NICOLAS DOYON

Les fascinants nombres de Niven

Thèse présentée
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval
dans le cadre du programme de maîtrise en sociologie
pour l'obtention du grade de Philosophiae Doctor (Ph.D.)

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

NOVEMBRE 2006

Résumé

Soit $s_q(n)$ la somme des chiffres d'un entier positif n dans l'écriture en base q. On dit que n est un q-nombre de Niven ou un nombre de Niven en base q si $s_q(n)|n$. On pose $N_q(x)$ comme le nombre de q-nombres de Niven inférieurs à x.

Au chapitre 1, on prouve les propriétés de la cardinalité de l'ensemble $\{n < x : s_q(n) = t\}$ qui seront nécessaires aux démonstrations des résultats principaux des chapitres ultérieurs. Il s'agit d'une synthèse de résultats bien connus présentés avec de nouvelles preuves élémentaires. Au chapitre 2, on démontre quelques résultats élémentaires à propos de la fonction $N_q(x)$ et au chapitre 3, on établit une formule asymptotique pour la valeur de la fonction $N_q(x)$, soit en démontrant qu'il existe une constante positive $\eta = \eta(q)$ telle que $N_q(x) = (1 + o(1))\eta\frac{x}{\log x}$ lorsque $x \to \infty$. La fonction $\eta(q)$ fait l'objet d'une étude approfondie au chapitre 4.

On définit également $N_{q,r}(x)$ comme le nombre d'entiers positifs n inférieurs à x tels que $n, n+1, \ldots, n+r-1$ sont tous des nombres de q-Niven. Grundman [14] a démontré que valeur maximale de r pour laquelle $N_{q,r}(x)$ est strictement positif est $r = 2q$. Au chapitre 5, on établit une formule asymptotique pour la valeur de $N_{q,r}(x)$ soit en démontrant que, pour chaque $r \in [2, 2q]$, il existe une constante positive $c_1 = c_1(q, r)$ telle que $N_{q,r}(x) = (1 + o(1))\frac{c_1(q,r)x}{(\log x)^r}$ lorsque $x \to \infty$.

Abstract

Let $s_q(n)$ stand for the sum of the digits of a positive integer n written in base q. We say that n is a q-Niven number or a Niven number in base q if $s_q(n)$ divides n. Let $N_q(x)$ stand for the number of q-Niven numbers less than x.

In chapter 1, we present the various proprieties of the size of the set $\{n < x : s_q(n) = t\}$ that will be needed in the proofs of the main results of the following chapters. It is a collection of well-known results given with original elementary proofs. In chapter 2, we establish elementary results about the behaviour of the $N_q(x)$ function and in chapter 3, we prove the asymptoptic value of $N_q(x)$ to be $N_q(x) = (1 + o(1))\eta\frac{x}{\log x}$ for some positive constant $\eta = \eta(q)$ as $x \to \infty$. The $\eta(q)$ function is extensively studied in chapter 4.

Furthermore, we let $N_{q,r}(x)$ be the number of integers n less than x such that $n, n+1, \ldots, n+r-1$ are all q-Niven numbers. The maximal value of r for which $N_{q,r}(x)$ is nonzero is known to be $r = 2q$. In chapter 5, we establish the asymptotic value of $N_{r,q}(x)$ for every $r \in [2, 2q]$ namely by proving that there exists a positive constant $c_1 = c_1(q, r)$ such that $N_{q,r}(x) = (1 + o(1))c_1(q, r)\frac{x}{(\log x)^r}$.

Table des matières

Notation

Voici la liste des notations mathématiques utilisées dans cette thèse.

$\mathbb{N}$: l'ensemble des nombres naturels.

$\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}$: l'ensemble des nombres complexes.

$\mathbb{Z}$: l'ensemble des nombres entiers.

$a|b$: il existe un $c \in \mathbb{Z}$ tel que $ca = b$.

$c = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ si c est le plus grand entier tel que $c|a_1, c|a_2, \ldots, c|a_r$.

$c = [a_1, a_2, \ldots, a_r]$ si c est le plus petit entier positif tel que $a_1|c, a_2|c, \ldots, a_r|c$.

$v_p(n)$, où p est un nombre premier, est défini comme le plus grand entier a tel que $p^a|n$.

$p^a\|n$, où p est un nombre premier et a un entier non-négatif, signifie que $p^a|n$ et $p^{a+1} \nmid n$.

$\phi(n)$: la fonction d'Euler définie par $\phi(n) = \sum\limits_{\substack{1 \leq j \leq n \\ (j,n)=1}} 1$.

$\tau(n)$: la fonction comptant le nombre de diviseurs de n définie par $\tau(n) = \sum\limits_{d|n} 1$.

i : le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

$e(y) := \exp(2\pi i y) = e^{2\pi i y}$.

$\xi_j^{(q)}(n)$: le j-ième chiffre de l'écriture de n en base q, de sorte que,

$$n = \sum_{j \geq 0} \xi_j^q(n) q^j \text{ avec } 0 \leq \xi_j^q \leq q - 1.$$

$s_q(n)$: la somme des chiffres de n dans l'écriture en base q, à savoir $s_q(n) := \sum_{j \geq 0} \xi_j^q(n)$.

$s(n)$: la somme des chiffres de n dans l'écriture décimale.

$N_q(x)$: le nombre de nombres de q-Niven inférieurs à x : $N_q(x) := \#\{n < x : s_q(n) | n\}$.

$\mathcal{P}(U)$: l'ensemble des sous-ensembles de U.

$|x|$: la norme complexe ou la valeur absolue de x.

$\lfloor x \rfloor$: le plus grand entier inférieur ou égal à x.

$\lceil x \rceil$: le plus petit entier supérieur ou égal à x.

$\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$.

$\|x\| := \min(\{x\}, 1 - \{x\})$.

$A_q(x|t, \ell, k) := \#\{n < x : s_q(n) = t, n \equiv \ell \pmod k\}$.

$A_q(x|t) := A_q(x|0, 1, t) = \#\{n < x : s_q(n) = t\}$.

$A(x|t, \ell, k) := A_{10}(t, \ell, k)$.

$A(x|t) := A_{10}(x|t)$.

Introduction

La quantité

$$S_f(x) := \#\{n \leq x : f(n)|n\}$$

a été étudiée pour plusieurs fonctions f à valeurs entières. Par exemple, Cohen et Segal [3] ont montré que

$$\#\{n < x : \phi(n+1)|n, n \neq p, n \neq 2p\} = O(x^{1/2}(\log x)^{3/4}(\log\log x)^{-5/6})$$

où ϕ désigne la fonction d'Euler.

Dans sa thèse de doctorat, Claudia Spiro [22] a montré que

$$S_\tau(x) = \frac{x}{\sqrt{\log(x)}}(\log\log x)^{-1},$$

où la fonction $\tau(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n. Spiro [23] a également obtenu une formule asymptotique pour la quantité $S_{\tau'}(x)$ où $\tau'(n) = \tau(n-1)$.

Il est également possible de montrer que

$$\#\{n < x : \omega(n)|n\} = (1 + o(1))\frac{x}{\log\log x},$$

où $\omega(n)$ compte le nombre de facteurs premiers distincts de n. Un résultat similaire est valide pour la fonction $\Omega(n)$ qui compte le nombre de facteurs premiers d'un entier en comptant leur multiplicité.

Dans une conférence donnée à l'université de Miami en 1977, Ivan Niven a posé le problème de caractériser les nombres divisibles par la somme de leurs chiffres. Pour cette raison, ces nombres sont aujourd'hui généralement appelés *nombres de Niven* (ils sont parfois aussi appelés *nombres de Harshad*). Dorénavant, nous désignons par $N(x)$ la cardinalité des nombres de Niven inférieurs à x et par $s(n)$ la somme des chiffres du nombre n en base 10. La fonction $N(x)$ a été étudiée par différents mathématiciens. En 1988, Cooper et Kennedy [6] ont montré que pour tout k fixé,

$$\#\{n < x : s(n) = k, k|n\} = (1 + o(1))C(k)(\log x)^k.$$

En 2003, De Koninck et Doyon [8] ont montré que

$$N(x) \ll \frac{x \log\log x}{\log x}$$

et que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un x_0 tel que pour tout $x > x_0$, $N(x) > x^{1-\epsilon}$. Ils ont également conjecturé à la suite d'un argument probabiliste que

$$N(x) = (1 + o(1))\frac{14 \log 10}{27}\frac{x}{\log x}.$$

Comme nous le montrons dans le chapitre 1, la formule de Stirling et des techniques combinatoires élémentaires suffisent pour obtenir tous les résultats mentionnés jusqu'ici. En utilisant les sommes trigonométriques, De Koninck, Doyon et Kátai [9] ont montré en 2003 que

$$N(x) = (1 + o(1))\frac{14 \log 10}{27}\frac{x}{\log x}.$$

Ce résultat a été obtenu indépendamment deux ans plus tard par Pomerance, Mauduit et Sárközy [19]. Les techniques utilisées dans la démonstration de ce résultat permettent de le généraliser rapidement à une base quelconque.

Il est également possible de s'interroger sur le comportement local de la fonction $N(x)$. En 1994, H. G. Grundman [14] a montré qu'il n'existe pas plus de $2q$ q-nombres de Niven consécutifs pour toute base $q \geq 2$ ce qui généralise le résultat obtenu pour la base 10 par Kennedy et Cooper [4] en 1993. En 1997, Brad Wilson [25] a quant à lui démontré que pour toute base q, il existe un infinité de suites de $2q$ q-nombres de Niven consécutifs, un résultat qui avait été conjecturé par Grundman et démontré par Cai [2] dans le cas $q = 2, 3$.

En 2003 De Koninck et Doyon [8] ont montré que

$$\#\{n < x : s(n)|n, s(n+1)|n+1\} \ll \frac{x(\log\log x)^2}{(\log x)^2}.$$

Récemment, nous avons prouvé que pour tout $r \in [2, 2q]$,

$$\#\{n < x : s_q(n)|n, s_q(n+1)|n+1, \ldots, s_q(n+r-1)|n+r-1\} = (1+o(1))c_1(q,r)\frac{x}{(\log x)^r}.$$

La démonstration de ce résultat suit essentiellement les mêmes lignes que celle de la formule asymptotique pour $N_q(x)$.

Chapitre 1

La somme des chiffres d'un nombre

Le but de ce chapitre est de fournir des estimations pour la quantité

$$\#\{n < x : s_q(n) = a\}$$

où $s_q(n)$ est la somme des chiffres de n en base q. Cette quantité a été étudiée entre autres par Fine dans [13] et par Dumont et Thomas dans [11].

1.1 Méthodes combinatoires

Dans cette section, on prouve quelques résultats élémentaires à l'aide de méthodes combinatoires et de la formule de Stirling. En fait, seule la formule

$$n! = (1 + o(1))c_2\sqrt{n}n^n e^{-n},$$

pour une certaine constante positive c_2, est utilisée. Le fait que $c_2 = \sqrt{2\pi}$ n'est pas nécessaire dans la démonstration des résultats de ce chapitre.

La proposition 1.1 donne l'intervalle dans lequel la fonction s_q prend ses valeurs.

Proposition 1.1. *Soient $q \geq 2$ un entier, x un nombre réel positif et $n \in [1, x]$ un entier. Alors*

$$0 \leq s_q(n) \leq (q-1)\left\lfloor \frac{\log x}{\log q} \right\rfloor.$$

Preuve. Si $n < x$, alors le nombre de chiffres dans l'écriture de n en base q est inférieur ou égal à $\left\lfloor \frac{\log x}{\log q} \right\rfloor$. La proposition 1.1 découle du fait que chacun de ces chiffres est supérieur ou égal à zéro et inférieur ou égal à $q - 1$.

Désignons par $A_q(x|t)$ la quantité $\#\{n < x : s_q(n) = t)$. La proposition 1.2 nous renseigne sur la symétrie de la quantité $A_q(x|t)$ en tant que fonction de t.

Proposition 1.2. *Soit $q \geq 2$ un entier. Pour tout entier positif R et tout entier t*

$$A_q(q^R|t) = A_q(q^R|(q-1)R - t).$$

Preuve. Supposons d'abord que $t \notin [0, (q-1)R]$. Par la proposition 1.1, on a que

$$A_q(q^R|t) = 0 = A_q(q^R|(q-1)R - t).$$

Supposons maintenant $0 \leq t \leq (q-1)R$. On pose $n = \sum_{j=0}^{R-1} \xi_j^{(q)}(n) q^j$ avec $0 \leq \xi_j^q(n) \leq q-1$. Autrement dit, les fonctions $\xi_j^q(n)$ sont les chiffres de n dans l'écriture en base q.

Sur l'ensemble $\{n : 0 \leq n < q^R\}$, on définit la fonction f par

$$f(n) := \sum_{j=0}^{R-1} (q - 1 - \xi_j^{(q)}(n)) q^j.$$

La fonction f est alors fonction de l'ensemble $\{n : 0 \leq n < q^R\}$ dans lui-même.

Comme $s_q(f(n)) = (q-1)R - s_q(n)$, la fonction f envoie l'ensemble $\{n < q^R : s_q(n) = t\}$ vers l'ensemble $\{n < q^R : s_q(n) = (q-1)R - t\}$. De plus, comme $f(f(n)) = n$, la fonction f est une bijection.

On obtient donc que les ensembles $\{n < q^R : s_q(n) = t\}$ et $\{n < q^R : s_q(n) = (q-1)R - t\}$ ont la même cardinalité ce qui complète la démonstration de la proposition 1.2.

Proposition 1.3. *Soient q un entier $q \geq 2$, R un entier positif et t un entier tel que $0 \leq t < \frac{q-1}{2} R$. Alors*

$$A_q(q^R|t) \leq A_q(q^R|t+1).$$

Preuve. On prouve le résultat par induction sur R. Pour $R = 1$ et $0 \leq t < \frac{q-1}{2}$ on a $\#A_q(q|t) = 1 = A_q(q|t+1)$, ce qui termine la démonstration dans ce cas. On suppose donc $R \geq 2$. Dans ce cas, on utilise l'identité

$$A(q^R|t) = \sum_{j=0}^{q-1} A(q^{R-1}|t-j). \tag{1.1}$$

De (1.1), il découle aisément que

$$A(q^R|t+1) - A(q^R|t) = A(q^{R-1}|t+1) - A(q^{R-1}|t-(q-1)). \tag{1.2}$$

Supposons d'abord $t \leq \frac{q-1}{2}(R-1)-1$. Par l'hypothèse d'induction, on a alors

$$A(q^{R-1}|t+1) \geq A(q^{R-1}|t-(q-1)). \tag{1.3}$$

Des relations (1.2) et (1.3), on déduit que

$$A(q^R|t+1) \geq A(q^R|t).$$

Supposons maintenant $\frac{q-1}{2}(R-1)-1 \leq t < \frac{q-1}{2}R$. Par la proposition 1.2, on obtient que

$$A(q^{R-1}|t+1) = A(q^{R-1}|(R-1)(q-1)-t-1).$$

On remarque les équivalences suivantes

$$(R-1)(q-1)-t-1 < \frac{q-1}{2}(R-1) \Longleftrightarrow t > (R-1)\frac{q-1}{2} - 1 \tag{1.4}$$

et

$$(R-1)(q-1)-t-1 \geq t-q+1 \Longleftrightarrow t \leq \frac{q-1}{2}R - \frac{1}{2}. \tag{1.5}$$

De (1.4), (1.5), de l'hypothèse d'induction et de l'hypothèse $\frac{q-1}{2}(R-1)-1 < t < \frac{q-1}{2}R$, il découle que

$$A_q(q^{R-1}|t+1) > A_q(q^{R-1}|t-(q-1)), \tag{1.6}$$

ce qui complète la démonstration de la proposition 1.3.

Remarque : Des propositions 1.2 et 1.3, il découle immédiatement que, pour tout entier positif R, la quantité $A_q(q^R|t)$ est croissante sur l'intervalle $t \in [0, \lfloor (q-1)R/2 \rfloor]$ et décroissante sur l'intervalle $t \in [\lfloor (q-1)R/2 \rfloor, (q-1)R]$, ce qui implique que

$$\max_{0 \leq t \leq (q-1)R} A_q(q^R|t) = A_q\left(q^R \middle| \left\lfloor \frac{q-1}{2}R \right\rfloor\right). \tag{1.7}$$

La proposition suivante découle immédiatement de cette remarque.

Proposition 1.4. *Pour tout entier positif R et tout entier q, $q \geq 2$,*

$$A_q\left(q^R \middle| \left\lfloor \frac{q-1}{2}R \right\rfloor\right) \geq \frac{q^R}{(q-1)R+1}.$$

Preuve. Par la proposition 1.1, on obtient, pour tout entier positif R,

$$q^R = \sum_{0 \leq t \leq (q-1)R} A_q(q^R|t) \leq ((q-1)R+1) \max_{0 \leq t \leq (q-1)R} A_q(q^R|t). \tag{1.8}$$

Des équations (1.7) et (1.8), on déduit que

$$q^R \leq ((q-1)R+1) A_q\left(q^R \middle| \left\lfloor \frac{(q-1)R}{2} \right\rfloor\right). \tag{1.9}$$

De l'équation (1.8), il découle immédiatement que

$$A_q\left(q^R\,\middle|\,\left\lfloor\frac{(q-1)R}{2}\right\rfloor\right) \geq \frac{q^R}{(q-1)R+1},$$

ce qui complète la démonstration de la proposition 1.4.

Définition. Soient $q \geq 2$ un entier, $j \in [0, q-1]$ un entier, R un entier positif et $n < q^R$ un entier positif. On désigne par $r_j(n) = r_{j,q,R}(n)$, le nombre de fois où le chiffre j apparaît dans l'écriture du nombre n en base q. Si $n < q^{R-1}$, on considère que n débute par une série de 0 pour toujours obtenir un total de R chiffres.

Proposition 1.5. *Soient $q \geq 2$ un entier, R un entier positif et $m_0, m_1, \ldots, m_{q-1}$ des entiers non négatifs tels que $m_0 + m_1 + \ldots + m_{q-1} = R$. Alors*

$$\#\{n < q^R : r_0(n) = m_0, r_1(n) = m_1, \ldots, r_{q-1}(n) = m_{q-1}\} = \frac{R!}{m_0!m_1! \cdot \ldots \cdot m_{q-1}!}.$$

Preuve. Il suffit d'observer que $\frac{R!}{m_0!m_1!\cdots m_{q-1}!}$ représente le nombre de façons de choisir la position des chiffres égaux à $0, 1, \ldots, q-1$ parmi les R positions possibles.

Proposition 1.6. *Soient $\varepsilon > 0$ un nombre réel, $q \geq 2$ un entier, $m_0, m_1, \ldots, m_{q-1}$ des entiers positifs et $j \in [0, q-1]$ un entier tel que $m_j > \frac{R}{q} + R\varepsilon$. Alors il existe une constante positive $c_3 = c_3(q)$ telle que*

$$\#\{n < q^R : r_0(n) = m_0, r_1(n) = m_1, \ldots, r_{q-1}(n) = m_{q-1}\} < q^{R(1-c_3\varepsilon^2)}.$$

Preuve. Supposons sans perte de généralité que $m_0 > \frac{R}{q} + R\varepsilon$. Le nombre de façons de choisir l'emplacement des 0 est donné par $\binom{R}{m_0}$. Le nombre de façons de choisir l'emplacement des chiffres différents de 0 est inférieur à q^{R-m_0}. Il découle de cette observation que

$$\#\{n < q^R : r_0(n) = m_0, r_1(n) = m_1, \ldots, r_{q-1} = m_{q-1}\} < \binom{R}{m_0} q^{R-m_0}. \tag{1.10}$$

En faisant appel à la formule de Stirling, on obtient que

$$\begin{aligned}\binom{R}{m_0}(q-1)^{R-m_0} &< R^R(R-m_0)^{-(R-m_0)}m_0^{-m_0}(q-1)^{R-m_0} \qquad (1.11)\\ &= \exp\{R\log R - (R-m_0)\log(R-m_0) - m_0\log(m_0) + (R-m_0)\log(q-1)\}\\ &= \exp\{R\log((q-1)R/(R-m_0)) + m_0\log((R-m_0)/(q-1)m_0))\}.\end{aligned}$$

En posant $g_q(m_0) := R\log((q-1)R/(R-m_0)) + m_0\log((R-m_0)/(q-1)m_0))$, on peut déduire des inégalités (1.9) et (1.10) que

$$\#\{n < q^R : r_0(n) = m_0, r_1(n) = m_1, \ldots, r_{q-1} = m_{q-1}\} < \exp\{g_q(m_0)\}. \tag{1.12}$$

En définissant implicitement κ par $m_0 = \kappa R$, il découle alors de la définition de la fonction g que

$$g_q(m_0) = g_q(\kappa R) = R\left(\log\left(\frac{q-1}{1-\kappa}\right) + \kappa\log\left(\frac{1-\kappa}{\kappa(q-1)}\right)\right). \tag{1.13}$$

En définissant implicitement ε par $\kappa = \frac{1}{q} + \varepsilon$, on obtient

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{q-1}{1-\kappa}\right) = \log\left(\frac{q(q-1)}{q-1-q\varepsilon}\right) &= -\log\left(\frac{1}{q} - \frac{\varepsilon}{q-1}\right) \\ &= \log q + \frac{q\varepsilon}{q-1} + \frac{q^2\varepsilon^2}{2(q-1)^2} + O(\varepsilon^3),\end{aligned} \tag{1.14}$$

lorsque $\varepsilon \to 0$.

Par ailleurs, il est clair que

$$\begin{aligned}\kappa\log(1-\kappa) &= \frac{1}{q}\log\left(\frac{q-1}{q} - \varepsilon\right) + \varepsilon\log\left(\frac{q-1}{q} - \varepsilon\right) \\ &= \frac{1}{q}\log\left(\frac{q-1}{q}\right) - \frac{\varepsilon}{q-1} - \frac{q\varepsilon^2}{2(q-1)^2} \\ &\quad +\varepsilon\log\left(\frac{q-1}{q}\right) - \frac{q\varepsilon^2}{q-1} + O(\varepsilon^3)\end{aligned} \tag{1.15}$$

et que

$$\begin{aligned}\kappa\log((q-1)\kappa) &= \left(\frac{1}{q} + \varepsilon\right)\log\left(\frac{q-1}{q} + (q-1)\varepsilon\right) \\ &= \frac{1}{q}\log\left(\frac{q-1}{q}\right) + \varepsilon - \frac{q\varepsilon^2}{2} \\ &\quad +\varepsilon\log\left(\frac{q-1}{q}\right) + q\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).\end{aligned} \tag{1.16}$$

En combinant les identités (1.14), (1.15) et (1.16), on obtient que

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{q-1}{1-\kappa}\right) + \kappa\log\left(\frac{1-\kappa}{(q-1)\kappa}\right) &= \log q + \frac{q\varepsilon}{q-1} + \frac{q^2\varepsilon^2}{2(q-1)^2} \\ &\quad +\frac{1}{q}\log\left(\frac{q-1}{q}\right) - \varepsilon\left(\frac{1}{q-1} + \log\left(\frac{q}{q-1}\right)\right) \\ &\quad -\frac{(2q^2-q)\varepsilon^2}{2(q-1)^2} - \frac{1}{q}\log\left(\frac{q-1}{q}\right) \\ &\quad -\varepsilon\left(1 - \log\left(\frac{q}{q-1}\right)\right) - \frac{q\varepsilon^2}{2} + O(\varepsilon^3) \\ &= \log q - \frac{q^2}{2(q-1)}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).\end{aligned} \tag{1.17}$$

Il découle des relations (1.12), (1.13) et (1.17) que

$$\begin{aligned}\#\{n < q^R : r_0(n) = m_0, r_1(n) = m_1, \ldots, r_{q-1} = m_{q-1}\} \\ < \exp\left\{R\left(\log q - \frac{\varepsilon^2 q^2}{2(q-1)} + O(\varepsilon^3)\right)\right\} \\ = q^{R(1-c_3\varepsilon^2)+O(\varepsilon^3)},\end{aligned}$$

où $c_3 = \frac{q^2}{2(q-1)\log q}$, ce qui complète la démonstration de la proposition 1.6.

Proposition 1.7. *Soient $\varepsilon > 0$ un nombre réel, $q \geq 2$ un entier , x un réel positif et soit $I := \left[\left(\frac{q-1}{2} - \varepsilon\right)\frac{\log x}{\log q}, \left(\frac{q-1}{2} + \varepsilon\right)\frac{\log x}{\log q}\right]$. Alors il existe une constante positive $c_4 = c_4(q) > 0$ telle que,*

$$\#\{n < x : s_q(n) \notin I\} \leq x^{1-c_4\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)}.$$

Preuve. On pose $R := \left\lfloor \frac{\log x}{\log q} \right\rfloor$ de sorte que R est le nombre maximal de chiffres dans l'écriture en base q d'un entier inférieur à x.

