Kapitel 3

Geometrische Konstruktionen in der Islamischen Welt

§1 Euklidische Konstruktionen

Dass geometrische Konstruktionen für die griechischen Geometer der Antike von besonderem Interesse waren, wird schon aus der Tatsache deutlich, dass Euklid zwei der dreizehn Bücher seiner *Elemente* einer Darstellung der geometrischen Konstruktionen widmet, die bis zu seiner Zeit durchgeführt werden konnten. In Buch (I und) IV erklärt Euklid, wie man ein gleichseitiges Dreieck und ein Quadrat und wie man das regelmäßige Fünf-, Sechs-, Acht-, Zehn- und 15-Eck konstruiert. In Buch XIII stellt er dar, wie regelmäßige Polyeder konstruiert werden, nämlich Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder – die vier, sechs, acht, zwölf und 20 Flächen haben.

Vieles von dem, was heute an euklidischer Geometrie in unseren Schulen gelehrt wird, handelt von der Dreiecks- und Kreisgeometrie, bei denen Lineal (ohne Skaleneinteilung) und Zirkel für die Konstruktion benutzt werden. Das erste Werkzeug wird verwendet, um zwei Punkte durch eine Strecke zu verbinden oder um eine Strecke zu verlängern, das zweite, um einen Kreis um einen beliebigen Mittelpunkt zu schlagen, der durch einen gegebenen Punkt verläuft. Die Möglichkeit, Punkte zu verbinden oder Strecken zu verlängern, wird in den Postulaten 1 und 2 der *Elemente* gefordert, beliebige Kreise zu zeichnen, in Postulat 3. Vielleicht werden aus diesem Grund Lineal und Zirkel als „euklidische Werkzeuge" bezeichnet.

Dabei ist sorgfältig zwischen einem Lineal ohne und mit Skaleneinteilung zu unterscheiden. Denn anders als bei einem Lineal mit Skaleneinteilung wird nicht vorausgesetzt, dass es parallele Kanten oder Markierungen irgendwelcher Art hat. Ebenso handelt es sich bei dem Zirkel, den Euklid zum Zeichnen von Kreisen voraussetzt, nicht um den heute gebräuchlichen, starren Zirkel, der auf einem festen Abstand eingestellt bleibt und für die Übertragung von Längen benutzt werden kann. Es ist vielmehr ein Zirkel, der, einmal aufs Papier gesetzt, einen Kreis um einen gegebenen Mittelpunkt durch irgendeinen beliebigen Punkt zeichnet, aber man kann damit keine Längen übertragen. Aus diesem Grund ist er als Klappzirkel bezeichnet worden, denn seine beiden Schenkel fallen wieder zusammen, wenn sie von der Zeichenebene genommen werden.

Das Erste, was Euklid in den *Elementen* zeigt, ist, dass auch mit diesem Klappzirkel Längen übertragen werden können, und zur Einführung in dieses Kapitel über die Geometrie werden wir die wesentlichen Gedanken von Euklids Beweis angeben. Dies ist die erste systematische Abhandlung einer Theorie des Konstruierens, in der gezeigt wird, wie Konstruktionen mit einem bestimmten Werkzeug auch mithilfe eines anderen (scheinbar) schwächeren Werkzeugs durchgeführt werden können.

In Buch I, Proposition 1 löst Euklid folgende Aufgabe: Über einer gegebenen Stecke AB soll ein gleichseitiges Dreieck ABG konstruiert werden (Abb. 3.1). Die Eigenschaften des Zirkels erlauben es Euklid, die Kreise mit dem Radius AB um die Mittelpunkte A und B zu zeichnen. Wenn sie sich in G schneiden, so gilt AG = AB = BG, sodass Δ(ABG) gleichseitig ist.

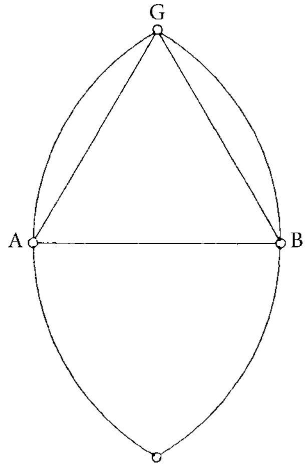


Abb. 3.1.

In Proposition 2 zeigt Euklid, wie von einem Punkt D aus eine Strecke DW gezeichnet wird, die gleich lang ist wie die gegebene Strecke AB (Abb. 3.2). Er sagt, man zeichne zuerst die Strecke BD und konstruiere entsprechend Proposition 1 das gleichseitige Dreieck BDG. Dann zeichne man einen Kreis um den Mittelpunkt B mit Radius BA. Dieser Kreis schneide die Verlängerung von GB in E. Dann gilt DW = GW − GD = GE − GB = BE = AB, was verlangt war.

Nach dem Beweis dieser beiden Propositionen schließt Euklid seine Darstellung mit Proposition 3, in der er zeigt, wie auf einer gegebenen Strecke DE eine Strecke abgetragen werden kann, die in einem Punkt Z beginnt

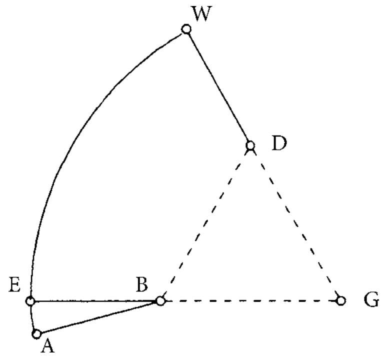


Abb. 3.2.

und genauso lang wie sein soll wie eine gegebene Strecke AB (Abb. 3.3). Gemäß Proposition 2 kann er eine Strecke ZF konstruieren, die gleich lang ist wie AB. Der Kreis um den Mittelpunkt Z mit Radius ZF schneidet die Strecke DE (eventuell nach Verlängerung der Linie) in Punkt G. Radius ZG hat somit die gleiche Länge wie AB. Mithilfe dieser Proposition ist Euklid in der Lage, eine gegebene Länge von irgendeinem Punkt zu irgendeinem anderen Punkt zu übertragen. Damit hat er auch gezeigt, dass mit dem Klappzirkel die gleichen Operationen durchgeführt werden können wie mit einem modernen Zirkel.

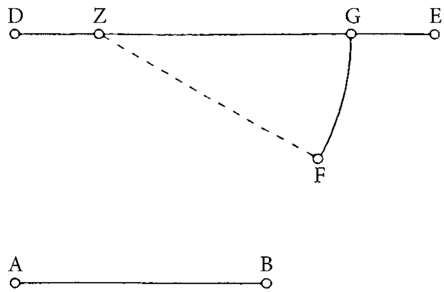


Abb. 3.3.

Der Leser wird zweifelsohne bemerkt haben, dass diese Beweise ohne praktischen Nutzen sind. Die Griechen wussten ebenso wie wir, wie man die zwei Schenkel eines Zirkels in einer bestimmten Lage fixieren kann, warum also quält sich Euklid mit einem weniger leistungsfähigen Werkzeug? Die Begründung ist, dass es eines der Anliegen Euklids war, möglichst sparsam mit den vorausgesetzten Annahmen umzugehen. Dieses Anliegen ist eher eine Frage des Geschmacks denn einer logischen Notwendigkeit, aber es war charakteristisch für die Mathematiker seit der Zeit der griechischen Geometer. Wir werden sehen, dass es ein Anliegen war, das die islamischen Geometer teilten. Weitere grundlegende Konstruktionen in den *Elementen* sind folgende: eine Senkrechte zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt zeichnen (d. h. ein Lot von einem Punkt auf eine Gerade fällen), eine Strecke in beliebig viele, gleich große Abschnitte unterteilen, einen Winkel halbieren und die Tangente an einen gegebenen Kreis zeichnen, die durch einen gegebenen Punkt außerhalb des Kreises verläuft. Diese dürften dem Leser bekannt sein.

§2 Griechische Quellen der islamischen Geometrie

In der islamischen Welt waren die Gelehrten seit dem späten 8. Jahrhundert dank der Übersetzungen, die in Bagdad im Auftrag der Kalifen Hārūn al-Rashīd und al-Ma'mūn hergestellt worden waren, mit den *Elementen* vertraut. Die zahlreichen überlieferten arabischen Ausgaben und Kommentare bezeugen den immensen Einfluss von Euklids *Elementen* auf die islamische Mathematik, denn sie waren einer der grundlegenden Texte, die jeder Schüler der Mathematik und der Astronomie zu lesen hatte.

Euklid muss sich jedoch seinen Ehrenplatz in der islamischen Mathematik mit einem anderen Mathematiker teilen, nämlich mit Archimedes, dessen Abhandlung *Über Kugel und Zylinder* bei den muslimischen Mathematikern große Bewunderung hervorrief und sie zu einigen ihrer besten Werke anregte. Im Vorwort seines Buches erwähnt Archimedes, dass er entdeckt hat, wie man die Fläche eines Parabelsegments berechnen kann. Da eine Abhandlung diesen Inhalts in der muslimischen Welt nicht bekannt war, spornte dieser Hinweis Thābit b. Qurra und seinen Enkel Ibrāhīm b. Sinān zu einer schließlich erfolgreichen Suche nach Beweisen für das Ergebnis des Archimedes an. Zusätzlich stellte er im zweiten Teil seines Werks die Aufgabe, eine Kugel mithilfe einer Ebene in einem bestimmten Zahlenverhältnis zu teilen; dies gab besondere Anregungen für Untersuchungen über Algebra und Kegelschnitte. Eine weitere Abhandlung, die von arabischen Quellen Archimedes zugeschrieben wurde, im Griechischen aber unbekannt ist, trägt den Titel *Über das Einbeschreiben eines regelmäßigen Siebenecks in einem Kreis*. Es wurde von Thābit b. Qurra ins Arabische übertragen, der auch alle anderen in mittelalterlichem Arabisch erhaltenen archimedischen Werke übersetzte oder ihre schon vorhandenen Übersetzungen nochmals überarbeitete. In diesem Werk wird das Problem der Konstruktion eines regelmäßigen Vielecks aufgegriffen, das sich bei Euklid nicht findet, nämlich die Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks, das erste bis dahin ungelöste Problem nach Euklids Konstruktion von Vielecken mit drei, vier, fünf und sechs Seiten. Die Existenz einer ausführlichen Literatur zu den Werken des Archimedes lässt erkennen, dass diese die zweite Säule islamischer Geometrie darstellten.

Die dritte Säule, auf der die geometrischen Forschungen im Islam beruhten, war die *Konika*, ein um 200 v. Chr. von Apollonios von Perge verfasstes Werk in acht Büchern (Kapiteln). Apollonios' Werk ist schwierig und in den letzten Büchern behandelt er anspruchsvolle Themen wie den kleinstmöglichen Abstand eines Punktes von einem Kegel. So nimmt es nicht wunder, dass lediglich die ersten vier Bücher in griechischer Sprache überlebten. Offensichtlich waren die übrigen vier Bücher für die Gelehrten der Spätantike entweder zu speziell oder zu kompliziert. Es ist bezeichnend für die Fähigkeiten der muslimischen Geometer, dass sieben Bücher in arabischer Sprache überlebten und der Bibliograf al-Nadīm berichtet, dass im 10. Jahrhundert sogar noch Teile des achten Buches vorhanden waren. Dieses Werk war nicht nur Grundlage für äußerst anspruchsvolle Forschungen in der Geometrie und der Optik – und sogar in der Algebra, wie wir in den Werken von ʿUmar al-Khayyāmī sehen werden – sondern es regte auch einen der fähigsten muslimischen Gelehrten, Ibn al-Haytham, zu dem Versuch an, das achte Buch zu rekonstruieren.

