

Signalverarbeitung

von

Prof. Dr.-Ing. Oliver Nelles

Übersicht

1. Einführung
2. Zeitdiskrete Signale und Systeme
3. Transformation von Signalen in den Frequenzbereich
4. Filter
5. Stochastische Signale
6. Ausgewählte Methoden der Signalverarbeitung

1. Einführung

Inhalt Kapitel 1

1. Einführung

- 1.1 Wozu Signalverarbeitung?
- 1.2 Deterministische und stochastische Signale
- 1.3 Analoge versus digitale Signale
- 1.4 A/D- und D/A-Wandler
- 1.5 Anwendungsbeispiele
- 1.6 Literatur

1.1 Wozu Signalverarbeitung?

Was sind Signale?

- Signale übertragen Informationen.
- Signale sind Funktionen, meist der Zeit.
- Signale werden mit Sensoren gemessen und können in beliebiger physikalischer Form vorkommen: Druck, Temperatur, elektrische Spannung, ...

Einige typische Signale

- Sprache, Musik
- Bilder, Videos
- EKG, EEG, Signale von CT, MRT oder PET → Umwandlung in Bilddaten, ...
- Abstandsmessung mit Laser, Ultraschall oder Radar, Echolot, GPS, seismische Signale...
- Datenströme über Telefonleitung, Kabelfernsehen, Satellit, Handy, Bluetooth, Internet, ...
- Sämtliche Messungen an Maschinen, in Fabriken, ...
- Druckverlauf im Zylinder eines Verbrennungsmotors
- Kursverlauf einer Aktie, Anzahl der Arbeitslosen, Entwicklung der Bevölkerung, ...



1.1 Wozu Signalverarbeitung?

Was ist Signalverarbeitung?

Die *Analyse*, *Manipulation* und *Synthese* von Signalen

Wozu Signalverarbeitung?

- Speicherung, Rekonstruktion
- Trennung von Nutzinformation und Störung/Rauschen
- Kompression
- Merkmalsextraktion (Vorstufe jeder Klassifikation)

Methoden/Werkzeuge der Signalverarbeitung

- Transformation, Korrelation
- Filterung, Störunterdrückung
- Detektion, Klassifikation, Mustererkennung
- Identifikation, Schätzung
- Kompression, Integration, Fusion

1.1 Wozu Signalverarbeitung?

Anwendungen

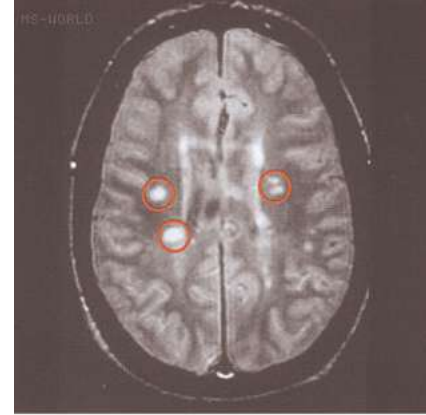


Kamera

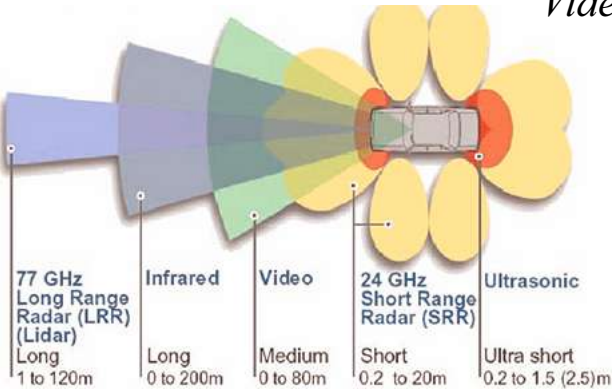


Video

Handy



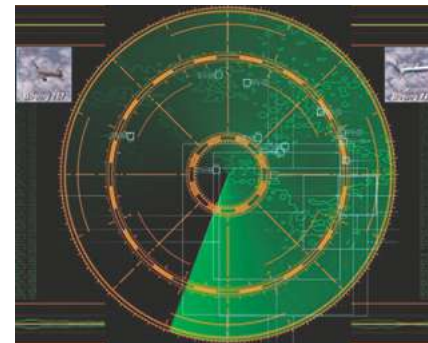
Kernspintomograph (MRT)



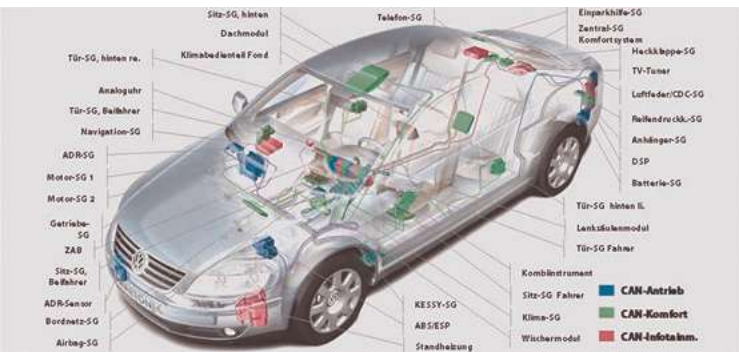
Fahrerassistenzsysteme



Messtechnik



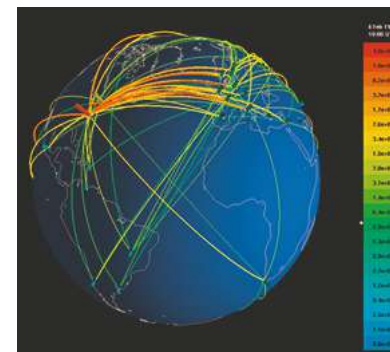
Radar



Vernetzung Sensorik/Steuergeräte



Nachtsichtsystem



Internet

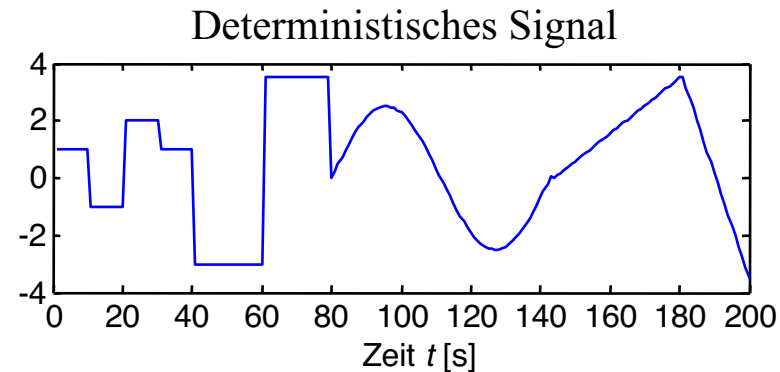


GPS

1.2 Deterministische und stochastische Signale

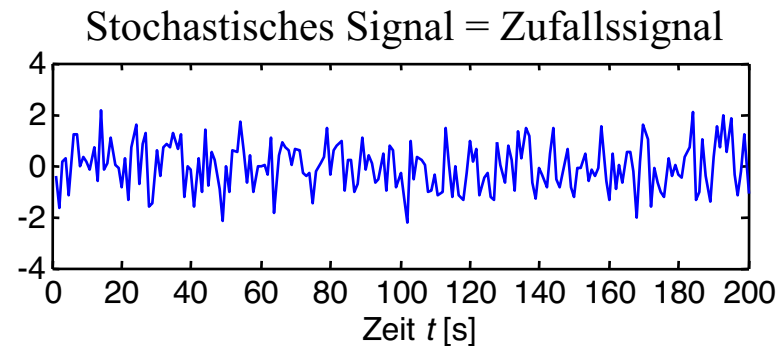
Deterministische Signale hängen *nicht* vom Zufall ab:

- Dirac-Impuls
- Sprung
- Rampe
- Periodische Signale: Sinus, Rechteck, ...



Stochastische Signale (= Zufallssignale) hängen vom Zufall ab:

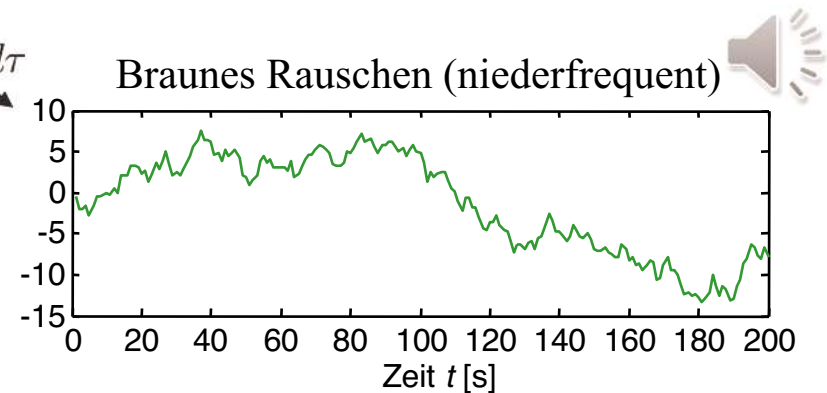
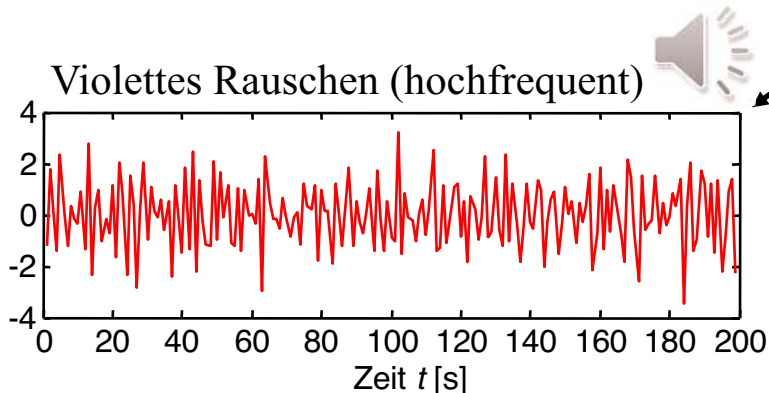
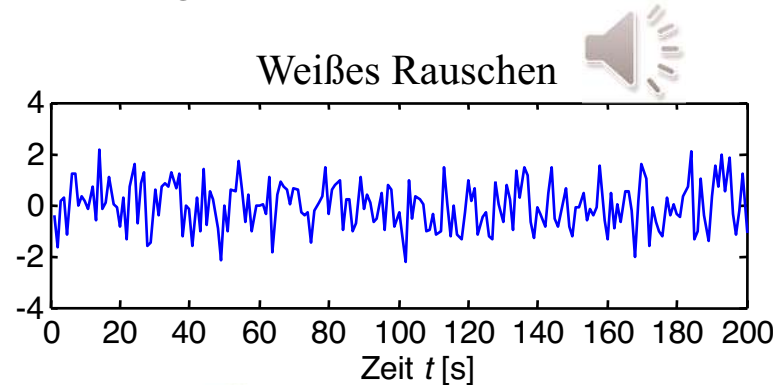
- Rauschen
- Verteilung der Amplituden:
 - Gaußverteilung,
 - Gleichverteilung, ...
- Frequenzeigenschaften:
 - weiß: alle Frequenz gleich stark vertreten,
 - bandbegrenzt: nur ein bestimmter Frequenzbereich vertreten, ...



1.2 Deterministische und stochastische Signale

Motivation für die Verwendung stochastische Signale

- Physikalische Effekte sind wirklich zufällig (z.B. radioaktiver Zerfall).
 - Unüberschaubar viele Störeffekte wirken in ihrer Gesamtheit wie zufällig, sind aber bei detaillierter Betrachtung jeder für sich betrachtet deterministisch.
- In beiden Fällen: Modellierung des Effekts als stochastisches Signal sinnvoll!



1.3 Analoge versus digitale Signale

Hier: Fokus auf digitalen Signalen

- Differenzgleichungen und Summen sind einfacher zu verstehen als Differentialgleichungen und Integrale.
- Digitale Realisierungen verdrängen analoge Schaltungen immer weiter, weil
 - meist billiger (insbesondere bei großen Stückzahlen),
 - einfacher zu implementieren,
 - flexibler: schneller und kostengünstiger zu ändern (selbst im Nachhinein durch Updates),
 - robuster und haltbarer in Bezug auf Umwelteinflüsse (Verschleiß, Temperatur, Feuchte),

zeit-abgetastet

digital = zeitdiskret & quantisiert

Amplitude in z.B. 8
oder 16 Bits gewandelt

Ausrichtung dieser Vorlesung

- Entwicklung des Verständnisses für die Methoden und deren Anwendungsmöglichkeiten.
- Keine Implementierungsdetails und Programmiertricks.
- Beispiele in MATLAB, keine Programmierung eines digitalen Signalprozessors (DSPs).
- Mehr Breite als Tiefe.
- Grundlagen der stochastischen Signale und Systeme.

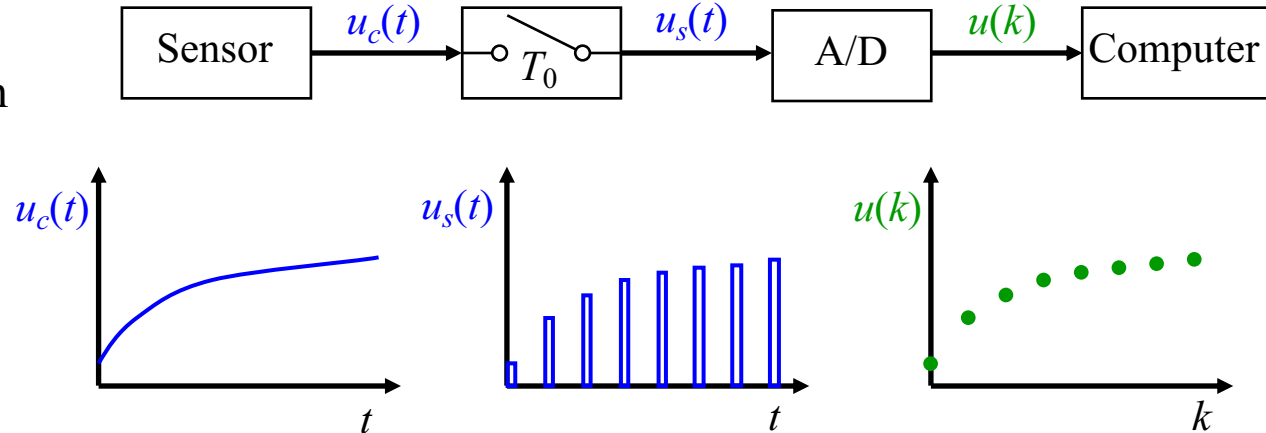
1.3 Analoge und digitale Signale

Abkürzung: $u(k) = u_c(kT_0)$
 $y(k) = y_c(kT_0)$

Analog/Digital- und Digital/Analog-Wandlung

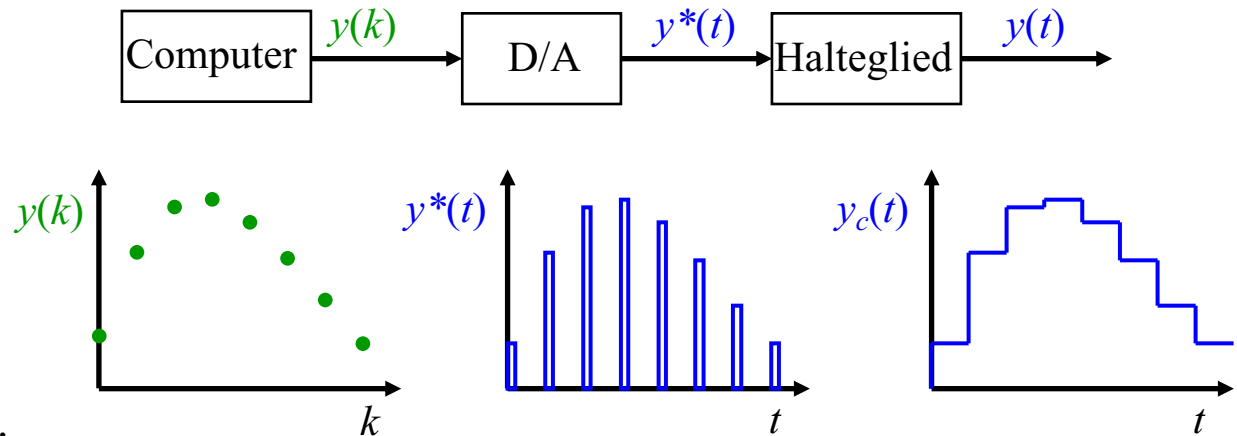
A/D-Wandlung

- Abtastzeit T_0 liegt zwischen μsec (Ströme, Drehzahlen) und Stunden (thermische, biologische Prozesse)
- Amplitudenauflösung von 8, 12 oder 16 Bit.



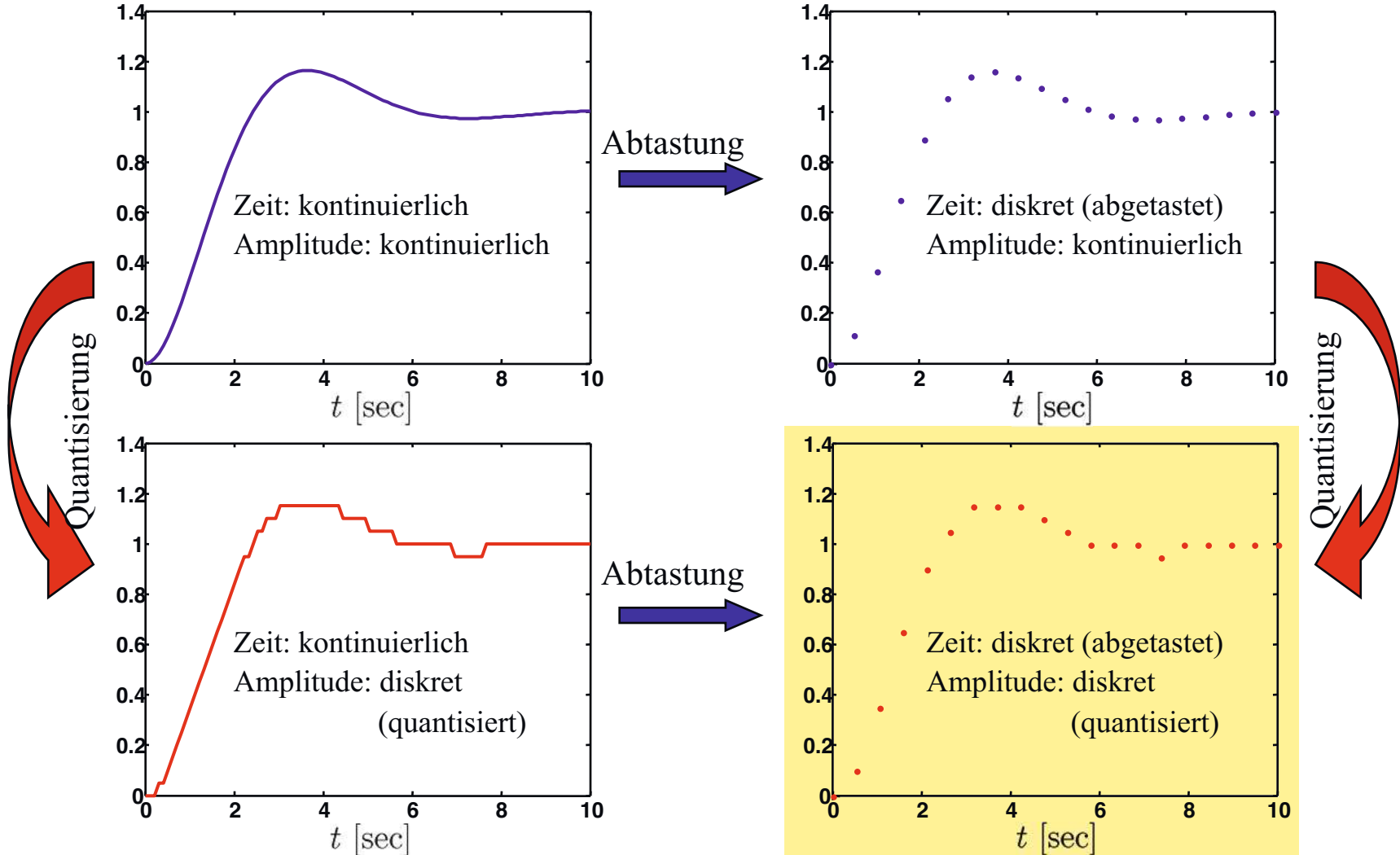
D/A-Wandlung

- Computer rechnet mit zeitdiskreten Folgen.
- Halteglied 0. Ordnung erzeugt stückweise konstante Signale.
Z.B. für digitaler Regelung.



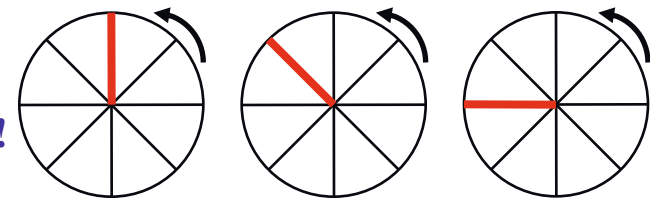
1.3 Analoge und digitale Signale

Signalabtastung und -quantisierung



1.3 Analoge und digitale Signale

Rad steht
scheinbar!

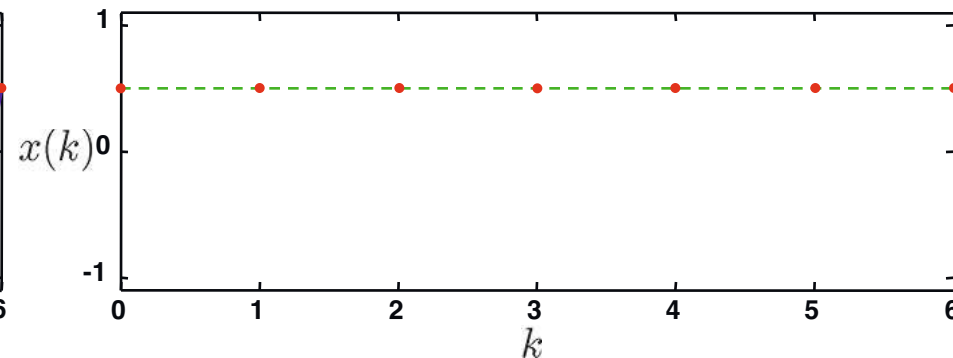
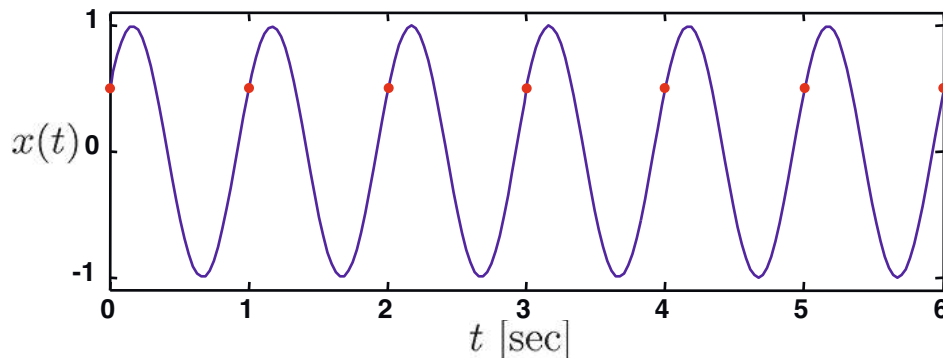


Abtastung zeitkontinuierlicher Signal

Jeder hat schon einmal drehende Speichenräder einer losfahrenden Kutsche im Film gesehen. Zuerst sieht man das Rad beschleunigen. Ab einer gewissen Drehzahl scheint das Rad plötzlich seine Drehrichtung zu ändern und schnell rückwärts zu drehen (obwohl die Kutsche weiter beschleunigt). Dann scheint das Rad immer langsamer zu werden bis es sogar stehen bleibt. Das ist ein offensichtlicher Widerspruch zur immer schneller fahrenden Kutsche.

Diese komischen Effekte werden durch das sog. **Aliasing** verursacht und treten bei allen abgetasteten Systemen auf. Offensichtlich gibt es Probleme, wenn wir Signale abtasten, deren Frequenz in den Bereich der Abtastfrequenz kommt. Der *Film* spielt dabei die Rolle des *Abtasters* mit einer Bildwiederholrate bzw. Abtastfrequenz von $f_0 = 25$ Hz.

Was passiert, wenn wir ein Signal der Frequenz $f = 1$ Hz mit $f_0 = 1$ Hz abtasten?

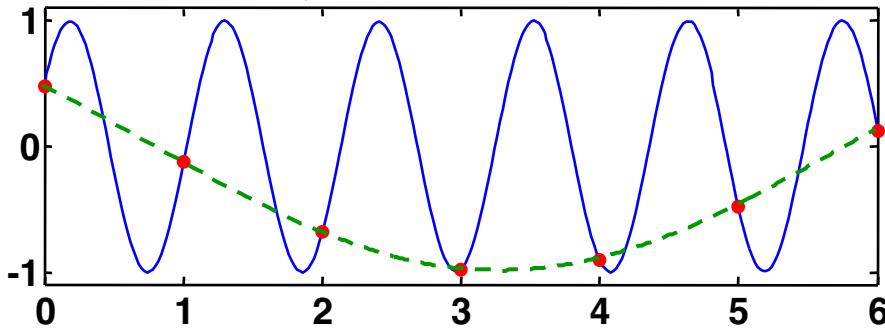


1.3 Analoge und digitale Signale

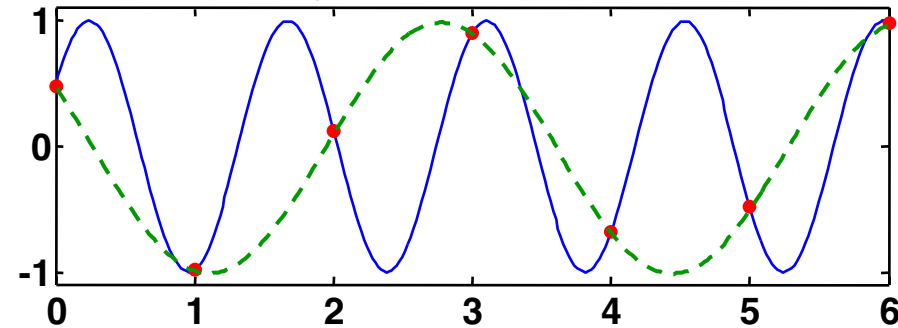
Aliasing

Offensichtlich geht die Schwingung komplett verloren. Wir erhalten ein Signal der Frequenz null (einen Gleichwert). Diese Tatsache ist unabhängig von der Phasenlage des Abtasters (nur die Höhe des Gleichwertes hängt davon ab). Zur Illustration noch ein paar weitere Beispiele mit $f = 0.9$ Hz, 0.7 Hz, 0.5 Hz und 0.3 Hz und jeweils $f_0 = 1$ Hz.

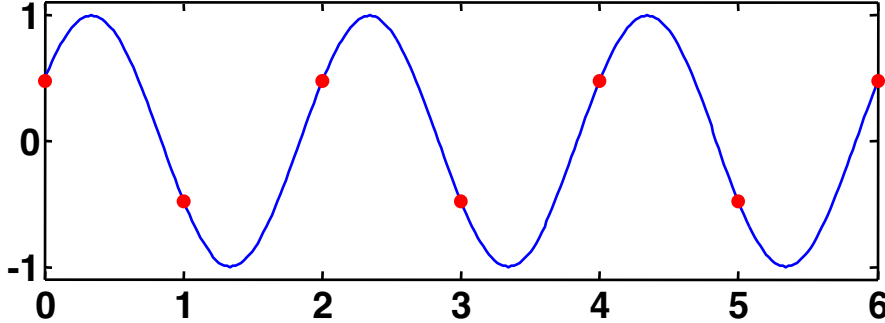
$f = 0.9$ Hz



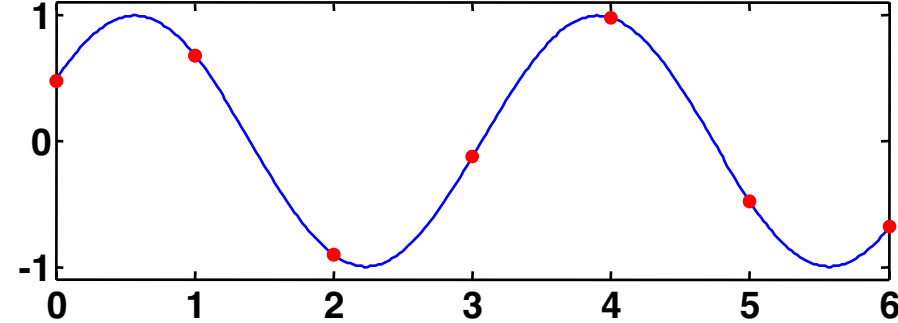
$f = 0.7$ Hz



$f = 0.5$ Hz



$f = 0.3$ Hz





1.3 Analoge und digitale Signale

Abtasttheorem

Aus den Beispielen der vorangegangenen Seite erkennen wir empirisch, dass wir mindestens mit der doppelten Signalfrequenz abtasten müssen ($f = 0.5$ Hz bei $f_0 = 1$ Hz), um das Signal nach der Abtastung noch richtig wiedergeben zu können. Reale Signale bestehen aus einem Gemisch vieler Frequenzen. Dann bezieht sich die Forderung nach der doppelten Abtastfrequenz auf den Signalanteil mit der höchsten Frequenz f_{\max} .

Shannonsches Abtasttheorem

Das Signal $x(t)$ soll abgetastet werden. Die höchste Frequenzkomponente von $x(t)$ sei f_{\max} . Dann muss die Abtastfrequenz mindestens doppelt so groß gewählt werden, wie die höchste Frequenzkomponente von $x(t)$:

$$f_0 > 2f_{\max}$$

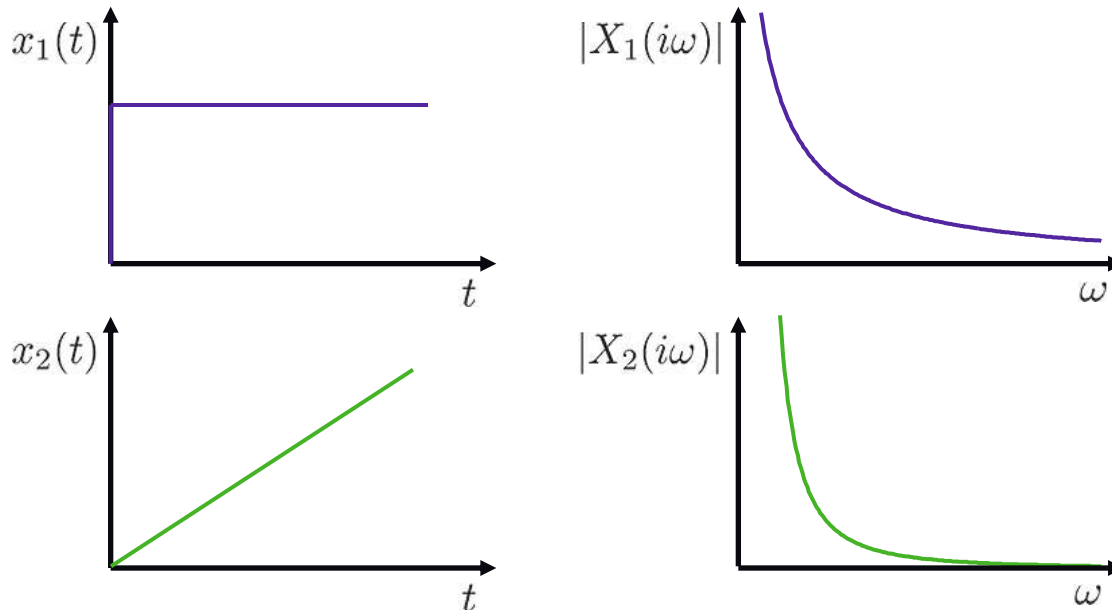
Ist dies nicht gewährleistet, kommt es zu Aliasing, d.h. die Frequenzkomponenten mit $f > \frac{1}{2}f_0$ werden in den Bereich niedrigerer Frequenzen gespiegelt. Auf diese Weise können hochfrequente Störsignale großen Schaden anrichten und niederfrequente Nutzsignale überlagern.

In der Praxis wählt man ca. $f_0 = 5 \dots 10 f_{\max}$

1.3 Analoge und digitale Signale

Veranschaulichung des Abtasttheorems und des Aliasing-Effekts

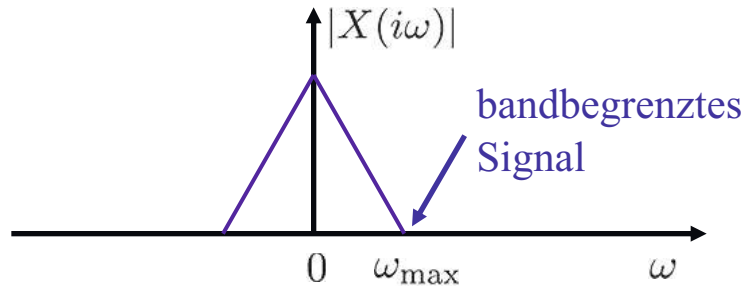
Wenn das Abtasttheorem eingehalten wird, kann das Originalsignal aus dem abgetasteten Signal rekonstruiert werden, d.h. es findet durch die Abtastung kein Informationsverlust statt. In Realität sind aber die meisten Signale nicht bandbegrenzt, haben also gar keine Komponente maximaler Frequenz f_{\max} bzw. $f_{\max} = \infty$. Vielmehr sind in vielen typischen Signalen (Sprünge, Rampen, Rechtecke, ...) alle Frequenzen von 0 bis unendlich enthalten. Solche Signale lassen sich daher aus dem abgetasteten Signal nicht perfekt rekonstruieren.



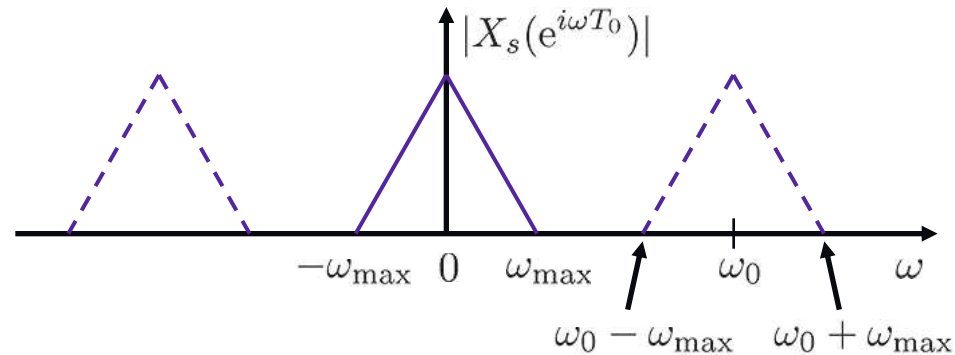
1.3 Analoge und digitale Signale

Veranschaulichung des Abtasttheorems und des Aliasing-Effekts

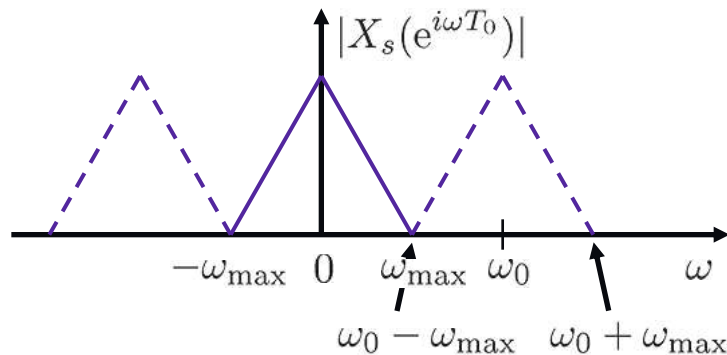
Spektrum des kontinuierlichen Signals



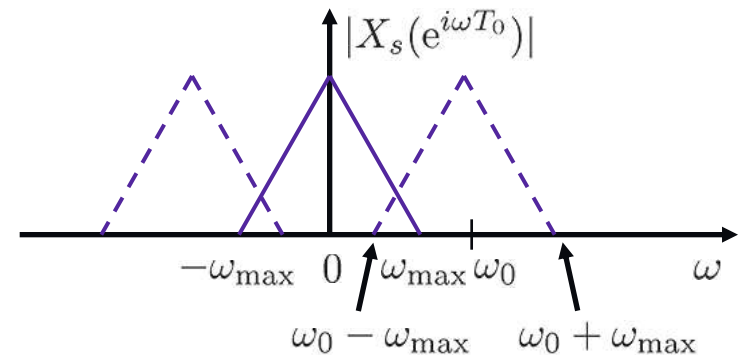
Spektrum des abgetasteten Signals $\omega_0 > 2\omega_{\max}$



Spektrum des abgetasteten Signals $\omega_0 = 2\omega_{\max}$

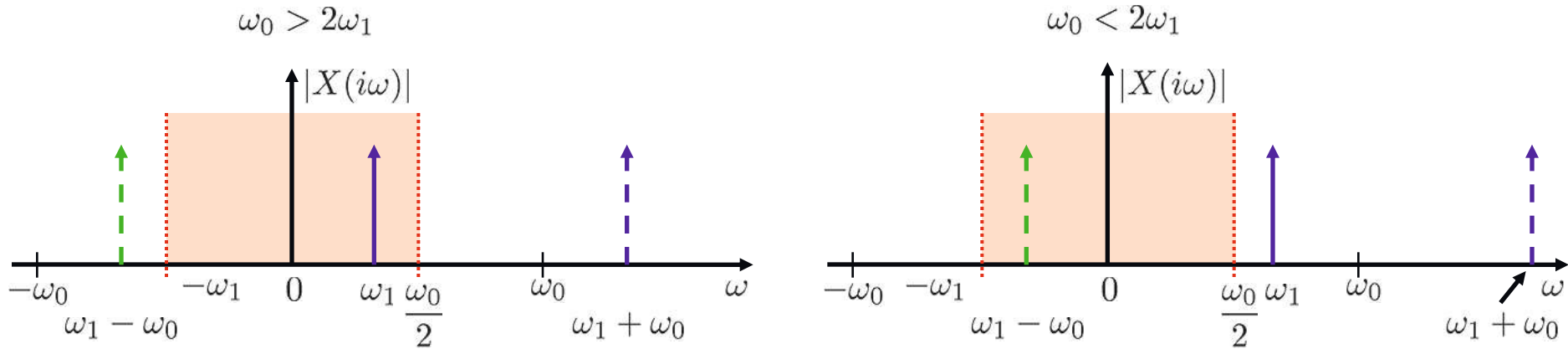


Spektrum des abgetasteten Signals $\omega_0 < 2\omega_{\max}$



1.3 Analoge und digitale Signale

Aliasing bei der Abtastung einer Sinus-Schwingung mit Kreisfrequenz ω_1



Jede Signalkomponente der Frequenz ω_1 wird durch das Abtasten an folgende Frequenzen gespiegelt:

$$\omega_l = \omega_1 + l\omega_0 \quad \text{mit } l = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Solange ω_1 im roten Bereich bleibt, also das Abtasttheorem nicht verletzt, liegen die gespiegelten Komponenten außerhalb des roten Bereichs (linkes Bild).

Sobald ω_1 den roten Bereich verlässt, wandert eine gespiegelte Komponente hinein und verursacht Aliasing (rechtes Bild)!

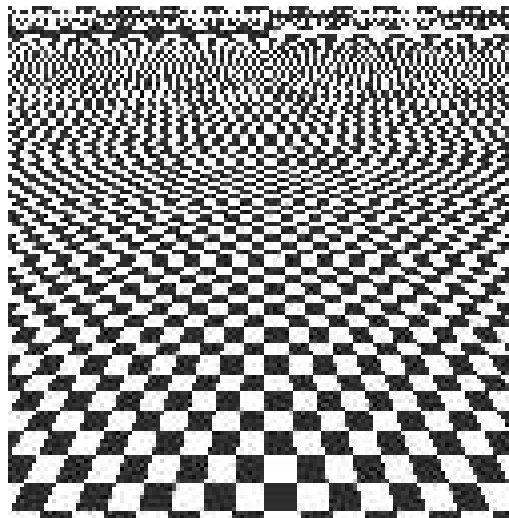
Wandert ω_1 bis ω_0 , so entsteht eine Alias-Komponente bei $\omega = 0$ (stehendes Speichenrad).

1.3 Analoge und digitale Signale

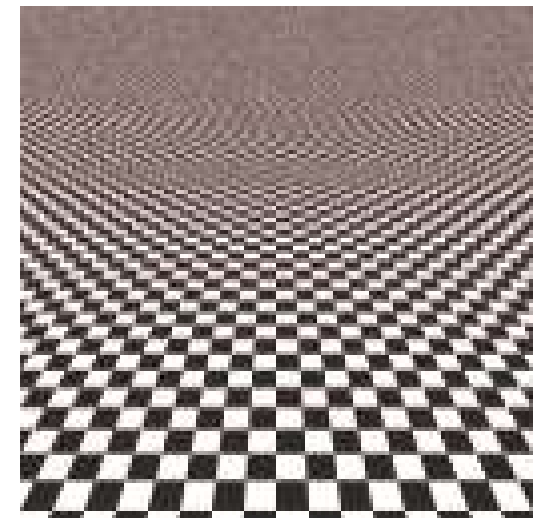
Aliasing in der Bildverarbeitung

Die Signalverarbeitung taucht nicht nur im Zusammenhang mit *zeitlichen* Signalen auf. Auch für *räumliche* Signale wie z.B. Bilder (2-dim. räumliche Signale) gelten die selben Gesetze. So wie man zeitliche Signale filtern kann, ist Gleiches auch mit räumlichen Signalen möglich. In der Bildverarbeitung tritt deshalb ebenfalls der Aliasing-Effekt auf. Eine hohe (räumliche) Frequenz entspricht einer dichten Abfolge von abwechselnd hellen und dunklen Punkten. Wenn bei der Reduzierung der Auflösung (entspricht der Abtastung) kein Anti-Aliasing-Filter verwendet wird, spiegeln die hohen Frequenzen in die niederfrequenten Bereiche und stören das Bild. Ähnliches kennt man vom Fernsehen, wenn jemand Kleidung mit kleinem Karomuster trägt. In der Bildverarbeitung nennt man dies **Moiré-Effekt**.

Ohne Anti-Aliasing



Mit Anti-Aliasing



1.3 Analoge und digitale Signale

Quantisierungsfehler

Durch die Quantisierung der Amplitude bei der A/D-Wandlung wird ein kontinuierlicher Zahlenbereich auf einen diskreten abgebildet. Das bedeutet, dass jeweils einem Intervall ein fester Zahlenwert zugeordnet wird. Alle Zahlen innerhalb dieses Intervalls sind dann nach der Quantisierung nicht mehr unterscheidbar. Wenn wir einen kontinuierlichen Zahlenbereich von x_{\min} bis x_{\max} auf mit n Bits quantisieren wollen, dann ergeben sich 2^n Intervalle bzw. **Quantisierungsstufen**. Damit berechnet sich der maximale Quantisierungsfehler zu

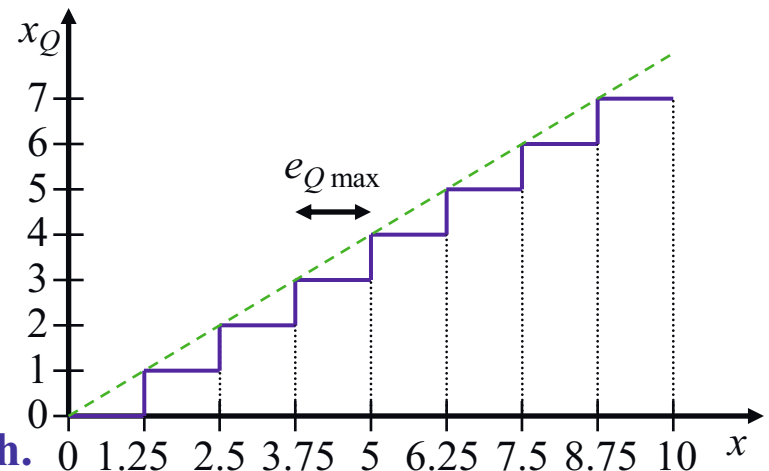
$$e_{Q \max} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2^n}$$

denn dies entspricht der Intervallbreite. Der Quantisierungsfehler ist stets positiv, da die grüne Kurve immer über der blauen liegt.

Beispiel: $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = 10$, $n = 3$ Bits

$$e_{Q \max} = 10 / 8 = 1.25$$

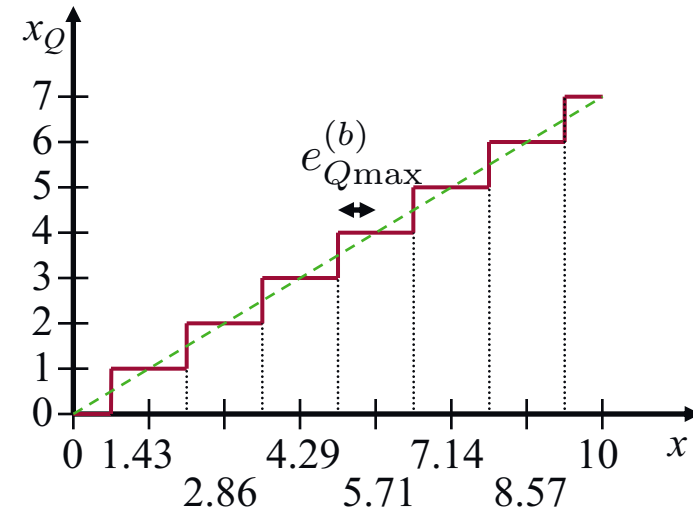
In der Praxis sind 8, 12, 16 Bit A/D-Wandler üblich.



1.3 Analoge und digitale Signale

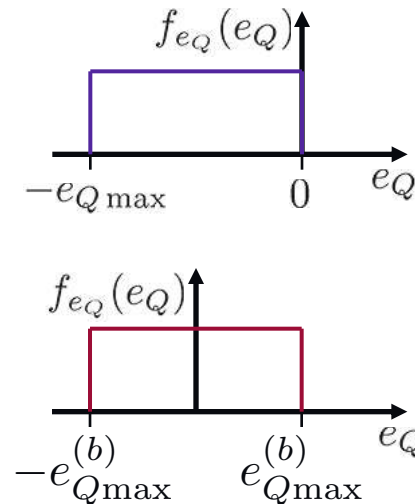
Man kann den maximalen Quantisierungsfehler (fast) halbieren, wenn man die blaue Kurve um $e_Q/2$ nach links schiebt. Dann würde nicht immer abgerundet, sondern kaufmännisch gerundet. Nun liegen x_{\min} und x_{\max} nicht mehr an den Rändern der Intervalle sondern in deren Mitte. Der maximale Quantisierungsfehler beträgt also:

$$e_{Q\max}^{(b)} = \frac{1}{2} \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2^n - 1}$$



Quantisierungsrauschen

Obwohl der Quantisierungsfehler ein *systematischer* Fehler ist, erscheint die genaue Lage eines Messwerts auf dem kontinuierlichen Zahlenstrahl wie zufällig; deshalb spricht man auch von **Quantisierungsrauschen**. Da prinzipiell alle Zahlen gleichwahrscheinlich sind, kann man das Quantisierungsrauschen gut als eine gleichverteilte Zufallsgröße beschreiben. Bei alten Synthesizern kann man das Quantisierungsrauschen hören, wenn ein Ton immer leiser wird.



1.4 A/D- und D/A-Wandler

A/D-Wandler: Grundlagen

Die drei wichtigsten Kenngrößen eines A/D-Wandlers sind:

- Auflösung
- Geschwindigkeit
- Realisierungsaufwand

Diese Größen stehen in Konflikt miteinander, d.h. eine höhere Auflösung wirkt sich entweder negativ auf die Geschwindigkeit oder den Realisierungsaufwand aus (oder beides).

Unter **Auflösung** versteht man die Anzahl an Bits n bzw. an Quantisierungsstufen 2^n , in die ein analoger Wert gewandelt wird. Es ist nicht sinnvoll, hier eine höhere Auflösung zu wählen als die Messgenauigkeit des Signals. Andernfalls ergeben sich die geringstwertigen Bits zufällig aus dem Rauschen und enthalten keine nützliche Information.

Die **Geschwindigkeit** (Bandbreite) bestimmt, in welchem zeitlichen Abstand der nächste Wert gewandelt werden kann. Damit ist die maximal mögliche Abtastrate festgelegt.

Der **Realisierungsaufwand** macht sich im Wesentlichen bei den Kosten bemerkbar.

Die **Unabhängigkeit von Umgebungseinflüssen** ist ein weiteres wichtiges Kriterium.

1.4 A/D- und D/A-Wandler

A/D-Wandler: Paralleles Prinzip bzw. Flash-Wandler [1]

Die zu wandelnde Spannung U_E wird unmittelbar mit n verschiedenen Referenzspannungswerten verglichen. Dazu wird praktisch für jeden der $2^n - 1$ möglichen Ausgangswerte ein Komparator benötigt.

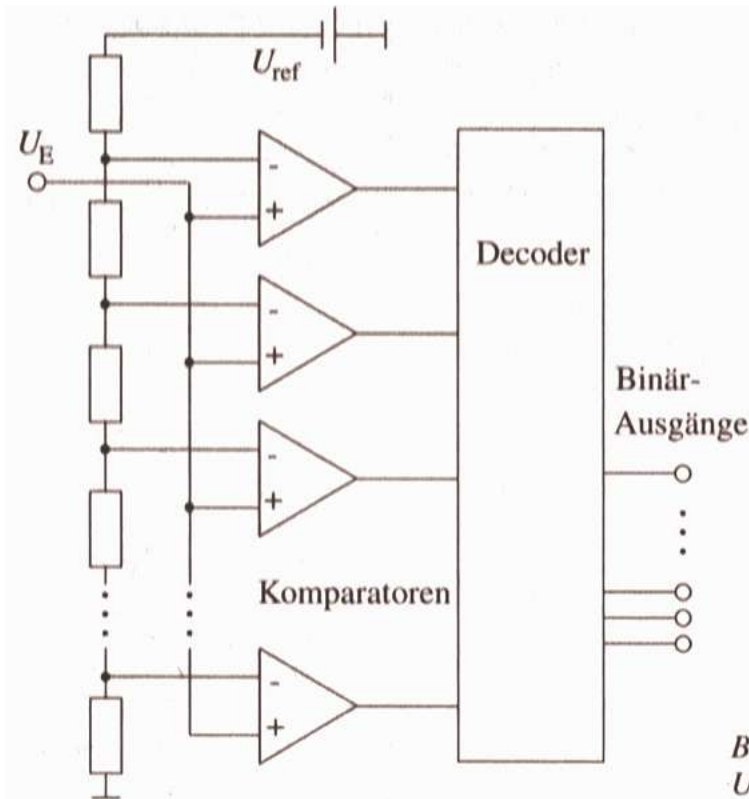


Bild 5.5 Parallel-A/D-Umsetzer

Eigenschaften: Sehr hohe Geschwindigkeit (10 MHz), geringe Auflösung (8 Bit).

Einsatzgebiet: Videotechnik.

1.4 A/D- und D/A-Wandler

A/D-Wandler: Sukzessive Approximation bzw. Wägeverfahren [1]

Die Arbeitsweise ist identisch zum Wiegen mit einer Balkenwaage, wobei Gewichte der Größe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}$ zur Verfügung stehen. Anfangend mit dem schwersten Gewicht werden nacheinander die Gewichte aufgelegt. Falls die Waage kippt, wird das letzte Gewicht wieder heruntergenommen; falls nicht, bleibt es liegen. Am Ende der n Schritte liegt das Vergleichsgewicht in digitalisierter Form vor. Die Gewichte werden durch Spannungen und die Balkenwaage durch Komparatoren schaltungstechnisch realisiert.

Eigenschaften: Mittlere bis hohe Geschwindigkeit (1 MHz), Auflösung: 12, 16, auch 24 Bit.

Einsatzgebiet: PC-Karten zur Messwerterfassung.

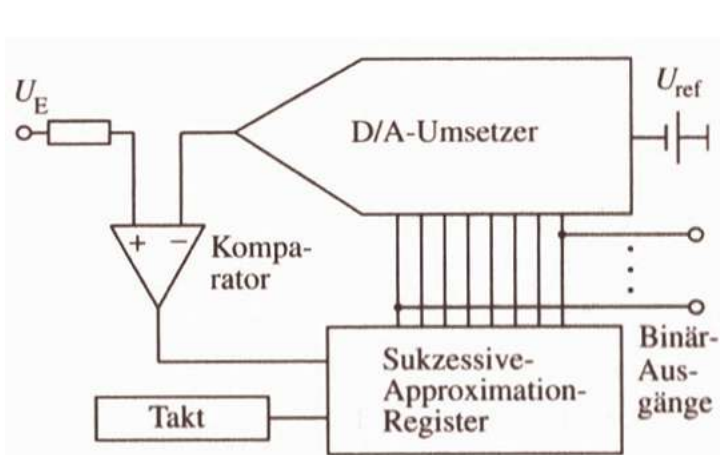


Bild 5.6 Sukzessive-Approximation-A/D-Umsetzer

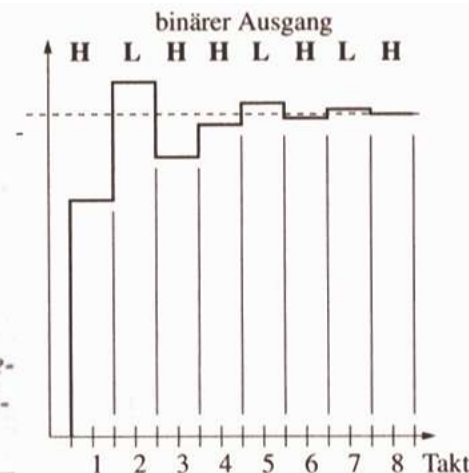


Bild 5.7 Aufbau des binären Ausgangssignals beim Sukzessive-Approximation-A/D-Umsetzer

1.4 A/D- und D/A-Wandler

A/D-Wandler: Nachlauf-Prinzip bzw. Servo-Prinzip [1]

Es wird ständig die Differenz zwischen der zu wandelnden Eingangsspannung U_E und dem zurück ins Analoge gewandelten Ausgang des A/D-Wandlers gebildet. Ist diese Differenz gleich null, dann hat der A/D-Wandler die Eingangsspannung korrekt ins Digitale gewandelt. Bei positiver bzw. negativer Differenz wird der Wandlerausgang mit einem Zähler hoch- bzw. runtergezählt bis die Differenz gleich null ist (Rückkopplung = Prinzip eines Regelkreises). Weil der Zähler mit einer festen Geschwindigkeit zählt, dauert die Wandlung lange,

wenn die Ausgangsspannung weit von der Eingangsspannung entfernt ist, also beim Einschalten oder bei schnellen Änderungen der Eingangsspannung (z.B. Sprünge). kann dieser Wandler aber sehr gut und schnell folgen.

Eigenschaften: Geschwindigkeit ist abhängig von Sprunghöhe des Eingangs.

Einsatzgebiet: Kontinuierliche Wandlung langsam veränderlicher Spannungen.

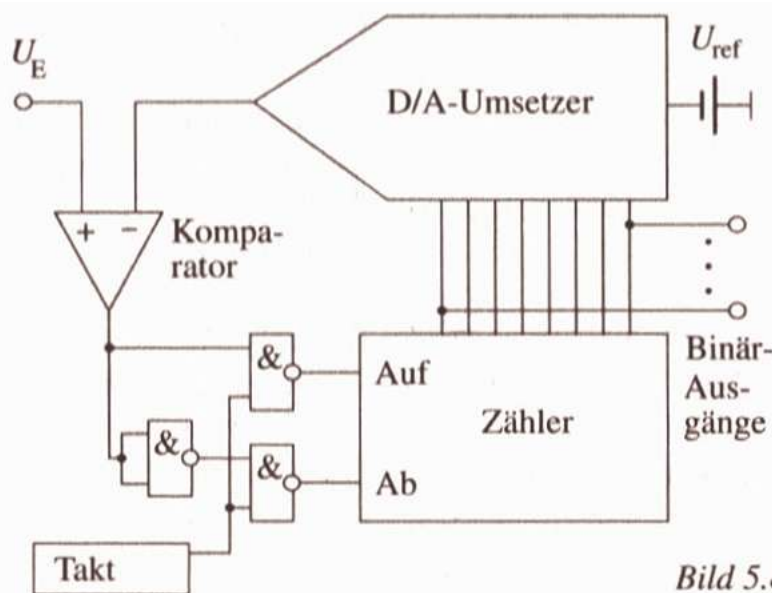


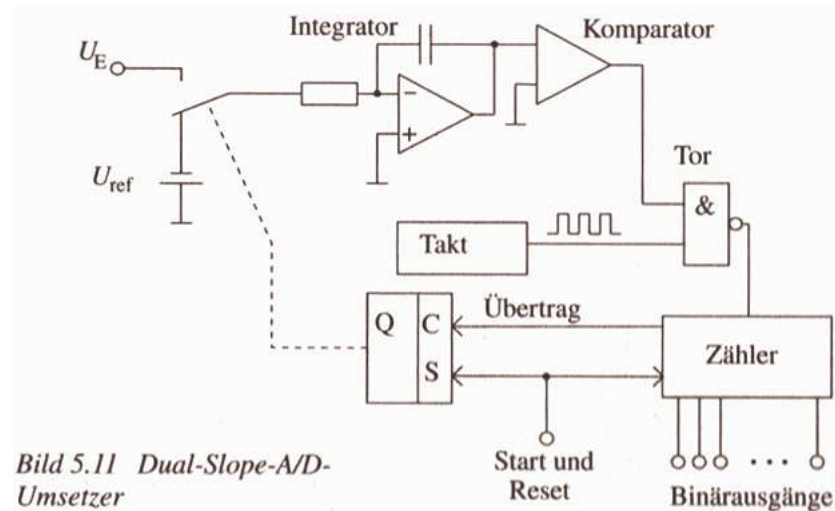
Bild 5.8 Nachlauf-A/D-Umsetzer

1.4 A/D- und D/A-Wandler

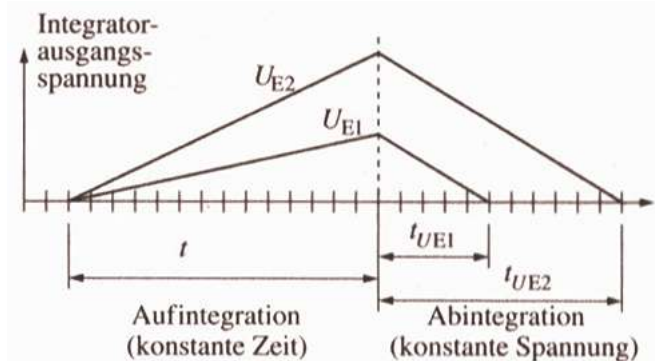
A/D-Wandler: Dual-Slope-Prinzip [1]

Der Dual-Slope-Wandler verwendet ein erweitertes **Rampenverfahren**. Dabei wird mit einem Integrator die zu wandelnde Eingangsspannung U_E über eine konstante Zeit t aufintegriert. Danach wird von dieser aufintegrierten Spannung wieder über eine Referenzspannung U_{ref} bis null abintegriert. Während dieser Abintegration läuft ein Zähler, dessen Stand am Ende proportional zu U_E ist.

Eigenschaften: Hervorragende Qualität und Störunterdrückung, da unabhängig von Baudaten und Umgebungseinflüssen (heben sich bei Auf- und Abintegration auf). Niedrige Geschwindigkeit, weil Integration viel Zeit benötigt.



Einsatzgebiet: Digitalvoltmeter.



1.4 A/D- und D/A-Wandler

A/D-Wandler: Sigma-Delta-Prinzip bzw. Charge-Balance- oder 1-Bit-Verfahren [1]

Im ersten Teil eines Sigma-Delta-Wandlers wird eine Bitfolge (*bitstream*) erzeugt, deren Mittelwert, der zu wandelnden Eingangsspannung U_E proportional ist. Dies wird durch einen Regelkreis erreicht, in dem die Differenz zwischen U_E und einer positiven bzw. negativen Referenzspannung auf einen Komparator geleitet wird, dessen Ausgang dann aufintegriert wird. Für $U_E = 0\text{ V}$ sind die Auf- und Abintegrierphasen gleich lang. Im zweiten Teil eines Sigma-Delta-Wandlers wird mittels Zählung die Bitfolge in einen Digitalwert umgewandelt.

Eigenschaften: sehr hohe Auflösung (24 Bit), mittlere Geschwindigkeit.

Einsatzgebiet: Audiotechnik, Messtechnik.

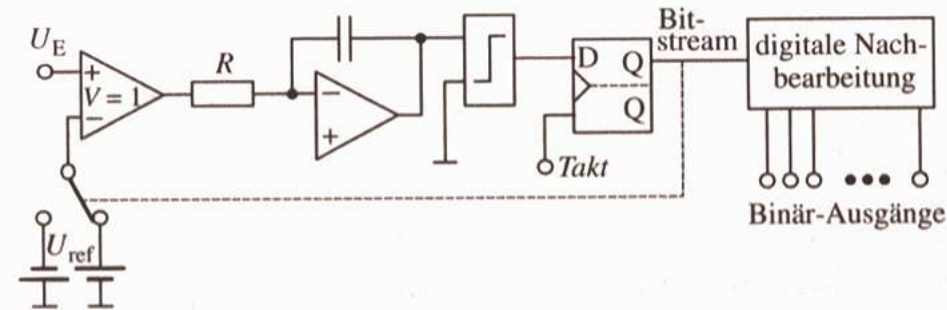


Bild 5.15 Delta-Sigma-Umsetzer

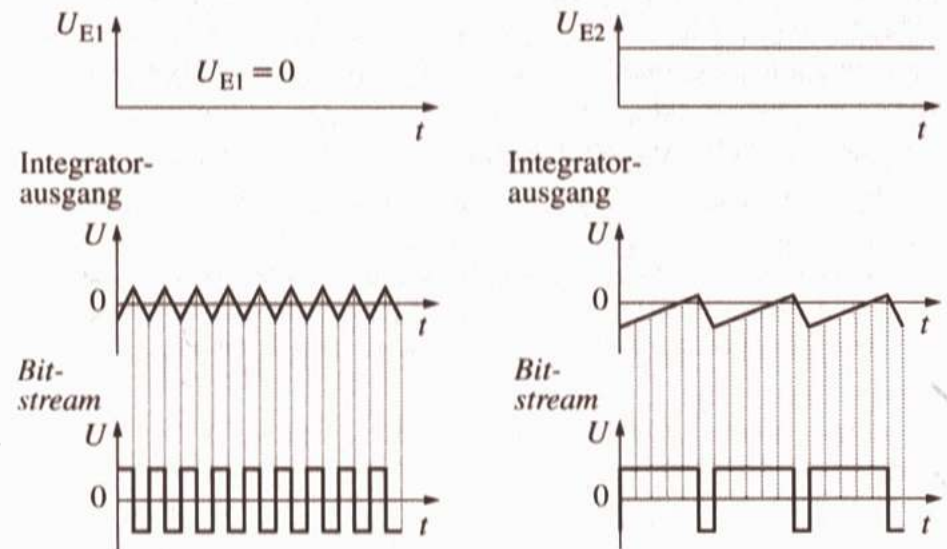


Bild 5.16 Funktionsweise des Delta-Sigma-Umsetzers

1.4 A/D- und D/A-Wandler

D/A-Wandler: Stromgewichtetes Prinzip [1]

Im Vergleich zur A/D-Wandlung ist die D/A-Wandlung eine relativ einfache Aufgabe.

Eine Möglichkeit besteht darin, einen konstanten Strom durch geometrisch gestaffelte Widerstände zu schicken, also durch $R, 2R, 4R, 8R, \dots$, wobei die an den Widerständen abfallende Spannung den verschiedenen Bits zugeordnet wird und der Strom nur durch die eingeschalteten Bits (1) fließt.

Die Summe der Spannungen entspricht dann dem gewandelten Wert. Z.B. ergibt die Bitfolge 0001 1010 die Spannung:

$$U = (16R + 8R + 2R)I = 26RI$$

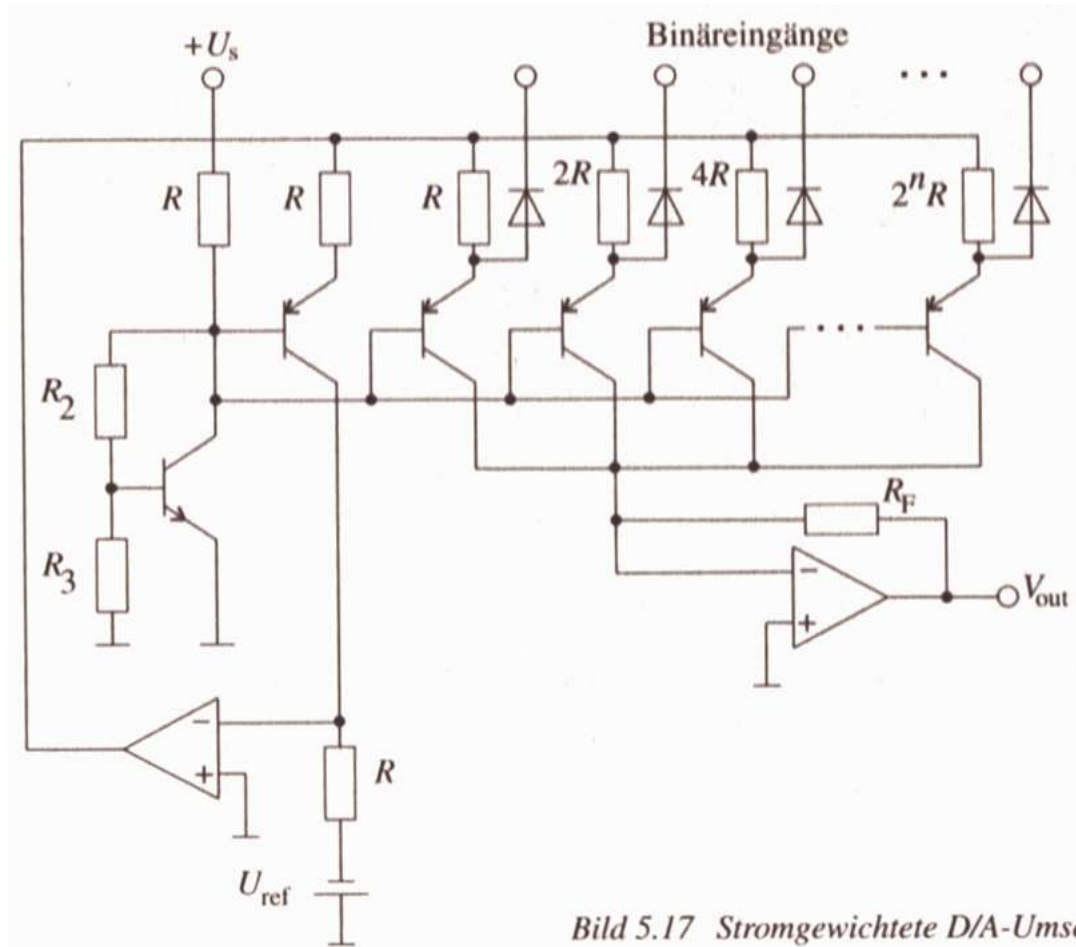


Bild 5.17 Stromgewichtete D/A-Umsetzer

1.4 A/D- und D/A-Wandler

D/A-Wandler: R-2R Prinzip [1]

Beim R-2R-Wandler wird ein Strom an jedem Knoten in 2 Hälften geteilt. Die eine Hälfte erzeugt an einem Widerstand 2R eine Spannung, die zweite Hälfte wird erneut in 2 Hälften geteilt usw. Hauptvorteil im Vergleich zum stromgewichteten Prinzip ist, dass hier nur zwei Sorten Widerstände der Größe R und 2R benötigt werden. Diese sind viel leichter, billiger und in guter Qualität und Temperaturunabhängigkeit zu fertigen als die verschiedenen Widerstände beim stromgewichteten Prinzip von z.B. R, 2R, ..., 1024R (bei einem 10 Bit Wandler).

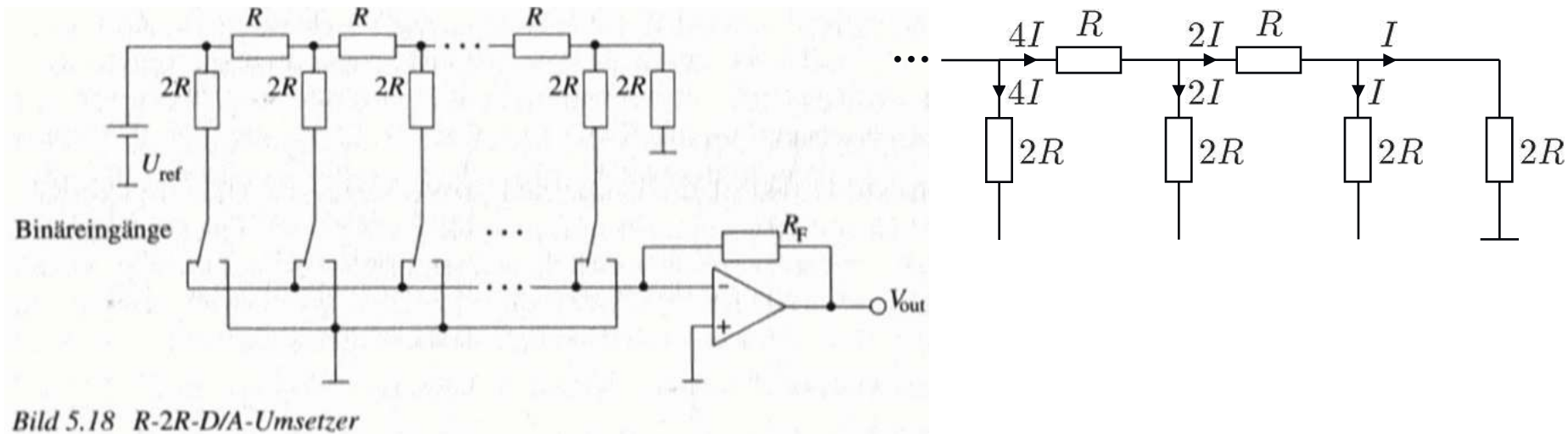
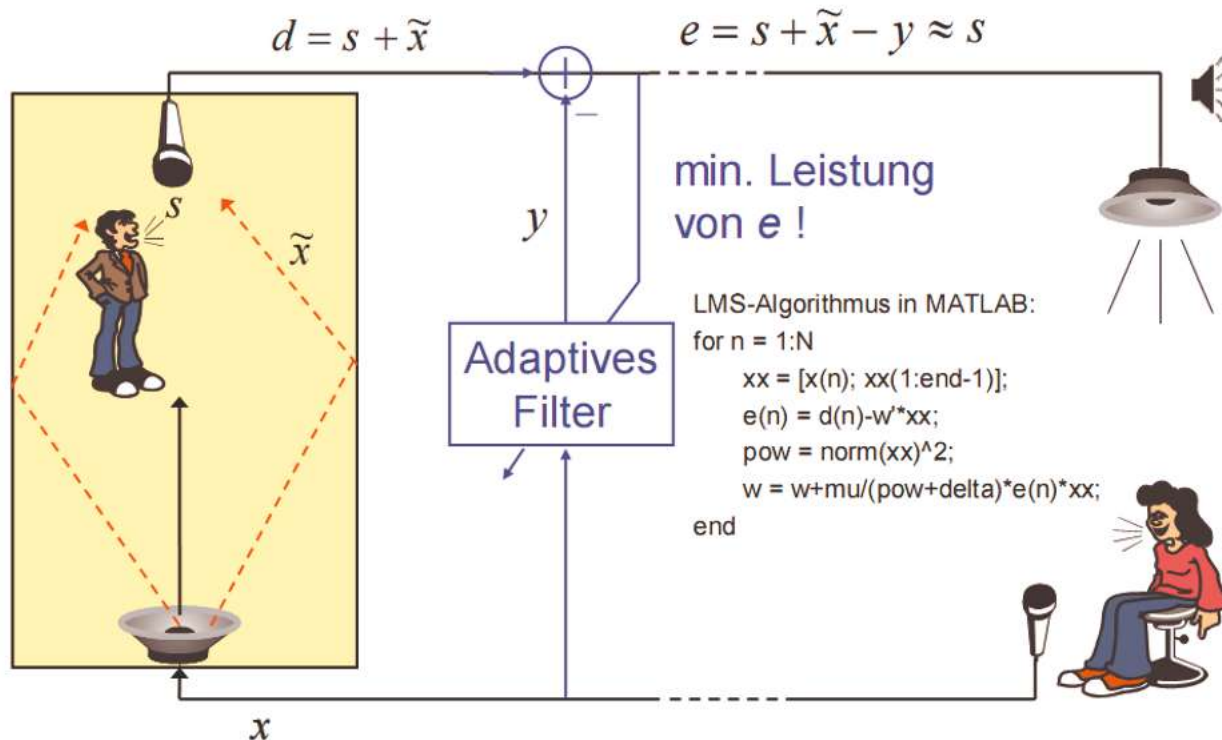


Bild 5.18 R-2R-D/A-Umsetzer

1.5 Anwendungsbeispiele

Akustische Echokompensation (Freisprechen)

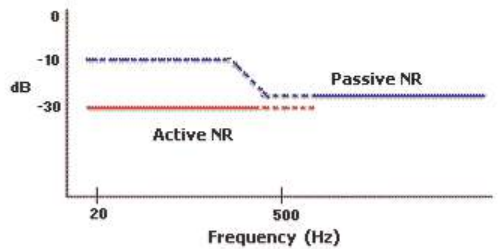
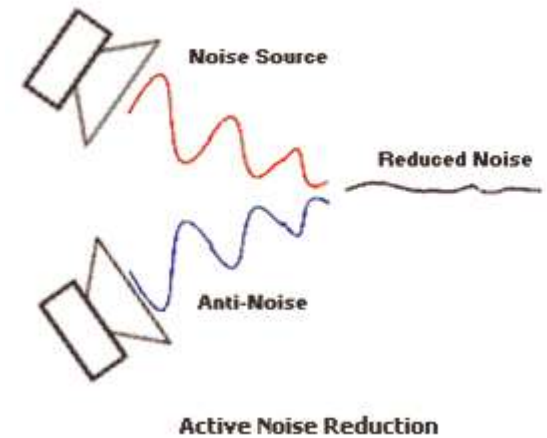
- Adaptive (sich ständig selbst anpassendes) Filter eliminiert die störenden Rückkopplungen (Pfeifgeräusche), indem es die Übertragungscharakteristik von Lautsprecher zu Mikrophon modelliert und diesen Signalteil vom Gesamtsignal abzieht.



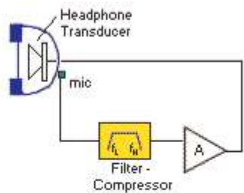
1.5 Anwendungsbeispiele

Aktive Rauschkompensation (*Active Noise Cancellation*)

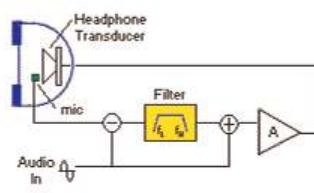
- Durch Messen des Rauschens und aktives Erzeugen und Einspeisen eines gegenphasigen (um 180° verschobenen) Signals wird mittels destruktiver Interferenz das Rauschen ausgelöscht bzw. in der Praxis zumindest stark reduziert.
- Funktioniert sehr gut im niederfrequenten Bereich bis ca. 1000 Hz.
- Dämpfung (aktiv+passiv) bis ca. -30 dB möglich!



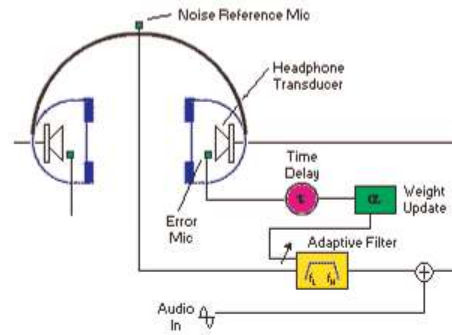
Operational Range of Active and Passive Noise Reduction



Noise-Filtering Headphone

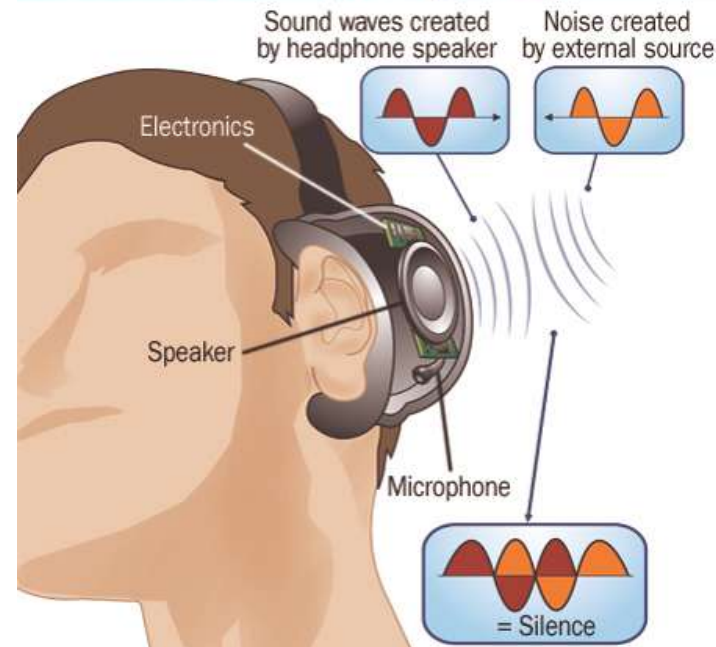


Closed-Loop ANR with Internal Mic



Adaptive Noise Cancellation Headphones

Inside noise-canceling headphones



1.5 Anwendungsbeispiele

Beispiel: Aktive Rauschunterdrückung beim *Sony Xperia Z2*

- Funktioniert übers Handy, nicht Kopfhörer alleine.
- Nutzt Prozessor und Batterie des Handys.

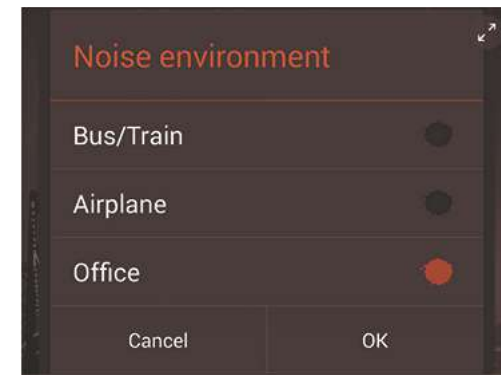
Quelle: <https://www.theguardian.com/technology/2014/apr/17/sony-xperia-z2-review-phone-android>:

Noise cancelling

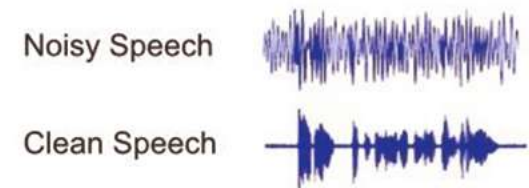
The Xperia Z2 is the first smartphone with active noise-cancelling technology integrated into its body for use with a special headset. The headset contains microphones that monitor incoming noise and send it back to the Z2, which then blends in noise cancellation to whatever is being played.

Active noise-cancelling is not a new thing, but normally it requires headsets with a bulky battery and electronics pack attached to the headphone wire. Sony has squeezed the circuitry and software into the Z2, removing the bulk that normally makes noise-cancelling earphones bulky or heavy.

Because the noise cancelling control system is built into the phone, you can select an appropriate profile for the noise to block out - the options are planes, trains, buses and the office - which makes the technology much more effective. I found the office setting to be particularly effective at blocking out the hubbub of an open-plan office, much more so than most other noise-cancelling ear or headphones.