Pour tout entier $t \in [0, (q-1)R]$, on définit $\mathcal{J}(t, R)$ comme l'ensemble des q-uplets $(j_0, j_1, \ldots, j_{q-1}) \in \mathbb{N}^q$ tels que $0 \leq j_k \leq R$ pour $0 \leq k \leq q-1$ avec $j_1 + 2j_2 + 3j_3 + \ldots + (q-1)j_{q-1} = t$ et $j_0 + j_1 + \ldots + j_{q-1} = R$.

Ainsi, $\mathcal{J}(t, R)$ est un ensemble de vecteurs de dimension q sur les naturels défini de telle façon que

$$A(q^R|t) = \sum_{(j_0,j_1,\ldots,j_{q-1})\in\mathcal{J}(t,R)} \#\{n < q^R : r_0(n) = j_0, r_1(n) = j_1, \ldots, r_{q-1}(n) = j_{q-1}\}. \tag{1.18}$$

Supposons que $s_q(n) = t$ pour un certain $t \notin I$. En utilisant la proposition 1.2, on peut supposer que $t < (\frac{q-1}{2} - \epsilon)R$. Comme $j_1 + 2j_2 + 3j_3 + \ldots + (q-1)j_{q-1} = t$ et comme $j_0 + j_1 + \ldots + j_{q-1} = R$, il existe une constante positive c_5 et un entier k, $0 \leq k \leq q-1$, tels que $j_k > (\frac{1}{q} + c_5\varepsilon)R$. En effet, en supposant le contraire, on obtient que pour tout entier $\ell \in [0, q-1]$,

$$j_\ell = R - \sum_{k\neq\ell} j_k > \left(\frac{1}{q} - c_5(q-1)\varepsilon\right) R. \tag{1.19}$$

De l'équation (1.19), on obtient que

$$j_1 + 2j_2 + 3j_3 + \ldots + (q-1)j_{q-1} > \left(\frac{q-1}{2} - \frac{\varepsilon c_1 q(q-1)^2}{2}\right) R. \tag{1.20}$$

Pour $c_5 < \frac{2}{q(q-1)^2}$, l'équation (1.20) contredit alors l'hyptohèse

$$j_1 + 2j_2 + 3j_3 + \ldots + (q-1)j_{q-1} = t < \left(\frac{q-1}{2} - \varepsilon\right) R.$$

Par la proposition 1.6, on a alors que

$$\#\{n < q^R : r_0(n) = j_0, r_1(n) = j_1, \ldots, r_{q-1}(n) = j_{q-1}\} < x^{1-c_3c_5\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)}. \qquad (1.21)$$

Des équations (1.18) et (1.21), il découle que

$$\begin{aligned} A(q^R|t) &< x^{1-cc_1\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)}\#\mathcal{J}(t,R) \\ &< R^{q-1}x^{1-cc_1\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)} \\ &\leq \left(\frac{\log x}{\log q}\right)^{q-1} x^{1-cc_1\varepsilon^2} \\ &= x^{1-cc_1\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)}, \end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration de la proposition 1.7 avec $c_4 = c_3c_5$.

Proposition 1.8. *Soient $q \geq 2$ un entier et R un entier positif tel que $R \equiv 0 \pmod q$. Désignons par $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs $v = (v_0, v_1, \ldots, v_{q-1})$ tels que v_j est un entier non négatif pour $0 \leq j \leq q-1$ et tels que $v_0 + v_1 + \ldots + v_{q-1} = R$. Alors,*

$$\max_{v\in\mathcal{V}} \#\{n < q^R : r_j(n) = v_j, j = 0, 1, \ldots, q-1\} = \#\left\{n < q^R : r_j(n) = \frac{R}{q}, j = 0, 1, \ldots, q-1\right\}.$$

Preuve. Comme l'ensemble $\mathcal{V}$ est fini, il est clair que le maximum en question existe. On suppose $v \neq \left(\frac{R}{q}, \frac{R}{q}, \ldots, \frac{R}{q}\right)$. Sans perte de généralité on peut supposer que $v_0 > \frac{R}{q}$ et $v_1 < \frac{R}{q}$.

On pose

$$S_1 := \#\{n < q^R : r_j(n) = v_j, j \in [0, q-1]\}$$

et

$$S_2 := \#\{n < q^R : r_0(n) = \lfloor (v_1+v_0)/2\rfloor, r_1(n) = \lceil (v_0+v_1)/2\rceil, r_j(n) = v_j, j \in [2, q-1]\}.$$

Par la proposition 1.5, on a que

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{v_0!v_1!}{\lfloor (v_0+v_1)/2\rfloor!\lceil (v_0+v_1)/2\rceil!} > 1,$$

de sorte que

$$\max_{v\in\mathcal{V}} \#\{n < q^R : r_j(n) = v_j, j = 0, 1, \ldots, q-1\} = \#\left\{n < q^R : r_j(n) = \frac{R}{q}, j = 0, 1, \ldots, q-1\right\},$$

ce qui complète la démonstration de la proposition 1.8.

Proposition 1.9. *Soient ε un réel positif et $q \geq 2$ un entier. Alors il existe un x_0 tel que pour tout $x > x_0$,*

$$\max_{t>0} A_q(x|t) < \frac{x}{(\log x)^{1/2-\varepsilon}}.$$

Preuve. Soit R le plus petit entier tel que $q^{Rq} > x$. Il est clair que pour tout entier t,

$$A_q(x|t) \leq A_q(q^{Rq}|t). \tag{1.22}$$

De l'équation (1.7), on obtient que

$$\max_{t>0} A_q(q^{Rq}|t) = A_q\left(q^{Rq}\middle|\frac{(q-1)Rq}{2}\right). \tag{1.23}$$

Il découle de la proposition 1.6 que

$$\begin{aligned} & A_q\left(q^R\middle|\frac{(q-1)qR}{2}\right) \qquad (1.24)\\ = \ & \#\Big\{n < q^R : s_q(n) = \frac{(q-1)qR}{2}, \frac{R(q-1)}{2} - R^{1/2+\varepsilon} < r_j(n) < \frac{R(q-1)}{2} + R^{1/2+\varepsilon},\\ & \qquad j = 0, 1, \ldots, q-1\Big\} + O\left(q^{R-cR^{\varepsilon}}\right). \end{aligned}$$

Pour $r_2, \ldots, r_{q-1}$ fixés, sous l'hypothèse $s_q(n) = \frac{q(q-1)R}{2}$, on obtient

$$r_1(n) = \frac{(q-1)qR}{2} - 2r_2(n) - \ldots - (q-1)r_{q-1}(n) \tag{1.25}$$

$$\text{et} \qquad r_0(n) = R - r_1(n) - r_2(n) - \ldots - r_{q-1}(n). \tag{1.26}$$

De (1.25) et (1.26), il découle alors que

$$\begin{aligned} & \#\left\{n < q^{Rq} : s_q(n) = \frac{(q-1)Rq}{2}, |R - r_j(n)| < R^{1/2+\varepsilon}, j = 0, 1, \ldots, q-1\right\} \quad (1.27)\\ \leq \ & (2R)^{(q-2)(1/2+\epsilon)} \max_{\substack{a_0, a_1, \ldots, a_{q-1}\\ a_1+a_2+\ldots+a_{q-1}=Rq}} \#\{n < q^{Rq} : r_j(n) = a_j, j = 0, 1, \ldots, q-1\}. \end{aligned}$$

Par la proposition 1.8, on a que

$$\begin{aligned} & \max_{\substack{a_0, a_1, \ldots, a_{q-1}\\ a_1+a_2+\ldots+a_{q-1}=Rq}} \#\{n < q^{Rq} : r_j(n) = a_j, j = 0, 1, \ldots, q-1\} \quad (1.28)\\ & = \#\{n < q^{Rq} : r_j(n) = R, j = 0, 1, \ldots, q-1\}. \end{aligned}$$

De plus, par la proposition 1.5 et la formule de Stirling, on obtient finalement

$$\#\{n < q^{Rq} : r_j(n) = R, j \in [0, q-1]\} = \frac{(Rq)!}{(R!)^q} = O\left(\frac{q^{Rq}\sqrt{q}}{R^{\frac{q-1}{2}}}\right). \tag{1.29}$$

Il découle alors des équations (1.27), (1.28) et (1.29) que

$$\begin{aligned} & \#\left\{n < q^{Rq} : s_q(n) = \frac{(q-1)Rq}{2}, |R - r_j(n)| < R^{1/2+\varepsilon}, j = 0, 1, \ldots, q-1\right\} \quad (1.30)\\ & \ll q^{Rq} R^{-\frac{1}{2}+(q-2)\varepsilon}. \end{aligned}$$

En combinant (1.24) et (1.30), on obtient

$$A_q\left(q^{qR}\middle|\frac{(q-1)qR}{2}\right) \ll q^{Rq}R^{-\frac{1}{2}+(q-2)\varepsilon}. \tag{1.31}$$

Par la définition de R, on a $q^{Rq} > q^q x$ et $R < \frac{\log x}{q \log q} + 1$. Il découle alors de (1.22), (1.23) et (1.31) que

$$\max_{t>0} A_q(x|t) \ll q^{qR}(\log x)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \ll \frac{x}{(\log x)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}},$$

ce qui complète la démonstration de la proposition 1.9.

Proposition 1.10. *Soient $q \geq 2$ un entier, a et b deux entiers non négatifs tels que $a < b$, k un entier positif tel que $0 < k < x$ et ℓ un entier quelconque. Alors pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\begin{aligned}\Big|\#\{n < x : a \leq s_q(n) \leq b, s_q(n) \equiv \ell \pmod k\} - \frac{1}{k}\#\{n < x : a \leq s_q(n) \leq b\}\Big| \\ < 5 \max_{c\in[a-k,b+k]} A_q(x|c) \\ \ll \frac{x}{(\log x)^{1/2-\varepsilon}} \qquad (x \to \infty).\end{aligned}$$

Preuve. La proposition 1.10 est en fait une conséquence presque directe des propositions 1.3 et 1.9. On suppose d'abord $b + k \leq \frac{q-1}{2}R$, auquel cas

$$\begin{aligned}k\#\{n < x : a \leq s_q(n) \leq b, s_q(n) \equiv \ell \pmod k\} \\ = \sum_{\frac{a-\ell}{k} \leq m \leq \frac{b-\ell}{k}} k\#\{n < x : s_q(n) = mk + \ell\}.\end{aligned} \tag{1.32}$$

Par la proposition 1.3, de l'hypothèse $b + k \leq \frac{q-1}{2}R$, et en supposant de plus $m \leq \frac{b-\ell}{k}$, on a

$$\begin{aligned}\#\{n < x : (m-1)k + \ell < s_q(n) \leq mk + \ell\} \\ \leq k\#\{n < x : s_q(n) = mk + \ell\} \\ \leq \#\{n < x : mk + \ell < s_q(n) \leq (m+1)k + \ell\}.\end{aligned} \tag{1.33}$$

De (1.32) et (1.33), on déduit que

$$\begin{aligned}k\#\{n < x : a \leq s_q(n) \leq b, s_q(n) \equiv \ell \pmod k\} \\ \leq \sum_{\frac{a-\ell}{k} \leq m \leq \frac{b-\ell}{k}} \#\{n < x : mk + \ell \leq s_q(n) < (m+1)k + \ell\} \\ \leq \#\{n < x : a < s_q(n) < b + k\}.\end{aligned} \tag{1.34}$$

De l'inégalité (1.34) on obtient

$$\begin{aligned}\# \quad & \{n < x : a \le s_q(n) \le b, s_q(n) \equiv \ell \pmod{k}\} \\ & -\frac{1}{k}\#\{n < x : a < s_q(n) < b\} \\ & \qquad \le \frac{1}{k}\#\{n < x : b < s_q(n) < b+k\} \\ & \qquad \le \max_{c\in[a-k,b+k]} \#\{n < x : s_q(n) = c\}.\end{aligned} \tag{1.35}$$

De façon similaire, on peut montrer que

$$\begin{aligned}& \frac{1}{k}\#\{n < x : a < s_q(n) < b\} \\ & \quad -\#\{n < x : a \le s_q(n) \le b, s_q(n) \equiv \ell \pmod{k}\} \\ & \qquad \le \max_{c\in[a-k,b+k]} \#\{n < x : s_q(n) = c\}.\end{aligned} \tag{1.36}$$

Par (1.35) et (1.36), la proposition 1.10 est démontrée dans le cas $b+k \le \frac{q-1}{2}R$. Le cas $a-k > \frac{q-1}{2}R$ se traite de manière analogue. Il reste à considérer le cas $a-k < \frac{q-1}{2}R$ et $b+k > \frac{q-1}{2}R$. Sous cette hypothèse, on écrit

$$\#\{n < x : a \le s_q(n) \le b, s_q(n) \equiv \ell \pmod{k}\} = S_1 + S_2 + S_3,$$

où

$$\begin{aligned} S_1 &= \#\left\{n < x : a \le s_q(n) < \frac{q-1}{2}R - k, s_q(n) \equiv \ell \pmod{k}\right\}, \\ S_2 &= \#\left\{n < x : \frac{q-1}{2}R + k \le s_q(n) < b, s_q(n) \equiv \ell \pmod{k}\right\}, \\ S_3 &= \#\left\{n < x : \frac{q-1}{2}R - k \le s_q(n) \le \frac{q-1}{2}R + k, s_q(n) \equiv \ell \pmod{k}\right\}.\end{aligned}$$

Étant donné qu'il existe au plus trois entiers congrus à $\ell \pmod{k}$ dans l'intervalle $[\frac{q-1}{2}R - k, \frac{q-1}{2}R + k]$, on a d'une part

$$S_3 \le 3 \max_{c\in[\frac{q-1}{2}R-k,\frac{q-1}{2}R+k]} A_q(x|c) = 3A\left(x\middle|\left\lfloor\frac{q-1}{2}R\right\rfloor\right) \tag{1.37}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}& \frac{1}{k}\#\left\{n < x : \frac{q-1}{2}R - k \le s_q(n) \le \frac{q-1}{2}R + k\right\} \\ & \qquad \le \frac{1}{k}2kA_q\left(x\middle|\left\lfloor\frac{q-1}{2}R\right\rfloor\right) \\ & \qquad = 2A_q\left(x\middle|\left\lfloor\frac{q-1}{2}R\right\rfloor\right).\end{aligned} \tag{1.38}$$

De (1.37) et (1.38), on déduit que

$$\begin{aligned}\left|S_3-\frac{1}{k}\#\left\{n<x:\frac{q-1}{2}R-k\le s_q(n)\le\frac{q-1}{2}R+k\right\}\right|\\ \le 3A\left(x\middle|\left\lfloor\frac{q-1}{2}R\right\rfloor\right).\end{aligned}\tag{1.39}$$

Comme précédemment, on obtient que

$$\left|S_2-\frac{1}{k}\#\left\{n<x:\frac{q-1}{2}R+k\le s_q(n)\le b\right\}\right|\le\max_{c\in[\frac{q-1}{2}R+k,b]}A_q(x|c)\tag{1.40}$$

et

$$\left|S_1-\frac{1}{k}\#\left\{n<x:a\le s_q(n)\le\frac{q-1}{2}R-k\right\}\right|\le\max_{c\in[a,\frac{q-1}{2}R-k]}A_q(x|c).\tag{1.41}$$

En combinant (1.37), (1.40) et (1.41), on obtient finalement

$$\begin{aligned}\left|\#\{n<x:a<s_q(n)<b,s_q(n)\equiv\ell\pmod k\}-\frac{1}{k}\#\{n<x:a<s_q(n)<b\}\right|\\ \le 5\max_{c\in[a,b]}\#\{n<x:s_q(n)=c\},\end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration de la proposition 1.10.

Remarque. La proposition 1.10 sera suffisante pour nous permettre de démontrer les résultats des chapitres 2 et 3.

Le résultat suivant a été obtenu par Mauduit et Sárközy [20] en 1997

$$|A_q(x|\ell_1,m,t)-A_q(x|\ell_2,m,t)|<x^{\lambda}$$

où λ ne dépend que de m et $0<\lambda<1$.

Proposition 1.11. *Soient $q\ge 2$ un entier, R un entier positif, t un entier positif, $t\le(q-1)R$, et k un entier tel que $|k|<\min(t,(q-1)R-t)$. Alors,*

$$\frac{A(q^R|t)+O(q^Re^{-c_3R^{1/3}})}{A(q^R|t+k)+O(q^Re^{-c_3R^{1/3}})}=1+O\left(k^2R^{-1/3}\right).$$

Preuve. Par la proposition 1.6, on a que

$$A(q^R|t)=\sum_{\substack{B=(b_2,\dots,b_{q-1})\\ |b_j-\frac{q-1}{2}R|\le R^{2/3},j\in[2,q-1]}}F(B,t,q^R)+O(q^Re^{-c_3R^{1/3}})\tag{1.42}$$

où

$$F(B,t,q^R) = \# \Big\{ n < q^R : r_j(n) = b_j, j \in [2, q-1], \\ r_1(n) = t - 2r_2(n) - \ldots - (q-1)r_{q-1}(n), \\ r_0(n) = R - r_1(n) - \ldots - r_{q-1}(n) \Big\}.$$

On obtient de la même façon,

$$A_q(q^R|t+k) = \sum_{\substack{B=(b_2,\ldots,b_{q-1}) \\ |\frac{q-1}{2}R - b_j| \le R^{2/3}, j \in [2,q-1]}} F(B, t+k, q^R) + O(q^R e^{-c_3 R^{1/3}}). \tag{1.43}$$

On déduit de (1.40) et (1.41) que

$$\frac{A_q(q^R|t)\} + O(q^R e^{-c_3 R^{1/3}})}{A_q(q^R|t+k) + O(q^R e^{-c_3 R^{1/3}})} < \max_{\substack{B=(b_2,\ldots,b_{q-1}) \\ |b_j - \frac{q-1}{2}R| \le R^{2/3}, j \in [2,q-1]}} \frac{F(B,t,q^R)}{F(B,t+k,q^R)}. \tag{1.44}$$

En utilisant la proposition 1.5, on obtient de (1.42)

$$\begin{aligned} \max_{\substack{B=(b_2,\ldots,b_{q-1}) \\ |b_j - \frac{q-1}{2}R| \le R^{2/3}, j \in [2,q-1]}} \frac{F(B,t,q^R)}{F(B,t+k,q^R)} &= \max_{\substack{(b_2,\ldots,b_{q-1}) \\ |\frac{q-1}{2}R - b_j| \le R^{2/3}, j \in [2,q-1]}} \\ \frac{(a+k-2b_2-\ldots-(q-1)b_{q-1})!(R-a-k+b_2+2b_3+\ldots+(q-2)b_{q-1})!}{(a-2b_2-\ldots-(q-1)b_{q-1})!(R-a+b_2+2b_3+\ldots+(q-2)b_{q-1})!} \\ &< \frac{(\frac{q-1}{2}R + R^{2/3} + k)^k}{(\frac{q-1}{2}R - R^{2/3} - k)^k} \\ &= (1 + O(kR^{-1/3}))^k \\ &= 1 + O(k^2 R^{-1/3}). \end{aligned} \tag{1.45}$$

La proposition 1.11 découle alors directement de (1.42) et (1.45).

Corollaire 1.1. *Soient $q \ge 2$ un entier, R un entier positif, $h < R$ un entier positif et $t \le (q-1)(R-h)$ un entier positif. Alors,*

$$q^h A_q(q^{R-h}|t) = A_q(q^R|t)(1 + O(h^2(R-h)^{-1/3})).$$

Preuve. On utilise l'identité

$$A_q(q^R|t) = \sum_{m=1}^{q^h} A_q\left(q^{R-h}|t - s_q(m)\right). \tag{1.46}$$

et la proposition 1.11 pour obtenir

$$A_q\left(q^{R-h}|t - s_q(m)\right) = A_q(q^{R-h}|t)(1 + O(h^2(R-h)^{-1/3})), \tag{1.47}$$

et le corollaire 1.1 découle ainsi directement de (1.46) et (1.47).

1.2 Méthode probabiliste pour l'étude de la fonction $s_q(n)$

Dans cette section, on montre comment le théorème central limite peut être utilisé pour étudier la quantité $A_q(q^R|t)$.

Soit $q \geq 2$ un entier et $U_R := \{n \in \mathcal{N} : n < q^R\}$. On définit la mesure $\mathcal{M}_R$ sur U_R par $\mathcal{M}_R(V) := \frac{\#V}{q^R}$ pour chaque ensemble $V \in \mathcal{P}(U_R)$. On vérifie facilement que $\mathcal{M}_R$ est une mesure de probabilité sur l'ensemble U_R.

Se limiter à l'ensemble $\{n < q^R\}$ permet d'établir l'indépendance des fonctions $\xi_j^{(q)}(n)$ tel qu'on le démontre dans la proposition suivante.

Proposition 1.12. *Les fonctions $\xi_j^{(q)}(n)$ sont des variables aléatoires indépendantes sur l'ensemble U_R muni de la mesure $\mathcal{M}_R$. Pour chaque entier non-négatif $j < R$, la variable aléatoire $\xi_j^{(q)}$ prend les valeurs $0, 1, \ldots, q-1$ avec une probabilité $\frac{1}{q}$.*

Preuve. Par la définition de l'indépendance, afin de montrer la proposition 1.12, il faut prouver que pour tout entier m, $1 \leq m \leq R$, pour tous les entiers $0 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_m < R$ et pour tous les entiers $y_1, y_2, \ldots, y_m$ tels que $0 \leq y_k \leq q-1$, $1 \leq k \leq m$, on a

$$P(\xi_{j_1}^{(q)} = y_1, \xi_{j_2}^{(q)} = y_2, \ldots, \xi_{j_m}^{(q)} = y_m) = \frac{1}{q^m}. \tag{1.48}$$

Par la définition de la mesure $\mathcal{M}_R$, l'égalité (1.48) est équivalente à

$$\#\{0 \leq n < q^R : \xi_{j_1}^{(q)}(n) = y_1, \xi_{j_2}^{(q)}(n) = y_2, \ldots, \xi_{j_m}^{(q)}(n) = y_m\} = q^{R-m}. \tag{1.49}$$

Or, cette dernière égalité découle clairement de la définition des fonctions $\xi_j^{(q)}$.

Proposition 1.13. *Pour tout nombre réel positif a, pour tout entier $q \geq 2$, on a*

$$\#\{n < q^R : s_q(n) < a\} = (1 + o(1))q^R \Phi\left(\frac{a - (q-1)R/2}{\sigma\sqrt{R}}\right) \qquad (R \to \infty),$$

où $\sigma^2 := \quad \dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{j=0}^{q-1}\left(j - \frac{q-1}{2}\right)^2$

et où pour tout nombre réel y, $\Phi(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-t^2/2}dt$.

Preuve. Par la proposition 1.12, il est possible de considérer les fonctions $\xi_j^{(q)}(n)$, $1 \leq j < R$, comme des variables aléatoires prenant les valeurs $0, 1, \ldots, q-1$ avec une probabiblité $\frac{1}{q}$. La proposition 1.13 découle alors directement du théorème central limite.

Proposition 1.14. *Pour tout entier $q \geq 2$, il existe une constante positive c_6 et un entier R_0 tels que pour $R > R_0$,*

$$A\left(q^R \middle| \left\lfloor \frac{q-1}{2} R \right\rfloor\right) \geq \frac{c_6 q^R}{\sqrt{R}}.$$

Preuve. Par la proposition 1.13, il existe une constante positive c_7 telle que

$$\#\left\{n < q^R : \frac{q-1}{2}R - \sqrt{R} \leq s_q(n) \leq \frac{q-1}{2}R + \sqrt{R}\right\} \geq c_7 q^R. \tag{1.50}$$

On a également par l'équation (1.7)

$$\begin{aligned}\#\left\{n < q^R : \frac{q-1}{2}R - \sqrt{R} \leq s_q(n) \leq \frac{q-1}{2}R + \sqrt{R}\right\} \\ \leq 2\sqrt{R} A\left(q^R \middle| \left\lfloor \frac{q-1}{2} R \right\rfloor\right).\end{aligned} \tag{1.51}$$

De (1.50) et (1.51), on peut alors conclure que

$$A\left(q^R \middle| \left\lfloor \frac{q-1}{2} R \right\rfloor\right) \geq \frac{c_7}{2} \frac{q^R}{\sqrt{R}}.$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 1.13 si l'on choisit $c_6 = \frac{c_7}{2}$. En posant R comme le plus grand entier tel que $q^R < x$, on obtient immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 1.2. *Pour $q \geq 2$, il existe un x_0 tel que pour tout $x > x_0$,*

$$\max_{t>0} A(x|t) \geq \frac{c_8 x}{\sqrt{\log x}} \quad \text{où} \quad c_8 := \frac{c_6\sqrt{\log q}}{q}.$$

Nous avons maintenant une bonne connaissance de la fonction $A_q(q^R|t)$.

Remarque. Les méthodes utilisées dans cette section peuvent être appliquées sans grandes modifications à l'étude d'une fonction 'q-additive' quelconque, c'est-à-dire une fonction $f(n)$ définie par

$$f(n) := \sum_{j\geq 0} g(\xi_j^{(q)}(n))$$

où g est une fonction à valeurs entières telle que $g(0) = 0$.

