

Tallinna Tehnikaülikool
Mehaanikainstituut
Rakendusmehaanika õppetool

Andrus Salupere

Staatika

/EMR0010/

Loengukonspekt

Tallinn 2006

Eessõna

Käesolev loengukonspekt on mõeldud kasutamiseks Tallinna Tehnikaülikooli tehnilise füüsika eriala üliõpilastele staatika kursuse EMR0010 õppimisel (sobib ka vana õppekava samanimelisele ainele koodiga EMR3020). Kursuse programm — «Staatika EMR0010 laiendatud programm» (vt. <http://cens.ioc.ee/~salupere/loko.html>) — kujutab endast antud loengukonspekti lahutamatu lisa. Seal on esitatud õppeaine eesmärgid, maht, eeldused ja soovitatav kirjandus ning kirjeldatud töökorraldust.

Loengukonspekti koostamisel oli mul algseks eesmärgiks vabastada üliõpilased keskaegse munga tasemel tööst, st. definitsioonide ja teoreemide järjekordsest ümberkirjutamisest. Kuigi loengukonspekti käesolev versioon sisaldab palju jooniseid, valemite tuletuskäike ja teoreemide tõestusi, pole minu eesmärgiks olnud mitte uue õpiku, vaid loengukonspekti kirjutamine. Sellise loengukonspekti olemasolu korral saab loengutes ja harjutustundides pöörata põhitähelepanu definitsioonide ja teoreemide sisu avamisele, valemite tuletuskäikudele, teoreemide tõestustele ning näiteülesannetele. Teisisõnu, käesolev loengukonspekt annab vaid koos loengutes ja harjutustundides kirjapanduga tervikliku käsitluse õppeainest staatika (ja sedagi vaid programmi ulatuses).

Loengukonspekti koostamisel on kasutatud praktiliselt kõiki ülalnimetatud «Staatika programmi» kirjanduse loetelus esitatud õpikuid ja õppevahendeid. Kursuse ülesehitus tugineb Tallinna Tehnikaülikoolis teoreetilise mehaanika õpetamisel väljakujunenud traditsioonidele ja minu enda ligi kahekümneaastasele õpetamiskogemusele Tallinna Tehnikaülikoolis. Põhiõpikuna soovitan kasutada Ülo Lepiku ja Lembit Rootsi õpikut «Teoreetiline mehaanika», mida pean parimaks eestikeelseks õpikuks selles valdkonnas. Definitsioonid ja teoreemid on seal sõnastatud lühidalt ja selgelt ning käsitletavate probleemide olemus on avatud põhjalikult. Teised eestikeelsed õpikud ja õppevahendid jäävad selles osas Lepiku ja Rootsi õpikust kaugemale maha. Selguse poolest järgmine on minu arvamuse järgi vene keelest tõlgitud teoreetilise mehaanika õpik, mille autoriks on Semjon Targ.

Harjutustundides lahendatavad ülesanded on valdavas osas esitatud ülesannetekogus — A. Salupere. Staatika ülesanded. Tallinn 2006, <http://cens.ioc.ee/~salupere/loko.html>. Näiteülesandeid on loengukonspekti käesolevas versioonis suhteliselt vähe. Seetõttu tuleks kontrolltöödeks ja eksamiks õppimisel ning kodutööde tegemisel kasutada loengu ja harjutustundide materjale ning «Staatika Programmi» kirjanduse loetelus metoodiliste abimaterjalidena esitatud õppevahendeid.

Andrus Salupere

1 Sissejuhatus

Kursuse alguseks avame mõnede põhimõistete sisu.

Mehaanika on teadus, mis uurib tahkete kehade, vedelike ja gaaside liikumist, selle liikumise põhjusi ja tagajärgi.

Teoreetiline mehaanika ehk absoluutselt jäiga keha mehaanika ehk klassikaline mehaanika uurib absoluutselt jäikade kehade liikumist ja paigalseisu neile rakendatud jõudude toimetel.

Absoluutselt jäiga keha mis tahes kahe punkti vaheline kaugus on konstantne. Kõik kehad, mida me antud kursuses vaatleme, loeme absoluutselt jäikadeks. Tegelikult on siin loomulikult tegu abstraktsiooniga — me loeme deformatsioonid väikesteks ja ei võta neid arvutuste tegemisel arvesse.

Laias laastus võib teoreetilise mehaanika jagada *staatikaks* ja *dünaamikaks*.

Staatika uurib:

1. kehade tasakaalu (täpsemalt öeldes kehadele rakendatud jõusüsteemide tasakaalu);
2. jõusüsteemide lihtsustamist ehk taandamist.

Dünaamika võib omakorda jagada kolmeks osaks:

1. **Kinemaatika**, mis uurib liikumise geomeetrilisi seaduspärasusi.
2. **Punktmasside ja jäikade kehade dünaamika ehk klassikaline dünaamika**, mis uurib punktmasside ja jäikade kehade liikumist neile mõjuvate jõudude toimetel.
3. **Analüütiline mehaanika**, mis baseerub integraal-, diferentsiaal- ja variatsioonarvutusel ning tegeleb mehaanikaülesannete üldiste lahendusmeetodite leidmisega.

2 Jõud ja jõusüsteem

2.1 Jõu mõiste

Klassikalistes mehaanikakursustes käsitletakse *jõudu* kui kehade vastastikuse mõju mõõtu. Selline lähenemisviis on täiesti piisav nii käesoleva staatika kui ka järgneva dünaamika kursuse puhul. Seega kasutame järgnevat jõu definitsiooni:

Jõud on kehade vastastikuse mõju mõõduks.

- Vastastikune mõju võib olla nii otsene (kehad on omavahel kontaktis) kui kaudne (näiteks gravitatsioonijõud).
- Jõu päritolu võib olla väga erinev. Näiteks elastsusjõud, gravitatsioonijõud, elektromagnetjõud jne. Tavaliselt uuritakse mehaanikas vaid jõu mõju vaadeldavale kehale ning ei tunta jõu füüsikalise olemuse või päritolu vastu huvi.
- Jõu toimel võib keha kas deformeeruda või omandada kiirenduse.
- Jõud on vektor (vektoriaalne suurus)! Teda iseloomustavad: 1) moodul ehk arväärtus ehk suurus; 2) suund (siht); 3) rakenduspunkt. Trükikirjas tähistatakse jõuvektoreid tavaliselt \mathbf{F} , \mathbf{P} , \mathbf{G} jne., käsitsi kirjutades aga tehakse vastava tähe kohale kriips või nool.

Jõu mõjusirgeks nimetatakse sirget, mille sihis antud jõud mõjub. Teisisõnu, jõu mõjusirge on sirge, millel on antud jõuvektoriga rohkem kui üks ühine punkt.

Välisjõud ja sisejõud

Välisjõud — jõud, millega teised kehade mõjuvad vaadeldavale kehale.

Sisejõud — vaadeldava keha osade vahel mõjuvad jõud.

2.2 Jõusüsteemi mõiste

Jõusüsteemiks nimetatakse kehale mõjuvate jõudude kogumit.

Jaotus:

Koonduv jõusüsteem — koonduvasse jõusüsteemi kuuluvate jõudude mõjusirged lõikuvad ühes ja samas punktis.

Paralleeljõudude süsteem — paralleeljõudude süsteemi kuuluvate jõudude mõjusirged on paralleelsed.

Üldine jõusüsteem — jõusüsteemi, mis pole ei koonduv jõusüsteem ega paralleeljõudude süsteem, nimetatakse üldiseks jõusüsteemiks.

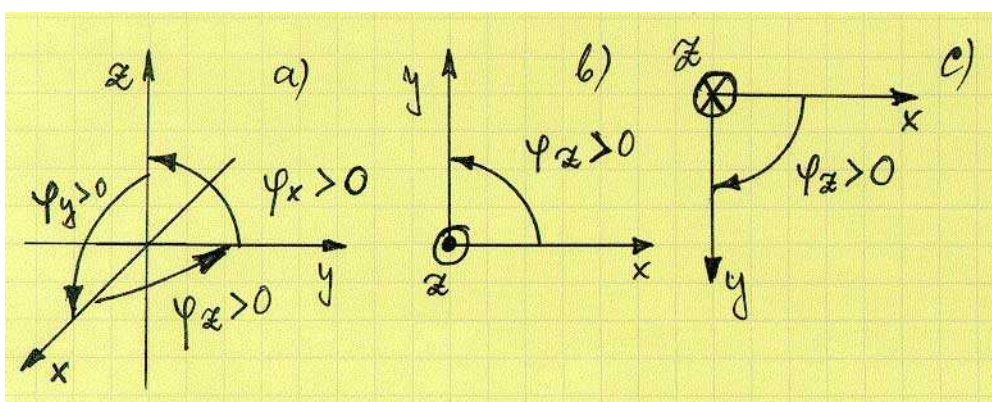
Tasapinnaline jõusüsteem — tasapinnalisse jõusüsteemi kuuluvate jõudude mõjusirged asuvad ühel ja samal tasandil.

Ruumiline jõusüsteem — ruumilisse jõusüsteemi kuuluvate jõudude mõjusirged ei asu ühel ja samal tasandil.

Ülaltoodud jõusüsteemide liigid pole üksteist välistavad. Näiteks võib koonduv jõusüsteem olla nii ruumiline kui tasapinnaline.

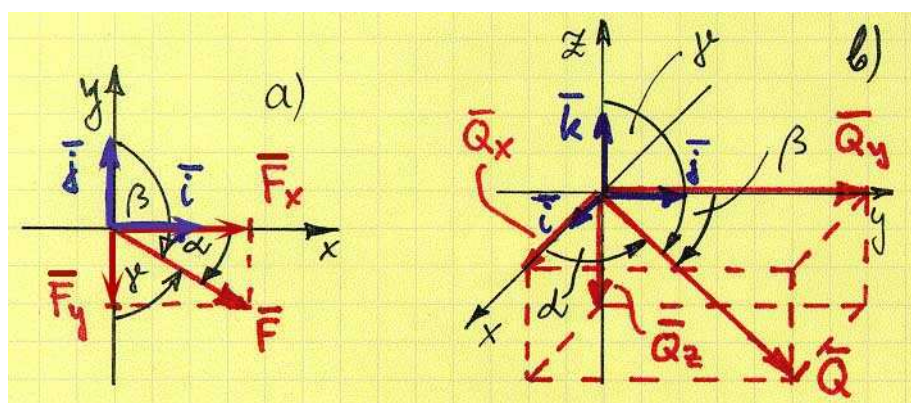
2.3 Jõu projektsioon teljel, jõu komponendid ja jõu projektsioon tasandil

Koordinaadid ja koordinaatteljed. Üldjuhul kasutame Descartes'i ristkoordinaate (DRK). *Koordinaatteljed peavad moodustama parema käe kolmiku* (vt. joonis 1). Ümber telje toimuva **pöörde positiivne suund** määratakse kruvireeglga — pöörde suund on positiivne, kui selle käigus liigub parema käe kruvi telje positiivses suunas.



Joonis 1: Parema käe teljestikud ja pöörde positiivsed suunad.

Jõu projektsioon teljel on skalaar. Vastavalt definitsioonile on vektori projektsioon võrdne teljesuunalise ühikvektori ja selle vektori skalaarkorrutisega. Joonisel 2 kujutatud juhtudel seega



Joonis 2: Jõuvektori projektsioonid ja jõuvektori komponendid.

$$\begin{aligned} F_x &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{i}; & F_y &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{j}; \\ Q_x &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{i}; & Q_y &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{j}; & Q_z &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1)$$

Samas on selge, et arvutuste teostamisel on mugavam kasutada valemeid

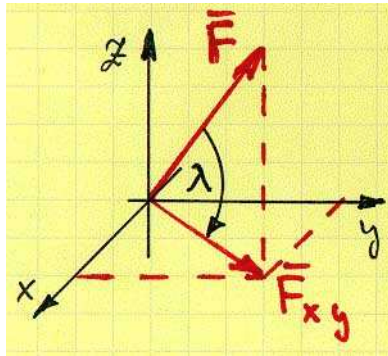
$$\begin{aligned} F_x &= F \cos \alpha = F \sin \gamma; & Q_x &= Q \cos \alpha; \\ F_y &= F \cos \beta = -F \sin \alpha = -F \cos \gamma; & Q_y &= Q \cos \beta; \\ & & Q_z &= Q \cos \gamma. \end{aligned} \quad (2)$$

Jõu komponent on vektor. Vaadaldaval juhul seega

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}; \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_x + \mathbf{Q}_y + \mathbf{Q}_z = Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3)$$

Valemis (3) on suurused $\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{Q}_x, \mathbf{Q}_y$ ja \mathbf{Q}_z jõudude \mathbf{F} ja \mathbf{Q} koordinaattelgedele x, y ja z sihilised komponendid ning suurused F_x, F_y, Q_x, Q_y ja Q_z jõudude \mathbf{F} ja \mathbf{Q} projektsioonid koordinaattelgedel x, y ja z .

Jõu projektsioon tasandil on vektor. Joonisel 3 kujutatud juhul on projektsiooni \mathbf{F}_{xy} moodul $F_{xy} = F \cos \lambda$.



Joonis 3: Jõu projektsioon tasandil.

Jõudude tähistamise puhul joonistel loobume edaspidi üldjuhul vektori märkidest (rasvast kirjust trükitud töö puhul) ja kirjutame jõuvektori juurde vaid tema pikkuse.

2.4 Jõudude liitmine

Kuna jõud on vektor, siis toimub jõudude liitmine täpselt samuti kui vektorite liitmine:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (4)$$

Geomeetriline liitmine. Jõudude geomeetriliseks liitmiseks tuleb konstrueerida jõurööpkülik või jõuhulknurk.

Analüütiline liitmine. Jõudude analüütiliseks liitmiseks tuleb kõik liidetavad jõud projekteerida koordinaattelgedele, liita saadud projektsioonid ning seejärel arvutada resultandi moodul ja suunakoosinused.

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^n F_{ix}, & R_y &= \sum_{i=1}^n F_{iy}, & R_z &= \sum_{i=1}^n F_{iz}, \\ R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \\ \cos \alpha &= \frac{R_x}{R}, & \cos \beta &= \frac{R_y}{R}, & \cos \gamma &= \frac{R_z}{R}. \end{aligned} \tag{5}$$

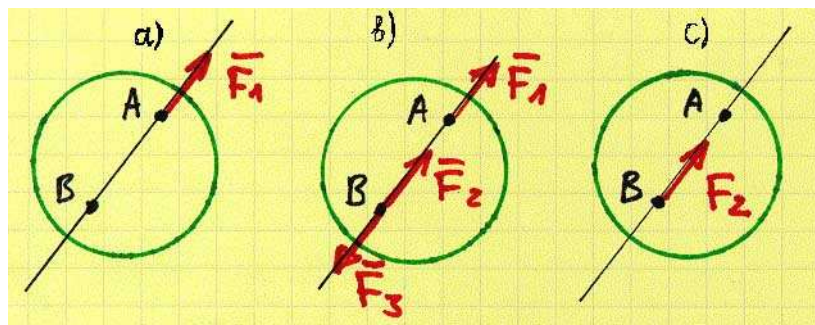
3 Staatika aksioomid ja põhiülesanded

I Tasakaalu aksioom: Kaks absoluutselt jäigale kehale rakendatud jõudu on tasakaalus siis ja ainult siis, kui neil on ühine mõjusirge ja nad on võrdvastupidised.

II Superpositsiooni aksioom: Tasakaalus olevate jõudude lisamine või ärajätmine ei mõjuta keha tasakaalu.

Näitame, et superpositsiooni aksioomi põhjal võib lugeda jõu rakendatuks tema mõjusirge mis tahes punkti.

1. Algselt on punkti A rakendatud jõud \mathbf{F}_1 (joonis 4 a).
2. Valime jõu \mathbf{F}_1 mõjusirgelt suvalise punkti B . Vastavalt superpositsiooni aksioomile võime punkti B lisada tasakaalus olevad jõud \mathbf{F}_2 ja \mathbf{F}_3 nii, et $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_1$ (joonis 4 b).
3. Kuna jõud \mathbf{F}_1 ja \mathbf{F}_3 on tasakaalus, siis võib nad ära jätta. Seega olemegi asendanud punkti A rakendatud jõu \mathbf{F}_1 punkti B rakendatud jõuga $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1$.



Joonis 4: Järeldus superpositsiooni aksioomist.

Järeldus: Jõud on libisev vektor — teda võib lugeda rakendatuks oma mõjusirge mis tahes punkti.

III Jõurööpküliku aksioom: Kaks ühte punkti rakendatud jõudu võib asendada ühe jõuga, mis on rakendatud samasse punkti ja kujutab endast antud jõududele ehitatud rööpküliku diagonaali.

Jõudu, millega saab asendada need kaks antud jõudu, nimetatakse **resultandiks**.

IV Mõju ja vastumõju aksioom (Newtoni III seadus): Kaks keha mõjutavad teineteist sama mõjusirget omavate võrdvastupidiste jõududega.

V Jäigastumisaksioom: Kui deformeeruv keha lugeda deformeerunud olekus absoluutselt jäigaks, siis antud jõusüsteemi puhul keha tasakaal ei muutu.

Näiteks rihtm, ahel, nõör jne.

VI Sidemete aksioom ehk sidemetest vabastatavuse printsiip: Iga seotud keha võib vaadelda vaba kehana, kui asendada sidemed sidemereaktsioonidega. (Sidemeid ja sidemetest vabastamist vaadeldakse lähemalt järgmises paragrahvis.)

Tasakaalus olev jõusüsteem. Jõusüsteemi, mis mõjudes paigalseisvale kehale ei kutsu esile selle liikumist, nimetatakse *tasakaalus olevaks jõusüsteemiks*.

Ekvivalentsed jõusüsteemid. Jõusüsteeme nimetatakse *ekvivalentseteks*, kui neil on sama mõju vaadeldavale kehale või nad on saadud üksteisest, kasutades staatika aksioome.

Newtoni seadused

I Punktmass on paigal või liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt, kui talle mõjuvad jõud on tasakaalus

II Punktmassi kiirendus on talle mõjuva jõuga võrdeline ja samasuunaline: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

III Vt. IV aksioom

Newtoni gravitatsiooniseadus:

$$F = G \frac{Mm}{r^2}, \text{ kus } G = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

Staatika põhiülesanded:

1. Antud jõusüsteemi taandamine lihtsaimale kujule.
2. Antud jõusüsteemi tasakaalutingimuste määramine.

4 Sidemed, sidemereaktsioonid ja sidemetest vabastatavuse printsiip

Sidemeteks nimetatakse keha liikumist kitsendavaid tingimusi. Tavaliselt moodustab sideme mingi teine keha. *Näited*

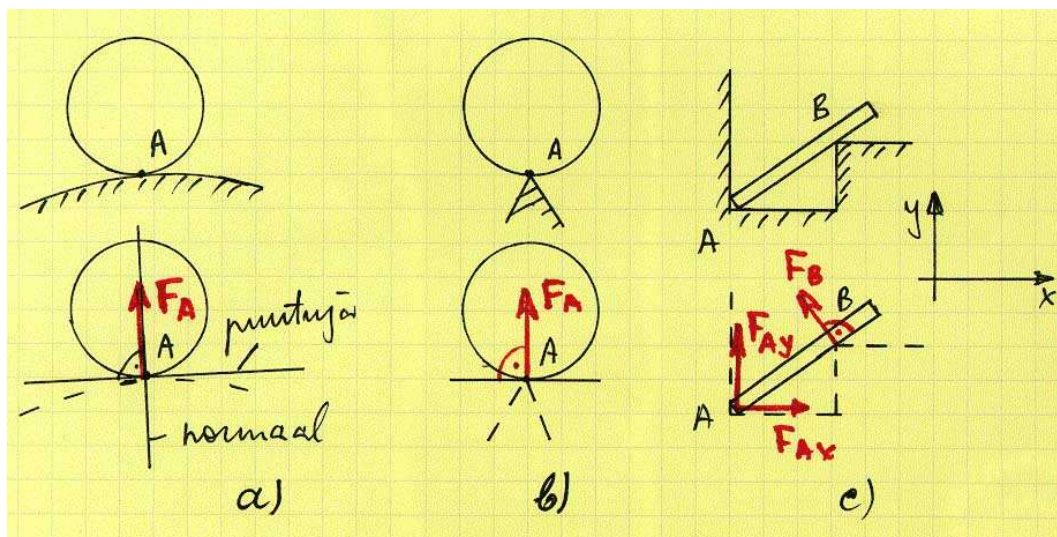
Vabaks kehaks nimetatakse keha, mille liikumist ei piira mitte ükski tingimus. Vaba keha saab antud asendist üle viia mis tahes uude asendisse.

Sidemereaktsioon ehk reaktsioonjõud on jõud, millega sidet moodustav keha mõjub vaadeldavale kehale. Reaktsioonjõudusid nimetatakse ka **passiivseteks jõududeks**, kõiki teisi jõudusid aga **aktiivseteks jõududeks**.

Inseneriülesannete puhul nimetatakse sidemeid tihti ka *tugedeks* ja vastavaid reaktsioonjõudusid *toereaktsioonideks*.

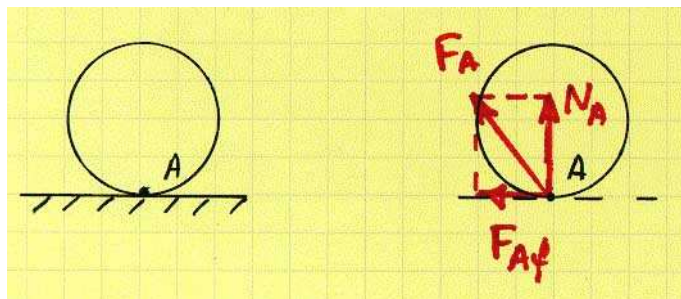
Sidemetest vabastatavuse printsiip: Iga seotud keha võib vaadelda vaba kehana, kui asendada sidemed sidemereaktsioonidega.

Sidemete liigid. Selleks, et määrata kehale mõjuva jõusüsteemi tasakaalutingimusi, see tähendab lahendada üht kahest staatika põhiülesandest, tuleb vaadeldavale kehale rakendada sidemetest vabastatavuse printsiipi. Viimase rakendamiseks on omakorda vaja teada millised reaktsioonjõud vastavad konkreetsele sidemele. Allpool ongi esitatud mehaanikaülesannetes sagedamini esinevad sidemed ja vastavad reaktsioonjõud. Parema loetavuse huvides on enamikel juhtudel joonistele 5–12 kantud vaid reaktsioonjõud.



