Karl Wilhelm Feuerbach, sein Kreis und die Dreiecksgeometrie

Darij Grinberg

Version 2, 2003 (letzte Änderung: 4. Oktober 2007)

§1. Dreiecksgeometrie

Zu den anspruchsvolleren Kapiteln des Lehrplans für das gymnasiale 8. Schuljahr zählt die sogenannte *Dreiecksgeometrie*. Die Sätze, daß sich die Winkelhalbierenden bzw. Mittelsenkrechten bzw. Seitenhalbierenden bzw. Höhen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden, sind die ersten mathematischen Sätze in der Schule, deren Beweise nicht trivial (auch nicht für einen Mathematiker) sind. Danach ist für die Schüler die Dreiecksgeometrie zu Ende; und in der Tat würde man kaum mehr erwarten in einem Lehrplan, wo der Umfangswinkelsatz bereits zum fakultativen Stoff zählt.

Natürlich ist damit die Dreiecksgeometrie nicht zu Ende. Vielen Teilnehmern von Mathematikolympiaden sind wahrscheinlich Aufgaben mit dreiecksgeometrischem Inhalt begegnet; einige wissen beispielsweise, daß die Höhen eines Dreiecks die Winkel des Höhenfußpunktdreiecks halbieren. In der Tat ist die Mathematikolympiade einer der wenigen Orte, wo Dreiecke noch heimisch sind. Ansonsten ist dieser von Ceva, Euler und anderen begründete und im 19. Jahrhundert noch sehr populäre Zweig der Mathematik heute fast ins Vergessen geraten.

Ein Grund dafür ist vielleicht der folgende: Mit der Ausnahme einiger ganz fundamentaler Sätze und z. B. des Lemoinepunktes haben die meisten Ergebnisse der Dreiecksgeometrie keine Anwendungen in der Mathematik und in der sonstigen Wissenschaft. Dies läßt sich aber genauso von der ganzen Unterhaltungsmathematik behaupten. Der tiefere Grund des Verfalls der Geometrie ist viel eher der Mangel von geometrischer Erfahrung sogar bei professionellen Mathematikern. Dazu hat der Bourbakismus einiges und die Bildungsmisere den Rest beigetragen.

Dreiecksgeometrie ist ein Teil einer allgemeineren Theorie, der ”Höheren Euklidischen Geometrie” (”Advanced Euclidean Geometry”). Dies ist eine Fortsetzung der Schulgeometrie, die jedoch ausschließlich von elementarer Mathematik Verwendung macht.

Wer sich für Höhere Euklidische Geometrie interessiert, kann z. B. in [4] nachschlagen. Die unlängst erschienenen ”Wege zu geometrischen Sätzen” von Haag [13] beinhalten auch eine Menge von Geometrie; das ältere Büchlein [5] geht tief in die Dreiecksgeometrie hinein, ist aber wegen der chaotischen und teils schwer verständlichen Darstellung mit Vorsicht zu genießen. Als Gegenbeispiel erwähne ich schließlich das neue Buch [14]; hier wird die Dreiecksgeometrie höchstens gestreift (und zwar an zwei Minimalproblemen), und Feuerbach wird genauso wie z. B. Ceva mit keinem Wort erwähnt (und Darboux wird nur in einer Aufzählung genannt).

Ich habe selber versucht, einige Beispiele für dreiecksgeometrische Forschung in [15] zusammenzutragen. Es gibt keinen Sinn, diese hier zu wiederholen; wir werden uns hier mit den Eigenschaften des Dreiecks auseinandersetzen, die mit der Forschung von Karl Wilhelm Feuerbach verbunden sind.

§2. Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834)

Wir beginnen mit einem Abriss der Biographie des Geometers *Karl Wilhelm Feuerbach* (1800-1834), eines Mitbegründers der Dreiecksgeometrie. Genaueres dazu findet sich in [2] oder [12], oder weniger ausführlich in [19] und [20].

Geboren wurde Feuerbach in Jena am 30. Mai 1800 als Sohn des bekannten Strafrechtlers Paul Johann Anselm Feuerbach (1775-1833), Bruder des Philosophs Ludwig Feuerbach (1804-1872) und Onkel des Malers Anselm Feuerbach (1829-1880). 1817 beginnt Karl Feuerbach das Studium an der Universität Erlangen, versucht sich an Mathematik, Physik und Rechtswissenschaft. 1819 geht er nach Ansbach, wo er Privatunterricht vom Gymnasiallehrer Karl H. I. Buzengeiger (1771-1835) bekommt; danach studiert er in Freiburg. Er promoviert im Februar 1822 mit einer Schrift namens ”*Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren. Eine analytisch-trigonometrische Abhandlung*”. Wir werden gleich auf diese Schrift zurückkommen.

Ab 1823 unterrichtet Feuerbach am Gymnasium Fridericianum in Erlangen, er wird jedoch 1824 aufgrund seiner früheren politischen Aktivität verhaftet. Er wird depressiv, unternimmt zwei Selbstmordversuche, beschäftigt sich aber weiterhin leidenschaftlich mit Mathematik; 1825 wird er freigelassen und ab 1826 unterrichtet er am Gymnasium in der Kleinstadt Hof. Er beginnt ein Manuskript über Tetraedergeometrie, in dem er die unabhängig von Möbius das System der baryzentrischen Koordinaten entwickelt, ein Koordinatensystem, daß sich später als ungeheuer hilfreich erweist, und zwar in der Tetraedergeometrie genauso wie in deren ebenem Gegenstück, der Dreiecksgeometrie.

Die Geisteskrankheit setzt jedoch zu. 1830 muß er den Schuldienst verlassen, als er vor einer Schulklasse mit einem Schwert erscheint und droht, jedem den Kopf abzuschlagen, der eine Gleichung nicht lösen kann. Auch für die Vollendung des Manuskripts über Tetraedergeometrie reicht seine Kraft nicht mehr aus. Am 12. März 1834 stirbt Karl Wilhelm Feuerbach in Erlangen.

§3. ”Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte...”

Kommen wir jetzt zurück zu Feuerbachs Schrift

”*Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren. Eine analytisch-trigonometrische Abhandlung*”.

Da das Original schwer zugänglich war, wurde dieses Buch schon 1908 nachgedruckt ([1]), ergänzt um ein 6 Seiten langes Literaturverzeichnis. Offensichtlich muß Feuerbachs Büchlein ein gewaltiges Echo in der Mathematikerwelt hervorgerufen haben. In der Tat war es eine der ersten umfassenden Arbeiten aus der Dreiecksgeometrie.

Das Buch beginnt mit einer 14seitigen Vorrede von Karl Buzengeiger, in der er über die Rolle der Geometrie und der Mathematik allgemein philosophiert. Die Abhandlung selber ist in sechs Abschnitte unterteilt, jeder einzelne davon in mehrere (durchgehend numerierte) Paragraphen.

Die Methode, mit der Feuerbach Geometrie treibt, ist ”analytisch-trigonometrisch”. Das bedeutet, daß - im Unterschied zur synthetischen Methode - die Sätze vor allem durch trigonometrische Rechnung bewiesen werden und nicht durch geometrische Überlegungen à la Euklid. Allerdings gibt Feuerbach im letzten der sechs Abschnitte die synthetischen (d. h. rein geometrischen) Beweise von 9 Ergebnissen, die er vorher analytisch gezeigt hat.

Die meisten Ergebnisse von Feuerbach sind algebraische Relationen zwischen verschiedenen Größen und Längen eines Dreiecks. Es finden sich gelegentlich aber auch geometrische Sachverhalte, unter anderem die Sätze von Feuerbach, die ich im folgenden vorstellen werde.

§4. Der ”kleine Satz von Feuerbach”

Wir kommen jetzt zu der Dreiecksgeometrie und damit zu den Ergebnissen von Feuerbach, die seiner Abhandlung über das Dreieck am meisten zu ihrem Ruhm verholfen haben.

Sei ABC ein beliebiges Dreieck. Wir bezeichnen mit A', B' und C' die Mittelpunkte der Seiten BC, CA bzw. AB, und mit H_a, H_b und H_c die Fußpunkte der von A, B bzw. C ausgehenden Höhen dieses Dreiecks. In §56 seiner Abhandlung [1] zeigt Karl Feuerbach (Fig. 1):

Satz 1: Die Punkte A', B', C', H_a, H_b und H_c liegen auf einem Kreis.

In Worten: Die Seitenmitten und die Höhenfußpunkte eines Dreiecks liegen auf einem Kreis.

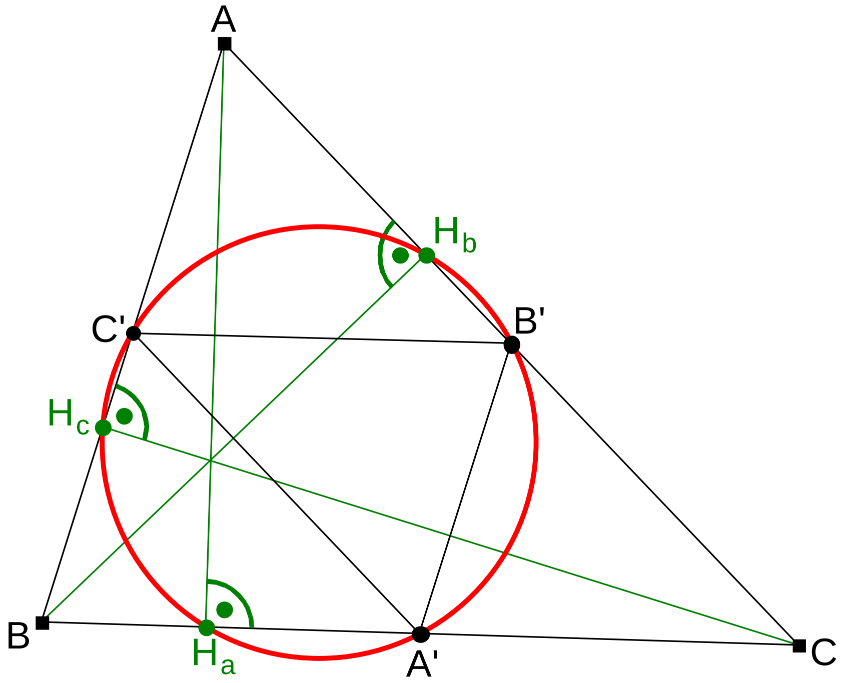

Fig. 1

Zum Beweis dieses Satzes benutzt Feuerbach komplizierte Formeln für Abstände zwischen gewissen merkwürdigen Dreieckspunkten. Wie wir heute wissen, geht es viel einfacher: Mit Umfangswinkelsatz, Stufenwinkelsatz und etwas Geschick ist man schnell am Ziel; Beweise dieser Art findet man in [2], S. 8-9, [4], Kapitel 1 §8, [5], Abschnitt IV.2, [8], Abschnitt 46 oder in [15], §13. Alle solchen Beweise sind im Grunde genommen identisch oder zueinander ähnlich. Die folgende *Herleitung von Satz 1* ist möglicherweise neu und hat den Vorteil, überhaupt keine Rechnungen zu benötigen (nicht einmal Winkelrechnungen), und ist damit leicht zu merken.

Betrachten wir (Fig. 2) nur die Punkte $A,\ B,\ C,\ A',\ B'$ und $C'.$ Das Dreieck $A'B'C'$ heißt *Mittendreieck* des Dreiecks $ABC;$ die vier Dreiecke $AB'C',\ BC'A',\ CA'B'$ und $A'B'C'$ sind alle zueinander kongruent, ähnlich zum Dreieck ABC und haben jeweils die Seitenlängen $\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}$ und $\frac{c}{2},$ wobei $a,\ b$ und c die Seitenlängen des Dreiecks ABC sind. Ferner haben wir $B'C' \parallel BC,\ C'A' \parallel CA$ und $A'B' \parallel AB$ nach dem Satz von der Mittelparallelen.

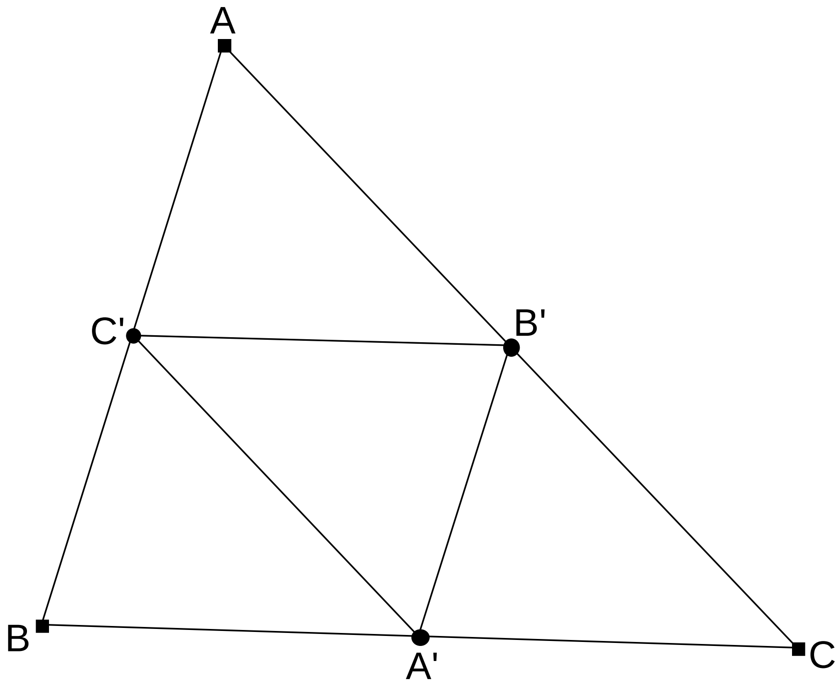

Fig. 2

(Siehe Fig. 3.) Der Abstand von dem Punkt A zu der Geraden $B'C'$ ist halb so groß wie der Abstand von A zu der Geraden $BC.$ Betrachten wir aber den Fußpunkt H_a der von A ausgehenden Höhe des Dreiecks $ABC,$ dann ist die Gerade AH_a orthogonal zu der Geraden $BC,$ also auch orthogonal zu der Geraden $B'C'$ (denn $B'C' \parallel BC$); ferner ist der Abstand AH_a gleich dem Abstand von dem Punkt A zur Geraden $BC,$ also doppelt so groß wie der Abstand von A zur Geraden $B'C'$ (denn der Abstand von dem Punkt A zu der Geraden $B'C'$ ist ja halb so groß wie der Abstand von A zu der Geraden BC).

Wir fassen zusammen: Die Gerade AH_a ist orthogonal zu der Geraden $B'C',$ und der Abstand AH_a ist doppelt so groß wie der Abstand von A zur Geraden $B'C'.$ Somit ist der Punkt H_a das Spiegelbild des Punktes A an der Geraden $B'C'.$

Daraus folgt $\measuredangle B'H_aC' = \measuredangle B'AC'.$ Doch aus $C'A' \parallel CA$ und $A'B' \parallel AB$ wird $C'A' \parallel AB'$ und $A'B' \parallel C'A;$ also ist das Viereck $AB'A'C'$ ein Parallelogramm. Dies liefert $\measuredangle B'AC' = \measuredangle B'A'C'.$ Somit wird $\measuredangle B'H_aC' = \measuredangle B'AC'$ zu $\measuredangle B'H_aC' = \measuredangle B'A'C'.$ Nach dem Umfangswinkelsatz liegen also die Punkte $B',$ $C',$ H_a und A' auf einem Kreis. Das heißt, der Punkt H_a liegt auf dem Umkreis des Dreiecks $A'B'C'.$ Analog liegen die Punkte H_b und H_c auf dem Umkreis des Dreiecks $A'B'C';$ folglich liegen die Punkte $A',$ $B',$ $C',$ $H_a,$ H_b und H_c auf einem Kreis, womit Satz 1 bewiesen ist.

Dieser Kreis durch die sechs Punkte $A',$ $B',$ $C',$ $H_a,$ H_b und H_c wird als *Feuerbachkreis* des Dreiecks ABC bezeichnet.

