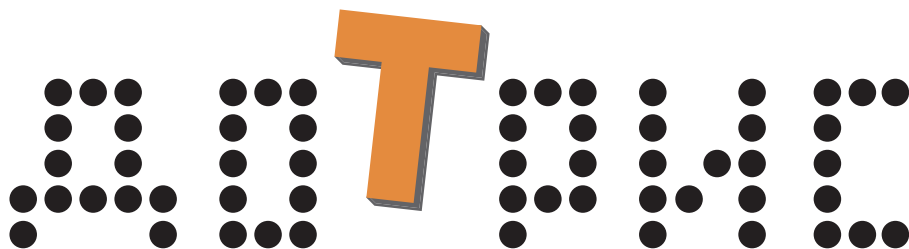


АПРЕЛЬ

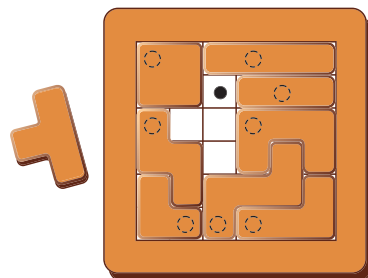
КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



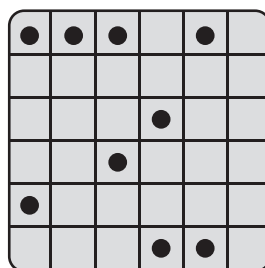
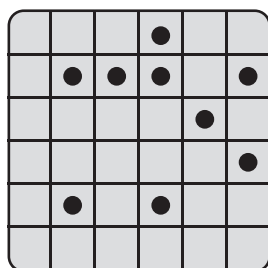


Название этой оригинальной головоломки, придуманной американским изобретателем Шоном Коннелли (Sean Connolly), образовано от английского *dot* (точка) и *tetris*. Суть проста. Есть поле 6×6 и набор фигурок-полимино, некоторые квадратики поля отмечены точками. Задание – покрыть поле фигурками так, чтобы на каждую фигурку пришлась ровно одна точка.



Комплект фигурок можно видеть на верхнем рисунке: это два пентамино, пять тетрамино (отсюда и отсылка к тетрису в названии) и два тримино.

К головоломке прилагается несколько десятков разных заданий различной сложности. В простых заданиях положение некоторых фигурок известно сразу. В сложных заданиях никаких подсказок нет. Вот пара примеров самых сложных заданий:



На сайте автора (pulp.biz/daily-dotris) регулярно публикуются новые задания, так что вам всегда будет над чем поломать голову.

Желаем успеха!

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН
Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН
Московский
физико-технический институт
Московский центр непрерывного
математического образования

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,
М.Н.Бондаров, А.А.Варламов,
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,
А.Н.Виленкин, Н.П.Долбилин,
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,
П.А.Кожевников, С.П.Коновалов,
К.П.Кохась, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,
А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов (заместитель главного
редактора), А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, В.И.Берник,
А.А.Боровой, В.В.Козлов,
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 Про запас... *А.Минеев*
14 Математика языка. *В.Успенский*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 19 Задачи M2742–M2745, F2749–F2752
20 Решения задач M2730–M2733, F2737–F2740

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 29 Задачи
30 Как коллега Спрудль дорожил памятью.
К.Кохась

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Одна задача по геометрической вероятности

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 36 Задачи 29–32

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 37 Связанные маятники. *Е.Бутиков*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 40 Космические парусники на световой тяге.
М.Никитин

НАМ ПИШУТ

- 43 Еще раз об огранке бриллианта. *М.Кухтин*

ОЛИМПИАДЫ

- 45 Олимпиада «Ломоносов». Физика
48 Ответы, указания, решения
Вниманию наших читателей (18, 44)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье А.Минеева*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

Про запас...

(о развитии систем накопления энергии)

А.МИНЕЕВ

В 2019 ГОДУ НОБЕЛЕВСКУЮ ПРЕМИЮ по химии получили Джон Гуденаф, Стэнли Уиттингем и Акира Ёсино за разработку литий-ионных аккумуляторов – одного из видов накопителей энергии, получивших в настоящее время широкое распространение. Подобные Нобелевские премии в области естественных наук вручаются нечасто. Эта премия присуждена за *революционное изобретение*, приносящее наибольшую пользу человечеству, а не за выдающееся *научное исследование* (как правило, присуждают именно за это).

Эта статья познакомит читателей с глобальными процессами, происходящими в области развития систем накопления энергии.

Производство электроэнергии и ее потребление всегда нуждались в устройствах, накапливающих излишки и затем, по мере надобности, отдающих энергию обратно. Хорошо известны колебания потребления электроэнергии в течение дня (утренний и вечерний пики), а также от сезона к сезону (зима – лето), которые желательно сглаживать накопителями энергии. С самых давних времен нам знакомы примеры использования преобразования предварительного накопленной потенциальной энергии в кинетическую – скажем, стрелы при стрельбе из лука или при перемещении по циферблату стрелок напольных часов (в них потенциальная энергия запасается при ручном поднятии гирек).

Происходящий в настоящее время поворот к все большему использованию возобновляемых источников энергии – ВИЭ (главным образом, энергии ветра и солн-

ца) сталкивается с проблемой принципиальной непредсказуемости их генерации во времени. В результате многократно увеличивается запрос на все более мощные системы накопления энергии. Это приводит к своеобразной мирной гонке в создании накопителей энергии, которые должны заполнить ниши в проблеме генерация-потребление: в быту, на транспорте, в промышленности и в целом по энергосистеме. О некоторых деталях этой увлекательной гонки и будет рассказано в статье. Но вначале прикинем – о какой суммарной энергии накопителей может идти речь в случае перехода на ВИЭ?

Нынешняя суммарная величина мощности, потребляемой человечеством, составляет 20 ТВт, прогноз на вторую половину 21 века оценивается в 30 ТВт. За год ($3 \cdot 10^7$ с) потребуется выработка энергии порядка 10^{21} Дж. Для суммарной требуемой мощности накопителей примем в качестве оценки значение 5–10 ТВт. Тогда для покрытия дневных колебаний потребления (1–3 часа) суммарная запасенная в накопителях энергия составит $(0,2 - 1) \cdot 10^{17}$ Дж. Если же потребуется запастись энергией на существенно больший срок (скажем, на месяц, ближе к сезонным колебаниям), то суммарная требуемая энергия накопителей может вырасти до $2 \cdot 10^{19}$ Дж.

Однако возможен ли полный переход электроэнергетики мира только на систему ВИЭ + накопители? Скорее всего, нет. По нашему мнению, она нуждается в «подушке» более традиционной энергетики – генерации на атомных электростанциях (АЭС) и на тепловых (ТЭС) при использовании энергии газа, нефти и каменного угля. К подобной подушке можно отнести

и использование гидроэлектростанций (ГЭС), хотя формально они относятся к возобновляемым источникам энергии. Очень важно, что современные тепловые электростанции, особенно использующие природный газ, обладают высокой маневренностью и способны быстро компенсировать дисбаланс между генерацией и потреблением энергии.

Прогнозный анализ оптимального соотношения между различными источниками энергии, проведенный российскими исследователями в 2014 году, привел к следующей оценке на конец 21 века: 40% – АЭС, 40% – ВИЭ (солнце, ветер, приливные электростанции), 20% – нефть, уголь, газ, гидроэнергетика. К похожим выводам в 2019 году пришли и эксперты из международного агентства по ядерной энергии. Они анализировали оптимальное соотношение между различными источниками энергии при наличии ограничений: на выброс парниковых газов (главным образом, углекислого газа) и на рост средней глобальной температуры на Земле (не более 2°C). В выпущенном ими обзоре на конец 21 века приведена следующая ожидаемая структура энергетики: 30–40% – доля использования ветровой и солнечной генерации, 40–60% – доля АЭС и маневренных тепловых и гидроэлектростанций.

Присмотримся к динамике развития различных систем накопления энергии. Начнем с тех, с которыми все мы сталкиваемся в обычной жизни и которые «на слуху». Отметим, что, запасая энергию и затем отдавая ее обратно, накопитель суммарно все же является потребителем энергии. Поэтому очень важно добиваться высокого КПД накопителя, т.е. отдавать обратно почти столько же, сколько получено.

Литий-ионные накопители энергии

Как и в большинстве электрохимических накопителей энергии, набор элементов, из которых состоит литий-ионный (Li-ion) аккумулятор, стандартный: катод и анод, которые разделены сепаратором, пропитанным электролитом. Сложность заключается в подборе материалов катода, анода и типа ионов, перемещающихся от



Образцы зарубежных и российских литий-ионных накопителей

катода к аноду и обратно, с целью увеличения ресурса, безопасности и энергоемкости накопителя (последнее позволяет сделать накопитель более легким и удобным потребителям). Поиск нужных материалов, оптимально сочетающихся друг с другом, занял без малого 50 лет. В результате самому возрастному из лауреатов 2019 года, Д.Гуденафу, к моменту вручения премии исполнилось 97 лет, но он все же дождался и стал старейшим лауреатом в истории Нобелевских премий!

В современных конструкциях Li-ion аккумуляторов анод представляет собой пористый углерод (графит) на фольге из меди, катод – окись лития на фольге из алюминия, пористый сепаратор выполнен из полипропилена и пропитан электролитом. При заряде аккумулятора ионы Li^+ отделяются от молекул окиси лития и переходят на катод из углерода, а при разряде процесс идет в обратную сторону. Поясним масштаб произошедшей революции в использовании таких аккумуляторов на нескольких примерах.

- В 1991 году емкость всех Li-ion накопителей энергии была менее $130 \text{ кВт} \cdot \text{ч}$ (470 МДж), а через 30 лет их суммарная накопленная емкость превысила $500 \text{ ГВт} \cdot \text{ч}$ ($1,8 \cdot 10^{15} \text{ Дж}$) – рост в 4 миллиона раз (!).

- Первые Li-ion аккумуляторы применялись только в небольших приборах (сотовые телефоны, цифровые фотоаппараты и видеокамеры, ноутбуки). Постепенно область их использования расширилась и включила электротранспорт (скутеры,

электрокары, электромобили). Их общая емкость в электромобилях достигла 300 ГВт·ч и уже превысила емкость аккумуляторов бытовой электроники. В последнее время сборки из множества отдельных Li-ion аккумуляторов вышли на уровень промышленной энергетики. Так, в Австралии компания Tesla уже построила большую Li-ion аккумуляторную батарею (476 блоков, в каждом 16 аккумуляторов) суммарной емкостью 100 МВт·ч ($3,6 \cdot 10^{11}$ Дж) и официально подключила ее к энергосети. Компания Tesla проработала технологию создания гигафабрик систем хранения энергии в Li-ion аккумуляторах, расположенных рядом с электростанциями на основе солнечных панелей. В настоящее время такие гигафабрики сооружаются в США, Китае и Германии. В России к созданию первой очереди подобной Li-ion гигафабрики в Калининграде на мощность 4 ГВт·ч в год приступил «Росатом».

- По сравнению с обычно используемыми в автомобилях свинцово-кислотными аккумуляторами литий-ионные обладают существенно большим удельным запасом энергии (40 Вт·ч/кг у свинцово-кислотных против 250 Вт·ч/кг у литий-ионных). Это делает их значительно более легкими и компактными.

- Ресурс литий-ионных аккумуляторов существенно больше, чем у свинцово-кислотных ($(5-10) \cdot 10^3$ против $(1-1,5) \cdot 10^3$).

- КПД литий-ионных аккумуляторов довольно высок – до 95–97%.

Несмотря на то, что стоимость Li-ion аккумуляторов пока превышает свинцовые, по совокупности (с учетом ресурса, КПД, компактности и других характеристик) переход на литий уже в настоящее время оказывается предпочтительнее.

Казалось бы, большинство проблем с производством литиевых аккумуляторов решено, а запасы лития в земной коре и в океанах достаточно велики. Однако экологические риски, относящиеся к добыче лития и производству литий-ионных аккумуляторов, могут со временем все более ограничивать даль-

нейшее развитие этой технологии. Отметим в этой связи несколько проблем.

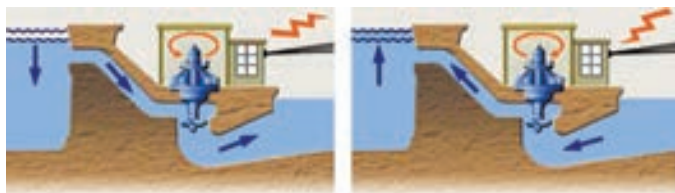
- Для получения одной тонны этого металла требуется переработать 50 тонн породы сподумен или 750 тонн солевого раствора, содержащего литий. Очистка их от примесей возможна только химическим путем. Порода или раствор после извлечения лития больше не используются, выливая тонны отработанного химического рассола на землю.

- Емкость аккумуляторов современных электромобилей приближается к 100 кВт·ч. При производстве 1 кВт·ч мощности Li-ion батареи в атмосферу выделяется порядка 150–200 кг углекислого газа. В результате оказывается, что новенький электромобиль (еще без пробега!) уже на стадии изготовления загрязнил атмосферу 15–20 тоннами CO_2 . А ведь при работе обычного автомобиля с бензиновым двигателем такое же количество углекислого газа выделяется при пробеге в 100 тысяч километров.

В последнее время активно исследуются натрий-ионные аккумуляторы, которые пока уступают более отработанному литий-ионным, но в перспективе имеют преимущества (натрий по стоимости на два порядка дешевле лития и не так химически активен).

Гидроаккумулирующие электростанции – ГАЭС

Для ГАЭС необходимы два резервуара воды: верхний и нижний. Принцип действия гидроаккумулирующих электростанций при выдаче энергии в сеть близок к работе гидроэлектростанций (ГЭС): вода из верхнего резервуара вращает турбину и вырабатывается электроэнергия. В то же время



Принцип работы ГАЭС. Слева – в качестве генератора энергии (турбинный режим), справа – накопителя энергии (насосный режим)

ГАЭС может работать и в обратную сторону (как накопитель энергии), при этом двигатель закачивает воду из нижнего резервуара наверх. Потенциальная энергия поднятой наверх воды $W = mgh$ (h – высота верхнего резервуара относительно нижнего) затем снова вращает турбину и т.д.

В мире развитие ГАЭС в целом практически вышло на стационар (исключение – Китай и Россия, потенциал развития ГАЭС в которых еще не исчерпан). Во многом это связано с конкуренцией за место для строительства новых станций, большим сроком строительства и влиянием «зеркала» водохранилища на экологию. В результате можно сказать, что наиболее удачные решения по выбору мест и строительству ГАЭС уже были приняты в прошлом и подходящих территорий для сооружения новых все меньше.

Однако, с гидроаккумулирующими станциями ситуация иная. В случае ГАЭС нет необходимости перекрывать плотиной русла рек и можно сделать существенно более компактную систему замкнутого цикла, включающую верхний и нижний резервуары, двигатели и турбины. В 2019 году

опубликован атлас возможных мест расположения ГАЭС в мире (их оказалось более пятисот) и было оценено, что суммарная запасаемая энергия таких потенциальных ГАЭС превышает 20 миллионов ГВт·ч (!). Это означает, что если удастся освоить хотя бы небольшую часть от указанной суммарной потенциальной энергии, то ГАЭС могут обеспечить мировые потребности в накопителях. Однако, реальные темпы строительства новых ГАЭС пока довольно низки и сильно отстают от темпов развития ВИЭ.

Для того чтобы дать представление о проблемах, связанных с созданием ГАЭС, приведем пару примеров таких гидроаккумулирующих станций – Голдисталь в Тюрингии (Германия) и Загорской в Подмосковье. На приведенном (на с. 6) рисунке видны верхний и нижний резервуары воды, а также шлюзы, их соединяющие. Важно, что обе станции удачно вписаны в природный ландшафт. Некоторые параметры этих станций приведены в таблице.

По сравнению с Li-ion аккумуляторами у ГАЭС запасаемая энергия и мощность гораздо выше, больше ресурс, но ниже

	ГАЭС Голдисталь	Загорская ГАЭС
Верхний резервуар		
Запас воды, млн м ³	12	22
Площадь «зеркала воды», гектар	55	260
Глубина воды в резервуаре, м	20	9
Нижний резервуар		
Запас воды, млн м ³	19	34
Энергетические характеристики		
Разница высот до турбин, м	340	100
Потенциальный запас энергий, ГВт·ч	10	6
КПД	85%	75%
Выработка электроэнергии, ГВт·ч	8,5	4,5
Время сброса воды, ч	8	4



ГАЭС Голдисталь, Тюрингия, Германия



Загорская ГАЭС, Московская область, Россия

КПД (порядка 75 – 85%). К настоящему времени построены ГАЭС с очень высокой мощностью (наиболее крупные: Фэннин, 3600 МВт, 40 ГВт · ч, Китай; Бас Каунти, 3000 МВт, 24 ГВт · ч, США). Общее количество ГАЭС в мире около 500, их суммарная мощность более 300 ГВт. Строят надземные (такие, как упомянутые выше Голдисталь и Загорская), полуподземные (Бас Каунти) и подземные (Динорвик, 1800 МВт, 9 ГВт · ч, Великобритания; Фэннин, Китай). Запас энергии $W = mgh$ в ГАЭС происходит в основном за счет подъема массы воды (m). Тем не менее, строятся и станции с очень высоким напором, $h = 380$ м (Бас Каунти) и даже $h = 750$ м (Лаго Делио, 1040 МВт, Италия).

Главное достоинство ГАЭС – возможность быстрого реагирования на изменение потребления энергии. Указанное в таблице значение времени сброса всей воды из верхнего резервуара составляет часы, но на полную мощность они могут выходить за минуты или десятки минут. Характерный режим работы крупных ГАЭС:

накопление энергии ночью (в период минимального потребления энергии), генерация – днем.

Основные недостатки ГАЭС связаны с отчуждением больших площадей, длительным периодом сооружения и дороговизной. При этом необходимы особые площадки с большим перепадом высот и местом для водохранилищ. На территории ГАЭС меняется ландшафт и уровень грунтовых вод, происходит большое испарение воды... В результате выбор площадки для строительства каждой новой ГАЭС является сложным компромиссом между мнением населения территории и нуждами региона и страны в целом.

Гравитационные накопители энергии

Простейший пример гравитационного накопителя – часы с гирями. Энергия, запасенная при поднятии гирь, расходуется, приводя в движение часовой механизм. В отличие от метода гидроаккумуляции, использующем течение воды, гравитационный накопитель может экономнее использовать отведенную площадь, наименьшую – в случае, когда грузы поднимаются и



Настенные часы с гирями

опускаются вертикально, как в лифте. Сами грузы могут быть изготовлены из подручных материалов – почвы, строительных блоков и т.п. При подъеме груза происходит запасание энергии $W = mgh$, при опускании – выработка электроэнергии.

Месторасположение гравитационных накопителей может быть довольно неожиданным – например, внешние подвески на небоскребах или вертикальные подземные лифты шахт. Отмечается, что КПД таких систем довольно высок (более 80%). Конструкции, как правило, простые, надежные, срок службы накопителя может составить десятки лет. Время хранения запасенной энергии ограничено долговечностью используемых материалов, а время высвобождения энергии, естественно, должно быть больше времени свободного падения (при высоте 100 метров это около 5 секунд).

В настоящее время эта технология тестируется в ряде стран, однако пока не освоена промышленностью. Имеются проекты создания таких систем мощностью в несколько мегаватт и запасом энергии в десятки МВт·ч.

От маховиков к супермаховикам

В этой статье о накопителях не раз будет употребляться приставка *супер*. Она будет означать какой-то прорыв, выход за обычные границы. Термин «супермаховики» тоже означает некую революцию развития систем накопления энергии на основе быстрого вращения твердых тел (маховиков).

За примерами маховиковых накопителей далеко идти не надо, они под рукой – скажем, детские игрушки волчок и юла

или велосипед. У них уже есть кое-что общее с промышленными накопителями на основе маховиков:

- устройство раскручивания или двигателя (однократное придание вращательного движения рукой (у волчка), постепенное многократное раскручивание (у юлы и велосипеда));

- возможность сохранения вращения в течение некоторого времени, определяемого потерями энергии на трение об окружающий воздух и в месте контакта с поверхностью;

- устройство превращения энергии маховика в другой вид энергии, в случае велосипеда – вращения колес, приводящего к поступательному движению, в тепло при нажатии на тормоз.

Энергия, запасаемая в маховике, равна

$$W_{\max} = k_M \frac{mv_{\varphi}^2}{2},$$

где m – масса маховика, v_{φ} – скорость вращения, k_M – коэффициент формы маховика. Для маховика, имеющего вид тонкого диска (типа колеса велосипеда), $k_M = 1$ (при этом $v_{\varphi} = \omega R$, R – радиус диска, ω – угловая скорость); для сплошного диска постоянной толщины $k_M = 0,5$. Максимальная скорость вращения маховика ограничивается сверху прочностью материала.

Центробежная сила $F = \frac{mv_{\varphi}^2}{R}$ создает механические напряжения σ в материале, равное

$$\sigma = \rho \frac{R}{h} = \frac{F}{2\pi R \Delta} \frac{R}{h} = \rho v_{\varphi}^2,$$

где h – толщина диска, Δ – его ширина, ρ – плотность материала, $m = \rho \cdot 2\pi R h \Delta$ – мас-



Волчок, юла, велосипед

са диска. В результате маховики из легких, но прочных материалов оказываются более предпочтительными, а маховики из прочных сталей проигрывают легким композитам типа углепластиков.

В процессе перехода от маховиков к супермаховикам произошел целый ряд революционных изменений. Идеологом этого направления накопителей энергии стал советский и российский инженер Нурбей Владимирович Гулиа. Ему принадлежат само название «супермаховик», авторские права на конструкцию, полученные еще в 1964 году, и множество идей, впоследствии реализованных.

Перечислим главные особенности перехода от маховиков к супермаховикам.

- Замена тяжелых материалов маховика на более легкие прочные композиты.
- Замена однородного материала маховика на ленту из композитных материалов типа углепластика, органопластика или борного волокна. Это решает одну из важных проблем, связанных с возможным разрушением материала маховика. В маховике из сплошного однородного материала разрушение приводит к катастрофическим и не всегда предсказуемым последствиям. В маховике из намотанной ленты ее разрыв сопровождается разматыванием ленты и более плавным гашением энергии в прочном корпусе.
- Создание вакуума внутри корпуса маховика для радикального снижения потерь на трение и увеличения длительности сохранения накопленной энергии вращения.
- Переход от обычных подшипников к магнитной подвеске маховика (магнитная левитация).
- Развитие алгоритмов управления, с помощью которых маховик удается стабилизировать при любых скоростях вращения, а также избежать контакта маховика с другими элементами конструкции.

В результате КПД при учете всех оставшихся потерь оказывается больше 85%. А максимальная на сегодняшний день энергоемкость супермаховиков достигает 300 Вт·ч/кг (с возможностью дальнейшего роста). Фактически это тот же уро-

вень, что и для литий-ионных аккумуляторов. Другие достоинства супермаховиков: экологическая чистота и высокий ресурс работы. В оставшихся в арсенале обычных маховиках даже при использовании современных прочных сталей не удается увеличить энергоемкость выше 15 Вт·ч/кг.

По сравнению с литий-ионными аккумуляторами время зарядки (раскручивания) супермаховиков существенно короче (минуты по сравнению с часами зарядки в аккумуляторах). Выше также плотность запасаемой энергии и долговечность. Подсчитано, что если супермаховик из органопластика массой 130 кг и энергоемкостью 30 кВт·ч раскрутить в течение пяти минут мощным внешним двигателем, то легкой автомобиль на такой тяге может проехать около 300 км на скорости 100 км/ч. Заметим, что в электромобилях при такой же энергоемкости масса литий-ионных аккумуляторов почти на порядок выше (около тонны).

Казалось бы, все это открывает радужные перспективы использования супермаховиков в автомобилях. Но маховик, раскрученный до большой скорости, фактически является большим гироскопом, который стремится сохранить направление вращения. Это затрудняет маневренность, а использование гибкого подвеса (типа карданного вала) усложняет конструкцию. Проведено сопоставление возможностей использования литий-ионных аккумуляторов и супермаховиков в рамках развития спортивных гоночных машин, которое показало некоторое преимущество у аккумуляторов. Супермаховики пока не могут запасать много энергии (в ходе движения запасается только та энергия, которую дает торможение), в отличие от аккумуляторов. Тем не менее, супермаховики нашли применение на транспорте (разгон и торможение в электропоездах на железной дороге и в метро), в источниках бесперебойного питания.

Приведем примеры параметров современных супермаховиков. Для хранения больших запасов энергии (мегаватты) сооружают целые «фермы». Например, в Нью-Йорке действует такая ферма супер-

маховиков суммарной емкостью 5 МВт · ч, способная вырабатывать мощность 20 МВт в течение 15 мин (фирма Beason Power). Емкость каждого из двухсот супермаховиков фермы 25 кВт · ч, мощность 100 кВт, частота вращения 16000 об/мин. В Германии разработан супермаховик с запасом энергии 20 МДж (5,5 кВт · ч), мощностью 250 кВт и временем вывода мощности 80 с (компания ATZ). Другие параметры этого накопителя: размеры около 1,5 м, маховик сделан из углеродного волокна с магнитным подвесом на основе высокотемпературной керамики. В России под научным руководством Н.В.Гуляя компания KEST создала несколько поколений накопителей кинетической энергии на базе супермаховиков из высокопрочной стальной ленты. Запас энергии в таком супермаховике 20 кВт · ч, мощность 1 МВт, время вывода энергии около минуты. Отмечено, что кластер из нескольких таких накопителей способен обеспечивать выравнивание суточной неоднородности электрической нагрузки целого региона.

От конденсаторов к суперконденсаторам

Конденсаторы представляют собой системы накопления электрических зарядов и в простейшем случае состоят из двух противоположно заряженных пластин электродов, разделенных диэлектриком. Запасаемая энергия равна

$$W_k = \frac{CU^2}{2},$$

где C – емкость конденсатора, U – напряжение на его обкладках. Емкость конденсатора растет при увеличении площади пластин S и уменьшении расстояния d между ними:

$$C = \epsilon_0 \epsilon \frac{S}{d},$$

где $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – диэлектрическая проницаемость вакуума, ϵ – относительная проницаемость материала диэлектрика.



Характерный вид и основные параметры высоковольтных конденсаторов: напряжение – киловольты, емкость – доли или единицы микрофарад

Как увеличить запас энергии в конденсаторе? Первое, что напрашивается, – за счет роста напряжения на электродах. По этому пути в течение долгого времени происходило развитие конденсаторной энергетики.

Энергия, которую можно запасти в изолированных на рисунке единичных конденсаторах, сравнительно небольшая и составляет 24 Дж (левый) и 6,5 Дж (правый). А система из многих конденсаторов может иметь значительную энергию. Чемпионом является батарея из 4000 конденсаторов для крупнейшей установки лазерного синтеза (NIF) в США, суммарный запас энергии в конденсаторах составил около 400 МДж. С помощью нескольких ступеней обострения мощности можно получить короткий импульс с суммарной энергией около 2 МДж и сфокусировать 192 лазерных луча на термоядерной мишени. В 2022 году в ходе обжата и нагрева мишени удалось получить 3 МДж термоядерной энергии! Но в высоковольтных конденсаторах имеется ограничение на напряжение, связанное с пробоем диэлектрика. Для лучших типов диэлектриков напряженность электрического поля не превышает 100 кВ/см. Это означает, что при рабочем напряжении конденсатора, например, 10 кВ толщина диэлектрика должна быть не меньше 1 мм. Такие большие толщины приводят к тому, что характерное значение емкости высоковольтных конденсаторов измеряется в миллионных долях фарады (т.е. в микрофарадах).

В суперконденсаторах, иначе называемых ионисторами или ультраконденсаторами, используется другой набор идей:

– очень низкие напряжения U (2–3 вольта),

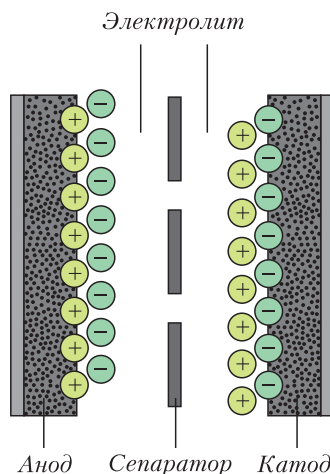
– предельно малое расстояние между электродами d (масштаба атомных),

– очень большая площадь пластин S .

Две последние идеи в принципе позволяют увеличить емкость конденсаторов в миллионы раз. В результате в суперконденсаторе сделан акцент на низком напряжении и огромной емкости. А насколько можно увеличить поверхность пластин и уменьшить расстояние между электродами? При одинаковых габаритах конденсатора можно увеличить площадь пластин, сделав их пористыми (используя, например, пористый графит). За счет пор эффективная площадь многократно увеличивается (достигнута удельная площадь пористого графита до 1000 квадратных метров на грамм массы, а в предельном случае использования графена удельная двусторонняя поверхность может превысить $2500 \text{ м}^2/\text{г}$).

В суперконденсаторах при подаче напряжения на границе электрод – электролит образуется двойной электрический слой (у анода и у катода). Такие заряженные слои образуют своеобразные обкладки конденсатора, а граница раздела между электродом и электролитом толщиной порядка 1 нанометр (и даже меньше) служит диэлектриком. В результате в суперконденсаторах удается увеличить удельную емкость до огромной величины (до 500–1000 Ф/г) при небольшом времени заряда и разряда (секунды) и возможности сохранения заряженного состояния в течение сотен часов. При необходимости нарастить напряжение (скажем, до сотен вольт) можно набирать из элементарных ячеек суперконденсаторов большие сборки путем их последовательно-параллельного соединения. Далее сборка помещается в герметичный корпус.

КПД суперконденсаторов доходит до 95%. Вес существенно меньше, чем у обычных конденсаторов, довольно большой ресурс циклов заряда-разряда (миллионы). Все это выделяет их в отдельную нишу, между обычными конденсаторами и аккумуляторами (типа литий-ионных). К



Двойной электрический слой в суперконденсаторе

недостаткам суперконденсаторов относят низкую плотность запасаемой энергии (десятки $\text{Вт} \cdot \text{ч/кг}$) и высокую стоимость. Их основное применение – на транспорте (автомобильном, железнодорожном), для запуска двигателей, в портативной электронике и т.д.