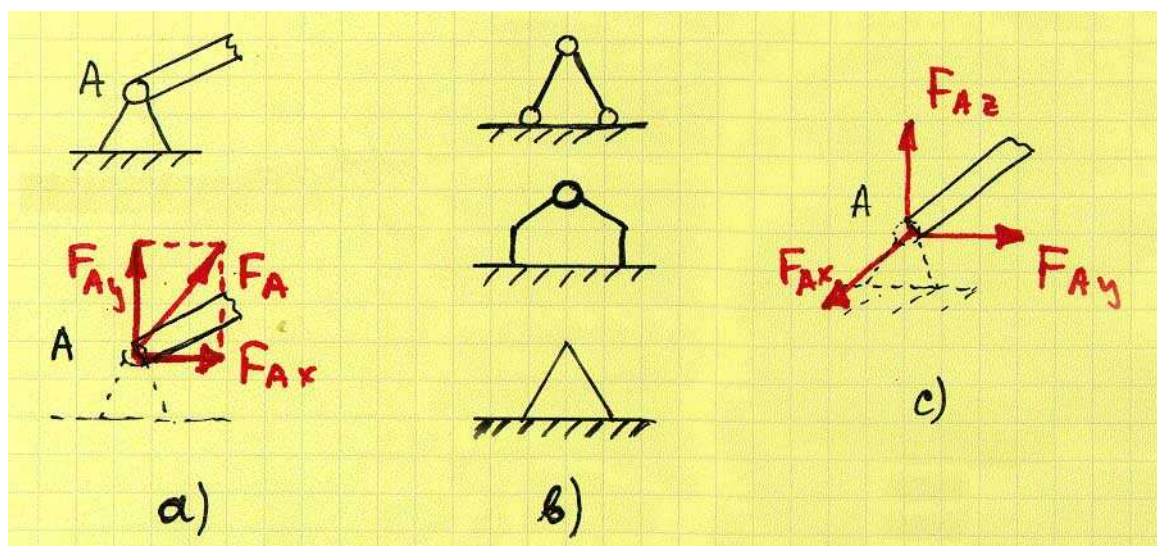
Joonis 5: Sileda pinna reaktsioon

Sile pind (joonis 5). Kui keha toetub siledale pinnale, siis hõõrdejõudu ülesande lahendamise puhul arvesse ei võeta. Järelikult on keha liikumine takistatud vaid kokkupuutepunktis määratud ühise normaali sihis ja side tuleb asendada selle ühise normaali sihilise jõuga (joonis 5 a). Tihti nimetatakse sellist sidemereaktsiooni normaalreaktsiooniks ja vastavat sidet vabaks toetuseks. Joonistel 5 b) ja c) on kujutatud mõned sileda pinna reaktsiooni erijuhud.



Joonis 6: Kareda pinna reaktsioon.

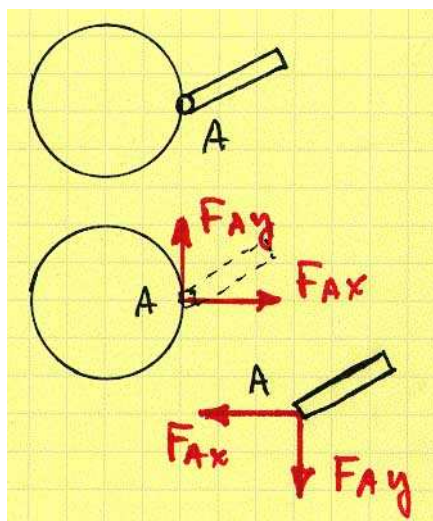
Kare pind (joonis 6). Kareda pinna puhul võetakse arvesse ka hõõrdejõud ja seetõttu on keha liikumine takistatud nii normaali, kui puutuja sihis. Summaarne reaktsioonjõud (kareda pinna reaktsioon) on normaalreaktsiooni N_A ja hõõrdejõu F_{Af} geomeetriline summa, st. $F_A = N_A + F_{Af}$.



Joonis 7: Liikumatu liigend reaktsioon.

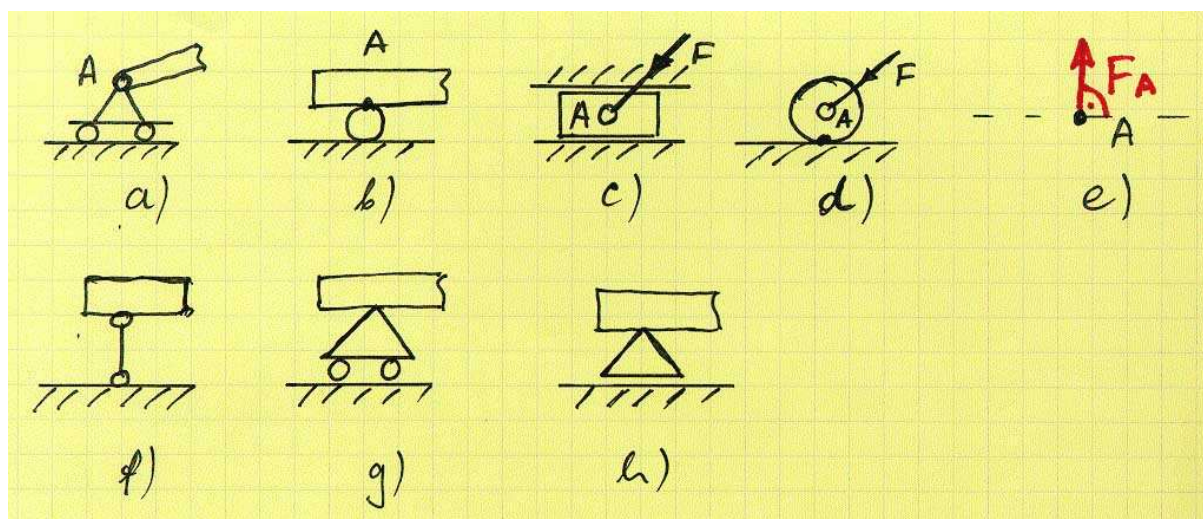
Liikumatu liigend¹ (joonis 7). Punktis, kus keha on kinnitatud liikumatu liigendiga, on takistatud kõik siirded (see tähendab, et see punkt peab jääma paigale), kuid lubatud on keha pöörded ümber kinnituspunkti. Liikumatu liigendi reaktsiooni suund sõltub aktiivsetest jõududest ning pole üldjuhul ette teada. Seetõttu väljendatakse ta tavaliselt koordinaattelgede sihiliste komponentide kaudu. Tasapinnalise jõusüsteemi puhul näiteks $F_A = F_{Ax} + F_{Ay}$ (joonis 7 a) ja ruumilise puhul $F_A = F_{Ax} + F_{Ay} + F_{Az}$ (joonis 7 c). Vastavaid liigendeid nimetatakse silindriliseks ja sfääriliseks. Kuna ka komponentide F_{Ax} , F_{Ay} ja F_{Az} suund pole üldjuhul enne ülesande lahendamist teada, siis märgitakse nad joonisele tavaliselt nii, kuidas on mugavam. Kui ülesande lahendamisel saadi vastavale projektsioonile positiivne väärtus, siis on joonisel näidatud suund õige. Kui aga projektsioonile saadi negatiivne väärtus, siis on reaktsioonjõu tegelik suund vastupidine joonisel näidatule. Liikumatu liigendi tähistamiseks kasutatakse väga erinevaid tingmärke, mõned nend on esitatud joonisel 7 b).

¹Mõnes õpikus nimetatakse liigendit liigendtoeks ja mõnes šarniiriks



Joonis 8: Liigendi reaktsioon.

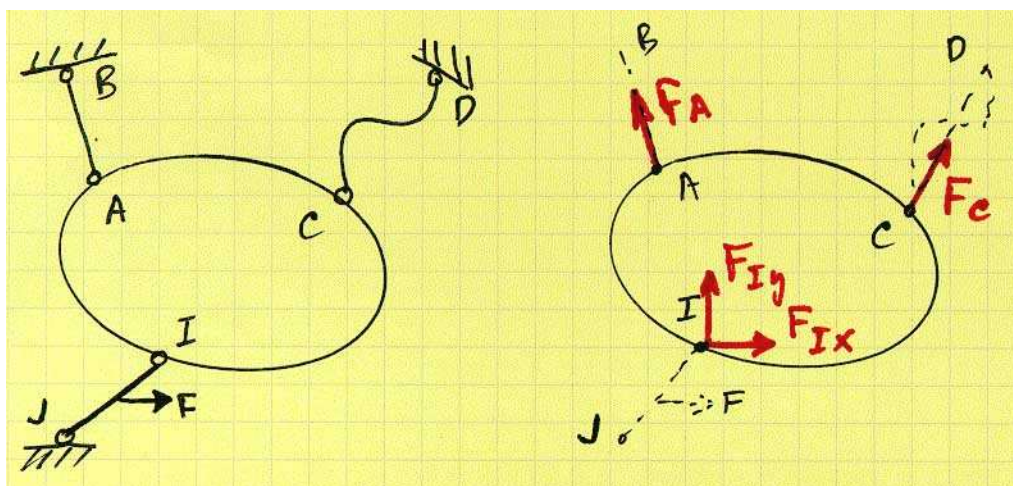
Liigend (joonis 8). Kui kaks keha on omavahel ühendatud liigendiga, siis tuleb ühenduspunkti vaadelda kui liikumatut liigendit: ühenduspunktis mõjuva reaktsioonijõu suund pole teada ja joonisele märgitakse kaks koordinaattelgede sihilist komponenti. Seejuures tuleb muidugi jälgida, et oleks rahuldatud Newtoni kolmas seadus: kaks keha mõjutavad teineteist võrdvastupidiste jõududega.



Joonis 9: Liikuva liigendi, rulli, liuguri ja ratta reaktsioonid.

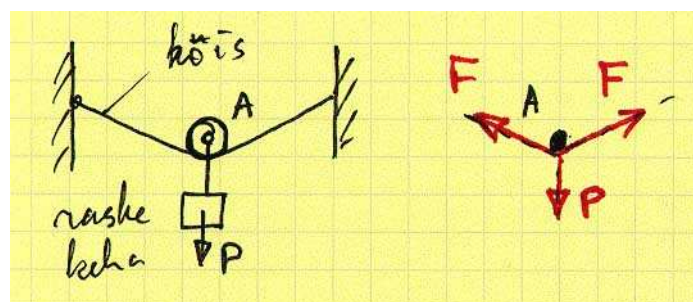
Liikuv liigend, rull (või kuul), liugur, ratas. Vastavad sidemed (toed) on kujutatud joonistel 9 a)–d). Selliste sidemete reaktsioonid on analoogsed sileda pinna reaktsiooniga ning on suunatud piki toetuspinna normaali (joonis 9 e). Nagu liikumatu liigendi puhul, pole ka liikuva liigendi tähistamisel erinevate õpikute autorid üksmeelel: joonistel 9 a), f), g) ja h) on toodud neli enamlevinud tähistust.

Kerge varras (joonis 10). Selliste sidemete puhul on mõlemas varda otsas liigendid, kuid kuna kerge varda puhul ei võeta arvesse varda kaalu, siis tuleb reaktsioonijõu leidmisel vaadelda kahte juhtu.



Joonis 10: Kerge varda reaktsioon.

1. Varda otspunktide vahel ei mõju jõudusid ega momente: vardad AB ja CD joonisel 10. Antud juhul on reaktsioonjõud suunatud piki varda otspunkte ühendavat sirget, sõltumata sellest, kas on tegu sirget või kõvera vardaga.
2. Varda otspunktide vahel mõjub jõud või moment: varras IJ joonisel 10. Sel juhul on reaktsioonjõud analoogne liikumatu liigendi reaktsiooniga.

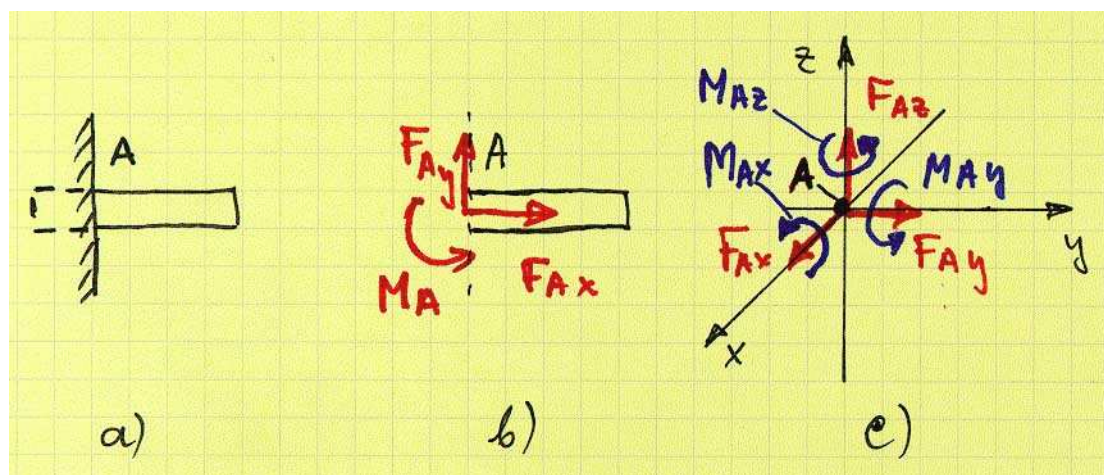


Joonis 11: Painduva ühenduse reaktsioon.

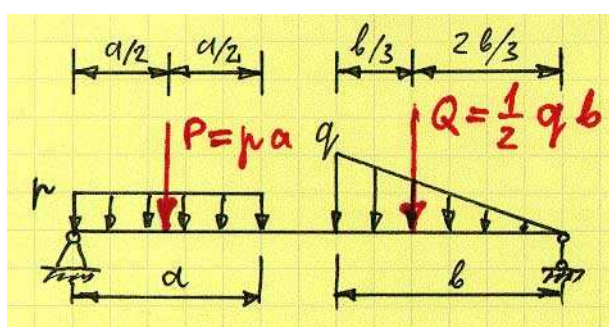
Painduv ühendus (nöör, köis, tross jms. joonis 11). Nagu kerge varda puhul, jäetakse ka siin sidet moodustava keha (trossi jms.) kaal tavaliselt arvesse võtmata. Erinevalt kergest vardast, mis võib töötada nii survele kui tõmbele, saab painduv ühendus töötada vaid tõmbele. Reaktsioonjõud on suunatud piki painduvat ühendust.

Jäik kinnitus² (joonis 12). Vaadeldava sideme puhul on takistatud nii kinnituspunkti siirded kui keha pöörded ümber kinnituspunkti. Näiteks on tala kas seina müüritud või teise keha külge keevitatud. Seega on tasapinnalise jõusüsteemi puhul reaktsioonideks kaks jõu komponenti ja üks moment: F_{Ax} , F_{Ay} ja M_A (joonis 12 b) ning ruumilise jõusüsteemi puhul kolm jõu komponenti ja kolm momendi komponenti F_{Ax} , F_{Ay} , F_{Az} , M_{Ax} , M_{Ay} ja M_{Az} (joonis 12 c).

²Kasutatakse ka terminit kinnistugi



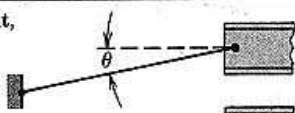
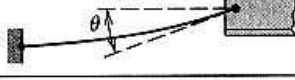
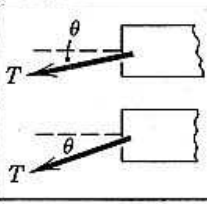




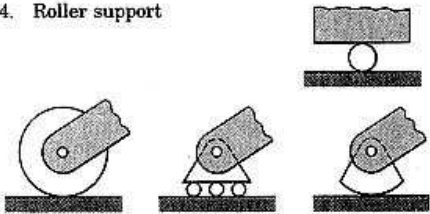
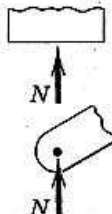

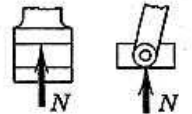
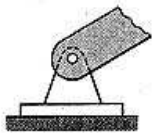
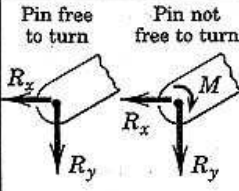
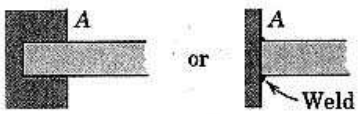
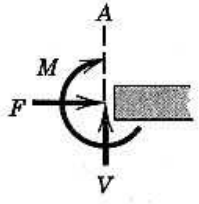
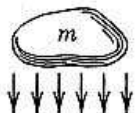
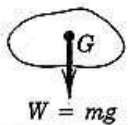
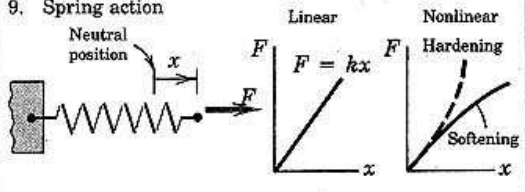
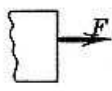
Joonis 12: Jäiga kinnituse reaktsioon.



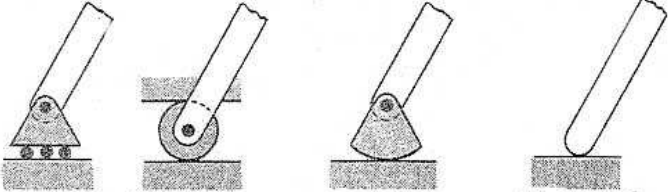

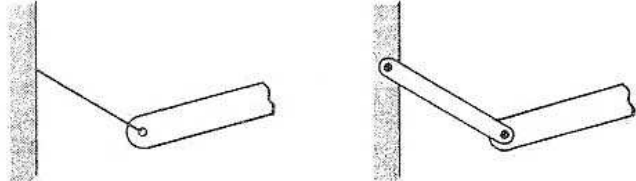
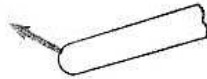
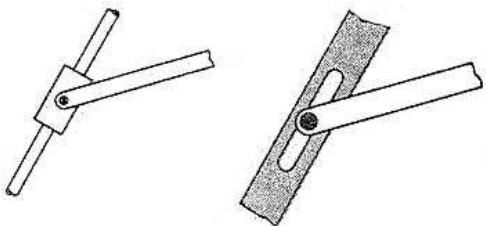
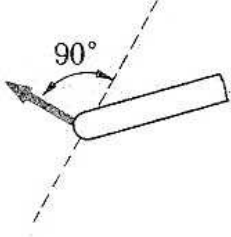

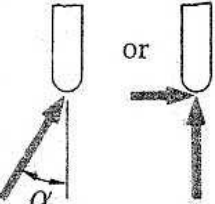
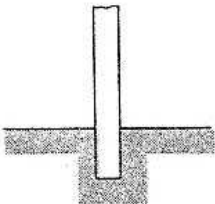
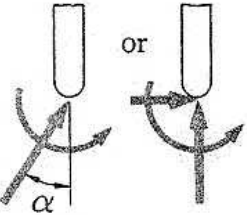
Joonis 13: Jäiga kinnituse reaktsioon.

Joonkoormus. Tasapinnaliste staatika ülesannete puhul on sageli mõistlik osa koormusi esitada nn. joonkoormusena. Joonkoormuse mõõtühikuks on N/m. Joonisel 13 on esitatud kaks enamesinevat joonkoormust: ristkülikkoormus ja kolmnurkkoormus. Esimene neist mõjub lõigul pikkusega a ja tema intensiivsus on p , teine mõjub lõigul pikkusega b ja tema maksimaalne intensiivsus on q . Nooled näitavad koormuse mõjumise suunda. Selliseid joonkoormust iseloomustavaid diagramme (graafikuid) nimetatakse joonkoormuse epüürideks. Staatika ülesannete puhul asendatakse joonkoormused üksikjõududega, mis mõjuvad läbi epüüri pinnakeskme ja mille moodul on võrdne epüüri pindalaga.

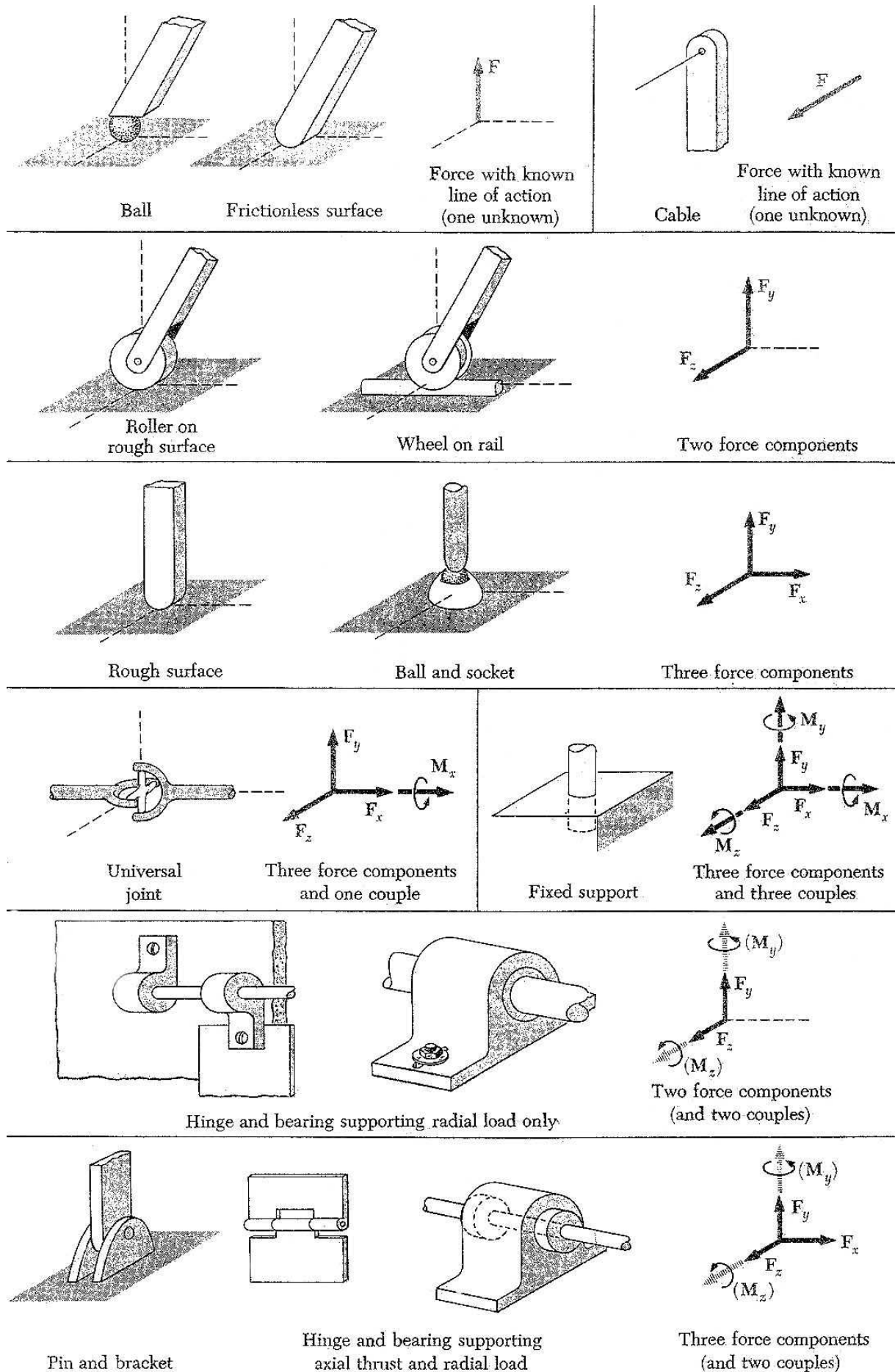
Kokkuvõttes tuleb öelda, et kuna erinevate riikide ja erinevate koolkondade autorid kasutavad sidemete jaoks erinevaid tähistusi, siis tuleb ülesannete lahendamise puhul lugeda tähelepanelikult ülesande teksti, et oleks võimalik otsustada, milline side on millises keha punktis. Joonistel 14–16 on esitatud mõned inglisekeelsest kirjandusest pärit näited sidemetest ja sidemereaktsioonidest.