Sony MDR-NC31EM Digital Noise Cancelling Headset (Amazon UK)

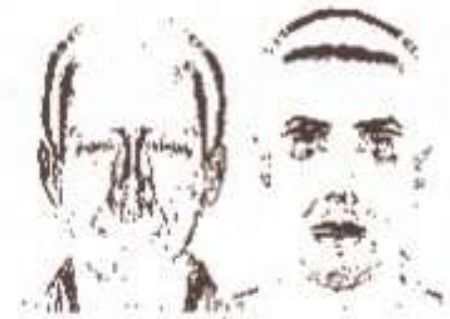


Quelle: <http://www.techradar.com/news/phone-and-communications/mobile-phones/background-noise-reduction-one-of-your-smartphone-s-greatest-tools-1228924>

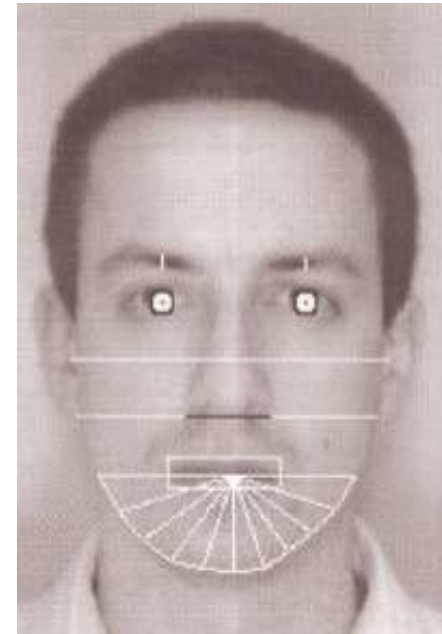
1.5 Anwendungsbeispiele

Gesichtserkennung

- Durch Gradientenbildung in x - und y -Richtung werden vertikales und horizontales Kantenbild berechnet.
- Aus den Kantenbildern werden die Merkmalspositionen bestimmt.
- Es ergeben sich 22 Merkmale, die extrahiert werden:
 - vertikale Position der Nase und Nasenbreite
 - vertikale Position des Mundes, Mundbreite und Mundhöhe
 - vertikale Position und Dicke der Augenbrauen über Augenmitte
 - 11 Radien, die die Form des Kinns beschreiben
 - Breite des Gesichts an der Nasenunterkante
 - Breite des Gesichts auf der Höhe des Mittelpunkts von Augen und Nase



Vertikales und horizontales Kantenbild



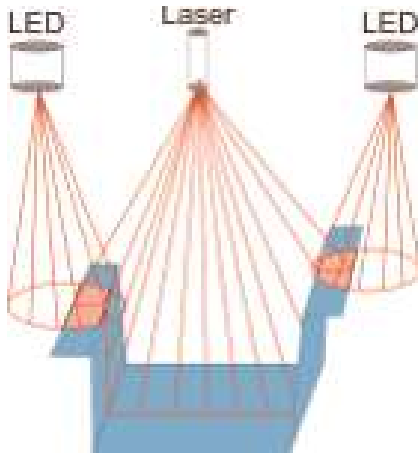
22 Merkmale im Gesicht, die zur Identifikation einer Person verwendet werden

Quelle: www.markus-hofmann.de

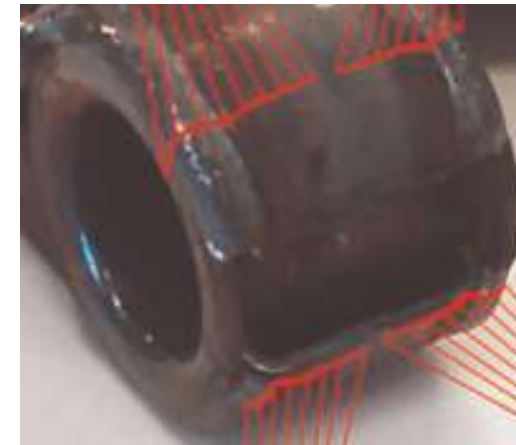
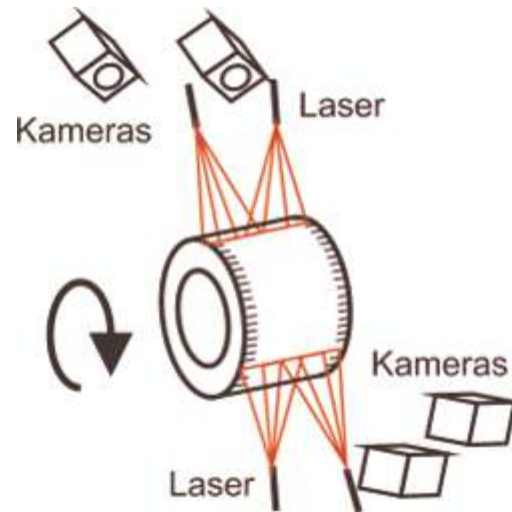
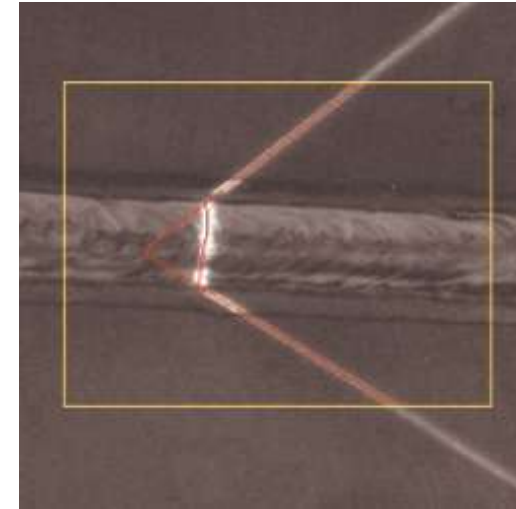
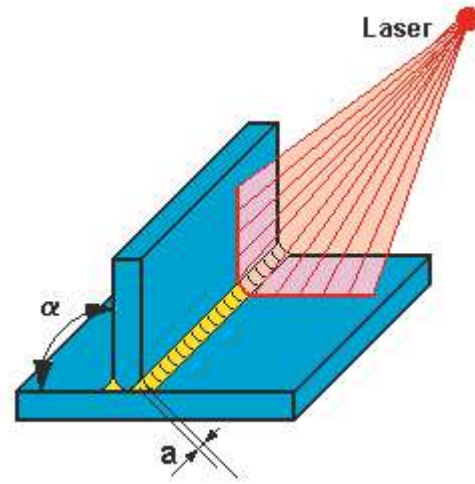
1.5 Anwendungsbeispiele

Industrielle Bildverarbeitung

Bauteilvermessung zur Überwachung von Fertigungstoleranzen



Überwachung der Qualität von Schweißnähten



1.5 Anwendungsbeispiele

Bildkompression

Bild 279 x 356 Pixel: als *.tif (ohne Verlust): 394 kB

*.jpg (100%): 119 kB

*.jpg (60%): 22 kB



1.5 Anwendungsbeispiele

Bildkompression

Bild 279 x 356 Pixel: als *.tif (ohne Verlust): 394 kB

*.jpg (100%): 119 kB

*.jpg (20%): 10 kB



1.5 Anwendungsbeispiele

Bildkompression

Bild 279 x 356 Pixel: als *.tif (ohne Verlust): 394 kB

*.jpg (100%): 119 kB

*.jpg (10%): 5,4 kB



1.5 Anwendungsbeispiele

Bildkompression

Bild 279 x 356 Pixel: als *.tif (ohne Verlust): 394 kB

*.jpg (100%): 119 kB

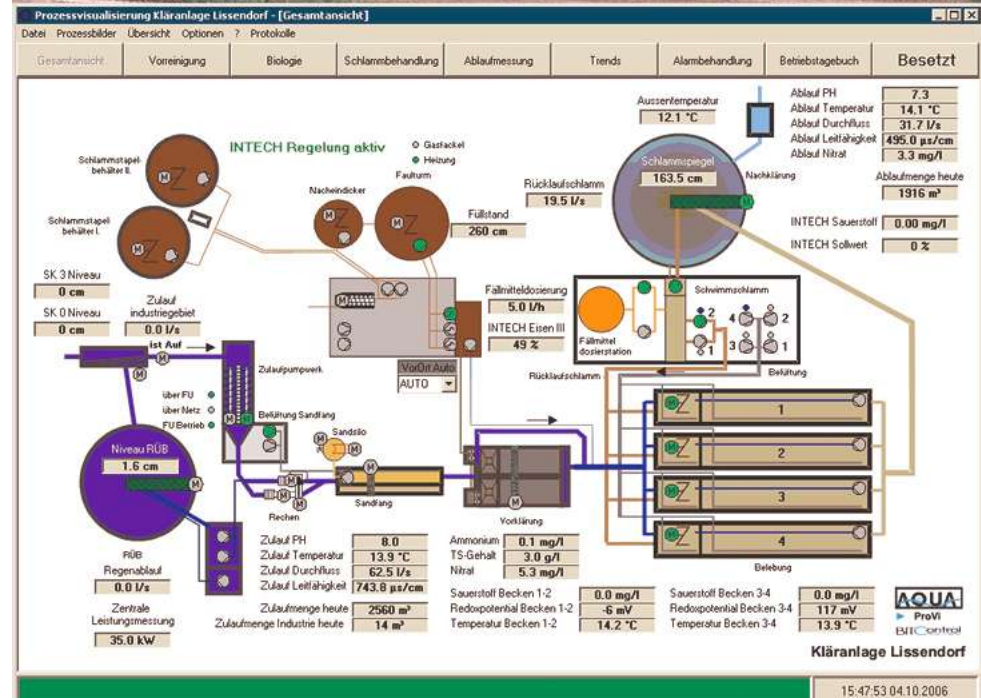
*.jpg (2%): 2,1 kB



1.5 Anwendungsbeispiele

Prozessleitsystem für Kläranlage

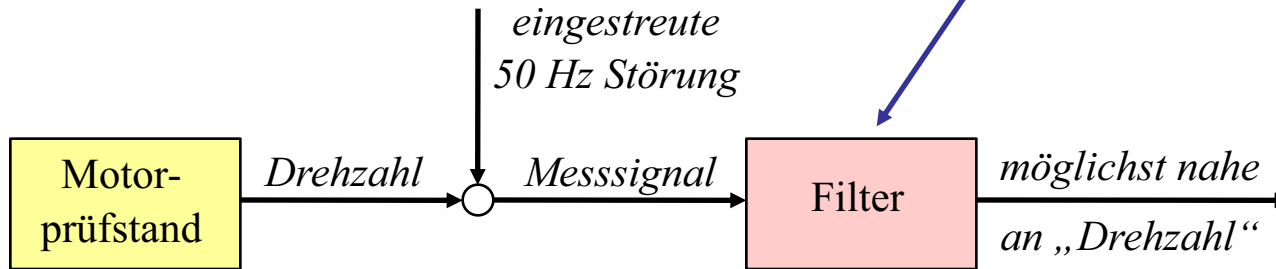
- Graphische Darstellung der Anlage
- Messung von vielen Prozessgrößen
 - Temperaturen
 - Durchflüsse
 - Konzentrationen
- Messung von Störgrößen
- Protokollierung aller Mess- und Stellgrößen
- Regelung von einigen Größen
- Überwachung von Grenzwerten
- Sensorfehlerdiagnose
- Optimierung von Profilen für die Führungsgrößen
- Manuelle Feinjustierung über Leitsystem



1.5 Anwendungsbeispiele

Unterdrückung von Störsignalen

Beispiel:



Ziel: Nutzsingal „Drehzahl“ unverändert passieren lassen aber Störsingal unterdrücken.

Wie muss ein Filter beschaffen sein, um eine Störung möglichst gut zu unterdrücken?

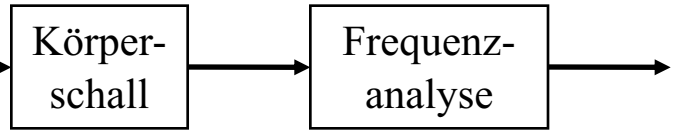
- Was heißt „möglichst gut“? → Kriterium nötig!
- Struktur des Filters: linear/nichtlinear, FIR/IIR, Ordnung, ... ist festzulegen.
- Parameter des Filters sind zu bestimmen.
- Vorwissen über die Störung notwendig
 - Art: stochastisch oder deterministisch
 - Frequenzbereich: Frequenzband oder einzelne Frequenzen

1.5 Anwendungsbeispiele

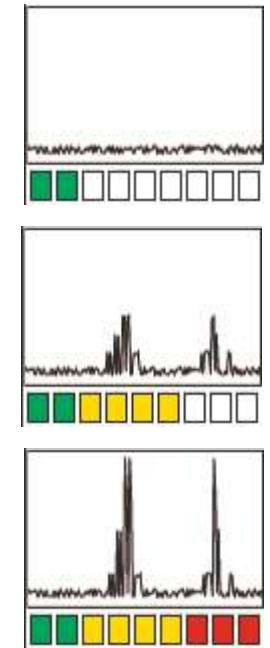
Erkennung von Lagerschäden durch Analyse des Körperschalls

- Mensch/Experte ist oft in der Lage, am Geräusch einer Maschine Fehler zu erkennen, manchmal sogar sich anbahnende, noch nicht voll ausgeprägte Fehler.
- Charakteristische Merkmale sind meist im Spektrum des Schallsignals zu finden.
- Automatische Verfahren zur Berechnung und Analyse des Schallspektrums gefragt!

Lagerschaden?



Schallspektrum



kein Schaden

entstehender Schaden

fortgeschrittener Schaden

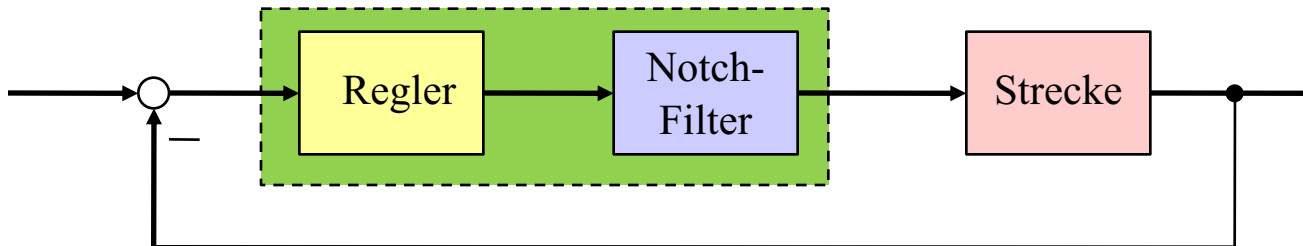
1.5 Anwendungsbeispiele

Notch-Filterung in Positionsregelkreisen in der Luft- und Raumfahrt

Notch-Filter (Kerb-Filter) sind Bandsperren, die ein sehr schmales Frequenzband unterdrücken. Sie eignen sich für Anwendungen, bei denen die zu unterdrückende Frequenz sehr genau bekannt ist, z.B.:

- Schiffsregelung: Elimination der Störung durch die periodischen Wellen.
- Regelung von Flugzeugen, Solar Panels und anderen leicht gedämpften Strukturen (Leichtbau wird überall immer wichtiger!): Unterdrückung der Frequenzen der ersten Moden (Eigenfrequenzen) der mechanischen Strukturen.
- Funk- und Radioempfängern: Herausfiltern unerwünschter Frequenzen (Interferenzen).

Regelkreis mit eingebautem Notch-Filter zur Dämpfung der Strecken-Resonanzen

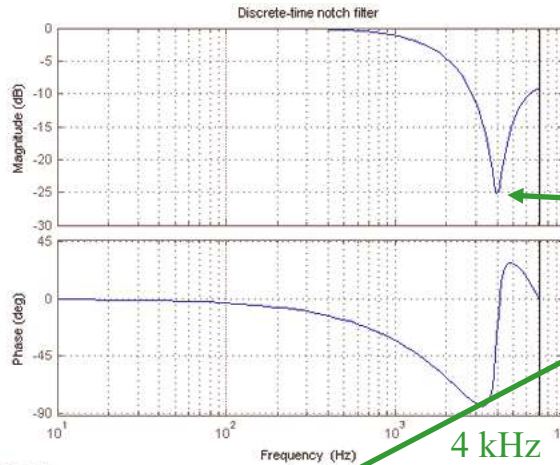


1.5 Anwendungsbeispiele

Beispiel: Schreib/Lesekopf-Regelung einer Harddisk

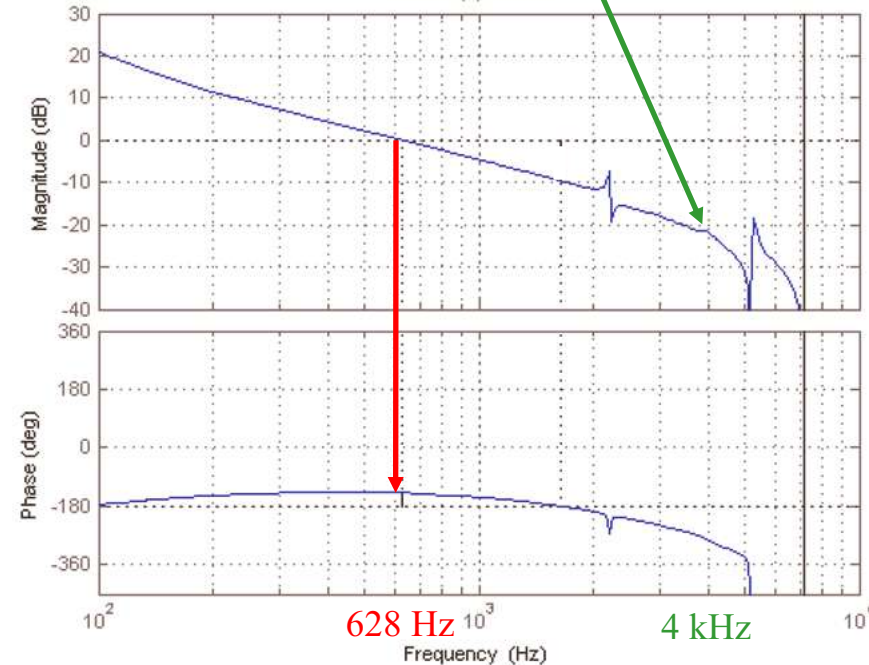
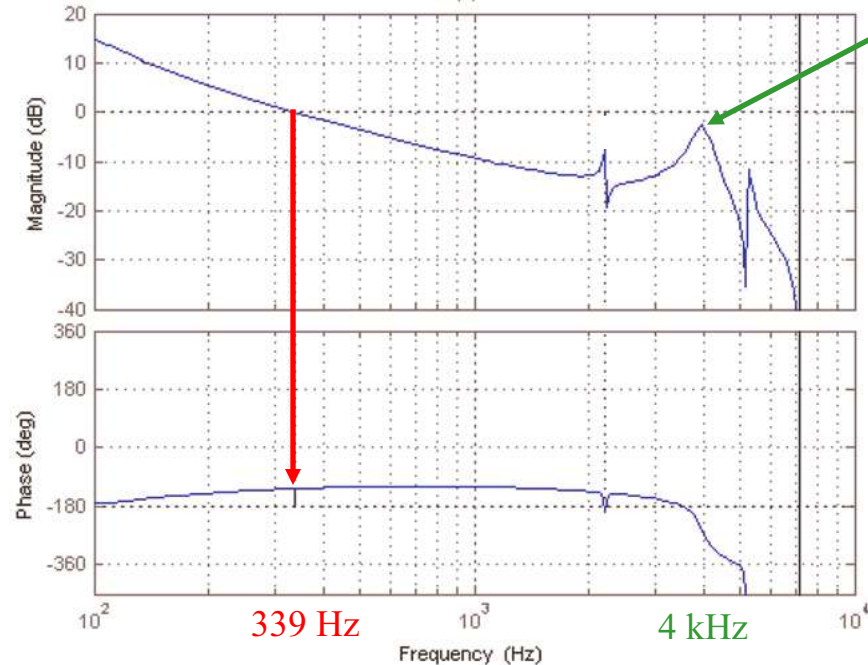
- Verbesserung des Bode-Plots des offenen Kreises
- Notch-Filter bei 4 kHz

Starke Dämpfung bei 4 kHz drückt den Amplitudengang nach unten und vergrößert den Amplitudenrand!



Bode Diagram
Gm = 7.07 dB (at 2.2e+003 Hz), Pm = 55.4 deg (at 339 Hz)
From: In(1) To: PES

Bode Diagram
Gm = 9.56 dB (at 1.64e+003 Hz), Pm = 41.7 deg (at 628 Hz)
From: In(1) To: PES

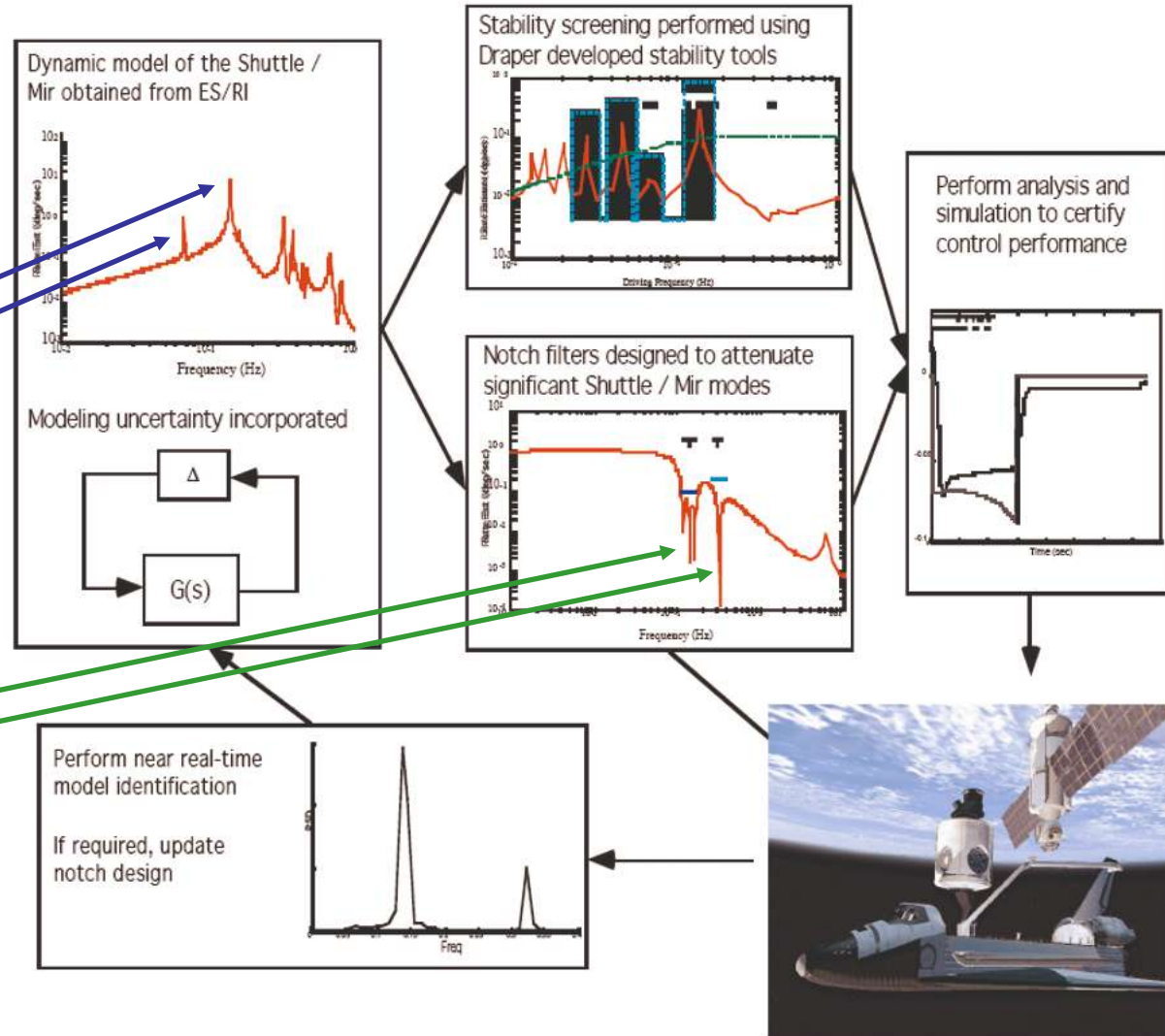


1.5 Anwendungsbeispiele

Beispiel: Regelung des Space Shuttle

Resonanzen der Shuttle-Dynamik

Notch-Filter unterdrückt diese Frequenzen



Quelle: „Flight Control Overview of STS-88, the First Space Station Assembly Flight“
by R. Hall, K. Kirchwey, M. Martin, G. Rosch, D. Zimpfer, AAS-99-371

Figure 7: Shuttle Gain Stabilization Design Process

1.6 Literatur

In Deutsch

Wendemuth A.: „Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung“, Springer, 2004, 268 S.

Werner M.; „Digitale Signalverarbeitung mit MATLAB: Grundkurs mit 16 ausführlichen Versuchen“, 4. Ed., Vieweg + Teubner, 2008, 294 S.

Oppenheim A.V., Schafer R.W., Buck J.R.: „Zeitdiskrete Signalverarbeitung“, Pearson, 2. Ed., 2004, 1040 S.

Kammeyer K.-D. Kroschell K.: „Digitale Signalverarbeitung“, 8. Aufl. Springer 2012, 590 S.

Interessante Bücher kostenlos als PDF verfügbar. Unter <http://link.springer.com/> nach „Signalverarbeitung“ suchen.

In Englisch

Oppenheim A.V., Schafer R.W., Buck J.R.: „Discrete-Time Signal Processing“, Prentice-Hall, 3. Ed., 2008, 950 p.

Ifeachor E., Jervis B.: „Digital Signal Processing: A Practical Approach“, Prentice-Hall, 2. Ed., 2001, 960 p.

2. Zeitdiskrete Signale und Systeme

Inhalt Kapitel 2

2. Zeitdiskrete Signale und Systeme

2.1 Zeitdiskrete Signale

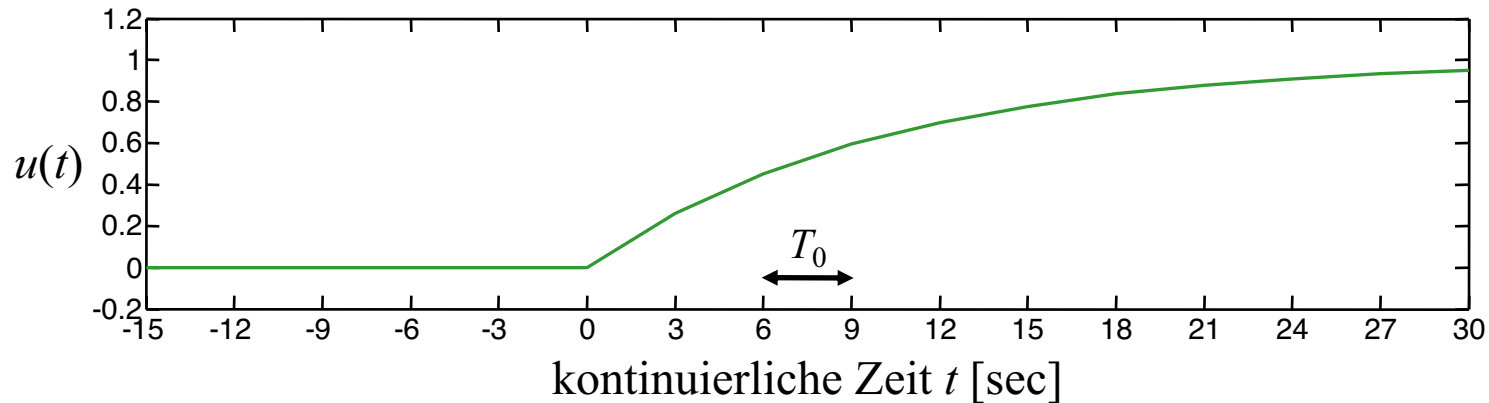
2.2 Differenzgleichungen

2.3 Z-Transformation

2.4 Übertragungsfunktionen

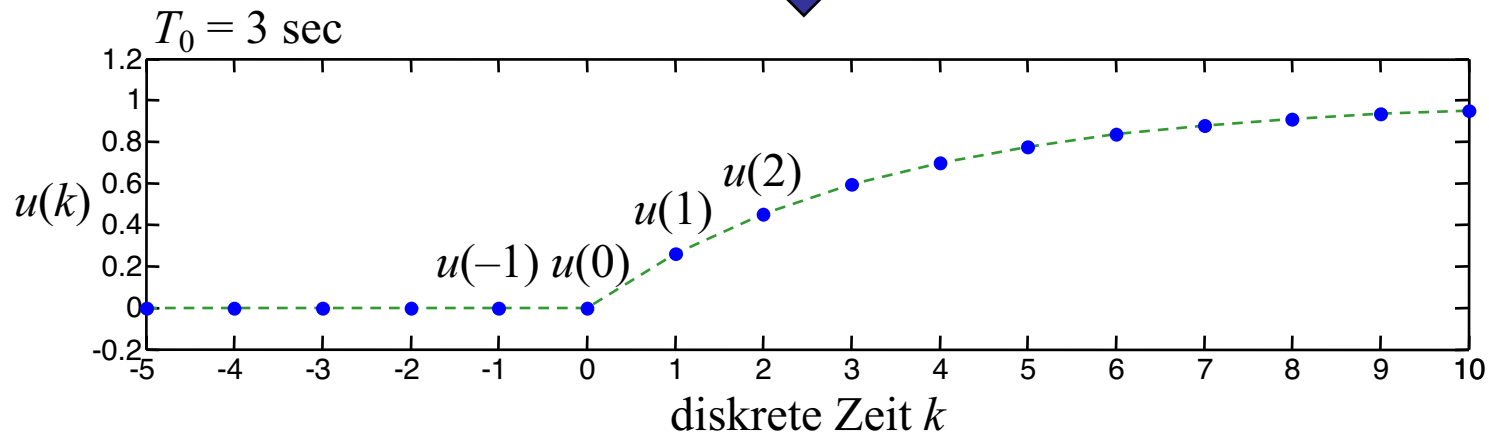
2.1 Zeitdiskrete Signale

Äquidistante Abtastung eines zeitkontinuierlichen Signals mit Abtastzeit T_0



Abtastung zu den
Abtastzeitpunkten $t = kT_0$

$k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$
Folge: $\{u(k)\} = \{\dots, 0, 0, 0, 0.26, 0.45, 0.59, \dots\}$



2.1 Zeitdiskrete Signale

Leopold Kronecker, 1823-1891
(www.wikipedia.org)

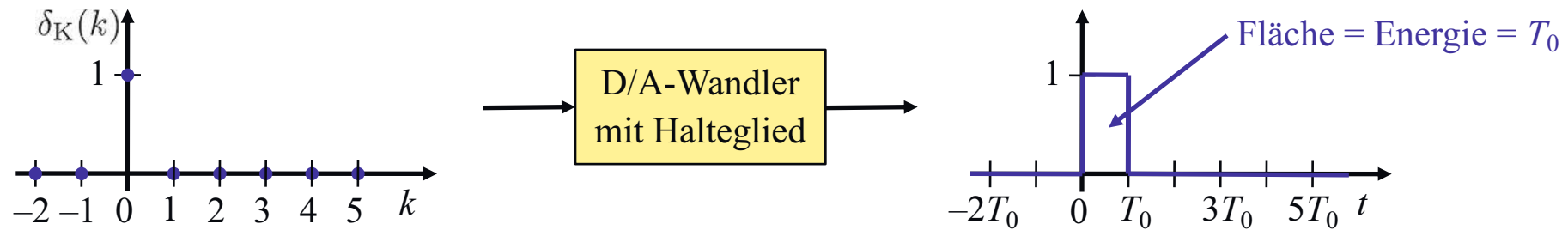


Paul Dirac, 1902-1984
(www.wikipedia.org)

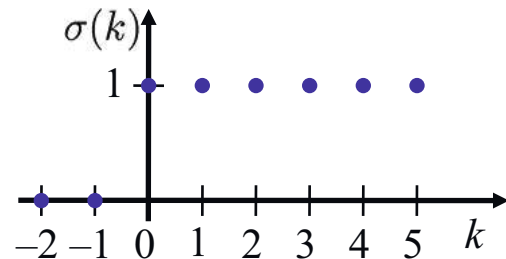


Einheitsimpuls und Einheitssprung

Der zeitdiskrete Einheitsimpuls (Kronecker-Delta) ist mit Höhe 1 hingegen unterschiedlich zum zeitkontinuierlichen Dirac-Impuls (Höhe ∞) definiert. Daher kann der Einheitsimpuls im Zeitdiskreten tatsächlich in der Praxis realisiert werden und stellt keinen, nur theoretischen Grenzfall dar. Wird ein zeitdiskreter Einheitsimpuls auf einen D/A-Wandler mit Halteglied gegeben, so ist seine Länge und damit die darin enthaltene Energie proportional zu T_0 .



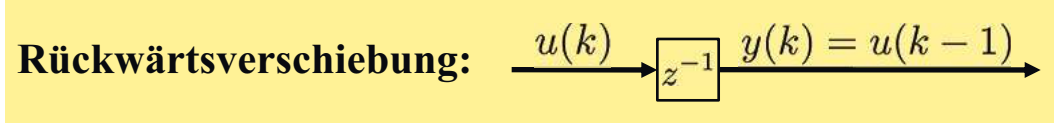
Der zeitdiskrete Einheitssprung entspricht einfach dem abgetasteten zeitkontinuierlichen Einheitssprung. Während des 1. Abtastschrittes sind $\sigma(k)$ und $\delta_K(k)$ identisch!



Beziehung: $\delta_K(k) = \sigma(k) - \sigma(k - 1)$

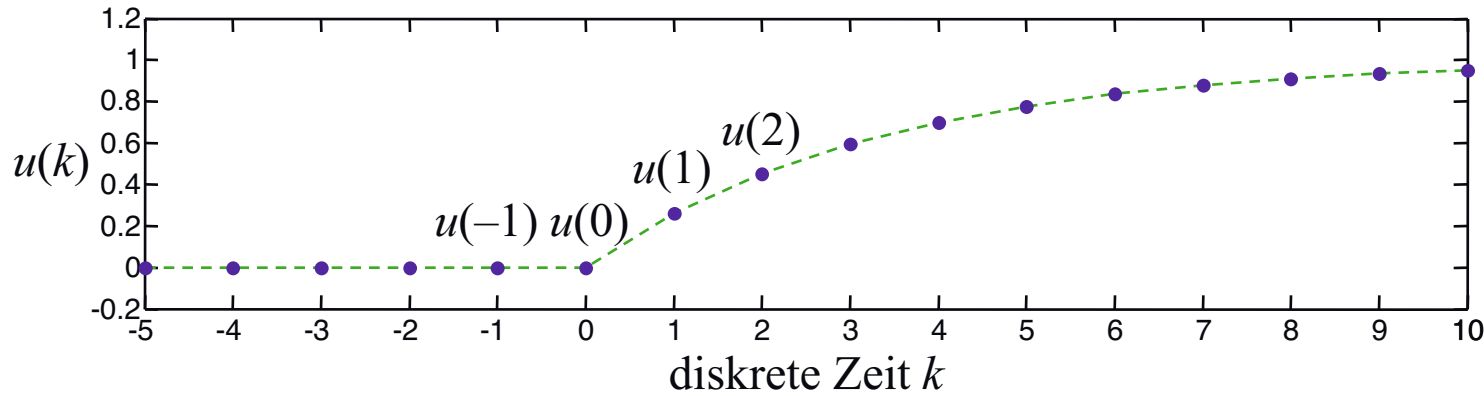
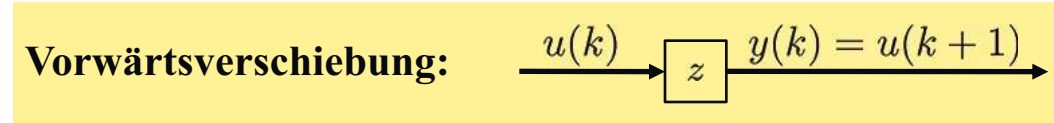
Das entspricht: $\delta(t) = \frac{d}{dt} \sigma(t) = \lim_{T_0 \rightarrow 0} \frac{\sigma(t) - \sigma(t - T_0)}{T_0}$

2.1 Zeitdiskrete Signale

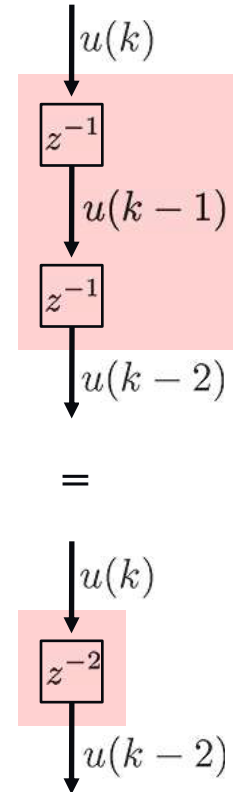
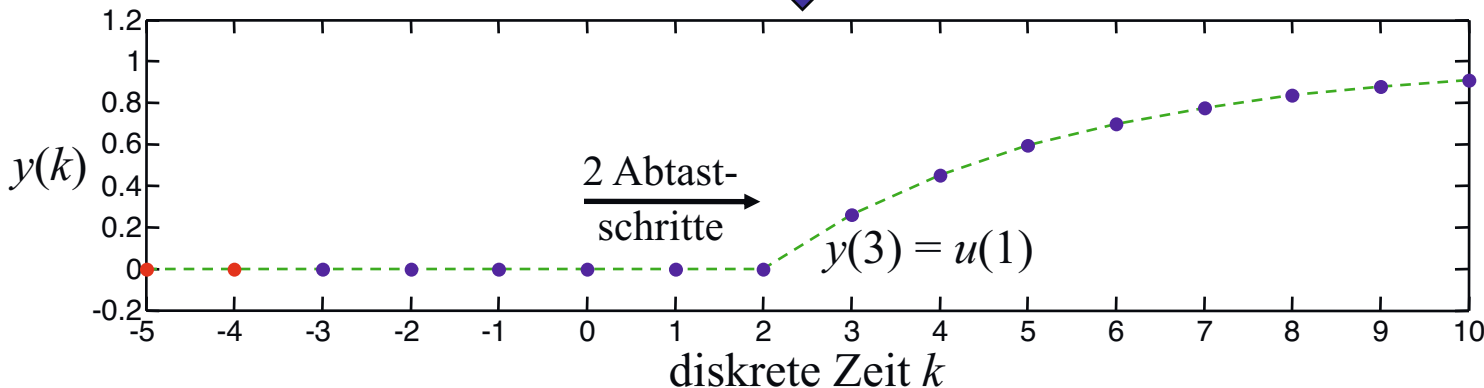


Zeitlicher Verschiebe-Operator

$$z^i = \begin{cases} i < 0 : & i \text{ Schritte Verzögerung} \\ i = 0 : & \text{keine Verschiebung} \\ i > 0 : & i \text{ Schritte Prädiktion} \end{cases}$$



Verzögerung um 2 Schritte: $z^{-2} \downarrow y(k) = u(k-2)$

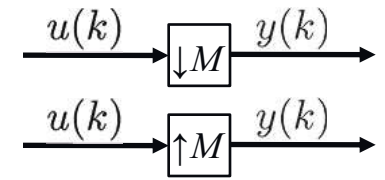


2.1 Zeitdiskrete Signale

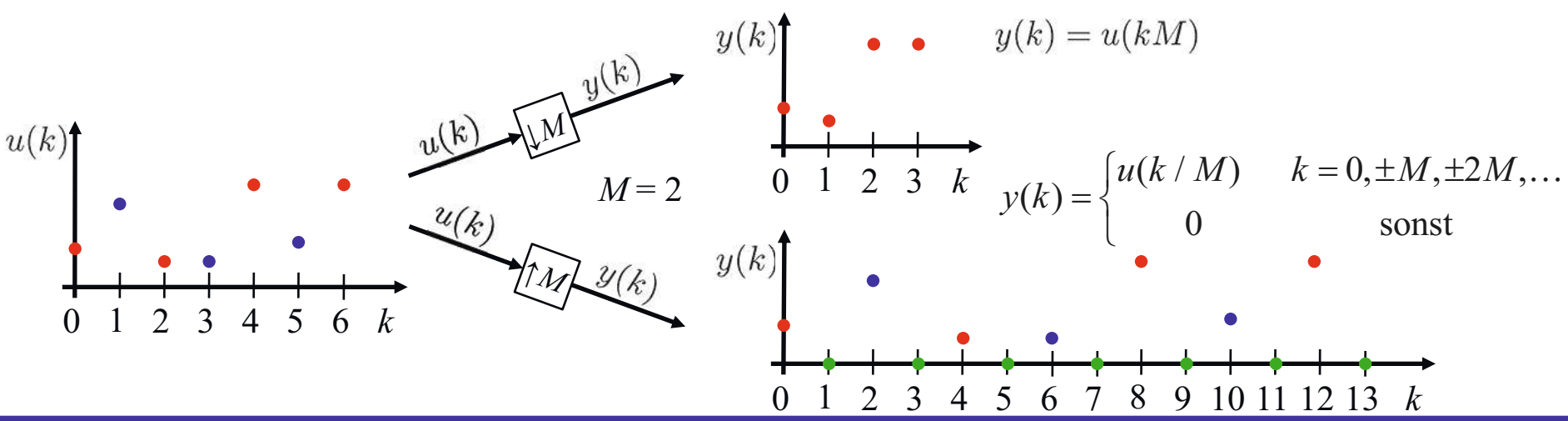
Up-Sampling und Down-Sampling

Wenn die Abtastfrequenz eines bereits abgetasteten, d.h. zeitdiskreten Signals verändert werden soll, dann werden folgende Operationen benötigt:

- *Down-Sampling*: Reduktion der Abtastfrequenz um den Faktor M .
- *Up-Sampling*: Erhöhung der Abtastfrequenz um den Faktor M .



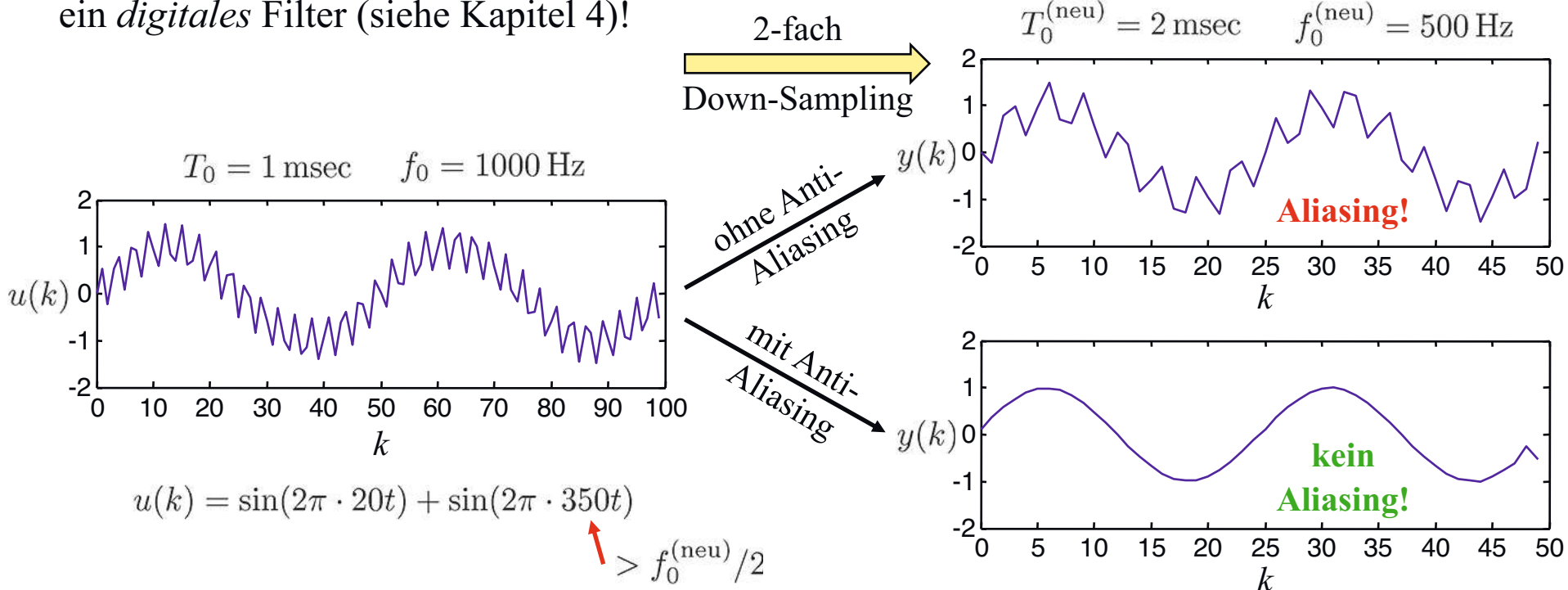
Diese Operationen werden z.B. benötigt, um unterschiedlich schnell abgetastete Signale auf eine gemeinsame Abtastzeit zu synchronisieren oder um für versehentlich bzw. vorsichtshalber (um Informationsverlust zu vermeiden) zu schnell abgetastete Signale den Speicherbedarf zu reduzieren und die numerischen Eigenschaften zu verbessern.



2.1 Zeitdiskrete Signale

Aliasing beim Down-Sampling

Beim Abtasten eines zeitkontinuierlichen Signals kommt es zu Aliasing, wenn die Abtastfrequenz f_0 nicht mindestens 2 Mal größer ist als die höchste Signalfrequenz f_{\max} . Dasselbe gilt auch für das Down-Sampling eines zeitdiskreten Signals! Vor dem Down-Sampling müssen daher alle Frequenzen größer als $f_0/2$ mit einem *Anti-Aliasing-Filter* herausgefiltert werden. Dieses Anti-Aliasing-Filter ist hierbei ein *digitales* Filter (siehe Kapitel 4)!



2.2 Differenzgleichungen

DGL → Differenzgleichung

Für kleine Abtastzeiten $T_0 \rightarrow 0$ kann jede DGL näherungsweise diskretisiert werden, indem man die Ableitungen durch Differenzenquotienten ersetzt:

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(t) - x(t - T_0)}{T_0}, \quad \ddot{x}(t) \approx \frac{\dot{x}(t) - \dot{x}(t - T_0)}{T_0} = \frac{x(t) - 2x(t - T_0) + x(t - 2T_0)}{T_0^2}, \quad \dots$$

Diese Näherungsmethode weist für $T_0 \gg 0$ erhebliche Nachteile auf. Für einen Überblick über alternative Methoden siehe Kapitel 4. Aus einer DGL n . Ordnung ($m \leq n$)

$$y(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 \ddot{y}(t) + \dots + a_n y^{(n)}(t) = b_0 u(t) + b_1 \dot{u}(t) + b_2 \ddot{u}(t) + \dots + b_m u^{(m)}(t)$$

wird so eine Differenzgleichungen ebenfalls n . Ordnung:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_m u(k-m)$$

Während die Simulation eines zeitkontinuierlichen Systems die Integration der DGL erfordert, lässt sich ein zeitdiskretes System ganz einfach durch Auflösen der Differenzgleichung nach $y(k)$ simulieren, wenn man die n vergangenen Ein- und Ausgangswerte kennt:

$$y(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_m u(k-m) - a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \dots - a_n y(k-n)$$

2.2 Differenzgleichungen

Moving Average (MA) System

Der Ausgang berechnet sich aus einer gewichteten Mittelung des verzögerten Eingangssignals:

$$y(k) = b_0u(k) + b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + \dots + b_mu(k-m)$$

Ein solches System wird auch als FIR (*finite impulse response*) charakterisiert, da es eine auf exakt null abfallende Impulsantwort (Gewichtsfunktion) aufweist.

Autoregressive (AR) System

Der Ausgang berechnet sich aus einer gewichteten Mittelung des verzögerten Ausgangssignals:

$$y(k) = -a_1y(k-1) - a_2y(k-2) - \dots - a_ny(k-n)$$

Ein solches System weist eine IIR (*infinite impulse response*), d.h. eine unendliche Impulsantwort (Gewichtsfunktion) auf.

Moving Average Autoregressive (ARMA) System

Hierbei kommen sowohl MA- als auch AR-Terme vor. Dies stellt die allgemeinste Beschreibungsform dar und weist natürlich ebenfalls eine IIR auf.

2.2 Differenzgleichungen

Homogene Lösung: Simulation für $u(k) = 0$

Wenn der Eingang $u(k) = 0$ ist, hängt der Zeitverlauf nur von den Anfangswerten ab. Als einfaches Beispiel betrachten wir eine Differenzgleichung erster Ordnung mit $b_1 = 0$:

$$y(k) = b_0 u(k) - a_1 y(k-1)$$

Wenn die Anfangsbedingung $y(-1)$ bekannt ist, kann der Zeitverlauf der Ausgangsgröße $y(k)$ für alle k berechnet werden:

$$k = 0 : y(0) = b_0 u(0) - a_1 y(-1) = -a_1 y(-1)$$

$$k = 1 : y(1) = b_0 u(1) - a_1 y(0) = -a_1 y(0) = (-a_1)^2 y(-1)$$

$$k = 2 : y(2) = b_0 u(2) - a_1 y(1) = -a_1 y(1) = (-a_1)^3 y(-1)$$

⋮

$$k : y(k) = b_0 u(k) - a_1 y(k-1) = -a_1 y(k-1) = (-a_1)^{k+1} y(-1)$$

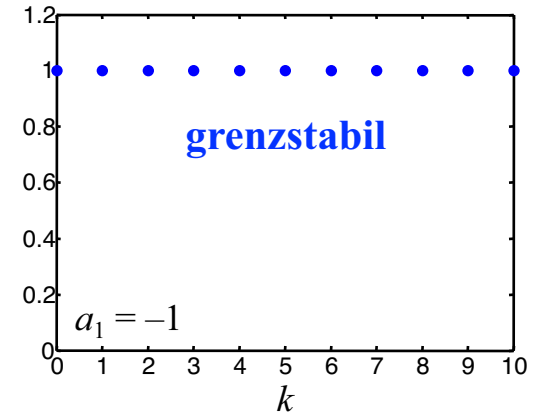
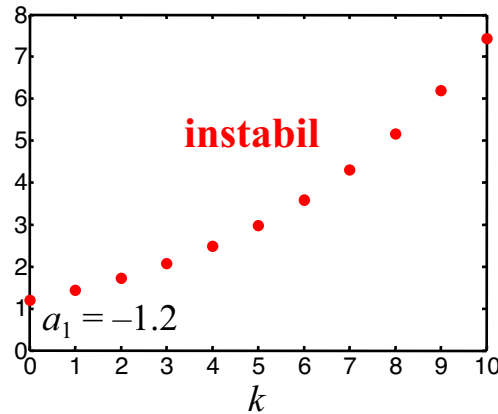
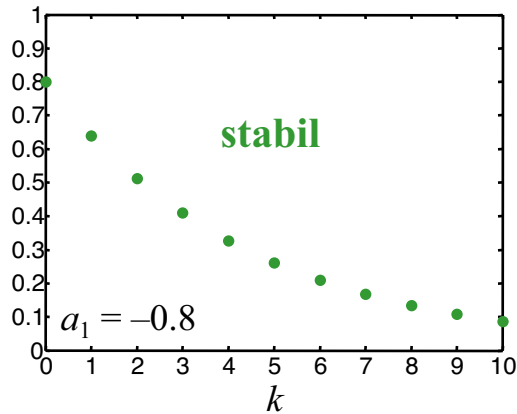
Stabil:	$ a_1 < 1$
Instabil:	$ a_1 > 1$
Grenzstabil:	$ a_1 = 1$

Für Differenzgleichungen n . Ordnung mit $n > 1$ läuft die Berechnung entsprechend, allerdings werden dann die n Anfangsbedingungen $y(-1), y(-2), \dots, y(-n)$ benötigt, weil $y(k)$ von $y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n)$ abhängt.

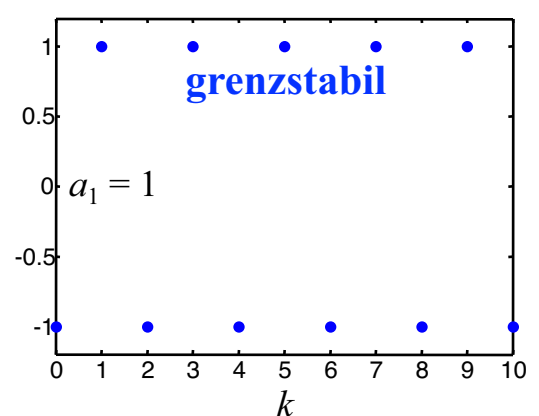
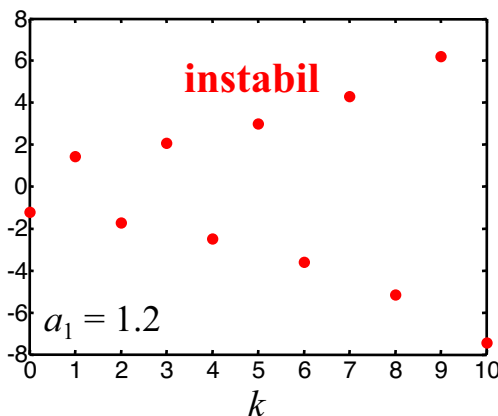
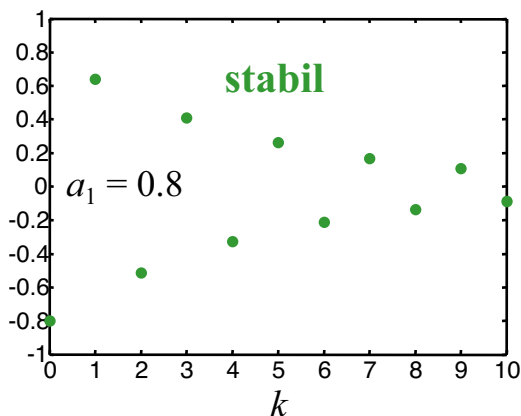
2.2 Differenzgleichungen

Stabilität einer Differenzgleichung 1. Ordnung

An der obigen homogenen Lösung lassen sich leicht folgende 3 Fälle unterscheiden:



Sollte $a_1 > 0$ sein, ergeben sich alternierende (zwischen positiv und negativ springende) Zeitverläufe, zu denen keine Entsprechung bei den zeitkontinuierlichen Systemen existiert:



2.2 Differenzgleichungen

$$u(k) = \delta_K(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Impulsantwort

Für $u(k) = \delta_K(k)$ ergibt sich für den Ausgang $y(k)$ die Impulsantwort, die wie im Zeitkontinuierlichen, mit der Gewichtsfolge $g(k)$ identisch ist. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass alle Anfangsbedingungen = 0 sind und somit die homogene Lösung wegfällt. Als einfaches Beispiel betrachten wir eine Differenzgleichung erster Ordnung mit $b_1 = 0$:

$$y(k) = b_0 u(k) - a_1 y(k-1)$$

Wenn die Anfangsbedingung $y(-1) = 0$ ist, kann der Zeitverlauf der Ausgangsgröße $y(k)$ für alle k wie folgt berechnet werden:

$$k = 0 : y(0) = b_0 u(0) - a_1 y(-1) = b_0$$

$$k = 1 : y(1) = b_0 u(1) - a_1 y(0) = -a_1 b_0$$

$$k = 2 : y(2) = b_0 u(2) - a_1 y(1) = (-a_1)^2 b_0$$

⋮

$$k : y(k) = (-a_1)^k b_0$$

Beachte: Das ist ein exponentieller Verlauf!

$$(-a_1)^k = \left(\frac{1}{-a_1} \right)^{-k} = e^{\ln\left(\frac{1}{-a_1}\right) \cdot (-k)} = e^{-k \cdot \ln\left(\frac{1}{-a_1}\right)}$$

Es ergibt sich also ein qualitativ gleicher zeitlicher Verlauf wie bei der homogenen Lösung.

2.2 Differenzengleichungen

$$u(k) = \sigma(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

Sprungantwort

Für $u(k) = \sigma(k)$ ergibt sich für den Ausgang $y(k)$ die Sprungantwort. Wir nehmen wieder der Einfachheit halber an, dass alle Anfangsbedingungen = 0 sind und somit die homogene Lösung wegfällt. Als einfaches Beispiel betrachten wir wieder eine Differenzengleichung erster Ordnung mit $b_1 = 0$:

$$y(k) = b_0 u(k) - a_1 y(k-1)$$

Wenn die Anfangsbedingung $y(-1) = 0$ ist, kann der Zeitverlauf der Ausgangsgröße $y(k)$ für alle k wie folgt berechnet werden:

$$k = 0 : y(0) = b_0 u(0) - a_1 y(-1) = b_0 \quad (\text{identisch mit Impulsantwort})$$

$$k = 1 : y(1) = b_0 u(1) - a_1 y(0) = b_0 - a_1 b_0 = b_0 (1 - a_1)$$

$$k = 2 : y(2) = b_0 u(2) - a_1 y(1) = b_0 - a_1 b_0 (1 - a_1) = b_0 (1 - a_1 + a_1^2)$$

⋮

$$k : y(k) = b_0 (1 - a_1 + a_1^2 - \dots (-a_1)^k) = b_0 \sum_{i=0}^k (-a_1)^i$$

2.2 Differenzgleichungen

Beziehungen zwischen Impuls- und Sprungantwort

Erinnerung: Im *Zeitkontinuierlichen* galten zwischen der Impulsantwort $g(t)$ und der Sprungantwort $h(t)$ die Beziehungen:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}\sigma(t) \quad \rightarrow \quad g(t) = \frac{d}{dt}h(t)$$

$$\sigma(t) = \int_0^t \delta(\tau) d\tau \quad \rightarrow \quad h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$$

Aus den zuvor berechneten zeitdiskreten Impuls- und Sprungfolgen ergeben sich im *Zeitdiskreten* vergleichbare Zusammenhänge:

$$\delta_K(k) = \sigma(k) - \sigma(k-1) \quad \rightarrow \quad g(k) = h(k) - h(k-1)$$

$$\sigma(k) = \sum_{i=0}^k \delta_K(k-i) \quad \rightarrow \quad h(k) = \sum_{i=0}^k g(k-i)$$

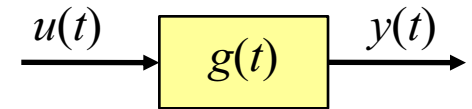
D.h. Differenzen ersetzen die Ableitungen, Summen ersetzen die Integrale. Im Zeitdiskreten lässt sich also wesentlich leichter rechnen als im Zeitkontinuierlichen, insbesondere mit Hilfe eines Computers. Die Anzahl der Summanden steigt allerdings mit der Simulationszeit k an!

2.2 Differenzgleichungen

Faltungssumme

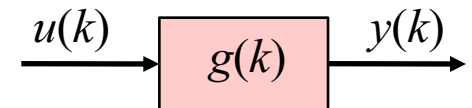
Die Gewichtsfolge (Impulsantwort) kennzeichnet alle Eigenschaften eines linearen, zeitdiskreten, dynamischen Systems, genauso wie die Gewichtsfunktion dies für zeitkontinuierliche Systeme tut. Die Systemantwort auf ein beliebiges Eingangssignal $u(t)$ lässt sich für zeitkontinuierliche System mit Hilfe des *Faltungsintegrals* bestimmen:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)u(\tau)d\tau$$



Im Zeitdiskreten lässt sich entsprechend die Antwort auf jedes beliebige Eingangssignal $u(k)$ mit Hilfe der *Faltungssumme* bestimmen:

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} g(i)u(k - i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} g(k - i)u(i)$$



Wir setzen normalerweise voraus, dass $u(k) = 0$ für $k < 0$; dann muss die erste Summe nur bis $i = k$ und die zweite Summe erst ab $i = 0$ laufen. Ist zudem das System kausal, d.h. $g(k) = 0$ für $k < 0$, dann muss die erste Summe erst ab $i = 0$ und die zweite Summe nur bis $i = k$ laufen.

2.2 Differenzgleichungen

Faltungssumme (vereinfacht)

Mit diesen Vereinfachungen ergibt sich für die erste Formulierung der Faltungssumme:

$$y(k) = \sum_{i=0}^k g(i)u(k-i) = g(0)u(k) + g(1)u(k-1) + \dots + g(k)u(0)$$

In der zweiten Formulierung der Faltungssumme ist die Reihenfolge umgekehrt:

$$y(k) = \sum_{i=0}^k g(k-i)u(i) = g(k)u(0) + g(k-1)u(1) + \dots + g(0)u(k)$$

Offensichtlich sind beide Formulierungen identisch!

Die Faltungssumme ist, insbesondere mit Computer-Hilfe, wesentlich einfach zu berechnen als das Faltungsintegral.

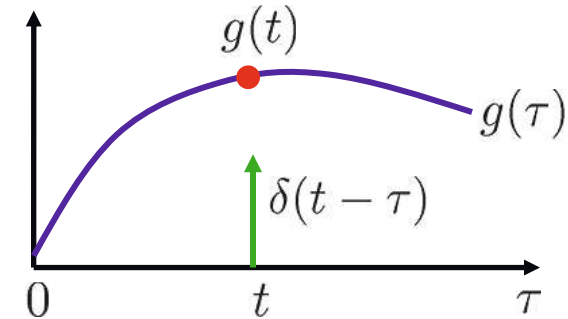
ACHTUNG: Mit fortschreitender Simulationszeit $k \rightarrow \infty$, wächst die Anzahl der Summanden linear an. Wenn also die Gewichtsfolge unendlich lang ist (IIR), dann wächst auch der Rechenaufwand und Speicherbedarf unendlich stark an. D.h. für die Simulation von IIR-Systemen müssen wir uns eine geschicktere Alternative überlegen. Bei Gewichtsfunktionen der Länge L (FIR) bleibt die Anzahl der Summanden hingegen auf L beschränkt.

2.2 Differenzgleichungen

Faltung mit einem Impuls

Im Zeitkontinuierlichen hat der Dirac-Impuls $\delta(t)$ die Ausblendeigenschaft, d.h. die Faltung eines Zeitsignals mit einem Dirac-Impuls liefert wieder das Zeitsignal. Der Dirac-Impuls ist also bzgl. der Faltung das neutrale Element (wie die „0“ bei der Addition und die „1“ bei der Multiplikation). Zur Berechnung der Impulsantwort wählen wir $u(t) = \delta(t)$ und berechnen als Impulsantwort mittels des Faltungsintegrals und der Ausblendeigenschaft:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = g(t)$$

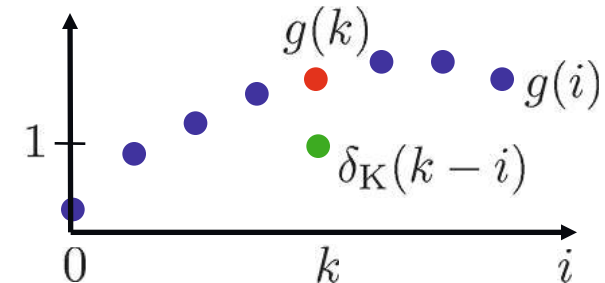


D.h. die Impulsantwort eines linearen, kontinuierlichen, dynamischen Systems ist identisch mit dessen Gewichtsfunktion!

Im Zeitdiskreten wählen wir $u(k) = \delta_K(k)$ und berechnen mittels der Faltungssumme:

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} g(i) \delta_K(k - i) = g(k) \quad = 1 \text{ für } k = i$$

Auch hier gilt also die Ausblendeigenschaft und die Äquivalenz von Impulsantwort und Gewichtsfolge.

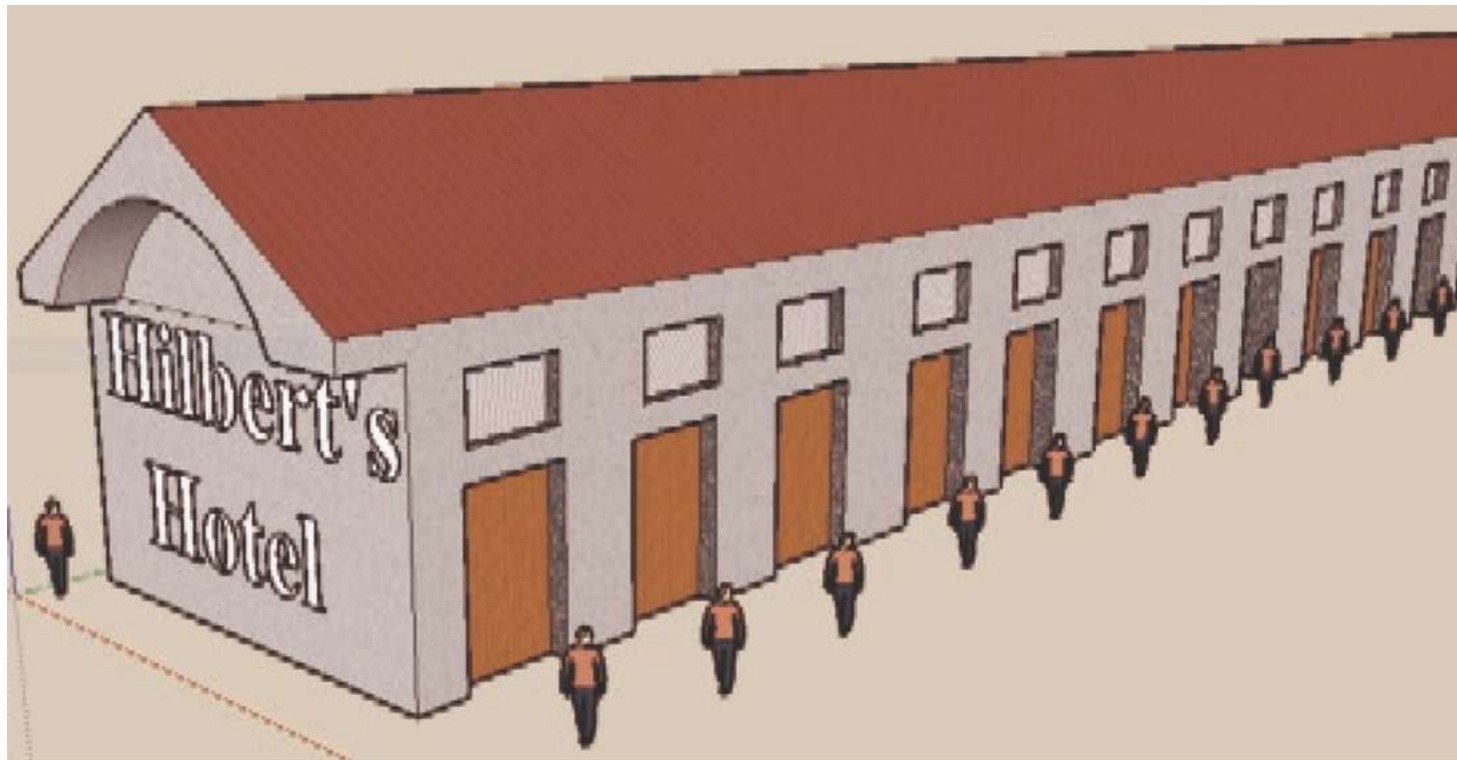


2.2 Differenzgleichungen

Hilberts Hotel

Dieses Hotel hat unendlich viele Zimmer und verdeutlicht die Mächtigkeit unendlicher Mengen.

Wenn alle Zimmer belegt sind, für wie viele Gäste gibt es dann noch Platz? 1, 2, ∞ ?



Quelle: http://www.mathcs.org/analysis/reals/infinity/graphics/hilberts_hotel.jpg

2.2 Differenzgleichungen

Geometrische Reihe

In den vorherigen Folien tauchte immer wieder eine geometrische Folge oder Reihe auf. Eine geometrische Reihe ist die Summe einer exponentiell verlaufenden Folge von Zahlen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$$

Mit folgendem Trick kann man den Wert dieser unendlichen Reihe berechnen:

$$q = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$$

$$xq = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

$$q - xq = x^0 \rightarrow q(1 - x) = 1 \rightarrow q = \frac{1}{1 - x}$$

Daraus folgt für $|x| < 1$ (für $|x| \geq 1$ divergiert die Reihe gegen unendlich):

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$$

Eine erweiterte Formel lässt sich für die endliche Reihe herleiten:

$$\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \sum_{k=0}^n x^k$$

2.2 Differenzengleichungen

Exponentielle Zusammenhänge: Nicht intuitiv!

Frage: Wenn man ein 0,1 mm dickes Papier 50 Mal faltet, so dass sich die Dicke jedes Mal verdoppelt:

Wie hoch ist der Stapel?

Antwort: Von der Erde bis zum Mars = 100 Mio. Meter.

Frage: Wenn man Münzen stapelt, jeden Stapel auf ein Feld eines Schachbretts:

- 1 Münze auf Feld 1,
- 2 Münzen auf Feld 2,
- 4 Münzen auf Feld 3,
- 8 Münzen auf Feld 4, ...

Wie hoch ist der Stapel auf Feld 64?

Antwort: Bis zu α -Centauri = 4 Lichtjahre.



Quelle:

<http://www.wdr.de/tv/kopfball/sendungsbeitraege/2011/1120/papier-falten.jsp>



Quelle: <https://www.youtube.com/watch?v=0mOZZLJZwpw>

Der Mensch kann das ausrechnen aber **nicht abschätzen**. Die menschliche Intuition versagt bei exponentiellen Zusammenhängen. Das macht sie potentiell gefährlich (Artensterben).

2.3 Z-Transformation

Beschreibung abgetasteter Signale

Ein Abtaster (*Sampler*) mit A/D-Wandler erzeugt aus dem zeitkontinuierlichen Signal $u_c(t)$ das zeitdiskrete Signal $u(k) = u_c(kT_0)$. Eine Abtastung des kontinuierlichen Signals zum Zeitpunkt T_1 wird als Multiplikation von $u_c(t)$ mit einem Dirac-Impuls zum Zeitpunkt T_1 , also mit $\delta(t - T_1)$, beschrieben:

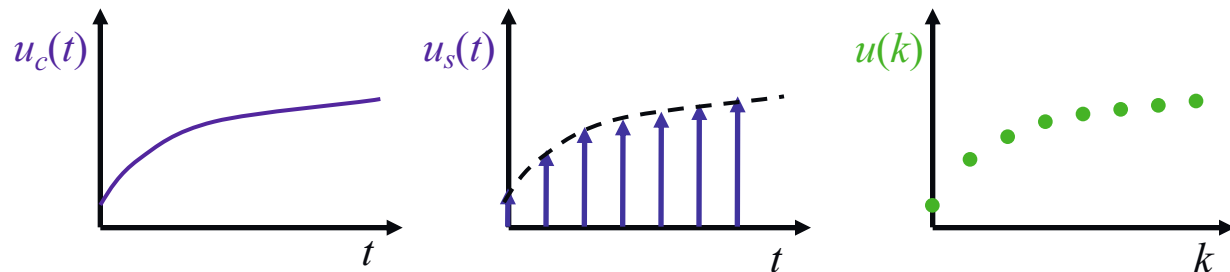
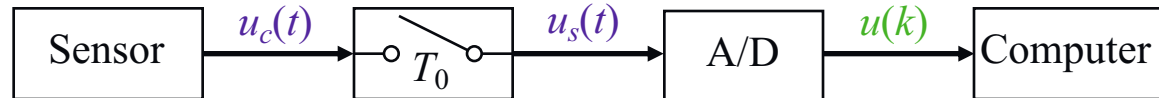
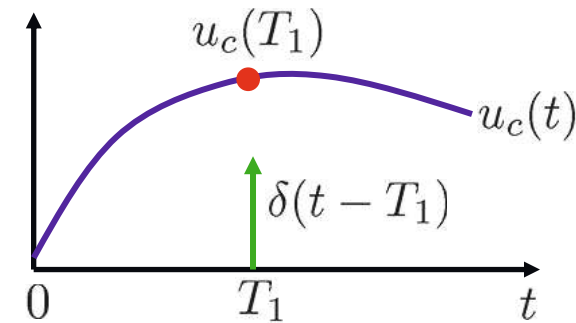
$$u_s(t) = u_c(t)\delta(t - T_1) = u_c(T_1)\delta(t - T_1)$$

Wird nun periodisch zu den Zeitpunkten kT_0 abgetastet, so muss $u_c(t)$ mit einer ganz Impulsfolge (*impulse train*) multipliziert (moduliert) werden:

$$u_s(t) = u_c(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_c(kT_0)\delta(t - kT_0)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)\delta(t - kT_0)$$



2.3 Z-Transformation

Interpretation der modulierten Impulsfolge

Die zeitkontinuierliche Beschreibung des abgetasteten Signals als modulierte Impulsfolge

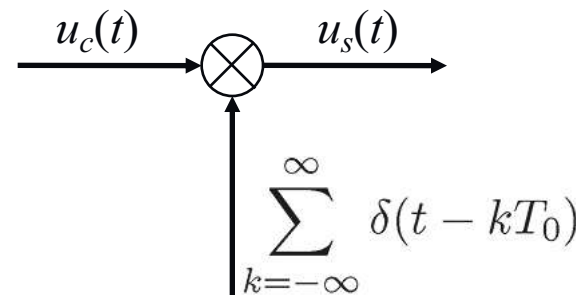
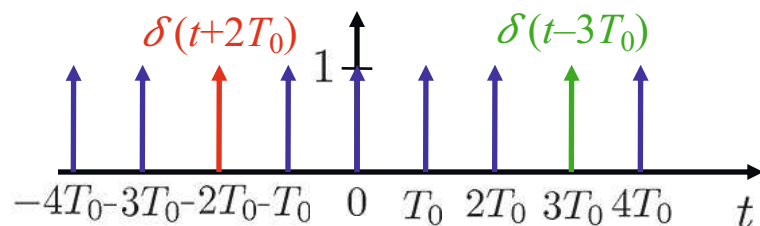
$$u_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)\delta(t - kT_0)$$

$$u_s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)\delta(t - kT_0), \text{ wenn } u(k) = 0 \text{ für } k < 0$$

stellt nur eine mathematische Modellvorstellung dar. Die unendlich hohen und schmalen Dirac-Impulse existieren in Wirklichkeit nicht. Sie sind aber ein elegantes Mittel, dem abgetasteten Signal, da ja aus isolierten Punkten besteht, eine Energiemenge zuzuordnen (ein Dirac-Impuls hat die Fläche 1 und das entspricht auch seiner Energiemenge).

Deswegen macht auch eine Multiplikation eines Dirac-Impulses mit einem Signal, hier $u(k)$, Sinn. Obwohl $u(k) \cdot \infty = \infty$, ändert sich doch der Energiegehalt von 1 auf $u(k)$.

Mathematisches Modell des Abtastvorgangs:



2.3 Z-Transformation

Laplace-Transformation eines abgetasteten Signals

Wendet man die Laplace-Transformation auf abgetastete Signale an, so entsteht die sog. *z-Transformation*. Die Laplace-Transformierte $U(s)$ eines zeitkontinuierlichen Signals $u(t)$ ist definiert als:

Laplace-Transformation:
$$U(s) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt$$

Wählen wir für $u(t)$ ein abgetastetes Signal, d.h. $u(t) = u_s(t)$, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} U_s(s) &= \int_0^{\infty} u_s(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u(k)\delta(t - kT_0)e^{-st} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u(k) \underbrace{\int_0^{\infty} \delta(t - kT_0)e^{-st} dt}_{\mathcal{L}\{\delta(t - kT_0)\}} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$U_s(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)e^{-skT_0} = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) (e^{sT_0})^{-k}$$

Zur Erinnerung:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t - kT_0)\} = e^{-skT_0}$$

2.3 Z-Transformation

Laplace-Transformation \rightarrow z-Transformation

Mit der Abkürzung

$$z = e^{sT_0}$$

nennt man die Laplace-Transformierte eines abgetasteten Signals die *z-Transformierte* (der Index „s“ entfällt, weil durch die Variable „z“ schon klar ist, dass es sich hierbei um abgetastete Signale handelt):

z-Transformation:

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k}$$

Frequenzgang

Zur Ermittlung des Frequenzgangs werten wir die Laplace-Transformierte auf der imaginären Achse der s -Ebene aus, indem wir $s = i\omega$ für $\omega = 0 \dots \infty$ setzen. Der Frequenzgang einer z -Transformierten ergibt sich dann entsprechend aus $z = e^{i\omega T_0}$ für $\omega = 0 \dots \infty$. In der z -Ebene laufen wir zur Auswertung des Frequenzgangs also entlang des *Einheitskreises*. Es fällt auf, dass der Einheitskreis unendlich oft umlaufen wird, der Frequenzgang also periodisch ist. Ab $\omega T_0 = \pi$ wiederholt sich das Ganze! (Beachte die Symmetrie bzgl. $\pm\omega$!)

2.3 Z-Transformation

Herleitung der Periodizität des Frequenzgangs

Wir wollen die eben festgestellte Periodizität des Frequenzgang näher untersuchen. Der Frequenzgang eines abgetasteten Systems ergibt sich für $z = e^{i\omega T_0}$:

$$U(i\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) (e^{i\omega T_0})^{-k}$$

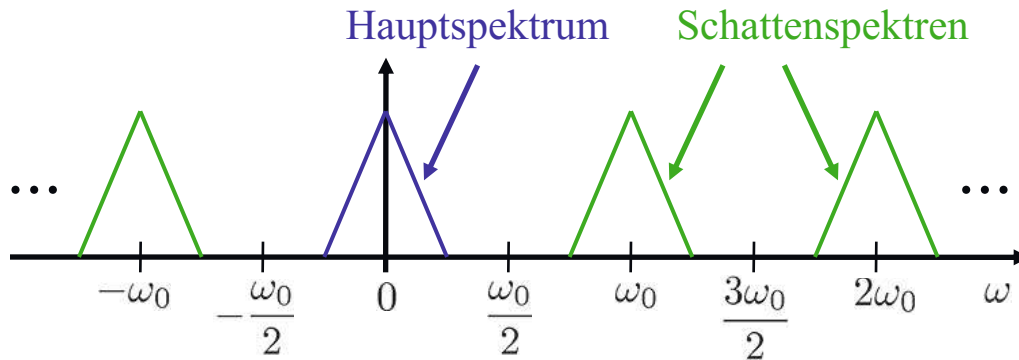
Mit den Zusammenhängen $e^{in2\pi} = 1$ für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ und $\omega_0 T_0 = 2\pi$ lässt sich zeigen

$$\begin{aligned} U(i\omega) &= \sum_{k=0}^{\infty} u(k) (e^{i\omega T_0} e^{in2\pi})^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) (e^{i(\omega T_0 + n2\pi)})^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u(k) (e^{i(\omega T_0 + n\omega_0 T_0)})^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) (e^{i(\omega + n\omega_0) T_0})^{-k} \end{aligned}$$

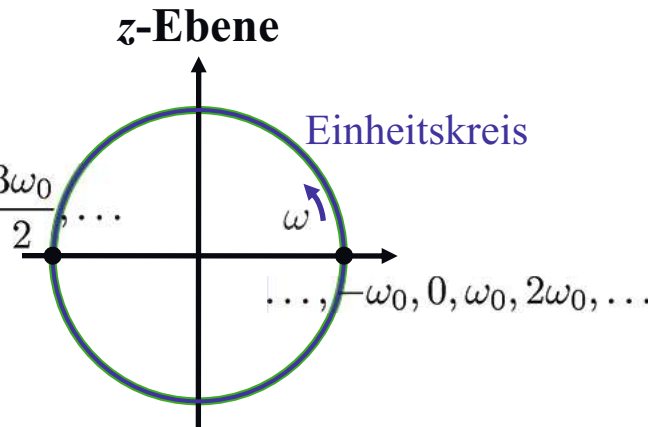
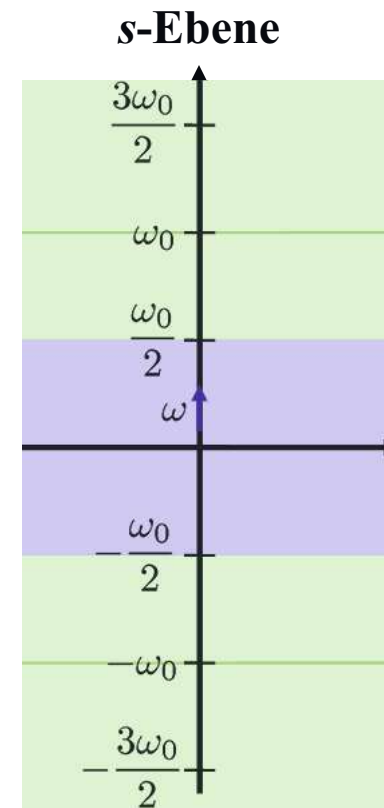
dass sich der Frequenzgang alle Vielfache von ω_0 wiederholt (je eine Umdrehung auf dem Einheitskreis). D.h. der Frequenzgang ist eine periodische Funktion und damit identisch für Frequenzen: $\omega, \omega \pm \omega_0, \omega \pm 2\omega_0, \omega \pm 3\omega_0, \dots$

2.3 Z-Transformation

Illustration der Periodizität des Frequenzgangs



- Die Schattenspektren rund um die Vielfachen von ω_0 werden durch die periodische Abtastung erzeugt.
- Die Im-Achse zwischen $-i\omega_0/2$ und $i\omega_0/2$ der s -Ebene wird auf den Einheitskreis der z -Ebene abgebildet.
- Die gesamte Information eines zeitdiskreten Systems ist im Frequenzgang entlang des Einheitskreises von $\omega = 0$ bis $\omega = \omega_0/2$ enthalten; der negative Halbkreis für $\omega = -\omega_0/2 \dots 0$ ist symmetrisch; alle weiteren Umkreisungen sind redundant!

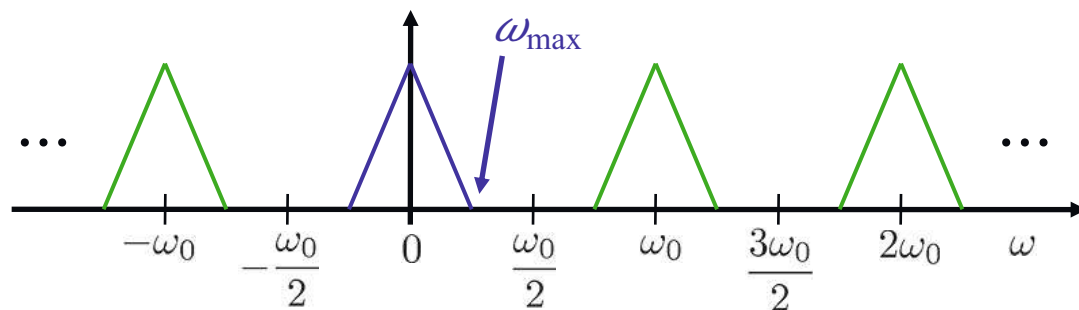


2.3 Z-Transformation

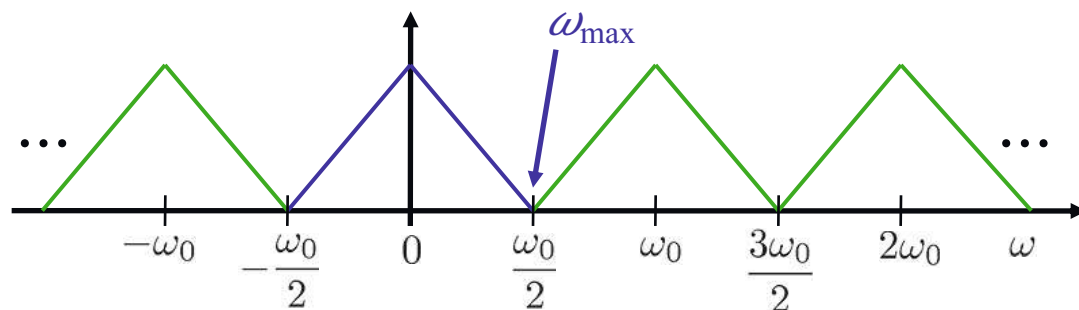
Abtasttheorem und Aliasing

- Solange die maximale Signalfrequenz ω_{\max} kleiner als die halbe Abtastfrequenz $\omega_0/2$ ist, kann das zeitkontinuierliche Signal aus dem abgetasteten perfekt rekonstruiert werden. Es tritt kein Informationsverlust auf, denn Haupt- und Schattenspektren sind getrennt (kein Aliasing).
- Sobald $\omega_{\max} > \omega_0/2$ überlappen sich Haupt- und Schattenspektren. Es tritt Aliasing auf, welches das Originalsignal verzerrt. Eine perfekte Rekonstruktion ist nicht mehr möglich (Informationsverlust!).

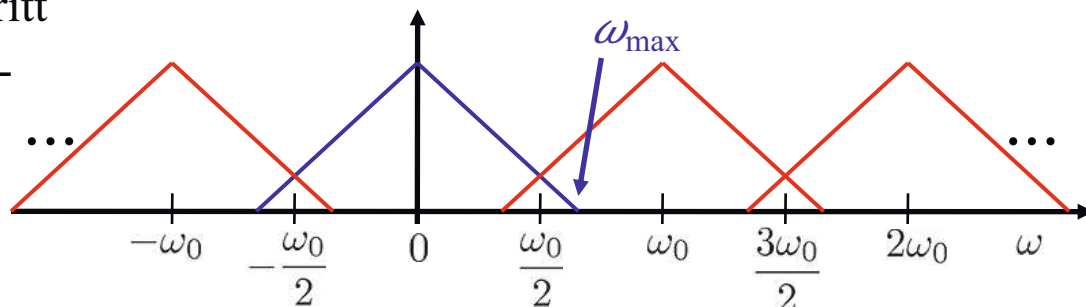
Abtastung schnell genug: kein Aliasing!



Grenzfall



Abtastung zu langsam: Aliasing!



2.3 Z-Transformation

Z-Transformation von Delta-Impulsen und Einheitssprüngen

Der Delta-Impuls $u(k) = \delta_{\mathbf{k}}(k)$ hat folgende z-Transformierte:

$$u(0) = 1, u(1) = 0, u(2) = 0, \dots \rightarrow U(z) = 1z^0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + \dots \rightarrow U(z) = 1$$

Ein um 1 Zeitschritt verzögerter Delta-Impuls $u(k) = \delta_{\mathbf{k}}(k-1)$ hat folgende z-Transformierte:

$$u(0) = 0, u(1) = 1, u(2) = 0, \dots \rightarrow U(z) = 0z^0 + 1z^{-1} + 0z^{-2} + \dots \rightarrow U(z) = z^{-1}$$

Ein um d Zeitschritte verzögerter Delta-Impuls $u(k) = \delta_{\mathbf{k}}(k-d)$ hat folgende z-Transformierte:

$$u(0) = 0, \dots, u(d-1) = 0, u(d) = 1, u(d+1) = 0, \dots \rightarrow U(z) = z^{-d}$$

Der Einheitssprung $u(k) = \sigma(k)$ hat folgende z-Transformierte:

$$u(0) = 1, u(1) = 1, u(2) = 1, \dots \rightarrow U(z) = 1z^0 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + \dots \rightarrow U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Ein um d Zeitschritte verzögerter Einheitssprung $u(k) = \sigma(k-d)$ hat folgende z-Transformierte:

$$u(0) = 0, \dots, u(d-1) = 0, u(d) = 1, u(d+1) = 1, \dots \rightarrow U(z) = \frac{z^{-d}}{1 - z^{-1}}$$

Folgende Schreibweisen sind gleichwertig:
$$\frac{z^{-d}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^{-d+1}}{z - 1} = \frac{1}{(1 - z^{-1})z^d} = \frac{1}{(z - 1)z^{d-1}}$$

2.3 Z-Transformation

Z-Transformation geometrischer Folgen

Die geometrische Folge $u(k) = a^k$ mit irgendeiner Zahl a kommt häufig vor, da sie einen exponentiellen Zeitverlauf darstellt. Diese Folge hat folgende z -Transformierte:

$$u(0) = a^0, u(1) = a^1, u(2) = a^2, u(3) = a^3, \dots \rightarrow U(z) = a^0 z^0 + a^1 z^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \dots$$

Weitere Umformung führt auf die Standardform der geometrischen Reihe:

$$U(z) = (az^{-1})^0 + (az^{-1})^1 + (az^{-1})^2 + (az^{-1})^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k$$

Mit Hilfe der Summenformel für die unendliche geometrische Reihe ergibt sich:

$$U(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

Auf diese Art lassen sich unendliche Gewichtsfolgen in einfacher und geschlossener Weise als gebrochen rationale Funktionen schreiben.