Chapitre 2

Résultats élémentaires sur les nombres de Niven

Dans ce chapitre, nous prouvons quelques résultats élémentaires à propos de la fonction $N(x)$. Afin de simplifier la notation, nous considérons seulement les nombres en écriture décimale. À l'exception de la proposition 2.5, tous les résultats de ce chapitre se généralisent facilement aux nombres de Niven en base q où $q \geq 2$ est un entier quelconque.

2.1 Bornes inférieures

Proposition 2.1. *Il existe une infinité de nombres de Niven.*

Preuve. Il suffit de considérer les nombres de la forme $n = j \cdot 10^a$ pour tout entier positif a et pour tout entier $j \in [1, q-1]$. Si $n = j \cdot 10^a$, alors $s(n) = j$ et $j|n$.

Remarque Il est clair que la démonstration de cette proposition entraîne que $N(x) \gg \log x$.

Proposition 2.2. *Il existe une infinité de nombres réels x tels que*

$$N(x) > \frac{c_8(\log 10)^{3/2}}{90} \frac{x}{(\log x)^{3/2}},$$

où c_6 est la constante de la proposition 1.14.

Preuve. Soit a un entier positif. On pose $R := \frac{2(10^a-1)}{9}$ et l'on cherche à construire des entiers n tels que

$$n := 10^a m \text{ avec } m < 10^R \text{ et} s(m) = 10^a. \tag{2.1}$$

De (2.1), on obtient immédiatement que

$$s(m) = 10^a \Longrightarrow s(n) = s(m)|n. \tag{2.2}$$

Il découle directement de (2.1) et de (2.2) que,

$$N(10^{R+a}) \geq A(10^R|10^a). \tag{2.3}$$

Par la définition de R, on a $10^a = 4.5R + 1$. Par les propostions 1.2 et 1.3 on obtient

$$\begin{aligned} A(10^R|10^a) &= A(10^R|4.5R+1) \qquad (2.4)\\ &= A(10^R|4.5R-1)\\ &\geq A(10^R|4.5R-5)\\ &\geq A(10^{R-1}|4.5R-5)\\ &= A(10^{R-1}|\lfloor 4.5(R-1)\rfloor). \end{aligned}$$

De la proposition 1.14, il découle que

$$A\left(10^{R-1}|\lfloor 4.5(R-1)\rfloor\right) \geq \frac{c_6 10^R}{10\sqrt{R}}. \tag{2.5}$$

En combinant les équations (2.3), (2.4) et (2.5) et en utilisant la définition de R on déduit que

$$N(10^{R+a}) > \frac{C10^R}{10\sqrt{R}} = \frac{C10^{R+a}}{10^{a+1}\sqrt{R}} > \frac{c_6 10^{R+a}}{90R^{3/2}}. \tag{2.6}$$

Pour compléter la démonstration, on pose $x = 10^{R+a}$. On a alors $R < \frac{\log x}{\log 10}$. On peut donc conclure de (2.6) que

$$N(x) > \frac{c_6 x(\log 10)^{3/2}}{90(\log x)^{3/2}},$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 2.2.

Remarque. On a seulement montré que $N(x) \gg \frac{x}{(\log x)^{3/2}}$ dans le cas où $x = 10^{\frac{2(10^a-1)}{9}+a}$ où a est un entier positif arbitraire. Cela nous permet quand même d'obtenir une borne inférieure pour $N(x)$ valide pour tout x.

Soit $y = y(x)$ le plus grand entier inférieur à x pouvant s'écrire sous la forme $y = 10^{\frac{2(10^a-1)}{9}+a}$. Alors de l'inégalité

$$\left(10^{\frac{2(10^a-1)}{9}+a}\right)^{1/10} < 10^{\frac{2(10^{a-1}-1)}{9}+a-1}, \tag{2.7}$$

il découle que $x^{1/10} < y \leq x$. De la proposition 2.2 et de (2.7), on obtient alors

$$N(x) \geq N(y) \gg \frac{y}{(\log y)^{3/2}} \gg \frac{x^{1/10}}{(\log x)^{3/2}}.$$

La proposition 2.5 améliore cette borne inférieure valide pour tout nombre réel x. La proposition 2.5 a été démontrée pour la première fois dans [8]. Pour démontrer ce résultat, on a besoin du lemme bien connu suivant.

Proposition 2.3. *Soit ρ un nombre irrationnel. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux entiers positifs p et q tels que*

$$0 < q\rho - p < \varepsilon.$$

Preuve. On montre par induction que pour tout entier n, il existe deux entiers positifs p et q tels que

$$0 < q\rho - p < \frac{1}{2^n}. \tag{2.8}$$

On remarque d'abord que l'énoncé (2.8) est équivalent à l'existence d'un entier q tel que

$$0 < \{q\rho\} < \frac{1}{2^n}. \tag{2.9}$$

On effectue alors la preuve par induction sur n. L'inégalité (2.9) est évidente pour $n = 0$. Supposons qu'elle soit vraie pour n et choisissons q_n de telle sorte que $0 < \{q_n\rho\} < \frac{1}{2^n}$. Désignons ensuite par q'_n le plus petit entier tel que $q'_n\{q_n\rho\} > 1$. On a alors

$$0 < \{q'_n q_n \rho\} < \{q_n\rho\}. \tag{2.10}$$

Si $\{q'_n q_n \rho\} < \frac{\{q_n\rho\}}{2}$, on pose $q_{n+1} = q'_n q_n$ et la démonstration est terminée. Sinon, on pose

$$q''_n = \left\lfloor \frac{1}{\{q_n\rho\} - \{q'_n q_n \rho\}} \right\rfloor,$$

auquel cas

$$0 < \{q''_n(q'_n q_n - q_n)\rho\} < \{q_n\rho\} - \{q_n q'_n \rho\} < \frac{q_n\rho}{2}.$$

En posant $q_{n+1} = q''_n(q_n q'_n - q_n)$, la démonstration de la proposition 2.3 est alors complète.

On définit l'ensemble $\mathcal{H}$ comme suit

$$\mathcal{H} := \{n \in \mathcal{N} : p|n \Longrightarrow p|10\}.$$

Désignons par $h_1, h_2, \ldots$, les éléments de $\mathcal{H}$ ordonnés selon l'ordre croissant. Les premiers termes de cette suite sont alors

$$2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 32, 40, 50, 64, 80, 100, \ldots$$

De la proposition 2.3, on déduit facilement le résultat suivant.

Proposition 2.4

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_{n+1}}{h_n} = 1.$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, on choisit deux entiers positifs p et q tels que

$$0 < q - p\frac{\log 2}{\log 5} < \varepsilon. \tag{2.11}$$

L'existence de tels entiers est garantie par la proposition 2.3. On choisit également deux entiers positifs p' et q' tels que

$$0 < q' - p'\frac{\log 5}{\log 2} < \varepsilon. \tag{2.12}$$

L'existence de tels entiers est encore une fois garantie par la proposition 2.3. On choisit n de telle façon que $h_n > 10^{\max(p,p')}$ et on définit implicitement a_n et b_n par $h_n = 2^{a_n}5^{b_n}$.

Supposons d'abord que $a_n \geq b_n$. On a alors $h_n \leq 10^{a_n}$. De (2.11), on obtient $0 < q\log 5 - p\log 2 < \varepsilon \log 5$, de sorte que $1 < 5^q 2^{-p} < e^{\varepsilon \log 5}$. Comme par construction, $p \leq a_n$, on obtient que $h_n 5^q 2^{-p} \in \mathcal{H}$ et $h_{n+1} \leq 5^q 2^{-p} h_n < h_n e^{\varepsilon \log 5}$.

Supposons maintenant que $b_n \geq a_n$, il s'ensuit que $h_n \leq 10^{b_n}$. On obtient de (2.12) $0 < q'\log 2 - p'\log 5 < \varepsilon \log 2$, de sorte que $1 < 2^{q'}5^{-p'} < e^{\varepsilon \log 2}$. Comme par construction, $p' \leq b_n$, on obtient que $h_n 2^{q'}5^{-p'} \in \mathcal{H}$ et $h_{n+1} \leq 2^{q'}5^{-p'}h_n < h_n e^{\varepsilon \log 2}$.

On vient donc de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier n_0 tel que pour tout $n > n_0$, $h_{n+1} < h_n e^{\varepsilon \log 5}$, ce qui termine la démonstration de la proposition 2.4.

Proposition 2.5. *Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $x_0 = x_0(\varepsilon)$ tel que pour tout $x > x_0$*

$$N(x) > x^{1-\varepsilon}.$$

Ce résultat a été obtenu par De Koninck et Doyon dans [8]. Comme le confirmait [7], il s'agissait là de la première borne inférieure non triviale obtenue pour $N(x)$.

Preuve. Soit $y > 2$ un nombre réel, on pose

$$g(y) := \max_{\substack{h<y \\ h\in\mathcal{H}}} h.$$

Soit R un grand entier. Posons

$$k = k(R) := \max\{a, b\}, \text{ où } 2^a \| g(\lfloor 4.5R \rfloor) \text{ et } 5^b \| g(\lfloor 4.5R \rfloor).$$

Par exemple, si $R = 100$, $g(4.5R) = g(450) = 400 = 2^4 \cdot 5^2$ et $k(100) = 4$. Considérons maintenant les entiers $n < 10^R$ qui peuvent s'écrire sous la forme

$$n = m_1 + 10^{k(R)} m_2 \tag{2.13}$$

où $m_1 < 10^{k(R)}, m_2 < 10^{R-k(R)}$ et $s(m_2) = g(\lfloor 4,5R \rfloor) - s(m_1)$.

Par une telle représentation, on a alors $s(n) = s(m_1) + s(m_2) = g(\lfloor 4,5R \rfloor)$. Par conséquent, $s(n)|m_1$ implique $s(n)|n$. De (2.13), on obtient que

$$N(10^R) \geq \sum_{\substack{m_1 < 10^{k(R)} \\ g(\lfloor 4,5R \rfloor)|m_1}} A\left(10^{R-k(R)} \middle| g(\lfloor 4.5R \rfloor) - s(m_1)\right). \tag{2.14}$$

On remarque que $s(m_1) \leq 9k(R) \leq 9\frac{\log 4.5R}{\log 2}$. De plus, par la proposition 2.4, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier R_0 tel que pour tout $R > R_0$

$$g(\lfloor 4.5R \rfloor) > (4.5 - \varepsilon)R. \tag{2.15}$$

De (2.15) et de la proposition 1.3, on obtient que pour $R > R_0$,

$$\begin{aligned} A\left(10^{R-k(R)} | g(\lfloor 4,5R \rfloor\right) &\geq A\left(10^{R-k(R)} | (4.5 - \varepsilon)R - s(m_1)\right) \\ &\geq A\left(10^{R-k(R)} | (4.5 - 2\varepsilon)R\right) \\ &\geq A\left(10^{R-k(R)} | \lfloor (4.5 - 2\varepsilon)(R - k(R)) \rfloor\right). \end{aligned} \tag{2.16}$$

De la proposition 1.14, on obtient

$$\begin{aligned} A\left(10^{R-k(R)} \middle| \lfloor (4.5 - 2\varepsilon)(R - k(R)) \rfloor\right) &\geq A\left(10^{\lfloor (R-k(R))(1-\frac{4\varepsilon}{9}) \rfloor} \middle| \lfloor (4.5 - 2\varepsilon)(R - k(R)) \rfloor\right) \\ &> \frac{c_6 10^{(R-k(R))(1-\frac{\varepsilon}{9})}}{\sqrt{R - k(R)}} \\ &> 10^{R(1-2\epsilon)}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

En combinant (2.14), (2.16) et (2.17), on obtient que

$$N(10^R) \geq \sum_{\substack{m_1 < 10^{k(R)} \\ g(4.5R)|m_1}} 10^{R(1-2\varepsilon)}. \tag{2.18}$$

Comme par la définition de g et k on a $g(\lfloor 4.5R \rfloor) < 10^{k(R)}$, il découle de (2.18) que

$$N(10^R) \geq 10^{R(1-2\varepsilon)}. \tag{2.19}$$

Soit x un réel positif. Désignons par R le plus grand entier tel que $10^R < x$. Par (2.19), on obtient alors

$$N(x) \geq N(10^R) \geq 10^{R(1-2\varepsilon)} \geq \frac{x^{1-2\varepsilon}}{10},$$

ce qui complète la démonstration de la proposition 2.5.

Remarque. La démonstration de la proposition 2.5 dépend du fait que 10 possède au moins deux facteurs permiers distincts, une hypothèse qui ne peut être utilisée pour étudier les nombres de Niven en base p^a où p est un nombre premier.

2.2 Bornes supérieures

Proposition 2.6. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 = x_0(\epsilon)$ tel que pour tout $x > x_0$,*

$$N(x) < \frac{x}{(\log x)^{1/2-\epsilon}}.$$

Ce résultat est essentiellement celui obtenu par Vardi [24] en 1991.

Preuve. Soit $\epsilon > 0$. Le point de départ de la démonstration est l'identité suivante valide pour tout entier R

$$N(10^R) = \sum_{\substack{n<10^R \\ s(n)|n}} 1 = \sum_{t \le 9R} A(10^R|t,0,t) = \Sigma_1 + \Sigma_2, \tag{2.20}$$

où

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &:= \sum_{t \in I_\varepsilon} A(10^R|t,0,t) \text{ et} \\ \Sigma_2 &:= \sum_{t \notin I_\varepsilon} A(10^R|t,0,t) \end{aligned}$$

avec $I_\varepsilon := \left[\frac{9}{2}R - R^{1/2+\varepsilon}, \frac{9}{2}R + R^{1/2+\varepsilon}\right]$.

Par la proposition 1.7, on obtient, pour tout entier R,

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &\le \#\{n < x : s(n) \notin I_\varepsilon\} \\ &\le 10^{R(1-c(R^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})^2)} \\ &= 10^R 10^{-cR^{2\varepsilon+o(\varepsilon)}} \\ &= o\left(\frac{10^R}{\sqrt{R}}\right). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Pour borner supérieurement Σ_1, on utilise l'inégalité

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\le \sum_{a\in I_\varepsilon} \#\{n < 10^R : a|n\} \\ &< \sum_{a\in I_\varepsilon} \left(\frac{10^R}{a} + 1\right) \\ &= 10^R \sum_{a\in I_\varepsilon} \frac{1}{a} + O(R). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Par la définition de l'intervalle I_ε, on a

$$\sum_{a\in I_\varepsilon} \frac{1}{a} = \log\left(\frac{9}{2}R + R^{1/2+\varepsilon}\right) - \log\left(\frac{9}{2}R - R^{1/2+\varepsilon}\right) + O(1). \tag{2.23}$$

En utilisant le fait que $\log(a+b) = \log a + \frac{b}{a} + O\left(\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)$, on obtient

$$\log\left(\frac{9}{2}R + R^{1/2+\varepsilon}\right) - \log\left(\frac{9}{2}R - R^{1/2-\varepsilon}\right) \ll R^{-1/2+\varepsilon}. \tag{2.24}$$

Des équations (2.22), (2.23) et (2.24), on déduit

$$\Sigma_1 \ll R + 10^R R^{-1/2+\varepsilon}. \tag{2.25}$$

De (2.21) et (2.25), on conclut que

$$N(10^R) \ll 10^R R^{-1/2+\varepsilon}. \tag{2.26}$$

Soient x un nombre réel positif et R le plus grand entier tel que $10^R \le x$. En utilisant le fait que $\frac{\log x}{\log 10} - 1 \le R \le \frac{\log x}{\log 10}$, on obtient de (2.26) que

$$N(x) \le N(10^{R+1}) \ll 10^{R+1}(R+1)^{-1/2+\epsilon} \le \frac{10x}{\left(\frac{\log x}{\log 10} + 1\right)^{1/2-\epsilon}} \ll \frac{x}{(\log x)^{1/2-\epsilon}},$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 2.6.

Remarque. La démonstration de la proposition 2.6 repose sur l'inégalité triviale

$$A(10^R|t, 0, t) \le \min\left(A(10^R|t), \#\{n < 10^R : t|n\}\right) \tag{2.27}$$

Mais par la proposition 1.14, on a

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{9R} \min\left(A(10^R|t), \#\{n < 10^R : t|n\}\right) &\ll \sum_{t=\lfloor 4.5R-\sqrt{R}\rfloor}^{\lfloor 4.5R+\sqrt{R}\rfloor} \#\{n < 10^R : t|n\} \\ &\le 2\sqrt{R}\frac{10^R}{4.5R+\sqrt{R}} \\ &\ll \frac{10^R}{\sqrt{R}}. \end{aligned}$$

Il est donc impossible d'obtenir une borne supérieure plus précise que $N(x) \ll \frac{x}{\sqrt{\log x}}$ en utilisant l'inégalité (2.27) comme point de départ de la démonstration.

Remarquons aussi que la généralité de la méthode utilisée dans la preuve de la proposition 2.6 permet d'obtenir une borne supérieure pour la quantité $\#\{n < x : f(n)|n\}$ pour différentes fonctions f. C'est ainsi que l'on peut par exemple obtenir

$$\#\{n < x : \omega(n)|n\} < \frac{x}{\sqrt{\log\log x}}.$$

Il suffit en fait que la fonction f suive une distribution normale pour obtenir un résultat du type

$$\#\{n < x : f(n)|n\} < \frac{x}{\sqrt{\sum_{n<x} f(n)}},$$

ce qui est toutefois beaucoup plus faible que $\#\{n < x : f(n)|n\} \ll \frac{x}{\sum_{n<x} f(n)}$, soit la valeur attendue pour de nombreuses fonctions f.

Proposition 2.7. *Lorsque $x \to \infty$,*

$$N(x) \ll \frac{x \log\log x}{\log x}.$$

Ce résultat a été obtenu par De Koninck et Doyon dans [8].

Preuve. Soit R un grand entier positif. On écrit chaque entier $n < 10^R$ sous la forme

$$n = m_1(n) + 10^s m_2(n) \tag{2.28}$$

où $m_1(n) < 10^s$ et s est l'unique entier tel que $10^s \leq R < 10^{s+1}$.

Grâce à cette représentation, on peut écrire

$$s(n) = s(m_1) + s(m_2). \tag{2.29}$$

Soit ε un nombre réel positif. L'identité suivante est le point de départ de la démonstration.

$$N(10^R) = \sum_{t \leq 9R} A(10^R|t, 0, t) = \Sigma_1 + \Sigma_2, \tag{2.30}$$

où

$$\Sigma_1 := \sum_{a \in I_\varepsilon} A(10^R|t, 0, t)$$

et

$$\Sigma_2 := \sum_{a \notin I_\varepsilon} A(10^R|t, 0, t),$$

où $I_\varepsilon := [(4,5-\varepsilon)R, (4,5+\varepsilon)R]$. Par la proposition 1.7, il existe une constante positive c telle que :

$$\Sigma_2 \leq \#\{n < 10^R : s(n) \notin I_\varepsilon\} \leq 10^R e^{-Rc\varepsilon^2}. \tag{2.31}$$

Comme $m_1 < R$, il s'ensuit que $s(m_1) < \frac{9\log R}{\log 10}$. On a donc

$$s(n) \in I_\epsilon \Longrightarrow s(m_2) \in I_\varepsilon^* \text{ avec } I_\varepsilon^* = \left[\left(\frac{9}{2}-\varepsilon\right)R - \frac{9\log R}{\log 10}, \left(\frac{9}{2}+\varepsilon\right)R\right]. \tag{2.32}$$

On obtient ainsi de (2.32)

$$\Sigma_1 = \sum_{\substack{m_2<10^{R-s}\\ s(m_2)\in I_\varepsilon^*}} \sum_{a=1}^{\lfloor \frac{9\log R}{\log 10}\rfloor} \#\{m_1 < 10^s : s(m_1) = a, s(n)|n\}. \tag{2.33}$$

Remarquons que sous l'hypothèse $s(m_1) = a$, la condition $s(n)|n$ est équivalente à $m_1 \equiv -10^s m_2 \pmod{(s(m_2)+a)}$. De (2.33), il découle que

$$\Sigma_1 \leq \sum_{\substack{m_2<10^{R-s}\\ s(m_2)\in I_\varepsilon^*}} \sum_{a<\frac{9\log R}{\log 10}} \#\{m_1 < 10^s : m_1 \equiv -10^s m_2 \pmod{(s(m_2)+a)}\}. \tag{2.34}$$

Par la définition de s et sous l'hypothèse $s(m_2) \in I_\varepsilon^*$, on a pour R grand,

$$s(m_2) + a > s(m_2) > \left(\frac{9}{2}R - \varepsilon\right) - \frac{9\log R}{\log 10} > 10^s.$$

Il s'ensuit que

$$\#\{m_1 < 10^s : m_1 \equiv -10^s m_2 \pmod{(s(m_2)+a)}\} \leq 1,$$

ce qui nous permet d'obtenir de (2.34) que

$$\Sigma_1 \leq \sum_{\substack{m_2<10^{R-s}\\ s(m_2)\in I^*}} \sum_{a<\frac{9\log R}{\log 10}} 1 \leq 10^{R-s}\frac{9\log R}{\log 10}. \tag{2.35}$$

De (2.31), (2.35) et en utilisant le fait que par définition $10^s \leq R < 10^{s+1}$, on conclut que

$$N(10^R) \ll \frac{10^R \log R}{10^s} \ll \frac{10^R \log R}{R}. \tag{2.36}$$

Soient x un grand nombre réel et R le plus grand entier tel que $10^R \leq x$. De (2.36), on obtient alors que

$$N(x) \leq N(10^{R+1}) \ll \frac{10^{R+1}\log(R+1)}{R+1} \leq \frac{10x\log(R+1)}{R+1} \ll \frac{x\log\log x}{\log x},$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 2.7.

2.3 Le résultat de Cooper et Kennedy

L'objectif de cette section est de démontrer la proposition 2.9, obtenue par Cooper et Kennedy [5]. Ce résultat nous renseigne sur le comportement asymptotique de la quantité $\#\{n < x : s(n) = k, k|n\}$ lorsque k est fixé et x tend vers l'infini. La proposition 2.8 constitue le lemme qui nous permettra de démontrer ce résultat.

Proposition 2.8. *Soient $k \geq 1$ un entier fixé et R un entier positif. Alors quand R tend vers l'infini,*

$$\begin{aligned} A(10^R|k) &= \#\{n < 10^R : r_0(n) = R-k, r_1(n) = k\} + O(R^{k-1}) \\ &= \frac{1}{k!}\#\{(a_1, a_2, \ldots, a_k) : a_j \in \mathcal{N} \cap [0, R-1], j \in [1,k]\} + O(R^{k-1}). \end{aligned}$$

De plus, lorsque $R \to \infty$

$$\#\{n < 10^R : r_0(n) = R-k, r_1(n) = k\} = \binom{R}{k} = (1+o(1))\frac{1}{k!}R^k.$$

Preuve. Supposons que $n < 10^R$ et $s(n) = k$. On peut alors écrire n sous la forme

$$n = \sum_{j=1}^{k} 10^{a_j} \text{ pour certains entiers non négatifs } a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k \leq R-1. \quad (2.37)$$

D'autre part, les conditions $n < 10^R, r_0(n) = R-k$ et $r_1(n) = k$ sont satisfaites si et seulement si on peut écrire

$$n = \sum_{j=1}^{k} 10^{a_j} \text{ pour certains entiers non négatifs } a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leq R-1. \quad (2.38)$$

De (2.37) et (2.38), on déduit que

$$\begin{aligned} &\#\{n < 10^R : r_1(n) = k, r_0(n) = R-k\} \qquad (2.39) \\ &\qquad \leq A(10^R|k) \\ &\qquad \leq \#\{(a_1, a_2, \ldots, a_k) : 0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k \leq R-1\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\#\{(a_1, a_2, \ldots, a_k) : 0 \leq a_j \leq a_{j+1} \leq R-1 \text{ pour } 1 \leq j \leq k-1\} \\ &\quad - \#\{n < 10^R : r_1(n) = k, r_0(n) = R-k\} \\ &\qquad = \sum_{j=2}^{k} \#\{(a_1, a_2, \ldots, a_k) : 0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k \leq R-1\} \\ &\qquad \leq (k-1)R^{k-1}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, il est facile d'établir les deux identités suivantes

$$\begin{aligned}
&\#\{n < 10^R : r_1(n) = k, r_0(n) = R - k\} \qquad (2.40)\\
&= \#\{(a_1, a_2, \ldots, a_k) : 0 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leq R\}\\
&= \binom{R}{k}\\
&= (1 + o(1))\frac{1}{k!}R^k \qquad (R \to \infty).
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\#\{n < 10^R : r_1(n) = k, r_0(n) = R - k\} \qquad (2.41)\\
&\leq \frac{1}{k!}\#\{(a_1, a_2, \ldots, a_k) : 0 \leq a_j \leq a_{j+1} \text{ pour } 1 \leq j \leq k - 1\}\\
&\leq \#\{(a_1, a_2, \ldots, a_k) : 0 \leq a_j \leq a_{j+1} \leq R - 1 \text{ pour } 1 \leq j \leq k - 1\}.
\end{aligned}$$

La proposition 2.8 découle alors de (2.39), (2.40) et (2.41).