Сверхпроводниковые индуктивные накопители энергии – СПИН

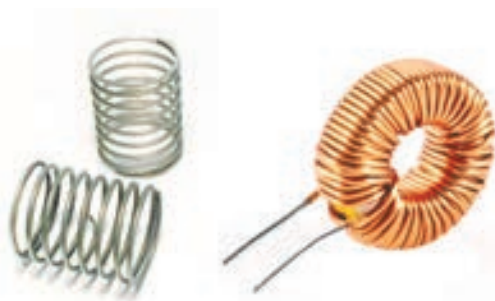
Для запасаения энергии можно использовать не только электрическое поле (как в конденсаторах), но и магнитное. Энергия, запасаемая в индуктивности L при пропускании по ней тока I , составляет

$$W_m = \frac{LI^2}{2}.$$

При использовании обычных проводников ток без внешней подпитки постепенно затухает из-за потерь энергии на сопротивлении (нагрев проводника). Не так в материалах, сопротивление которых при низких температурах обращается в ноль, т.е. в сверхпроводниках. В этом идеальном случае запасенная энергия может храниться очень долго, а при подключении внешней нагрузки высвободиться на ней. В результате переход от обычных проводников к сверхпроводникам является еще одним примером того, что раньше обозначалось приставкой «супер».

Переход материалов в сверхпроводящее состояние происходит при очень низких температурах. На уровне охлаждения жидким гелием (несколько градусов Кельвина, т.е. около -270°C , так называемая низкотемпературная сверхпроводимость (НТСП)) наибольшее распространение получили сверхпроводники на основе NbTi и Nb₃Sn. В последние десятилетия произошел прорыв в области высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП) и обнаружены материалы, переходящие в сверхпроводящее состояние при температуре жидкого азота (порядка 77 градусов Кельвина или -196°C). Бурное развитие этого направления привело к созданию нескольких поколений таких материалов и конструкций и их внедрению в энергетику. Первое поколение (ВТСП-1) изготавливалось по технологии «порошок в трубе» и имело вид серебряной матрицы с микроканалами, в которых находится сверхпроводящая керамика, обычно Bi-Sr-Ca-Cu-O. Технология сверхпроводников второго поколения (ВТСП-2) иная – «лента с покрытием»: микронные керамические покрытия из Y-Ba-Cu-O на подложку. Это направление оказалось наиболее перспективным.

Индуктивные накопители запасают энергию при пропускании тока по проводнику, как правило, цилиндрической (соленоид) или тороидальной геометрии. Казалось бы, цилиндрические индуктивные накопители проще изготовить, легче решается проблема с прочностью конструкции, они дешевле, магнитное поле более однородно. В то же время в тороидальных индуктивных накопителях меньше паразитных магнитных полей (магнитная конфигурация лучше «спрятана» внутри тора). Оба направления развиваются параллельно. На основе соленоидальных СПИН с использованием НТСП и ВТСП-1 в прошлом был создан ряд реальных накопителей. При переходе к более перспективным сверхпроводникам ВТСП-2 чаще используют тороидальную геометрию СПИН. Однако, соленоидальные накопители «не сдаются», что приводит к появлению проектов с усложненной соленоидальной геометрией (типа «соленоид



Примеры геометрии индуктивных накопителей: слева – соленоидальная, справа – тороидальная

в соленоиде»), близкой к тороидальной, но все же более простой.

У сверхпроводниковых индуктивных накопителей имеется ряд важных достоинств: высокий КПД (до 95–98 %); компактность, связанная с высокой удельной энергоемкостью (до 100 МДж/м³ в накопителях с большим запасом энергии); высокие значения мощности и быстродействия; фактически неограниченное число циклов «заряд-разряд»; возможность очень быстрого перехода из режима накопления энергии в режим ее выдачи. Потенциальный уровень запаса энергии с помощью СПИН – до тысяч МВт · ч. Основная причина, сдерживающая их широкое распространение, – относительно высокая удельная стоимость и сложность изготовления оборудования.

Первый опыт использования такого типа накопителя энергии для нужд энергетики



Сверхпроводниковый (ВТСП-2) тороидальный индуктивный накопитель с запасом энергии 1 МДж и мощностью 1 МВт (Россия)

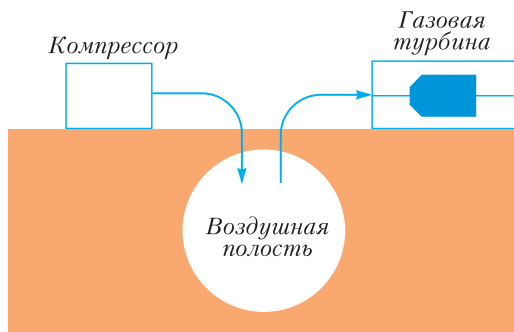
начался в США. В 1983 году на подстанции Такома был введен в эксплуатацию СПИН с энергозапасом 30 МДж, разработанный Лос-Аламосской лабораторией, и использовался для стабилизации работы магистральной линии электропередач. Параметры этого СПИН на основе низкотемпературной сверхпроводимости: максимальная выдаваемая мощность 10 МВт, масса 127 кг, максимальное магнитное поле 4 Тл, рабочая температура 4,5 К. Из наиболее крупных реализованных к настоящему времени разработок отметим СПИН в Анкоридже (США) на энергоемкость 1800 МДж с максимально выдаваемой мощностью 40 МВт, используемый для демпфирования колебаний мощности и поддержания уровня частоты.

Имеется много хорошо проработанных проектов СПИН на энергию от десятков до нескольких тысяч МДж. Работы по таким накопителям ведутся в большинстве развитых странах мира с учетом новейших достижений естественных наук и материаловедения. Области их применения – бесперебойное питание важных объектов, железнодорожный транспорт, сглаживание колебаний энергии в крупных энергетических системах и др.

Воздушно-аккумулирующие электростанции – ВАЭС

Использование энергии сжатого воздуха – один из наиболее простых методов накопления и хранения энергии. Для этого в принципе годятся любые естественные полости внутри Земли (соляные пещеры, отработанные месторождения природного газа, бывшие нефтяные скважины и т.д.), а также искусственные емкости. При небольшой мощности воздушных накопителей (менее 100 кВт) более целесообразны искусственные наземные системы хранения сжатого воздуха, при большой – более экономичны подземные хранилища сжатого воздуха.

Принцип работы заключается в закачке воздуха в емкость специальными компрессорами высокого давления (накопление энергии) и затем, по мере надобности, выпуск сжатого воздуха через газовую



Принцип устройства воздушного накопителя

турбину для выработки энергии. Уровень давлений сжатого воздуха – десятки и даже сотни атмосфер. Наиболее крупная установка на энергии сжатого воздуха имеет мощность 290 МВт (Германия). Время вывода мощности 4–10 ч.

Плюсы воздушных накопителей: возможность сохранять запасенную энергию в течение продолжительного времени, относительная простота и низкая стоимость. Плата за это – очень низкий КПД (в среднем 30–40%), что связано с тепловыми потерями, сопровождающими процесс сжатия и расширения воздуха: при сжатии воздух нагревается, при расширении – охлаждается. Для увеличения КПД при сжатии воздуха максимально отводят тепло, а при расширении, наоборот, подводят тепло. По такой, но более сложной схеме в лучших установках доводят КПД до 60–70%.

Приведем параметры нескольких крупных воздушных накопителей.

В накопителе, построенном в Алабаме (США), в качестве полости использована естественная подземная соляная пещера объемом около 0,5 кубических километров. Компрессором в пещеру закачивается воздух до давления 77 атмосфер. При отдаче накопленной энергии станция может выдавать 110 МВт мощности в течение 26 часов. При этом давление в пещере снижается с 77 до 46 атмосфер. КПД накопителя 54%.

В Германии работает накопитель, рассчитанный на выдачу 290 МВт мощности в течение 4 часов и использующийся для сглаживания пиков выработки ветряных электростанций. Он расположен в двух

подземных соляных пещерах. Максимальное давление воздуха в пещере 70 атмосфер, минимальное – 50 атмосфер. КПД накопителя 42%.

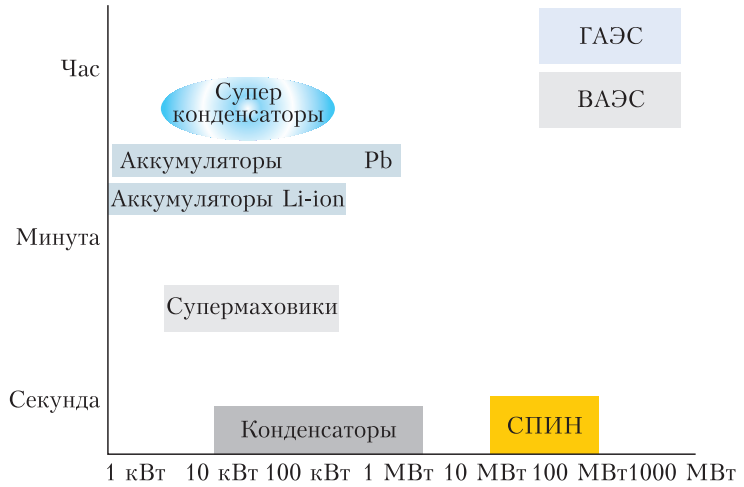
Китай быстро развивает направление накопителей энергии на сжатом воздухе. Уже работают девять накопителей общей мощностью около 700 МВт (из них семь хранят сжатый воздух в специальных контейнерах на поверхности Земли, а два – в соляных пещерах). Приняты амбициозные планы по развитию накопителей на основе сжатого воздуха суммарной мощностью около 7 ГВт к 2025 году и более 40 ГВт к 2030 году. Ожидается, что к 2025 году на сжатый воздух будет приходиться 10% всей хранящейся в китайских накопителях энергии, а к 2030 году – 23 %. В новых воздушных накопителях при выпуске сжатого воздуха не применяется подогрев. Вместо этого утверждается, что сохраняется и повторно используется тепло, которые выделялось на этапе сжатия воздуха, это позволяет увеличить КПД накопителя до 70%.

Воздушно-аккумулирующие электростанции, как правило, имеют мощность в диапазоне от 30 до 300 МВт. Это делает их пригодными для регулирования частоты и выравнивания графиков нагрузки.

Области применения накопителей энергии

Упомянутые выше современные методы накопления энергии (ГАЭС, ВАЭС, СПИН, электрохимические накопители (литий-ионные, свинцово-кислотные...), супермаховики, конденсаторы, суперконденсаторы) отличаются по запасу энергии, мощности, времени выдачи запасенной энергии, удельным показателям. Это позволяет предварительно сопоставить такие методы и оценить область их использования.

Наиболее мощными, с большим временем регулирования мощности являются накопи-



Сопоставление методов накопления энергии в координатах время разряда – мощность

тели на основе гидроаккумуляции и использования сжатого воздуха (ГАЭС и ВАЭС). Несколько меньше мощность у сверхпроводниковых накопителей энергии (СПИН). Для кратковременного регулирования больше подходят аккумуляторы (свинцовые и литий-ионные) и супермаховики. Еще меньше время разряда накопителя у высоковольтных конденсаторов и СПИН.

На выбор решения о создании тех или иных систем накопления, особенно большой мощности, влияет также множество других факторов: экономические, экологические, общественное мнение, сложность изготовления и эксплуатации. При этом существенную роль часто играет не только энергия или мощность накопителя, а и его масштабируемость – от малых к большим значениям, которая позволяет заполнить большее число ниш использования систем накопления энергии.

В целом в мире происходит поворот к сбору и хранению энергии. В настоящее время лидируют гидроаккумулирующие станции и электрохимические накопители. При этом стоимость ГАЭС практически вышла на стационар, в то время как, например, Li-ion аккумуляторы постепенно дешевеют. Есть надежда, что быстрое развитие одного или нескольких других методов накопления энергии позволит им также войти в число лидеров.

Математика языка

В.УСПЕНСКИЙ

Правильно говорить на каком-либо языке, в частности на русском, можно, конечно, и не зная математики. Но вот для того, чтобы дать языку научное описание, математика оказывается полезной, а в XXI веке пожалуй что и необходимой. Посмотрите на фотографию книги «Математические методы в лингвистике». Даже вкратце обозреть ее содержание, конечно, невозможно. Но можно обратить внимание на ее толщину. Издана она известным издательством Kluwer и является наглядным свидетельством того, сколь серьезно сейчас в мире понимается связь математики с лингвистикой.

Попробуем уловить эту связь на конкретных примерах.

Все знают, что в русском языке шесть падежей: именительный, родительный, дательный, винительный, творительный, предложный. Такова традиция. Этому учат

Из книги «Математическая составляющая» (М.: Математические этюды).

в школе. Поэтому эти шесть падежей будем именовать **школьными** или **традиционными**.

Когда слово меняет свой падеж, происходит изменение его формы; изменение, в частности, может состоять и в том, что форма слова остается прежней: у слова *кровать*, например, совпадают формы именительного и винительного, а у слова *кофе* — вообще все формы. Изменение форм данного слова по всем падежам называется его **склонением**; обычно термином «склонение» обозначают изменение слова не только по падежам, но и по числам, но мы для простоты «забудем» на некоторое время о существовании множественного числа и будем рассматривать слова лишь в единственном числе. Вот, например, склонение слова *сахар*: им. п. *сахар*, род. п. *сахара*, вин. п. *сахар*, дат. п. *сахару*, тв. п. *сахаром*, предл. п. *о сахаре*. Все эти формы: *сахар, сахара,*



сахару, сахаром, сахаре — называются **словоформами** слова *сахар*; словоформы часто называют просто **словами**.

Спросим себя, какой падеж у словоформы *сахару*. В только что приведенном списке словоформ указано, что это дательный падеж. Теперь посмотрим на фразу

(1) *Положить тебе еще сахару?*

Согласится ли любезный читатель, что у слова *сахару* здесь дательный падеж? Ведь дательный падеж, как известно, отвечает на вопрос *Кому?/Чему?*. Здесь же слово *сахару* отвечает на вопрос *Чего?*. Но на вопрос *Чего?* отвечает родительный падеж. Но формой родительного падежа для слова *сахар* служит слово (форма) *сахара*. Как же быть?

Отложим ответ на заданный вопрос и рассмотрим похожую ситуацию. Самая знаменитая детская песенка начинается со слов

(2) *В лесу родилась елочка...*

В каком падеже здесь слово *лесу*? Судя по окончанию — в дательном. Однако сразу возникают две трудности, препятствующие тому, чтобы радостно принять этот ответ. Первая трудность аналогична той, которую мы видели в примере (1) со словом *сахару*. Дательный падеж у слова *лес* должен отвечать на вопрос *Кому?/Чему?*, как, например, во фразе

(3) *Вернем долги лесу.*

Однако во фразе (2) слово *лесу* отвечает на другой вопрос, а именно на вопрос *Где?*. Вторая трудность для нас новая и связана с **акцентуацией**, т. е. с местом ударения в слове. Во фразе (3), служащей для нас эталоном дательного падежа для слова *лес*, ударение в слове *лесу* стоит на первом слоге, тогда как во фразе (2) слово *лесу* имеет ударение на втором слоге. Выходит, что во фразе (2) мы встречаемся с какой-то новой словоформой слова *лес* — новой в том смысле, что она отсутствует в традиционном шестичленном списке падежных форм этого слова. Значит, список неполон. И действительно, логика вещей подсказывает, что должен быть специальный падеж, отвечающий на вопрос *Где?*. Этот падеж называется **местным падежом**

или **локативом** (от латинского слова *locus* «место»). Именно в локативе и стоит слово *лесу* в предложении (2). Вот пример, где местный и предложный падежи противопоставляются друг другу в пределах одной фразы:

(4) *Вороны искали в снегу* (местн. п.) *пищу, а художники в снеге* (предл. п.) — *вдохновения для своих картин*.

Здесь перефразирован известный пример, предложенный великим филологом Романом Осиповичем Якобсоном:

(4') *Вороны чего-то искали в снегу, но корму в снегу не было. — Художники чего-то ищут в снеге, но живописности в снеге нет*.

Местный падеж называют также **2-м предложным**.

Теперь нас не должно удивить решение, предлагаемое лингвистами для проблемы, возникающей в связи с фразой (1). Здесь мы также имеем дело с новым падежом, выражающим неопределенное количество, неопределенную часть того предмета, о котором идет речь во фразе, — в данном случае неопределенное количество сахара. Этот падеж называется **отделительным падежом** или **партитивом** (от латинского слова *pars* «часть»). Поскольку слова в партитиве отвечают на вопрос *Чего?*, этот падеж называют также **2-м родительным**.

В обоих случаях, и с обнаружением в падежной системе русского языка локатива, и с обнаружением партитива, логика рассуждений лингвиста такая же, как у биолога, сталкивающегося с новым видом. На первых порах он пытается отнести встретившееся ему растение или животное к тому или иному из известных видов и только потом, потерпев неудачу, констатирует, что обнаружен новый вид.

В оправдание школьных учебников следует сказать, что найденные два дополнительных падежа встречаются в русском языке значительно реже шести традиционных падежей; к тому же очень часто форма локатива совпадает с формой предложного падежа, а форма партитива — с формой падежа родительного, как, например, во фразах

(5) *Киты живут в океане;*

(6) *Положить тебе еще каши?*

Тем не менее, на наш взгляд, оба нетрадиционных падежа следует прописать в школьных учебниках. Сейчас они присутствуют только в вузовских учебниках для филологов. Падежи этого октета — шесть традиционных и два добавленных — условимся называть **стандартными**. Надеемся, что в близком будущем на них распространится термин «школьные», а в будущем более отдаленном — даже и термин «традиционные».

А нет ли в русском языке еще каких-нибудь падежей?

Отменим на короткое время наш запрет на рассмотрение множественного числа и вспомним строки Маяковского:

(7) *Я бы в летчики пошел, / пусть меня научат.*

Какой падеж имеет здесь слово *летчики*? Ответ зависит от того, какое из трех решений принимает лингвист. Первое решение: можно считать, что слово *летчики* пребывает здесь в именительном падеже, имеющем при себе предлог *в*. «Именительный с предлогом» звучит, конечно, достаточно экзотично, но пример из Маяковского отнюдь не уникален. Вниманию читателя предлагается знаменитое восклицание Фамусова:

(8) *Что за комиссия, Создатель, / Быть взрослой дочери отцом!*

Слово *комиссия* стоит в именительном падеже с предлогом *за*. Второе решение: можно считать, что в данном конкретном контексте слово *летчики* означает вовсе не множественное число от слова *летчик*, а некую нерасчлененную массу летчиков (подобно тому, как слово *листва* не является множественным числом от слова *лист*). При таком понимании слово *летчики* является неодушевленным существительным единственного числа, стоящим во фразе (7) в винительном падеже. Третье решение: можно, наконец, считать, что в этом примере слово *летчики* представляет собой множественное число от слова *летчик* и стоит в особом **включительном падеже**. Этот падеж отличается от винительного падежа формой управляемого слова

после глагола: *иду в летчики* (включит. п.), *говорю про летчиков* (вин. п.).

Следует, кроме того, учесть, что понятие падежа (как и едва ли не все другие лингвистические понятия) опирается на представление о грамматически правильной фразе, т. е., говоря попросту, о том, какие сочетания слов считаются допустимыми, а какие — нет. Но само представление о допустимости в языке не является несомненной истиной и зачастую зависит от вкусов говорящего на этом языке. Поэтому в самой понятии падежа скрыта некоторая неопределенность или, лучше сказать, вариативность.

Можно ли согласиться с тем, что глагол *ждать* требует после себя винительного падежа для имен одушевленных и родительного падежа для имен неодушевленных? Поясним сказанное на примерах. Можно ли согласиться с тем, что разрешено сказать только *жду сестру*, *жду результата*, а вот *жду сестры* и *жду результат* — это запрещено? Согласие означает появление нестандартного **ждательного падежа**, формы которого совпадают с формами винительного для одушевленных имен и с формами родительного для неодушевленных. Но язык меняется, и то, что было невозможно позавчера, становится возможным сегодня.

Ввиду сказанного целесообразно остановиться на 8 стандартных падежах. Для сравнения — один из языков Дагестана, табасаранский, в своем литературном варианте насчитывает 46 падежей. Остается вопрос, что такое падеж. Вот тут на помощь приходит математика.

Математическая составляющая в вопросе о падежах заключается в том, что первое научное определение понятия «падеж» имело в своем основании такие начальные понятия математики, как пара, бинарное отношение, разбиение на классы, а сформулировал его великий математик Андрей Николаевич Колмогоров. Мне это определение стало известно при следующих обстоятельствах. 24 сентября 1956 года на филологическом факультете Московского университета открылся семинар «Некоторые применения математических методов в языкознании» — первый семинар по математической лингвистике в нашей стра-

не. Я был одним из двух (вместе с лингвистом Вячеславом Всеволодовичем Ивановым) учредителей этого семинара и за несколько дней до названной даты обратился к Колмогорову с просьбой посоветовать, с чего начать. Он посоветовал начать с конкретных задач и предложить участникам семинара две задачи на поиски определений двух популярных понятий — понятия ямба и понятия падежа. Что касается ямба, то убеждение, что в ямбической строке ударения стоят на четных слогах, было почти всеобщим, несмотря на очевидную ложность. (Взять хотя бы вторую строку «Евгения Онегина»: *Когда не в шутку занемог*. Для наглядности мы подчеркнули здесь гласные в четных слогах.) Что касается падежа, то удовлетворительное определение этого понятия, хотя бы и неверное, отсутствовало вовсе (хотя на интуитивном уровне лингвисты понимали, что это такое). Тогда же Колмогоров сообщил мне основные идеи определений названных понятий. Когда он сам пришел к этим определениям, мне неизвестно, однако ясно, что к моменту разговора он ими уже располагал.

Достоинна быть отмеченной следующая характерная черта Колмогорова: он щедро делился своими идеями, нередко по поводу довольно случайному. Некоторые из этих идей были им выношены, как определения ямба и падежа, некоторые же возникли внезапно, как это произошло на моих глазах 9 сентября 1954 года на семинаре «Рекурсивная арифметика», которым он пригласил меня руководить вместе с ним; тогда, при обсуждении темы конструктивных ординалов, Колмогоров предложил систему понятий, легших в основу в то время еще не существовавшей **теории нумераций** (названная дата и есть день рождения этой теории). Боюсь, что большинство идей, высказанных Колмогоровым таким ненавязчивым способом, остались невоспринятыми, непонятыми, не оцененными и, тем самым, навеки пропали. Что до определения падежа, то то, что я сумел понять и запомнить, было опубликовано мною в 1957 году в вышедшем на стеклографе и с грифом «На правах рукописи» 5-м номере «Бюллетеня Объединения по машинному переводу»; статья называ-

лась «К определению падежа по А. Н. Колмогорову».

Великий лингвист Андрей Анатольевич Зализняк в § 2.3 — 2.4 своего классического труда «Русское именное словоизменение» (М.: Наука, 1967) уточнил конструкцию Колмогорова и переложил ее на более наглядный и более понятный его коллегам язык. А в § 6.20 названного труда читателя встречаются три теоремы. Формулировки и доказательства их совершенно математические. Теоремы эти нужны их автору для обоснования того, что предложенный им способ описания устройства ударения в парадигмах русских существительных оптимален. Понятия предыдущей фразы нуждаются в разъяснении. **Парадигмой** данного слова называется совокупность всех его словоформ. Каждому слову соответствует определенное распределение ударений по его парадигме; это распределение называется **схемой ударения** рассматриваемого слова. Схем ударения (особенно с учетом форм множественного числа) несколько десятков и они довольно разнообразны. Желательно найти способ их описать наиболее экономно. Вот Зализняк с помощью своих теорем и устанавливает, что способ, который он предлагает, является наиболее экономным. Предложенный Зализняком способ основан на введенном им новом понятии — понятии **условного ударения**. Поясним на примере. Во всех косвенных падежах слова *стол* ударение стоит на окончании; в именительном падеже окончания вроде бы нет, а слово односложно, поэтому спрашивать, где здесь ударение, бессмысленно. Но можно считать, что и в именительном падеже слова *стол* имеется окончание, только мы его не видим, и именно на нем стоит условное ударение. В других же падежах условное ударение совпадает с действительным. А тогда можно сказать, что ударение (условное!) во всех падежах слова *стол* стоит на окончании. Это явно короче, чем говорить, что в одних падежах — одно правило, а в других — другое.

Математика нужна в лингвистике всюду, скажем, в фонетике, где звуки описываются некими графиками и математическими формулами, и в синтаксисе, где синтаксическая структура описывается

некоторой геометрической картинкой, я уж не говорю о всевозможных современных поисковых системах. Когда вы что-то ищете в Яндексе или в Гугле, то там применяются очень тонкие современные методы лингвистики (в частности, разработанный Зализняком способ описания системы словоизменения), лингвистические алгоритмы представления синтакси-

ческой структуры предложений и, что очень важно, лингвистическая статистика. Без нее развитие лингвистики весьма затруднительно, так как совершенно ясно, что нужно понимать, что встречается часто, а что — редко; а для этого очень важно понимать, что именно мы считаем.



ПАДЕЖИ НА КАРТЕ МИРА

Рассуждать о падежах языков мира не просто. Сложно определить уже само понятие «падеж». Даже в привычном для нас русском языке. Кроме того, падежи в различных языках мира могут быть устроены совсем не так, как в русском.

Не имея здесь возможности углубляться в рассуждения о падежах, предлагаем читателям карту, на которой отмечено количество падежей в различных языках мира. Она охватывает 237 языков.

Как видно из карты, отсутствие падежей — довольно частое явление. Напри-

мер, их нет во вьетнамском, итальянском, китайском языках. С другой стороны, есть языки с богатой падежной системой. Например, в русском языке 8 падежей, в финском — более 10, в венгерском — более 15. Есть языки, в которых более 40 падежей, например табасаранский.

Подробно с этой картой можно ознакомиться во Всемирном атласе языковых структур (<https://wals.info/>). Там же можно найти много интересной информации о различных свойствах языков.



○ Нет падежей	100
● 2–4 падежа	41
● 5–7 падежей	49

● 8–9 падежей	23
● 10 и более падежей	24

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: *math@kvant.ras.ru* и *phys@kvant.ras.ru* соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2742 – M2744 и M2745а предлагались на XLIV Турнире городов и на LXXXVI Московской математической олимпиаде.

Автор задач Ф2749–Ф2752 – В.Плис.

Задачи M2742–M2745, Ф2749–Ф2752

M2742. Дано целое число $h > 1$. Назовем положительную обыкновенную дробь (не обязательно несократимую) *хорошей*, если сумма ее числителя и знаменателя равна h . Скажем, что число h *замечательное*, если каждую положительную обыкновенную дробь, знаменатель которой меньше h , можно выразить через хорошие дроби (не обязательно различные) с помощью операций сложения и вычитания. Докажите, что h замечательное тогда и только тогда, когда оно простое.

(Напомним, что обыкновенная дробь – это отношение целого числа к натуральному.)

Т. Казыцина

M2743. Периметр треугольника ABC равен 1 (рис. 1). Окружность ω касается стороны BC , продолжения стороны AB в точке P и продолжения стороны AC в точке Q . Прямая, проходящая через середины сторон AB и AC , пересекает описанную окружность треугольника APQ в точках X и Y . Найдите длину отрезка XY .

Д. Бродский

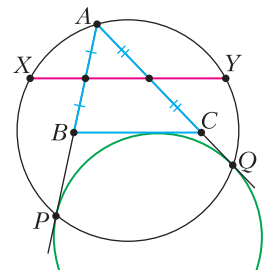


Рис. 1

нскую окружность треугольника APQ в точках X и Y . Найдите длину отрезка XY .

M2744. Правильный 100-угольник разрезали на не-

сколько параллелограммов и два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны.

А. Юран

M2745. Даны две последовательности из букв А и Б, в каждой из которых по 100 букв. За одну операцию разрешается вставить в какое-то место последовательности (возможно, в начало или в конец) одну или несколько одинаковых букв или убрать из последовательности одну или несколько подряд идущих одинаковых букв. а) Докажите, что из первой последовательности можно получить вторую не более чем за 100 операций.

б*) При каком наименьшем k из любой первой последовательности можно получить любую вторую не более чем за k операций?

В. Новиков

Ф2749. Пловец трижды переплывает реку. Движение пловца прямолинейное. Скорость пловца в подвижной системе отсчета, связанной с водой, во всех заплывах одинакова по модулю. В двух первых заплывах (рис. 2) A – точка старта, B – точка фини-

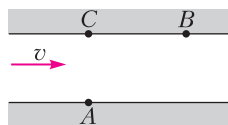


Рис. 2

ша (v – неизвестная скорость течения реки). Ширина реки $AC = d = 70$ м, снос, т.е. расстояние, на которое пловец смещается вдоль реки к моменту достижения противоположного берега, $CB = L = 240$ м. Продолжительность первого заплыва $T_1 = 192$ с, продолжительность второго заплыва $T_2 = 417$ с.

1) Найдите скорости v_1 и v_2 пловца в лабораторной системе отчета в первом и втором заплывах.

2) Найдите скорость u пловца в подвижной системе отчета, связанной с водой.

В третьем заплыве пловец стартует из точки A и движется так, что снос минимальный.

3) Найдите продолжительность T_3 третьего заплыва.

Ф2750. Лента транспортера, предназначенного для подъема грузов, образует с горизонтальной плоскостью угол α такой, что $\sin \alpha = 0,8$ (рис. 3). В первом опыте

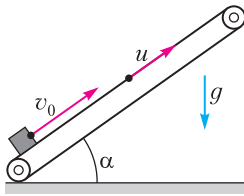


Рис. 3

небольшую коробку ставят на *покоящуюся* ленту транспортера и сообщают коробке начальную скорость $v_0 = 4$ м/с.

Коэффициент трения скольжения коробки по ленте $\mu = 1/3$. Движение коробки прямолинейное.

1) За какое время T после старта коробка пройдет в первом опыте путь $s = 1$ м?

Во втором опыте коробку ставят на ленту транспортера, *движущуюся* со скоростью $u = 2$ м/с, и сообщают коробке скорость $v_0 = 4$ м/с.

2) На каком расстоянии L от точки старта скорость коробки во втором опыте уменьшится до $u = 2$ м/с?

3) На какой высоте H , отсчитанной от точки старта, скорость коробки во втором опыте станет равной нулю?

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Все кинематические величины измерены в лабораторной системе отчета.

Ф2751. Воду нагревают на электроплитке. Начальная температура воды $t_0 = 14$ °С, объем воды $V = 2$ л. Сопротивление спирали электроплитки $R = 20$ Ом, сила тока в

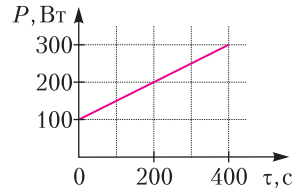


Рис. 4

спирали $I = 5$ А. Зависимость мощности P тепловых потерь от времени τ представлена на рисунке 4.