Von der gebrochen rationalen Funktion zurück zur unendlichen Reihe gelangt man mit Hilfe der Polynomdivision.

Polynomdivision:

$$z : (z-a) = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots$$

$$\begin{array}{r} z-a \\ \underline{a} \\ a-a^2z^{-1} \\ \underline{a^2z^{-1}} \\ a^2z^{-1}-a^3z^{-2} \\ \underline{a^3z^{-2}} \end{array}$$

2.3 Z-Transformation

$$z = e^{sT_0}$$

$$u(k) \quad \circ \text{---} \bullet \quad U(z)$$
$$U(z) = \mathcal{Z}\{u(k)\}$$

Wichtigste Eigenschaften der z-Transformation

Für Grenzbetrachtungen werden häufig die Fälle $t \rightarrow 0$ ($k \rightarrow 0$) oder $t \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$) untersucht. Dies bedeutet für den Bildbereich, d.h. die s - bzw. z -Variable:

$$t \rightarrow 0: s \rightarrow \infty$$

$$t \rightarrow \infty: s \rightarrow 0$$

$$k \rightarrow 0: z \rightarrow \infty$$

$$k \rightarrow \infty: z \rightarrow 1$$

Anfangswert

Der Anfangswert einer zeitdiskreten Folge kann ihrer z -Transformierten berechnet werden:

$$u(k=0) = \lim_{z \rightarrow \infty} U(z)$$

Endwert

Der Endwert (falls existent!) einer zeitdiskreten Folge kann ihrer z -Transformierten berechnet werden:

$$u(k \rightarrow \infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)U(z)$$

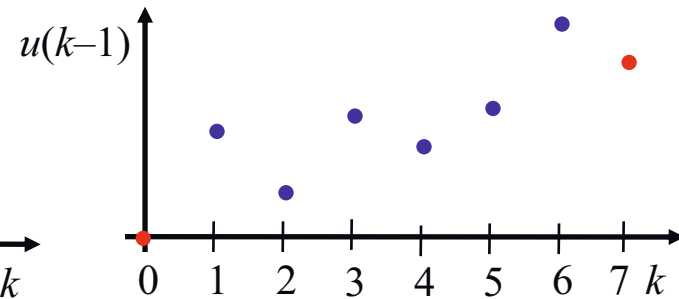
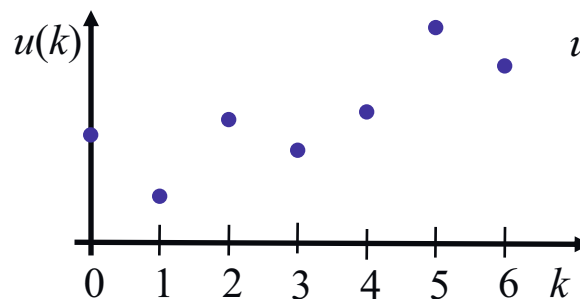
2.3 Z-Transformation

Rückwärtsverschiebung (nach rechts)

Eine Totzeit von $T_t = dT_0$ ist äquivalent mit einer Rückwärtsverschiebung (Verschiebung nach rechts) um d Abtastschritte. Diese Operation entspricht der Laplace-Transformierten e^{-sT_t} .

Dies bedeutet für den z -Bereich:

$$u(k-d) \quad \circ \rightarrow \bullet \quad z^{-d}U(z)$$

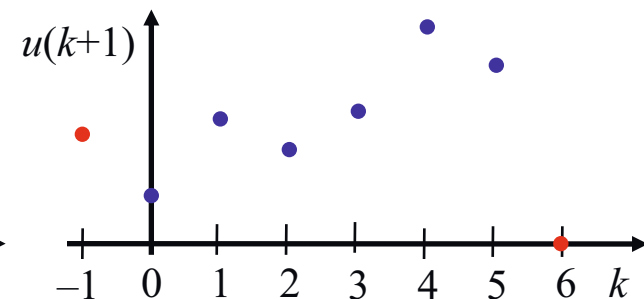
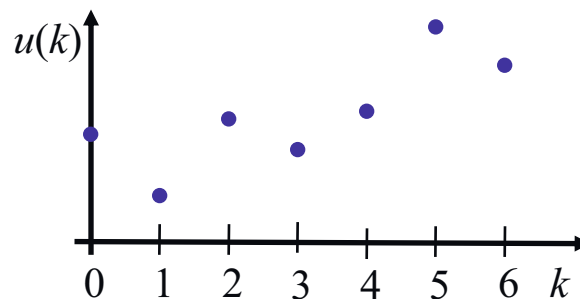


Vorwärtsverschiebung (nach links)

Eine Prädiktion (Vorhersage) um die Zeit $T_p = dT_0$ ist äquivalent mit einer Vorwärtsverschiebung (Verschiebung nach links) um d Abtastschritte. Diese Operation entspricht der Laplace-Transformierten e^{sT_p} .

Dies bedeutet für den z -Bereich:

$$u(k+d) \quad \circ \rightarrow \bullet \quad z^dU(z)$$

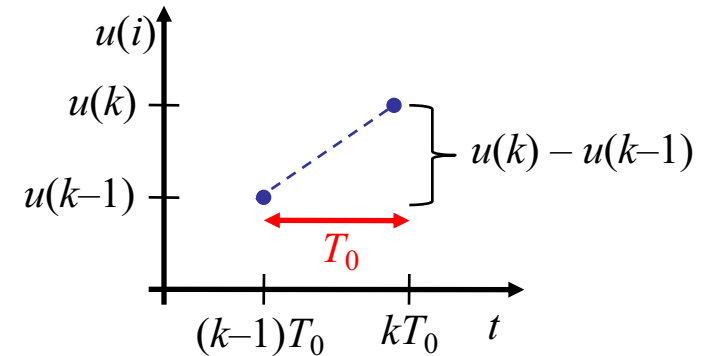


2.3 Z-Transformation

Differenzen / Differentiation

Die Differenz zweier aufeinanderfolgenden Abtastwerte ist, geteilt durch die Abtastzeit, gleich dem Differenzenquotienten 1. Ordnung und entspricht damit näherungsweise einer *Differentiation*. Im s -Bereich wird diese durch eine *Multiplikation mit s* realisiert. Im z -Bereich gilt:

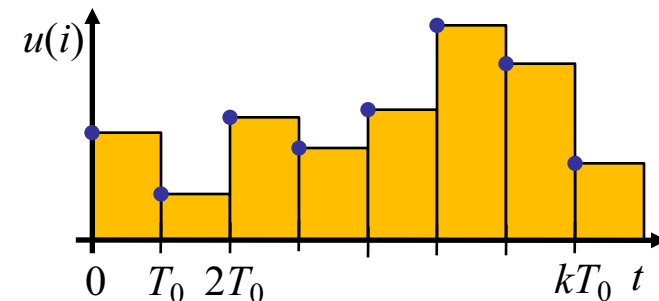
$$u(k) - u(k-1) \quad \circ \bullet \quad \frac{z-1}{z} U(z)$$



Summation / Integration

Die Summe aller Abtastwerte vom Zeitpunkt 0 ab ist, multipliziert mit der Abtastzeit, gleich der Untersumme-Approximation der Fläche unterhalb der Abtastwerte und entspricht damit näherungsweise einer *Integration*. Im s -Bereich wird diese durch eine *Division durch s* realisiert. Im z -Bereich gilt entsprechend:

$$\sum_{i=0}^k u(i) \quad \circ \bullet \quad \frac{z}{z-1} U(z)$$



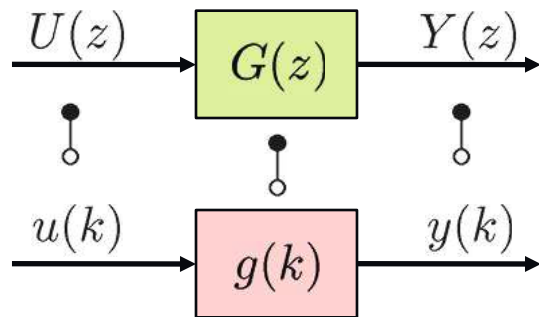
2.4 Übertragungsfunktionen

Z-Übertragungsfunktion und Gewichtsfolge

Bei zeitdiskreten Systemen besteht zwischen Übertragungsfunktion und Gewichtsfolge eine vergleichbare Beziehung wie im Zeitkontinuierlichen: die Übertragungsfunktion $G(z)$ ist die z -Transformierte der Gewichtsfolge $g(k)$:

$$G(z) \longleftrightarrow g(k)$$

Sowohl in $G(z)$ als auch in $g(k)$ sind alle Eigenschaften eines linearen, zeitdiskreten, dynamischen Systems enthalten. Zur Berechnung des Systemausgangs wird nur der zeitliche Verlauf des Eingang und $G(z)$ oder $g(k)$ benötigt.



$$Y(z) = G(z)U(z)$$

Multiplikation

$$y(k) = \sum_{i=0}^k g(i)u(k-i)$$

Faltung

Die Multiplikation tritt also im Bildbereich an die Stelle der Faltungssumme, genau wie sie bei zeitkontinuierlichen Systemen an die Stelle des Faltungsintegrals tritt.

2.4 Übertragungsfunktionen

Z-Übertragungsfunktion und Gewichtsfolge

Wählen wir als Eingangssignal einen Delta-Impuls $u(k) = \delta_{\mathbb{K}}(k)$ bzw. $U(z) = 1$, dann ergibt sich am Ausgang die Gewichtsfolge bzw. die Übertragungsfunktion:

$$y(k) = \sum_{i=0}^k g(i)u(k-i) = \sum_{i=0}^k g(i)\delta_{\mathbb{K}}(k-i) = g(k)$$

bzw.

$$Y(z) = G(z)U(z) = G(z) \cdot 1 = G(z)$$

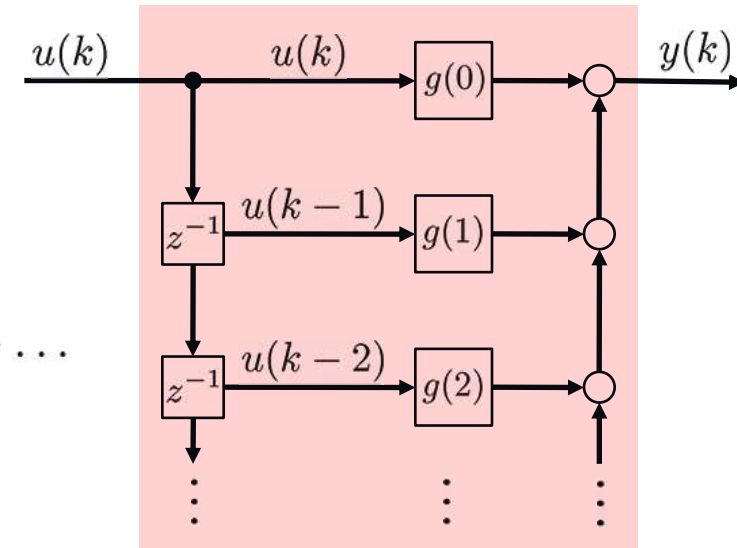
Für eine allgemeine Gewichtsfolge

$$g(k) = g(0)\delta_{\mathbb{K}}(k) + g(1)\delta_{\mathbb{K}}(k-1) + g(2)\delta_{\mathbb{K}}(k-2) + \dots$$

ergibt sich eine entsprechende Übertragungsfunktion:

$$G(z) = g(0)z^0 + g(1)z^{-1} + g(2)z^{-2} + \dots$$

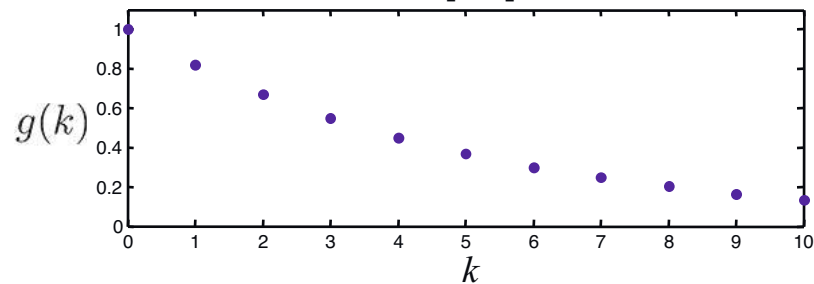
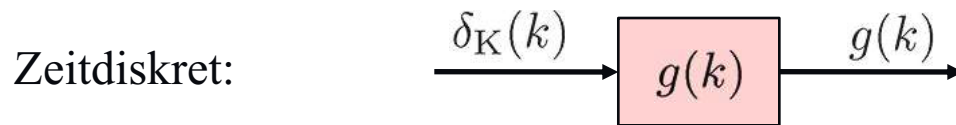
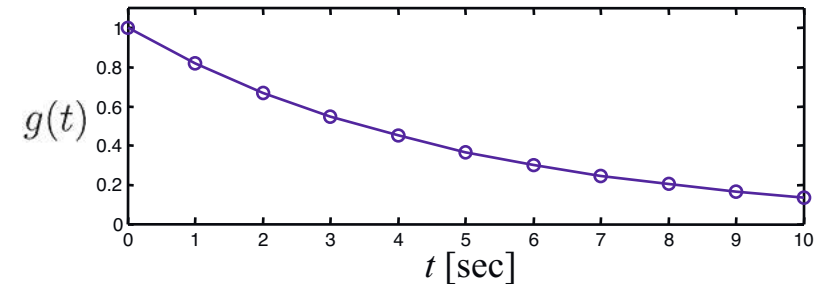
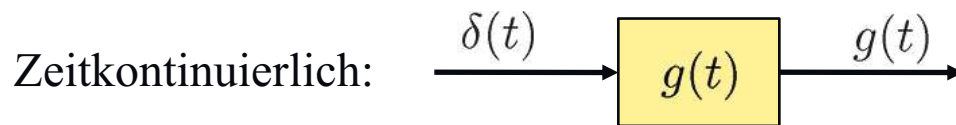
Ist die Gewichtsfolge $g(k)$ endlich lang, so gilt dies auch für die Anzahl der Terme in $G(z)$. Ist die Gewichtsfolge $g(k)$ hingegen unendlich lang, so gilt dies ebenfalls für die Anzahl der Terme in $G(z)$ und eine besser handhabbare Form muss gefunden werden, da sich mit unendlich vielen Termen in der Übertragungsfunktion schlecht rechnen lässt.



2.4 Übertragungsfunktionen

Beispiel: Transformation mittels Invarianz der Impulsantwort (Gewichtsfunktion)

Eine, insbesondere beim Filterentwurf, beliebte Methode, ein zeitkontinuierliches System in ein zeitdiskretes zu transformieren, besteht darin, identische Impulsantworten beider Systeme zu fordern. Genauer: Wir fordern, dass die abgetasteten Werte der zeitkontinuierlichen Impulsantwort identisch zur Impulsfolge des zeitdiskreten Systems sein sollen.



Für ein PT_1 -System ergibt sich z.B. folgenden Gewichtsfunktion:

$$G(s) = \frac{K}{1 + Ts} = \frac{K/T}{s + 1/T} \rightarrow g(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T}$$

2.4 Übertragungsfunktionen

Für $K = 5$ und $T = 5$ sec ergibt sich: $g(t) = e^{-t/5}$. Wählen wir z.B. die Abtastzeit $T_0 = 1$ sec, dann lautet die Forderung nach Invarianz der Impulsantworten (Gewichtsfunktionen):

$$g(t = kT_0) = e^{-kT_0/5} = e^{-k/5} = \left(e^{-1/5}\right)^k = 0.82^k = g(k)$$

D.h. die Gewichtsfolge des transformierten zeitdiskreten Systems ist eine *geometrische Folge*.

Die Gewichtsfolge lässt sich auch mit Hilfe zeitverschobener Delta-Impulse schreiben:

$$g(k) = 0.82^0 \delta_K(k) + 0.82^1 \delta_K(k - 1) + 0.82^2 \delta_K(k - 2) + 0.82^3 \delta_K(k - 3) + \dots$$

Dies kann nun leicht in den z -Bereich überführt werden, um die Übertragungsfunktion zu erhalten:

$$G(z) = 0.82^0 z^0 + 0.82^1 z^{-1} + 0.82^2 z^{-2} + 0.82^3 z^{-3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} 0.82^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (0.82z^{-1})^k$$

Da eine Übertragungsfunktion in Form einer unendlichen Reihe sehr unhandlich ist, verwenden wir die Summenformel für unendliche geometrische Reihen mit $x = 0.82z^{-1}$:

$$G(z) = \frac{1}{1 - 0.82z^{-1}} = \frac{z}{z - 0.82} \quad \text{Verstärkung: } G(z = 1) = \frac{1}{1 - 0.82} = 5.56 \neq 5$$

Dieses $G(z)$ entspricht also dem genannten $G(s)$ im Sinne einer identischen *Impulsantwort*.

2.4 Übertragungsfunktionen

Beispiel: Transformation mittels Invarianz der Sprungantwort

Eine andere, insbesondere in der Regelungstechnik, beliebte Methode, ein zeitkontinuierliches System in ein zeitdiskretes zu transformieren, besteht darin, identische Sprungantworten beider Systeme zu fordern. Diese Forderung liefert ein anderes Ergebnis als im vorherigen Beispiel. Es ist nämlich unmöglich sowohl die Impuls- als auch die Sprungantwort identisch zu machen! So liefert die Forderung nach Invarianz der *Sprungantwort* eine andere Übertragungsfunktion als im vorherigen Beispiel:

$$G(z) = \frac{0.9z^{-1}}{1 - 0.82z^{-1}} = \frac{0.9}{z - 0.82} \quad \text{Verstärkung: } G(z = 1) = \frac{0.9}{1 - 0.82} = 5$$

Bei der Wahl des Kriteriums für die Transformation vom Zeitkontinuierlichen ins Zeitdiskrete müssen wir also eine Entscheidung treffen, auf welche Eigenschaften es in der konkreten Anwendung besonders ankommt. Beispielsweise wird eine Transformation mittels Invarianz der Impulsantwort alle Frequenz gleich stark gewichten, da im verwendeten Anregungssignal $\delta(t)$ bzw. $\delta_K(k)$ alle Frequenzen gleich stark vertreten sind. Hingegen wird die Forderung nach Invarianz der Sprungantwort die niedrigen Frequenzen betonen. Das erkennt man auch an obigem Ergebnis, denn $G(z)$ nach Sprungantwortinvarianz liefert die korrekte Verstärkung, $G(z)$ nach Impulsantwortinvarianz aber nicht!

2.4 Übertragungsfunktionen

Übertragungsfunktion → Differenzgleichung

Gegeben sei eine allgemeine z -Übertragungsfunktion mit Zählergrad m und Nennergrad n :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

Der Koeffizient a_0 kann durch Kürzen immer auf 1 gebracht werden. Daraus lässt sich leicht, wie folgt, die Differenzgleichung im Zeitbereich herleiten:

$$(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}) Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}) U(z)$$

↓

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m)$$

Eine Totzeit von $T_t = dT_0$ entspricht einer Rückwärtsverschiebung um d Schritte:

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} z^{-d} = \frac{b_0 z^{-d} + b_1 z^{-1-d} + \dots + b_m z^{-m-d}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

$$\rightarrow y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k-d) + b_1 u(k-1-d) + \dots + b_m u(k-m-d)$$

Im Unterschied zum s -Bereich stellt eine Totzeit also im z -Bereich kein „Fremdkörper“ dar; die Übertragungsfunktion bleibt gebrochen rational, d.h. ein Bruch zweier Polynome.

2.4 Übertragungsfunktionen

Liegt die Übertragungsfunktion in Form positiver Potenzen von z vor, sollte diese zunächst in Potenzen von z^{-1} umgewandelt werden; dann kann das Standardvorgehen angewandt

$$G(z) = \frac{b'_m z^m + \dots + b'_1 z^1 + b'_0}{a'_n z^n + \dots + a'_1 z^1 + a'_0}$$

ACHTUNG: Die n und m hier unterscheiden sich von denen auf der vorherigen Folie!
Erweitern mit z^{-n} (Annahme $n \geq m$) und Kürzen durch a'_n führt auf:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{\frac{b'_m}{a'_n} z^{m-n} + \frac{b'_{m-1}}{a'_n} z^{m-n-1} + \dots + \frac{b'_0}{a'_n} z^{-n}}{1 + \frac{a'_{n-1}}{a'_n} z^{-1} + \dots + \frac{a'_0}{a'_n} z^{-n}} \\ &= \frac{b_{m-n} z^{m-n} + b_{n-m+1} z^{m-n-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \end{aligned}$$

Für $n = m$ ist diese Übertragungsfunktion mit der Standardform auf der vorherigen Folie identisch. Für $n > m$ lässt sich hier aus dem Zähler eine Totzeit ausklammern:

$$G(z) = \frac{b_{m-n} + b_{n-m+1} z^{-1} + \dots + b_n z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} z^{m-n} = \frac{\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 z^{-1} + \dots + \tilde{b}_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} z^{-d}$$

mit $d = n - m$. **Der Fall $m > n$ kann daher nicht auftreten (negative Totzeit \rightarrow akausal)!**

2.4 Übertragungsfunktionen

Kausalität und Realisierbarkeit

Für Übertragungsfunktion der Form

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

sind Zählerordnung m und Nennerordnung n beliebige positive Zahlen. $G(z)$ ist immer kausal.

Für Übertragungsfunktion der Form

$$G(z) = \frac{b'_m z^m + \dots + b'_1 z^1 + b'_0}{a'_n z^n + \dots + a'_1 z^1 + a'_0}$$

muss gelten: **Nennerordnung \geq Zählerordnung** bzw.: $n \geq m$. Ist diese Bedingung erfüllt, dann ist **$G(z)$ kausal**. Gilt hingegen $m > n$, dann ist $G(z)$ akausal, weil eine negative Totzeit entsteht, d.h. Werte aus der Zukunft prädiziert werden müssen.

Die Bedingung „Nennerordnung \geq Zählerordnung“ ist aus dem s -Bereich her bekannt. Dort war dies allerdings eine Bedingung für die praktische Realisierbarkeit einer Übertragungsfunktion (keine reinen D-Anteile). Damit gibt es im Zeitdiskreten keine zusätzlichen Schwierigkeiten. **Im z -Bereich ist jedes kausale System auch automatisch realisierbar!**

2.4 Übertragungsfunktionen

Beispiel für $m < n$: $m = 1, n = 2$

1.) Meistens: n und m beziehen sich auf **negative** Potenzen: $G(z^{-1}) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$

Dieses System ist sprunghfähig, wenn $b_0 \neq 0$.

2.) Selten gemeint: n und m beziehen sich auf **positive** Potenzen: $G(z) = \frac{b'_0 + b'_1 z}{a'_0 + a'_1 z + a'_2 z^2}$

Kürzen durch z^2 liefert: $G(z^{-1}) = \frac{b'_1 z^{-1} + b'_0 z^{-2}}{a'_2 + a'_1 z^{-1} + a'_0 z^{-2}}$

Dieses System ist *nicht* sprunghfähig.

Die Reihenfolge der Koeffizienten ist bei beiden Fällen genau umgekehrt!

$m < n$ ist kein Problem im Fall 1. Der Ausgang wird nur weiter verzögert als der Eingang.

$m < n$ ist kein Problem im Fall 2. Es bedeutet nur, dass keine Sprunghfähigkeit vorliegt.

2.4 Übertragungsfunktionen

Beispiel für $m > n$: $m = 2, n = 1$

1.) Meistens: n und m beziehen sich auf **negative** Potenzen: $G(z^{-1}) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1}}$

Dieses System ist sprungfähig, wenn $b_0 \neq 0$.

2.) Selten gemeint: n und m beziehen sich auf **positive** Potenzen: $G(z) = \frac{b'_0 + b'_1 z + b'_2 z^2}{a'_0 + a'_1 z}$

Kürzen durch z^2 liefert: $G(z^{-1}) = \frac{b'_2 + b'_1 z^{-1} + b'_0 z^{-2}}{a'_1 z^{-1} + a'_0 z^{-2}}$

Dieses System ist *akausal*:

$$a'_1 y(k-1) + a'_2 y(k-2) = b'_2 u(k) + b'_1 u(k-1) + b'_0 u(k-2)$$

$$\Rightarrow a'_1 y(k) = -a'_2 y(k-1) + b'_2 u(k+1) + b'_1 u(k) + b'_0 u(k-1)$$

Die Reihenfolge der Koeffizienten ist bei beiden Fällen genau umgekehrt!

$m > n$ ist kein Problem im Fall 1. Der Eingang wird nur weiter verzögert als der Ausgang.

$m > n$ ist **ein** Problem im Fall 2. Es bedeutet, dass das System akausal ist.

2.4 Übertragungsfunktionen

Sprungfähigkeit

Im Zeitkontinuierlichen kann man die Sprungfähigkeit eines Systems direkt an der s -Übertragungsfunktion ablesen: Gilt Zählergrad = Nennergrad, dann ist das System sprungfähig. Gilt Zählergrad < Nennergrad, dann ist das System nicht sprungfähig.

Im Zeitdiskreten ist ein System *sprungfähig*, wenn

- für die Übertragungsfunktion in z -Form (nur positive z -Potenzen) gilt:

$$\text{Zählergrad } m = \text{Nennergrad } n$$

- für die Übertragungsfunktion in z^{-1} -Form (nur negative z -Potenzen) gilt: $b_0 \neq 0$

Nur wenn b_0 existiert, beeinflusst der Eingang $u(k)$ den Ausgang $y(k)$ direkt. Ist $b_0 = 0$, dann muss eine Änderung im Eingang erst bis $u(k-1)$ oder weiter durchwandern bis sie sich im Ausgang $y(k)$ bemerkbar macht.

Terminologie: Ein System folge der Differenzengleichung $y(k) = b_1 u(k-1) - a_1 y(k-1)$. Je nach Sichtweise kann man es als nicht sprungfähig oder als totzeitbehaftet interpretieren:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{\tilde{b}_0}{1 - a_1 z^{-1}} z^{-1} \quad b_1 = \tilde{b}_0$$

2.4 Übertragungsfunktionen

Differenzgleichung → Übertragungsfunktion

Um eine Differenzgleichung in den z -Bereich zu transformieren, verschiebt man zunächst die Zeitvariable so, dass der „neueste“ Ausgangswert in der Form $y(k)$ auftaucht. Dann lässt sich die Gleichung mit Hilfe reiner Verzögerungsoperatoren z^{-i} transformieren.

Beispiel: $2y(k-1) + 4y(k) + 3y(k+3) - u(k) = -u(k-1)$

- 1.) Suche den „neuesten“ Ausgangswert: $y(k+3)$
- 2.) Zeitverschiebung, so dass dieser Wert auf $y(k)$ abgebildet wird: $k := k-3$
→ $2y(k-4) + 4y(k-3) + 3y(k) - u(k-3) = -u(k-4)$
- 3.) Transformation in den z -Bereich, Trennung von $Y(z)$ und $U(z)$, Division zur Übertragungsfunktion:

$$2z^{-4}Y(z) + 4z^{-3}Y(z) + 3Y(z) - z^{-3}U(z) = -z^{-4}U(z)$$

$$(2z^{-4} + 4z^{-3} + 3)Y(z) = (z^{-3} - z^{-4})U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{z^{-3} - z^{-4}}{3 + 4z^{-3} + 2z^{-4}} = \frac{\frac{1}{3}(z^{-3} - z^{-4})}{1 + \frac{4}{3}z^{-3} + \frac{2}{3}z^{-4}} = \frac{\frac{1}{3}(1 - z^{-1})}{1 + \frac{4}{3}z^{-3} + \frac{2}{3}z^{-4}} z^{-3}$$

2.4 Übertragungsfunktionen

IIR (*Infinite Impulse Response*)

Alle kontinuierlichen Impulsantworten $g(t)$ sind unendlich lang; typischerweise klingen sie exponentiell gegen 0 ab. Durch Abtastung entsteht damit ebenfalls eine unendlich lange Impulsfolge $g(k)$. Solche Systeme werden als IIR-Systeme (*infinite impulse response*) bezeichnet.

IIR-Systeme haben eine z -Übertragungsfunktion mit nichttrivialem Nenner, d.h. der Nenner ist komplexer als z^n . Eine solcher (komplexerer) Nenner führt nämlich dazu, dass $y(k)$ in mindestens zwei verschiedenen Zeitverzögerungen in der zugehörigen Differenzgleichung auftritt, die sich damit nur *rekursiv* berechnen lässt!

Beispiele:

$$G(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}}$$

$$G(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$$

$$G(z) = \frac{z}{1 - 0.7z^{-1}} \quad (\text{akausal!})$$

$$G(z) = \frac{0.4 + 0.5z^{-1} + 0.6z^{-2} + 0.7z^{-3} + 0.8z^{-4}}{1 - 0.9z^{-1}}$$

$$G(z) = \frac{0.4 + 0.5z^{-1} + 0.6z^{-2} + 0.7z^{-3} + 0.8z^{-4}}{(1 - 0.8z^{-1})^2(2 - z^{-1} + 0.3z^{-2} + 0.5z^{-3})}$$

$$G(z) = \frac{z^2 + 0.7z + 0.4}{z^3 + 0.8z + 0.2}$$

$$G(z) = \frac{z^3 + 0.8z + 0.2}{z^2 + 0.7z + 0.4} \quad (\text{akausal!})$$

2.4 Übertragungsfunktionen

FIR (*Finite Impulse Response*)

Systeme mit endlich langer Impulsfolge $g(k)$ nennt man FIR-Systeme (*finite impulse response*). Sie existieren nur im Zeitdiskreten und haben keine (exakte) Entsprechung im Zeitkontinuierlichen. Ist die Länge eines FIR-Systems aber relativ groß, kann es ein stabiles IIR-System näherungsweise beschreiben. Für grenzstabile und instabile IIR-Systeme ist dies allerdings nicht möglich, da deren Gewichtsfolge nicht gegen 0 konvergiert.

FIR-Systeme haben eine z -Übertragungsfunktion ohne Nenner oder mit trivialem Nenner z^m . Daraus folgt, dass in der Differenzengleichung nur ein y -Term auftaucht und sich daher der Ausgang nur aus verschobenen Eingangssignalen berechnet (*feedforward*).

Beispiele:
$$G(z) = \frac{z^2 - z + 0.25}{z - 0.5} z^{-2} = \frac{(z - 0.5)^2}{z - 0.5} z^{-2} = (z - 0.5) z^{-2} = z^{-1} - 0.5 z^{-2}$$

$$G(z) = 1 - z^{-1} \qquad G(z) = \frac{z^3 + 4z^2 + 3z + 1}{z^5} = z^{-2} + 4z^{-3} + 3z^{-4} + z^{-5}$$

$$G(z) = \sum_{i=0}^{10} b_i z^{-i} \qquad G(z) = \frac{z^3 + 4z^2 + 3z + 1}{z^2} = z + 4 + 3z^{-1} + z^{-2} \quad (\text{akausal!})$$

$$G(z) = z^{-2} \qquad G(z) = z^3 \quad (\text{akausal!})$$

2.4 Übertragungsfunktionen

Pol-Nullstellen-Form einer Übertragungsfunktion

Bisher haben wir die Zähler- und Nennerpolynome einer z -Übertragungsfunktion in ausmultiplizierter Form betrachtet. Wie im s -Bereich ist hier auch eine Faktor-Schreibweise möglich und sinnvoll, da man daraus sofort die Pole und Nullstellen ablesen kann. Es ist einfacher zunächst die Übertragungsfunktion in positiven z -Potenzen zu schreiben:

$$G(z) = \frac{b'_m z^m + \dots + b'_1 z^1 + b'_0}{a'_n z^n + \dots + a'_1 z^1 + a'_0} = k \frac{(z - n_1) \cdot (z - n_2) \cdot \dots \cdot (z - n_m)}{(z - p_1) \cdot (z - p_2) \cdot \dots \cdot (z - p_n)}$$

Die Verstärkung von $G(z)$ berechnet sich gemäß dem Endwertsatz der z -Transformation, indem man $z = 1$ setzt:

$$\text{Verstärkung: } K = \frac{b'_m + \dots + b'_1 z + b'_0}{a'_n + \dots + a'_1 z + a'_0} = k \frac{\prod_{i=1}^m (1 - n_i)}{\prod_{i=1}^n (1 - p_i)}$$

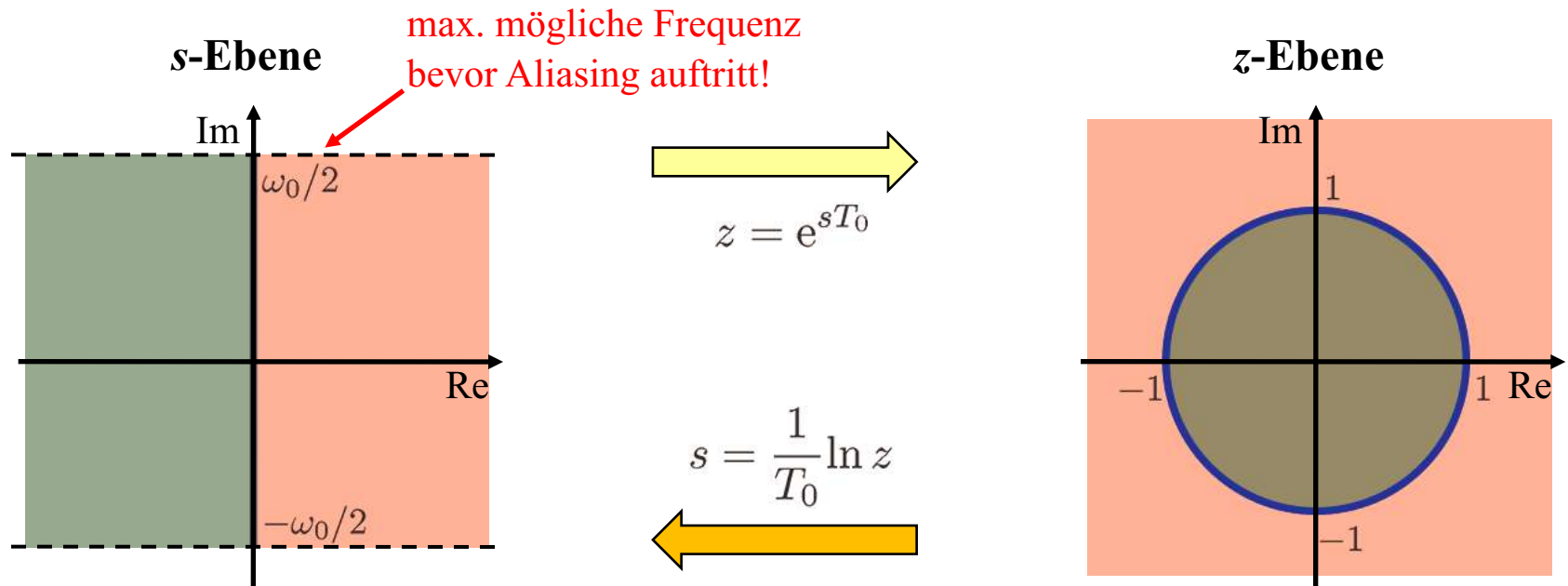
Die Pole p_i und Nullstellen n_i können mit der Formel $s = \frac{1}{T_0} \ln z$ in den s -Bereich transformiert und dort auf bekannte Weise interpretiert werden.

Damit ergeben sich sofort die entsprechenden Bedingungen für **Stabilität** und **Phasenminimalität** für Pole und Nullstellen im z -Bereich!

2.4 Übertragungsfunktionen

Beziehung zwischen s -Ebene und z -Ebene

- Das Stabilitätsgebiet „linke s -Halbebene“ wird in das „Innere des Einheitskreises“ der z -Ebene transformiert.
- Die Imaginärachse der s -Ebene wird auf den Einheitskreis der z -Ebene transformiert.
- Das Instabilitätsgebiet „rechte s -Halbebene“ wird in das „Äußere des Einheitskreises“ der z -Ebene transformiert.



2.4 Übertragungsfunktionen

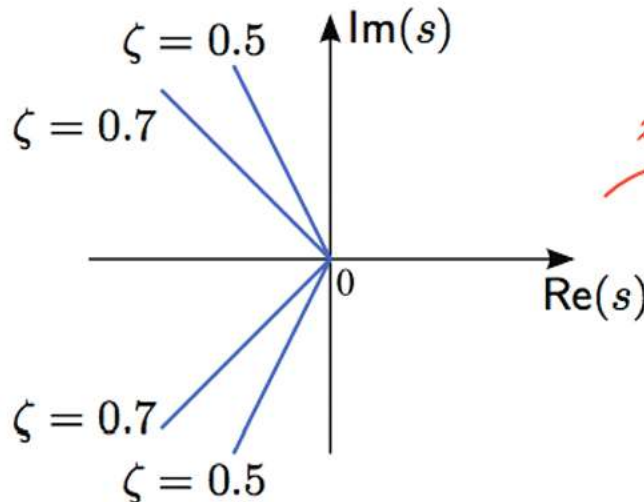
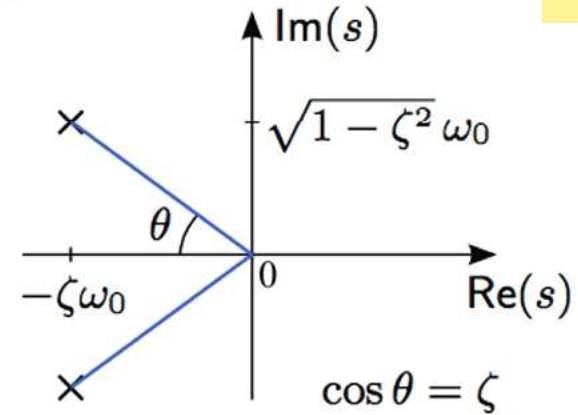
$$\xi = D$$

Pole locations for constant damping ratio $\zeta < 1$

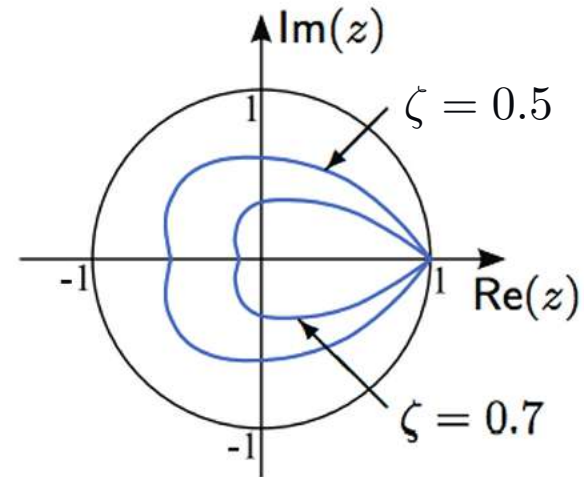
$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$



$$s = -\zeta\omega_0 \pm j\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_0$$



$$z = e^{sT}$$



$$s = -\zeta\omega_0 + j\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_0: \zeta = \text{constant}$$

$$z = e^{-\zeta\omega_0 T} e^{-j\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_0 T}$$

2.4 Übertragungsfunktionen

Stabilität

- Eine z -Übertragungsfunktion ist *stabil*, wenn alle Pole *innerhalb* des Einheitskreises liegen.
- Liegen ein oder mehrere Pole *auf dem* Einheitskreis (aber keine Mehrfachpole!) und alle restlichen Pole innerhalb des Einheitskreises, dann ist das System *grenzstabil*.
- Existiert mindestens ein Pol *außerhalb* des Einheitskreises oder ein Mehrfachpol auf dem Einheitskreis dann ist das System *instabil*.

Die Stabilitätseigenschaften einer s -Übertragungsfunktion bleiben bei der Transformation in den z -Bereich *erhalten*, weil sich die Pole entsprechend $z = e^{sT_0}$ mit transformieren.

Phasenminimalität

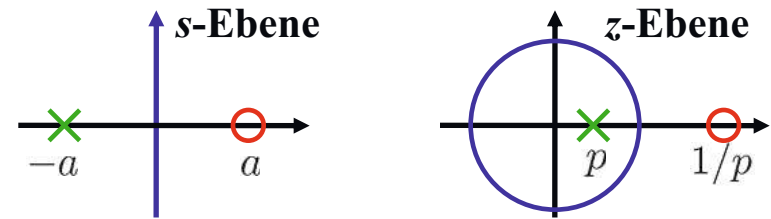
- Ein System ist phasenminimal, wenn es ausschließlich *stabile* und *grenzstabile* Pole und *Nullstellen* aufweist.

Die Nullstellen einer s -Übertragungsfunktion *ändern* sich üblicherweise bei einer Transformation in den z -Bereich (z.B. bei der Forderung nach Invarianz der Impuls- oder Sprungantwort)! Deshalb bleibt auch die Eigenschaft Phasenminimalität i.A. *nicht* erhalten!

2.4 Übertragungsfunktionen

Beispiel: Allpass im z -Bereich

Ein Allpass zeichnet sich durch einen Amplitudengang = 1 aus. Dies entsteht dadurch, dass alle Pole und Nullstellen betragsmäßig identisch sind, so dass sich ihre Wirkung Amplitudengang aufhebt. Allerdings sind alle Pole stabil und alle Nullstellen instabil (sonst würden sie sich ja gegenseitig wegekürzen). Im s -Bereich sieht z.B. ein Allpass 1. Ordnung so aus:



$$G(s) = \frac{-Ts + 1}{Ts + 1} = \frac{-s + a}{s + a} \quad \text{mit } a = \frac{1}{T} > 0$$

Pol:	$s = -a$ (stabil)
Nullstelle:	$s = a$ (instabil)

Bei einem Allpass im z -Bereich ist der Pol ebenfalls stabil und die Nullstelle instabil; allerdings entspricht die Nullstelle dem *inversen* Pol (nicht dem gespiegelten, wie im s -Bereich)!

$$G(z) = \frac{pz - 1}{z - p} = \frac{p - z^{-1}}{1 - pz^{-1}} \quad \text{mit } |p| < 1$$

Pol:	$z = p$ (stabil)
Nullstelle:	$z = 1/p$ (instabil)

Der Amplitudengang ergibt sich für $z = e^{i\omega T_0}$:

$$|G(i\omega)| = \frac{|pe^{i\omega T_0} - 1|}{|e^{i\omega T_0} - p|} = \frac{\sqrt{(p \cos \omega T_0 - 1)^2 + p^2 \sin^2 \omega T_0}}{\sqrt{(\cos \omega T_0 - p)^2 + \sin^2 \omega T_0}} = \frac{\sqrt{p^2 - 2p \cos \omega T_0 + 1}}{\sqrt{1 - 2p \cos \omega T_0 + p^2}} = 1$$



Veränderung der Abtastrate:

decimate(x,r);¹

*% Reduziert die Abtastrate des Signals
% x um den Faktor r mit Hilfe eines Tiefpass-
% Filters.*

upsample(x,n);¹

*% Erhöht die Abtastrate um den Faktor n, indem
% Nullen zwischen den Abtastschritten eingefügt
% werden.*

*% Z.B.: x = [1 2 3];
% y = upsample(x,3);
% y =
% 1 0 0 2 0 0 3 0 0*

downsample(x,n);¹

*% Herabsetzen der Abtastrate. Nur jeder n-te
% Abtastschritt wird übernommen.*

*% Z.B.: x = [1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];
% y = downsample(x,3);
% y =
% 1 4 7 10*



`resample(x,p,q);1` *% Verändert die Abtastrate von Signalvektor x*
% um den rationalen Faktor p/q

Impulsantwort und Sprungantwort:

`impulse;2` *% Berechnet die Impulsantwort eines linearen*
% Systems

`step;2` *% Berechnet die Sprungantwort eines linearen*
% Systems

Partialbruchzerlegung:

`[r,p,k] = residuez(b,a);1` *% Führt eine Partialbruchzerlegung*
% unter Vorgabe des Zählerpolynoms b(z)
% und Nennerpolynoms a(z) aus. Die
% umgekehrte Operation ist ebenfalls
% möglich

¹ : *Signal Processing Toolbox*

² : *Control System Toolbox*

3. Transformation von Signalen in den Frequenzbereich

Inhalt Kapitel 3

3. Transformation von Signalen in den Frequenzbereich

3.1 Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

3.2 Erweiterung: Schnelle Fourier-Transformation (FFT)

3.3 Frequenzanalyse mittels DFT

3.4 Leckeffekt und Fensterung

3.5 Instationäre Signale und Kurzzeit-DFT

3.6 Ausblick: Zeit-Frequenz-Analyse

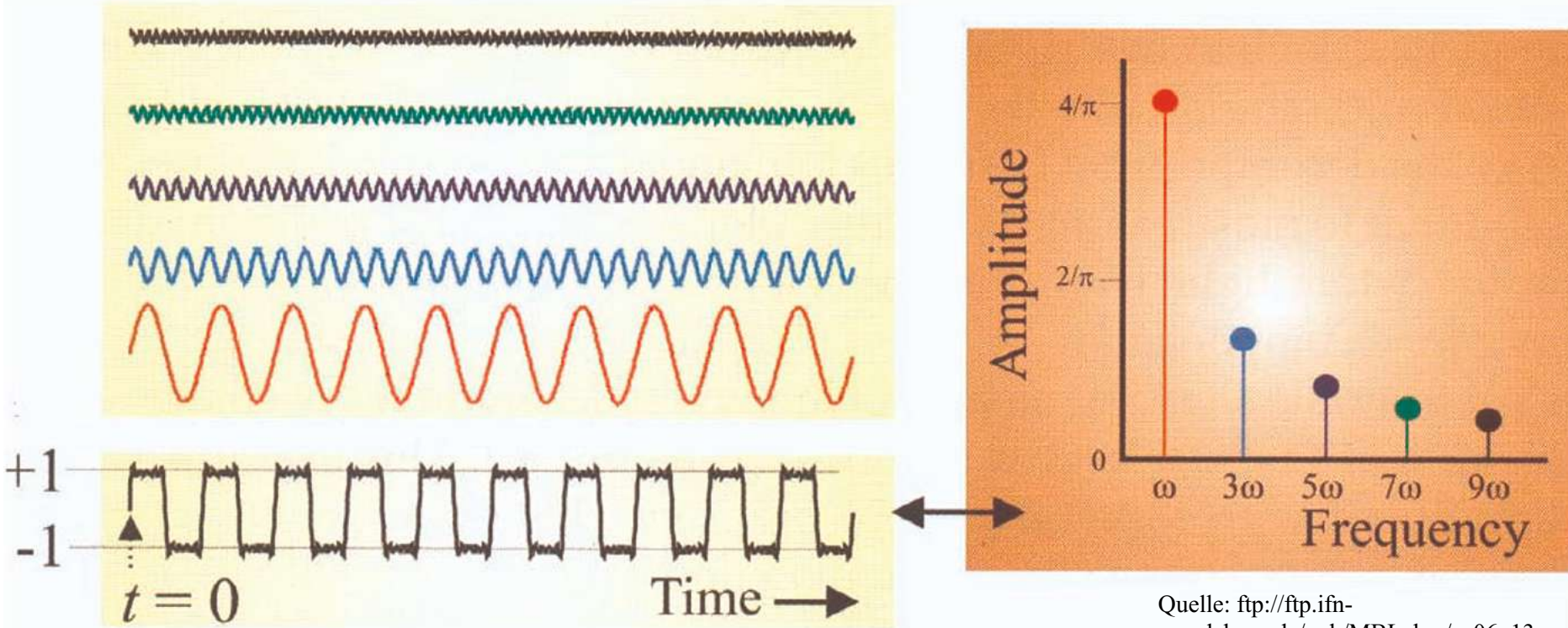
3.7 Ausblick: Parametrische Frequenzanalyse

Joseph Fourier, 1768-1830
(www.wikipedia.org) C



Inhalt Kapitel 3

Fourier-Reihe



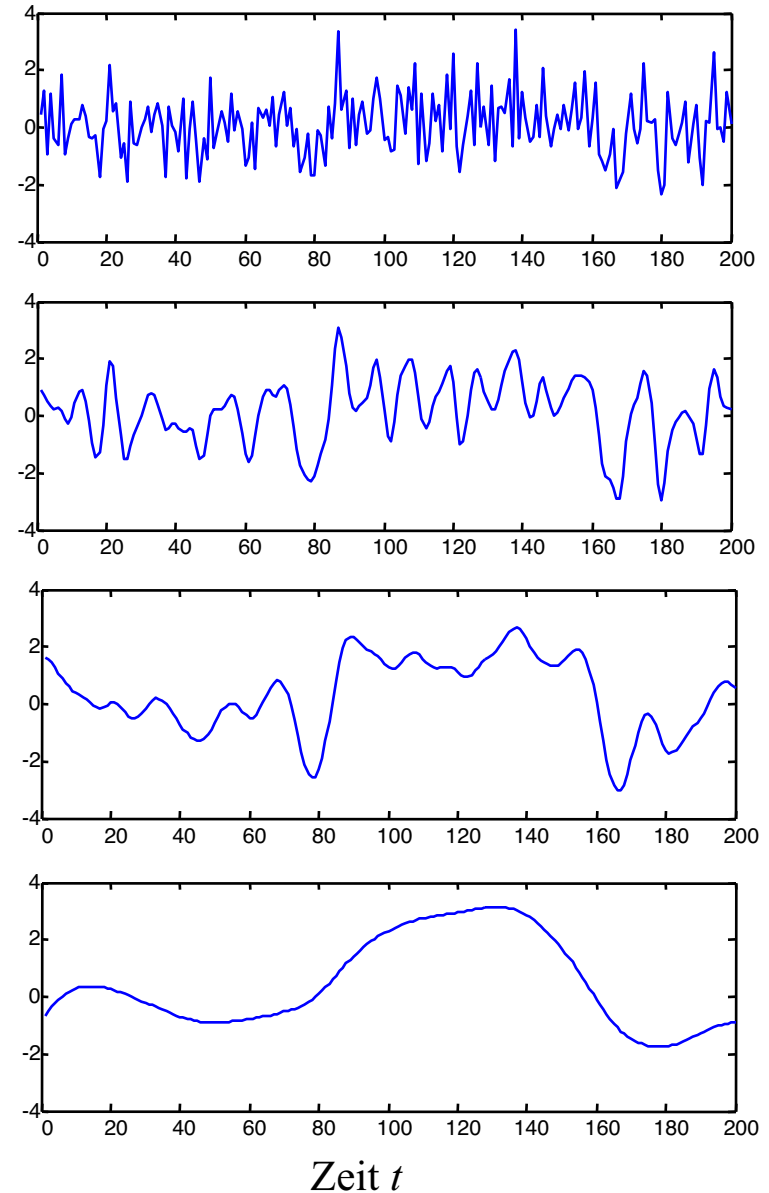
Sehr viele Anwendungen der DFT:

- Überall, wo das Spektrum benötigt wird: Diagnose, fast alle Audio-Anwendungen
- Kompression: Diskrete Cosinus-Transformation (DCT) in JPEG, MP3, Shazam

4.2 Definition

Signale enthalten viele verschiedene Frequenzanteile. Eine Transformation vom Zeitbereich in den Frequenzbereich erlaubt quantitative Aussagen darüber, welche Frequenzen bzw. Frequenzbereiche wie stark im Signal vertreten sind.

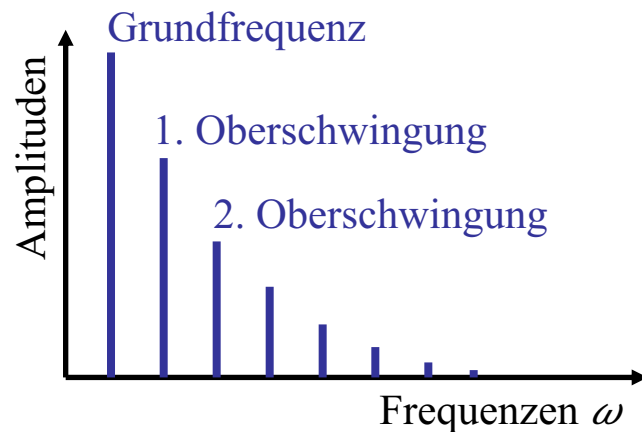
Anteil hoher Frequenzen im Signal



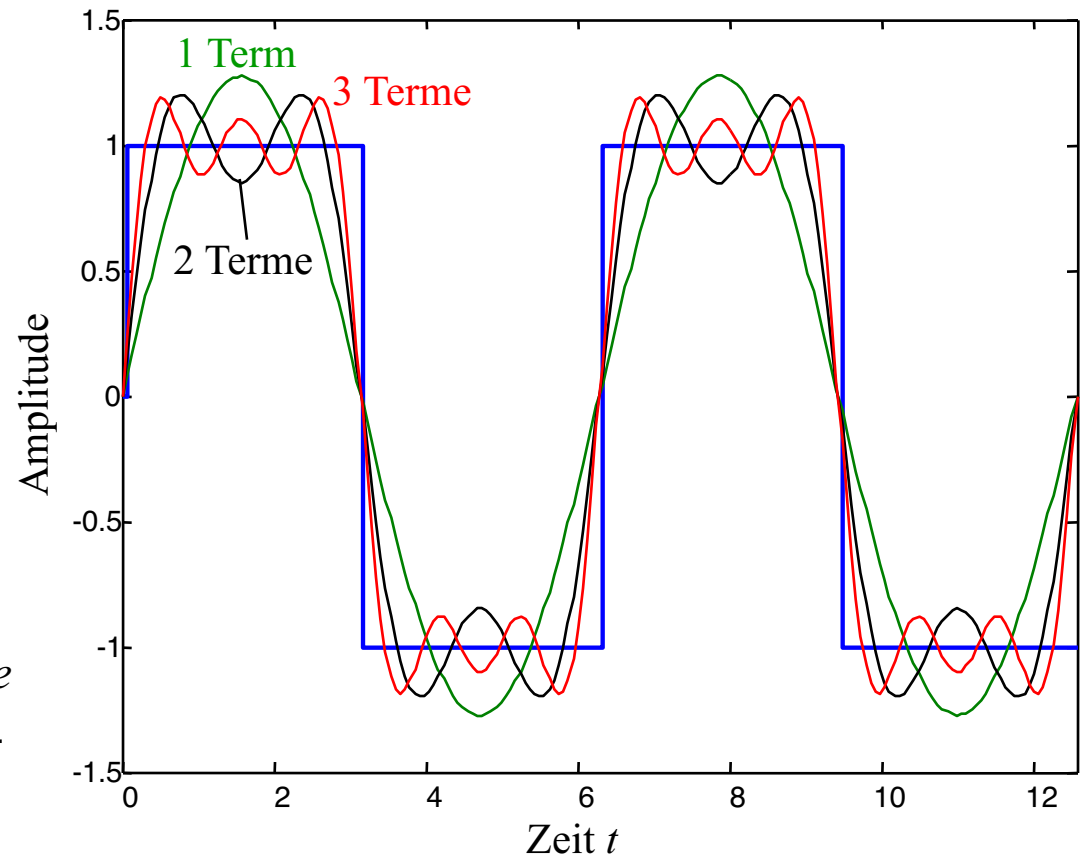
3.1 Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Fourier-Reihe

- Zerlegung *periodischer* Signale in ihre Frequenzbestandteile.
- Signal kann in eine unendliche Summe von Sinus- und Cosinus-Termen zerlegt werden.
- Amplitude zu jeder Frequenz gibt an, wie stark diese Frequenz im Signal enthalten ist.



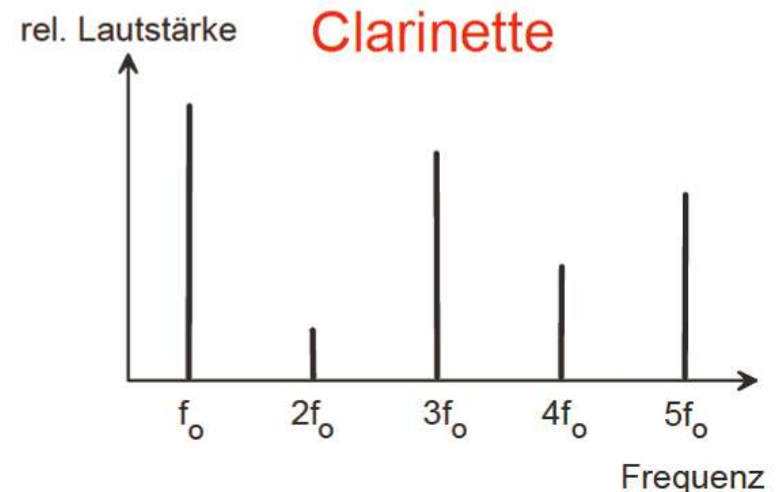
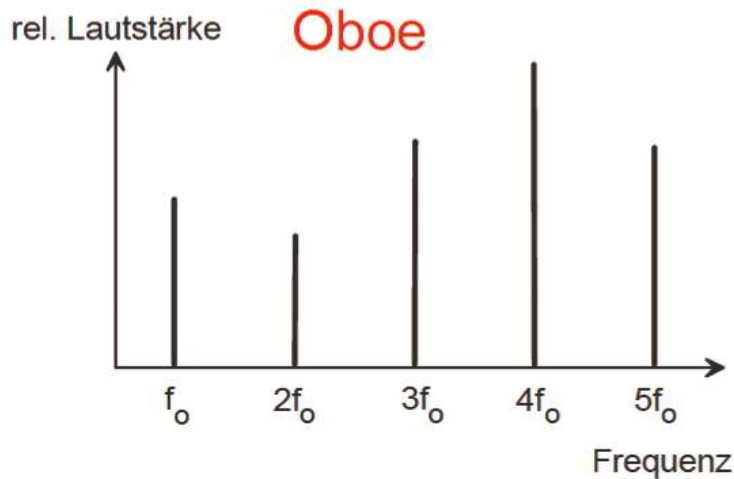
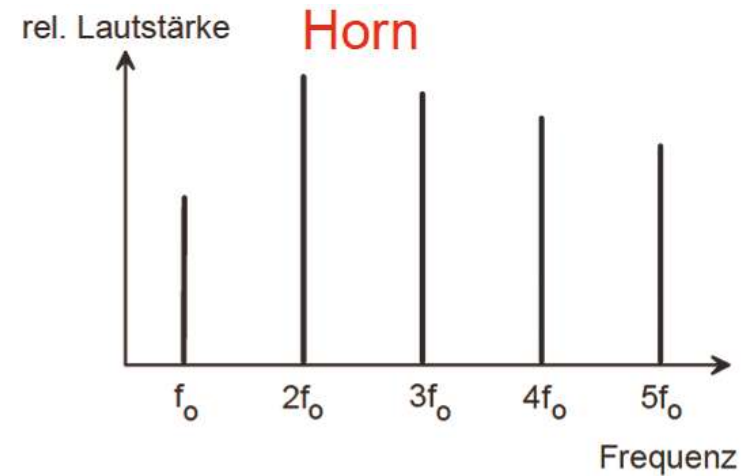
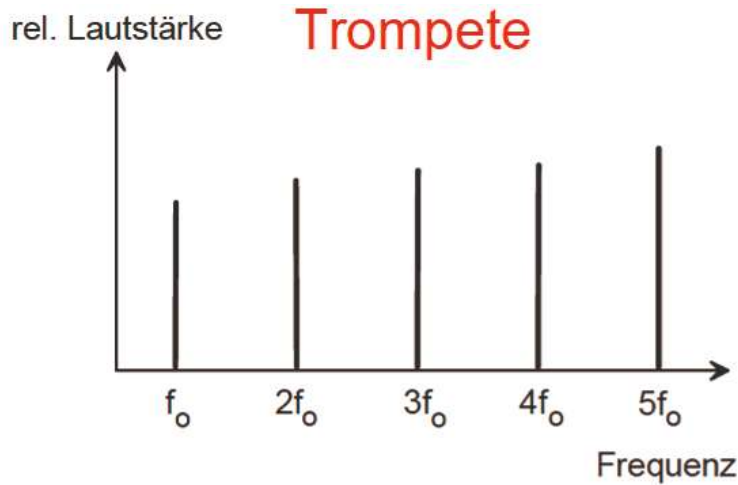
- Wenn man auch *nicht-periodische* Signale behandeln will: Periodenlänge $\rightarrow \infty$, Grundfrequenz $\rightarrow 0$.



3.1 Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Quelle: http://eitidaten.fh-pforzheim.de/daten/mitarbeiter/blankenbach/vorlesungen/mathe_2/Fourier_Trafo_kurz_Folien.pdf

Kammerton a : $f_0 = 440$ Hz auf verschiedenen Musikinstrumenten

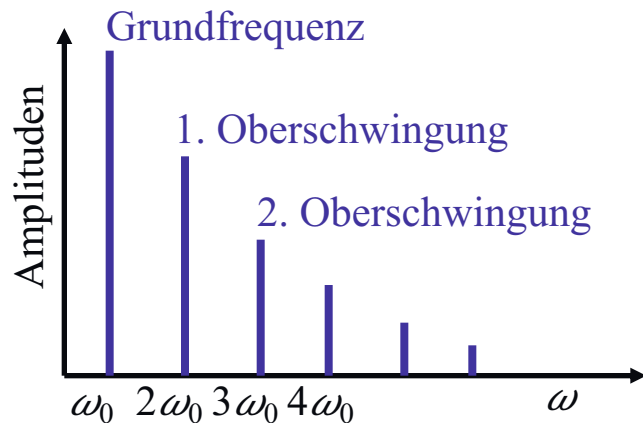


3.1 Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

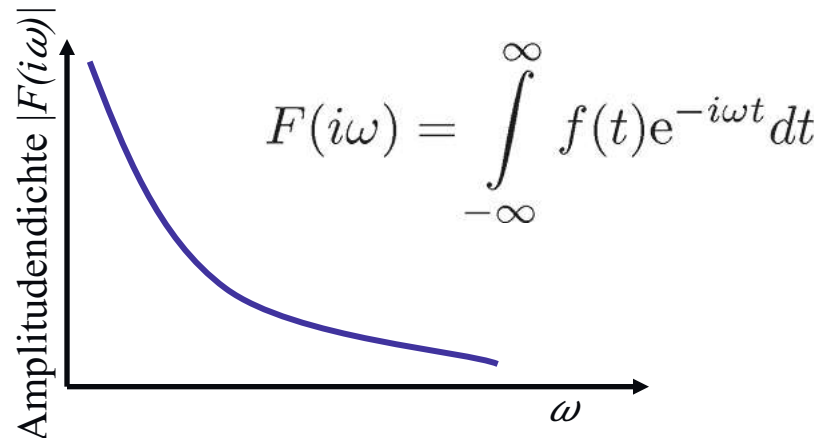
Fourier-Transformation

- Erweiterung der Fourier-Reihe für nicht-periodische Signale.
- Periodenlänge $T \rightarrow \infty$, Grundfrequenz $\omega \rightarrow 0$.
- Das Spektrum besteht nicht mehr aus absoluten *Amplitudenwerten* an *diskreten* Frequenzen $n \cdot \omega_0$ (also Vielfachen der Grundfrequenz), sondern es besteht aus der *Amplitudendichte* über einer *kontinuierlichen* Frequenzachse. (Gleiches gilt für die Phasen.)

Fourier-Reihe



Fourier-Transformation



3.1 Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Fourier-Transformation

- Zeit kontinuierlich
- Frequenz kontinuierlich

$$X(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt$$

Erinnerung:

$$\omega = 2\pi f$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Abtastfrequenz

Abtastzeit

Zeitdiskrete Fourier-Transformation

- Zeit diskret: $t = kT_0$
- Frequenz kontinuierlich

$$X(i\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_0)e^{-i\omega kT_0} \rightarrow X(i\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-i\Omega k}$$

$$x(k) = x(kT_0)$$

$$\Omega = \omega T_0 = 2\pi f T_0 = 0 \dots 2\pi$$

$$f = 0 \dots f_0$$

Diskrete Fourier-Transformation

- Zeit diskret in N Werte (Samples): $t = 0, T_0, 2T_0, \dots, (N - 1)T_0$
- Frequenz diskret in N Werte (Samples):

$$\omega_n = 0, \frac{1}{N}\omega_0, \frac{2}{N}\omega_0, \dots, \frac{N-1}{N}\omega_0 \text{ bzw.}$$

$$\Omega_n = 0, \frac{1}{N}2\pi, \frac{2}{N}2\pi, \dots, \frac{N-1}{N}2\pi$$

Für $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$:

$$X(n) = X(i\omega_n) = X(i\Omega_n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-i2\pi nk/N}$$

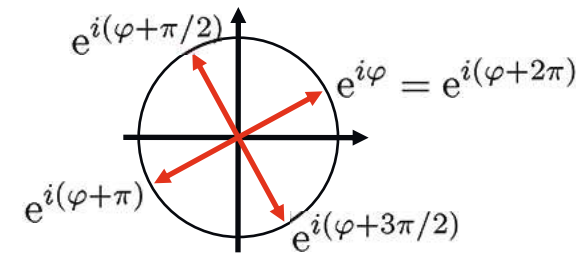
3.1 Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Eigenschaften

- *Periodizität* im Frequenzbereich (siehe Abtasttheorem).
Da die e-Funktion periodisch mit $i2\pi$ ist, gilt:

$$e^{i\varphi} = e^{i(\varphi+2\pi)} = e^{i(\varphi+4\pi)} = \dots$$

$$\rightarrow X(n) = X(n + N) = X(n + 2N) = \dots$$



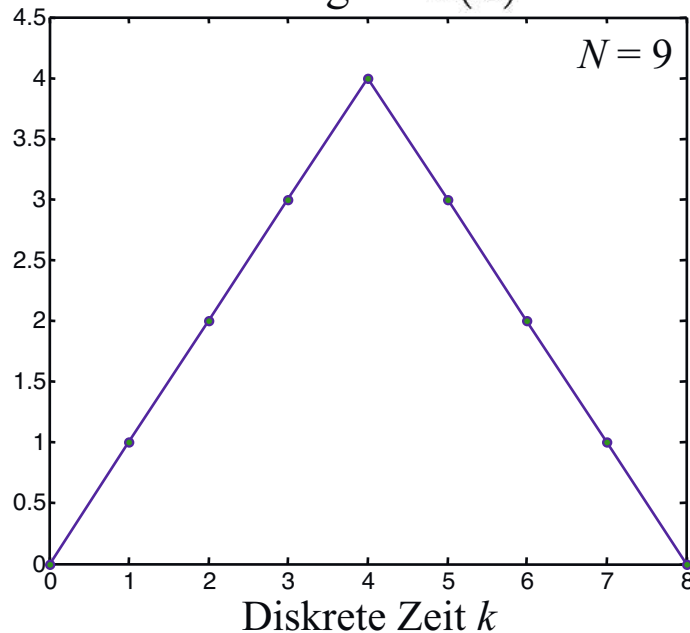
Zur Interpretation der Zeit- und Frequenzachsen:

Z.B. für $f_0 = 50$ Hz $\rightarrow T_0 = 0.02$ s

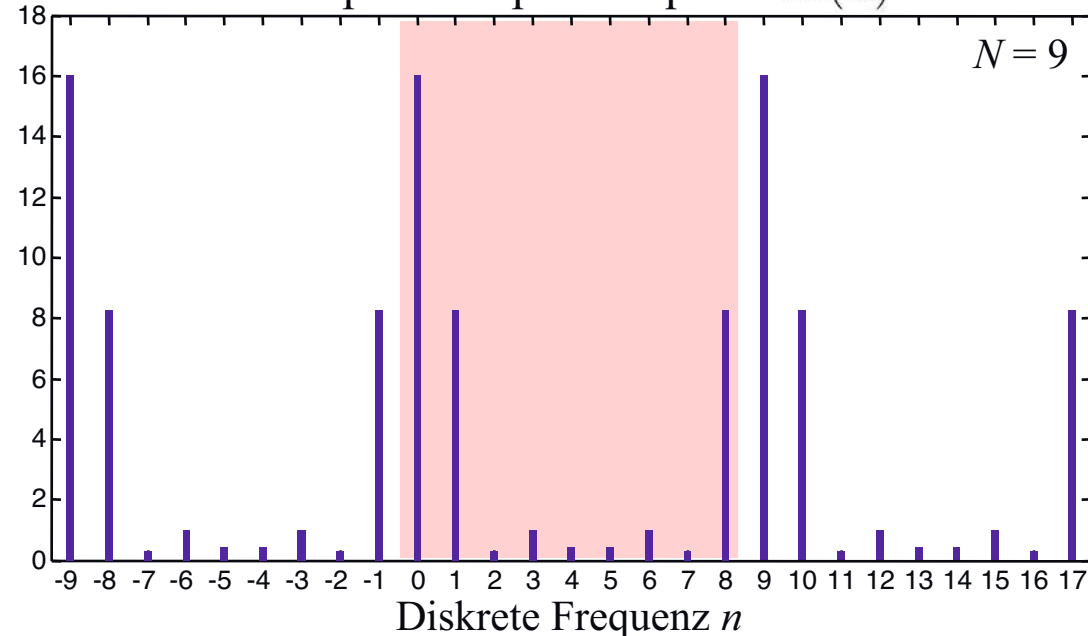
$k = 4 \rightarrow t = 4 \cdot 0.02$ s = 0.08 s

$n = 4 \rightarrow f = 4/N \cdot 50$ Hz = 22.2 Hz

Zeitsignal $x(k)$



Amplituden pro Frequenz $X(n)$



3.1 Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

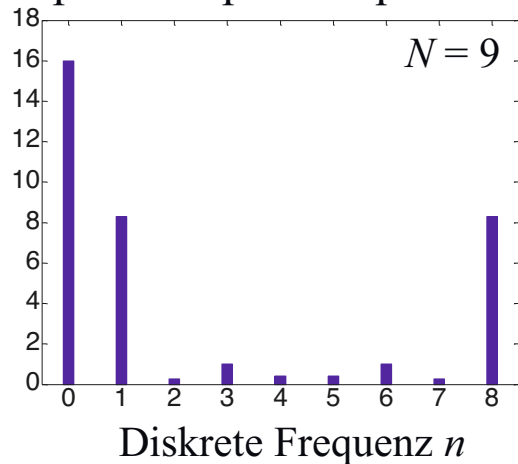
Eigenschaften

- *Periodizität* im Zeitbereich.

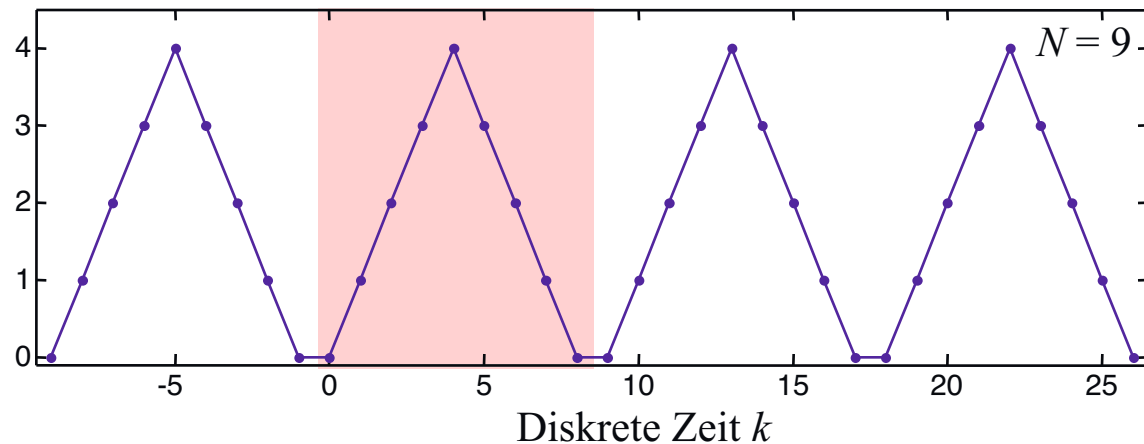
Da die 2π -periodische e-Funktion in vergleichbarer Weise auch in der Rücktransformation vorkommt, wird im Unterschied zur zeitdiskreten Fourier-Transformation bei der DFT auch das Zeitsignal periodisch. Dies liegt in der Diskretisierung der Frequenz begründet.

$$\rightarrow x(k) = x(k + N) = x(k + 2N) = \dots$$

Amplituden pro Frequenz $X(n)$



Zeitsignal $x(k)$

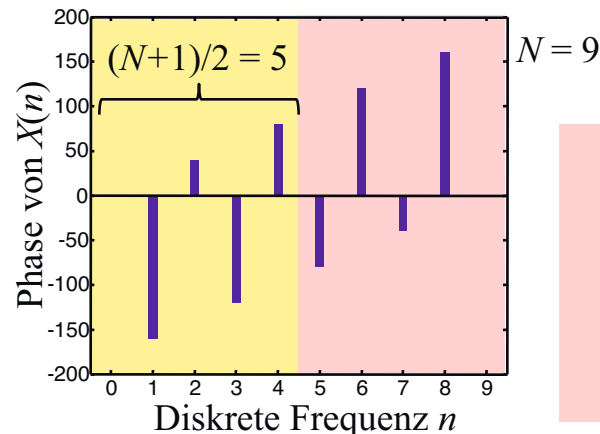
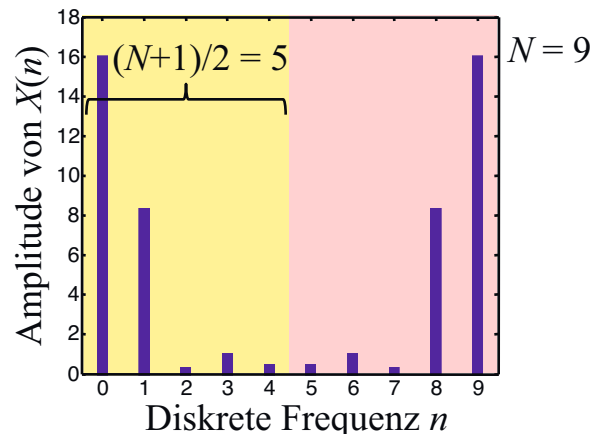


3.1 Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Eigenschaften

- Ist $x(k)$ reell (Normalfall), dann ist der *Amplitudengang* eine *gerade Funktion* und der *Phasengang* eine *ungerade Funktion*, d.h. beide sind bereits durch die Hälfte der Punkte vollständig festgelegt, die andere Hälfte kann durch Spiegelung erzeugt werden:
 - N ist gerade: $N/2+1$ Punkte werden benötigt.
 - N ist ungerade: $(N+1)/2$ Punkte werden benötigt.

Grund: Im Zeitsignal $x(k)$ dürfen nur Frequenzen bis maximal $f_0/2$ enthalten sein (Abtasttheorem!), sonst würde es zu Aliasing kommen. Deshalb wird der Frequenzgang meist auch nur von $f = 0 \dots f_0/2$ bzw. $\Omega = 0 \dots \pi$ geplottet. Der Teil $f = f_0/2 \dots f_0$ bzw. $\Omega = \pi \dots 2\pi$ oder auch $f = -f_0/2 \dots 0$ bzw. $\Omega = -\pi \dots 0$ ist redundant!



Dieser Bereich enthält keine neuen Informationen und geht durch Spiegelung aus dem linken Bereich hervor. Oft wird daher auch nur der linke Bereich geplottet!

3.1 Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

$$\text{DFT}\{x(k)\} = X(n)$$

Weitere Eigenschaften der DFT sind bereits aus der kontinuierlichen Fourier-Transformation bekannt:

- Linearität: $\text{DFT}\{ax_1(k) + bx_2(k)\} = aX_1(n) + bX_2(n)$
- Zeitverschiebung: $\text{DFT}\{x(k + l)\} = X(n) \cdot e^{-i2\pi nl/N}$
- Frequenzverschiebung: $\text{IDFT}\{X(n + l)\} = x(k) \cdot e^{i2\pi kl/N}$
- Faltung: $\text{DFT}\{x_1(k) * x_2(k)\} = X_1(n) \cdot X_2(n)$
- Multiplikation: $\text{DFT}\{x_1(k) \cdot x_2(k)\} = X_1(n) * X_2(n)$

Inverse DFT (diskrete Fourier-Rücktransformation)

Der Vollständigkeit halber hier noch die Formel zur Rücktransformation in den Zeitbereich:

$$\text{IDFT}\{X(n)\} = x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) e^{i2\pi kn/N}$$

3.1 Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Implementierung der DFT

$$\text{DFT}\{x(k)\} = X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-i2\pi nk/N} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)W_N^{nk}$$

Abkürzung:

mit $W_N = e^{-i2\pi/N}$

Das lässt sich für $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ als folgendes Gleichungssystem schreiben:

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

Zur Durchführung dieser Matrix-Vektor-Multiplikation sind folgende Operationen notwendig:

- N^2 komplexe Multiplikationen
- N^2 komplexe Additionen

3.2 Erweiterung: Schnelle Fourier-Transformation (FFT)

Idee der schnellen Fourier-Transformation (*Fast Fourier Transform (FFT)*)

- Effizientere Implementierung der DFT mit identischem Ergebnis.
- Aufteilung einer DFT der Größe N in 2 DFTs der Größe $N/2$ durch einen Trick.
- Weitere Aufteilung der 2 DFTs der Größe $N/2$ in 4 DFTs der Größe $N/4$ usw...
- Diese Aufteilung wird fortgesetzt bis $N/2^s = 1$ erreicht ist; s ist dabei die Anzahl der Aufteilungen.
- Funktioniert nur dann, wenn $N = 2^s$, also eine Potenz von 2 ist. Falls dies nicht der Fall ist, wird das Signal $x(k)$ solange mit Nullen aufgefüllt, bis die Anzahl der Werte 2^s beträgt (*zero padding*).

Komplexität der FFT

- Nur $N \lg(N)$ komplexe Multiplikationen und Additionen notwendig.

- Beispiel: $N = 1.024$

Info: $\lg()$ ist der Logarithmus zur Basis 2

- Rechenaufwand DFT (wie BubbleSort) $\sim N^2 \approx 1.000.000$

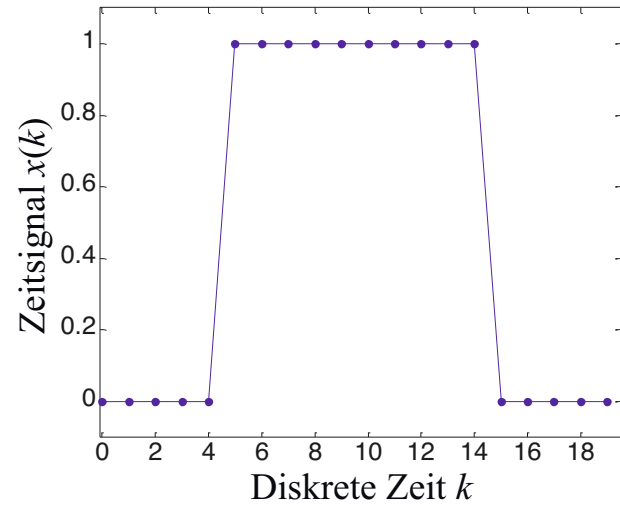
$$2^s = x \rightarrow s = \lg(x)$$

- Rechenaufwand FFT (wie QuickSort) $\sim N \lg(N) = 1024 \cdot 10 \approx 10.000 \rightarrow 100 \times$ schneller

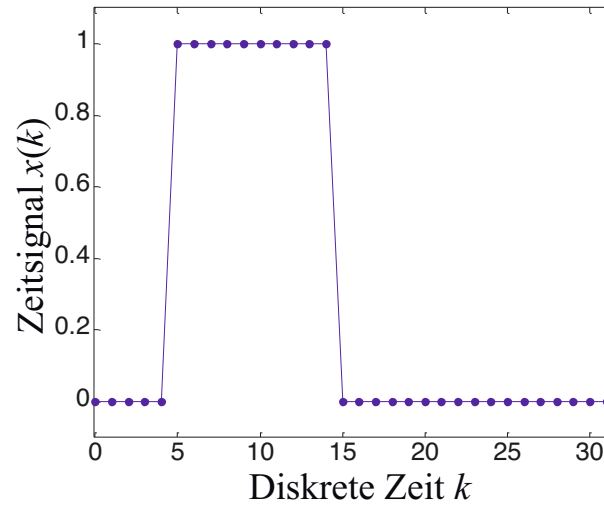
3.3 Frequenzanalyse mittels DFT

Wahl der Anzahl der Datenpunkte N

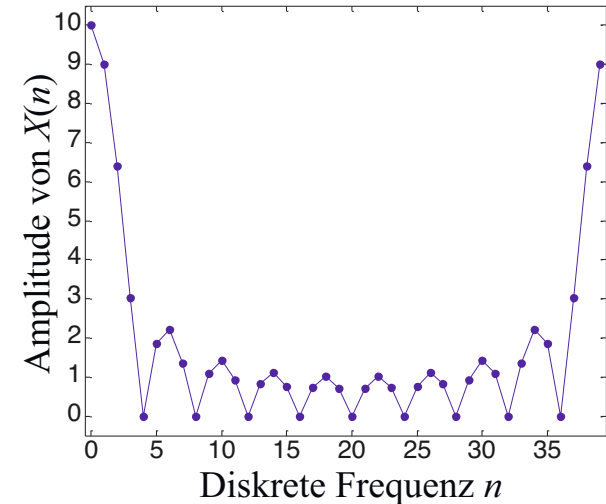
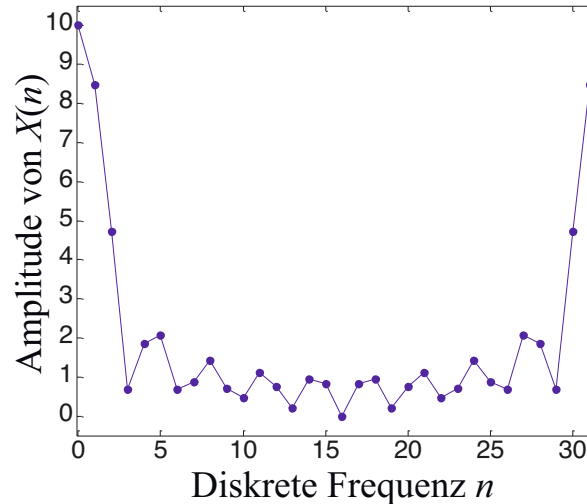
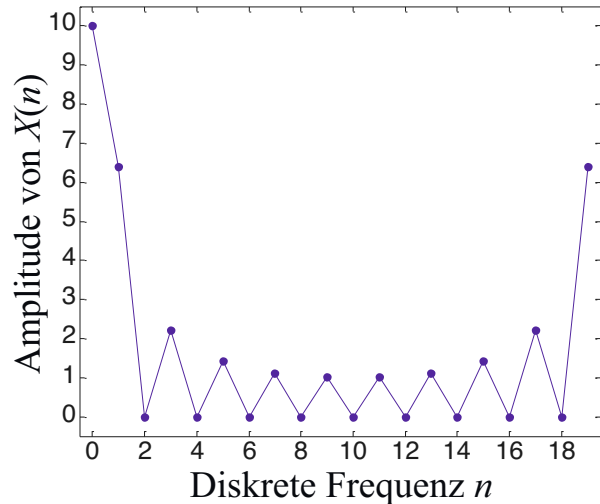
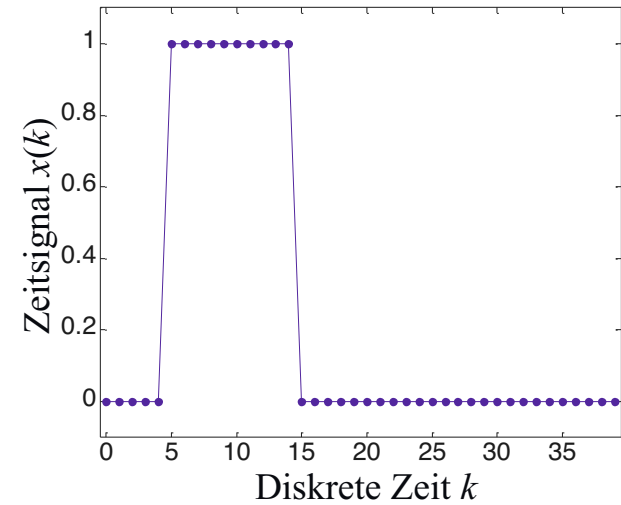
$N = 20$



$N = 32$



$N = 40$



3.3 Frequenzanalyse mittels DFT

Beobachtungen:

- Alle Zeitsignale sind identisch gewählt, nur mit unterschiedlich vielen Nullen aufgefüllt, so dass die verschiedene Anzahl an Werten $N = 20, 32, 40$ entsteht.
- Die Auflösung im Frequenzbereich hängt von N ab. Die Frequenzachsen sind so skaliert:

$$- N = 20: \omega_n = 0, \frac{1}{20}\omega_0, \frac{2}{20}\omega_0, \dots, \frac{19}{20}\omega_0 \quad \Delta\omega = \frac{1}{20}\omega_0$$

$$- N = 32: \omega_n = 0, \frac{1}{32}\omega_0, \frac{2}{32}\omega_0, \dots, \frac{31}{32}\omega_0 \quad \Delta\omega = \frac{1}{32}\omega_0$$

$$- N = 40: \omega_n = 0, \frac{1}{40}\omega_0, \frac{2}{40}\omega_0, \dots, \frac{39}{40}\omega_0 \quad \Delta\omega = \frac{1}{40}\omega_0$$

- Durch eine geschickte Wahl von N und Auffüllen mit Nullen kann man also eine beliebige Frequenzstückelung mit gewünschter Auflösung $\Delta\omega$ erreichen, auch wenn das Zeitsignal kürzer als N Werte ist.