MODELING THE ACTION OF FORCES IN TWO-DIMENSIONAL ANALYSIS	
Type of Contact and Force Origin	Action on Body to be Isolated
<p>1. Flexible cable, belt, chain, or rope</p> <p>Weight of cable negligible </p> <p>Weight of cable not negligible </p>	 <p>Force exerted by a flexible cable is always a tension away from the body in the direction of the cable.</p>
<p>2. Smooth surfaces</p> 	 <p>Contact force is compressive and is normal to the surface.</p>
<p>3. Rough surfaces</p> 	 <p>Rough surfaces are capable of supporting a tangential component F (frictional force) as well as a normal component N of the resultant contact force R.</p>
<p>4. Roller support</p> 	 <p>Roller, rocker, or ball support transmits a compressive force normal to the supporting surface.</p>
<p>5. Freely sliding guide</p> 	 <p>Collar or slider free to move along smooth guides; can support force normal to guide only.</p>
<p>6. Pin connection</p> 	<p>Pin free to turn Pin not free to turn</p>  <p>A freely hinged pin connection is capable of supporting a force in any direction in the plane normal to the axis; usually shown as two components R_x and R_y. A pin not free to turn may also support a couple M.</p>
<p>7. Built-in or fixed support</p> 	 <p>A built-in or fixed support is capable of supporting an axial force F, a transverse force V (shear force), and a couple M (bending moment) to prevent rotation.</p>
<p>8. Gravitational attraction</p> 	 <p>The resultant of gravitational attraction on all elements of a body of mass m is the weight $W = mg$ and acts toward the center of the earth through the center of mass G.</p>
<p>9. Spring action</p> <p>Neutral position x</p> <p>Linear $F = kx$</p> <p>Nonlinear Hardening</p> <p>Softening</p> 	 <p>Spring force is tensile if spring is stretched and compressive if compressed. For a linearly elastic spring the stiffness k is the force required to deform the spring a unit distance.</p>

Joonis 14: Näiteid sidemetest ja sidemereaktsioonidest I

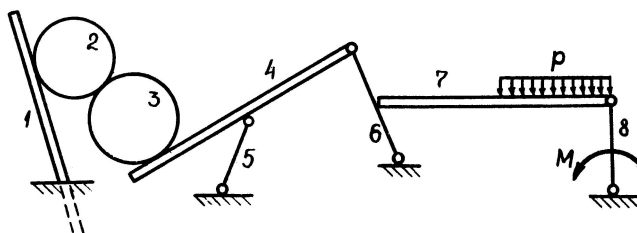
Support or Connection	Reaction	Number of Unknowns
 <p>Rollers Rocker Frictionless surface</p>	 <p>Force with known line of action</p>	1
 <p>Short cable Short link</p>	 <p>Force with known line of action</p>	1
 <p>Collar on frictionless rod Frictionless pin in slot</p>	 <p>Force with known line of action</p>	1
 <p>Frictionless pin or hinge Rough surface</p>	 <p>Force of unknown direction</p>	2
 <p>Fixed support</p>	 <p>Force and couple</p>	3

Joonis 15: Näiteid sidemetest ja sidemereaktsioonidest II



Joonis 16: Näiteid sidemetest ja sidemereaktsioonidest III

Näide.³ Vabastada nummerdatud kehad sidemetest ja märkida neile mõjuvad jõud. Kehad 1, 2, 3, 4 ja 7 on rasked, ülejäänud lugeda kergeteks⁴.



Joonis 17: Näide: jõudude märkimine

³Ülesande lahendus esitatakse loengus.

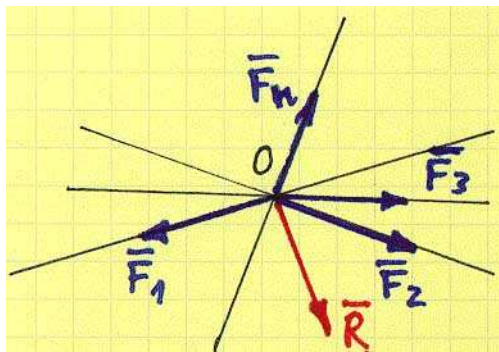
⁴Raskete kehade puhul tuleb võtta arvesse nende kaal, kuid kergete puhul mitte.

5 Koonduva jõusüsteemi tasakaal

Kõigepealt tuletame meelde koonduv jõusüsteemi ja jõusüsteemi resultandi definitsioonid.

Jõusüsteemi nimetatakse *koonduvaks*, kui kõikide vaadeldavasse süsteemi kuuluvate jõudude mõjusirged lõikuvad ühes ja samas punktis.

Jõusüsteemi resultant on (üks) jõud, mis on ekvivalentne vaadeldava jõusüsteemiga. (Resultandi mõiste juurde tuleme tagasi 8. peatükis, kui käsitleme jõusüsteemi taandamist.)



Joonis 18: Koonduva jõusüsteemi asendamine resultandiga.

Teoreem. Koonduv jõusüsteem on ekvivalentne resultandiga, mis on rakendatud vaadeldava süsteemi jõudude mõjusirgete lõikepunkti.

Tõestus. Vaatleme n jõust koosnevat koonduvat jõusüsteemi. Lähtudes superpositsiooniaksioomist (täpsemalt öeldes järeldusest, et jõud on libisev vektor) rakendame kõik jõud nende mõjusirgete lõikepunkti O (joonis 18). Seejärel rakendame korduvalt jõurööpküliliku aksioomi:

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \quad \mathbf{R}_{123} = \mathbf{F}_3 + \mathbf{R}_{12}, \quad \mathbf{R}_{1234} = \mathbf{F}_4 + \mathbf{R}_{123}, \quad \dots \quad \mathbf{R}_{1\dots n} = \mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

Seega olemegi asendanud n jõust koosneva koonduva jõusüsteemi ühe jõuga, mis on rakendatud punkti O .

————— *q. e. d.* —————

Teoreem. Koonduv jõusüsteem on tasakaalus siis ja ainult siis, kui tema resultant on võrdne nulliga (nullvektoriga)

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0. \quad (6)$$

Tõestus. Antud juhul tuleb tõestada nii tarvilikkus kui piisavus.

Piisavuse tõestamiseks tuleb näidata, et kui koonduv jõusüsteem on tasakaalus, siis on tema resultant võrdne nulliga.

Kui tähistada

$$\mathbf{R}^* = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{F}_i, \quad (7)$$

siis avaldub jõusüsteemi resultant kujul

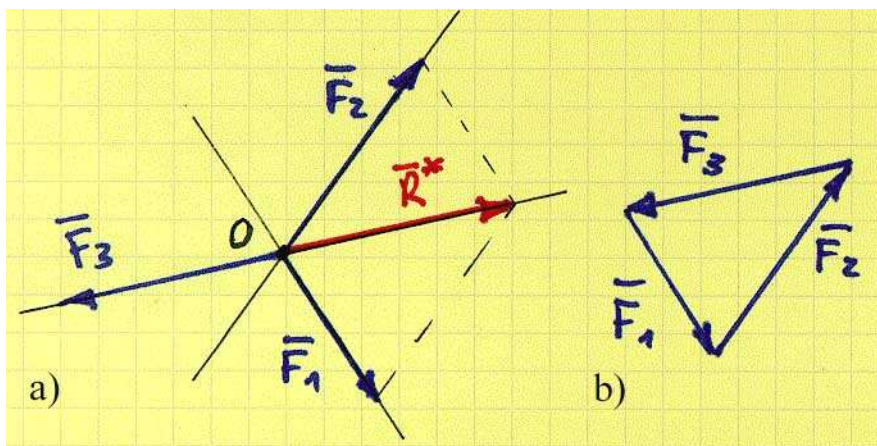
$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^* + \mathbf{F}_n, \quad (8)$$

st. kahe jõu summana. Kuna jõusüsteem on tasakaalus, siis vastavalt tasakaalu aksioomile peavad need kaks jõudu olema võrdvastupidised ja omama sama mõjusirget. Järelikult $\mathbf{R} = \mathbf{R}^* + \mathbf{F}_n = 0$ ja piisavus on tõestatud.

Tarvilikkuse tõestamiseks näitame, et kui koonduva jõusüsteemi resultant on võrdne nulliga, siis on koonduv jõusüsteem tasakaalus.

Tuleme tagasi avaldiste (7) ja (8) juurde. Kuna $\mathbf{R} = \mathbf{R}^* + \mathbf{F}_n = 0$, siis vastavalt tasakaalu aksioomile peavad jõud \mathbf{R}^* ja \mathbf{F}_n olema tasakaalus.

————— *q.e.d.* —————



Joonis 19: Teoreem kolmest mitteparalleelsest jõust.

Teoreem kolmest mitteparalleelsest jõust⁵ Kui kolm mitteparalleelset jõudu on tasakaalus, siis nad moodustavad tasapinnalise koonduva jõusüsteemi.

Tõestus. Vaatleme kolme jõudu \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 ja \mathbf{F}_3 (joonis 19 a), mis vastavalt eeldusele moodustavad tasakaalus oleva jõusüsteemi. Seega peab nende jõuvektorite summa olema null. Teisisõnu, nende kolme jõu geomeetrilisel liitmisel saame kolmnurga (joonis 19 b). Kuna kolmnurk omakorda määrab tasandi, siis on tegu tasapinnalise jõusüsteemiga.

Tähistame jõudude \mathbf{F}_1 ja \mathbf{F}_2 mõjusirgete lõikepunkti O (joonis 19 a). Vastavalt jõurööpküliku aksioomile võime jõud \mathbf{F}_1 ja \mathbf{F}_2 asendada ühe jõuga $\mathbf{R}^* = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$. Kuna jõusüsteem on tasakaalus, siis $\mathbf{R}^* + \mathbf{F}_3 = 0$. Tasakaaluaksioomi põhjal peavad seega jõud \mathbf{R}^* ja \mathbf{F}_3 omama sama mõjusirget ja olema võrdvastupidised. Järelikult peab ka jõu \mathbf{F}_3 mõjusirge läbima punkti O . Seega moodustavad jõud \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 ja \mathbf{F}_3 tasapinnalise koonduva jõusüsteemi.

————— *q.e.d.* —————

⁵Erinevad õpikud annavad sellele teoreemile väga erinevaid sõnastusi

NB! Antud teoreemi pöördteoreem ei kehti!

Tasakaalu analüütilised tingimused. Projekteeritme koonduva jõusüsteemi tasakaalutingimuse (6) kolmele koordinaatteljele, näiteks Descartes'i ristkoordinaatidele x, y ja z :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \end{array} \right. \quad (9)$$

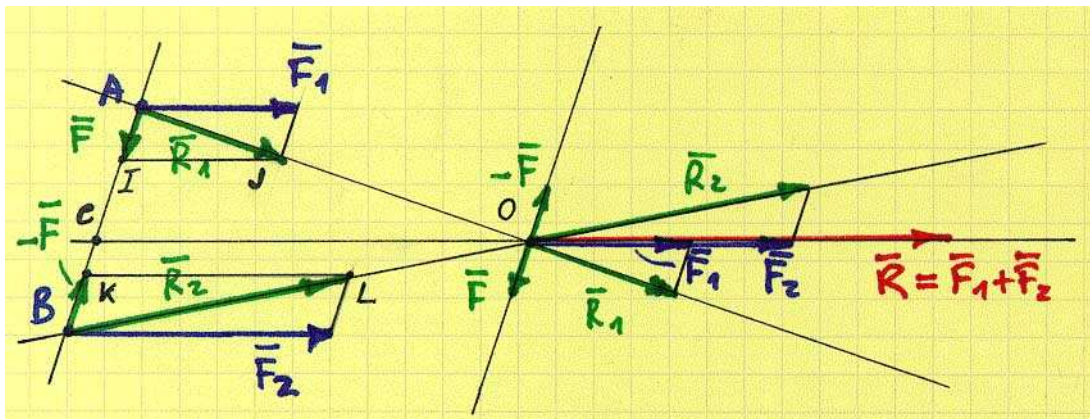
Tulemuseks ongi koonduva jõusüsteemi tasakaalu analüütilised tingimused — koonduv jõusüsteem on tasakaalus siis ja ainult siis, kui vaadeldavate jõudude projektsioonide summad kõigil kolmel koordinaatteljel võrduvad nulliga.

Märkus. Need kolm koordinaattelge ei pruugi olla üksteisega risti, kuid nad ei tohi asuda ühel ja samal tasandil ja ükski paar kolmest ei tohi olla paralleelne telgede paar.

6 Paralleeljõudude liitmine, jõupaar

Paralleeljõud. Kui jõudude mõjusirged on paralleelsed, siis nimetatakse neid paralleelseteks jõududeks ehk paralleeljõududeks. Eristatakse samasuunalisi ja vastassuunalisi paralleeljõude. Viimaseid nimetatakse mõnes õpikus *antiparalleelseteks jõududeks*.

6.1 Kahe samasuunalise paralleeljõu liitmine



Joonis 20: Samasuunaliste paralleeljõudude liitmine.

Vaatleme keha, mille punktidesse A ja B on rakendatud kaks samasuunalist paralleeljõudu \mathbf{F}_1 ja \mathbf{F}_2 (joonis 20). Nende kahe jõu liitmine toimub järgmiselt:

1. Tõmbame läbi punktide A ja B sirge ning lisame superpositsiooniaksioomi põhjal sirge AB sihilise tasakaalus oleva jõusüsteemi \mathbf{F} , $-\mathbf{F}$.
2. Asendame jõusüsteemi $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}, -\mathbf{F}$ jõududega $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F} = \mathbf{R}_1$ ja $\mathbf{F}_2 + (-\mathbf{F}) = \mathbf{R}_2$, mille mõjusirged lõikuvad punktis O .
3. Kanname jõud \mathbf{R}_1 ja \mathbf{R}_2 piki nende mõjusirgeid punkti O .
4. Tõmbame läbi punkti O sirgega AB paralleelse sirge ja lahutame jõud \mathbf{R}_1 ja \mathbf{R}_2 algkomponentideks
5. Superpositsiooniaksioomi põhjal jätame ära tasakaalus oleva jõusüsteemi $\mathbf{F}, -\mathbf{F}$. Alles jäävad punkti O rakendatud ühise mõjusirgega jõud \mathbf{F}_1 ja \mathbf{F}_2 . Nende summa $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ (moodul $R = F_1 + F_2$).
6. Jõu \mathbf{R} mõjusirge lõikab sirget AB punktis C , mille asukoht on määratud avaldisega

$$\frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC} = \frac{R}{AB} \quad (10)$$

Viimase avaldise tuletamiseks vaatleme kahte sarnaste kolmnurkade paari — $\triangle AOC \sim \triangle AJI$ ja $\triangle BOC \sim \triangle BLK$ —

$$\left. \begin{array}{l} \frac{F_1}{CO} = \frac{F}{AC} \Rightarrow F \cdot CO = F_1 \cdot AC \\ \text{ja} \\ \frac{F_2}{CO} = \frac{F}{BC} \Rightarrow F \cdot CO = F_2 \cdot BC \end{array} \right\} \Rightarrow F_1 \cdot AC = F_2 \cdot BC.$$

Teisendame saadud avaldist

$$F_1 \cdot AC = F_2 \cdot BC \quad | +F_2 \cdot AC \Rightarrow \underbrace{(F_1 + F_2)}_R \cdot AC = F_2 \cdot \underbrace{(AC + BC)}_{AB} \Rightarrow \frac{F_2}{AC} = \frac{R}{AB},$$

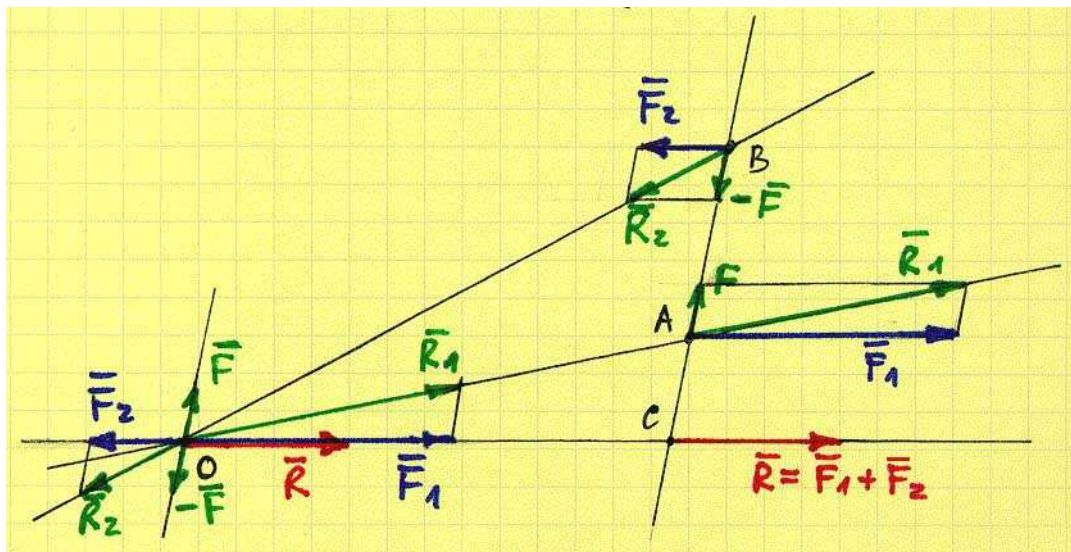
$$F_1 \cdot AC = F_2 \cdot BC \quad | +F_1 \cdot BC \Rightarrow F_1 \cdot \underbrace{(AC + BC)}_{AB} = \underbrace{(F_1 + F_2)}_R \cdot BC \Rightarrow \frac{F_1}{BC} = \frac{R}{AB}.$$

Kokku saame avaldise (10).

Kokku: Kahe samasuunalise paralleeljõu \mathbf{F}_1 ja \mathbf{F}_2 resultant \mathbf{R} on liidetavate jõududega samasuunaline vektor, mille moodul $R = F_1 + F_2$. Resultandi \mathbf{R} mõjusirge jaotab jõudude \mathbf{F}_1 ja \mathbf{F}_2 rakenduspunktide vahelise sirglõigu AB osadeks AC ja BC pöördvõrdeliselt liidetavate jõudude moodulitega, see tähendab vastavalt avaldisele (10).

6.2 Kahe vastassuunalise paralleeljõu liitmine

Kahe vastassuunalise paralleeljõu liitmine toimub eelnevaga analoogse geomeetrilise konstruktsiooni abil. Valem (10) jääb kehtima, kuid $R = |F_1 - F_2|$ ja punkt C asub väljaspool lõiku AB .



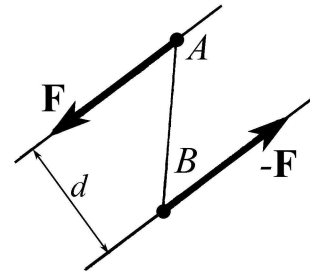
Joonis 21: Vastassuunaliste paralleeljõudude liitmine.

Kokku: Kahe vastassuunalise paralleeljõu \mathbf{F}_1 ja \mathbf{F}_2 resultant \mathbf{R} on vektor, mis on suunatud vektoritest \mathbf{F}_1 ja \mathbf{F}_2 suurema suunas. Resultandi \mathbf{R} mõjusirge lõikab jõudude \mathbf{F}_1 ja \mathbf{F}_2 rakenduspunkte läbivat sirget punktis C väljaspool lõiku AB . Lõikude AC ja BC pikkused on pöördvõrdelised liidetavate jõudude moodulitega F_1 ja F_2 , see tähendab kehtib valem (10).

Eelpool toodud tuletuskäiku saab kasutada ka juhtudel, kui on vaja lahutada ühte jõudu kaheks temaga paralleelseks komponendiks.

6.3 Jõupaar

Vaatleme, paralleeljõudude erijuhtu $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$. Nüüd on vektorite \mathbf{R}_1 ja \mathbf{R}_2 mõjusirged paralleelsed ja $\mathbf{R} = 0$. Kuna aga jõudude \mathbf{F}_1 ja \mathbf{F}_2 mõjusirged ei ühti, siis pole vaadeldav jõusüsteem tasakaalus. Samas ei saa neid kahte jõudu asendada ühe jõuga. Järelikult on antud juhul tegu jõusüsteemi elemendiga, mida ei saa lihtsustada.



Jõupaariks nimetatakse kahest mittekolleenaarsest jõust \mathbf{F} ja $-\mathbf{F}$ koosnevat jõusüsteemi. Tähistatakse $(\mathbf{F}, -\mathbf{F})$.

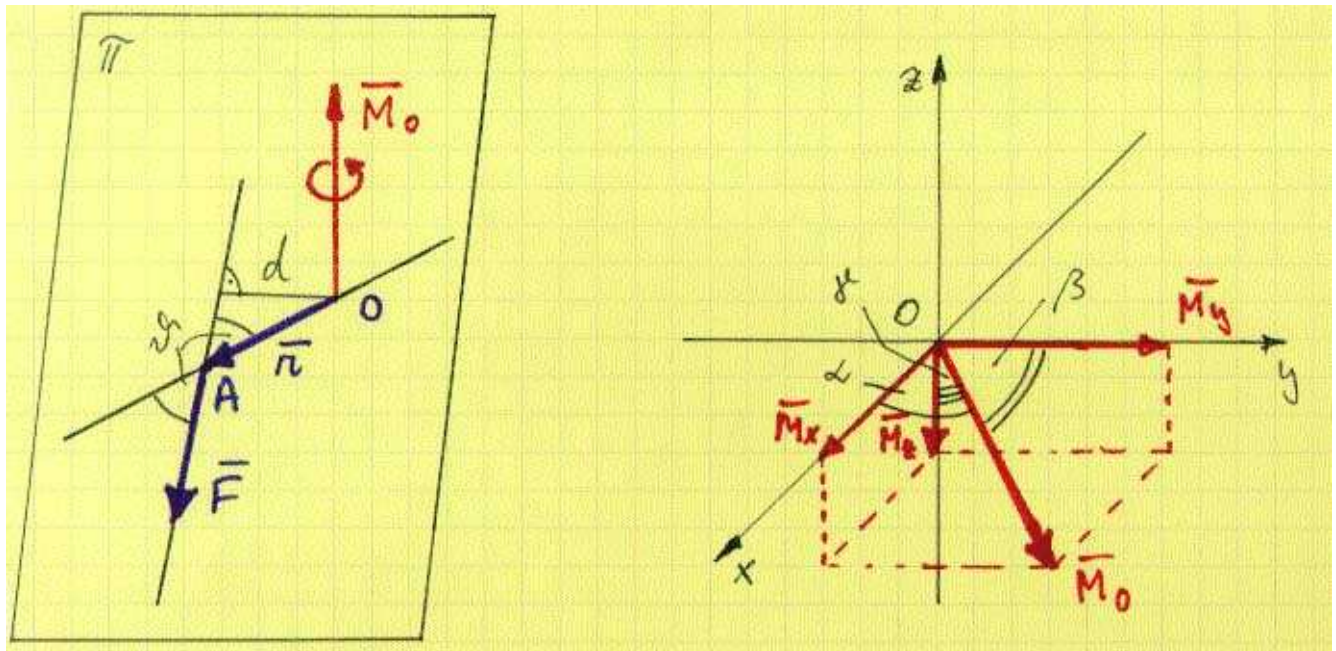
Jõupaari õlaks nimetatakse jõudude \mathbf{F} ja $-\mathbf{F}$ mõjusirgete vahelist kaugust d .