1) Найдите мощность P_n нагревателя.

2) Через какое время τ_1 после начала нагревания температура воды станет равной $t_1 = 25$ °С?

Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·°С).

Ф2752. В гладкой горизонтальной плоскости сделана полусферическая лунка радиусом R , в которой на одном горизонтальном уровне

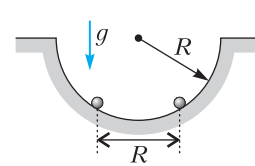


Рис. 5

удерживаются два заряженных шарика (рис. 5). Масса каждого шарика m , расстояние между шариками R . Ша-

рики одновременно отпускают. Отсчитанная от края лунки максимальная высота, на которую поднимается в полете каждый шарик, равна R . Шарики отрываются от гладких стенок лунки у ее краев.

1) С какой скоростью v движется каждый шарик за мгновение до отрыва от края лунки?

2) Найдите заряд Q каждого шарика.

3) Найдите наибольшую скорость u , с которой растет расстояние между шариками после вылета из лунки.

Соударения шариков с горизонтальной плоскостью абсолютно упругие. Ускорение свободного падения g . Коэффициент пропорциональности в законе Кулона k .

Решения задачи М2730–М2733, Ф2737–Ф2740

М2730. На каждой клетке доски 3×6 лежит по одной монетке. Известно, что какие-то две монетки, лежащие на соседних по стороне клетках, фальшивые, т.е. весят поровну, но легче настоящих, а остальные – настоящие. Как найти обе фальшивые монеты за три взвешивания

на двухчашечных рычажных весах без гирь?

Приведем алгоритм нахождения доминошки из двух клеток, в клетках которой находятся фальшивые монеты.

Первым взвешиванием взвесим 5 монет, лежащих в красных клетках (см. рисунок), и 5 монет, лежащих в синих клетках.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18

1) Пусть одна из чаш, например с монетами

из красных клеток, перевесила. Это означает, что у искомой доминошки хотя бы одна из клеток – синяя. Вторым взвешиванием взвешиваем монеты (с клеток) 2 и 14.

1.1) Пусть одна из монет 2 и 14 перевесила, тогда другая – фальшивая. Пусть, например, монета 2 фальшивая. Тогда искомая доминошка – либо (1, 2), либо (2, 3), либо (2, 8). Третьим взвешиванием взвесим монеты 1 и 3. Если одна из них легче, то она фальшивая, если они равны по весу, то монета 8 – фальшивая. В любом случае находим искомую доминошку.

1.2) Пусть монеты 2 и 14 равны по весу. Тогда искомая доминошка – либо (1, 7), либо (7, 8), либо (7, 13), в частности, монета 7 точно фальшивая. Далее действуем аналогично случаю 1.1 – взвесим монеты 1 и 13 и найдем среди монет 1, 8, 13 вторую фальшивую.

2) Пусть в первом взвешивании весы показали равенство, т.е. суммарный вес монет с красных клеток равен суммарному весу монет с синих клеток. Так как доминошка не содержит одновременно красную и синюю клетки, это означает, что искомая доминошка состоит из двух зеленых клеток. Тогда вторым взвешиванием взвесим пару монет 3, 4 с парой 15, 16.

2.1) Пусть одна из пар перевесила, для определенности, пусть пара 3, 4 легче. Тогда искомая доминошка содержит хотя бы одну из клеток 3, 4. Значит, искомая доминошка – либо (3, 4), либо (3, 9), либо (4, 10). Третьим взвешиванием взвешиваем монеты 9 и 10. Если одна из них легче, то она – в искомой доминошке, поэтому мы ее однозначно определяем; если же монеты 9 и 10 равны по весу, то

искомая доминошка – (3, 4).

2.2) Пусть пары 3, 4 и 15, 16 весят одинаково. Поскольку нет доминошки, содержащей по клетке из каждой пар, это означает, что все монеты 3, 4, 15, 16 – настоящие, значит, искомая доминошка – либо (8, 9), либо (9, 10), либо (10, 11). Третьим взвешиванием взвешиваем монеты 8 и 11. Если одна из них легче, то она – в искомой доминошке, тем самым, мы эту доминошку однозначно определяем; если же монеты 8 и 11 равны по весу, то искомая доминошка – (9, 10).

Итак, во всех случаях искомая доминошка с двумя фальшивыми монетами найдена. Задача решена.

В завершение отметим, что в условии задачи ровно 27 возможных исходов (27 положений доминошки на доске 3×6). Это соответствует ровно $27 = 3^3$ различным исходам при трех взвешиваниях (в каждом взвешивании – три возможных исхода: «перевесила левая чаша», «перевесила правая чаша» или «равенство»). Поэтому в любом правильном алгоритме ветвление на каждом шаге должно быть устроено так, чтобы в каждом из трех возможных исходов взвешивания оставалось равное количество подходящих положений искомой доминошки.

П.Кожевников

M2731. В ряд написаны 2023 натуральных числа. Первое число равно 12, а каждое число, начиная с третьего, либо равно произведению двух предыдущих чисел, либо равно предыдущему числу, увеличенному на 4. Какое наибольшее количество точных квадратов может быть среди данных 2023 чисел?

Ответ: 1011.

Обозначим данные числа $a_0 = 12, a_1, a_2, \dots, a_{2022}$. Покажем, что в каждой паре соседних чисел не более одного точного квадрата. Предположим противное и найдем наименьшее $n \geq 1$, при котором оба числа a_n, a_{n+1} являются квадратами натуральных чисел. Заметим, что нет двух квадратов натуральных чисел, разность которых равна 4 (разность между соседними квадратами k^2 и $(k+1)^2$ больше 4 при

$k \geq 2$). Поэтому $a_{n+1} = a_n + 4$ невозможно. Тогда $a_{n+1} = a_n a_{n-1}$, следовательно, a_{n-1} тоже является точным квадратом. Получаем, что a_{n-1} и a_n являются квадратами натуральных чисел. При $n \geq 2$ это противоречит выбору n , а $n = 1$ невозможно, так как $a_0 = 12$ – не точный квадрат.

Итак, по доказанному, в каждой из пар (a_{2k-1}, a_{2k}) , $k = 1, 2, \dots, 1011$, не более одного точного квадрата, поэтому всего точных квадратов не более 1011.

Приведем пример, в котором будет 1011 точных квадратов. Положим $a_1 = 5$, и пусть $a_{2k} = a_{2k-1} + 4$, $a_{2k+1} = a_{2k} a_{2k-1}$ для всех k . Покажем, что все члены с четными номерами, начиная с a_2 , будут точными квадратами. Действительно, $a_2 = 9$ – точный квадрат, а при $k \geq 2$

$$\begin{aligned} a_{2k} &= a_{2k-1} + 4 = a_{2k-2} a_{2k-3} + 4 = \\ &= (a_{2k-3} + 4) a_{2k-3} + 4 = (a_{2k-3} + 2)^2. \end{aligned}$$

П. Кожевников

M2732. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC . Отложим на лучах AC и BC , соответственно, отрезки AC_a и BC_b , равные по длине AB (рис. 1). Пусть O_c – центр окружности $(CC_a C_b)$. Аналогично определим точки O_a и O_b . Докажите, что точка O является ортоцентром треугольника $O_a O_b O_c$.

Проведем в треугольнике ABC биссектрисы, пусть они пересекаются в точке I и вторично пересекают описанную окружность в точках A', B', C' – серединах дуг BC, CA, AB (рис. 2).

Из построения точки C_a следует, что треугольники $BA A'$ и $C_a A A'$ равны (симметричны относительно биссектрисы AA'), поэтому $\angle AC_a A' = \angle ABA'$, а из вписанности следует, что $\angle A C A' = 180^\circ - \angle ABA'$. Видим, что в треугольнике $A' C C_a$ равны углы при стороне CC_a , значит, он равнобедренный: $A' C = A' C_a$. Поэтому точка A' , как и O_c , лежит на серединном перпендикуляре к CC_a ; таким образом, $A' O_c \perp AC$. Аналогично, $B' O_c \perp BC$. Вспомним, что A' и B' – середины дуг, поэтому лежат на серединных перпендикулярах к BC и AC . Отсюда $OA' \perp BC$ и $OB' \perp AC$, следова-

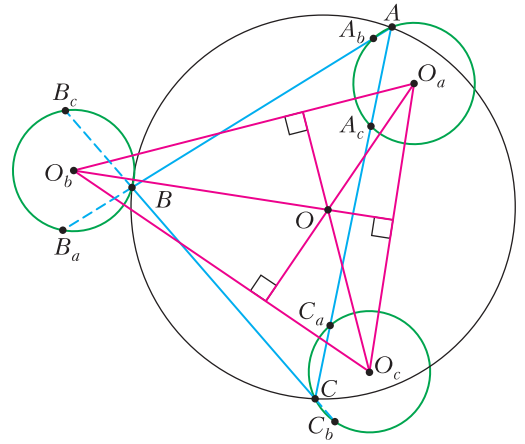


Рис. 1

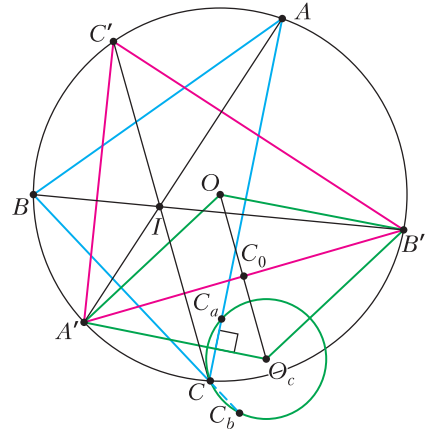


Рис. 2

тельно, $OA' \parallel B'O_c$ и $OB' \parallel A'O_c$. Значит, $OA'O_c B'$ – параллелограмм, а поскольку $OA' = OB' = R$, $OA'O_c B'$ – ромб. Получается такое описание точки O_c : O_c симметрична точке O относительно $A'B'$ или относительно середины C_0 отрезка $A'B'$.

Аналогичное описание получаем для точек O_a, O_c . В результате находим, что треугольник $O_a O_b O_c$ гомотетичен треугольнику $A_0 B_0 C_0$ (т.е. серединному треугольнику треугольника $A'B'C'$) с центром O и коэффициентом 2. Но O – ортоцентр треугольника $A_0 B_0 C_0$ (скажем, $C_0 O \perp A_0 B_0$, поскольку $C_0 O \perp AB$ и $AB \parallel A_0 B_0$). Значит, O – также ортоцентр треугольника $O_a O_b O_c$, что и требовалось доказать.

Отметим еще несколько свойств рассматриваемой конструкции. Как известно (и несложно доказать), AA', BB', CC' – высо-

ты в треугольнике $A'B'C'$; точки C и I симметричны относительно $A'B'$ и т.д. Кроме того, $OC_0 = IC'/2$ (из гомотетии треугольника $A'B'C'$ и его серединного треугольника). Отсюда $\overline{OO_c} = \overline{CI}$. Из этого и аналогичного равенств следует, что треугольники $A'B'C'$ и $O_aO_bO_c$ центрально симметричны, и их центр симметрии – середина отрезка IO . Из параллелограмма $OC'I O_c$ получаем, что $IO_c \perp AB$ и $IO_c = R$. Видим, что прямая O_cC является отражением прямой OI относительно $A'B'$. Как известно, образы прямой, проходящей через ортоцентр треугольника, при отражении относительно прямых, содержащих его стороны, проходят через одну точку, лежащую на описанной окружности. Поэтому прямые AO_a, BO_b, CO_c пересекаются в одной точке, лежащей на окружности (ABC) . Также из симметрии $O_cC = OI$, поэтому радиус окружности (CC_aC_b) равен OI . То же можно сказать об окружностях (AA_bA_c) и (BB_bB_c) . Окружность (CC_aC_b) симметрична относительно серединного перпендикуляра OO_c к $A'B'$ и, следовательно, проходит через точку, симметричную C относительно OO_c (эта точка диаметрально противоположна точке C'). В завершение упомянем еще одну в чем-то схожую конструкцию (задача об этой конструкции была предложена М.Тимохиным на 25-м Турнире имени А.П. Савина). Пусть в остроугольном треугольнике ABC (рис. 3) на прямых AB и AC отмечены отличные от вершин треугольника точки A_c и A_b соответственно так, что $BA_b = BC = CA_c$. Точка O_a – центр окружности AA_bA_c . Аналогично определяются

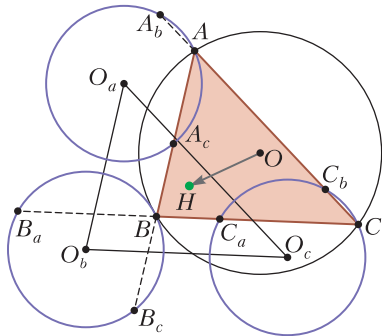


Рис. 3

точки O_b и O_c . Тогда треугольники $O_aO_bO_c$ и ABC равны, причем $O_aO_bO_c$ получается из ABC параллельным переносом на вектор \overline{OH} , где O – центр окружности (ABC) , а H – ортоцентр треугольника ABC .

А.Заславский, П.Кожевников

M2733. Дан выпуклый 51-угольник. Для каждой его вершины и каждой диагонали, не содержащей эту вершину, отметим красным точку, симметричную вершине относительно середины диагонали. Докажите, что строго внутри многоугольника лежит не более 20400 красных точек.

Рассмотрим вершину и диагональ либо сторону 51-угольника, не содержащую ее, они определяют треугольник с вершинами в трех вершинах 51-угольника. Рассмотрим каждый такой треугольник ABC .

Вначале докажем, что среди трех красных точек – отражений вершин A, B, C относительно середин сторон BC, CA, AB , не более одной попадает внутрь 51-угольника. Действительно, отраженные красные точки A', B', C' таковы, что A, B, C – середины отрезков $B'C', C'A', A'B'$ соответственно (рис. 1). Предположив, например, что A' и B' строго внутри выпуклого 51-угольника, мы тогда получим, что и C находится строго внутри 51-угольника, что неверно. Проведенное выше рассуждение доказывает, что красных точек, лежащих строго внутри 51-угольника, не более C_{51}^3 , так как каждому из C_{51}^3 треугольников соответствует не более одной такой красной точки.

Далее найдем еще не меньше $C_{51}^2/3$ так называемых *пустых* треугольников, которым не будет сопоставлено ни одной крас-

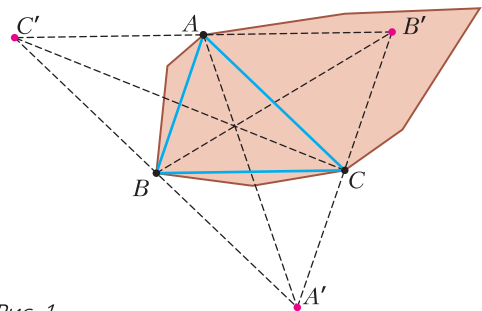


Рис. 1

ной точки. Рассмотрим сторону или диагональ AB нашего 51-угольника и опорные прямые l_1 и l_2 нашего многоугольника, параллельные прямой AB (рис. 2). Пусть

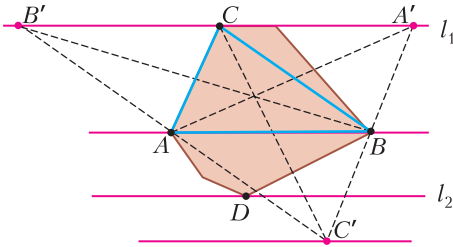


Рис. 2

они проходят через вершины C и D соответственно. Не умаляя общности, считаем, что l_1 не ближе к прямой AB , чем l_2 . Тогда треугольник ABC как раз такой, что ему не будет сопоставлено ни одной красной точки. Действительно, отраженные точки A' и B' лежат на прямой l_1 (т.е. не внутри 51-угольника), а C' лежит по другую сторону, чем прямая AB , относительно прямой l_2 , т.е. тоже вне 51-угольника. Итак, каждой из C_{51}^2 сторон или диагоналей сопоставлен нужный нам треугольник ABC . Этот треугольник сопоставлен не более чем трем отрезкам, таким образом, действительно найдено не менее $C_{51}^2/3$ пустых треугольников.

Итак, нами показано, что количество красных точек, лежащих внутри 51-угольника, не превышает $C_{51}^3 - C_{51}^2/3 = 20400$.

П. Кожевников

Ф2737. *Имеется поджатая пружина – такая пружина начинает изменять свою длину только при некотором пороговом значении растягивающей силы. Пружину подвешивают вертикально. Ее длина при двух различных массах подвешиваемых грузов M_1 и M_2 равна L_1 и L_2 соответственно. При этом все витки пружины уже разжаты. Длина ненагруженной пружины L_0 меньше L_1 и L_2 , масса пружины равна m . Определите коэффициент упругости пружины, величину силы поджатия и зависимость длины пружины от величины растягивающей силы при горизонтальном расположении пружины.*

Рассмотрим общий вариант задачи. Определим зависимость длины пружины от массы подвешиваемого груза. Пусть при некоторой подвешиваемой массе M верхняя часть пружины освободилась от поджатия (рис. 1). Для определения длины этой части можно записать простое соотношение – груз и остаток пружины создают усилие, равное F :

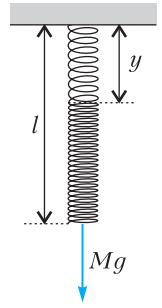


Рис. 1

$$\left(M + \frac{m}{l_0}(l - y) \right) g = F,$$

где l_0 – длина пружины в горизонтальном положении. В относительных единицах $\frac{F}{mg} = f$ и $\frac{M}{m} = \mu$ соотношение принимает вид

$$\left(\mu + \frac{l}{l_0} - \frac{y}{l_0} \right) = f.$$

Длина освобожденного участка пружины в отсутствие деформации

$$y_0 = y - (l - l_0) = l_0 \left(\frac{y}{l_0} - \frac{l}{l_0} + 1 \right) = l_0 (1 + \mu - f).$$

Этот «освобожденный» участок растянется под собственным весом в соответствии с известной формулой $\delta = \frac{mg}{2k}$ на величину

$$\begin{aligned} \Delta l = l - l_0 &= \frac{mg}{l_0} \frac{(l_0 (1 + \mu - f))^2}{2kl_0} = \\ &= \frac{mg}{2k} (1 + \mu - f)^2 = \delta (1 + \mu - f)^2. \end{aligned}$$

Эта формула определяет зависимость удлинения пружины от нагрузки μ в интервале $(0, f)$. Очевидно, что при нагрузке, превышающей силу поджатия f , деформация пружины должна подчиняться линейному закону Гука

$$\Delta l = a + b\mu.$$

«Сождем» две формулы для Δl в точке $\mu = f$. Обе функции (квадратичная и линейная) в этой точке должны иметь равные амплитуды и равные первые производные. После несложных вычислений

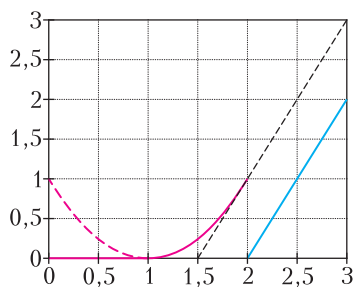


Рис. 2

График этой зависимости показан на рисунке 2 сплошной синей линией.

А.Власов

Ф2738. В вакууме при отсутствии внешних полей две маленькие частицы с равными массами m и зарядами q и $-q$ движутся по окружности радиусом R с такими скоростями v , что $v/R = \omega_0$. В пространстве очень медленно создается однородное электрическое поле. Вектор напряженности поля \vec{E} всегда перпендикулярен плоскости, в которой располагалась траектория частиц до появления поля. При какой максимальной величине напряженности электрического поля система еще сохраняет устойчивость? Определите в момент, предшествующий распаду системы, кинематические параметры системы: расстояние между частицами и угловую скорость вращения, а также угол поворота отрезка, соединяющего эти частицы, по отношению к плоскости, в которой располагались траектории частиц до появления поля.

При включении электрического поля система поворачивается и частицы начинают вращаться по смещенным круговым орбитам (рис. 1). Будем считать, что после включения поля изменяются расстояние между частицами и угловая скорость вращения. Но сохраняется момент импульса системы, так как средний (за период вращения) момент сил равен нулю. Можно сделать предположение, что при некоторой величине напряженности электрического поля вращающийся диполь «разрывается» (система становится неустойчивой). Записываем уравнения динамики для начального и конечного состояний, силовое равновесие по вертикальной оси и закон сохранения момента импульса:

получаем выражение для линейного участка функции:

$$\Delta l = \delta(1 - 2f + 2\mu).$$

Общий график зависимости удлинения поджатой пружины от нагрузки (при $\delta = 1$, $f = 2$) представлен на рисунке 2. Здесь удлинение пружины начинается при нагрузке $\frac{M}{m} = \mu = 1$, когда общая сила тяжести груза и пружины освобождает от сжатия верхние витки пружины. Квадратичная область зависимости удлинения от нагрузки заканчивается при $\mu = f = 2$. При данной нагрузке уже вся пружина освобождается от поджатия и начинается область линейного растяжения. Данные в условии задачи относятся к линейной области. Поэтому для определения параметров пружины (k и F) можно записать систему уравнений для двух нагрузок:

$$\Delta l_1 = \delta(1 - 2f + 2\mu_1),$$

$$\Delta l_2 = \delta(1 - 2f + 2\mu_2).$$

После ее несложного решения и преобразования получаем коэффициент упругости и силу поджатия пружины:

$$k = g \frac{M_2 - M_1}{L_2 - L_1},$$

$$F = g \left(\frac{m}{2} - \frac{M_2 \Delta L_1 - M_1 \Delta L_2}{L_2 - L_1} \right).$$

При горизонтальном положении пружины (при отсутствии гравитации) ее растяжение начнется только при нагрузке, превышающей силу поджатия F , и будет определяться уравнением

$$\Delta l = 2\delta(\mu - f).$$

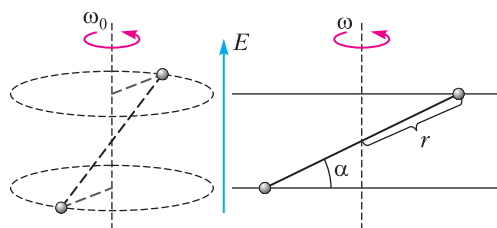


Рис. 1

$$k \frac{q^2}{4R^2} = m\omega_0^2 R,$$

$$k \frac{q^2}{4r^2} \cos \alpha = m\omega^2 r \cos \alpha,$$

$$k \frac{q^2}{4r^2} \sin \alpha = qE = \beta k \frac{q^2}{4R^2},$$

$$2mR^2 \cdot \omega_0 = 2mr^2 \cos^2 \alpha \cdot \omega.$$

Здесь для упрощения математики в уравнении вертикального равновесия мы ввели параметр β (силу взаимодействия зарядов с электрическим полем сравнили с первоначальной силой взаимодействия зарядов). После преобразования получаем

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \left(\frac{R}{r}\right)^3,$$

$$x^9 - x^8 + \beta^2 = 0,$$

где $x = \sqrt{\frac{R}{r}}$. Проблему определения максимального коэффициента β решим на основе графика функции левой части второго уравнения (рис. 2). Параметр β только поднимает график функции без смещения ее минимума. Координату минимума определим методом производной:

$$9x^8 - 8x^7 = x^7(9x - 8) = 0, \quad x = \frac{8}{9}.$$

Подставив это значение x во второе преобразование уравнение, определяем максимальное значение β , при котором это урав-

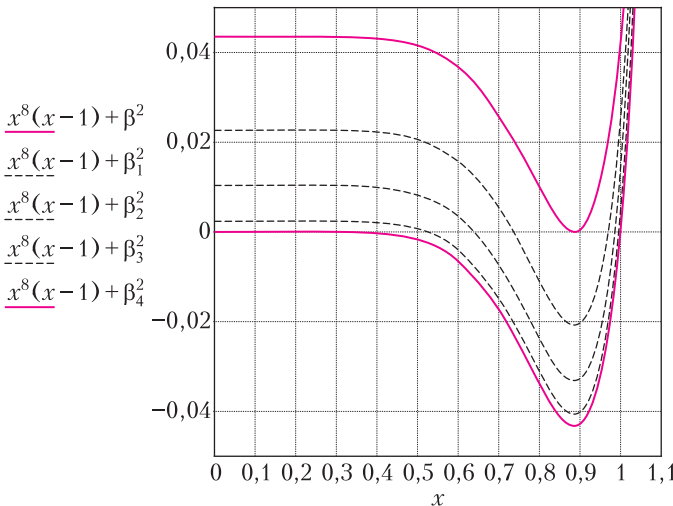


Рис. 2

нение еще имеет решение:

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^8 \left(1 - \frac{8}{9}\right)} = \left(\frac{8}{9}\right)^4 \cdot \frac{1}{3} \approx 0,208.$$

Максимальная величина вектора напряженности поля равна

$$E = \beta k \frac{q}{4R^2}.$$

В итоге в критической точке

$$\frac{r}{R} = \left(\frac{9}{8}\right)^2 \approx 1,27, \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \left(\frac{8}{9}\right)^3 \approx 0,7,$$

$$\sin \alpha = \beta \left(\frac{r}{R}\right)^2 = 0,208 \cdot 1,27 \approx 0,264,$$

$$\alpha \approx 15,3^\circ.$$

А.Власов

Ф2739. Звуковой локатор сделал запись сигнала от низко летящего реактивного снаряда (крылатой ракеты). Временной график сигнала представлен на рисунке 1. График состоит из двух ветвей. Сигнал раздваивается. Локатор имеет возможность фиксировать интенсивность и угловые координаты нескольких сигналов. В конечных точках графиков имеются сильные всплески интенсивности сигнала (от выстрела и взрыва снаряда), которые на графиках не показаны. Угловое расстояние между конечными сигналами оказалось равным $\pi/2$. По данным графика определите координаты установки, осуществившей выстрел, и координаты падения снаряда. Для упрощения расчетов считайте скорость снаряда постоянной и равной $3v$, где $v = 340$ м/с – скорость звука. Затуханием (рассеянием) звукового сигнала следует пренебречь.

Задание углового расстояния между конечными сигналами, равное $\pi/2$, существенно упрощает математику решения. Очевидно, что координатная картинка (вид сверху на траекторию движения) должна выглядеть следующим образом (рис. 2). Начало системы коор-

динатной системы координат находится в начале системы координат. Начало системы координат находится в начале системы координат. Начало системы координат находится в начале системы координат.

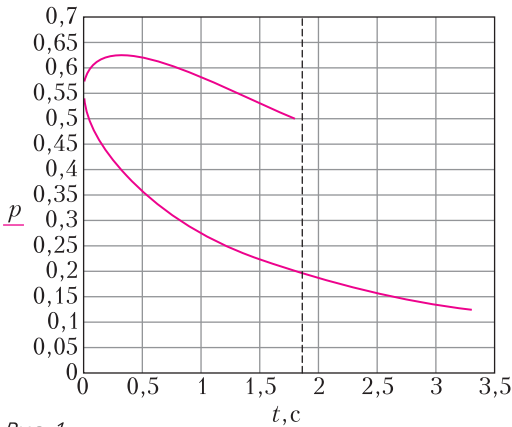


Рис. 1

динат помещено в точке нахождения локатора. Орудие находится в точке b (на оси y), точка падения снаряда находится в точке a (на оси x). Начало сигнала приходит из точки c , в которой проекция скорости снаряда на линию приема становится равной скорости звука. Далее происходит локация от предыдущих точек звука и последующих. Если пренебречь затуханием звукового сигнала, то ослабление звука обусловлено только сферическим расширением, и для конечных точек справедливо следующее:

$$p_b = p_0 \frac{d}{b^2}, p_a = p_0 \frac{d}{a^2}, \frac{p_a}{p_b} = \left(\frac{b}{a}\right)^2, \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{p_a}{p_b}},$$

где d – некоторая константа. По звуковому графику находим $p_a \approx 0,5$, $p_b \approx 0,126$ и получаем

$$\frac{b}{a} \approx 1,99 \approx 2.$$

Теперь запишем математику геометрии и кинематики для точки c :

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} \varphi, \frac{a-x}{y} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2},$$

$$3v \cos(\alpha + \varphi) = v,$$

$$\varphi = \arccos \frac{1}{3} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} =$$

$$= 70,53^\circ - 26,57^\circ \approx 43,964^\circ.$$

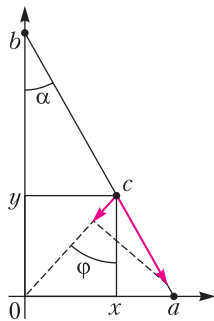


Рис. 2

Отсюда можно найти

$$x = a \frac{2}{2 + \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}} = a \cdot 0,6586,$$

$$y = a \cdot 0,683.$$

Затем вычислим момент времени прихода сигнала от точки a :

$$t_a = \frac{a\sqrt{5}}{3v} + \frac{a}{v} - \left(\frac{x}{3v \sin \alpha} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{v} \right) =$$

$$= \frac{a}{v} \left(\frac{\sqrt{5}}{3} + 1 - \frac{0,659}{3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}} - \sqrt{0,659^2 + 0,683^2} \right) \approx$$

$$\approx 0,3051 \frac{a}{v}.$$

Для вычисления a определяем время t_a по графику: $t_a \approx 1,8$ с. В итоге получаем

$$a = \frac{1}{0,3051} v t_a \approx 2006 \text{ м} \approx 2000 \text{ м}.$$

Соответственно, $b \approx 4000$ м. Выстрел произведен с расстояния 4 километра.

А.Власов

Ф2740. Грузики массами m_1 и m_2 двух математических маятников имеют малые размеры в сравнении с длинами L_1 и L_2 нитей, на которых они подвешены. В положениях равновесия эти грузики находятся на одном горизонтальном уровне, при этом расстояние между ними равно L_0 (рис. 1). Эти грузики соединили жестким невесомым стержнем длиной L_0 . Из положения равновесия грузикам придали небольшую по величине скорость, направленную вдоль соединяющего грузики стержня. Какова частота колебаний (малых) этой механической системы?