Wenn man nach einer bestimmten Frequenz ω^* sucht, und wissen möchte, wie stark diese in einem Signal enthalten ist, dann sollte dieses ω^* *exakt* in der Frequenzstückelung vorkommen (siehe *Leckeffekt*)!

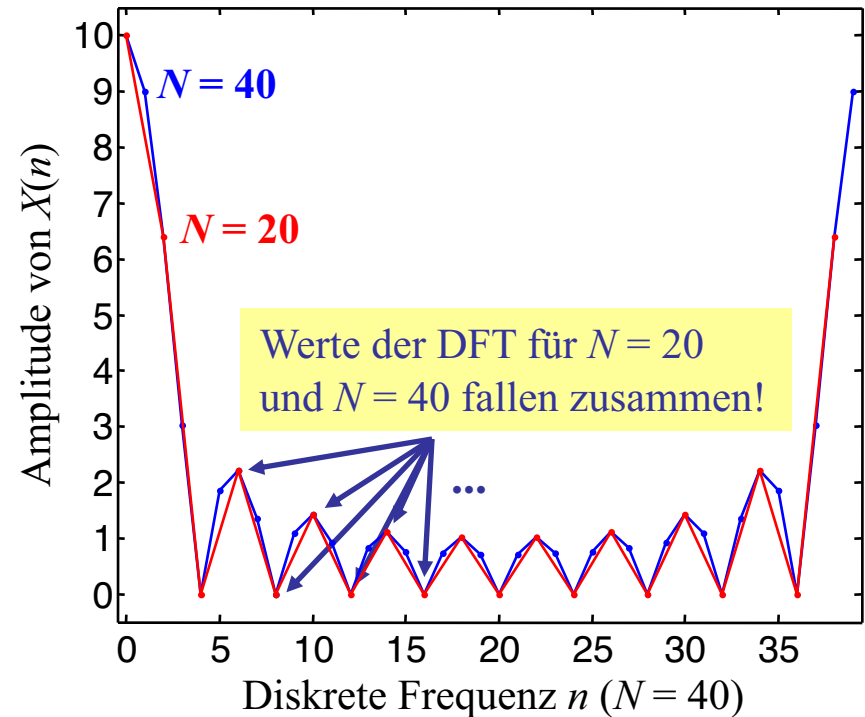
3.3 Frequenzanalyse mittels DFT

Beobachtungen:

- Eine Verdopplung der Anzahl der Werte $N = 20 \rightarrow 40$ verdoppelt die Frequenzauflösung. Die DFT mit $N = 20$ liefert an den identischen Frequenzstellen (jeder 2. Punkt) auch identische Ergebnisse zu einer DFT mit $N = 40$.

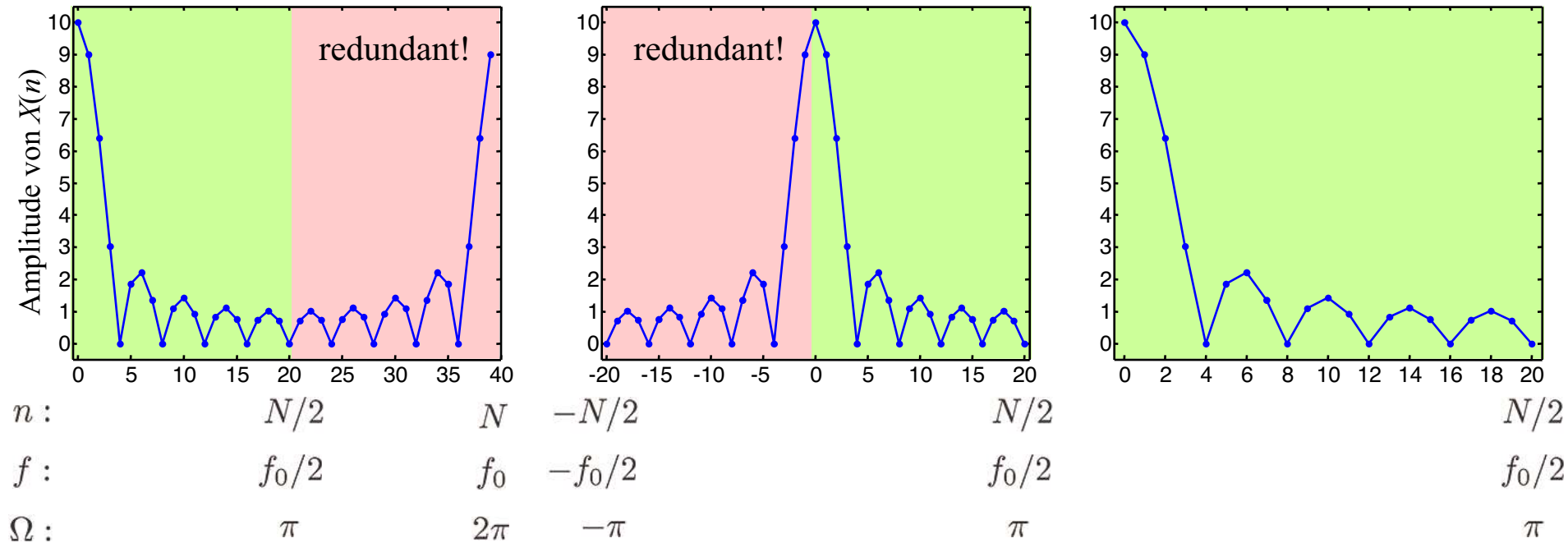
Bemerkung:

- Die Phase von $X(n)$ kann manchmal auch interessant sein; wir konzentrieren uns hier aber auf die Analyse des Amplitudengangs, da dieser in den allermeisten Anwendungen die wichtigere Größe darstellt.
- MATLAB erzeugt mit der Funktion `fft()` genau die hier gezeigten Plots für den Frequenzbereich von 0 bis f_0 .
- Üblich ist auch das Weglassen der oberen (redundanten) Hälfte des Spektrums oder die symmetrische Darstellung um den Ursprung von $-f_0/2$ bis $+f_0/2$.



3.3 Frequenzanalyse mittels DFT

Äquivalente Darstellungen des Spektrums

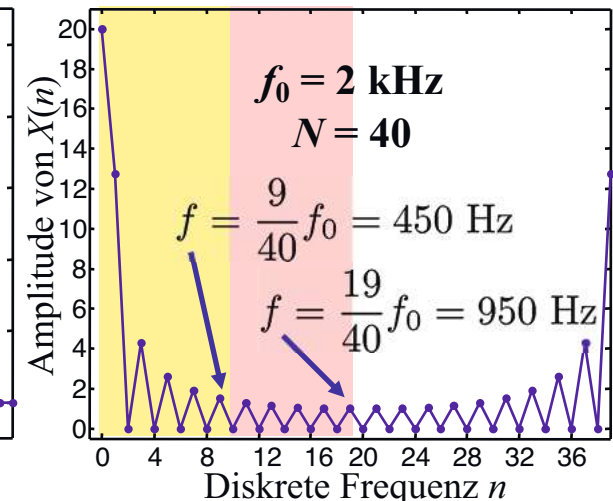
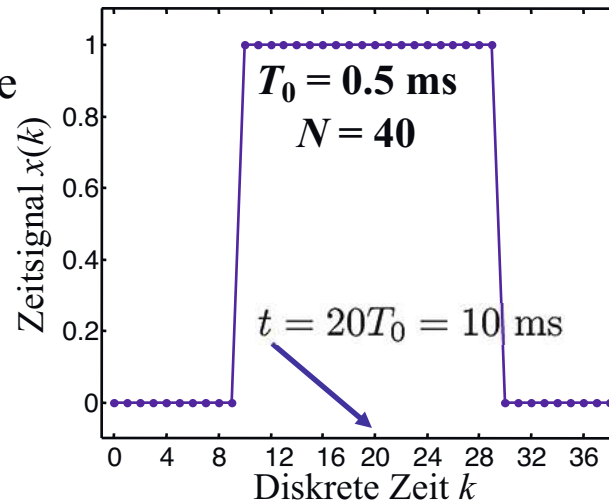
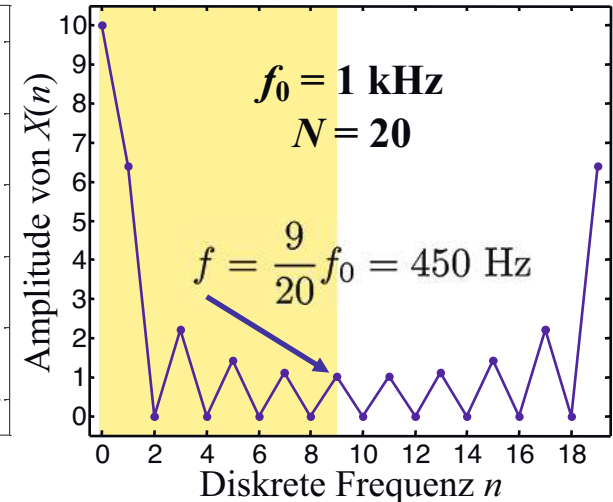
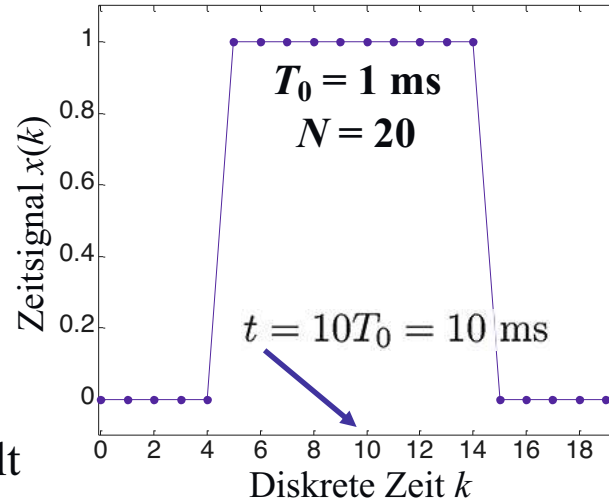


3.3 Frequenzanalyse mittels DFT

Wahl der Abtastzeit T_0 bzw. Abtastfrequenz f_0

- Je schneller abgetastet wird, umso breiter ist das Frequenzband.
- In der Praxis werden die Amplitudenanteile der höheren Frequenzen immer geringer.
- Abtastzeit sollte so gewählt werden, dass keine signifikanten Amplitudenanteile mehr im Bereich der halben Abtastfrequenz $f_0/2$ liegen. Sonst kommt es zu Aliasing!

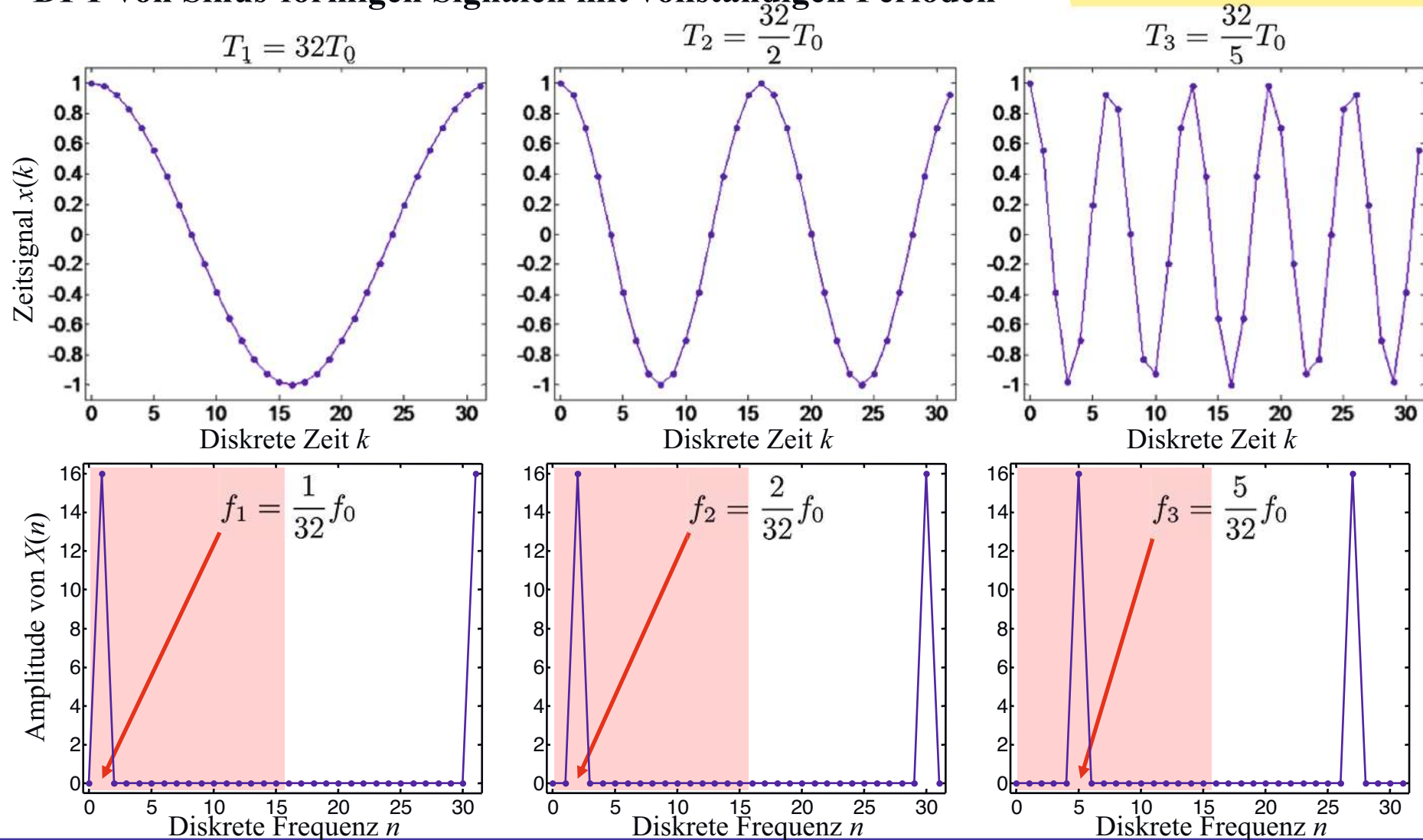
Dieser Bereich wird durch die Erhöhung der Abtastfrequenz zusätzlich erzeugt.



3.3 Frequenzanalyse mittels DFT

DFT von Sinus-förmigen Signalen mit vollständigen Perioden

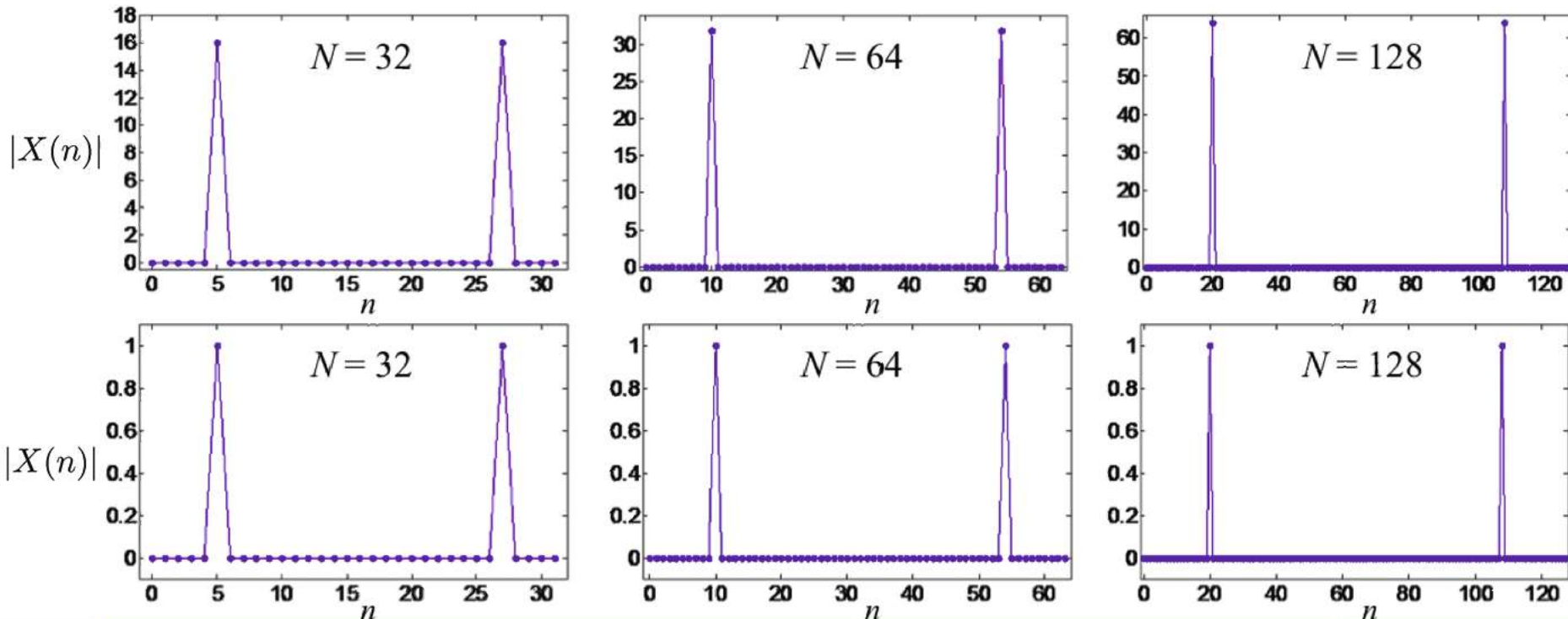
Beispiel:
 Cosinus-Signale mit 1, 2, 5
 vollständigen Perioden!
 $N = 32$



3.3 Frequenzanalyse mittels DFT

Beobachtungen:

- Der Frequenzanteil einer Sinus-Schwingung mit Amplitude 1 beträgt offensichtlich $N/2$. (Es ist klar, dass die Skalierung der Amplituden-Achse im Frequenzgang proportional zu N sein muss, da in der DFT-Formel N Terme aufsummiert werden.)
- Daher wird oftmals die Amplitudenachse des Frequenzgangs normiert, indem mit $2/N$ skaliert wird. Dadurch wird die Darstellung unabhängig von N .

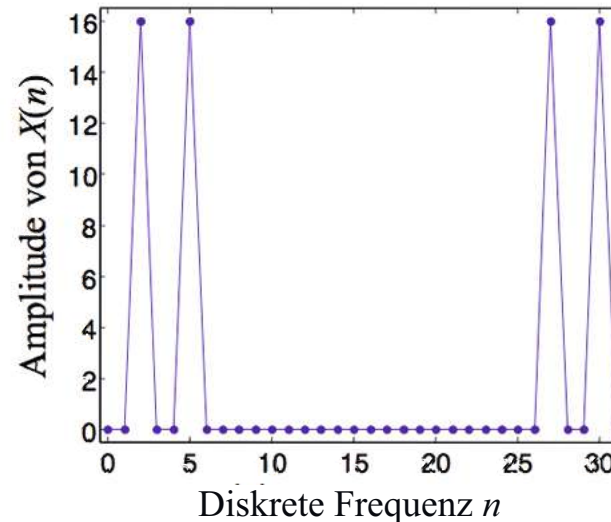
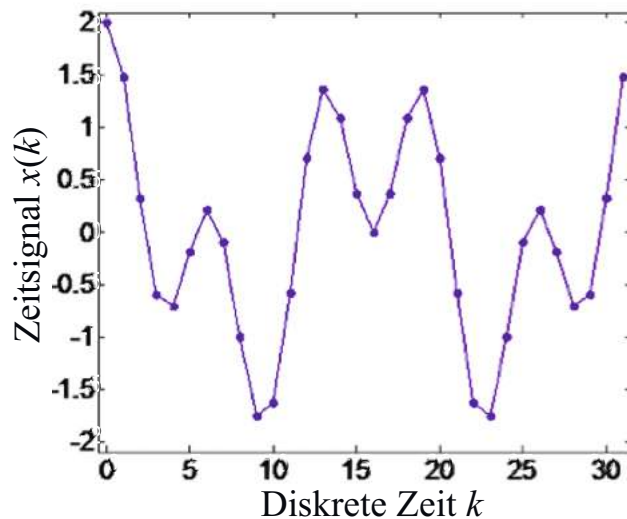


3.3 Frequenzanalyse mittels DFT

Beobachtungen:

- Wenn das Zeitsignal von $k = 0, 1, \dots, N-1$ exakt ein *ganzzahliges Vielfaches* an Perioden der Schwingung enthält, dann gibt die DFT das Spektrum auch exakt wieder, d.h.
 - Die gesamte Energie konzentriert sich auf eine Spektrallinie.
 - Diese Spektrallinie repräsentiert die exakt richtige Frequenz.
- Diese Feststellung gilt wegen der Linearitätseigenschaft der DFT auch für beliebig viele additiv überlagerte Schwingungen.

Beispiel: Überlagerung der beiden Schwingungen mit $f_2 = 2/32 f_0$ und $f_3 = 5/32 f_0$:



3.3 Frequenzanalyse mittels DFT

Begründung für die exakte Frequenzdarstellung

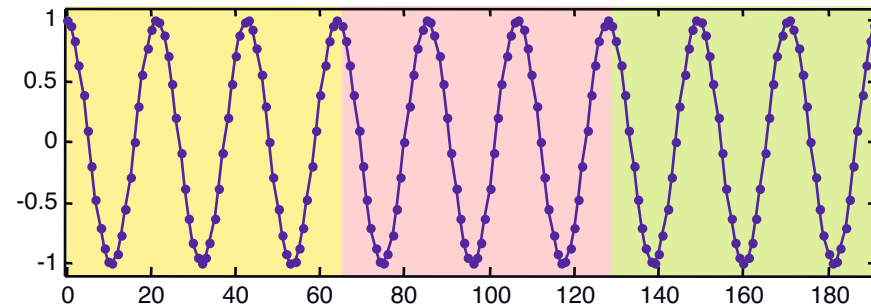
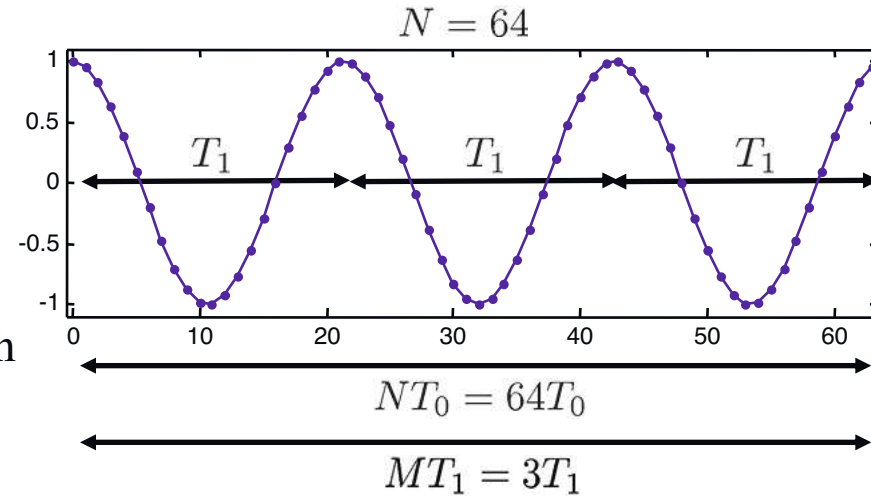
1. Wenn das Zeitsignal $x(k)$ mit $k = 0, 1, \dots, N-1$ exakt M Perioden eines Sinus- oder Cosinus-Signals der Zeitdauer T_1 enthält gilt:

$$MT_1 = NT_0$$

Daraus folgt, dass die Frequenz f_1 automatisch in der Frequenzstückelung exakt vorkommt:

$$T_1 = \frac{N}{M}T_0 \rightarrow f_1 = \frac{M}{N}f_0$$

2. Durch die Periodizität der komplexen e-Funktion „denkt“ sich die DFT das Signal unendlich oft aneinander gesetzt, d.h. das Signal von $k = 0, 1, \dots, N-1$ wiederholt sich für $k = N, N+1, \dots, 2N-1$ und $k = 2N, 2N+1, \dots, 3N-1$, usw. Weil die Schwingungen immer über eine volle Anzahl an Perioden gehen, passen diese Signale ohne Unstetigkeiten zusammen.



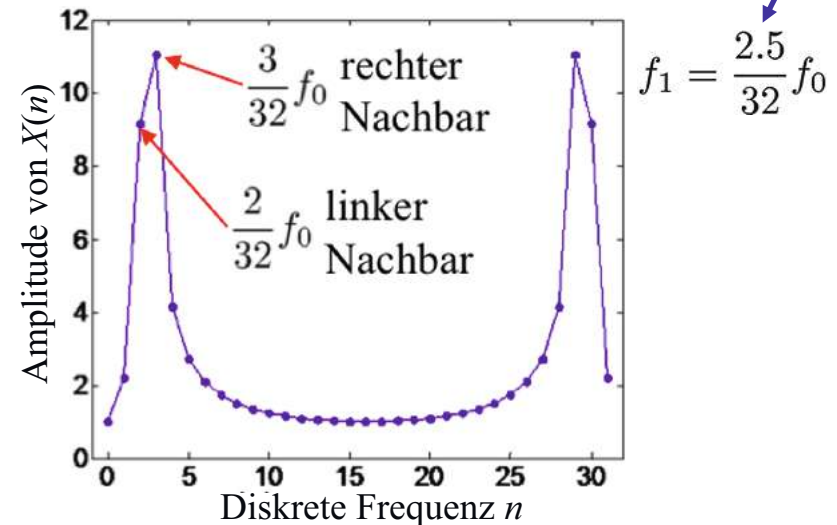
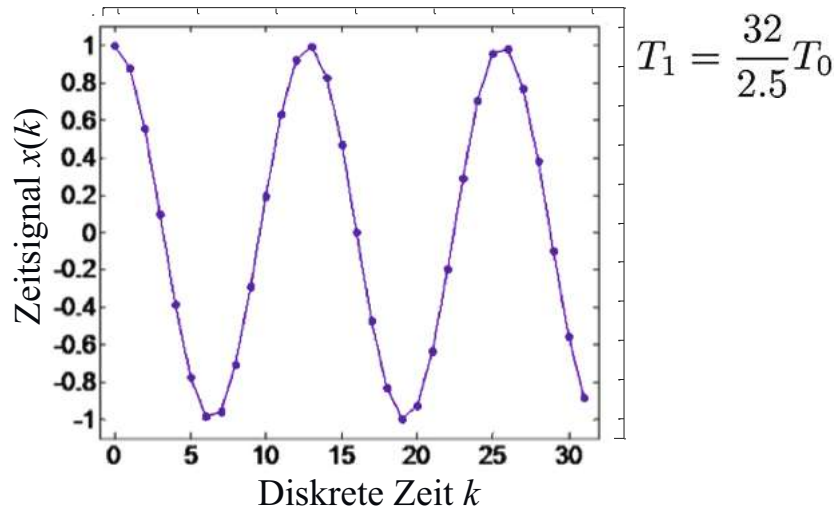
3.3 Frequenzanalyse mittels DFT

DFT von Sinus-förmigen Signalen mit unvollständigen Perioden

- Oft ist es leider nicht möglich N so zu wählen, dass alle Schwingungen nur mit vollständigen Perioden vorkommen. Gründe:
 - Die Periodendauern der interessierenden Schwingungen sind nicht genau bekannt.
 - Es sind sehr viele Schwingungen verschiedenster Frequenzen interessant, und es ist daher schwer ein (praktikabel kleines) N zu finden, was die Bedingung für alle interessierenden Schwingungen gleichzeitig erfüllt.

Was passiert, wenn die Bedingung verletzt wird?

Liegt zwischen $n = 2$ und $n = 3$.



3.3 Frequenzanalyse mittels DFT

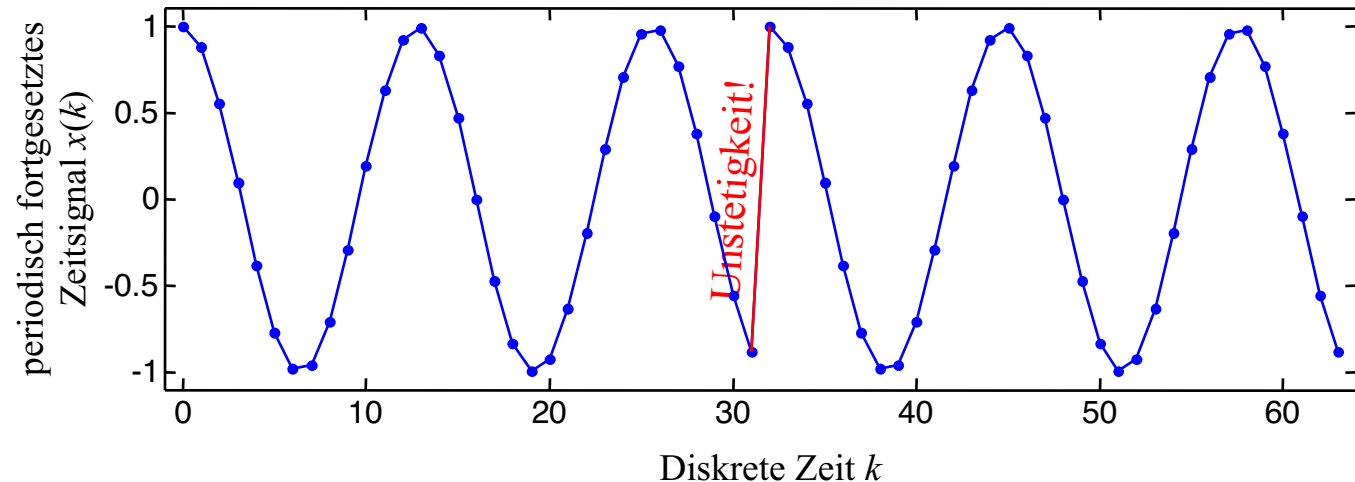
Beobachtungen:

- Die Frequenz f_1 des periodischen Signals kommt in der Frequenzstückelung nicht mehr vor! Daher muss sich die zu $2.5/32 f_0$ gehörende Amplitude auf die vorhandenen benachbarten diskreten Frequenzen $2/32 f_0$ und $3/32 f_0$ aufteilen.

→ Gartenzauneffekt

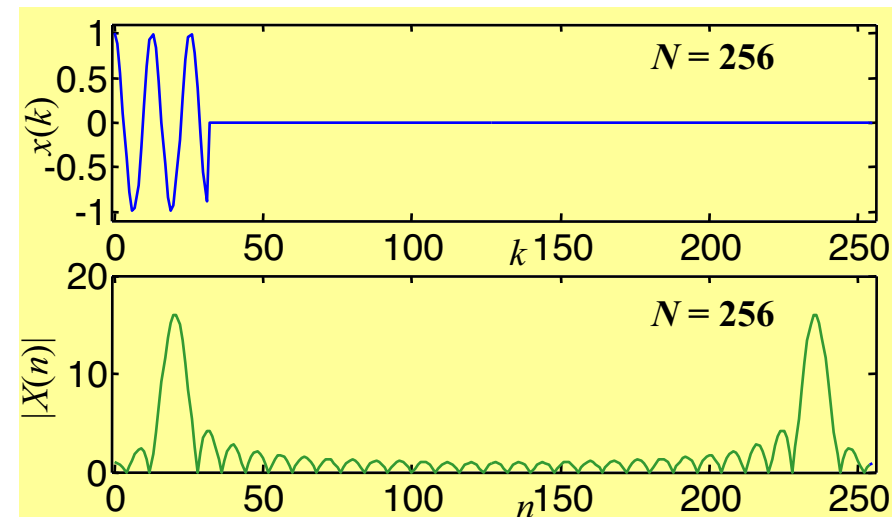
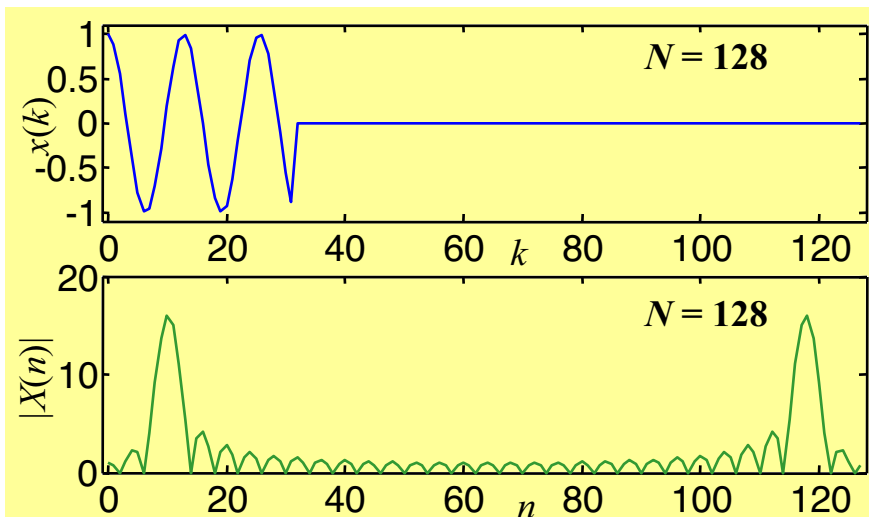
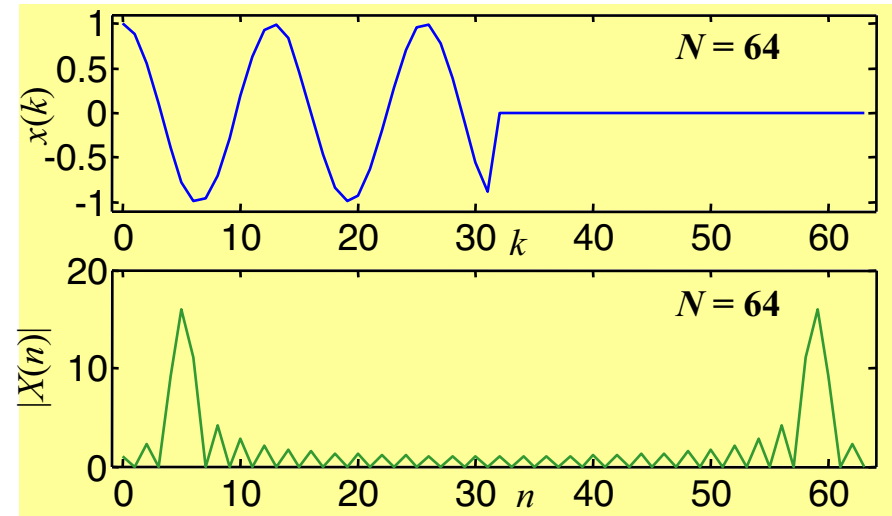
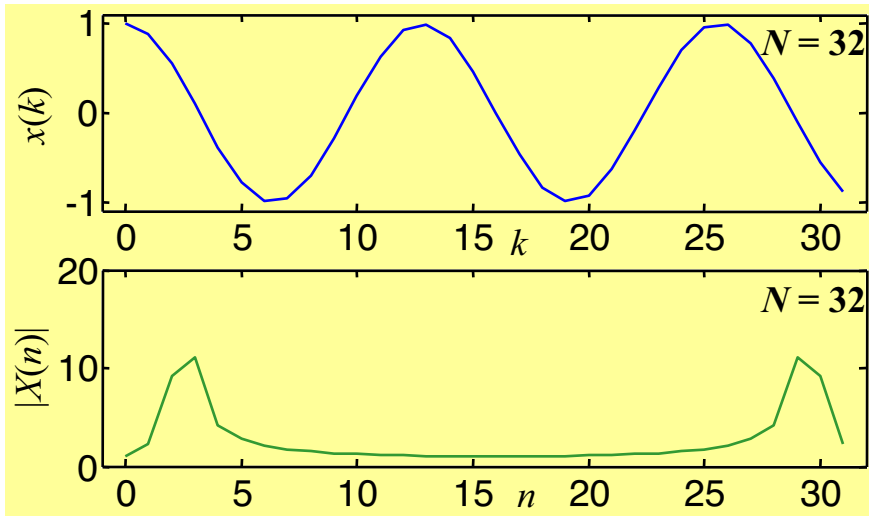
- Zusätzlich „verschmiert“ sich (*leckt*) aber ein Teil der Amplitude auf den gesamten Frequenzbereich. Dies ist eine Folge der Unstetigkeiten, die bei der periodischen Fortsetzung des Zeitsignals entstehen und störende Frequenzen induzieren.

→ Leckeffekt



3.4 Leckeffekt und Fensterung

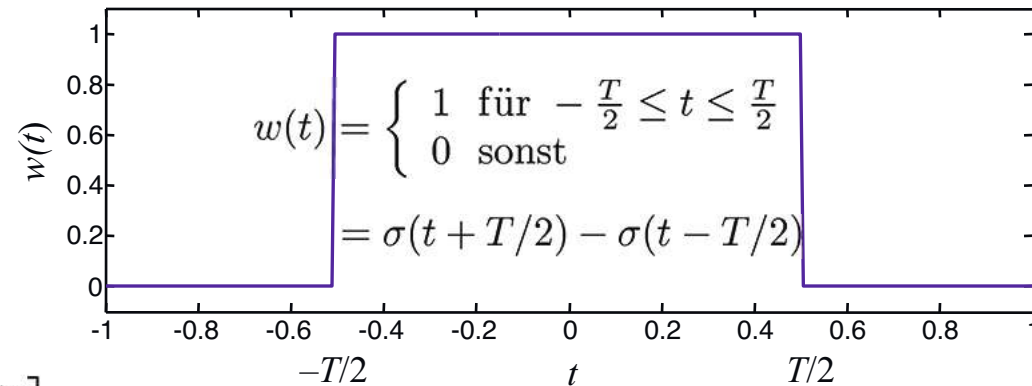
Identisches Beispiel mit unterschiedlichen Auflösungen, d.h. unterschiedlichem N



3.4 Leckeffekt und Fensterung

Beobachtungen:

- Für $N \rightarrow \infty$ konvergiert der Amplitudengang.
- Neben der Verteilung der Amplituden auf benachbarte Frequenzen im Hauptmaximum des Amplitudengangs (*Gartenzauneffekt*) ist ein gewisses „Verschmieren“ über den gesamten Frequenzbereich zu erkennen (*Leckeffekt*).
- Durch die Unstetigkeiten bei der periodischen Fortsetzung des Zeitsignals wird im Spektrum der Impuls bei der Signalfrequenz der Schwingung zu einer *Spaltfunktion sinc()*.

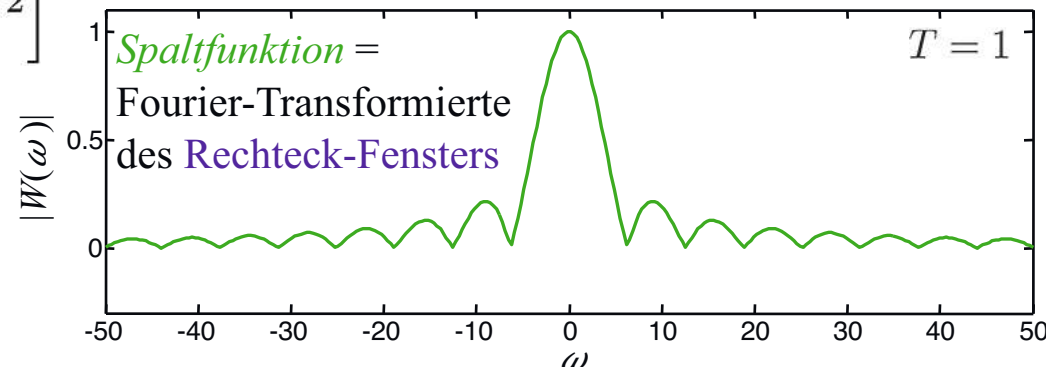


$$W(\omega) = \mathcal{F}\{w(t)\} = \frac{1}{i\omega} \left[e^{i\omega T/2} - e^{-i\omega T/2} \right]$$

$$= \frac{i2\sin(\omega T/2)}{i\omega} = \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2}$$

$$= \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} = \frac{\sin(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}} = \text{sinc}(\tilde{\omega})$$

für $T = 1$



3.4 Leckeffekt und Fensterung

Erklärung des Leckeffekts

- Ein begrenztes Zeitsignal $x(k)$ der Länge L kann aus einem periodischen Signal unendlicher Länge bzw. größerer Länge N durch Multiplikation mit einem *Rechteck-Fenster* $w(k)$ der Länge L erzeugt werden:

$$x(k) = w(k) \cdot x_p(k)$$

- Diese Multiplikation im Zeitbereich entspricht einer Faltung im Frequenzbereich:

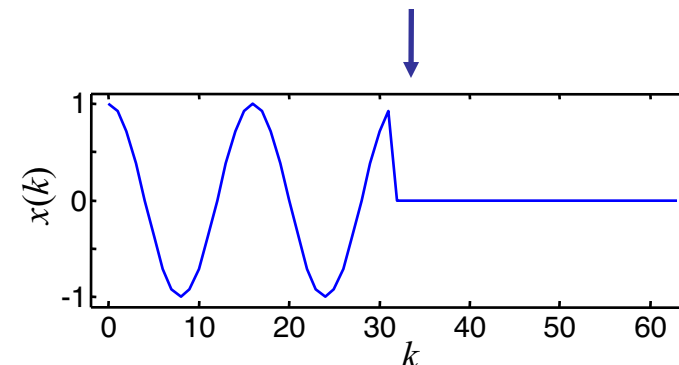
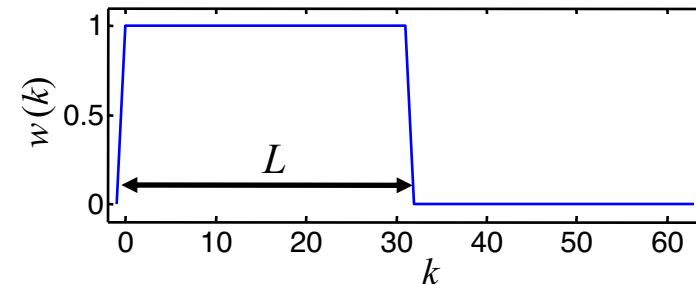
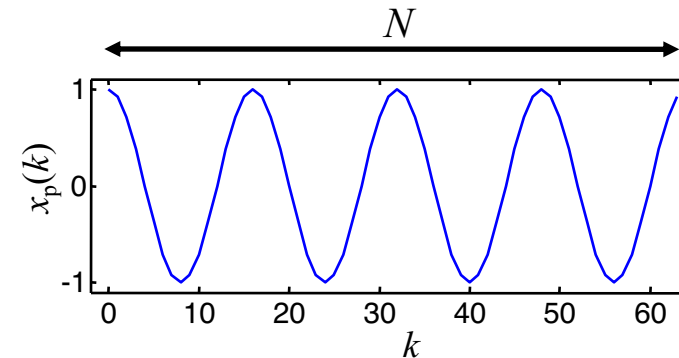
$$X(n) = W(n) * X_p(n)$$

Hierbei ist $W(n)$ die Fourier-Transformierte und DFT des Rechteck-Fensters $w(k)$:

$$W(\Omega) = \frac{\sin(L\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} e^{-i(L-1)\Omega/2}$$

$$W(n) = \frac{\sin(\pi Ln/N)}{\sin(\pi n/N)} e^{-i\pi(L-1)n/N}$$

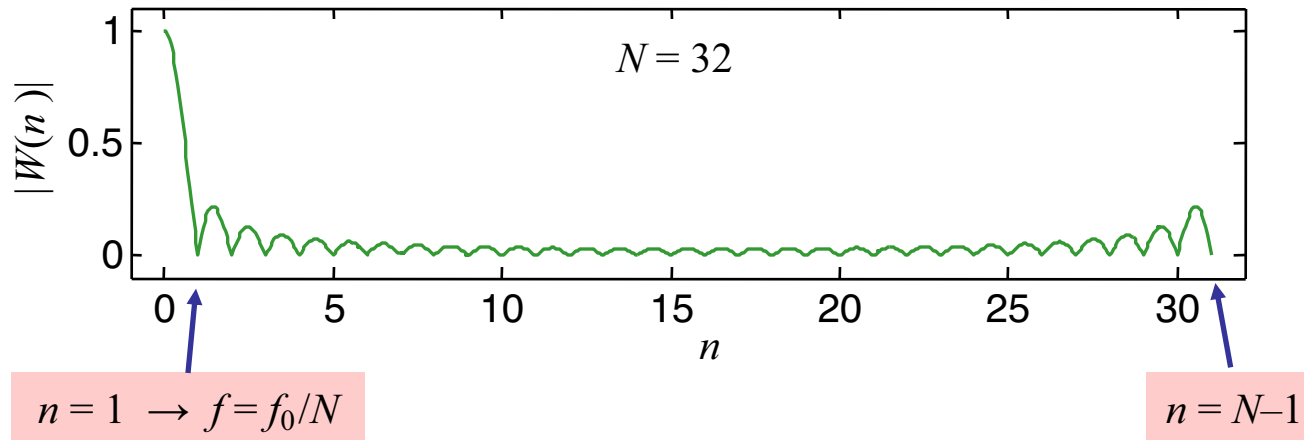
$$L = 32, N = 64$$



3.4 Leckeffekt und Fensterung

Die DFT eines Rechteckfensters der Länge L sieht ähnlich aus wie die Spaltfunktion (sinc-Funktion). In der Praxis gilt meist $L = N$. Beim Auffüllen mit Nullen (zero-padding) ist es mit $L < N$ äquivalent, da dann sowieso $x(k) = w(k) = 0$ für $k > L$ gilt:

$$W(n) = \frac{\sin(\pi n)}{\sin(\pi n/N)} e^{-i\pi(N-1)n/N} \quad \rightarrow \quad |W(n)| = \left| \frac{\sin(\pi n)}{\sin(\pi n/N)} \right|$$



Die Nullstellen der DFT des Rechteck-Fensters der Länge N liegen bei Vielfachen von f_0/N . Wenn das Zeitsignal also genau eine Schwingung mit einer Frequenz Mf_0/N aufweist, dann fallen alle Nullstellen auf ganze Werte von n . D.h. bei einer Faltung mit obigem Signal im Frequenzbereich würde nur $n = 0$ einen Beitrag liefern und kein Leckeffekt auftreten!

3.4 Leckeffekt und Fensterung

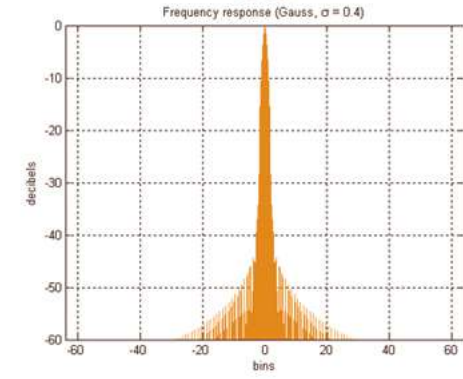
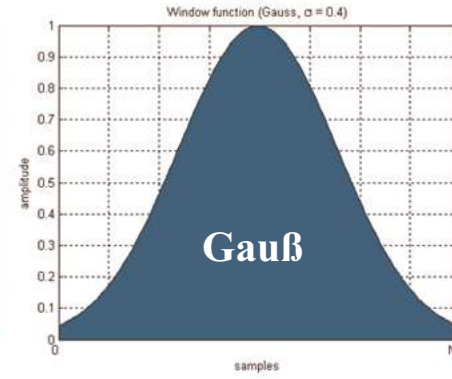
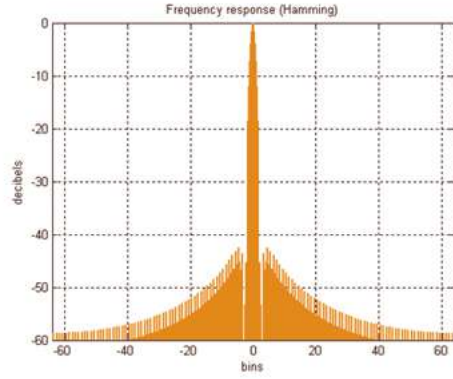
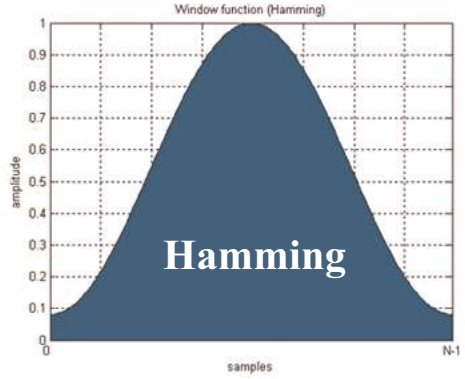
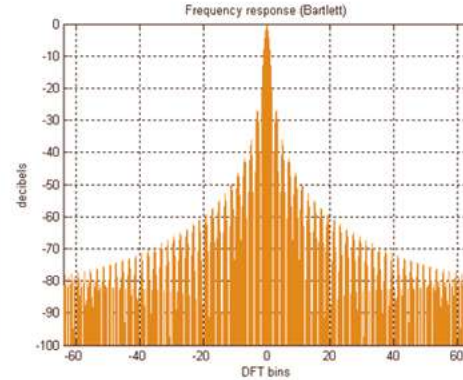
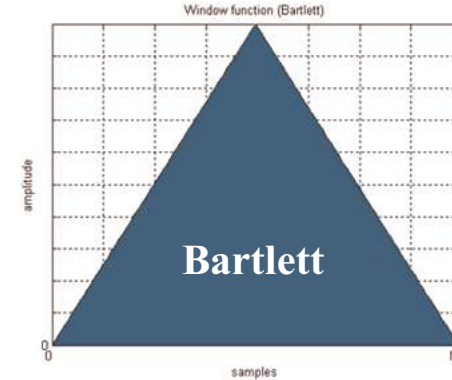
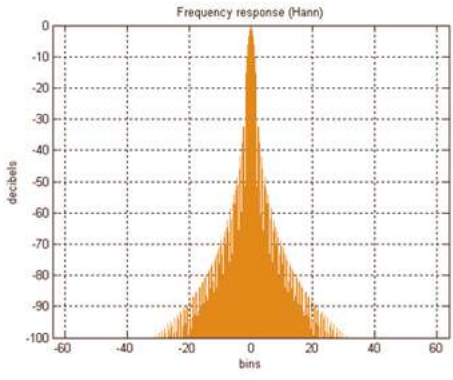
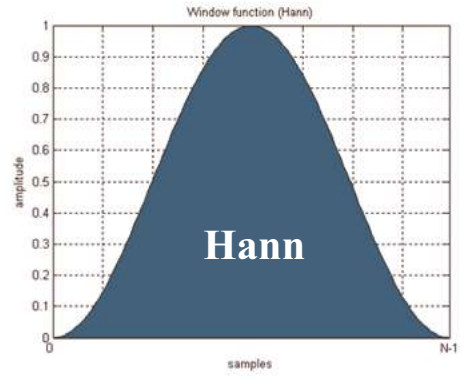
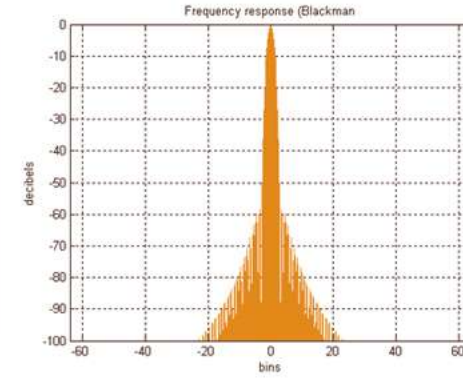
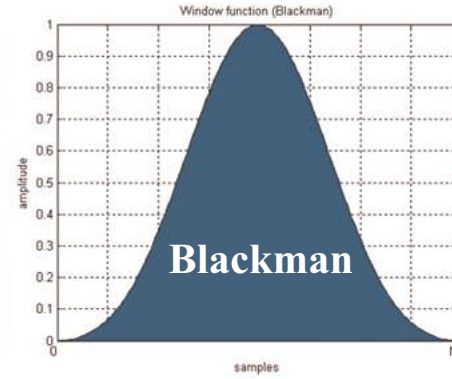
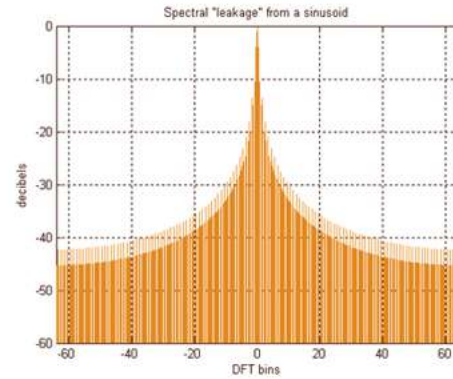
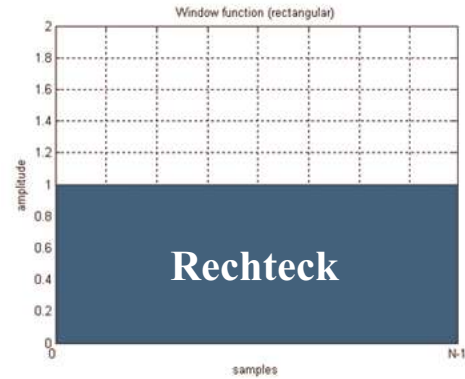
Zusammenfassung: Rechteck-Fenster

- Jedes *endliche* Zeitsignal geht also (in Gedanken) aus einer Multiplikation eines unendlichen periodisch fortgesetzten Signals mit einem Rechteck-Fenster hervor.
- Die Rechteck-Form führt zu Unstetigkeiten, also einer plötzlichen Signaländerung, die hohe Frequenzen induziert.
- Die durch eine Rechteck-Fensterung hervorgerufenen Fehler (Leckeffekt) sind deshalb besonders groß.

Verbesserungsmöglichkeit

- Statt eines sprungförmig abfallenden, implizit vorhandenen Rechteck-Fensters kann eine explizite Fensterung mit sanfterem Übergang gewählt werden.
- Viele Alternativen wurden als Fenster vorgeschlagen. Folgende Fenster sind üblich: *Hann, Hamming, Blackman, Kaiser, Bartlett, Dolph-Tschebyscheff, Gauß*.
- Alle diese Fenster sind sich relativ ähnlich. Sie reduzieren den Leckeffekt. Allerdings verzerren sie notwendigerweise durch den sanften Abfall die am Rand (Beginn und Ende) liegenden Werte des Zeitsignals.

3.4 Leckeffekt und Fensterung

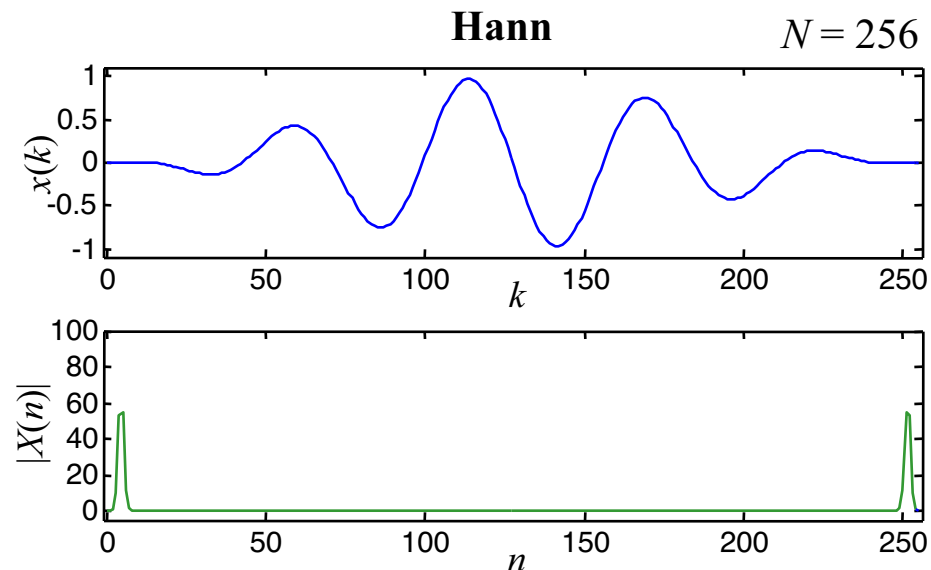
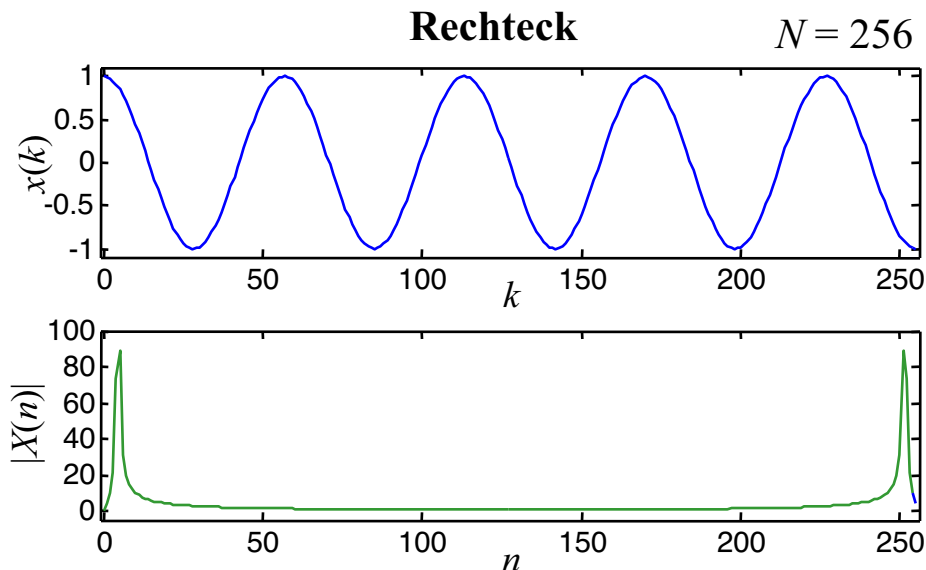


3.4 Leckeffekt und Fensterung

Beispiel: Fensterung mit Rechteck- und Hann-Fenster

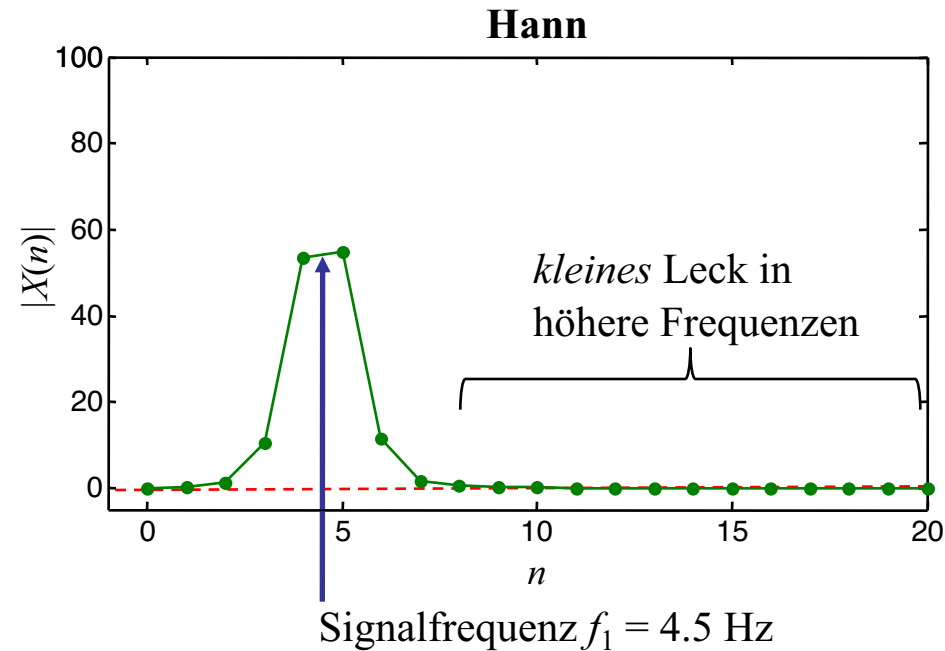
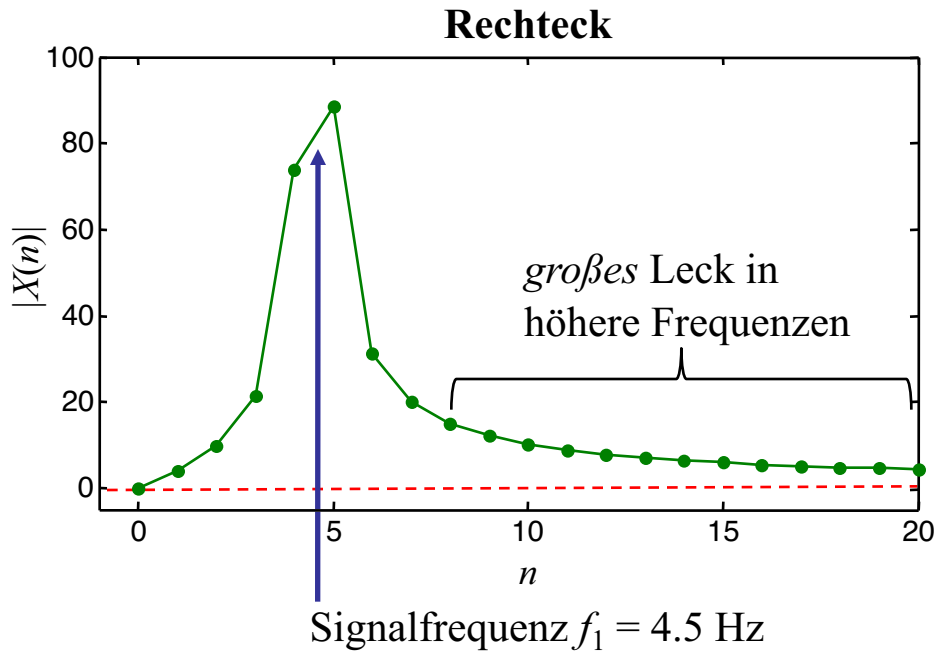
- Die Rechteck-Fensterung ist immer implizit in den Daten enthalten und muss nicht wirklich durchgeführt werden.
- Das Hann-Fenster (und ähnliche andere Fenster) reduziert den Leckeffekt erheblich. Durch den sanfteren Verlauf werden weniger störende hohe Frequenzen induziert.
- Hann-Fenster der Länge L (meist $L = N$):

$$w_{\text{Hann}}(k) = 0.5 \left(1 - \cos \frac{2\pi k}{L-1} \right)$$



3.4 Leckeffekt und Fensterung

Vergrößerung:



Beobachtungen:

- Hann-Fenster reduziert den Leckeffekt erheblich.
- Da das Hann-Fenster weniger Fläche hat als das Rechteck-Fenster, geht Signalenergie verloren und die Amplituden des Spektrums sind geringer. Evtl. kann es sinnvoll sein, die Fenster auf ihren Flächeninhalt zu normieren, um diesen Einfluss zu kompensieren.

3.4 Leckeffekt und Fensterung

Korrektur der Fenster-Dämpfung

Eine Fensterung verzerrt das Original-Signal auf 2 Arten:

- Amplitude: Die Signalamplitude wird verkleinert
- Energie: Die Signalenergie (Effektivwert RMS, „Fläche unter dem Signal“) wird verkleinert

Einer dieser Effekte kann korrigiert werden, indem man die DFT mit einem Korrekturfaktor (größer 1) multipliziert:

Fenstertyp	Korrektur Amplitude	Korrektur Energie
Rechteck	1	1
Hann	2	1,63
Hamming	1,85	1,59
Blackman	2,8	1,97

Quelle: <https://community.plm.automation.siemens.com/t5/Testing-Knowledge-Base/Window-Correction-Factors/ta-p/431775>

3.5 Instationäre Signale und Kurzzeit-DFT

Stationäre Signale:

- Signale, die ihre Eigenschaften über die Zeit *nicht ändern*, also *zeitinvariante* Eigenschaften haben.
- Bisher sind wir davon ausgegangen, dass wir es mit solchen Signalen zu tun haben.

Instationäre Signale:

- Signale, die ihre Eigenschaften über die Zeit *ändern*, also *zeitvariante* Eigenschaften haben.
- In der Praxis sind die meisten Signale instationär und können bestenfalls für einen (kurzen) Zeitraum als näherungsweise stationär angesehen werden. Beispiele:
 - Signale mit Trends, also mit zeitlich veränderlichem Mittelwert wie Aktienkurse. Dann ändert sich die Gleichwertkomponente des Spektrums bei $n = 0$ bzw. $f = 0$ Hz!
 - Durch Verschleiß ändern sich die Eigenschaften eines Bauteils oder einer Maschine und bestimmte Messsignale (Drehzahlen, Schall, ...) ändern sich in ihrer Charakteristik.
 - Anstelle von Verschleiß kann auch das Auftreten eines Fehlers Ähnliches verursachen. Hier geht die Veränderung der Charakteristik i.A. aber schneller vonstatten!

3.5 Instationäre Signale und Kurzzeit-DFT

Problem bei der Anwendung einer Fourier-Analyse bzw. DFT auf instationäre Signale:

- Es findet eine Mittelung (Integration bzw. Summation) über das gesamte Signal statt. Ändern sich die Frequenzeigenschaften des Signals über der Zeit erhält man die entsprechenden Frequenzanteile gewichtet mit ihrem zeitlichen Anteil im gesamten Zeitsignal.
- Keinerlei Information darüber, *wann welche* Frequenzen im Signal auftauchen und verschwinden!

Lösung dieses Problems

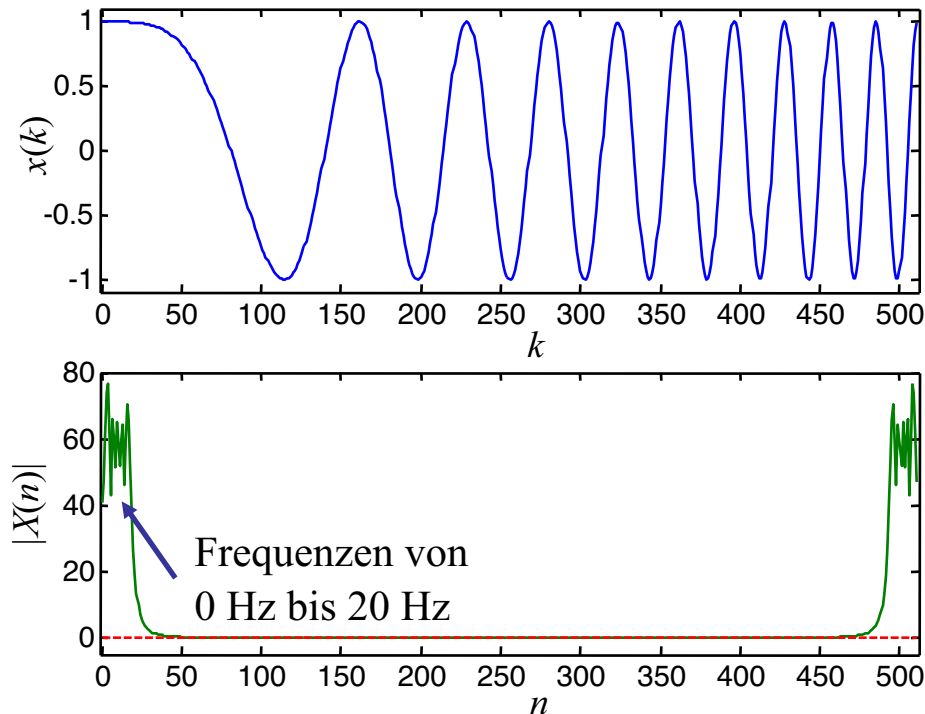
1. Transformation von kurzen Zeitabschnitten des Gesamtsignals, die näherungsweise als stationär angesehen werden können.
→ Kurzzeit-Fourier-Transformation bzw. -DFT.
2. Abändern der Fourier-Transformation, so dass nicht mehr nach unendlich langen sinusförmigen Schwingungen gesucht wird, sondern nach endlich langen Wellenpaketen unterschiedlicher Länge und zeitlicher Positionierung.
→ Wavelet-Transformation.

3.5 Instationäre Signale und Kurzzeit-DFT

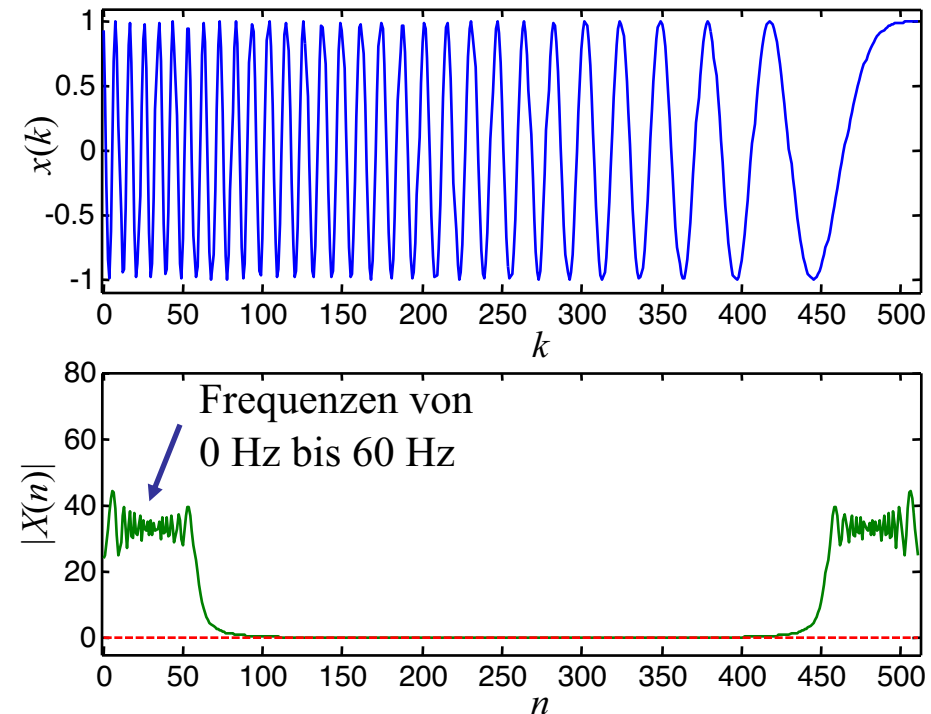
Illustration des Problems einer DFT eines instationären Signals

- Zeitliche Reihenfolge des Signals spielt keine Rolle.
- Alle im Signal vorkommenden Frequenzen werden gemittelt, proportional zur Länge und unabhängig vom Zeitpunkt ihres Auftretens.
- DFT ist nicht besonders aussagekräftig!

Chirp-Signal 0 ... 20 Hz



Chirp-Signal 60 ... 0 Hz



3.5 Instationäre Signale und Kurzzeit-DFT

Kurzzeit-DFT (*Short-Time Discrete Fourier Transform (STDFT)*)

- Gefensterte DFT
- Breite des Fensters bestimmt zeitliche Auflösung und damit implizit auch die Frequenzgenauigkeit. Die Breite ist ein vom Benutzer vorzugebender Parameter und sollte sich an der erwarteten Änderungsrate der Signalcharakteristik orientieren:
 - Signal ändert seine Eigenschaften schnell → schmales Fenster.
 - Signal ändert seine Eigenschaften langsam → breites Fenster.
- Die DFT hängt nun nicht mehr nur von der Frequenz f bzw. n ab, sondern auch noch von einer zweiten Variablen: der Zeitverschiebung des Fensters t_0 . Sie gibt den Zeitpunkt t_0 an, für den die Kurzzeit-DFT gültig ist.

Gefensterte Fourier-Transformation mit Fenster $w(t)$:

$$X_w(f, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot w(t - t_0) \cdot e^{-i2\pi ft} dt$$

Gefensterte DFT mit Fenster $w(k)$:

$$X(n, k_0) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot w(k - k_0) \cdot e^{-i2\pi nk/N}$$

3.5 Instationäre Signale und Kurzzeit-DFT

Gaußglocke als Fenster

- Streng monoton fallend vom Zentrum zu weiter entfernten Regionen.
- Symmetrisch.
- Fourier-Transformierte einer Gaußglocke ergibt wieder eine Gaußglocke, d.h. im Zeit- und Frequenzbereich wird auf äquivalente Weise lokale Information extrahiert.

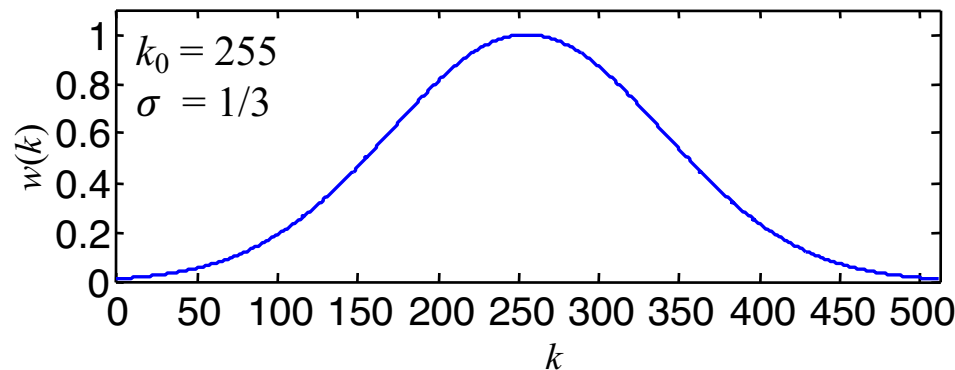
Gauß-Fenster für Fourier-Transformation

$$w(t, t_0) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-t_0}{\sigma} \right)^2}$$

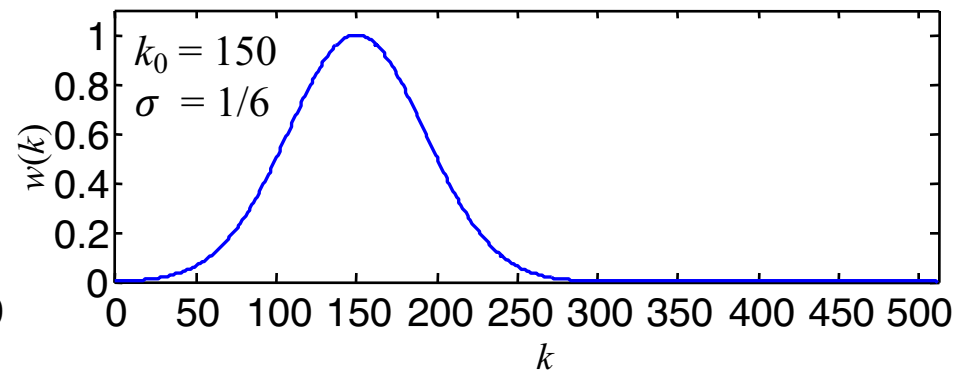
Gauß-Fenster für DFT

$$w(k, k_0) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k-k_0}{\sigma(N-1)/2} \right)^2}$$

Gauß-Fenster für DFT

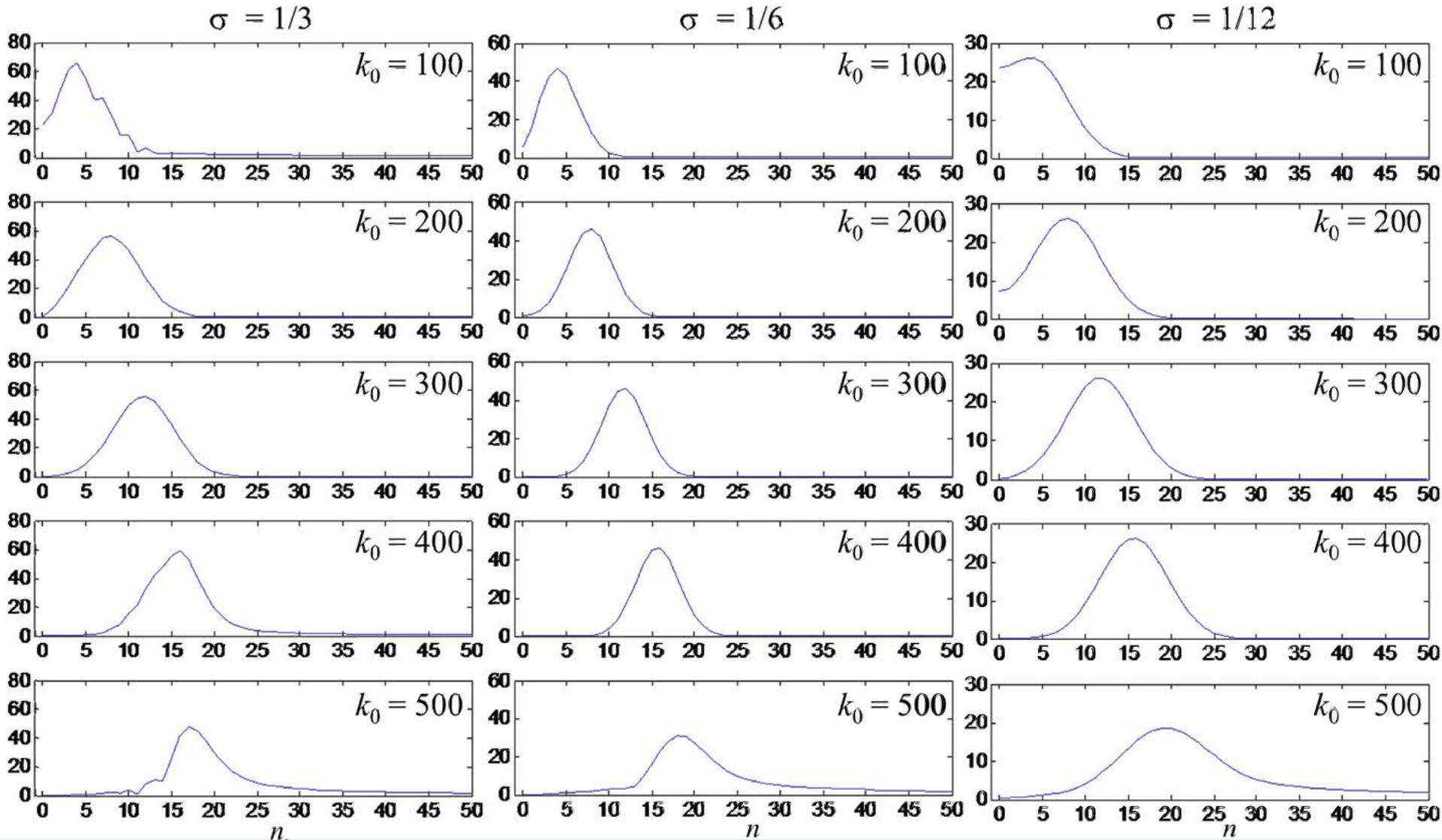


Gauß-Fenster für DFT



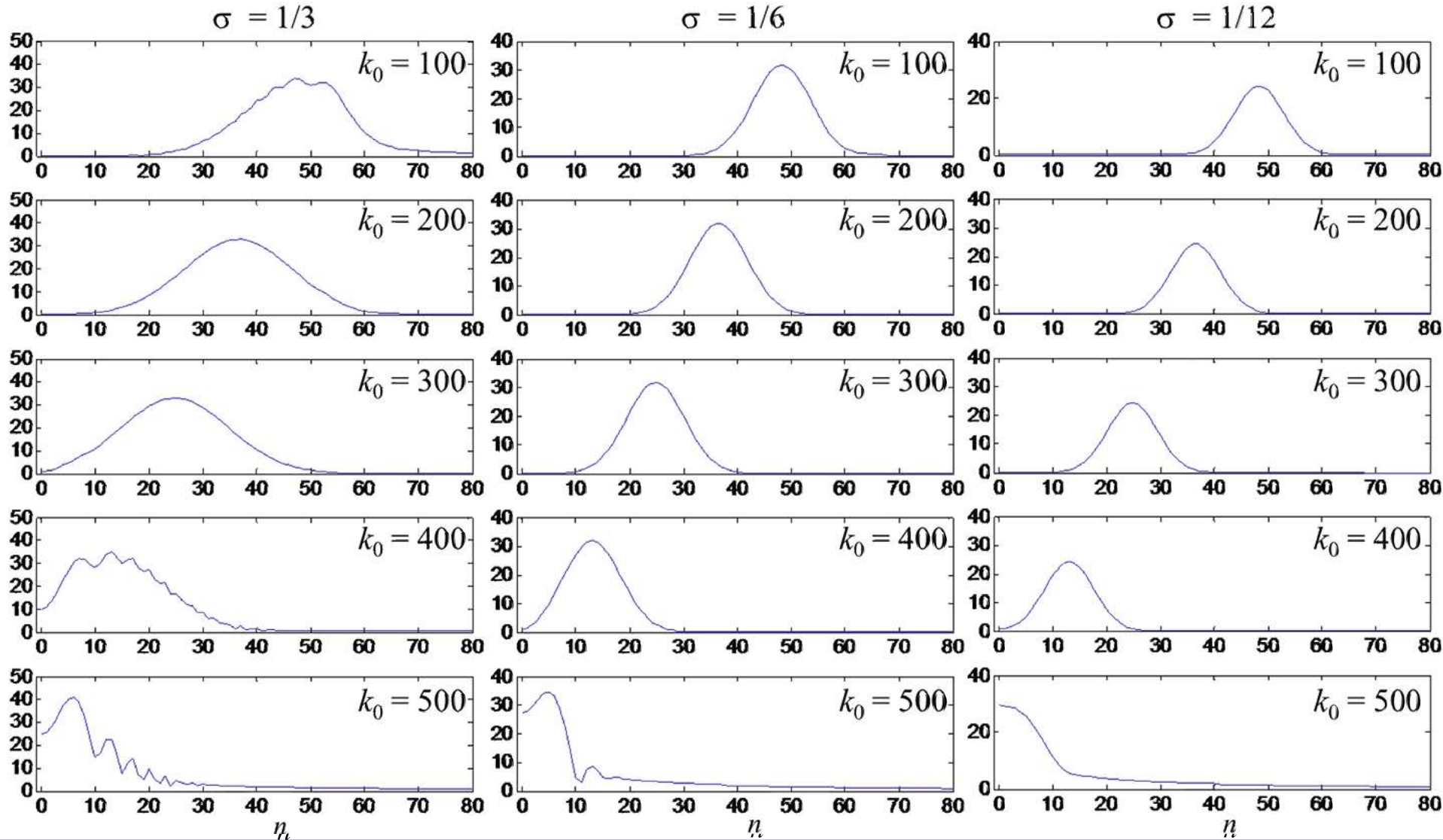
3.5 Instationäre Signale und Kurzzeit-DFT

Kurzzeit-DFTs des 1. Chirp-Signals mit Gauß-Fenster



3.5 Instationäre Signale und Kurzzeit-DFT

Kurzzeit-DFTs des 2. Chirp-Signals mit Gauß-Fenster



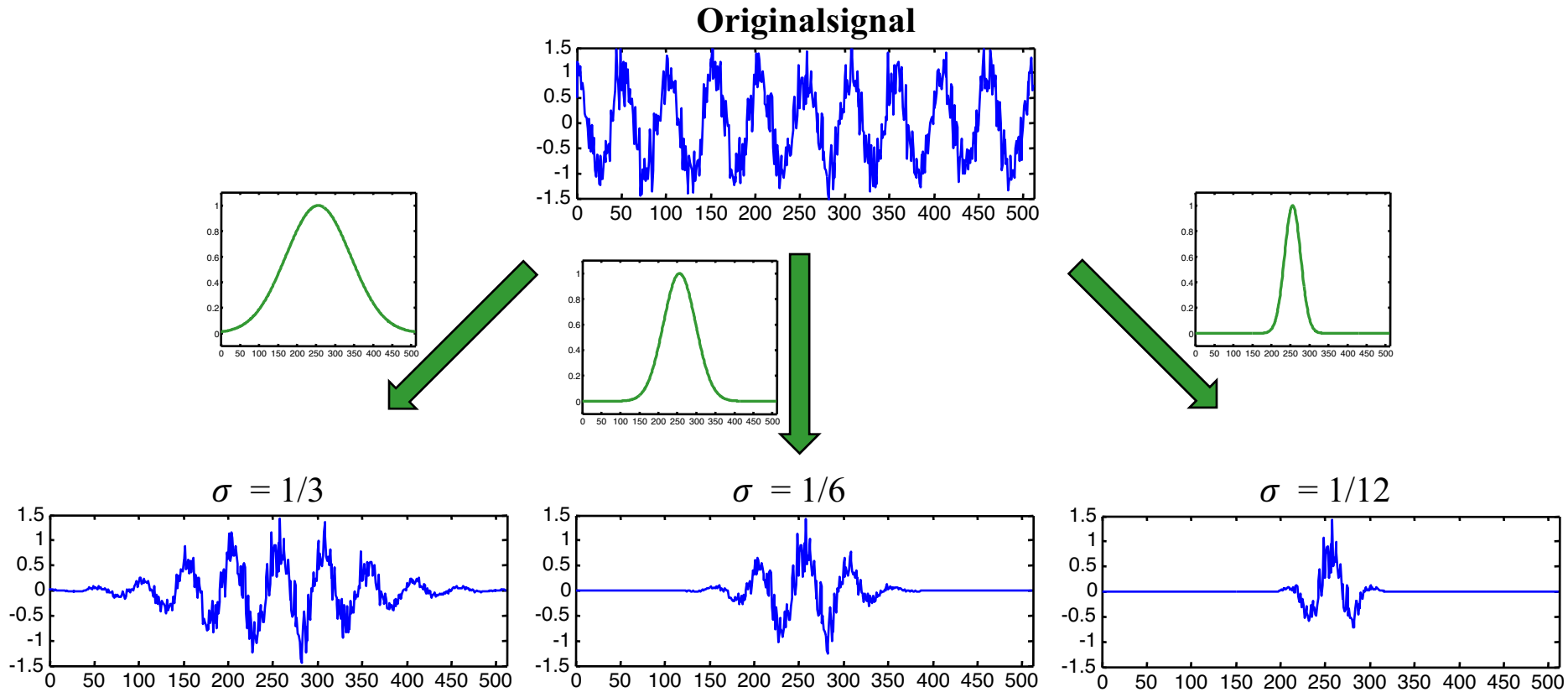
3.5 Instationäre Signale und Kurzzeit-DFT

Beobachtungen:

- Durch Verschieben des Fensters mittels k_0 kann der Frequenzgehalt des Zeitsignals zu beliebigen Zeitpunkten bestimmt werden.
- Da das Fenster eine endliche Ausdehnung hat werden alle darin liegenden Signalfrequenzen gemittelt auftreten.
- Ein im Verhältnis zur Änderungsgeschwindigkeit der Signaleigenschaften zu breites Fenster ($\sigma = 1/3$) führt zu unnötig starker Mittelung über die Zeit.
- Bei $k_0 = 500$ ist der Leckeffekt sehr schön zu erkennen. Dies liegt daran, dass die Gaußglocke bis zum Ende des Datensatzes bei $k = 511$ nicht genug Zeit hatte, abzufallen und daher die rechte Fensterflanke praktisch zum Sprung degeneriert.
- Für das 2. Chirp-Signal ist auch das Fenster mit $\sigma = 1/6$ schon etwas breit, wie an der schlechten Qualität des untersten Bildes zu sehen ist. Dies liegt daran, dass das 2. Chirp-Signal deutlich schneller (ca. 3 Mal) als das 1. Chirp-Signal seine Frequenz ändert.
- Das Fenster darf auch nicht zu klein gewählt werden, weil dann nur sehr wenige Daten in die Berechnung einfließen. Dies verstärkt die Fehler durch die Randeffekte und erhöht die Empfindlichkeit bzgl. Rauschen (weniger Mittelung!), siehe nächste Folien.

