セールスマンの最長行程

(2022 年 11 月 3 日開催「第 24 回近大数学コンテスト問題 B-1」解答)

問題　空間内に n 個の点 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ をランダムに配置する．自然数 $1, 2, \ldots, n$ を並び替えたものを $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ とし，

$$L = |\overrightarrow{\mathrm{A}_{\sigma(1)}\mathrm{A}_{\sigma(2)}}| + |\overrightarrow{\mathrm{A}_{\sigma(2)}\mathrm{A}_{\sigma(3)}}| + \cdots + |\overrightarrow{\mathrm{A}_{\sigma(n-1)}\mathrm{A}_{\sigma(n)}}| + |\overrightarrow{\mathrm{A}_{\sigma(n)}\mathrm{A}_{\sigma(1)}}|$$

とする．自然数 $1, 2, \ldots, n$ のあらゆる並べ替えを考えたとき，L の最小値を L_1，最大値を L_2 とする．ただし，L_1 が正となる配置のみを考える．このとき，どんな配置に対しても $L_2 \leq f(n)L_1$ を満たす n の関数 $f(n)$ を考えよう．**次の軽量級か重量級のいずれかを選び**，どちらを選んだかを明記した上で，問いに答えよ．

【軽量級：30pt】$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ に重複を許す場合を考える．

(1) $f(n)$ の例を 1 つ求めよ．

(2) このような $f(n)$ のうち，最小のものを求めよ．

【重量級：40pt】$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ に重複がない場合を考える．

(1) $f(n)$ の例を 1 つ求めよ．

(2) このような $f(n)$ のうち，最小のものを求めよ．

まずタイトルの意味を説明する．n 軒の家 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ があり，1 人のセールスマンが，どの家も最低 1 度は訪問しなければならず，また最後には出発点に戻らなければならないものとする．どの家の間も直線で通行できるものとする．各戸への訪問順序によって行程距離，すなわち歩かねばならない距離は異なってくる．この行程距離が最小となる訪問順序を探すことが,「巡回セールスマン問題」として有名である[1]．ここでは，どんな順序で訪問しても，その行程距離と最小行程距離との比が n に関係するある数の範囲に収まることを示す問題とした．

解答の前に，いくつかの用語と記号を定義する．一般に空間内の点 $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_m$ をこの順につないでできる折れ線 $K := (\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2 \cdots \mathrm{B}_m)$ に対して，各 B_i をこの折れ線の頂点という．折れ線 K の長さを，折れ線をなす線分の長さの和：

$$|K| = |\overrightarrow{\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2}| + |\overrightarrow{\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3}| + \cdots + |\overrightarrow{\mathrm{B}_{m-1}\mathrm{B}_m}|$$

で定義する．

問題の点 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ と $\{1, 2, \ldots, n\}$ の自分自身への全単射写像（並べ替え）σ に対して，点 $\mathrm{A}_{\sigma(1)}, \mathrm{A}_{\sigma(2)}, \ldots, \mathrm{A}_{\sigma(n)}, \mathrm{A}_{\sigma(1)}$ をこの順につないでできる閉じた折れ線を $P(\sigma)$ で表す．ここで「閉じた」とは，始点と終点が一致しているという意味である．そしてこの折れ線には頂点の並ぶ順に従って向きを与える．この頂点を家とみなし，それらを σ で定まる順にすべて訪問し出発点に戻るセールスマンを考えたとき，この向きを含めた折れ線 $P(\sigma)$ はセールスマンの歩く道筋と考えることができるから，σ に対する経路と呼ぶことにする．

[1] 巡回セールスマン問題では「ちょうど 1 度」訪問するという条件であるが，ここでは点が重複を許す場合も考えているので,「最低 1 度」に変更した．また，三角不等式を仮定するから，より正確には「メトリック巡回セールスマン問題」というべきである．

解答
(1) $f(n)$ の例：

ι を恒等写像，すなわち $\iota(i)=i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ で定義される写像とすると，それに対応する経路は

$$P(\iota)=(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n\mathrm{A}_1)$$

である．必要なら番号を付け替えることで，$P(\iota)$ が最短であるとしてよい．すると

$$L_1=|P(\iota)|=|(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n\mathrm{A}_1)|$$

である．また，ある全単射写像 σ に対して $P(\sigma)$ が最長になるとしよう．すると

$$L_2=|P(\sigma)|=|(\mathrm{A}_{\sigma(1)}\mathrm{A}_{\sigma(2)}\cdots\mathrm{A}_{\sigma(n)}\mathrm{A}_{\sigma(1)})|$$

である．閉じた折れ線を考えているので，一般性を失うことなく $\sigma(1)=1$ としてよい．これ以降，添字は $\mathrm{mod}\ n$ で考えることにする．