Proposition 2.9. *Soient $t \geq 1$ un entier fixé et x un nombre réel positif. Il existe une constante positive $c_9 = c_9(t)$ telle que,*

$$A(x|t, 0, t) = (1 + o(1))c_9 \cdot (\log x)^t \qquad (x \to \infty).$$

La proposition 2.9 a été obtenue par Cooper et Kennedy [4]

Preuve. Montrons d'abord qu'il existe une constante positive $c_{10} = c_{10}(t)$ telle que

$$A(10^R|t, 0, t) = (1 + o(1))c_{10}R^t \qquad (R \in \mathcal{N}, R \to \infty). \qquad (2.42)$$

On suppose d'abord $(t, 10) = 1$. Par la proposition 2.8, on a que

$$\begin{aligned}
&A(10^R|t, 0, t) \qquad (2.43)\\
&= \frac{1}{t!}\left\{(a_1, a_2, \ldots, a_t) : a_j \in \mathcal{N} \cap [0, R - 1], \text{ pour } j \in [1, t], \sum_{j=1}^{t} 10^{a_j} \equiv 0 \pmod{k}\right\}\\
&\qquad + O(R^{k-1}).
\end{aligned}$$

Soient b le plus petit entier tel que $10^b \equiv 1 \pmod{k}$ et a_j^* le plus petit entier non négatif tel que $a_j^* \equiv a_j \pmod b$. On a alors

$$\begin{aligned}
&\#\left\{(a_1, a_2, \ldots, a_t) : 0 \le a_j \le R-1, \text{ pour } 1 \le j \le t, \sum_{j=1}^{t} 10^{a_j} \equiv 0 \pmod t\right\} \qquad (2.44)\\
&= \#\left\{(a_1, a_2, \ldots, a_t) : 0 \le a_j \le R-1, \text{ pour } 1 \le j \le t, \sum_{j=1}^{t} 10^{a_j^*} \equiv 0 \pmod t\right\}\\
&= \left\lfloor \frac{R}{b} \right\rfloor^t \#\left\{(a_1, a_2, \ldots, a_t) : 0 \le a_j \le b-1, \text{ pour } 1 \le j \le t, \sum_{j=1}^{t} 10^{a_j} \equiv 0 \pmod t\right\}\\
&\qquad + O(R^{t-1}).
\end{aligned}$$

De (2.43) et (2.44) il découle que

$$A(10^R|t, 0, t) = (1 + o(1))R^t c_{10}(t) \qquad (R \to \infty), \tag{2.45}$$

où $c_{10}(t) := \dfrac{1}{t!b^t} \#\left\{(a_1, a_2, \ldots, a_t) : 0 \le a_j \le b-1, 1 \le j \le t, \sum_{j=1}^{t} 10^{a_j} \equiv 0 \pmod t\right\}$.

On suppose maintenant $(t, 10) > 1$. On écrit dans ce cas $t = t_1 t_2$ avec $(t_1, 10) = 1$ et $p|t_2 \Longrightarrow p|10$. Soit h le plus petit entier positif tel que $t_2 | 10^h$. On a alors

$$\begin{aligned}
&A(10^R|t, 0, t) \qquad (2.46)\\
&= \frac{1}{t!}\#\left\{(a_1, a_2, \ldots, a_t) : 0 \le a_j \le R, \text{ pour } 1 \le j \le t, \sum_{j=1}^{t} 10^{a_j} \equiv 0 \pmod t\right\} + O(R^{t-1})\\
&= \frac{1}{t!}\#\left\{(a_1, a_2, \ldots, a_t) : h \le a_j \le R, \text{ pour } 1 \le j \le t, \sum_{j=1}^{t} 10^{a_j} \equiv 0 \pmod{t_1}\right\} + O(R^{t-1}).
\end{aligned}$$

Soit b le plus petit entier positif tel que $10^b \equiv 1 \pmod{t_1}$ et a_j^* le plus petit entier non négatif tel que $a_j^* \equiv a_j \pmod b$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
&\#\left\{(a_1, a_2, \ldots, a_t) : h \le a_j \le R, \text{ pour } 1 \le j \le t, \sum_{j=1}^{t} 10^{a_j} \equiv 0 \pmod{t_1}\right\} \qquad (2.47)\\
&= \#\left\{(a_1, a_2, \ldots, a_t) : h \le a_j \le R, \text{ pour } 1 \le j \le t, \sum_{j=1}^{t} 10^{a_j^*} \equiv 0 \pmod{t_1}\right\}\\
&= \#\left\{(a_1, a_2, \ldots, a_t) : 0 \le a_j \le R, \text{ pour } 1 \le j \le t, \sum_{j=1}^{t} 10^{a_j^*} \equiv 0 \pmod{t_1}\right\} + O(R^{t-1})\\
&= \left(\frac{R}{b}\right)^t \#\left\{(a_1, a_2, \ldots, a_t) : 0 \le a_j < b, 1 \le j \le t, \sum_{j=1}^{t} 10^{a_j} \equiv 0 \pmod{t_1}\right\} + O(R^{t-1}).
\end{aligned}$$

On peut ainsi conclure que

$$A(10^R|t,0,t) = (1+o(1))c_{10}(t)R^t \qquad (R \to \infty), \tag{2.48}$$

où

$$c_{10}(t) = \frac{1}{t!b^t}\#\left\{(a_1,a_2,\ldots,a_t) : 0 \le a_j < b, \ \text{pour } 1 \le j \le t, \sum_{j=1}^{t} 10^{a_j} \equiv 0 \pmod{t_1}\right\},$$

de sorte que l'égalité (2.42) découle de (2.45) et (2.48).

Soit R le plus grand entier tel que $10^R \le x$, de sorte que $R = (1+o(1))\frac{\log x}{\log q}$ et

$$A(10^R|t,0,t) \le A(x|t,0,t) \le A(10^{R+1}|t,0,t). \tag{2.49}$$

De (2.42) et (2.49), il découle que

$$A(x|t,0,t) = (1+o(1))c_9(\log x)^t \qquad (x \to \infty),$$

où $c_9 = c_9(t) = \frac{c_{10}(t)}{(\log q)^t}$, ce qui termine la démonstration du résultat de Cooper et Kennedy.

Remarque : Comme la proposition 2.9 est valide seulement lorsque $t = o(\log x)$, elle ne peut pas être utilisée pour évaluer la quantité $N(x)$ en tant que telle.

Chapitre 3

Valeur asymptotique de la fonction $N_q(x)$

Dans ce chapitre, on montre que, lorsque x tend vers l'infini,

$$N_q(x) = (1 + o(1))\eta(q)\frac{x}{\log x}$$

où $\eta(q)$ est une constante strictement positive. Ce résultat a été obtenu par De Koninck, Doyon et Kátai [9]. La démonstration de ce résultat utilise les sommes trigonométriques et certaines propositions du chapitre 1.

3.1 Résultats préliminaires

Dans ce chapitre, pour simplifier la notation, on pose $e(y) = e^{2\pi y i}$ où y est un nombre réel.

Proposition 3.1. *Soit n un entier, alors*

$$\int_0^1 e(xn)dx = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

Preuve. Si $n = 0$, on a que

$$\int_0^1 e(xn)dx = \int_0^1 dx = 1.$$

Par ailleurs, si $n \neq 0$, on a que

$$\int_0^1 e(xn)dx = \frac{e(xn)}{2\pi in}\bigg|_{x=0}^1 = \frac{e(n)-1}{2\pi in} = 0,$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 3.1.

Corollaire 3.1

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{ixn} dx = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

Preuve. Le corollaire 3.1 découle directement de la proposition 1 lorsqu'on effectue le changement de variable $y = 2\pi x$.

Proposition 3.2. *Soient k un entier positif et ℓ un entier. Alors*

$$\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} e\left(\frac{j\ell}{k}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell \equiv 0 \pmod{k}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Supposons d'abord $\ell \equiv 0 \pmod{k}$. On a alors $e(\frac{j\ell}{k}) = 1$ et

$$\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} e\left(\frac{j\ell}{k}\right) = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} 1 = 1.$$

Supposons maintenant $\ell \not\equiv 0 \pmod{k}$. On a dans ce cas

$$\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} e\left(\frac{j\ell}{k}\right) = \frac{1}{k}\frac{e(\frac{k\ell}{k}) - 1}{e(\frac{\ell}{k}) - 1} = 0,$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 3.2.

Soient x un nombre réel positif, z un nombre complexe et f une fonction arithmétique à valeurs entières. On pose

$$\theta_f(x, z) := \sum_{1 \le n < x} z^{f(n)}.$$

Proposition 3.3. *Soient x un nombre réel, f une fonction arithmétique à valeurs entières et t un nombre entier. Alors*

$$\int_0^1 \theta_f(x, e(s)) \cdot e(-ts)ds = \#\{n < x : f(n) = t\}.$$

Preuve. Par la définition de θ_f on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \theta_f(x, e(s)) \cdot e(-ts)ds &= \int_0^1 \sum_{1 \le n < x} e(sf(n))e(-ts)ds \qquad (3.1) \\ &= \sum_{1 \le n < x} \int_0^1 e(s(f(n) - t))ds. \end{aligned}$$

En utilisant la propostion 3.1, on obtient

$$\sum_{1\leq n<x}\int_0^1 e(s(f(n)-t))ds = \sum_{\substack{1\leq n<x\\ f(n)=t}} 1 = \#\{n<x : f(n)=t\}. \tag{3.2}$$

De (3.1) et (3.2) on déduit que

$$\int_0^1 \theta_f(x,e(s))\cdot e(-ts)ds = \#\{n<x : f(n)=t\}, \tag{3.3}$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 3.3.

Soient f une fonction arithmétique à valeurs entières, w et z des nombres complexes et x un nombre réel positif. On pose

$$\Psi_f(x,w,z) := \sum_{1\leq n<x} z^{f(n)}w^n.$$

Proposition 3.4. *Soient f une fonction arithmétique à valeurs entières, k et ℓ des entiers, x un nombre réel positif et z un nombre complexe. Alors*

$$\frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1}\Psi(x,e(s/k),z)e(-s\ell/k) = \sum_{\substack{1\leq n<x\\ n\equiv\ell \pmod k}} z^{f(n)}.$$

Preuve. Par la définition de Ψ, on a que

$$\frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1}\Psi(x,e(s/k),z)e(-s\ell/k) = \frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{1\leq n<x} z^{f(n)}e(s(n-\ell)/k). \tag{3.4}$$

En interchangeant l'ordre de sommation, on obtient de (3.4)

$$\frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1}\Psi(x,e(s/k),z)e(-s\ell/k) = \sum_{1\leq n<x} z^{f(n)}\frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1}e(s(n-\ell)/k). \tag{3.5}$$

En utilisant la proposition 3.2, on obtient

$$\sum_{1\leq n<x} z^{f(n)}\frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1}e(s(n-\ell)/k) = \sum_{\substack{1\leq n<x\\ n\equiv\ell \pmod k}} z^{f(n)}. \tag{3.6}$$

En combinant (3.5) et (3.6), on complète le preuve de la proposition 3.4

À l'aide des propositions 3.1 et 3.4, on peut facilement démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.1. *Soient f une fonction arithmétique à valeurs entières, x un nombre réel positif et $k \geq 1$, ℓ et $t \geq 0$ trois entiers. Alors*

$$\int_0^1 \frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1} \Psi(x, e(s/k), e(y))e(-s\ell/k)e(-yt)dy = \#\{n < x : f(n) = t, n \equiv \ell \pmod{k}\}.$$

Preuve. Par la proposition 3.4, on a que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1} &\Psi(x, e(s/k), e(y))e(-s\ell/k)e(-yt)dy \\ &= \int_0^1 \sum_{\substack{n<x \\ n\equiv \ell \pmod{k}}} e(yf(n))e(-yt)dy \\ &= \sum_{\substack{n<x \\ n\equiv \ell \pmod{k}}} \int_0^1 e(y(f(n)-t))dy.\end{aligned} \tag{3.7}$$

En utilisant la proposition 3.1, on obtient

$$\sum_{\substack{n<x \\ n\equiv \ell \pmod{k}}} \int_0^1 e(y(f(n)-t))dy = \#\{n < x : n \equiv \ell \pmod{k}, f(n) = t\}. \tag{3.8}$$

En combinant (3.7) et (3.8), la preuve du théorème 3.1 est complétée.

Afin d'appliquer le théorème 3.1 à l'étude de la fonction $s_q(n)$, on a besoin de la proposition suivante.

Proposition 3.5. *Soient q un entier $q \geq 2$, R un entier positif, w et z deux nombres complexes. Alors*

$$\Psi(q^R, w, z) = \prod_{0\leq j<R} \sum_{k=0}^{q-1} z^k w^{kq^j}$$

où l'on écrit $\Psi(q^R, w, z)$ pour $\Psi_f(q^R, w, z)$ en sous-entendant $f(n) = s_q(n)$.

Preuve. Par la définition de la fonction $s_q(n)$ et en supposant $n < q^R$, on a

$$s_q(n) = \xi_0^{(q)}(n) + \xi_1^{(q)}(n) + \ldots + \xi_{R-1}^{(q)}(n).$$

Il s'ensuit que pour tout nombre complexe z,

$$z^{s_q(n)} = \prod_{j=0}^{R-1} z^{\xi_j^{(q)}(n)}. \tag{3.9}$$

Par définition, on a également

$$n = \xi_0^{(q)}(n) + q\xi_1^{(q)}(n) + \ldots + q^{R-1}\xi_{R-1}^{(q)}(n),$$

de sorte que, pour tout nombre complexe w,

$$w^n = \prod_{j=0}^{R-1} w^{q^j \xi_j^{(q)}(n)}. \tag{3.10}$$

On obtient donc de (3.9), de (3.10) et de la définition de Ψ que

$$\Psi(q^R, w, z) = \sum_{n<q^R} \prod_{j=0}^{R-1} z^{\xi_j^{(q)}(n)} w^{q^j \xi_j^{(q)}(n)}. \tag{3.11}$$

Par la définition des fonctions $\xi_j^{(q)}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n<q^R} \prod_{j=0}^{R-1} z^{\xi_j^{(q)}(n)} w^{q^j \xi_j^{(q)}(n)} &= \sum_{k_0=0}^{q-1} \sum_{k_1=0}^{q-1} \cdots \sum_{k_{R-1}=0}^{q-1} \sum_{\substack{n<q^R \\ \xi_\ell^{(q)}(n)=k_\ell, 0\le \ell \le R-1}} \prod_{j=0}^{R-1} z^{\xi_j^{(q)}(n)} w^{q^j \xi_j^{(q)}(n)} \\
&= \sum_{k_0=0}^{q-1} \sum_{k_1=0}^{q-1} \cdots \sum_{k_{R-1}=0}^{q-1} \prod_{j=0}^{R-1} z^{k_j} w^{q^j k_j} \qquad (3.12) \\
&= \prod_{j=0}^{R-1} \sum_{k=0}^{q-1} w^{q^j k} z^k,
\end{aligned}$$

De sorte que la proposition 3.5 découle directement de (3.11) et (3.12).

Définition Soit y un nombre réel, on définit $\|y\|$ par $\|y\| := \min(\{y\}, 1 - \{y\})$. Autrement dit, $\|y\|$ est la distance entre y et l'entier le plus proche, de sorte que $0 \le \|y\| \le \frac{1}{2}$.

Proposition 3.6. *Soient α un nombre réel tel que $0 < \alpha < \frac{1}{4}$, y_1 et y_2 deux nombres réels tels que $\|y_1 - y_2\| \ge 2\alpha$. Alors*

$$\max(\|y_1\|, \|y_2\|) \ge \alpha.$$

Preuve. On effectue la démonstration de la contraposée en supposant $\|y_1\| < \alpha$ et $\|y_2\| < \alpha$. On traite d'abord le cas $0 \le \{y_1\} < \alpha$ et $0 \le \{y_2\} \le \{y_1\}$. Sous cette hypothèse, on a

$$\|y_1 - y_2\| = \{y_1\} - \{y_2\} \le \{y_1\} = \|y_1\| < \alpha,$$

une contradiction. On traite maintenant le cas $1 - \alpha \le \{y_1\} \le 1$ et $0 \le \{y_2\} < \alpha$. Sous cette hypothèse, on a

$$\|y_1 - y_2\| = \|\{y_1\} - \{y_2\}\| = 1 - (\{y_1\} - \{y_2\}) < 1 - ((1-\alpha) - \alpha) = 2\alpha,$$

encore une contradiction. Les autres cas se traitent de façon analogue. On en omet la démonstration afin d'être plus concis. Dans tous les cas, on obtient

$$\|y_1\| < \alpha \text{ et } \|y_2\| < \alpha \Longrightarrow \|y_1 - y_2\| < 2\alpha,$$

une contradiction, ce qui complète la démonstration de la proposition 3.6.

Proposition 3.7. *Soient $q \geq 2$ un entier, y un nombre réel tel que $0 < y < \frac{1}{2}$, α un nombre réel tel que $0 < \alpha < \frac{1}{q^2}$ et m un entier tel que $yq^m > 1$. Alors il existe un entier non négatif $j \leq m$, tel que $\|yq^j\| \geq \alpha$.*

Preuve. Soit m_1 le plus petit entier tel que $yq^{m_1} \geq 1$. Il est clair que $m_1 \geq 1$. Si $m_1 = 1$, alors $\frac{1}{q} \leq y < \frac{1}{2}$ et $\|y\| \geq \frac{1}{q} > \alpha$ ce qui complète la démonstration. Supposons donc $m_1 \geq 2$. Par construction on a

$$\frac{1}{q} \leq yq^{m_1-1} \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{q^2} \leq yq^{m_1-2} \leq \frac{1}{q}. \tag{3.13}$$

Il s'ensuit que $\|yq^{m_1-2}\| \geq \frac{1}{q^2} \geq \alpha$, ce qui complète la démonstration de la proposition 3.7.

Proposition 3.8. *Soient $q \geq 2$ un entier, α un nombre réel, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, et y un nombre réel tel que $\|y\| > \alpha$. Alors*

$$\left|\sum_{t=0}^{q-1} e(yt)\right| < q - 4\alpha^2.$$

Preuve. Par l'inégalité triangulaire, il est clair que

$$\left|\sum_{t=0}^{q-1} e(yt)\right| \leq |1 + e(y)| + q - 2. \tag{3.14}$$

Par définition, on a

$$\begin{aligned} |1 + e(y)| &= \sqrt{(1 + \cos(2\pi y))^2 + \sin^2(2\pi y)} \\ &= \sqrt{2 + 2\cos(2\pi y)} \\ &= \sqrt{2 + 2\cos(2\pi \|y\|)}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Comme $0 \leq \|y\| \leq \frac{1}{2}$, on obtient que

$$\cos(2\pi\|y\|) \leq 1 - 8\|y\|^2. \tag{3.16}$$

En combinant (3.15) et (3.16), on en déduit que

$$|1 + e(y)| \leq \sqrt{4 - 16\|y\|^2} = 2\sqrt{1 - 4\|y\|^2} \leq 2 - 4\|y\|^2. \tag{3.17}$$

En substituant (3.17) dans (3.14), on obtient alors

$$\left|\sum_{t=0}^{q-1} e(yt)\right| \leq q - 4\|y\|^2 \leq q - 4\alpha^2,$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 3.8.

3.2 Une borne supérieure pour la fonction Ψ

Dans cette section, on fait appel aux résultats de la section 3.1 afin de borner supérieurement la fonction Ψ sous certaines conditions.

Théorème 3.2. *Soient x un nombre réel positif, $q \geq 2$ un entier, k un entier positif tel que $(k,q) = 1$, ℓ un entier tel que $\ell(q-1) \not\equiv 0 \pmod{k}$ et z un nombre complexe tel que $|z| = 1$. Alors il existe une constante positive $c_{11} = c_{11}(q)$ telle que*

$$|\Psi(x, e(\ell/k), z)| < xe^{-c_{11}\frac{\log x}{\log k}}.$$

Preuve. Comme par hypothèse $|z| = 1$, on peut écrire $z = e(y)$ où y est un nombre réel. Soit R un grand entier positif. Par la proposition 3.5, on obtient

$$\Psi(q^R, e(\ell/k), z) = \prod_{j=0}^{R-1} \sum_{t=0}^{q-1} e(\ell t q^j/k) e(yt),$$

de sorte que

$$|\Psi(q^R, e(\ell/k), z)| = \prod_{j=0}^{R-1} \left| \sum_{t=0}^{q-1} e\left(t\left(\frac{\ell q^j}{k} + y\right)\right)\right|.$$

C'est pourquoi, pour $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, on a

$$|\Psi(q^R, e(\ell/k, z))| < q^{R-H_\alpha}(q - 4\alpha^2)^{H_\alpha}, \tag{3.18}$$

où $H_\alpha := \#\left\{0 \leq j \leq R-1 : \left|\sum_{t=0}^{q-1} e\left(t\left(\frac{\ell q^j}{k} + y\right)\right)\right| < q - 4\alpha^2\right\}$. Par la proposition 3.8, on obtient que

$$H_\alpha \geq \#\left\{0 \leq j \leq R-1 : \|\ell q^j/k + y\| > \alpha\right\}. \tag{3.19}$$

Afin d'obtenir une borne inférieure pour le membre de droite de (3.19), on utilise l'identité

$$(\ell q^j/k + y) - (\ell q^{j-1}/k + y) = \ell(q-1)q^{j-1}/k. \tag{3.20}$$

Supposons maintenant $\alpha < \frac{1}{4}$. Par la proposition 3.6, on a que $\|\ell(q-1)q^{j-1}/k\| \geq 2\alpha$ implique $\|\ell q^j/k + y\| \geq \alpha$ ou $\|\ell q^{j-1}/k + y\| \geq \alpha$. De (3.19) et (3.20), on obtient donc

$$H_\alpha \geq \frac{1}{2}\#\left\{1 \leq j \leq R-1 : \|\ell(q-1)q^{j-1}/k\| > 2\alpha\right\}. \tag{3.21}$$

Comme par hypothèse, $\ell(q-1) \not\equiv 0 \pmod{k}$ et $(k,q) = 1$, on obtient $\|\ell(q-1)q^{j-1}/k\| \geq \frac{1}{k}$. Par conséquent, pour tout entier positif m, on a $q^m\|\ell(q-1)q^{j-1}/k\| \geq \frac{q^m}{k}$, ce qui implique que

$$\|\ell(q-1)q^{j-1}/k\| q^{\lceil \frac{\log k}{\log q} \rceil} > 1. \tag{3.22}$$

Par la proposition 3.7, on déduit de (3.22) que si $2\alpha < \frac{1}{q^2}$, alors pour chaque entier $j \in [1, R-1]$, il existe un entier $j_1 \in \left[j, j + \left\lceil \frac{\log k}{\log q} \right\rceil\right]$ tel que $\|\ell(q-1)q^{j_1-1}/k\| > 2\alpha$. De (3.21), on peut donc déduire que

$$2H_\alpha \geq \#\{1 \leq j \leq R-1 : \|\ell(q-1)q^{j-1}/k\| > 2\alpha\} \geq \frac{R}{\lceil \frac{\log k}{\log q} \rceil} - 1 \geq \frac{R \log q}{2 \log k}. \tag{3.23}$$

De (3.18) et (3.23), on conclut que

$$|\Psi(q^R, e(\ell/k), z)| \leq q^{R - \frac{R \log q}{4 \log k}} (q - 4\alpha^2)^{\frac{R \log q}{4 \log k}}. \tag{3.24}$$

On peut réécrire cette dernière inégalité sous la forme

$$\begin{aligned} |\Psi(q^R, e(\ell/k), z)| &\leq q^R \left(\frac{q - 4\alpha^2}{q}\right)^{\frac{R \log q}{4 \log k}} \\ &= q^R \exp\left\{-\frac{\log q (\log q - \log(q - 4\alpha^2))R}{4 \log k}\right\}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Comme on peut choisir $\alpha = \frac{1}{2q^2}$, on obtient de (3.25)

$$|\Psi(q^R, e(\ell/k), z)| \leq q^R e^{-c_{12}(q) \frac{R}{\log k}} \text{ où } c_{12}(q) := \frac{\log q \left(\log q - \log\left(q - \frac{2}{q^2}\right)\right)}{4}. \tag{3.26}$$

Soient x un grand nombre réel positif et R le plus petit entier tel que $q^R > x$. On a alors $qx > q^R$ et $R > \frac{\log x}{\log q}$. De (3.26), il découle que

$$|\Psi(x, e(\ell/k), z)| \leq |\Psi(q^R, e(\ell/k), z)| \leq q^R e^{-c_{12}(q) \frac{R}{\log k}} \leq qx e^{-c_{12}(q) \frac{\log x}{\log q \log k}}.$$

En posant $c_{11}(q) = \frac{c_{12}(q)}{\log q}$, on complète la démonstration du théorème 3.2.