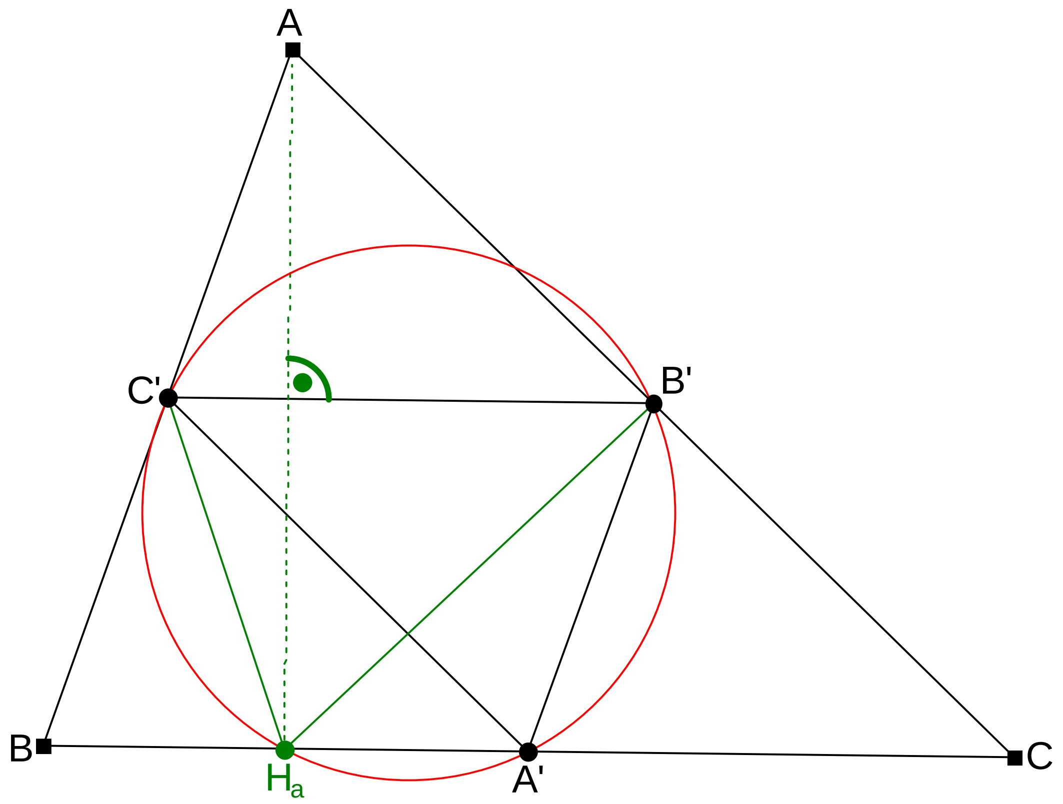

Fig. 3

§5. Der Feuerbachkreis als Neunpunktekreis

Karl Feuerbach war aber nicht der erste, der diesen Kreis fand. Bereits 1821, also ein Jahr vor der Veröffentlichung von Feuerbachs Schrift [1], zeigten Charles-Julien Brianchon und Jean Victor Poncelet ein Resultat, in dem Satz 1 enthalten ist:

Satz 2: Sei H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $ABC,$ und seien $D,$ E und F die Mittelpunkte der Strecken $AH,$ BH bzw. $CH.$ Dann liegen die neun Punkte $A',$ $B',$ $C',$ $H_a,$ $H_b,$ $H_c,$ $D,$ E und F auf einem Kreis.

In Worten: Die Seitenmitten und die Höhenfußpunkte eines Dreiecks und die Mittelpunkte zwischen den Dreiecksecken und dem Höhenschnittpunkt liegen auf einem Kreis. (Siehe Fig. 4.)

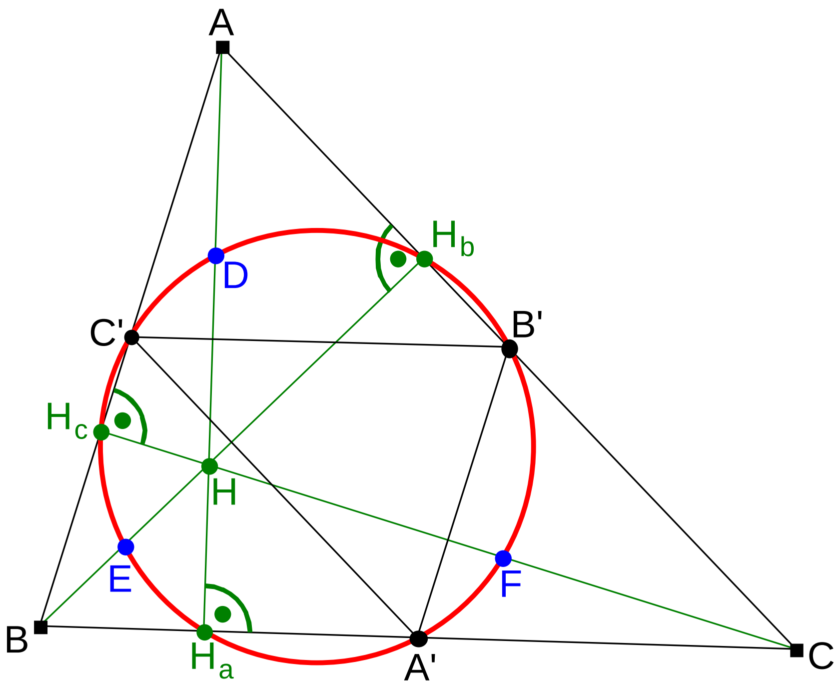

Fig. 4

Die Punkte D, E und F sind also drei neue Punkte auf dem Feuerbachkreis des Dreiecks ABC. Dies ist der Grund, weshalb der Feuerbachkreis oftmals als *Neunpunktekreis* bezeichnet wird. Poncelet interessiert sich für den Feuerbachkreis als geometrischer Ort der Mittelpunkte aller rechtwinkligen Hyperbeln, die durch die Ecken des Dreiecks ABC gehen. Wir dagegen werden weiterhin elementargeometrische Eigenschaften des Feuerbachkreises untersuchen.

Kommen wir aber zuerst zum *Beweis von Satz 2*. Es sei angemerkt, daß Satz 2 ja eine Erweiterung von Satz 1 darstellt; bei den meisten modernen Beweisen von Satz 1 wird Satz 2 mitbewiesen. Bei der Herleitung von Satz 1, die ich in §4 gegeben habe, ist das aber nicht der Fall. Allerdings ist dies kein Problem, denn Satz 2 läßt sich unschwer aus Satz 1 ableiten:

Betrachten wir die Punkte H_a, H_b und H_c. Diese Punkte hatten wir als Höhenfußpunkte des Dreiecks ABC definiert; aber sie sind gleichzeitig die Höhenfußpunkte des Dreiecks BHC, denn die Höhen dieses Dreiecks sind BH_c, HH_a und CH_b. Nach Satz 1 liegen die Seitenmitten und die Höhenfußpunkte eines Dreiecks auf einem Kreis, d. h. die Seitenmitten eines Dreiecks liegen auf dem Kreis durch die drei Höhenfußpunkte. Wenden wir dies auf das Dreieck ABC an, dann erhalten wir, daß die Mittelpunkte A', B' und C' der Seiten BC, CA bzw. AB auf dem Kreis durch die Punkte H_a, H_b und H_c liegen. Wenden wir dies aber auf das Dreieck BHC an, dann folgt, daß die Mittelpunkte E, F und A' der Seiten BH, CH bzw. BC auf dem Kreis durch die Punkte H_a, H_b und H_c liegen. Da ein Kreis durch drei Punkte eindeutig festgelegt ist, fallen diese zwei Kreise zusammen, und wir erhalten, daß die Punkte E und F auf dem Kreis durch die sechs Punkte A', B', C', H_a, H_b und H_c liegen. Analog können wir zeigen, daß die Punkte F und D auf diesem Kreis liegen. Somit liegen alle neun Punkte A', B', C', H_a, H_b, H_c, D, E und F auf einem Kreis, was zu beweisen war.

Übrigens sind die Sehnen $A'D$, $B'E$ und $C'F$ Durchmesser des Feuerbachkreises, weil $\measuredangle A'H_aD = 90°$, $\measuredangle B'H_bE = 90°$ und $\measuredangle C'H_cF = 90°$ gilt.

§6. Die Eulergerade

Die Punkte D, E und F werden gelegentlich als *Eulerpunkte* des Dreiecks ABC bezeichnet. Die Dreiecke $A'B'C'$, $H_aH_bH_c$ und DEF heißen *Mittendreieck*, *Höhenfußpunktdreieck* bzw. *Eulerdreieck* des Dreiecks ABC. Der Feuerbachkreis des ΔABC geht durch die Punkte A', B', C', H_a, H_b, H_c, D, E und F und ist damit der Umkreis des Mittendreiecks, des Höhenfußpunktdreiecks und des Eulerdreiecks gleichzeitig.

Wo liegt eigentlich der Mittelpunkt des Feuerbachkreises und wie groß ist sein Radius? Um diese Fragen zu beantworten, betrachten wir die Seitenhalbierenden AA', BB' und CC' des Dreiecks ABC und deren Schnittpunkt, den Schwerpunkt S des Dreiecks. Da der Schwerpunkt eines Dreiecks jede

Seitenhalbierende im Verhältnis $2:1$ teilt, gilt $AS : SA' = BS : SB' = CS : SC' = 2.$ Das heißt, $SA' : AS = SB' : BS = SC' : CS = \frac{1}{2}.$ Also ist das Dreieck $A'B'C'$ das Bild des Dreiecks ABC bei der zentrischen Streckung mit dem Zentrum S und dem Faktor $-\frac{1}{2}.$ (Wir verwenden hier und im folgenden keine orientierten Strecken.)

Die Mittelsenkrechte der Strecke BC geht durch den Mittelpunkt A' von BC und ist orthogonal zu $BC,$ also auch zu $B'C'$ (wegen $B'C' \parallel BC$). Also ist sie eine Höhe des Dreiecks $A'B'C'.$ Analog sind die beiden anderen Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC Höhen des Dreiecks $A'B'C'.$ Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks $ABC,$ also der Umkreismittelpunkt U des $\Delta ABC,$ ist also der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $A'B'C'.$ Der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist aber $H.$ Die zentrische Streckung mit dem Zentrum S und dem Faktor $-\frac{1}{2}$ überführt das Dreieck ABC in das Dreieck $A'B'C';$ also geht auch der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC in den Höhenschnittpunkt U des Dreiecks $A'B'C'$ über. Das heißt, die Punkte $S,$ H und U liegen auf einer Geraden, und es gilt $SU : HS = \frac{1}{2},$ also $HS : SU = 2.$ Wir halten dies fest:

Satz 3: Der Höhenschnittpunkt $H,$ der Schwerpunkt S und der Umkreismittelpunkt U eines Dreiecks ABC liegen auf einer Geraden, und es gilt $HS : SU = 2.$

Die Gerade durch die Punkte $H,$ S und U heißt *Eulergerade* des Dreiecks $ABC.$

Auf etwas andere Weise wurde Satz 3 in [15], §12 nachgewiesen. Die Eulergerade wurde 1765 von Leonhard Euler (1707-1783) entdeckt; sie ist wohl eines der ersten Resultate der Dreiecksgeometrie, die in der Neuzeit gefunden wurden. Feuerbach beweist Satz 3 in [1], §60.

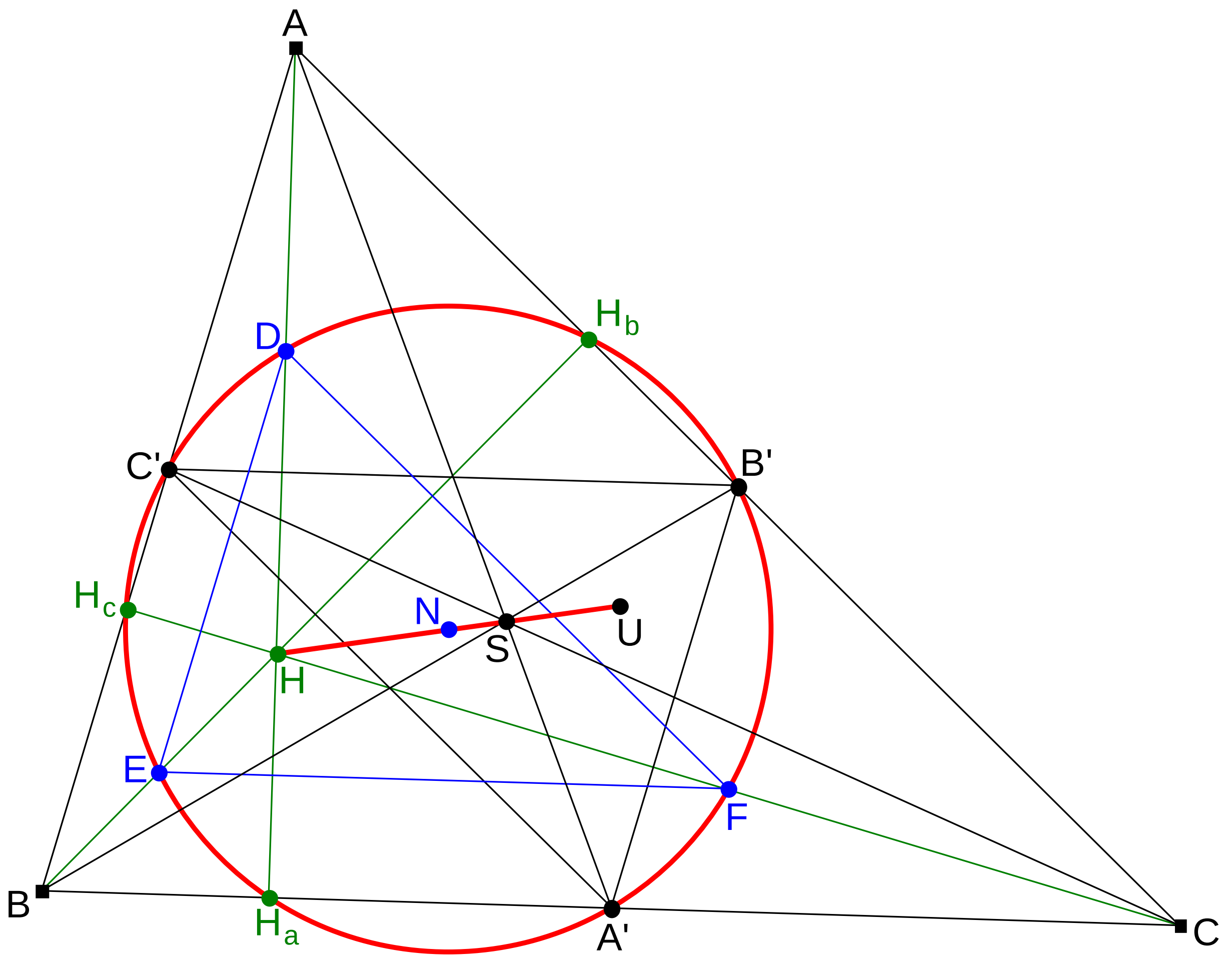

Fig. 5

Sei jetzt N der Mittelpunkt des Feuerbachkreises des Dreiecks $ABC,$ also der Umkreismittelpunkt der Dreiecke $A'B'C',$ $H_aH_bH_c$ und $DEF.$ Bei der zentrischen Streckung mit dem Zentrum S und dem Faktor $-\frac{1}{2},$ die das Dreieck ABC in das Dreieck $A'B'C'$ überführt, wird auch der Umkreismittelpunkt U des Dreiecks ABC auf den Umkreismittelpunkt N des Dreiecks $A'B'C'$ abgebildet. Das heißt, die Punkte

S, U und N liegen auf einer Geraden, und es gilt $SN : US = \frac{1}{2}$, also $US : SN = 2$.

Da die Punkte S und U auf der Eulergeraden des Dreiecks ABC liegen, und die Punkte S, U und N auf einer Geraden liegen, liegt also auch der Punkt N auf der Eulergeraden des Dreiecks ABC. Aus $HS : SU = 2$ und $US : SN = 2$ folgt $HS = 2 \cdot SU$ und $US = 2 \cdot SN$, also $HS = 2 \cdot SU = 2 \cdot US = 2 \cdot (2 \cdot SN) = 4 \cdot SN$, und damit

$$HN = HS - SN = 4 \cdot SN - SN = 3 \cdot SN;$$

$$NU = SN + US = SN + 2 \cdot SN = 3 \cdot SN.$$

Damit ist $HN = NU$; folglich ist N der Mittelpunkt der Strecke HU. Wir fassen zusammen:

Satz 4: Der Mittelpunkt N des Feuerbachkreises des Dreiecks ABC liegt auf der Eulergeraden des ΔABC und ist der Mittelpunkt der Strecke HU, wobei H der Höhenschnittpunkt und U der Umkreismittelpunkt des ΔABC sind. Ferner gilt $US : SN = 2$.

Diesen Satz zeigt auch Feuerbach in [1], §54-55. Damit haben wir die Lage des Mittelpunktes des Feuerbachkreises bestimmt. Für den Radius gilt:

Satz 5: Der Radius des Feuerbachkreises ist $\frac{r}{2}$, wobei r der Umkreisradius des Dreiecks ABC ist.

In Worten: Der Radius des Feuerbachkreises eines Dreiecks ist halb so groß wie der Radius des Umkreises.

Dies zeigt Feuerbach in §26 von [1] mithilfe von Trigonometrie. Viel einfacher geht es folgendermaßen: Bei der zentrischen Streckung mit dem Zentrum S und dem Faktor $-\frac{1}{2}$, die das Dreieck ABC in das Dreieck $A'B'C'$ überführt, geht auch der Umkreis des ΔABC in den Umkreis des $\Delta A'B'C'$, also in den Feuerbachkreis des ΔABC über. Der Radius wird dabei um $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ gestreckt. Da der Radius des Umkreises des ΔABC gleich r ist, ist also der Radius des Feuerbachkreises gleich $\frac{1}{2} \cdot r = \frac{r}{2}$. Damit ist Satz 5 bewiesen.