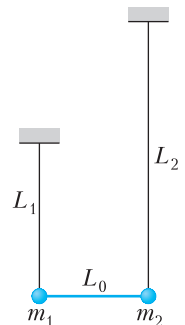


Рис. 1

Для удобства введем правую прямоугольную декартову систему координат с началом в точке O , совпадающей с грузиком массой m_1 в положении

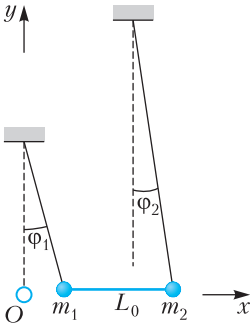


Рис. 2

равновесия, с горизонтальной осью x , направленной в сторону грузика массой m_2 , и осью y , направленной вертикально вверх (рис. 2). Также введем отсчитываемые против часовой стрелки от вертикалей углы φ_1 и φ_2 , задающие положения нитей в отклоненном состоянии. В плоскости xy грузики имеют координаты

$$(x_1, y_1) = (L_1 \sin \varphi_1, L_1 (1 - \cos \varphi_1)),$$

$$(x_2, y_2) = (L_0 + L_2 \sin \varphi_2, L_2 (1 - \cos \varphi_2)).$$

Вся эта затея с декартовыми и угловыми координатами нужна ровно для того, что выразить через них длину стержня:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = L_0^2,$$

$$(L_0 + L_2 \sin \varphi_2 - L_1 \sin \varphi_1)^2 + (L_2 (1 - \cos \varphi_2) - L_1 (1 - \cos \varphi_1) - L_0)^2 = 0. \quad (1)$$

Полагая отклонения нитей от вертикалей, а вместе с ними и углы φ_1 и φ_2 малыми, воспользуемся соотношениями

$$\sin \varphi_j = \varphi_j, \quad \cos \varphi_j = 1 - \frac{\varphi_j^2}{2}$$

и сохраним в равенстве (1) только слагаемые первого порядка малости по φ_1 и φ_2 . После преобразований получим

$$L_2 \varphi_2 - L_1 \varphi_1 = 0. \quad (2)$$

Выражения для кинетической и потенциальной энергии системы представим в виде

$$E_k = \frac{1}{2} (m_1 L_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 L_2^2 \dot{\varphi}_2^2),$$

$$E_{\text{п}} = (m_1 L_1 (1 - \cos \varphi_1) + m_2 L_2 (1 - \cos \varphi_2)) g,$$

где $\dot{\varphi}_1$ и $\dot{\varphi}_2$ – угловые скорости вращения нитей, g – ускорение силы тяжести, и запишем закон сохранения энергии:

$$E = E_k + E_{\text{п}} = \frac{1}{2} (m_1 L_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 L_2^2 \dot{\varphi}_2^2) +$$

$$+ (m_1 L_1 (1 - \cos \varphi_1)) + m_2 L_2 (1 - \cos \varphi_2) = \text{const.}$$

Полагая и в дальнейшем углы φ_1 и φ_2 малыми, представим решение уравнения (2) в параметрическом виде:

$$\varphi_1 = \frac{L_2}{L_0} \varphi, \quad \varphi_2 = \frac{L_1}{L_0} \varphi,$$

где φ – параметр. Как можно видеть, этот параметр мал, когда углы φ_1 и φ_2 малы. При этом кинетическая энергия после преобразований запишется так:

$$E_k = \frac{(m_1 + m_2) L_1^2 L_2^2}{2 L_0^2} \dot{\varphi}^2,$$

а потенциальная энергия, с точностью до слагаемых второго порядка по малым углам, запишется так:

$$E_{\text{п}} = \frac{(m_1 L_2 + m_2 L_1) L_1 L_2 g}{2 L_0^2} \varphi^2.$$

Закон сохранения энергии для малых колебаний теперь можно представить в виде

$$\frac{(m_1 + m_2) L_1^2 L_2^2}{2 L_0^2} \dot{\varphi}^2 + \frac{(m_1 L_2 + m_2 L_1) L_1 L_2 g}{2 L_0^2} \varphi^2 = \text{const,}$$

или

$$\frac{(m_1 + m_2) L_1^2 L_2^2}{2 L_0^2} \left(\dot{\varphi}^2 + \frac{(m_1 L_2 + m_2 L_1) g}{(m_1 + m_2) L_1 L_2} \varphi^2 \right) = \text{const.}$$

Здесь коэффициент при φ^2 – это квадрат частоты малых колебаний:

$$\omega^2 = \frac{(m_1 L_2 + m_2 L_1) g}{(m_1 + m_2) L_1 L_2}.$$

Если $m_1 = m_2$, то

$$\omega^2 = \frac{(L_2 + L_1) g}{2 L_1 L_2},$$

т.е. частота от масс не зависит. Если $L_1 = L_2 = L$, то частота приобретает вид

$$\omega^2 = \frac{g}{L},$$

совпадающий с частотой малых колебаний для математического маятника.

А. Буров

Задачи

1. Аня называет дату *красивой*, если все 6 цифр ее записи различны. Например, 19.04.23 красивая дата, а 19.02.23 и 01.06.23 нет.



- а) Сколько красивых дат в апреле 2023 года?
б) Сколько всего красивых дат в 2023 году?

М.Евдокимов

2. Вася в течение 10 дней решал задачи — каждый день хотя бы одну. Каждый день (кроме первого), если погода была пасмурная, он решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а если солнечная — на одну

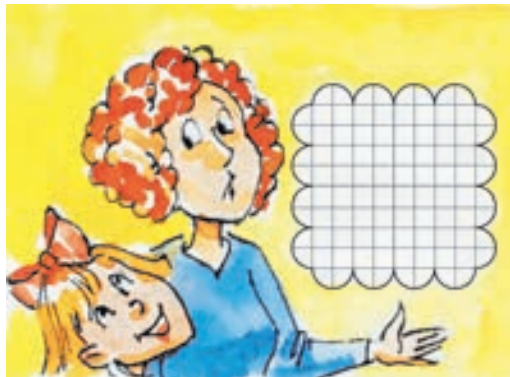


задачу меньше. За первые 9 дней Вася решил 13 задач. Какая погода была на десятый день?

Б.Френкин

3. Разрежьте «печенье» на 16 равных частей (т. е. одинаковых по размеру и по форме). Разрезы не обязательно прямолнейные.

Т.Голенищева-Кутузова



4. Фигура «скрипач» бьет клетку слева по стороне (локтем) и справа вверх по диагонали (смычком), если он правша, и, наоборот, правую клетку по стороне и левую верхнюю по диагонали, если левша (все скрипачи сидят лицом к нам). Посадите как можно больше «скрипачей» в «оркестр» 8×8 клеток, чтобы они не били друг друга. (Вы можете использовать любое количество как правшей, так и левшей.)

М.Хачатурян



Эти задачи предлагались на Математическом празднике.

Как коллега Спрудль дорожил памятью

К. КОХАСЬ

ГОРГУЛИЙ СИДЕЛ В СВОЕМ КАбинете директора фирмы «Математические услуги» и со скукой смотрел на кактусы, которые принес в кабинет посетитель – коллега Спрудль.

– Вот ка-а-акой кактусенок! – довольно промурлыкал коллега Спрудль, предьявляя ошкетинившийся иголками маленький побег кактуса. – Сейчас мы его посадим. Ой! Колючий!

– Такого добра на ваших кактусах навалом, – без интереса произнес Горгулий. – Можно за один сезон целое поле засеять.

– Не-е-ет, я все делаю по науке. В начале каждого года я отрываю от каждого кактуса ровно одного кактусенка. Кактусенок целый год растет, на сле-е-е-дующий год становится взрослым, но только к концу следующего года начинает ветвиться, бульк! После этого и от него можно тоже отрывать каждый год по одному кактусенку. Я сам изобрел это правило! За 10 лет удалось засе-е-ять кактусами целый подоконник.

– Кажется, я догадываюсь, чем вам нравятся эти колючки, – Горгулий жизнерадостно улыбнулся. – Ваши друзья ненавидят кактусы?

– Не то что бы не-е-енавидят. Просто сторонятся. Кактусы их не интересуют. Их интересуют не кактусы. А мне спокойнее. Однако моя пла-а-антация растет, бульк. Я уже сбиваюсь со счета. Хочу заказать у вас приложение на смартфон, которое будет пока-а-азывать, сколько у меня кактусов.

* * *

– Смотрите, какая у нашего приложения замечательная кнопка! – Горгулий чуть ли не светился. – Она словно утыкана колючками. Наш эксперт по сельскому хозяйству – мышшь Огрыза – превзошла самую себя.

– В приложении мы для каждого кактуса завели отдельную запись, – объясняла Огрыза. – Помещайте туда всю информацию: фото, когда высажен, чем удобрялся, сколько кактусят... Куча фильтров, ссылок, кулинарных рецептов, агрономических лайфхаков, поиск единомышленников... Короче, все, что нужно солидному кактусоводу-кактусоведу.

– А вы учли мое правило разведения кактусов?

– Разумеется! Каждая запись снабжена тегом «молодой» или «взрослый». В начале вегетативного сезона у каждой записи прошлогодний тег «молодой» или «взрослый» заменяется на «взрослый» – сюда мы будем добавлять данные за очередной год, кроме того, для каждой записи «взрослый» создается новая запись с тегом «молодой» для кактусенка.

– Звучит солидно. А что с подсчетом размера всей коллекции?

– Проще простого! Сколько записей имеется – таков и размер.

* * *

– Как успехи на ниве кактусозаготовительных работ? – поинтересовался Горгулий.

– Пробле-е-емка обнаружилась с вашим приложением, бульк! – пожаловался коллега Спрудль. – Моя плантация сильно выросла, пришлось даже нанять садовника. И ваше приложе-е-ение теперь занимает столько места! При этом я совершенно не успеваю лично следить за каждым кактусом в отдельности. Их так много, что даже не удается поддерживать за-а-аписи про подкормку, поливку, стрижку...

– Мы предвидели ваши трудности, – уверенно сказал Горгулий. – За небольшую дополнительную плату вы можете установить обновление, где радикально сокращен объем используемой памяти. Представляю

вам эксперта по оптимальным процессам: таракан Кузька! Он разработал чрезвычайный эффективный подход!

Кузька скромно пошевелил усами.

– Идея лежит на поверхности, – стал объяснять он. – Не будем хранить информацию об индивидуальных кактусах! Запишем лишь, сколько кактусят у вас появляется каждый год. Все кактусы на вашей плантации когда-то были кактусятами, правильно?

– Не совсем, все-таки самый пе-е-рвый кактус достался мне уже взрослым.

– Хорошо, – согласился Кузька, – давайте посчитаем. В первый год у вас от этого взрослого кактуса появился первый кактусенок, значит, $f_1 = 1$. На следующий год завелся еще один кактусенок, значит, $f_2 = 1$. Предыдущий кактусенок к этому времени дорос до состояния «взрослый», и годом позже появилось два кактусенка, $f_3 = 2$, а подросший стал третьим взрослым. И так далее. Сейчас у вас идет который год?

– n -й, – не моргнув, сказал коллега Спрудль.

– Значит, в прошлом году у вас появилось f_{n-1} кактусят, и общее число кактусов к началу n -го года равно $1 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1}$.

– Пе-е-рвое слагаемое единица – это мой самый пе-е-рвый кактус? – уточнил коллега Спрудль.

– Да. А последнее слагаемое – это подросшие кактусята, которые в n -м году еще только начнут ветвиться и своих кактусят пока не имеют. Но вот в следующем году каждый кактус, учтенный в этой сумме, даст вам кактусенка, понимаете, к чему я клоню?

– Вы хотите сказать, что эта сумма равна f_{n+1} ?

– Именно так! Мы вывели потрясающую формулу

$$f_{n+1} = 1 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1}.$$

Столь длинная и сложная речь явно переутомила Кузьку. Он еле держался на ногах.

– Таким образом, – пришел ему на помощь Горгулий, – число f_{n+1} – это не только количество кактусят, которые по-

явятся в $(n+1)$ -м году, но и по совместительству количество всех кактусов, имевшихся в самом начале n -го года. Это именно то число, которое вас интересует! Для его подсчета требуется лишь хранить предыдущие числа – это всего-то $n-1$ ячеек памяти. Потрясающая экономия! И заметьте: кнопочку запуска приложения мы тоже поменяли. Видите – колочки топорчатся, но уже не так густо.

* * *

– На-а-аш век – это век рациональности, разумности и эффективности! Всюду оптимизация, системность и безотходность, бульк! А ваше приложение с ка-а-актусами – это монстр! – возмутился коллега Спрудль. – Каждый год оно отъедает у моего смартфона еще одну ячейку памяти! Конечно, это совершенно не крити-и-чно, памяти полно, на ближайший миллион лет точно хватит, но меня угнетает такая примитивность! Чтобы найти число кактусов, мы складываем все, что хранится в памяти, бульк! Так могли рассуждать неандертальцы! Это расточительно! Мне-е-е и так уже пришлось расширить штат садовников. Где новейшие технологии и современные алгоритмы?

– Будут вам технологии. Возьмите бланк заказа. Давайте зафиксируем требуемый объем памяти. У меня для вас шикарное предложение. Предлагаю использовать всего две ячейки! Годится?

– Всего две? Как же вам это удастся?

– Вы имеете дело с профессионалами экстра-класса. Вот здесь напишите прописью «д-в-е». Хорошо. А как удастся... да проще простого! Сами посмотрите:

$$f_{n+1} = (1 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-2}) + f_{n-1},$$

$$f_n = 1 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-2}.$$

Чем, по-вашему, отличаются правые части строчек?

– Хм, в первой строке на одно слагаемое больше. Постойте... Вы хотите сказать, что выполняется правило

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}?$$

(Продолжение см. на с. 34)

Одна задача по геометрической вероятности

Речь пойдет о следующей задаче (см. статью Н. Васильева «Геометрические вероятности» в «Кванте» №1 за 1991 год):

Найдите вероятность $p_{n,N}$ того, что N случайно выбранных точек на сфере в n -мерном пространстве лежат на одной полусфере.

Решим эту задачу для $n = 1, 2, 3$ и скажем несколько слов для произвольного n . В случае $n = 1$ под сферой понимаются две точки на одинаковом расстоянии от ее центра, а в случае $n = 2$ — окружность. Решение проиллюстрируем рисунками для $n = 3, N = 4$. Покажем, что

$$p_{n,N} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} C_{N-1}^k}{2^{N-1}}. \quad (1)$$

Ключевое соображение в решении — описать выбор случайных точек X_i , $i = 1, \dots, N$. Будем действовать следующим образом.

Сначала выбираем N случайных диаметров сферы. А затем случайным образом выбираем один из концов на каждом из этих диаметров. Каждый конец и будет определять точку X_i (рис. 1).

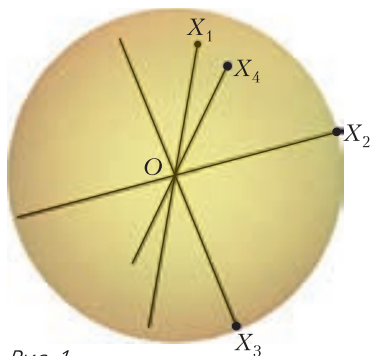


Рис. 1

Всего есть 2^N способов выбрать случайные точки: на одном из концов каждого из диаметров. Наша задача подсчитать

такие их расположения, при которых все они лежат на одной полусфере. Это произойдет в том случае, если найдется такой вектор \vec{y} , что строка $\{\text{sgn}(\vec{y}, \overline{OX_1}), \dots, \text{sgn}(\vec{y}, \overline{OX_n})\}$ состоит из одних минусов. Здесь O — центр сферы, круглые скобки обозначают скалярное произведение векторов, а sgn — функция, принимающая значение «+» для положительного аргумента и «-» для отрицательного.

Действительно, в этом случае все точки лежат по одну сторону от плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно вектору \vec{y} (рис. 2). При

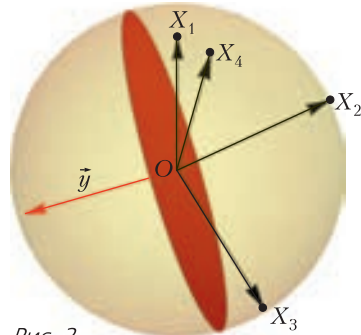


Рис. 2

$n = 1$ под плоскостью мы будем понимать одну-единственную точку — центр сферы, а при $n = 2$ — прямую. Выясним, когда такой вектор найдется.

Обозначим через π_i плоскость, ортогональную $\overline{OX_i}$, и рассмотрим области, на которые плоскости π_i , $i = 1, \dots, N$, разбивают сферу. Допустим, что конец вектора \vec{y} попал в некоторую область. Тогда любой вектор с концом в этой области будет определять такую плоскость, что все точки X_i лежат по одну сторону от нее. Действительно, внутри каждой области знак скалярного произведения $(\vec{y}, \overline{OX_i})$ не меняется, значит, если для какого-то вектора \vec{y} строка $\{\text{sgn}(\vec{y}, \overline{OX_1}), \dots, \text{sgn}(\vec{y}, \overline{OX_n})\}$

состояла из одних минусов, то и для всех остальных тоже: знак в строке меняется только при переходе вектора \vec{y} из области в область.

На рисунке 3 можно видеть, что вектор \vec{y} образует тупой угол со всеми векторами $\overline{OX_i}$, а значит, строка знаков скалярных произведений состоит из одних минусов: $\{-, -, -, -\}$. Если же вектор \vec{y} перейдет в соседнюю область, то ровно один из знаков изменится.

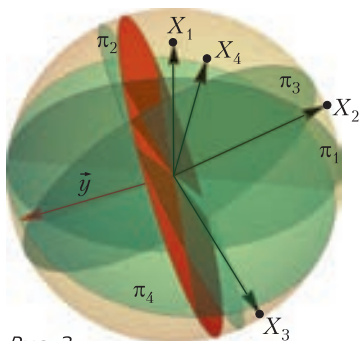


Рис. 3

Заметим, кроме того, что для каждой области существует единственное из 2^N расположений точек, при котором они все лежат с одной стороны от плоскости, которую определяют векторы с концами из этой области: для каждой плоскости только один конец диаметра лежит по нужную сторону от нее. А это значит, что из 2^N возможных расположений точек нам подойдет ровно столько, сколько имеется областей. Остается посчитать число областей, обозначим это число через $Q_{n,N}$.

Для $n = 1$ получим $Q_{n,N} = 2$. Для больших n проведем следующее рассуждение.

Уберем из разбиения плоскость π_N . Тогда останется $N - 1$ плоскостей, которые разбивают сферу на $Q_{n,N-1}$ областей. Эти области двух видов: I – те, которые пересекаются с π_N , II – те, которые не пересекаются с π_N . Обозначим их числа Q^I и Q^{II} соответственно. Тогда $Q_{n,N-1} = Q^I + Q^{II}$. Вернем в разбиение плоскость π_N . Она разрежет на 2 части каждую область вида I, а области вида II останутся неизменными. Значит, $Q_{n,N} = 2Q^I + Q^{II} = Q_{n,N-1} + Q^I$. И мы сейчас покажем, что $Q^I = Q_{n-1,N-1}$.

Действительно, в $(n - 1)$ -мерном пространстве π_N для $i = 1, \dots, N - 1$ рассмотрим $N - 1$ плоскостей $\pi_i \cap \pi_N$. Они разбивают сферу $S \cap \pi_N$ на $Q_{n-1,N-1}$ областей.

Рисунок 4 иллюстрирует сказанное в предыдущем абзаце. В плоскости π_4 три прямые $\pi_1 \cap \pi_4, \pi_2 \cap \pi_4, \pi_3 \cap \pi_4$ разбивают на области окружность $S \cap \pi_4$, которая показана желтым цветом.

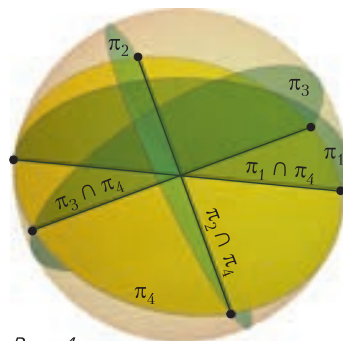


Рис. 4

В итоге получаем

$$p_{n,N} = \frac{Q_{n,N}}{2^N} = \frac{Q_{n,N-1} + Q_{n-1,N-1}}{2^N} = \frac{1}{2}(p_{n,N-1} + p_{n-1,N-1}). \quad (2)$$

Из равенства (2) можно получить явную формулу (1). Например, можно заметить, что правая часть в (1) также удовлетворяет равенству (2), а кроме того, выполнены «граничные» условия: $p_{1,N} = 2^{-N+1}$ и $p_{n,N} = 1$ при $N \leq n$. Проверку этих условий оставляем читателю в качестве задачи.

В заключение заметим, что изложенное решение задачи почти дословно переносится на случай $n > 3$. А ответ снова дается формулой (1).

Любопытно, что (1) в то же время является вероятностью того, что при бросании монеты n -й орел выпадает не раньше N -го бросания (докажите!) Однако установить связь между этими двумя задачами, которая бы помогла в решении задачи с точками на сфере, не удастся. Впрочем, может быть, это удастся нашим читателям?

Материал подготовил Н. Панюнин

(Начало см. на с. 30)

И эти ваши две ячейки соответствуют двум слагаемым в правой части формулы? Нет уж! Бульк! Не на того напали! Подайте мне способ вычислить f_n с одной ячейкой памяти! – Коллега Спрудль выхватил лежащий перед Горгулием бланк заказа и, перечеркнув слово «две», написал «одну».

– Что это за манеры – раз в минуту менять свой мнение! Ну если вы заказываете всего одну ячейку – сделаем и с одной, но тогда извольте внести полную предоплату! За результатом зайдите завтра!

* * *

Горгулий отодвинул в сторону папки и ноутбук, и Бусенька выложила на стол несколько шоколадок. Коллега Спрудль удивленно принялся.

– Итак, вы подсчитываете кактусы, – начал Горгулий, в то время как Бусенька вынимала шоколадки из оберток, – и вас интересует, какое число кактусов будет расти на вашей плантации в начале n -го года, – эксперт Кузька предложил обозначать его f_{n+1} . Началось все с одного кактуса. Можно считать, что он относится в наших подсчетах к «нулевому» году, т.е. $f_1 = 1$, а дальше события развивались так:

$$f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8, \dots$$

Коллега Спрудль проверил историю вопроса и кивнул. Бусенька аккуратно стала ломать шоколадки.

– Будем считать клеточки в фигурах, – объявила она, – и, выложив три кусочка на стол, соорудила из них равенство

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

Добавим к обеим частям по кусочку из двух клеток $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$. Получим

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

Коллега Спрудль тоже взял себе какой-то кусочек.

– Теперь добавим кусочки 2×3 $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$:

$$f_{n-1} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

$f_{n+1} \qquad f_n$

Дальше будем добавлять кусочки $f_n \times f_{n+1}$:

$$f_n \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

f_{n+1}

Получим

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

$f_{n+1} \qquad f_{n+2}$

Вычитаемое разобьем на две исходные части и запишем получившееся равенство:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

$$f_{n+1}^2 - f_{n+1}f_n - f_n^2 = 1.$$

Коллега Спрудль отправил кусок шоколадки себе в пасть и стал с подозрением рассматривать формулу.

– Неандертальцы с ужасом разбегаются по пещерам, – ехидно прокомментировал Горгулий. – Мы получили квадратное уравнение относительно f_{n+1} ! У него два корня – положительный и отрицательный. Решая уравнение, находим, что положительный корень равен

$$f_{n+1} = \frac{f_n + \sqrt{5f_n^2 + 4}}{2}.$$

– Так происходит при четном n , – уточнила Бусенька, – а при нечетном слагаемые в уравнении поменяются местами: большой квадратик будет вычитаться, а две другие части – прибавляться. Получится уравнение

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array},$$

$$f_{n+1}f_n + f_n^2 - f_{n+1}^2 = 1.$$

И при нечетных n формула для корня уравнения будет выглядеть немного по-

другому:

$$f_{n+1} = \frac{f_n + \sqrt{5f_n^2 - 4}}{2}.$$

Комбинируя эти два случая вместе, получаем итоговую формулу:

$$f_{n+1} = \frac{f_n + \sqrt{5f_n^2 + 4 \cdot (-1)^n}}{2}.$$

– Неужели этот квадрата-атный корень всегда целое число? – недоверчиво спросил коллега Спрудль.

– У него нет другого выбора, – уверенно ответил Горгулий.

– Если хотите, – сказала Бусенька, – корень можно убрать. Как я понимаю, при больших n числа f_n не просто большие – они огромные.

– В этом году – особенно! – грустно подтвердил коллега Спрудль.

– Поэтому $\sqrt{5f_n^2 + 4 \cdot (-1)^n}$ с хорошей точностью равно $\sqrt{5}f_n$. Точнее говоря, при $n > 2$ их разность по модулю всегда меньше 1. А значит, заменив этот сложный корень на $\sqrt{5}f_n$, мы изменим правую часть меньше чем на $1/2$ и, следовательно, сможем вычислять f_{n+1} по совсем простой формуле:

$$f_{n+1} = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot f_n \right\rfloor.$$

Здесь квадратные скобки – это обычное округление.

– А мне формула с корнем больше нравится, – сказал Горгулий, – с корнем как-то загадочнее!

Когда коллега Спрудль ушел, Горгулий спросил:

– Как ты думаешь, он еще вернется?

– Конечно, – ответила Бусенька. – Ему надоели кактусы. Он злится и ищет, на ком бы выместить злость. Завтра же выится со словами «подайте мне способ считать кактусы, не храня в памяти никаких данных».

– И что мы будем делать?

– Мы предложим ему явную формулу

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Комментарий. Последовательность f_n , обнаруженная коллегой Спрудлем, – это знаменитые числа Фибоначчи, которые вместе с рекуррентной формулой

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

и историей о кроликах вошли в математический обиход аж в XII веке. Формула, доказанная Кузьмой, чуть менее известна. А формула, которую Бусенька вывела с помощью шоколадок:

$$f_{n+1}^2 - f_{n-2}f_n = (-1)^n,$$

называется тождеством Кассини. Бусенька преобразовала тождество Кассини к виду $f_{n+1}^2 - f_{n+1}f_n - f_n^2 = (-1)^n$. И если заметить здесь f_{n+1} на x , получится квадратное уравнение

$$x^2 - f_n x - f_n^2 - (-1)^n = 0.$$

При $x = 0$ левая часть отрицательна – это признак того, что уравнение имеет два корня разного знака. Факт, на который обратил внимание коллега Спрудль, – что выражение $5a^2 \pm 4$ под знаком квадратного корня оказывается квадратом натурального числа, если подставить $a = f_n$ (а на самом деле только для чисел Фибоначчи оно и будет квадратом), – совершенно удивительный, доказать его непосредственно трудно.

Бусенька не стала объяснять коллеге Спрудлю, почему квадратный корень с хорошей точностью равен $\sqrt{5}f_n$. Для оценки можно было воспользоваться приемом «домножим на сопряженное» или формулой $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$:

$$\begin{aligned} & \sqrt{5f_n^2 + 4 \cdot (-1)^n} - \sqrt{5}f_n = \\ &= \frac{\left(\sqrt{5f_n^2 + 4 \cdot (-1)^n} \right)^2 - \left(\sqrt{5}f_n \right)^2}{\sqrt{5f_n^2 + 4 \cdot (-1)^n} + \sqrt{5}f_n} = \\ &= \frac{4 \cdot (-1)^n}{\sqrt{5f_n^2 + 4 \cdot (-1)^n} + \sqrt{5}f_n}. \end{aligned}$$

Начиная с $n = 3$ по модулю знаменатель больше числителя.

Сложная формула, которой заканчивается сказка, называется формулой Бине. С первого взгляда кажется невероятным, что правая часть формулы – целое число.

Бусенькина формула $f_{n+1} = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot f_n \right\rfloor$

означает, что f_{n+1} приблизительно в $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

раз больше f_n , поэтому весьма правдоподобно, что f_n не сильно отличается от $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ – первого слагаемого формулы Бине. Но до формулы Бине отсюда еще далеко.

КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

Мы завершаем конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на участников не младше 8–9 класса, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

*Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest
Желаем успеха!*

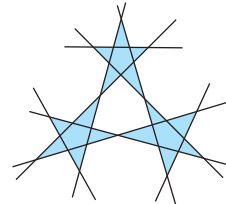
29. Один из углов прямоугольника поделен двумя лучами на три равных угла. Один из этих лучей делит сторону прямоугольника пополам. Второй луч пересекает другую сторону. В каком отношении он ее делит?

Е. Бакаев

30. Фокусник хочет заготовить 10 карточек, написать на каждой натуральное число, не большее 90, чтобы все числа были различными, и показывать такой фокус: зритель наугад выбирает две карточки, называет фокуснику сумму чисел на них, а фокусник тут же отгадывает, какие две карточки у зрителя. Помогите фокуснику найти числа и объясните, почему фокус будет получаться.

М. Евдокимов

31. На рисунке проведены 9 прямых. Часть ограниченных ими областей закрашены так, что получилось 3 пятиконечных звезды, которые не перекрывают друг друга. Можно



ли таким образом нарисовать k пятиконечных звезд с помощью n прямых? Решите задачу для а) $k=4$, $n=11$; б) $k=6$, $n=13$; в) $k=8$, $n=16$.

Н. Авилов

32. В каждой клетке таблицы 4×4 записано по числу, причем каждое число равно произведению чисел во всех соседних по стороне клетках. Каким наибольшим может быть количество различных чисел в этой таблице?

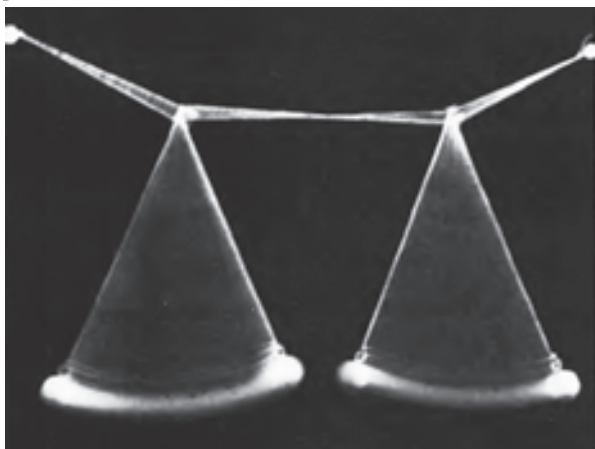
С. Токарев

Связанные маятники

Е.БУТИКОВ

ЗАКОНОМЕРНОСТИ КОЛЕБАНИЙ таких сложных систем, как связанные маятники, можно изучить на опыте с помощью простейших средств. Все, что вам потребуется для того, чтобы воспроизвести описываемые здесь опыты, — это два одинаковых небольших грузика (например, массивные гайки), два штатива, которые с успехом можно заменить спинками стульев, прочные нитки, секундомер или часы с секундной стрелкой.