Abb. 3.4. Diese pakistanische Briefmarke erinnert an die grundlegenden Beiträge Ibn al-Haythams zur Optik, die in seinem großartigen Werk *Optik* (Kitāb al-Manaẓir) erhalten sind

Obwohl Schüler die grundlegenden euklidischen Konstruktionen während der Schulzeit kennenlernen, begegnen sie den elementaren Eigenschaften der Kegelschnitte meist erst in den Analysiskursen der Anfangssemester an der Universität, und dann mit einem völlig anderen Ansatz als dem, den die muslimischen Verfasser wählten. Daher soll die Zusammenfassung einiger grundlegender Ideen aus dem Buch des Apollonios das notwendige Hintergrundwissen zum Verständnis der folgenden Abschnitte bereitstellen.

§3 Apollonios' Theorie der Kegelschnitte

Die Oberfläche eines Doppelkegels wird von Geraden gebildet, die durch Punkte eines Kreises, des sogenannten Grundkreises, sowie durch einen festen Punkt außerhalb der Ebene des Grundkreises verlaufen (Abb. 3.5). Die Geraden werden als *erzeugende Geraden* bezeichnet, der feste Punkt als Kegel*spitze*. Eine Gerade, die durch die Spitze des Kegels und den Mittelpunkt des Grundkreises verläuft, wird als *Achse* bezeichnet. Ein *Kegel* ist ein Körper, der durch denjenigen Teil der Oberfläche eines Doppelkegels begrenzt wird, der zwischen Spitze und Grundkreis liegt.

Sowohl Euklid als auch Archimedes schrieben schon vor Apollonios über Kegelschnitte, aber in ihren Abhandlungen beschäftigten sie sich nur mit Kegelschnitten des sogenannten geraden Kreiskegels, dessen Achse senkrecht zum Grundkreis steht. Der gerade Kreiskegel wurde dann von einer Ebene senkrecht zu einer erzeugenden Gerade geschnitten. Auf diese Weise erhielt man einen ebenen Schnitt; die Art des Schnitts war abhängig vom Winkel an der Spitze des Kegels. In der antiken Welt waren Kegelschnitte demnach ebene Figuren, wohingegen wir die Begrenzungslinien dieser Flächen betrachten und Kegelschnitte als Kurven ansehen.

Apollonios verallgemeinerte dieses Verfahren zur Erzeugung von Kegelschnitten, indem er ebene Schnitte eines beliebigen Doppelkegels betrachtete, dessen Achse auch schräg zum Grundkreis stehen konnte. Er zeigte, dass, vom Kreis abgesehen, nur die drei bekannten Kegelschnitte entstehen können.

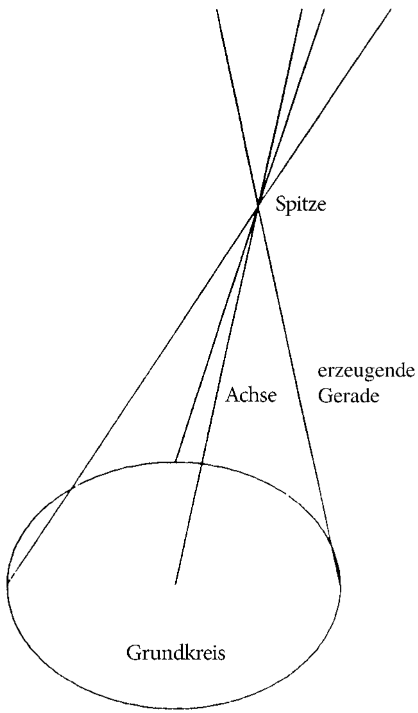


Abb. 3.5.

Am Anfang seiner *Konika* benutzt Apollonios die Tatsache, dass es sich bei diesen Figuren um Schnitte eines Kegels handelt, nur um ihre charakteristischen Eigenschaften, „Symptome" genannt, herauszustellen; und in den folgenden Kapiteln der acht Bücher beweist er alles mithilfe dieser „Symptome". Da wir uns im Folgenden nur mit Parabel und Hyperbel befassen werden, beschränken wir uns bei der Untersuchung der „Symptome" auf diese beiden Kegelschnitte.

Apollonios zufolge ist die Parabel die Schnittlinie eines Kegels mit einer Ebene, wenn die Ebene parallel zu einer erzeugenden Geraden des Kegels verläuft. Die Hyperbel ist eine der beiden Schnittlinien, die entstehen, wenn die Ebene beide Teile eines Doppelkegels schneidet. Bei beiden Kegelschnitten wird eine Strecke, die zwei Punkte miteinander verbindet, als Sehne bezeichnet. Apollonios zeigte, dass die Mittelpunkte aller Sehnen, die parallel zu einer gegebenen Sehne sind, auf einer Geraden liegen, und dass, wenn diese Gerade den Kegelschnitt in A schneidet, die Tangente durch A parallel zu allen diesen Sehnen ist. Die Gerade wird als *Durchmesser* des Schnitts bezeichnet, der Schnittpunkt eines Durchmessers mit dem Kegelschnitt als *Scheitelpunkt*. Die Halbsehnen auf einer Seite des Durchmessers werden als *Ordinaten* der Durchmesser bezeichnet. Sind die Ordinaten senkrecht zum

Begriff	Definition	Abb. 3.6
Sehne	Strecke, die zwei Punkte eines Kegelschnitts miteinander verbindet	FE, YZ, UV
Durchmesser	Gerade, auf der die Mittelpunkte aller Sehnen liegen, die parallel zu einer vorgegebenen Sehne verlaufen	AB
Scheitelpunkt	Schnittpunkt eines Durchmessers mit der Kurve	
Ordinate	Länge der Halbsehnen auf einer Seite des Durchmessers	XY
Achse	Durchmesser, falls die Sehnen senkrecht zum Durchmesser verlaufen	CD

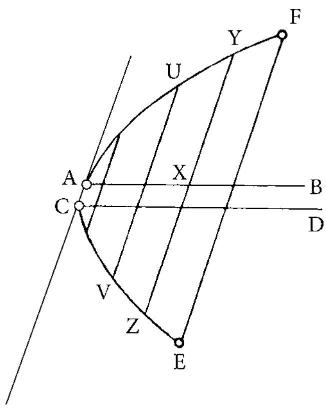


Abb. 3.6.

Durchmesser, dann gibt es nur einen solchen Durchmesser, der dann als *Achse* bezeichnet wird. Zur Veranschaulichung haben wir dies in Abb. 3.6 für eine Parabel zusammengestellt, wobei FE eine Sehne ist, YZ und UV sind parallel zu FE und AB ist der Durchmesser, der durch die Mittelpunkte dieser Sehnen geht. XY ist eine typische Ordinate zum Durchmesser AB, die Strecke CD ist die Achse.

Charakteristische Eigenschaften der Parabel

Im Falle der Parabel sind alle Durchmesser parallel zur Achse CD. AB sei ein gegebener Durchmesser, X ein beliebiger Punkt auf AB und XY die Ordinate über X. Apollonios zeigte (Abb. 3.6), dass es zum Durchmesser AB eine zugehörige Strecke p gibt, sodass bei einem Rechteck, das flächengleich ist zum Quadrat über XY und dessen eine Seite genauso lang ist wie AX, die andere Seite genau die Länge p hat. Diese Strecke p wird *Parameter zum Durchmesser AB* genannt (oder *latus rectum*). Setzt man AX = x und AY = y, dann wird das Apollonische „Symptom" zur modernen Gleichung $p \times x = y^2$. Apollonios beschrieb dies mit dem griechischen Ausdruck *paraballetai*; dementsprechend nannte er diesen Kegelschnitt *parabolē*. Hiervon leitet sich unser Wort „Parabel" ab. (Das Wort *paraballetai* bedeutet wörtlich „es wird entlang gelegt" und bezieht sich auf das Rechteck, das genau zum Parameter passt.)

Charakteristische Eigenschaften der Hyperbel

Hier hat die Kurve einen Mittelpunkt, der in der Mitte zwischen den Scheitelpunkten der beiden Kegelschnitte liegt (Abb. 3.7). Jede Linie durch diesen Mittelpunkt ist ein Durchmesser und der Mittelpunkt halbiert die Teilstrecke eines Durchmessers zwischen den beiden Hyperbel-Ästen. C und C′ seien die Endpunkte der Teilstrecke eines Durchmessers zwischen den beiden Ästen, a = CC′ werde Transversale genannt (oder *latus transversum*). Apollonios beweist, dass es zu a eine Strecke p mit folgender Eigenschaft gibt: Bei einem Rechteck, das flächengleich ist zum Quadrat über einer Ordinate XY und dessen eine Seite genauso lang ist wie CX, ist die andere Seite größer als p. Darüber hinaus ist das Rechteck (in Abb. 3.7 schraffiert), das aus dem Betrag dieser Seite größer p und CX gebildet wird, ähnlich zum Rechteck mit den Seiten a und p. Somit genügt die andere Seite s der Verhältnisgleichung $s : \mathrm{CX} = p : a$ bzw. $s = \frac{p}{a} \times \mathrm{CX}$.

Um zu erkennen, was das „Symptom" für die Hyperbel geometrisch bedeutet, sei C′ das andere Ende des Durchmessers und CP der Parameter. Außerdem schneide die Senkrechte zu CX durch X die Gerade C′P in E. Dann ergibt sich aus dem „Symptom" des Apollonios, dass die Fläche des Rechtecks mit den Seiten CX und XE gleich $(\mathrm{XY})^2$ ist. (Die Seite p wird als Parameter bezeichnet.) Denn das griechische Wort für „es geht darüber hinaus" ist „hyperballetai". Apollonios bezeichnet diesen Fall als *hyperbolē*.

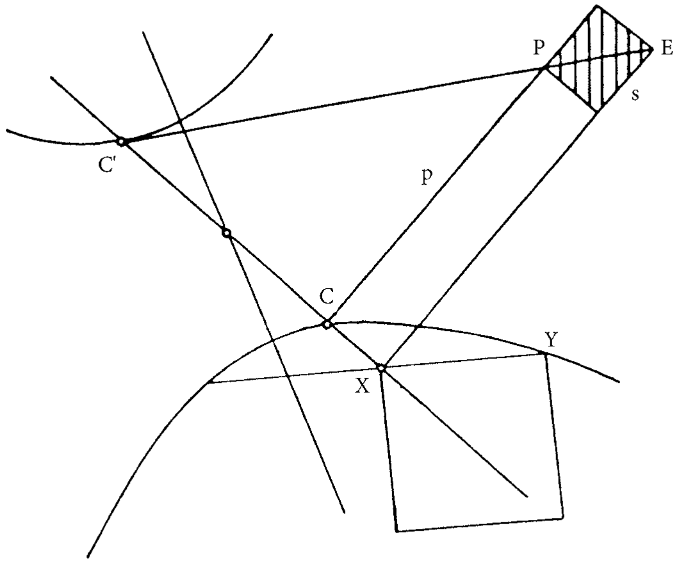


Abb. 3.7.

Hiervon leitet sich der Begriff „Hyperbel" ab. Wenn wir wiederum CX = x und XY = y setzen, wird das „*Symptom*" zu

$$y^2 = (p + s)x = px + \frac{p}{a}x^2 ,$$

was der modernen Formel für die Hyperbel entspricht. Für $p = a$ wird aus dem schraffierten Rechteck in Abb. 3.7 ein Quadrat. Diesen Fall nutzt Abū Sahl al-Kūhī in seiner Analyse (siehe unten).

Die oben genannten Eigenschaften der Kegelschnitte waren wohl kaum Entdeckungen des Apollonius, da sie bereits Archimedes bekannt waren. Aber einer der Beiträge des Apollonios war es, – nachdem er gezeigt hatte, dass die „Symptome" die Kegelschnitte charakterisieren – die in den „Symptomen" festgestellten Verhältnisse verwendet und die Kegelschnitte als Parabel, Hyperbel und Ellipse bezeichnet zu haben („Ellipse" von *elleipsis*, „zu kurz ausfallen").