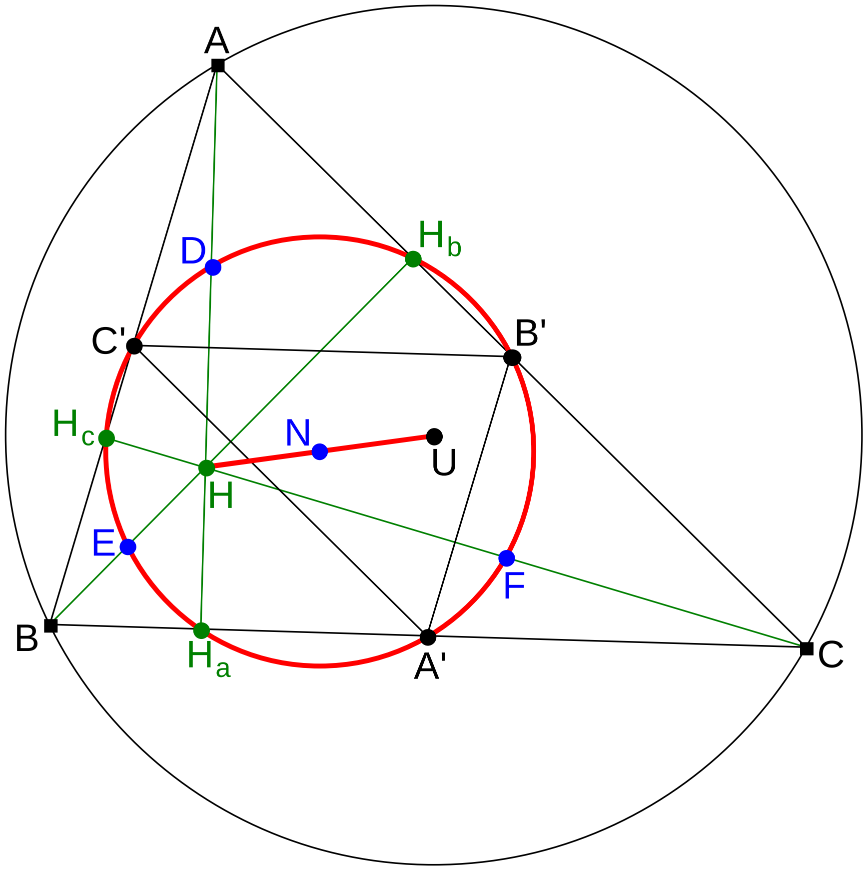

Fig. 6

Der Feuerbachkreis und seine elementaren Eigenschaften waren, wie schon gesagt, vor Feuerbach, nämlich 1821, den französischen Geometern Charles-Julien Brianchon und Jean Victor Poncelet bekannt. Nachher wurden sie wiederentdeckt von Jakob Steiner (1833) und Olry Terquem (1842).

§7. Der ”große Satz von Feuerbach”

Wie wir eingesehen haben, war also Karl Wilhelm Feuerbach weder der Erstentdecker des Feuerbachkreises, noch wußte er, daß die Eulerpunkte D, E und F auf jenem liegen. Der Grund, warum der Kreis trotzdem seinen Namen erhielt (in der deutschen Literatur; in der englischen wird meist vom ”nine-point circle”, also vom Neunpunktekreis gesprochen), ist ein eleganter Satz, den er in §57 seiner Abhandlung [1] fast beiläufig erwähnt:

Satz 6: Der Feuerbachkreis eines Dreiecks *ABC* berührt stets den Inkreis und die drei Ankreise, und zwar den Inkreis innerlich und die drei Ankreise äußerlich. (Siehe Fig. 7.)

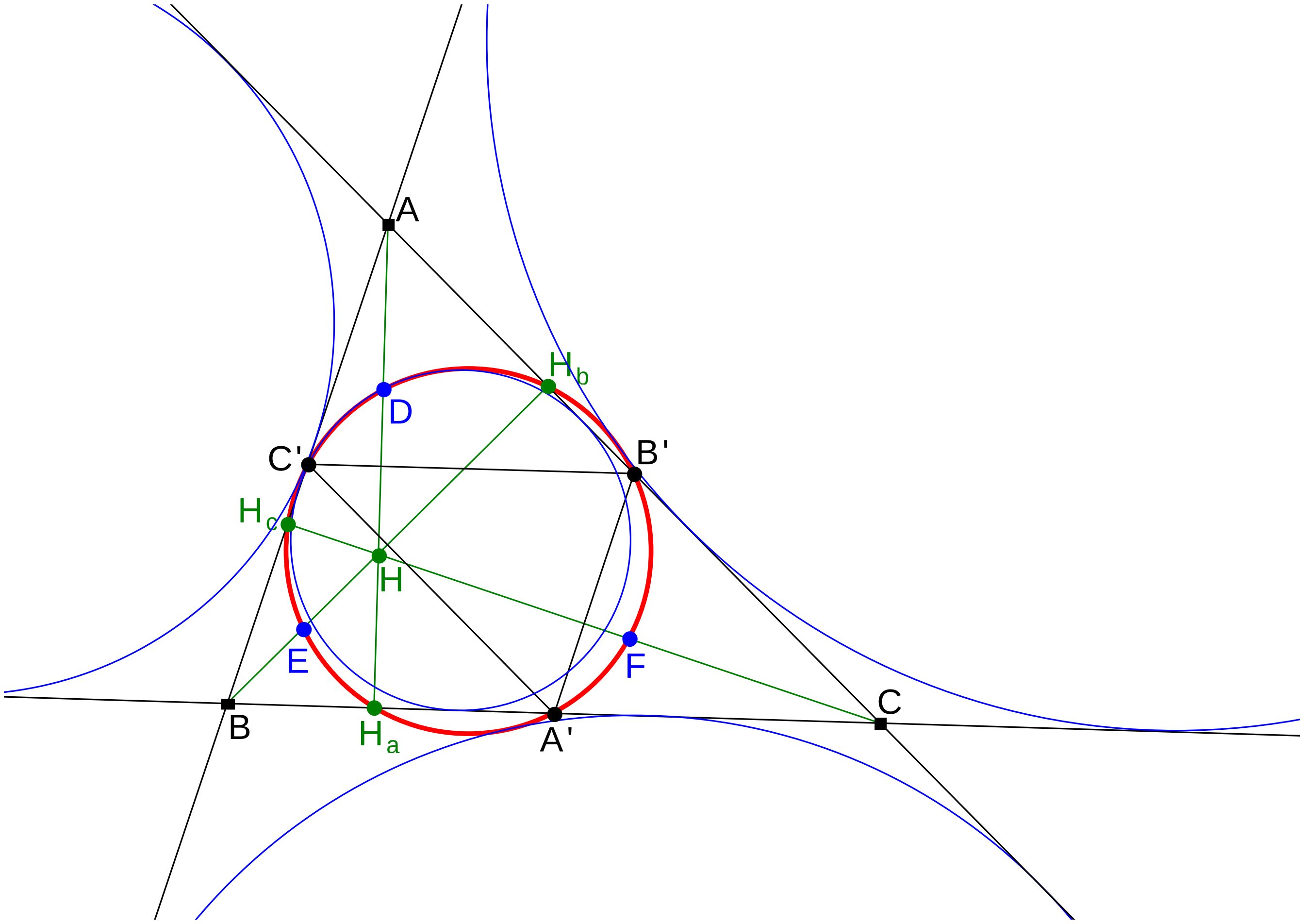

Fig. 7

Dieser Satz machte sowohl Feuerbach als auch seinen Kreis berühmt. Heutzutage wird oft Satz 6 *Satz von Feuerbach* genannt, wobei gelegentlich auch Satz 1 oder sogar Satz 2 diesen Namen erhalten. Um solche Zweideutigkeiten zu vermeiden, könnte man Satz 1 als *kleinen Satz von Feuerbach* und Satz 6 als *großen Satz von Feuerbach* bezeichnen; in der Tat ist der Beweis von Satz 6 sehr kompliziert, was den Titel ”groß” rechtfertigt.

Eine kleine Bemerkung noch. Die Zeichnung Fig. 7 wurde mithilfe des dynamischen Geometrieprogramms ”Euklid” hergestellt; solche Geometrieprogramme erlauben, sehr präzise geometrische Figuren zu zeichnen und sie gegebenenfalls durch ”Ziehen” an einigen Punkten zu deformieren. Früher hatte man diese Möglichkeit nicht: geometrische Figuren waren immer recht ungenau. Während man eine solche Ungenauigkeit bei einfachen Figuren kaum mit bloßem Auge erkennen konnte, warf sie sich bei der Zeichnung zum großen Satz von Feuerbach (wie etwa in [2], S. 11 oder [5], S. 38) oft sofort ins Auge: Entweder meidete der Feuerbachkreis den Inkreis oder er schnitt ihn! Einige Autoren mußten offenbar ”mogeln”, um diese flagrante Unstimmigkeit von Theorie und Zeichenpraxis zu vermeiden. Der Satz war einfach ”too beautiful to illustrate”, wie Paul Yiu in [10] feststellt. Wie schon gesagt, haben wir heute dank Geometriesoftware dieses Problem nicht mehr.

§8. Beweis des Satzes

Zu sagen, der Beweis von Satz 6 ließe sich nicht auf Anhieb finden, wäre eine Untertreibung. Es ist zwar eine Menge von Beweisen bekannt, jedoch ist unter ihnen keiner, den man als einfach bezeichnen könnte. Feuerbach selber zeigte Satz 6 rechnerisch: Er bewies auf trigonometrischem Wege die Gleichungen

$$NO = \frac{r}{2} - \rho; \qquad NO_a = \frac{r}{2} + \rho_a; \qquad NO_b = \frac{r}{2} + \rho_b; \qquad NO_c = \frac{r}{2} + \rho_c,$$

wobei O der Inkreismittelpunkt, O_a, O_b und O_c die Ankreismittelpunkte, ρ der Inkreisradius und ρ_a, ρ_b und ρ_c die Ankreisradien des Dreiecks ABC sind. Aus diesen Gleichungen folgt natürlich, daß der Feuerbachkreis (mit Mittelpunkt N und Radius $\frac{r}{2}$) den Inkreis und die Ankreise (mit Mittelpunkten O, O_a, O_b und O_c und Radien ρ, ρ_a, ρ_b bzw. ρ_c) berührt. Dieser Beweis ist geradlinig, aber mühsam; wer sich interessiert, findet eine seiner Varianten in [5], S. 39-43.

Heute zieht man meist die Inversion am Kreis zum Beweis von Satz 6 heran; siehe z. B. [4], Kapitel 5 §6, [7], Abschnitt 6.2 oder [8], Abschnitt 61.

Ganz elementare Beweise sind eher die Seltenheit; einen sehr geistreichen findet man in [3]. Der Standardbeweis wurde in [5], S. 37-39 vorgestellt; dort ist allerdings die Darstellung recht verworren. Ich gebe hier den Beweis wieder:

Wir beginnen mit zwei elementaren Hilfssätzen. Der erste wird eine Umkehrung des Sekantensatzes sein, die in der Höheren Euklidischen Geometrie oft verwendet wird. Wir formulieren diese Umkehrung mitsamt dem Sekantensatz selber:

Satz 7, der Sekantensatz mit Umkehrung: Seien AB und CD zwei Geraden, die sich in einem Punkt P schneiden, und zwar sei angenommen, daß der Punkt P auf den Verlängerungen der Strecken AB und CD liegt. Genau dann liegen die Punkte A, B, C und D auf einem Kreis, wenn $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ gilt. (Siehe Fig. 8.)

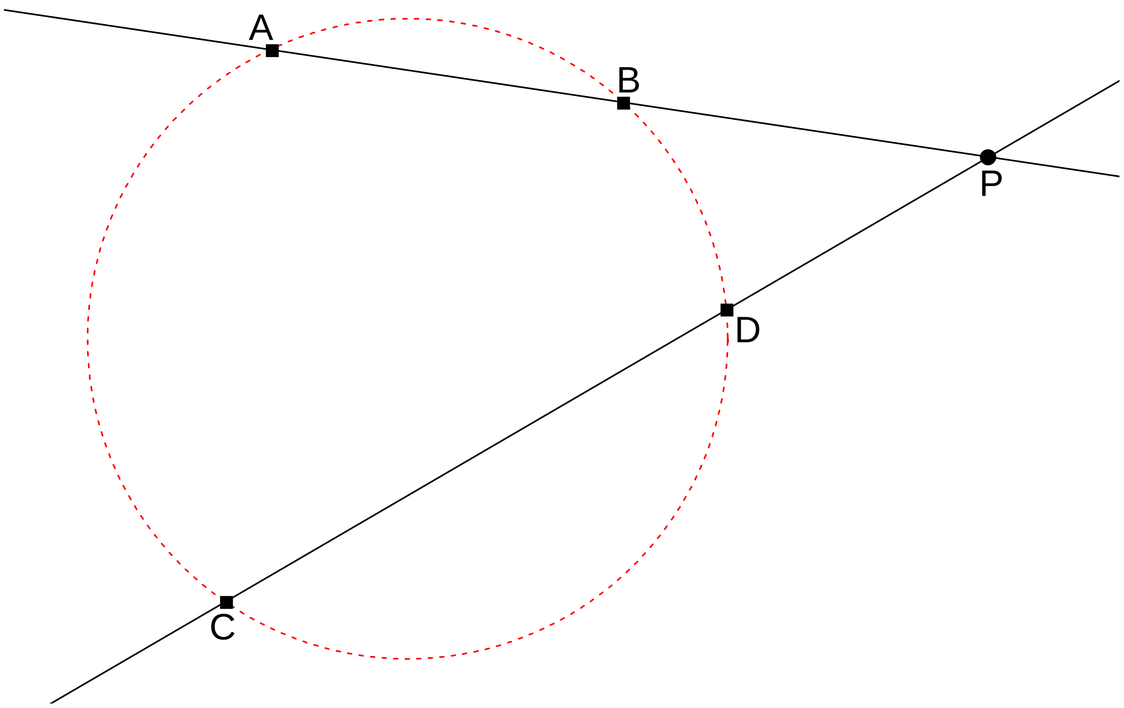

Fig. 8

Beweis: Wir orientieren uns im folgenden an Fig. 9; für andere Punkteanordnungen verläuft der Beweis analog.

Teil 1: Liegen die Punkte A, B, C und D auf einem Kreis, dann ist $\measuredangle BCD = \measuredangle BAD$, also $\measuredangle BCP = \measuredangle DAP$. Ferner ist offensichtlich $\measuredangle BPC = \measuredangle DPA$. Also sind die Dreiecke BCP und DAP ähnlich, und es gilt $PB : PC = PD : PA$, also $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Teil 2: Gilt $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, dann ist $PB : PC = PD : PA$. Ferner ist offensichtlich

$\measuredangle BPC = \measuredangle DPA.$ Also sind die Dreiecke BCP und DAP ähnlich, und es folgt $\measuredangle BCP = \measuredangle DAP,$ d. h. $\measuredangle BCD = \measuredangle BAD.$ Somit liegen die Punkte $A,\ B,\ C$ und D auf einem Kreis.

Also liegen die Punkte $A,\ B,\ C$ und D genau dann auf einem Kreis, wenn $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ gilt. Hiermit ist Satz 7 bewiesen.

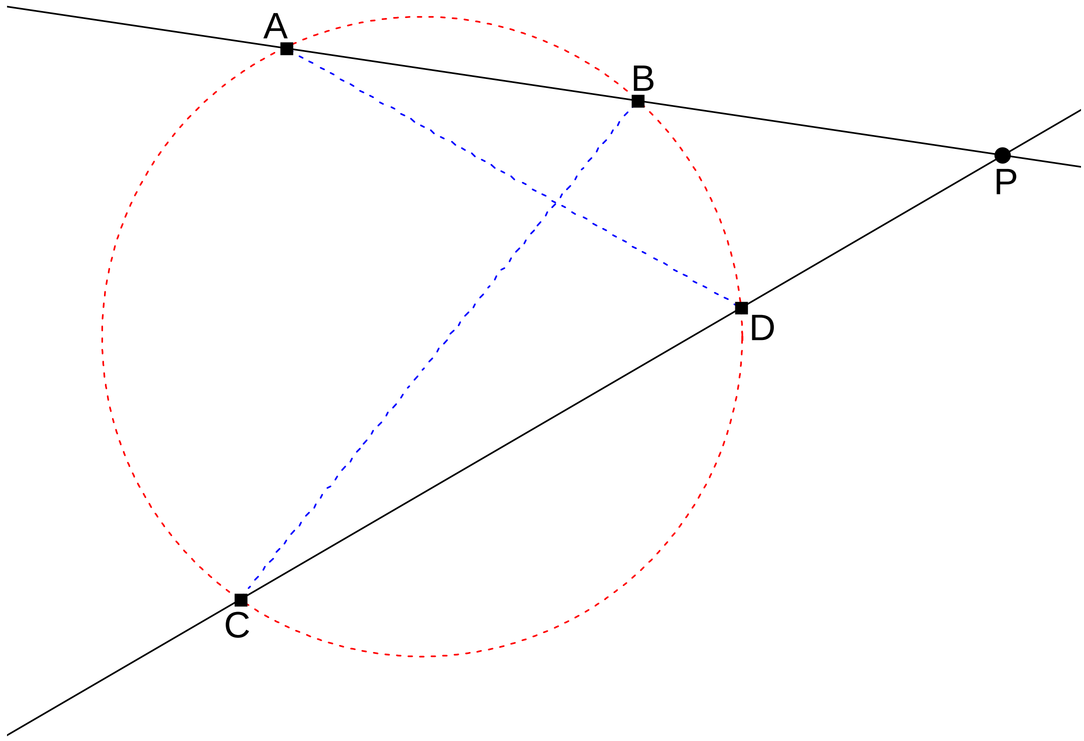

Fig. 9

Der nächste Hilfssatz wird sein:

Satz 8: Sei P ein gemeinsamer Punkt zweier Kreise k und k'. Eine beliebige Gerade g durch P schneide die Kreise k und k' außer im Punkt P noch in den Punkten Q bzw. Q'. Sind die Tangenten an die Kreise k und k' in den Punkten Q bzw. Q' parallel, dann berühren sich die Kreise k und k' in P. (Siehe Fig. 10.)