Прикрепим грузики к нитям одинаковой длины 50–60 см, а нити привяжем к поперечной нити длиной около 1 м, расположив их симметрично на расстоянии 40–50 см друг от друга. Концы поперечной нити закрепим в штативах или привяжем к спинкам стульев. В результате получим систему из двух маятников, примерно такую, как показано на фотографии. Это и есть *связанные маятники*. Желательно добиться возможно более совершенной симметрии системы. Нужно позаботиться также и о том, чтобы можно было изменять расстояние между штативами, регулируя, тем самым, провисание поперечной нити.



Опубликовано в журнале «Квант» №5 за 1984 год.

Несмотря на простоту, это устройство дает возможность провести много интересных наблюдений. Ограничимся изучением лишь свободных (или собственных) колебаний системы в случае, когда маятники качаются перпендикулярно к плоскости их равновесия.

Удерживая один из маятников в положении равновесия, другой отклоним на небольшой угол в поперечном направлении, затем отпустим маятники одновременно. Будем внимательно следить за их дальнейшим поведением. Мы увидим, что амплитуда колебаний первоначально отклоненного маятника постепенно уменьшается, но одновременно с этим второй маятник раскачивается все сильнее и сильнее. В какой-то момент маятники будут колебаться с одинаковыми амплитудами. Но через некоторое время первый маятник вообще остановится, «замрет» в положении равновесия, а второй раскачается настолько, что его амплитуда будет такой же, как в начальный момент у первого маятника. Колебания как бы полностью «перейдут» от одного маятника к другому.

Продолжаем наблюдать дальше. Теперь все процессы происходят в обратной последовательности: амплитуда второго маятника уменьшается, а первый раскачивается, пока не достигнет прежней амплитуды. Затем все повторяется сначала.

Такой тип движения с периодическими «замирениями» колебаний принято называть *биениями*. Проследите за несколькими циклами биений и постарайтесь определить их период, т.е. время, в течение которого один из маятников совершает полный цикл от одной остановки до другой (При этом в качестве часов можно использовать сами маятники: подсчитайте, например, сколько полных колебаний совершает маятник за один цикл биений.)

Почему колебания передаются от одного маятника к другому? Понаблюдаем за поперечной нитью, к которой они привязаны. Легко заметить, что при колебаниях маятников она не остается неподвижной: отклоняясь в сторону, один из маятников тянет ее за собой и

тем самым приводит в движение точку подвеса второго маятника. Таким образом, поперечная нить осуществляет связь маятников друг с другом. Потому маятники и называются *связанными*.

Интуиция подсказывает, что маятники связаны тем сильнее, чем больше провисает нить. Проверим это на опыте. Уменьшим натяжение нити, несколько сблизив точки ее закрепления, и повторим описанный выше опыт. Мы увидим, что полный цикл передачи колебаний от одного маятника к другому и обратно сокращается. Напротив, при увеличении натяжения нити связь маятников ослабляется, и обмен колебаниями происходит медленнее. Но интересно, что и при заметно ослабленной связи маятники полностью обмениваются энергией. (Конечно, если принять во внимание постепенное затухание колебаний маятников из-за трения, то при очень слабой связи время обмена энергией может стать больше времени затухания колебаний. Колебания возбужденного маятника прекратятся прежде, чем он успеет передать заметную часть своей энергии другому маятнику. В таких условиях наличие связи маятников становится несущественным, и их можно рассматривать как независимые.)

Задумаемся над тем, почему после того, как амплитуды, а значит, и энергии маятников станут одинаковыми, процесс обмена энергией не прекращается, а продолжается до тех пор, пока возбужденный маятник не передаст другому всю свою энергию. Все дело в соотношении фаз: при выравнивании амплитуд колебания раскачиваемого маятника отстают по фазе на четверть периода. В тот момент, когда «активный» маятник достигает максимального отклонения и создает наибольшее натяжение поперечной соединительной нити, «пассивный» маятник (т.е. раскачиваемый) еще только проходит через положение равновесия. Скорость точки его подвеса максимальна, а действующая на нее со стороны поперечной нити сила направлена в ту же сторону, куда движется точка подвеса. Это значит, что здесь сложились наиболее благоприятные условия для продолжения передачи энергии в прежнем направлении.

Мы видели, что при рассмотренном способе возбуждения (начальное отклонение одного из маятников) возникающие колебания не являются гармоническими (хотя при слабой связи их можно считать «почти гармоническими» с медленно меняющейся амплитудой). А нельзя ли возбудить колебания таким образом, чтобы движение каждого из маятников было чисто гармоническим? Легко сообразить, что для колебаний, перпендикулярных к равновесной плоскости, существует два типа таких движений.

Во-первых, можно отклонить оба маятника на один и тот же небольшой угол в одном направлении и одновременно осторожно отпустить их без толчка. Тогда вся система будет качаться как единое целое. Попробуйте возбудить такие колебания и измерьте их частоту ω_1 . Так как маятники колеблются в одинаковых фазах, зависимость смещения от времени для каждого из них выражается одной и той же гармонической функцией:

$$x_1(t) = x_2(t) = x_m \cos \omega_1 t, \quad (1)$$

где амплитуда x_m равна начальному отклонению маятников от положения равновесия.

Во-вторых, можно отвести оба маятника на одинаковые углы в противоположные стороны и одновременно отпустить. Маятники и в этом случае будут совершать гармонические колебания с одинаковой амплитудой и одной и той же частотой ω_2 (эта частота несколько больше, чем ω_1), но в противоположных фазах. Поэтому зависимости смещения от времени имеют такой вид:

$$x_1(t) = x_m \cos \omega_2 t, \quad x_2(t) = -x_m \cos \omega_2 t. \quad (2)$$

Такие движения сложной системы, когда все тела совершают чисто гармонические колебания с одной и той же частотой, называют *нормальными колебаниями*, или *модами* системы. Поперечным колебаниям связанных маятников соответствуют две рассмотренные выше моды с частотами ω_1 и ω_2 . Каждая мода характеризуется не только собственной частотой, но и определенным взаимным расположением (конфигурацией) маятников при колебаниях.

Какое отношение имеют моды к изученным ранее биениям? Вспомним начальные

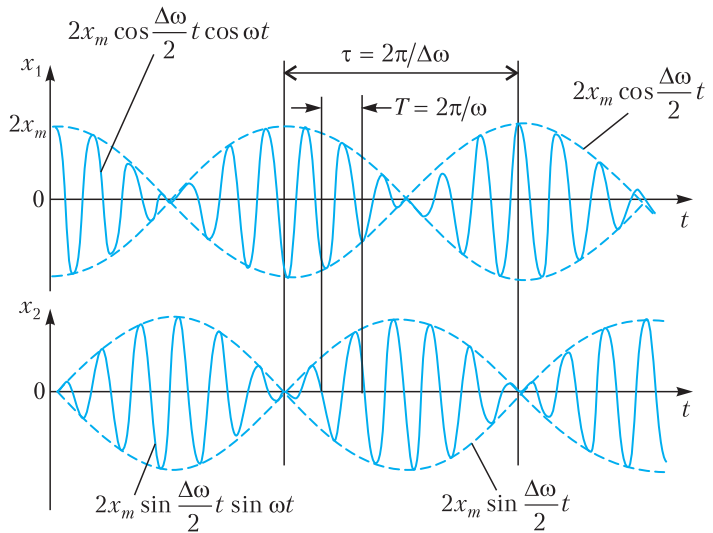
условия, при которых возбуждается каждая из них: для первой маятники нужно отклонить в одну сторону, для второй – в противоположные. Если мы захотим возбудить обе моды *одновременно*, то как раз и получим начальные условия, соответствующие возбуждению *биений*: один маятник отклонен, второй находится в положении равновесия. Таким образом, мы приходим к выводу, что биения получаются в результате суперпозиции нормальных колебаний с частотами ω_1 и ω_2 и одинаковыми амплитудами.

Смещение каждого маятника в любой момент времени t мы получим, сложив соответствующие выражения из формул (1) и (2) и воспользовавшись известными тригонометрическими тождествами:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= x_m (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = \\
 &= 2x_m \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t, \\
 x_2(t) &= x_m (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = \\
 &= 2x_m \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Если разность частот нормальных колебаний $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ мала по сравнению со средней частотой $\omega = (\omega_2 + \omega_1)/2$, то в правых частях формул (3) первая тригонометрическая функция изменяется медленно по сравнению со второй. Это и значит, что $x_1(t)$ и $x_2(t)$ описывают «почти гармонические» колебания с частотой ω и медленно пульсирующими амплитудами. Соответствующие графики приведены на рисунке. Мы видим, что они правильно описывают то, что наблюдалось в первом опыте.

О представлении сложного колебания в виде суммы гармонических колебаний говорят как о разложении в спектр. Спектр любого поперечного колебания маятников



Так выглядят графики биений двух связанных маятников. В начальный момент первый маятник отклонен на небольшой угол в направлении, перпендикулярном плоскости равновесия системы, а второй маятник находится в положении равновесия

изучаемой системы, в том числе и биений, состоит только из двух компонент с частотами ω_1 и ω_2 , так как ими исчерпывается весь набор поперечных нормальных колебаний. Все многообразие возможных свободных колебаний, возникающих при разных начальных условиях, обусловлено различными соотношениями амплитуд и фаз этих спектральных компонент. Попробуйте задать иные, чем раньше, начальные условия (например, неодинаковые начальные отклонения) и наблюдайте за возникающими колебаниями.

С нашими связанными маятниками можно проделать еще много интересных опытов, если не ограничиваться только поперечными движениями. В этой системе есть еще три моды, соответствующие колебаниям маятников в плоскости, образуемой нитями при равновесии. Попробуйте возбудить эти моды и наблюдайте за ними.

Космические парусники на световой тяге

М. НИКИТИН

В 1900 ГОДУ РОССИЙСКИЙ ФИЗИК Петр Лебедев экспериментально показал, что свет оказывает давление на поверхность тел. Оказывает давление на тела и солнечный свет, причем на поверхности Земли его давление равно $9 \cdot 10^{-6}$ Н/м². Как видно, это давление невелико. Чтобы его действие стало заметным, необходима большая площадь, на которую свет падает нормально. Так, при площади в 10^8 м² сила давления солнечной радиации может составить почти 1000 Н. Это уже заметная величина, и ее можно использовать для движения космических аппаратов.

Первым на подобную возможность обратил внимание один из основоположников советской космонавтики Фридрих Цандер. Он предложил использовать солнечный парус для создания силы тяги для космических аппаратов, выполняющих полеты к дальним планетам. Главным преимуществом таких космолетов является их экономичность, так как для своего движения им не нужны запасы топлива, необходимого для реактивного движения. Другим преимуществом является достаточно высокая скорость, с которой солнечный парусник может двигаться в космическом пространстве. Эта скорость зависит от площади зеркала и общей массы парусника. В простейшем случае радиального движения солнечного парусника несложно получить зависимости его скорости от этих параметров, полезные для понимания перспектив космолетов на солнечной тяге.

Рассмотрим космолет, который удаляется радиально от Солнца и парус которого расположен перпендикулярно солнечным лучам. Запишем второй закон Ньютона для такого парусника с учетом действия сил давления света и гравитационного притяже-

ния Солнца:

$$ma = PS - \frac{GMm}{r^2},$$

где m и a – масса и ускорение парусника, P – давление света, S – площадь паруса, G – постоянная тяготения, M – масса Солнца, r – расстояние от Солнца до парусника.

Давление солнечного света P создается за счет передачи парусу светового импульса, который до взаимодействия с поверхностью равен

$$p = \frac{E}{c},$$

где p , E и c – импульс, энергия и скорость света. В силу радиального распространения солнечного света, через любую сферическую поверхность, в центре которой находится Солнце, в единицу времени переносится одна и та же энергия и, соответственно, один и тот же импульс. Следовательно, удельные импульсы солнечного света, передаваемые единичным площадкам солнечного паруса в единицу времени на расстояниях r_0 и r от Солнца, связаны друг с другом простым соотношением:

$$p = p_0 \frac{r_0^2}{r^2},$$

где r_0 – радиальное расстояние от Земли до Солнца, p_0 – удельный импульс на орбите Земли. Удельные импульсы определяют силу давления света, действующую на единичную площадку, так как по второму закону Ньютона сила равна импульсу, переданному телу в единицу времени. В соответствии с этим, радиальная зависимость справедлива и для давления солнечного света:

$$P = P_0 \frac{r_0^2}{r^2}.$$

Теперь можно переписать второй закон Ньютона для нашего парусника в несколько ином виде, более удобном для последующих оценок:

$$ma = \frac{P_0 S r_0^2}{r^2} - \frac{GMm}{r^2}.$$

Как видно, радиальное ускорение космолета с солнечным парусом будет больше нуля, если выполнется условие

$$P_0 S r_0^2 > GMm.$$

Отсюда следует, что отношение S/m должно быть больше параметра $\gamma = \frac{GM}{P_0 r_0^2} \approx 660$. Вве-

денный параметр означает, что минимальная площадь солнечного паруса, необходимая для ускоренного движения 1 кг массы космолета, должна быть не меньше 660 м^2 (округленно 1000 м^2). С позиций конструирования небольших по массе солнечных парусников, это не очень критическое условие. Уже сейчас есть материалы и электроника, чтобы создать прототипы малых солнечных космолетов. Ситуация значительно усложняется, если говорить о солнечных парусниках массой в 1000 кг и больше. В этом случае придется создавать космолеты с площадью паруса больше 1 миллиона квадратных метров.

Соотношение $P_0 S r_0^2 > GMm$ показывает, что ускорение солнечного паруса будет тем больше, чем сильнее это неравенство. При $S/m \gg \gamma$ влиянием силы гравитации можно пренебречь, и тогда ускорение будет определяться площадью паруса, его массой и расстоянием до Солнца. От этих же величин будет зависеть и скорость парусника.

Для нахождения скорости парусника воспользуемся идентичностью зависимостей сил гравитационного взаимодействия и давления света от радиального расстояния до Солнца. Из этой идентичности следует, что для светового давления существует аналог потенциальной энергии гравитационного поля – потенциальная энергия светового давления. Явное выражение для потенциальной энергии светового давления легко получить на основе сопоставления формул для силы и потенциальной энергии. В случае гравитационного взаимодействия силе $F = GMm/r^2$ соответствует потенциальная энергия $E_{\text{п}} = -GMm/r$ (знак минус указывает на то, что это энергия сил притяжения). Аналогично, силе светового давления $F = P_0 S r_0^2 / r^2$ соответствует потенциальная энергия $E_{\text{п}} = +P_0 S r_0^2 / r$ (знак плюс указывает на то, что это энергия отталкивания). Справедливость такой формулы для потенциальной энергии светового давления подтверждает более строгий математический подход, так что можно без опасений использовать ее для последующего анализа.

Полученное на основе метода аналогий явное выражение для потенциальной энергии светового давления позволяет легко найти скорость космического солнечного парусника в любой точке Солнечной системы за

пределами земной орбиты. Для этого запишем закон сохранения полной механической энергии для радиальной траектории с учетом действия сил гравитации и светового давления:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{P_0 S r_0^2}{r} - \frac{GMm}{r} = \frac{mv_0^2}{2} + P_0 S r_0 - \frac{GMm}{r_0},$$

где v и v_0 – радиальные скорости парусника на расстояниях r и r_0 от Солнца. Отсюда и найдем скорость солнечного парусника на расстоянии r :

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2P_0 S r_0}{m} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) + 2GMm \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}.$$

Второе слагаемое под радикалом обеспечивает прирост скорости солнечного парусника за счет действия радиационного давления, третье слагаемое обуславливает убыль скорости за счет гравитационного притяжения. При выполнении условия $S/m \gg \gamma$ третье слагаемое по модулю значительно меньше второго, поэтому его вкладом в скорость космолета можно пренебречь. Подобная ситуация соответствует штатному режиму полета солнечного парусника, когда скорость зависит только от массы и площади паруса. Характерной особенностью штатного режима полета является наличие предельной скорости

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2P_0 S r_0}{m}}$$

на больших расстояниях от Солнца, когда $r \gg r_0$.

Для штатного режима с нулевой начальной скоростью предельная скорость солнечного парусника равна $\sqrt{2P_0 S r_0 / m}$. Отсюда следует, что за счет увеличения площади паруса можно получить высокие скорости движения для малых масс космолета. К сожалению, подобный вывод не совсем верен. Дело в том, что увеличение площади паруса связано с увеличением массы самого парусника. Это накладывает сильные ограничения на возможности создания парусов большой площади и малой массы.

Рассмотрим вопрос детальнее. Предположим, что площадь плоского солнечного паруса равна S , толщина и плотность материала, из которого он сделан, равны d и ρ соответственно. Тогда масса паруса будет

равна $m_1 = \rho dS$. Предположим далее, что масса космолета $m = m_1 + m_k = m_1(1 + m_k/m_1) = \alpha m_1$, где m_k – масса конструкций без учета паруса, $\alpha = 1 + m_k/m_1$ – конструкционный параметр парусного космолета. С учетом введенных параметров предельная скорость космолета, которую он приобретет за счет светового давления, будет равна

$$v = \sqrt{\frac{2P_0 S r_0}{\alpha m_1}} = \sqrt{\frac{2P_0 r_0}{\alpha \rho d}}$$

Из этой формулы следует, что предельная скорость солнечного парусника, приобретенная за счет давления света, не зависит от площади паруса. Зато она зависит от его толщины, плотности материала паруса и конструкционного параметра α . В таблице приведены результаты расчетов предельной скорости v для различных толщин, плотностей и параметров α . Плотность $\rho = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³ отвечает алюминию, плотность $\rho = 1,6 \cdot 10^3$ кг/м³ – некоему гипотетическому материалу с высокой прочностью тонких пленок.

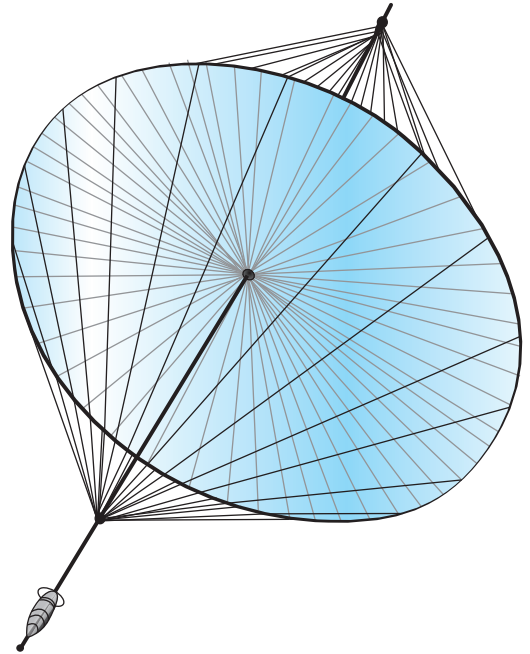
№	d , мкм	ρ , кг/м ³	α	v , км/с
1	1,0	2700,0	1	31,2
2	1,0	1600,0	1	40,6
3	1,0	2700,0	2	17,5
4	1,0	1600,0	2	28,7
5	0,1	2700,0	1	99,0
6	0,1	1600,0	1	128,5
7	0,1	2700,0	1,5	80,8
8	0,1	1600,0	1,5	105,0
9	0,1	2700,0	2	55,2
10	0,1	1600,0	2	92,0

Как видно из приведенной таблицы, только в случае использования парусов из сверхтонких пленок толщиной 100 нм с плотностью порядка 1600,0 кг/м³ солнечный парусник может достичь скорости, близкой к 105,0 км/с для конструкционного параметра, равного 1,5. Найдем для такого парусника площадь поверхности, необходимую для разгона космолета массой 1,0 т. С учетом $\alpha = 1,5$ площадь паруса космолета будет

равна

$$S = \frac{10^3}{1,5 \cdot 1,6 \cdot 10^3 \cdot 10^{-7}} \text{ м}^2 \approx 4,2 \cdot 10^6 \text{ м}^2 = 4,2 \text{ км}^2.$$

Это достаточно большой парус. Создать для него прочную конструкцию будет непросто из-за больших размеров и очень малой толщины материала.



На рисунке представлена возможная конструкция паруса с использованием тросов в качестве креплений солнечного паруса к корпусу космолета. Прочные тросы могут сделать конструкцию паруса жесткой и одновременно легкой. Подобная конструкция может быть использована и для создания космолетов на солнечной тяге для полетов с людьми. Правда, в этом случае придется собирать в космосе солнечные паруса площадью в сотни квадратных километров. С позиций современной космонавтики это исключительно сложная инженерно-техническая задача. Для ее решения понадобится разработать новые пленочные материалы для солнечных парусов с рекордными характеристиками по толщине, прочности и плотности. Все это отодвигает время появления солнечных парусников в отдаленное будущее.

Подведем теперь небольшой итог изложенному материалу. Приведенные расчеты показывают, что использование давления сол-

нечного света для создания космолетов на парусной тяге принципиально возможно. Численные оценки свидетельствуют, что с помощью солнечных парусов можно создать космолеты, которые будут летать со скоростью десятки километров в секунду. При таких скоростях эти космолеты могут использоваться для изучения дальних планет и окраин Солнечной системы. Однако, численные оценки также показывают, что с помощью солнечных парусов в принципе невозможно достичь скоростей, необходимых для межзвездных перелетов, даже при использовании сверхтонких парусов и предельной ми-

ниатюризации отсеков космолета. Посылка же космических аппаратов к звездам на скоростях порядка 100 км/с не имеет особого смысла из-за огромных времен перелета.

В заключение предлагаем два вопроса для любознательных читателей.

Объясните, почему в отличие от морских парусников космолеты на солнечных парусах не могут двигаться в направлении, противоположном давлению солнечного света.

На сколько возрастет скорость солнечного парусника на окраине Солнечной системы, если свое движение он начнет на орбите Венеры?

НАМ ПИШУТ

Еще раз об огранке бриллианта

М.КУХТИН

ПУСТЬ ИМЕЕТСЯ ВЫПУКЛЫЙ МНОГОГРАННИК P_0 . С ним можно проделать следующую операцию «огранки»: срезать все его вершины плоскостями достаточно близко от самих вершин (т.е. так, чтобы плоскости-ножи не пересекались друг с другом внутри или на границе многогранника P_0). Эта операция неоднократно встречалась в задачах. Например, в такой.

Задача (переформулировка задачи Г.Гальперина, XXVII Турнир городов). Пусть у выпуклого многогранника P_0 количество ребер равно n . Найдите а) число вершин; б) число ребер многогранника P_1 , полученного из P_0 после огранки.

Решение. а) Заметим, что все вершины многогранника P_1 лежат на ребрах многогранника P_0 , по две вершины на каждом ребре, поэтому у P_1 количество вершин равно $2n$.

б) Далее заметим, что у P_1 из каждой вершины выходит по 3 ребра. Поэтому для P_1 утроенное количество вершин равно удвоенному количеству ребер (так как каждое ребро выходит из двух вершин). Таким образом, количество ребер у P_1 равно $3n$.

По ходу рассуждения мы увидели, что после выполнения огранки получается многогранник такой, что из каждой его вершины выходит по 3 ребра.

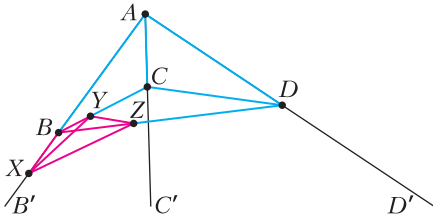
Далее предполагаем, что из каждой вершины начального многогранника P_0 выходит по 3 ребра. Тогда при огранке от P_0 отрезается v тетраэдров, где v – количество вершин у P_0 . При отсечении тетраэдра исчезает одна вершина многогранника P_0 , а вместо нее появляются три новые вершины многогранника P_1 . Значит, количество вершин у P_1 равно $3v$.

Если последовательно выполнить операцию «огранка» с данным многогранником P_0 , затем с полученным многогранником P_1 и т.д., мы получим последовательность вложенных друг в друга многогранников $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$

Теперь предположим, что с многогранником выполняется операция «огранка», удовлетворяющая следующему метрическому условию: каждое ребро делится точками пересечения с плоскостями-ножами в отношении $\lambda : (1 - 2\lambda) : \lambda$ для некоторой константы $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Назовем такую операцию « λ -огранка».

Снова возьмем некоторый начальный выпуклый многогранник P_0 , из каждой вершины которого выходит по 3 ребра, например пусть P_0 – куб. Применяя многократно λ -огранку, получим из P_0 последовательность многогранников $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$. Совсем не просто представить себе, какую форму имеет тело P , получаемое в пределе (т.е. тело, равное пересечению всех многогранников P_i). Но оказывается, не так сложно вычислить объем этого тела. Покажем, как это можно сделать.

Пусть на k -м шаге λ -огранки (т.е. при получении многогранника P_k из P_{k-1}) одним из отрезанных тетраэдров был $ABCD$, где A – вершина многогранника P_{k-1} , а B, C, D – вершины многогранника P_k на ребрах AB', AC', AD' многогранника P_{k-1} (см. рисунок).



Тогда на $(k+1)$ -м шаге были отрезаны три тетраэдра с вершинами B, C, D , пусть $BXYZ$ – один из этих тетраэдров, так что X лежит на луче AB , а Y и Z – на отрезках BC и BD . Так как $BY/BC = BZ/BD = \lambda$, отношение площадей $S_{BYZ}/S_{BCD} = \lambda^2$. Длина BX составляет долю λ от оставшейся после λ -огранки части ребра AB' , т.е. $BX = \lambda(1 - 2\lambda)AB' = (1 - 2\lambda)AB$. Тогда отношение высот к плоскости BCD в тетраэдрах $BXYZ$ и $ABCD$

равно $BX/AB = 1 - 2\lambda$. Отсюда отношение объемов $V_{BXYZ}/V_{ABCD} = \lambda^2(1 - 2\lambda)$. Следовательно, объем U_{k+1} , отрезаемый на $(k+1)$ -м шаге λ -огранки, составляет долю $3\lambda^2(1 - 2\lambda)$ от объема U_k , отрезаемого на k -м шаге.

Видим, что отрезаемые объемы U_1, U_2, \dots образуют (убывающую) геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 3\lambda^2(1 - 2\lambda)$. Тогда общий отрезаемый на всех шагах объем равен

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 + U_3 + \dots &= \\ &= U_1(1 + q + q^2 + q^3 + \dots) = \\ &= \frac{U_1}{1 - q}. \end{aligned}$$

Например, если P_0 – единичный куб, а $\lambda = 1/3$ (т.е. на каждом шаге огранки каждое ребро многогранника делится на 3 равных части), то легко видеть, что $U_1 = \frac{4}{81}$, $q = \frac{1}{9}$, общий отрезаемый объем равен

$$\frac{U_1}{1 - q} = \frac{1}{18}.$$

Значит, в этом случае объем предельного тела P равен $\frac{17}{18}$.

В заключение отметим, что плоский вариант огранки квадрата рассматривался в разных изданиях, например в Энциклопедии для детей (т. 11, Математика. – М.: Аванта+).

Вниманию наших читателей

Подписаться на журнал «Квант» можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: biblio.mcsme.ru), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>

Олимпиада «Ломоносов»

Физика

В 2022/23 учебном году олимпиада «Ломоносов» по физике в МГУ проводилась в два этапа – отборочный и заключительный.

Отборочный этап

Отборочный этап проходил в форме заочного испытания. Задания отборочного этапа составлялись отдельно для учащихся младших (7–9) и старших (10–11) классов. Эти задания были размещены в личных кабинетах участников на сайте <http://olymp.msu.ru>. Доступ к условиям заданий был открыт для участников с 5 по 12 ноября 2022 года. Прием решений и ответов для каждой группы учащихся прекращался одновременно с их завершением.

Поскольку числовые данные в условиях задач для каждого участника были индивидуальными, приводимые здесь решения задач и ответы к ним даны в общем виде.

Победители и призеры отборочного этапа были приглашены для участия в заключительном этапе олимпиады.

7–9 классы

1. Материальная точка, равномерно движущаяся по окружности, за время τ переместилась на расстояние $l = 4$ м, пройдя при этом путь, равный $s = \pi l/3 \approx 4,19$ м. Найдите ускорение a материальной точки. Ответ округлите до сотых.

2. Брусок массой m лежит на доске массой km , как показано на рисунке 1. Доска располагается на гладком горизонтальном столе, а брусок соединен с грузом массой m с помощью невесомого блока и невесомой нерастяжимой нити, отрезок которой от блока до бруска горизонтален. Коэффициент тре-

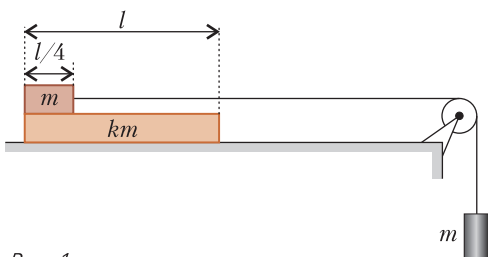


Рис. 1

ния между поверхностями доски и бруска μ . Груз удерживают так, что нить слегка натянута, и в некоторый момент времени отпускают из состояния покоя. Пренебрегая трением между поверхностью доски и столом, а также трением в оси блока, определите расстояние Δx , на которое сместится доска за время, в течение которого брусок будет находиться на доске всей своей поверхностью, если длина доски l , а длина бруска $l/4$.

3. В сосуд, содержащий воду массой $m_b = 200$ г при температуре $t_1 = 10^\circ\text{C}$, бросили кусок льда с вмёрзшей в него железной деталью, имеющий суммарный объем $V = 125$ см³ и температуру $t_2 = 0^\circ\text{C}$. После того как сосуду сообщили количество теплоты Q , температура его содержимого оказалась равной $t_3 = 20^\circ\text{C}$. Найдите массу детали m_d . Теплоемкостью сосуда и потерями тепла можно пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c_b = 4,2$ Дж/(г·°C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 334$ Дж/г, плотность льда $\rho_l = 0,9$ г/см³, удельная теплоемкость железа $c_{ж} = 0,46$ Дж/(г·°C), плотность железа $\rho_{ж} = 7,8$ г/см³. Ответ приведите в граммах, округлив до целых.

4. Два проводника, соединенные параллельно, имеют сопротивление $R_{\text{пар}} = 3$ Ом. Сопротивление одного из этих проводников $R_1 = 4$ Ом. Найдите сопротивление цепи $R_{\text{послед}}$ при последовательном соединении этих проводников. Ответ округлите до десятых.

5. Две прямые дороги AB и CB пересекаются в точке B под углом $\alpha = 45^\circ$ (рис. 2). На перекрестке B установлено широкое плоское зеркало, расположенное перпендикулярно дороге AB так, что велосипедист, едущий к точке B по дороге CB , видит в зеркале бегуна, направляющегося к точке B по дороге AB . Какова скорость бегуна v , если скорость велосипедиста V , а изображение бегуна приближается к велосипедисту с относительной скоростью $u = \sqrt{2}V$?