§4 Abū Sahl über das regelmäßige Siebeneck

Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks durch Archimedes

Sowohl in der griechischen als auch in der islamischen Welt wurden Kegelschnitte (mit Ausnahme des Kreises) vor allem für geometrische Konstruktionen, für die Gestaltung von Brennspiegeln und für die Theorie der Sonnenuhren verwendet. Ellipsen wurden im frühen 17. Jahrhundert durch J. Kepler zur Modellierung von Planetenbahnen in der Astronomie eingeführt. Die Verwendung von Kegelschnitten in geometrischen Konstruktionen geschah in der ersten Hälfte des 4. Jahrhunderts v. Chr. durch Menaichmos, der Kegelschnitte erfand und sie dazu verwendete, um einen Würfel zu konstruieren, dessen Volumen doppelt so groß ist wie das Volumen eines gegebenen Würfels. Ist die Seitenlänge des gegebenen Würfels a und die des gesuchten Würfels b, dann gilt $b^3 = 2a^3$ bzw. $b = \sqrt[3]{2}a$. Die eigentliche Aufgabe besteht also darin, eine Strecke der Länge a zu einer der Länge $\sqrt[3]{2a}$ zu verlängern. (Aufgrund der Theorie über die Lösbarkeit von Gleichungen durch E. Galois, einem französischen Mathematiker des 19. Jahrhunderts, wissen wir, dass dies nicht mit Zirkel und Lineal (ohne Skaleneinteilung) gelöst werden kann. Jedoch erkannten sowohl die griechischen als auch die muslimischen Geometer, dass diese und viele andere Konstruktionen mithilfe der Kegelschnitte bewältigt werden können.)

Ungeachtet dessen bleibt eine Konstruktion ungewöhnlich und unerklärlich. Dies war ein Hilfssatz über die Konstruktion eines regelmäßigen Siebenecks, die Archimedes zugeschrieben wird. Die Konstruktion war so rätselhaft, dass der muslimische Mathematiker Abū al-Jūd mit einiger Berechtigung anmerkte, dass „ihre Ausführung schwieriger und ihr Beweis abwegiger ist als das, für das sie als Prämisse dienen soll".

Archimedes beginnt mit dem Quadrat ABDG und seiner Diagonalen BG (Abb. 3.8). Dann dreht er ein Lineal um Punkt D, sodass es die Diagonale BG, die Seite AG und die verlängerte Seite BA in den Punkten T, E bzw. Z so schneidet, dass das Dreieck AEZ die gleiche Fläche hat wie das Dreieck DTG. Zum Schluss zeichnet er die Strecke KTL parallel zu AG. Dann beweist er, dass K und A die Strecke BZ so teilen, dass aus den drei Strecken BK, KA und AZ ein Dreieck gebildet werden kann, und dass gilt $BA \times BK = ZA^2$ und $KZ \times KA = KB^2$. Dann wird das Dreieck KHA gezeichnet, für das gilt $KH = KB$ und $AH = AZ$, sowie ein Kreis BHZ durch B, H, Z. Archimedes beweist, dass der Bogen BH ein Siebtel des Kreisumfangs beträgt.

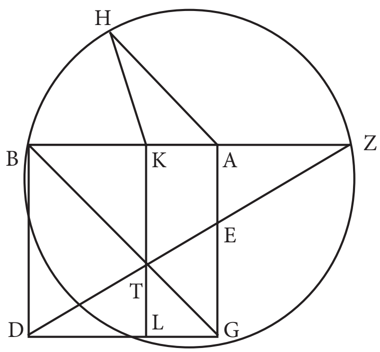


Abb. 3.8.

Aus der griechischen und islamischen Mathematik ist keine andere derartige Konstruktion bekannt. Ihre Einzigartigkeit ist ein Gütesiegel für die Arbeit des Archimedes. Trotz all ihrer Eleganz wirft sie jedoch, wie Abū al-Jūd andeutete, so viele Probleme auf, wie sie löst. Denn dreht man das Lineal um Punkt D so, dass es AG näher bei A schneidet, kann das Dreieck AEZ beliebig klein werden, während sich die Fläche des Dreiecks DTG der einem Viertel des Quadrats nähert. Nähert man andererseits das Lineal dem Punkt G, dann wird das Dreieck AEZ beliebig groß und das Dreieck DTG beliebig klein. Daher gibt es eine Zwischenlage, bei der die Flächen der beiden Dreiecke gleich groß sind, und Archimedes' Verfahren ist, wenn man so will, zwar ein Existenzbeweis, aber kaum eine Konstruktion. So blieb das Problem fast 1200 Jahre lang ein – konstruktiv gesehen – ungelöstes Problem.

Abū Sahls Analyse

In der zweiten Hälfte des 10. Jahrhunderts versammelte sich in Bagdad und der umgebenden Region eine Gruppe außergewöhnlicher Wissenschaftler aus dem gesamten östlichen Teil der islamischen Welt unter der Schirmherrschaft einer Reihe von Königen aus der Familie der Buyiden. Der herausragendste dieser Könige war ʿAḍud al-Dawla („Der starke Arm des Staates") und einer der führenden Wissenschaftler an seinem Hof war Abū Sahl al-Kūhī, der aus dem Bergland („kūh" ist das persische Wort für „Berg") südlich des Kaspischen Meeres stammte. Folgt man den Angaben des Biografen al-Bayhaqī, der über ein Jahrhundert später lebte, so war Abū Sahl ursprünglich ein Jongleur von Glasflaschen auf dem Markt in Bagdad, bevor er das Jonglieren zugunsten naturwissenschaftlicher Studien und Forschungen aufgab. Vielleicht waren es seine Erfahrungen als Jongleur, die sein Interesse an Schwerpunkten weckten, denn in seinen Briefen sind einige der tiefsinnigsten Sätze über Schwerpunkte seit der Zeit des Archimedes enthalten. Tatsächlich kannte Abū Sahl die Werke des Archimedes gut und er schrieb einen Kommentar zu der in Buch II enthaltenen Abhandlung *Über Kugel und Zylinder*. Darin erklärt er, wie mithilfe der Kegelschnitte die Aufgabe gelöst werden kann, eine Kugel zu konstruieren, deren Kugelabschnitt das gleiche Volumen hat wie ein gegebener Kugelabschnitt und bei der die Oberfläche des Kugelabschnitts genauso groß ist wie die Oberfläche des Kugelabschnitts einer zweiten Kugel. Außerdem verfasste er eine Abhandlung über den „vollkommenen Zirkel", ein Instrument, mit dem Kegelschnitte gezeichnet werden können. Hierzu passend und aufgrund seiner Erfahrungen mit Kegelschnitten sah sich Abū Sahl das Problem, ein regelmäßiges Siebeneck zu konstruieren, genauer an und erkannte, dass eine Lösung bei den Kegelschnitten zu finden sein müsste. Angeregt durch den Beweis des Archimedes ging er die Lösung an. Wenn er die Konstruktion des Siebenecks als ein Problem bezeichnet, das vor ihm noch kein Geometer zu lösen in der Lage war, „nicht einmal Archimedes", bezieht er sich zweifelsohne auf das eigentliche Problem, nämlich eine Konstruktion tatsächlich anzugeben, wonach das Verfahren des Archimedes verlangt.

Abū Sahls Vorgehen besteht zunächst darin, das Problem zu *analysieren*, d. h. anzunehmen, dass das Siebeneck bereits konstruiert worden ist und rückwärts zu schließen – mithilfe einer Kette von Schlussfolgerungen, welche gültige Umkehrschlüsse zulassen. Eine solche Analyse ist ein altes Verfahren, das Proklos – eine möglicherweise unsichere Quelle – Plato zuschreibt. Bei diesem Verfahren nimmt der Mathematiker als gegeben an, was erst noch zu beweisen ist, und schließt dann von da aus zurück, bis er bei den Voraussetzungen angekommen ist. Wenn die Kette der Schlussfolgerungen umgekehrt werden kann, hat er die *Synthese*, also den Beweis dessen gefunden, was ausgehend von der Voraussetzung gefordert war. Abū Sahl verwendet die Methode der Analyse, um eine Reihe von Konstruktionen zu finden, die der Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks gleichwertig sind. Viele Geometer des späten 10. Jahrhunderts glaubten, dass die vollständige Lösung einer Aufgabe sowohl der Analyse als auch der Synthese bedürfe, und Ibrāhīm b. Sinān (mit dem wir uns weiter unten in diesem Kapitel beschäftigen) schrieb eine Abhandlung über diese beiden Methoden.

Im Folgenden werden wir lediglich die Analyse vorstellen, wie sie sich in einer von Abū Sahl verfassten und König ʿAḍud al-Dawla gewidmeten Abhandlung findet, d. h. wir werden die Reihe der Konstruktionen nachvollziehen, durch die Abū Sahl das Problem, ein regelmäßiges Siebeneck zu konstruieren, auf die Konstruktion zweier Kegelschnitte zurückführte. Hiermit hat er gezeigt, wie eine sonderbare Konstruktion, die in keine Theorie passt, sich in die Theorie der Kegelschnitte einfügt. Durch solch eine Zusammenführung grundverschiedener mathematischer Verfahren entsteht eigentlicher mathematischer Fortschritt.

Erster Reduktionsschritt: Vom Siebeneck zum Dreieck

Angenommen, wir sind in der Lage, im Kreis ABG die Seite BG eines regelmäßigen Siebenecks zu konstruieren (Abb. 3.9), und es gilt $\widehat{AB} = 2\widehat{BG}$. Dann ist $\widehat{ABG} = 3\widehat{BG}$, und, da $\widehat{BG}$ ein Siebtel des Gesamtumfangs ist,

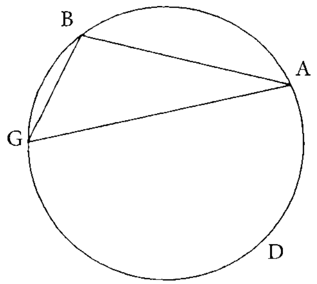


Abb. 3.9.

gilt: $\widehat{ADG} = 4\widehat{BG}$. Folgt man VI, 33 der *Elemente* des Euklid, dann stehen die Winkel des Dreiecks ABG auf einer Kreislinie im gleichen Verhältnis wie die Bögen, die ihnen gegenüberliegen, sodass gilt $\sphericalangle B = 4\sphericalangle A$ mit $\sphericalangle G = 2\sphericalangle A$. So wird die Konstruktion auf die Aufgabe reduziert, ein Dreieck zu konstruieren, dessen Winkel im Verhältnis 4 : 2 : 1 stehen.