3.3 Estimation de la quantité $A_q(x|t, \ell, k)$

Dans cette section, on utilise le théorème 3.2 pour estimer la quantité $A_q(x|t, \ell, k)$ où x est un grand réel positif, t et k des entiers positifs et ℓ un entier quelconque.

Proposition 3.9. *Soient $q \geq 2$ un entier, x un réel positif, ℓ un entier et k un entier positif. Alors*

$$\left| A_q(x|t, \ell, k) - \frac{1}{k} A_q(x|t) \right| \leq \max_{1 \leq s \leq k-1} \max_{|z|=1} |\Psi(x, e(s/k), z)|.$$

Preuve. Du théorème 3.1, on peut déduire que

$$\int_0^1 \frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1} \Psi(x, e(s/k), e(r))e(-s\ell/k)e(-tr)dr = A_q(x|t,\ell,k) \tag{3.27}$$

ainsi que

$$\int_0^1 \Psi(x, e(0/k), e(r))e(-0\ell/k)e(-tr)dr = A_q(x|t). \tag{3.28}$$

En combinant les égalités (3.27) et (3.28), on a

$$\begin{aligned} A_q(x|t,\ell,k) - \frac{1}{k}A_q(x|t) &= \int_0^1 \frac{1}{k}\sum_{s=1}^{k-1} \Psi(x, e(s/k), e(r))e(-s\ell/k)e(-tr)dr \\ &= \frac{1}{k}\sum_{s=1}^{k-1}\int_0^1 \Psi(x, e(s/k), e(r))e(-s\ell/k)e(-tr)dr, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \left|A_q(x|t,\ell,k) - A_q(x|t)\right| &\leq \frac{1}{k}\sum_{s=1}^{k-1}\left|\int_0^1 \Psi(x, e(s/k), e(r))e(-s\ell/k)e(-tr)dr\right| \qquad (3.29) \\ &< \max_{1\leq s\leq k-1}\left|\int_0^1 \Psi(x, e(s/k), e(r))e(-s\ell/k)e(-tr)dr\right|. \end{aligned}$$

Étant donné que

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 \Psi(x, e(s/k), e(r))e(-s\ell/k)e(-tr)dr\right| &\leq \int_0^1 \left|\Psi(x, e(s/k), e(r))e(-s\ell/k)e(-tr)\right| dr \\ &= \int_0^1 \left|\Psi(x, e(s/k), e(r))\right| dr \\ &\leq \max_{|z|=1}\left|\Psi(x, e(s/k), z)\right|, \end{aligned}$$

on obtient de (3.29) que

$$\left|A_q(x|t,\ell,k) - A_q(x|t)\right| \leq \max_{1\leq s\leq k-1}\max_{|z|=1}\left|\Psi(x, e(s/k), z)\right|,$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 3.9. Comme corollaire de cette proposition, on obtient le théorème suivant.

Théorème 3.3. *Soient $q \geq 2$ un entier, k un entier tel que $(k, q(q-1)) = 1$, R et t des entiers positifs et ℓ un entier. Alors*

$$\left|A_q(q^R|t,\ell,k) - \frac{1}{k}A_q(q^R|t)\right| \leq q^R e^{-c_{11}\frac{R}{\log k}},$$

où $c_{11} = c_{11}(q)$ est la constante du théorème 3.2.

Preuve. Par la proposition 3.9 on a

$$\left| A_q(q^R|t,\ell,k) - \frac{1}{k} A_q(q^R|t) \right| \le \max_{1\le s\le k-1} \max_{|z|=1} |\Psi(q^R, e(s/k), z)|. \tag{3.30}$$

Comme par hypothèse $(k, q-1) = 1$, on a que pour tout entier $s \in [1, k-1]$, $k \not| s(q-1)$. Par le théorème 3.2, il s'ensuit que

$$|\Psi(q^R, e(s/k), z)| \le q^R e^{-c_{11}\frac{R}{\log k}} \tag{3.31}$$

et la démonstration du théorème 3.3 découle directement de (3.30) et (3.31). Le théorème 3.3 est en fait un cas particulier du théorème suivant.

Théorème 3.4. *Soient $q \ge 2$ un entier, R un entier positif, k un entier positif tel que $(k,q) = 1$, t un entier positif et ℓ un entier quelconque. Alors*

$$\left| A_q(q^R|t,\ell,k) - \frac{(k,q-1)}{k} A(q^R|t,\ell,(k,q-1)) \right| \le q^R e^{-c_{11}\frac{\log x}{\log k}}.$$

Preuve. Par le théorème 3.1, on obtient

$$A_q(q^R|t,\ell,k) = \frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1}\int_0^1 \Psi(q^R, e(s/k), e(y)) e(-s\ell/k) e(-yt)dy.$$

Posons maintenant

$$\frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1}\int_0^1 \Psi(q^R, e(s/k), e(y)) e(-s\ell/k) e(-yt)dy = \Sigma_1 + \Sigma_2, \tag{3.32}$$

$$\text{où } \Sigma_1 := \frac{1}{k} \sum_{\substack{0\le s\le k-1\\ (q-1)s\not\equiv 0 \pmod k}} \int_0^1 \Psi(q^R, e(s/k), e(y)) e(-s\ell/k) e(-yt)dy$$

$$\text{et } \Sigma_2 := \frac{1}{k} \sum_{\substack{0\le s\le k-1\\ (q-1)s\equiv 0 \pmod k}} \int_0^1 \Psi(q^R, e(s/k), e(y)) e(-s\ell/k) e(-yt)dy.$$

Commençons par borner supérieurement Σ_1. On a

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \Psi(q^R, e(s/k), e(y)) e(-s\ell/k) e(-yt)dy \right| &\le \max_y \left| \Psi(q^R, e(s/k), e(y)) e(-s\ell/k) e(-yt) \right| \\ &= \max_y \left| \Psi(q^R, e(s/k), e(y)) \right|. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Par le théorème 3.2, sous l'hypothèse $k \not| s(q-1)$, on a

$$\left| \Psi(q^R, e(s/k), e(y)) \right| \le q^R e^{-c_{11}\frac{\log x}{\log k}}. \tag{3.34}$$

De (3.33), (3.34) et de la définition de Σ_1, on déduit que

$$|\Sigma_1| \leq \frac{1}{k} \sum_{\substack{0\leq s\leq k-1 \\ (q-1)s\not\equiv 0 \pmod k}} q^R e^{-c_{11}\frac{\log x}{\log k}} < q^R e^{-c_{11}\frac{\log x}{\log k}}. \tag{3.35}$$

Étudions maintenant Σ_2. Sous l'hypothèse $k|(q-1)s$, on pose $(q-1)s = mk$, c'est-à-dire $s = \frac{mk}{q-1}$. Comme s est un entier, on doit avoir $\frac{q-1}{(k,q-1)}|m$. On peut donc écrire $m = \frac{r(q-1)}{(k,q-1)}$ pour un certain entier r, ce qui nous donne $s = \frac{rk}{(k,q-1)}$. De plus, la condition $s < k$ implique $r < (k, q-1)$. Par conséquent,

$$\Sigma_2 = \frac{1}{k} \sum_{0\leq r<(k,q-1)} \int_0^1 \Psi\left(q^R, e\left(\frac{rk/(k,q-1)}{k}\right), e(y)\right) e\left(\frac{-rk\ell/(k,q-1)}{k}\right) e(-yt)dy$$

$$= \frac{(k,q-1)}{k}\frac{1}{(k,q-1)} \sum_{0\leq r<(k,q-1)} \int_0^1 \Psi(q^R, e(r/(k,q-1)), e(y))e(-r\ell/(k,q-1))e(-yt)dy. \tag{3.36}$$

Mais il découle du théorème 3.1 que

$$\frac{1}{(k,q-1)} \sum_{0\leq r<(k,q-1)} \int_0^1 \Psi(q^R, e(r/(k,q-1)), e(y))e(-r\ell/(k,q-1))e(-yt)dy$$
$$= A_q(q^R|t, \ell, (k,q-1)). \tag{3.37}$$

En combinant les équations (3.36) et (3.37) on obtient

$$\Sigma_2 = \frac{(k,q-1)}{k} A_q(q^R|t, \ell, (k,q-1)). \tag{3.38}$$

En rapportant (3.35) et (3.38) dans (3.32) on conclut que

$$\left|A_q(q^R|t,\ell,k) - \frac{(k,q-1)}{k} A_q(q^R|t,\ell,(k,q-1))\right| \leq q^R e^{-c_{11}\frac{\log x}{\log k}},$$

ce qui complète la démonstration du théorème 3.4.

Proposition 3.10. *Soient $q \geq 2$ un entier, x un réel positif, k un entier tel que $k|q-1$ et ℓ un entier quelconque. Alors*

$$A_q(x|t,\ell,k) = \begin{cases} A_q(x|t) & \text{si } t \equiv \ell \pmod k, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Preuve. Soit R le plus petit entier tel que $q^R > x$. On a

$$n = \sum_{j=0}^{R-1} \xi_j^{(q)}(n) q^j \equiv \sum_{j=0}^{R-1} \xi_j^{(q)}(n) = s_q(n) \pmod{q-1},$$

de sorte que, si $k|q-1$, on a $s_q(n) \equiv n \pmod{k}$. Par conséquent si $t \equiv \ell \pmod{k}$ et $s_q(n) = t$ alors $n \equiv \ell \pmod{k}$.

Par ailleurs, si $t \not\equiv \ell \pmod{k}$ et $s_q(n) = t$, alors n n'est pas congru à ℓ modulo k ce qui montre que $A_q(x|t, \ell, k) = 0$ si $t \not\equiv \ell \pmod{k}$ et termine la démonstration de la proposition 3.10.

Théorème 3.5. *Soient $q \geq 2$ un entier et k un entier positif. En écrivant $k = k_1k_2$ où $(k_2, q) = 1$ et k_1 tel que $p|k_1 \Longrightarrow p|q$ et en désignant par h le plus petit entier tel que $k_1|q^h$, alors, pour tous les entiers ℓ et t,*

$$A_q(q^R|t, \ell, k) = \sum_{m=0}^{\frac{q^h}{k_1}-1} A_q\left(q^{R-h}\middle|t - s_q(mk_1 + \ell_1), (q^h)^{-1}(\ell - mk_1 - \ell_1), k_2\right),$$

où ℓ_1 est le plus petit entier non négatif tel que $\ell_1 \equiv \ell \pmod{k_1}$ et où $(q^h)^{-1}$ désigne l'inverse multiplicatif de q^h modulo k_2.

Preuve. Pour tout entier positif $n < q^R$, on écrit $n = n_1 + n_2q^h$ avec $n_1 < q^h$ et $n_2 < q^{R-h}$. Il est alors clair que $s_q(n) = s_q(n_1) + s_q(n_2)$. Comme $(k_1, k_2) = 1$, par le théorème du reste chinois, il existe deux entiers ℓ_1 et ℓ_2 tels que

$$n \equiv \ell \pmod{k} \Longleftrightarrow n \equiv \ell_1 \pmod{k_1} \text{ et } n \equiv \ell_2 \pmod{k_2}.$$

Par construction, on a

$$\begin{aligned} n \equiv \ell_1 \pmod{k_1} &\Longleftrightarrow n_1 \equiv \ell_1 \pmod{k_1} \qquad \text{et} \\ n \equiv \ell_2 \pmod{k_2} &\Longleftrightarrow n_1 + q^h n_2 \equiv \ell_2 \pmod{k_2} \\ &\Longleftrightarrow n_1 + q^h n_2 \equiv \ell \pmod{k_2}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} A_q(q^R|t, \ell, k) = \sum_{\substack{n_1 < q^h \\ n_1 \equiv \ell_1 \pmod{k_1}}} \#\{n_2 < q^{R-h} : s_q(n_2) = t - s_q(n_1), \\ n_1 + q^h n_2 \equiv \ell \pmod{k_2}\}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

En posant $n_1 = mk_1 + \ell_1$, on obtient alors

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{n_1 < q^h \\ n_1 \equiv \ell_1 \pmod{k_1}}} \#\left\{n_2 < q^{R-h} : s_q(n_2) = t - s_q(n_1), n_1 + q^h n_2 \equiv \ell \pmod{k_2})\right\} \qquad (3.40) \\ &= \sum_{m=0}^{\frac{q^h}{k_1}-1} \#\left\{n_2 < q^{R-h} : s_q(n_2) = t - s_q(mk_1 + \ell_1), mk_1 + \ell_1 + q^h n_2 \equiv \ell \pmod{k_2}\right\}, \end{aligned}$$

et le théorème 3.5 découle alors directement de (3.39) et de (3.40).

Théorème 3.6. *Soient $q \geq 2$ un entier, R, k et t trois entiers positifs et ℓ un entier tel que $t \equiv \ell \pmod{(k, q-1)}$. Alors*

$$\begin{aligned} A_1(q^R|t,\ell,k) &= \frac{(k,q-1)}{k} A_q(q^R|t)\left(1 + O(\log k \cdot R^{-1/3})\right) \\ &\quad + O(q^R e^{-c_{11}\frac{R}{\log k}}). \end{aligned}$$

Preuve. Par le théorème 3.5 on a

$$A_q(q^R|t,\ell,k) = \sum_{m=0}^{\frac{q^h}{k}-1} A_q\left(q^{R-h}\middle| t - s_q(mk_1+\ell_1), (q^h)^{-1}(\ell - mk_1 - \ell_1), k_2\right),$$

où $(q^h)^{-1}$ est l'inverse multiplicatif de q^h modulo k_2

Comme $s_q(mk_1+\ell_1) \equiv \ell_1 + mk_1 \pmod{(q-1)}$, comme $(q^h)^{-1} \equiv 1 \pmod{(q-1)}$, comme par hypothèse $t \equiv \ell \pmod{(k, q-1)}$ et comme finalement $(k_2, q-1) = (k, q-1)$, on obtient

$$t - s_q(mk_1+\ell_1) \equiv (q^h)^{-1}(\ell - mk_1 - \ell_1) \pmod{(k_2, q-1)}. \tag{3.41}$$

De (3.41), du théorème 3.4 et de la proposition 3.10, on déduit que

$$\begin{aligned} &A_q(q^{R-h}|t - s_q(mk_1+\ell_1), (q^h)^{-1}(\ell - mk_1 - \ell_1), k_2) \\ &= \frac{(k,q-1)}{k_2} A_q(q^{R-h}|t - s_q(mk_1+\ell_1)) + O\left(q^{R-h} e^{-c_{11}\frac{(R-h)}{\log k_2}}\right). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Par la proposition 1.11, on obtient que

$$\begin{aligned} &A_q(q^{R-h}|t - s_q(mk_1+\ell_1)) + O\left(q^{R-h} e^{-c_3(R-h)^{1/3}}\right) \\ &= A_q(q^{R-h}|t)\left(1 + O\left(h(R-h)^{-1/3}\right)\right). \end{aligned} \tag{3.43}$$

De (3.40), (3.42) et (3.43), on déduit que

$$\begin{aligned} &A_q(q^R|t,\ell,k) + O\left(q^{R-h} e^{-c_3(R-h)^{1/3}}\right) \\ &= \frac{(k,q-1)}{k_1k_2} q^h A_q(q^{R-h}|t)\left(1 + O\left(h(R-h)^{-1/3}\right)\right). \end{aligned} \tag{3.44}$$

Étant donné que par définition, $k_1k_2 = k$, on obtient du corollaire 1.1

$$q^h A_q(q^{R-h}|t) = A_q(q^R|t)(1 + O(h(R-h)^{-1/3})), \tag{3.45}$$

de sorte que le théorème 3.6 découle alors de (3.44), de (3.45) et du fait que par construction $h \leq \frac{\log k}{\log 2}$.

Théorème 3.7. *Soient x un réel positif, $q \geq 2$ un entier, k, ℓ et t trois entiers tels que $t \equiv \ell \pmod{(k, q-1)}$. Alors*

$$A_q(x|t,\ell,k) + O\left(xe^{-c_3(\log x)^{1/3}}\right) = \frac{(k,q-1)}{k} A_q(x|t)\left(1 + O\left(\log k(\log x)^{-1/3}\right)\right).$$

Preuve. On écrit $\lfloor x \rfloor = \xi_0^{(q)} + q\xi_1^{(q)} + \ldots + q^R \xi_R^{(q)}$ avec $0 \leq \xi_j^{(q)} \leq q-1$. Autrement dit, les $\xi_j^{(q)}$ sont les chiffres de l'écriture de $\lfloor x \rfloor$ en base q. Pour tout entier non négatif $m \leq R$, on pose

$$B_m = \xi_R^{(q)} q^R + \ldots + \xi_{R-m}^{(q)} q^{R-m}. \tag{3.46}$$

Il est clair que pour tout entier m, $B_m \leq x \leq B_m + q^{R-m}$. Par conséquent,

$$0 < A_q(x|t,\ell k) - A_q(B_m|t,\ell,k) < q^{R-m}. \tag{3.47}$$

On obtient par construction

$$A_q(B_m|t,\ell,k) = \sum_{j=1}^{\frac{B_m}{q^{R-m}}} \#\left\{n < q^{R-m} : s_q(n) = t - s_q(j), n + q^{R-m}j \equiv \ell \pmod{k}\right\}. \tag{3.48}$$

Par le théorème 3.6, on a

$$\begin{aligned}\#\{n < q^{R-m} : s_q(n) = t - s_q(j), n + q^{R-m}j \equiv \ell \pmod{k}\} + O(q^{R-m}e^{-c_3(R-m)^{1/3}}) \\ = \frac{(k,q-1)}{k} A_q(q^{R-m}|t - s_q(j))(1 + O((R-m)^{-1/3})).\end{aligned} \tag{3.49}$$

En combinant les équations (3.48) et (3.49), on obtient

$$\begin{aligned} A_q(B_m|t,\ell,k) &+ O(q^{R-m}e^{-c(R-m)^{1/3}}) \\ &= \frac{(k,q-1)}{k} \sum_{j=1}^{\frac{B_m}{q^{R-m}}} A_q(q^{R-m}|t - s_q(j))(1 + O((R-m)^{-1/3})) \\ &= \frac{(k,q-1)}{k} A_q(B_m|t)(1 + O((R-m)^{-1/3})). \end{aligned} \tag{3.50}$$

En combinant les équations (3.47) et (3.50), on déduit que

$$A_q(x|t,\ell,k) + O(q^{R-m}) = \frac{(k,q-1)}{k} A_q(x|t)(1 + O((R-m)^{-1/3})),$$

ce qui, en posant $m = \frac{R}{2}$, termine la démonstration du théorème 3.7.

3.4 La valeur asymptotique de la fonction $N_q(x)$

L'objectif de cette section est de démontrer le théorème suivant

Théorème 3.8. *Soit $q \geq 2$ un entier. Alors,*

$$N_q(x) = \left(1 + O\left((\log x)^{-1/3}\right)\right)\eta(q)\frac{x}{\log x} \qquad (x \to \infty),$$

où

$$\eta(q) := \frac{2\log q}{(q-1)^2}\sum_{k=0}^{q-2}(k, q-1).$$

Ce résultat a été obtenu par De Koninck, Doyon et Kátai [9] et indépendamment par Mauduit, Pomerance et Sárközy [19].

Preuve. Soient $q \geq 2$ un entier et x un réel positif. On pose $R := \left\lfloor \frac{\log x}{\log q} \right\rfloor$. On pose également

$$N_q(x) = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

où

$$\Sigma_1 := \sum_{t \in I} A_q(x|t, 0, t),$$

$$\Sigma_2 := \sum_{t \notin I} A_q(x|t, 0, t)$$

et où

$$I := \left[\left(\frac{q-1}{2}\right)R - R^{2/3}, \left(\frac{q-1}{2}\right)R + R^{2/3}\right].$$

Par la proposition 1.7, on obtient que

$$\Sigma_2 \leq \#\{n < q^{R-m} : s_q(n) \notin I\} < q^{R-m}e^{-c_4 R^{1/3}}. \tag{3.51}$$

D'autre part, on a également

$$\Sigma_1 = \sum_{k=0}^{q-2} \sum_{\substack{t \in I \\ t \equiv k \pmod{q-1}}} A_q(x|t, 0, t). \tag{3.52}$$

En utilisant le théorème 3.7, on obtient que

$$A_q(x|t, 0, t) = \frac{(t, q-1)}{t} A_q(x|t)(1 + O((\log x)^{-1/3})). \tag{3.53}$$

En combinant les équations (3.52) et (3.53), on déduit que

$$\Sigma_1 = \sum_{k=0}^{q-2} \sum_{\substack{t \in I \\ t \equiv k \pmod{(q-1)}}} \frac{(t, q-1)}{t} A_q(x|t)(1 + O((\log x)^{-1/3})).$$

En utilisant le fait que sous l'hypothèse $t \equiv k \pmod{(q-1)}$, $(t, q-1) = (k, q-1)$ et le fait que sous l'hypothèse $t \in I$ on a $\frac{1}{t} = \frac{2\log q}{(q-1)\log x}(1 + O((\log x)^{-1/3})$ on en déduit que

$$\Sigma_1 = \frac{2\log q}{(q-1)\log x}\sum_{k=0}^{q-2}(k, q-1) \sum_{\substack{t\in I \\ t\equiv k \pmod{(q-1)}}} A_q(x|t)(1 + O((\log x)^{-1/3})). \tag{3.54}$$

Par la proposition 1.10, on a que

$$\sum_{\substack{t\in I \\ t\equiv k \pmod{q-1}}} A_q(x|t) = \frac{x}{(q-1)} + O(x(\log x)^{-1/3}). \tag{3.55}$$

Des équations (3.54) et (3.55), il s'ensuit que

$$\Sigma_1 = \frac{2x\log q}{(q-1)^2\log x}\sum_{k=0}^{q-2}(k, q-1)(1 + O(\log x^{-1/3})), \tag{3.56}$$

et le théorème 3.8 découle alors directement de (3.51) et (3.56).

Chapitre 4

La fonction $\eta(q)$

Dans le chapitre précédent, on a montré que $N_q(x) = (1 + o(1))\eta(q)\frac{x}{\log x}$ avec

$$\eta(q) := \frac{2\log q}{q-1}\sum_{j=1}^{q-1}\frac{(j, q-1)}{q-1}.$$

L'objet de ce chapitre est l'étude du comportement moyen, normal et extrême de la fonction $\eta(q)$. Pour débuter, on pose

$$g(n) := \sum_{j=1}^{n}\frac{(j,n)}{n},$$

de sorte que $\eta(q) = \frac{2\log q}{q-1}g(q-1)$.

Proposition 4.1. *La fonction $g(n)$ est une fonction multiplicative. De plus, pour tout nombre premier p et pour tout entier $a \geq 1$,*

$$g(p^a) = 1 + a\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Preuve. Soient m et n deux entiers tels que $(m, n) = 1$. Alors, par définition,

$$g(mn) = \sum_{j=1}^{mn}\frac{(j,mn)}{mn} = \sum_{j=1}^{mn}\frac{(j,m)}{m}\frac{(j,n)}{n} = \sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{n}\sum_{\substack{1\leq j\leq mn \\ j\equiv a \pmod m \\ j\equiv b \pmod n}}\frac{(j,n)}{n}\frac{(j,m)}{m}. \tag{4.1}$$

Par le théorème du reste chinois, pour tous les entiers a et b tels que $1 \leq a \leq m$ et $1 \leq b \leq n$, il existe un unique entier j, $1 \leq j \leq mn$, tel que $j \equiv a \pmod m$ et $j \equiv b$

(mod n). Il s'ensuit que

$$\sum_{\substack{1\leq j\leq mn \\ j\equiv a \pmod m \\ j\equiv b \pmod n}} \frac{(j,n)}{n}\frac{(j,m)}{m} = \frac{(b,n)}{n}\frac{(a,m)}{m}. \tag{4.2}$$

En combinant les équations (4.1) et (4.2), on obtient que

$$g(mn) = \sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{n}\frac{(a,m)}{m}\frac{(b,n)}{n} = \sum_{a=1}^{m}\frac{(a,m)}{m}\sum_{b=1}^{n}\frac{(b,n)}{n} = g(m)g(n), \tag{4.3}$$

établissant ainsi que la fonction g est multiplicative.

Montrons maintenant que si p est un nombre premier et a un entier positif, alors $g(p^a) = 1 + a\left(1-\frac{1}{p}\right)$. Pour tout nombre premier p et pour tout entier positif a, on a que

$$\begin{aligned} g(p^a) &= \sum_{j=1}^{p^a}\frac{(j,p^a)}{p^a} \\ &= \sum_{h=0}^{a}\sum_{\substack{1\leq j\leq p^a \\ p^h \| j}}\frac{p^h}{p^a} \\ &= 1+\sum_{h=0}^{a-1}\sum_{\substack{1\leq j\leq p^a \\ p^h \| j}}\frac{p^h}{p^a} \\ &= 1+\sum_{h=0}^{a-1}(p^{a-h}-p^{a-h-1})\frac{p^h}{p^a} \\ &= 1+a\frac{p^a-p^{a-1}}{p^a} \\ &= 1+a\left(1-\frac{1}{p}\right), \end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration de la proposition 4.1.