Jõupaari tasandiks nimetatakse tasandit, mis on määratud jõuvektoritega \mathbf{F} ja $-\mathbf{F}$.

Keha, millele mõjub vaid jõupaar hakkab pöörlema ümber jõupaari tasandiga ristuva telje. Seega, kuigi $\sum F_{ix} = \sum F_{iy} = \sum F_{iz} = 0$, pole keha tasakaalus.

7 Jõu moment. Jõupaari moment

7.1 Jõu moment punkti suhtes



Joonis 22: Jõu moment punkti suhtes.

Jõu momendiks punkti suhtes nimetatakse vektorit, mis võrdub jõu rakenduspunkti kohavektori ja jõuvektori vektorkorrutisega.

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad M_O \equiv |\mathbf{M}_O| = Fr \sin \vartheta = Fd. \quad (11)$$

Jõu moment iseloomustab jõu pööravat toimet. Momentvektori \mathbf{M}_O suurus (ehk moodul) ja suund sõltub punkti O valikust, kuid ei sõltu punkti A valikust jõu mõjusirgel. Momentvektori \mathbf{M}_O mõjusirge määrab telje, mille ümber jõud \mathbf{F} püüab tekitada pöörlemist. Pöörde suund määratakse kruvireeglga — kui (parema käe) kruvi teljesihilise liikumise suund ühtib momentvektori suunaga, siis keha pöörlemise suund ühtib kruvi pöörlemise suunaga. Ja vastupidi, kui kruvi pöörata keha pöörlemise suunas, siis tema teljesihilise liikumise suund ühtib momentvektori suunaga.

Momentvektori projektsioonid ja momentvektori komponendid.

Kui $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ ja $\mathbf{r} = (x, y, z)$, siis

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \dots = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k} = \mathbf{M}_x + \mathbf{M}_y + \mathbf{M}_z. \quad (12)$$

Siin \mathbf{M}_x , \mathbf{M}_y ja \mathbf{M}_z on momentvektori \mathbf{M}_O koordinaattelgede x, y, z sihilised komponendid ning M_x, M_y ja M_z momentvektori \mathbf{M}_O projektsioonid koordinaattelgedele x, y, z . On selge, et momentvektori \mathbf{M}_O projektsioonid

$$M_x = yF_z - zF_y, \quad M_y = zF_x - xF_z, \quad M_z = xF_y - yF_x, \quad (13)$$

moodul

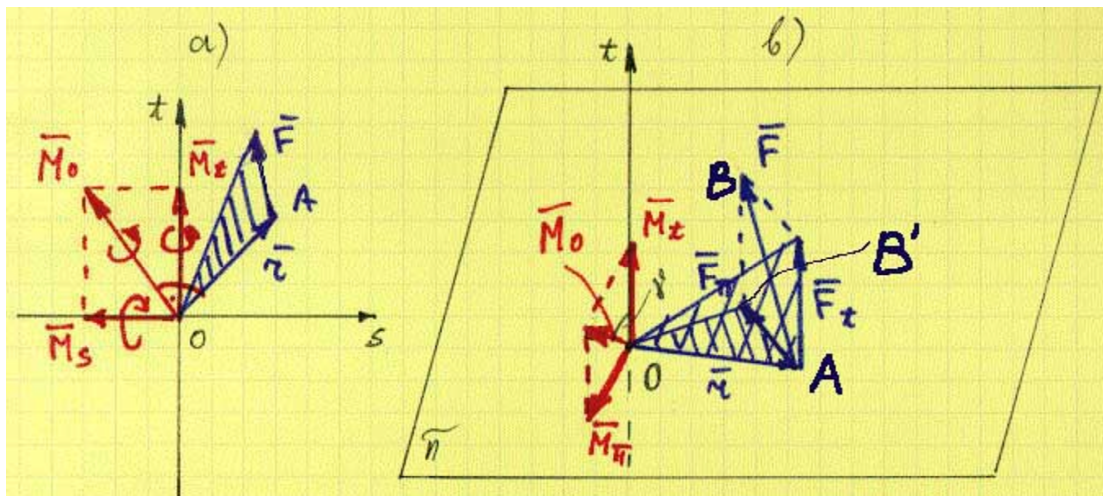
$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}, \quad (14)$$

ja suunakoosinused

$$\cos \alpha = \frac{M_x}{M_O}, \quad \cos \beta = \frac{M_y}{M_O}, \quad \cos \gamma = \frac{M_z}{M_O}. \quad (15)$$

Momendid M_x , M_y ja M_z iseloomustavad jõu \mathbf{F} pööravat toimet telgede x , y ja z suhtes.

7.2 Jõu moment telje suhtes



Joonis 23: Jõu moment telje suhtes.

Eelmises alajaotuses käsitletud momentvektori komponente (ja projektsioone) võib leida suvaliste telgede jaoks. Näiteks $\mathbf{M} = \mathbf{M}_t + \mathbf{M}_s$, kus momendid \mathbf{M}_t ja \mathbf{M}_s iseloomustavad jõu \mathbf{F} pööravat toimet vastavalt telgede t ja s suhtes (joon. 23 a).

Momente \mathbf{M}_t ja \mathbf{M}_s (samuti M_x , M_y ja M_z) nimetame jõu momentideks telgede t ja s (x , y ja z) suhtes.

Järgnevalt näitame, et jõu moment telje suhtes võrdub momendiga, mille annab selle jõu projektsioon vaadeldava teljega ristuv tasandil telje ja tasandi lõikepunkti suhtes.

Vaatleme jõudu \mathbf{F} , mis on rakendatud punkti A (joon. 23 b). Paneme läbi punkti A tasandi $\pi \perp t$ ja lahutame jõu \mathbf{F} kaheks komponendiks: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_\pi$. Leiame momendi

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_t + \mathbf{F}_\pi) = \dots$$

Seega moment $\mathbf{M}_t(\mathbf{F}) = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_\pi)$,

—————*q.e.d.*—————

Mehaanikaülesannete lahendamise puhul on peaasjalikult vaja leida momendi projektsioone koordinaattelgedel. Üldjuhul on need projektsioonid leitavad valemist $M = \pm Fd$, kus

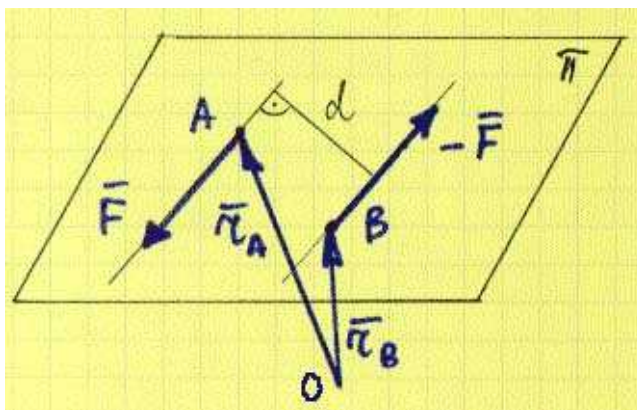
d on jõu õlg ja märk ($\ll + \gg$ või $\ll - \gg$) määratakse krüvireegli abil. Tavaliselt lihtsustub momentvektori projektsioonide leidmine, kui lahutada vaadeldav jõud \mathbf{F} (koordinaat)telgede sihiliseltks komponentideks. Näiteks, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z$. Väga tihti vaadeldaksegi momenti telje suhtes kui skalaarset (märgiga) suurus.

Antud alajaotuse lõpetuseks näitame, et telje t mis tahes punkti O suhtes leitud momendi projektsioon vaadeldaval teljel on konstantne.

Vastavalt vektorkorrutise definitsioonile on $M_0 = 2S_{\Delta_{OAB}}$, $\mathbf{M}_0 \perp \Delta_{OAB}$, $M_t = 2S_{\Delta_{OAB'}}$ ja $\mathbf{M}_t \perp S_{\Delta_{OAB'}}$ (joon. 23 b). Teiselt poolt, $M_t = M_0 \cos \gamma$ ja $S_{\Delta_{OAB'}} = S_{\Delta_{OAB}} \cos \gamma$ (sest γ on nurk vaadeldavate kolmnurkadega määratud tasandite vahel). Kui muutub punkti O asukoht vaadeldaval teljel, siis muutuvad nii nurk γ kui moment \mathbf{M}_0 (ning vastav $S_{\Delta_{OAB}}$). Samas jääb $S_{\Delta_{OAB'}}$ konstantseks. Järelikult jääb konstantseks ka vastav moment \mathbf{M}_t .

7.3 Jõupaari moment

Jõupaari moodustavad kaks võrdvastupidist jõudu \mathbf{F} ja $-\mathbf{F}$, millel on erinev mõjusirge.



Joonis 24: Jõupaari moment.

Jõupaari moodustavad jõuvektorid \mathbf{F} ja $-\mathbf{F}$ määravad ära **jõupaari tasandi**.

Teoreem. Jõupaari moment võrdub ühe jõupaari moodustava jõu momendiga teise rakenduspunkti suhtes.

Tõestus: Leiame jõupaari momendi meelevaldse punkti O suhtes:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}, -\mathbf{F}) = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}) + \mathbf{M}_O(-\mathbf{F}) = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} = \overline{BA} \times \mathbf{F}.$$

See on jõu \mathbf{F} moment punkti B suhtes. Analoogselt näitame, et

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}, -\mathbf{F}) = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}) + \mathbf{M}_O(-\mathbf{F}) = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = -(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \times (-\mathbf{F}) = \overline{AB} \times (-\mathbf{F}).$$

Viimane on aga jõu $-\mathbf{F}$ moment punkti A suhtes. Kokku olemegi näidanud, et jõupaari $(\mathbf{F}, -\mathbf{F})$ moment suvalise punkti O suhtes

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}, -\mathbf{F}) = \mathbf{M}_A(-\mathbf{F}) = \mathbf{M}_B(\mathbf{F}). \quad (16)$$

————— *q. e. d.* —————

Jõupaari moment on vabavektor, mis on risti jõupaari tasandiga ja teda võib lugeda rakendatuks suvalisse punkti.

Käesoleva alajaotuse lõpuks on sõnastatud kolm teoreemi, mille tõestused leiab lugeja Ülo Lepiku ja Lembit Rootsi teoreetilise mehaanika õpikust.

Teoreem. Jõupaari võib tema tasandis ülekanda teise asendisse ilma, et tema mõju vaadeldavale kehale muutuks.

Teoreem. Jõupaari mõju kehale ei muutu, kui see jõupaar kanda üle mis tahes teise tasapinda, mis on paralleelne antud tasapinnaga.

Teoreem. Jõupaarid, mille momentvektorid on võrdsed, on ekvivalentsed.

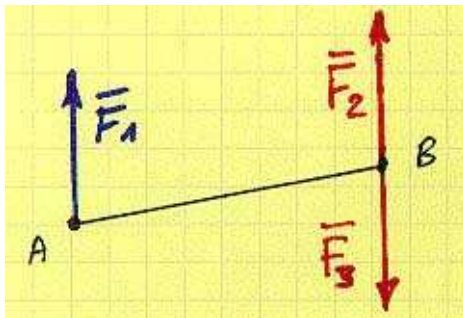
Kokku: Jõupaari mõju kehale on täielikult määratud selle jõupaari momentvektoriga.

Jõupaaride liitmine toimub nagu vektorite liitmine. Tulemuseks on samuti jõupaar.

8 Jõusüsteemi taandamine

8.1 Lemma jõu paraleellükkest

Lemma. Jäiga keha mis tahes punktis A rakendatud jõu võib paralleelselt tema mõju-sirgega üle kanda uude rakenduspunkti B , kui lisada punktis A rakendatud jõu moment punkti B suhtes.



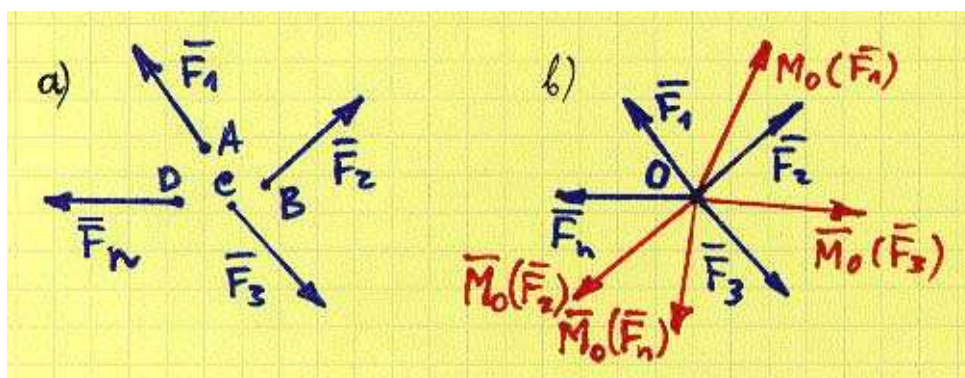
Joonis 25: Lemma jõu paraleellükkest

Tõestus: Algselt on keha punkti A rakendatud jõud \mathbf{F}_1 (joonis 25). Lisame punkti B tasakaalus olevad jõud $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_1$. Nüüd aga moodustavad jõud \mathbf{F}_1 ja \mathbf{F}_3 jõupaari, mille moment $\mathbf{M}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_3) = \mathbf{M}_B(\mathbf{F}_1)$. Seega oleme asendanud punktis A mõjuva jõu \mathbf{F}_1 punktis B mõjuva jõuga $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1$ ja momendiga $\mathbf{M}_B(\mathbf{F}_1)$.

—————*q. e. d.*—————

8.2 Jõusüsteemi peavektor ja peamoment

Staatika põhiteoreem (Poinsot' teoreem): Iga jäigale kehale rakendatud jõusüsteemi saab asendada taandamistsentrisse rakendatud jõusüsteemi peavektoriga ja jõusüsteemi peamomendiga taandamistsentri suhtes.



Joonis 26: Staatika põhiteoreem

Tõestus: Vaatleme meelevaldset jõusüsteemi $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$. Viime kõik need n jõudu paralleellükkega suvalisse ruumpunkti O . Vastavalt eelnevale lemmale tuleb igale jõule \mathbf{F}_i lisada moment $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i)$. Tulemuseks on, et punktis O on nüüd rakendatud n jõuvektorit ja n momentvektorit ehk jõupaari momenti. Liidame need jõud ja momendid:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i). \quad (17)$$

Siin ja edaspidi nimetame punkti O *taandamistsentriks*, vektorit \mathbf{R} *jõusüsteemi peavektori*ks ja vektorit \mathbf{M}_O *jõusüsteemi peamomendiks* taandamistsentri (punkti O) suhtes.

Kuna nii vaadeldava jõusüsteemi, kui taandamistsentri valik oli meelevaldne, siis kehtib ülaltoodu iga jõusüsteemi korral.

—————*q.e.d.*—————

Märkus: Iga jäigale kehale rakendatud jõusüsteemi saab taandada ka kaheks kiiva mõju-sirgega jõuks. Tõestust vaata Ülo Lepiku ja Lembit Rootsi teoreetilise mehaanika õpikust.

Teoreem. Kõik jõusüsteemid, millel on sama peavektor ja sama peamoment fikseeritud taandamistsentri suhtes, on ekvivalentsed.

Tõestus: Vaatleme kahte jõusüsteemi $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ ja $\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \dots, \mathbf{F}'_m$, mis mõlemad taanduvad üheks ja samaks peavektoriks \mathbf{R} ja peamomendiks \mathbf{M}_O taandamistsentri O suhtes.

Kuna kõik teisendused toimuvad staatika aksioomide põhjal, siis on nad pööratavad. See tähendab, et läbi peavektori \mathbf{R} ja peamomendi \mathbf{M}_O on võimalik teisendada jõusüsteem $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ jõusüsteemiks $\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \dots, \mathbf{F}'_m$ ja vastupidi. Kuna teisendused põhinevad staatika aksioomidel, siis on need kaks jõusüsteemi ekvivalentsed.

—————*q.e.d.*—————

8.3 Jõusüsteemi invariantid

Püüame leida kaks jõusüsteemi iseloomustavat suurust, mis ei sõltu taandamistsentri valikust. Teisisõnu, meie eesmärgiks on leida kaks *jõusüsteemi invarianti*.

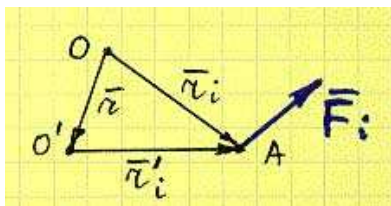
Esimeseks invariantiks on jõusüsteemi peavektor $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$. Tõepoolest, on ükskõik, kus ruumpunktis me liidame vektorid \mathbf{F}_i , tulemus on ikka sama.

Uurime, kuidas on lugu peamomendiga. Vaatleme kahte taandamistsentrit O ja O' (joonis 27). Vastavad peamomendid

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad \text{ja} \quad \mathbf{M}_{O'} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i. \quad (18)$$

Kuna $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}$, siis

$$\mathbf{M}_{O'} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i - \sum_{i=1}^n \mathbf{r} \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_O - \mathbf{r} \times \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_O - \mathbf{r} \times \mathbf{R}. \quad (19)$$

Joonis 27: Punkti A kohavektorid \mathbf{r} ja \mathbf{r}' .

Seega on selge, et \mathbf{M}_O pole invariant. Korrutame avaldist (19) skalaarselt peavektoriga \mathbf{R} :

$$\mathbf{M}_{O'} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} - \underbrace{(\mathbf{r} \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{R}}_{=0, \text{ sest } \mathbf{r} \times \mathbf{R} \perp \mathbf{R}}.$$

Seega

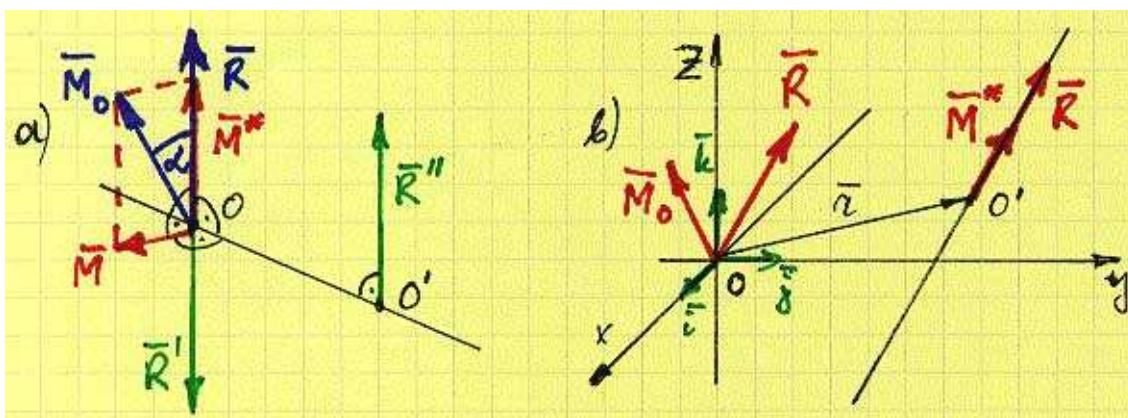
$$\mathbf{M}_{O'} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} \quad (20)$$

ja suurus $\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R}$ on invariantne suurus. Kuna vastavalt skalaarkorrutise definitsioonile $\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} = M_O R \cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{R})$ ja \mathbf{R} on invariant, siis ka peamomendi projektsioon peavektori suunal $M_O \cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{R})$ on invariant.

Kokku: Jõusüsteemi invariantid on peavektor ja peamomendi projektsioon peavektori suunal.

8.4 Jõukruvi ehk dünaam

Olgu jõusüsteem taandatud punkti O . Üldiselt pole peavektor \mathbf{R} ja peamoment \mathbf{M}_O paralleelsed. Seame eesmärgiks leida selline taandamistsenter O' , mille puhul jõusüsteemi peavektor ja peamoment on paralleelsed (joonis 28 a).



Joonis 28: Jõukruvi ehk dünaam

Tähistame peamomendi projektsiooni peavektori suunal

$$M^* = M_O \cos \alpha = \frac{\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R}}{R}. \quad (21)$$

Lahutame momendi \mathbf{M}_O kaheks

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}^* + \mathbf{M}, \quad (22)$$

kus \mathbf{M}^* on invariant ja $\mathbf{M} \perp \mathbf{R}$. Seega on eesmärgiks leida taandamistsenter O' , mille puhul $\mathbf{M} = 0$ ja $\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}^*$. Selleks asendame kõigepealt momendi \mathbf{M} jõupaariga $(\mathbf{R}', \mathbf{R}'')$, kus $R = R' = R''$. Tulemuseks on jõusüsteem $\mathbf{R}, \mathbf{R}', \mathbf{R}'', \mathbf{M}^*$. Punkti O rakendatud tasakaalus olevad jõud \mathbf{R}, \mathbf{R}' võib ära jätta ja momendi \mathbf{M}^* kui invariandi võib rakendada punkti O' . Kuna $M = R \cdot OO'$, siis punktide O ja O' vaheline kaugus

$$OO' = \frac{M}{R}. \quad (23)$$

Kokkuvõttes oleme taandanud vaadeldava jõusüsteemi punkti O' rakendatud üheks jõuks \mathbf{R} ja üheks jõupaari momendiks \mathbf{M}^* , mis omab jõuga \mathbf{R} sama mõjusirget. Seega on jõupaari tasand risti jõusüsteemi peavektoriga \mathbf{R} . Tulemust nimetatakse *jõukruviks* ehk *dünaamikiks*.

Nii \mathbf{M}^* kui \mathbf{R} , rakendatuna punkti O' , määravad ära sirge (nende mõjusirge). Seda sirget nimetatakse *tsentraalteljeks*. Igas selle sirge punktis taandub vaadeldav jõusüsteem dünaamikiks.

Teoreem: Peamoment \mathbf{M}^* on minimaalne kõikvõimalikest jõusüsteemi peamomentidest.

Tõestus: Tsentraalteljel asuva punkti O' puhul $\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}^*$. Suvalise punkti O'' puhul, mis ei asu tsentraalteljel, $\mathbf{M}_{O''} = \mathbf{M}^* + \mathbf{M}$, kus $\mathbf{M} = \overline{O''O'} \times \mathbf{R}$. Seega tsentraaltelje välise punkti O'' korral $\mathbf{M}_{O''} > \mathbf{M}^*$.