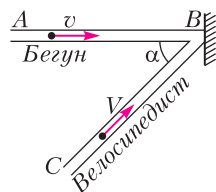


Рис. 2

10–11 классы

1. Два автомобиля едут друг за другом с постоянной скоростью V по горизонтальному прямолинейному шоссе. Асфальт на шоссе мокрый из-за недавно прошедшего дождя. На каком минимальном расстоянии s от переднего автомобиля должен держаться автомобиль, идущий позади, чтобы брызги от колес переднего автомобиля на него не попадали? При расчете учтите, что для впереди идущего автомобиля угол между горизонталью и касательной к заднему колесу, проведенной через край брызговика (рис. 3), равен

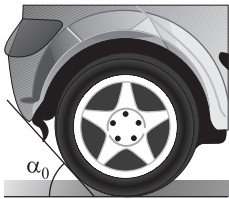


Рис. 3

$\alpha_0 = 42^\circ$. Влиянием воздуха на движение капель воды можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10 \text{ м/с}^2$. Ответ приведите в метрах, округлив до десятых.

2. С каким максимальным ускорением a_{max} может тронуться с места автомобиль с задними ведущими колесами, если коэффициент трения между шинами и асфальтом $\mu = 0,4$? Расстояние между передней и задней осями автомобиля $L = 4 \text{ м}$, а его центр тяжести расположен посередине между осями на расстоянии $h = 0,8 \text{ м}$ от дороги. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10 \text{ м/с}^2$. Ответ округлите до сотых.

3. В гладком цилиндре 1 под поршнем массой $m = 5 \text{ кг}$ находится идеальный газ. Цилиндр 1 соединен трубкой, снабженной краном, с таким же цилиндром 2, как показано на рисунке 4. Во втором цилиндре под поршнем массой $M = 10 \text{ кг}$ находится такой же газ, как и в цилиндре 1. В начальном состоянии кран K закрыт, а поршень в цилиндре 2 находится на высоте H от дна. На

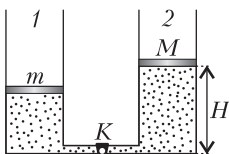


Рис. 4

какое расстояние Δh переместится поршень в цилиндре 1 после открывания крана? Температура газа в первом цилиндре в течение всего процесса поддерживается постоянной и равной $T_1 = 300 \text{ К}$, а во втором цилиндре – постоянной и равной $T_2 = 350 \text{ К}$. Объемом трубки с краном можно пренебречь, атмосферное давление не учитывайте. Толщина поршней больше диаметра соединительной трубки. Ответ приведите в сантиметрах, округлив до целых.

4. Тонкое диэлектрическое кольцо радиусом $R = 10 \text{ см}$ равномерно зарядили положительным зарядом Q . Затем из кольца вырезали и удалили небольшой кусочек, размер которого определяется малым углом $\Delta\phi = 0,01 \text{ рад}$ (рис. 5). На расстоянии $h = R$

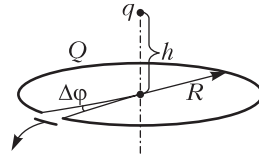


Рис. 5

от плоскости кольца на его оси поместили точечный заряд $q = +1 \text{ нКл}$. Найдите модуль F силы, действующей на заряд. Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$. Ответ приведите в наноньютонах, округлив до целых.

5. На закрепленный зеркальный шар радиусом $R = 10 \text{ см}$ падает узкий параллельный пучок света мощностью N . Ось падающего пучка света проходит на расстоянии $a = 5 \text{ см}$ от центра шара. Найдите модуль F силы, с которой свет действует на шар. Скорость света $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. Ответ приведите в наноньютонах, округлив до десятых.

Заключительный этап

Проведение заключительного этапа олимпиады было назначено на 5 марта 2023 года. Для учащихся всех классов этот этап проходил в очной форме на физическом факультете МГУ и на региональной площадке в городе Астана (Казахстан).

Задание для учащихся 7–9 классов состояло из пяти задач по темам, изучаемым в рамках программы по физике для основной общеобразовательной школы. Задания для учащихся 10–11 классов были составлены в полном соответствии с Кодификатором ЕГЭ 2023 года по физике и охватывали

основные разделы Кодификатора. Типовое задание состояло из пяти задач из различных разделов.

7–9 классы

1. Шуховская телебашня в Москве имеет высоту $H = 148,5$ м и массу $M = 240$ т. Какую массу m будет иметь точная копия этой башни, если ее изготовить из материала, плотность которого ρ_2 в 3 раза меньше плотности материала ρ_1 оригинальной конструкции: $\rho_2 = \rho_1/3$? Высота копии башни $h = 50$ см. Ответ выразите в граммах, округлив до целых.

2. Горячий чай наливают до краев в большую кружку цилиндрической формы. В результате теплообмена с окружающей средой чай охлаждается на $\Delta t = 1^\circ\text{C}$ за время $\tau_1 = 1$ мин. За какое время τ_2 охладится на величину Δt тот же чай, если его разлить на восемь одинаковых маленьких кружек, наполнив их до краев? Считайте, что большая и маленькая кружки подобны друг другу. Теплоемкостью кружек пренебречь.

3. На рисунке 6 изображен участок цепи постоянного тока. Сопротивления резисторов $R_1 = R_3$. Показания амперметров A_1 и A_2

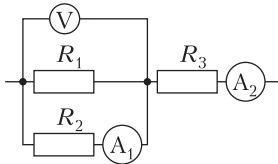


Рис. 6

равны $I_1 = 0,2$ А и $I_2 = 1,2$ А соответственно. Показание идеального вольтметра V равно $U = 12$ В. Определите мощность P_3 , выделяющуюся на резисторе сопротивлением R_3 . Сопротивлением подводящих проводов и обоих амперметров можно пренебречь.

4. Прямоугольная трапеция $ABCD$ расположена перед тонкой линзой с фокусным расстоянием $F = 20$ см так, как показано на рисунке 7. Определите площадь изображе-

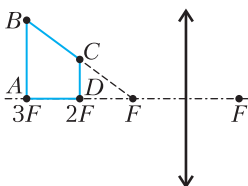


Рис. 7

ния этой трапеции. Стороны AB и CD трапеции перпендикулярны главной оптической оси линзы, причем $AB = 0,2 F$, $CD = 0,1 F$, $AD = F$. Ответ приведите в квадратных сантиметрах.

5. Цилиндрическая пробка радиусом $r = 5$ см и высотой $h = 2$ см с нулевой начальной скоростью падает в сосуд, который заполнен водой частично (рис. 8), поэтому при паде-

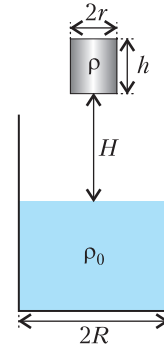


Рис. 8

нии пробки вода из сосуда не выливается. Сосуд также имеет форму цилиндра радиусом $R = 50$ см. До падения высота нижнего торца пробки над уровнем воды была равна $H = 20$ см. Плотность материала, из которого сделана пробка, $\rho = 400$ кг/м³, плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м³. Какое количество теплоты Q выделится после того, как движение пробки и воды прекратится?

10–11 классы

1. Две легкие пружины одинаковой длины $L = 20$ см закреплены на гладком горизонтальном стержне (рис. 9). Жесткость первой пружины $k_1 = 3k$, а второй $k_2 = k$. К концам пружин прикреплены небольшие грузы массами $m_1 = m$ и $m_2 = 3m$. В положении равновесия грузы касаются друг друга. Сдвинув грузы вдоль стержня, пружины сжимают так, что их длина уменьшается в два раза. После этого грузы отпускают. Через некоторое время грузы сталкиваются и слипаются друг с другом. Определите амплитуду A колебаний образовавшегося тела, считая,

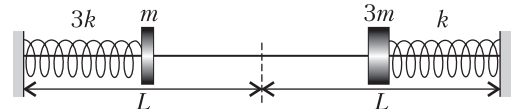


Рис. 9

что пружины деформированы упруго, а удар грузов друг о друга центральный.

2. В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде с запаянным дном, имеющем поперечное сечение $S = 100 \text{ см}^2$, под легкоподвижным поршнем массой $M = 100 \text{ кг}$ находится $m = 9 \text{ г}$ воды при температуре 0°C . Вся конструкция нагревается до температуры $t = 127^\circ\text{C}$. Определите высоту h , на которую поднимется поршень. Давление насыщенных паров воды при температуре $t = 127^\circ\text{C}$ равно $p_n = 2,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Атмосферное давление считайте равным $p_0 = 10^5 \text{ Па}$. Молярная масса воды $M = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$. Универсальную газовую постоянную и ускорение свободного падения примите равными $R = 8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ и $g = 10 \text{ м/с}^2$. Ответ выразите в сантиметрах.

3. Тонкой пластмассовой спице придали форму, изображенную на рисунке 10, изог-

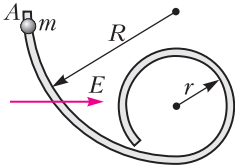


Рис. 10

нута ее в виде дуги, образующей четверть окружности радиусом $R = 1 \text{ м}$, и кольцевого витка радиусом $r = 0,25 \text{ м}$. Плоскость дуги и витка расположена вертикально. По спице может без трения перемещаться маленькая бусинка массой $m = 1 \text{ г}$, несущая заряд $q = 10^{-6} \text{ Кл}$. Вся система помещена в однородное электрическое поле напряженностью $E = 10^3 \text{ В/м}$, направленное горизонтально в плоскости дуги и витка. Бусинку помещают в точку A , в которой касательная к дуге окружности радиусом R вертикальна, и отпускают без начальной скорости. Чему равна максимальная скорость v_{max} бусинки? Заряд бусинки при движении остается неизменным. Поляризацией пластмассы и потерями энергии на излучение можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

4. Тонкая собирающая линза дает на экране изображение предмета с увеличением $\Gamma = 3$. Какова оптическая сила D линзы, если рас-

стояние между предметом и экраном $L = 80 \text{ см}$?

5. Оптическая система состоит из четырех одинаковых тонких собирающих линз диаметром $2a = 4,5 \text{ см}$ каждая, расположенных, как показано на рисунке 11. Оптические

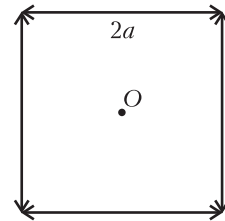


Рис. 11

оси всех линз находятся в одной плоскости и пересекаются в точке O , которая совпадает с фокусом каждой линзы. В центр системы (точку O) помещают источник света сферической формы. Определите минимальный радиус источника света R_{min} , при котором такая система будет излучать свет по всем направлениям в плоскости рисунка. Ответ приведите в сантиметрах, округлив до целых.

Публикацию подготовил С.Чесноков

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

Лингвистические задачи

(см. «Квант» №3)

Зверь не стол, а собака не медведь...

По данным множествам и подмножествам слов выделяются следующие признаки.

1. Одушевленный.
2. Не человек (животное).
3. Летящий.
4. Одомашненный.

Ответом является любое слово, обозначающее домашнюю птицу, например, слово *голубь* из подмножества 4 (а).

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №3)

1. Суммы равны.

Запишем обе суммы столбиком, причем вторую для большей наглядности в обратном порядке (рис. 1). В обеих суммах в разряде единиц будут

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 1 \\
 22 \\
 333 \\
 4444 \\
 55555 \\
 666666 \\
 7777777 \\
 88888888 \\
 999999999 \\
 \hline
 5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 987654321 \\
 98765432 \\
 9876543 \\
 987654 \\
 98765 \\
 9876 \\
 987 \\
 98 \\
 9 \\
 \hline
 5
 \end{array}
 \end{array}$$

Рис. 1

складываться цифры от 1 до 9, в разряде десятков – цифры от 2 до 9, в разряде сотен – цифры от 3 до 9 и так далее. И цифра, получающаяся в каждом разряде, и перенос в старший разряд окажутся в обоих случаях одинаковыми. Поэтому и результат сложения будет один и тот же.

Обе суммы, конечно, можно непосредственно вычислить, получается 1097393685. Но это достаточно трудоемкий и неинтересный путь.

2. Желтых 34, синих 20, красных 46.

Между 3-м и 23-м красными расположено 19 сидений, значит, между 7-м синим и 7-м желтым их столько же. Это первые шесть желтых сидений и, стало быть, $19 - 6 = 13$ синих с номерами, большими 7. Отсюда находим, что синих сидений $7 + 13 = 20$.

Проходя полкруга по часовой стрелке от 3-го красного к 7-му синему сиденью (рис. 2), мы минусем (не считая этих двух) $(100 - 2) : 2 = 49$ сидений. Шесть из них синие, а остальные $49 - 6 = 43$ – красные. Поэтому всего красных сидений $3 + 43 = 46$. Количество желтых сидений $100 - 20 - 46 = 34$.

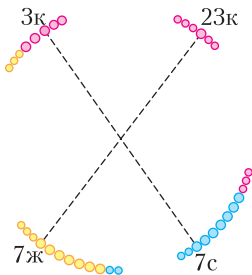


Рис. 2

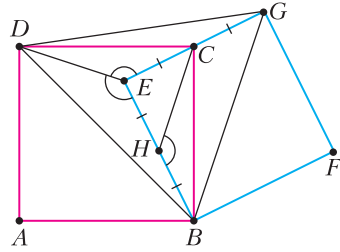


Рис. 3

3. Первое решение. Рассмотрим треугольники DEG и DEB (рис. 3). У них общая сторона DE , равные стороны EG и EB (как две стороны квадрата). Осталось доказать, что углы DEG и DEB равны, тогда указанные треугольники будут равны (по двум сторонам и углу между ними), а значит, будут равны и соответственные стороны DG и DB .

Равенство этих углов можно доказать так. Отметим H – середину отрезка EB . Заметим, что $HB = EC$ как половины стороны квадрата, а также $BC = DC$, $\angle HBC = 90^\circ - \angle ECB = \angle ECD$. Значит, треугольники HBC и ECD равны по двум сторонам и углу между ними. Так как треугольник EHC равнобедренный прямоугольный, $\angle EHC = 45^\circ$, а $\angle DEG = \angle CHB = 180^\circ - \angle EHC = 135^\circ$. Но тогда и $\angle DEB = 360^\circ - \angle DEG - \angle GEB = 360^\circ - 135^\circ - 90^\circ = 135^\circ$.

Второе решение. Заметим, что $BD = AC$ как диагонали квадрата. Если мы докажем, что треугольники CEA и GCD (на рисунке 4 отмечены голубым) равны, то из равенства соответственных сторон AC и DG будет следовать $DG = AC = BD$. Как доказать равенство этих треугольников?

Рассмотрим треугольники ABE и CBF . У каждого из них две стороны равны сторонам исходных квадратов. Равны и углы между этими сторонами: каждый из них дополняет угол EBC до прямого угла квадрата. Значит, эти треугольники равны.

Но треугольник BCF равнобедренный (так как он «расположен в квадрате симметрично»; более формально: CB и CF – гипотенузы прямоуголь-

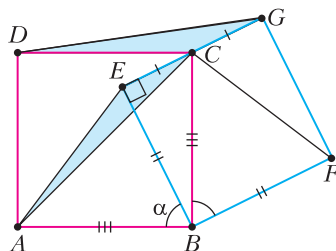


Рис. 4

ных треугольников CBE и CFG , равных по двум катетам). Значит, $CF = CB = AB = AE$.

Теперь мы знаем, что в голубых треугольниках равны стороны AE и DC , а стороны CE и CG равны по условию. Осталось доказать, что равны углы между сторонами.

Если угол при основании равнобедренных треугольников ABE и CBF равен α , то $\angle AEC = 90^\circ + \alpha$. Но и $\angle DCG = 360^\circ - \angle BCD - \angle BCG = 360^\circ - 90^\circ - (180^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$ ($\angle CBF = \alpha$ и $\angle BCG$ дают в сумме 180° как односторонние при параллельных сторонах квадрата и секущей BC).

Равенство голубых треугольников (а вместе с ним и утверждение задачи) доказано.

Третье решение. Перенесем чертеж на клетчатую бумагу (рис. 5). Начнем с квадрата $BEGF$:

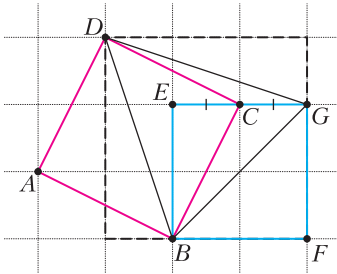


Рис. 5

пусть это клетчатый квадрат 2×2 . По отрезку BC построим квадрат $ABCD$. Теперь видно, что отрезки DG и DB равны как гипотенузы прямоугольных треугольников с катетами длиной в 1 клетку и в 3 клетки.

Комментарий. Есть множество дополнительных построений, которые также позволяют решить задачу. Вот некоторые из них (рис. 6–8).

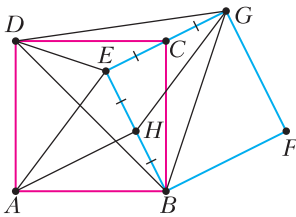


Рис. 6

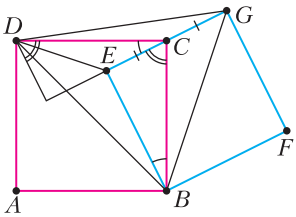


Рис. 7

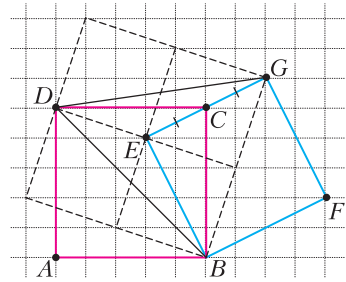
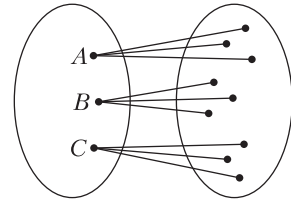


Рис. 8

4. Да, могло.

Разделим семиклассников на две группы по 50 учеников. Пусть в каждой группе все ученики дружат со всеми, причем у троих учеников A, B и C из первой группы есть еще по 3 разных друга во второй группе, и больше никто ни с кем не дружит (рис. 9).



Группа №1 Группа №2

Рис. 9

Тогда в клубе «Гепарды», основанном любимыми тремя учениками второй группы, после первого дня будет состоять вся вторая группа, после второго дня в него будут входить A, B и C из первой, а уже после третьего дня в клубе «Гепарды» будут состоять все ученики параллели. Если же основателями клуба «Черепахи» будут A, B и C из первой группы, то на следующий день вся первая группа будет в клубе «Черепахи», но ни у кого из второй группы нет трех друзей в первой, поэтому никто из второй группы в этот клуб не попадет.

Конкурс имени А.П.Савина

(см. «Квант» №2)

21. Федя не учел, что в массу каждой гантели, не важно какого радиуса, входит еще одна и та же масса стержня; диаметр дисков у гантелей массой 13 кг равен 11 см.

Диски гантелей диаметров 5 см и 7 см отличаются на «кольцо» шириной 2 см, а по массе такие гантели различаются на 2 кг. Значит, изменение массы гантелей на 2 кг соответствует изменению площади одного диска на площадь такого кольца, т.е. на $\pi \cdot (7^2 - 5^2) = 24\pi$. Гантели массой 13 кг

тяжелее семикилограммовых гантелей на 6 кг, значит, площадь диска такой гантели будет на $3 \cdot 24\pi = 72\pi$ больше. Тогда площадь диска равна $\pi \cdot (7^2 + 72) = \pi \cdot 121 = \pi \cdot 11^2$, следовательно, радиус диска такой гантели равен 11 см.

22. 30° .

Обозначим правую нижнюю вершину прямоугольника буквой E и проведем отрезок BD (рис. 10). Углы BAC и BCA при основании рав-

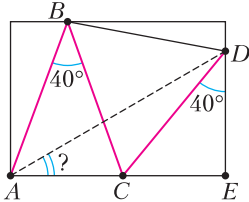


Рис. 10

нобедренного треугольника ABC равны $(180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$, а угол DCE в прямоугольном треугольнике CDE равен $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$. Следовательно, $\angle BCD = 180^\circ - \angle ACB - \angle DCE = 180^\circ - 70^\circ - 50^\circ = 60^\circ$. Но треугольник BCD равнобедренный, а значит, и равносторонний. Тогда $BD = BC = BA$, и треугольник ABD – равнобедренный, причем $\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD = 40^\circ + 60^\circ = 100^\circ$. Значит, $\angle BAD = (180^\circ - 100^\circ) : 2 = 40^\circ$, и, наконец, $\angle CAD = \angle CAB - \angle BAD = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$.

23. а) 4 тройки: (1, 2, 2), (3, 3, 9), (1, 7, 7) и (5, 5, 7). Рассмотрим остатки при делении на 8. Число, оканчивающееся на три девятки, дает остаток 7 при делении на 8. Квадрат целого числа может давать при делении на 8 только остатки 0, 1 или 4; три таких числа не могут в сумме давать 7. Поэтому число не может оканчиваться на три девятки, а значит, оно равно 9 или 99.

Если $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, то подходит только вариант (1, 2, 2).

Если же $x^2 + y^2 + z^2 = 99$, то вернемся к рассмотрению остатков. Число 99 дает остаток 3 при делении на 8, единственный способ получить такую сумму – когда все квадраты дают остатки 1. Значит, x, y, z нечетны, поэтому квадраты могут быть равны только 1, 9, 25, 49 или 81. Дальше несложно перебрать все варианты, но можно еще сократить перебор с помощью дополнительных соображений. При делении на 3 квадраты могут давать только остатки 0 или 1, и раз в сумме они делятся на 3, то все три квадрата при делении на 3 дают одинаковые остатки. Квадраты, дающие остаток 0, это 9 и 81, нам подходит вариант (3, 3, 9). Квадраты, дающие остаток 1, это 1, 25 и 49, подходят варианты (1, 7, 7) и (5, 5, 7).

б) Бесконечно много.

Пусть $x = y = 1$, тогда выражение принимает вид $1 + 2z$. Любое число из одних девяток является нечетным и поэтому такое z существует: $z = 99 \dots 98/2$. Возможно, существуют и другие примеры, но количество приведенных примеров уже бесконечно.

24. 10.

На рисунке 11 синим цветом отмечены 10 клеток так, что никакой конь не может бить сразу

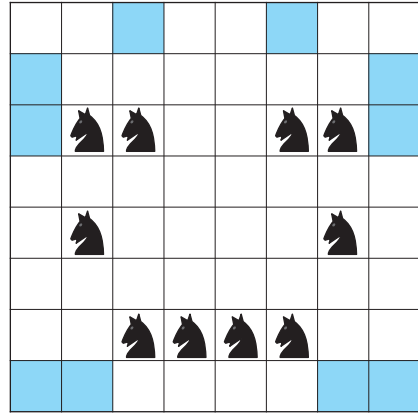


Рис. 11

две синие клетки. Существование такого набора клеток означает, что потребуется не меньше 10 коней.

При этом 10 коней достаточно – пример расстановки коней показан на том же рисунке.

Олимпиада «Ломоносов»

Физика

Отборочный этап

7–9 классы

1. Пусть R – радиус окружности, по которой движется материальная точка, а φ – угол, на который за время τ поворачивается линия, соединяющая точку с центром окружности. Из рисунка 12 видно, что перемещение точки за время τ равно $l = 2R \sin \frac{\varphi}{2}$, а пройденный ею за это время путь равен $s = R\varphi$. Из этих соотношений получаем уравнение для угла φ :

$$\varphi = 2 \frac{s}{l} \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{2\pi}{3} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Следовательно, радиус окружно-

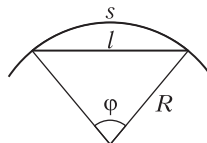


Рис. 12

сти, по которой движется точка, $R = l$. Учитывая, что модуль скорости точки $v = s/\tau$, получаем

$$a = \frac{\pi^2 l}{9 \tau^2}.$$

2. Тела системы движутся под действием сил, модули и направления которых изображены на рисунке 13, где mg – модуль силы тяжести, T –

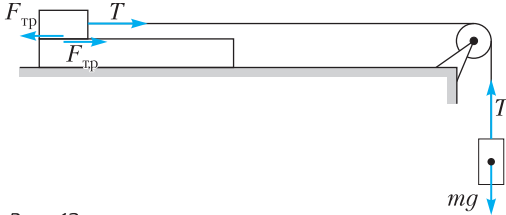


Рис. 13

модуль силы натяжения нити, $F_{тр}$ – модуль силы трения скольжения между бруском и доской, причем $F_{тр} = \mu mg$. Согласно второму закону Ньютона, уравнения движения тел в проекциях на направления их ускорений имеют вид

$$ma_1 = T - \mu mg \text{ (для бруска),}$$

$$ma_1 = mg - T \text{ (для груза),}$$

$$kma_2 = \mu mg \text{ (для доски).}$$

Здесь a_1 – модуль ускорения бруска, равный модулю ускорения груза, a_2 – модуль ускорения доски. Из этой системы находим

$$a_1 = \frac{1-\mu}{2} g, \quad a_2 = \frac{\mu}{k} g.$$

По закону равноускоренного движения перемещения бруска и доски за время t равны

$$\Delta x_1(t) = \frac{a_1 t^2}{2} \text{ и } \Delta x_2(t) = \frac{a_2 t^2}{2}.$$

По условию эти перемещения связаны соотношением

$$\Delta x_1(t_0) - \Delta x_2(t_0) = \frac{3}{4} l,$$

где t_0 – время движения бруска по доске всей поверхностью. Отсюда находим

$$t_0 = \sqrt{\frac{3kl}{g(k(1-\mu) - 2\mu)}},$$

$$\Delta x = \Delta x_2(t_0) = \frac{3\mu l}{2(k(1-\mu) - 2\mu)}.$$

3. Согласно первому закону термодинамики, количество теплоты, сообщенное сосуду, равно изменению внутренней энергии содержимого сосуда:

$$Q = m_b c_b (t_3 - t_1) + m_l \lambda + m_l c_l (t_3 - t_2) + m_d c_d (t_3 - t_2),$$

где m_l – начальная масса льда. Поскольку объем льда вместе с деталью равен $V = \frac{m_d}{\rho_d} + \frac{m_l}{\rho_l}$, то $m_l = \rho_l \left(V - \frac{m_d}{\rho_d} \right)$. Подставляя массу льда в уравнение теплового баланса, получаем

$$m_l = \frac{m_b c_b (t_3 - t_1) + \rho_l V (\lambda + c_b (t_3 - t_2)) - Q}{(\rho_l / \rho_d) (\lambda + c_b (t_3 - t_2)) - c_d (t_3 - t_2)}.$$

4. При параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление определяется по формуле

$$\frac{1}{R_{\text{пар}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \text{ откуда } R_{\text{пар}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

При последовательном соединении этих проводников их общее сопротивление

$$R_{\text{посл}} = R_1 + R_2 = \frac{R_1^2}{R_1 - R_{\text{пар}}}.$$

5. Построение изображения B_1 бегуна B представлено на рисунке 14. Относительно неподвижного наблюдателя это изображение движется по прямой $B_1 B$ навстречу бегуну со скоростью, модуль которой равен v . Используя закон сложения скоростей, находим, что относительно велосипедиста изображение бегуна движется со

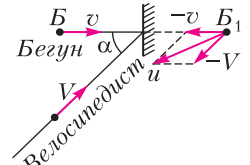


Рис. 14

скоростью $\vec{u} = -\vec{v} - \vec{V}$. По теореме косинусов $u^2 = v^2 + V^2 - 2vV \cos(\pi - \alpha)$. Учитывая, что $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, получаем квадратное уравнение

$$v^2 + 2vV \cos \alpha + V^2 - u^2 = 0.$$

Условию задачи удовлетворяет положительный корень:

$$v = \sqrt{V^2 \cos^2 \alpha + u^2 - V^2} - V \cos \alpha = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} V.$$

10–11 классы

1. Поскольку влияние воздуха мало, движение капли после отрыва от колеса автомобиля происходит под действием только силы тяжести. В неподвижной системе отсчета скорость капли при отрыве от колеса в точке A равна скорости \vec{v} этой точки на поверхности колеса (рис. 15). По закону сложения скоростей $\vec{v} = \vec{u} + \vec{V}$, где \vec{u} – скорость точки A относительно поступательно движущейся системы отсчета, связанной с цент-

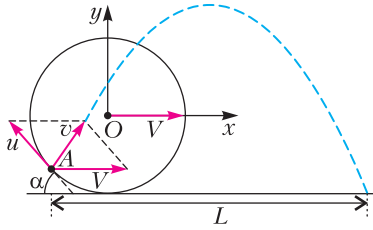


Рис. 15

ром колеса, \bar{V} – скорость автомобиля. Из условия отсутствия проскальзывания колес следует, что $u = V$. Пусть вектор \bar{u} образует с горизонталью некоторый угол α . Проекции на оси координат скорости капли, отрывающейся от колеса в точке A , равны $v_x = V - V \cos \alpha$ и $v_y = V \sin \alpha$. Траектория капли изображена на рисунке синей штриховой линией. Пренебрегая высотой точки A над поверхностью шоссе по сравнению с высотой подъема капли, получаем время полета капли:

$$t_0 = \frac{2v_y}{g} = \frac{2V \sin \alpha}{g}.$$

Дальность полета капли равна

$$L = v_x t_0 = \frac{2V^2}{g} (\sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha).$$

Перемещение идущего сзади автомобиля за время полета капли t_0 равно

$$L_A = V t_0 = \frac{2V^2 \sin \alpha}{g}.$$

Следовательно, для того чтобы рассматриваемая капля не попала на этот автомобиль, расстояние между автомобилями должно быть не менее

$$s = L_A - L = \frac{2V^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Максимум этого выражения достигается при $\alpha = 45^\circ$ и составляет $s_{\max} = V^2/g$. С другой стороны, предельное значение угла α равно α_0 , так как капли, оторвавшиеся от колеса выше точки, в которой касательная к окружности колеса составляет с горизонталью угол α_0 , будут задержаны брызговиком и колесной аркой и на идущий сзади автомобиль не попадут. Таким образом, минимальное расстояние между автомобилями, при котором капли воды, поднятые в воздух колесами первого автомобиля, не будут попадать на второй автомобиль, определяется соотношением

$$s = \frac{2V^2}{g} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0.$$

2. Автомобиль движется под действием сил, изображенных на рисунке 16, где $M\bar{g}$ – сила тяжести

ти, \bar{N}_3 и $\bar{N}_п$ – нормальные составляющие сил взаимодействия задних и передних колес автомобиля с дорогой соответственно, $\bar{F}_{тр}$ – сила трения покоя, приложенная к задним (ведущим) колесам.