Soit $\tau(n)$ la fonction qui compte le nombre de diviseurs de n. La fonction $\tau(n)$ est une fonction multiplicative telle que pour tout nombre premier p et pour tout entier positif a, $\tau(p^a) = a+1$. De la proposition 4.1 et de la définition de τ, on obtient que

$$g(n) < \tau(n). \tag{4.4}$$

Soit $\phi(n)$ la fonction d'Euler. La fonction ϕ est une fonction multiplicative telle que pour tout nombre premier p et pour tout entier positif a, $\phi(p^a) = (p-1)p^{a-1}$. De la proposition 4.1 et de la définition de la fonction des fonction τ et ϕ, il est clair que

$$\frac{\phi(n)}{n}\tau(n) < g(n). \tag{4.5}$$

L'ordre normal des fonctions τ et ϕ est donné par les propositions 4.2 et 4.3.

Propostion 4.2. *Pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \# \left\{ n < x : (\log x)^{\log 2 - \varepsilon} < \tau(n) < (\log x)^{\log 2 + \varepsilon} \right\} = 1.$$

La proposition 4.2 est une conséquence directe du résultat classique selon lequel l'ordre normal de $\omega(n)$ et de $\Omega(n)$ est $\log\log n$ et de l'inégalité $2^{\omega(n)} \leq \tau(n) \leq 2^{\Omega(n)}$.

Proposition 4.3

$$\lim_{M\to\infty} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \# \left\{ n < x : \frac{n}{\phi(n)} > M \right\} = 0.$$

La proposition 4.3, est une conséquence facile des résultats plus précis démontrés dans la section 4.8 du livre de Postinokov [21].

Des propositions 4.2 et 4.3 et des équations (4.4) et (4.5), on déduit le résultat suivant.

Proposition 4.4. *Pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \# \left\{ n < x : g(n) \notin \left[(\log n)^{\log 2 - \varepsilon}, (\log n)^{\log 2 + \varepsilon} \right] \right\} = 0. \tag{4.6}$$

Autrement dit, l'ordre normal de $\log(g(n))$ est $\log 2 \cdot \log\log n$. La proposition suivante découle directement de la proposition 4.4 et de la définition de la fonction $g(n)$.

Proposition 4.5. *Pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \# \left\{ n < x : \eta(n) \notin \left[\frac{1}{n} (\log n)^{\log 2 + 1 - \varepsilon}, \frac{1}{n} (\log n)^{\log 2 + 1 + \varepsilon} \right] \right\} = 0.$$

Autrement dit, l'ordre normal de $\log(n \cdot \eta(n))$ est $(1 + \log 2) \log\log n$. Les deux propositions suivantes révèlent le comportement extrême de la fonction $g(n)$.

Proposition 4.6

$$\liminf_{n\to\infty} g(n) = 2.$$

Preuve. Soit p un nombre premier, par la proposition 4.1, on a $g(p) = 2 - \frac{1}{p}$. Comme $\lim_{p\to\infty} 2 - \frac{1}{p} = 2$ on obtient $\liminf g(n) \leq 2$.

Toujours par la proposition 4.1, on a $\mu(n) = 0 \Longrightarrow g(n) \geq 2$ et $g(n) \geq \max_{p|n} g(p)$. En supposant $\mu(n) \neq 0$, on a $\lim_{n\to\infty} \max_{p|n} p = \infty$ ce qui montre que $\liminf g(n) \geq 2$ et termine la démonstration de la proposition 4.6.

Proposition 4.7

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{\log(g(n))\log\log n}{\log n}\right)=\log 2.$$

Preuve. On a d'une part,

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{\log(\tau(n))\log\log n}{\log n}\right)=\log 2. \tag{4.7}$$

Pour une démonstration de (4.7), voir le théorème 317 du livre de Hardy et Wright [15]. Le résultat classique suivant est démontré comme le théorème 328 du livre de Hardy et Wright [15],

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\phi(n)\log\log n}{n}=e^{-\gamma},$$

il en découle que

$$\frac{1}{\log\log n}\ll\frac{\phi(n)}{n}\ll 1. \tag{4.8}$$

La proposition 4.7 découle alors de (4.7), (4.8) et de l'inégalité $\frac{\phi(n)}{n}\tau(n)<g(n)<\tau(n)$.

Théorème 4.1. *On a*

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{n\cdot\eta(n)}{\log n}=4$$

et

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{\log(n\cdot\eta(n))\log\log n}{\log n}\right)=\log 2.$$

Preuve. Le théorème 4.1 découle directement des propositions 4.6 et 4.7 et de la définition de la fonction η.

Proposition 4.8. *Pour tout réel positif x,*

$$\sum_{n<x}g(n)=\lfloor x\rfloor+\sum_{2\le d<x}\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor\frac{\phi(d)}{d}.$$

Preuve. Par la définition de g on obtient la chaîne d'égalités

$$\begin{aligned}\sum_{n<x}g(n) &= \sum_{n<x}\sum_{m=1}^{n}\frac{(m,n)}{n} \qquad (4.9)\\ &= \lfloor x\rfloor+\sum_{n<x}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{(m,n)}{n}\\ &= \lfloor x\rfloor+\sum_{n<x}\sum_{\substack{2\le d\le n\\ d\mid n}}\sum_{\substack{1\le m\le n-1\\ (m,n)=n/d}}\frac{(m,n)}{n}\\ &= \lfloor x\rfloor+\sum_{2\le d<x}\sum_{\substack{n<x\\ n\equiv 0 \pmod d}}\sum_{\substack{1\le m\le n-1\\ (m,n)=n/d}}\frac{1}{d}.\end{aligned}$$

Remarquons que si $2 \le d \le n$ et $d|n$,

$$\#\{m < n : (m,n) = n/d\} = \phi(d). \tag{4.10}$$

En combinant les équations (4.9) et (4.10) on obtient que

$$\sum_{n<x} g(n) = \lfloor x \rfloor + \sum_{2 \le d < x} \sum_{\substack{n<x \\ n \equiv 0 \pmod d}} \frac{\phi(d)}{d} = x + \sum_{2 \le d < x} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor \frac{\phi(d)}{d},$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 4.8.

Proposition 4.9. *Lorsque x est un nombre réel qui tend vers l'infini,*

$$\sum_{n<x} g(n) = (1+o(1)) \frac{6}{\pi^2} x \log x.$$

Preuve. Par sommation d'Abel, on a que

$$\sum_{d<x} \frac{\phi(d)}{d^2} = \sum_{d<x} \left(\left(\sum_{m<d} \phi(m) \right) \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{(d+1)^2} \right) \right) + \frac{1}{x^2} \sum_{d<x} \phi(d). \tag{4.11}$$

L'identité classique suivante est démontrée comme le théorème 330 du livre de Hardy et Wright [15],

$$\sum_{m<d} \phi(m) = (1+o(1)) \frac{3}{\pi^2} d^2 \qquad (d \to \infty). \tag{4.12}$$

En combinant les équations (4.11) et (4.12), on obtient que,

$$\begin{aligned} \sum_{d<x} \frac{\phi(d)}{d^2} &= (1+o(1)) \sum_{d<x} \frac{3}{\pi^2} d^2 \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{(d+1)^2} \right) \\ &= (1+o(1)) \sum_{d<x} \frac{3}{\pi^2} \cdot \frac{2}{d} = (1+o(1)) \frac{6}{\pi^2} \log x \qquad (x \to \infty), \end{aligned} \tag{4.13}$$

et la proposition 4.9 découle alors directement de (4.13) et de la proposition 4.8.

Théorème 4.2.*Lorsque x est un nombre réel qui tend vers l'infini,*

$$\sum_{n<x} \eta(n) = (1+o(1)) \frac{4}{\pi^2} (\log x)^3.$$

Preuve. Par sommation d'Abel, on a que

$$\sum_{n<x} \frac{2\log n}{n-1} g(n) = \sum_{n<x} \left(\left(\sum_{m<n} g(m) \right) \left(\frac{2\log n}{n-1} - \frac{2\log(n+1)}{n} \right) \right) + \frac{2\log x}{x-1} \sum_{n<x} g(n). \tag{4.14}$$

Par la proposition 4.9, il découle de (4.14) que lorsque x tend ver l'infini, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n<x} \frac{2\log n}{n-1} g(n) &= (1+o(1)) \sum_{n<x} \frac{6}{\pi^2} n \log n \frac{2\log n}{n^2} \\
&= (1+o(1)) \frac{12}{\pi^2} \int_1^x \frac{(\log t)^2}{t} dt \\
&= (1+o(1)) \frac{4}{\pi^2} (\log x)^3,
\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration du théorème 4.2.

Chapitre 5

Les suites de nombres de Niven consécutifs

L'objet de ce chapitre est l'étude de la fonction $N_{q,r}(x)$ définie pour chaque entier $r \in [2, 2q]$ par

$$N_{q,r}(x) := \#\{n < x : s_q(n)|n, s_q(n+1)|n+1, \ldots, s_q(n+r-1)|n+r-1\}.$$

Nous allons démontrer que, lorsque x tend vers l'infini, il existe une constante positive $c_{13} = c_{13}(q, r)$ telle que

$$N_{q,r}(x) = (1 + o(1))c_{13}\frac{x}{(\log x)^r}.$$

5.1 Résultats élémentaires

La proposition suivante, presque triviale, affirme qu'il existe une infinité de paires de nombres de Niven consécutifs en base 10.

Proposition 5.1. *Il existe une infinité d'entiers n tels que $s(n)|n$ et $s(n+1)|n+1$.*

Preuve. Il suffit de considérer les nombres de la forme $n = 10^a + 11$ pour $a \geq 2$. On a alors $s(n) = 3$ et $3|n$. De plus $s(n+1) = 4$. Comme $n + 1 \equiv 12 \pmod{100}$, $4|n+1$ ce qui termine la démonstration de la proposition 5.1.

Remarque. Il découle directement de cette preuve que $N_{10,2}(x) \gg \log x$.

La proposition 5.2 fournit une borne supérieure pour le nombre de paires de nombres de Niven consécutifs en base 10 inférieurs à x. Il va de soi que cet argument peut être généralisé pour une base quelconque.

Proposition 5.2. *Lorsque x est un nombre réel qui tend vers l'infini,*

$$N_{10,2}(x) \ll \frac{x(\log\log x)^2}{(\log x)^2}.$$

Cette proposition a d'abord été obtenue par De Koninck et Doyon dans [8]. Sa démonstration ne fait pas appel aux résultats du chapitre 3.

Preuve. On écrit d'abord $N_{10,2}(x)$ sous la forme

$$N_{10,2}(x) = \sum_{j=0}^{9} \#S_j(x)$$

où

$$S_j(x) := \{n < x : s(n)|n, s(n+1)|n+1, n \equiv j \pmod{10}\}.$$

Il est clair que

$$\#S_9(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \#S_{9,h}(x) \text{ où } S_{9,h}(x) = S_9(x) \cap \{n < x : 10^h | n+1, 10^{h+1} \nmid n+1\}.$$

Attardons-nous d'abord à borner supérieurement $\#S_j(x)$ dans le cas où $j \neq 9$. En effet, dans ce cas, si $n \in S_j(x)$, on obtient $s(n+1) = s(n) + 1$. Il s'ensuit que pour tout entier positif R,

$$\begin{aligned} \#S_j(10^R) &= \sum_{1 \le t \le 9R} \#\{n < 10^R : s(n) = t, t|n, t+1|n+1, n \equiv j \pmod{10}\} \\ &\le \sum_{1 \le t \le 9R} A(10^R | t, t, t(t+1)). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Pour tout entier $n < 10^R$, on écrit $n = m_1 + 10^s m_2$ avec $m_1 < 10^s$ et $m_2 < 10^{R-s}$ où s est un entier qui sera déterminé plus tard. Il s'ensuit que $s(n) = s(m_1) + s(m_2)$. On obtient ainsi de (5.1) que

$$\#S_j(10^R) \le \sum_{1 \le t \le 9R} \sum_{m_2=0}^{10^{R-s}-1} A(10^s | s(m_1) = t - s(m_2), t - 10^s m_2, t(t+1)). \tag{5.2}$$

On pose $I := [4.5R - R^{2/3}, 4.5R + R^{2/3}]$. Par la proposition 1.7, on déduit de (5.2) que

$$\#S_j(10^R) \le \#S'_j(10^R) + 10^R e^{-cR^{1/3}}, \tag{5.3}$$

où

$$\#S'_j(10^R) := \sum_{t\in I} \sum_{m_2=0}^{10^{R-s}-1} A(10^s|t - s(m_2), t - 10^s m_2, t(t+1).$$

Comme par hypothèse, $m_1 < 10^s$, on a que $s(m_1) \leq 9s$. En inversant l'ordre de sommation, on obtient que

$$\#S'_j(10^R) = \sum_{m_2=0}^{10^{R-s}-1} \sum_{\substack{t\in I \\ s(m_2)\leq t\leq s(m_2)+9s}} A(10^s|t - s(m_2), t - 10^s m_2, t(t+1)). \qquad (5.4)$$

On voit facilement que

$$\begin{aligned} &A(10^s|t - s(m_2), t - 10^s m_2, t(t+1)) \\ &\quad \leq \#\{m_1 < 10^s : m_1 \equiv t - 10^s m_2 \pmod{t(t+1)}\} \\ &\quad < \frac{10^s}{t(t+1)} + 1. \end{aligned} \qquad (5.5)$$

En combinant les équations (5.4) et (5.5) on obtient que

$$\begin{aligned} \#S'_j(10^R) &< \sum_{m_2=0}^{10^{R-s}-1} \sum_{\substack{t\in I \\ s(m_2)\leq t\leq s(m_2)+9s}} \left(\frac{10^s}{t(t+1)} + 1\right) \qquad (5.6) \\ &< \sum_{m_2=0}^{10^{R-s}} \sum_{\substack{t\in I \\ s(m_2)\leq t\leq s(m_2)+9s}} \left(\frac{10^s}{(4R)^2} + 1\right) \\ &= \sum_{m_2=0}^{10^{R-s}} \left(\frac{9s10^s}{(4R)^2} + 9s\right) \\ &= \frac{9s10^R}{(4R)^2} + 9s10^{R-s}. \end{aligned}$$

On pose R comme le plus grand entier tel que $10^R \leq x$ et s comme le plus grand entier tel que $10^s \leq (\log x)^2$. On déduit alors de l'équation (5.6) que

$$\#S'_j(10^{R+1}) \ll \frac{\log R10^R}{R^2} \ll \frac{x \log\log x}{(\log x)^2}. \qquad (5.7)$$

En combinant les identités (5.3) et (5.7), on conclut que

$$\#S_j(x) \ll \frac{x \log\log x}{(\log x)^2}.$$

On suppose maintenant $n \equiv 9 \pmod{10}$. L'hypothèse $n \in S_{9,h}(x)$ implique que $s(n+1) = s(n) - 9h + 1$. Le système de congruences $n \equiv 0 \pmod{s(n)}$ et $n \equiv -1$

(mod $s(n) - 9h + 1$) possède une solution seulement si $(9h-1, s(n)) = 1$. De plus, si $t|n$ et $n \equiv 9 \pmod{10}$ alors $(t, 10) = 1$.

On écrit chaque entier $n \in S_{9,h}(10^R)$ sous la forme $n = 10^h m_1 + 10^{s+h} m_2 - 1$ avec $m_1 < 10^s$ et $m_2 < 10^{R-s-h}$. Par construction, $s(n) = s(m_1) + s(m_2) - 1 + 9h$. Si $h > 3 \log R$, alors $\#\{n < x : n + 1 \equiv 0 \pmod{10^h}\} \leq \frac{10^R}{10^{3 \log R}} = \frac{10^R}{R^3}$. Pour la suite, on suppose donc que $h \leq 3 \log R$. On obtient ainsi

$$S_{9,h}(10^R) \leq \sum_{\substack{1 \leq t \leq 9R \\ (10(9h-1), t) = 1}} \#\{n < 10^R : s(n) = t, t|n, t+1-9h|n+1\}. \tag{5.8}$$

Sous l'hypothèse $(t, 9h-1) = 1$, le système de congruences $n \equiv 0 \pmod{t}$ et $n \equiv -1$ (mod $t - 9h + 1$) est équivalent à $n \equiv t' \pmod{t(t+1-9h)}$ pour un certain entier positif $t' < t(t+1-9h)$. C'est pourquoi, de (5.8), on obtient que

$$S_{9,h}(10^R) \leq \sum_{\substack{1 \leq t \leq 9R \\ (t, 10(9h-1)) = 1}} \sum_{m_2 = 0}^{10^{R-h-s}-1} \tag{5.9}$$
$$\#\{10^s : s(m_1) = t - s(m_2) - 9h + 1, 10^h m_1 \equiv t' - 10^{s+h} m_2 \pmod{t(t+1-9h)}\}.$$

En interchangeant l'ordre de sommation dans (5.9), on en arrive à

$$\begin{aligned} S_{9,h}(10^R) \quad &\leq \quad \sum_{m_2=0}^{10^{R-h-s}-1} \sum_{\substack{t \in [s(m_2)+9h-1, s(m_2)+9h-1+9s] \\ (t, 10(9h-1)) = 1}} \\ &\#\{m_1 < 10^s : s(m_1) = t - s(m_2) - 9h + 1, \\ &10^h m_1 \equiv t' - 10^{s+h} m_2 \pmod{t(t+1-9h)}\}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Par ailleurs, il est clair que

$$\begin{aligned} \#\{m_1 < 10^s : s(m_1) = t - s(m_2) - 9h + 1, 10^h m_1 \equiv t' - 10^{s+h} m_2 \pmod{t(t+1-9h)}\} \\ \leq \frac{10^s 10^h}{t(t+1-9h)} + 10^h. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Comme précédement, on peut supposer $t \in I$ ce qui nous donne $t(t+1-9h) \geq (4R)^2$. En combinant les équations (5.10) et (5.11) on obtient donc

$$S_{9,h}(10^R) \leq \sum_{m_2=0}^{10^{R-h-s}-1} 9s 10^h \left(\frac{10^s}{(4R)^2} + 1 \right) = 9s \frac{10^R}{(4R)^2} + 9s \frac{10^R}{10^s}. \tag{5.12}$$

En choisissant s comme le plus petit entier tel que $10^s \geq (4R^2)$, on déduit de (5.12) que

$$S_{9,h}(10^R) \ll \log R \frac{10^R}{R^2},$$

ce qui nous permet d'établir l'inégalité

$$S_9(10^R) \ll (\log R)^2 \frac{10^R}{R^2},$$

et en posant $R := \left\lfloor \frac{\log x}{\log q} \right\rfloor$, d'établir que

$$S_9(x) \ll \frac{x(\log\log x)^2}{(\log x)^2},$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 5.2.

Les propositions 5.3 et 5.4 nous informent sur la longueur maximale d'une suite de nombres de q-Niven consécutifs.

Proposition 5.3. *Pour tout entier $q \geq 2$, il n'existe pas $2q+1$ nombres de q-Niven consécutifs.* Ce résultat a été obtenu par Grundman [14] en 1994.

Preuve. On effectue une preuve par contradiction. Supposons qu'il existe $2q+1$ nombres de q-Niven consécutifs. Soit n le plus petit de ces nombres.

Supposons d'abord $n \equiv 0 \pmod q$ et $n \not\equiv q(q-1) \pmod{q^2}$. On a alors que

$$s_q(n+1) = s_q(n) + 1, \quad \ldots \quad , s_q(n+q-1) = s_q(n) + q - 1.$$

Soit j un entier tel que $1 \leq j \leq q-1$. Comme $s_q(n) + j | n + j$ et $q \not| n + j$, il s'ensuit que $q \not| s_q(n) + j$. On obtient ainsi que

$$s_q(n) \equiv 0 \pmod q \quad \text{et} \quad s_q(n+q-1) \equiv q - 1 \pmod q.$$

Comme par hypothèse, $n \not\equiv q(q-1) \pmod{q^2}$, il s'ensuit que $s_q(n+q-1) = s_q(n+2q-2)$. Mais comme on suppose que $n+q-1$ et $n+2q-2$ sont des nombres de q-Niven, il en découle que $s_q(n+q-1)|n+q-1$, $s_q(n+q-1)|n+2q-2$ et que par conséquent $s_q(n+q-1)|q-1$. Comme $s_q(n+q-1) \equiv q-1 \pmod q$, alors $s_q(n+q-1)|q-1$ implique $s_q(n+q-1) = q-1$. C'est pourquoi $s_q(n) = s_q(n+q-1) - (q-1) = 0$, ce qui nous donne $s_q(n) = 0$, auquel cas $n = 0$. On obtient ainsi une contradiction dans le cas où $n \equiv 0 \pmod q$ et $n \not\equiv q(q-1) \pmod{q^2}$.

Supposons maintenant $n \equiv q(q-1) \pmod{q^2}$. On a dans ce cas que $s_q(n+q+1) = s_q(n+q)+1$ et que $s_q(n+2q) = s_q(n+q)+1$. Par conséquent, $s_q(n+q+1) = s_q(n+2q)$. Comme $n+q+1$ et $n+2q$ sont par hypothèse deux nombres de q-Niven, il s'ensuit que $s_q(n+q+1)|n+q+1$ et $s_q(n+q+1)|n+2q$, de sorte que

$$s_q(n+q+1)|q-1. \tag{5.13}$$

Pour tout entier j, $1 \leq j \leq q-1$, on a que $s_q(n+q+j) = s_q(n+q)+j$. On a également $q \not| n+q+j$ et $s_q(n+q)+j | q+n+j$, ce qui entraîne que $q \not| s_q(n+q)+j$. Il découle de cet argument que

$$s_q(n+q+1) = s_q(n+q)+1 \equiv 1 \pmod{q}. \tag{5.14}$$

Or, les congruences (5.13) et (5.14) impliquent que $s_q(n+q+1) = 1$. Comme $q \not| n+q+1$, on a que $n+q+1 = 1$. Cela entraîne alors que $n = -q$ ce qui est impossible. On obtient ainsi une contradiction sous l'hyptohèse $n \equiv q(q-1) \pmod{q^2}$.

Supposons donc que $n \not\equiv 0 \pmod{q}$, disons $n \equiv a \pmod{q}$ avec $1 \leq a \leq q-1$.

Considérons d'abord le cas où $n+q-a \not\equiv 0 \pmod{q^2}$. On a alors $s_q(n+(q-1)-a) = s_q(n+(2q-2)-a)$. Comme par hypothèse, $n+q-1-a$ et $n+2q-2-a$ sont des nombres de q-Niven, on obtient que $s_q(n+(q-1)-a) | n+(q-1)-a$ et que $s_q(n+(q-1)-a) | n+(2q-2)-a$. Par conséquent,

$$s_q(n+(q-1)-a) | q-1. \tag{5.15}$$

Par construction, la congruence

$$n+(q-1)-a \equiv q-1 \pmod{q} \tag{5.16}$$

est également vérifiée. Or les relations (5.15) et (5.16) impliquent que $n+(q-1)-a = q-1$ et $n = a < q$. Le fait que $2q-1$ n'est jamais un nombre de q-Niven complète la contradiction.

Le dernier cas à considérer est celui où $n \equiv a \pmod{q}$ et $n+q-a \equiv 0 \pmod{q^2}$ avec $a \neq 0$. Sous ces hypothèses, $s_q(n+q-a+1) = s_q(n+2q-a)$. Il s'ensuit que $s_q(n+q-a+1) | n+q-a+1$ et que $s_q(n+q-a+1) | n+2q-a$, ce qui implique que

$$s_q(n+q-a+1) | q-1. \tag{5.17}$$

Soit j un entier $1 \leq j \leq q-1$, alors $q \not| n+q-a+j$ et $s_q(n+q-a+j) | n+q-a+j$, de sorte que $q \not| s_q(n+q-a+j)$. Comme $s_q(n+q-a+j) = s_q(n+q-a)+j$, il s'ensuit que

$$s_q(n+q-a+1) \equiv 1 \pmod{q}. \tag{5.18}$$

Il découle alors de (5.17) et (5.18) que $s_q(n+q-a+1) = 1$. Mais étant donné que $n+q-a+1 \not\equiv 0 \pmod{q}$, cette dernière égalité implique que $n+q-a+1 = 1$, auquel cas $n < 0$. Cela complète la contradiction et du même coup la démonstration de la proposition 5.3.

Proposition 5.4. *Pour tout entier $q \geq 2$, il existe une infinité d'entiers n tels que*

$$s_q(n)|n, s_q(n+1)|n+1, \ldots, s_q(n+2q-1)|n+2q-1.$$

Ce résultat a d'abord été obtenu par Wilson [25] en 1997.