Beweis: Im folgenden orientieren wir uns an Fig. 10. Seien O bzw. O' die Mittelpunkte und r bzw. r' die Radien der Kreise k und k'. Dann ist $OP = OQ = r$ und $O'P = O'Q' = r'$; die Dreiecke POQ und $PO'Q'$ sind somit gleichschenklig, und es gilt $\measuredangle OPQ = \measuredangle OQP$ und $\measuredangle O'PQ' = \measuredangle O'Q'P.$ Die Tangenten an die Kreise k und k' in den Punkten Q bzw. Q' sind orthogonal zu den Berührradien OQ bzw. $O'Q'$; da die zwei Tangenten zueinander parallel sind, sind also auch die Berührradien OQ und $O'Q'$ zueinander parallel, und nach dem Stufenwinkelsatz gilt $\measuredangle O'Q'P = \measuredangle OQP.$ Mit $\measuredangle OPQ = \measuredangle OQP$ und $\measuredangle O'PQ' = \measuredangle O'Q'P$ wird dies zu $\measuredangle O'PQ' = \measuredangle OPQ,$ also $\measuredangle O'PQ = \measuredangle OPQ.$ Also liegen die Punkte $O',\ O$ und P auf einer Geraden, d. h. der Punkt P liegt auf der Zentralen der Kreise k und k'; da aber P ein gemeinsamer Punkt der Kreise k und k' ist, müssen sich folglich die zwei Kreise berühren, und zwar berühren sie sich in $P.$ Damit ist Satz 8 bewiesen.

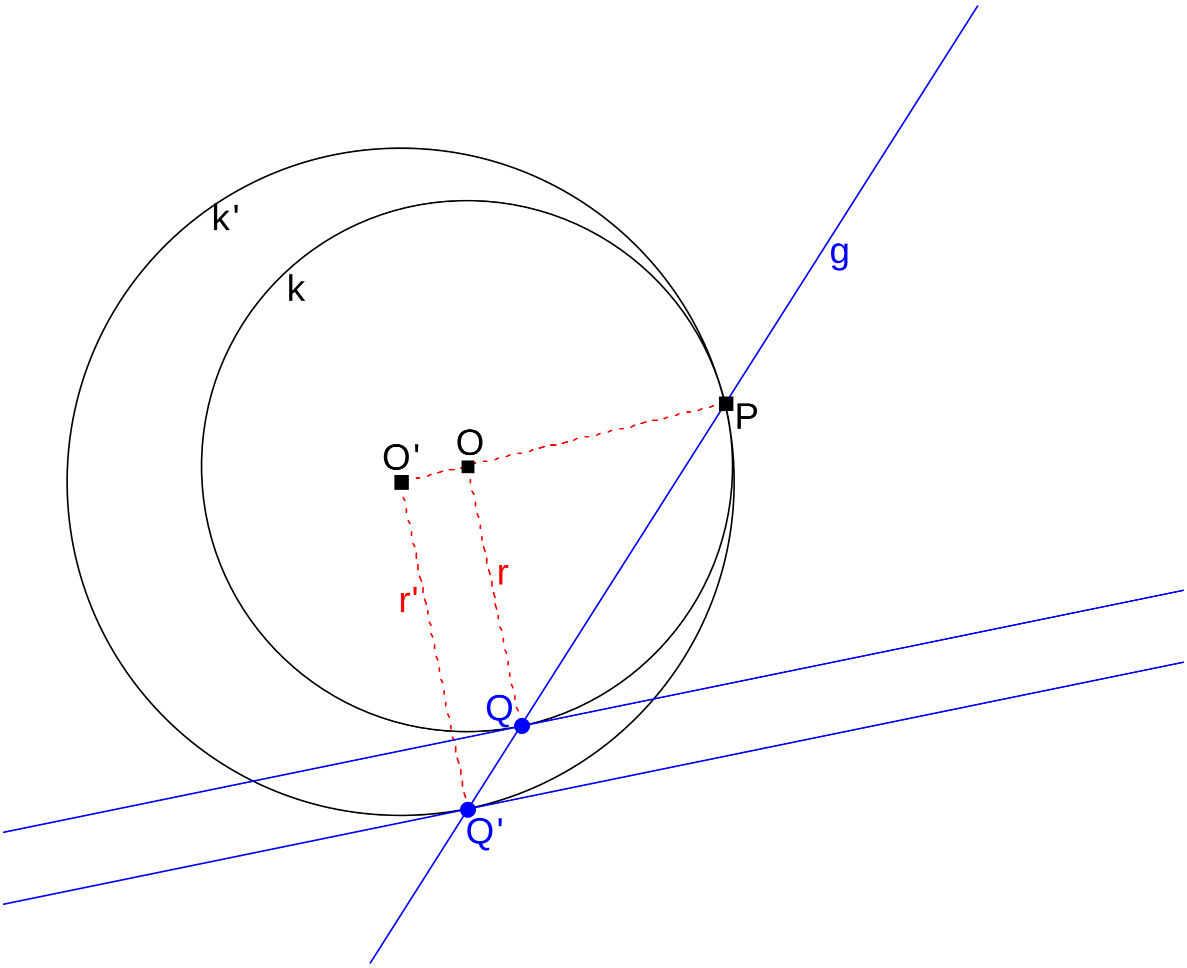

Fig. 10

Jetzt können wir mit dem eigentlichen *Beweis von Satz 6* anfangen: Neben den Seitenmitten A', B' und C' und den Höhenfußpunkten H_a, H_b und H_c zeichnen wir im Dreieck ABC noch den Punkt X, in dem der Inkreis des Dreiecks die Seite BC berührt. Die Winkelhalbierende des Winkels CAB schneide die Seite BC in X' und den Umkreis des Dreiecks ABC außer A noch in einem Punkt A''. Der Inkreismittelpunkt des ΔABC sei O (Fig. 11).

Da der Punkt A'' auf der Winkelhalbierenden des Winkels CAB liegt, gilt $\measuredangle CAA'' = \measuredangle BAA''$. Gleiche Umfangswinkel in einem Kreis gehören zu gleichen Sehnen; also ist $CA'' = BA''$. Folglich liegt der Punkt A'' auf der Mittelsenkrechten der Strecke BC. (Der Punkt A'' ist also der Mittelpunkt des Bogens BC auf dem Umkreis.) Nun haben wir $\measuredangle A''BC = \measuredangle A''AC$ (Umfangswinkel), also

$$\measuredangle A''BO = \measuredangle A''BC + \measuredangle CBO = \measuredangle A''AC + \measuredangle CBO = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}, \qquad \text{und}$$

$$\measuredangle A''OB = \measuredangle OAB + \measuredangle OBA \qquad \text{(Außenwinkelsatz im Dreieck } AOB\text{)}$$
$$= \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

Also ist $\measuredangle A''BO = \measuredangle A''OB$, und das Dreieck $BA''O$ ist gleichschenklig, d. h. wir bekommen $A''B = A''O$.

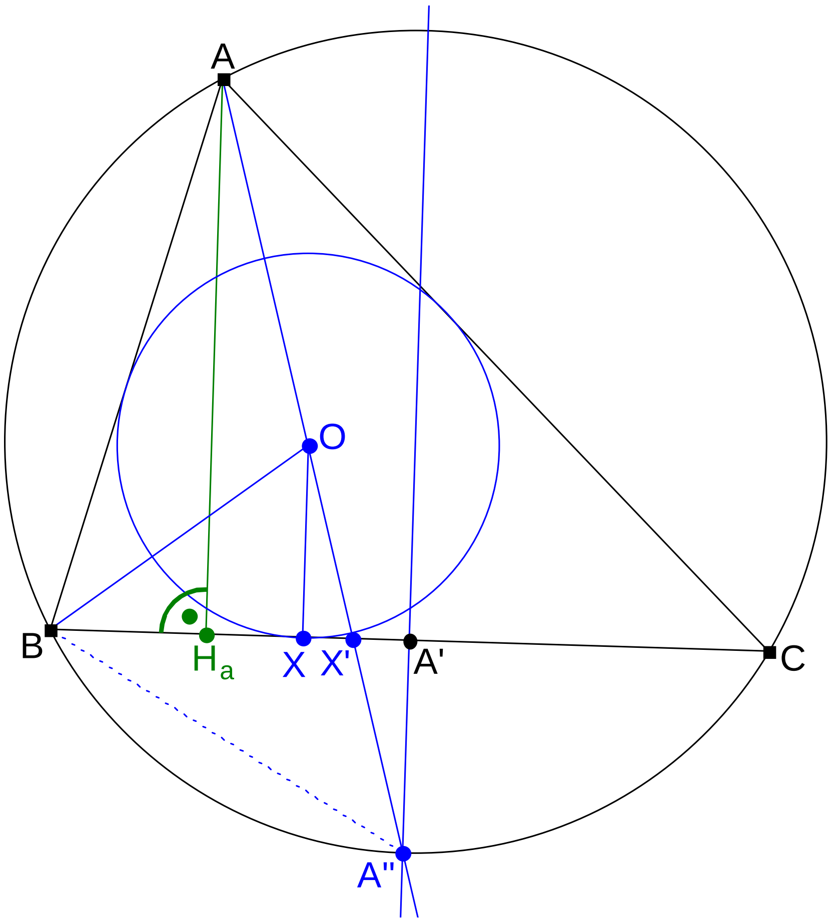

Fig. 11

Wegen

$$\measuredangle A''BX' = \measuredangle A''BC = \measuredangle A''AC \qquad \text{(Umfangswinkel)}$$
$$= \measuredangle A''AB \qquad \text{(Winkelhalbierende)}$$

und $\measuredangle BA''X' = \measuredangle AA''B$ sind die Dreiecke $A''BX'$ und $A''AB$ zueinander ähnlich, und es folgt $A''X' : A''B = A''B : A''A$, also $A''X' \cdot A''A = A''B^2$. Mit $A''B = A''O$ ergibt sich daraufhin $A''X' \cdot A''A = A''O^2$.

Die Geraden AH_a, OX und $A''A'$ stehen alle senkrecht auf BC (die Gerade $A''A'$ steht senkrecht auf BC, weil A'' auf der Mittelsenkrechten der Strecke BC liegt); also sind sie zueinander parallel, und nach dem Strahlensatz gilt

$$\frac{A'X'}{A''X'} = \frac{A'H_a}{A''A} = \frac{A'X}{A''O}.$$

Daher ist $A'X' = k \cdot A''X'$, $A'H_a = k \cdot A''A$ und $A'X = k \cdot A''O$ für ein gewisses reelles k. Aber aus $A''X' \cdot A''A = A''O^2$ folgt $k^2 \cdot (A''X' \cdot A''A) = k^2 \cdot A''O^2$, also $(k \cdot A''X') \cdot (k \cdot A''A) = (k \cdot A''O)^2$, und $A'X' \cdot A'H_a = A'X^2$.

(Siehe Fig. 12.) Bekanntlich sind die zwei von einem Punkt an einen Kreis gelegten Tangenten zueinander symmetrisch bezüglich des Kreisdurchmessers durch diesen Punkt. Also sind die Tangenten von X' an den Inkreis des Dreiecks ABC zueinander symmetrisch bezüglich der Geraden $X'O$. Eine von diesen zwei Tangenten ist die Gerade BC; die andere ist somit das Spiegelbild der Geraden BC an der Geraden $X'O$. Diese zweite Tangente berühre den Inkreis in Q. Die Gerade $A'Q$ schneide den Inkreis außer Q noch in einem zweiten Punkt L. Dann gilt $A'Q \cdot A'L = A'X^2$ nach dem Sekantentangentensatz. Andererseits haben wir $A'X' \cdot A'H_a = A'X^2$, also $A'Q \cdot A'L = A'X' \cdot A'H_a$. Nach Satz 7 liegen also die Punkte Q, L, X' und H_a auf einem Kreis; im Sehnenviereck QLH_aX' ist somit $\measuredangle QLH_a = 180° - \measuredangle QX'H_a$, d. h. $\measuredangle A'LH_a = 180° - \measuredangle QX'H_a$.

Da die Gerade $X'Q$ (also die zweite Tangente von X' an den Inkreis) das Spiegelbild der Geraden BC an der Geraden $X'O$ ist, haben wir $\measuredangle OX'Q = \measuredangle OX'X$, und damit

$$\begin{aligned}\measuredangle A'LH_a &= 180° - \measuredangle QX'H_a = 180° - (\measuredangle OX'Q + \measuredangle OX'X) = 180° - 2 \cdot \measuredangle OX'X \\ &= 180° - 2 \cdot (\measuredangle X'AC + \measuredangle X'CA) \qquad \text{(Außenwinkelsatz im } \Delta AX'C\text{)} \\ &= 180° - 2 \cdot \left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right) = 180° - \alpha - 2\gamma = (\alpha + \beta + \gamma) - \alpha - 2\gamma = \beta - \gamma.\end{aligned}$$

Die Tangente an den Feuerbachkreis in A' schneide die Gerade CA in R. Als Sehnentangentenwinkel ist dann $\measuredangle B'A'R$ gleich dem Umfangswinkel $\measuredangle B'C'A'$, also gleich $\measuredangle BCA = \gamma$, weil die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ ähnlich sind. Andererseits ist $A'B' \parallel AB$ und damit nach dem Stufenwinkelsatz $\measuredangle B'A'C = \measuredangle ABC = \beta$. Daraus folgt $\measuredangle RA'C = \measuredangle B'A'C - \measuredangle B'A'R = \beta - \gamma = \measuredangle A'LH_a$. Doch $\measuredangle RA'C$ ist der Sehnentangentenwinkel der Sehne $A'H_a$ im Feuerbachkreis des Dreiecks ABC; also ist $\measuredangle RA'C = \measuredangle A'C'H_a$. Und damit wird $\measuredangle A'C'H_a = \measuredangle A'LH_a$. Folglich liegt der Punkt L auf dem Kreis durch die Punkte A', C' und H_a, d. h. auf dem Feuerbachkreis des Dreiecks ABC.

Wir hatten gezeigt, daß $180° - \measuredangle QX'H_a = \beta - \gamma$ ist. D. h., es ist $\measuredangle QX'C = \beta - \gamma$. Andererseits haben wir $\measuredangle RA'C = \beta - \gamma$. Somit ist $\measuredangle QX'C = \measuredangle RA'C$, also nach dem Stufenwinkelsatz $QX' \parallel RA'$.

Nun haben wir den Punkt L, der auf dem Inkreis und auf dem Feuerbachkreis des Dreiecks ABC liegt; die Punkte Q und A' liegen auf einer Geraden mit L, wobei Q auf dem Inkreis und A' auf dem Feuerbachkreis liegt. Ferner sind die Tangenten an den Inkreis und an den Feuerbachkreis in den Punkten Q bzw. A' parallel (denn $QX' \parallel RA'$). Nach Satz 8 berühren sich also der Inkreis und der Feuerbachkreis in dem Punkt L, und zwar berühren sie sich innerlich, was aus der Anordnung der Punkte folgt.