3.5 Instationäre Signale und Kurzzeit-DFT

Auswirkung der Fensterbreite bei Kurzzeit-DFTs von verrauschten Signalen



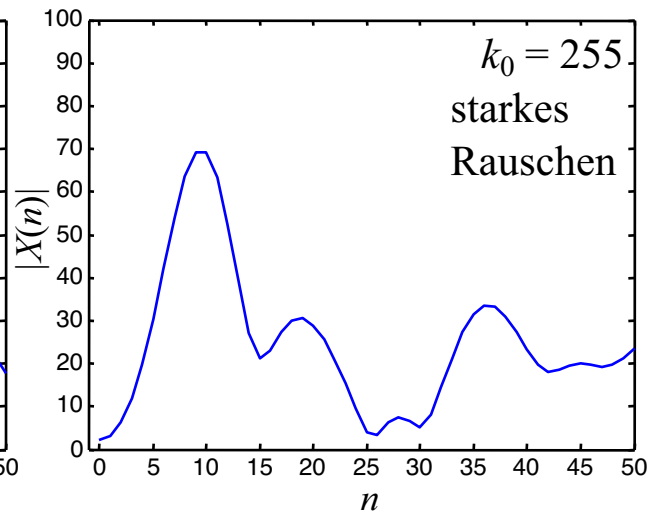
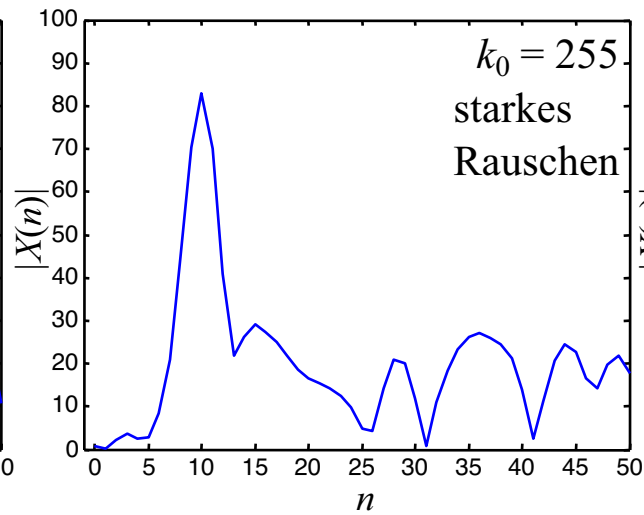
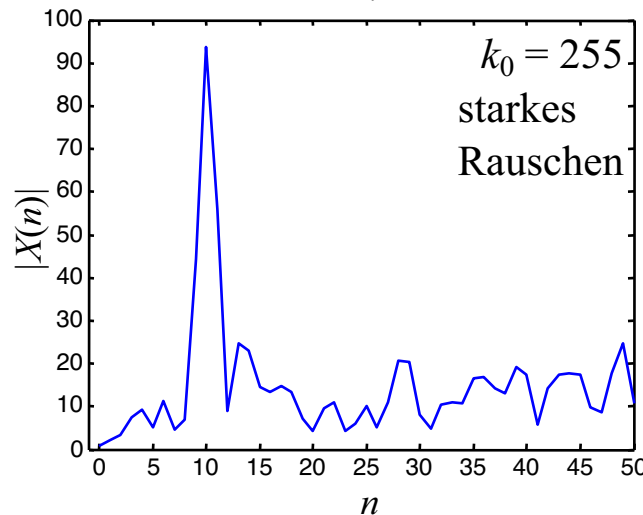
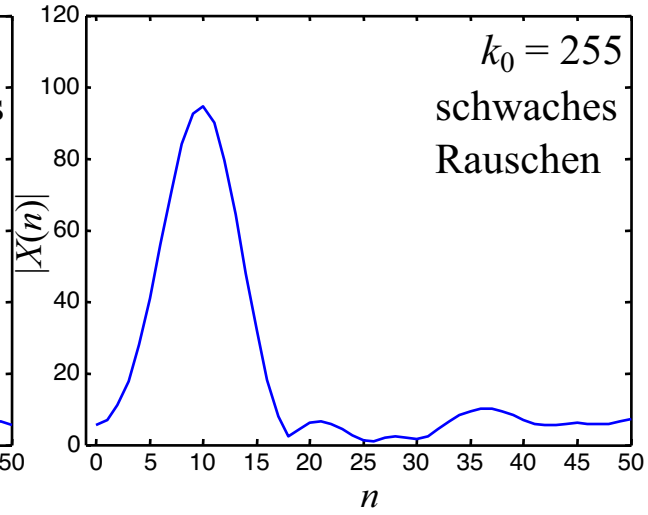
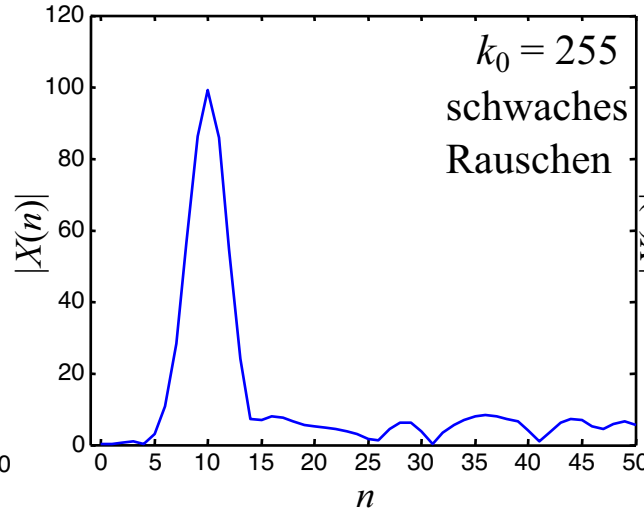
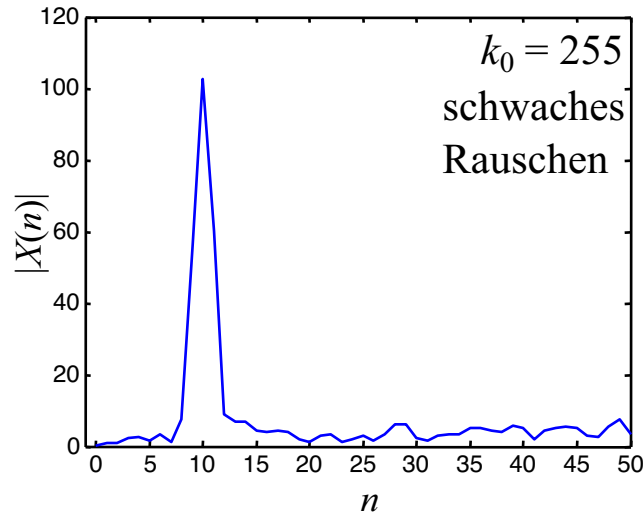
3.5 Instationäre Signale und Kurzzeit-DFT

Kurzzeit-DFTs des *verrauschten* 1. Chirp-Signals mit Gauß-Fenster (normiert bzgl. Fensterfläche!)

$\sigma = 1/3$

$\sigma = 1/6$

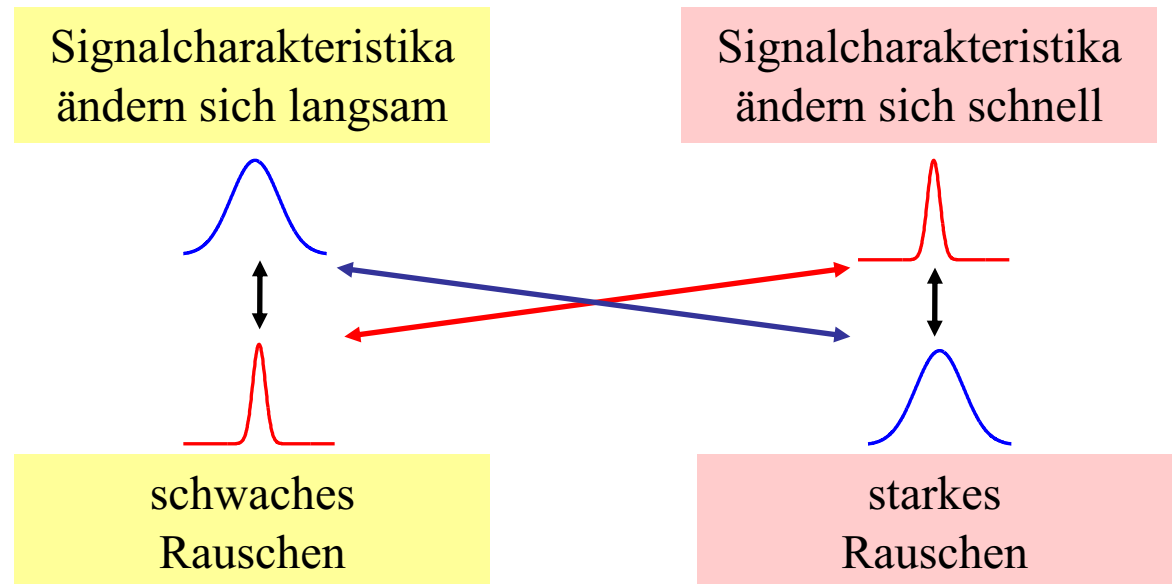
$\sigma = 1/12$



3.5 Instationäre Signale und Kurzzeit-DFT

Beobachtungen:

- Die Fensterbreite bestimmt die theoretisch maximal mögliche Frequenzauflösung. Je breiter das Fenster, umso genauer lassen sich die Frequenzen bestimmen.
- Die Fensterbreite bestimmt die Robustheit bzgl. des Rauschens im Originalsignal. Je breiter das Fenster, umso unempfindlicher ist die Auswertung bzgl. des Rauschens.
- Die Fensterbreite sollte als Kompromiss zwischen Stärke des Rauschens und Änderungsrate der Signalcharakteristika gewählt werden:



3.6 Ausblick: Zeit-Frequenz-Analyse

Heisenbergsche Unschärferelation:

Energie / Zeit: $\Delta E \Delta t \geq \text{const.}$

Impuls / Position: $\Delta p \Delta x \geq \text{const.}$

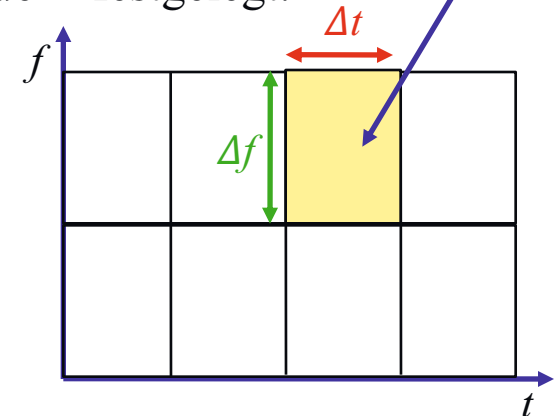
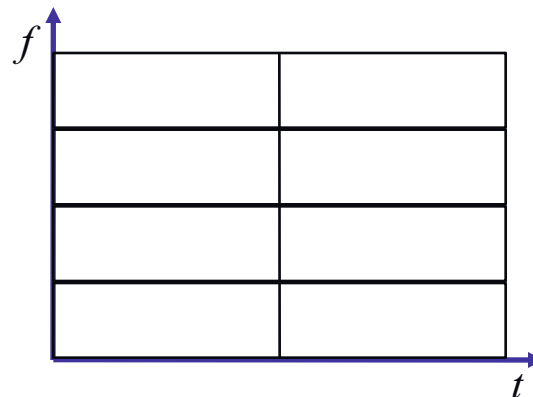
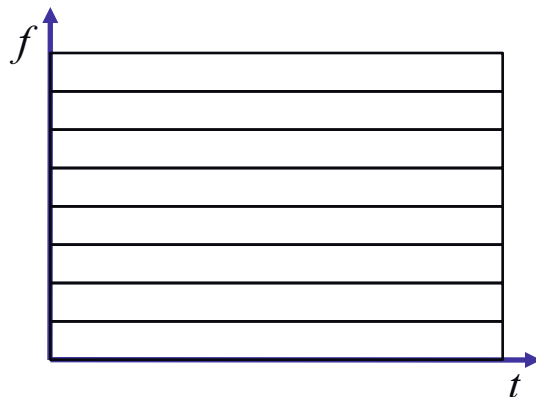
Ziele der Zeit-Frequenzanalyse

- Anschauliche Darstellung, wann in einem Signal welche Frequenzen vorkommen.
- Kodierung der Stärke des Frequenzanteils durch Grautöne:
weiß = Frequenz existiert nicht / *schwarz* = Frequenz kommt mit großer Amplitude vor
- Bestmögliche Auflösung in Zeit Δt und Frequenz Δf verhalten sich nach der Heisenbergschen Unschärferelation antiproportional:

$$\Delta t \sim \frac{1}{\Delta f} \quad \text{bzw.} \quad \Delta t \cdot \Delta f = \text{const.}$$

Fläche = const.

- Durch die Breite des Fenster der Kurzzeit-DFT wird also nicht nur die Genauigkeit in der Zeit sondern implizit auch die Genauigkeit in der Frequenz festgelegt.



3.6 Ausblick: Zeit-Frequenz-Analyse

Beispiel 1: Analyse eines periodischen Signals mit veränderlicher Frequenz

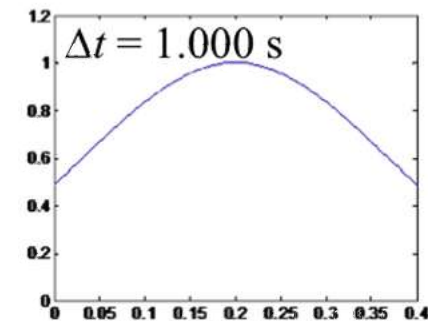
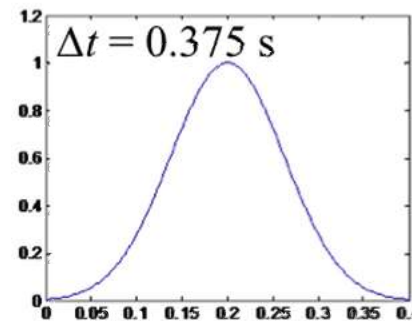
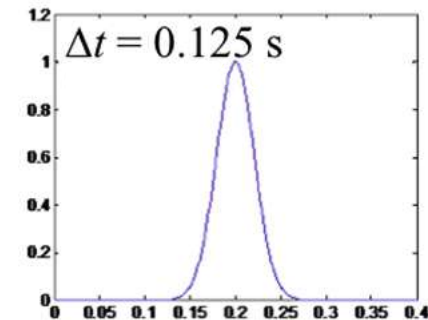
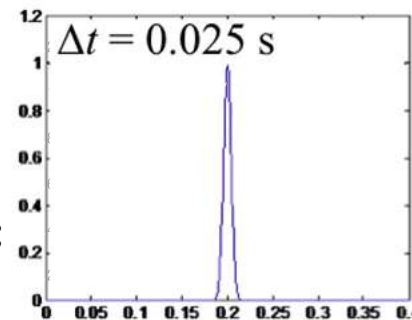
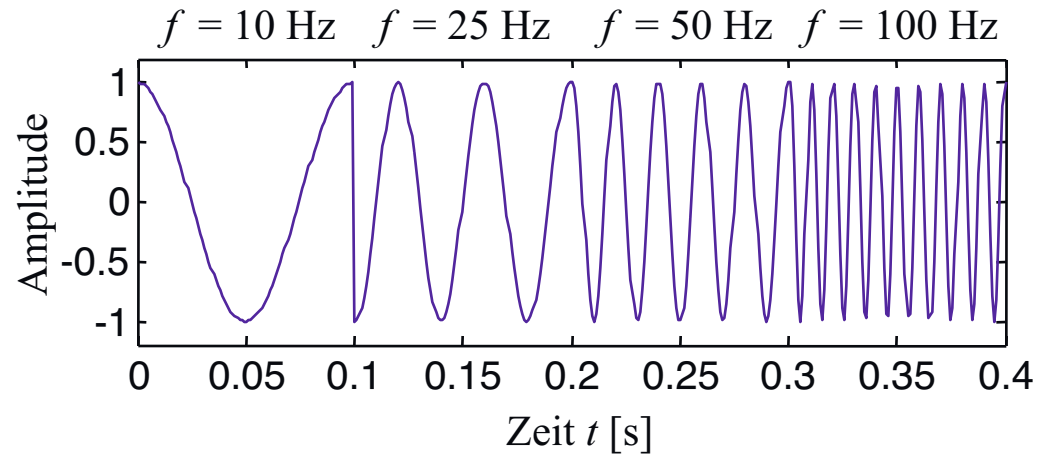
Ziele einer Kurzzeit-DFT:

Frequenzanalyse des Signals in Abhängigkeit der Zeit, d.h. wir wollen wissen, wann welche Frequenzen in dem Signal enthalten sind.

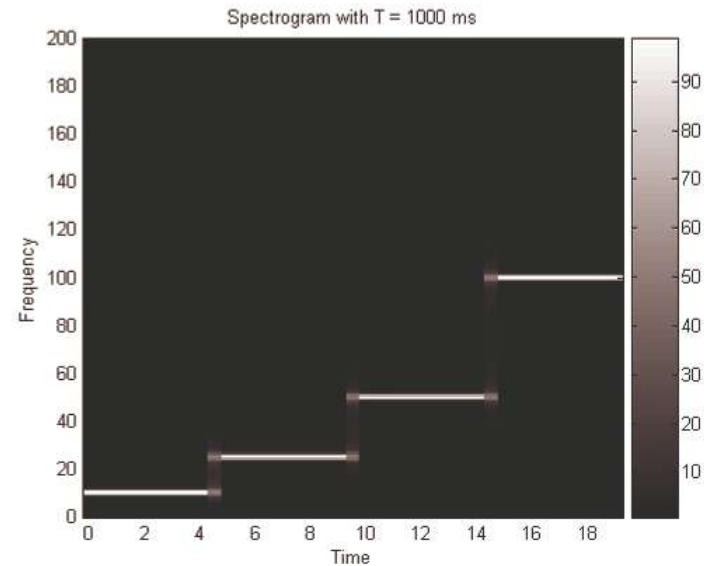
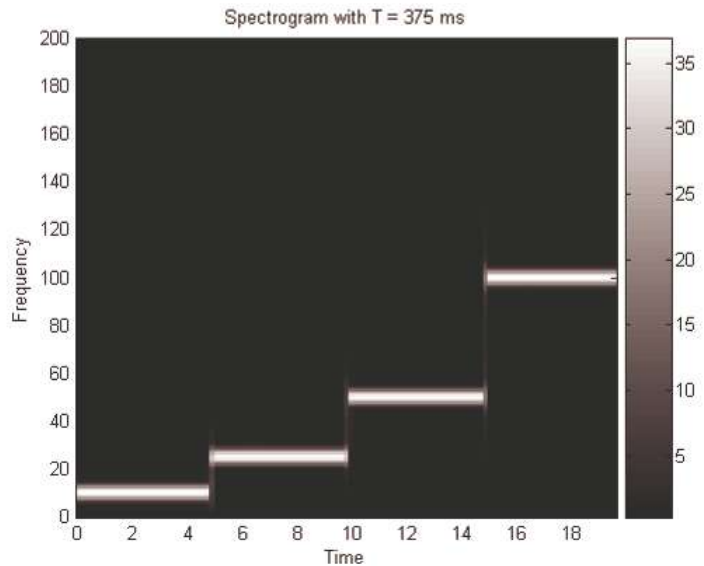
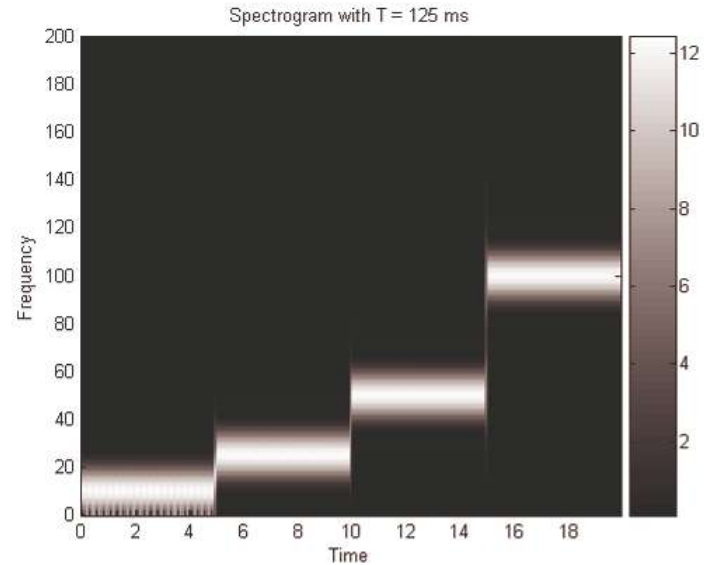
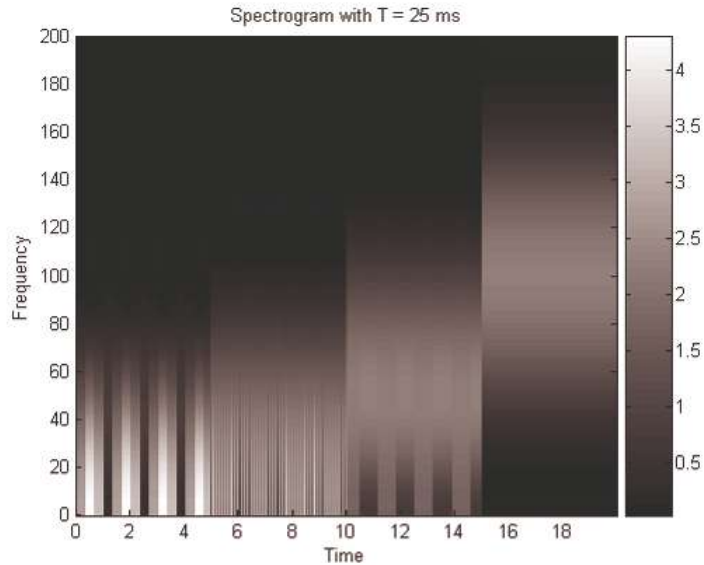
Wahl der Fensterbreite für die Kurzzeit-DFT:

- Legt die Zeitauflösung Δt fest.
- Legt damit implizit auch die Frequenzauflösung Δf fest, denn beide sind anti-proportional:

$$\Delta t \sim \frac{1}{\Delta f}$$



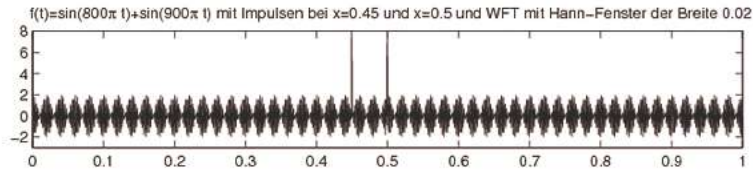
3.6 Ausblick: Zeit-Frequenz-Analyse



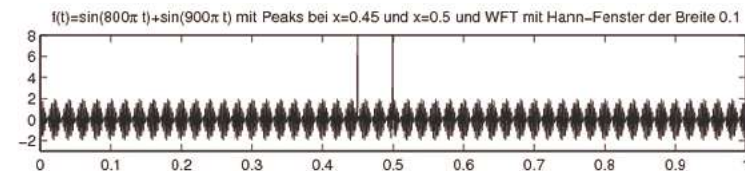
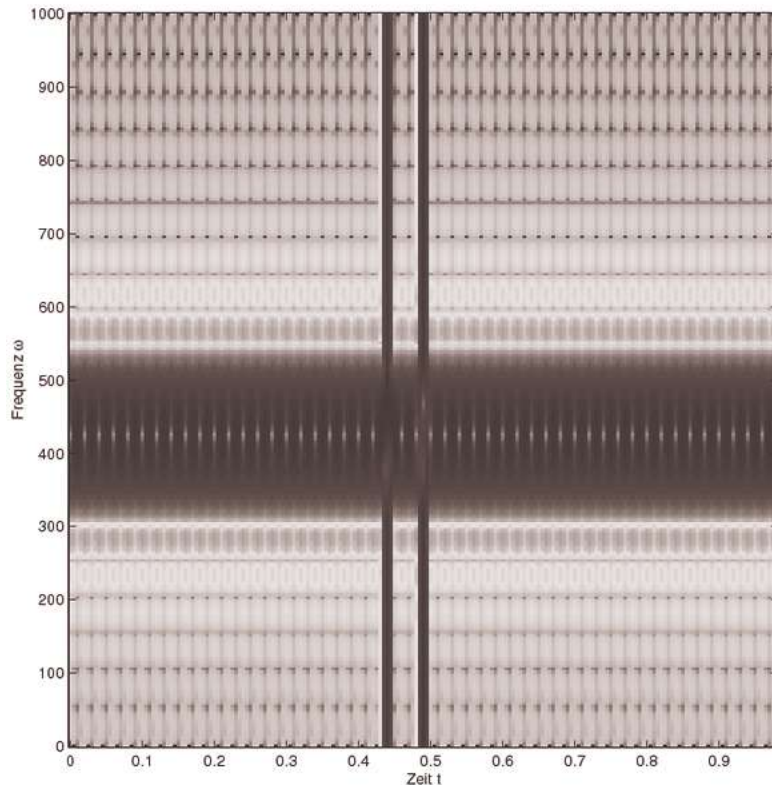
Quelle:
Wikipedia

3.6 Ausblick: Zeit-Frequenz-Analyse

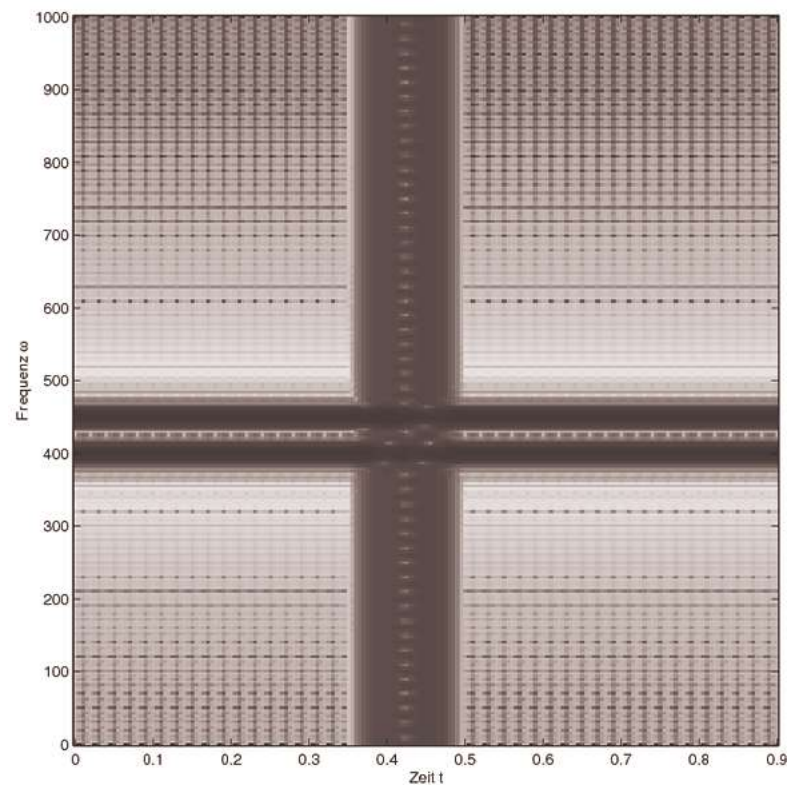
Beispiel 2: Erkennung bzw. Empfindlichkeit bezüglich einer kurzen Störung



$\Delta t = 0.02$



$\Delta t = 0.10$



Quelle: Skript „Zeit-Frequenz-Analyse und Wavelettransformationen“ von M. Clausen und M. Müller, Universität Bonn

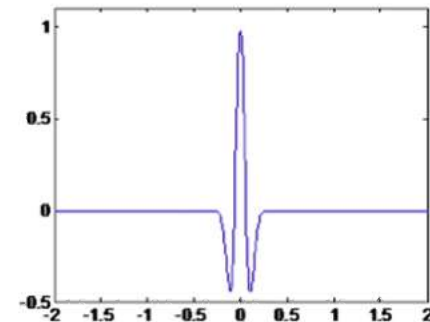
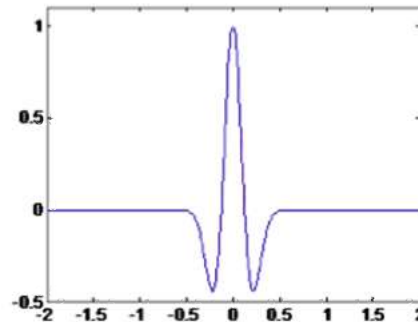
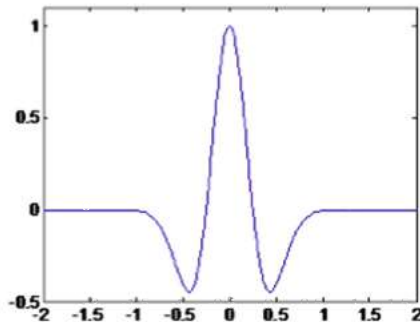
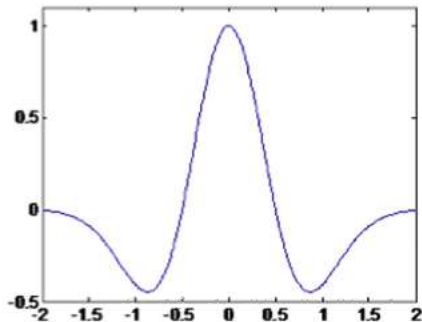
3.6 Ausblick: Zeit-Frequenz-Analyse

Fourier-Transformation

- Suche nach unendlich langen periodischen Signalen aller Frequenzen.
- Nachträgliche Fokussierung auf einen Zeitabschnitt durch Fensterung.
- Fenster hat eine feste Breite → Festlegung der Zeit- und Frequenzauflösung.

Wavelet-Transformation

- Suche nach Wellenpaketen unterschiedlicher Länge und Frequenz.
- Lange Wellenpakete sind niederfrequent → hohe Frequenz- aber niedrige Zeitauflösung
- Kurze Wellenpakete sind hochfrequent → niedrige Frequenz- aber hohe Zeitauflösung
- Idee: Hohe Signalfrequenzen treten meist nur kurzzeitig auf und sollen daher zeitlich genauer aufgelöst werden als niedrige Frequenzen, die oft länger im Signal enthalten sind.



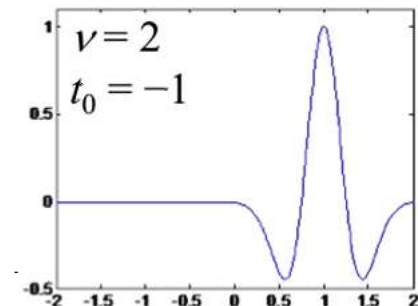
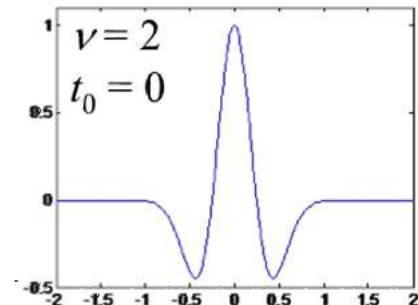
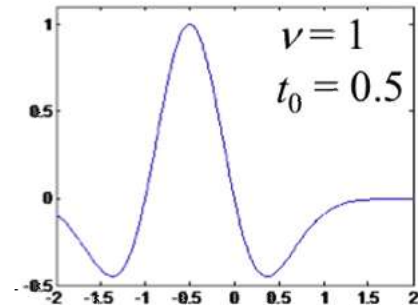
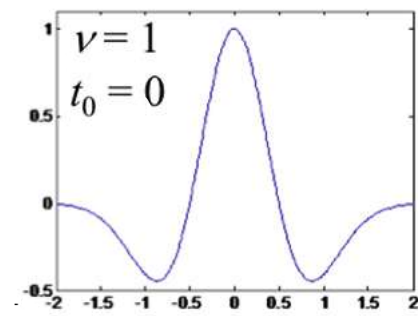
3.6 Ausblick: Zeit-Frequenz-Analyse

Konstruktion der Wavelets

- Basis-Wavelet (*Mother Wavelet*) als Vorlage.
- Alle Wavelets werden durch Zeitverschiebung und Zeitskalierung (typischerweise mit Faktor 2^{-n}) aus dem Basis-Wavelet abgeleitet.
- Zeitverschiebung um t_0 Zeiteinheiten zur Zeitlokalisierung.
- Skalierung in Zeitrichtung um Faktor ν zur Frequenzlokalisierung.

Eigenschaften der Wavelets

- Durch die Zeitverschiebung t_0 kann das Signal zu beliebigen Zeiten analysiert werden.
- Durch die Zeitskalierung ν können die verschiedenen Frequenzanteile des Signals analysiert werden.
- Im Unterschied zur Fourier-Transformation, wo unendlich lange Sin-Signale gesucht werden, ist die Länge des Wavelets an dessen Frequenz (Skalierung) gekoppelt.

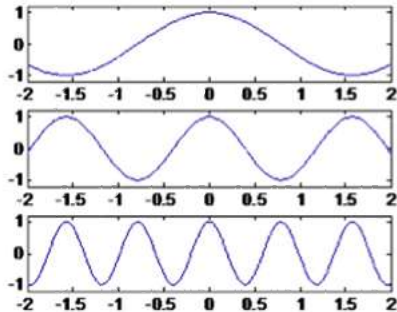


3.6 Ausblick: Zeit-Frequenz-Analyse

vergleichbar mit einer Frequenz f

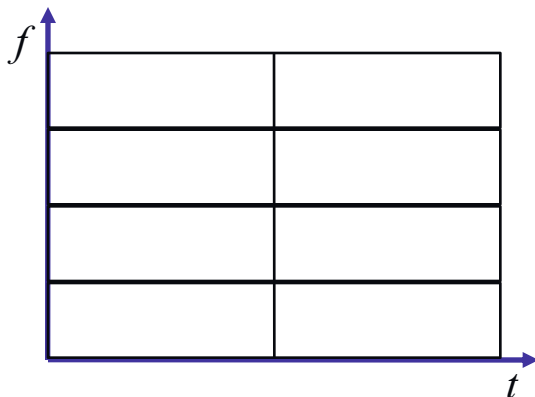
Fourier-Transformation

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i2\pi ft} dt$$



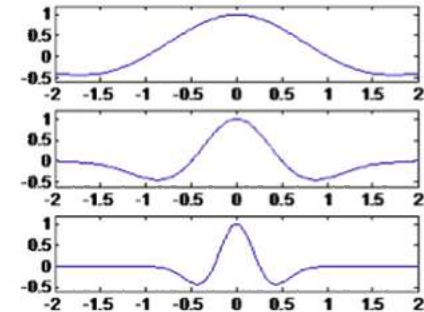
Gefensterete Fourier-Transformation

$$X_w(f, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot w(t - t_0) \cdot e^{-i2\pi ft} dt$$

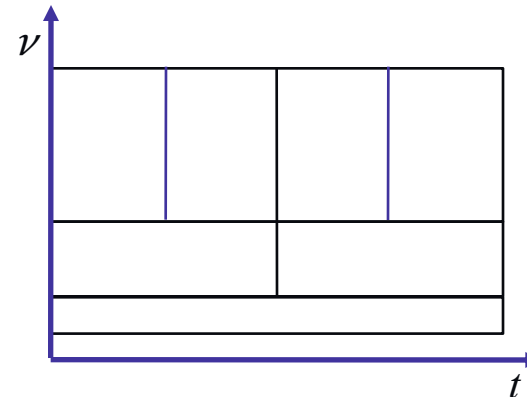


Wavelet-Transformation

$$X(\nu, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \Psi(\nu(t - t_0)) dt$$



Fensterung wird nicht benötigt, da Wavelets von sich aus schon lokal sind!



3.7 Ausblick: Parametrische Frequenzanalyse

Parametrische Verfahren

- Aus einer relativ großen Anzahl N Daten werden relativ wenige n Parameter geschätzt.
- Die Anzahl an Parametern geht aus Strukturüberlegungen hervor und ist nicht nur ein Maß für die Modellgenauigkeit bzw. -varianz.
- Die Parameter sind physikalisch oder anhand anderer Prinzipien (*first principles*) interpretierbar oder leicht in interpretierbare Parameter umrechenbar.
- Beispiele: IIR- bzw. Übertragungsfunktions-Modelle, AR oder ARMA-Modelle, ...

Nichtparametrische Verfahren

- Aus einer relativ großen Anzahl N Daten werden relativ viele n Parameter bestimmt, oft gilt sogar $n = N$, d.h. es findet gar keine Mittelung oder Rauschreduktion im statistischen Sinne statt.
- Die Anzahl der Parameter hat keine unmittelbaren physikalischen oder strukturellen Gründe sondern spiegelt lediglich Genauigkeit, Auflösung, etc. des Modells wider.
- Die Parameter haben keine unmittelbare physikalische Interpretation.
- Beispiele: FIR-Modell (= Gewichtsfunktions-Modell), DFT, ...

3.7 Ausblick: Parametrische Frequenzanalyse

Idee der parametrischen Frequenzanalyse

- Signalmodell: Impulsantwort einer Übertragungsfunktion.
- Schätzung der Parameter dieser Übertragungsfunktion.

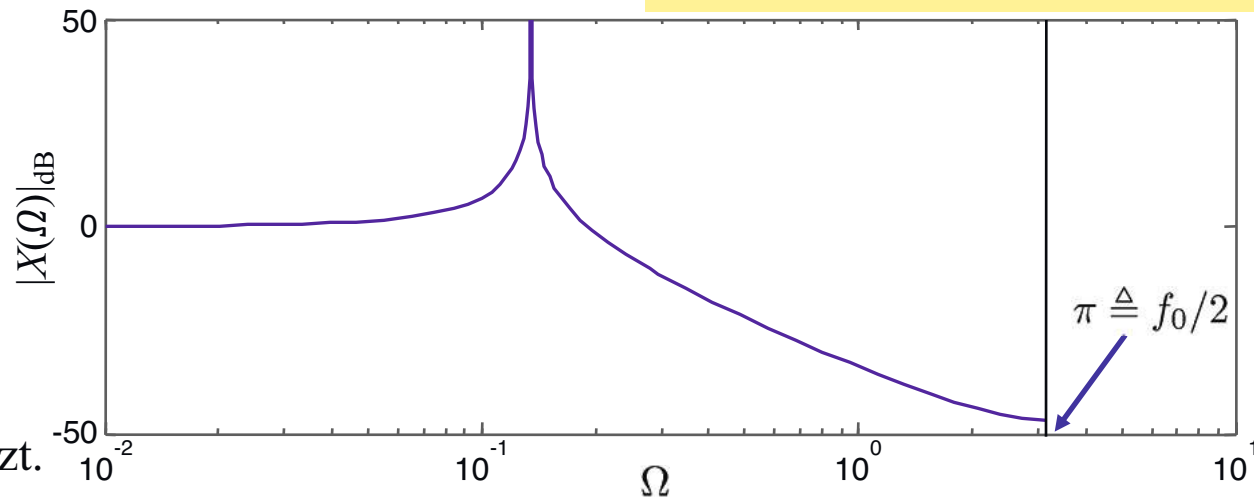
Beispiel: Autoregressives Modell 2. Ordnung (AR(2)):

$$G(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^2}{z^2 + a_1 z + a_0} = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}}$$

$$\rightarrow x(k) = b_0 u(k) - a_1 x(k-1) - a_2 x(k-2)$$

Eingang $u(k)$ ist bei einer **Zeitreihe** unbekannt. Es wird nur $x(k)$ gemessen! $u(k)$ wird modellhaft als unbekanntes weißes Rauschen angenommen.

- Modellierung *einer* gedämpften Schwingung.
- Pollage bestimmt die Frequenz und Dämpfung.
- 2 Parameter werden pro Schwingung benötigt und mit Least-Squares geschätzt.



3.7 Ausblick: Parametrische Frequenzanalyse

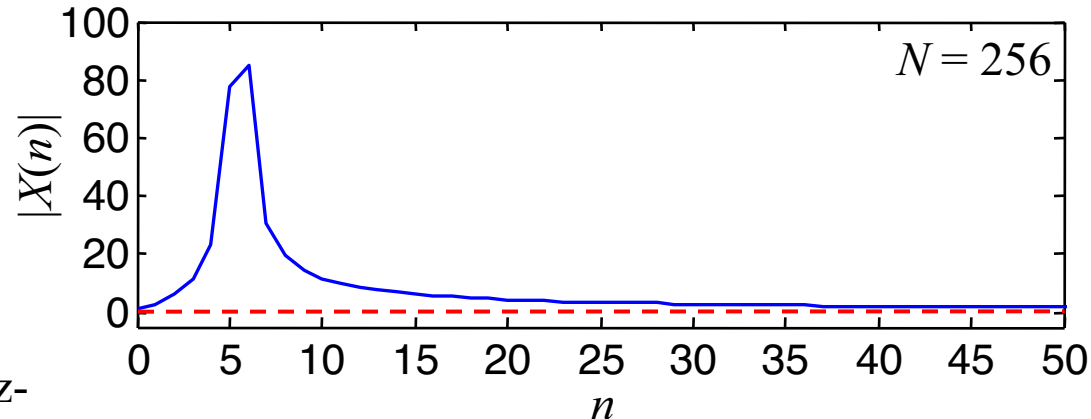
Zeitsignal:

$$x(k) = \cos(2\pi f_1 k / 256)$$

$$f_1 = 5.5 \text{ Hz}$$

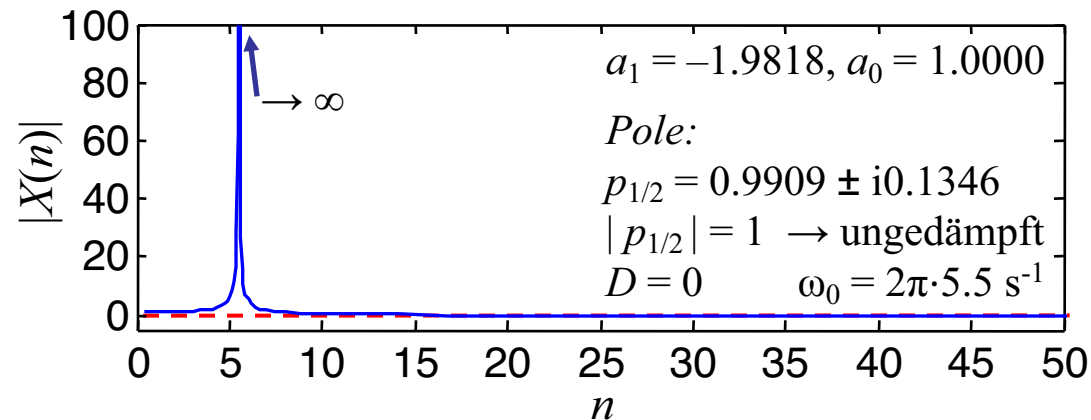
DFT

- Aus 256 Abtastwerten des Zeitsignals werden 256 Frequenzanteile berechnet. → Hohe Rauschempfindlichkeit!
- Leck- und Gartenzauneffekt verschmieren die Signalfrequenz von $f_1 = 5.5 \text{ Hz}$ auf ein breites Frequenzband.



Parametrische AR(2)-Schätzung

- Aus 256 Abtastwerten des Zeitsignals werden 2 Parameter des AR-Modells berechnet. → Sehr unempfindlich bzgl. Rauschen!
- Eine exakte Frequenz (reelle Zahl, nicht quantisiert!) wird ermittelt.





```
Y = fft(X) ;           % Diskrete Fourier-Transformation (1-D). Der
                    % Berechnungsalgorithmus verwendet die FFT.

y = ifft(X) ;        % Inverse diskrete Fourier-Transformation

A = dftmtx(n) ;1    % Matrix der diskreten Fourier-Transformation
                    % DFT). Das Matrixprodukt mit einem Vektor
                    % berechnet die DFT des Vektors.

spectrum;1          % Verschiedene Methoden zur spektralen
                    % Schätzung (siehe MATLAB-Hilfe)

window;1           % Funktion zur Anwendung verschiedener
                    % Fenster-Funktionen (z.B. gausswin, hamming
                    % etc.)

S = spectrogram(x) ;1 % Berechnet die Short-Time-Fourier-
                    % Transformation (STFT) eines Signals.
```



`Pxx = pcov(x,p);1`

*% Berechnet die spektrale Leistungsdichte des
% Vektors x mit Hilfe der Kovarianz-Methode.
% p ist die Ordnung des Prädiktors (AR).*

¹ : *Signal Processing Toolbox*

4. Filter

Inhalt Kapitel 4

4. Filter

4.1 Anforderungen an Filter

4.2 FIR- und IIR-Filter

4.3 Entwurf von FIR-Filtern

- Fenstermethode
- Optimierungsmethode (Parks-McClellan)

4.4 Entwurf von IIR-Filtern

- Methode der bilinearen Transformation
- Übersicht analoger Filtertypen

4.5 Implementierung von Filtern

4.6 Nichtlineare Filter

4.7 Akausale Filter

4.8 Ausblick: Adaptive Filter

4.1 Anforderungen an Filter

Was ist ein Filter?

Ein Filter ist ein System, das bestimmte Eigenschaften (Charakteristika) eines Signals modifiziert, z.B. hervorhebt oder unterdrückt. Typischerweise sind Filter *dynamische Systeme* und sind *frequenzselektiv*, d.h. sie sperren bestimmte Frequenzbereiche eines Signals oder lassen diese passieren.

Digitale Filter

Wir fokussieren uns hier auf *digitale Filter*, d.h. Filter, die *zeitdiskret* im Form von *Differenzgleichungen* umgesetzt werden und sich direkt in digitaler Schaltungstechnik oder in *Software* implementieren lassen.

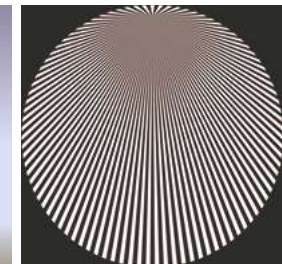
Zeit ↔ Frequenz

Normalerweise betrachten wir hier Signale $x(t)$ oder $x(k)$ die von der kontinuierlichen Zeit t oder der diskreten Zeit kT_0 abhängen. In manchen Anwendungen kann an Stelle der Zeit aber auch ein Ort treten, z.B. in der Bildverarbeitung. Die Frequenz ist dann als Fourier-Transformierte des Ortes zu verstehen, also als Ortsfrequenz.

nieder-
frequent



hoch-
frequent



4.1 Anforderungen an Filter

Verschiedene Filter



*Optische Filter:
Lassen nur bestimmte
Farben durch!*



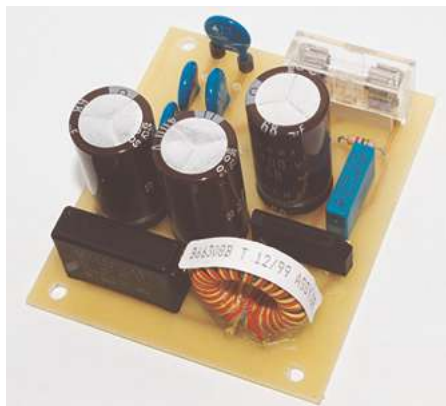
*Rußfilter:
Lassen nur Teilchen
kleiner Größe durch!*



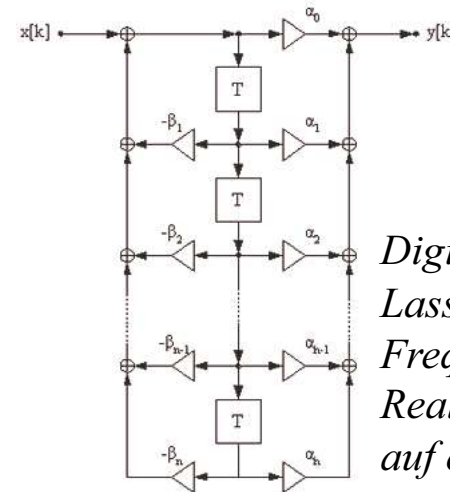
*Luftfilter:
Lassen nur Teilchen
kleiner Größe durch!*



*Kaffeefilter:
Lassen nur Flüssigkeiten durch!*



*Analoge
elektronische Filter:
Lassen nur bestimmte
Frequenzen durch!
Realisierung als R-L-C-
Schaltung.*



*Digitale Filter:
Lassen nur bestimmte
Frequenzen durch!
Realisierung in Software
auf einem Computer.*

4.1 Anforderungen an Filter

Drei Schritte zur Herleitung eines Filters

1. Spezifikation: Was soll der Filter unter welchen Nebenbedingungen tun?
2. Entwurf (Design): Welcher Filter erfüllt diese Spezifikationen?
3. Implementierung (Realisierung): Wie wird dieser Filter hardwaremäßig aufgebaut oder softwaremäßig programmiert?

Vier Schritte zum Entwurf eines Filters

- a) Wahl einer Systemklasse: z.B. auf lineare, stabile, kausale, zeitinvariante, dynamische Systeme.
- b) Wahl einer Filter-Struktur: z.B. FIR (*finite impulse response*) oder IIR (*infinite impulse response*).
- c) Festlegung der Filter-Ordnung.
- d) Bestimmung der Filter-Parameter.

4.1 Anforderungen an Filter

Signal-Rauschverhältnis (*Signal-to-Noise Ratio*)

abgekürzt SNR ist das Verhältnis aus mittlerer Leistung des Nutzsignals zu mittlerer Leistung des Rauschens:

$$\text{SNR} = \frac{\text{Nutzsignalleistung}}{\text{Rauschleistung}} = \frac{P_{\text{Signal}}}{P_{\text{Rauschen}}}$$

Wird meist in Dezibel angegeben:

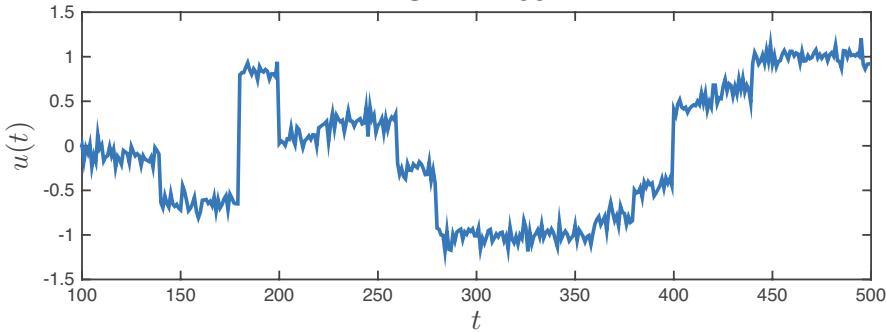
$$\text{SNR} = 10 \lg \left(\frac{P_{\text{Signal}}}{P_{\text{Rauschen}}} \right) \text{ dB}$$

Da es sich um *Leistungen* handelt (\sim Quadrat der Amplituden), markiert die 3 dB Eckfrequenz einen Abfall auf $1/2$ nicht $1/\sqrt{2}$, wie in der Regelungstechnik im *Amplitudengang* (Bode-Diagramm).

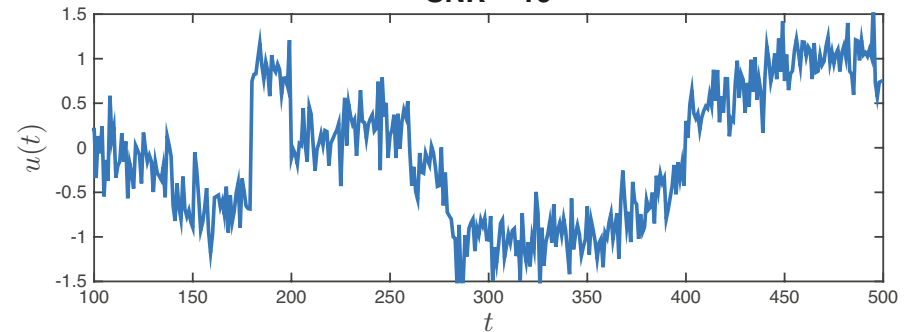
Die Aufgabe eines Filters ist es in der Regel, das SNR zu verbessern, d.h. zu vergrößern. Das gelingt typischerweise, weil Nutzsignal und Rauschen in anderen Frequenzbereichen liegen. Mit der Eckfrequenz des Filter wird die Grenze gezogen zwischen dem Frequenzbereich des Nutzsignals und dem Frequenzbereich des Rauschens.

4.1 Anforderungen an Filter

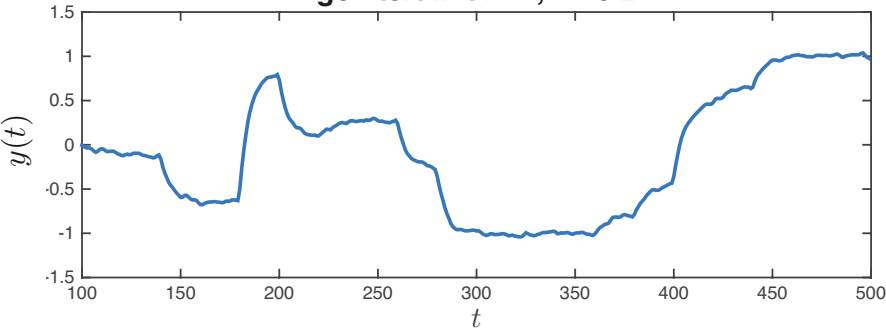
SNR = 100



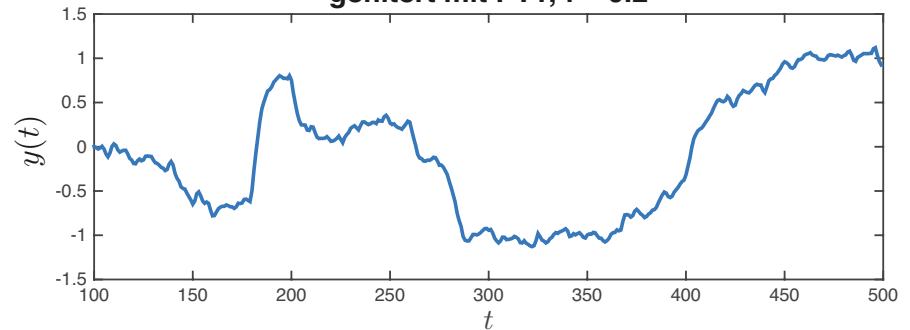
SNR = 10



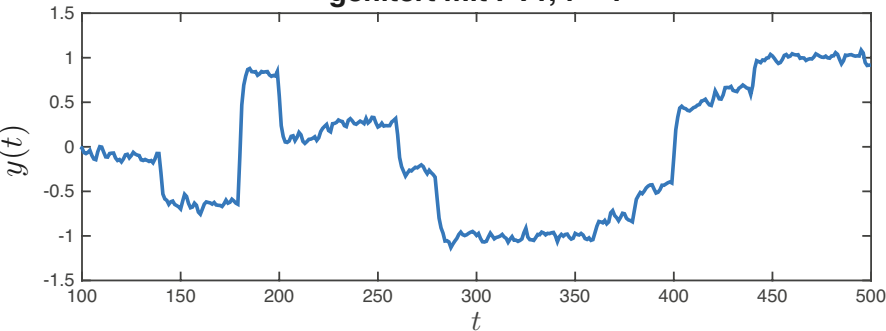
gefiltert mit PT1, f = 0.2



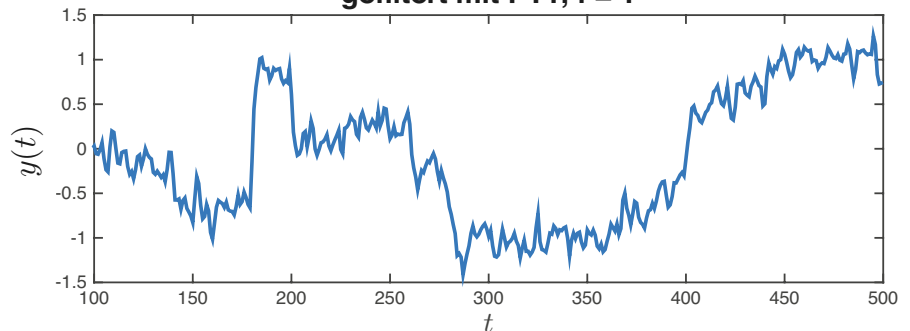
gefiltert mit PT1, f = 0.2



gefiltert mit PT1, f = 1



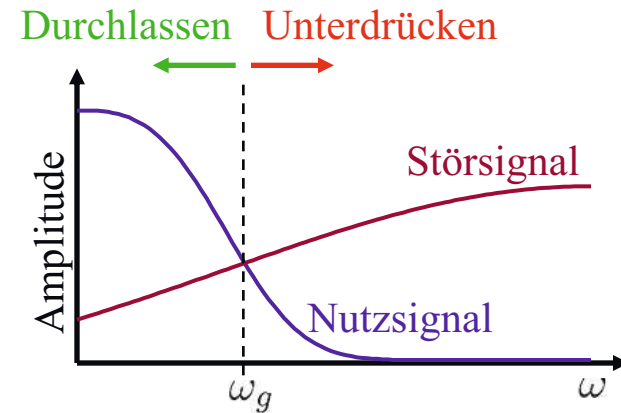
gefiltert mit PT1, f = 1



4.1 Anforderungen an Filter

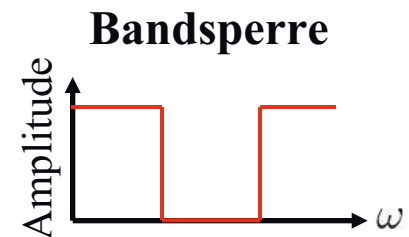
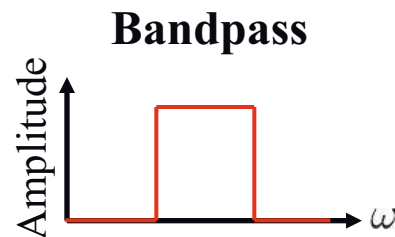
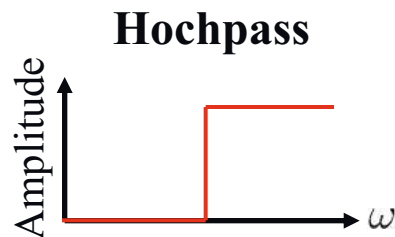
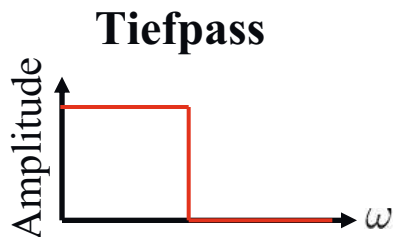
Trennung bei einer Grenzfrequenz

Ein Filter kann nur dann wirksam sein, wenn das **Nutzsignal** und das **Störsignal** andere Frequenzcharakteristika aufweisen. Dann ist es möglich die Grenzfrequenz ω_g so zu legen, dass ein großer Teil des Nutzsignals durchgelassen und ein großer Teil des Störsignals unterdrückt wird.



Ideale Filtercharakteristiken

Wenn, wie im obigen Beispiel, das interessierende Signal (Nutzsignal) vor allem im niederfrequenten Bereich liegt, dann verwendet man einen **Tiefpassfilter**, also einen Filter, der die Signalkomponenten mit *tiefer* Frequenz *passieren* lässt. Das ist die meist verwendete Filterart. In manche Anwendungen liegt das Nutzsignal aber in anderen Frequenzbereichen. Die entsprechenden Filter sind wie folgt bezeichnet:



4.1 Anforderungen an Filter

Anwendungsbeispiele für die verschiedenen Filtercharakteristiken

- Tiefpass: Unterdrücken eines hochfrequenten Rauschens zu Verbesserung der Qualität des Nutzsignals.
- Hochpass: Unterdrücken zeitlich langsamer Veränderungen wie Gleichanteile und Trends zur Extraktion des variablen Signalanteils (z.B. bei Börsenkursen).
- Bandpass: Herausfiltern eines Frequenzbandes z.B. beim Radio- oder Fernsehempfang rund um die Trägerfrequenz zur Extraktion eines Senders.
- Bandsperre: Unterdrücken bestimmter Frequenzbereiche in Stellsignalen, die das Folgesystem schädigen könnten (z.B. durch Anregung resonanter, d.h. schwach gedämpfter Moden). Alternative Namen: Notch-Filter oder Kerbfilter.

Ideale Filter

- Perfekte Wiedergabe des Signals im *Durchlassbereich*, d.h. $|G(i\omega)| = 1 = 0 \text{ dB}$.
- Perfekte Unterdrückung des Signal im *Sperrbereich*, d.h. $|G(i\omega)| = 0$.
- Unendlich steiler Übergang vom Durchlass- in den Sperrbereich, d.h. Flankensteilheit $= \infty$.
- Keine Phasenverschiebung (d.h. Verzögerung) des Signals, d.h. $\angle G(i\omega) = 0$.

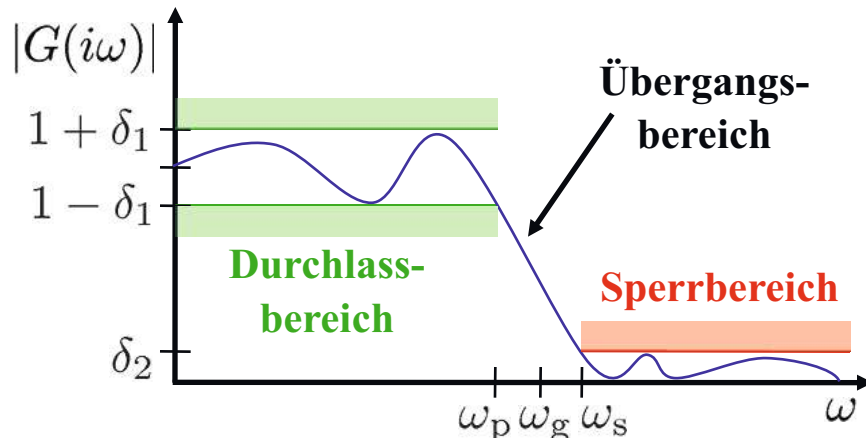
4.1 Anforderungen an Filter

Reale Filter

In der Realität kann keine dieser Eigenschaften idealer Filter erfüllt werden. Deshalb geht man zu „entschärften“ Forderungen mit Toleranzen über.

Spezifikation eines realen Tiefpass-Filters

- Durchlassbereich (*pass-band*): Verstärkung zwischen $1 - \delta_1$ und $1 + \delta_1$.
- Sperrbereich (*stop-band*): Verstärkung kleiner δ_2 .
- Durchlassbereich: $\omega < \omega_p$, Übergangsbereich: $\omega_p < \omega < \omega_s$, Sperrbereich: $\omega > \omega_s$.
- Keine Forderung für die Phase. Manchmal wird linearer Verlauf gefordert, siehe später.



Bemerkungen: p = pass s = stop

- Je enger ω_p und ω_s zusammen liegen und je kleiner δ_1 und δ_2 gewählt werden, desto extremer sind die Anforderungen.
- Extremere Anforderungen führen notwendigerweise zu komplexeren Filtern.

4.1 Anforderungen an Filter

Einschränkung auf Filter, die folgende Eigenschaften aufweisen (siehe Kapitel 2)

- stabil
- linear (für nichtlineare Filter siehe Abschnitt 4.6)
- kausal (für akausale Filter, siehe Abschnitt 4.7)
- zeitinvariant (für zeitvariante Filter, siehe Abschnitt 4.8)

Außerdem ist oft folgende Eigenschaft *wünschenswert*, insbesondere in der Kommunikationstechnik, aber leider nicht immer realisierbar:

- linear in der Phase

Das bedeutet, dass jede Schwingung unabhängig von ihrer Frequenz durch den Filter um die selbe Zeit verschoben wird. Das ist z.B. bei akustischen Signalen sehr wichtig, weil die Ohren sehr empfindlich auf zeitliche Signalverschiebungen reagieren. Würden niedrige Frequenzen anders verzögert als mittlere oder hohe, so würde dies sofort unangenehm auffallen. Regelungstechnisch ausgedrückt haben Systeme mit linearer Phase

- eine Totzeit aber sonst keine Phasenverschiebung.

4.1 Anforderungen an Filter

Eigenschaft: Lineare Phase

Mathematisch bedeutet eine lineare Phase, dass die Phasenverschiebung linear in der Frequenz ist:

$$G(i\omega) = |G(i\omega)|e^{-i\omega T_t} \quad \text{mit einem reellen } T_t$$


Ein Filter mit einer solchen Übertragungsfunktion antwortet auf eine Schwingung $u(t)$ mit Amplitude A_1 , Frequenz ω_1 und Phase φ_1 im eingeschwungenen Zustand mit

$$u(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \rightarrow \quad y(t) = A_1 |G(i\omega_1)| \sin(\omega_1 t + \varphi_1 - \omega_1 T_t)$$

Da die Phasenverschiebung linear in der Frequenz ist, lässt sich diese umschreiben zu:

Amplituden-
verstärkung

Phasen-
verschiebung

$$y(t) = A_1 |G(i\omega_1)| \sin(\omega_1(t - T_t) + \varphi_1)$$

D.h. die Phasenlage φ_1 des Signals $u(t)$ wird durch den Filter nicht verändert, und dies gilt für beliebige Frequenzen des Signals ω_1 .

Zeitverschiebung
(Totzeit)

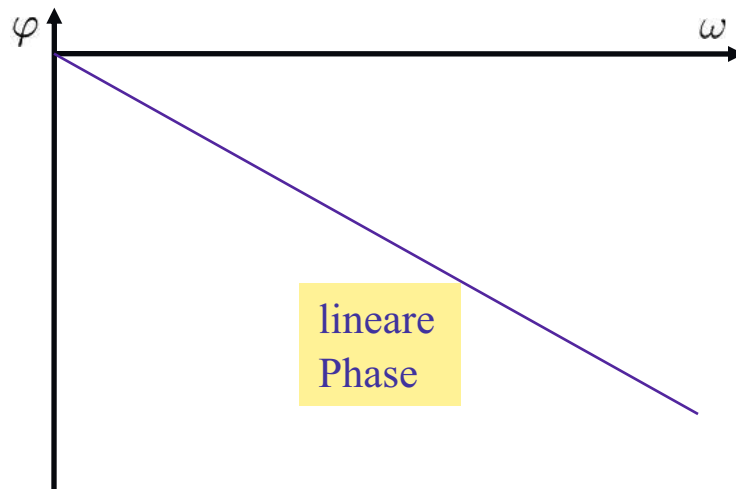
Die Totzeit T_t entspricht hier auch der als $\tau_g = -\frac{d\varphi}{d\omega}$ definierten *Gruppenlaufzeit*!

4.1 Anforderungen an Filter

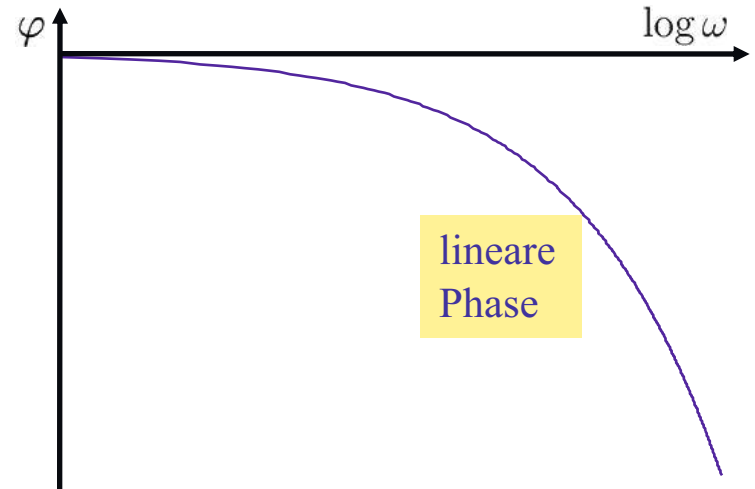
Eigenschaft: Lineare Phase

- Nur mit FIR-Filtern ist es möglich, eine exakt lineare Phase zu realisieren.
- Bei IIR-Filtern kann der Phasengang einer linearen Charakteristik angenähert werden.
- Insbesondere in der Audiotechnik sind näherungsweise konstante Gruppenlaufzeiten, d.h. näherungsweise lineare Phasen, von hoher Bedeutung.

Lineare Frequenzachse



Logarithmische Frequenzachse



4.1 Anforderungen an Filter

Eigenschaft: Null-Phase

Ein besonders einfacher Spezialfall eines Filters mit linearer Phase ist ein Filter mit Null-Phase, d.h. Phasengang = 0. Ein solcher Filter weist keinerlei Phasenverzerrung auf und hat eine Gruppenlaufzeit = 0. Dies ist bei Übertragungsfunktionen der Fall, die rein reell und nichtnegativ sind. Eine solche Übertragungsfunktion $F(z)$ erhält man aus einer beliebigen Übertragungsfunktion (mit beliebiger Phase) $G(z)$, wie folgt:

$$F(z) = G(z)G(z^{-1})$$

Damit ergibt sich folgender, rein reeller Frequenzgang:

$$F(e^{i\omega T_0}) = G(e^{i\omega T_0})G(e^{-i\omega T_0}) = |G(e^{i\omega T_0})|^2$$

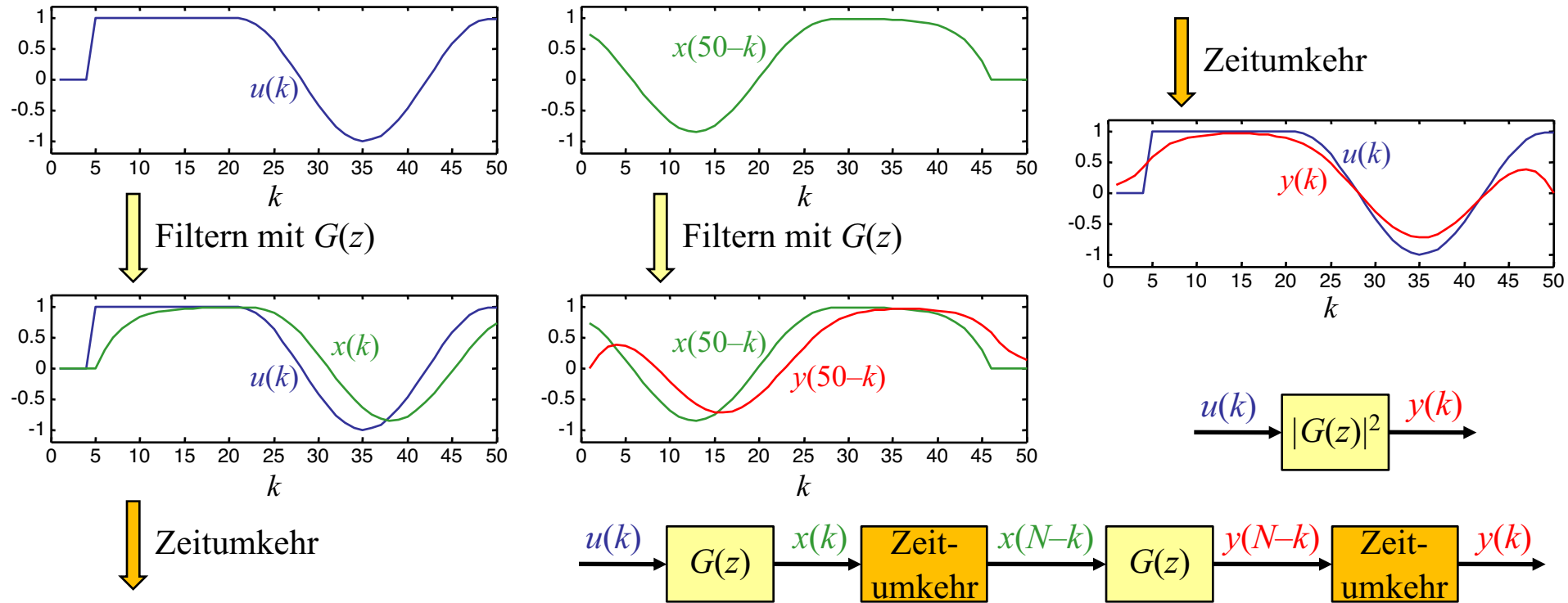
Dies bedeutet: $F(z)$ muss für jede Nullstelle bei z_n eine gespiegelte Nullstelle bei $z_n^{-1} = 1/z_n$ aufweisen und für jeden Pol z_p einen gespiegelten Pol bei $z_p^{-1} = 1/z_p$. Liegt z_n bzw. z_p im Einheitskreis (ist stabil), dann liegt $1/z_p$ bzw. $1/z_p$ automatisch außerhalb des Einheitskreises (ist instabil). D.h. Null-Phasen-Filter haben zwangsläufig folgende Eigenschaften:

- FIR: nicht phasenminimal und akausal.
- IIR: instabil und akausal.

4.1 Anforderungen an Filter

Implementierung von Null-Phase-Filtern

Wegen ihrer Akausalität können Null-Phase-Filter nur offline (oder mit Pufferung) implementiert werden. Eine einfache Möglichkeit besteht darin, die Messdaten zuerst vorwärts (also normal) mit $G(z)$ zu filtern und anschließend rückwärts (also unter Zeitumkehr) nochmals mit $G(z)$ zu filtern. Die Phasenverschiebung der ersten Filterung wird durch die zweite Rückwärts-Filterung exakt kompensiert.



4.2 FIR- und IIR-Filter

Äquivalente Beschreibungen eines zeitdiskreten, linearen, dynamischen Systems:

Differenzgleichung der Ordnung n

$$y(k) = \sum_{i=0}^m b_i u(k-i) - \sum_{i=1}^n a_i y(k-i)$$

→ Direkt als Filter realisierbar ($m \leq n$).

Meist wählt man $m = n$. Ist $m < n$ kann man dennoch $m = n$ wählen mit $b_i = 0$ für $i > m$.

Eigenschaften

- Ordnung n ist klein: z.B. $n = 2, 3, 4, \dots$
- Vorwärtszweig (*feedforward*): $b_i u(k-i)$
- Rückwärtszweig (*feedback*): $a_i y(k-i)$
- Unendliche Impulsantwort (IIR)
(*infinite impulse response*)

Gewichtsfolge

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i u(k-i)$$

→ Nicht direkt als Filter realisierbar, da unendlich viele Terme!

Approximation durch $m+1$ Terme:

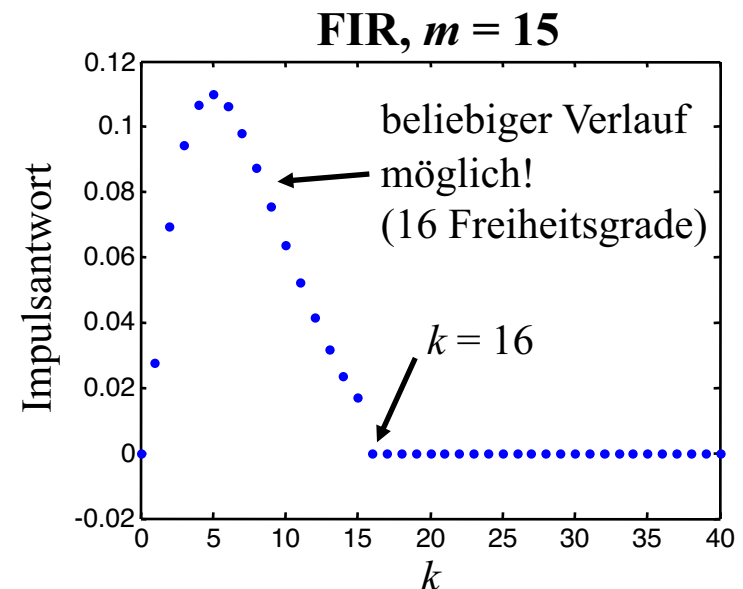
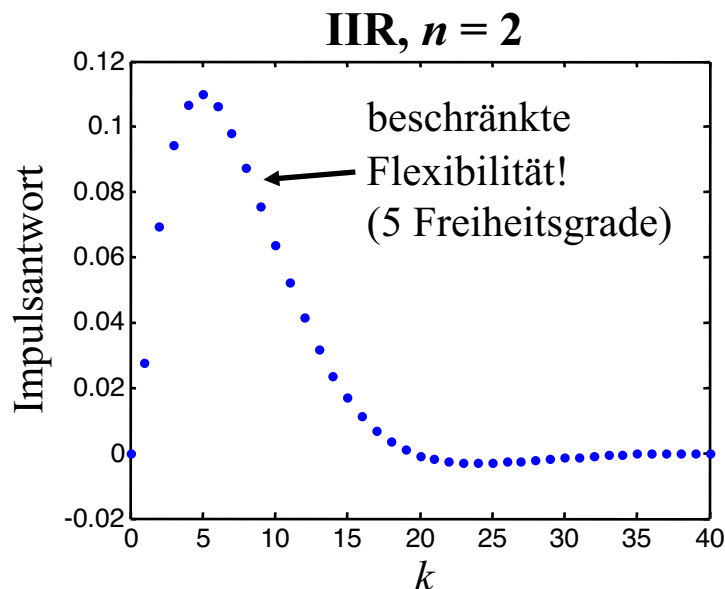
$$y(k) = \sum_{i=0}^m b_i u(k-i)$$

- Ordnung m ist groß: $m = 10, 20, 30, \dots$
- Vorwärtszweig (*feedforward*): $b_i u(k-i)$
- Kein Rückwärtszweig / Rückkopplung
- Endliche Impulsantwort (FIR)
(*finite impulse response*)

4.2 FIR- und IIR-Filter

Unterschiede in der Ordnung

- IIR-Filter haben deutlich weniger Parameter (a_i & b_i) als FIR-Filter (nur b_i).
- IIR-Filter benötigen weniger Speicherelemente für vergangene Daten.
- IIR-Impulsantwort klingt asymptotisch exponentiell gegen Null ab, FIR-Impulsantwort ist gleich Null ab Zeitpunkt $k > m$.
- IIR-Filter können instabil werden, FIR-Filter sind inhärent stabil (keine Rückkopplung).
- IIR-Filter haben ein Pendant im Analogen, FIR-Filter gibt es ausschließlich im Digitalen.