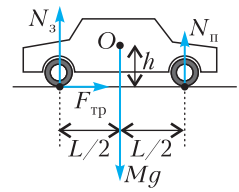


Рис. 16

Перейдем в неинерциальную систему отсчета, связанную с автомобилем, и запишем в этой системе уравнение моментов относительно центра масс автомобиля (точки O):

$$N_3 \frac{L}{2} = N_п \frac{L}{2} + F_{тр} h.$$

Замечание. В поступательно движущейся системе отсчета суммарный момент сил инерции, действующих на автомобиль, относительно его центра масс равен нулю.

Уравнение движения автомобиля в неподвижной системе отсчета имеет вид $Ma = F_{тр}$. Учтем, что максимально возможное значение силы трения покоя $F_{тр\max} = \mu N_3$ и что $N_п + N_3 = Mg$. Решая записанную систему уравнений, получаем

$$a_{\max} = \frac{\mu g}{2(1 - \mu h/L)}.$$

3. По условию задачи атмосферное давление не действует на поршни. Поскольку цилиндры являются гладкими, а находящийся в цилиндрах газ считается идеальным, уравнения состояния газа в цилиндрах до открывания крана можно представить в виде

$$mgh = \nu_1 RT_1, \quad MgH = \nu_2 RT_2,$$

где h – начальная высота поршня в первом сосуде, g – модуль ускорения свободного падения, R – универсальная газовая постоянная, ν_1 и ν_2 – количества газа в цилиндрах. После открывания крана поршень во втором цилиндре будет медленно опускаться, так как давление газа $\frac{Mg}{S}$ в этом цилиндре больше давления газа $\frac{mg}{S}$ в первом цилиндре (S – площадь поперечного сечения каждого из цилиндров). Процесс перемещения поршней закончится, когда более тяжелый поршень опустится на дно цилиндра 2, перекрыв соединительную трубку, а поршень в цилиндре 1 установится на такой высоте $h + \Delta h$ при температуре T_1 газа в нем, что

$$mg(h + \Delta h) = (\nu_1 + \nu_2) RT_1.$$

Из полученных соотношений, находим искомую

высоту поднятия поршня в первом цилиндре:

$$\Delta h = \frac{MT_1}{mT_2} H.$$

4. Напряженность \vec{E}_0 электрического поля, создаваемого равномерно заряженным кольцом на его оси, направлена по оси кольца. Ее модуль определяется известным выражением

$$E_0 = \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0(R^2 + h^2)^{3/2}}.$$

При $h = R$ модуль силы, действующей на заряд q со стороны целого кольца,

$$F_0 = \frac{Qq}{8\sqrt{2}\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Согласно принципу суперпозиции, удаление небольшой части заряженного кольца эквивалентно помещению на целое кольцо в месте выреза точечного заряда, равного по величине заряду $\Delta Q = Q \frac{\Delta\phi}{2\pi}$ вырезанной части и противоположно-го ему по знаку. Этот заряд действует на заряд q силой

$$F_1 = \frac{q\Delta Q}{4\pi\epsilon_0(R^2 + h^2)} = \frac{qQ\Delta\phi}{16\pi^2\epsilon_0 R^2}.$$

Следовательно, $\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_1$ (рис. 17). По теореме косинусов

$$F^2 = F_0^2 + F_1^2 - 2F_0F_1 \cos \alpha,$$

где $\alpha = 45^\circ$.

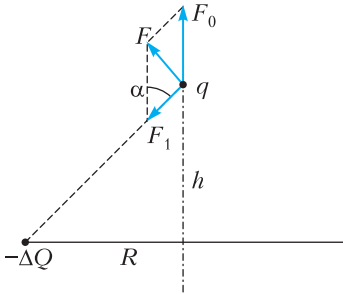


Рис. 17

Отсюда получаем

$$F = \frac{qQ}{8\sqrt{2}\pi\epsilon_0 R^2} \sqrt{1 - \frac{\Delta\phi}{\pi} + \frac{\Delta\phi^2}{2\pi^2}}.$$

5. При решении задачи будем считать шар неподвижным относительно инерциальной системы отсчета. Как известно, импульс фотона, обладающего энергией E , равен $\vec{p}_0 = \vec{k}_0 \frac{E}{c}$, где \vec{k}_0 — единичный вектор, совпадающий с направле-

ем скорости фотона. Поскольку на шар падает узкий параллельный пучок света, скорости всех падающих на шар фотонов направлены одинаково и продолжения их векторов проходят на расстоянии a от центра шара. По закону зеркального отражения угол падения и угол отражения равны. Поэтому приращение импульса фотона при зеркальном отражении от шара $\Delta\vec{p}_\phi = \Delta\vec{k} \frac{E}{c}$ направлено по нормали \vec{n} к поверхности шара в точке падения. Здесь $\Delta\vec{k} = \vec{k}_1 - \vec{k}_0 = 2\vec{n} \cos \alpha$, где \vec{n} — нормаль к поверхности шара, $\cos \alpha = \sqrt{1 - a^2/R^2}$. За время Δt на шар падает $n_0 = \frac{N\Delta t}{E}$ фотонов. Следовательно, на шар со стороны фотонов действует сила $\vec{F} = -n_0 \frac{\Delta\vec{p}_\phi}{\Delta t}$. Эта сила направлена к центру шара, а ее модуль равен

$$F = 2 \frac{N}{c} \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}.$$

Заключительный этап

7–9 классы

1. Отношение линейных размеров башни и ее копии $\frac{H}{h} = \alpha$. Поэтому отношение объемов конструкций башни и ее копии

$$\frac{V_6}{V_k} = \alpha^3 = \left(\frac{H}{h}\right)^3.$$

Плотности материалов оригинальной конструкции и ее копии равны, соответственно, $\rho_1 = \frac{M}{V_6}$ и $\rho_2 = \frac{m}{V_k}$. Следовательно,

$$m = \frac{M}{3} \left(\frac{h}{H}\right)^3.$$

2. Масса m_1 и объем чая V_1 в большой кружке и масса m_2 и объем чая V_2 в маленькой кружке различаются в восемь раз: $m_1 = 8m_2$, $V_1 = 8V_2$. Объем каждой чашки пропорционален кубу характерного размера чашки, а площадь поверхности — квадрату характерного размера. Следовательно, площади поверхностей S_1 и S_2 различаются в четыре раза. Тогда можно записать

$$cm_1\Delta t = kS_1(t_0 - t)\tau_1, \quad cm_2\Delta t = kS_2(t_0 - t)\tau_2,$$

где c — удельная теплоемкость чая, t_0 — температура окружающей среды. Отсюда получаем

$$\tau_2 = \frac{\tau_1}{2}.$$

3. Сила тока через резистор сопротивлением R_1 равна $I = \frac{U}{R_1}$. Так как сопротивление вольтметра велико, то $I + I_1 = I_2$. Отсюда получаем $R_1 = \frac{U}{I_2 - I_1}$. Следовательно, искомая мощность равна

$$P_3 = I_2^2 R_3 = I_2^2 R_1 = \frac{UI_2^2}{I_2 - I_1}.$$

4. Используя стандартный ход световых лучей, выполним построение изображения трапеции (рис. 18). Отметим, что это построение выпол-

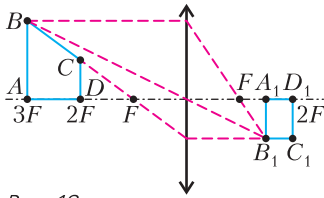


Рис. 18

нено качественно, без соблюдения истинных соотношений между масштабами сторон трапеции. Поскольку точки B и C лежат на прямой, проходящей через фокус линзы, сторона B_1C_1 изображения параллельна стороне A_1D_1 и расположена на расстоянии CD от нее. Длину отрезка A_1D_1 легко найти по формуле тонкой линзы: она равна $0,5F$. Таким образом, изображение трапеции представляет собой прямоугольник со сторонами $0,1F$ и $0,5F$. Следовательно, площадь изображения равна

$$S = 0,1F \cdot 0,5F^2 = 0,05 F^3.$$

5. После того, как движение пробки и воды прекратится, изменение кинетической энергии воды и пробки будет равно нулю, поэтому выделившееся количество теплоты равно изменению

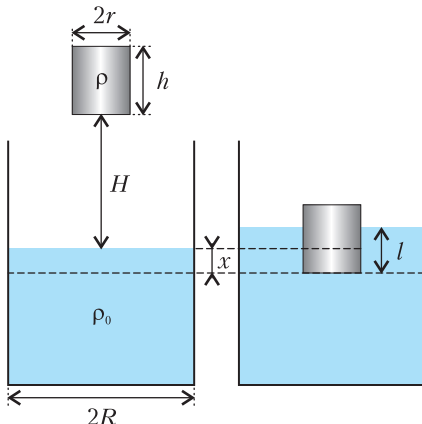


Рис. 19

потенциальной энергии пробки и воды. Глубину l погружения пробки в жидкость (рис. 19) определим из условия плавания:

$$\rho g h \pi r^2 = \rho_0 g l \pi r^2, \text{ откуда } l = \frac{\rho h}{\rho_0}.$$

Уменьшение потенциальной энергии пробки равно $mg(H + x)$, где $m = \rho h \pi r^2$. Увеличение потенциальной энергии жидкости равно $\Delta mg \frac{l-x}{2}$, где Δm – масса жидкости, потенциальная энергия которой увеличилась. Поскольку $\pi R^2 x = = \pi(R^2 - r^2)l$, то

$$\Delta m = \rho_0 \pi R^2 x = \rho_0 \pi R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{\rho h}{\rho_0} = \rho h \pi (R^2 - r^2).$$

В соответствии с законом сохранения механической энергии,

$$Q = mg(H + x) - \Delta mg \frac{l-x}{2}.$$

Окончательно получим

$$Q = \rho h \pi r^2 g \left(H + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{\rho h}{\rho_0} \right) - \rho h \pi (R^2 - r^2) g \frac{1 - \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{\rho h}{\rho_0}}{2} = \rho h \pi r^2 g \left(H + \frac{\rho h}{2\rho_0} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \right).$$

10–11 классы

1. Так как пружины деформированы упруго и стержень гладкий, то после отпуска груза будут двигаться по гармоническому закону. При этом их можно считать материальными точками. Направим координатную ось x вдоль движения грузов, а начало координат выберем в положении равновесия. Тогда законы движения грузов запишутся в следующем виде:

$$x_1(t) = -\frac{L}{2} \cos \sqrt{\frac{3k}{m}} t, \quad x_2(t) = \frac{L}{2} \cos \sqrt{\frac{k}{3m}} t.$$

В момент столкновения грузов их координаты становятся равными:

$$x_1(t_0) = x_2(t_0), \text{ или}$$

$$\frac{L}{2} \left(\cos \sqrt{\frac{k}{3m}} t_0 + \cos \sqrt{\frac{3k}{m}} t_0 \right) = 0.$$

Используя известное тригонометрическое соотношение, представим это уравнение в виде

$$2 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{3m}} + \sqrt{\frac{3k}{m}} \right) \frac{t_0}{2} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{3m}} - \sqrt{\frac{3k}{m}} \right) \frac{t_0}{2} = 0.$$

Нам нужен наименьший положительный корень этого уравнения, следовательно:

$$\left(\sqrt{\frac{k}{3m}} + \sqrt{\frac{3k}{m}} \right) t_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда найдем время, через которое произойдет столкновение грузов:

$$t_0 = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{3m}{k}}.$$

Координата места столкновения при этом равна

$$x_0 = \frac{L}{2} \cos \sqrt{\frac{k}{3m}} t_0 = \frac{L\sqrt{2}}{4}.$$

Проекции скоростей грузов на ось x перед столкновением равны

$$v_1(t_0) = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{3k}{m}} \sin \sqrt{\frac{3k}{m}} t_0 = \frac{L\sqrt{2}}{4} \sqrt{\frac{3k}{m}},$$

$$v_2(t_0) = -\frac{L}{2} \sqrt{\frac{k}{3m}} \sin \sqrt{\frac{k}{3m}} t_0 = -\frac{L\sqrt{2}}{4} \sqrt{\frac{k}{3m}}.$$

По закону сохранения импульса скорость слипшихся грузов сразу после соударения равна

$$u = \frac{mv_1(t_0) + 3mv_2(t_0)}{4m} = 0.$$

Таким образом, это положение является наибольшим отклонением получившегося тела от положения равновесия. Так как положение равновесия тела совпадает с началом координат (пружины в этом положении не деформированы), то $A = x_0$. Окончательно получаем

$$A = x_0 = \frac{L\sqrt{2}}{4}.$$

2. Давление насыщенного пара воды при конечной температуре системы $T = t + 273 \text{ K} = 400 \text{ K}$ больше, чем давление за счет веса поршня и давления внешней атмосферы. Оно равно $p = p_0 + \frac{Mg}{S}$. Поэтому поршень будет подниматься над поверхностью воды, пока она вся не превратится в ненасыщенный пар, обеспечивающий данное давление. Уравнение состояния газа имеет вид $pV = \frac{m}{M} RT$, где объем, занимаемый паром, $V = Sh$. Окончательно получаем

$$h = \frac{mRT}{M(p_0S + Mg)}.$$

3. Бусинка движется под действием трех сил: силы тяжести $m\vec{g}$, кулоновской силы $q\vec{E}$ и силы реакции спицы \vec{N} . Первые две силы образуют однородное силовое поле, направленное под углом α к вертикали, причем $\alpha = \arctg \frac{qE}{mg}$ (рис. 20).

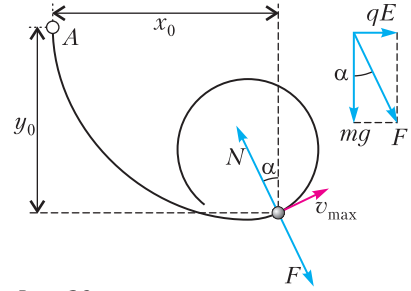


Рис. 20

Скорость бусинки максимальна в точке, в которой вектор скорости перпендикулярен суммарной силе, действующей на нее. Как видно из рисунка, эта точка лежит на пересечении прямой, проходящей через центр витка под углом α к вертикали, с окружностью радиусом r в нижней ее части. Для нахождения максимальной скорости воспользуемся законом сохранения энергии. Выберем точку A за точку отсчета потенциальной энергии. Тогда

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = qEx_0 + mgy_0, \text{ где } x_0 = R + r \sin \alpha, \\ y_0 = R - r(1 - \cos \alpha).$$

Учитывая, что

$$\sin \alpha = \frac{qE}{\sqrt{(mg)^2 + (qE)^2}}, \cos \alpha = \frac{mg}{\sqrt{(mg)^2 + (qE)^2}},$$

после несложных преобразований находим

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2}{m} \sqrt{qER + mg(R - r) + r\sqrt{(qE)^2 + (mg)^2}}}.$$

4. По формуле тонкой линзы, $D = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, где a и b – расстояния от предмета до линзы и от линзы да изображения. По условию задачи $\frac{b}{a} = \Gamma$, $a + b = L$. Объединяя записанные выражения, получаем

$$D = \frac{(\Gamma + 1)^2}{\Gamma L}.$$

5. Как сказано в условии задачи, точка O является фокусом линз. Поэтому если поместить в нее точечный источник света, то, как видно из рисунка 21, a , свет не будет проходить в области, закрашенные серым цветом. Однако если вместо точечного источника взять источник сферической формы, то при достаточных его размерах свет будет попадать и в эти области, распространяясь по всем возможным направлениям. Поскольку система симметричная, достаточно рассмотреть ход луча, например, AC , идущего от

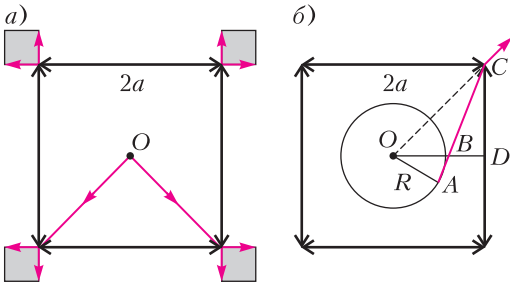


Рис. 21

одной из крайних точек сферического источника света (рис. 21, б). Чтобы оптическая система могла излучать свет по всем направлениям в плоскости рисунка, достаточно, чтобы этот луч выходил под углом 45° к плоскости расположения правой линзы. Тогда продолжение этого луча пройдет через точку O . Из подобия треугольников AOB и BCD можно записать

$$\frac{AB}{OA} = \frac{BD}{CD}, \text{ где } OA = R, CD = a.$$

Отсюда следует, что $R \cdot BD = a \cdot AB$. Длину отрезка BD можно найти, используя формулу тонкой линзы для виртуального источника, расположенного в точке B :

$$\frac{1}{BD} - \frac{1}{OD} = \frac{1}{F}.$$

Поскольку $OD = F = a$, получим $BD = \frac{a}{2}$. Длину отрезка AB найдем, используя теорему Пифагора: $AB = \sqrt{OB^2 - R^2}$. Учитывая, что $OB = OD - BD = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$, найдем $AB = \sqrt{\frac{a^2}{4} - R^2}$.

Подставляем выражения для BD и AB в полученное ранее соотношение и находим

$$R_{\min} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Региональный этап LVII Всероссийской олимпиады школьников по физике

(см. «Квант» №3)

8 класс

1. Перейдем в систему отсчета, связанную с трубой. Скорость левого шарика будет равна $1,1v$, тогда

$$\tau_1 = \frac{L}{1,1v} = \frac{10L}{11v}.$$

Скорость правого шарика в этой системе отсчета равна $1,9v$, откуда

$$\tau_2 = \frac{L}{1,9v} = \frac{10L}{19v}.$$

После соударения с торцевыми стенками трубы скорости шариков останутся такими же по модулю. К моменту времени τ левый шарик пройдет путь $L + l_1 = 1,1v\tau$. Путь, пройденный вторым шариком к этому моменту, равен $L + l_2 = 1,9v\tau$, причем $l_1 + l_2 = 2L$. Отсюда находим

$$\tau = \frac{4L}{3v}.$$

Вернемся в неподвижную систему отсчета. Скорость левого шарика в ней будет равна $1,1v + 0,1v = 1,2v$, скорость правого шарика будет равна $1,9v - 0,1v = 1,8v$. Таким образом,

$$u_1 = 1,2v, u_2 = 1,8v.$$

2. Согласно условию, $p_0 = \rho g \cdot 10h = 10\rho gh$. Полное давление в жидкости $p = p_{\text{внеш}} + p_{\text{гидрост}}$. Пройдем по трубке от левой свободной поверхности к правой:

$$0,8p_0 + 4\rho g \cdot 2h - \rho g \cdot 3h + k\rho g \cdot 4h - 3\rho g \cdot 3h = p_0.$$

С учетом первого уравнения получаем

$$k = 1,5.$$

Так как давление на левый свободный уровень увеличится, то он опустится. Значит, правый свободный уровень поднимется на ту же величину. Если считать смещение равным s , то

$$p_0 + 4\rho g(2h - 2s) - \rho g(3h - 2s) + 1,5\rho g \cdot 4h - 3\rho g(3h + 2s) = p_0,$$

откуда

$$s = \frac{h}{6}.$$

3. Мощность плитки равна $N = cm\Delta t/\Delta\tau$, где m — масса воды объемом 5 литров, т.е. $m = \rho V = 5 \text{ кг}$, Δt — изменение температуры, $\Delta\tau$ — время, за которое это изменение произошло. Так как в период с момента времени τ_1 до момента времени τ_2 масса воды в кастрюле равна m , температура изменилась с t_1 до t_2 , то

$$N = \frac{cm(t_2 - t_1)}{\tau_2 - \tau_1} = 1,75 \text{ кВт}.$$

Если по ходу нагрева масса воды в кастрюле не меняется, то не меняется скорость нагрева $\Delta t/\Delta\tau = 5^\circ\text{C}/\text{мин}$. Значит, конечная температура равна

$$t_{\text{к}} = t_0 + 10\tau_0 \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = 70^\circ\text{C} \text{ (здесь } \tau_0 = 1 \text{ мин)}.$$

Пусть масса добавляемой воды в процессе эксперимента равна Δm . К моменту времени $8\tau_0$ нагреватель выделит количество теплоты $8N\tau_0$. Оно равно сумме количества теплоты, полученного водой массой m (оставшейся в сосуде после выливания), и количества теплоты, полученного

водой массой Δm :

$$8N\tau_0 = cm(t_1 - t_0) + c\Delta m(t_x - t_0),$$

где t_x – температура воды в момент ее забора, причем $t_x < t_1$. Отсюда

$$\Delta m = \frac{m}{t_x - t_0} \left(8\tau_0 \frac{t_2 - t_1}{\tau_2 - \tau_1} - t_1 + t_0 \right).$$

Видно, что Δm принимает минимальное значение при максимально возможном значении $t_x = 45^\circ\text{C}$, откуда

$$m_{\min} = 3 \text{ кг.}$$

Пусть τ – время, когда происходил забор воды из кастрюли. Исходя из того, что объем кастрюли 10 л, максимальная масса добавляемой воды может быть равна $m = 5$ кг. Количество теплоты, выделившееся на нагревателе к моменту времени τ , равно

$$N\tau = cm(t_x - t_0) + c\Delta m(t_x - t_0).$$

С учетом выражения для мощности плитки, выделяемой за время $8\tau_0$, получаем

$$\tau = \frac{c(m + \Delta m) \cdot 8N\tau_0 - cm(t_1 - t_0)}{c\Delta m} = \left(\frac{m}{\Delta m} + 1 \right) \frac{8\tau_0 - cm(t_1 - t_0)}{N},$$

откуда

$$\tau = \tau_{\min} = 6 \text{ мин при } \Delta m = \Delta m_{\max} = m.$$

4. См. решение задачи Ф2745 «Задачника «Кванта».

9 класс

1. Из рисунка к условию видно, что линза собирающая, тогда по формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{2F} + \frac{1}{f},$$

где f – расстояние от изображения источника до линзы, находим $f = 2F > 0$, т.е. изображение получается на другой стороне от линзы на расстоянии $2F$ от нее – на том же расстоянии, что и источник. Далее проводим следующий ряд построений: отражаем точку B относительно плоскости линзы и получаем точку B' ; проводим прямую AB' , которая пересекает главную оптическую ось в точке $2F$, где находится источник; делим отрезок между точками O и $2F$ пополам и находим первый фокус линзы; отражаем в плоскости линзы первый фокус и получаем второй фокус.

2. При движении от точки C до точки D между двумя встречами частица в кольцевой трубе совершает $N + 1/2$ оборотов, где N – целое число.

Это произойдет за время

$$\Delta t = \frac{2\pi R \left(N + \frac{1}{2} \right)}{v} = \frac{\pi R (2N + 1)}{v}.$$

Пусть $x(t)$ – расстояние от первой частицы до точки A в момент времени t , где $x(0) = 0$. Тогда $x(t) = \frac{at^2}{2}$ и $t = \sqrt{\frac{2x}{a}}$. Длины отрезков AC и AD

равны $AC = \frac{L}{2} - R$ и $AD = \frac{L}{2} + R$. Время движения частицы 1 от точки C до точки D равно

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{a}} (\sqrt{AD} - \sqrt{AC}) = \frac{\sqrt{L+2R} - \sqrt{L-2R}}{\sqrt{a}}.$$

Получаем

$$\frac{\pi R (2N + 1)}{v} = \frac{\sqrt{L+2R} - \sqrt{L-2R}}{\sqrt{a}},$$

откуда

$$v = \frac{\pi (2N + 1) (\sqrt{L+2R} + \sqrt{L-2R}) \sqrt{a}}{4}.$$

При $R = L/2$ имеем

$$v_1 = \frac{\pi\sqrt{2L}}{4} (2N + 1) \sqrt{a}.$$

При $R \ll L$ получаем

$$v_2 = \frac{\pi\sqrt{L}}{2} (2N + 1) \sqrt{a}.$$

3. Перемещаясь, поршни задействуют разную длину проволоки, соответственно, обеспечат изменение сопротивления цепи. Это связано еще и с тем, что площади сосудов различаются, иначе бы эффект не наблюдался. При смещении большого поршня на Δh вниз малый сместится на $3\Delta h$ вверх и наоборот.

Для удобства дальнейшей записи введем обозначение α для сопротивления одного метра проволоки и запишем законы Ома для указанных в условии задачи положений поршней. Когда на поршнях нет грузов:

$$U = I_0 (2\alpha h_0 + R_A),$$

когда груз на малом поршне:

$$U = I_1 \left(2\alpha h_0 + R_A - \frac{\alpha m}{\rho S} \right),$$

когда груз на большом поршне:

$$U = I_2 \left(2\alpha h_0 + R_A + \frac{\alpha m}{\rho S} \right).$$

Взяв разность двух последних уравнений, получаем

$$U(I_2 - I_1) = I_1 I_2 \frac{\alpha m}{\rho S},$$

откуда находим

$$\alpha = \frac{U(I_2 - I_1)\rho S}{I_1 I_2 m} = 20 \text{ Ом/м}$$

и

$$R_A = \frac{U}{I_0 - 2\alpha h_0} = 1 \text{ Ом.}$$

Из законов Ома для системы с грузами получаем

$$U(I_1 + I_2) = 2I_1 I_2 (2\alpha h_0 + R_A).$$

Учитывая закон Ома, когда нет поршней, находим

$$I_0 = \frac{2I_1 I_2}{I_1 + I_2} = 2,2 \text{ А.}$$

Максимальный ток в цепи будет при минимальном сопротивлении, т.е. когда задействована минимальная длина проволоки. Это произойдет в нижнем положении малого поршня:

$$I_{\max} = \frac{U}{\frac{4}{3}\alpha h_0 + R_A} \approx 3,22 \text{ А.}$$

Минимальный ток будет при максимальном сопротивлении, т.е. когда задействована наибольшая длина проволоки. Это произойдет в верхнем положении малого поршня:

$$I_{\min} = \frac{U}{\frac{8}{3}\alpha h_0 + R_A} \approx 1,67 \text{ А.}$$

4. См. решение задачи Ф2747 «Задачника «Кванта»».

5. Так как точка A закреплена, а нить AB натянута, то точка B движется по окружности с центром в точке A и радиусом l_{AB} . Следовательно, ее скорость в рассматриваемый момент перпендикулярна радиусу окружности, т.е. нити AB , и поэтому направлена вдоль нити BC , перпендикулярной нити AB . Поскольку нить BC нерастяжима и натянута, то проекции скоростей точек B и C на нее равны, так что

$$v_B = v \cos \varphi.$$

Теперь определим длину нити BC . Для этого перейдем в систему отсчета точки C . Поскольку новая система отсчета поступательно движется относительно исходной, то ускорения \vec{a}_B и \vec{a}'_B точки B в исходной и новой системах отсчета связаны соотношением $\vec{a}_B = \vec{a}'_B + \vec{a}_C$, где \vec{a}_C – ускорение точки C в исходной системе отсчета. Так как точка B движется по окружности с центром в точке C в новой системе отсчета, то ее ускорение складывается из тангенциального ускорения \vec{a}'_t , направленного вдоль нити AB , и

ортогонального ему нормального ускорения \vec{a}'_n , направленного к точке C вдоль нити BC . По условию в исходный момент $\vec{a}_C = 0$, так что $\vec{a}_B = \vec{a}'_B$. Также дано, что ускорение точки B , направленное вдоль нити BC , равно a_t . Значит, нормальное ускорение точки B в новой системе отсчета равно a_t . С другой стороны, оно равно

$$\frac{(v'_B)^2}{l_{BC}} = \frac{(v \sin \varphi)^2}{l_{BC}},$$

где равенство $v'_B = v \sin \varphi$ получается из геометрии прямоугольного треугольника, образованного скоростями \vec{v}_B , $-\vec{v}$ и \vec{v}'_B . Таким образом,

$$a_t = \frac{(v \sin \varphi)^2}{l_{BC}}, \quad l_{BC} = \frac{v^2 \sin^2 \varphi}{a_t} = \frac{v^2}{4a_t}.$$

Поскольку в исходной системе отсчета точка B движется по окружности с центром в точке A , то ее полное ускорение складывается из двух ортогональных составляющих: тангенциального ускорения, равного a_t , и нормального ускорения, направленного вдоль нити AB к точке A и равного

$$a_n = \frac{v_B^2}{l_{AB}} = \frac{v^2 \cos^2 \varphi}{l_{BC} \operatorname{tg} \varphi} = \frac{a_t \cos^3 \varphi}{\sin^3 \varphi} = a_t \operatorname{ctg}^3 \varphi.$$

Равенство $l_{AB} = l_{BC} \operatorname{tg} \varphi$ получается из геометрии прямоугольного треугольника ABC . Полное ускорение точки B находим по теореме Пифагора:

$$a_B = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = a_t \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^6 \varphi} = 2\sqrt{7}a_t.$$

10 класс

1. Температура падает с высотой со скоростью $k = 8 \text{ К/км}$. На высоте $h_1 = 4 \text{ км}$ температура равна $T_1 = 268 \text{ К}$, а давление (по графику) $p_1 \approx 62 \text{ кПа}$. Плотность воздуха на этой высоте равна

$$\rho_{в1} = \frac{p_1 M_{\text{в}}}{RT_1}.$$

Масса гелия в шаре $m_{\text{г}}$ в процессе подъема не меняется, поэтому

$$m_{\text{г}} = \frac{p_0 M_{\text{г}} V}{RT_0}.$$

Запишем условие равновесия зонда на заданной высоте:

$$\rho_{в1} g V = (m_{\text{г}} + m_0 + m_{\text{д}}) g,$$

откуда

$$m_{\text{д}} = \rho_{в1} V - m_{\text{г}} - m_0 = \frac{p_1 M_{\text{в}} V}{RT_1} - \frac{p_0 M_{\text{г}} V}{RT_0} - m_0 = 4,9 \text{ кг.}$$

Без датчиков шар будет подниматься, пока не станет справедливым новое условие равновесия

$$\rho_B g V = (m_T + m_0) g.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{p(h) M_B}{RT(h)} = \frac{m_T + m_0}{V},$$

$$p(h) = \frac{(m_T + m_0) R}{M_B V} (T_0 - kh) \approx \\ \approx 48 \text{ кПа} - 1,3 \text{ кПа/км} \cdot h.$$

Для нахождения высоты построим поверх графика зависимости $p(h)$ прямую, соответствующую полученному уравнению, и найдем, что максимальная высота $h_{\max} \approx 7,6 \text{ км}$.

2. См. решение задачи Ф2746 «Задачника «Кванта»».