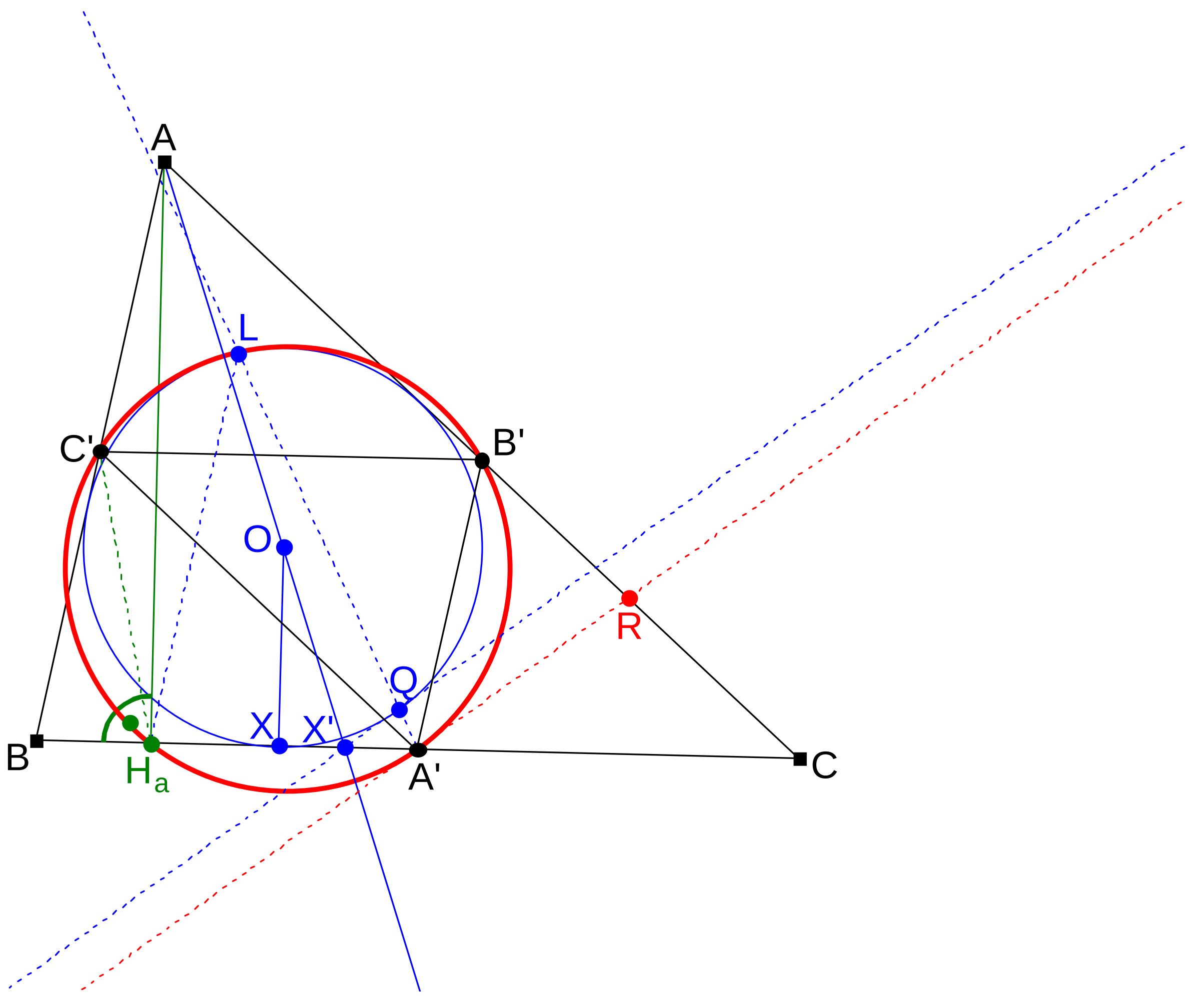

Fig. 12

Es bleibt uns noch zu zeigen, daß sich jeder Ankreis und der Feuerbachkreis äußerlich berühren; doch dies bedeutet im Wesentlichen nur eine Wiederholung der obigen Überlegungen, und ich denke, auf eine solche Wiederholung verzichten zu können. Somit ist Satz 6 bewiesen.

§9. Merkwürdige Punkte

Dreiecksgeometrie war schon immer verbunden mit merkwürdigen Punkten eines Dreiecks. Die Anzahl solcher Punkte nahm in den letzten Jahren so rasch zu, daß es nötig wurde, sie aufzulisten. Die bekannteste Liste von merkwürdigen Punkten ist die 1999 entstandene und seitdem auf weit über 2000 Punkte angewachsene ”Enzyklopädie der Dreieckszentren” von Clark Kimberling ([6]). Dabei werden dort nur ”Dreieckszentren” aufgeführt, d. h. die Punkte, die invariant sind unter Vertauschung der Ecken; eine strenge Definition eines ”Dreieckszentrums” wird in [6] gegeben. Die ersten vier von Kimberlings Dreieckszentren sind die aus der Schule bekannten (Inkreismittelpunkt, Schwerpunkt, Umkreismittelpunkt und Höhenschnittpunkt); das fünfte ist - der Mittelpunkt des Feuerbachkreises! Daran läßt sich erkennen, welche Bedeutung dem Feuerbachkreis in der Dreiecksgeometrie zukommt. Hier sind einige Dreieckszentren mit ihren Nummern in [6]:

Nr.	**Bedeutung**		**Nr.**	**Bedeutung**
X_1	Inkreismittelpunkt		X_{22}	Exeterpunkt
X_2	Schwerpunkt		X_{40}	Umkreismittelpunkt des Dreiecks
X_3	Umkreismittelpunkt			aus den Ankreismittelpunkten
X_4	Höhenschnittpunkt		X_{54}	Kosnitapunkt
X_5	Mittelpunkt des Feuerbachkreises		X_{68}	Prasolovpunkt
X_6	Lemoinepunkt		X_{110}	Eulerspiegelpunkt
X_7	Gergonnepunkt		X_{256}	erster Sharyginpunkt
X_8	Nagelpunkt		X_{355}	Mittelpunkt des Fuhrmannkreises
X_9	Mittenpunkt		X_{389}	Mittelpunkt des Taylorkreises
X_{10}	Spiekerpunkt		X_{399}	Parryspiegelpunkt
X_{11}	Feuerbach(berühr)punkt		X_{485}	(erster) Vectenpunkt
X_{13}	(erster) Fermatpunkt		X_{1127}	erster de-Villierspunkt
X_{15}	(erster) isodynamischer Punkt		X_{1153}	Mittelpunkt des Lamoenkreises
X_{17}	(erster) Napoleonpunkt		X_{1155}	Schröderpunkt
X_{21}	Schifflerpunkt		X_{1337}	(erster) Wernaupunkt

Über die Bedeutungen dieser Punkte kann man in [6] nachlesen. Ansonsten haben die meisten Dreieckszentren in [6] keine geometrische Bedeutung und werden nur durch ihre trilinearen Koordinaten definiert.

Wie schon gesagt, gibt auch der Feuerbachkreis neue Möglichkeiten, merkwürdige Punkte zu definieren. Einerseits haben wir den Mittelpunkt N des Feuerbachkreises, andererseits den Berührpunkt L des Feuerbachkreises mit dem Inkreis; auch die Berührpunkte $L_a,\ L_b$ und L_c des Feuerbachkreises mit den Ankreisen sind von Interesse. Die Punkte N und L streiten sich um den Namen ”Feuerbachpunkt”: Während in Deutschland öfters N als ”Feuerbachpunkt” des ΔABC bezeichnet wird, heißt in [6] L ”Feuerbach point” des $\Delta ABC.$ Um Verwechslungen zu vermeiden, bezeichne ich den Mittelpunkt N des Feuerbachkreises als *Feuerbachmittelpunkt* und den Berührpunkt L des Feuerbachkreises mit dem Inkreis als *Feuerbachberührpunkt* des Dreiecks $ABC.$ Die Punkte N und L sind X_5 bzw. X_{11} in Clark Kimberlings Liste [6]. Die Berührpunkte $L_a,\ L_b$ und L_c des Feuerbachkreises mit den Ankreisen können *äußere Feuerbachberührpunkte* des Dreiecks ABC genannt werden.

§10. Weitere Eigenschaften des Feuerbachberührpunktes

Mit Satz 6 endet die Theorie des Feuerbachkreises nicht, vielmehr beginnt sie damit erst. Im folgenden werde ich meist ohne Beweis mehrere Eigenschaften des Feuerbachpunktes vorstellen.

Für den Berührpunkt L des Feuerbachkreises des Dreiecks ABC mit dem Inkreis und für die Mittelpunkte A', B' und C' der Seiten BC, CA bzw. AB gilt:

Satz 9: Eine der Strecken LA', LB' und LC' ist stets gleich der Summe der beiden anderen.

Das heißt: Es gilt immer eine der drei Gleichungen $LA' = LB' + LC'$, $LB' = LC' + LA'$ oder $LC' = LA' + LB'$. (Siehe Fig. 13, wo derjenige Fall dargestellt ist, in dem $LA' = LB' + LC'$ gilt.)

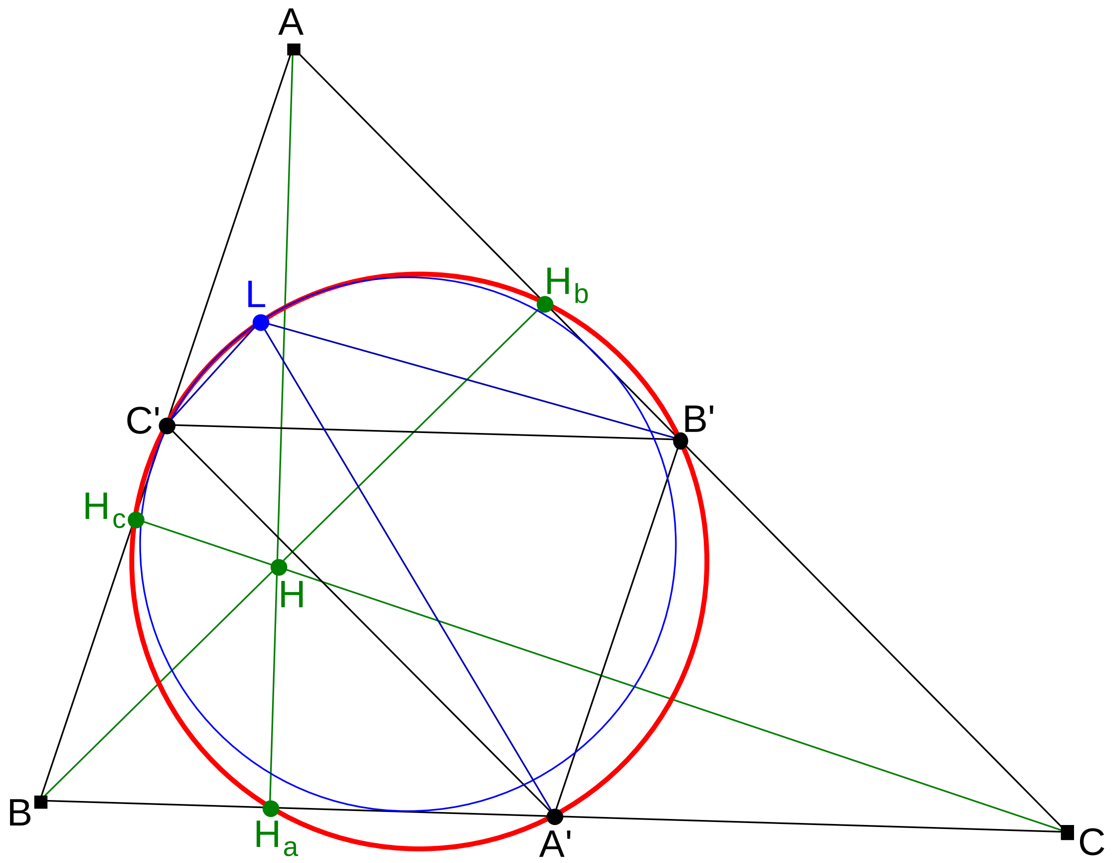

Fig. 13

Dieser Satz ist anscheinend schon über längere Zeit bekannt; ich kenne seinen Ursprung nicht.

Einen anderen bemerkenswerten Sachverhalt zeigte schon Feuerbach in [1], §58:

Satz 10: Sind O der Inkreismittelpunkt und O_a, O_b und O_c die Ankreismittelpunkte eines Dreiecks ABC, und N der Mittelpunkt des Feuerbachkreises, dann gilt

$$NO + NO_a + NO_b + NO_c = 6r,$$

wobei r der Umkreisradius des Dreiecks ABC ist. (Siehe Fig. 14.)

Zum *Beweis* dieses Satzes betrachten wir die Punkte L, L_a, L_b und L_c, in denen der Feuerbachkreis den Inkreis und die drei Ankreise des ΔABC berührt. Seien ρ der Inkreisradius und ρ_a, ρ_b und ρ_c die Ankreisradien des Dreiecks ABC; der Radius des Feuerbachkreises ist $\frac{r}{2}$. Damit gilt

$$NO = NL - OL = \frac{r}{2} - \rho;$$

$$NO_a = NL_a + O_aL_a = \frac{r}{2} + \rho_a;$$

$$NO_b = NL_b + O_bL_b = \frac{r}{2} + \rho_b;$$

$$NO_c = NL_c + O_cL_c = \frac{r}{2} + \rho_c.$$

Addition ergibt

$$NO + NO_a + NO_b + NO_c = \left(\frac{r}{2} - \rho\right) + \left(\frac{r}{2} + \rho_a\right) + \left(\frac{r}{2} + \rho_b\right) + \left(\frac{r}{2} + \rho_c\right)$$
$$= 2r + (\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho).$$

Nach dem Satz $\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho = 4r$ (siehe [1], §5 oder [5], S. 33, Aufgabe 16c) wird daraus

$$NO + NO_a + NO_b + NO_c = 2r + 4r = 6r,$$

was zu beweisen war.

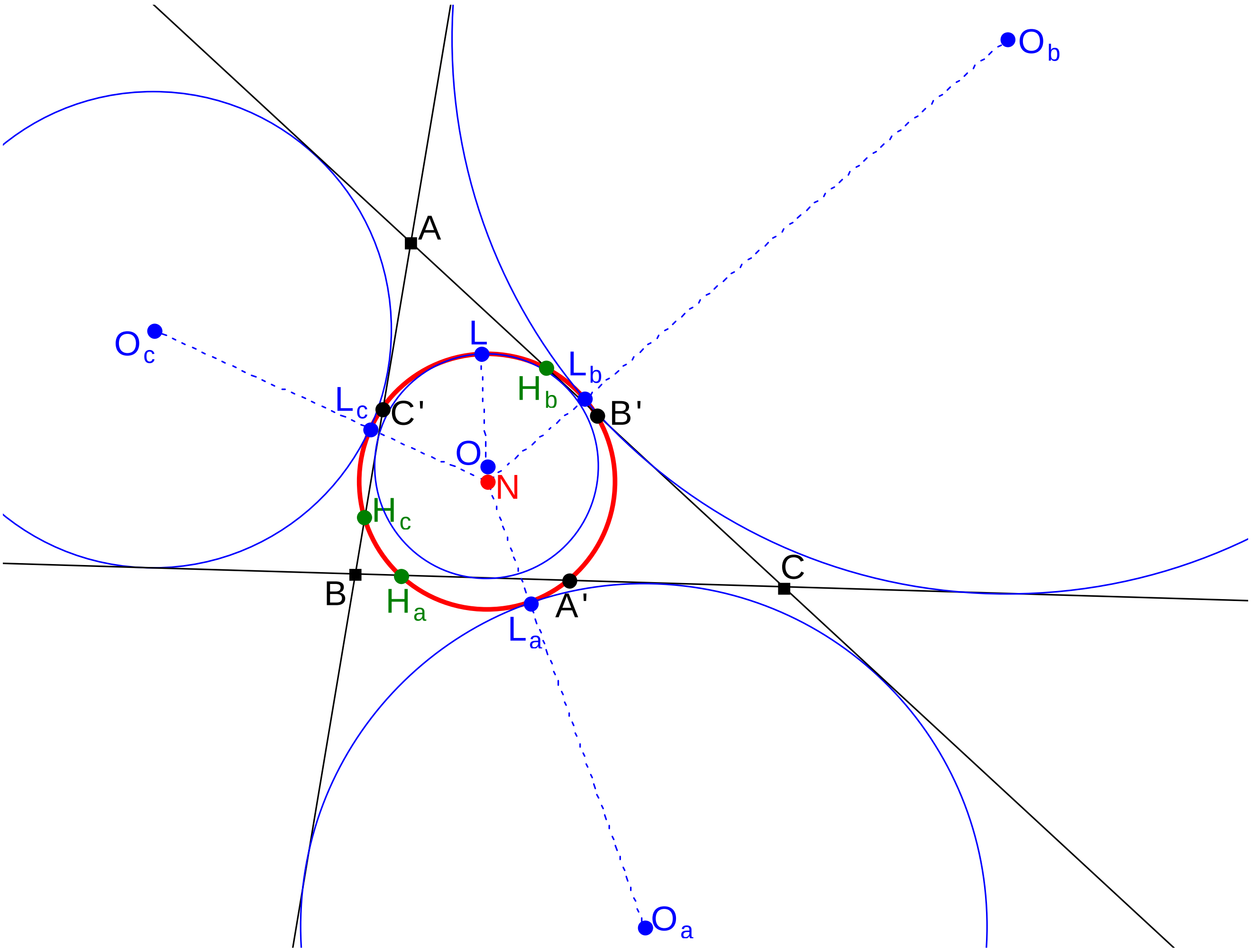

Fig. 14

Der Feuerbachberührpunkt L liegt auf vielen interessanten Geraden und Kreisen; im folgenden werden wir einige von ihnen erwähnen. Die ersten drei Geraden durch L erhalten wir aus dem folgenden Satz:

Satz 11: Der Inkreis des Dreiecks ABC berühre die Seiten BC, CA und AB in den Punkten X, Y bzw. Z. Sind O der Inkreismittelpunkt und U der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC, dann gehen die Spiegelbilder der Geraden OU an den Geraden YZ, ZX bzw. XY durch den Punkt L. (Siehe Fig. 15.)

Dieses Resultat wurde von Wolfgang Kroll in [3], S. 254 ohne Beweis mitgeteilt.