Zweiter Reduktionsschritt: Vom Dreieck zur Teilung einer Strecke

ABG sei ein Dreieck, für das gilt $\sphericalangle B = 2\sphericalangle G = 4\sphericalangle A$ (Abb. 3.10). Die Seite BG wird in beide Richtungen bis D und E verlängert, sodass gilt DG = GA und EB = BA. Vervollständige das Dreieck AED. (Im Folgenden bezeichnen $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ und $\sphericalangle G$ die Winkel des Dreiecks ABG an den zugehörigen Ecken, auf weitere Winkel wird eindeutig Bezug genommen.) Die Beweisidee ist nun, zu zeigen, dass gilt $\sphericalangle A = \sphericalangle D$, sodass die beiden Dreiecke ABG und DBA zueinander ähnlich sind, und dann zu zeigen, dass gilt $\sphericalangle BAE = \sphericalangle G$, sodass die beiden Dreiecke AEB und GEA ebenfalls zueinander ähnlich sind. Wenn dies bewiesen ist, gilt aufgrund der ersten Ähnlichkeit DB/BA = AB/BG und aufgrund der zweiten GE/AE = AE/BE. Daraus folgt, dass

$$BA^2 = DB \times BG \quad \text{und} \quad EA^2 = GE \times EB \,.$$

Da jedoch auch AB = BE und $\sphericalangle E = \sphericalangle BAE = \sphericalangle G$, so gilt auch EA = AG = GD. So wird die zweite Gleichung oben zu $GD^2 = GE \times EB$, und die erste

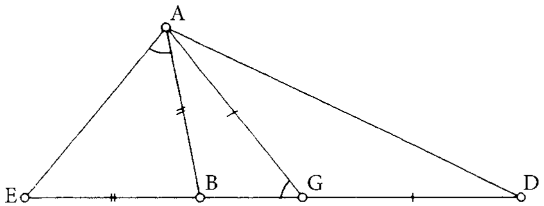


Abb. 3.10.

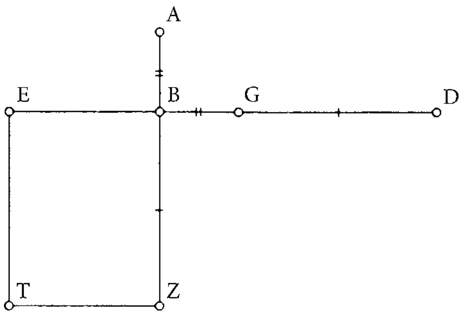


Abb. 3.11.

zu $BE^2 = DB \times BG$, da $BA = BE$. Und wenn wir dann gezeigt haben, dass $\sphericalangle A = \sphericalangle D$ und $\sphericalangle BAE = \sphericalangle G$, dann ist auch gezeigt, dass die Konstruktion eines regelmäßigen Siebenecks damit gleichbedeutend ist, eine Strecke ED durch zwei Punkte B und G so zu teilen, dass gilt

$$GE \times EB = GD^2 \tag{3.1}$$

und

$$DB \times BG = BE^2\ . \tag{3.2}$$

Bezüglich der Winkel ist festzuhalten: $\sphericalangle BGA$ ist der Außenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks AGD, bei dem $AG = GD$ ist, sodass $\sphericalangle BGA = \sphericalangle DAG + \sphericalangle D = 2\sphericalangle D$. Da aber vorgegeben war, dass $\sphericalangle BGA = 2\sphericalangle A$, folgt, dass $\sphericalangle A = \sphericalangle D$. Im zweiten Fall ist B der Außenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks ABE, sodass $\sphericalangle B = 2\sphericalangle BAE$ während gleichzeitig gilt: $\sphericalangle B = 2\sphericalangle G$, sodass folgt $\sphericalangle BAE = \sphericalangle G$.

Dritter Reduktionsschritt: Von der geteilten Strecke zum Kegelschnitt

ED sei eine Strecke, die durch die Punkte B und G so unterteilt wird, dass die Bedingungen (3.1) und (3.2) oben erfüllt sind. Dann zeichne man ABZ senkrecht zu ED, sodass gilt $AB = BG$ und $BZ = GD$ und vervollständige das Rechteck BZTE. Dann gilt $ZA \times AB = DB \times BG = BE^2$, und da $AB = BG$ und $BE = TZ$, können wir auch schreiben; $ZA \times BG = TZ^2$, was bedeutet, dass der Punkt T auf einer Parabel liegt, deren Scheitel A und deren Parameter BG ist.

Andererseits ist $GE \times EB = GD^2$ (Gl. 3.1) und auch $GD = BZ = ET$, sodass gilt $GE \times EB = ET^2$, was bedeutet, dass T auf einer Hyperbel mit dem Scheitelpunkt B liegt, deren Transversale und Parameter genauso lang sind wie die Strecke BG.

Diese Analyse hat nun zu zwei Kegelschnitten geführt – einer Parabel und einer Hyperbel –, die beide durch die Teilung von ED in B und G bestimmt sind. Der Schnittpunkt T dieser beiden Kegelschnitte bestimmt die Länge von ET und TZ und dies liefert die gesuchten beiden Strecken $GD = ET$ und $EB = TZ$ mit der Eigenschaft, dass die Strecke EBGD in B und G so geteilt wird, dass (3.1) und (3.2) erfüllt sind. Ist mit BG nun eine Seite eines zu konstruierenden Siebenecks gegeben, kann daraus die Strecke EBGD, dann das Dreieck ABG und schließlich das Siebeneck konstruiert werden. Hat man einmal ein Siebeneck in einem Kreis konstruiert, kann es durch Ähnlichkeitsüberlegungen in jedem anderen Kreis konstruiert werden.

Abū Sahl gab sich nicht der Illusion hin, dass die Kegelschnitte mit Lineal und Zirkel konstruiert werden könnten. Wie schon erwähnt, verfasste er eine Abhandlung, in der er ein Instrument, den „vollkommenen Zirkel“, beschreibt, mit dem man Kegelschnitte zeichnen könnte. Die Kernaussage seiner Abhandlung ist jedoch, dass, wenn man die nächsthöhere Klasse von Kurven oberhalb von Geraden und Kreisen zeichnen kann, nämlich die Kegelschnitte, dann kann man auch die Seite eines regelmäßigen Siebenecks in einen Kreis konstruieren. Viele Jahrhunderte nach Abū Sahl begannen Mathematiker nach Descartes' Entdeckung der analytischen Geometrie, Kurven nach dem Grad des algebraischen Ausdrucks zu klassifizieren – also „quadratisch", „kubisch" usw. In der antiken Welt wurden Probleme jedoch als *eben*, *räumlich* oder *kurvenförmig* bezeichnet, je nachdem, ob es möglich war, sie mithilfe von Geraden oder Kreisen, Kegelschnitten oder noch komplizierteren Verfahren zu lösen. In diesem Zusammenhang mag Abū Sahls Beweis als Beispiel angesehen werden, dass die Konstruktion eines regelmäßigen Siebenecks zu einer Zwischenklasse von Problemen gehört, zu deren Lösung im schlimmsten Fall *räumliche* Kurven gefordert waren. Daher beschränkt er sowohl den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe als auch die zur Lösung notwendigen Mittel und stellt die Aufgabe in den Kontext der bekannten mathematischen Theorie der Kegelschnitte.

§5 Die Konstruktion des regelmäßigen Neunecks

neúsis-Konstruktionen

Die Konstruktion des regelmäßigen Neunecks, d. h. eines Vielecks mit neun gleichlangen Seiten, stellt einen Spezialfall der Winkeldreiteilung dar. Denn der Mittelpunktswinkel eines Neunecks beträgt $360°/9 = 120°/3$ (Abb. 3.12). Aber 120° beträgt auch der Mittelpunktswinkel eines gleichseitigen, in einen Kreis eingeschriebenen Dreiecks. So kann das gleichseitige Neuneck konstruiert werden, indem dieser Winkel dreigeteilt wird. Dies war den alten Griechen wohlbekannt. Pappos von Alexandria gibt drei Verfahren zur Winkeldreiteilung an, die alle drei Kegelschnitte verwenden. Die einzige antike Methode, die anscheinend an die muslimischen

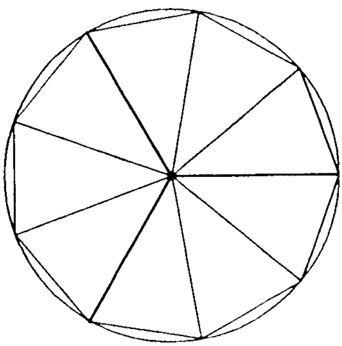


Abb. 3.12.

Gelehrten weitergegeben wurde, ist wohl in den Arbeiten Thābit b. Qurras und in denen seines Kollegen und Förderers Aḥmad b. Mūsā b. Shākir zu finden. Jedoch scheint die griechische Abhandlung, auf der die beiden aufbauten, verloren gegangen zu sein. Denn gegen Ende des 10. Jahrhunderts schrieb der Geometer ʿAbd al-Jalīl al-Sijzī, der als jüngerer Zeitgenosse zusammen mit Abū Sahl al-Kūhī in Schiras 969–970 an Sonnenbeobachtungen teilnahm: „Es war für keinen der Alten möglich, dieses Problem [Winkeldreiteilung] zu lösen, obwohl sie es sich sehr wünschten …" Was al-Sijzī damit sagen will, wird später deutlich, wenn er sich auf „ein anderes Lemma eines der Alten [zur Winkeldreiteilung]" bezieht, „das ein Lineal und bewegliche Geometrie [d. h. *neúsis*-Konstruktionen[1]] verwendet, das wir aber mit starrer Geometrie lösen müssen". Al-Sijzī wusste also von alten Verfahren zur Dreiteilung des Winkels, aber sie waren von einer Art, die er als „bewegliche Geometrie" bezeichnete. Al-Sijzī bezog sich mit dem Ausdruck „bewegliche Geometrie" auf Konstruktionen, die Apollonios und andere griechische Autoren mit *neúsis* (von *neúein*, „sich hinneigen") bezeichneten. In einer *neúsis*-Konstruktion sind zwei Kurven gegeben, normalerweise Geraden oder Kreisbögen, ein Punkt P, der auf keiner der beiden Kurven liegt, und eine Strecke AB. Die Aufgabe ist nun, eine Strecke CD = AB zu konstruieren, sodass ein Endpunkt auf einer der gegebenen Kurven liegt, der andere auf der anderen, und zwar so, dass sich CD zu P hinneigt; d. h. würde man die Strecke verlängern, ginge sie durch P (Abb. 3.13a).

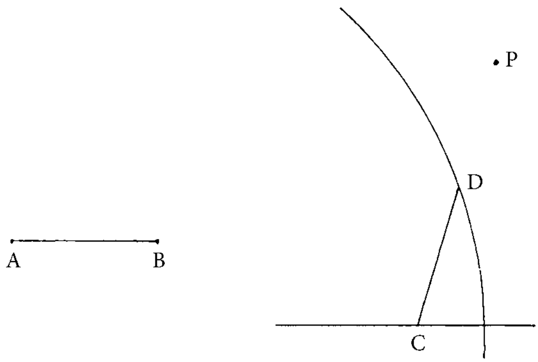


Abb. 3.13a.

Eine *neúsis*-Konstruktion wurde von Hippokrates von Chios im frühen 4. Jahrhundert v. Chr. verwendet, um die Flächen der Möndchen zu bestimmen. Später verwendete Archimedes *neúsis*-Konstruktionen, um Sätze über die Spirale zu beweisen. Außerdem findet man *neúsis-Konstruktionen,*

[1] Anm. d. Ü: *neúsis*-Konstruktionen werden im Deutschen gelegentlich auch als Einschiebungskonstruktionen oder auch Papierstreifenkonstruktionen bezeichnet.

in arabischen Manuskripten Archimedes zugeschrieben, zur Dreiteilung des Winkels und zur Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks – und alle Konstruktionen ohne weiteren Kommentar. Dies mag daran liegen, dass er diese Konstruktionen für ebenso legitim hielt wie alle anderen. Auf jeden Fall wussten Geometer schon lange vor seiner Zeit, wie solche Konstruktionen mithilfe von Kegelschnitten durchgeführt werden konnten und Apollonios, ein jüngerer Zeitgenosse des Archimedes, verfasste ein zweiteiliges Buch über *neúsis*-Konstruktionen, die allein mit Zirkel und Lineal durchgeführt werden konnten.