4.2 FIR- und IIR-Filter

Übertragungsfunktionen

IIR-Filter

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

$$G(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_m z^{n-m}}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

- m Nullstellen an beliebiger Stelle
- n Pole an beliebiger Stelle
- $b_0 = 0$ für nicht sprungfähige Systeme
- Komplexer Zusammenhang zwischen Parametern und Impulsantwort
- Zur Adaption schlechter geeignet wegen
 - Rückkopplungsstruktur
 - Stabilitätsproblemen

FIR-Filter

$$G(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}$$

$$G(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^m}$$

- m Nullstellen an beliebiger Stelle
- m Pole bei 0
- $b_0 = 0$ für nicht sprungfähige Systeme
- $b_i = g_i$ sind die ersten $m+1$ Glieder der Impulsfolge, alle weiteren sind gleich Null
- Zur Adaption besser geeignet wegen
 - Vorwärtsstruktur
 - inhärenter Stabilität

4.2 FIR- und IIR-Filter

Beispiel:

Ein System mit der Gewichtsfunktion (= Impulsantwort) $g(k) = a^k$ kann exakt durch einen **IIR-Filter 1. Ordnung** realisiert werden:

$$\begin{aligned} G_{\text{IIR}}(z) &= 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k \end{aligned}$$

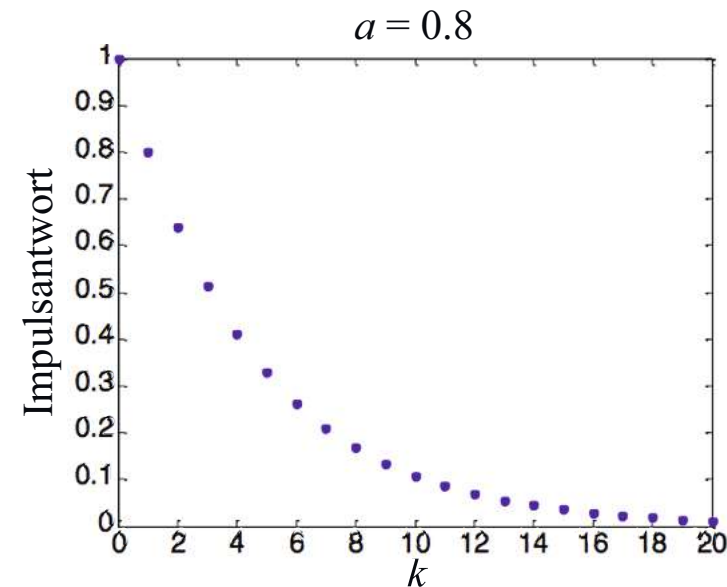
Diese unendliche geometrische Summe kann exakt umgeschrieben werden als:

$$G_{\text{IIR}}(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

Die Verstärkung dieses IIR-Filters beträgt:

$$K_{\text{IIR}} = G_{\text{IIR}}(z = 1) = \frac{1}{1 - a}$$

Der grenzstabile Fall (integrales Verhalten = I-Glied) wird für $a = 1$ erreicht.



4.2 FIR- und IIR-Filter

Ein FIR-Filter kann eine solche unendliche Impulsantwort nur näherungsweise darstellen, indem die ersten $m+1$ Summanden übernommen werden. Ein **FIR-Filter m . Ordnung** zur *Approximation* dieser Impulsantwort lautet somit:

$$G_{\text{FIR}}(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{m-1} z^{-(m-1)} + b_m z^{-m} = \sum_{k=0}^m b_k z^{-k}$$

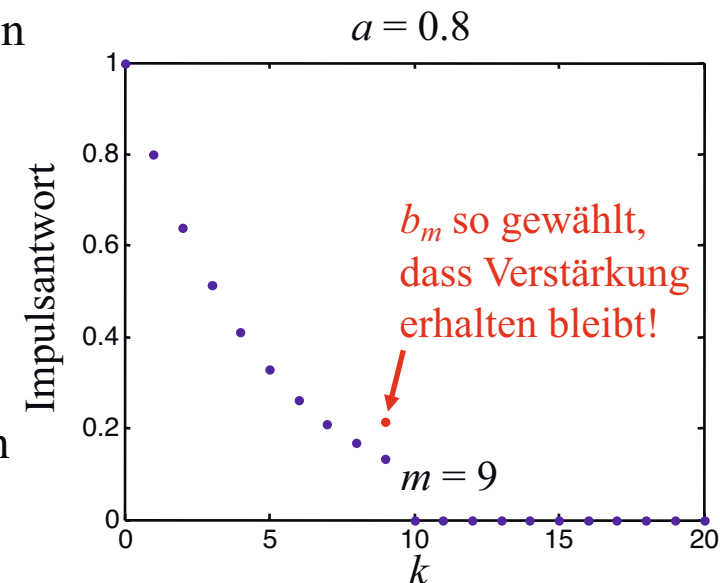
Eine natürliche Wahl der Filter-Parameter wäre:

$$b_k = g(k) = a^k \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, m$$

Dies würde aber zu einer falschen (zu kleinen) Verstärkung führen, da alle Summanden für $k > m$ einfach weggelassen werden. Alternativ könnte man den letzten Parameter so anpassen, dass die statische Verstärkung beim FIR- und IIR-Filter identisch sind, d.h. für $\omega \rightarrow 0 / z \rightarrow 1$:

$$b_m = \frac{1}{1-a} - b_0 - b_1 - \dots - b_{m-1}$$

Dies ist für Tiefpass-Filter sinnvoll. Bei Hochpass-Filtern würde man identische Verstärkung für $\omega \rightarrow \infty / z \rightarrow \infty$ fordern; ansonsten für die Mitte des Durchlassbereichs.



4.2 FIR- und IIR-Filter

Eigenschaften von FIR-Filtern

- stabil,
- können lineare bzw. verallgemeinerte lineare Phase aufweisen,
- sehr flexibel, da viele Freiheitsgrade (Parameter) → Frequenzgang lässt sich gut formen,
- nur Vorwärtszweige im Blockschaltbild → einfach zu implementieren,
- einfach zu adaptieren.

Eigenschaften von IIR-Filtern

- können instabil werden,
- nicht linear bzw. nicht verallgemeinert linear in der Phase,
- mit wenigen Parameters lassen sich starke Effekte erzielen,
- hohe Flankensteilheit bei niedrigen Filter-Ordnungen möglich,
- Rückkopplungen im Blockschaltbild → aufwändiger zu implementieren,
- kompliziert zu adaptieren (Stabilitäts- und Linearitätsprobleme).

4.3 Entwurf von FIR-Filtern

Allgemeine Vorbemerkungen zum Entwurf von FIR-Filter

Der Entwurf digitaler IIR-Filter basiert meist auf ausgereiften und bewährten Methoden für den Entwurf analoger IIR-Filter. Da FIR-Filter nur im Zeitdiskreten existieren, kann kein zeitkontinuierliches Gegenstück als Basis herangezogen werden. Es müssen neuartige Entwurfsverfahren entwickelt werden. Die drei Standardverfahren für den FIR-Filter-Entwurf sind:

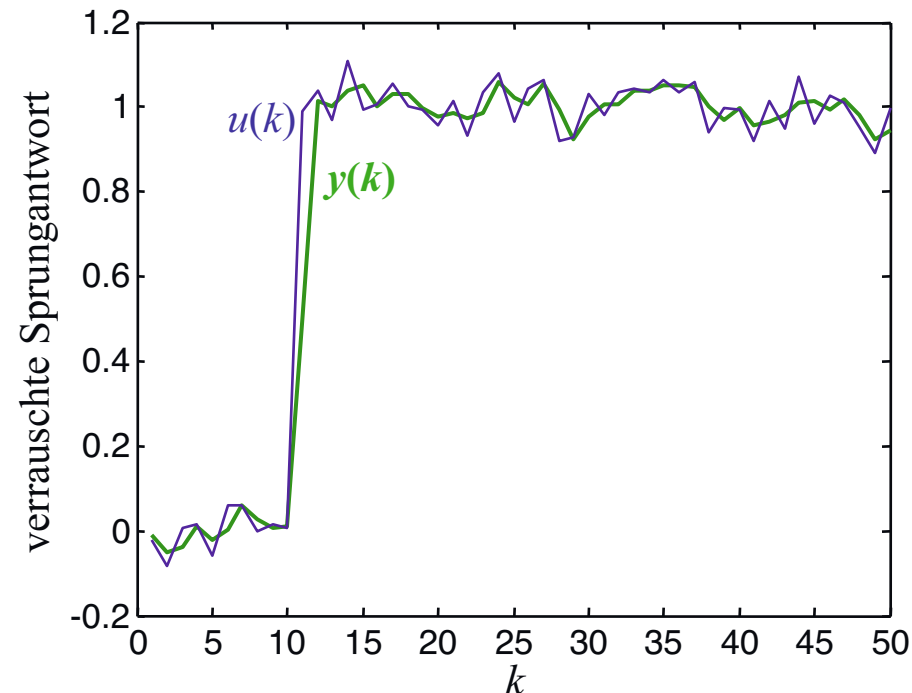
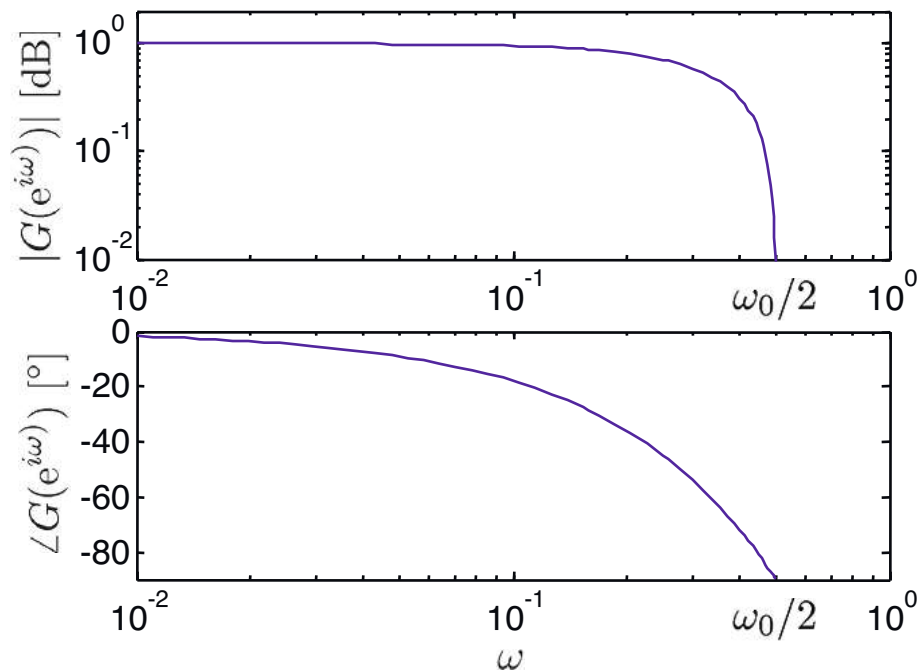
- *Fenster-Methode*: Eine einfache und von Hand schnell berechenbare Methode. Es wird ein gewünschter Amplitudengang vorgegeben und dann mittels inverser Fourier-Transformation die zugehörige Impulsantwort des Filters ausgerechnet. Da die Impulsantwort i.A. unendlich lang ist, muss sie nach der Filterordnung m abgeschnitten werden, wodurch Approximationsfehler entstehen. Daher ist diese Methode nicht sehr genau.
- *Frequenzabtastungsmethode*: Diese Methode ist sehr universell und auch für rekursive Filterimplementierungen geeignet. Der gewünschte Frequenzgang wird abgetastet und mittels inverser DFT in eine zugehörige Impulsantwort des Filters transformiert.
- *Optimalfilter-Methode*: Mit Hilfe von Software-Tools ist dies das beste und flexibelste Entwurfsverfahren. Es wird ein *Minmax-Optimierungsproblem* mittels *Tschebyscheff*-Approximation gelöst, welches die maximale Abweichung des Filters vom gewünschten Amplitudengang minimiert. Dazu wird der sog. *Parks-McClellan-Algorithmus* verwendet.

4.3 Entwurf von FIR-Filtern

Beispiel: Ein einfacher FIR-Filter 1. Ordnung

Bei FIR-Filtern berechnet sich der Filterausgang als gewichteter Mittelwert verzögerter Eingangswerte (*moving average, MA*). Beim einfachsten Tiefpass-Filter wird der Mittelwert des aktuellen und des um einen Abtastschritt verzögerten Eingangswertes verwendet:

$$y(k) = \frac{u(k) + u(k-1)}{2} = 0.5u(k) + 0.5u(k-1)$$



4.3 Entwurf von FIR-Filtern

Bedingungen für FIR-Filter mit linearer Phase

FIR-Filter müssen bestimmte Bedingungen erfüllen, damit sie eine lineare oder affine Phase aufweisen:

- Lineare Phase, d.h. $\varphi(\omega) = \alpha\omega$: symmetrische Impulsantwort (Gewichtsfunktion).
- Verallgemeinerte lineare (affine) Phase, d.h., $\varphi(\omega) = \alpha\omega + \beta$: punktsymmetrische Impulsantwort (Gewichtsfunktion).

Vorüberlegung:

Addition zweier konjugiert komplexer Zahlen:

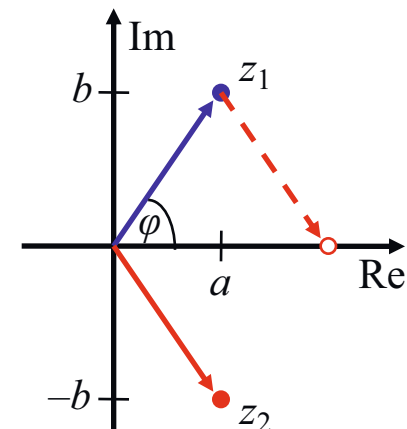
$$z_1 + z_2 = a + ib + (a - ib) = 2a \rightarrow \text{rein reell!}$$

Dasselbe nochmal mit Zahlen geschrieben in Betrag und Phase:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= ce^{i\varphi} + ce^{-i\varphi} = c(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \\ &= c(\cos\varphi + i\sin\varphi + \cos\varphi - i\sin\varphi) = 2c\cos\varphi \rightarrow \text{rein reell!} \end{aligned}$$

→ **Die Summe zweier konjugiert komplexer Zahlen ist rein reell!**

$$\begin{aligned} z_1 &= a + ib = ce^{i\varphi} \\ c &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{b}{a} \end{aligned}$$



4.3 Entwurf von FIR-Filtern

Beispiel: Symmetrisches FIR-Filter der Länge $L = 9$ (Ordnung $m = 8$)

Übertragungsfunktion des Filters:

$$G(z) = g(0) + g(1)z^{-1} + g(2)z^{-2} + g(3)z^{-3} + g(4)z^{-4} + g(5)z^{-5} + g(6)z^{-6} + g(7)z^{-7} + g(8)z^{-8}$$

Wegen Symmetrie gilt:

$$g(0) = g(8), \quad g(1) = g(7), \quad g(2) = g(6), \quad g(3) = g(5)$$

$$G(z) = g(0) [1 + z^{-8}] + g(1) [z^{-1} + z^{-7}] + g(2) [z^{-2} + z^{-6}] + g(3) [z^{-3} + z^{-5}] + g(4)z^{-4}$$

Ausklammern von z^{-4} liefert:

$$G(z) = z^{-4} \{g(0) [z^4 + z^{-4}] + g(1) [z^3 + z^{-3}] + g(2) [z^2 + z^{-2}] + g(3) [z^1 + z^{-1}] + g(4)\}$$

Den Frequenzgang erhält man für $z = e^{i\omega T_0}$. Ausdrücke der folgenden Form

$$z^n + z^{-n} \Big|_{z=e^{i\omega T_0}} = e^{in\omega T_0} + e^{-in\omega T_0}$$

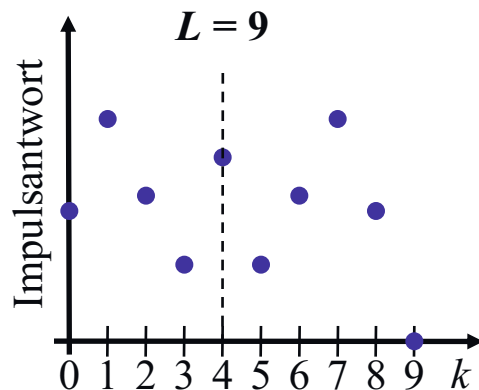
haben daher einen rein reellen Frequenzgang und damit eine Phase = 0. Somit ergibt sich eine lineare Gesamtphase des Filters:

$$z^{-4} \Big|_{z=e^{i\omega T_0}} = e^{-i4\omega T_0} \rightarrow \varphi(\omega) = -4T_0 \omega = \alpha \omega \quad (\text{evtl. } +\pi \text{ bei „-“-Vorzeichen von } \{\dots\})$$

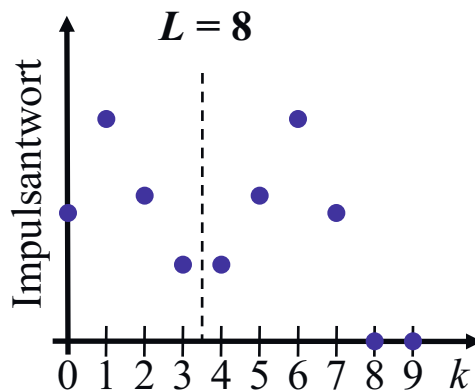
4.3 Entwurf von FIR-Filtern

Die 4 Typen von FIR-Filtern mit linearer Phase

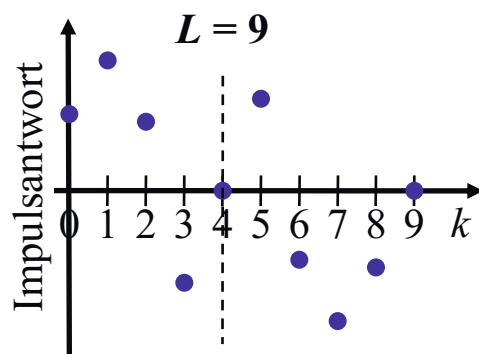
Typ 1: Symmetrie
ungerade Länge



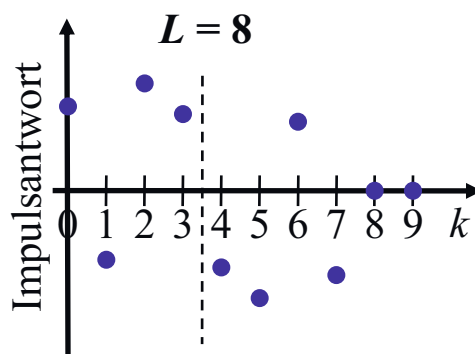
Typ 2: Symmetrie
gerade Länge



Typ 3: Punktsymmetrie
ungerade Länge



Typ 4: Punktsymmetrie
gerade Länge



Symmetrie:

- $g(k) = g(L - 1 - k)$
- Phase ist linear, d.h.
 $\varphi(\omega) = \alpha \omega$

Punktsymmetrie:

- $g(k) = -g(L - 1 - k)$
- Phase ist verallgemeinert linear (affin), d.h.
 $\varphi(\omega) = \alpha \omega + \beta$
- $\beta = \pi/2$

4.3 Entwurf von FIR-Filtern

Fenster-Methode

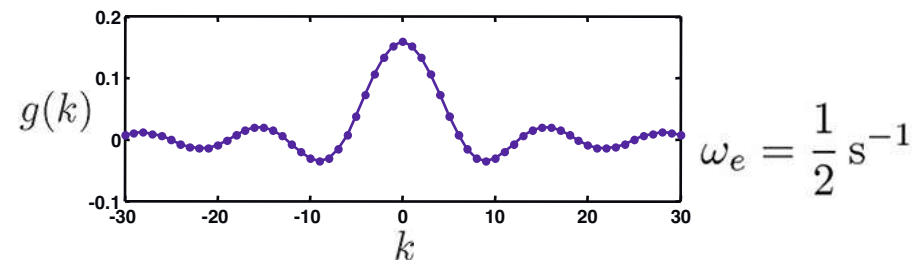
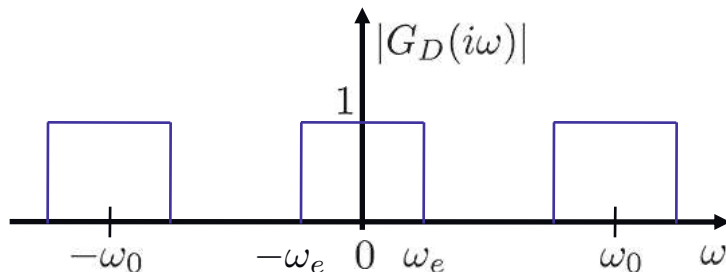
Die Idee der Fenster-Methode ist es, einen gewünschten Verlauf des Amplitudengangs $G_D(i\omega)$ ($D = \text{desired}$) für das Filter vorzugeben und über die inverse Fourier-Transformation, die Impulsantwort $g(k)$ des entsprechenden Filters zu berechnen:

$$g(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} G_D(i\omega) e^{i\omega T_0 k} d\omega$$

Die Impulsantwort ist akausal und unendlich lang. Wir müssen sie verschieben und nach einer max. Filterordnung m abschneiden, um einen realisierbaren FIR-Filter zu erzeugen.

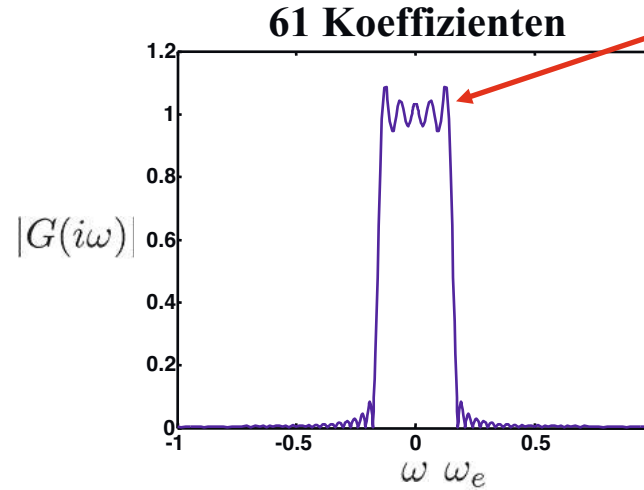
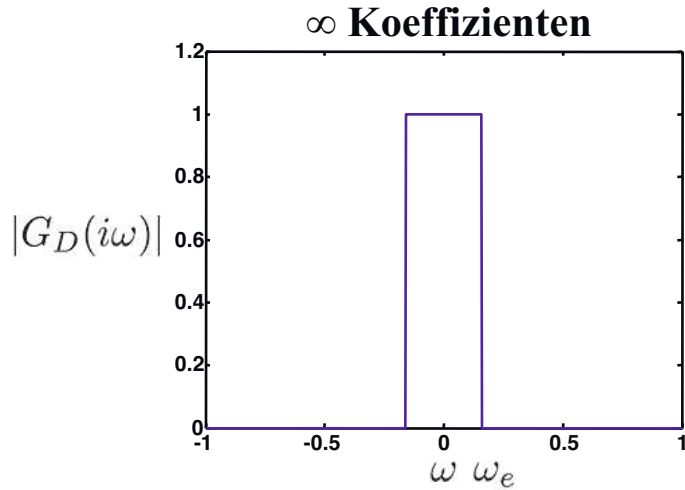
Beispiel: Tiefpass mit Eckfrequenz ω_e (Abtastzeit $T_0 = 1\text{ s}$)

$$g(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} G_D(i\omega) e^{i\omega T_0 k} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_e}^{\omega_e} 1 \cdot e^{i\omega T_0 k} d\omega = \frac{\omega_e \sin \omega_e k}{\pi \omega_e k} = \frac{\sin \omega_e k}{\pi k}$$

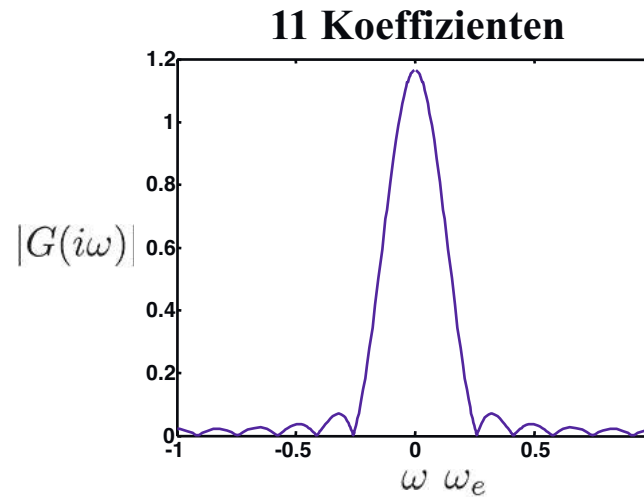
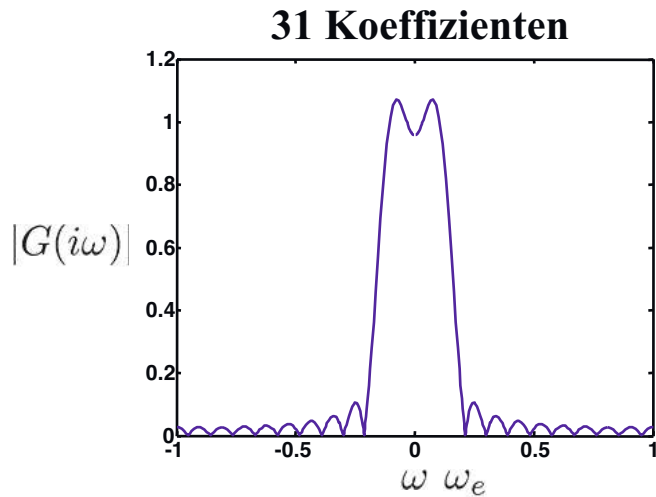


4.3 Entwurf von FIR-Filtern

Approximationsfehler durch Abschneiden der Impulsantwort



Unerwünschtes Verhalten!
Gibbssches Phänomen.



4.3 Entwurf von FIR-Filtern

Konsequenzen aus ungewünschtem Amplitudengang des FIR-Filters

Die Oszillationen (*ripple*) im Amplitudengang des FIR-Filters lassen sich leicht erklären. Das Abschneiden der Impulsantwort $g(k)$ ist identisch mit einer zeitlichen Fensterung mit einem Rechteck-Fenster $w(k)$. Dies entspricht im Frequenzbereich der Faltung mit der Fourier-Transformierten des Rechteck-Fensters $W(i\omega)$, der sinc-Funktion.

$$g(k) \cdot w(k) \quad \circ \rightarrow \bullet \quad G(i\omega) * W(i\omega)$$

Dadurch kommen die Überschwinger zustande. Diese werden aber nicht kleiner wenn die Anzahl der Koeffizienten größer gewählt wird. Das ist das sog. *Gibbssche Phänomen* (siehe Mathematik, Fourier-Reihen).

Zur Verringerung dieses unerwünschten Effekts wird die Impulsantwort mit einem Fenster multipliziert, das weniger die hohen Frequenzen anregt als ein Rechteck. Statt abrupt abzuschneiden wird die Impulsantwort langsam gegen 0 gedrückt. Diese Fenster haben wir schon im Zusammenhang mit der DFT kennengelernt. Als am besten geeignet hat sich in Zusammenhang mit dem Entwurf von FIR-Filtern das sog. *Kaiser-Fenster* erwiesen.

4.3 Entwurf von FIR-Filtern

Gibbssches Phänomen

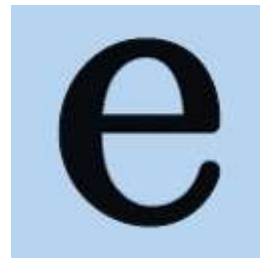
Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Gibbssches_Ph%C3%A4nomen

Als Gibbssches Phänomen oder „Ringing“ bezeichnet man in der Mathematik das typische Verhalten von Fourierreihen in der Umgebung von Sprungstellen. Entwickelt man eine Fourierreihe aus einer unstetigen Funktion, so ergeben sich an den Unstetigkeitsstellen typische Über- und Unterschwinger, die sich auch dann nicht verringern, wenn man versucht, die Funktion noch besser zu approximieren. Dies liegt daran, dass die Reihe an der Unstetigkeitsstelle nicht mehr gleichmäßig, sondern nur punktweise konvergiert. Die Höhe des Überschingers in einer Richtung lässt sich bestimmen zu:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{1}{2} = 0,089490 \dots$$

womit sich ein prozentueller Fehler von 17,898 %, gerundet 18 %, der Sprunghöhe ergibt. Der Effekt wurde nach seinem Entdecker, dem amerikanischen Physiker Josiah Willard Gibbs, benannt.

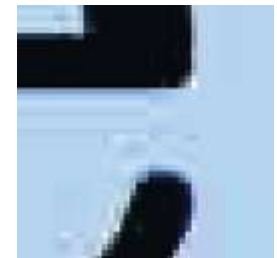
In der Praxis bedeutet das etwa für die Bildkompression, dass sich ein Bild, das harte Farbübergänge aufweist (wie etwa bei Text, Strichzeichnungen oder einfachen Diagrammen), nur sehr schlecht mit verlustbehafteten Verfahren wie JPEG komprimieren lässt. Um ein derartiges Bild ohne sichtbare Ringing-Artefakte zu komprimieren, wäre eine sehr hohe Qualitätsstufe notwendig, was zu einer wesentlich größeren Datei als bei verlustfreier Komprimierung führen würde. Es wird daher empfohlen, für derartige Bilder verlustfreie Grafikformate wie PNG zu verwenden. Die Ringing-Artefakte lassen sich durch bestimmte Grafikfilter, etwa den Lanczos-Filter, teilweise reduzieren. Diese Methode, manchmal „Deringing“ genannt, wird z. B. bei einigen neueren Video-Decodern eingesetzt.



*Ein hochfrequentes Bild
Dateigröße mit PNG: 1007 Byte*



*Das gleiche Bild JPEG-komprimiert; es
entstehen Ringing-Artefakte
Dateigröße: 4273 Byte*



*Vergrößerung des JPEG-
komprimierten Bildes*

4.3 Entwurf von FIR-Filtern

Optimalfilter-Methode

Mit den meisten Entwurfsmethoden wird direkt oder implizit ein mittlerer quadratischer Fehlerbetrag $|E(i\omega)|^2$ zwischen der gewünschten Filtercharakteristik $H_D(i\omega)$ und dem tatsächlichen Amplitudengang $H(i\omega)$ minimiert:

$$E(i\omega) = H_D(i\omega) - H(i\omega) \quad \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} |E(i\omega)|^2 d\omega \rightarrow \min$$

Beim Optimalfilteransatz nach Parks und McClellan geht man jedoch von der Minimierung des maximalen Fehlers aus, da sich herausgestellt hat, dass dieses Kriterium wesentlich praxistauglicher ist:

$$\max\{|E(i\omega)|\} \rightarrow \min$$

Die Minimierung des maximalen Fehlerbetrag führt nämlich dazu, dass sich die Über- und Unterschwinger (Ripple) im Frequenzbereich *gleichmäßig* verteilen, weswegen die so entworfen Filter oft auch als *Equiripple*-Filter bezeichnet werden. Weil die absoluten Fehler im Sperrbereich des Filters natürlich Größenordnungen kleiner sind als im Durchlassbereich, muss allerdings der Fehler noch frequenzabhängig gewichtet werden, d.h.

$$\max\{|W(i\omega)E(i\omega)|\} \rightarrow \min$$

4.3 Entwurf von FIR-Filtern

Um nach der Optimierung gleich große Ripple im Durchlass- und Sperrbereich zu erreichen, muss die Frequenzgewichtung für einen Tiefpassfilter wie folgt gewählt werden:

$$W(i\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ \delta_1/\delta_2 & \text{für } \omega_s \leq \omega \leq \omega_0/2 \end{cases} \quad \text{oder} \quad W(i\omega) = \begin{cases} \delta_2/\delta_1 & \text{für } 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 1 & \text{für } \omega_s \leq \omega \leq \omega_0/2 \end{cases}$$

MATLAB stellt neben dem Parks/McClellan Minmax-Algorithmus auch Least-Squares-Optimierungstools zur Verfügung:



The default mode of operation of `firls` and `firpm` is to design type I or type II linear phase filters, depending on whether the order you desire is even or odd, respectively. A lowpass example with approximate amplitude 1 from 0 to 0.4 Hz, and approximate amplitude 0 from 0.5 to 1.0 Hz is

```
n = 20;           % Filter order
f = [0 0.4 0.5 1]; % Frequency band edges
a = [1 1 0 0];   % Desired amplitudes
b = firpm(n,f,a) % Parks-McClellan FIR Design
```

From 0.4 to 0.5 Hz, `firpm` performs no error minimization; this is a transition band or "don't care" region. A transition band minimizes the error more in the bands that you do care about, at the expense of a slower transition rate. In this way, these types of filters have an inherent trade-off similar to FIR design by windowing. To compare least squares to equiripple filter design, use `firls` to create a similar filter.

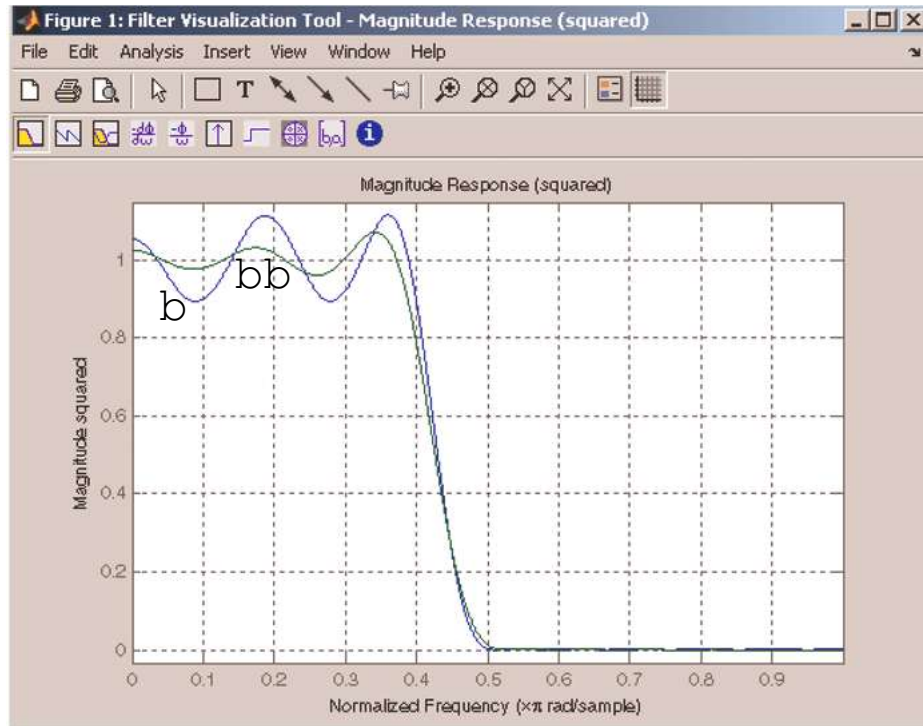
4.3 Entwurf von FIR-Filtern



Type `bb = fir1s(n,f,a)`;

and compare their frequency responses using FVTool: `fvtool(b,1,bb,1)`

Note that the y-axis shown in the figure below is in Magnitude Squared. You can set this by right-clicking on the axis label and selecting Magnitude Squared from the menu.



The filter designed with `firpm` exhibits equiripple behavior. Also note that the `fir1s` filter has a better response over most of the passband and stopband, but at the band edges ($f = 0.4$ and $f = 0.5$), the response is further away from the ideal than the `firpm` filter. This shows that the `firpm` filter's maximum error over the passband and stopband is smaller and, in fact, it is the smallest possible for this band edge configuration and filter length.

4.3 Entwurf von FIR-Filtern

Herausfiltern periodischer Signale bekannter Frequenz (Hochpass-Ansatz)

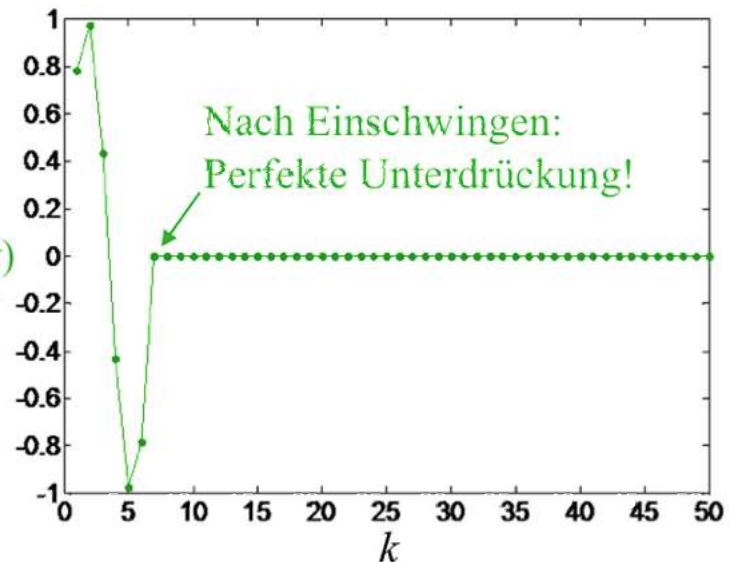
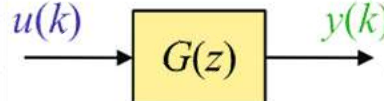
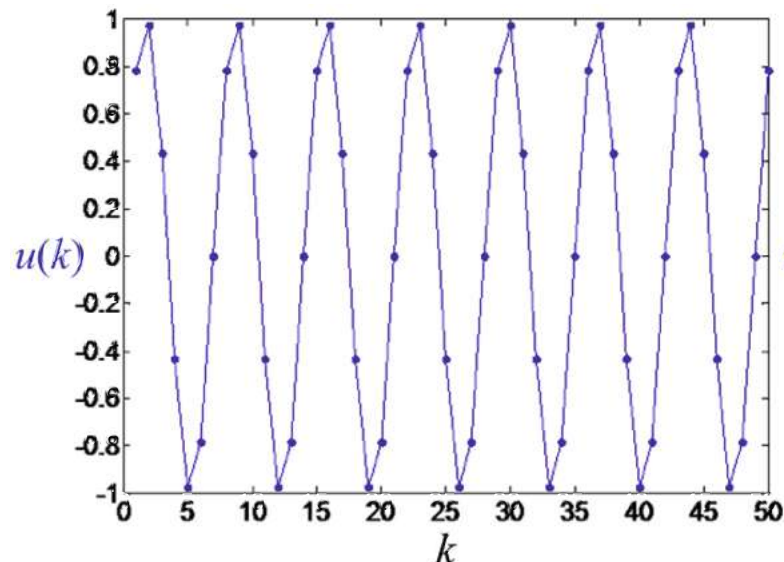
Mit einem FIR-Filter kann man ein *beliebiges* periodisches Signal bekannter Frequenz perfekt herausfiltern. Typische Anwendungen:

- Trägerfrequenz eines Funksignals
- Eingestreutes Netzbrummen (50 Hz und Vielfache als Oberschwingungen)

Der folgende FIR-Filter beseitigt alle Signale mit einer Periodenlänge $T_p = m \cdot T_0$ bzw. einer Frequenz $\omega_p = \omega_0/m$:

$$G(z) = 1 - z^{-m}$$

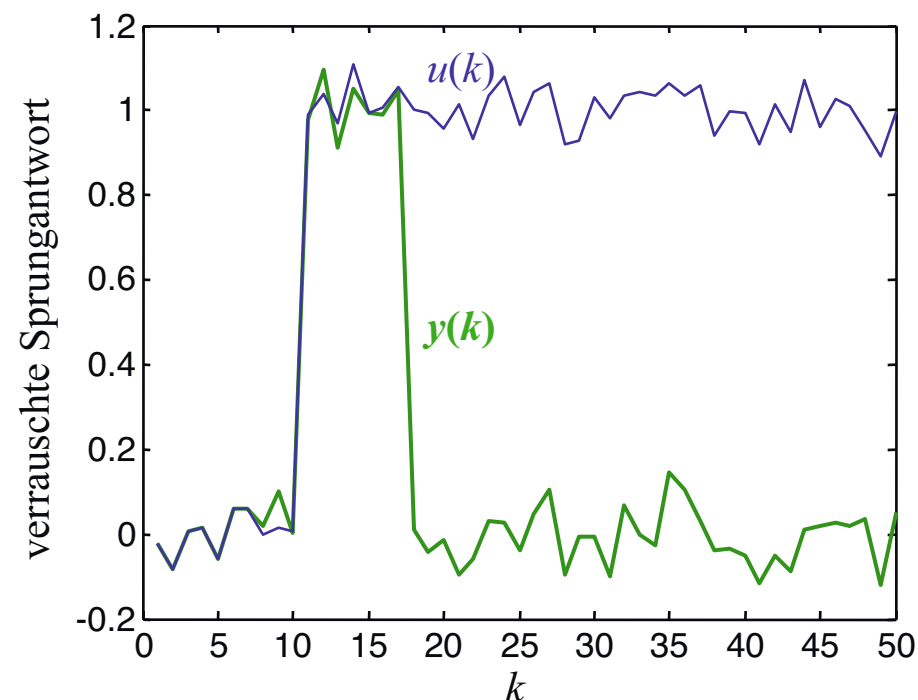
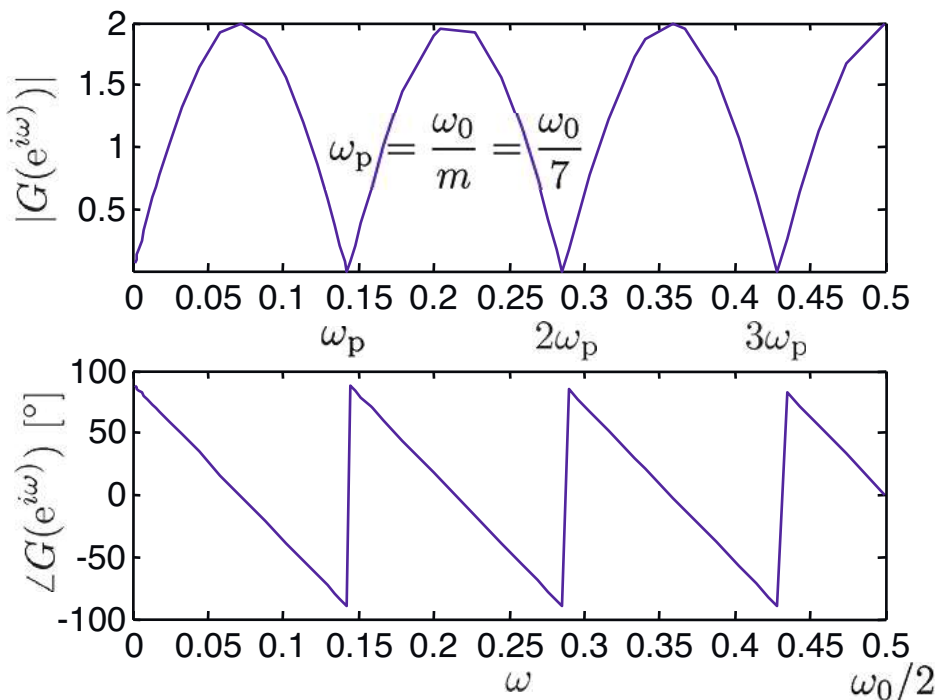
$m = 7$



4.3 Entwurf von FIR-Filtern

Die Besonderheiten eines solchen Filters sind:

- Unabhängigkeit von der Signalform (hängt nur von der Periodendauer ab).
- Filtert auch alle Vielfachen der Frequenz ω_p perfekt heraus.
- Perfekte Dämpfung mit $-\infty$ dB (unendliche Flankensteilheit!).
- Hochpass! Filtert auch niedrige Frequenzen (und Gleichwerte) heraus.

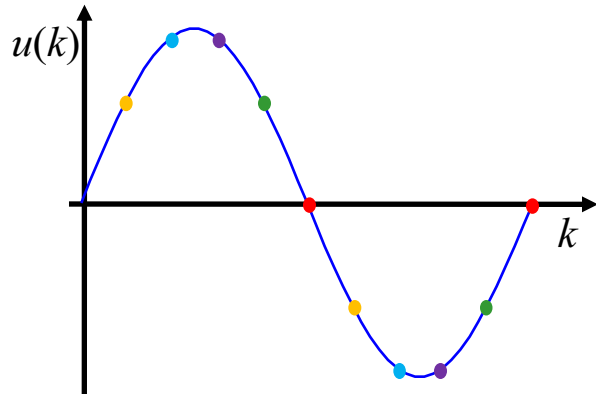


4.3 Entwurf von FIR-Filtern

Herausfiltern periodischer Signale bekannter Frequenz (Tiefpass-Ansatz)

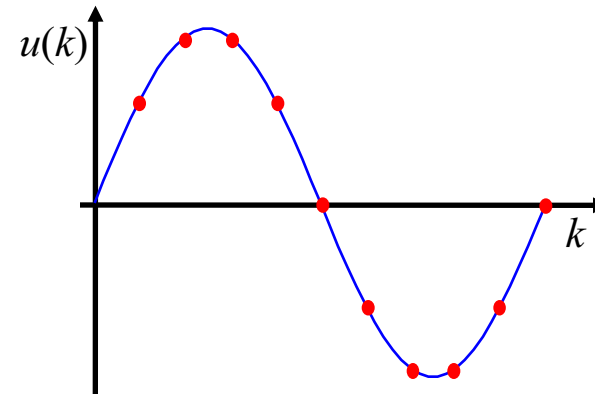
Ist statt des Hochpass-Charakters des zuvor vorgestellten Filters ein Tiefpass-Charakter gewünscht, bieten sich folgende zwei Möglichkeiten mit statischer Verstärkung = 1 an:

$$G_1(z) = \frac{1}{2} (1 + z^{-m/2})$$



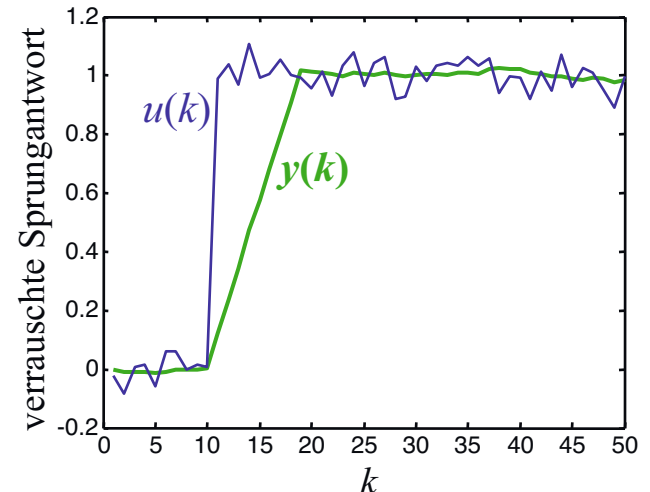
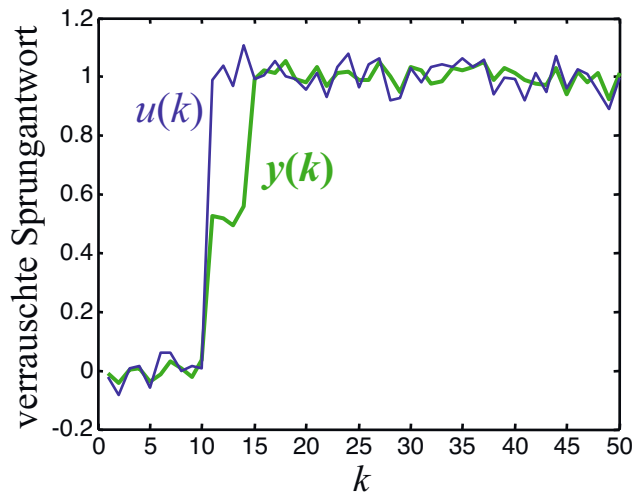
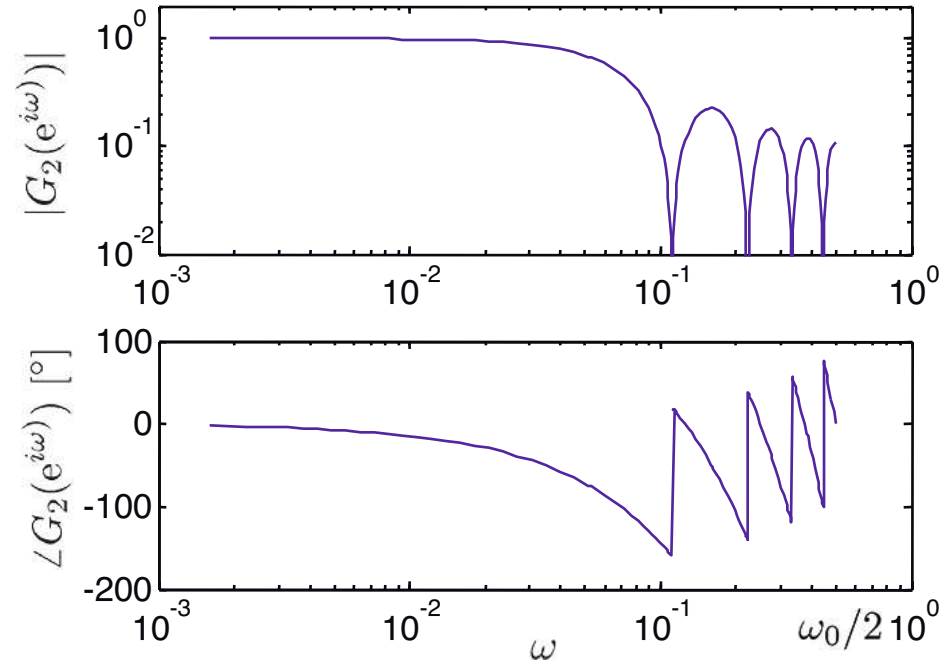
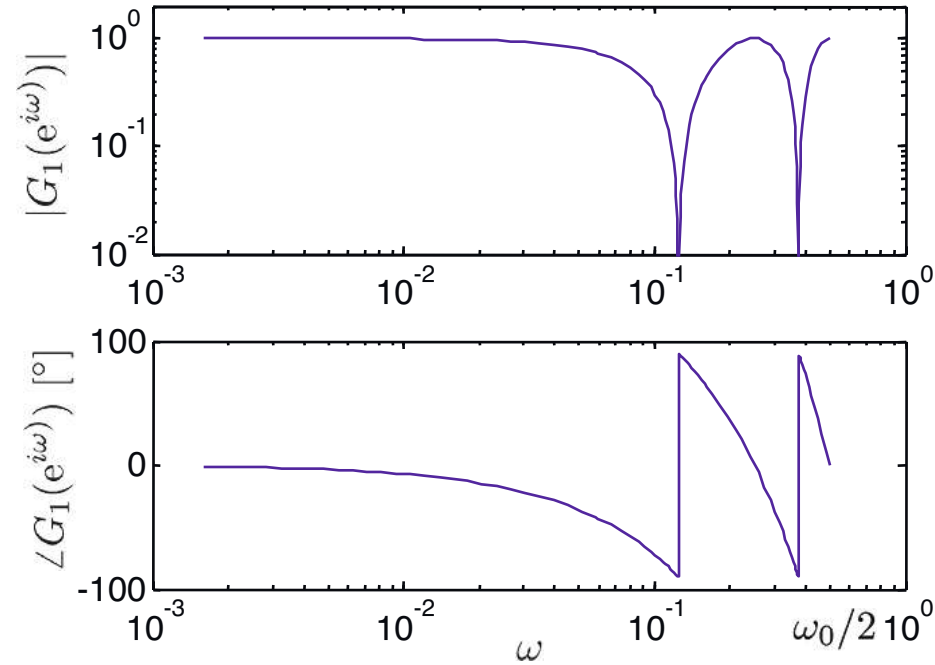
- Positive und negative Halbwelle müssen zueinander symmetrisch sein!
- m muss gerade sein!
- Geringe Verzerrung der anderen Frequenzen.
- Filtert nur alle Vielfache von $2\omega_p$ heraus.

$$G_2(z) = \frac{1}{m+1} (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-m})$$



- Positive und negative Halbwelle müssen sich zu null aufsummieren!
- Starker Mittelungseffekt (Tiefpasswirkung).
- Filtert alle Vielfache von ω_p heraus.

4.3 Entwurf von FIR-Filtern



4.3 Entwurf von FIR-Filtern

Kammfilter

Allgemein nennt man Filter mit folgender Übertragungsfunktion Kammfilter:

$$G(z) = 1 + az^{-n} = \frac{z^n + a}{z^n}$$

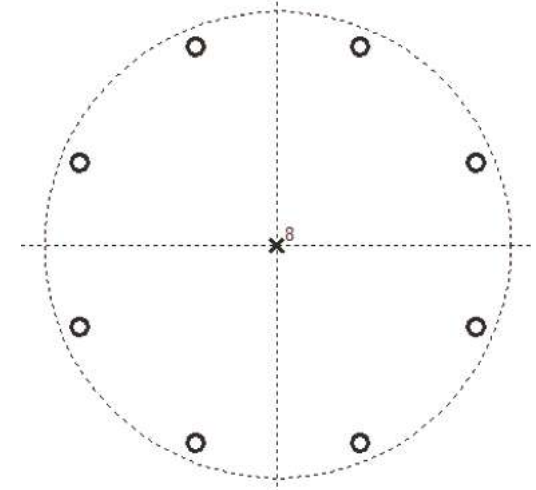
Für $n = m$ und $a = -1$ ergibt sich der Hochpass, für $a = +1$ und $n = m/2$ der Tiefpass der Folien zuvor.

Der Filter weist n Pole bei 0 auf und für $a = +1$ ergeben sich Nullstellen auf dem Einheitskreis. Damit kürzen sich ungedämpfte Oszillation exakt weg, da diese Pole auf dem Einheitskreis aufweisen. Das entspricht in der s -Ebene Polen/Nullstellen auf der imaginären Achse.

Für kleiner Werte von a liegen die Nullstellen entsprechend nach innen verschoben. Das Bild zeigt die Nullstellen für den Fall $n = 8$.

Kammfilter werden in der Audio- und Videotechnik häufig eingesetzt.

Aus <http://de.wikipedia.org/wiki/Kammfilter>



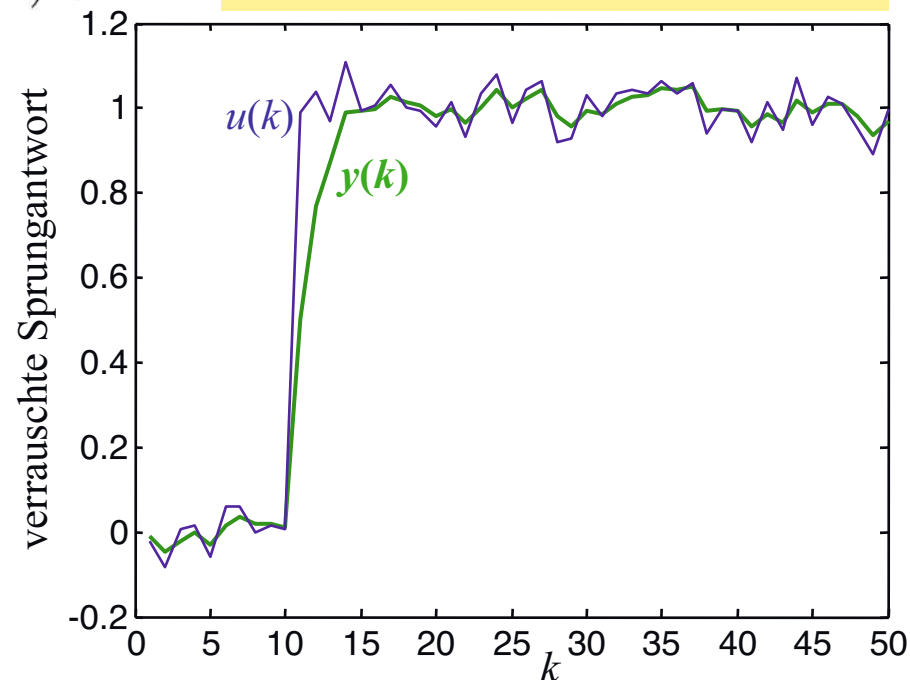
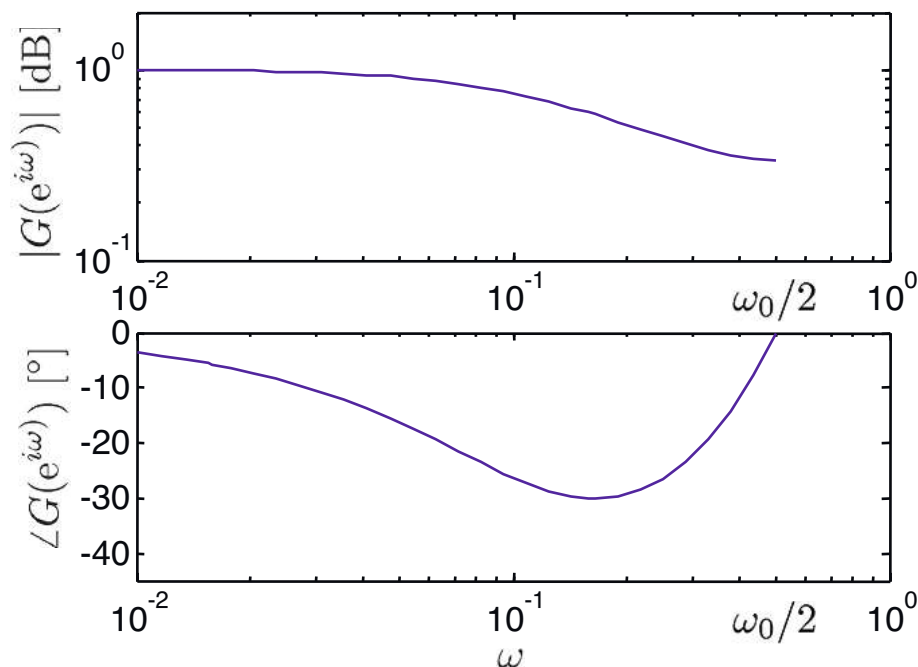
4.4 Entwurf von IIR-Filtern

Beispiel: Ein einfacher IIR-Filter 1. Ordnung

Bei IIR-Filtern berechnet sich der Filterausgang als gewichteter Mittelwert verzögerter Eingangswerte (*moving average, MA*) und verzögerter Ausgangswerte (*autoregressive, AR*)
→ *ARMA*. Das einfachste Tiefpass-Filter ist ein PT_1 -Glied, z.B.:

$$\begin{aligned}y(k) &= 0.5u(k) + 0.5y(k-1) \\ &= 0.5u(k) + 0.25u(k-1) + 0.25y(k-2) \\ &= 0.5u(k) + 0.25u(k-1) + 0.125u(k-2) + \dots\end{aligned}$$

Im Vergleich zum FIR-Filter werden hier unendlich viele vergangene Eingangswerte $u(k-i)$ verwendet!



4.4 Entwurf von IIR-Filtern

Transformation vom Analogen ins Digitale

Typischerweise werden IIR-Filter im Analogen entworfen und dann ins Digitale transformiert. Diese Transformation kann auf verschiedenen Arten erfolgen. Üblich sind:

- Impulsinvarianz-Methode (*impulse invariance method*): Forderung nach identischer Impulsantwort im Analogen und Digitalen
- Bilineare Transformation (auch Tustin-Formel genannt): Die s -Variable wird durch eine gebrochen rationale Funktion in z angenähert, so dass aus einer gebrochen rationalen Übertragungsfunktion im s -Bereich ebenfalls eine gebrochen rationale Übertragungsfunktion im z -Bereich entsteht (und umgekehrt).

Außerdem gibt es noch andere Methoden der Transformation, die aber eher in der digitalen Regelungstechnik als beim Filterentwurf eingesetzt werden:

- Identische Zeitverläufe mit Halteglied 0. oder 1. Ordnung
- Identische Pole und Nullstellen

Des Weiteren gibt es noch leistungsfähige aber aufwändige Optimierungsansätze zum IIR-Filterentwurf. Wir konzentrieren uns im Folgenden auf die wichtigste und gängigste Methode für den IIR-Filterentwurf: die **bilineare Transformation**.

4.4 Entwurf von IIR-Filtern

Bilineare Transformation (Tustin-Formel)

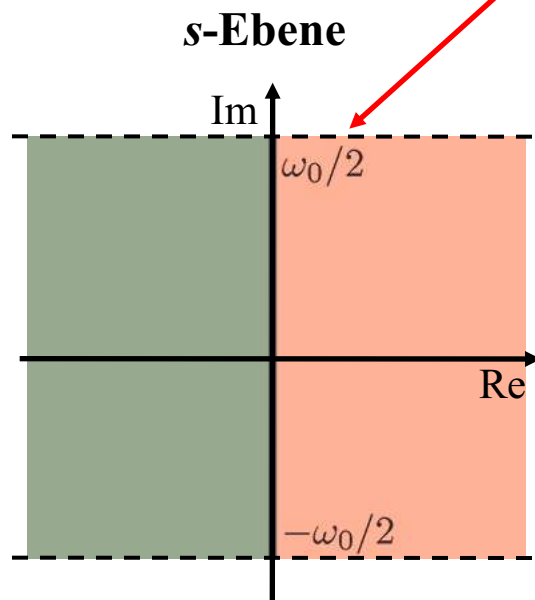
Die exakte Transformation ist nichtlinear und würde daher keine gebrochen rationale Übertragungsfunktion erzeugen.

$$z = e^{sT_0}$$

$$s = \frac{1}{T_0} \ln z$$

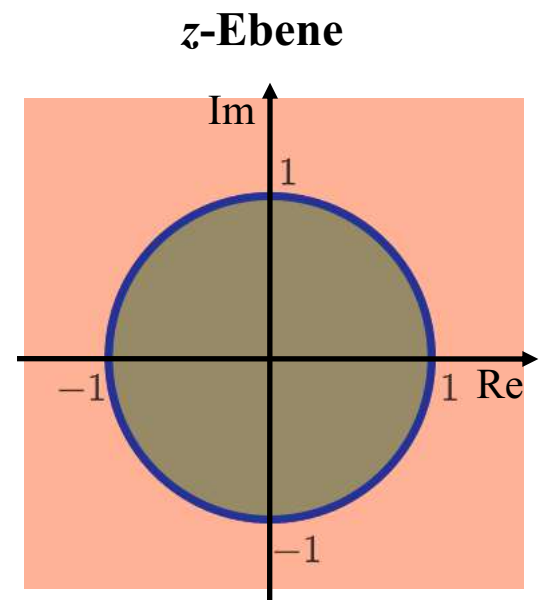
Mittels der bilinearer Transformation wird jede gebrochen rationale Übertragungsfunktion auf eine solche abgebildet. Die Stabilitätseigenschaften bleiben dabei erhalten.

max. mögliche Frequenz
bevor Aliasing auftritt!



$$s = \frac{2}{T_0} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$z = \frac{1 + \frac{T_0}{2}s}{1 - \frac{T_0}{2}s}$$



4.4 Entwurf von IIR-Filtern

Vergleich: Frequenzgang im Analogen und Digitalen

Ist eine Übertragungsfunktion $G_a(s)$ im s -Bereich gegeben, so kann sie mittels der bilinearen Transformation näherungsweise in den z -Bereich überführt werden:

$$G_a(s) = G_d \left(\frac{2}{T_0} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$

Den Frequenzgang erhält man im Analogen für $s = i\omega_a$ und im Digitalen, wenn man z auf dem Einheitskreis auswertet, also für $z = e^{i\omega_d T_0}$. Weil die bilineare Transformation nur eine Näherungsformel ist, unterscheidet sich die analoge Frequenz ω_a von der digitalen Frequenz ω_d .

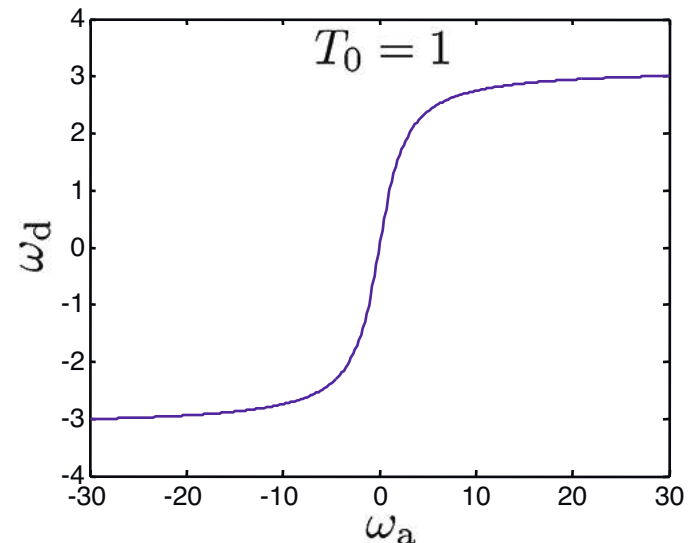
$$i\omega_a = \frac{2}{T_0} \frac{1 - e^{-i\omega_d T_0}}{1 + e^{-i\omega_d T_0}} = i \frac{2}{T_0} \tan \frac{\omega_d T_0}{2}$$

$$\omega_a = \frac{2}{T_0} \tan \frac{\omega_d T_0}{2}$$

$$\omega_d = \frac{2}{T_0} \arctan \frac{\omega_a T_0}{2}$$

Die maximal vorkommende digitale Frequenz ist:

$$\omega_{d,\max} = \frac{\pi}{T_0} = \pi f_0 = \frac{\omega_0}{2}$$



4.4 Entwurf von IIR-Filtern

Bilineare Transformation (Tustin-Formel) = Trapez-Regel zur Integration

Im Zeitdiskreten kann die zeitkontinuierliche Integration auf verschiedene Weisen approximiert werden. Genauer als die Bildung der Untersumme oder Obersumme (siehe nächste Folie) ist die Trapez-Regel:

$$y(k) = y(k-1) + T_0 \frac{u(k) + u(k-1)}{2}$$

Breite ← mittlere Höhe

Im z -Bereich ergibt sich damit:

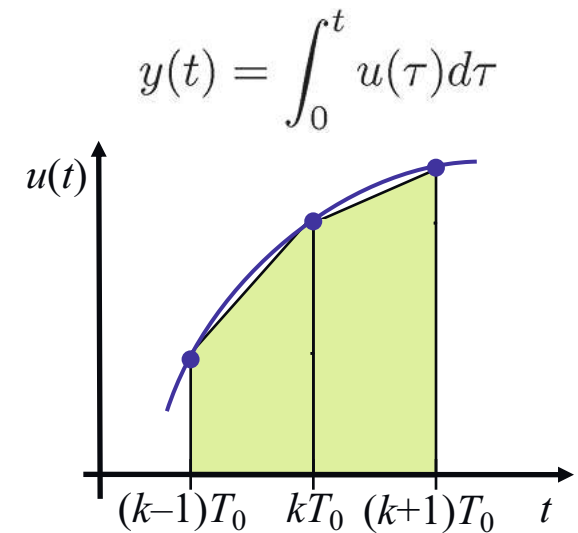
$$Y(z) = \frac{T_0}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} U(z)$$

Diese Formel soll im s -Bereich einer Integration entsprechen:

$$Y(s) = \frac{1}{s} U(s)$$

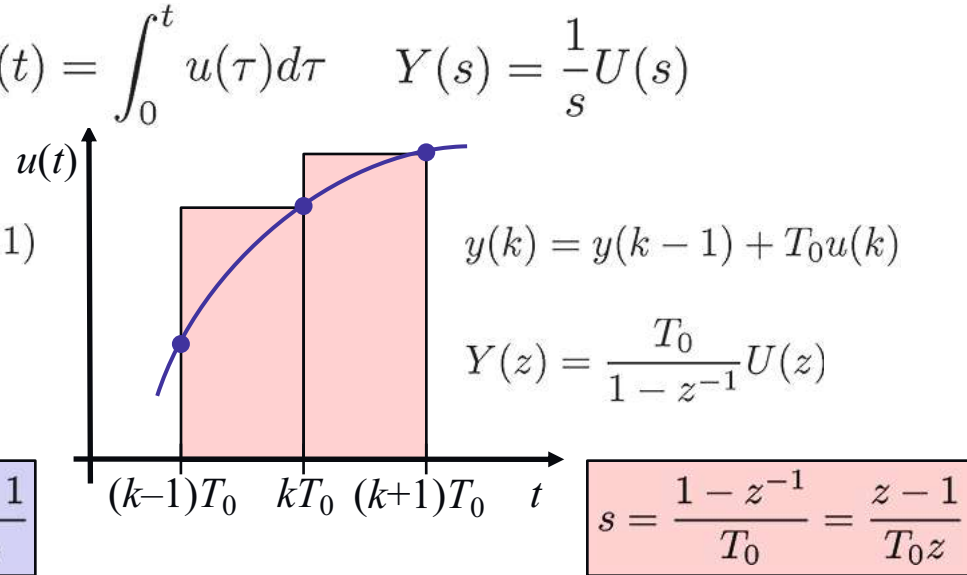
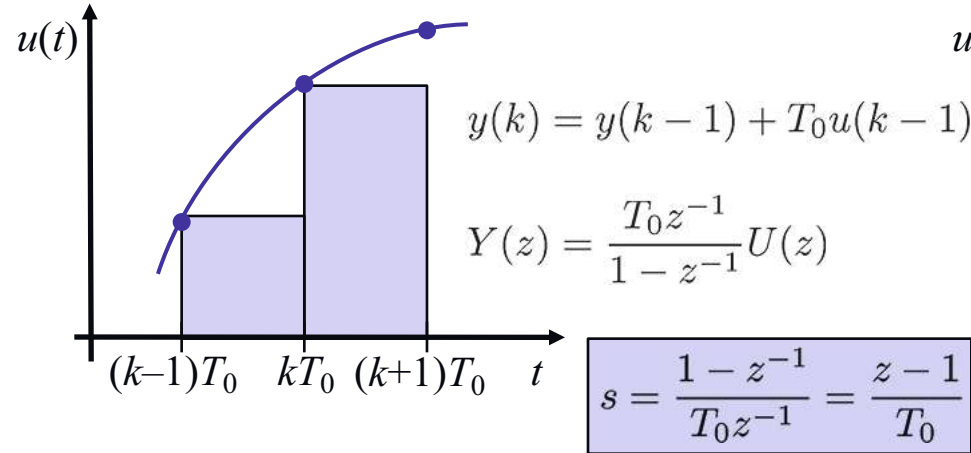
Damit erhält man genau die bilineare Transformation:

$$\frac{1}{s} = \frac{T_0}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \rightarrow s = \frac{2}{T_0} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

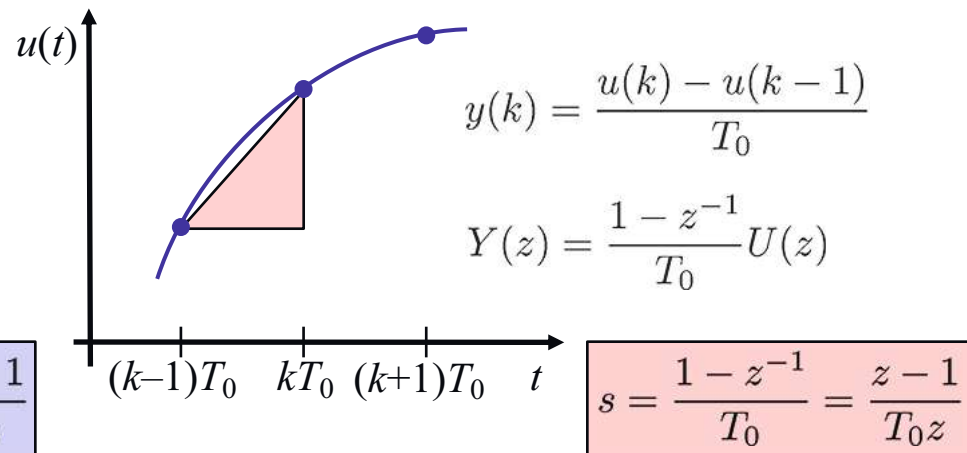
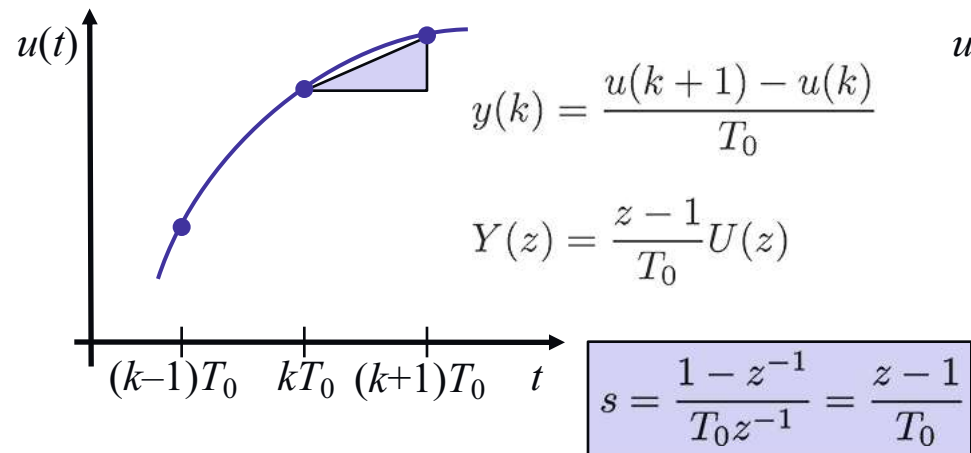


4.4 Entwurf von IIR-Filtern

Integration mit Unter- und Obersumme $y(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau$ $Y(s) = \frac{1}{s}U(s)$



Differentiation mit Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzen $y(t) = \frac{d}{dt}u(t)$ $Y(s) = sU(s)$

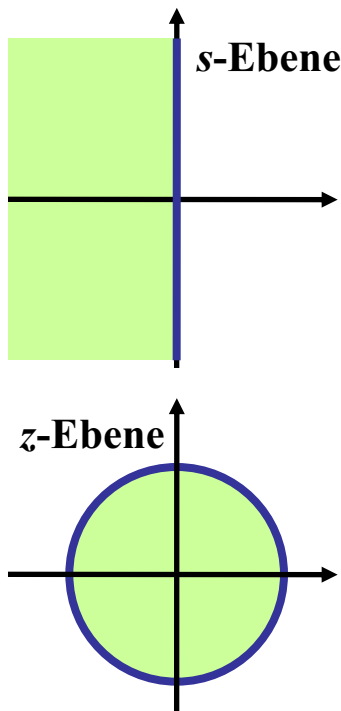


4.4 Entwurf von IIR-Filtern

Vergleich

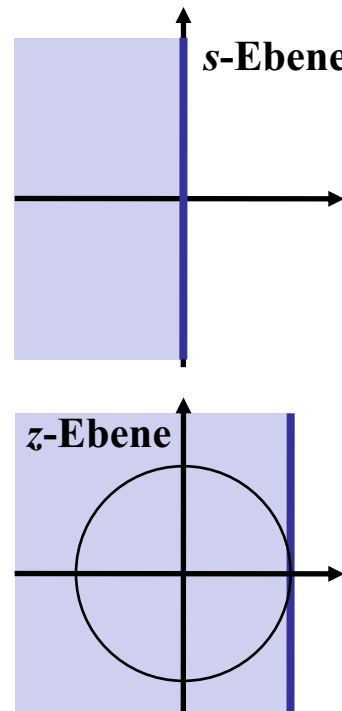
**Bilineare Transformation
(Trapez-Integration)**

$$s = \frac{2}{T_0} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad z = \frac{1 + \frac{T_0}{2}s}{1 - \frac{T_0}{2}s}$$



**Vorwärtsdifferenzen
(Untersumme-Integration)**

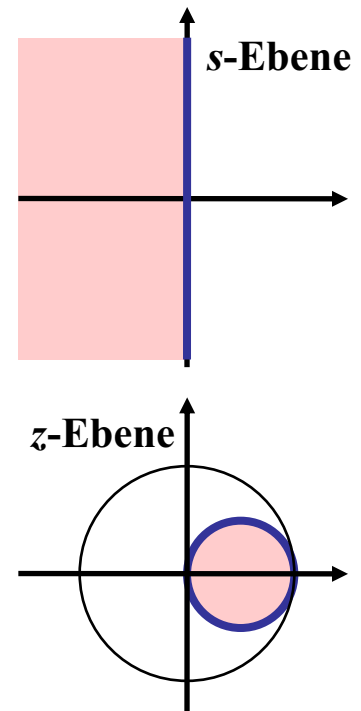
$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T_0 z^{-1}} \quad z = 1 + T_0 s$$



Stabilitätsgebiet wird zu
groß abgebildet!

**Rückwärtsdifferenzen
(Obersumme-Integration)**

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T_0} \quad z = \frac{1}{1 - T_0 s}$$



4.4 Entwurf von IIR-Filtern

Vorgehensweise beim Filterentwurf mittels bilinearer Transformation

1. Spezifikation muss entweder direkt im Analogen erfolgen oder aus dem Digitalen ins Analoge transformiert werden.
2. Filterentwurf im Analogen.
3. Transformation des analogen Filters ins Digitale.

Friedrich Bessel, 1784-1846
(www.wikipedia.org)



Folgende analoge IIR-Filter sind gängig:

- Bessel-Filter: Näherungsweise lineare Phase im Durchlassbereich
- Butterworth-Filter: Monotoner Amplitudengang
- Tschebyscheff-Filter Typ 1: Welligkeit (*ripple*) im Durchlassbereich
- Tschebyscheff-Filter Typ 2: Welligkeit im Sperrbereich
- Cauer-Filter (elliptischer Filter): Welligkeit im Durchlass- und Sperrbereich

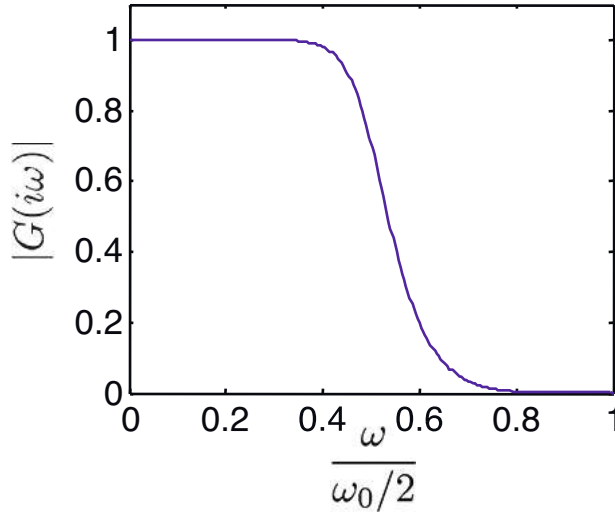
Für die Flankensteilheit bei Filtern gleich großer Ordnung (d.h. gleicher Komplexität) gilt:

Bessel < Butterworth < Tschebyscheff < Cauer

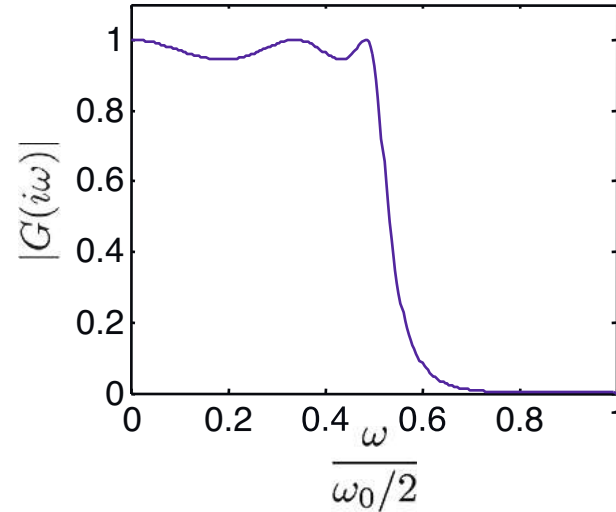
4.4 Entwurf von IIR-Filtern

Übersicht üblicher analoger Filter

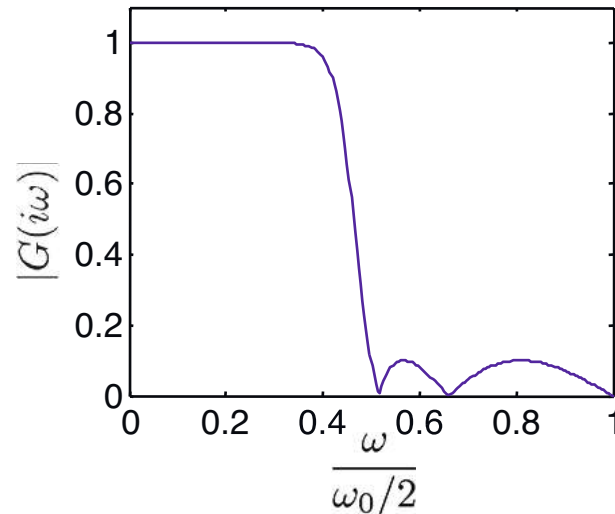
Butterworth



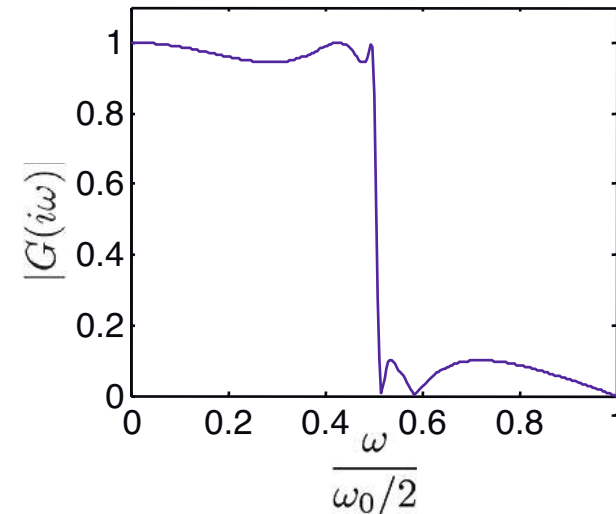
Tschebyscheff
Typ I



Tschebyscheff
Typ II



Cauer
(elliptisch)



4.4 Entwurf von IIR-Filtern

Butterworth-Filter

- Entwurf auf maximale Flachheit des Amplitudengangs möglichst nahe an die Grenzfrequenz ω_g .
- Monotoner Amplitudengang, d.h. keine Überhöhungen (Ripple).
- Schnelles Abknicken des Amplitudengangs bei der Grenzfrequenz.
- Starkes Überschwingen der Sprungantwort.
- Relative geringe Flankensteilheit mit $20 \cdot n$ dB / Dekade ($n =$ Filter-Ordnung).

