Invarianzprinzip

Tobias Hess

Das Invarianzprinzip ist das Lösen von Aufgaben mit sogenannten Invarianten. Der Begriff Invariante stammt aus dem Lateinischen (invarius : unveränderlich) und bezeichnet (mathematisch) eine Größe, die unter einer gegebenen Problemstellung immer gleich bleibt.

Rahmeninformationen

In der Mathematik ist das Invarianzprinzip ein Teilgebiet der Heuristik. Ziel dieses mathematischen Gebietes ist ein besseres Verständnis der Denkoperationen. Man bezeichnet sie auch als „Kunde… vom Gewinnen, Finden, Entdecken, Entwickeln neuen Wissens und vom methodischen Lösen von Problemen.“ Wichtig ist, dass es sich bei der Heuristik um Faustregeln handelt, die Impulse zum Weiterdenken liefern, die eine Orientierungsfunktion haben, jedoch keinesfalls um allgemeingültige Rezepte mit Lösungsgarantie, im Unterschied zu Algorithmen.

Neben dem Invarianzprinzip beinhaltet sie weitere Prinzipien, zum Beispiel:
Das Analogieprinzip und das Rückführungsprinzip: Suche nach einer ähnlichen, leichteren Aufgabe, um ein schweres zu lösen

Das Transformationsprinzip: Übersetze die Aufgabe in die Sprache einer geeigneten mathematischen Theorie. Löse die Aufgabe (in diesem Modellbereich) mit den entsprechenden Hilfsmitteln. Deute das Ergebnis (d.h. Rückübersetzung in den Ausgangsbereich).

Das Zerlegungsprinzip: Betrachte einzelne Eigenschaften. Zerlege in Teilfragen. Teile einen zeitabhängigen Prozess in mehrere Phasen auf. Führe Fallunterscheidungen durch.

Systematisches Probieren: Bestimme eine Reihenfolge, die mit Sicherheit alle möglichen Fälle/Elemente enthält.

Doch nicht nur in der Mathematik, sondern auch in anderen Bereichen kommt dem Invarianzprinzip große Bedeutung zu. In der Physik wird Invarianz als eine spezielle Art vom Symmetrie aufgefasst und dient der Beschreibung bestimmter physikalischer Zusammenhänge, etwa der Raumzeit.
Ein sehr gutes Beispiel ist der Energieerhaltungssatz, der besagt, dass Energie, die in einem abgeschlossenen System gespeichert ist, in ihrer Summe immer gleich ist. Das heißt konkret, dass Energie nicht verbraucht, sondern nur umgewandelt werden kann. In anderen Worten ausgedrückt: Energie kann nicht aus dem Nichts entstehen und kann auch nicht verschwinden.
Nähere Information dazu findet ihr unter: http://de.wikipedia.org/wiki/Invarianz_(Physik)

Sogar Philosophen beschäftigen sich mit diesem Thema, vor allem Max Born:
Invarianten sind für Born das vom menschlichen Bewusstsein und der menschlichen Tätigkeit Unabhängige. Sie sind ferner unabhängig vom Bezugssystem; sie sind der Kern, der Inbegriff des Objektiv-Realen, die unerschütterliche Grundlage wissenschaftlicher Naturerkenntnis, die Garantie der Objektivität und Gültigkeit wissenschaftlicher Wahrheit. Born hat diese Theorie in der Auseinandersetzung mit der positivistischen Philosophie erarbeitet und nicht als physikalisch-mathematische, sondern als philosophische Theorie entwickelt, auf deren Grundlage sich auch eine spezifisch physikalische Invariantentheorie aufbauen lässt.

Anwendung (allgemein)

Gegeben sind eine *Zustandsmenge* und ein *Algorithmus*, der die Zustandsmenge in sich überführt. Gesucht ist eine Funktion, die jedem Zustand eine Zahl, eine Restklasse oder einen Wahrheitswert zuordnet. Diese Funktion f soll *invariant* sein unter dem Algorithmus. Ferner sind meist noch ein noch ein Anfangszustand Z_a und ein angestrebter Endzustand $\boldsymbol{Z}_e$ gegeben. Gilt für die Invariante *f*:

$$f(Z_a) \neq f(Z_e),$$

dann ist es nicht möglich, mit Hilfe des Algorithmus den Anfangszustand in einer endlichen Zahl von Schritten in den Endzustand zu überführen.

Einfacher Ausgedrückt: Man stellt sich 2 Schlüsselfragen!

1. Was ändert sich nicht ?
2. Was haben alle Objekte gemeinsam ?

Mit diesen Fragen versucht man, die Aufgabe zu lösen oder zu zeigen, dass sie unlösbar ist. Da das vielleicht immer noch etwas abstrakt ist, hier nun einige Beispiele.