————— *q.e.d.* —————

Järgnevalt leiame tsentraaltelje võrrandi (joonis 28 b). Avaldise (19) põhjal $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O - \mathbf{r} \times \mathbf{R}$. Kuna $\mathbf{M}^* \parallel \mathbf{R}$, siis $\mathbf{M}^* = p\mathbf{R}$, kus konstanti p nimetatakse jõukruvi parameetriks. Kokku seega

$$p\mathbf{R} = \mathbf{M}_O - \mathbf{r} \times \mathbf{R}. \quad (24)$$

Arvestades, et

$$\begin{cases} \mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k}, \\ \mathbf{M}_O = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}, \\ \mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}, \end{cases} \quad (25)$$

saab avaldis (24) kuju

$$\begin{aligned} p(R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k}) &= (M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}) - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = \\ &= [M_x - (yR_z - zR_y)]\mathbf{i} + [M_y - (zR_x - xR_z)]\mathbf{j} + [M_z - (xR_y - yR_x)]\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (26)$$

Järgnevalt võrrutame vektorite \mathbf{i} , \mathbf{j} ja \mathbf{k} kordajad:

$$\begin{cases} pR_x = M_x - (yR_z - zR_y), \\ pR_y = M_y - (zR_x - xR_z), \\ pR_z = M_z - (xR_y - yR_x). \end{cases} \quad (27)$$

Viimaste põhjal saamegi *tsentraaltelje võrrandi*

$$\frac{M_x - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_y - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_z - (xR_y - yR_x)}{R_z} = p = \frac{M^*}{R}. \quad (28)$$

Võrrandist (28) saab tuletada kaks lineaarselt sõltumatut tasandi võrrandit. Nende tasandite lõikejoon ongi tsentraaltelg.

Kokkuvõte. Öeldakse, et jõusüsteem on taandatud lihtsaimale kujule, kui algne n jõust koosnev süsteem on taandatud peavektoriks \mathbf{R} ja minimaalseks peamomendiks \mathbf{M}^* , mis mõlemad mõjuvad tsentraalteje sihis.

Jõusüsteemi taandamine lihtsaimale kujule toimub järgmise skeemi põhjal.

1. Jõusüsteem taandatakse suvalisse punkti O — saadakse jõusüsteemi peavektor \mathbf{R} ja peamoment \mathbf{M}_O .
2. Leitakse vähim peamoment, see tähendab peamomendi projektsioon peavektori suunal

$$M^* = \frac{\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R}}{R}$$

3. Võrrandite (28) abil määratakse tsentraaltelg.

8.5 Jõusüsteemi taandamise erijuhud

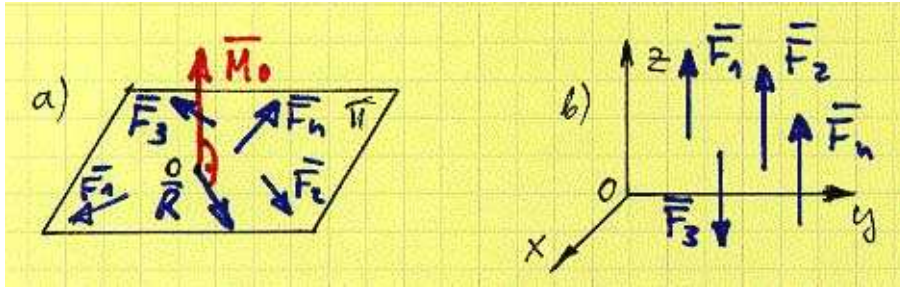
1. $\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} \neq 0$ (see tähendab, et $\mathbf{M}_O \neq 0$, $\mathbf{R} \neq 0$ ja $\mathbf{M}^* \neq 0$) — jõusüsteem taandub dünaamikaks.
2. $\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} = 0$ — neli erijuhtu
 - (a) $\mathbf{M}_O = \mathbf{R} = 0$ — jõusüsteem on tasakaalus
 - (b) $\mathbf{M}_O = 0$, $\mathbf{R} \neq 0$ — punkti O rakendatud resultant, kusjuures \mathbf{R} mõjusirge on tsentraalteljeks. Sama olukord, st. $\mathbf{M}_O = 0$, $\mathbf{R} \neq 0$, on \mathbf{R} mõjusirge igas punktis.
 - (c) $\mathbf{M}_O \neq 0$, $\mathbf{R} = 0$ — jõupaar, tsentraaltelg puudub ja taandamistsentri valik on vaba.
 - (d) $\mathbf{M}_O \neq 0$, $\mathbf{R} \neq 0$, $\mathbf{M}_O \perp \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{M}^* = 0$ — resultant, mis mõjub tsentraalteljel (28).

Resultanti ja peavektorit ei tohi ära segada! *Jõusüsteemi peavektor* leidub alati ja ta on võrdne kõigi vaadeldavasse jõusüsteemi kuuluvate jõudude geomeetrilise sumмага. *Jõusüsteemi resultant* on üks jõud, millega võib asendada vaadeldava jõusüsteemi. Jõusüsteemil saab olla resultant vaid siis, kui $\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} = 0$ (vt. juhud 2(b) ja 2(d)).

8.6 Erikujuliste jõusüsteemide taandamine

Koonduv jõusüsteem. Taandamistsentriks tuleb valida jõudude mõjusirgete lõikepunkt ning jõusüsteem on kas (a) tasakaalus või (b) taandub resultandiks.

Tasapinnaline jõusüsteem. Antud juhul asuvad kõik jõud ühel ja samal tasandil, näiteks tasandil π (joonis 29 a). Seega ka peavektor $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$ asub samal tasandil ja



Joonis 29: Tasapinnalise jõusüsteemi ja paralleeljõudude süsteemi taandamine

peamoment $\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i)$ on risti vaadaldava tasandiga. Järelikult $\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} = 0$ ja jõusüsteem ei taandu dünaamiks. Seega jääb kolm võimalust (vaata eelmise alajaotuse juhtu 2):

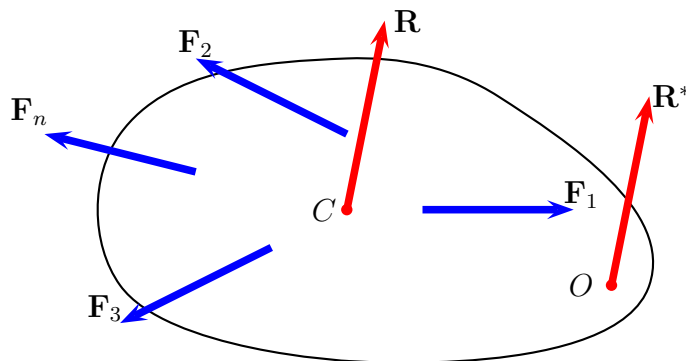
- (a) jõusüsteem on tasakaalus;
- (b) jõusüsteem taandub jõupaariks;
- (c) jõusüsteem taandub resultandiks.

Paralleeljõudude süsteem. Siin on tasapinnalise jõusüsteemiga analoogne olukord. Olgu kõik jõud paralleelsed z -teljega (joonis 29 b). Seega on ka peavektor \mathbf{R} paralleelne z -teljega ning peamoment \mathbf{M}_O temaga risti. Järelikult skalaarkorrutis $\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} = 0$, jõusüsteem ei taandu dünaamiks ja jäävad samad võimalused, kui tasapinnalise jõusüsteemi puhul.

8.7 Varignon'i teoreem

Teoreem. Kui jõusüsteem taandub resultandiks, siis resultandi moment mingi fikseeritud punkti suhtes võrdub kõigi vaadeldava jõusüsteemi jõudude sama punkti suhtes leitud momentide geomeetrilise summaga.

Tõestus: Vaatleme jõusüsteemi $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$, mis taandub punktis C rakendatud resultandiks \mathbf{R} . Kui viime \mathbf{R} paralleellükkega punkti O (\mathbf{R}^* joonisel 30), siis peame lisama momenti $\mathbf{M}_O(\mathbf{R}) = \overline{OC} \times \mathbf{R}$. Teisest küljest, kui taandame vaadeldava jõusüsteemi punkti O , siis saame peavektori \mathbf{R} ja peamomendi $\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i)$. Kuna kõik kolm jõusüsteemi, 1) \mathbf{R} punktis C , 2) $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}$ ja $\mathbf{M}_O(\mathbf{R})$ punktis O ja 3) $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}$ ja $\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i)$



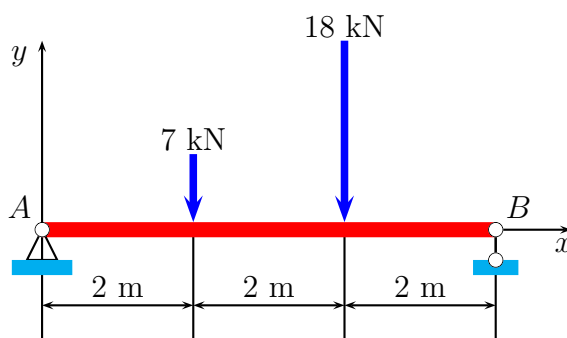
Joonis 30: Varignon'i teoreem

punktis O , on ekvivalentsed esialgse süsteemiga $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$, siis peavad neil olema ka samad peamomendid punkti O suhtes, see tähendab

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i). \quad (29)$$

————— *q.e.d.* —————

Rakendamise näide. Vaatleme tala, millele on rakendatud kaks paralleelset jõudu joonisel 31 näidatud viisil. Leida nende kahe paralleeljõu resultandi rakenduspunkti x koordinaat.



Joonis 31: Varignon'i teoreemi rakendamine.

Varignon'i teoreemi põhjal $M_A(R) = -Rx = -2 \cdot 7 - 4 \cdot 18$. Kust $x = 86/25 \approx 3,44\text{m}$.

On selge, et paralleelsete jõudude liitmiseks tuletatud valemeid on tunduvalt tülilikam kasutada, kui Varignon'i teoreemi.

9 Jõusüsteemi tasakaal

9.1 Jõusüsteemi tasakaalu tingimused

Jõusüsteem on tasakaalus parajasti siis, kui peavektor \mathbf{R} ja mingi punkti O suhtes leitud peamoment \mathbf{M}_O on võrdsed nulliga:

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i = 0, \quad \mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i) = 0. \quad (30)$$

Analüütiliste tasakaalutingimuste leidmiseks tuleb (vektoriaalsed) tasakaalutingimused (30) projekteerida kolmele koordinaatteljele (näiteks DRK):

Analüütiliste tasakaalutingimuste leidmiseks tuleb nii jõusüsteemi peavektor kui peamoment projekteerida kolmele koordinaatteljele:

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0, & \sum_i F_{iy} = 0, & \sum_i F_{iz} = 0, \\ \sum_i M_x(\mathbf{F}_i) = 0, & \sum_i M_y(\mathbf{F}_i) = 0, & \sum_i M_z(\mathbf{F}_i) = 0. \end{cases} \quad (31)$$

Tasakaalus olev keha ei pea ilmingimata paigal seisma — ta võib liikuda ühtlaselt ja sirgjooneliselt (inertsiaalselt).

Tasapinnaline jõusüsteem. Valime z -telje nii, et kõik jõud asuvad x - y -tasapinnas. Sellisel juhul on osa tingimustest (31) automaatselt täidetud ja järele jääb kolm võrrandit

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i M_{Oz}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad (32)$$

mis esitavad tasapinnalise jõusüsteemi tasakaalu tarvilikud ja piisavad tingimused. Tasapinnaline jõusüsteem on tasakaalus parajasti siis, kui

- (i) kõigi jõudude projektsioonide summad koordinaattelgedel on võrdsed nulliga ja
- (ii) kõigi jõudude momentide summa mingi punkti suhtes võrdub nulliga.

Tasakaaluvõrrandite (32) asemel võib kasutada ka järgmisi võrrandeid

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i M_{Az}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_{Bz}(\mathbf{F}_i) = 0 \quad (33)$$

või

$$\sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i M_{Az}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_{Bz}(\mathbf{F}_i) = 0 \quad (34)$$

või

$$\sum_i M_{Az}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_{Bz}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_{Cz}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad (35)$$

kus punktid A, B ja C ei asetse samal sirgel. M_{Az} , M_{Bz} ja M_{Cz} tähistavad siin punktide A, B ja C suhtes leitud momentide projektsioone z -teljel. Ülesannete lahendamise puhul tähistatakse neid tavaliselt M_A , M_B ja M_C ja öeldakse, et tegu on vastavalt momentidega punktide A, B ja C suhtes. Momentide märkide määramisel tuleb aga lähtuda krüvireeglist ja eeldada, et pööre toimub ümber z -telje.

Tõestus. 1) *Tarvilikkus.* Tingimuste (33)–(35) tarvilikkus on ilmselge — kui vaadeldav jõusüsteem on tasakaalus, siis on vaadeldavad tingimused täidetud.

2) *Piisavus.* Oletame vastuväiteliselt, et tingimused (33) on täidetud, kuid jõusüsteem pole tasakaalus ja taandub resultandiks \mathbf{R} , mille mõjusirge läbib punkte A ja B . Kuna x -telje valik on vaba, siis valime ta mitte risti resultandi \mathbf{R} mõjusirgega. Sellisel juhul aga $R_x = \sum_i F_{ix} \neq 0$, mis on vastuolus eeldusega, et tingimused (33) on täidetud. Seega ei saa selline jõusüsteem taanduda resultandiks ja peab olema tasakaalus.

Valemite (34) puhul on piisavuse tõestus analoogne eelnenuga — nüüd on vaid x -telje asemel vaatluse all y -telg.

Valemite (35) piisavuse tõestamise puhul oletame jällegi vastuväiteliselt, et (35) on täidetud, kuid jõusüsteem pole tasakaalus ja taandub resultandiks \mathbf{R} . $\mathbf{R} \neq 0$ puhul saab aga (35) olla täidetud vaid juhul, kui punktid A, B ja C asuvad \mathbf{R} mõjusirgel. See on aga vastuolus eeldusega, et A, B ja C ei asu ühel sirgel. Seega peab $\mathbf{R} = 0$ ja jõusüsteem seega olema tasakaalus.

————— *q. e. d.* —————

Paralleeljõudude süsteem. Valime z -telje $\|\mathbf{F}_i$. Sel juhul on analüütilised tasakaalu tingimused (31) esitatavad kujul

$$\sum_i F_{iz} = 0, \quad \sum_i M_x(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_y(\mathbf{F}_i) = 0, \quad (36)$$

sest ülejäänud kolm tingimust on automaatselt täidetud.

Tsaspinnalise paralleeljõudude süsteemi puhul väheneb võrrandite arv veel ühe võrra. Näiteks, kui kõik jõud asuvad x – y -tasapinnas ja nende mõjusirged on paralleelsed y -teljega, siis saame analüütilised tasakaalutingimused esitada kujul

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i M_{Az}(\mathbf{F}_i) = 0 \quad (37)$$

või

$$\sum_i M_{Az}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_{Bz}(\mathbf{F}_i) = 0. \quad (38)$$

9.2 Staatiliselt määratud ja staatiliselt määramata ülesanded

Kui on võimalik koostada nii sama palju tasakaaluvõrrandeid, kui palju on tundmatuid toereaktsioone, siis on tegu *staatiliselt määratud ülesandega*. Vastupidisel juhul on tegu *staatiliselt määramata ülesandega*.

Märkus. Mitmetes õpikutes kasutatakse antud kontekstis ka termineid *staatikaga määratud ülesanded* ja *staatikaga määramata ülesanded*.

Mittevajalikud sidemed

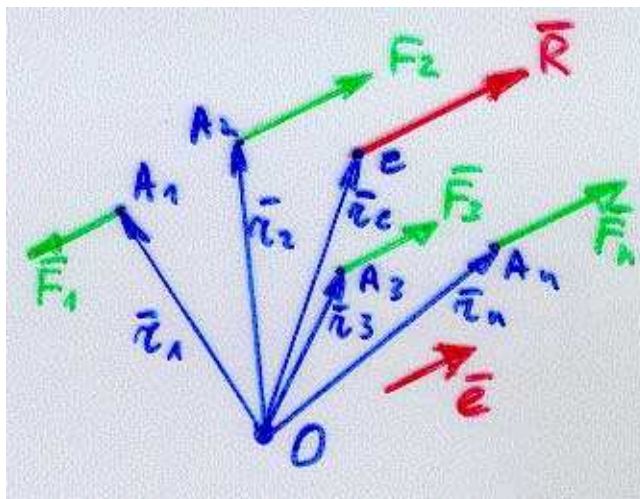
Kõlbmatud sidemed

Osaliselt seotud kehad, ebastabiilsus

10 Raskuskese

10.1 Paralleeljõudude kese

Vaatleme jõusüsteemi, mis koosneb n paralleelsest jõust $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$ rakenduspunktidega A_1, \dots, A_n . Teame, et selline jõusüsteem taandub resultandiks. Toome sisse ühikvektori



Joonis 32: Paralleeljõudude kese

$\mathbf{e} \parallel \mathbf{F}_i$. Nüüd $\mathbf{F}_i = \pm F_i \mathbf{e}$ ja resultant $\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i = \sum \pm F_i \mathbf{e}$.

Kui nüüd pöörata kõiki jõudusid \mathbf{F}_i ühe ja sama nurga α võrra, siis ka \mathbf{R} pöörduv sama nurga α võrra. Järgnevalt näitame, et erinevatele nurkadele α vastavate resultantide mõjusirged lõikuvad ühes ja samas punktis C , mida nimetatakse *paralleeljõudude keskmeks*. Tähistame punktide A_i kohavektorid \mathbf{r}_i ja rakendame Varignon'i teoreemi —

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O(\mathbf{R}) &= \mathbf{r}_C \times \mathbf{R} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \text{ ehk} \\ \mathbf{r}_C \times \sum (\pm F_i) \mathbf{e} &= \sum \mathbf{r}_i \times (\pm F_i) \mathbf{e} \text{ ehk} \\ \left[\sum (\pm F_i) \right] \mathbf{r}_C \times \mathbf{e} &= \left[\sum (\pm F_i \mathbf{r}_i) \right] \times \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (39)$$

Kui nüüd pöörata vektoreid \mathbf{e} ja tahta, et valem (39) kehtiks iga \mathbf{e} puhul, siis peavad nii vasakul kui paremal pool võrdusmärgi olema ka esimesed tegurid võrdsed, see tähendab $[\sum (\pm F_i)] \mathbf{r}_C = [\sum (\pm F_i \mathbf{r}_i)]$ ehk

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum \pm F_i \mathbf{r}_i}{\sum \pm F_i}. \quad (40)$$

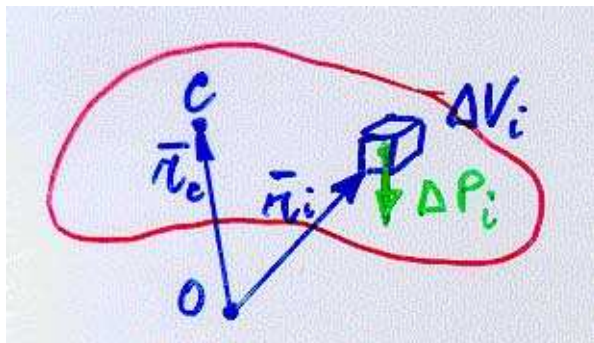
Kui projekteerida viimane avaldis koordinaattelgedele saame

$$x_C = \frac{\sum \pm F_i x_i}{\sum \pm F_i}, \quad y_C = \frac{\sum \pm F_i y_i}{\sum \pm F_i}, \quad z_C = \frac{\sum \pm F_i z_i}{\sum \pm F_i}. \quad (41)$$

Saadud punkti C ongi *paralleeljõudude kese*.

10.2 Raskuskese

Jäiga keha raskuskeskme leidmiseks rakendame eelmises punktis saadud valemeid. Eeldame, et keha on homogeenne, st. $\rho = \text{const.}$. Tähistame elementaarruumala ΔV . Elementaarruumalale ΔV_i mõjub raskusjõud $\Delta \mathbf{P}_i = \rho \mathbf{g} \Delta V_i$.



Joonis 33: Keha raskuskese

Raskusjõud $\Delta \mathbf{P}_i$ moodustavad paralleeljõudude süsteemi, mille kese

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum \mathbf{r}_i \Delta P_i}{\sum \Delta P_i} = \dots = \frac{\sum \mathbf{r}_i \Delta V_i}{\sum \Delta V_i}. \quad (42)$$

Kui minna piirile $\Delta V_i \rightarrow 0$, siis saame

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int_V \mathbf{r} dV}{V}. \quad (43)$$

Kui projekteerime saadud tulemuse koordinaattelgedele, saame

$$x_C = \frac{\int_V x dV}{V}, \quad y_C = \frac{\int_V y dV}{V}, \quad z_C = \frac{\int_V z dV}{V}. \quad (44)$$

Sümmeetriateoreemid.

1. Kui kehal leidub sümmeetriatasand, siis raskuskese asub sellel tasandil.

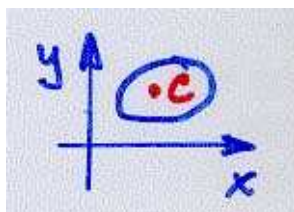
Tõestus. Olgu x - y -tasand keha sümmeetriatasandiks. Järelikult vastab igale suurusle $z dV$ suurus $-z dV$ ja $\int_V z dV = 0$ ning valemite (44) põhjal $z_C = 0$, see tähendab raskuskese asub x - y -tasandil.

————— *q. e. d.* —————

2. Kui kehal leidub sümmeetriatelg, siis raskuskese asub sellel teljel.

Tõestus. Olgu z -telg keha sümmeetriateljeks. Seega vastavad igale suurusle $x dV$ ja $y dV$ suurused $-x dV$ ja $-y dV$. Seega $\int_V x dV = 0$ ja $\int_V y dV = 0$ ning valemite (44) põhjal $x_C = y_C = 0$ s.t., raskuskese asub z -teljel.

————— *q. e. d.* —————



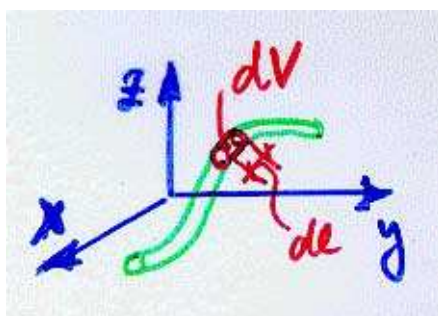
Joonis 34: Tasapinnalise kujundi raskuskese

Tasapinnalise kujundi raskuskese (pinnakese). Vaatleme konstantse paksusega tasapinnalist kujundit, mille paksus h on konstantne ja x - y -tasand on sümmeetriatasand. Nüüd $V = Ah$ ja $dV = dAh$ (A kujundi pindala) ja valemid (44) saavad kuju

$$x_C = \frac{\int_A x dA}{A}, \quad y_C = \frac{\int_A y dA}{A}. \quad (45)$$

Saadud punkti C nimetatakse tihti ka pinnakeskmeks (eeldades, et $h \rightarrow 0$).

Joone (kaare, kõvera) raskuskese. Vaatleme ühtlase (konstantse) ristlõikega traadist kõverat. Nüüd $V = Al$ ja $dV = Adl$ (A traadi ristlõike pindala, l traadi pikkus) ja valemid



Joonis 35: Joone raskuskese

(44) saab esitada kujul

$$x_C = \frac{\int_l x dl}{l}, \quad y_C = \frac{\int_l y dl}{l}, \quad z_C = \frac{\int_l z dl}{l}. \quad (46)$$

Siin $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Kui $y = y(x)$ ja $z = z(x)$ siis saame viimasest avaldisest $dl = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$.