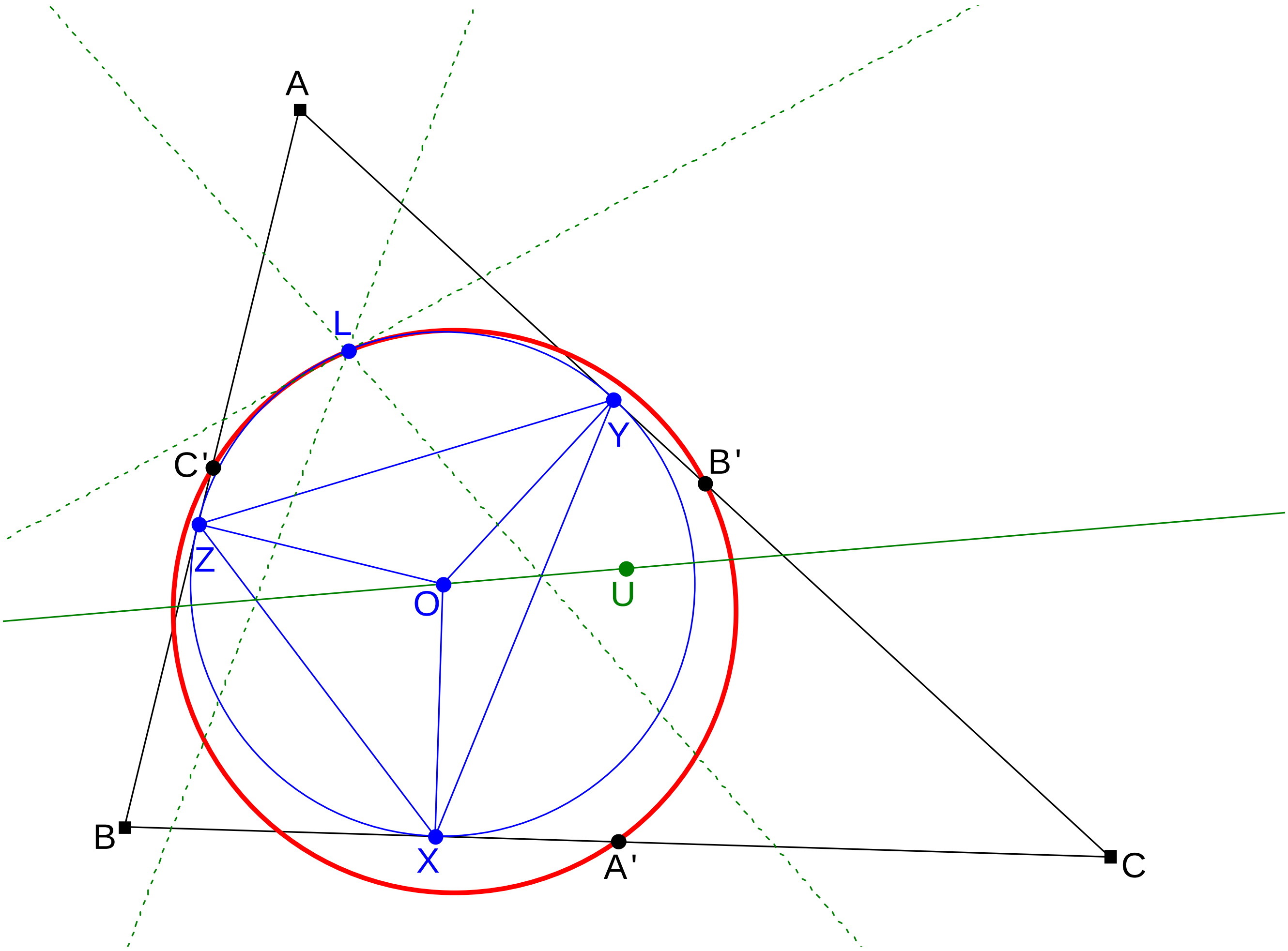

Fig. 15

Ein Satz von Michel Garitte zeigt uns drei Kreise, die durch *L* gehen:

Satz 12: Seien A_m, B_m und C_m die Mittelpunkte der Strecken AO, BO bzw. CO. Der Feuerbachberührpunkt *L* des Dreiecks *ABC* liegt auf den Thaleskreisen über den Strecken XA_m, YB_m und ZC_m. (Siehe Fig. 16.)

Bemerkung: Die Punkte A_m, B_m und C_m sind gleichzeitig die Umkreismittelpunkte der Dreiecke OYZ, OZX bzw. OXY.

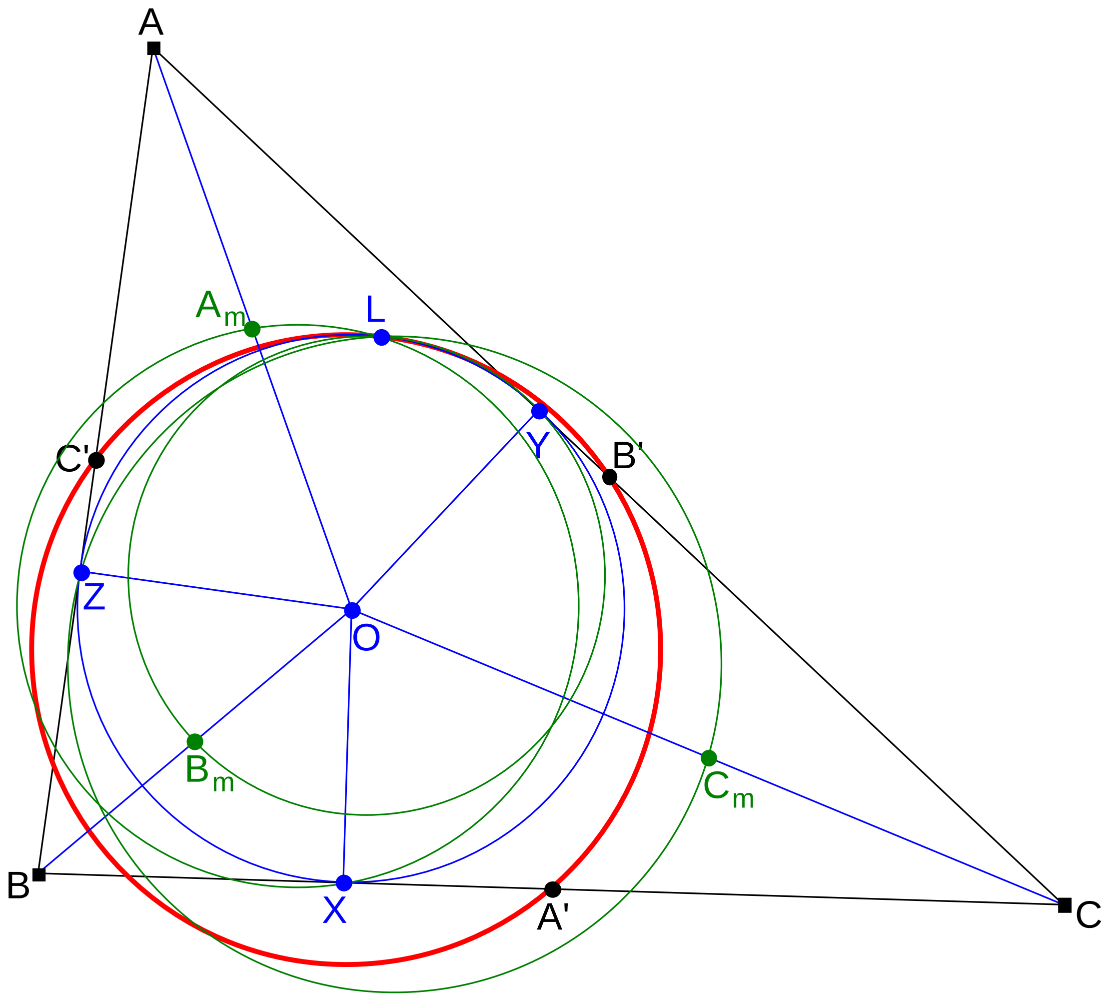

Fig. 16

Und damit gleich zu drei weiteren Kreisen durch L, die bereits 1886 Johann Döttl bekannt waren (allerdings nur in der entsprechenden Variante mit den Ankreisen statt dem Inkreis!, siehe [17], Abschnitt 68):

Satz 13: Für den Inkreismittelpunkt O des Dreiecks ABC gilt: Die Feuerbachkreise der Dreiecke BOC, COA und AOB gehen durch den Feuerbachberührpunkt L des Dreiecks ABC. (Siehe Fig. 17.)

Das heißt, der Feuerbachberührpunkt L liegt auf den Feuerbachkreisen der Dreiecke ABC, BOC, COA und AOB. Dies kann teilweise verallgemeinert werden: Für vier beliebige Punkte A, B, C und D haben die Feuerbachkreise der Dreiecke ABC, BCD, CDA und DAB einen gemeinsamen Punkt. (Siehe [13], Satz 4.1.6.)

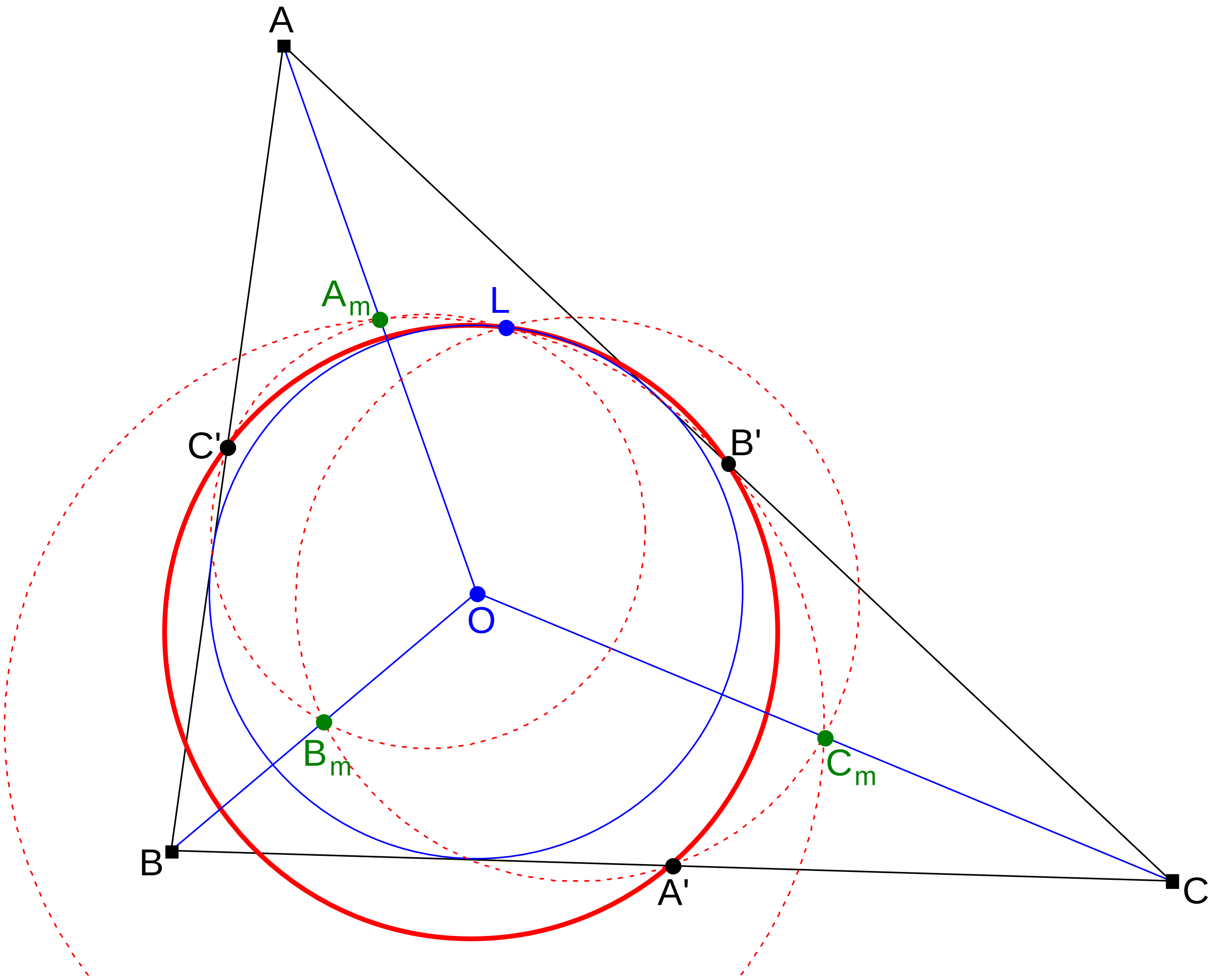

Fig. 17

Zwei gänzlich überraschende Kreise durch *L* entdeckten Lev Emelyanov und Tatiana Emelyanova ([11]):

Satz 14: Der Kreis durch die Punkte, in denen die Winkelhalbierenden des Dreiecks *ABC* die jeweils gegenüberliegenden Seiten schneiden, geht durch den Feuerbachberührpunkt *L*. (Siehe Fig. 18.)

Satz 15: Der Kreis durch die Punkte, in denen die Ankreise des Dreiecks *ABC* die entsprechenden Seiten berühren, geht durch den Feuerbachberührpunkt *L*. (Siehe Fig. 19.)

Es sei angemerkt, daß diese zwei Kreise zwar durch *L* gehen, aber im Allgemeinen weder den Inkreis noch den Feuerbachkreis berühren.