Beispiele

1. Das MU-Rätsel**:**
Gegeben sei das Alphabet {M,U,I} sowie folgende Regeln zum Basteln von Wörtern.
- X sei ein beliebiges Wort, gebildet aus den Buchstaben des „Alphabets". Ist MX ein Wort, so ist auch MXX eines.
- Endet ein Wort aus I, so kann man ein U anhängen.
- Drei aufeinanderfolgende Buchstaben I oder zwei aufeinanderfolgende Buchstaben U können gestrichen werden.

Frage: Lässt sich das Wort MI in einer endlichen Anzahl von Schritten in das Wort MU umwandeln ? Wenn ja, wie?

Lösung: Nein. Betrachte dazu die Anzahl von „I"s im Wort. Sie hat die unveränderliche Eigenschaft, dass sie nie durch drei teilbar ist (Regel 1 verdoppelt die Anzahl I's und ändert damit nichts an der Teilbarkeit durch 3, Regel 2 ändert sie gar nicht). Da allerdings immer drei I's gestrichen werden, müsste sie das sein, damit am Ende kein I mehr vorhanden ist.

2.
Es sei n eine ungerade natürliche Zahl. Jemand schreibt zunächst die Zahlen1,2,3,...,2n an die Tafel. Dann wählt er zwei beliebige Zahlen a und b von ihnen aus, streicht sie und ersetzt sie durch ihre Differenz a-b. So fährt er fort, bis zum Schluss nur noch eine Zahl an der Tafel steht. Beweise, dass diese Zahl ungerade ist

Lösung: Es sei S die Summe der Zahlen an der Tafel, also $S = n(2n+1)$ und damit ungerade, da n ungerade war. In jedem Schritt ändert sich S um $-a - b + (a - b) = -2b$, also um eine gerade Zahl. Somit bleibt die Ungeradzahligkeit von S erhalten und die letzte Zahl ist ungerade.

3.
Ein Kreis ist in Sektoren eingeteilt. Die Zahlen 1,0,1,0,0,0 sind entgegen dem Uhrzeigersinn in dieser Reihenfolge auf die Sektoren geschrieben. In jedem Schritt darf man zwei benachbarte Sektoreninhalte um 1erhöhen.

Frage: Kann man erreichen, dass nach einer gewissen Zahl von Schritten alle Zahlen gleich sind?

Lösung: Es seien a_1 bis a_6 die aktuellen Zahlen der Sektoren. Dann ist $I := a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$ eine Invariante des Algorithmus (Wenn man zu zwei benachbarten Feldern jeweils eine Zahl addiert, wird zu I einmal hinzugezählt und einmal wieder abgezogen – im Ergebnis für I ändert sich nichts).Wegen $I_0 = 2$ kann daher das Ziel $I = 0$ nie erreicht werden.

4.
Jede der Zahlen $a_1, \dots ,a_n$ ist entweder 1 oder -1. Es gilt

$$S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + a_3a_4a_5a_6 + \dots + a_na_1a_2a_3 = 0$$

Beweise: n ist durch 4 teilbar !

Lösung: Wir sollen also eine Aussage über die Summe der sogenannten Tupel beweisen. Also überlegen wir uns zuerst, was wir überhaupt über diese Summe wissen. Dabei fällt auf, dass es genau n solcher "Pakete" von a's gibt, deren Betrag immer 1 ist. Wäre also der Wert aller a's 1, so wäre die Summe genau n. Von diesem Spezialfall aus wollen wir nun versuchen, zu unserer tatsächlichen Situation (einer beliebigen Mischung von 1en und -1en) zu gelangen, indem wir Schritt für Schritt den Wert der unpassenden a's abändern. Hier kommt nun das Invarianzprinzip ins Spiel und wir zeigen durch einfaches Betrachten der möglichen Fälle, dass die Teilbarkeit der Summe durch 4 hier bei keinem Schritt verändert wird. Bei jedem Schritt, in dem man das Vorzeichen eines a's vertauscht, ändert sich der Wert von je 4 Tupeln von 1 auf -1 oder umgekehrt (denn jedes a taucht in 4 verschiedenen Tupeln auf und kehrt dessen gesamtes Vorzeichen um). Die möglichen Fälle sind also:
- 4 positive Tupel => 4 negative: Die Summe nimmt um 8 ab.
- 4 negative Tupel => 4 positive: Die Summe nimmt um 8 zu.
- 2 positive, 2 negative => 2 negative, 2 positive: Die Summe bleibt gleich.
- 3 negative, 1 positives => 3 positive, ein negatives: Die Summe nimmt um 4 zu.
- 3 positive, 1 negatives => 3 negative, ein positives: Die Summe nimmt um 4 ab.

Die Summe ändert sich also immer um Werte, die durch 4 teilbar ist. Da wir eine Situation kennen, in der sie selbst durch 4 teilbar ist, ist sie das also in allen möglichen Kombinationen von a's; die Aussage ist bewiesen.

Fazit:

Wir hoffen, dass dieser kleine Einblick in diese Thematik nicht zu kompliziert war und euch interessiert hat. Wir wünschen weiterhin viel Spaß mit der faszinierenden Welt der Mathematik!!!

Von Arne Seehaus und Tobias Hess