 179).

$$\vdash \text{funk}\,(p) \rightarrow (c\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ \leq_p) \rightarrow (\neg\ n\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ <_p) \rightarrow$$
$$(m\,\text{ə}\,(c\,\text{ə}\ \leq_p) \rightarrow c\,\text{ə}\,(\text{zw}\,{}^{p}_{(m,n)})))) \qquad (274$$

Ein Gegenstand (c) gehört der von einem zweiten (m) bis zu einem dritten (n) laufenden Reihe einer Beziehung an, wenn diese eindeutig ist, wenn der dritte Gegenstand (n) nicht auf sich selbst in der Reihe dieser Beziehung folgt und wenn endlich der erste Gegenstand (c) sowohl der mit dem zweiten (m) anfangenden als auch der mit dem dritten (n) endenden Reihe dieser Beziehung angehört.

$$\vdash \text{funk}\,(q) \rightarrow (\neg\ n\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ <_q) \rightarrow (m\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ \leq_q) \rightarrow n\,\text{ə}\,(\text{zw}\,{}^{q}_{(m,n)}))) \qquad (344$$

$$\vdash d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,{}^{q}_{A}) \rightarrow \text{funk}\,(q) \qquad (265$$

S.249 |

$$\vdash d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,{}^{q}_{(x,y)}) \rightarrow d\,\text{ə}\,(y\,\text{ə}\ \leq_q) \qquad (269$$

$$\vdash d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,{}^{q}_{(x,y)}) \rightarrow x\,\text{ə}\,(d\,\text{ə}\ \leq_q) \qquad (270$$

Wenn ein Gegenstand einer von einem zweiten bis zu einem dritten laufenden Reihe angehört, so gehört er der mit dem zweiten anfangenden Reihe derselben Beziehung an.

$$\vdash a\,\text{ə}\,(\text{zw}\,{}^{\text{nf}}_{(\text{anz}\,(1),n)}) \rightarrow \neg\ a = \text{anz}\,(0) \qquad (312$$

Wenn ein Gegenstand der von der Eins bis zu einem zweiten Gegenstande laufenden Anzahlenreihe angehört, so ist er von der Null verschieden.

$$\vdash \text{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(n\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}) \rightarrow n = \text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{\text{nf}}_{(\text{anz}\,(1),n)}) \qquad (314$$

Jede endliche Anzahl ist die Anzahl der Glieder der von Eins bis zu ihr selbst laufenden Anzahlenreihe.

$$\vdash d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,{}^{q}_{(x,y)}) \rightarrow x\,\text{ə}\,(y\,\text{ə}\ \leq_q) \qquad (323$$

$$\vdash d\,\text{ə}\,(\text{zw}\,{}^{q}_{(x,y)}) \rightarrow \neg\ y\,\text{ə}\,(y\,\text{ə}\ <_q) \qquad (271$$

$$\vdash r\,\text{ə}\,(\text{zw}\,{}^{q}_{(x,x)}) \rightarrow r = x \qquad (282$$

$$\vdash (x, \text{anz}\,(1))\,\text{ə}\,((y,n)\,\text{ə}\ \leq_{(q\otimes\text{nf})}) \rightarrow (\text{funk}\,(q) \rightarrow (\neg\ y\,\text{ə}\,(y\,\text{ə}\ <_q) \rightarrow$$
$$\text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{q}_{(x,y)}) = \text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{\text{nf}}_{(\text{anz}\,(1),n)}))) \qquad (298$$

(S. 202)

$$\vdash \text{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(\text{zw}\,{}^{q}_{(x,y)})\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}) \qquad (325$$

Die Anzahl der Glieder einer von einem Gegenstande bis zu einem Gegenstande laufenden Reihe ist endlich.

$$\vdash \neg\ \forall\mathfrak{A}\,\forall\mathfrak{q}\,[\neg\ u = \text{zw}\,{}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \rightarrow \text{anz}\,(0)\,\text{ə}\,(\text{anz}\,(u)\,\text{ə}\ \leq_{\text{nf}}) \qquad (327$$

Wenn die unter einen Begriff fallenden Gegenstände in eine Reihe geordnet werden können, die von einem bestimmten Gegenstande bis zu einem bestimmten Gegenstande läuft, so ist ihre Anzahl endlich.

$$\vdash \forall \mathfrak{a}\, [g(\mathfrak{a}) = (\text{—}\, \mathfrak{a} \ni (\mathrm{zw}\, {}^{q}_{A}))] \rightarrow \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (g(\varepsilon)) = \mathrm{zw}\, {}^{q}_{A} \qquad (340$$

