

## 単純なカオスと複雑なカオス

首都大学東京 理工学研究科 物理学専攻 教授 首藤 啓

### 1. さまざまなカオス

日常用語として使われる「カオス」は、多くの場合、全く秩序のない状態、制御できないデタラメな状態、を意味する。一方、科学の中の専門用語として使われる「カオス」は、その意味にもう少し奥行きがある。「カオス」という用語が科学の中に最初に登場したのは、Li と York によって 1975 年に書かれた論文の題目“Period Three Implies Chaos”だと言われているが、一方、今日「カオス」の理想モデルのひとつと考えられているアノソフ系と呼ばれる力学系は既に 1967 年に発見されていた。以前、筆者はある数学者から「力学系を研究する数学者たちは、『カオス』という用語が物理で使われ始めたとき、物理の人たちの使う『カオス』には、アノソフ系のような『単純な』ものは含まれないものと思っていた」という話を聞いたことがある。日常用語の「カオス」と科学で使われる専門用語の「カオス」はどのように違い、また、数学者がそのとき想定していた「単純なカオス」と物理学者がイメージする「複雑なカオス」とは何が違うのであろうか。

### 2. 決定論と確率論の両立

アノソフ系と呼ばれるものの最も簡単な例は、 $[0, 1]$  区間で与えられる以下のような写像である：

$$\mathcal{F} : x_{n+1} = 2x_n \pmod{1} \quad (1)$$

いま初期条件を、

$$x_0 = 0.s_1s_2\cdots \quad (s_i = 0 \text{ or } 1) \quad (2)$$

と 2 進数を用いて表示することを考えると、写像  $\mathcal{F}$  のなかで、 $x_0$  を 2 倍する操作は 2 進数表示した  $x_0$  の小数点を右にひとつずらすことに相当し、 $\text{mod } 1$  の操作は小数点の左側にあふれた桁を落とすことによって実現される。初期条件の  $x_0$  は  $[0, 1]$  区間の任意の実数を取ってきて良く、勝手に選んだ初期条件に対する  $s_1s_2\cdots$  の並びは何の規則性もない完全にランダムなものになることが期待されるので、たとえば、写像を行う各回ごとにその値  $x_n$  が  $1/2$  よりも大きい小さいかは、あたかもコイン投げによって

表裏を決めるがごとく全く予測がつかない。

完全に決まったルールがあるにも関わらず、そこから生成される数の並びが完全にランダムになり得る、決定論であることと予測不可能な確率的振る舞いとが両立し得ることを知るのにこの写像はとても教訓的であり、実際、カオスとは何か？を説明する際に良く引き合いに出される。同時にこの例は、未来を全く予測することのできない世界では逆に確率的には高い精度で何が起るかを予測することができることも教えてくれる。

### 3. 一般的な力学系

アノソフ系と呼ばれる抽象的な力学系の大きな特徴は、その系が構造安定性をもつことにある。系に微小な摂動を加えたとき、系のもつ定性的な性質が変わらないとき、その系は構造安定性をもつという。上記の写像について言うと、2 倍して  $[0, 1]$  区間に引き戻す、という操作を、 $(2 - \epsilon)$  倍して同じく  $[0, 1]$  区間に引き戻すものに替えても、系が  $[0, 1]$  区間のなか全体でカオスを示すという性質は変わらない。その場合、写像点の 2 進数展開表現にはすべての 0 と 1 の並びが出てくるわけではなく写像の記述はだいたい複雑になるが、カオスがカオスで有り続ける、という点ではその性質は保持される。さらに、系が構造安定であるならば、そのような力学系は「ありふれた」力学系、あるいは「一般的な」力学系と考えることができる。なぜならば、摂動のパラメータ  $\epsilon$  を動かしても系はそのパラメータ変化に対して連続的に同じ性質をもち続け、その意味でそのような性質をもつ系は非常にたくさんあるからである。

一方、物理学者が「ありふれた」力学系と考えるものは数学者のそれとはだいぶ違う。物理では、通常、その振る舞いのよくわかった系をまず最初に考え、そこに何らかの摂動が加わった状況を考えることが多い。「よくわかった系」とは、多くの場合、ミクロな（あるいはマクロな）現象を記述する微分方程式なり差分方程式を解くことができるものである。ところ