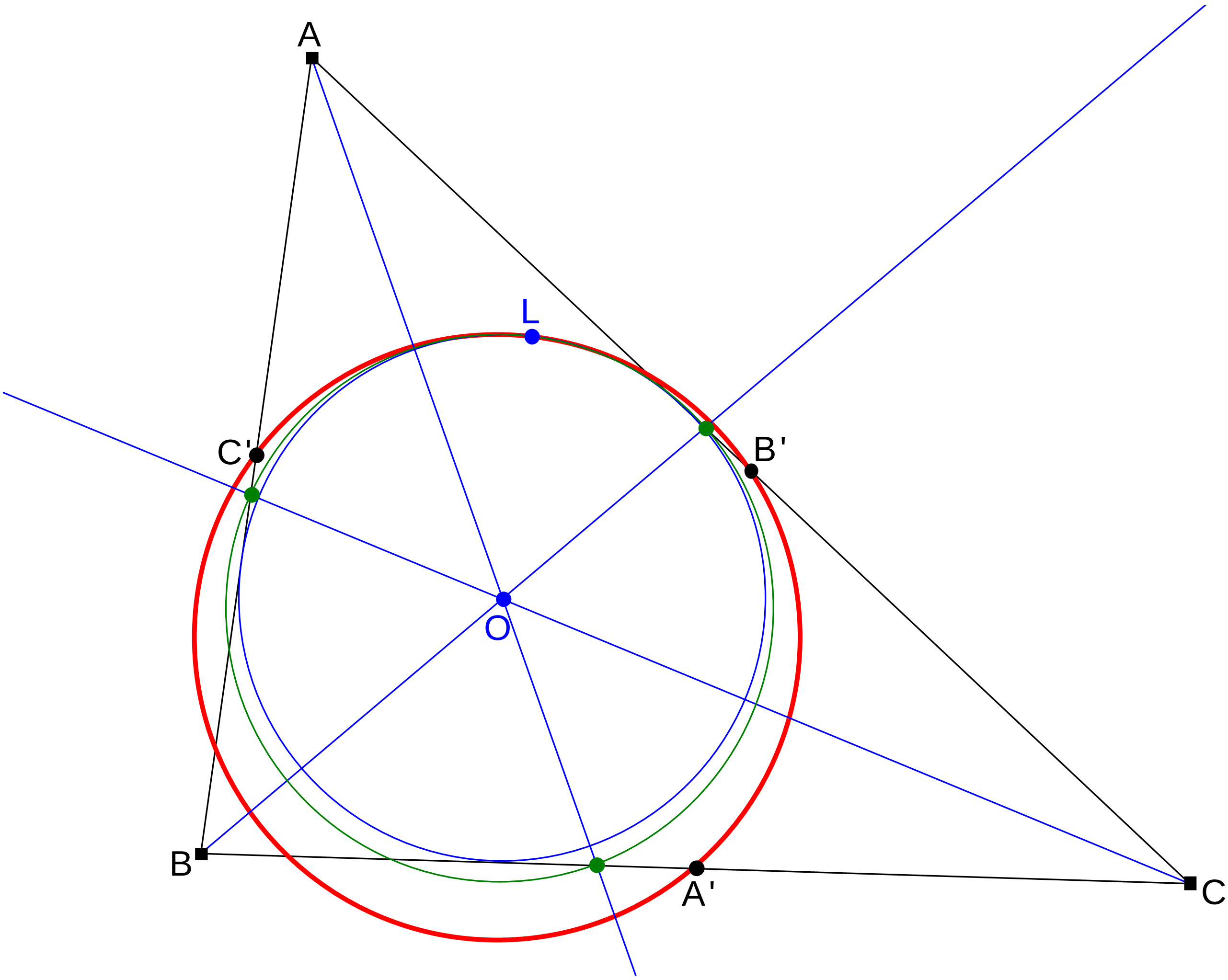

Fig. 18

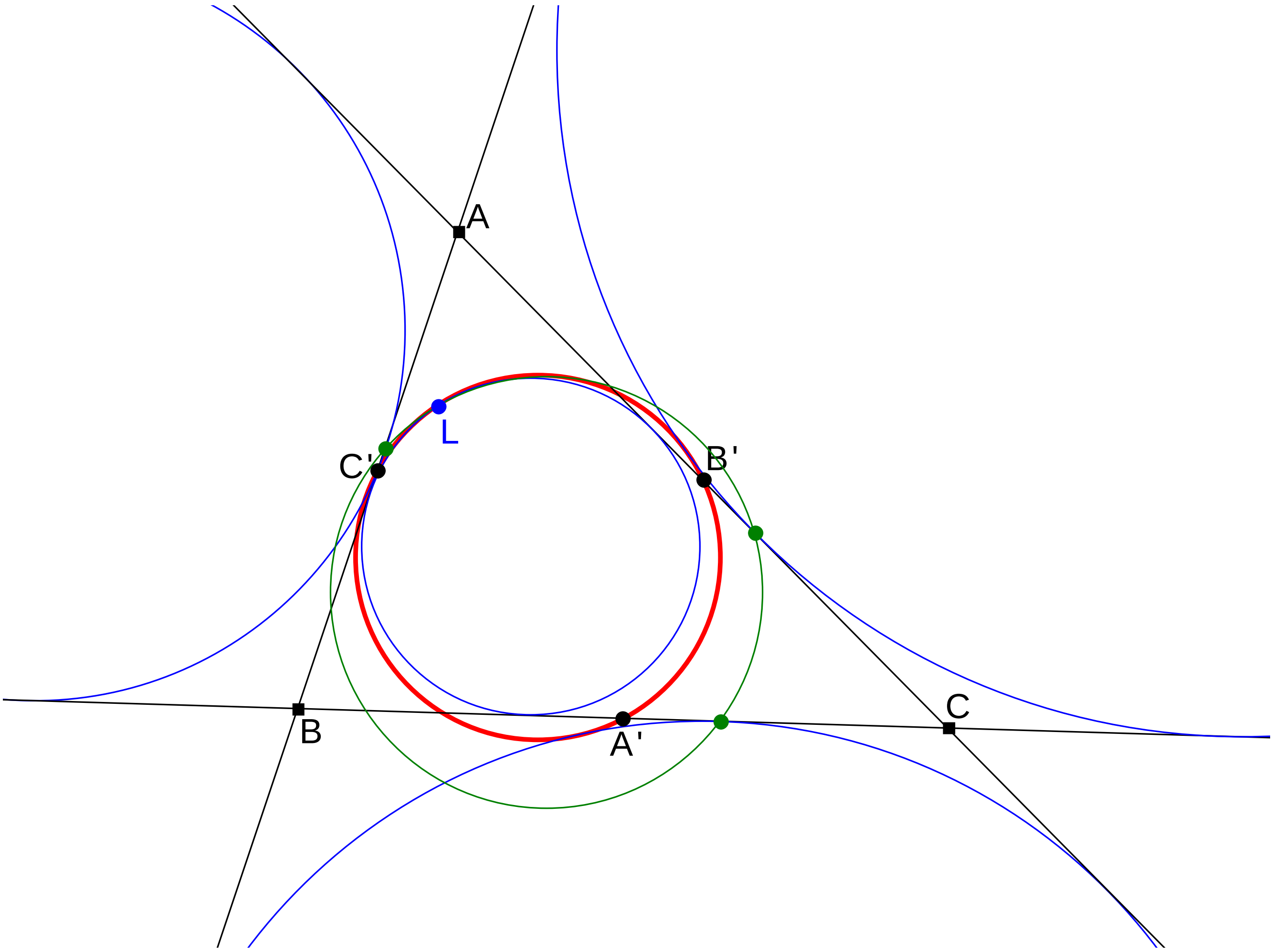

Fig. 19

Zu allen diesen Sätzen über den Punkt L gehören analoge Resultate über jeden der drei Punkte L_a, L_b und L_c. Wirklich neue Ergebnisse können wir aber finden, wenn wir die vier Punkte L, L_a, L_b und L_c *gemeinsam* betrachten.

§11. Das Dreieckszentrum X_{12}

Wir zeigen erstmals:

Satz 16: Die Geraden AL_a, BL_b und CL_c schneiden sich in einem Punkt L', und zwar liegt dieser Punkt auf der Geraden ON, wobei O der Inkreismittelpunkt und N der Mittelpunkt des Feuerbachkreises des ΔABC ist. Die Punkte L und L' teilen die Strecke ON harmonisch. (Siehe Fig. 20.)

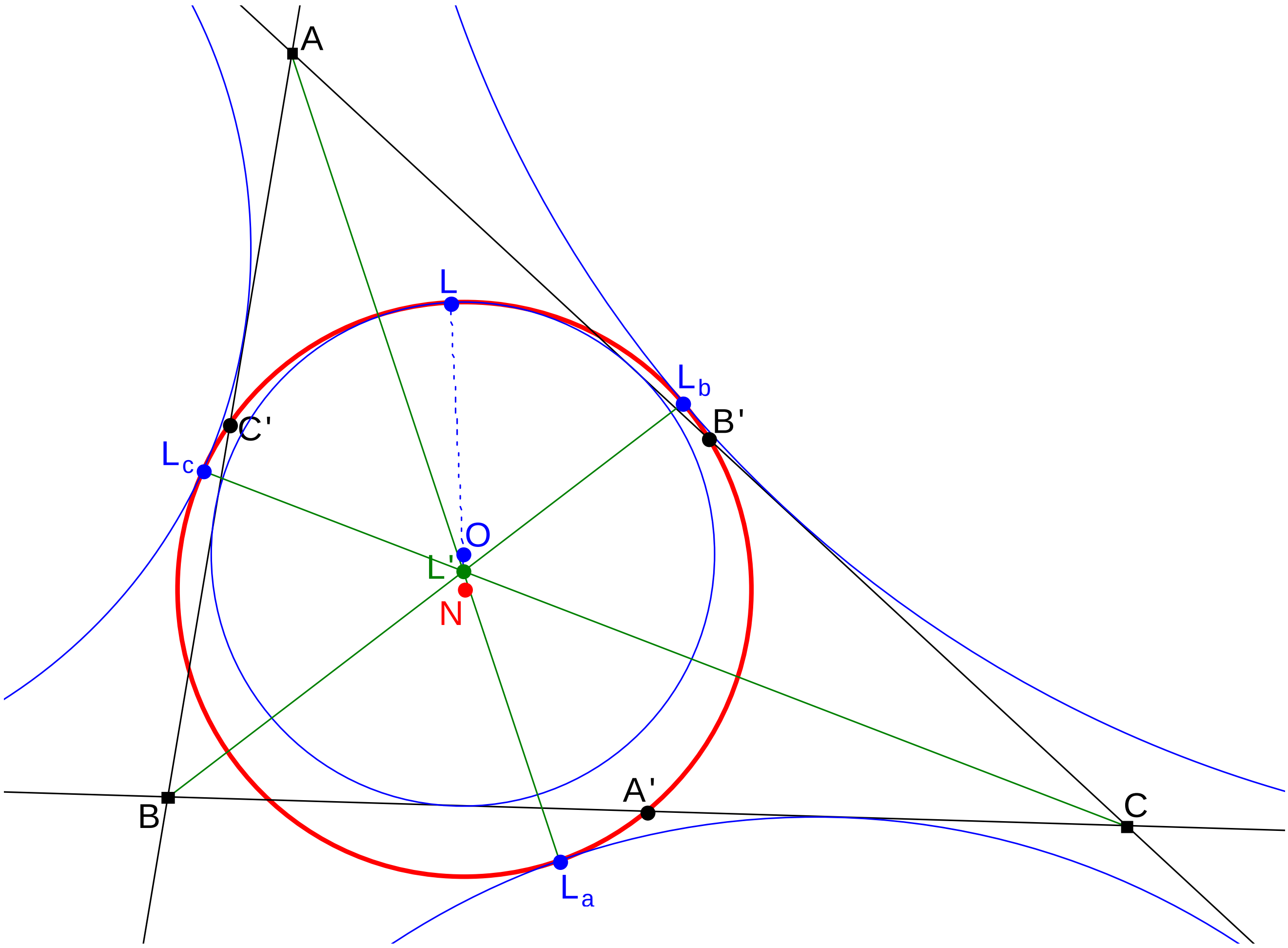

Fig. 20

Der Punkt L' ist ein merkwürdiger Punkt des Dreiecks ABC, der keinen eingebürgerten Namen hat. In Clark Kimberlings Liste [6] ist er das Dreieckszentrum X_{12}.

Zum *Beweis* von Satz 16 werden wir den Zweiten Satz von Monge verwenden. Die Sätze von Monge (siehe etwa [8], Abschnitt 42, Aufgabe 17a) lauten: Seien p, q und r drei Kreise. Seien ferner P und P' das innere bzw. äußere Ähnlichkeitszentrum der Kreise q und r; seien Q und Q' das innere bzw. das äußere Ähnlichkeitszentrum der Kreise r und p; seien R und R' das innere bzw. das äußere Ähnlichkeitszentrum der Kreise p und q.

Der **Erste Satz von Monge** besagt dann: Die Punkte P', Q' und R' liegen auf einer Geraden. Das heißt, die paarweisen äußeren Ähnlichkeitszentren dreier Kreise liegen stets auf einer Geraden.

Der **Zweite Satz von Monge** besagt: Die Punkte P', Q und R liegen auf einer Geraden; die Punkte P, Q' und R liegen auf einer Geraden; die Punkte P, Q und R' liegen auf einer Geraden. Das heißt, zwei paarweise innere Ähnlichkeitszentren dreier Kreise und das äußere Ähnlichkeitszentrum des verbliebenen Paars liegen auf einer Geraden. (Siehe Fig. 21.)

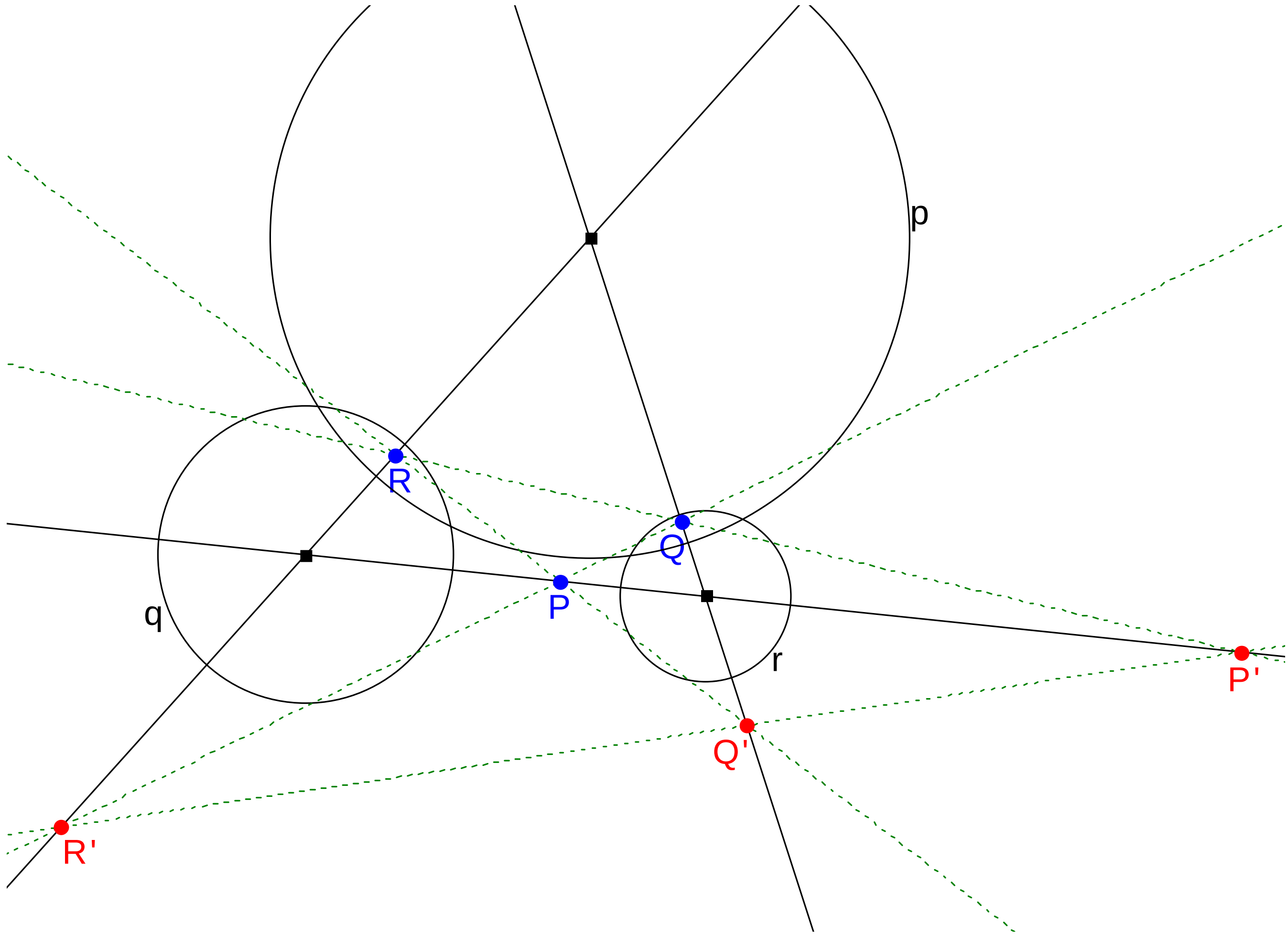

Fig. 21

Betrachten wir nun Satz 16. Es ist zu beweisen, daß sich die Geraden AL_a, BL_b und CL_c in einem Punkt L' schneiden, der auf der Geraden ON liegt und zusammen mit L die Strecke ON harmonisch teilt. Es wird uns viel einfacher fallen, wenn wir diesen Satz "rückwärts" beweisen, indem wir erstmals einen Punkt L' als inneres Ähnlichkeitszentrum des Inkreises und des Feuerbachkreises definieren, und dann versuchen nachzuweisen, daß dieser Punkt L' auf der Geraden ON liegt und zusammen mit L die Strecke ON harmonisch teilt, und daß schließlich die Geraden AL_a, BL_b und CL_c durch L' gehen.

Der Punkt L ist das äußere Ähnlichkeitszentrum des Inkreises und des Feuerbachkreises, weil sich die zwei Kreise dort innerlich berühren. Der Punkt L' ist aber deren inneres Ähnlichkeitszentrum. Da die zwei Ähnlichkeitszentren zweier Kreise die Strecke zwischen den Kreismittelpunkten harmonisch teilen, teilen also die Punkte L und L' die Strecke ON harmonisch, womit bereits ein Teil des Geforderten bewiesen ist.

Jetzt sehen wir uns die Konfiguration an, in der die Ankreise an CA und AB weggelassen sind, und nur der Inkreis, der Ankreis an BC und der Feuerbachkreis zu sehen sind.

Das innere Ähnlichkeitszentrum des Inkreises und des Feuerbachkreises ist L'.

Das innere Ähnlichkeitszentrum des Ankreises an BC und des Feuerbachkreises ist L_a, weil sich die zwei Kreise dort äußerlich berühren.

Das äußere Ähnlichkeitszentrum des Inkreises und des Ankreises an BC ist A, weil die beiden äußeren gemeinsamen Tangenten der zwei Kreise die Geraden CA und AB sind und sich in A schneiden.

Doch nach dem Zweiten Satz von Monge liegen zwei paarweise innere Ähnlichkeitszentren und das dritte äußere Ähnlichkeitszentrum auf einer Geraden; somit liegen die Punkte L', L_a und A auf einer Geraden, d. h. der Punkt L' liegt auf der Geraden AL_a. Genauso sehen wir ein, daß L' auf den Geraden BL_b und CL_c liegt. Damit ist Satz 16 vollständig nachgewiesen.

§12. Ein Kreis durch zwei Feuerbachberührpunkte

Lev Emelyanov und Tatiana Emelyanova, deren Resultate über den Feuerbachkreis uns schon in §10 begegnet sind, stellten in [18], Aufgabe 13 die folgende Eigenschaft der Feuerbachberührpunkte dem Leser zum Beweis (Fig. 22):

Satz 17: Der Inkreis des Dreiecks ABC und der Ankreis an BC berühren die Seite BC in den Punkten X bzw. X_a und den Feuerbachkreis in den Punkten L bzw. L_a. Dann liegen die Punkte X, X_a, L und L_a auf einem Kreis.