———————— ● ————————

$$\vdash \mathrm{anz}\,(0) \ni (\mathrm{anz}\,(u) \ni \ \leq_{\mathrm{nf}}) \rightarrow \neg\ \forall \mathfrak{A}\, \forall \mathfrak{q}\, [\neg\ \mathrm{ext}\, \varepsilon\, (\text{—}\, \varepsilon \ni u) = \mathrm{zw}\, {}^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{A}}] \qquad (348$$

Wenn die Anzahl der unter einen Begriff fallenden Gegenstände endlich ist, so lassen sich diese in eine Reihe ordnen, die von einem bestimmten Gegenstande bis zu einem bestimmten Gegenstande läuft (S. 224).

| S. 250

Wörterverzeichniss.

abbilden 57, 71.
Abzeichen 25, 66.
alle 24.
allgemein 24.
Allgemeinheit 11, 12, 31, 34.
andeuten 31, 32.
anfangen 60.
angehören 60, 201.
Anzahl 57, 58.
Anzahlenreihe 58,
  deren Unendlichkeit 144.
Argument 6, 37, 40.
Argumentstellen 6, 8, 13, 15.
Art der Argumente und Argumentstellen 40, 43.
ausdrücken 7, 50.

bedeuten 7, 31, 46.
Bedeutung 7, 46.
bedeutungsvoll 46.
Bedingungsstrich 20.
Begriff 3, 8, 38, 57,
  u-Begriff 71.
Begriffsschriftsatz 9, 44.
Begriffsumfang 8.
bezeichnen 7.
Beziehung 8, 57,
  p-Beziehung 71.
Buchstaben
  deutsche 13,
  grosse griechische 9,
  kleine griechische Vokale 15,
  kleine griechische als Abzeichen 66,
  lateinische 31.

Definition 44.
Definitionsdoppelstrich 44.
Doppelwerthverlauf 55.

Eigenname 7, 43.

Eigenschaft 3.
Eindeutigkeit 39, 55.
einfach Reihe 201.
einige 24.
Eins 58.
einseitig 64.
enden 60.
endlich 60, 137.
Endlos 150.
ergänzungsbedürftig 5, 8.

fallen unter 8.
Falsche, das 7.
folgen 59,
  unmittelbar in der Anzahlenreihe 58.
Folgerungen 25 ff..
Function 5, 6, 8, 11, 13, 37, 41.
Functionsbuchstabe 34, 42.
Functionsmarke 33, 44.
Functionsname 44,
  zweiseitiger 64.

Gebiet 13, 15, 31, 35.
Gedanke 7, 9, 50.
Gegenstand 3, 7, 37.
Gegenstandsbuchstabe 34, 42.
Gegenstandsmarke 33, 44.
gekoppelte Beziehung 179.
gesättigt 37.
giebt, es 12.
Gleichung 44.

Höhlung 13.

Inhaltsstrich 9.

Jeder 24.

Klammer 10, 11, 35, 64.
kein 24.
koppeln 179.

lateinisch 31, 33, 42, 44.
laufen 201.

Marke 33, 44.
Merkmal 3.
Minuszeichen 9.

Name 7, 32, 43, 44.

Null 58.

Oberglied 22.
oder 21.

Paar 179.
particulär 24.
passend 41.

recht 49.
rechtmässig 45.
Reihe 59, 60,
einfache 201.

Satz 9, 44.
Sinn 7, 51.
stehen in 8.
Schlüsse 25 ff..
Spiritus lenis 15.
Stufe 37, 38, 41.

Umfang einer Beziehung 55.
umkehren 27.
Umkehrung einer Beziehung 57.
und 21.
Unendlichkeit der Anzahlenreihe 144.
ungesättigt 5, 6, 37.
ungleichstufig 39.
unmittelbar folgen in der Anzahlenreihe 58.
untergeordnet 24.
Unterglied 22.
Unterordnung 24.
Urtheil 9.
Urtheilstrich 9.

übergeordnet 24.

Verneinungstrich 10.
verschmelzen 21.
Verschmelzung 10, 14, 20, 29.
Vertauschbarkeit 22.
verwandt 8.
vorhergehen 60.

Wagerechter 9, 10, 14, 20.
Wahre, das 7.
Wahrheitswert 7.
weder - noch 21.
Wendung 27.
wenn 24.

Werth 6.
Werthverlauf 7, 18.

Zeichen 43.
zugehörig 12, 13, 15, 41.
zusammengesetzte Beziehung 72.
zweiseitig 64.
Zwischenzeichen 44.

Berichtigungen

lauter Korrigenda