$P(\sigma)$ の線分 $\mathrm{A}_{\sigma(i)}\mathrm{A}_{\sigma(i+1)}$ に対して折れ線

$$Q_i:=(\mathrm{A}_{\sigma(i)}\mathrm{A}_{\sigma(i)+1}\mathrm{A}_{\sigma(i)+2}\cdots\mathrm{A}_{\sigma(i+1)-1}\mathrm{A}_{\sigma(i+1)}),$$
$$R_i:=(\mathrm{A}_{\sigma(i)}\mathrm{A}_{\sigma(i)-1}\mathrm{A}_{\sigma(i)-2}\cdots\mathrm{A}_{\sigma(i+1)+1}\mathrm{A}_{\sigma(i+1)})$$

を考える．折れ線 Q_i と R_i は同じ端点を持っており，Q_i は $P(\iota)$ と同じ向きを持ち，R_i は逆の向きを持っている．だから

$$|Q_i|+|R_i|=L_1\quad(i=1,2,\ldots,n)$$

が成立する．一方，折れ線の長さはその両端を結ぶ線分の長さ以上であるから，

$$|\mathrm{A}_{\sigma(i)}\mathrm{A}_{\sigma(i+1)}|\leq|Q_i|\quad\text{かつ}\quad|\mathrm{A}_{\sigma(i)}\mathrm{A}_{\sigma(i+1)}|\leq|R_i|$$

が成立することがわかる．だから

$$|\mathrm{A}_{\sigma(i)}\mathrm{A}_{\sigma(i+1)}|\leq\min\{|Q_i|,|R_i|\}\quad(i=1,\ldots,n)$$

となる．

折れ線 $Q_1,Q_2,\ldots,Q_n$ をこの順につないで得られる折れ線を Q とする．同様に $R_1,R_2,\ldots,R_n$ をつないで得られる折れ線を R とする．Q は $P(\iota)$ を何周かする閉じた折れ線であるから $|Q|=n_qL_1$ $(n_q\in\mathbb{N}_+)$ となる．ただし $\mathbb{N}_+=\{1,2,3,\ldots\}$ とする．同様にして $|R|=n_rL_1$ $(n_r\in\mathbb{N}_+)$ となる．$|Q_i|+|R_i|=L_1$ であるから，$1\leq i\leq n$ で和を取ると $\sum_{i=1}^n(|Q_i|+|R_i|)=\sum_{i=1}^n L_1$，つまり $n_qL_1+n_rL_1=nL_1$ となる．両辺を L_1 で割ることで，$n_q+n_r=n$ を得る．n_q と n_r はどちらも整数であるので，$\min\{n_q,n_r\}\leq\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor$ となる．ここで $\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor$ は $\dfrac{n}{2}$ 以下の最大の整数を表す．結局

$$L_2\leq\sum_{i=1}^n\min\{|Q_i|,|R_i|\}\leq\min\{|Q|,|R|\}=\min\{n_qL_1,n_rL_1\}\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor L_1$$

となって，$f(n)=\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor$ が求める 1 例となる．

注意：　n が偶数のときに限ると，$|Q_i|+|R_i|=L_1$ であることから，

$$L_2 \leq \sum_{i=1}^{n} \min\{|Q_i|,|R_i|\} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{L_1}{2} = \frac{nL_1}{2}$$

となって，より簡単に $f(n)=\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ が得られる．

(2) 最小の $f(n)$： (1) で求めた $f(n)$ が最小であることを示す．

まず軽量級の場合で示す．

- $n:=2k$ が偶数であれば，平面上の配置

$$\mathrm{A}_1=\mathrm{A}_2=\cdots=\mathrm{A}_k=(0,0),\quad \mathrm{A}_{k+1}=\mathrm{A}_{k+2}=\cdots=\mathrm{A}_{2k}=(0,1)$$

を考える．最長経路，最短経路は，例えばそれぞれ

$$(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_2\mathrm{A}_{k+2}\cdots\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{2k}\mathrm{A}_1),\quad (\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{2k}\mathrm{A}_{2k-1}\cdots\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_1)$$

で与えられ，その長さの比は $k:1$ であるから，$f(n)$ をこの比の値 $k=\dfrac{n}{2}$ よりも小さい値に置き換えることはできない．

- $n:=2k+1$ が奇数であれば，配置

$$\mathrm{A}_1=\mathrm{A}_2=\cdots=\mathrm{A}_k=(0,0),\quad \mathrm{A}_{k+1}=\mathrm{A}_{k+2}=\cdots=\mathrm{A}_{2k}=(0,1),\quad \mathrm{A}_{2k+1}=(0,1/2)$$

を考える．最長経路，最短経路は，例えばそれぞれ

$$(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_2\mathrm{A}_{k+2}\cdots\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{2k}\mathrm{A}_{2k+1}\mathrm{A}_1),\quad (\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{2k+1}\mathrm{A}_{2k}\mathrm{A}_{2k-1}\cdots\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_1)$$

で与えられ，その長さの比はやはり $k:1$ であるから，$f(n)=k=\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ は最小である．