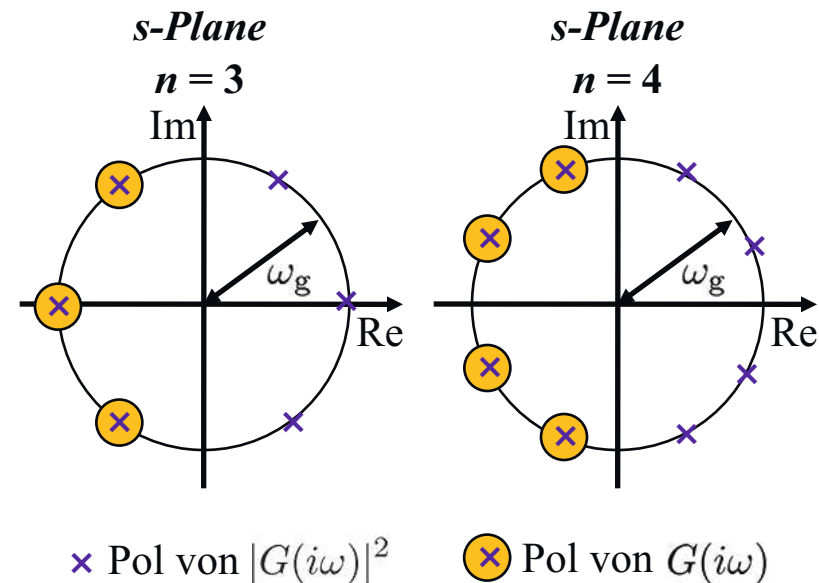
- Pole liegen auf einem Halbkreis
- keine Nullstellen

Amplitudengang:

$$|G(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^{2n}}$$

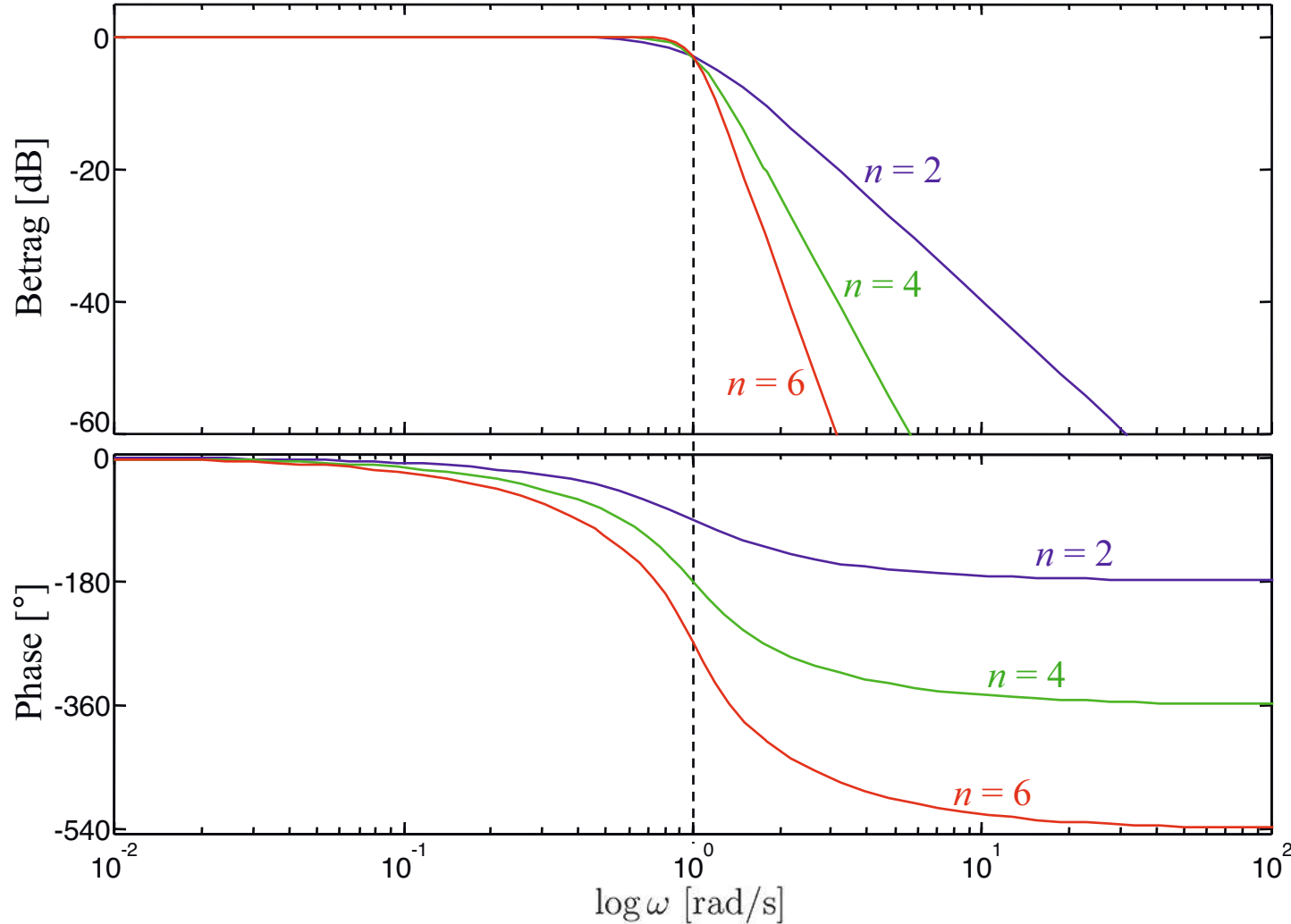
$$G(i\omega) = \prod_{i=1}^n \frac{s_i}{s_i - s}$$

wobei s_i die n stabilen Pole der $2n$ -ten Wurzel $-\omega_g$ von $-\omega_g$ sind, siehe rechts.

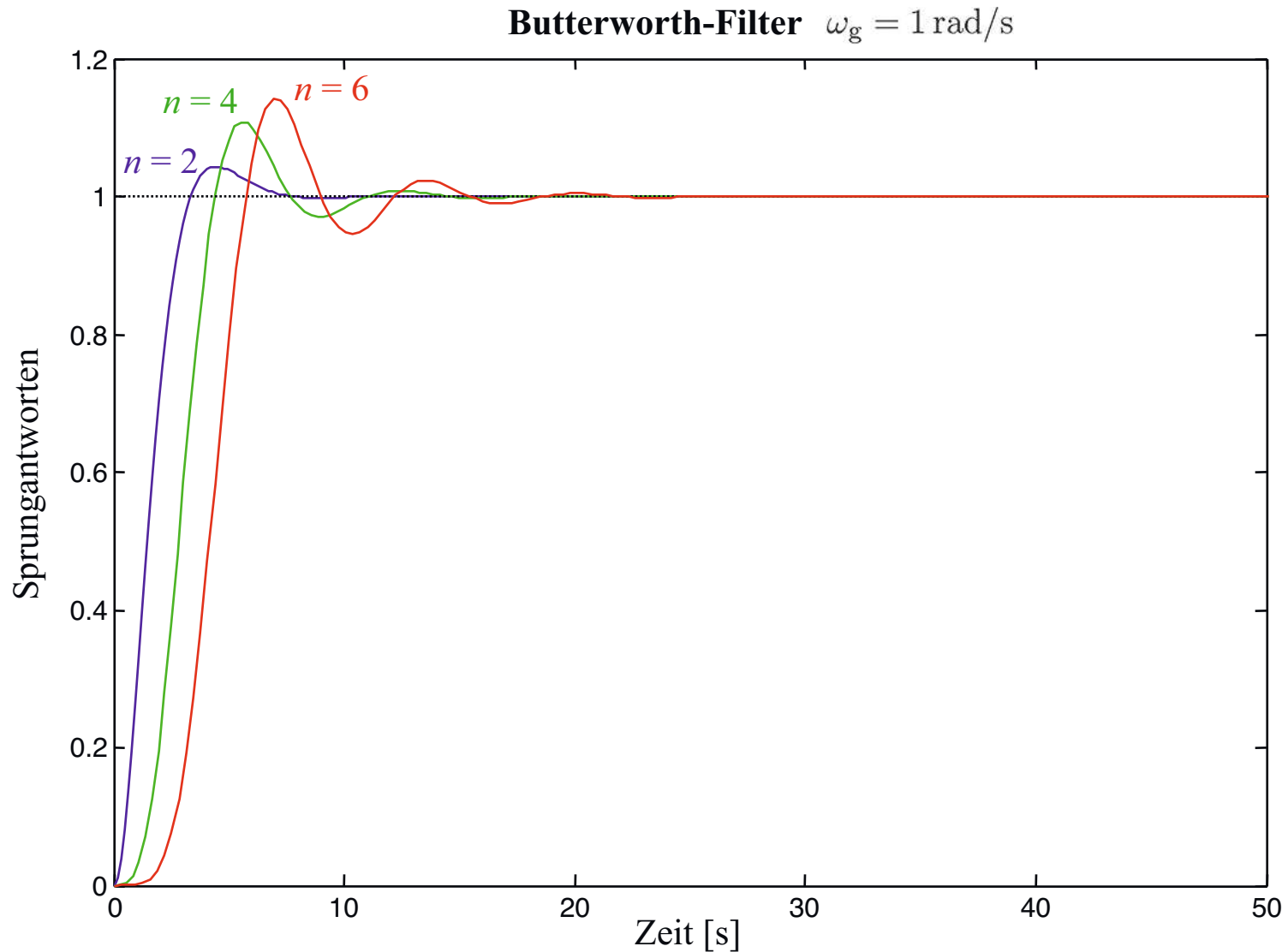


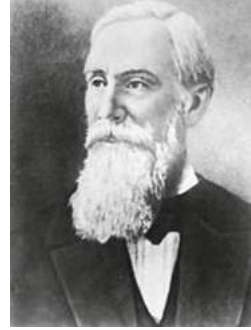
4.4 Entwurf von IIR-Filtern

Butterworth-Filter $\omega_g = 1 \text{ rad/s}$



4.4 Entwurf von IIR-Filtern





4.4 Entwurf von IIR-Filtern

Filter (*Chebyshev Filter*)

- Pole liegen auf einer Ellipse
- keine Nullstellen

- Größere Flankensteilheit als beim Butterworth-Filter.
- Welligkeit im Durchlassbereich (Typ I) *oder* Sperrbereich (Typ II) des Amplitudengangs. Akzeptanz einer größeren Welligkeit (Ripple) erhöht die Flankensteilheit.
- Sprungantwort oszilliert stärker als bei Butterworth-Filter.
- Geht in Butterworth-Filter über, wenn erlaubte Welligkeit $\varepsilon \rightarrow 0$ geht!
- Entwurfsparameter: Grenzfrequenz ω_g , Ordnung n , erlaubte Welligkeit ε .

$$|G(i\omega)|_I^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)}$$

ε : Welligkeitsfaktor (*ripple factor*)

Da das Tschebyscheff-Polynom im Durchlassbereich zwischen 0 und 1 schwankt, gilt für die untere Verstärkung im Durchlassbereich:

$$1 - \delta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

Tschebyscheff-Polynom der Ordnung n :

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos x) & \text{für } |x| \leq 1 \\ \cosh(n \operatorname{arccosh} x) & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

$$T_0(x) = 1$$

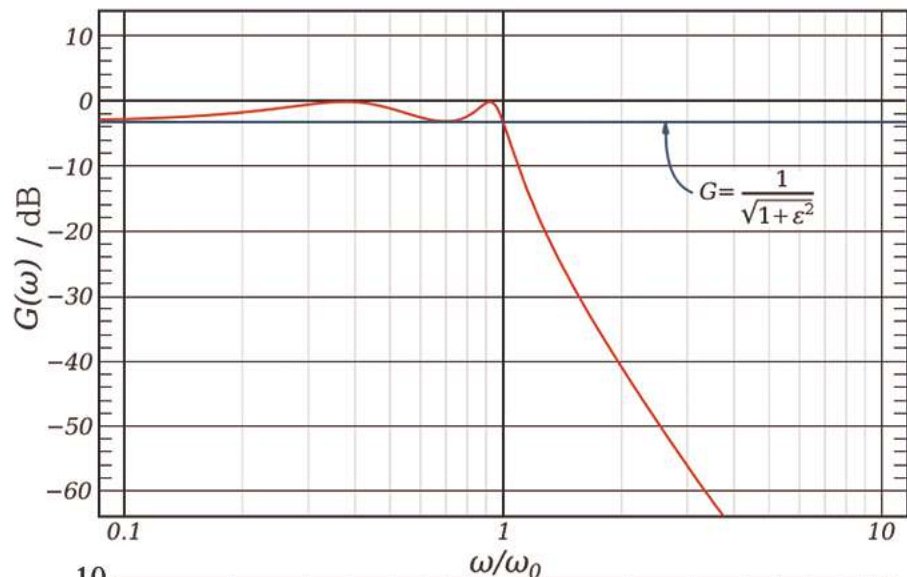
$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

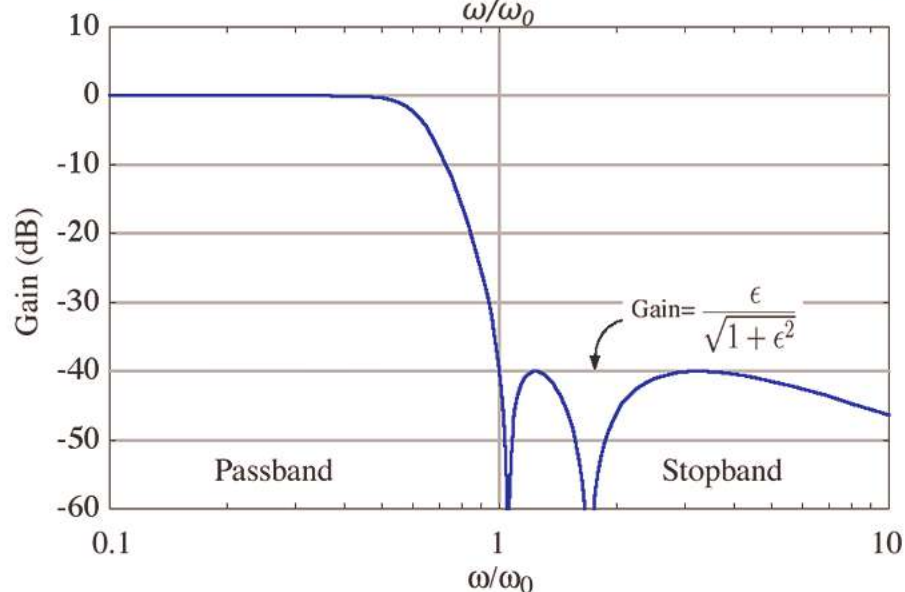
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

4.4 Entwurf von IIR-Filtern



The frequency response of a fourth-order type I Chebyshev low-pass filter with $\epsilon = 1$

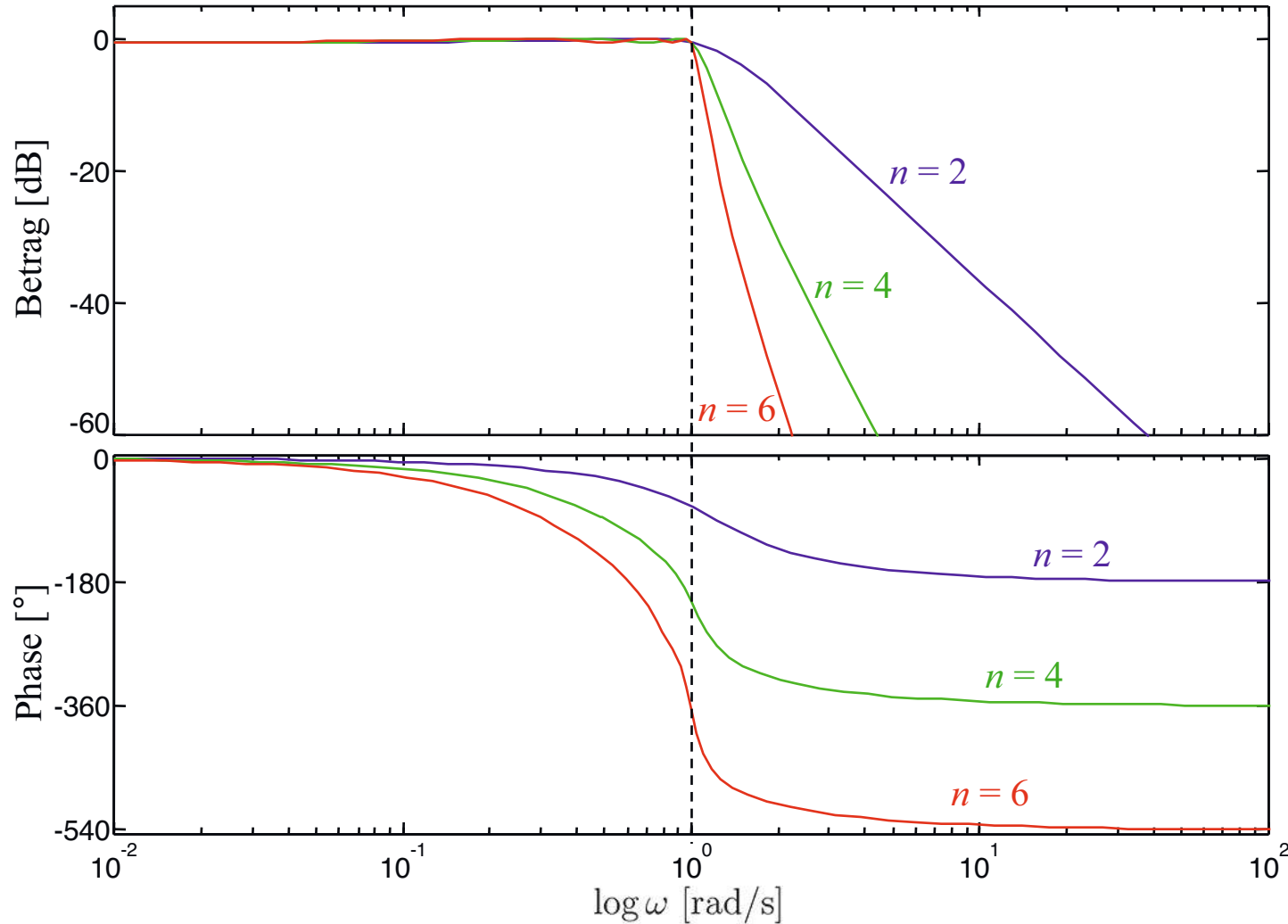


The frequency response of a fifth-order type II Chebyshev low-pass filter with $\epsilon = 0.01$

Source: https://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev_filter

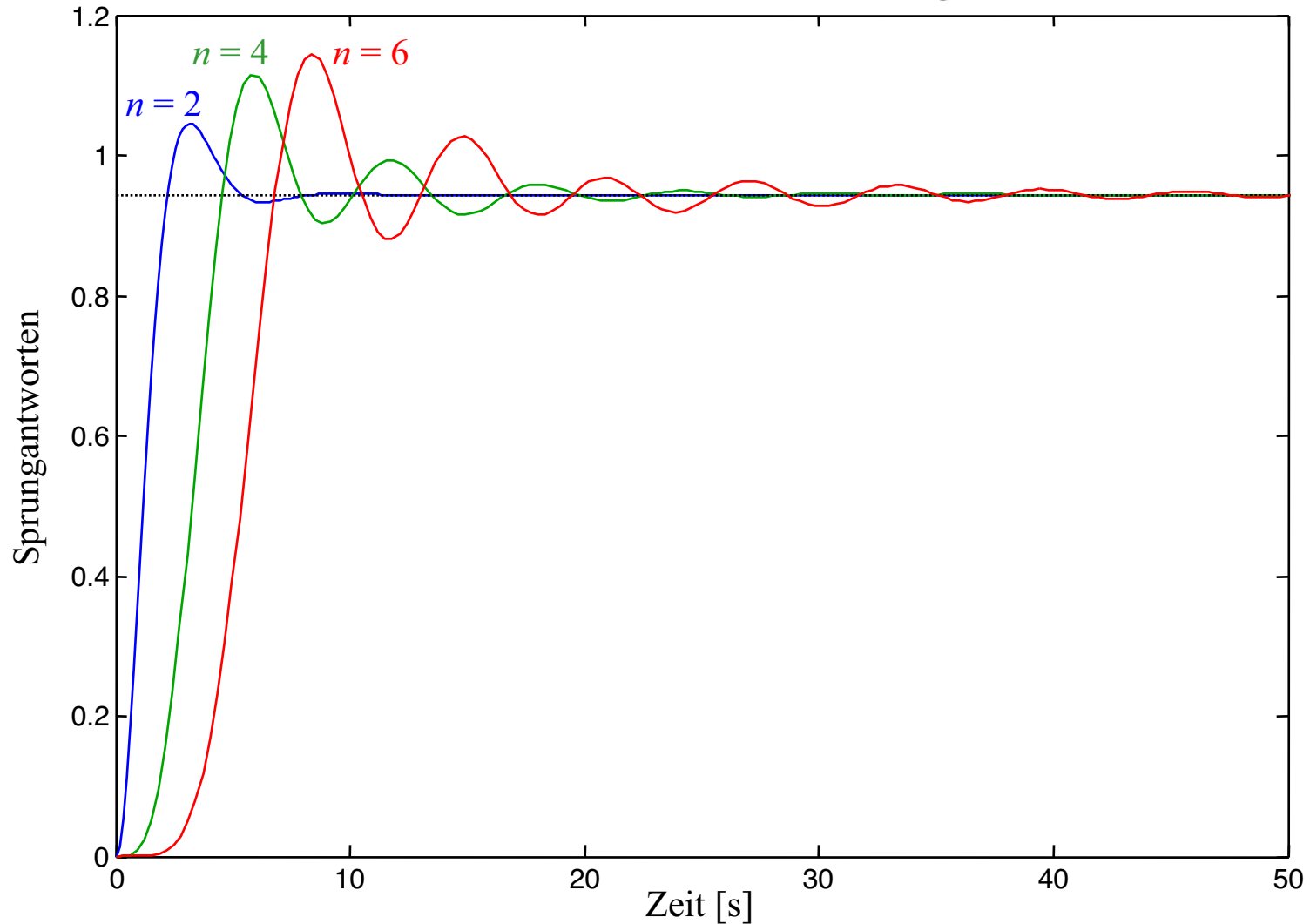
4.4 Entwurf von IIR-Filtern

Tschebyscheff-Filter Typ I $\omega_g = 1 \text{ rad/s}$



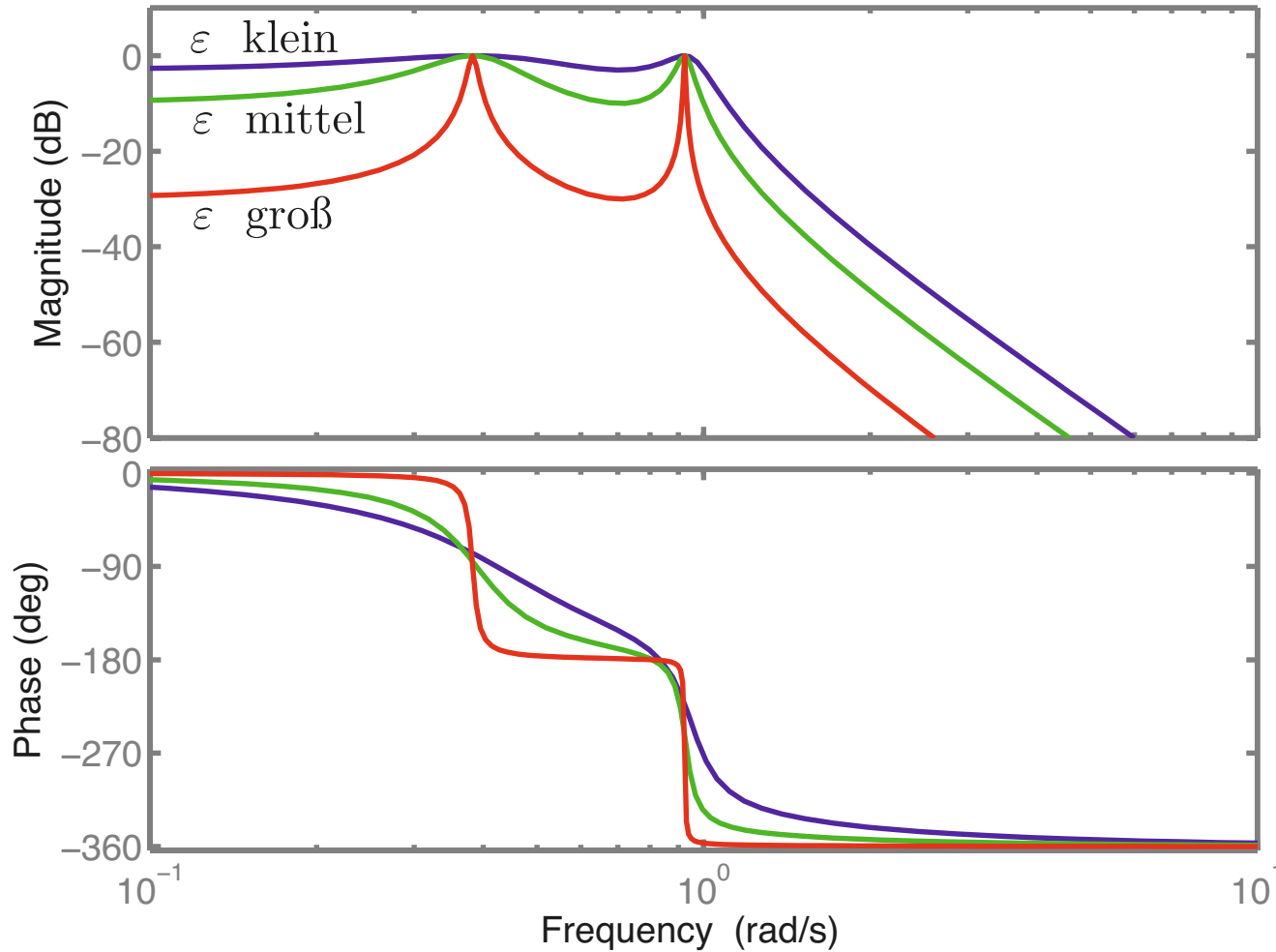
4.4 Entwurf von IIR-Filtern

Tschebyscheff-Filter Typ I $\omega_g = 1 \text{ rad/s}$



4.4 Entwurf von IIR-Filtern

Tschebyscheff-Filter Typ I ($n = 4$) $\omega_g = 1$ rad/s



4.4 Entwurf von IIR-Filtern

Cauer-Filter (elliptischer Filter)

- Größere Flankensteilheit als beim Tschebyscheff-Filter, sogar größtmögliche.
- Welligkeit im Durchlassbereich *und* Sperrbereich des Amplitudengangs. Akzeptanz einer größeren Welligkeit (Ripple) erhöht die Flankensteilheit.
- Sprungantwort oszilliert stärker als bei Tschebyscheff-Filter.
- Geht in Tschebyscheff-Filter Typ I über, wenn Flankensteilheitsfaktor $\xi \rightarrow \infty$ geht!
- Entwurfsparameter: Grenzfrequenz ω_g , Ordnung n , erlaubte Welligkeiten ε und ξ .

$$|G(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 R_n^2 \left(\frac{\omega}{\omega_g}, \xi \right)}$$

ε : Welligkeitsfaktor für Durchlassbereich (*ripple factor*)

ξ : Flankensteilheitsfaktor (*selectivity factor*)

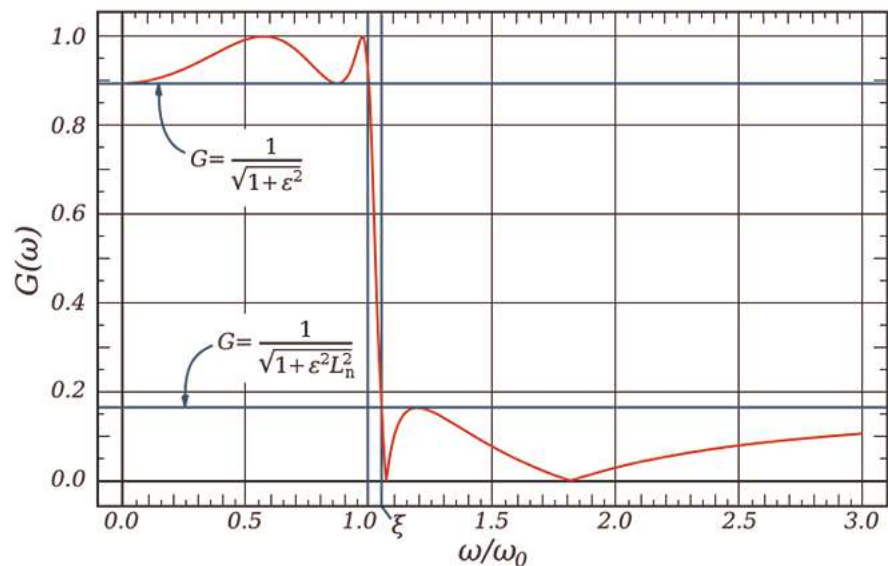
x_{ni} : Nullstellen ↗ berechnet nach
 x_{pi} : Pole ↖ komplizierter Formel
in Abhängigkeit von ξ

Maximale Flankensteilheit bei $x = 1$.

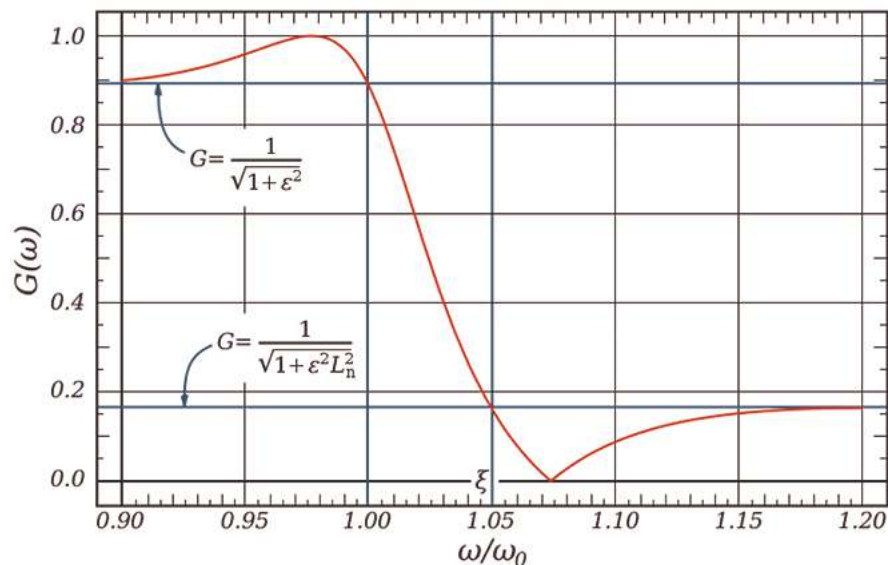
Elliptische Funktionen der Ordnung n :

$$R_n(x, \xi) = \begin{cases} r_0 \frac{\prod_{i=0}^n (x - x_{ni})}{\prod_{i=0}^{n-1} (x - x_{pi})} & \text{für gerade } n \\ r_0 x \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (x - x_{ni})}{\prod_{i=0}^{n-1} (x - x_{pi})} & \text{für ungerade } n \end{cases}$$

4.4 Entwurf von IIR-Filtern



The frequency response of a fourth-order elliptic low-pass filter with $\epsilon=0.5$ and $\xi=1.05$. Also shown are the minimum gain in the passband and the maximum gain in the stopband, and the transition region between normalized frequency 1 and ξ

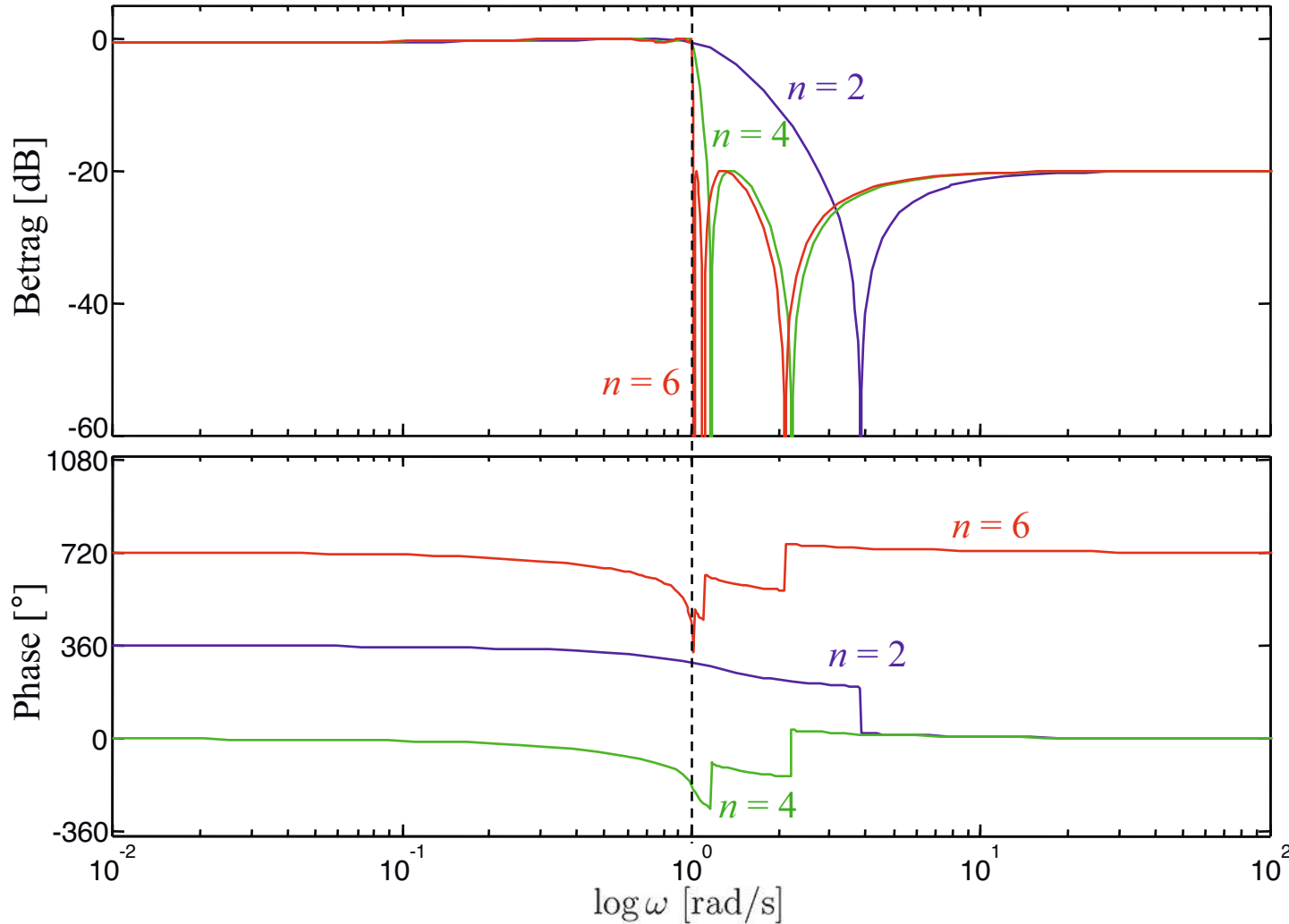


A closeup of the transition region of the above plot.

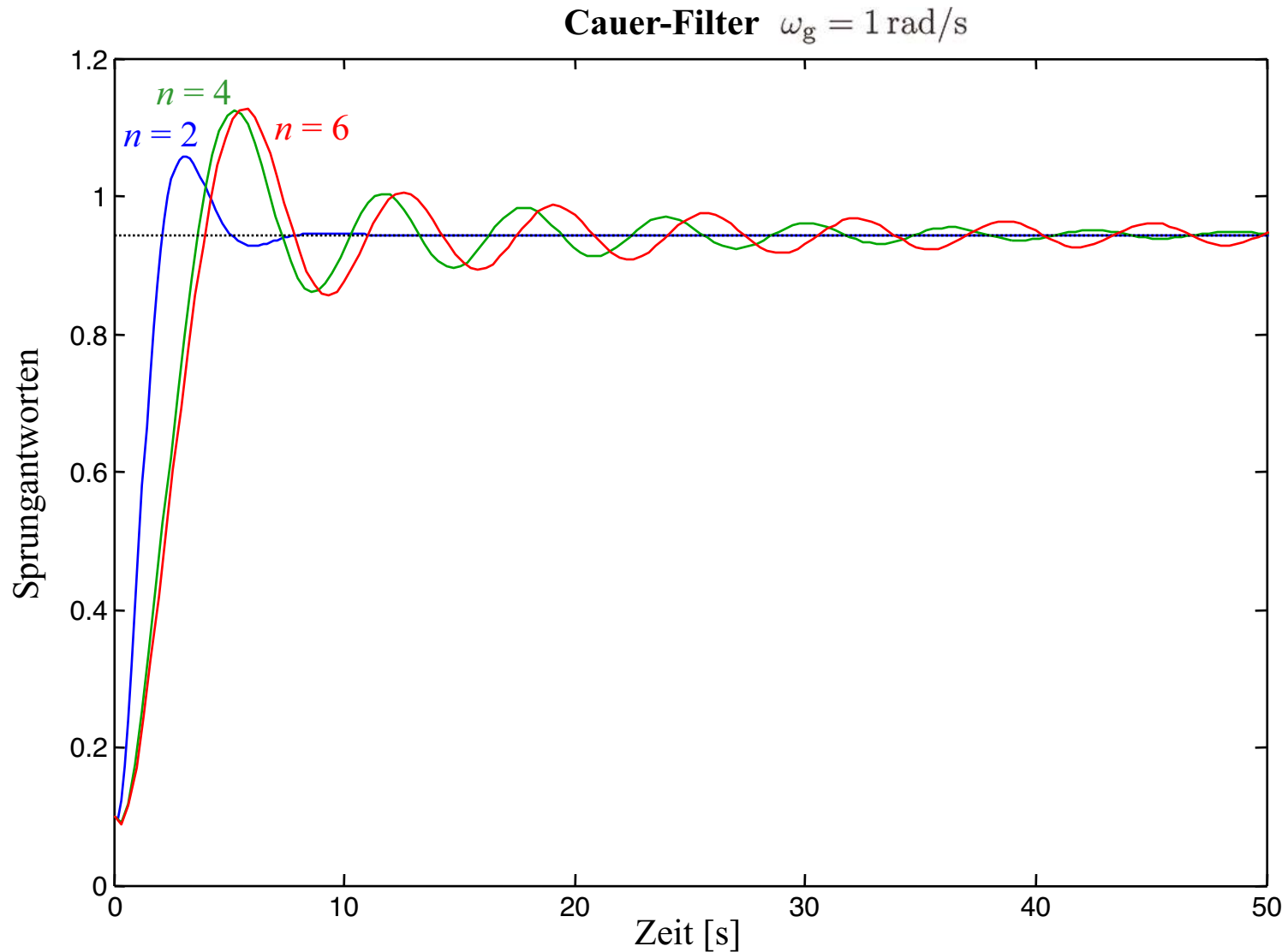
Source: https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_filter

4.4 Entwurf von IIR-Filtern

Cauer-Filter $\omega_g = 1 \text{ rad/s}$

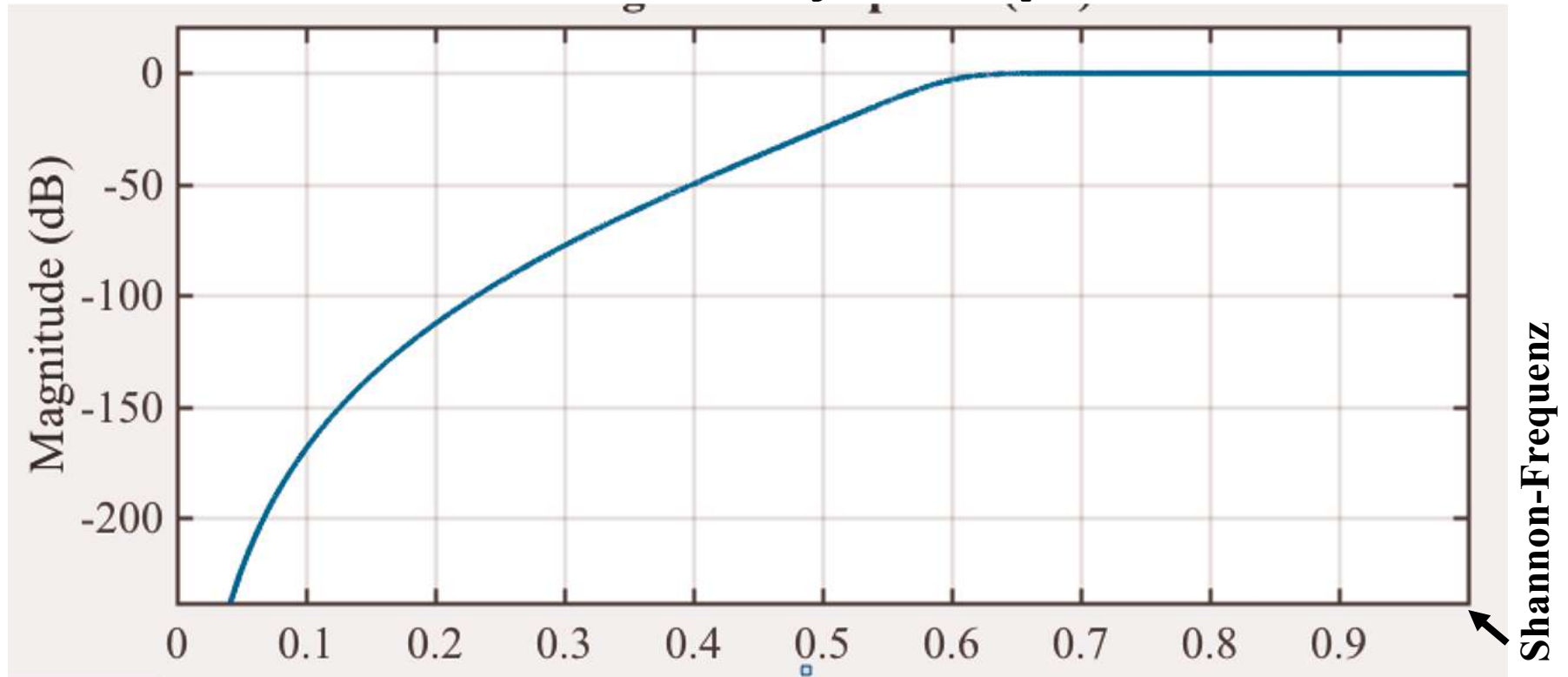


4.4 Entwurf von IIR-Filtern



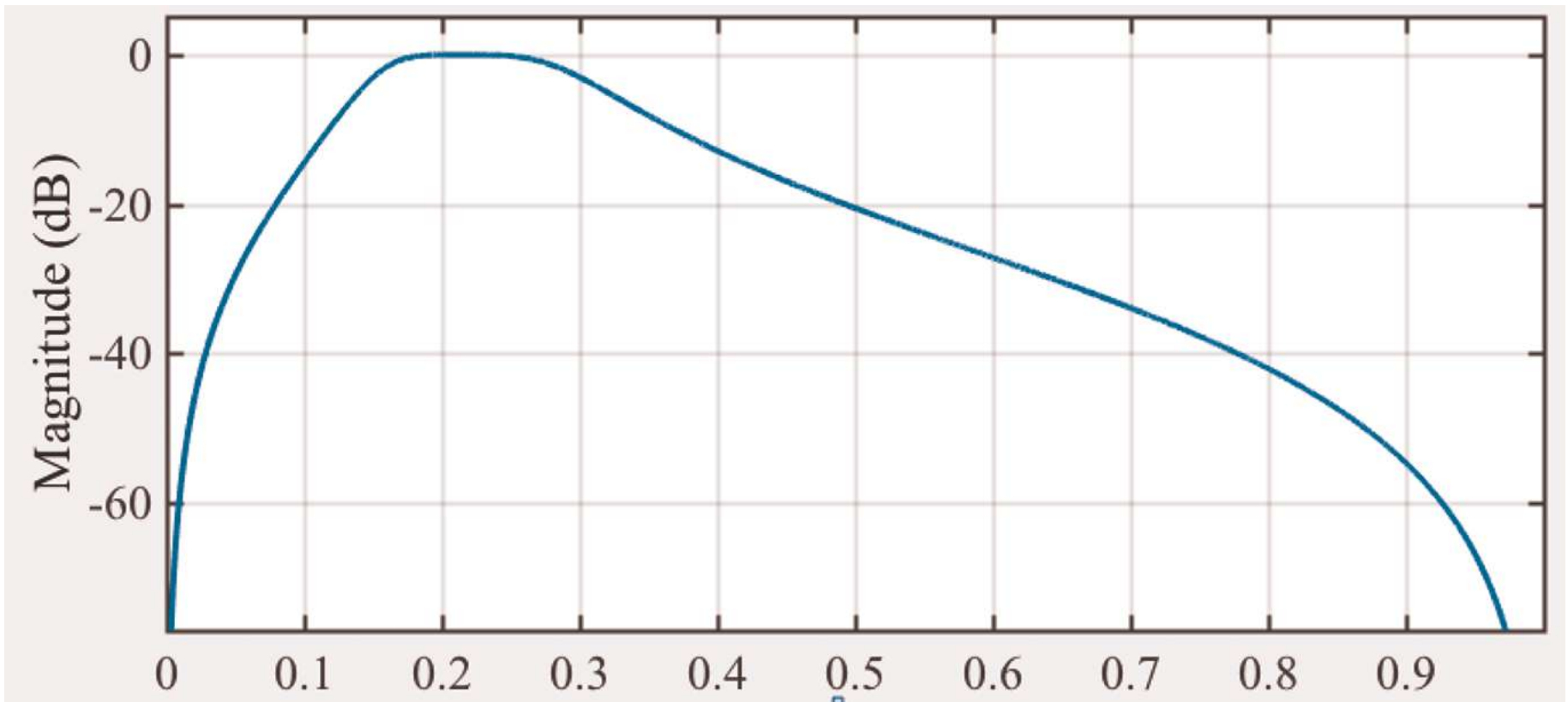
4.4 Entwurf von IIR-Filtern

```
% For data sampled at 1000 Hz, design a 9th-order highpass
% Butterworth filter with cutoff frequency of 300Hz.
Wn = 300/500; % Normalized cutoff frequency
[z,p,k] = butter(9,Wn,'high'); % Butterworth filter
[sos] = zp2sos(z,p,k); % Convert to SOS form
h = fvtool(sos); % Plot magnitude response
```



4.4 Entwurf von IIR-Filtern

```
% Design a 4th-order butterworth band-pass filter which passes
% frequencies between 0.15 and 0.3.
[b,a]=butter(2,[.15,.3]);           % Bandpass digital filter design
h = fvtool(b,a);                   % Visualize filter
```



4.4 Entwurf von IIR-Filtern

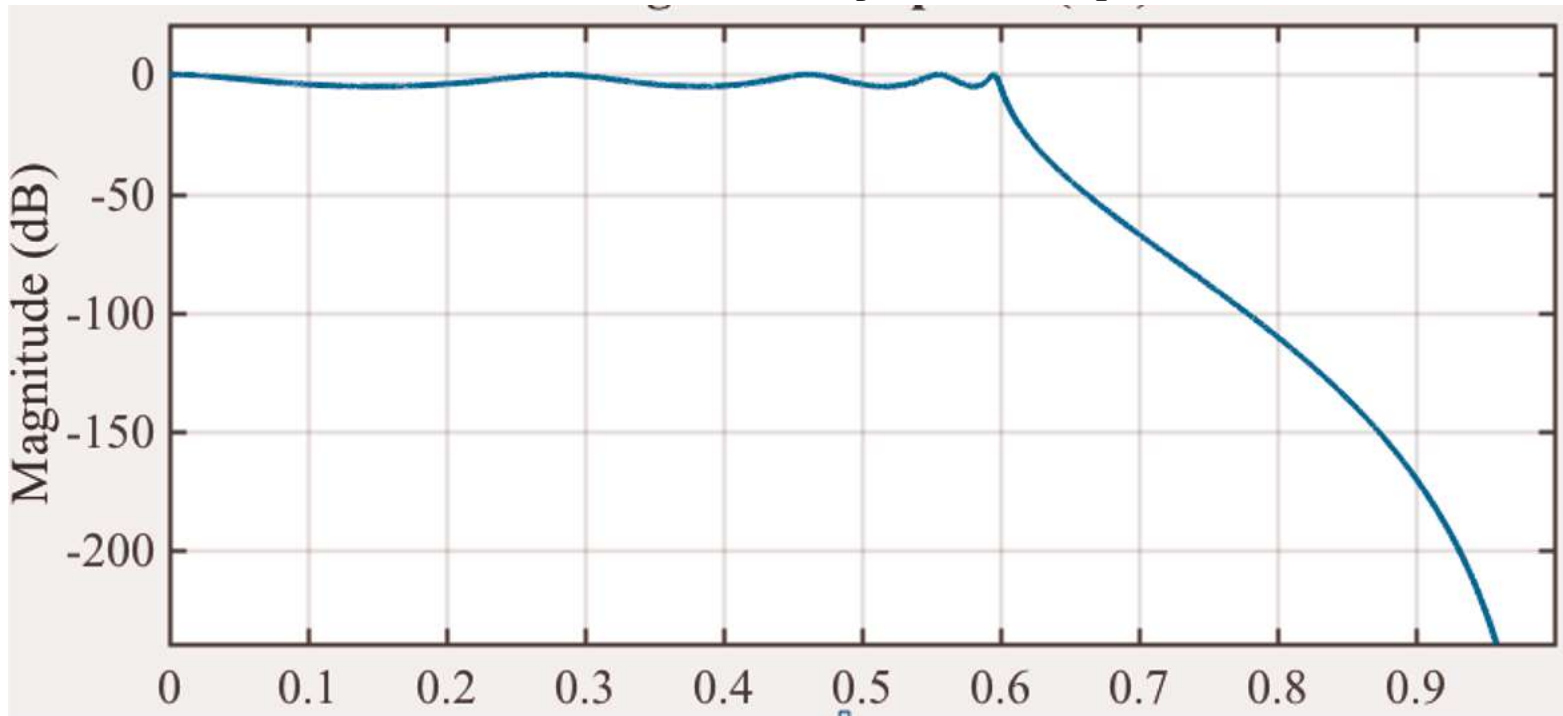
```
% For data sampled at 1000 Hz, design a 9th-order lowpass Chebyshev  
% Type I filter with 5 dB of ripple in the passband, and a passband  
% edge frequency of 300Hz.
```

```
Wn = 300/500; % Normalized passband edge frequency
```

```
[z,p,k] = cheby1(9,5,Wn);
```

```
[sos] = zp2sos(z,p,k); % Convert to SOS form
```

```
h = fvtool(sos) % Plot magnitude response
```

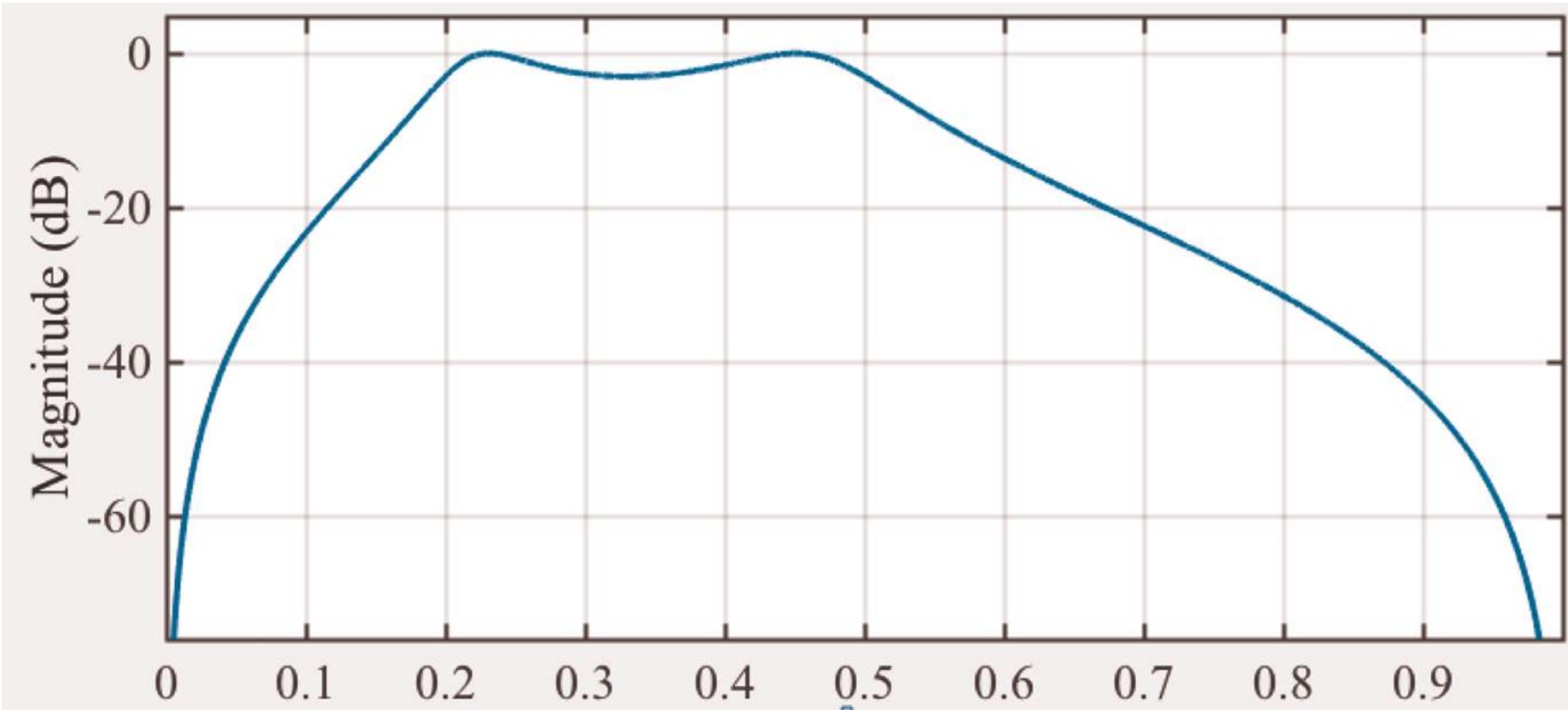


4.4 Entwurf von IIR-Filtern

```
% Design a 2nd-order Chebyshev Type I band-pass filter which passes  
% frequencies between 0.2 and 0.5 with 3 dB of ripple in the  
% passband.
```

```
[b,a]=cheby1(2,3,[.2,.5]); % Bandpass digital filter design
```

```
h = fvtool(b,a); % Visualize filter
```



4.4 Entwurf von IIR-Filtern

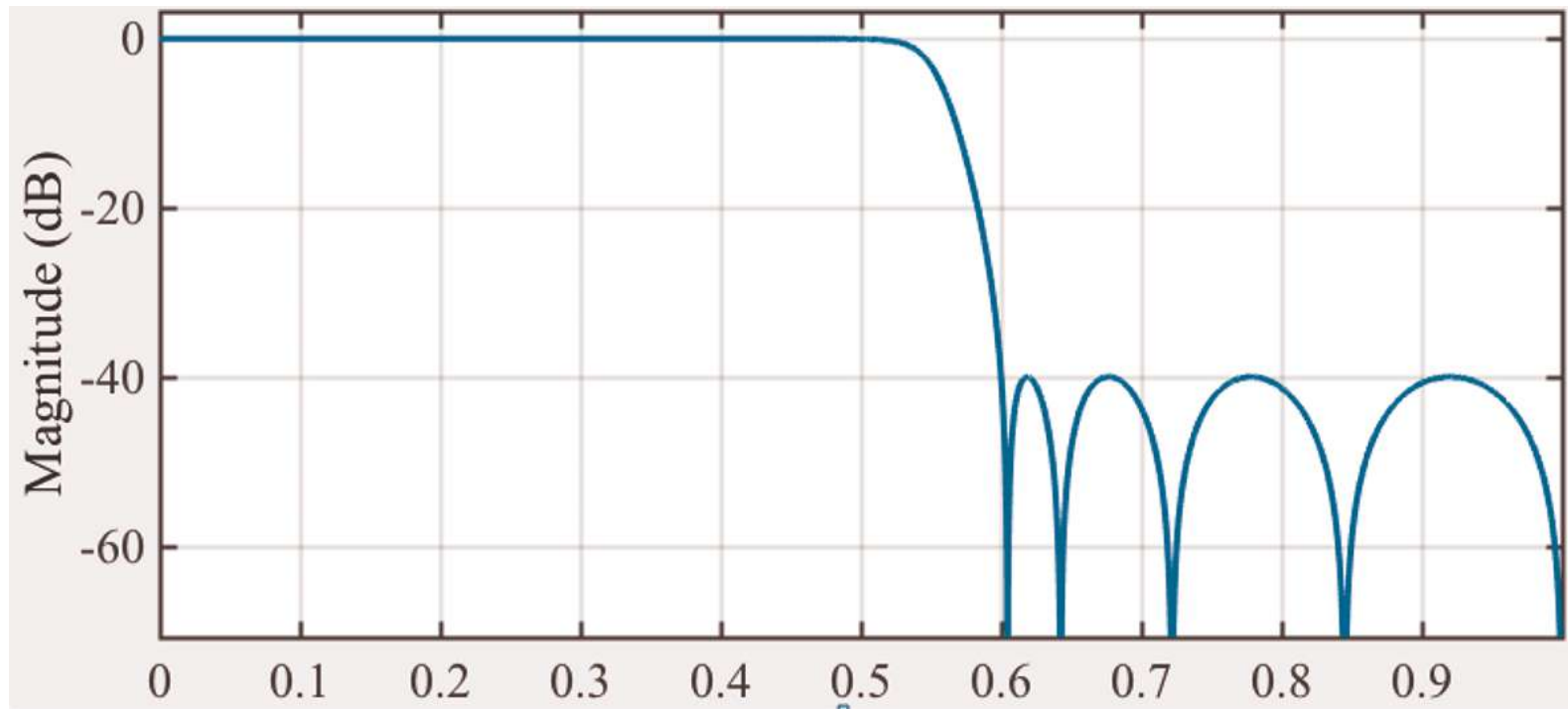
```
% For data sampled at 1000 Hz, design a ninth-order lowpass  
% Chebyshev Type II filter with stopband attenuation 40 dB down from  
% the passband and a stopband edge frequency of 300Hz.
```

```
Wn = 300/500; % Normalized stopband edge frequency
```

```
[z,p,k] = cheby2(9,40,Wn);
```

```
[sos] = zp2sos(z,p,k); % Convert to SOS form
```

```
h = fvtool(sos) % Plot magnitude response
```

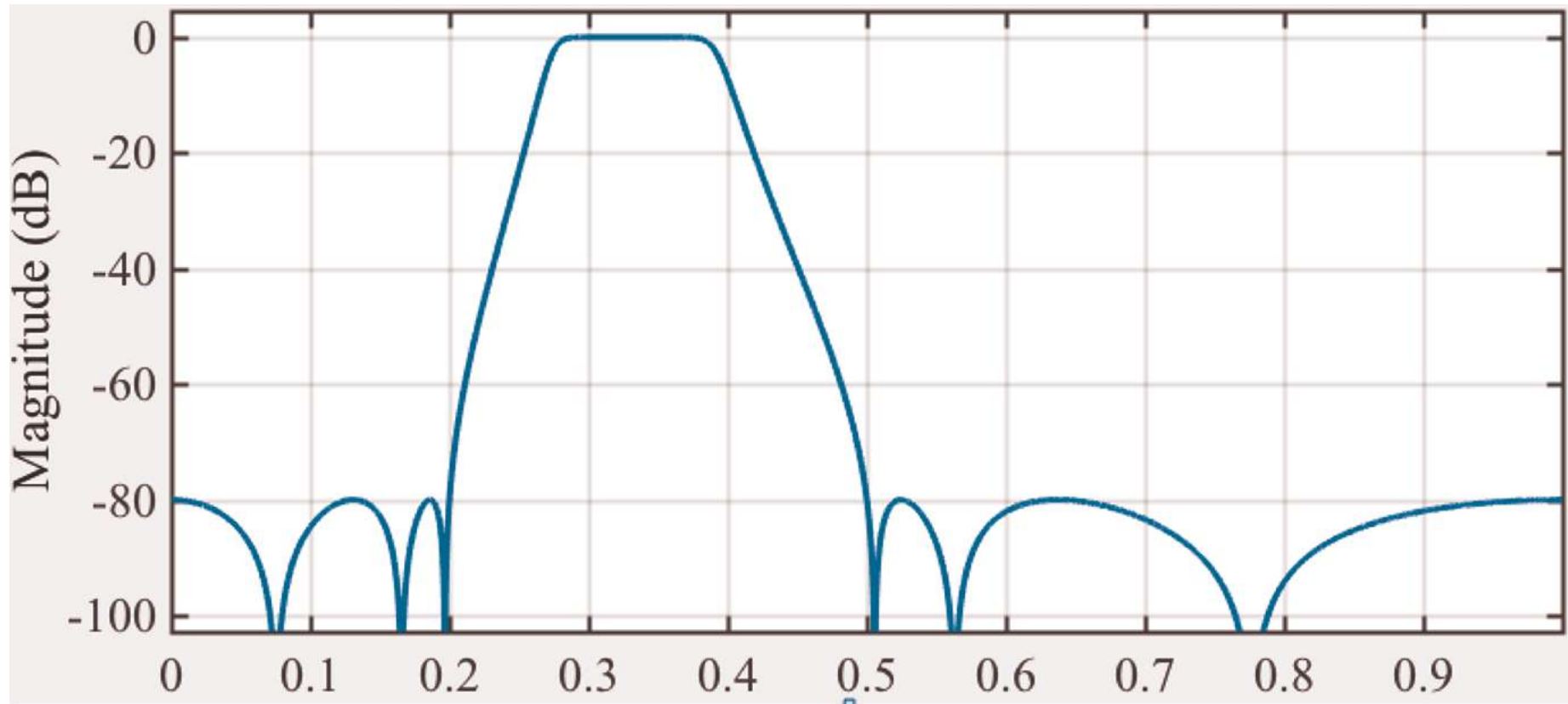


4.4 Entwurf von IIR-Filtern

```
% Design a 6th-order Chebyshev Type II band-pass filter which passes  
% frequencies between 0.2 and 0.5 and with stopband attenuation 80 dB  
% down from the passband.
```

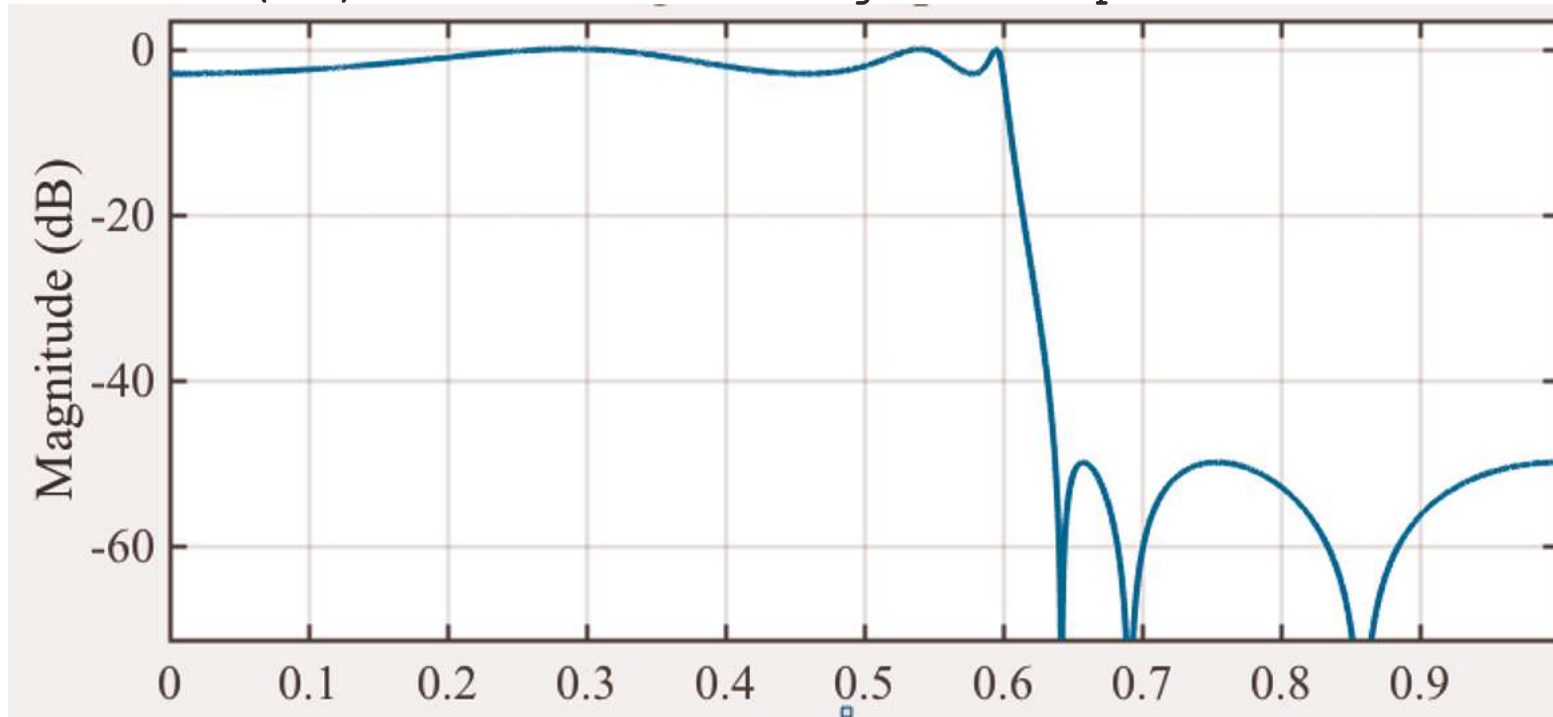
```
[b,a]=cheby2(6,80,[.2,.5]); % Bandpass digital filter design
```

```
h = fvtool(b,a); % Visualize filter
```



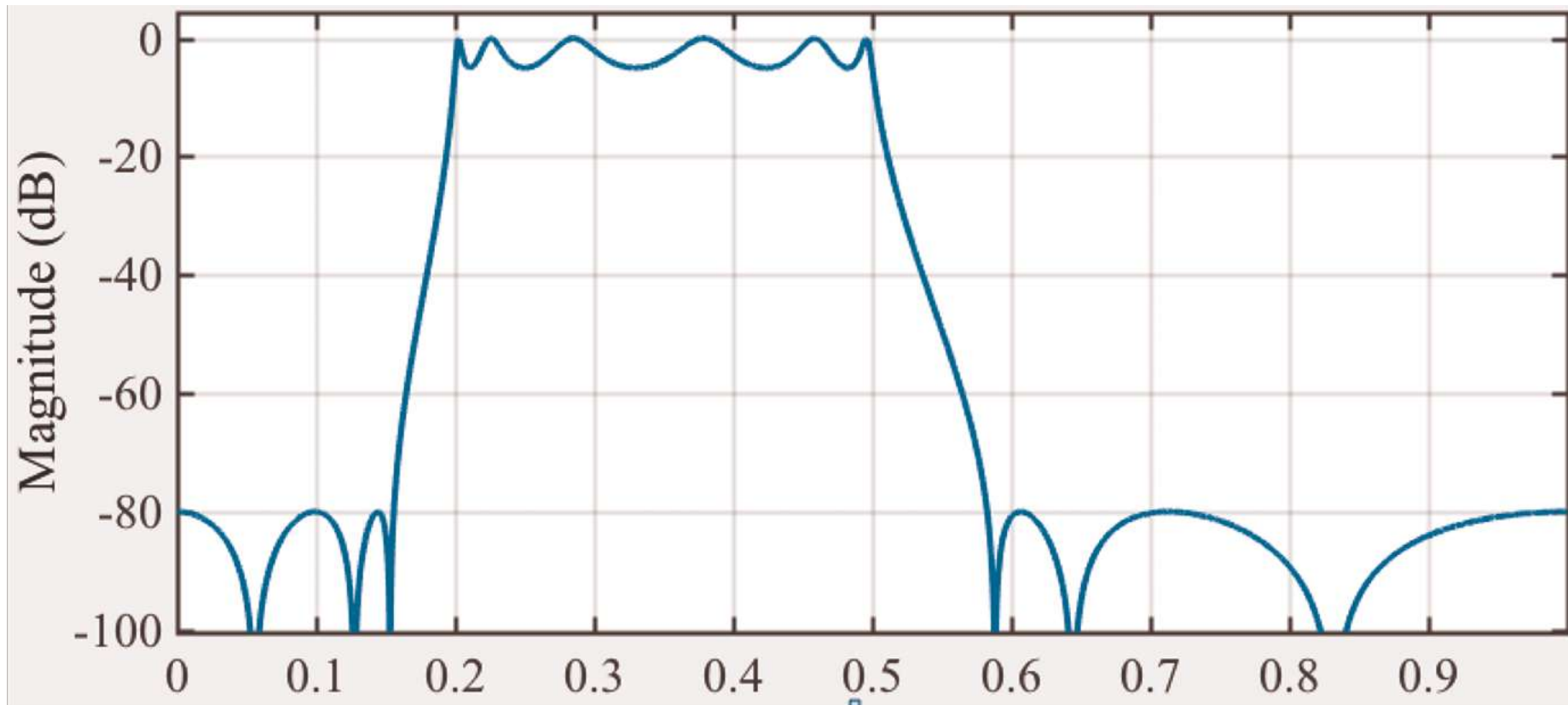
4.4 Entwurf von IIR-Filtern

```
% For data sampled at 1000 Hz, design a sixth-order lowpass
% elliptic filter with a passband edge frequency of 300Hz, 3 dB of
% ripple in the passband, and 50 dB of attenuation in the stopband.
Wn = 300/500;           % Normalized passband edge frequency
[z,p,k] = ellip(6,3,50,Wn);
[sos] = zp2sos(z,p,k);  % Convert to SOS form
h = fvtool(sos)         % Plot magnitude response
```



4.4 Entwurf von IIR-Filtern

```
% Design a 6th-order Elliptic band-pass filter which passes
% frequencies between 0.2 and 0.5, and with 5 dB of ripple in the
% passband, and 80 dB of attenuation in the stopband
[b,a]=ellip(6,5,80,[.2,.5]);    % Bandpass digital filter design
h = fvtool(b,a);              % Visualize filter
```



4.4 Entwurf von IIR-Filtern

Normierung und Transformation

Bisher haben wir nur den Entwurf von Tiefpass-Filtern betrachtet. Mit einfachen Transformationen lassen sich diese in die anderen Frequenzcharakteristiken umformen.

Am Einfachsten ist ein standardisierter Entwurf eines Tiefpass-Filters mit der normierten Grenzfrequenz $\omega_g = 1$ rad/s. Daraus lassen sich die gewünschten Filterarten transformieren:

Tiefpass mit Grenzfrequenz ω_g :

$$s \rightarrow \frac{s}{\omega_g}$$

Hochpass mit Grenzfrequenz ω_g :

$$s \rightarrow \frac{\omega_g}{s}$$

Bandpass mit Grenzfrequenz ω_{g1} und ω_{g2} :

$$s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_{g1}\omega_{g2}}{s(\omega_{g2} - \omega_{g1})}$$

Bandsperre mit Grenzfrequenzen ω_{g1} und ω_{g2} :

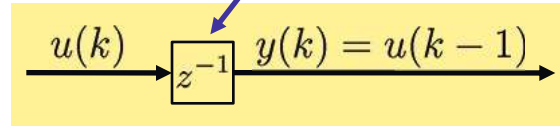
$$s \rightarrow \frac{s(\omega_{g2} - \omega_{g1})}{s^2 + \omega_{g1}\omega_{g2}}$$

4.5 Implementierung von Filtern

Blockschaltbild-Darstellung digitaler Filter

symbolische Darstellung!

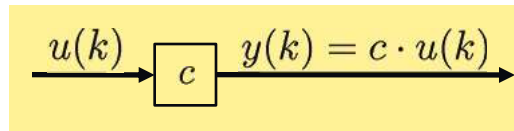
Verzögerung um einen Abtastschritt:



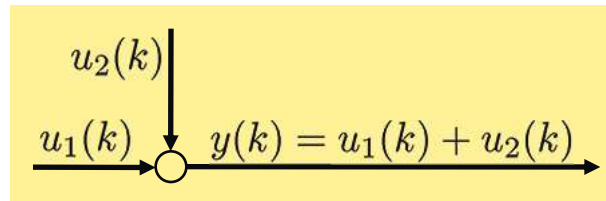
ACHTUNG: Formal ist das falsch, weil Zeit- und Frequenzbereich miteinander vermischt werden! Diese Blockschaltbild-Darstellungsweise ist aber allgemein üblich. Gemeint ist damit natürlich:

$$Y(z) = z^{-1}U(z) \rightarrow y(k) = u(k - 1)$$

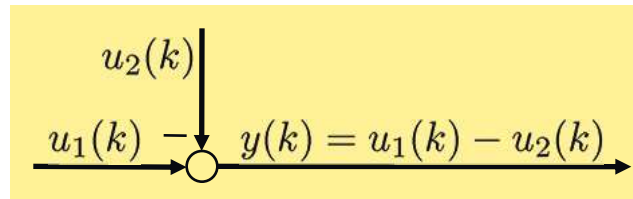
Multiplikation mit einem Faktor:



Addition:



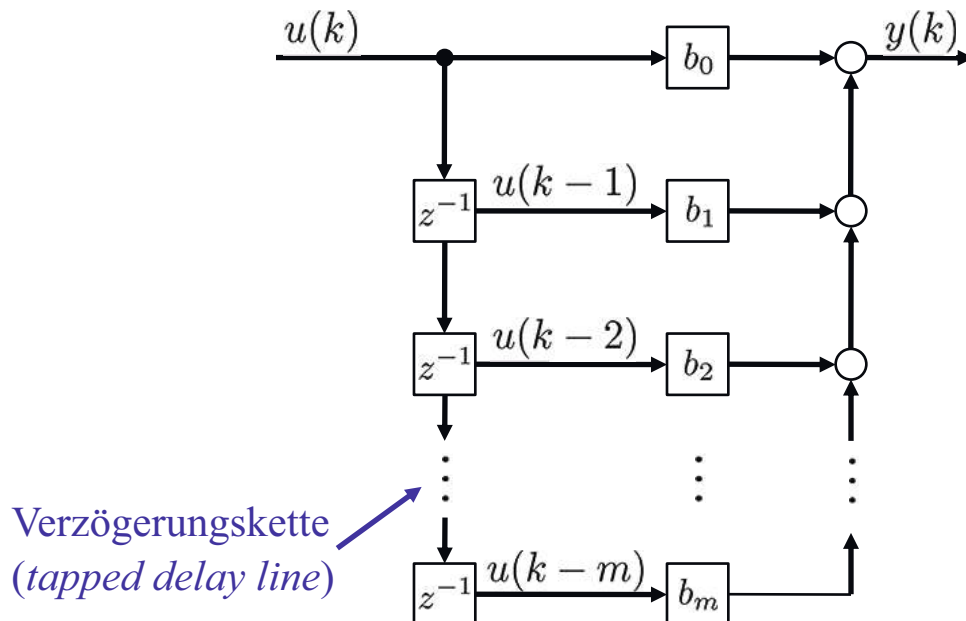
Subtraktion:



4.5 Implementierung von Filtern

FIR-Filter

- m Speicher
- $m+1$ Multiplikationen und m Additionen
- Keine Rückkopplungen
- Für symmetrische Filter, wie $b_0 = b_m, b_1 = b_{m-1}, \dots$ oder $b_0 = -b_m, b_1 = -b_{m-1}, \dots$, kann durch Addition von $u(k)$ mit $u(k-m)$ und $u(k-1)$ mit $u(k-m-1)$, usw. die Hälfte der Multiplikationen entfallen.

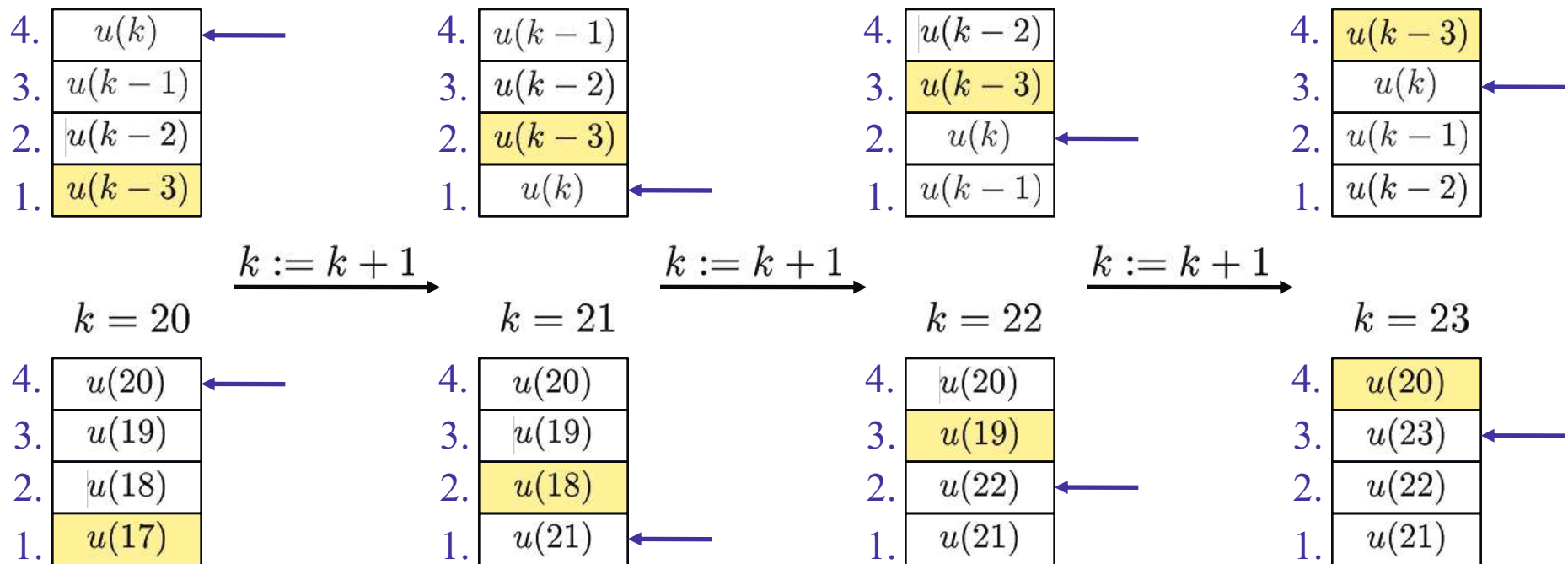


4.5 Implementierung von Filtern

Effiziente Realisierung einer Verzögerungskette in Software

Beispiel für $m = 3$:

Der Zeiger \leftarrow rotiert in jedem Zeitschritt eine Speicherstelle nach oben. Wenn er oben „rausfällt“, wird er auf die unterste Speicherstelle zurückgesetzt. Dies kann mittels des Modulo-Operators realisiert werden: $adr := (adr + 1) \bmod m$. In jedem Zeitschritt muss dann nur ein Speicherplatz neu beschrieben werden, statt alle Elemente weiter zu rotieren.



4.5 Implementierung von Filtern

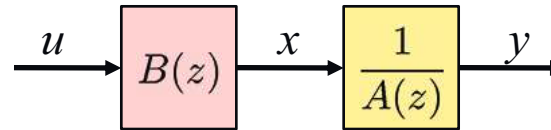
IIR-Filter

Ein IIR-Filter der Ordnung n kann geschrieben werden als

$$G_{\text{IIR}}(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

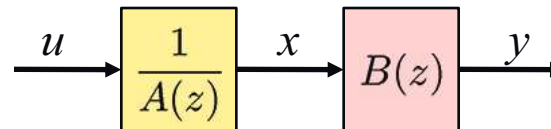
Ist die Zählerordnung $m < n$, dann sind einfach die entsprechenden $b_i = 0$ für $i > m$. Diese Übertragungsfunktion lässt sich auf zwei Arten zerlegen.