10.3 Tükeldus- ja täiendusmeetod

Sageli õnnestub jagada vaadeldav keha lihtsateks osakujundeiks, mille raskuskeskme koordinaadid on teada. Vaatleme algul homogeeniseid kehi. Kui tähistada i -nda osakujundi ruumala V_i ja raskuskeskme koordinaati $(x_{C_i}, y_{C_i}, z_{C_i})$, siis saab 3D keha raskuskeskme määrata valemeist

$$x_C = \frac{\sum x_{C_i} V_i}{\sum V_i}, \quad y_C = \frac{\sum y_{C_i} V_i}{\sum V_i}, \quad z_C = \frac{\sum z_{C_i} V_i}{\sum V_i}. \quad (47)$$

Seda nimetatakse *tükeldusmeetodiks*.

Tasapinnalise kujundi puhul kasutatakse valemeid

$$x_C = \frac{\sum x_{C_i} A_i}{\sum A_i}, \quad y_C = \frac{\sum y_{C_i} A_i}{\sum A_i}, \quad z_C = 0 \quad (48)$$

ja kaare puhul

$$x_C = \frac{\sum x_{C_i} l_i}{\sum l_i}, \quad y_C = \frac{\sum y_{C_i} l_i}{\sum l_i}, \quad z_C = \frac{\sum z_{C_i} l_i}{\sum l_i}. \quad (49)$$

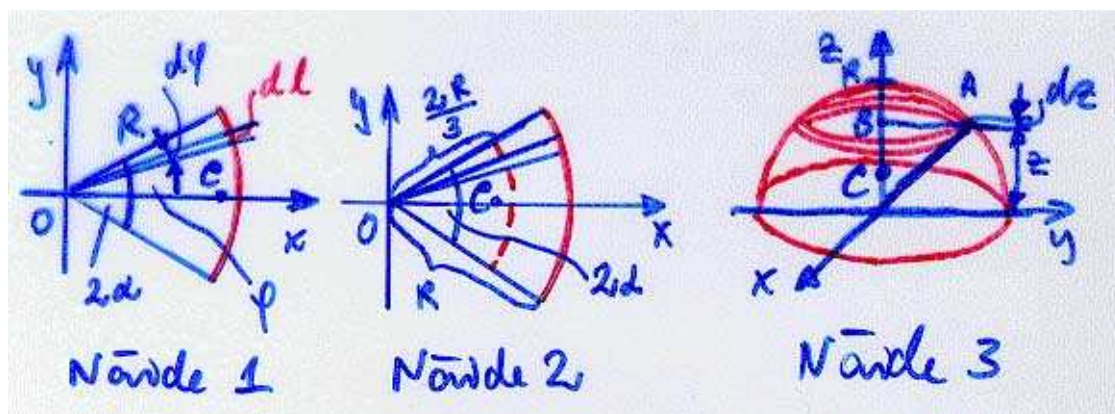
Kui kehal esineb väljalõikeid, siis valemeis (47)–(49) loetakse väljalõigete ruumalad, pindalad või pikkused negatiivseteks. Seda nimetatakse *täiendusmeetodiks*. Nimetatud meetodite samaaegsel rakendamisel on aga tegu *tükeldus- ja täiendusmeetodiga*.

Mittemhomogeensed kehad. Valemid (42)–(49) kehtivad homogeensete kehade jaoks. Kui vaadeldav keha koosneb aga erinevast materjalist osakujundeist, siis tuleb tükeldus- ja täiendusmeetodi puhul seda arvesse võtta, st. valemites (47)–(49) tuleb ruumalade, pindalade ja pikkuste asemel kasutada kas masse või kaale. Näiteks valemid (47) saavad kuju

$$x_C = \frac{\sum x_{C_i} m_i}{\sum m_i}, \quad y_C = \frac{\sum y_{C_i} m_i}{\sum m_i}, \quad z_C = \frac{\sum z_{C_i} m_i}{\sum m_i}. \quad (50)$$

10.4 Näited

1. Leida ringjoone kaare raskuskeskme koordinaat, kui ringjoone raadius on R , vastav kesknurk 2α , ringjoone keskpunkt asub koordinaatide alguses ja x -telg on sümmeetriateljeks.



Joonis 36: Raskuskeskme leidmise näited.

Lahendus. Kuna x -telg on sümmeetriateljeks, siis $y_C = 0$ ja vastavalt valemile (46)

$$x_C = \frac{\int_l x dl}{l}. \quad (51)$$

Toome sisse polaarkoordinaadid r ja φ . Nüüd $x = R \cos \varphi$, $dl = R d\varphi$ ja $l = 2\alpha R$ ning

$$x_C = \frac{1}{2\alpha R} \int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \varphi R d\varphi = \dots \dots = \frac{R \sin \alpha}{\alpha} \quad (52)$$

2. Leida ringi sektori ja poolringi raskuskeskme koordinaat, kui ringi raadius on R , vastav kesknurk 2α , ringi keskpunkt asub koordinaatide alguses ja x -telg on sümmeetriateljeks.

Lahendus. Jaotame vaadeldava sektori elementaarsektoriteks kesknurgaga $d\varphi$. Piiril $d\varphi \rightarrow 0$ on need sektorid lähendatavad kolmnurkadega. Selliste kolmnurkade raskuskeskmed asuvad ringi keskpunktist kaugusel $2R/3$. Rakendades eelmises näites tuletatud valemit ja võttes raadiuse võrdseks $2R/3$, saame nüüd

$$x_C = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}. \quad (53)$$

Sümmeetria tõttu $y_C = 0$. Poolringi puhul $\alpha = 0.5\pi$ ja $x_C = \frac{4R}{3\pi}$.

3. Leida poolkera raskuskeskme koordinaat, kui kera raadius on R , kera keskpunkt asub koordinaatide alguses ja z -telg on sümmeetriateljeks.

Lahendus. Sümmeetria tõttu $x_C = y_C = 0$ ja valemist (44)

$$z_C = \frac{\int_V z dV}{V}. \quad (54)$$

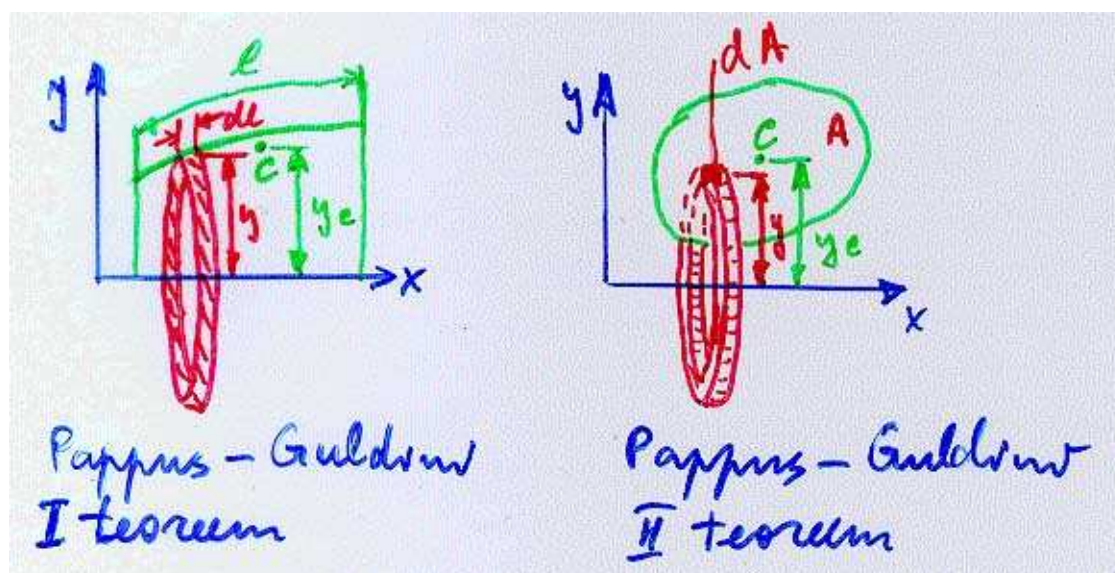
Elementaarruumalaks dV valime horisontaalse ketta, mille paksus on dz ja mis asub x - y -tasapinnast kaugusel z . Nüüd

$$dV = \pi(R^2 - z^2) dz \quad (55)$$

$$z_C = \frac{1}{V} \int_0^R z \pi(R^2 - z^2) dz = \dots \dots = \frac{3R}{8} \quad (56)$$

10.5 Pappus-Guldini teoreemid

Pappus-Guldini I teoreem: Pöördpinna pindala on võrdne teda genereerinud kõvera kaarepikkuse ja selle kõvera raskuskeskme poolt joonistatud ringjoone pikkuse korrutisega.



Joonis 37: Pappus-Guldini teoreemid

Tõestus: Vaatleme pöördpinda, mille teljeks on x -telg ja mille on genereerinud kõver pikkusega l (joonis 37). Kõvera elemendi dl poolt genereeritud pöördpinna pindala on $2\pi y dl$ ja kogu pöördpinna pindala

$$A = 2\pi \int_l y dl. \quad (57)$$

Kuna vastavalt valemitele (46) on joone raskuskeskme y koordinaat

$$y_C = \frac{\int_l y dl}{l}, \quad (58)$$

siis

$$A = 2\pi y_C l. \quad \text{—————} q.e.d. \text{—————} \quad (59)$$

Pappus-Guldini II teoreem: Pöördkeha ruumala on võrdne teda genereerinud pinna pindala ja selle pinna raskuskeskme poolt joonistatud ringjoone pikkuse korrutisega.

Tõestus: Vaatleme pöördkeha, mille teljeks on x -telg ja mille on genereerinud tasapinnaline kujund pindalaga A (joonis 37). Elementaarpinna dA poolt genereeritud elementaarrõnga ruumala on $2\pi y dA$ ja kogu pöördkeha ruumala

$$V = 2\pi \int_A y dA. \quad (60)$$

Kuna vastavalt valemitele (45) on pinna raskuskeskme y koordinaat

$$y_C = \frac{\int_A y dA}{A}, \quad (61)$$

siis

$$V = 2\pi y_C A. \quad \text{—————} q.e.d. \text{—————} \quad (62)$$

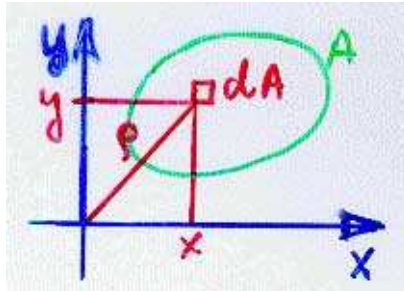
11 Pinnamomendid

11.1 Sissejuhatus

Vaatleme tasapinnalist kujundit (joonis 38). Integraali

$$\int_A x^m y^n dA \quad (63)$$

nimetatakse *tasapinnalise kujundi $m+n$ astme pinnamomendiks*. Sõltuvalt summa $m+n$



Joonis 38: Tasapinnalise kujundi pinnamomendid.

väärtusest eristatakse 0-astme, 1. astme, 2. astme jne. pinnamomente. 0-astme pinnamoment kujutab endast kujundi pindala, 1. astme pinnamomente nimetatakse sageli staatilisteks momentideks ja 2. astme pinnamomente inertsimomentideks. Kõrgemat järku pinnamomente kasutatakse väga harva ja neid me ei käsitle.

11.2 Staatilised momendid

Tasapinnalise kujundi (joonis 38) *staatilised momendid x - ja y -telje suhtes* on defineeritud järgmiselt:

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA. \quad (64)$$

Staatilise momendi dimensioon: $\dim S = m^3$.

Arvestades valemit (64), saame anda tasapinnalise kujundi raskuskeskme valemeile (45) kuju

$$x_c = \frac{S_y}{A} \quad \text{ja} \quad y_c = \frac{S_x}{A}, \quad (65)$$

kust

$$S_y = x_c A \quad \text{ja} \quad S_x = y_c A. \quad (66)$$

Viimaste valemite abil on mugav leida lihtsate geomeetriliste kujundite staatilisi momente. Kui vaadeldavat kujundit on võimalik jagada osakujundeiks, nii et $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$, siis

$$\left\{ \begin{array}{l} S_x = \int_A y dA = \int_{A_1} y dA + \dots + \int_{A_n} y dA = \\ \quad = S_x^{(1)} + \dots + S_x^{(n)} = y_{C_1} A_1 + \dots + y_{C_n} A_n, \\ S_y = \int_A x dA = \int_{A_1} x dA + \dots + \int_{A_n} x dA = \\ \quad = S_y^{(1)} + \dots + S_y^{(n)} = x_{C_1} A_1 + \dots + x_{C_n} A_n. \end{array} \right. \quad (67)$$

Nagu raskuskeskme leidmise puhul, nii ka siin, tuleb väljalõigetele vastavad pindalad ja/või staatilised momendid lugeda negatiivseks.

Keskteljed. Valemite (64) ja (66) põhjal on selge, et staatilised momendid võivad olla nii positiivsed, negatiivsed kui nullid. Mehaanikas omavad sageli suurt tähtsust teljed, mis läbivad pinnakeset (või raskuskeset). Neid telgi nimetatakse *kesktelgedeks*. Valemeist (66) järeldub, et kui x ja y on keskteljed, siis $S_x = S_y = 0$, sest $x_C = y_C = 0$.

Staatilise momendi mõistet saab üldistada ka tasapinnalise kõvera ja 3D keha jaoks, vastavalt

$$S_x = \int_l y dl, \quad S_y = \int_l x dl$$

ja

$$S_{xy} = \int_V z dV, \quad S_{xz} = \int_V y dV, \quad S_{yz} = \int_V x dV.$$

11.3 Inertsimomendid

Tasapinnalise kujundi (joonis 38) *inertsimomendid* x - ja y -telje suhtes on defineeritud järgmiselt:

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA. \quad (69)$$

Inertsimomendi dimensioon: $\dim I = m^4$.

Peale nn. telginertsimomentide (69) on laialdaselt kasutatavad ka *tsentrifugaalinertsimoment* (lühidalt tsentrifugaalmoment)

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (70)$$

ja *polaarinertsimoment*

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA. \quad (71)$$

Kuna $\rho^2 = x^2 + y^2$, siis

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y. \quad (72)$$

Inertsimomendid I_x , I_y ja I_ρ on alati positiivsed, inertsimoment I_{xy} võib olla nii positiivne kui negatiivne.

Liitkujundi inertsimomentide leidmine toimub samuti, kui staatiliste momentide puhul —

$$I = I^{(1)} + \dots + I^{(n)}, \quad (73)$$

kusjuures väljalõigetele vastavad inertsimomendid loetakse negatiivseteks.

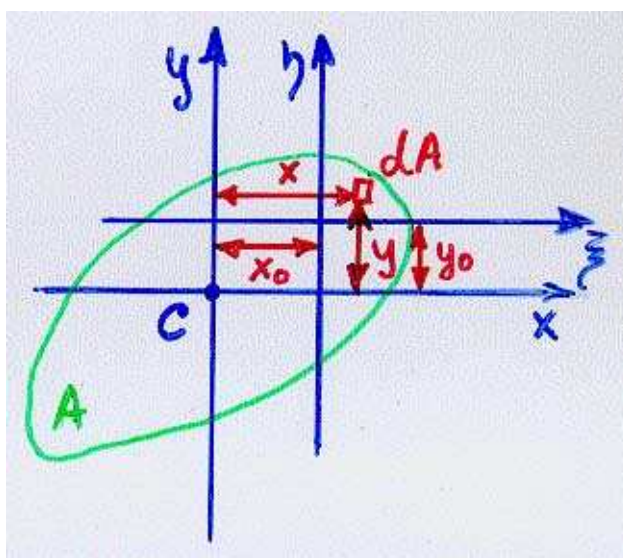
Inertsiraadius. Suurus

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \quad i_\rho = \sqrt{\frac{I_\rho}{A}} \quad (74)$$

nimetatakse kujundi *inertsiraadiusteks*. Seega esitab inertsiraadius pinnaelementide ruutkeskmist kaugust vastavast teljest (i_x ja i_y puhul) või koordinaatide algusest (i_ρ puhul). Teisisõnu, kui kogu vaadeldav pind oleks jaotatud kitsa ribana inertsiraadiuse kaugusele vastavast teljest või koordinaatide algusest, siis $I_x = i_x^2 A$, $I_y = i_y^2 A$ ja $I_\rho = i_\rho^2 A$.

11.4 Inertsimomendid keskteljega paralleelsete telgede suhtes

Vaatleme tasapinnalist kujundit pindalaga A . Kujundi pinnakese asugu punktis C ja x - y -teljed on keskteljed (joonis 39). Eeldame, et inertsimomendid I_x , I_y ja I_{xy} on teada. Leiame inertsimomendid x - y -telgedega paralleelsete telgede $\xi = x - x_o$ ja $\eta = y - y_o$ suhtes.



Joonis 39: Inertsimomendid keskteljega paralleelsete telgede suhtes.

$$I_\xi = \int_A \eta^2 dA = \int_A (y - y_o)^2 dA = \int_A y^2 dA - 2y_o \int_A y dA + \int_A y_o^2 dA = \dots$$

$$I_\eta = \int_A \xi^2 dA = \dots$$

$$I_{\xi\eta} = \int_A \xi\eta dA = \dots$$

Seega

$$\begin{cases} I_\xi = I_x + y_o^2 A, \\ I_\eta = I_y + x_o^2 A, \\ I_{\xi\eta} = I_{xy} + x_o y_o A. \end{cases} \quad (75)$$

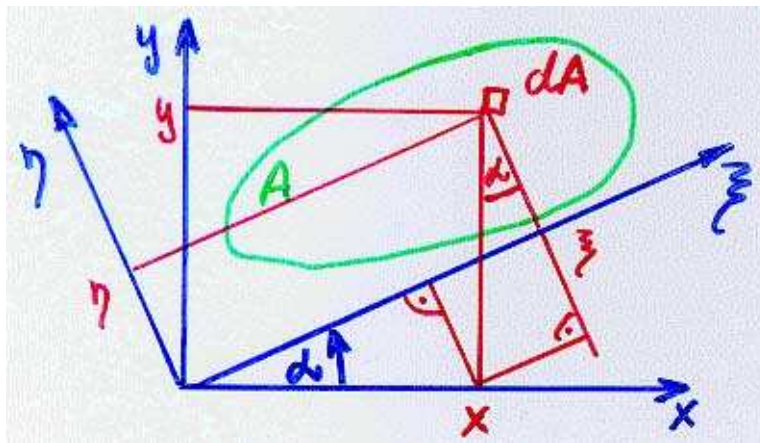
Neis valemeis nimetatakse esimest liidetavat *omainertsimomendiks* ja teist *lökkemomendiks*. Viimased valemid võib üldistatult kokku võtta kujul

$$I_{kp} = I_k + e^2 A, \quad (76)$$

kus k tähistab kesktelge, kp keskteljega paralleelset telge, ja e vaadeldavate telgede vahelist kaugust.

11.5 Inertsimomendid pööratud telgede suhtes

Vaatleme tasapinnalist kujundit pindalaga A . Eeldame, et inertsimomendid I_x, I_y ja I_{xy} on teada. Leiame inertsimomendid telgede ξ - η suhtes, mis omavad telgedega x - y ühist alguspunkti kuid on viimaste suhtes pööratud nurga α võrra (joonis 40).



Joonis 40: Inertsimomendid pööratud telgede suhtes.

Kuna

$$\begin{cases} \xi = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ \eta = y \cos \alpha - x \sin \alpha, \end{cases} \quad (77)$$

siis

$$I_\xi = \int_A \eta^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA = \\ \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A yx dA + \sin^2 \alpha \int_A x^2 dA = \dots$$

$$I_\eta = \int_A \xi^2 dA = \dots$$

$$I_{\xi\eta} = \int_A \xi\eta dA = \dots$$

Seega

$$\begin{cases} I_\xi = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha, \\ I_\eta = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha, \\ I_{\xi\eta} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \end{cases} \quad (78)$$

Kui tuua sisse abisuurused

$$\begin{cases} I_o = \frac{I_x + I_y}{2}; & I_* = \frac{I_x - I_y}{2}, \\ D_o = \sqrt{I_*^2 + I_{xy}^2}, & \alpha_1 = \arctan \frac{I_* - D_o}{I_{xy}} = \arctan \frac{I_x - I_1}{I_{xy}}, \end{cases} \quad (79)$$

mida kasutame ka järgmises alajaotuses, siis saame anda valemitele (78) kuju

$$\begin{cases} I_\xi = I_o + D_o \cos 2(\alpha - \alpha_1), \\ I_\eta = I_o - D_o \cos 2(\alpha - \alpha_1), \\ I_{\xi\eta} = D_o \sin 2(\alpha - \alpha_1). \end{cases} \quad (80)$$

Valemeist (80) või (78) järeldub, et

$$I_\xi + I_\eta = I_x + I_y = 2I_o, \quad (81)$$

see tähendab I_o on telgede pööramise suhtes invariantne suurus. Telgede pööramise suhtes invariantseks osutub ka suurus D_o . Seega omavad D_o ja I_o suvalise ristteljestiku puhul üht ja sama väärtust.

11.6 Peateljed ja peainertsimomendid

Valemite (80) ja (78) põhjal on selge, et α muutudes muutuvad ka inertsimomentide I_ξ , I_η ja $I_{\xi\eta}$ väärtused ning et kui $\alpha = \alpha_1$, siis omab I_ξ maksimaalset väärtust, I_η minimaalset väärtust ja $I_{\xi\eta} = 0$.

Teljepaari, mille puhul telginertsimomendid I_ξ ja I_η omavad ekstremaalseid väärtusi ning tsentrifugaalinertsimoment $I_{\xi\eta} = 0$, nimetatakse *peatelgedeks*. Vastavaid telginertsimomente nimetatakse *peainertsimomentideks*.

Tavaliselt tähistatakse $I_1 = \max I$ ja $I_2 = \min I$. Vastavaid peatelgi tähistatakse numbritega 1 ja 2. Peatelgede tunnus on $I_{\xi\eta} = 0$. *Keskpeateljed* on peateljed, mis läbivad pinnakeset.

Keskpeatelgede ja peainertsimomentide leidmine. Praktikaspakuvad huvi eeskätt keskpeateljed ja neile vastavad peainertsimomendid. Seetõttu vaatlemegi allpool eeskätt nende leidmist.

Sümmeetriline kujund. Olgu x -telg sümmeetriateljeks. Sel juhul leiduvad muutuja x iga väärtuse jaoks suurused $xydA$ ja $-xydA$. Järelikult, $I_{xy} = \int_A xydA = 0$ ja *peatelgedeks* on sümmeetriatelg ning iga temaga ristuv telg. *Keskpeatelgedeks* on aga sümmeetriatelg ja temaga ristuv pinnakeset läbiv telg.