次に重量級の場合で示す．

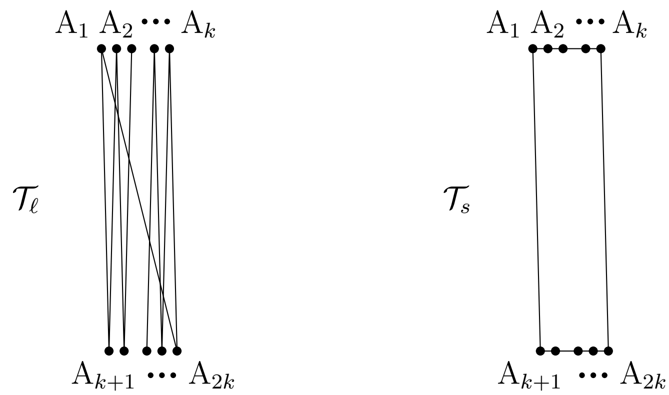
- $n:=2k$ が偶数のとき：
  大きな数 N を取り，平面上の配置

$$\mathrm{A}_i=(i/N,0),\qquad \mathrm{A}_{k+i}=(i/N,1)\quad (i=1,2,\ldots,k)$$

をとり．2 つの経路

$$\mathcal{T}_\ell=(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_2\mathrm{A}_{k+2}\cdots\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{2k}\mathrm{A}_1),\quad \mathcal{T}_s=(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{2k}\mathrm{A}_{2k-1}\cdots\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_1)$$

を考える．



N を限りなく大きくするとき，配置は動き，経路 $\mathcal{T}_\ell$ の長さ L_ℓ は限りなく $2k$ に近づく．また経路 $\mathcal{T}_s$ の長さ L_s は限りなく 2 に近づく．したがって比 $L_\ell : L_s$ は限りなく $k:1$ に近づき，$f(n)$ を k よりも小さい値に置き換えることはできない．なぜなら，$0<h<k$ となる h を取ると，N が十分大きいとき，L_ℓ/L_s が h よりも大きくなり，$hL_s < \dfrac{L_\ell}{L_s}\cdot L_s = L_\ell$ だから h は問題の $f(n)$ の役割を果たせなくなる．

注意：　ここで，N を大きくするとき L_ℓ と L_s がそれぞれ $2k$，2 に近づくことを用いたが，これは折れ線の頂点 $\mathrm{A_i}$ が連続的に動くとき，経路の長さも連続的に変化することによっている．計算によっても次のように示すことができる．

$$L_\ell = \sum_{i=1}^{k} 1 + \sum_{i=1}^{k-1}\left(\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{N}\right)^2}\right) + \sqrt{1+\left(\frac{k-1}{N}\right)^2} \longrightarrow 2k,$$

$$L_s = 2 + 2\cdot\frac{k-1}{N} \longrightarrow 2 \qquad (N \longrightarrow \infty).$$

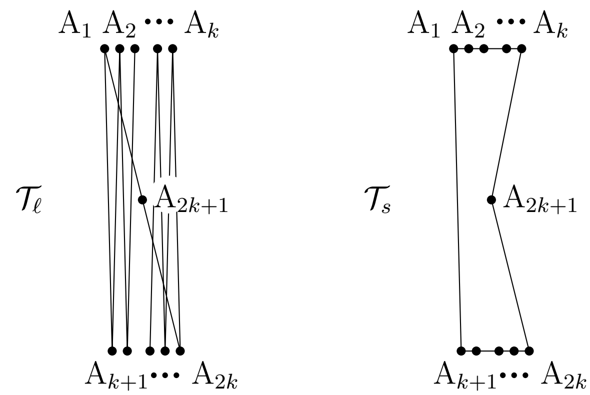
- $n := 2k+1$ が奇数のとき：
  配置

$$\mathrm{A}_i = (i/N, 0), \qquad \mathrm{A}_{k+i} = (i/N, 1), \qquad \mathrm{A}_{2k+1} = ((k+1)/2N, 1/2) \quad (k = 1, 2 \ldots, k)$$

をとり，2 つの経路

$$\mathcal{T}_\ell = (\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_2\mathrm{A}_{k+2}\cdots\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{2k}\mathrm{A}_{2k+1}\mathrm{A}_1), \quad \mathcal{T}_s = (\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{2k+1}\mathrm{A}_{2k}\mathrm{A}_{2k-1}\cdots\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_1)$$

を考える．



N を限りなく大きくするとき，その長さの比は限りなく $k:1$ に近づくから，$f(n)$ を k よりも小さい値に置き換えることはできない．偶数の場合と同様に，計算によってこのことを示すこともできる．

$\star$ なお解答ではないが，上の軽量級で挙げた例は，偶数，奇数いずれの場合も，重量級の場合に用いた例の N を無限大に飛ばすときの極限となっていることを注意しておく．

[文責：　泉 脩藏，山下 登茂紀]