Preuve. Soient $q \geq 2$, $h \geq 0$ et $n \geq 0$ trois entiers. On considère les entiers positifs n qui peuvent s'écrire sous la forme $n = mq^h - q$ avec m un entier positif, auquel cas

$$s_q(n) = s_q(m) - 1 + (h-1)(q-1).$$

On a que, $s_q(n)|n$, $s_q(n+1)|n+1,\ldots$, $s_q(n+2q-1)$ si et seulement si

$$\begin{aligned} mq^h - q + j &\equiv 0 \pmod{s_q(m) - (h-1)(q-1) + j}, \quad j = 0, \ldots, q-1 \qquad \text{et} \\ mq^h + j &\equiv 0 \pmod{s_q(m) + j}, 0 \leq j \leq q-1. \end{aligned} \tag{5.19}$$

On constate assez facilement que le système de congruences

$$mq^h - q + j \equiv 0 \pmod{s_q(m) + (h-1)(q-1) - 1 + j}, \qquad j = 0, \ldots, q-1, \tag{5.20}$$

est équivalent à

$$mq^h - q \equiv s_q(m) - q + h(q-1) \pmod{[s_q(m) + h(q-1) - q, \ldots, s_q(m) + h(q-1) - 1]}, \tag{5.21}$$

Alors que le système de congruences

$$mq^h + j \equiv 0 \pmod{s_q(m) + j}, \qquad j = 0, \ldots, q-1, \tag{5.22}$$

est quant à lui équivalent à

$$mq^h \equiv s_q(m) \pmod{[s_q(m), \ldots, s_q(m) + q - 1]}. \tag{5.23}$$

Écrivons $q = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ où $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ sont des nombres premiers et où les α_i sont des entiers positifs. Posons $Q := \prod_{j=1}^{k} p_j^{b_j}$ où les entiers b_j sont définis implicitement par $p_j^{b_j - 1} \leq q < p_j^{b_j}$. Soit par ailleurs pour chaque entier positif h,

$$G_h^* := [(q-1)(h-1) - q, (q-1)(h-1) - q + 1, \ldots, (q-1)(h-1) + q]$$

et

$$G_h := \frac{G_h^*}{(Q, G_h^*)}.$$

Posons enfin

$$H := \prod_{\substack{\rho < q \\ \rho \\ (\rho, q) = 1}} \rho^{\delta_\rho}$$

où les ρ sont des nombres premiers et où $\delta = \delta_\rho$ est le plus grand entier positif tel que $\rho^\delta \leq q$. On choisit h comme un mulitiple de qQH et on choisit m de telle façon que $s_q(m) \equiv 1 \pmod{G_h H}$ et $s_q(m) \equiv 0 \pmod{qQ}$ ce qui est certainement possible, à la lumière du théorème du reste chinois car $(G_h H, qQ) = 1$. On obtient ainsi $Q|s_q(m) + h(q-1)$.

Le système de congruences (5.22) possède une solution si

$$s_q(m) \equiv q^h \pmod{([s_q(m), \ldots, s_q(m)+q-1], q^h)}.$$

Or, comme $Q|s_q(m)$, $([s_q(m), \ldots, s_q(m)+q-1], q^h) = (s_q(m), q^{h+1})$ ce qui entraîne que la congruence (5.22) possède une solution.

De son côté, le système de congruences (5.20) possède une solution si

$$s_q(m) + h(q-1) \equiv q^h \pmod{([s_q(m)+h(q-1)-q, \ldots, s_q(m)+h(q-1)-1], q^h)}.$$

Par ailleurs, comme $Q|s_q(m)+h(q-1)$, on a que $([s_q(m)+h(q-1)-q, \ldots, s_q(m)+h(q-1)-1], q^h)$ divise $(s_q(m)+h(q-1), q^h)$, ce qui signifie que (5.20) possède effectivement une solution.

Les sytèmes (5.20) et (5.22) possèdent une solution commune si $h(q-1)$ est un multiple de $([s_q(m), \ldots, s_q(m)+q-1], [s_q(m)+h(q-1)-q, \ldots s_q(m)+h(q-1)-1])$.

Par construction, pour toute valeur de $s_q(m)$, on a que

$$([s_q(m), \ldots, s_q(m)+q-1], [s_q(m)+h(q-1)-q, \ldots s_q(m)+h(q-1)-1])|G_h^*$$

Mais comme $s_q(m) \equiv 1 \pmod{HG_h}$, on a que le plus grand commun diviseur des quantités $[s_q(m), \ldots, s_q(m)+q-1]$ et $[s_q(m)+h(q-1)-q, \ldots s_q(m)+h(q-1)-1])$ divise Q.

Finalement, comme $Q|h$, les systèmes (5.20) et (5.22) possèdent une solution commune. Il existe donc trois entiers K_1, K_2 et K_3 avec $K_2 \equiv K_3 \pmod{(K_1, q-1)}$ tels que si $m \equiv K_1 \pmod{K_2}$ et $s_q(m) = K_3$, alors $mq^h - q$ est le premier d'une suite de $2q$ nombres de q-Niven consécutifs. On peut donc conclure qu'il existe une infinité de tels nombres m, ce qui termine la démonstration de la proposition 5.4.

Les propositions 5.5 et 5.6 sont des lemmes qui nous permettront d'étudier la valeur asymptotique de la quantité $N_{q,r}(x)$ à la section suivante.

Soient $q \geq 2$ un entier, r et $b_1, b_2, \ldots, b_r$ des entiers positifs fixés. Alors, pour chaque entier positif j, on pose

$$\chi(j) := \frac{j(j+b_1)\cdots(j+b_r)}{[j, j+b_1, \ldots, j+b_r]}.$$

Proposition 5.5. *Soient m et n deux entiers positifs. Alors*

$$n \equiv m \pmod{[(b_1-b_2), (b_1, b_3), \ldots, (b_r - b_{r-1})]} \Longrightarrow \chi(n) = \chi(m).$$

(Le plus petit commun multiple est pris sur l'ensemble des différences non nulles $b_{j_1} - b_{j_2}$).

Preuve. On effectue la preuve par induction sur r. Supposons d'abord que $r = 1$. Par la définition de χ et par l'hypothèse $n \equiv m \pmod{b_1}$, on obtient que

$$\chi(m) = \frac{m(m+b_1)}{[m, m+b_1]} = (m, b_1) = (n, b_1) = \chi(n).$$

Pour poursuivre l'induction, on fera appel à l'identité

$$\begin{aligned} [n, n+b_1, \ldots, n+b_r] &= [[n, n+b_1, \ldots, n+b_{r-1}], n+b_r] \\ &= \frac{[n, n+b_1, \ldots, n+b_{r-1}](n+b_r)}{([n, n+b_1, \ldots, n+b_{r-1}], n+b_r)}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Observons aussi que

$$\begin{aligned} &([n, n+b_1, \ldots, n+b_{r-1}], n+b_r) \\ &\qquad = [(n, n+b_r), (n+b_1, n+b_r), \ldots, (n+b_{r-1}, n+b_r)]. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Comme par hypothèse, $n \equiv m \pmod{[(b_1-b_2), \ldots, (b_1-b_r)]}$, il s'ensuit que

$$(n+b_j, n+b_r) = (m+b_j, m+b_r), \quad j = 0, \ldots r-1. \tag{5.26}$$

En combinant les équations (5.25) et (5.26), on obtient que

$$([n, n+b_1, \ldots, n+b_{r-1}], n+b_r) = ([m, m+b_1, \ldots, m+b_{r-1}], m+b_r). \tag{5.27}$$

Par l'hypothèse d'induction, on a que

$$\frac{n(n+b_1)\ldots(n+b_{r-1})}{[n, n+b_1, \ldots, n+b_{r-1}]} = \frac{m(m+b_1)\cdots(m+b_{r-1})}{[m, m+b_1, \ldots, m+b_{r-1}]}. \tag{5.28}$$

Nous voici prêts à compléter la démonstration de la proposition 5.5. Par définition,

$$\chi(n) := \frac{n(n+b_1)\cdots(n+b_r)}{[n, n+b_1, \ldots, n+b_r]}. \tag{5.29}$$

Or, il découle de (5.24) que

$$\begin{aligned}\chi(n) &= \frac{n(n+b_1)\cdots(n+b_r)([n,n+b_1,\ldots,n+b_{r-1}],n+b_r)}{[n,n+b_1,\ldots,n+b_{r-1}](n+b_r)} \\ &= \frac{n(n+b_1)\cdots(n+b_{r-1})([n,n+b_1,\ldots,n+b_{r-1}],n+b_r)}{[n,n+b_1,\ldots,n+b_{r-1}]}.\end{aligned} \tag{5.30}$$

En utilisant les équations (5.27) et (5.28) dans (5.30), on obtient que

$$\begin{aligned}\chi(n) &= \frac{m(m+b_1)\cdots(m+b_{r-1})([m,m+b_1,\ldots,m+b_{r-1}],m+b_r)}{[m,m+b_1,\ldots,m+b_{r-1}]} \\ &= \frac{m(m+b_1)\cdots(m+b_r)}{[m,m+b_1,\ldots,m+b_r]} = \chi(m),\end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration de la proposition 5.5.

Proposition 5.6. *Pour tout entier positif m et tout entier positif r,*

$$\frac{m(m+b_1)\cdots(m+b_r)}{[m,m+b_1,\ldots,m+b_r]} \le h^{r^2},$$

où h est la valeur maximale des différences $b_j - b_\ell$.

Preuve. Encore une fois, on effectue la preuve par induction sur r. Pour $r = 1$, on a que

$$\frac{m(m+b_1)}{[m,m+b_1]} = (m,m+b_1) \le b_1 = h.$$

On suppose maintenant que $r \ge 2$. D'abord il est clair que le quotient

$$\frac{m(m+b_1)\cdots(m+b_r)}{[m,m+b_1,\ldots,m+b_r]}$$

peut s'écrire sous la forme

$$\frac{m(m+b_1)\cdots(m+b_{r-1})([m,m+b_1,\ldots,m+b_{r-1}],m+b_r)}{[m,m+b_1,\ldots,m+b_{r-1}]}.$$

C'est pourquoi, par l'hypothèse d'induction,

$$\frac{m(m+b_1)\cdots(m+b_r)}{[m,m+b_1,\ldots,m+b_r]} \le h^{(r-1)^2}([m,m+b_1,\ldots,m+b_{r-1}],m+b_r). \tag{5.31}$$

En utilisant le fait que $([m,m+b_1,\ldots,m+b_r],m+b_r) = [(b_r-b_1),\ldots,(b_r-b_{r-q})] \le h^r$, on déduit de (5.31) que

$$\frac{m(m+b_1)\cdots(m+b_r)}{[m,m+b_1,\ldots,m+b_r]} \le h^{(r-1)^2}h^r \le h^{r^2},$$

ce qui complète la démonstration de la proposition 5.6.

5.2 Le comportement asymptotique de la fonction $N_{q,r}(x)$

L'objectif de cette section est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 5.1. *Soient $q \geq 2$ un entier et r un entier, $1 \leq r \leq 2q$. Alors il existe une constante positive $c_{13}(q, r)$ telle que,*

$$N_{q,r}(x) = (1 + o(1))c_{13}(q, r)\frac{x}{(\log x)^r} \quad (x \to \infty).$$

On prouve le théorème 5.1 en utilisant les propositions 5.5 et 5.6 ainsi que certains résultats du chapitre 3.

Dorénavant, pour chaque entier $a \in [0, q-1]$, on pose

$$N_{q,r,a}(x) := \#\{n < x : n \equiv a \pmod q, s_q(n)|n, \ldots, s_q(n+r-1)|n+r-1\}.$$

On démontre d'abord la proposition suivante.

Proposition 5.7. *Soient $q \geq 2$ un entier, $r \in [1, q]$ un entier et $a \in [0, q-r]$ un entier. Alors il existe une constante positive $c_{14}(r, a, q)$ telle que,*

$$N_{q,r,a}(x) = (1 + o(1))c_{14}(r, a, q)\frac{x}{(\log x)^r} \quad (x \to \infty).$$

Preuve. Sous l'hypothèse $n \equiv a \pmod q$ et $0 \leq a \leq q - r$, on a $s_q(n+1) = s_q(n) + 1$, $s_q(n+2) = s_q(n) + 2$,..., $s_q(n+r-1) = s_q(n) + r - 1$. C'est pourquoi, d'entrée de jeu, on peut affirmer que le système de congruences

$$\begin{aligned} n &\equiv 0 \pmod{s_q(n)}, \\ n &\equiv -1 \pmod{s_q(n+1)} \\ &\vdots \\ n &\equiv -r+1 \pmod{s_q(n+r-1)}, \end{aligned}$$

est équivalent à $n \equiv s_q(n) \pmod{[s_q(n), s_q(n)+1, \ldots, s_q(n)+r-1]}$.

Comme précédemment, posons $R := \left\lfloor \frac{\log x}{\log q} \right\rfloor$, ce qui nous permet d'écrire que

$$N_{q,r,a}(x) = \sum_{1 \leq t \leq (q-1)R} \#E_t. \tag{5.32}$$

où $E_t = E_t(q,r,a,x)$ désigne l'ensemble des entiers positifs $n < x$ tels que $n \equiv a \pmod q$, $n \equiv t \pmod{[t,t+1,\ldots,t+r-1]}$ et $s_q(n) = t$. Mais le système de congruences

$$\begin{aligned} n &\equiv t \pmod{[t,t+1,\ldots,t+r-1]}, \\ n &\equiv a \pmod q \end{aligned}$$

possède une solution si et seulement si $t \equiv a \pmod{([t,t+1,\ldots,t+r-1],q)}$. De plus, dans ce cas, la solution est unique modulo $[t,t+1,\ldots,t+r-1,q]$, auquel cas on désignera cette solution par $B = B(t,a)$. On obtient ainsi de (5.32) que

$$N_{q,r,a}(x) = \sum A_q(x|t, B, [t,t+1,\ldots,t+r-1,q]), \tag{5.33}$$

où la somme parcourt les entiers positifs $t \le (q-1)R$ tels que $t \equiv a \pmod{([t,t+1,\ldots,t+r-1],q)}$.

Comme par construction $B \equiv A \pmod{([t,t+1,\ldots,t+r-1],q-1)}$, on obtient du théorème 3.7 que chaque terme de la sommation de (5.33) vaut

$$\frac{([t,t+1,\ldots,t+r-1],q-1)}{[t,t+1,\ldots,t+r-1,q]} A_q(x|t)(1+O((\log R)R^{-1/3})). \tag{5.34}$$

En posant $I := [\frac{q-1}{2}R - R^{2/3}, \frac{q-1}{2}R + R^{2/3}]$, on déduit de la proposition 1.7 et des équations (5.33) et (5.34) que

$$N_{q,r,a}(x) = \sum_{t\in I} \frac{([t,t+1,\ldots,t+r-1],q-1)}{[t,t+1,\ldots,t+r-1,q]} A_q(x,t)(1+O(R^{-1/3})). \tag{5.35}$$

où la somme parcourt les entiers $t \in I$ tels que $t \equiv a \pmod{([t,t+1,\ldots,t+r-1],q)}$. Soit maintenant $\Lambda := [q,q-1,2,3,\ldots,r-1]$. De la proposition 5.6 et de l'équation (5.35), il découle que

$$N_{q,r,a}(x) = \sum_{\substack{1\le\gamma\le\Lambda \\ \gamma\equiv a \pmod{([\gamma,\gamma+1,\ldots,\gamma+r-1],q)}}} \sum_{\substack{t\in I \\ t\equiv\gamma \pmod\Lambda}} \tilde{Q} \times A_q(x|t)\left(1+O\left(R^{-1/3}\right)\right) \tag{5.36}$$

où

$$\tilde{Q} := \frac{([\gamma,\gamma+1,\ldots,\gamma+r-1],q-1)}{t(t+1)\cdots(t+r)q} \frac{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+r-1)q}{[\gamma,\gamma+1,\ldots,\gamma+r-1,q]}.$$

Voilà qui nous donne

$$\begin{aligned} N_{q,r,a}(x) &= \left(\frac{2}{(q-1)R}\right)^r \\ &\quad \sum_{\substack{1\le\gamma\le\Lambda \\ \gamma\equiv a \pmod{([\gamma,\gamma+1,\ldots,\gamma+r-1],q)}}} \frac{([\gamma,\gamma+1,\ldots,\gamma+r-1],q-1)\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+r-1)q}{[\gamma,\gamma+1,\ldots,\gamma+r-1,q]} \\ &\quad \times \sum_{\substack{t\in I \\ t\equiv\gamma \pmod\Lambda}} A_q(x|t)(1+O(R^{-1/3})). \end{aligned} \tag{5.37}$$

En faisant appel à la proposition 1.10, il est clair que

$$\sum_{\substack{t \in I \\ t \equiv \gamma \pmod{\Lambda}}} A_q(x|t) = \frac{x}{\Lambda}(1 + O(R^{-1/3})). \tag{5.38}$$

Ainsi, en combinant les équations (5.37) et (5.38) et en utilisant la définition de R, on obtient que

$$\begin{aligned} N_{q,r,a}(x) &= (1 + O((\log x)^{-1/3})) \left(\frac{2\log q}{(q-1)\log x}\right)^r \frac{x}{\Lambda} \qquad (5.39) \\ &\times \sum_{\substack{1 \le \gamma \le \Lambda \\ \gamma \equiv a \pmod{([\gamma,\gamma+1,\ldots,\gamma+r],q)}}} \frac{([\gamma,\gamma+1,\ldots,\gamma+r],q-1)\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+r)q}{[\gamma,\gamma+1,\ldots,\gamma+r,q]}. \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 5.7 avec

$$\begin{aligned} c(q,a,r) &= \left(\frac{2\log q}{q-1}\right)^r \frac{1}{\Lambda} \sum_{\substack{1 \le \gamma \le \Lambda \\ \gamma \equiv a \pmod{([\gamma,\gamma+1,\ldots,\gamma+r],q)}}} \\ &\qquad \frac{([\gamma,\gamma+1,\ldots,\gamma+r],q-1)\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+r)q}{[\gamma,\gamma+1,\ldots,\gamma+r,q]}. \end{aligned}$$

Remarque. Il découle de la proposition 5.4 que cette constante est strictement positive.

Pour $r \in [2, 2q]$ et $a \in [\max(0, q-r+1), 2q-r]$, on pose pour chaque entier $h \ge 1$,

$$\begin{aligned} N_{q,r,a,h}(x) := \#\Big\{ &n < x : s_q(n)|n, \ldots, s_q(n+r)|n+r, n \equiv a \pmod{q}, \\ &q^h|n+q-a, q^{h+1} \nmid n+q-a \Big\}. \end{aligned}$$

Proposition 5.8. *Soient $q \ge 2$ un entier, $r \in [2, 2q]$ un entier, $a \in [\max(0, q-r+1), 2q-r]$ un entier et h un entier positif. Alors il existe une constante non négative $c_{15} = c_{15}(q, r, a, h)$ telle que*

$$N_{q,r,a,h}(x) = (1 + o(1))c_{15}\frac{x}{(\log x)^r} \quad (x \to \infty).$$

Preuve. Sous les hypothèses $q^h|n+q-a$ et $q^{h+1} \nmid n+q-a$, on a que

$$\begin{aligned} s_q(n) &= s_q(n) + 1, \\ &\vdots \\ s_q(n+q-a-1) &= s_q(n) + q - a - 1, \\ s_q(n+q-a) &= s_q(n) + q - a - (q-1)h, \\ s_q(n+q-a+1) &= s_q(n) + q - a + 1 - (q-1)h, \\ &\vdots \\ s_q(n+r-1) &= s_q(n) + r - 1 - (q-1)h. \end{aligned}$$

Il s'ensuit donc que

$$\begin{aligned}
N_{q,r,a,h}(x) \quad = \quad & \sum_{1\le t\le (q-1)R} \#\Big\{ n<x : s_q(n)=t, q^h | n+q-a, q^{h+1} \nmid n+q-a, \\
& n \equiv 0 \pmod{t}, \ldots, \\
& n \equiv -q+a \pmod{t+q-a-(q-1)h}, \ldots, \\
& n \equiv -r+1 \pmod{t+r-1-(q-1)h} \Big\}.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

On constate aussi aisément que le système de congruences

$$\begin{aligned}
n &\equiv 0 \pmod{t}, \\
n &\equiv -1 \pmod{t+1}, \\
&\vdots \\
n &\equiv -q+a+1 \pmod{t-a+q-1}
\end{aligned} \tag{5.41}$$

est équivalent à $n \equiv t \pmod{[t, t+1, \ldots, t-a+q-1]}$, alors que le système de congruences

$$\begin{aligned}
n &\equiv -q+a \pmod{t+q-a-(q-1)h}, \\
&\vdots \\
n &\equiv -q+a+1 \pmod{t+q-a-(q-1)h+1}, \\
n &\equiv -r+1 \pmod{t+r-1-(q-1)h}
\end{aligned} \tag{5.42}$$

est quant à lui équivalent à $n \equiv t-(q-1)h \pmod{[t+q-a-(q-1)h, t+1+q-a-(q-1)h+1, \ldots, t+r-1-(q-1)h]}$. En combinant les équations (5.40), (5.41) et (5.42) on obtient donc que

$$\begin{aligned}
N_{q,r,a,h} \quad = \quad & \sum_{1\le t\le (q-1)R} \#\Big\{ n<x : s_q(n)=t, q^h | n+q-a, \\
& q^{h+1} \nmid n+q-a, n \equiv t \pmod{[t, t+1, \ldots, t-a+q-1]}, \\
& n \equiv t-(q-1)h \pmod{[t+q-a-(q-1)h}, \\
& t+1+q-a-(q-1)h+1, \ldots, t+r-1-(q-1)h]) \Big\}.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Observons par ailleurs que le système de congruences

$$\begin{aligned}
& n \equiv t \pmod{[t, t+1, \ldots, t-a+q-1]} \\
& n \equiv t-(q-1)h \pmod{[t+q-a-(q-1)h, \ldots, t+r-(q-1)h]}
\end{aligned} \tag{5.44}$$

possède une solution si et seulement si le pgcd de $[t, t+1, \ldots, t-a+q-1]$ et de $[t+q-a-(q-1)h, \ldots, t+r-1-(q-1)h]$ divise $(q-1)h$. Dans ce cas, il existe un entier D tel que n est une solution du système de congruences (5.44) si et seulement si

$$n \equiv D \pmod{F} \tag{5.45}$$

où $F := [t, t+1, \ldots, t-a+q-1, t+q-a-(q-1)h, t+1+q-a-(q-1)h+1, \ldots, t+r-1-(q-1)h]$. On obtient donc

$$\begin{aligned} N_{q,r,a,h}(x) &= \sum_{j=1}^{q-1} \sum_{\substack{1\leq t\leq (q-1)R \\ h(q-1)\equiv 0 \pmod{([t,\ldots,t-a+q-1],[t+q-a-(q-1)h,\ldots,t+r-(q-1)h])}}} \\ &\qquad \#\Big\{ n < x : s_q(n) = t, n \equiv jq^h - q + a \pmod{q^{h+1}}, \\ &\qquad n \equiv D \pmod{F} \Big\} \end{aligned} \tag{5.46}$$

Mais le système de congruences

$$\begin{aligned} n &\equiv jq^h - q + a \pmod{q^{h+1}} \\ n &\equiv D \pmod{F} \end{aligned} \tag{5.47}$$

possède quant à lui une solution si et seulement si

$$D \equiv jq^h - q + a \pmod{(F, q^{h+1})}.$$

Dans ce cas, il existe un entier $\tilde{D}$ tel que le système de congruences (5.48) est satisfait si et seulement si

$$n \equiv \tilde{D} \pmod{[F, q^{h+1}]}$$

En définissant la quantité Λ par

$$\Lambda := [q^{h+1}, (q-1), F].$$

Il découle de l'équation (5.46) que,

$$\begin{aligned} N_{q,r,a,h}(x) &= \sum_{j=1}^{q-1} \sum_{\substack{1\leq\gamma\leq\Lambda \\ h(q-1)\equiv 0 \pmod{([\gamma,\ldots,\gamma-a+q-1],[\gamma+q-a-(q-1)h\ldots,\gamma+r-(q-1)h])} \\ D\equiv jq^h-q+a \pmod{([\gamma,\ldots,\gamma-a+q-1,\gamma+q-a-(q-1)h,\ldots\gamma+r-(q-1)h],q^{h+1})}}} \\ &\qquad \sum_{\substack{1\leq t\leq (q-1)R \\ t\equiv\gamma \pmod{\Lambda}}} A_q(x|t, \tilde{D}, [F, q^{h+1}]) \end{aligned} \tag{5.48}$$

De plus, par le théorème 3.7, on a que

$$A_q(x|A, \tilde{D}, [F, q^{h+1}]) = \frac{(F, q-1)}{[F, q^{h+1}]} A_q(x|A) \left(1 + O\left((\log x)^{-1/3}\right)\right). \tag{5.49}$$