Kui kujundil on rohkem kui 2 mitteristuvat sümmeetriatelge (näiteks ruut, ring või võrdkülgne kolmnurk), siis on inertsimomendid kõigi kesktelgede suhtes võrdsed ja kõik keskteljed on keskpeateljed. Olgu teljed $\xi_i, i = 1, 2, \dots$ kujundi mitteristuvad sümmeetriateljed ja $\eta_i, i = 1, 2, \dots$ nendega vastavalt ristuvad keskteljed. Tähistame nurga, mille moodustab ξ_i - η_i -teljestik x - y -tejestikuga, α_i^s . Sümmeetrilise kujundi tsentrifugaalinertsimomendid $I_{\xi_i\eta_i} = 0$. Valemi (80)₃ põhjal peab seega $D_o \sin 2(\alpha - \alpha_1) = 0$ iga $\alpha = \alpha_i^s$ puhul. See on aga võimalik vaid siis, kui $D_o = 0$. Viimasest järeldub omakorda, et $I_\xi = I_\eta = I_o$ suvalise nurga α puhul. Seega võib antud juhul tõesti valida keskpeateljeks suvalise kesktelje, omavahel ristuvaks keskpeatelje paariks aga suvalise ristuva kesktelje paari.

Mittesümmeetriline kujund. 1) Määratakse pinnakeskme koordinaadid mingis sobivas teljestikus ξ - η . 2) Tuuakse sisse keskteljed x - y , leitakse inertsimomendid I_x , I_y ja I_{xy} ning abisuurused I_o , I_* , D_o ja α_1 . 3) Pöörates kesktelgi x - y nurga α_1 võrra saadakse keskpeateljed 1 ja 2. 4) Leitakse (kesk)peainertsimomendid kasutades valemit

$$I_p = I_o \pm D_o, \quad p = 1, 2. \quad (82)$$

11.7 Massiinertsimomendid

Dünaamika- ja füüsikakursustes on samuti kasutusel inertsimomendid. Erinevus on vaid selles, et dünaamikas on üldjuhul uurimisobjektiks kolmemõõtmelised kehad, elementaarpinna asemel vaadeldekse elementaarmasse ja integreeritakse samuti üle massi. Kui on vaja neil kahel suurusel vahet teha, siis nimetatakse massiga seotud inertsimomente massiinertsimomentideks ja pinnaga seotuid pinnainertsimomentideks või teist järku pinnamomentideks.

Kui tähistada elementaarmassi dm kaugust x -teljest r_x , y -teljest r_y , z -teljest r_z ja koordinaatide algusest ρ , siis on telg- ja polaarinertsimomendid defineeritud järgmiselt:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_x = \int_m r_x^2 dm = \int_m (y^2 + z^2) dm, \\ I_y = \int_m r_y^2 dm = \int_m (x^2 + z^2) dm, \\ I_z = \int_m r_z^2 dm = \int_m (x^2 + y^2) dm, \\ I_\rho = \int_m \rho^2 dm = \int_m (x^2 + y^2 + z^2) dm. \end{array} \right. \quad (83)$$

Inertsiraadius, inertsimomendid paralleelsete telgede, inertsimomendid pööratud telgede suhtes ja liitkeha inertsimomendid on massiinertsimomentide korral leitavad pinnainertsimomentidega analoogselt.

11.8 Näide

Leida joonisel 41 kujutatud viirutatud kujundi keskpeateljed ja keskpeainertsimomendid. Kõik mõõtmed on antud sentimeetrites.

Lahendus. Kuna tegu on mittesümmeetrilise kujundiga, siis toimub peainertsimomentide leidmine vastavalt leheküljel 47 esitatud skeemile. Vaadeldav liitkujund koosneb kolmest osakujundist: ristkülikust (1), kolmnurgast (2) ja poolringist (3).

1. Pinnakeskme leidmiseks kasutame joonisel esitatud koordinaate ξ ja η . Leiame osakujundite pinnakeskmete koordinaadid

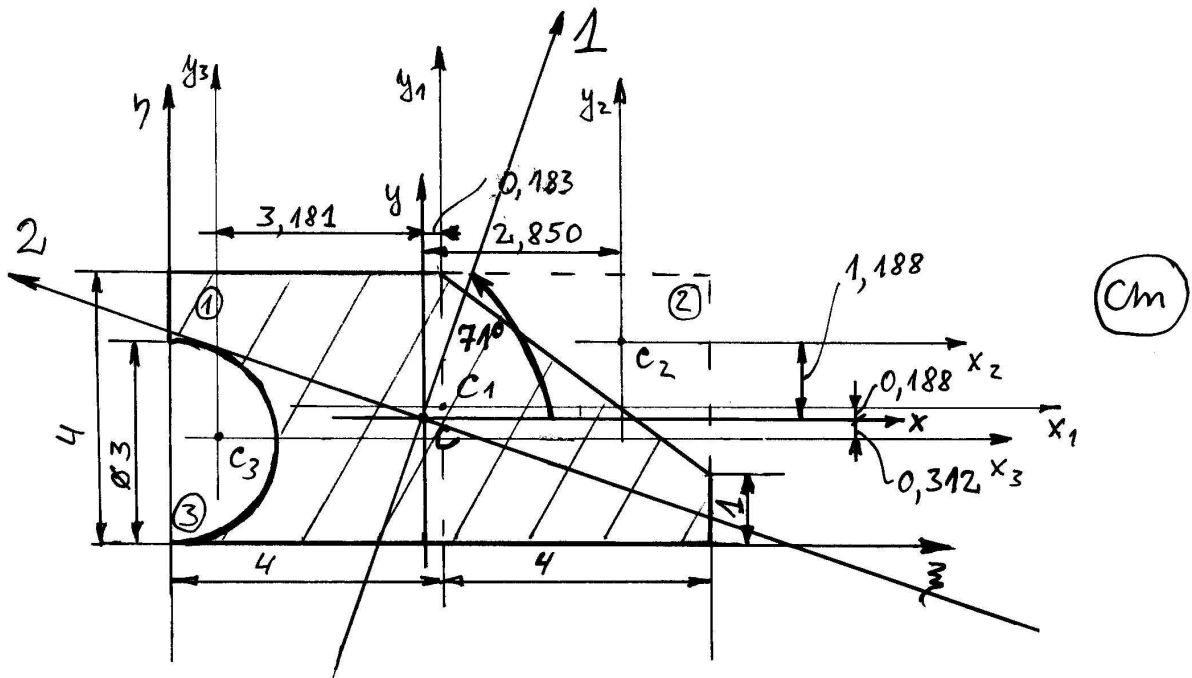
$$\left\{ \begin{array}{ll} \xi_{C_1} = 4, & \eta_{C_1} = 2, \\ \xi_{C_2} = 4 + \frac{2 \cdot 4}{3} = 6,667, & \eta_{C_2} = 1 + \frac{2 \cdot 3}{3} = 3, \\ \xi_{C_3} = \frac{2 \cdot 3}{3\pi} = 0,212 \cdot 3 = 0,636, & \eta_{C_3} = 1,5, \end{array} \right. \quad (84)$$

pindalad A_i ja liitkujundi pindala A

$$A_1 = 32, \quad A_2 = 6, \quad A_3 = 3,534, \quad A = 22,466. \quad (85)$$

Liitkujundi pinnakese

$$\xi_C = \frac{\sum_{i=1}^3 \xi_{C_i} A_i}{A} = 3,817, \quad \eta_C = \frac{\sum_{i=1}^3 \eta_{C_i} A_i}{A} = 1,812. \quad (86)$$



Joonis 41: Mittesümmeetrilise kujundi painertsimomentide leidmine.

2. Tõmbame läbi pinnakeskme C keskteljed $x \parallel \xi$ ja $y \parallel \eta$ ning läbi osakujundite pinnakesete C_i omakeskteljed $x_i \parallel \xi$ ja $y_i \parallel \eta$. Edaspidistes arvutustes kasutame vaid kesktelgedele ja omakesktelgedele vastavaid koordinaate x, y, x_i ja y_i . Järgnevalt leiame osakujundite pinnakeskmete koordinaadid $x_{C_i} = \xi_{C_i} - \xi_C$ ja $y_{C_i} = \eta_{C_i} - \eta_C$:

$$\begin{cases} x_{C_1} = 0,183, & y_{C_1} = 0,188, \\ x_{C_2} = 2,850, & y_{C_2} = 1,188, \\ x_{C_3} = -3,181, & y_{C_3} = -0,312. \end{cases} \quad (87)$$

On selge, et $|x_{C_i}|$ on võrdne telgede y_i ja y vahelise kaugusega ning $|y_{C_i}|$ telgede x_i ja x vahelise kaugusega. Kanname vastavad kaugused joonisele.

3. Inertsimomendid kesktelgede suhtes

$$\begin{cases} I_x = \sum_{i=1}^3 I_x^{(i)} = \sum_{i=1}^3 (I_{x_i}^{(i)} + y_{C_i}^2 A_i) = \dots = 43,803 - 11,474 - 2,331 = 29,998, \\ I_y = \sum_{i=1}^3 I_y^{(i)} = \sum_{i=1}^3 (I_{y_i}^{(i)} + x_{C_i}^2 A_i) = \dots = 171,738 - 54,056 - 36,319 = 81,363, \\ I_{xy} = \sum_{i=1}^3 I_{xy}^{(i)} = \sum_{i=1}^3 (I_{x_i y_i}^{(i)} + x_{C_i} y_{C_i} A_i) = \dots = 1,103 - 18,319 - 3,503 = -20,719. \end{cases} \quad (88)$$

4. Peainertsimomentide määramiseks tuleb leida abisuurused

$$\begin{cases} I_o = \frac{I_x + I_y}{2} = 55,680, \\ I_* = \frac{I_x - I_y}{2} = -25,683, \\ D_o = \sqrt{I_*^2 + I_{xy}^2} = 32,998, \\ \alpha_1 = \arctan \frac{I_* - D_o}{I_{xy}} = 70,553^\circ. \end{cases} \quad (89)$$

Neist viimane, st. $\alpha_1 = 70,553^\circ \approx 71^\circ$ määrab nurga, mille võrra tuleb pöörata kesktelgi $x - y$, et saada keskpeateljed 1 – 2.

Keskpeainertsimomendid (inertsimomendid keskpeatelgede suhtes) $I_p = I_o \pm D_o$, $p = 1, 2$. Seega

$$I_1 = I_o + D_o = 88,679 \text{ ja } I_2 = I_o - D_o = 22,682. \quad (90)$$

Kontrolliks leiame nurga, mille võrra tuleb pöörata kesktelgi $x - y$, et nad ühtiks keskpeatelgedega teise valemi abil (vt. avaldise (79)): $\alpha_1 = \arctan \frac{I_x - I_1}{I_{xy}} = 70,553^\circ$. Kuna tulemused langevad kokku, siis on lootust arvata, et ülesande lahendus on õige.

*Vastus*⁶: Vaadeldava kujundi pinnakese asub punktis C , mille koordinaadid on $\xi_C = 3,8$ cm ja $\eta_C = 1,8$ cm. Keskpeateljed 1 – 2 on kesktelgede $x - y$ suhtes pööratud nurga $\alpha_1 = 71^\circ$ võrra. Keskpeainertsimomendid $I_1 = 88,7$ cm⁴ ja $I_2 = 22,7$ cm⁴.

⁶Käesolevas näites on vastused esitatud täpsusega üks koht peale koma ja vahearvutuste tulemused täpsusega kolm kohta peale koma. Kodu- ja kontrolltöodes piisab vahearvutuste puhul täpsusest kaks kohta peale koma.

12 Jõuväli

Kasutatakse ka termineid jaotatud koormus, lauskoormus, lausjõud.

Võib eristada kolme juhtu

1. Ruumjõuväli ehk ruumkoormus - intensiivsus $p(x, y, z)$ — $\dim p = N/m^3$. Näit. raskusjõudu põhjustav gravitatsiooniväli.
2. Pindjõuväli ehk pindkoormus - intensiivsus $p(x, y)$ — $\dim p = N/m^2$. Näit. hüdrostaatiline surve.
3. Joonjõuväli ehk joonkoormus - abstraktsioon, mida kasutatakse varraste puhul - intensiivsus $p(x)$ - $\dim p = N/m$. Näiteks ka selles kursuses kasutatud nn. ristkülikkoormus või kolmnurkkormus.

Joonkoormus. Vaatleme vardale rakendatud joonkoormust (joonis esitatakse loengus), mille intensiivsus on esitatud kujul $p = p(x)$ ja mis mõjub risti varda teljega, see tähendab varras on koormatud jõuga, mille intensiivsus sõltub vaid koordinaadist x . Vastavat joonist nimetatakse joonkoormuse epüüriks. Tegu on paralleeljõudude süsteemiga, seega on vaadeldav jõusüsteem taandatav resultandiks. Leiame selle resultandi suuruse (mooduli) ja mõjusirge asukohta. Tähistades epüüri elementaarpindala $dA = p(x)dx$, on vaadeldava joonkoormuse resultant

$$R = \int_0^b p(x)dx = \int_A dA = A, \quad (91)$$

kus b on varda pikkus ja A on epüüri pindala. Vastavalt Varignoni teoreemile peab $\int_0^b \mathbf{M}_O[\mathbf{p}(x)]dx = \mathbf{M}_O(\mathbf{R})$. Seega

$$M_O = \int_0^b xp(x)dx = x_R R \quad \text{ehk} \quad M_O = \int_A x dA = x_R A, \quad (92)$$

kust resultandi \mathbf{R} mõjusirget määrav koordinaat

$$x_R = \frac{\int_A x dA}{A} = \frac{S_y}{A} \quad (93)$$

avaldub kui epüüri pinnakeskme x koordinaat.

Pindkoormus. Analoogselt joonkoormusega saab leda ka pindkoormuse $p(x, y)$ resultanti ja tema mõjusirge asukohta:

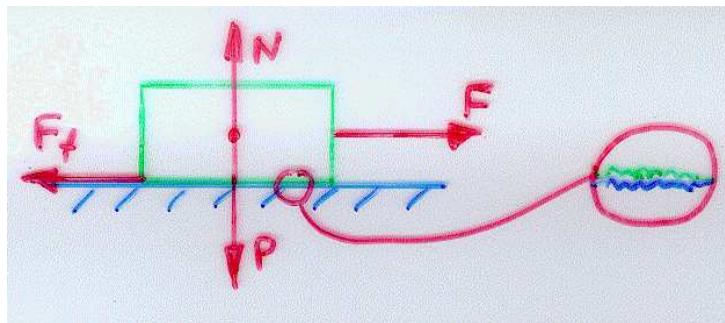
$$\left\{ \begin{array}{l} R = \int_A p(x, y)dA = \int_V dV = V, \\ x_R = \frac{\int_V x dV}{V}, \\ y_R = \frac{\int_V y dV}{V}. \end{array} \right. \quad (94)$$

Näited. Pinged paindel ja väändel; vedeliku surve anuma otstele.

13 Hõõre

13.1 Liugehõõre

Senini oleme staatikaülesannete püstitamisel tihti lisanud lause: “Hõõret mitte arvestada!” Seega oleme eeldanud, et kokkupuutuvad pinnad on ideaalselt siledad. Selline eeldus pole aga tegelikult mitte kunagi täidetud ja paljudel juhtudel tuleb hõõret arvesse võtta. Vaatleme karedale pinnale asetatud keha, millele on rakendatud horisontaalne jõud \mathbf{F} (joonis esitatakse loengus). Kui kokkupuutuvad pinnad oleks ideaalselt siledad, st. mitte midagi ei takistaks libisemist, siis hakkaks keha liikuma mistahes $F > 0$ puhul. Kuid kuna tegelikkuses on tegu karedate pindadega, siis nii ei juhtu. Järelikult mõjub jõuga \mathbf{F} vastassuunaline jõud, mida nimetatakse hõõrdejõuks ja mida on soovitatav tähistada \mathbf{F}_f . Kui keha on paigal, siis $\mathbf{F} = \mathbf{F}_f$. Kuna teatud suurusega jõu \mathbf{F} puhul hakkab keha liikuma, siis järelikult leidub $\max \mathbf{F}_f$.



Joonis 42: Liugehõõre

Staatikaülesannete puhul, kus arvestatakse hõõret, lähtutakse *Coulomb'i hõõrdeseadustest*:

1. Hõõrdejõu maksimaalne väärtus ei sõltu kokkupuutuvate pindade suurusest, vaid ainult nende pindade iseloomust (siledus, karedus) ja materjalist.
2. Hõõrdejõu maksimaalne väärtus on võrdeline normaalreaktsiooniga, st.

$$\max F_f = fN, \quad (95)$$

kus f on *hõõrdetegur* (mida tihti tähistatakse ka μ). Tasakaalu puhul

$$F_f \leq \max F_f = fN \quad (96)$$

Hõõrdejõu suund on alati vastupidine võimaliku liikumissuunaga.

Eristatakse

- kuivhõõret ja märghõõret;
- paigalseisu- ehk staatilist hõõret ja kinemaatilist hõõret. Kinemaatiline hõõrdetegur on kuni 25% väiksem kui staatiline hõõrdetegur ja tema väärtus sõltub ka keha kiirusest.

Käesolevas punktis käsitletud hõõret nimetatakse täpsemalt *liugehõõrdeks* ja vastavat tegurit *liugehõõrdeteguriks*.

Täpsemad uuringud on näidanud, et (liuge)hõõrdetegur ja seega ka (liuge)hõõrdejõud võib lisaks kokkupuutuvate pindade iseloomule sõltuda

- molekulaarse päritoluga jõududest;
- kõrgetest lokaalsetest temperatuuridest (kleepuvus, libedus);
- kokkupuutuvate pindade relatiivsest kõvadusest;
- kokkupuutuvate pindade suurusest.

Käesoleva kursuse raames käsitletavate staatikaülesannete lahendamisel viimaseid efekte aga ei arvestata ning lähtutakse vaid Coulomb'i hõõrdeseadustest.

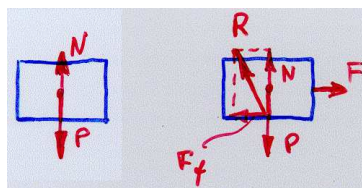
Näiteid hõõrdeteguri väärtustest. Järgnevas tabelis on toodud staatilise hõõrdeteguri väärtused mõnede enamlevinud materjalide jaoks. Toodud arvud on pärit kahest õpikust: 1) R.C. Hibbeler, Engineering Mechanics, Statics; 2) F.P. Beer, E.R. Johnston, Mechanics For Engineers, Statics.

Materjalid	Staatiline hõõrdetegur
metall jääl	0.03 – 0.05
puit puidul	0.3 – 0.7
nahk puidul	0.2 – 0.5
nahk metallil	0.3 – 0.6
metall metallil	0.15 – 0.6
metall puidul	0.2 – 0.6
metall kivil	0.3 – 0.7
kummi betoonil	0.6 – 0.9

Nagu on tabelist näha, kõiguvad toodud väärtused küllaltki suures vahemikus. Enamgi veel, teistes õpikutes või teatmeteostes esitatud staatilise hõõrdeteguri väärtused võivad erineda alltoodutest. Praktikas tuleks igal konkreetsel juhul valmistada kasutatavatest materjalides katsekehad ning määrata hõõrdeteguri väärtus katseliselt.

13.2 Hõõrdenurk ja hõõrdekoonus

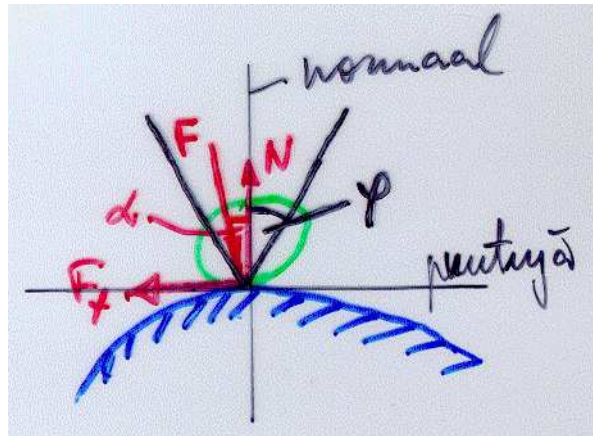
Staatikas eristatakse kahte tüüpi pinnareaktsioone, mida nimetatakse vastavalt sileda pinna reaktsiooniks ja kareda pinna reaktsiooniks.



Joonis 43: Sileda (vasakul) ja kareda pinna reaktsioon.

Sileda pinna reaktsioon koosneb vaid normaalreaktsioonist, mis on risti kehade kokkupuutepunktis leitud ühise puutujaga.

Kareda pinna reaktsioon koosneb normaalreaktsioonist ja hõõrdejõust ning on võrdne nende kahe jõu (geomeetrilise) summaga, st. $\mathbf{R} = \mathbf{F}_f + \mathbf{N}$.



Joonis 44: Hõõrdenurk

Hõõrdenurk. Vaatleme karedale pinnale toetuvat keha, millele mõjub jõud \mathbf{F} . Jõud \mathbf{F} kujutab endast kõigi kehale mõjuvate aktiivsete jõudude (kaasa arvatud keha kaal) summat. Hõõrdetegur keha ja pinna vahel on f ja jõu \mathbf{F} mõjusirge moodustab puutepinna normaaliga nurga α . Tahame teada, millise nurga α puhul jääb keha tasakaalu.

On selge, et tasakaalu puhul

$$N = F \cos \alpha \text{ ja } F_f = F \sin \alpha. \quad (97)$$

Teisest küljest, on hõõrdejõu maksimaalne väärtus $\max F_f = fN$, st.

$$F_f \leq \max F_f = fN. \quad (98)$$

Viimaste avaldiste põhjal on tasakaalu korral

$$F \sin \alpha \leq fF \cos \alpha \text{ ja } \tan \alpha \leq f. \quad (99)$$

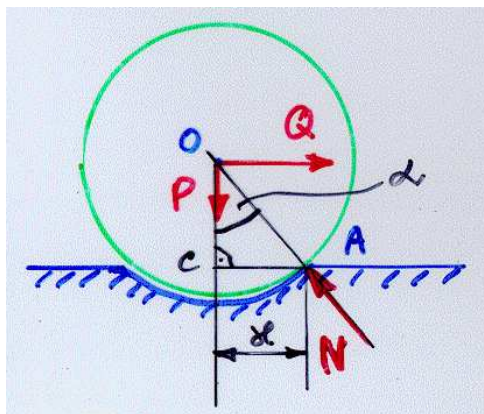
Et anda viimasele mugavamalt kuju, tähistame $\tan \varphi = f$, kus nurka φ nimetatakse *hõõrdenurgaks*. Keha on tasakaalus, kui

$$\alpha \leq \varphi. \quad (100)$$

Hõõrdekoonus on koonus mille tipp asub punktis A , teljeks on puutepinna normaal ja tipunurgaks kahekordne hõõrdenurk 2φ .

13.3 Veerehõõre ehk veeretakistus

Vaatleme horisontaalsele pinnale toetuvat silindrit kaaluga \mathbf{P} ja raadiusega r , mille tsentrisse on rakendatud horisontaalne jõud \mathbf{Q} . Kogemusest on teada, et silinder ei hakka



Joonis 45: Veerehõõre

veerema mis tahes $Q > 0$ puhul. Takistust, mida silinder avaldab veeremisele, nimetatakse *veerehõõrdeks*. Erinevalt liugehõõrdest on veerehõõre põhjustatud veereva keha ja aluspinna deformeerumisest.