Starre versus bewegliche Geometrie

Im 10. Jahrhundert jedoch hielten es einige Geometer nicht mehr für vertretbar, *neúsis*-Konstruktionen als unabhängige Operationen anzusehen, und sie versuchten, andere Lösungen für Probleme zu finden, die ihre Vorgänger mithilfe von *neúsis* bewältigt hatten. Al-Sijzīs Lösung für das Problem der Winkeldreiteilung scheint auf die muslimischen Geometer zurückzugehen. Er bezieht sich auf sein Hauptlemma mit „das Lemma des Abū Sahl al-Kūhī“; außerdem erscheint die ganze Dreiteilung auch in Abū Sahls Werk, sodass es ziemlich sicher scheint, dass diese Dreiteilung eine weitere Entdeckung des talentierten Geometers aus der Region südlich des Kaspischen Meeres ist. Da Abū Sahl und al-Sijzī die Jahre 669–670 zusammen in Schiras verbrachten, ist es möglich, dass al-Sijzī zu dieser Zeit etwas über die Dreiteilung erfahren hat.

Abū Sahls Winkeldreiteilung

Die Winkeldreiteilung gemäß der Methode des Abū Sahl beruht auf der Lösung des folgenden Problems: Gegeben sei der Halbkreis AZD, AD sei sein Durchmesser, H sein Mittelpunkt (Abb. 3.13b). Gegeben sei auch der Winkel ABG. Gesucht ist ein Punkt E auf dem Durchmesser, sodass EZ parallel BG ist und damit $EZ^2 = EH \times ED$.

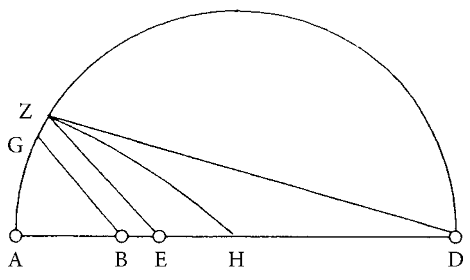


Abb. 3.13b.

Konstruktion. Zuerst wird über AH als Durchmesser die Hyperbel HZL konstruiert, deren Parameter und Transversale beide gleich AH sind, sodass der Winkel, den die Ordinate und der Durchmesser einschließen, gleich ABG ist. (Apollonios erläutert diese Konstruktion in seiner *Konika*, Buch I, *propositiones* 54 und 55 und wir werden weiter unten eine praktische Methode zur Konstruktion einer solchen Hyperbel kennenlernen, die auf Ibrāhīm b. Sinān zurückgeführt wird.) Diese Hyperbel schneide den Halbkreis in Z. Man zeichne EZ und BG. Wegen der Verhältnisgleichungen der Hyperbel gilt

$$\mathrm{EH} \times \frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{EZ}^2} = \frac{\text{Transversale}(=\mathrm{AH})}{\text{Parameter}(=\mathrm{AH})} ,$$

sodass gilt

$$\mathrm{EZ}^2 = \mathrm{EH} \times \mathrm{ED} .$$

Damit ist das Problem gelöst.

Um nun einen beliebigen spitzen Winkel mithilfe von al-Kūhīs Verfahren dreizuteilen, wird die Seite AB bis D verlängert, wobei die Länge von BD beliebig gewählt werden kann (Abb. 3.14). Zeichne über dem Durchmesser AD den Halbkreis AGZD mit dem Mittelpunkt H. Zeichne EZ parallel zu BG, wobei E, wie oben, so gewählt wird, dass $\mathrm{EH} \times \mathrm{ED} = \mathrm{EZ}^2$. Dann zeichne ZH und ZD sowie BT parallel zu ZH. Dann gilt $\sphericalangle\,\mathrm{ABT} = 2\sphericalangle\,\mathrm{TBG}$. Und weiterhin gilt $\sphericalangle\,\mathrm{ABG} = \sphericalangle\,\mathrm{ABT} + \sphericalangle\,\mathrm{TBG} = 2\sphericalangle\,\mathrm{TBG} + \mathrm{TBG} = 3\sphericalangle\,\mathrm{TBG}$. Somit haben wir den gegebenen Winkel ABG dreigeteilt.

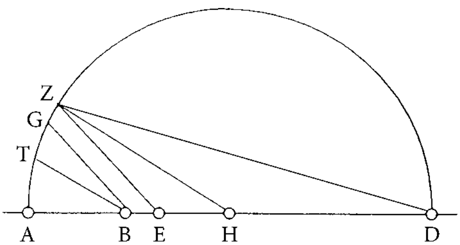


Abb. 3.14.

Um das Vorstehende zu beweisen, beachte man, dass aus der Bedingung $\mathrm{EH} \times \mathrm{ED} = \mathrm{EZ}^2$, die der Punkt E erfüllt, folgt, dass $\mathrm{ED}/\mathrm{EZ} = \mathrm{EZ}/\mathrm{EH}$ ist. Da die beiden Dreiecke HEZ und ZED den Winkel bei E gemeinsam haben und die Seiten, die diesen Winkel einschließen, proportional sind, folgt, dass sie (die Dreiecke) ähnlich sind, sodass $\sphericalangle\,\mathrm{EZH} = \sphericalangle\,\mathrm{D}$. Die zwei Seiten ZH und HD des Dreiecks ZHD sind gleich, sodass gilt $\sphericalangle\,\mathrm{HZD} = \sphericalangle\,\mathrm{D}$ und damit auch $\sphericalangle\,\mathrm{EZH} = \sphericalangle\,\mathrm{HZD}$. Nun ist $\sphericalangle\,\mathrm{EHZ}$ der Außenwinkel des Dreiecks ZHD, sodass gilt $\sphericalangle\,\mathrm{EHZ} = \sphericalangle\,\mathrm{HZD} + \sphericalangle\,\mathrm{D} = 2\sphericalangle\,\mathrm{HZD}$. Da jedoch $\sphericalangle\,\mathrm{BEZ}$ der Außenwinkel des Dreiecks ZEH ist, folgt, dass $\sphericalangle\,\mathrm{BEZ} = \sphericalangle\,\mathrm{EZH} + \sphericalangle\,\mathrm{EHZ} =$

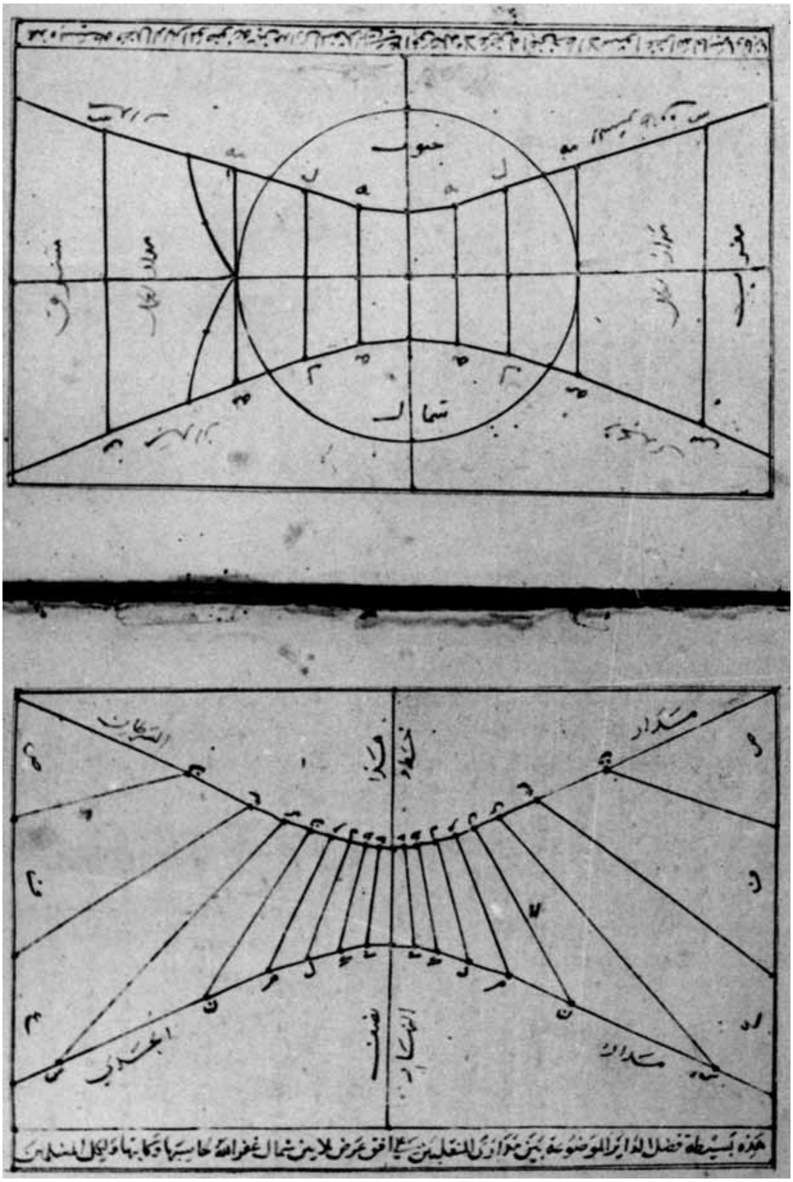
$\sphericalangle$HZD + 2$\sphericalangle$HZD = 3$\sphericalangle$HZD. Damit ist $\sphericalangle$EHZ = $\frac{2}{3}\sphericalangle$ABG, und da BT parallel zu ZH ist, gilt auch $\sphericalangle$ABT = $\frac{2}{3}\sphericalangle$ABG, d. i. $\sphericalangle$TBG = $\frac{1}{3}\sphericalangle$ABG.

§6 Konstruktion der Kegelschnitte

Das Leben Ibrāhīm b. Sināns

Die Kegelschnitte wurden nicht nur für theoretische Zwecke benötigt. In der Tat hatten schon die Griechen erkannt, dass, wenn die Sonne während des Tages ihre Kreisbahn am Himmel zieht, die Strahlen, die über die Spitze eines vertikalen, in die Erde gesteckten Stabes gehen, einen Doppelkegel bilden. Da die Horizontebene beide Teile dieses Kegels schneidet, muss der Schnitt des Kegels mit der Horizontebene eine Hyperbel auf einer horizontalen Oberfläche ergeben (siehe Tafel 3.1). Deswegen war es für Instrumentenbauer nützlich zu wissen, wie man Hyperbeln konstruiert, denn es war notwendig, sie auf Sonnenuhren einzugravieren oder einzuritzen. Zweifelsohne hatten die Handwerker hierfür ihre eigenen Tricks, und vielleicht haben auch nur wenige Handwerker jemals in ein Buch geschaut, in dem erklärt wird, wie man eine Hyperbel zeichnet. Wie auch immer die Beziehung zwischen Theorie und Praxis ausgesehen hat, solche Abhandlungen wurden verfasst – eine davon von einem Enkel Thābit b. Qurras, Ibrāhīm b. Sinān. Obwohl er wegen eines Lebertumors bereits im Alter von 37 Jahren im Jahr 946 n. Chr. starb, sichern die Arbeiten, die erhalten blieben, seinen Ruf als bedeutende Persönlichkeit der Mathematikgeschichte. Seine Arbeit über die Flächenbestimmung eines Parabelsegments ist das schnörkelloseste, was aus der Zeit vor der Renaissance überliefert ist. (Er berichtet, dass er diesen Beweis entwickelt hat, um den wissenschaftlichen Ruf seiner Familie zu retten, als er von Anschuldigungen hörte, dass das Verfahren seines Großvaters zu umständlich sei.) Auf eines seiner Werke haben wir bereits oben hingewiesen, nämlich das mit dem Titel *Über das Verfahren der Analyse und der Synthese bei geometrischen Aufgaben*. Daher war Ibrāhīm b. Sinān ein weiterer Wissenschaftler des 10. Jahrhunderts, der sich nicht nur mit speziellen Problemen, sondern auch mit vollständigen Verfahren und Theorien beschäftigte. In seiner Abhandlung über Sonnenuhren geht er hinsichtlich der Konstruktion aller möglichen Sonnenuhren nach einem einzigen, einheitlichen Verfahren vor. Es zeigt in erfrischender Weise eine erfolgreiche Herangehensweise an Probleme, an denen seine Vorgänger gescheitert waren.