3. Определим координату центра масс полусферы. Мысленно разрежем полусферу плоскостями, параллельными основанию, на тонкие кольца толщиной h каждое. Масса такого кольца пропорциональна площади его поверхности. Пусть кольцо видно из центра полусферы под углом φ к ее основанию. Тогда радиус кольца равен $r = R \cos \varphi$. Заметим, что поверхность кольца образует с основанием полусферы угол $\pi/2 - \varphi$. Площадь поверхности кольца равна произведению его длины $2\pi r = 2\pi R \cos \varphi$ на ширину $h/\sin(\pi/2 - \varphi) = h/\cos \varphi$. Как видно, площадь кольца не зависит от угла, под которым оно видно из центра, а это означает, что масса полусферы равномерно распределена вдоль радиуса, перпендикулярного ее основанию, значит, центр масс находится на расстоянии $R/2$ от центра.

Рассмотрим силы, действующие на волчок после того, как его отклонили и отпустили (рис. 22). Это две силы тяжести и сила реакции опоры со стороны стола, направлено вертикально. Направления еще двух сил зависят от направления движения волчка. Когда волчок возвращается в исходное состояние, на него будет действовать сила трения, направленная влево, и сила давления со стороны воды, направленная вниз и вправо. Горизонтальная составляющая силы давления со стороны воды возникает из-за наличия трения между волчком и столом, следствием которого является движение центра масс воды влево. Это движение может быть обеспечено только за счет взаимодействия со стенками. Также отметим, что мы изобразили результирующую силу давления воды, которая на самом

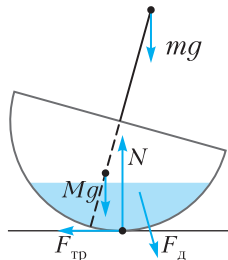


Рис. 22

деле распределена по поверхности контакта с полусферой и в каждой точке направлена перпендикулярно поверхности, т.е. от центра полусферы. Это означает, что суммарный момент этой силы относительно центра полусферы равен нулю.

Для устойчивости равновесия необходимо, чтобы после отклонения на малый угол волчок стремился вернуться обратно. Рассмотрим ось вращения, проходящую через центр полусферы. Моменты сил давления воды и реакции опоры относительно этой оси равны нулю. Сила трения нас не интересует, так как ее направление будет определяться суммарным моментом двух сил тяжести. Если суммарный момент двух сил тяжести направлен против часовой стрелки (стремится вернуть волчок в положение равновесия), то сила трения будет направлена влево и будет лишь замедлять скорость поворота волчка, но не может изменить направление его вращения. Из вышеизложенного становится понятно, что устойчивость равновесия волчка никак не зависит от количества налитой воды. Найдем положение центра масс волчка для случая $M = 6m$. Выберем ось x , проходящую через центр полусферы и направленную перпендикулярно ее основанию. Тогда

$$x_{\text{цм}} = \frac{6mR/2 - mR}{6m + m} > 0,$$

значит, центр масс волчка расположен ниже его центра, а именно к нему приложена результирующая двух сил тяжести. Получаем, что в первом случае вне зависимости от объема налитой воды волчок будет находиться в состоянии устойчивого равновесия. Налитая вода на равновесие не влияет. Для устойчивости равновесия необходимо, чтобы центр масс волчка оказался ниже центра полусферы. Рассмотрим ту же ось x , что и в первом случае, тогда

$$x_{\text{цм}} = \frac{MR/2 - mR}{M + m} > 0,$$

откуда $M/m > 2$.

4. Поскольку стержень находится в равновесии, равнодействующая сил, действующих на него, должна равняться нулю, а также относительно любой точки должен равняться нулю момент действующих на стержень сил. Так как массой стержня можно пренебречь, будем считать, что силы прикладываются к стержню в точках A , B и в месте положения бусинки.

Сила реакции со стороны вертикальной стены \vec{N}_A направлена горизонтально, а сила взаимодействия бусинки со стержнем \vec{N}_B направлена перпендикулярно последнему, поскольку тре-

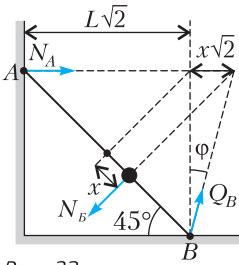


Рис. 23

ния между ними нет. Тогда линия действия равнодействующей сил нормальной реакции и трения в точке B — полной реакции опоры $\vec{Q}_B = \vec{N}_B + \vec{F}_{\text{тр}}$ — должна проходить через точку пересечения линий действия \vec{N}_A и \vec{N}_B . Изобразим это на рисунке 23. Поскольку линия действия \vec{N}_A фиксирована, а \vec{N}_B сохраняет свое направление, точка пересечения линий действия сил перемещается горизонтально. Угол наклона стержня к вертикали составляет 45° , значит, смещению бусинки вдоль стержня на величину x соответствует смещение пересечения линий действия сил на величину $x\sqrt{2}$.

Возможны два варианта начала движения стержня: скольжение по полу и стенке или вращение относительно нижнего конца. Предположим, что стержень начнет проскальзывать. Это произойдет в тот момент, когда \vec{Q}_B более не сможет удовлетворить условию пересечения линий действия сил, т.е. угол φ превысит величину $\arctg \mu$. Отсюда найдем перемещение бусинки x_{max} :

$$\frac{x_{\text{max}}\sqrt{2}}{L\sqrt{2}} = \mu, \quad x_{\text{max}} = \mu L.$$

Стержень придет в движение до момента удара бусинки о пол, если $x_{\text{max}} < L$, отсюда получаем условие на коэффициент трения, при котором возможна описанная ситуация: $\mu < 1$. Определим скорость бусинки из закона сохранения механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mgx_{\text{max}}}{\sqrt{2}}, \quad v = \sqrt{\sqrt{2}\mu gL}.$$

Теперь найдем силу взаимодействия стержня с вертикальной стенкой. Изобразим на рисунке 24 условие равенства нулю равнодействующей сил, действующих на стержень. Обратим внимание, что из второго закона Ньютона для бусинки в проекции на ось, перпендикулярную стержню, следует $\vec{N}_B = \text{const} = mg/\sqrt{2}$. Тогда

$$N_A = \frac{mg(1 - \text{tg } \varphi)}{2}.$$

В момент отрыва $\text{tg } \varphi = \mu$, поэтому

$$N_A = \frac{mg(1 - \mu)}{2}.$$

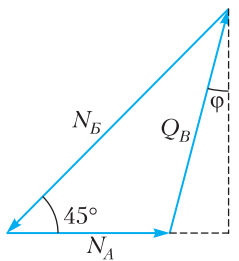


Рис. 24

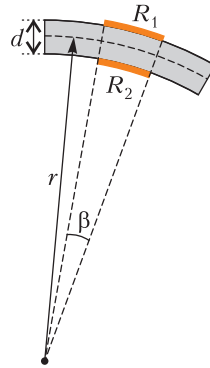


Рис. 25

5. Проведем из центра дуги окружности недеформируемой линии два луча к краям тензорезистора №1 (рис. 25). Эти два луча отсекут на недеформируемой линии дугу, размер которой будет равен размеру резистора l_0 до деформации. Положим угол между лучами равным β , тогда размер резистора в недеформируемом состоянии окажется равным $l_0 = \beta r$. Размер подложки после деформирования балки составит

$$l = \beta(r + d/2),$$

а величина относительного удлинения резистора будет равна

$$\varepsilon_1 = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{d}{2r}.$$

Относительное изменение длины тензорезистора №2 будет таким же по модулю, но отрицательным:

$$\varepsilon_2 = -\frac{l - l_0}{l_0} = -\frac{d}{2r}.$$

В ненагруженном состоянии балки напряжения на резисторах №1 и №2 одинаковы и равны половине напряжения источника питания. Показания вольтметра в этом случае будут нулевыми. При нагрузке балки сопротивление резистора №1 увеличится на величину

$$\Delta R = k\varepsilon R_0 = k \frac{d}{2r} R_0 \ll R_0,$$

а сопротивление резистора №2 уменьшится на ту же величину. Силы тока через резисторы R_1 и R_2 равны соответственно

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_0} = \frac{\mathcal{E}}{2R_0 + \Delta R}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + R_0} = \frac{\mathcal{E}}{2R_0 - \Delta R}.$$

Показание вольтметра будет равно разности напряжений на резисторах $R_3 = R_0$ и составит

$$U = (I_2 - I_1)R_0 = \left(\frac{\mathcal{E}}{2R_0 - \Delta R} - \frac{\mathcal{E}}{2R_0 + \Delta R} \right) R_0 = \frac{2\mathcal{E}R_0\Delta R}{4R_0^2 - (\Delta R)^2} \approx \frac{\mathcal{E}}{2} \frac{\Delta R}{R_0}.$$

С учетом ранее полученного выражения для изменений сопротивлений резисторов,

$$U = \frac{\mathcal{E}kd}{4r} = \frac{\mathcal{E}kdm}{4\alpha}.$$

Таким образом, зависимость показаний вольтметра от массы поставленного на платформу груза является прямой пропорциональной, т.е. $n = 1$. Тогда для коэффициента этой зависимости имеем

$$\gamma = \frac{\mathcal{E}kd}{4\alpha}.$$

Если недеформируемая линия балки будет проходить на некотором расстоянии x от верхней поверхности балки, то формулы для относительной деформации подложек резисторов №1 и №2 примут вид

$$\varepsilon_1 = \frac{x}{r}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{d-x}{r},$$

а относительные изменения сопротивлений –

$$\frac{\Delta R_1}{R_0} = \frac{kx}{r}, \quad \frac{\Delta R_2}{R_0} = -\frac{k(d-x)}{r}.$$

Тогда для показаний вольтметра получим

$$\begin{aligned} U' &= \left(\frac{\mathcal{E}}{2R_0 + \Delta R_2} - \frac{\mathcal{E}}{2R_0 + \Delta R_1} \right) R_0 = \\ &= \frac{\mathcal{E}R_0(\Delta R_1 - \Delta R_2)}{(2R_0 + \Delta R_1)(2R_0 + \Delta R_2)} \approx \frac{\mathcal{E}}{4} \frac{\Delta R_1 - \Delta R_2}{R_0}, \end{aligned}$$

откуда

$$U' = \frac{k\mathcal{E}}{4} \left(\frac{x}{r} + \frac{d-x}{r} \right) = \frac{\mathcal{E}kd}{4r} = U,$$

т.е. полученный ранее ответ не зависит от места положения недеформируемой линии.

Теперь предположим, что балка ко всему прочему нагрелась. Тогда к относительным изменениям длины подложек резисторов добавятся еще и удлинения за счет теплового расширения балки:

$$\varepsilon_1 = \frac{d}{2r} + \varepsilon_3, \quad \varepsilon_2 = -\frac{d}{2r} + \varepsilon_3.$$

Проведя аналогичные вычисления, получим, что и в этом случае показания вольтметра останутся прежними:

$$U'' = \frac{k\mathcal{E}}{4} \left(\frac{d}{2r} + \varepsilon_3 + \frac{d}{2r} - \varepsilon_3 \right) = \frac{\mathcal{E}kd}{4r} = U.$$

Таким образом, предложенная схема тензoeлектрического датчика является термостабильной и в целом не чувствительной к деформациям растяжения-сжатия балки.

11 класс

1. Скорость точек на внешней поверхности гильзы направлена к оси гильзы под углом $\alpha = \arctg \frac{\omega R}{v}$. Сила трения, действующая на эле-

менты поверхности гильзы, направлена противоположно их скорости, а значит, не изменяет угол между векторами скоростей точек гильзы и ее осью, а влияет лишь на модули этих скоростей. Следовательно, в процессе торможения гильзы отношение скорости ее поступательного движения и линейной скорости вращательного движения точек ее поверхности остается неизменным:

$$\frac{\omega R}{v} = \frac{\omega_0 R}{v_0}.$$

В направлении поступательного движения ускорение гильзы определяется проекцией силы трения

$$F(x) \cos \alpha = F(x) \frac{v_0}{\sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}.$$

Поэтому движение вращающейся гильзы в направлении оси аналогично движению невращающейся гильзы при действии «уменьшенной» силы. Минимальное значение скорости v_{\min} при учете этого можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_{\min}^2}{2} = -A_{\text{мп}} = \frac{F_x(l) \cdot 2l}{2} = \frac{F_0 l v_{\min}}{\sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_{\min}^2}},$$

$$v_{\min} = \sqrt{\sqrt{\frac{(\omega_0 R)^4}{4} + 4 \left(\frac{F_0 l}{m} \right)^2} - \frac{(\omega_0 R)^2}{2}}.$$

Для ответа на второй вопрос достаточно заметить, что угловая скорость и скорость поступательного движения гильзы все время связаны соотношением $\frac{\omega}{v} = \frac{\omega_0}{v_0}$. В момент полного погружения скорость поступательного движения v_1 в $\sqrt{2}$ раз меньше начальной скорости $v_0 = v_{\min}$, так как работа сил трения к этому моменту составляет ровно половину от величины работы до момента вылета. Поэтому

$$\omega_1 = \frac{v_1}{v_0} \omega_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

При движении гильзы внутри отверстия до момента полного проникновения ее внутрь плиты сила F_x линейно увеличивается. Ускорение гильзы

$$a = -\frac{F_0 \cos \alpha}{ml} x.$$

Это формула совпадает с уравнением гармонических колебаний с циклической частотой

$$\Omega = \sqrt{\frac{F_0 \cos \alpha}{ml}} = \sqrt{\frac{F_0 v_0}{ml \sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}}.$$

Координата переднего среза гильзы зависит от

времени по закону

$$x = x_0 \sin \Omega t,$$

где $x_0 = \frac{v_0}{\Omega} = v_0 \sqrt{\frac{ml}{F_0 \cos \alpha}}$. Тогда до момента полного погружения гильзы в отверстие

$$x = v_0 \sqrt{\frac{ml}{F_0 \cos \alpha}} \sin \Omega t,$$

а время погружения τ находится из уравнения

$$l = v_0 \sqrt{\frac{ml}{F_0 \cos \alpha}} \sin \Omega \tau.$$

Получаем

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{\frac{ml}{F_0 \cos \alpha}} \arcsin \sqrt{\frac{F_0 l \cos \alpha}{m v_0^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{ml \sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}{F_0 v_0}} \arcsin \sqrt{\frac{F_0 l}{m v_0 \sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}}. \end{aligned}$$

2. См. решение задачи Ф2748 «Задачника «Кванта»».

3. Теплоемкость C газа равна

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU}{dT} + \frac{pdV}{dT} = \nu C_V + \frac{pdV}{dT}.$$

Поймем, для каких линейных процессов $p(V)$, кроме $p = \text{const}$ и $V = \text{const}$, теплоемкости являются постоянными. Пусть $p = p_0 + \alpha V$. Тогда из уравнения Клапейрона–Менделеева:

$$(p_0 + \alpha V)V = \nu RT, \quad \frac{dT}{dV} = \frac{p_0 + 2\alpha V}{\nu R}.$$

Подставляя выражение для dT/dV в формулу для теплоемкости, получим

$$C = \nu \left(C_V + R \frac{p_0 + \alpha V}{p_0 + 2\alpha V} \right).$$

Теплоемкость не зависит от объема, если $p_0 = 0$, что соответствует прямой, проходящей через начало координат. Поскольку $C_p = C_V + R$, имеем

$$C_V < C = \frac{C_p + C_V}{2} < C_p.$$

Так как $C_{bc} = C_{da} > C_{ab} = C_{cd}$, процессы bc и da являются изобарными, а процессы ab и cd соответствуют прямым линиям, проходящим через начало координат.

Проведя линии ab и cd до пересечения, найдем положение начала координат (рис. 26). Далее, проводя через начало координат лучи, параллельные и перпендикулярные направлению изобар, получим направления осей объема V и давления p соответственно.

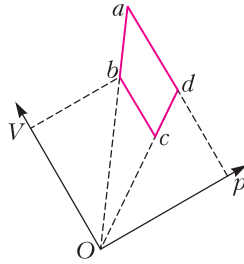


Рис. 26

Поскольку $p_a = p_d$ и $p_b = p_c$, из подобия треугольников следует, что $V_b/V_c = V_a/V_d$. Тогда

$$\frac{T_b}{T_c} = \frac{V_b}{V_c} = \frac{V_a}{V_d} = \frac{T_a}{T_d},$$

$$\text{или } T_b T_d = T_a T_c.$$

Так как $T_b > T_c$ и $T_a > T_d$, температуры в точках b и d одинаковы и равны T_2 , а температура в точке a максимальна и равна T_1 . Тогда температура в точке c равна $T_3 = T_2^2/T_1$. Таким образом,

$$T_a = 400 \text{ К}, \quad T_b = T_d = 200 \text{ К}, \quad T_c = 100 \text{ К}.$$

Газ получает тепло на участках cd и da , а отдает на участках ab и bc . Поэтому

$$Q_+ = C(T_2 - T_3) + C_p(T_1 - T_2),$$

$$Q_- = C(T_1 - T_2) + C_p(T_2 - T_3).$$

Поскольку $C_p = 7\nu R/2$ и $C = 3\nu R$, находим

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{Q_-}{Q_+} = 1 - \frac{6(T_1 - T_2) + 7(T_2 - T_2^2/T_1)}{6(T_2 - T_2^2/T_1) + 7(T_1 - T_2)} = \\ &= 1 - \frac{6T_1 + 7T_2}{6T_2 + 7T_1} = 0,05. \end{aligned}$$

4. Цилиндр можно разделить на тонкие параллельные основанию кольца, напряженность каждого из которых будет направлена в точке O вниз, а в точке B вверх вдоль оси цилиндра – в силу осевой симметрии в распределении заряда. Соответственно, сила, действующая на отрицательный заряд в точке B , направлена так же, как и сила, действующая на положительный заряд в точке O , т.е. против оси x на рисунке в условии. Точно так же направлена и суммарная сила, действующая на диполь.

Пусть E_1 – величина напряженности поля цилиндра в точке O , а E_2 – величина напряженности в точке B . Тогда сила, действующая на диполь, равна $F = q(E_1 + E_2)$. Наложим на наш цилиндр еще один такой же, но с поверхностной плотностью заряда, симметричной исходному цилиндру: $\sigma'(x) = \sigma(H - x)$. В результате сложения получится цилиндр, равномерно заряженный по поверхности с плотностью заряда σ_0 :

$$\sigma(x) + \sigma'(x) = \sigma_0 \sin^2 \frac{\pi x}{2H} + \sigma_0 \sin^2 \frac{\pi(H - x)}{2H} = \sigma_0.$$

При этом по принципу суперпозиции в центре каждого из оснований будет одинаковая по величине напряженность $E = E_1 + E_2$.

Поле в центре основания однородно заряженного цилиндра определим через скорость изменения потенциала: $E_x = -\Delta\phi/\Delta x$. Заметим, что если сдвинуть точку B вверх на Δx , то это равносильно смещению цилиндра, т.е. исчезновению вверху кольца с зарядом Δq и прибавлению такого же кольца внизу. Разность потенциалов двух выделенных колец равна $\Delta\phi = \phi_+ - \phi_- = \frac{\Delta q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{\Delta q}{4\pi\epsilon_0 R}$, причем $\Delta q = \sigma_0 \cdot 2\pi R \Delta x$. Таким образом,

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}} \right),$$

$$F = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}} \right).$$

5. Поскольку работа силы Лоренца всегда равна нулю, кинетическая энергия частицы равна работе силы электрического поля:

$$\frac{mv^2}{2} = qEy, \text{ и } v = \sqrt{\frac{2qEy}{m}}.$$

Вдоль оси x на частицу действует только сила Лоренца. Из второго закона Ньютона,

$$\begin{aligned} ma_x &= qv_y B(y), \\ \Delta v_x(y) &= \frac{qv_y B(y) \Delta t}{m} = \frac{\alpha q \sqrt{y} \Delta y}{m} = \frac{2\alpha q \Delta(y^{3/2})}{3m}, \\ v_x(y) &= \frac{2\alpha q y^{3/2}}{3m}. \end{aligned}$$

Из условия $v = v_x$ в момент, когда скорость частицы направлена вдоль оси x , найдем соответствующую данному моменту координату частицы y_1 :

$$\sqrt{\frac{2qEy_1}{m}} = \frac{2\alpha q y_1^{3/2}}{3m}, \quad y_1 = \frac{3m}{2\alpha q} \sqrt{\frac{2qE}{m}},$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{\frac{3E}{\alpha} \sqrt{\frac{2qE}{m}}}.$$

Теперь найдем радиус кривизны траектории в точке с координатой y . Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось, перпендикулярную направлению скорости частицы:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB + qE_n,$$

где E_n – перпендикулярная скорости компонента электрического поля, равная

$$E_n = -E \frac{v_x}{v} = -\frac{\alpha y}{3} \sqrt{\frac{2qE}{m}}.$$

Подставляя во второй закон Ньютона, находим

$$R = \frac{3}{\alpha} \sqrt{\frac{mE}{2q}} = \text{const}.$$

Это означает, что частица двигалась по полуокружности до тех пор, пока не остановилась. Обратим внимание, что после остановки движение частицы повторяется – она вновь будет двигаться по окружности того же радиуса, но уже из нового положения, находящегося от начального на расстоянии, равном диаметру окружности $2R$. При этом за половину периода частица проходит половину окружности, поскольку $v \sim \sqrt{\sin \phi}$, где ϕ – угловой размер пройденной дуги. Тогда через время $\tau = 3T/2$ координаты частицы равны $(x, y) = (3R, R)$ и модуль ее перемещения составляет

$$s(\tau) = \sqrt{10}R = \frac{3}{\alpha} \sqrt{\frac{5mE}{q}}.$$

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришуква,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

М.Н.Грицук

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ № 230762

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

**в соответствии с предоставленными
материалами
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8
Тел.: (831) 218-40-40**

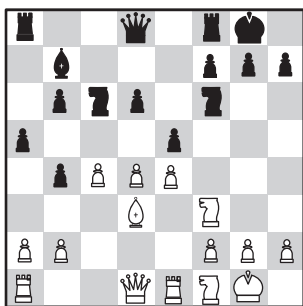
Чемпион Европы

Москвич Алексей Сарана стал победителем чемпионата Европы, прошедшего в сербском курортном городе Врнячка-Баня. В следующем году он вместе с рядом других российских шахматистов, выигрывавших в разные года европейское первенство, получит уникальный шанс добавить в свою коллекцию титул чемпиона Азии, поскольку Федерация шахмат России приняла решение о переходе из Европейского шахматного союза в Азиатскую шахматную федерацию.

Ключевой в турнире стала партия 9 тура, в котором Алексею удалось сломить сопротивление Антона Коробова и обогнать его на пол-очка.

А. Сарана – А. Коробов Врнячка-Баня, 2023

1. d4 ♘f6 2. c4 e6 3. ♘f3 ♙b4+ 4. ♘d2 c5 5. ♙b4 cb 6. e3 b6 7. ♘d3 ♙b7 8. ♘bd2 0-0 9. 0-0 a5 10. ♙e1 d6 11. e4 ♙c6 12. ♘f1 e5.



13. ♙c2!? (начало интересного плана с переводом слона на d7) ♘c8 14. ♘c1 g6 15. ♙a4 ♘e7 16. ♙c3 ♘d4 17. ♘d4 ed 18. ♘d4 ♙e4 19. ♘g4 (с угрозой мата с h6). ♘g5. 20. ♘d7 ♘c5 21. ♘cd1 (с угрозой f4) h5! 22. ♙e4 hg 23. ♘g4 ♙e5 24. ♘d6 ♘d6 25. ♘d6 ♘d8 26. ♘gd4 ♙f8 (намечая ♙e7) 27. ♙b5! (конечно, не 27. ♙b6?? ♙c6) ♘d6 28. ♘d6 ♙e4 29. ♙b6 ♙d3 30. ♙b8+ ♙e7 31. b3 ♙b1 32. ♙a4 ♘e5 33. f4 ♘e1+ 34. ♙f2 ♘c1 35. ♙e8+ ♙d6 36. ♙e1 ♘c2+ 37. ♙e2! ♘c3 38. ♘d2+ ♙c5? (стопило попробовать 38... ♙e6 39. ♘d7+ ♙e7) 39. ♙e8 f6 40. ♘d5+ (точнее

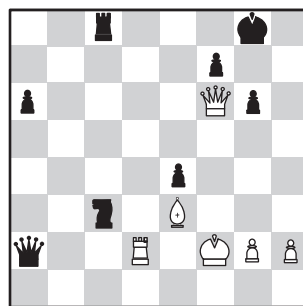
40. h4 с последующим f5 и движением пешки h) ♙b6 41. ♘d6+ ♙c5 42. ♘d5+ (конечно, не 42. ♙f6 ♙a2 43. ♘c6+ ♘d4 с хорошими шансами на ничью у черных за счет активизации короля). ♙b6 43. ♘d2 ♙c5 44. h4 ♙e4 45. f5! Отвлечение. 45... gf (45... ♙f5 46. h5 gh 47. ♘d5 с выигрышем слона) 46. h5 Белые создали вторую проходную пешку, остальное – дело техники. 46... a4 47. ♙a4 f4 48. ♘c2 ♙g2 49. ♘d7 ♙f3 50. h6! ♙e2 51. h7 ♘c2 52. h8♖ ♙g4+ 53. ♙e1 ♘c1+ 54. ♘d2 ♘d1+ 55. ♙c2 ♘d7 56. ♙f6 ♙d1+ 57. ♙c1, черные сдались.

Серебряным призером стал Кирилл Шевченко, представляющий Румынию. В партии 7 тура ему удалось провести комбинацию, которая наверняка войдет в сборники по тактике.

М. Кобаля – К. Шевченко Врнячка-Баня, 2023

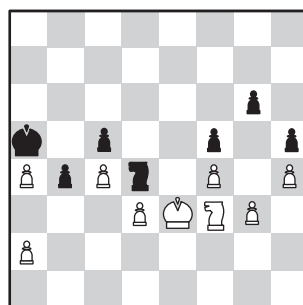
1. e4 c5 2. ♘f3 d6 3. ♙b5+ ♘d7 4. ♙a4 ♙gf6 5. 0-0 e6 6. ♙e2 ♙a5!? (гораздо чаще здесь играют 6... ♙e7) 7. ♘d7+ ♘d7 8. c4 g6 9. ♘c3 ♙g7 10. d4 cd 11. ♘d4 0-0 12. ♙e3 ♘ac8 13. ♘db5 ♙b5 14. ♙b5 ♙e4 15. f3 ♙c5! 16. ♘d6 ♘c6 17. ♙b5 a6 18. ♘c3 ♙c3 19. bc ♙a4 20. ♘d4 ♙c3 21. ♙d3 ♙a4 22. ♘ac1 e5 23. ♙e3 ♘d8 (23... ♙c5 24. ♙e2 ♘d8) 24. ♙b1 ♙c7 25. f4 (25. h3 аккуратнее, но позиция у белых уже сложная) ♘c4 (точнее 25...e4! с угрозой ♘d3) 26. ♙c4 ♙c4 27. b7 e4 (но не 27... ♙a2?! 28. ♙c7 ♘d3 29. ♙e5, активизируя белого ферзя) 28. f5 ♙c3! 29. ♙e7 ♘c8 30. fg ♙c2+ 31. ♙f2 hg. Черные намереваются сыграть 32... ♙c2 с решающими угрозами. 32. ♙f6? Проигрывает. Сохраняло шансы 32. ♘d7 с нападением на ладью и возможностью отступить на вторую горизонталь. 32... ♙a2. Грозит сразу несколько отскоков черного коня с вскрытым шахом. 33. ♘d1 ♙c3+! 34. ♘d2.

34... ♘d2+!! Эффектная жертва! 35. ♘d2 e3+! Вероятно, именно этот тычок не учли белые при расчете 32-го хода. Любое взятие ведет к потере ферзя: 36. ♙e3 ♙d5+; 36. ♙e3 ♙e4+. Поэтому белые сдались.



Не обошлось на турнире и без поучительных эндшпилей. Точный расчет позволил другому москвичу, Давиду Паравяну, набрать дополнительные пол-очка в партии 9 тура, которые в итоге помогли ему отобраться на кубок мира.

Д. Паравян – И. Чепаринов Врнячка-Баня, 2023



49... ♙f3? Учебники эндшпиля учат, что переход в пешечный эндшпиль нужно рассчитывать особенно тщательно. В данном случае неверное решение стоит партии. Следовало избежать размена: 49... ♙e6 ведет к ничьей, например, 50. d4 ♙a4 51. dc ♙a3 52. ♘d4 ♙c5 53. ♙c2+ ♙a2 54. ♙b4+ ♙b3 55. ♘d5 ♙c4 56. ♙e7 ♙e4 57. ♙g6 ♙g3. 50. ♙f3 ♙a4 51. d4! Решающий прорыв по лекалам из учебника эндшпиля. 51... cd 52. ♙e2! Важно сначала остановить черную пешку. 52... ♙a3 53. c5 ♙a2 54. c6 b3 55. c7 b2 56. c8 ♙ b1 ♙ (на 56...d3+ следует 57. ♙d3 b1♙+ 58. ♙c2+) 57. ♙a6+ ♙b2 58. ♙b6+ ♙c1 59. ♙b1+ ♙b1 60. ♙d3 ♙c1 61. ♙d4. Черные сдались ввиду 61... ♘d2 62. ♙e5 ♙e3 63. ♙f6 ♙f3 64. ♙g6 ♙g3 65. ♙g5 с цугцвангом.

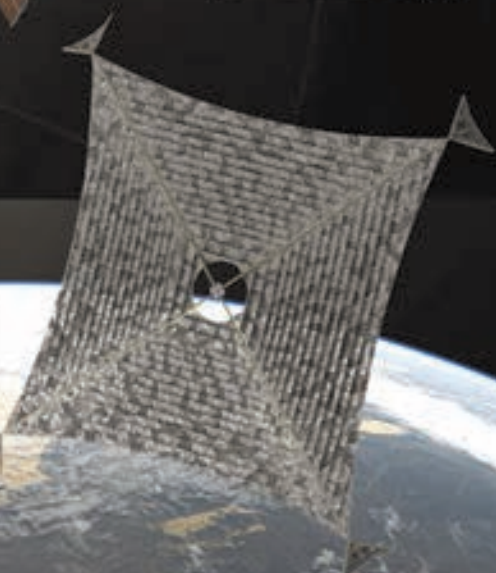
А. Русанов

Индекс 90964

КОСМОЛЕТ НА СОЛНЕЧНОЙ ТЯГЕ

Оказывается, давление света на поверхность
тел можно использовать для полетов в космос.

Прогулки с физикой



(ПОДРОБНЕЕ – НА С. 40 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)