Silinder hakkab veerema, kui $|M_A(\mathbf{Q})| > |M_A(\mathbf{P})|$. Kuna momendid $|M_A(\mathbf{Q})| = Q \cdot OC$ ja $|M_A(\mathbf{P})| = P \cdot AC$, siis saab viimane tingimus kuju $Q \cdot OC > P \cdot AC$.

Tähistame deformatsiooni iseloomustava pikkuse $AC = \varkappa$. Kuna α on väike, siis $\cos \alpha \sim 1$, $OC \sim r$ ja $P \sim N$. Seega silinder hakkab veerema, kui

$$Q > \varkappa \frac{P}{OC} \sim \varkappa \frac{N}{r} = F_r. \quad (101)$$

Suurust \varkappa nimetatakse *veerehõõrdeteguriks* (dim $\varkappa = \text{m}$) ja jõu dimensiooni omavat suurust F_r *veerehõõrdejõuks*.

Ülesannete lahendamisel on otstarbekas kasutada veerehõõrdejõu asemel *veerehõõrdemomenti*, mille moodul

$$M_r = rF_r = \varkappa N. \quad (102)$$

Sarnaselt liugehõõrdega on ka veerehõõrdejõud ja veerehõõrdemoment suunatud vastupidiselt võimalikule liikumisele.

Märkused:

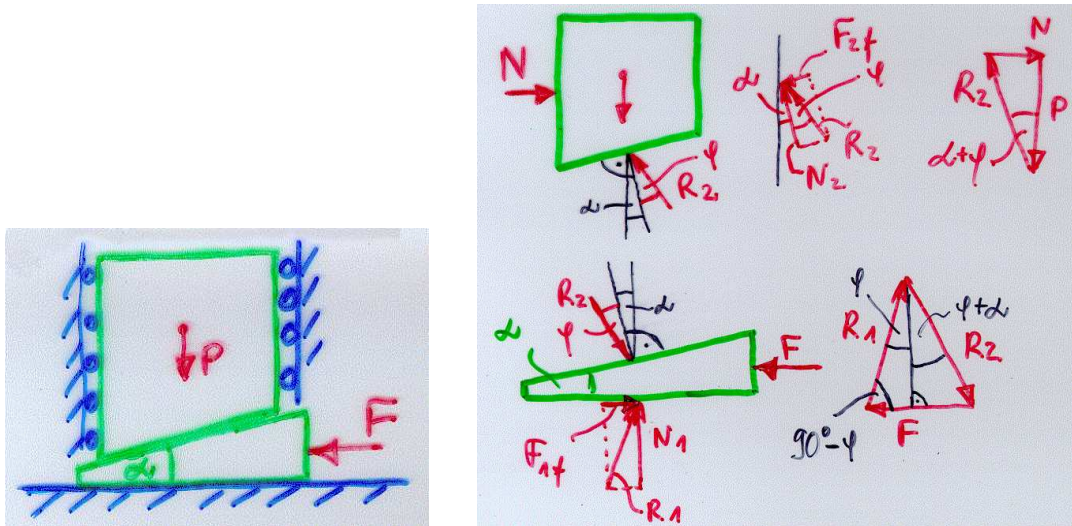
- Sageli kasutatakse termini veerehõõrde asemel terminit *veeretakistus*. Vastavalt kasutatakse siis ka termineid *veeretakistustegur*, *veeretakistusjõud* ja *veeretakistusmoment*.
- Veeretakistustegur \varkappa iseloomustab veereva keha ja aluspinna deformatsiooni suurust.
- Tegelikult määravad avaldised (101) ja (102) vastavalt veerehõõrdejõu ja veerehõõrdemomendi maksimaalsed väärtused ning analoogselt liugehõõrdega kehitvad veerehõõrde puhul võrratused $0 \leq M_r \leq \max M_r = \varkappa N$ ja $0 \leq F_r \leq \max F_r = \varkappa \frac{N}{r}$.
- Peale liugehõõrde ja veerehõõrde eristatakse ka pöördehõõret ehk keerlemishõõret, kuid käesolevas kursuses seda ei käsitleta (Vt. Lepik & Roots, TM lk. 79-80).

13.4 Hõõrde rakendusi

13.4.1 Kiilud

Ülesanne.

Vaatleme keha kaaluga \mathbf{P} , mille all on kerge kiil⁷ kaldenurgaga α . Hõõrdetegur kiilu mõle-



Joonis 46: Keha ja kiil(vasakul). Kiilu liikumine keha alla (paremal).

mal pinnal on f . Kui suurt horisontaalset jõudu \mathbf{F} tuleks rakendada kiilule, et kiil rohkem keha alla liiguks? Kui suurt horisontaalset jõudu \mathbf{F} tuleks rakendada kiilule, et kiilu keha alt välja tõmmata? Millisel juhul on tegu nn. iselukustuva kiiluga (kiiluga, mis ei libise ise keha alt välja)?

Lahendus.

1) Kui suurt horisontaalset jõudu \mathbf{F} tuleks rakendada kiilule, et kiil rohkem keha alla liiguks?

Tasakaalu korral moodustavad kehale mõjuvad kolm jõudu \mathbf{P} , \mathbf{N} ja \mathbf{R}_2 täisnurkse jõukolmnurga ($\varphi = \arctan f$ on hõõrdenurk), kust leiame

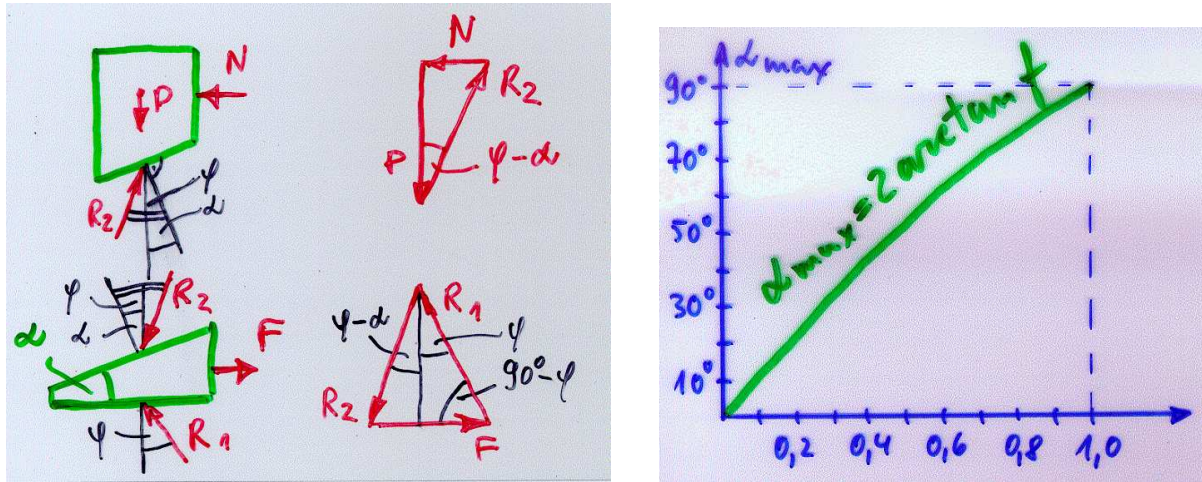
$$R_2 = \frac{P}{\cos(\alpha + \varphi)}. \quad (103)$$

Kiilule mõjuvad jõud \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 ja \mathbf{F} . Vaatleme kiilu tasakaalu ja moodustame vastava jõukolmnurga. Siinusteoreemi ja avaldise (103) põhjal

$$\frac{R_2}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{F}{\sin(2\varphi + \alpha)} \Rightarrow \underline{F} = \frac{R_2 \sin(2\varphi + \alpha)}{\cos \varphi} = \frac{P \sin(2\varphi + \alpha)}{\cos \varphi \cos(\alpha + \varphi)}. \quad (104)$$

2) Kui suurt horisontaalset jõudu \mathbf{F} tuleks rakendada kiilule, et kiilu keha alt välja tõmmata?

⁷St. kiilu kaalu ei arvesta.



Joonis 47: Kiilu liikumine keha alt välja (vasakul). Iselukustuv kiil: maksimaalse kalde-nurga sõltuvus hõõrdetegurist (paremal).

Võrreldes eelnevalt käsitletud juhuga on kiilu välja tõmbamise puhul (eeldatav) liikumise suund vastupidine. Vaatleme keha ja kiilu tasakaalu, moodustame kaks jõukolmnurka, rakendame siinusteoreemi ja saame

$$R_2 = \frac{P}{\cos(\varphi - \alpha)},$$

$$\frac{R_2}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{F}{\sin(2\varphi - \alpha)}, \quad (105)$$

$$\underline{F} = \frac{R_2 \sin(2\varphi - \alpha)}{\cos \varphi} = \frac{P \sin(2\varphi - \alpha)}{\cos \varphi \cos(\varphi - \alpha)}.$$

3) Millisel juhul on tegu nn. iselukustuva kiiluga?

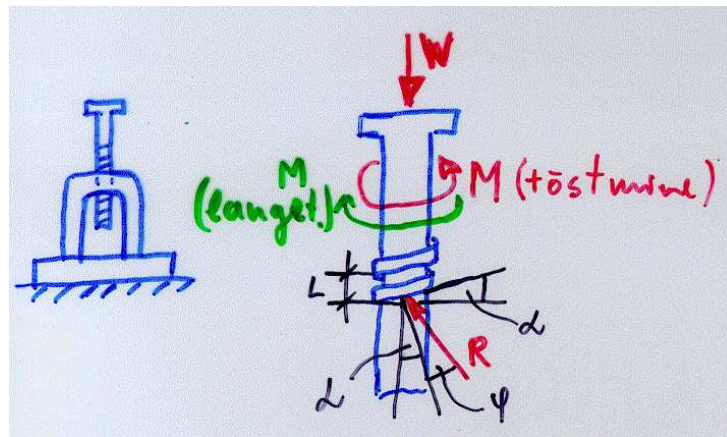
Iselukustuva kiilu puhul hakkab kiil keha alt välja liikuma vaid vasakult paremale suunatud jõu \mathbf{F} toimel. Teisisõnu, avaldisega (105)₃ esitatud jõud peab olema positiivne. Uurime seda avaldist. Kui hõõrdetegur $0 \leq f \leq 1$, siis hõõrdenurk $0 \leq \varphi \leq 45^\circ$ ja $\cos \varphi > 0$. Kui kiilu nurk $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$, siis ka $\cos(\varphi - \alpha) > 0$. Suurus $\sin(2\varphi - \alpha) > 0$, kui $2\varphi > \alpha$.

Seega, iselukustuva kiiluga on tegu, kui nurk $\alpha < \alpha_{\max} = 2\varphi = 2 \arctan f$. Vastasel korral tuleb kiilu keha all hoidmiseks rakendada paremalt vasakule suunatud jõudu $-\mathbf{F}$, mis on määratud avaldisega (105)₃. Kui hõõrdetegur $f = 0,3$ (puit puidul), siis $\alpha_{\max} = 33,40^\circ$ ja kui $f = 0,6$ (teras terasel), siis $\alpha_{\max} = 61,93^\circ$. Hõõrdeteguri väärtuse $f = 0,9$ puhul oleks $\alpha_{\max} = 83,97^\circ$.

13.4.2 Kruvid

Ülesanne.

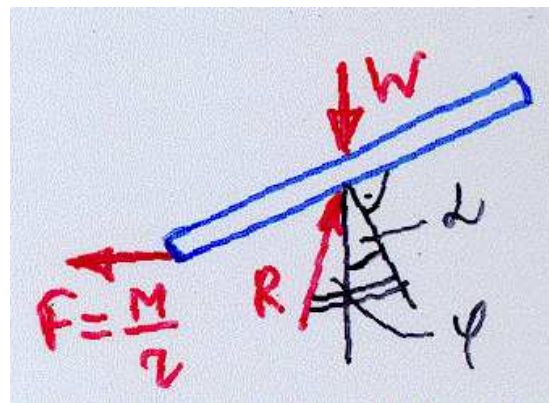
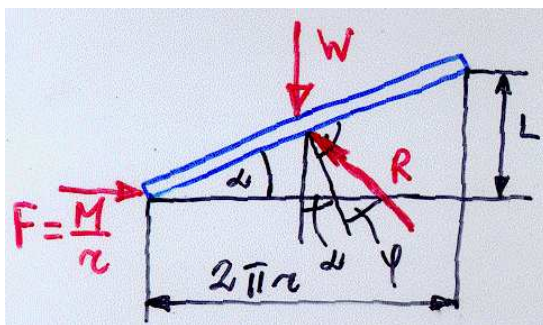
Vaatleme nn. ristkülikulist kruvi (vinti). Kui suurt jõupaari momenti M tuleb kruvile rakendada, et tõsta raskust W ? Kui suurt jõupaari momenti M tuleb kruvile rakendada, et langetada raskust W ? Millisel juhul on tegu nn. iselukustuva kruviga? Hõõrdetegur on f , kruvisamm L ja kruvi (keskmise) raadius r .



Joonis 48: Kruvi.

Lahendus.

1) Kui suurt jõupaari momenti M tuleb kruvile rakendada, et tõsta raskust W ?



Joonis 49: Tõstmine (vasakul) ja langetamine.

Vaatleme kruvi ühte keeret, kerime ta mõtteliselt sirgeks ja asendame momendi M jõuga $F = M/r$. Keerme kaldenurk $\alpha = \arctan(L/2\pi r)$ ja hõõrdenurk $\varphi = \arctan f$. Projekteerides tasakaaluvõrrandi $\mathbf{W} + \mathbf{R} + \mathbf{F} = 0$ kahele ristuvale teljele saame

$$R = \frac{W}{\cos(\alpha + \varphi)},$$

$$F = R \sin(\alpha + \varphi),$$

$$M = W r \tan(\alpha + \varphi).$$
(106)

2) Kui suurt jõupaari momenti \mathbf{M} tuleb kruvile rakendada, et langetada raskust \mathbf{W} ?

Raskuse \mathbf{W} langetamise puhul muutuvad jõudude \mathbf{R} ja \mathbf{F} suunad ning moment

$$M = Wr \tan(\varphi - \alpha). \quad (107)$$

3) Millisel juhul on tegu nn. iselukustuva kruviga?

Iselukustuva kruviga on tegu juhul, kui raskuse \mathbf{W} toimel ei hakka kruvi ise langema, vaid selleks tuleb rakendada jõupaari momenti. Teisisõnu, avaldisega (107) määratud moment peab olema positiivne. Kuna nii $W > 0$ kui $r > 0$, siis on $M > 0$, kui

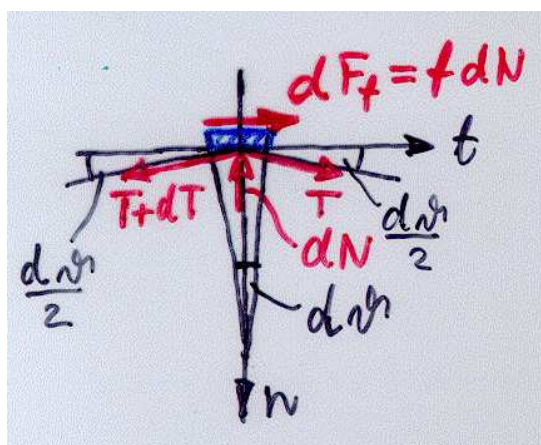
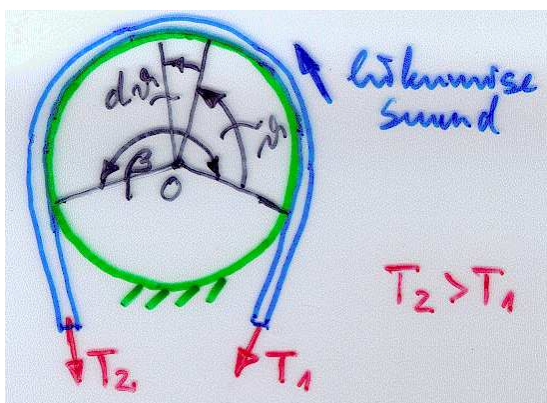
$$\tan(\varphi - \alpha) > 0 \Rightarrow \alpha < \varphi. \quad (108)$$

Seega, iselukustuva kruvi puhul $\alpha < \alpha_{\max} = \varphi = \arctan f$.

13.4.3 Niidi hõõre vastu silindrilist pinda

Ülesanne.

Vaatleme järgalt kinnitatud silindrit, millel oleva niidi⁸ harudes mõjuvad tõmbejõud $\mathbf{T}_1 < \mathbf{T}_2$. Hõõrdetegur niidi ja silindri vahel on f . Leida niidi harudes mõjuvate jõudude moodulite suhe T_2/T_1 .



Joonis 50: Niidi hõõre.

Lahendus.

Vaatleme kesknurgale $d\vartheta$ vastava niidielemendi tasakaalu. Sellisele elemendile mõjuvad jõud \mathbf{T} , $\mathbf{T} + d\mathbf{T}$, $d\mathbf{N}$ ja $d\mathbf{F}_f$. Arvestades, et $dF_f = fdN$, saame tasakaalutingimuse $\sum \mathbf{F}_i = 0$ projekteerimisel telgedele t ja n

$$\begin{cases} f dN = dT, \\ dN = T d\vartheta, \end{cases} \Rightarrow f T d\vartheta = dT. \quad (109)$$

⁸Niidi mõiste on siin küllaltki lai. Niidina käsitletakse näiteks köisi, trosse, rihmasid ja muid painduvaid kehasid.

Eraldame muutujad ja integreerime:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = f \int_0^\beta d\vartheta \Rightarrow \ln \frac{T_2}{T_1} = f\beta. \quad (110)$$

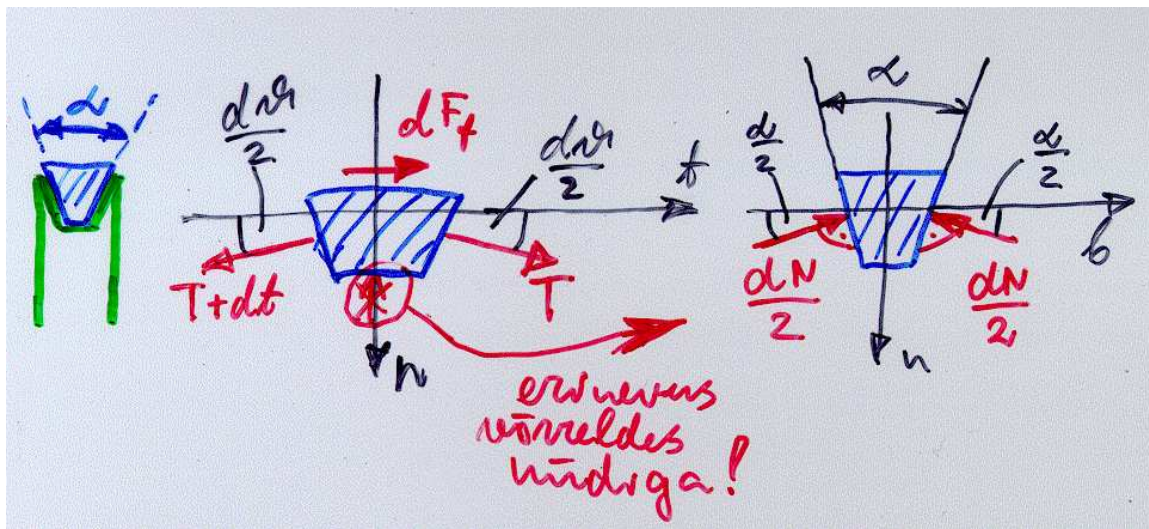
Seega jõudude moodulite suhe⁹

$$\frac{T_2}{T_1} = \exp f\beta. \quad (111)$$

Märkused:

- Valem (111) kehtib ka mitteringjoonelise ristlõike puhul (näiteks kivid), sest tema tuletamisel ei kasutatud silindri raadiust r .
- Valemit (111) saab kasutada vaid juhul, kui niit libiseb silindril või on just libisema hakkamas. Viimane on nn. piirjuht.
- Silinder ei pruugi olla jäigalt kinnitatud — teda võib paigal hoida jõupaari moment.
- Kiiirihma puhul on normaalreaktsioon $dN = Td\vartheta / \sin(0,5\alpha)$ (vt. joonist) ja valem (111) saab kuju

$$\frac{T_2}{T_1} = \exp \frac{f\beta}{\sin(0,5\alpha)}. \quad (112)$$



Joonis 51: Kiiirihma reaktsioonid.

- Põhilised rakendused:
 - Jõudu T_2 tasakaalustava jõu T_1 leidmine.
 - Lintpidurite arvutus.
 - Rihmülekande vedavas ja veetavas harus mõjuvate tõmbejõudude määramine või maksimaalse ülekantava momendi leidmine.

⁹ $\exp x \equiv e^x$

Sisukord

Eessõna	1
1 Sissejuhatus	2
2 Jõud ja jõusüsteem	3
2.1 Jõu mõiste	3
2.2 Jõusüsteemi mõiste	3
2.3 Jõu projektsioon teljel, jõu komponendid ja jõu projektsioon tasandil . . .	4
2.4 Jõudude liitmine	5
3 Staatika aksioomid ja põhiülesanded	7
4 Sidemed, sidemereaktsioonid ja sidemetest vabastatavuse printsiip	9
5 Koonduva jõusüsteemi tasakaal	18
6 Paralleeljõudude liitmine, jõupaar	21
6.1 Kahe samasuunalise paralleeljõu liitmine	21
6.2 Kahe vastassuunalise paralleeljõu liitmine	22
6.3 Jõupaar	23
7 Jõu moment. Jõupaari moment	24
7.1 Jõu moment punkti suhtes	24
7.2 Jõu moment telje suhtes	25
7.3 Jõupaari moment	26
8 Jõusüsteemi taandamine	28
8.1 Lemma jõu paraleellükkest	28
8.2 Jõusüsteemi peavektor ja peamoment	28
8.3 Jõusüsteemi invariandid	29
8.4 Jõukruvi ehk dünaam	30
8.5 Jõusüsteemi taandamise erijuhud	32
8.6 Erikujuliste jõusüsteemide taandamine	33
8.7 Varignon'i teoreem	33
9 Jõusüsteemi tasakaal	35
9.1 Jõusüsteemi tasakaalu tingimused	35
9.2 Staatiliselt määratud ja staatiliselt määramata ülesanded	36

10 Raskuskese	37
10.1 Paralleeljõudude kese	37
10.2 Raskuskese	38
10.3 Tükeldus- ja täiendusmeetod	39
10.4 Näited	40
10.5 Pappus-Guldini teoreemid	41
11 Pinnamomendid	43
11.1 Sissejuhatus	43
11.2 Staatilised momendid	43
11.3 Inertsimomendid	44
11.4 Inertsimomendid keskteljega paralleelsete telgede suhtes	45
11.5 Inertsimomendid pööratud telgede suhtes	46
11.6 Peateljed ja peainertsimomendid	47
11.7 Massiinertsimomendid	48
11.8 Näide	48
12 Jõuväli	51
13 Hõõre	52
13.1 Liugehõõre	52
13.2 Hõõrdenurk ja hõõrdekoonus	53
13.3 Veerehõõre ehk veeretakistus	54
13.4 Hõõrde rakendusi	56
13.4.1 Kiilud	56
13.4.2 Kruvid	58
13.4.3 Niidi hõõre vastu silindrilist pinda	59