Im folgenden Abschnitt beschäftigen wir uns besonders mit einem anderen seiner Werke, *Über das Zeichnen der drei Kegelschnitte*. Dieses Werk enthält eine sorgfältige Erörterung mit Beweisen, wie die Parabel und die Ellipse gezeichnet werden können sowie drei Verfahren, um die Hyperbel zu zeichnen. Möglicherweise werden deswegen mehrere Verfahren für die Hyperbel genannt, weil sie von größtem Interesse für die Instrumenten-



Tafel 3.1. Diagramme für den Breitengrad von Kairo und eine universell einsetzbare Sonnenuhr – aus einer Abhandlung aus dem Ägypten des 15. Jahrhunderts über die Theorie der Sonnenuhren von al-Karādīsī, einem *muwaqqit*. (Ein *muwaqqit* ist eine Person, welche die Zeiten für das muslimische Gebet bestimmt.) Die beiden Hyperbeln geben den Weg des Schattenzeigers (*miqyās*) für den Zeitpunkt der Sonnenwenden an. (Aus: MS Kairo Dār al-Kutub Riyāḍa 892. Mit freundlicher Genehmigung der Ägyptischen Nationalbibliothek)

bauer waren, obwohl diese häufig numerischen Tabellen den Vorzug vor geometrischen Konstruktionen gaben. Aus diesem Werk werden wir zwei Punkte vorstellen: einmal die Konstruktion der Parabel, welche für den Bau von Brennspiegeln benötigt wird und zum anderen eines der drei Verfahren zum Zeichnen der Hyperbel.

Ibrāhīm b. Sinān über die Parabel

Ibrāhīms Verfahren ist das folgende: Auf einer Geraden AG (Abb. 3.15) markiere eine Strecke AB und konstruiere BE senkrecht zu AB. Nun wähle auf BG so viele Punkte H, D, Z, … wie gewünscht. Zeichne beginnend mit dem Punkt H einen Halbkreis mit dem Durchmesser AH; die Senkrechte BE schneide den Halbkreis in T. Durch T zeichne eine Parallele zur Strecke AB und durch H eine Parallele zu BE. Beide Geraden schneiden sich in K.

Im nächsten Schritt wird ein Halbkreis mit dem Durchmesser AD gezeichnet, der BE in I schneidet. Wie im vorigen Schritt werden nun Parallelen zu AG und BE durch I bzw. D gezeichnet, die sich in L schneiden. Führe die gleiche Konstruktion auch mit den verbliebenen Punkten Z durch, …, um die jeweils zugehörigen Punkte zu finden. Dann liegen die Punkte B, K, L, M, … auf einer Parabel mit Scheitelpunkt B, Achse BG und Parameter AB. Verlängert man KH, LD, MZ, … und wählt man K′, L′, M′, …, sodass KH = HK′, LD = DL′, MZ = ZM′, … dann liegen auch diese auf der Parabel.

Ibrāhīm führt den Beweis, dass K auf der beschriebenen Parabel liegt, wie folgt: Angenommen, die Parabel geht nicht durch K, sondern durch

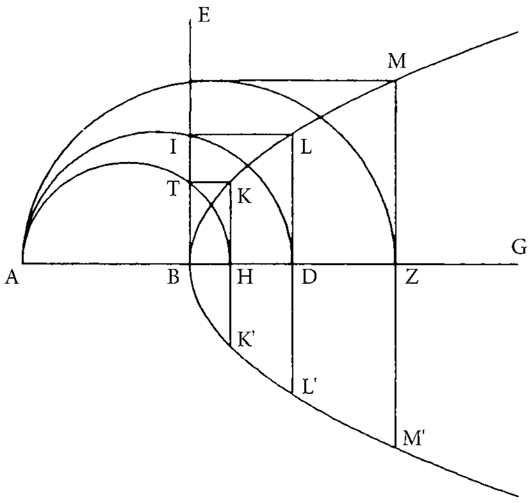


Abb. 3.15.

einen anderen Punkt auf KH, zum Beispiel durch N. Dann gilt $NH^2 = AB \times BH$ entsprechend der charakteristischen Eigenschaft einer Parabel (*symptoma*). Andererseits folgt gemäß Euklid II, 14, da TB senkrecht zum Durchmesser des Halbkreises ATH ist, dass $TB^2 = AB \times BH$. Außerdem ist nach Konstruktion TBHK ein Parallelogramm, sodass gilt TB = KH. Folglich ist $KH^2 = TB^2 = AB \times BH = NH^2$, also KH = NH, was ein Widerspruch ist. Somit liegt K auf der beschriebenen Parabel. Der gleiche Beweis mit entsprechender Änderung der Bezeichnungen für die Punkte funktioniert auch mit L, M, . . ., sodass hiermit die Gültigkeit der Konstruktion gezeigt ist.

Der Leser, der Ibrāhīms Verfahren ausprobieren möchte, kann sich die Arbeit erleichtern, indem er Halbkreise mit beliebigem Durchmesser durch A zeichnet, ohne vorher die Durchmesser festzulegen. Das erspart die Halbierung der Strecke AH usw. Übrigens beschreibt der deutsche Mathematiker Johannes Werner (1468–1522) dasselbe Konstruktionsverfahren für eine Parabel wie Ibrāhīm b. Sinān.

Ibrāhīm b. Sinān über die Hyperbel

Dies ist zwar nur eines von drei von Ibrāhīm b. Sinān angegebenen Verfahren (siehe auch oben), aber sicherlich dasjenige, was am einfachsten durchzuführen ist. Über einer Strecke AB (Abb. 3.16) zeichne einen Halbkreis und verlängere den Durchmesser AB über B hinaus. Wähle auf der bei B liegenden einen Hälfte des Halbkreises die Punkte G, D, H, . . . und konstruiere zu jedem dieser Punkte die Tangenten des Halbkreises GZ, DT, HI, . . . Diese Tangenten schneiden den verlängerten Durchmesser in Z, T, I, . . . Durch diese Punkte zeichne die Parallelen ZK, TL, IM, . . . die mit der Strecke AB einen beliebigen Winkel einschließen. Trägt man auf diesen Geraden (auf der gleichen Seite von AB) die Strecken ZK = GZ, TL = DT, IM = HI, . . . ab, dann liegen die Punkte K, L, M, . . . auf einer Hyperbel.

Denn, da die Geraden GZ, DT, HI, . . . Tangenten eines Kreises sind, folgt gemäß Euklid III, 36, dass $GZ^2 = ZB \times ZA$, $DT^2 = TB \times TA$, $HI^2 = IB \times IA$, . . . und da KZ = ZG, etc. folgt, dass $KZ^2 = ZB \times ZA$, $LT^2 = TB \times TA$ und $MI^2 = IB \times IA$.

Entsprechend der oben angegebenen charakteristischen Eigenschaft der Hyperbel (*symptoma*) besagen diese Beziehungen, dass die Punkte B, K, L,

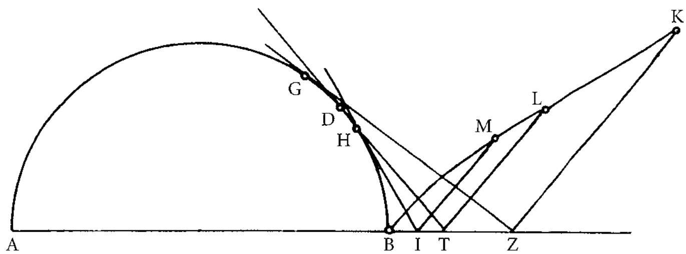


Abb. 3.16.

M, … auf einer Hyperbel mit Durchmesser AB liegen, deren Ordinaten alle mit dem Durchmesser einen Winkel bilden, der gleich dem Winkel ∢ KZG ist und deren Parameter und Transversale beide gleich AB sind. Auch hier kann der restliche Teil des einen Astes der Hyperbel einfach dadurch konstruiert werden, dass KZ, LT, MI, … über AB hinaus um die gleiche Länge bis zu K′, L′, M′, … verlängert werden.

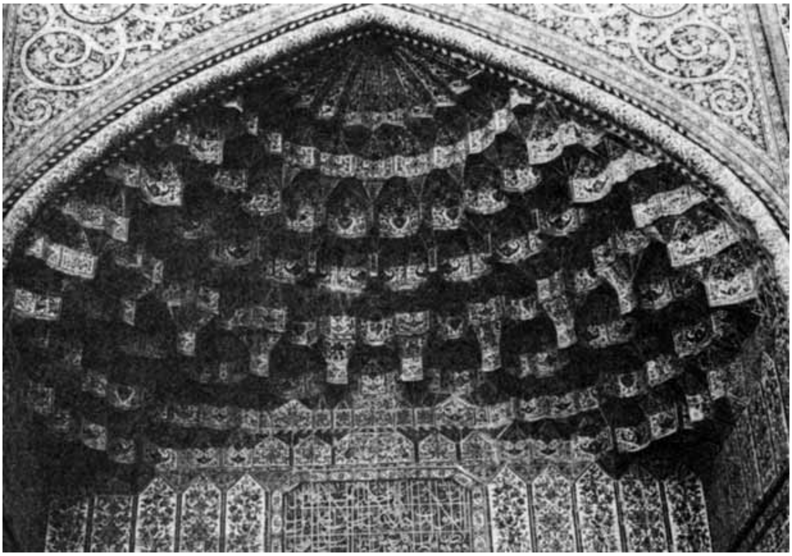
§7 Die islamische Dimension: Geometrie mit einem eingerosteten Zirkel

Ein Erscheinungsbild der islamischen Kultur, das Außenstehende schon immer beeindruckt hat, sind die kunstvollen geometrischen Muster, die, ausgeführt in Holz, Keramik oder als Mosaik, in der gesamten islamischen Welt im Überfluss zu finden sind. Beispielsweise werden die mit besonderer Regelmäßigkeit ausgeführten Fliesenarbeiten in der Alhambra in Granada in Spanien auf der ganzen Welt bewundert. Eine solch hochentwickelte Handwerkskunst erfordert ein beträchtliches Maß an geometrischem Wissen, auch wenn dieses Wissen eher vom Meister an den Lehrling weitergegeben als niedergeschrieben wurde (siehe Tafeln 3.2–3.4).