Par ailleurs, par la proposition 5.5, sous l'hypothèse $A \equiv \gamma \pmod{\Lambda}$, on obtient que

$$\begin{aligned} [F, q^{h+1}] &= t(t+1)\cdots(t+q-a-1)(t-(h-1)(q-1)+q-a) \times \cdots \\ &\qquad \times (t-(h-1)(q-1)+r-1)q^{h+1}\frac{1}{f(\gamma)} \end{aligned} \tag{5.50}$$

où

$$f(\gamma) := \frac{\gamma \cdots (\gamma + q - a - 1)(\gamma - (h-1)(q-1) + q - a) \cdots (\gamma - (h-1)(q-1) + r - 1) q^{h+1}}{[\gamma, \ldots, \gamma + q - a - 1, \gamma - (h-1)(q-1) + q - a, \ldots, \gamma - (h-1)(q-1) + r - 1, q^{h+1}]}.$$

Comme précédemment, on peut supposer $t \in I$ avec $I := [\frac{q-1}{2}R - R^{2/3}, \frac{q-1}{2} + R^{2/3}]$. Pour simplifier la notaion, on définit l'ensemble $\mathcal{K}$ de la façon suivante

$$\begin{aligned}\mathcal{K} : \; = \; & \{1 \leq \gamma \leq \Lambda : h(q-1) \equiv 0 \\ & \pmod{([\gamma, \ldots, \gamma - a + q - 1], [\gamma + q - a - (q-1)h \ldots, \gamma + r - (q-1)h])} \\ & \text{et } D \equiv jq^h - q + a \pmod{([\gamma, \ldots, \gamma - a + q - 1, \gamma + q - a - (q-1)h,} \\ & \ldots, \gamma + r - (q-1)h], q^{h+1}))\}\end{aligned}$$

ainsi que la quantité W de la façon suivante

$$W := ([\gamma, \ldots, \gamma + q - a - 1, \gamma + q - a - (q-1)(h-1), \ldots, \gamma + r - (h-1)(q-1)], q-1).$$

En combinant les équations (5.48), (5.49) et (5.50) on obtient,

$$N_{q,r,a,h}(x) = \left(1 + O\left((\log x)^{-1/3}\right)\right) \left(\frac{2}{(q-1)R}\right)^r \sum_{j=1}^{q-2} \sum_{\gamma \in \mathcal{K}} f(\gamma) W \sum_{\substack{t \in I \\ t \equiv \gamma \pmod{\Lambda}}} A_q(x|t). \tag{5.51}$$

De la proposition 1.10, on obtient que,

$$\sum_{\substack{t \in I \\ t \equiv \gamma \pmod{\Lambda}}} A_q(x|t) = (1 + O((\log x)^{-1/3})) \frac{x}{\Lambda}. \tag{5.52}$$

En combinant les équations (5.51) et (5.52), on obtient que

$$N_{q,r,a,h}(x) = \left(1 + O\left((\log x)^{-1/3}\right)\right) x \left(\frac{2 \log q}{(q-1)R}\right)^r \frac{1}{\Lambda} \sum_{j=1}^{q-2} \sum_{\gamma \in \mathcal{K}} f(\gamma) W \tag{5.53}$$

Voilà qui complète la démonstration de la proposition 5.8 avec

$$c_{15}(q, r, a, h) = \left(\frac{2 \log q}{q-1}\right)^r \frac{1}{10^h \Lambda} \sum_{j=1}^{q-2} \sum_{\gamma \in \mathcal{K}} f(\gamma) W. \tag{5.54}$$

Proposition 5.9. *Soient $q \geq 2$ un entier, r un entier tel que $r \geq 2$ et a un entier tel que $0 \leq a \leq \min(q-1, 2q-r)$. Alors*

$$\sum_{h=2}^{\infty} c_{15}(q, r, a, h) < \infty.$$

Preuve. De l'équation (5.54), il est clair que

$$c_{15}(q,r,a,h) \leq \left(\frac{2\log q}{q-1}\right)^r \frac{q-1}{10^h\Lambda}\sum_{\gamma=1}^{\Lambda} f(\gamma). \tag{5.55}$$

De la définition de $f(\gamma)$, on a que

$$\begin{aligned} f(\gamma) &= \frac{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+q-a-1)(\gamma+q-a-(h-1)(q-1))\cdots(\gamma+r-(h-1)(q-1))}{[\gamma,\gamma+1,\ldots,\gamma+q-a-1,\gamma+q-a-(h-1)(q-1),\ldots,\gamma+r-(h-1)(q-1)]} \qquad (5.56)\\ &\quad \times([\gamma,\gamma+1,\ldots,\gamma+q-a-1,\gamma+q-a-(h-1)(q-1),\ldots,\gamma+r-(h-1)(q-1)],q^h). \end{aligned}$$

De (5.56) et de la proposition 5.6, on obtient que

$$\begin{aligned} f(\gamma) &\leq (2qh)^{r^2}([\gamma,\gamma+1,\ldots,\gamma+q-a-1,\gamma+q-a-(h-1)(q-1), \qquad (5.57)\\ &\quad \ldots,\gamma+r-(h-1)(q-1)],q^h). \end{aligned}$$

De l'inégalité (5.57), on déduit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Lambda}\sum_{\gamma=1}^{\Lambda} f(\gamma) &\leq (2qh)^{r^2}\frac{1}{q^h}\sum_{\gamma=1}^{q^h}([\gamma,\gamma+1,\ldots,\gamma+q-a-1, \qquad (5.58)\\ &\qquad \gamma+q-a-(h-1)(q-1),\ldots,\gamma+r-(h-1)(q-1)],q^h)\\ &\leq (2qh)^{r^2}\frac{1}{q^h}\sum_{\substack{\alpha<q^h\\ p\mid\alpha\Rightarrow p\mid q}}\ \sum_{\substack{1\leq\gamma\leq q^h\\ g(\gamma)=\alpha}}\alpha, \end{aligned}$$

où

$$g(\gamma) := ([\gamma,\gamma+1,\ldots,\gamma+q-a-1,\gamma+q-a-(h-1)(q-1),\ldots,\gamma+r-(h-1)(q-1)],q^h).$$

On a par ailleurs les inégalités

$$\sum_{\substack{1\leq\gamma\leq q^h\\ g(\gamma)=\alpha}}\alpha \leq \sum_{\substack{1\leq\gamma\leq q^h\\ (\gamma,q^h)=\alpha}} r\alpha \leq rq^h. \tag{5.59}$$

En combinant les inégalités (5.58) et (5.59), on obtient que

$$\frac{1}{\Lambda}\sum_{\gamma=1}^{\Lambda} f(\gamma) \leq (2qh)^{r^2} r \sum_{\substack{\alpha<q^h\\ p\mid\alpha\Rightarrow p\mid q}} 1 \leq r(2qh)^{r^2}h^q. \tag{5.60}$$

Enfin, en combinant les inégalités (5.55) et (5.60), la démonstration de la proposition 5.9 est complète.

Proposition 5.10. *Soient $q\geq 2$ un entier, r un entier supérieur ou égal q et a un entier tel que $2q-r\leq a\leq q-1$. Alors, pour tout nombre réel x,*

$$N_{q,r,a}(x)=0.$$

Preuve. La démonstration de la proposition 5.10 est semblable à celle de la proposition 5.4. En supposant $n \equiv a \pmod q$, on a $q \| n+q-a$ ou $q \| n+2q-a$.

Supposons d'abord $q \| n+q-a$. On a alors que $s_q(n+q-a-1) = s_q(n+2q-a-2)$. Sous l'hypothèse que $n+q-a-1$ et $n+2q-a-2$ sont des nombres de q-Niven, on obtient que $s_q(n+q-a-1) | n+q-a-1$ et $s_q(n+q-a-1) | n+2q-a-2$, auquel cas il s'ensuit que $s_q(n+q-a-1) | q-1$. Étant donné que $n+q-a-1 \equiv q-1 \pmod q$, on en déduit $n+q-a-1 = q-1$. Mais comme $2q-1$ n'est jamais un nombre de q-Niven, on obtient une contradiction.

Supposons maintenant $q \| n+2q-a$. On a alors que $s_q(n+q-a+1) = s_q(n+2q-a)$. Sous l'hypothèse que $n+q-a+1$ et $n+2q-a$ sont des nombres de q-Niven on a que $s_q(n+q-a+1) | n+q-a+1$ et $s_q(n+q-a+1) | n+2q-a$. Il s'ensuit que $s_q(n+q-a+1) | q-1$. De plus, $s_q(n+q-a+1) \equiv 1 \pmod q$. C'est pourquoi, $s_q(n+q-a+1) = 1$, ce qui implique $n+q-a+1 = 1$ et $n+q-a = 0$ ce qui est une contradiction et termine la démonstration de la proposition 5.10.

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 5.1. *Soient q un entier $q \geq 2$ et r un entier $1 < r < 2q$. Alors il existe une constante positive $c_{13}(q,r)$, telle que,*

$$N_{q,r}(x) = (1+o(1))c_{13}(q,r)\frac{x}{(\log x)^r} \qquad (x \to \infty).$$

Preuve. Supposons d'abord $r < q$, on écrit alors,

$$N_{q,r}(x) = \Sigma_1(x) + \Sigma_2(x), \tag{5.61}$$

où $\Sigma_1(x) = \sum_{a=0}^{q-r-1} N_{q,a,r}(x)$ et $\Sigma_2(x) = \sum_{a=q-r}^{q-1} N_{q,a,r}(x)$. Par la proposition 5.7, on a que

$$\Sigma_1(x) = \sum_{a=0}^{q-r-1} N_{q,a,r}(x) = (1+o(1)) \sum_{a=0}^{q-r-1} c_{14}(q,a,r)\frac{x}{(\log x)^r} = (1+o(1))c_{16}(q,r)\frac{x}{(\log x)^r}, \tag{5.62}$$

où $c_{16}(q,r) = \sum_{a=0}^{q-r-1} c_{14}(q,a,r)$. Par la proposition 5.8, on a également

$$\begin{aligned} \Sigma_2(x) &= \sum_{a=q-r}^{q-1} N_{q,a,r}(x) \qquad (5.63)\\ &= \sum_{a=q-r}^{q-1} \sum_{h=1}^{(\log\log x)^2} N_{q,r,a,h}(x) + O\left(\frac{x}{q^{(\log\log x)^2}}\right)\\ &= (1+o(1))\frac{x}{(\log x)^r} \sum_{a=q-r}^{q-1} \sum_{h=1}^{(\log\log x)^2} c_{15}(q,r,a,h). \end{aligned}$$

De (5.63) et de la proposition 5.9, on obtient que

$$\Sigma_2(x) = (1 + o(1))c_{17}(q, r)\frac{x}{(\log x)^r}, \tag{5.64}$$

où $c_{17} = \sum_{a=q-r}^{q-1} \sum_{h=1}^{\infty} c_{15}(q, r, a, h)$.

On complète la démonstration du théorème 5.1 en combinant les équations (5.61), (5.62) et (5.64).

Chapitre 6

Résultats numériques

Dans ce chapitre, on compare les résultats obtenus dans les chapitres précédents aux valeurs numériques obtenues à l'aide du logiciel Maple 9.5.

Le tableau suivant donne la valeur de $N_q(x)$ pour différentes valeurs de x et pour $q = 2, 3, 10, 54$. Remarquons que pour toutes les valeurs de x dans ce tableau, $N_{54}(x) < N_{10}(x) < N_2(x) < N_3(x)$, ce qui est cohérent avec le fait que $\eta(54) < \eta(10) < \eta(2) < \eta(3)$.

x	$N_{10}(x)$	$N_2(x)$	$N_3(x)$	$N_{54}(x)$
1000	213	229	315	88
5000	899	961	1216	243
10000	1538	1764	1969	465
20000	2954	3179	2920	864
50000	6752	7099	9037	1937
100000	11872	13473	16958	3391
200000	23083	25401	31771	6258
500000	53240	59509	73195	14547
1000000	95428	113567	138066	28266
2000000	186561	216781	249574	53604
5000000	438795	513567	597656	118434
10000000	806095	975981	1213818	219683
100000000	6954793	8166390		

Le tableau suivant donne la valeur de la fonction $\eta(q)$ pour $2 \leq q \leq 94$. Notons que pour $q \leq 94$, la fonction $\eta(q)$ prend sa valeur maximale lorsque $q = 3$. De plus, en vertu des résultats du chapitre 4, pour tout $q > 94$ on obtient également $\eta(q) > \eta(3)$.

q	$\eta(q)$	q	$\eta(q)$	q	$\eta(q)$	q	$\eta(q)$
2	1.386294361	26	0.6776840800	49	0.8107958954	72	0.2392421831
3	1.647918434	27	0.7313247488	50	0.4334019657	73	0.6952133353
4	1.540327068	28	0.7404898911	51	0.6133647986	74	0.2342238463
6	1.609437912	29	0.8922641996	52	0.5013111986	75	0.3453359742
7	1.621591791	30	0.4610422134	53	0.5873212888	76	0.5004402971
8	1.103377145	31	1.030196161	54	0.2982152545	77	0.4452099739
9	1.373265361	32	0.4399789597	55	0.6678888643	78	0.4012081327
10	1.193933011	33	0.7648610291	56	0.5030026244	79	0.5386400212
11	1.294863447	34	0.6800144264	57	0.6704039091	80	0.2204704957
12	0.8625295808	35	0.6089610000	58	0.4624080991	81	0.5932506360
13	1.424971865	36	0.6845252503	59	0.4145415593	82	0.3989622362
14	0.7807861923	37	0.9361639033	60	0.2752302866	83	0.3193867543
15	1.0776923448	38	0.3879383341	61	0.8221757728	84	0.2122469942
16	1.109035489	39	0.5632345466	62	0.2684134698	85	0.6548125437
17	1.062455004	40	0.6063246964	63	0.3944816103	86	0.3662120820
18	0.6600848994	41	0.8355537152	64	0.5721214824	87	0.3079520200
19	1.145059603	42	0.3602037346	65	0.5217984088	88	0.3371755825
20	0.6140836242	43	0.8315578486	66	0.4462354163	89	0.4868872098
21	1.096028078	44	0.3479244121	67	0.6081167009	90	0.2011024647
22	0.9111916529	45	0.6606604323	68	0.2500309757	91	0.6315203311
23	0.8162650232	46	0.7146797271	69	0.4834792897	92	0.3549284598
24	0.5406895878	47	0.4912759226	70	0.4015590965	93	0.3855708453
25	1.117665217	48	0.3259589804	71	0.6106941373	94	0.3204312425

Le tableau suivant compare la valeur réelle de la fonction $N_2(x)$ aux valeurs prédites par différentes méthodes pour différentes valeurs de x. La troisième colonne donne la valeur de $\eta(2)\frac{\log x}{x}$. Dans la quatrième colonne, Σ_1 désigne la quantité

$$\Sigma_1 := \sum_{a\geq 1} \frac{1}{2^a} \log(x/2^a).$$

Dans la cinquième colonne, Σ_2, désigne la quantité

$$\Sigma_2 := \sum_{a\geq 1} \frac{1}{a} \#\{n < x : s_2(n) = a\}.$$

Finalement, dans la sixième colonne, Σ_3 désigne la quantité

$$\Sigma_3 := \sum_{a\geq 1} \frac{2^{v_2(a)}}{a} \#\{n < \frac{x}{2^{v_2(a)}} : s_2(n) = a\}.$$

Il semble que pour de grandes valeurs de x, Σ_3 soit la plus précise de ces approximations.

x	$N_2(x)$	$\eta(2)\frac{x}{\log x}$	$\sum_1$	$\sum_2$	$\sum_3$
2^9	124	113.78	136.91	133.08	140.78
2^{12}	760	682.67	794.82	762.72	813.61
2^{15}	4772	4369.07	4751.80	4747.48	4882.57
2^{18}	32225	29127.11	31121.47	31116.97	32670.48
2^{20}	117897	104857.60	111142.37	111139.78	118485.04
2^{22}	428155	381200.36	401656.94	401654.25	429000.08
2^{23}	814294	729444.17	766381.02	766376.29	815020.88

Pour tout entier $q \geq 2$, lorsque h est un grand entier positif et lorsque $\frac{\log a}{\log q}$ est petit comparativement à h, les nombres de q-Niven sont plus nombreux dans l'intervalle $[q^h, q^h + a]$ que dans l'intervalle $[q^h - a, q^h]$.

Cet écart, illustré par le tableau de résultats suivant, s'explique par le fait que la valeur de $s_q(n)$ est plus élevée pour $n \in [q^h - a, q^h]$ que pour $n \in [q^h, q^h + a]$. Cette idée a été exploitée par De Koninck et Doyon [10] pour construire de grands intervalles ne contenant pas de nombres de Niven.

$N_{10}(10^7) - N_{10}(10^7 - 10^4) = 551$	$N_{10}(10^7 + 10^4) - N_{10}(10^7) = 1429$
$N_{10}(10^8) - N_{10}(10^8 - 10^4) = 460$	$N_{10}(10^7 + 10^4) - N_{10}(10^7) = 1420$
$N_{10}(10^9) - N_{10}(10^9 - 10^4) = 371$	$N_{10}(10^9 + 10^4) - N_{10}(10^9) = 1428$
$N_{10}(10^{10}) - N_{10}(10^{10} - 10^4) = 335$	$N_{10}(10^{10} + 10^4) - N_{10}(10^{10}) = 1417$
$N_{10}(10^{10}) - N_{10}(10^{10} - 10^5) = 3566$	$N_{10}(10^{10} + 10^5) - N_{10}(10^{10}) = 11217$
$N_2(2^{15}) - N_2(2^{15} - 2^{10}) = 115$	$N_2(2^{15} + 2^{10}) - N_2(2^{15}) = 197$
$N_2(2^{17}) - N_2(2^{17} - 2^{10}) = 94$	$N_2(2^{17} + 2^{10}) - N_2(2^{17}) = 187$
$N_2(2^{22}) - N_2(2^{22} - 2^{10}) = 53$	$N_2(2^{22} + 2^{10}) - N_2(2^{22}) = 199$
$N_2(2^{24}) - N_2(2^{24} - 2^{16}) = 3876$	$N_2(2^{24} + 2^{16}) - N_2(2^{24}) = 8252$
$N_2(2^{30}) - N_2(2^{30} - 2^{16}) = 3925$	$N_2(2^{30} + 2^{16}) - N_2(2^{30}) = 8191$

Chapitre 7

Conclusion

Bien que $\eta(q)\frac{x}{\log x}$ soit l'ordre asymptotique de $N_q(x)$, il ne s'agit pas d'une très bonne approximation de cette quantité. D'une part, Mauduit, Pomerance et Sarkozy [19] ont obtenu l'estimation avec terme d'erreur

$$N_q(x) = \eta(q)\frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{9/8}}\right).$$

D'autre part, des différentes étapes de la preuve du théorème 3.8, on peut déduire que

$$\limsup_{x\to\infty}\left|N_q(x) - \eta(q)\frac{x}{\log x}\right| \gg \frac{x}{\log^2 x}.$$

Il paraît plus facile d'étudier la quantité $N_q(q^R)$, où R est un entier, que la quantité $N_q(x)$ où x est un réel quelconque. L'expression

$$\frac{1}{q-1}\sum_{j=1}^{q-1}(j, q-1)\sum_{a\geq 1}\frac{1}{a}\#\{n < q^R : s_q(n) = a\}$$

semble estimer la quantité $N_q(q^R)$ avec un meilleur terme d'erreur que l'expression $\frac{q^R\eta(q)}{R\log q}$. En utilisant la proposition 1.14, on peut déduire que

$$\sum_a \frac{1}{a}\#\{n < q^R : s_q(n) = a\} \approx \frac{q^R}{\sigma\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}}{\frac{(q-1)}{2}R + t\sqrt{R}}dt,$$

où $\sigma = \sigma(q)$ est défini dans l'énoncé de la proposition 1.14. En développant le membre de droite, on obtient,

$$\frac{q^R}{\sigma\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}}{\frac{(q-1)}{2}R + t\sqrt{R}}dt = \frac{q^R}{\sigma\sqrt{\pi}}\int_{-R^{2/3}}^{R^{2/3}}\frac{2e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}}{R(q-1)}\left(1 - t\frac{2}{(q-1)\sqrt{R}} + t^2\frac{4}{R(q-1)^2}\cdots\right)dt$$

et cette dernière quantité peut s'écrire comme

$$\frac{q^R}{\sigma\sqrt{\pi}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{D_j}{R^j} \tag{7.1}$$

avec

$$D_j := \left(\frac{2}{q-1}\right)^{2j-1}\int_{-\infty}^{\infty} t^{2j-2}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt.$$

Ainsi, nous conjecturons que la formule (7.1) donne une estimation de $N_q(q^R)$ avec un terme d'erreur $o\left(\frac{q^R}{R^j}\right)$ pour toute valeur de j.

En adaptant les méthodes utilisées au chapitre 3, il devrait être possible d'obtenir le comportement asymptotique de la quantité

$$\#\left\{n < x : \sum_{j=1}^{\frac{\log x}{\log q}} f(\xi_j^{(q)}(n))\middle| n\right\},$$

où f est une fonction arithmétique à valeurs entières telle que $f(0) = 0$. On pourrait par exemple étudier le nombre de nombres inférieurs à x qui sont divisibles par la somme des carrés (ou d'une puissance donnée) de leurs chiffres.

Bibliographie

[1] Balazard, M. et Tenenbaum, G., *Sur la répartition des valeurs de la fonction d'Euler*, Compositio Math. **110**, (1998), no. 2, 239-250.

[2] Cai, T., *On 2-Niven numbers and 3-Niven numbers*, Fibonnaci Quart. **34**, (1996), no. 2 118-120.

[3] Cohen, G. L. et Segal, S.L., *A note concerning those n for which $\phi(n)+1|n$*, Fibonacci Quart. **27**, 1989, no. 4, 285-286.

[4] Cooper, C. N. et Kennedy, R. E., *On consecutive Niven numbers*, Fibonnacci Quart. **31**, 1993, no. 2, 146-151.

[5] Cooper, C. N. et Kennedy, R. E., *A partial asymptotic formula for the Niven numbers*, Fibonacci Quart. **26**, 1988, no.2, 162-168.

[6] Cooper, C. N. et Kennedy R. E., *On an asymptotic formula for the Niven number*, Internat. J. Math. and Math. Sci. **8**, 1985, no. 3, 536-543.

[7] Cristci, B. et Sandor, J., *Handbook of Number Theory II*, Kluwer Academic Publishers, 2004.

[8] De Koninck, J.-M. et Doyon, N., *On the number of Niven numbers up to x*, Fibonnaci Quart. **41**, 2003, no. 5, 431-440.

[9] De Koninck, J.-M., Doyon, N. et Kátai, I., *On the counting function for the Niven numbers*, Acta Arithmetica **106**, 2003, no. 3, 265-275.

[10] De Konink, J.-M. et Doyon, N., *Large and small gaps between consecutive Niven numbers*, J. Integer Seq. **6**, 2003, no. 2.

[11] Dumont, J.-M. et Thomas, A., *Gaussian aymptotic properties of the sum-of-digits function*, J. Number Theory **62**, 1997, no. 1 19-38.

[12] Fainleib, A.S., *Distribution of values of Euler's function*, Mat. Zametki I, 1967, 645-652.

[13] Fine, N.J., *The distribution of the sum of digits* $\pmod p$, Bull. Amer. Math. Soc. **71**, 1965, 651-652.

[14] Grundman, H.G., *Sequences of consecutive n-Niven numbers*, Fibonacci Quart. **32**, 1994, no. 2, 174-175.

[15] Hardy, G.H. et Wright, E.M., *An introduction to the theory of numbers, fourth edition*, Oxford Clarendon Press, 1960.

[16] Ivíc, A., *Two inequalities for the sum of divisors functions*, Univ. u Novom Sadu Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak., 1977, 17-22.

[17] Kirschenhofer, P., *On the variance of the sum of digits function*, Number-theoretic analysis (Vienna, 1988-89), 112-116, Lecture Notes in Math., 1452, Springer Berlin, 1990.

[18] Luca, F., *On positive numbers for which $\Omega(n)$ divides f_n*, Fibonnaci Quart. **41**, 2003, no. 4, 365-371.

[19] Mauduit, C., Pomerance, C. et Sárközy, A., *On the distribution in residue classes of integers with a fixed sum of digits*, Ramanujan J. **9**, 2005, no. 1-2, 45-62.

[20] Mauduit, C., Sárközy, A., *On the arithmeric structure of the integers whose sum of digits is fixed*, Acta Arith. **81**, 1997, no 2. 145-173.

[21] Postinokov, A.G., *Introduction to analytical Number Theory*, Translation of mathematical monograph, Volume **68**, 1987.

[22] Spiro, C., *How often is the number of divisors of n a divisor of n ?* , J. Number Theory **21**, 1985, no. 1, 81-100.

[23] Spiro, C., *How often does the number of divisors of an integer divide its successor ?*, London Math. Soc. **31**, 1985, 31-41.

[24] Vardi, I., *Computational Recreations in Mathematics*, Addison-Wesley Publishing Co., Redwook City Ca., 1991.

[25] Wilson, B., *Construction of 2n consecutive n-Niven numbers*, Fibonnacci Quart. **35**, 1997, no. 2, 122-128.

[26] Wilson, B., *Construction of small consecutive Niven numbers*, Fibonacci Quart. **34**, 1996, no. 3, 240-243.