が、微分方程式や差分方程式を解くことができるにはそれなりの理由（対称性があるなり何なり）があるはずで、そのことを受け必然的にその基点となる系は特殊なものにならざるを得なくなる。このことにより、物理としてまずは興味のある、物理として解析しなければいけない最も一般的な力学系は数学のそれとはだいぶ違ったものになってくる。

### 4. 秩序と無秩序の共存

簡単な例で説明しよう。固定された支点を中心に鉛直面内を自由に回転することのできる振り子（と言うより回転子）を箱の中に入れる。重力は働いていないとすると、箱が静止している限り箱の中にある回転子は一定の角速度を保ったまま自由回転する（もちろん初期に静止していたものは静止し続ける）。ここで、外から力を加えて箱を周期的に振動させることを考える。箱の中にある座標系からみると回転子は周期的な慣性力を感じるにより、運動は自由回転ではなくなる。ここでは話を簡単にするために、周期的に与える振動（従って慣性力も）は滑らかなものではなく、ある瞬間だけに振動が起こるようなパルス的なものを考える（回転子が感じる慣性力は撃力になる）。その結果、系の運動方程式は、回転子が感じる周期的な撃力の直後（あるいは直前）の角運動量  $p_n$  と位置  $\theta_n$  だけの变化を追跡すれば良くなり、以下のような簡単なものになる。

$$\mathcal{G} : \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ \theta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n + K \sin \theta \\ \theta_n + p_{n+1} \end{pmatrix} \quad (3)$$

パラメータ  $K$  は外から与える振動の振幅（摂動の大きさ）を表すパラメータである。撃力を加えるのはやや不自然な設定に思えるが、これは時間発展の運動方程式を連続な微分方程式から差分方程式にするための便法で現象の本質を変えるものではない。

さまざまな初期条件から得られる軌道の様子は図 1 のようになる。 $K = 0$  でまったく振動が加わっていないとき、回転子は初期に与えられた一定の角速度  $p_0$  のまま回転するので、 $(p_n, \theta_n)$  の点列は水平な直線上に乗るが、図 1 を見ると、それらが変形を受けつつ残り続ける一方、それとは別に  $(p_n, \theta_n) = (0, 0)$  を中心として楕円のような形をした曲線群が現れることがわかる。これは、外から与える摂動によって  $\theta = 0$  の位置を中心に振動運動が発生する

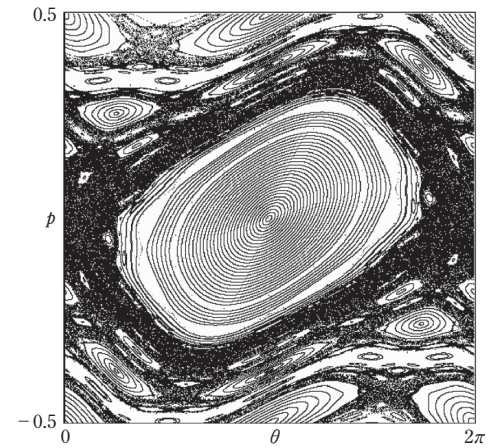


図 1 自由回転子に周期摂動が加わった系の位相空間の例

ことを意味する。また、横断する曲線群、あるいは中心の楕円曲線群の周辺には島構造が、さらによく見るとそれらの島構造の周りには小さな島構造が現れる。そして、それら曲線から成る構造以外の黒く塗られた部分には、いわゆるカオス的な運動をする領域が現れる。「いわゆるカオス的な運動」という言い方しかできないのは、ほとんどの人がこの領域には「カオス」が発生していると信じているのにもかかわらず、未だその厳密証明に成功した人がいないからである。この図に現れる極めて複雑な構造は、単に(1)式の写像  $\mathcal{F}$  がもつ単純な無秩序ではない、いわば、秩序だったものと無秩序なものが混在する仕方が無秩序、という、一段階層の違う複雑さがそこには潜んでいる。物理的には、自由回転するものに周期的な摂動が加わったごく簡単な系であるが、その中には驚くほど複雑な運動が隠されていることになる。

既にずいぶん前のことであるが、筆者が大学の入試問題の作成をしていたとき、一緒に作業に当たっていた同僚が、設定は違うものの上記の写像  $\mathcal{G}$  と本質的に同じ内容を含む力学の問題を考えてきた。「この手の問題は高校の物理の範囲を越えてますかね？」という同僚の問いに、筆者は慌てて、V.I. アーノルドの言葉「自由度 2 の一般的なポテンシャル系を解析することは現代数学の能力を超える」を引用して事無きを得たことを思い出す。