Tatsächlich gab es eine lange Tradition geometrischen Designs im Mittleren Osten seit der Zeit der alten Ägypter und wurde sowohl im alten

Tafel 3.2. Dieser Teil der Fassade der Shir Dor Madrasa in Samarkand veranschaulicht die Vielfalt an Elementen, die in der islamischen Kunst zu finden sind. Es verbindet kalligrafische Elemente (am Rand und innerhalb des Bogens) mit Arabesken, geometrischen Mustern und anthropo- und zoomorphen Elementen (Foto: H. E. Kassis)

Tafel 3.3. In diesem Ausschnitt an der Fassade der Freitagsmoschee in Isfahan, sind Fünfecke, Achtecke und sternförmige Zehnecke mit nichtkonvexen Stücken kombiniert. Ganz offensichtlich kann das Muster in alle Richtungen unendlich weitergeführt werden (Foto: H. E. Kassis)



Tafel 3.4. Ein Beispiel aus Isfahan für die als *al-muqarnar* bekannte Art der Deckengestaltung. Sie war allgemein verbreitet, sodass sogar al-Kāshī einen Abschnitt seines *Schlüssel des Rechnens* der zugrunde liegenden Theorie widmete (Foto: H. E. Kassis)

Griechenland als auch an anderen Orten fortgesetzt. Irgendwann wurden auch die Geometer dieser Tradition und der Probleme gewahr, welche die Kunsthandwerker gelöst hatten, und sie begannen damit, herauszufinden, wie diese Verfahren begründet werden können und wie weit verschiedene Methoden weiterentwickelt werden konnten. In der arabischen Fassung der *Mathematischen Sammlung*, verfasst von Pappos von Alexandria, findet sich beispielsweise im achten Buch ein äußerst interessanter Abschnitt zu geometrischen Konstruktionen, die vermutlich nur mit Lineal und einem Zirkel mit einer festen Öffnung ausgeführt werden können, der manchmal auch als „eingerosteter Zirkel" bezeichnet wurde. Da der Rest des achten Buches Instrumenten und Maschinen gewidmet ist, die für Handwerker verschiedener Zünfte von Interesse sind, scheint es wahrscheinlich, dass auch dieser Abschnitt Probleme anspricht, mit denen Handwerker in Berührung kamen.

Das anhaltende Interesse an solchen Problemen wird auch durch die Tatsache bezeugt, dass al-Sijzī (oben in Zusammenhang mit dem regelmäßigen Siebeneck schon erwähnt) den arabischen Text von Pappos' achtem Buch im späten 10. Jahrhundert von einer früheren Abschrift kopierte, die den Banū Mūsā gehörte, den Förderern und Freunden des Mathematikers des 9. Jahrhunderts, Thābit b. Qurra.

Eine andere Abhandlung über geometrische Konstruktionen, die mit einer beschränkten Auswahl an Werkzeugen durchzuführen sind, wird Abū Naṣr al-Fārābī zugeschrieben, der heutzutage vor allem wegen seiner wichtigen Aristoteles-Kommentare und seiner großen Arbeit über die Musik bekannt ist. Er wurde 870 geboren, als die Banū Mūsā bereits alt waren und lehrte Philosophie sowohl in Bagdad als auch Aleppo, einem wichtigen Handelszentrum in Nordsyrien. Er lebte ein langes Leben als aktiver Gelehrter und wurde 950 außerhalb von Damaskus von Straßenräubern getötet, kurz nachdem Ibrāhīm b. Sinān gestorben war. Als Ergänzung zu dieser Arbeit verfasste er eine Abhandlung mit dem Titel *Ein Buch über geistige Fertigkeiten und natürliche Geheimnisse in den Einzelheiten geometrischer Figuren*. Später integrierte Abū al-Wafā', auf den wir im Kapitel über die Trigonometrie zu sprechen kommen und der beim Tod al-Fārābīs noch ein junger Mann war, alles aus dessen Arbeit in sein Werk, dem er den prosaischeren Titel gab: *Was Handwerker an geometrischen Konstruktionen benötigen*. Aus dieser Abhandlung sind die folgenden Auszüge ausgewählt, die Nummerierung der Probleme stammt von mir.

Problem 1

Konstruktion einer Senkrechten am Endpunkt A einer Strecke AB, ohne die Strecke über A hinaus zu verlängern.

Vorgehensweise. *Auf* AB *trage mit dem Zirkel eine Strecke* AC *(Abb. 3.17) ab und schlage mit derselben Zirkelöffnung Kreise um* A *und* C, *die sich in* D

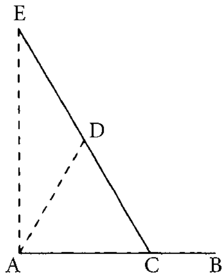


Abb. 3.17.

schneiden. Dann wird CD *über* D *hinaus bis* E *verlängert, sodass gilt ED =* DC. *Dann ist* ∢ ACE *ein rechter Winkel.*

Beweis. Der Kreis, der durch E, A und C geht, hat D als Mittelpunkt, da DC = DA = DE. Daher ist EC der Durchmesser dieses Kreises und folglich ∢ EAC ein Winkel im Halbkreis und somit ein rechter Winkel.

Problem 2

Unterteilung einer Strecke in beliebig viele gleich große Abschnitte.

Vorgehensweise. *Die Strecke* AB *(Abb. 3.18) soll (beispielsweise) in die gleichen Teile* AG = GD = DB *unterteilt werden. An beiden Endpunkten errichte die Senkrechten* AE *und* BZ *in unterschiedliche Richtungen, dann trage auf ihnen gleiche Teilstrecken* AH = HE = BT = TZ *ab. Verbinde die Punkte* H *mit* Z *und* E *mit* T. *Dann gilt* AG = GD = DB.

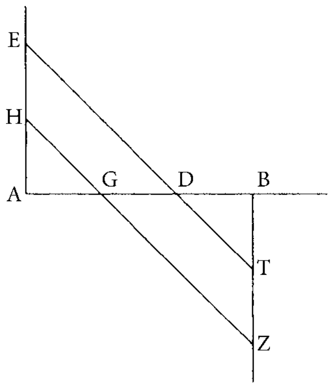


Abb. 3.18.

Beweis. Tatsächlich sind AHG und BTD rechtwinklige Dreiecke mit gleichen Winkeln bei G und D (und folglich auch bei H und T). Außerdem gilt HA = BT. Daher sind die Dreiecke kongruent und somit gilt AG = BD. Aus der Parallelität von HG und ED folgt auch, dass die beiden Dreiecke AHG und AED ähnlich sind. Folglich gilt DG/GA = EH/HA. Wegen EH = HA folgt somit auch DG = GA.

Problem 3

Halbierung eines gegebenen Winkels BAG.

Vorgehensweise. *Bei der euklidischen Methode (Buch I, 9) werden zwei gleichlange Strecken* AB *und* AG *so auf beiden Schenkeln des Winkels abgetragen, dass ein gleichseitiges Dreieck über* BG *konstruiert wird. Danach wird* A *mit* D *verbunden, um den Winkel zu halbieren. In Abū al-Wafā'’s Variation ist das Dreieck* BGD *gleichschenklig mit* BD = DG = AB, *was der festen Zirkelöffnung entspricht.*

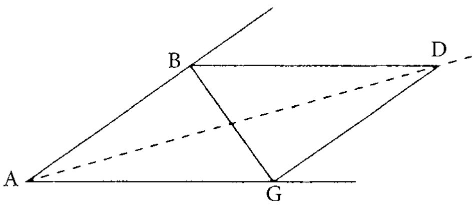


Abb. 3.19.

Als nächstes bestimmt Abū al-Wafā' den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises. Wir werden diese Konstruktion benutzen, um die nächste Konstruktion mit eingerostetem Zirkel zu erklären, überlassen es aber dem Leser, die Konstruktion selbst zu finden.

Problem 4

Konstruktion eines Quadrats in einem gegebenen Kreis.

Vorgehensweise. *Bestimme den Mittelpunkt* S *(des gegebenen Kreises) und zeichne den Durchmesser* ASG *(Abb. 3.20). Mit einer Zirkelöffnung, die gleich dem Radius ist (Übung 9) trage die Kreisbögen* $\widehat{AZ}$, $\widehat{AE}$, $\widehat{GT}$ *und* $\widehat{GH}$ *ab und zeichne die Strecken* ZE *und* TH, *die den Durchmesser in* I *und* K *schneiden. Dann zeichne* ZK *und* TI, *die sich in* M *schneiden. Danach zeichne den Durchmesser durch* S *und* M. *Er schneidet den Kreis in* D *und* B. *Dann ist* ADGB *ein Quadrat.*

Beweis. Da gilt $\widehat{ZA} = \widehat{AE}$ halbiert der Durchmesser den Bogen $\widehat{ZE}$. Folglich ist GA senkrecht zu ZE, der Sehne dieses Bogens. Entsprechend ist GA senkrecht zu TH und somit sind die Winkel $\sphericalangle$TKI und $\sphericalangle$ZIK rechtwinklig. Da TH und ZE Sehnen von gleich langen Bögen sind, sind sie gleich

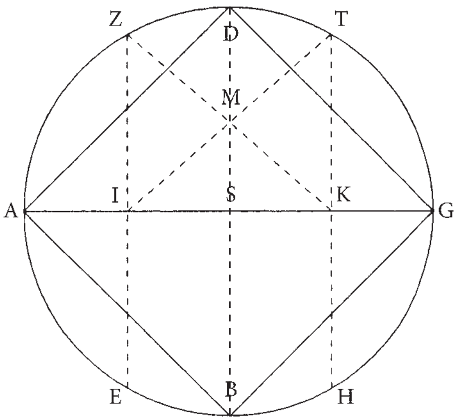


Abb. 3.20.

lang. Folglich sind auch ihre Hälften TK und ZI gleich lang. Da sie auch parallel sind (beide sind senkrecht zu GA), ist TKIZ ein Rechteck. Seine Diagonalen sind folglich gleich lang und halbieren sich gegenseitig. Somit gilt MK = MI, d. h. das Dreieck MKI ist gleichschenklig. Da die gleich langen Sehnen ZE und TH gleichweit vom Mittelpunkt entfernt sind (Euklid III, 14), gilt KS = SI und daher halbiert die Gerade MS die Seite KI im gleichschenkligen Dreieck MKI und ist deswegen senkrecht zu dieser Seite. Folglich ist der Durchmesser DB senkrecht zum Durchmesser GA und ADGB ist ein Quadrat.

Als letztes Beispiel für die Geometrie mit einem eingerosteten Zirkel diene ein Auszug aus Abū al-Wafā's Abhandlung:

Problem 5

Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks in einen gegebenen Kreis, bei der die Zirkelöffnung dem Radius des Kreises entspricht.

Vorgehensweise. *Am Endpunkt* A *des Radius* DA *errichte* AE *senkrecht zu* AD *mit* AE = AD *(Abb. 3.21), dann halbiere* AD *in* Z *und zeichne die Strecke* EZ. *Auf dieser Strecke trage* ZH = AD *ab und halbiere* ZH *in* T. *Dann konstruiere* TI *senkrecht zu* EZ. TI *schneidet die Verlängerung von* DA *in* I. *Schließlich schneidet der Kreis mit dem Mittelpunkt* I *und Radius* AD *den gegebenen Kreis in* M *und* L. *Dann entspricht der Bogen* $\overset{\frown}{ML}$ *einem Fünftel des Umfangs des gegebenen Kreises. Die Mittelsenkrechte der Sehne* ML *halbiert den Kreisbogen, der* $\overset{\frown}{ML}$ *gegenüberliegt, in* O. *Die Mittelsenkrechten der Sehnen zu* $\overset{\frown}{MO}$ *bzw.* $\overset{\frown}{LO}$ *halbieren wiederum die Bögen selbst in* N *und* P. *Folglich ist der Kreis in fünf gleiche Bögen unterteilt, deren Sehnen die Seiten eines regelmäßigen Fünfecks bilden.*

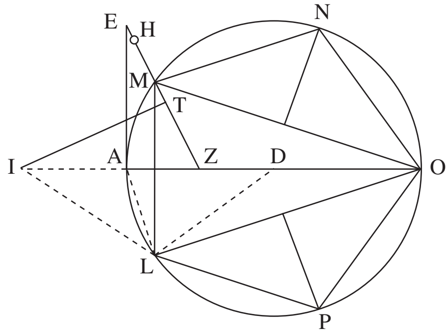


Abb. 3.21.