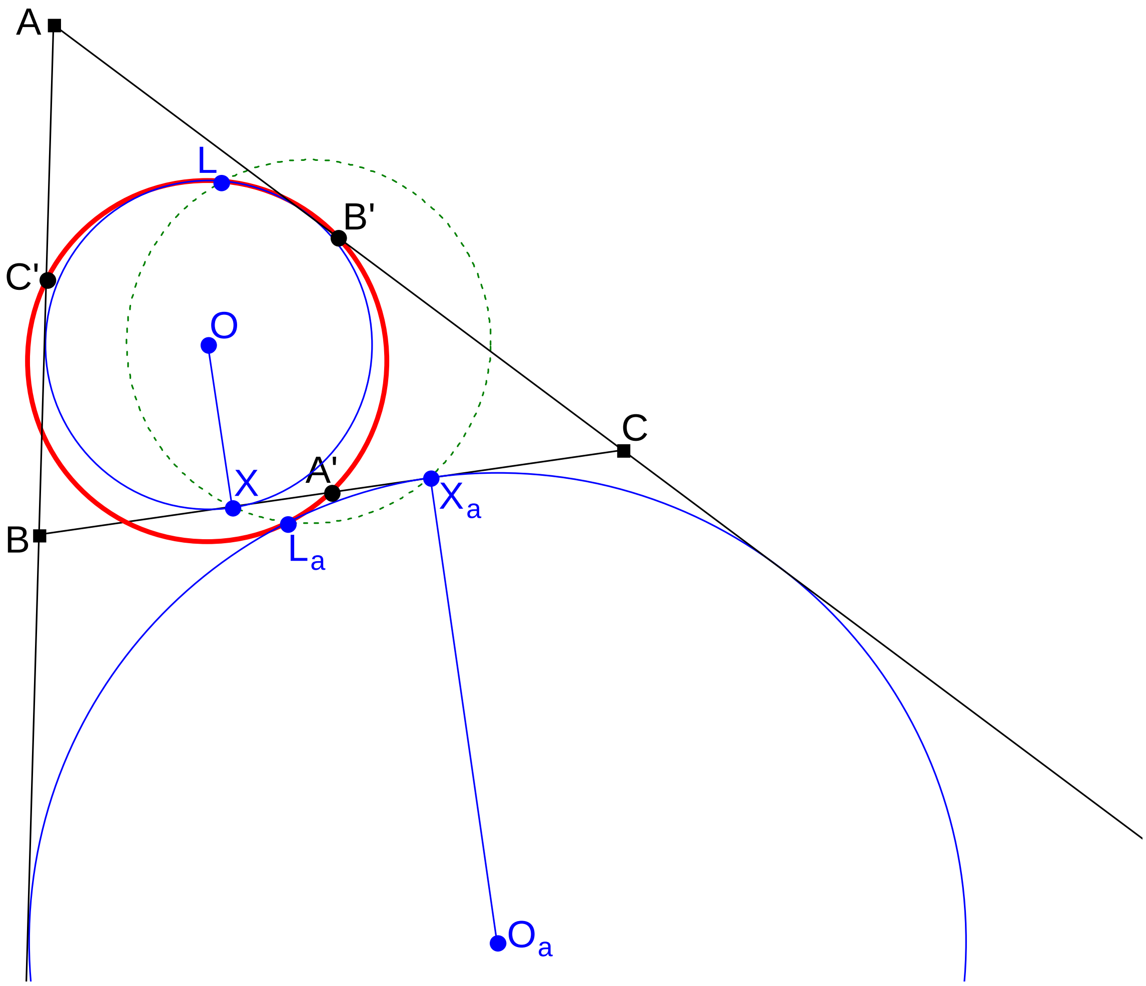

Fig. 22

Beim *Beweis* dieser Eigenschaft werden wir merkbar von der Arbeit profitieren, die wir in §8 zum Beweis des Satzes 6 aufgebracht hatten. Anstatt alle Punkte neu zu definieren, übernehmen wir auch die Bezeichnungen aus §8, Fig. 11. Der Punkt A'' bekommt jetzt eine interessante Nebenbedeutung: Wie wir in §8 gezeigt haben, daß $A''B = A''O$ ist, können wir auch $A''C = A''O$ einsehen; also ist $A''B = A''O = A''C$, und der Punkt A'' ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks BOC. Doch da die Innen- und die Außenwinkelhalbierende eines Winkels aufeinander senkrecht stehen, gilt $BO \perp BO_a$ und $CO \perp CO_a$, deshalb $\measuredangle OBO_a = 90°$ und $\measuredangle OCO_a = 90°$. Das heißt, die Punkte B und C liegen auf dem Thaleskreis über der Strecke OO_a. Der Umkreismittelpunkt A'' des Dreiecks BOC ist also der Mittelpunkt dieses Thaleskreises, d. h. der Mittelpunkt der Strecke OO_a.

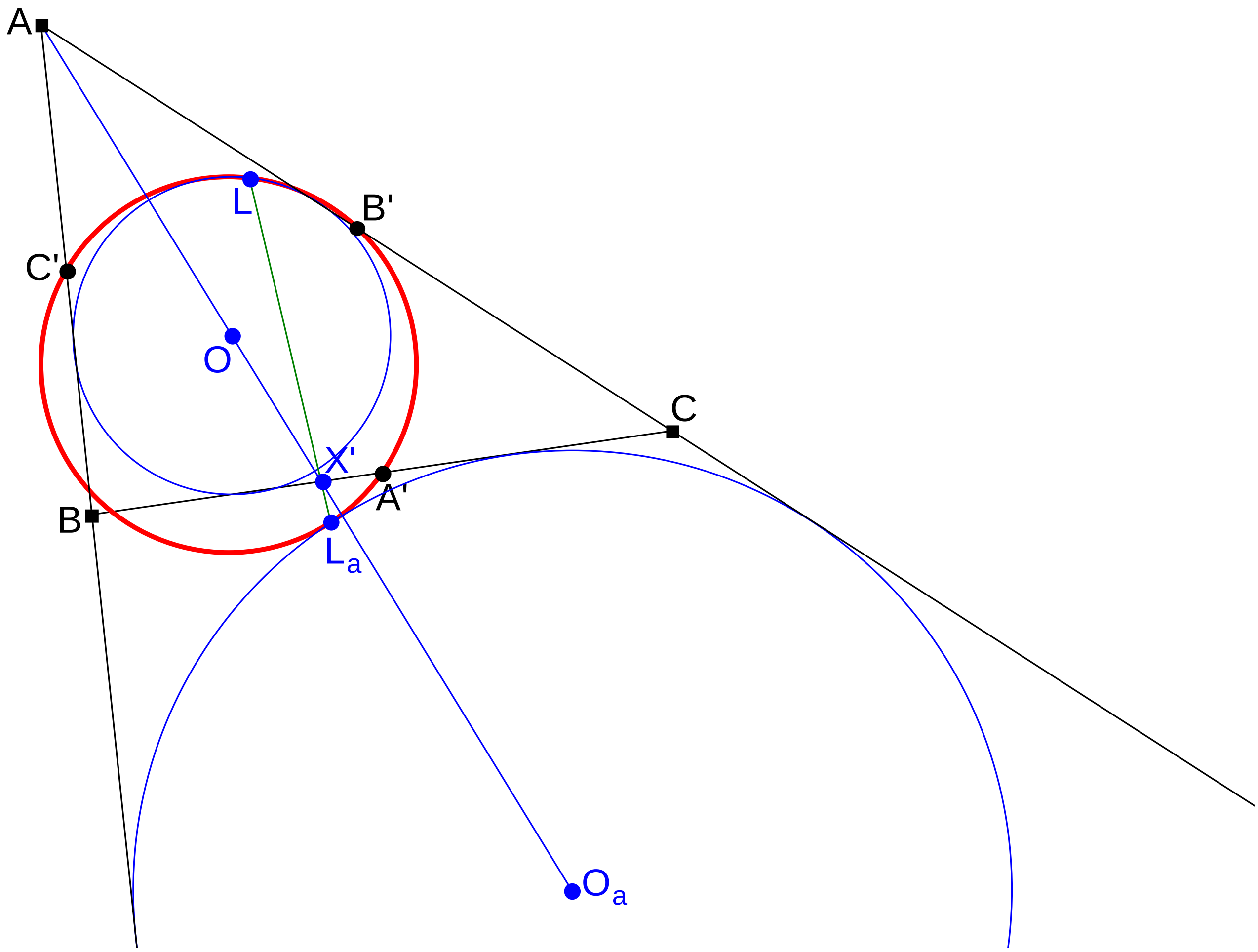

Fig. 23

Wir zeigen als Hilfssatz (Fig. 23):

Satz 18: Der Schnittpunkt X' der Winkelhalbierenden des Winkels CAB mit der Geraden BC liegt auf der Geraden LL_a.

Beweis: Der Punkt X' liegt auf der Geraden $BC,$ also auf einer der zwei inneren gemeinsamen Tangenten des Inkreises und des Ankreises an $BC.$ Ferner liegt X' auf der Winkelhalbierenden des Winkels $CAB,$ also auf der Zentralen dieser Kreise. Also ist X' das innere Ähnlichkeitszentrum des Inkreises und des Ankreises an $BC.$

Der Punkt L_a ist das innere Ähnlichkeitszentrum des Ankreises an BC und des Feuerbachkreises, und der Punkt L ist das äußere Ähnlichkeitszentrum des Inkreises und des Feuerbachkreises.

Nach dem Zweiten Satz von Monge liegen zwei paarweise innere Ähnlichkeitszentren und das dritte äußere Ähnlichkeitszentrum auf einer Geraden; deshalb liegen die Punkte $X',$ L_a und L auf einer Geraden, d. h. der Punkt X' liegt auf der Geraden $LL_a,$ was zu beweisen war.

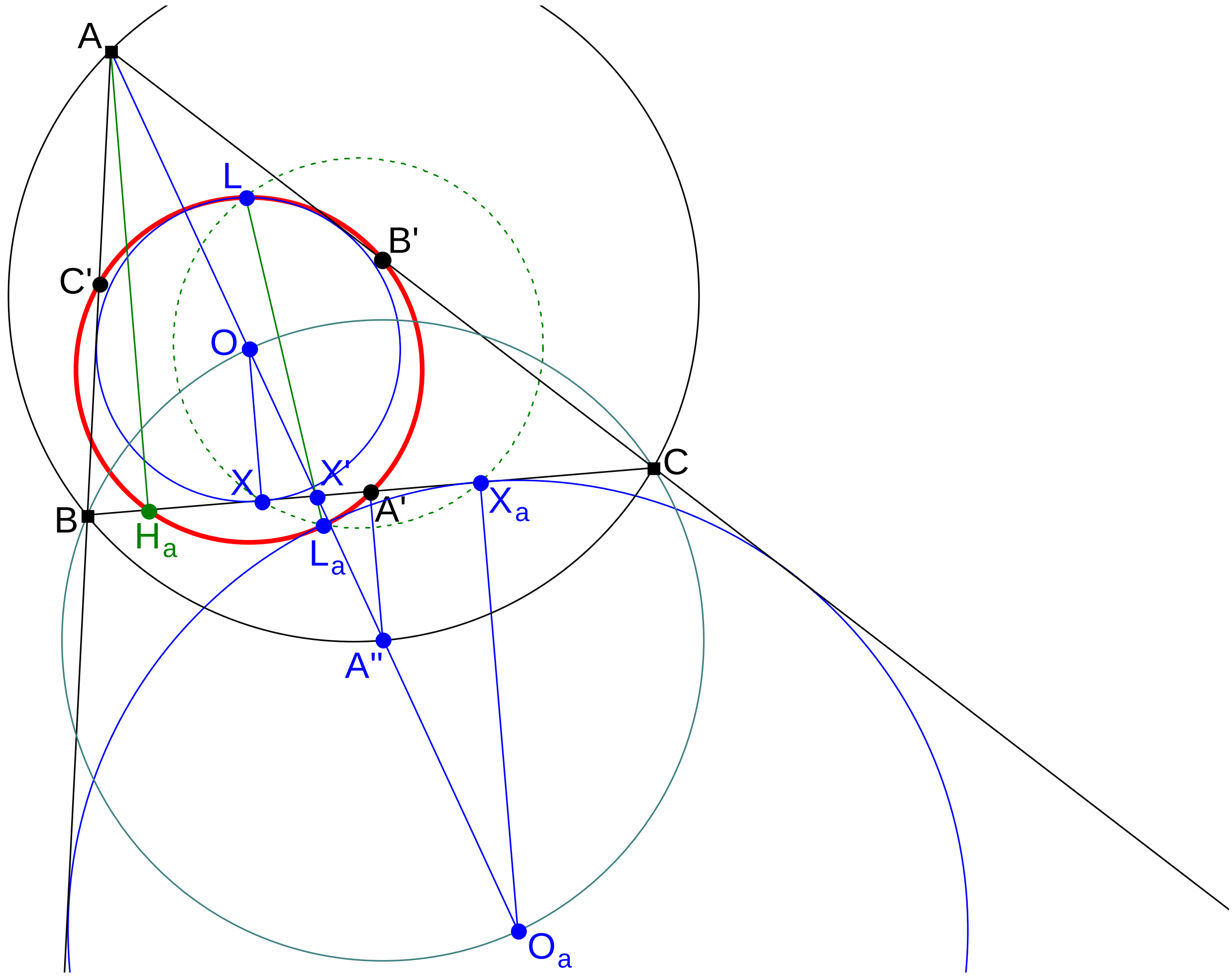

Fig. 24

Jetzt arbeiten wir an Fig. 24. Da die Punkte A, A'', B und C auf einem Kreis liegen (denn A'' liegt ja auf dem Umkreis des ΔABC), gilt nach dem Sehnensatz $X'A \cdot X'A'' = X'B \cdot X'C$. Da andererseits die Punkte B, C, O und O_a auf einem Kreis liegen (dem Thaleskreis über der Strecke OO_a), gilt aus demselben Grund $X'B \cdot X'C = X'O \cdot X'O_a$. Damit wird $X'A \cdot X'A'' = X'O \cdot X'O_a$, also

$$\frac{X'A}{X'O} = \frac{X'O_a}{X'A''}.$$

Wenn wir aber bedenken, daß die Geraden AH_a, OX, $A''A'$ und O_aX_a zueinander parallel sind (da sie alle auf BC senkrecht stehen), und den Strahlensatz anwenden, haben wir

$$\frac{X'A}{X'O} = \frac{X'H_a}{X'X} \qquad \text{und} \qquad \frac{X'O_a}{X'A''} = \frac{X'X_a}{X'A'};$$

aus der Gleichung oben wird also

$$\frac{X'H_a}{X'X} = \frac{X'X_a}{X'A'},$$

und $X'H_a \cdot X'A' = X'X \cdot X'X_a$. Da andererseits die Punkte H_a, A', L und L_a auf einem Kreis liegen (dem Feuerbachkreis), gilt nach dem Sehnensatz $X'H_a \cdot X'A' = X'L \cdot X'L_a$. (Wobei wir natürlich das Hilfsresultat benutzen, daß X' auf LL_a liegt.) Somit haben wir $X'X \cdot X'X_a = X'L \cdot X'L_a$. Jetzt können wir genau so, wie wir mit Satz 7 eine Umkehrung des Sekantensatzes gezeigt haben, auch eine Umkehrung des Sehnensatzes herleiten; und aus dieser Umkehrung erhalten wir, daß die Punkte X, X_a, L und L_a auf einem Kreis liegen. Damit ist Satz 17 bewiesen.

Selbstverständlich können der Feuerbachkreis und der Feuerbachberührpunkt verallgemeinert werden; siehe [13], Satz 3.2.11 zum Feuerbachkreis und [16] zum Feuerbachberührpunkt. Wir können uns hier nicht mit allen diesen Resultaten befassen.

Literaturhinweise

[1] Karl Wilhelm Feuerbach: *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren. Eine analytisch-trigonometrische Abhandlung*, 1. Auflage Nürnberg 1822, 2. Auflage (erweitert um ein Literaturverzeichnis) Haarlem 1908.

[2] Peter Baptist: *Karl Wilhelm Feuerbach - Geometrie und Gemütskrankheit*, Der Mathematikunterricht 6/1993, S. 6-13.

[3] Wolfgang Kroll: *Elementarer Beweis des Satzes von Feuerbach*, Praxis der Mathematik 6/1998, S. 251-254.

[4] Harold S. M. Coxeter, Samuel L. Greitzer: *Zeitlose Geometrie*, Stuttgart 1983.

[5] Emil Donath: *Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks*, Berlin 1976.

[6] Clark Kimberling: *Encyclopedia of Triangle Centers (and more)*.
`http://faculty.evansville.edu/ck6/`

[7] Johannes Kratz: *Die Kreisspiegelung, ein heuristisches Konstruktions- und Begründungsprinzip in der elementaren Kreisgeometrie*, Didaktik der Mathematik 3/1994, S. 161-186.

[8] Reidt-Wolff-Athen: *Geometrie und Trigonometrie (Mittelstufe Band 2)*, Paderborn 1965.

[9] Josef Rung: *Die vierte Dreiecksseite, was ist das eigentlich?*, Praxis der Mathematik 6/1996, S. 280-281.

[10] Paul Yiu: *Geometric Art Design: Advanced Euclidean Geometry via The Geometer’s Sketchpad*,
`http://www.math.fau.edu/yiu/Geometry.html`

[11] Lev Emelyanov und Tatiana Emelyanova: *A note on the Feuerbach Point*, Forum Geometricorum 2001, S. 121-124.
`http://forumgeom.fau.edu/`

[12] Laura Guggenbuhl: *Karl Wilhelm Feuerbach, Mathematician*, The Scientific Monthly 81 (1955), S. 71-76; nachgedruckt in: Dan Pedoe, *Circles: A Mathematical View*, USA 1995, S. 89-100.

[13] Wilfried Haag: *Wege zu geometrischen Sätzen*, 1. Auflage Stuttgart - Düsseldorf - Leipzig 2003.

[14] Christoph J. Scriba, Peter Schreiber: *5000 Jahre Geometrie*, 2. Nachdruck Berlin - Heidelberg - New York 2003.

[15] Darij Grinberg: *Über einige Sätze und Aufgaben aus der Dreiecksgeometrie*.
`http://de.geocities.com/darij_grinberg/`

[16] Darij Grinberg: *Generalization of the Feuerbach point*.
`http://de.geocities.com/darij_grinberg/`

[17] Johann Döttl: *Neue merkwürdige Punkte des Dreiecks*, Wien - Leipzig 1886. Digitale Version in
`http://www.hti.umich.edu/u/umhistmath/`

[18] Lev Emelyanov und Tatiana Emelyanova: *Semejstvo Fejerbaha*, Matematicheskoe prosveshjenie 6/3 (2002), S. 78-92.

[19] Clark Kimberling: *Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834), geometer*.
`http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/feuerba.html`

[20] J. J. O’Connor, E. F. Robertson: *Karl Wilhelm Feuerbach*.
`http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Feuerbach.html`