Abū al-Wafā' prüft die Gültigkeit dieser Konstruktion wie folgt: Zeichne die Strecken LD, LI und LA (Abb. 3.21). Zunächst einmal sind die Dreiecke TIZ und AEZ kongruent, denn beides sind rechtwinklige Dreiecke mit einem gemeinsamen Winkel bei Z und der Seite TZ = AZ. Daher gilt EZ = ZI und somit auch

$$ZI^2 = EZ^2 = EA^2 + AZ^2 = DA^2 + AZ^2 \ .$$

Deshalb gilt

$$DA^2 = ZI^2 - AZ^2 = (ZI + AZ)(ZI - AZ) = ID \times IA \ .$$

Somit teilt A die Strecke DI in zwei ungleiche Teile, sodass die Fläche des Rechtecks, dessen Seiten die kleinere Teilstrecke und die gesamte Strecke sind, flächengleich ist zum Quadrat, das über der größeren Teilstrecke errichtet wird. Die Griechen nannten diese Teilung „den Schnitt", während wir heutzutage dies als „Goldenen Schnitt" bezeichnen. Nun gilt DA = LI, sodass $LI^2 = ID \times IA$, was als Verhältnisgleichung $ID/LI = LI/IA$ geschrieben werden kann. Da die beiden Dreiecke LIA und DIL einen gemeinsamen Winkel bei I haben und die Längen der beiden Seiten, die diesen Winkel einschließen, zueinander proportional sind, folgt, dass die beiden Dreiecke zueinander ähnlich sind. Daher gilt $DL/AL = LI/AI$ und, da DL = LI ist, auch AL = AI.

Um den Beweis abzuschließen, erinnern wir an Euklids Beweis in XIII, 9: Wenn die Seite (AD) eines in einen Kreis eingeschriebenen Sechsecks in Richtung A um die Seitenlänge eines in diesen Kreis eingeschriebenen Zehnecks verlängert wird, dann teilt A die Gesamtstrecke im Goldenen Schnitt. Dabei ist die Seite des Sechsecks die größere der beiden Strecken. Nun erläutert Abū al-Wafā': Da A die Strecke ID im Goldenen Schnitt teilt, sodass AD die Seite eines in den Kreis eingeschriebenen Sechsecks ist (das ist der Radius), folgt, dass AI die Seite eines in diesen Kreis eingeschriebenen Zehnecks ist und das Gleiche gilt für AL = AI. (Genau genommen muss Abū al-Wafā' ein kleines, zusätzliches Argument hinzufügen, um dies aus der Umkehrung von XIII, 9 herleiten zu können, aber dies ist ein geradliniger Beweis durch Widerspruch und er lässt ihn weg.) Folglich ist $\widehat{\mathrm{AL}}$ ein Zehntel des Kreisumfangs.

Schneiden sich jedoch zwei Kreise in L und M, dann halbiert die Strecke, welche die beiden Mittelpunkte verbindet, die Bögen zwischen L und M. Deshalb gilt $\widehat{\mathrm{LA}} = \widehat{\mathrm{AM}}$ und folglich ist der Bogen $\widehat{\mathrm{LM}}$ ein Fünftel des Umfangs des gegebenen Kreises.

Abū al-Wafā's Abhandlung enthält eine große Fülle wunderbarer Konstruktionen von regelmäßigen n-Ecken, einschließlich der genauen Konstruktionen für $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$. Außerdem gibt er eine *neúsis*-Konstruktion für $n = 9$ an, die auf Archimedes zurückgeht und eine Näherungskonstruktion für $n = 7$, bei der als Seite für das regelmäßige, in einen Kreis eingeschriebene Siebeneck die Hälfte einer Seite eines eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks genommen wird. Diese Näherung stammt keineswegs ursprünglich von Abū al-Wafā', sie war vermutlich schon bekannt, als Heron sie in seiner *Metrika* im 1. Jahrhundert n. Chr. angab. Es handelt sich indes um eine gute Näherung, die in der Praxis wesentlich einfacher zu handhaben ist als die genauen Konstruktionen mithilfe von Kegelschnitten.

Übungen

1. Verwenden Sie die oben angegebenen charakteristischen Eigenschaften (*symptomata*) der Parabel und der Hyperbel, um in der „Dritten Reduktion" in §4 zu zeigen, dass T sowohl auf der Hyperbel als auch auf der Parabel liegt.
2. In einer in Bankipore gefundenen arabischen Handschrift ist folgende Konstruktion eines regelmäßigen, in einen Kreis eingeschriebenen Neunecks angegeben: Ein Kreis mit Mittelpunkt D sei durch zwei

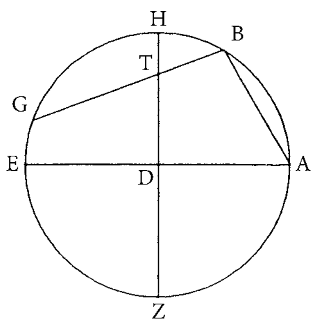


Abb. 3.22.

senkrecht zueinander liegende Durchmesser AE und ZH in vier gleich große Teile geteilt und AB sei eine Sehne, deren Länge gleich dem Radius ist (Abb. 3.22). BTG sei so gezeichnet, dass es den Durchmesser ZH in T und den Kreis in G schneidet, sodass gilt TG = AB. Dann ist TD gleich der Seite eines regelmäßigen, in den Kreis ABGH eingeschriebenen Neunecks.

1) Zeigen Sie, dass der Punkt T mithilfe einer *neúsis*-Konstruktion gefunden werden kann. 2) Beweisen Sie, dass TD die Seite eines regelmäßigen Neunecks im Kreis ist. (*Hinweis*: Wenn GL senkrecht zu DE und GM senkrecht zu DZ ist, zeige man, dass GL = DM = TM.)

3. Das folgende Verfahren zur Konstruktion eines Parabelabschnitts findet sich in einer nordafrikanischen arabischen Handschrift über Brennspiegel, die nun in der British Library verwahrt wird. Eine Strecke PR mit Mittelpunkt Q sei gegeben (Abb. 3.23). In Q wird eine Strecke QD senkrecht zu PR errichtet. Unterteile DQ und RQ in gleich viele, gleich große Streckenabschnitte. Angenommen, die Punkte von D bis Q seien A, B, … und die Punkte von Q nach R seien $A', B', \dots$ In jedem $A', B', \dots$ errichte eine Senkrechte zu RQ. Nun wird ein Lineal an P und A angelegt und der Schnittpunkt S mit der Senkrechten durch A' eingezeichnet, dann wird an P und B angelegt und der Schnittpunkt T mit der Senkrechten durch B' eingezeichnet usw. Dann liegen die Punkte S, T, … der Senkrechten alle auf einer Parabel mit Scheitelpunkt D. Verwendet man R anstelle von P, A'' anstelle von A' usw. erhält man die andere Hälfte der Parabel. Beweisen Sie die Gültigkeit dieser Aussagen.
4. In vielen Lehrbüchern zur analytischen Geometrie wird der Student aufgefordert, zu beweisen, dass für zwei gegebene Punkte A und B einer Ebene die Menge aller Punkte X, für die gilt $|XA| - |XB| = k$ eine Hyperbel bilden, wobei k eine Konstante ist und mit $|XA|$ und $|XB|$

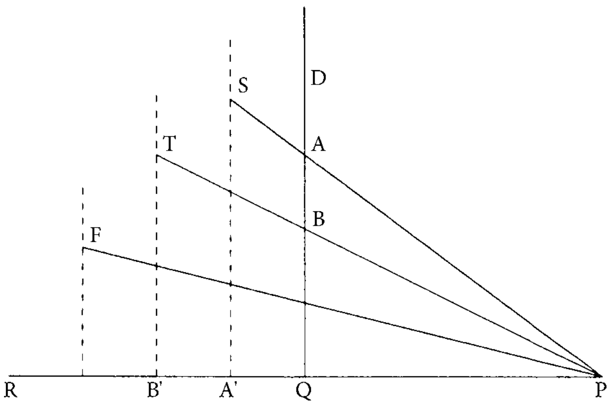


Abb. 3.23.

die Abstände von X zu A bzw. zu B bezeichnet werden. Verwenden Sie diese Tatsache, um die Gültigkeit des nachfolgenden Verfahrens zu beweisen, das Ibrāhīm für die Konstruktion einer Hyperbel angibt. A sei der Mittelpunkt eines gegebenen Kreises, B ein beliebiger Punkt außerhalb des Kreises. Betrachten sie die Menge aller Punkte X, sodass X der Mittelpunkt eines Kreises ist, der den gegebenen Kreis berührt und durch B geht. Diese Menge stellt einen Ast der Hyperbel dar.

5. Zeigen sie auf Grundlage von Euklid XIII, 9, dass, wenn AD Radius eines Kreises ist und $ID \times IA = AD^2$, dass dann IA die Seite eines regelmäßigen Zehnecks im Kreis ist.
6. In einem Brief an Abū al-Jūd fragt al-Bīrūnī nach einem Beweis dafür, dass Herons Konstruktion der Seite eines regelmäßigen Siebenecks nicht genau ist. Zeigen Sie dies, und zeigen Sie auch, dass Herons Konstruktion einen Fehler hat, der kleiner ist als 2 mm bei einem Kreis mit einem Radius von 1 m.
7. Zeigen Sie, dass Abū Sahls Analyse und Konstruktion des gleichseitigen Siebenecks äquivalent sind, d. h. die Existenz des Dreiecks ABG impliziert nicht nur die Unterteilung einer Strecke, sodass 1) und 2) der „Zweiten Reduktion“ erfüllt sind, sondern dass auch die Umkehrung wahr ist.
8. Zeigen Sie, dass in Abb. 3.10 der Außenwinkel des Dreiecks BAD bei B gleich $3 \times \sphericalangle D$ ist.
9. In der Konstruktion eines Quadrats in einen gegebenen Kreis mithilfe eines eingerosteten Zirkels nimmt Abū al-Wafā’ an, dass die Zirkelöffnung gerade gleich dem Kreisradius ist. Zeigen Sie, dass dadurch die Allgemeinheit nicht eingeschränkt wird, d. h. wenn die Konstruktion in diesem speziellen Fall durchgeführt werden kann, dass sie auch im allgemeinen Fall durchführbar ist.

Literatur

Berggren, J. L.: „An Anonymous Treatise on the Regular Nonagon“. *Journal for the History of Arabic Science* 5 (1981): 37–41

Hogendijk, J. P.: „Greek and Arabic Constructions of the Regular Heptagon“. *Archive for History of Exact Sciences* 30 (1984): 197–330

Norman, J.; Stahl, St.: The Mathematics of Islamic Art: A Package for Teachers of Mathematics… Metropolitan Musum of Art: New York 1979

Rosenfeld, B. A.: *A History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the Concept of a Geometric Space*. (Übersetzt von A. Shenitzer.) Springer-Verlag: New York, Berlin, etc. 1988

Sabra, A. I.: „Ibn al-Haytham’s Lemmas for Solving ‚Alhazens’s Problem‘“. *Archive for History of Exact Sciences* 26 (1982): 299–324

Winter, H. J. J.; ʿArafat, W.: „Ibn al-Haytham on the Paraboloidal Focussing Mirror“ und „A Discourse on the Concave Spherical Mirror of Ibn al-Haytham“. *Journal of the Asiatic Society of Bengal, Science* 15 (No. 1) (1949): 25–40 bzw. 16 (No. 1) (1950): 1–16

Woepcke, F.: „Analyse et Extrait d'un Receuil de Constructions Géométriques par Aboūl Wafā". *Journal asiatique* (Ser 5), 5 (Feb.–March 1855): 218–359
Dies enthält einen Kommentar in persischer Sprache über Abū al-Wafā's Konstruktionen mit eingerostetem Zirkel, die offensichtlich auf den Notizen eines Schülers beruhen

Die Texte von Rosenfeld, Sabra und Winter & ʿArafat enthalten weitere Aspekte der islamischen Geometrie, die nicht in diesem Kapitel behandelt wurden.