Direkte Form I (direct form I):



$$G_{\text{IIR}}(z) = \frac{1}{A(z)} \cdot B(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \cdot (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n})$$

Direkte Form II (direct form II):

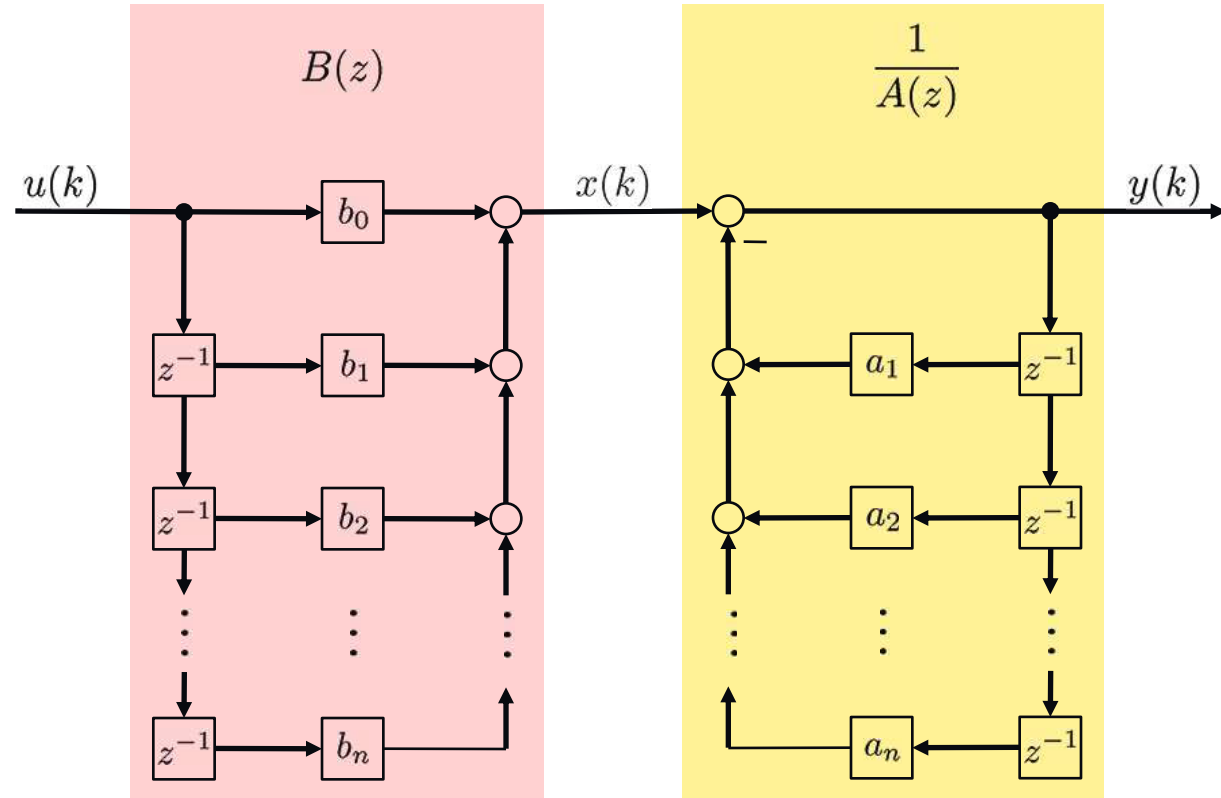


$$G_{\text{IIR}}(z) = B(z) \cdot \frac{1}{A(z)} = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}) \cdot \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

4.5 Implementierung von Filtern

IIR-Filter in direkter Form I

- $2n$ Speicher
- $2n+1$ Multiplikationen und $2n$ Additionen
- n Rückkopplungen



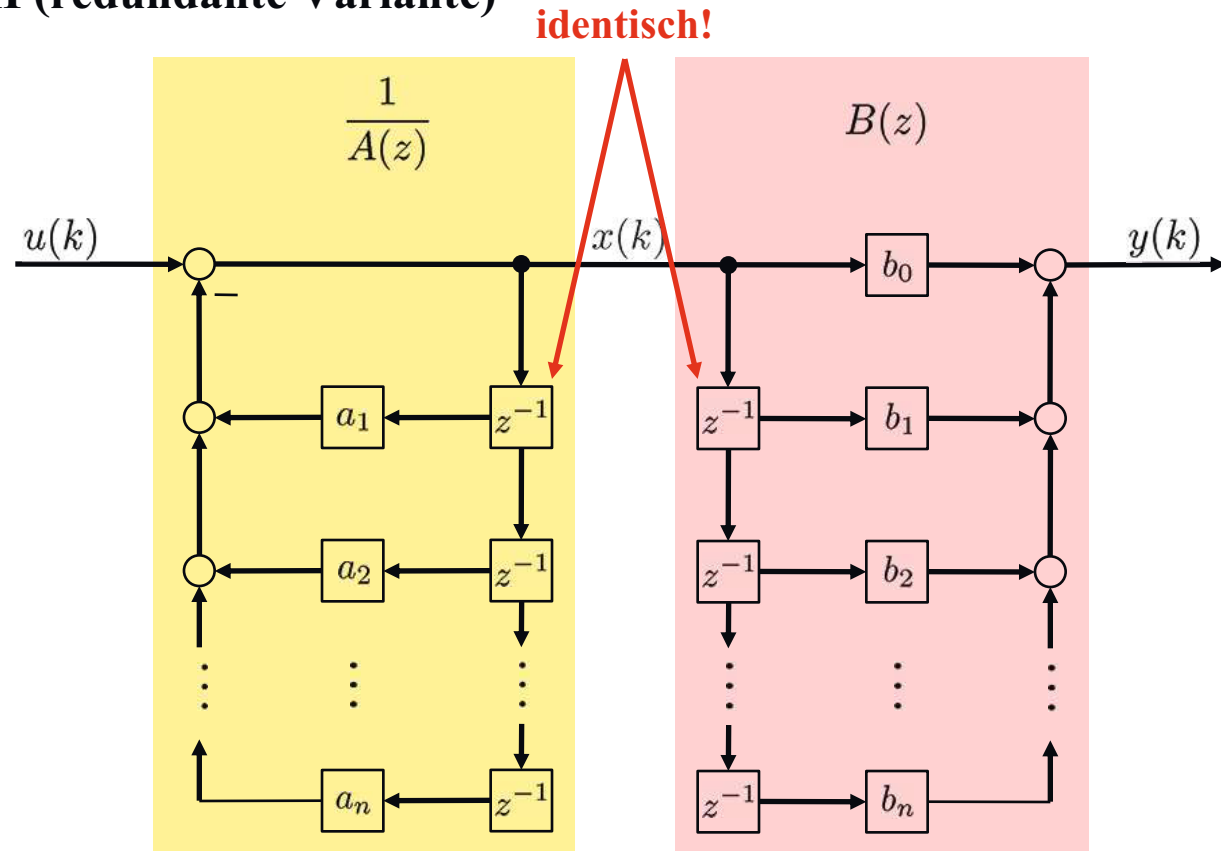
$$x(k) = b_0u(k) + b_1u(k - 1) + b_2u(k - 2) + \dots + b_nu(k - n)$$

$$y(k) = x(k) - a_1y(k - 1) - a_2y(k - 2) - \dots - a_ny(k - n)$$

4.5 Implementierung von Filtern

IIR-Filter in direkter Form II (redundante Variante)

- $2n$ Speicher
- $2n+1$ Multiplikationen und $2n$ Additionen
- n Rückkopplungen



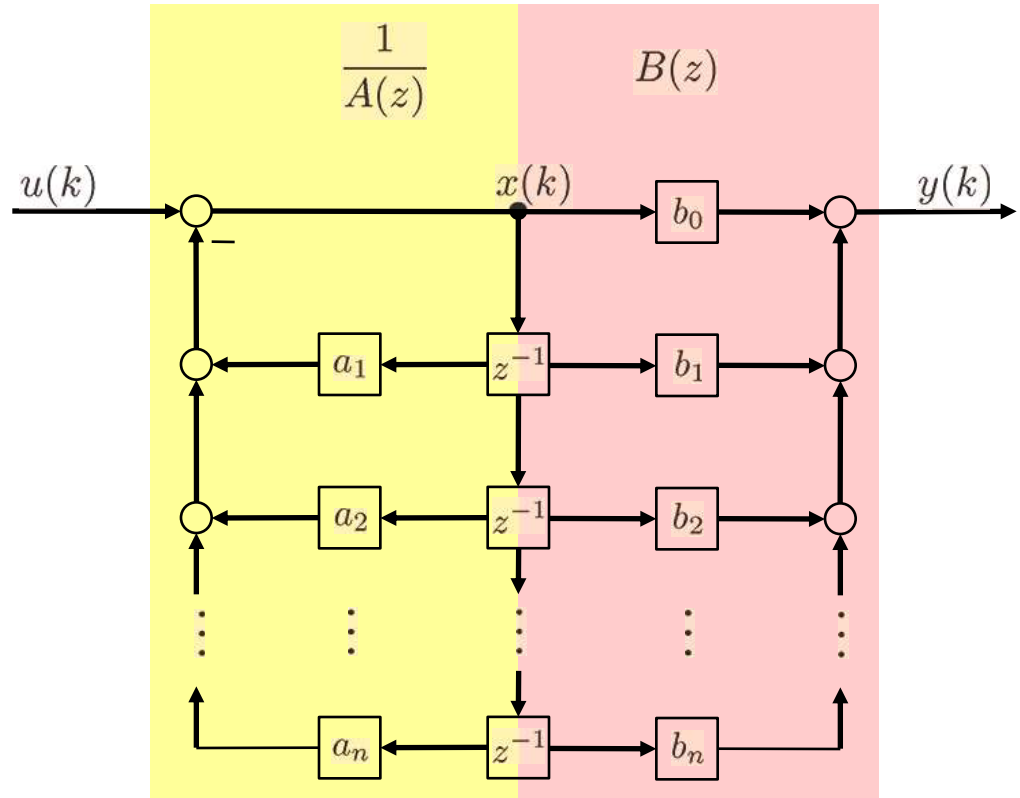
$$x(k) = u(k) - a_1x(k-1) - a_2x(k-2) - \dots - a_nx(k-n)$$

$$y(k) = b_0x(k) + b_1x(k-1) + b_2x(k-2) + \dots + b_nx(k-n)$$

4.5 Implementierung von Filtern

IIR-Filter in direkter Form II (nicht redundante Variante)

- n Speicher
- n Speicher entsprechen den n Zuständen des Filters (s. Zustandsraum in Digitale Regelung)
- $2n+1$ Multiplikationen und $2n$ Additionen
- n Rückkopplungen



$$x(k) = u(k) - a_1x(k-1) - a_2x(k-2) - \dots - a_nx(k-n)$$

$$y(k) = b_0x(k) + b_1x(k-1) + b_2x(k-2) + \dots + b_nx(k-n)$$

4.5 Implementierung von Filtern

Kaskaden- bzw. Ketten-Form

Besteht aus einer Reihenschaltung von IIR-Filter-Blöcken 2. Ordnung in direkter Form II:

$$G(z) = \prod_{i=1}^l \frac{b_{i0} + b_{i1}z^{-1} + b_{i2}z^{-2}}{1 + a_{i1}z^{-1} + a_{i2}z^{-2}}$$

In jedem Block bestehend aus einem IIR-Filter 2. Ordnung werden entweder ein konjugiert komplexes Polpaar oder zwei reelle Pole zusammengefasst. Für eine gerade Ordnung n des Gesamtfilters gilt $l = n/2$. Für ungerades n gilt $l = (n+1)/2$ und $b_{l2} = a_{l2} = 0$.

Parallel-Form

Besteht aus einer Parallelschaltung der Filter, die aus einer Partialbruchzerlegung entstehen:

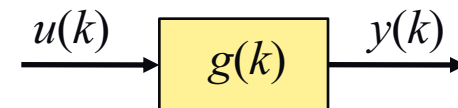
$$G(z) = \sum_{i=1}^{l_1} c_i z^{-i} + \sum_{i=1}^{l_2} \frac{d_i}{1 + a_i z^{-1}} + \sum_{i=1}^{l_3} \frac{g_i(1 + e_i z^{-1})}{(1 + f_i z^{-1})(1 + f_i^* z^{-1})}$$

D.h. IIR-Filter mit Polen bei 0, mit reellen Polen bei $-a_i$ und mit konjugiert komplexen Polpaaren bei $-f_i$ und $-f_i^*$ werden parallel betrieben.

Leiter-Form (*ladder*) und Gitter-Form (*lattice*)

Darstellungen als Kettenbruch und als Gitterstruktur werden häufig eingesetzt und haben vorteilhafte Eigenschaften, z.B. in Bezug auf die Robustheit gegenüber Rundungsfehlern.

4.6 Akausale Filter

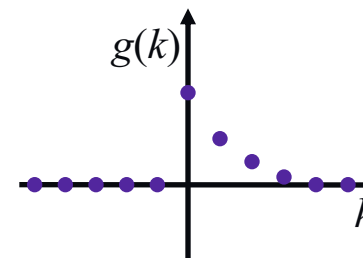


Kausaler Filter

Bei einem *kausalen* Filter hängt der Ausgang $y(k)$ nur vom *aktuellen und vergangenen* Eingang $u(k-i)$ mit $i \geq 0$ ab. Dies bedeutet automatisch, dass die Gewichtsfunktion (Impulsantwort) für negative Zeiten gleich Null ist:

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} g(i)u(k-i) = \sum_{i=0}^{\infty} g(i)u(k-i)$$

weil $g(i) = 0$ für $i < 0$, ansonsten würde Zukunft eingehen: $u(k-i)$

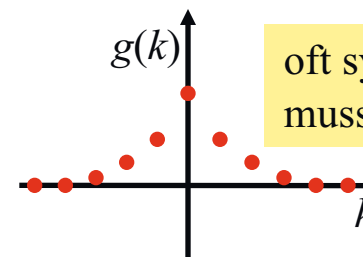


Akausaler Filter

Bei einem *akausalen* Filter hängt der Ausgang $y(k)$ auch vom *zukünftigen* Eingang $u(k-i)$ mit $i < 0$ ab. Dies bedeutet automatisch, dass die Gewichtsfunktion (Impulsantwort) für negative Zeiten ungleich Null ist:

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} g(i)u(k-i) \neq \sum_{i=0}^{\infty} g(i)u(k-i)$$

weil $g(i) \neq 0$ für $i < 0$, weil Zukunft eingehen muss: $u(k-i)$

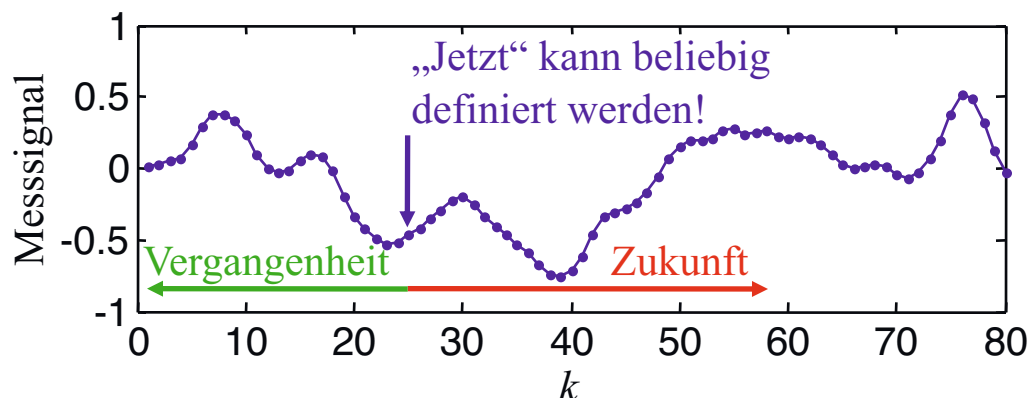


oft symmetrisch,
muss aber nicht sein

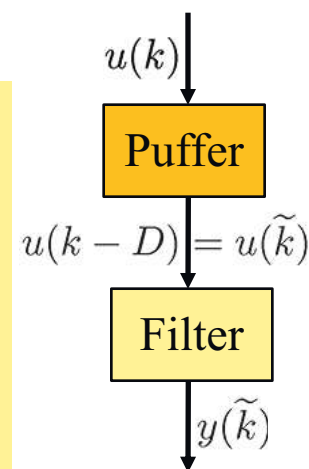
4.6 Akausale Filter

Wie kann man die Zukunft kennen, um einen akausalen Filter zu rechnen?

- *Offline-Datenverarbeitung*: Der gesamte Messdatensatz liegt von Anfang bis Ende im Computer vor. Dann kann auf jeden Messzeitpunkt beliebig zugegriffen werden.
- *Daten-Pufferung bei Online-Datenverarbeitung*: Daten werden für einige, z.B. D , Abtastzeitpunkte in einem Zwischenspeicher oder Puffer (*buffer*) abgelegt, bevor sie weiterverarbeitet werden. Die gesamte Datenverarbeitung wird also zeitlich um D Abtastschritte verzögert. Indem man auf die gepufferten Datenelement zugreift kann man dann aus Sicht der restlichen Datenverarbeitung max. D Zeitschritte in die Zukunft schauen. Ein akausaler Filter darf also eine Gewichtsfunktion ungleich Null bis max. $g(-D)$ aufweisen. Diese Möglichkeit bezahlt man aber mit einer durch den Puffer verursachten Totzeit von D Abtastschritten.



Signalverarbeitung basiert auf den gepufferten Größen mit Zeit $\tilde{k} = k - D$ und kann somit auf folgende im Puffer gespeicherte „Zukunft“ zugreifen:

$$\begin{aligned} \tilde{k} + 1 &= k - D + 1 \\ &\vdots \\ \tilde{k} + D &= k \end{aligned}$$


4.6 Akausale Filter

Vorteile akausaler Filter

- Durch eine zu $k = 0$ symmetrische Gewichtsfunktion entsteht ein Filter mit rein reellem Frequenzgang, d.h. ohne jede Phasenverschiebung!

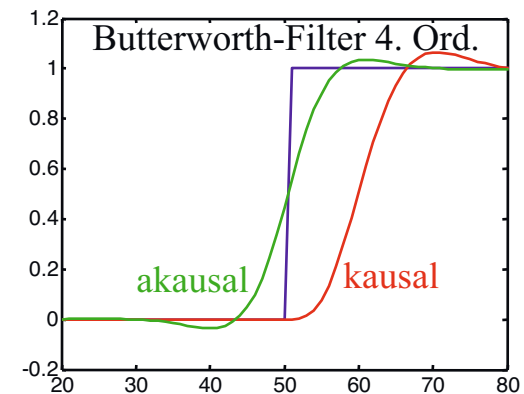
Symmetrie bedeutet: $G(z) = \dots + b_2z^2 + b_1z^1 + b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} \dots$

Umformen:

$$G(z) = b_0 + b_1 \underbrace{(z^1 + z^{-1})}_{\substack{\text{konj. kompl.} \\ \text{Paar} \rightarrow \text{reell}}} + b_2 \underbrace{(z^2 + z^{-2})}_{\substack{\text{konj. kompl.} \\ \text{Paar} \rightarrow \text{reell}}} + \dots$$

← reell für $z = e^{i\omega T_0}$

- Durch Vorwärts- und anschließende Rückwärts-Filterung der Daten (offline möglich) wird die Phasenverschiebung jedes linearen Filters, egal ob FIR oder IIR, exakt aufgehoben. Allerdings filtert man dann effektiv mit dem quadratischen Amplitudengang $|G(i\omega)|^2$, da die Daten ja zweimal durch das Filter geschickt werden.
- Die fehlende oder zumindest reduzierte Phasenverzögerung des akausalen Filters beschleunigt die Sprungantwort (und alle anderen dynamischen Antworten) des Filters.



4.6 Akausale Filter

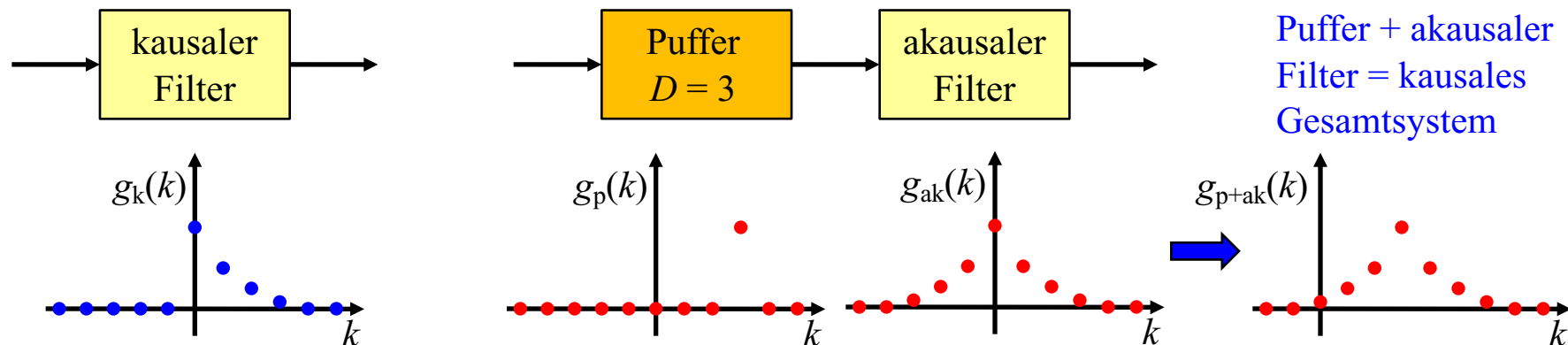
Nachteile akausaler Filter

- Nicht anwendbar bei strengen Echtzeitanforderungen, wenn Verzögerungen nicht tolerabel sind, z.B. im geschlossenen Regelkreis.

In Kommunikationssystemen sind Laufzeitverzögerungen durch Puffer meist entweder

- irrelevant, wenn die Kommunikation nur in einer Richtung stattfindet (TV, Radio)
- vernachlässigbar, wenn die Kommunikation in zwei Richtungen stattfindet (Telefon), weil durch die Signallaufzeiten schon viel größere Verzögerungen verursacht werden.

In Regelsystemen führt ein Puffer eine zusätzliche Totzeit ein. Diese hat stark nachteilige Auswirkungen auf die Regelgüte (Verringerung des Phasenrands, evtl. Gefahr für Stabilität). Diese Nachteile werden durch eine bessere Signalqualität nicht kompensiert.

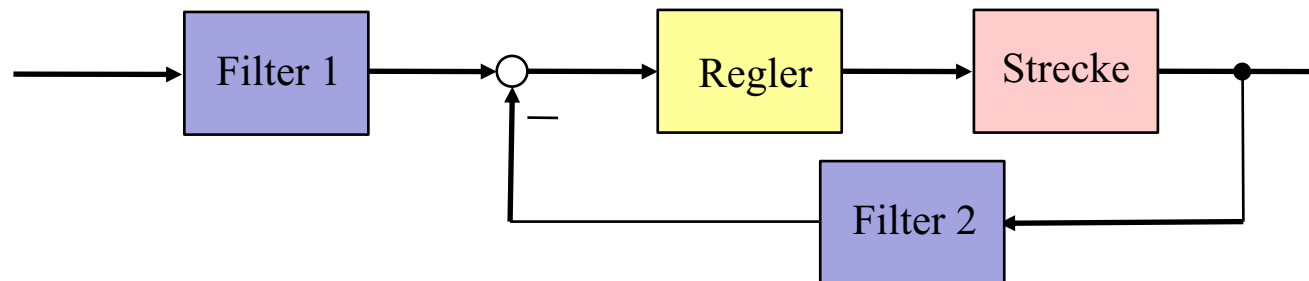


4.6 Akausale Filter

Akausale Filter im Regelkreis

Regelkreise geben schöne Beispiele für die Verwendung akausaler Filter:

1. Führungsgrößenfilter: Oft ist der zukünftige Verlauf der Führungsgröße bekannt. Es soll ein bestimmtes Profil abgefahren werden. Dann können hier akausale Filter problemlos verwendet werden.
2. Rückkopplungsfilter: Der Soll/Istwert-Vergleich benötigt die Regelgröße ohne Verzögerung, damit der Regler sofort darauf reagieren kann. Ein akausaler Filter mit Puffer führt künstlich eine Totzeit ein, welche eine Regelung durch den Phasenverzug sehr viel schwieriger macht. Hier ist ein akausaler Filter also kontraproduktiv. Da die zukünftige Regelgröße unbekannt ist, kann ein „echter“ akausaler Filter nicht verwendet werden.



4.7 Nichtlineare Filter

Nichtlineare Filter finden wegen ihres hohen Komplexitätsgrades und komplizierten Entwurfs wenig Verwendung. Im Anwendungsgebiet der Bildverarbeitung sind nichtlineare Filter allerdings nicht ganz selten anzutreffen. Am häufigsten werden nichtlineare Filter verwendet, die den max-, min- oder andere Rangfolge-Operatoren einsetzen.

Median-Filter

Der wichtigste nichtlineare Filter ist der Median-Filter. Er eignet sich insbesondere zum Herausfiltern von Ausreißern. Im Gegensatz zum arithmetischen Mittelwert, ist der Median einer Zahlenfolge der Wert, bei dem die Hälfte aller Werte größer und die andere Hälfte aller Werte kleiner sind. Ordnet man also alle Werte einer Folge der Größe nach, so steht der Median genau in der mittleren Position.

Beispiel:

Zahlenfolge: 4, 7, 20, 21, 30 → Median = 20, Mittelwert = 16,4

Zahlenfolge: 4, 7, 20, 21, 1000 → Median = 20, Mittelwert = 210,4

Der Median wird oft verwendet um den Einfluss von Ausreißern zu eliminieren, z.B. bei Statistiken zur: durchschnittlichen Studiendauer, Einkommen, etc.

4.7 Nichtlineare Filter

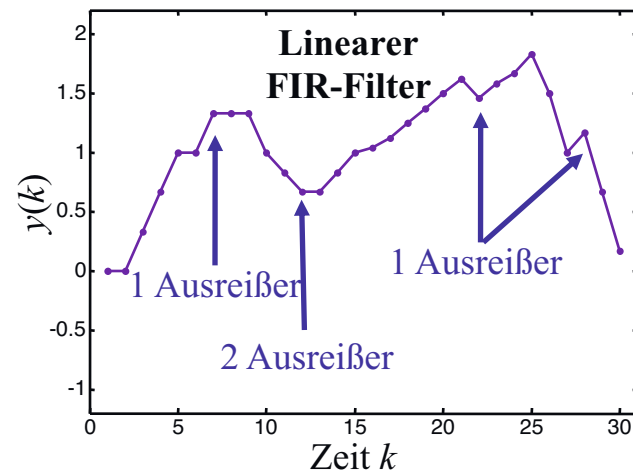
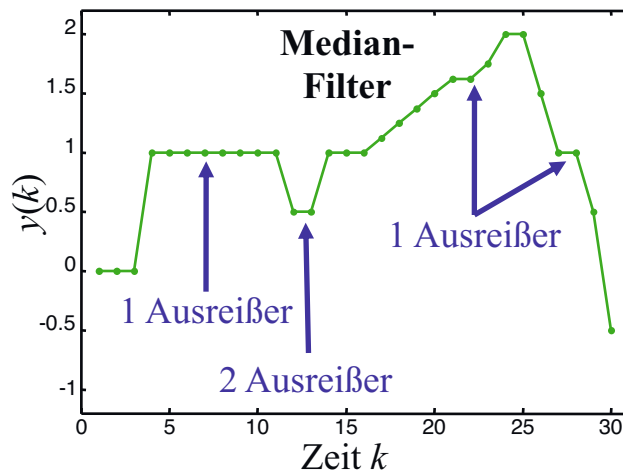
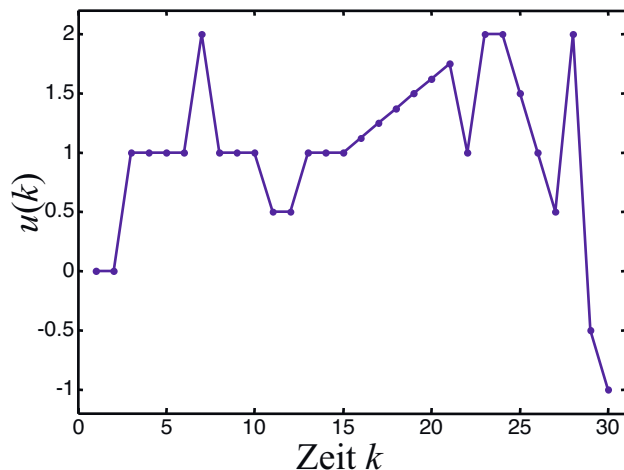
Median-Filter zur Elimination von Ausreißern

Ein Median-Filter n . Ordnung liefert als Ausgangswert $y(k)$ den Median der letzten n Datenpunkte $u(k), u(k-1), \dots, u(k-n+1)$. Mit einem Median-Filter n . Ordnung können aus n aufeinanderfolgenden Datenpunkte $(n-1)/2$ Ausreißer herausgefiltert werden.

Beispiel: Median-Filter 3. Ordnung versus linearer Mittelwert-FIR-Filter

Median-Filter: $y(k) = \text{median} \{u(k), u(k-1), u(k-2)\}$

Linearer FIR-Filter: $y(k) = \frac{1}{3}u(k) + \frac{1}{3}u(k-1) + \frac{1}{3}u(k-2)$



4.8 Ausblick: Adaptive Filter

Was ist ein adaptiver Filter?

Bei einem adaptiven Filter sind die Filterparameter nicht konstant, sondern ändern sich mit der Zeit. Ein adaptives Filter ist somit ein *zeitvariantes*, dynamisches System. Eingesetzt werden adaptive Filter, wenn sich die gewünschten Eigenschaften oder Anforderungen an das Filter über die Zeit verändern. Typische Anwendungsfälle sind:

- *Online Systemidentifikation*: Ein zeitvarianter Prozess soll anhand von Messdaten mit einem dynamischen Filter identifiziert (modelliert) werden. Da sich der Prozess zeitlich verändert, muss sich auch der Filter ständig dem Prozessverhalten anpassen.
- *Kanalverzerrung*: Ein Signal wird zwischen Sender und Empfänger durch die dynamischen Eigenschaften des Kanals (z.B. Reflektionen bei Funkübertragung) verzerrt. Diese Verzerrung muss nach dem Empfang rückgängig gemacht (kompensiert) werden. Da sich die Kanaleigenschaften ändern, benötigt man dazu einen adaptiven Filter.
- *Echokompensation*: Zur Vermeidung (Abschwächung) von Rückkopplungen werden adaptive Filter eingesetzt, um den Signalanteil vom Lautsprecher zurück zum Mikrofon zu eliminieren (abzuschwächen).
- *Aktive Rauschunterdrückung*: Ein Filter modelliert den Übertragungsweg des Störsignals, um es aktiv zu kompensieren, d.h. gegenphasig einzuspeisen (destruktive Interferenz).

4.8 Ausblick: Adaptive Filter

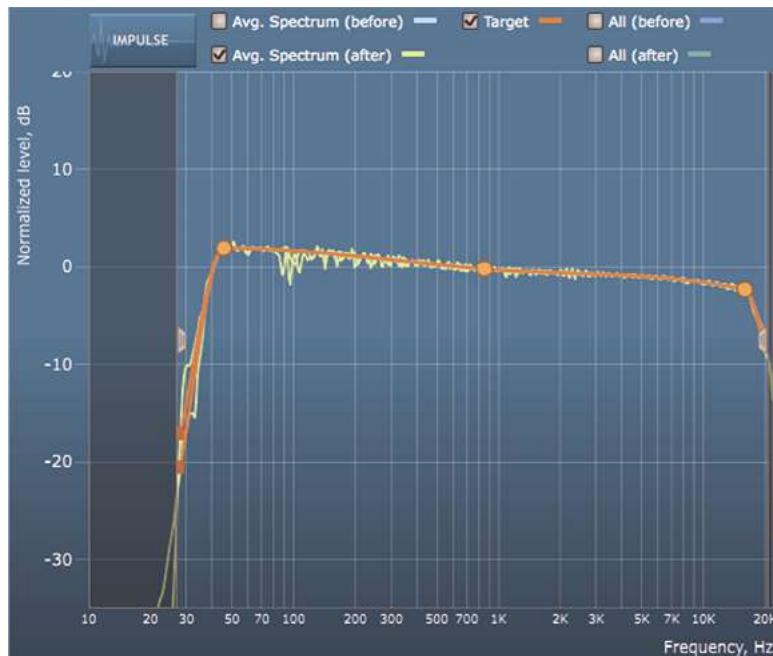
Audio-Einmesssystem

Raum-Ampl.gang des linken und rechten Kanals:

- weiß: neuraler Verstärker (vor Einmessen)
- orange: gewünschte Charakteristik
- grün: optimierter Verstärker (nach Einmessen)

[mactechnews]

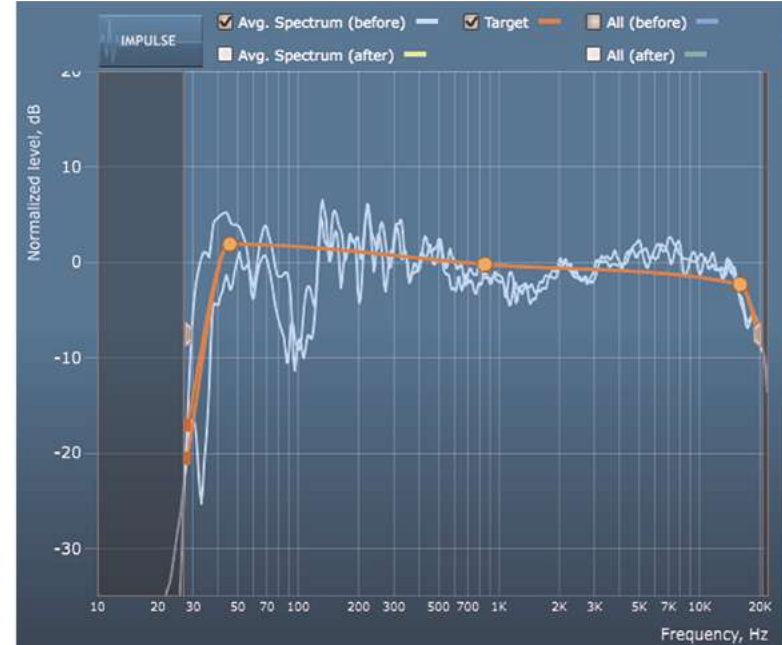
Amplitudengang: Optimal
alle Frequenzen gleich



Amplitudengang: Optimal
höhen- und tiefbetont



Amplitudengang: Original



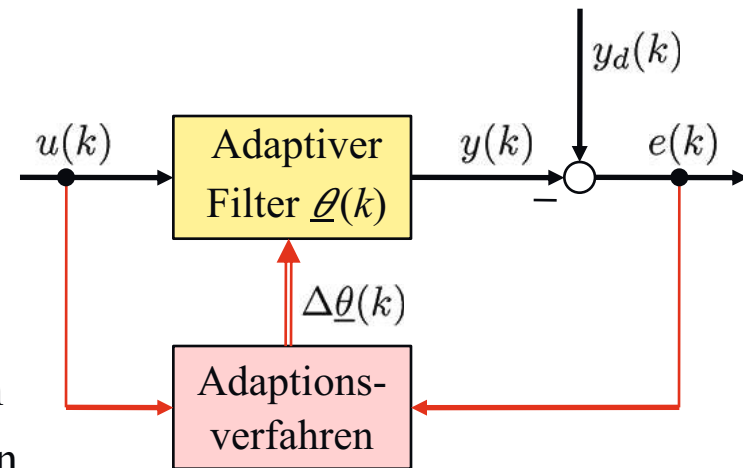
4.8 Ausblick: Adaptive Filter

Funktionsprinzip eines adaptiven Filters

- Vergleich zwischen gewünschtem (*desired*) Filterausgang $y_d(k)$ und Filterausgang $y(k)$.
- Berechnung des Fehlers $e(k)$.
- Im Adaptionsverfahren wird aus dem Fehlersignal die Veränderung der Filterparameter berechnet (*Update*). Dies geschieht üblicherweise nach dem Schema:

$$\underline{\theta}(k+1) = \underline{\theta}(k) + \Delta\underline{\theta}(k)$$

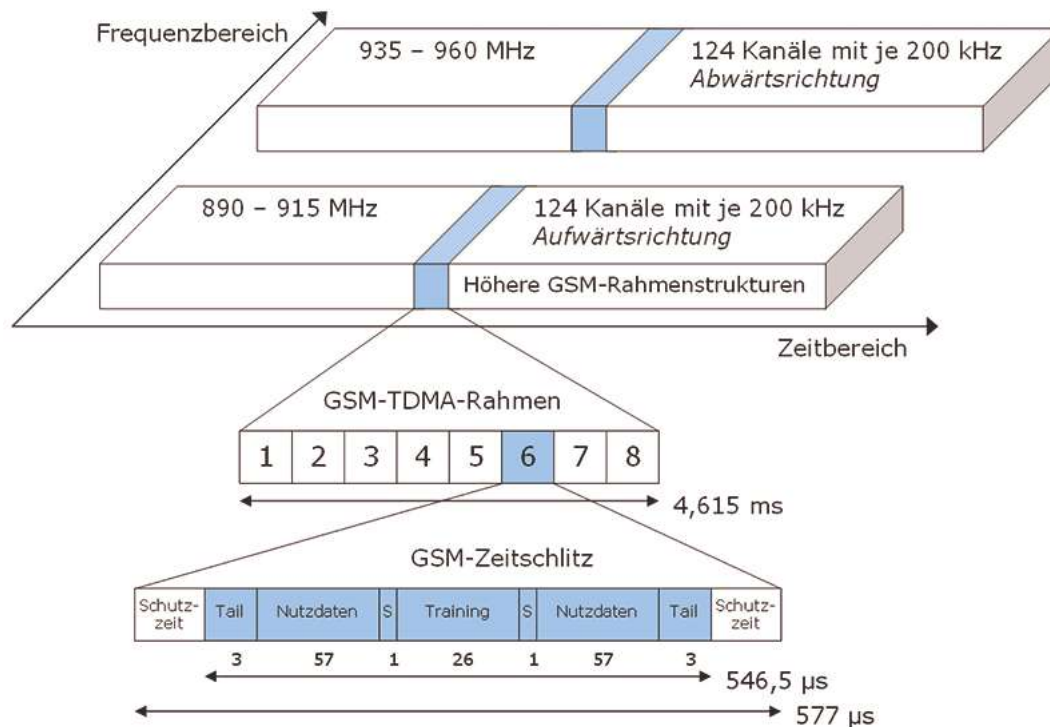
- Die verschiedenen Adaptionsverfahren unterscheiden sich in der Berechnung dieses Parameter-Updates $\Delta\underline{\theta}(k)$. Dabei wird für die jeweilige Anwendung der optimale Kompromiss zwischen den konkurrierenden Zielen gesucht:
 - Konvergenzgeschwindigkeit
 - Nachlaufgeschwindigkeit (*tracking speed*)
 - Rechenaufwand pro Updateschritt
 - Numerische Robustheit (Rundungsfehler!)
- Typische Adaptionsverfahren sind:
 - Least Mean Squares (LMS): Gradientenverfahren
 - Recursive Least-Squares (RLS): Newtonverfahren



4.8 Ausblick: Adaptive Filter

GSM: Mobilfunk

- Daten werden in Paketen à 148 Bits übertragen.
- Davon sind 26 Bits ein Referenzsignal zum Training des adaptiven Filters im Handy.
- Dies führt auf einen Overhead von ca. 17%.
- Ein Paket wird in 0,546 ms gesendet und empfangen.



[wikipedia]

4.8 Ausblick: Adaptive Filter

Online-Adaption

Das Gradientenverfahren versucht den quadratischen Fehler $e^2(k)$ zu minimieren, indem es den Parametervektor in Richtung des steilsten Abstieg (negative Gradientenrichtung) um eine vorgegebene Schrittweite η verändert:

$$\Delta \underline{\theta}(k) = -\eta \frac{de^2(k)}{d\underline{\theta}(k)}$$

Meistens werden adaptive Filter vom FIR-Typ eingesetzt, d.h.:

$$y(k) = \theta_1 u(k-1) + \theta_2 u(k-2) + \dots + \theta_m u(k-m)$$

$$\text{mit } \Delta \underline{\theta} = \begin{pmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \vdots \\ \Delta \theta_m \end{pmatrix}$$

Damit berechnet sich das Parameter-Update zu (Merke: $e(k) = y_d(k) - y(k)$):

$$\Delta \underline{\theta}(k) = -2\eta e(k) \frac{de(k)}{d\underline{\theta}(k)} = 2\eta e(k) \frac{dy(k)}{d\underline{\theta}(k)} = \eta' e(k) \begin{pmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(k-m) \end{pmatrix}$$

D.h. die Korrektur des Parametervektors geschieht proportional zur neuen Schrittweite η' , zum aktuellen Fehler $e(k)$ und zur „Anregung“ des jeweiligen Parameters θ_i mittels $u(k-i)$.



Diskrete Übertragungsfunktion:

```
sys = filt(num,den);2 % Vorgabe einer diskreten Übertragungsfunktion  
% zur digitalen Signalverarbeitung
```

FIR-Filter:

```
fir1;1 % FIR-Filter, das die Fenster-Methode verwendet  
firls;1 % FIR-Filter mit Least-Squares-Optimierung  
firpm;1 % FIR-Filter mit Parks-McClellan-Optimierung
```

IIR-Filter:

```
besself;1 % Bessel-Filter  
butter;1 % Butterworth-Filter  
cheby1;1 % Tschebycheff-Filter Typ 1  
cheby2;1 % Tschebycheff-Filter Typ 2  
ellip;1 % Cauer-Filter (elliptischer Filter)
```



```
y = filter(b,a,X); % Digitales IIR-Filter (direkte Form II)
y = filtfilt(b,a,X);1 % Analog zu filter, jedoch wird vor- und
% rückwärts in der Zeit gefiltert. Kann
% auch als akausales Filter interpre-
% tiert werden.

[b,a] = yulewalk(n,f,m);1 % Digitales, rekursives IIR-Filter.
% Benutzt Least-Squares zur Nachbildung
% eines vorgegebenen Frequenzgangs

H = dfilt.structure(in1,...);1 % Liefert zeitdiskretes Filter nach
% der Methode 'structure', siehe
% MATLAB-Hilfe

[b,a] = prony(h,n,m);1 % Filterentwurf im Zeitbereich nach der
% sog. Prony-Methode: Filter mit Impuls-
% antwort h
```



Filter-Parameter-Identifikation:

```
[b,a] = invfreqz(h,w,n,m);1    % Identifiziert zeitdiskrete Filter-  
                                     % Parameter aus Amplituden- und  
                                     % Phasengang (zeitkontinuierlich:  
                                     % invfreqs)
```

¹ : *Signal Processing Toolbox*

² : *Control System Toolbox*

5. Stochastische Signale

Inhalt Kapitel 5

5. Stochastische Signale

5.1 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

5.2 Erwartungswert, Momente und Varianz

5.3 Korrelation

5.4 Stationarität und Ergodizität

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

5.6 Leistungsdichtespektrum

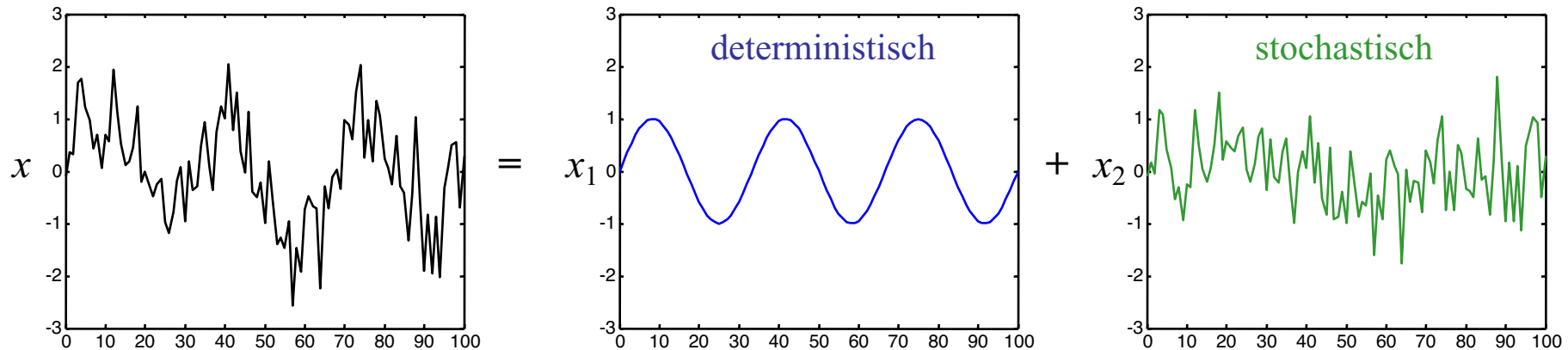
5.7 Stochastische und deterministische Modelle

5.1 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Deterministische oder stochastische Beschreibung?

Wenn sich eine Größe zufällig oder scheinbar zufällig verhält, dann ist es sinnvoll, diese Größe stochastisch, d.h. mittels einer *Zufallsvariablen* zu beschreiben. Dabei spielt es keine Rolle, ob das Verhalten *echten* zufälligen Ursprungs ist, wie z.B. radioaktiver Zerfall, oder ob es durch Verknüpfung unüberschaubar vieler komplexer Einflüsse verschiedenster Herkunft „nur“ zufällig schwankend *wirkt*, wie z.B. Börsenkurse, deren Ursprung sicherlich rein deterministisch ist (niemand kauft oder verkauft Aktien zufällig).

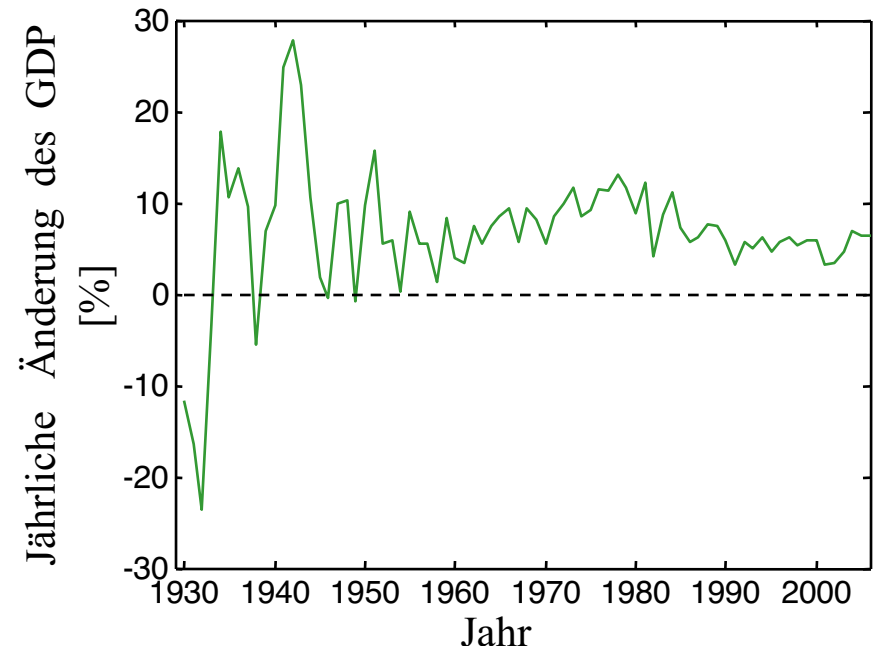
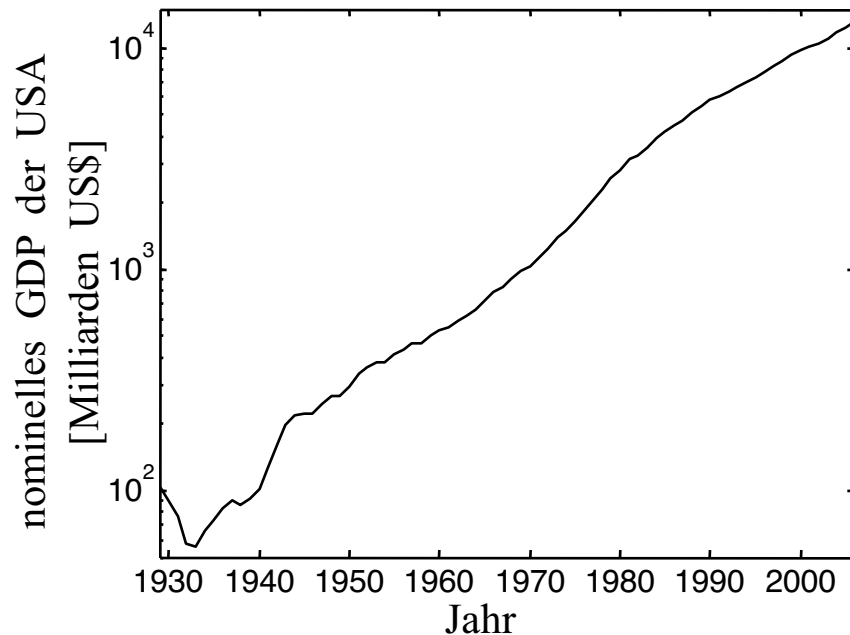
Oft kommt es auch vor, dass eine Größe zu einem Teil deterministisch und zu einem weiteren Teil stochastisch beschrieben wird. Typisch ist die Beschreibung einer Größe $x = x_1 + x_2$ als Summe eines deterministischen Anteils x_1 und eines zufälligen Anteils x_2 .



5.1 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Beispiel: Bruttoinlandsprodukt (BIP)

Das Bruttoinlandsprodukt (BIP) als Wohlstandsmaß für Nationen weist in allen entwickelten Ländern einen klaren exponentiellen Wachstumstrend (linear in logarithmischer Skalierung) auf. Dieser Trend lässt sich rein deterministisch beschreiben. Diesem Trend überlagert sind Einflüsse durch Konjunkturschwankungen (zyklisch), Börsencrashes, Ölkrisen oder Kriege (Schocks) u.ä. Diese lassen sich (teilweise) stochastisch beschreiben. Ein Modell für das BIP setzt sich also einem deterministischen und einem stochastischen Anteil zusammen.



5.1 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable kann eine diskrete oder eine kontinuierliche Größe sein:

- Diskrete Zufallsvariable können nur eine *endliche* Zahl an möglichen Ereignissen annehmen, z.B. „Kopf“ oder „Zahl“ beim Münzwurf oder 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 beim Würfeln.
- Kontinuierliche Zufallsvariablen können einen kontinuierlichen Zahlbereich annehmen, z.B. alle reellen Zahlen von 0 bis ∞ bei der Modellierung einer mittleren Ausfallzeit (*mean-time-to-failure*) oder alle reelle Zahlen zwischen $-\infty$ und ∞ bei der Modellierung eines Störsignals oder alle reellen Zahlen zwischen $-q/2$ und $q/2$ mit einem Quantisierungsintervall der Breite q zur Modellierung des Quantisierungsrauschens.

Zufallsprozess

Ist eine Zufallsvariable eine Funktion der kontinuierlichen Zeit t oder der diskreten Zeit k , dann spricht man von einem *Zufallsprozess*.

Wir fokussieren uns auf kontinuierliche Zufallsvariablen, die von der diskreten Zeit abhängen.

5.1 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion (kurz: Verteilung oder *cdf*)

Betrachten wir eine kontinuierliche Zufallsvariable x mit dem Wertebereich von $-\infty$ bis ∞ .

Wie wahrscheinlich ist welcher Zahlenwert? Diese Information steckt in der

Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion (*cumulative density function, cdf*) $F(x)$.

Diese gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Wert $x \leq x_0$ von der Zufallsvariablen angenommen wird. D.h. die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion ist definiert als

$$F(x_0) = p(x \leq x_0)$$

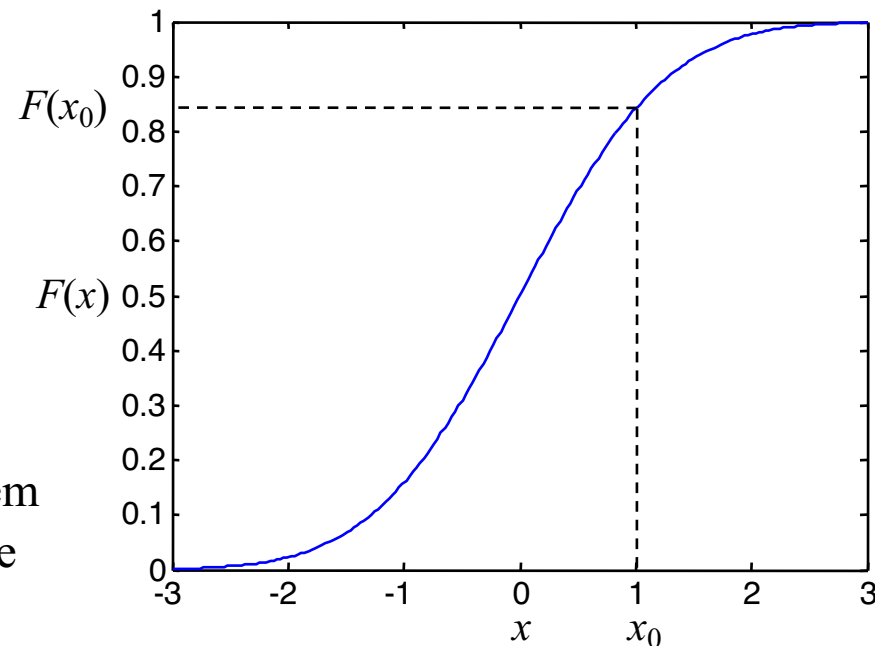
Da kein Wert kleiner sein kann als $-\infty$ gilt:

$$F(-\infty) = 0.$$

Da alle Werte kleiner sein müssen als ∞ gilt:

$$F(\infty) = 1.$$

Zwischen $-\infty$ und ∞ ist $F(x)$ eine *monoton steigende* Funktion, da die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsvariable eine Zahl aus einem gegebenen Zahlenbereich annimmt mit der Größe des Zahlenbereichs größer werden muss.



5.1 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichtefunktion (kurz: Dichte oder pdf)

Die Ableitung der *cdf* ist die **Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichtefunktion (probability density function, pdf) $f(x)$** . Die Fläche unterhalb der Dichte von $x = a$ bis $x = b$ entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable x zwischen a und b liegt.

$$\int_a^b f(x)dx = p(a \leq x \leq b)$$

Damit ergeben sich folgende Beziehungen zwischen Dichte und Verteilung:

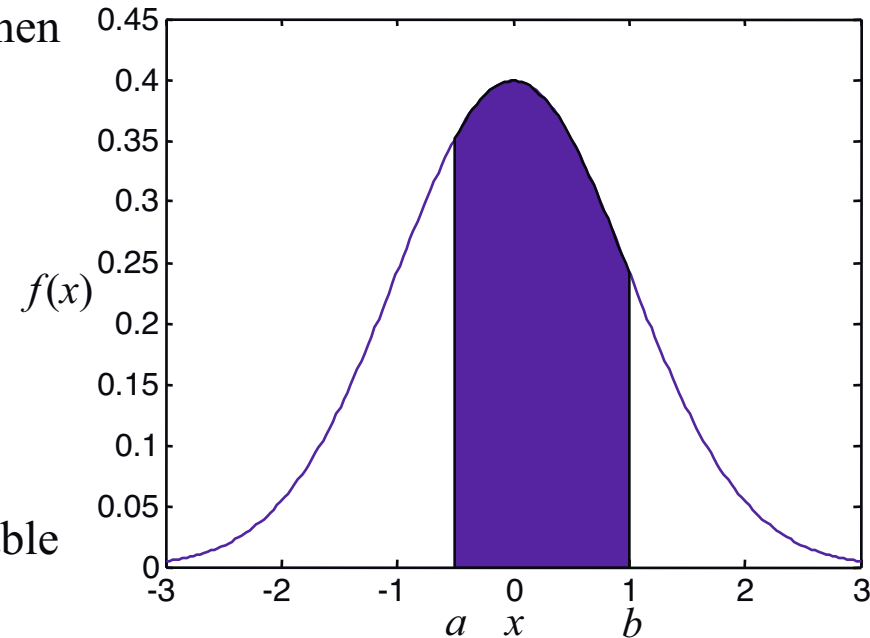
$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx$$

Außerdem gilt natürlich:

$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Für Wertebereiche $[c, d]$, welche die Zufallsvariable nicht annehmen kann, gilt $f(x) = 0, x \in [c, d]$.



5.1 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Beispiel 1: Wie wahrscheinlich ist es, dass eine Zufallsvariable mit obiger Verteilung einen Wert zwischen $-\infty$ und 1 annimmt?

Antwort: $p = F(1) = 0.84$.

Beispiel 2: Wie wahrscheinlich ist nach obiger Verteilung das Auftreten einer Zahl zwischen -1 und 1 ?

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit von Zahlen kleiner gleich 1 abzüglich der Wahrscheinlichkeit von Zahlen kleiner gleich -1 : $p = F(1) - F(-1) = 0.84 - 0.16 = 0.68$.

Beispiel 3: Wie wahrscheinlich ist nach obiger Dichte das Auftreten einer Zahl zwischen -0.5 und 1 ?

Antwort: $p = \int_{-0.5}^1 f(x)dx = F(1) - F(-0.5) = 0.84 - 0.31 = 0.53$

$$F(-0.5) = \int_{-\infty}^{-0.5} f(x)dx \quad F(1) = \int_{-\infty}^1 f(x)dx$$

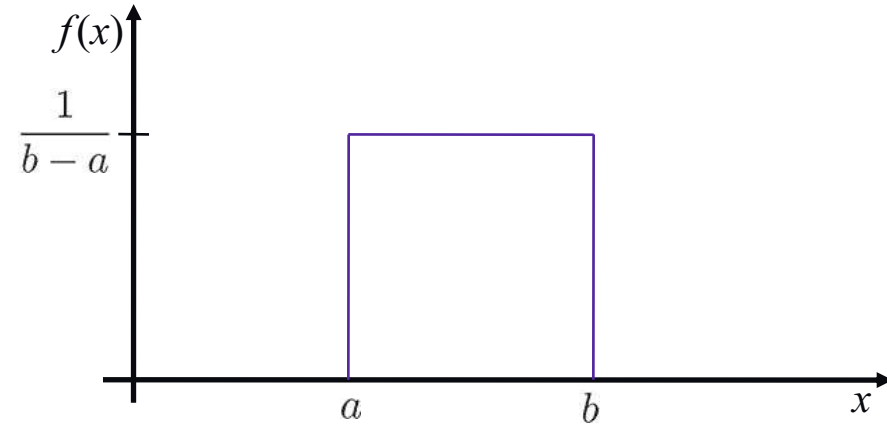
5.1 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wichtige Dichten

Gleichverteilung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Alle Zahlen zwischen a und b sind gleich wahrscheinlich; alle anderen kommen nicht vor.

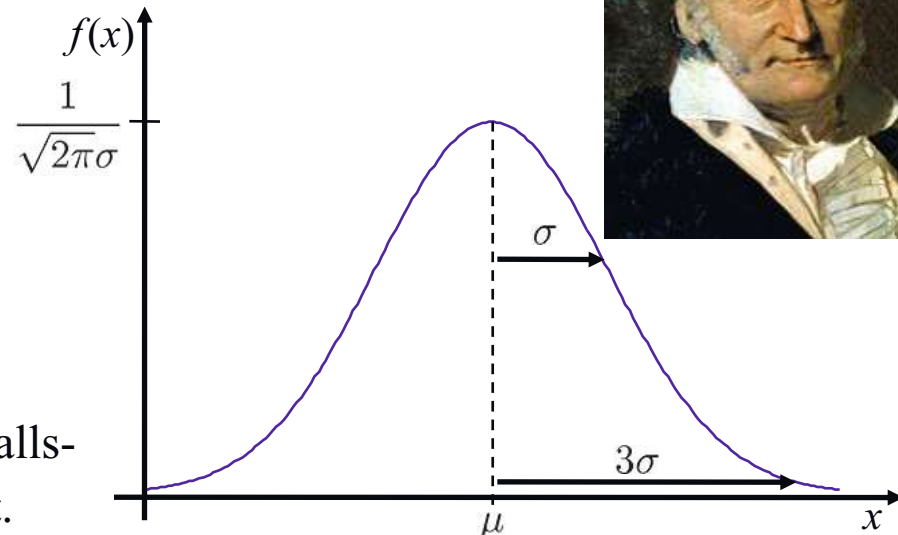


Carl Friedrich Gauß, 1777-1855
(www.wikipedia.org)

Gauß- oder Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

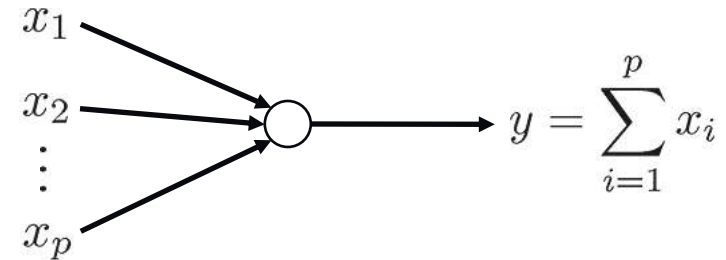
- Sehr viele Zufallsvariablen sind so verteilt.
- Ergibt sich als Grenzfall aus vielen anderen Dichten (Binomialverteilung, t-Verteilung).
- Summe aus vielen irgendwie verteilten Zufallsvariablen ist näherungsweise normalverteilt.



5.1 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

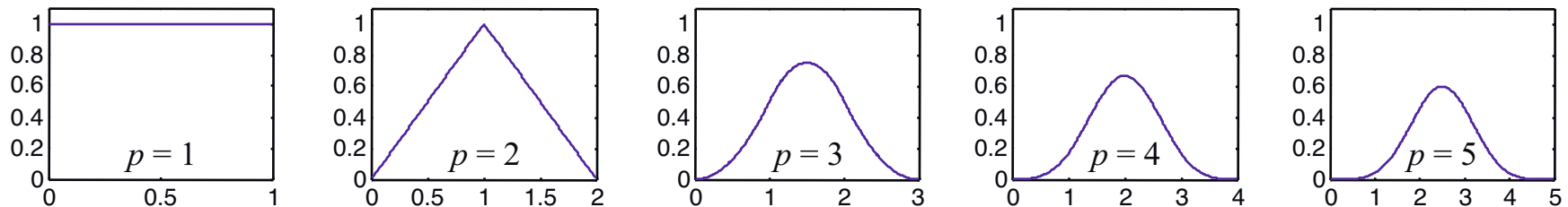
Relevanz der Gauß-Verteilung

Nach dem *zentralen Grenzwertsatz der Statistik* ist die Summe mehrerer *unabhängiger*, irgendwie verteilter Zufallsvariablen x_i näherungsweise normalverteilt. Die Näherung gilt um so besser, je mehr Zufallsvariablen addiert werden, und für $p \rightarrow \infty$ folgt y einer Gauß-Verteilung. Dabei dürfen die x_i unterschiedlich und fast beliebig verteilt sein, nur einige exotische Verteilungen (z.B. Cauchy-Verteilung) sind ausgeschlossen.



Da viele stochastisch modellierte Größen aus einer Summe unüberschaubar vieler kleiner Einzeleffekte herrühren, ist es also nicht verwunderlich sondern nahezu zwangsläufig, dass die Gauß-Verteilung so häufig vorkommt.

Folgende Graphiken zeigen die Dichten von y für verschiedene p , wenn die x_i alle zwischen 0 und 1 gleichverteilt sind:



5.1 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Mehrdimensionale Dichte und Verteilung

Wenn aus einem Zufallsexperiment mehrere Zufallsvariablen erzeugt werden, dann kann man entsprechend mehrdimensionale Dichte- und Verteilungsfunktionen (*Verbunddichte* bzw. *Verbundverteilung*) definieren, welche die *gemeinsamen* Eigenschaften dieser Zufallsvariablen wiedergeben. Der Einfachheit halber beschränken wir uns im Folgenden auf zwei Zufallsvariablen, die Erweiterung auf noch höherdimensionale Fälle ist leicht möglich.

Zwei aus einem Experiment erzeugte Zufallsvariablen x und y folgen einer gemeinsamen (2-dimensionalen) Dichte- und Verteilungsfunktion $f(x, y)$ und $F(x, y)$. Diese stehen wie im 1-dimensionalen Fall in folgender Beziehung:

$$f(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$$F(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{x_0} \int_{-\infty}^{y_0} f(x, y) dx dy$$

Mit der Dichte kann über 2-dimensionale Integration die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass x und y gleichzeitig in einem bestimmten Intervall liegen. Aus der Verteilung liest man ab, mit welcher Wahrscheinlichkeit $x \leq x_0$ und gleichzeitig $y \leq y_0$ sind:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = p(a \leq x \leq b \cap c \leq y \leq d)$$

$$F(x_0, y_0) = p(x \leq x_0 \cap y \leq y_0)$$

5.1 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Randdichten

Die Dichte $f(x, y)$ gibt an wie x und y *gemeinsam* verteilt sind. Daraus lassen sich die einzelnen Dichte berechnen, indem man über die jeweils anderen Variablen integriert. So erhält man die sog. *Randdichten*, welche die Dichte einer Zufallsvariablen angeben, unter der Voraussetzung, dass über die jeweils anderen Zufallsvariablen nichts bekannt ist.

Randdichten:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

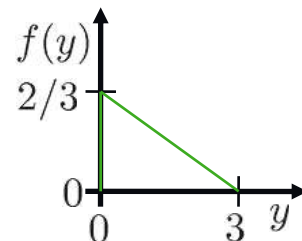
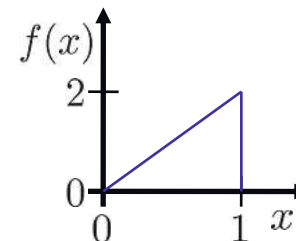
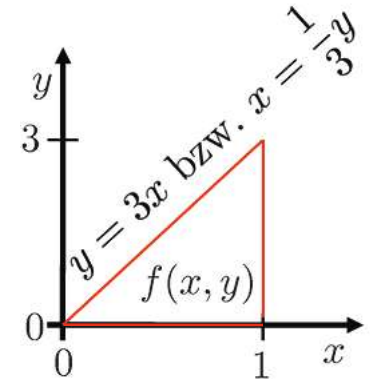
$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

Beispiel: 2-dimensionale Gleichverteilung innerhalb des roten Gebiets

Da die Fläche des Dreiecks $3/2$ beträgt muss die Gleichverteilung die Höhe $2/3$ haben (Volumen unter $f(x, y)$ muss = 1 sein!).

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{y=0}^{y=3x} \frac{2}{3} dy = \frac{2}{3} y \Big|_0^{3x} = 2x$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_{x=\frac{1}{3}y}^{x=1} \frac{2}{3} dx = \frac{2}{3} x \Big|_{\frac{1}{3}y}^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{9}y$$



5.1 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

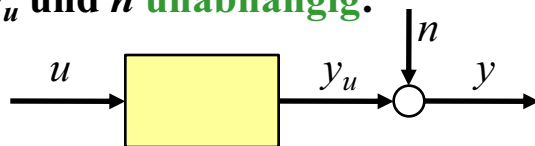
Statistische Unabhängigkeit

Zwei Zufallsvariablen x und y sind *statistisch unabhängig*, wenn man –nachdem das Zufallsexperiment durchgeführt worden ist– aus dem Wissen des Wertes der einen Zufallsvariable keinerlei Information über die andere gewinnt.

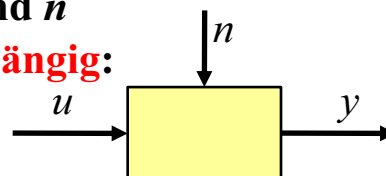
Physikalisch liegt statistische Unabhängigkeit normalerweise dann vor, wenn die beiden Zufallsvariablen unterschiedliche Ursachen haben. Typischerweise nimmt man z.B. an, dass eine zu messende Größe y_u additiv durch eine Störung in Form von Messrauschen n gestört wird, welche externe Ursachen hat, die nichts mit der Erzeugung von y_u zu tun haben. Dann kann man von statistischer Unabhängigkeit von y_u und n ausgehen. Dies vereinfacht die weiteren Betrachtungen i.A. erheblich!

Wirkt die Störung hingegen im Inneren des Prozesses (z.B. auf eine Zustandsgröße) ein, dann beeinflusst sie damit y_u , und die beiden Variablen sind statistisch abhängig. Gleiches gilt, falls $y = y_u + n$ die Regelgröße eines geschlossenen Regelkreis darstellt. Durch die Rückkopplung wird auch n rückgekoppelt und beeinflusst damit y_u .

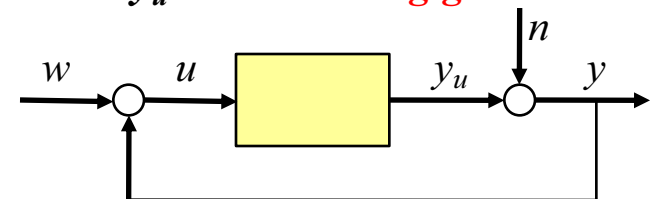
y_u und n **unabhängig**:



y und n **abhängig**:



y_u und n **abhängig**:



5.1 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Prüfung auf statistische Unabhängigkeit

In der Praxis ergibt sich die statistische Abhängigkeit oder Unabhängigkeit zweier (oder mehrerer) Zufallsvariablen oft aus grundsätzlichen Überlegungen (siehe vorherige Seite).

Des Weiteren gibt es statistische Test, die es erlauben (mit einer gewissen Irrtumswahrscheinlichkeit), anhand von gesammelten Daten auf statistische Unabhängigkeit zu prüfen.

Rein formal sind zwei Zufallsvariable x und y *statistisch unabhängig*, wenn sich ihre gemeinsame Dichte- bzw. Verteilungsfunktion als Produkt ihrer Randdichten bzw.

Randverteilungen erzeugen lassen, d.h. wenn gilt:

$$f(x, y) = f(x)f(y)$$

$$F(x, y) = F(x)F(y)$$

Beispiel: Für die gemeinsame Gleichverteilung zwei Folien zuvor galt:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{im Dreieck} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad f(y) = \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{2}{9}y & 0 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

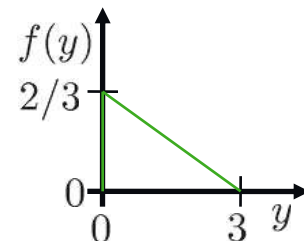
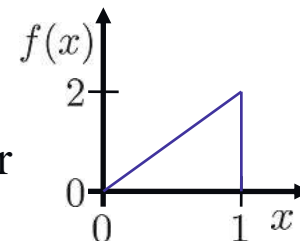
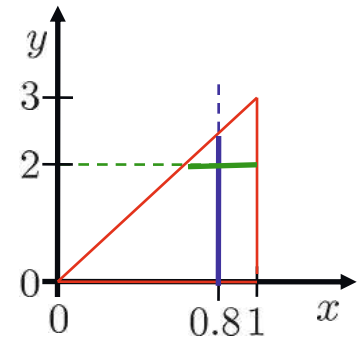
$$\rightarrow f(x)f(y) = 2x \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{9}y \right) \neq \frac{2}{3} = f(x, y) \rightarrow \text{statistisch abhängig!}$$

5.1 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Interpretation statistischer Abhängigkeit

Statistische Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen x und y bedeutet, dass wir aus der Kenntnis der einen Variable Information über die andere gewinnen können. Anhand des obigen Beispiels bedeutet dies:

- x und y unbekannt: Alle Kombinationen (x, y) innerhalb des Dreiecks sind gleich wahrscheinlich. D.h. große Werte (nahe 1) von x sind wahrscheinlicher als kleine (nahe 0) und kleine Werte (nahe 0) von y sind wahrscheinlicher als große (nahe 3). Dies erkennt man auch sehr leicht an den Randdichten!
- $x = 0.8$ und y unbekannt: Wir befinden uns also auf der dicken blauen Line bei $x = 0.8$. Damit sind alle Wert für y zwischen 0 und 2.4 ($= 3 \cdot 0.8$) gleich wahrscheinlich. Wir wissen aus dem Wert für x , dass y nicht größer als 2.4 sein kann. Außerdem ändern sich die Wahrscheinlichkeiten für die anderen Zahlenwerte!
- x unbekannt und $y = 2$: Wir befinden uns also auf der dicken grünen Line bei $y = 2$. Damit sind alle Werte für x zwischen $2/3$ und 1 gleich wahrscheinlich, x -Werte kleiner $2/3$ können nicht mehr vorkommen!



5.1 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

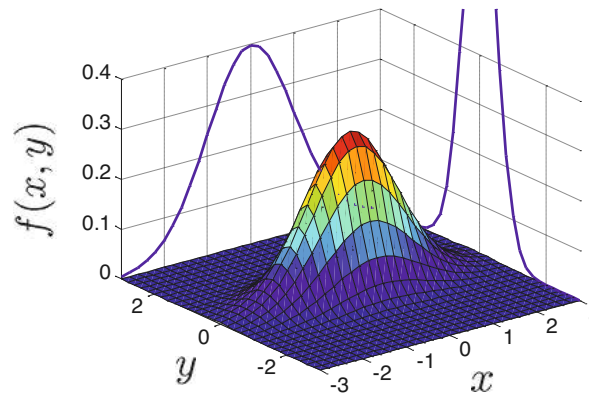
Statistische Unabhängigkeit bei Gauß-Verteilung (Graph)

Eine mehrdimensionale (multivariate) Gauß-Verteilung beschreibt statistisch unabhängige Zufallsvariablen, wenn sie sich als Produkt der 1-dimensionalen (univariaten) Gauß-Verteilungen schreiben lässt.

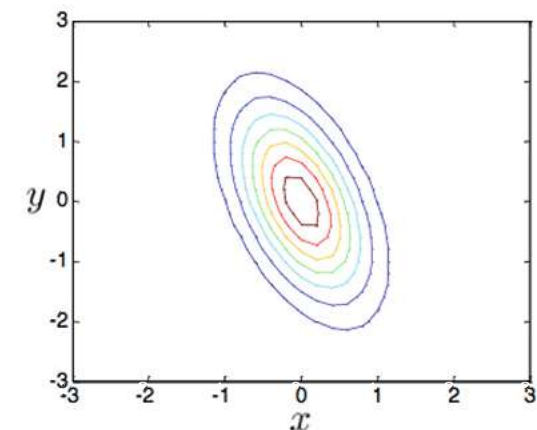
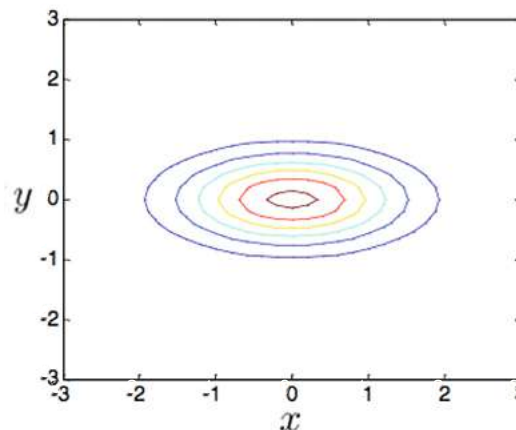
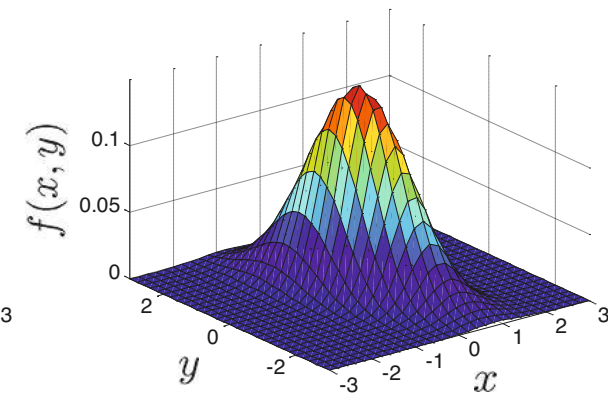
Graphisch kann man dies daran erkennen, dass die Gaußglocke *achsenorthogonal* ausgerichtet ist. Für die Höhenlinien (das sind Ellipsen) bedeutet dies, dass die Hauptachsen entlang des Koordinatensystem verlaufen.

Dieses 2-dimensionale Beispiel lässt sich leicht auf beliebige Dimensionen erweitern.

x und y unabhängig:



x und y abhängig:



5.1 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Statistische Unabhängigkeit bei Gauß-Verteilung (Formel)

Das Produkt zweier gaußscher Randdichten ergibt zwangsläufig eine achsenorthogonale Gauß-Verteilung:

$$\begin{aligned} f(x)f(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]} = f(x,y) \end{aligned}$$

Wenn im Exponenten der e-Funktion Kreuzterme $x \cdot y$ auftauchen, dreht sich die Gaußglocke (und die elliptischen Höhenlinien) und die gemeinsame Dichte kann nicht mehr als Produkt der Randdichten beschrieben werden. Im diesem allgemeinen Fall wird eine 2-dimensionale Gaußverteilung beschrieben durch:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{xy}^2)} \left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho_{xy} \frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 \right]}$$

wobei ρ_{xy} der *Korrelationskoeffizient* ist. Für $\rho_{xy} = 0$ ergibt sich wieder Achsenorthogonalität.

5.2 Erwartungswert, Momente und Varianz

Erwartungswert / Mittelwert

Der *Erwartungswert* einer Zufallsvariable gibt an, welchen Wert wir *im Mittel* von dieser Zufallsvariablen erwarten können. Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen x ist durch die Schwerpunktlage der Dichte $f(x)$ gegeben:

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Der Erwartungswert eines *Zufallsprozesses* $x(t)$ bzw. $x(k)$ berechnet sich entsprechend:

$$E\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x(t)) dx \quad \text{bzw.} \quad E\{x(k)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x(k)) dx$$

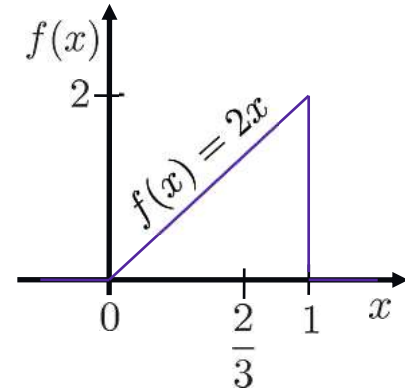
D.h. der Erwartungswert kann sich zeitlich verändern; er ist eine Funktion der Zeit.

Der Erwartungswert ist insbesondere **KEIN** *zeitlicher Mittelwert*. Vielmehr wird er als *Scharmittelwert* bezeichnet, weil wir über die Schar aller möglichen Ergebnisse x eines Zufallsexperiments, gewichtet mit deren jeweiliger Wahrscheinlichkeit $f(x)$, mitteln. Es wird über x und nicht über die Zeit t oder k integriert. Der Einfachheit halber bezeichnen wir im Folgenden dennoch $E\{x\}$ kurz als Mittelwert (= Scharmittelwert).

5.2 Erwartungswert, Momente und Varianz

Beispiel 1: Berechnung des Mittelwerts nebenstehender Dichte.

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$



Beispiel 2: Berechnung des Mittelwert von $\frac{1}{x^\alpha}$ zwischen 1 und ∞ .

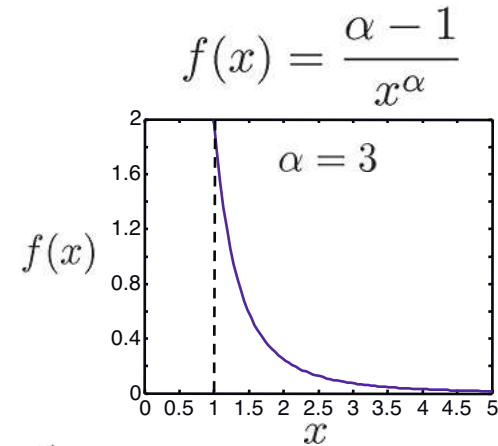
Zunächst berechnen wir den richtigen Vorfaktor, damit die Dichte zwischen 1 und ∞ den Flächeninhalt 1 aufweist:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_1^{\infty} x^{-\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{\alpha-1} \quad \text{falls } \alpha > 1$$

D.h. die Fläche unter einer Kurve $\frac{1}{x^\alpha}$ ist nur für $\alpha > 1$ endlich!

Damit berechnet sich der Mittelwert aus:

$$\int_1^{\infty} x \frac{\alpha-1}{x^\alpha} dx = (\alpha-1) \int_1^{\infty} x^{1-\alpha} dx = \frac{\alpha-1}{2-\alpha} x^{2-\alpha} \Big|_1^{\infty} = \frac{\alpha-1}{\alpha-2} \quad \text{falls } \alpha > 2$$



Ein Mittelwert existiert also nur für $\alpha > 2$, da sonst die Fläche „weit rechts“ zu groß ist und den Schwerpunkt nach ∞ zieht.

5.2 Erwartungswert, Momente und Varianz

Erwartungswert für Funktion einer Zufallsvariablen

Wird mittels einer Funktion $g(\cdot)$ aus einer Zufallsvariablen x eine neue Zufallsvariable $g(x)$ erzeugt (nichtlineare Transformation), so berechnet sich der Erwartungswert dieser neuen Zufallsvariable wie folgt:

$$E\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

Erwartungswert für mehrdimensionale Dichten

Wird mittels einer Funktion $g(\cdot, \cdot)$ eine neue Zufallsvariable $z = g(x, y)$ aus zwei Zufallsvariablen x und y erzeugt, so berechnet sich der Erwartungswert dieser neuen Zufallsvariable wie folgt:

$$E\{g(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)f(x, y)dxdy$$

5.2 Erwartungswert, Momente und Varianz

Erwartungswertbildung: lineare Operation

Die Berechnung des Erwartungswertes ist eine lineare Operation. Dies lässt sich leicht zeigen, indem man nachweist, dass das Superpositions- und Verstärkungsprinzip gilt:

- Superposition $z = x + y$: $E\{x + y\} = E\{x\} + E\{y\}$
- Verstärkung $z = k \cdot x$: $E\{k \cdot x\} = k \cdot E\{x\}$, wenn k deterministisch ist!

Erwartungswert des Produkts zweier Zufallsvariablen: Unkorreliertheit

Sehr häufig muss der Erwartungswert des Produkts zweier Zufallsvariablen berechnet werden. Im allgemeinen Fall kann dies mit Hilfe der gemeinsamen Dichte $f(x, y)$ über die letzte Formel der vorherigen Folie mit $z = g(x, y) = x \cdot y$ erfolgen. Dies erfordert aber die Kenntnis der Dichte $f(x, y)$ und ist kompliziert zu berechnen.

Deutlich vereinfachen lässt sich die Berechnung, wenn die beiden Zufallsvariablen *unkorreliert* sind. Im Fall von *Unkorreliertheit* gilt nämlich:

$$E\{x \cdot y\} = E\{x\} \cdot E\{y\}$$

Sind x und y statistisch unabhängig, so sind sie auch unkorreliert (aber nicht anders herum!).

5.2 Erwartungswert, Momente und Varianz

Herleitung: Wieso sind statistisch unabhängige Zufallsvariablen auch unkorreliert?

Allgemein gilt für $g(x, y) = x \cdot y$:

$$E\{x \cdot y\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy$$

Sind x und y statistisch unabhängig, so gilt: $f(x, y) = f(x)f(y)$. Damit ergibt sich:

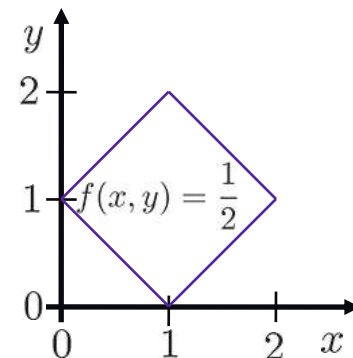
$$E\{x \cdot y\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x) f(y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy = E\{x\} \cdot E\{y\}$$

Unabhängigkeit \Rightarrow Unkorreliertheit ABER Unkorreliertheit $\not\Rightarrow$ Unabhängigkeit

Unkorreliertheit ist eine schwächere Eigenschaft als Unabhängigkeit. Es kann durchaus sein, dass zwei Zufallsvariablen unkorreliert sind, aber nicht unabhängig!

Beispiel: Zwei Zufallsvariablen seien gleichverteilt in nebenstehendem um 45° gedrehten Quadrat.

Aus der Verbunddichte $f(x, y)$ kann man durch Integration über y bzw. x die beiden Randdichten $f(x)$ und $f(y)$ ausrechnen.



5.2 Erwartungswert, Momente und Varianz

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad f(y) = \begin{cases} y & 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y & 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit sind:

$E\{x\} = 1$, $E\{y\} = 1$ und $E\{x \cdot y\} = 1 \Rightarrow$ **Unkorreliertheit.**

Aber es gilt:

$f(x) \cdot f(y) \neq f(x,y) \Rightarrow$ **Abhängigkeit.**

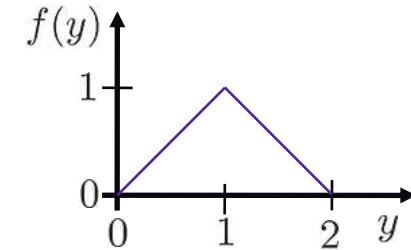
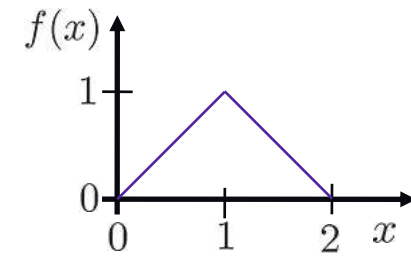
Die Abhängigkeit zwischen x und y erkennt man auch leicht daran, dass man z.B. aus der Kenntnis über $x = 0$ direkt auf $y = 1$ schließen kann.

Orthogonalität

Sind zwei Zufallsvariablen x und y unkorreliert und mindestens eine von beiden ist mittelwertfrei, d.h. $E\{x\} = 0$ und/oder $E\{y\} = 0$, dann sind x und y *orthogonal* und es gilt:

$$E\{x \cdot y\} = 0$$

Diese Namensgebung taucht in vielen anderen Bereichen immer wieder auf. Z.B. sind zwei Vektoren \underline{x} und \underline{y} zueinander orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt gleich 0 ist: $\underline{x}^T \cdot \underline{y} = 0$.



5.2 Erwartungswert, Momente und Varianz

Momente

Als Erweiterung des Mittelwertes kann das Moment n . Ordnung angesehen werden. Es ist als Erwartungswert der n . Potenz der Zufallsvariable x definiert:

$$E\{x^n\} = m_x^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$$

Das Moment 1. Ordnung ist identisch mit dem Mittelwert und wird oft vereinfachend als m_x statt m_x^1 geschrieben, das Moment 2. Ordnung hängt sehr eng mit der Varianz zusammen.

Varianz und Standardabweichung

Die *Varianz* gibt den mittleren quadratischen Abstand einer Zufallsvariablen x von dessen Mittelwert an:

$$\text{var}\{x\} = \sigma_x^2 = E\left\{(x - E\{x\})^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\{x\})^2 f(x) dx$$

Die Varianz ist ein anschauliches (quadratisches) Maß für die Streuung einer Zufallsvariablen um ihren Erwartungswert. Ihre Wurzel σ_x nennt man *Standardabweichung*.

5.2 Erwartungswert, Momente und Varianz

Zusammenhang zwischen Varianz und 2. Moment

Der folgende Zusammenhang wird häufig in Rechnungen verwendet:

$$\text{var}\{x\} = E\left\{(x - E\{x\})^2\right\} = E\left\{x^2 - 2xE\{x\} + E\{x\}^2\right\} = E\{x^2\} - 2E\{x\}^2 + E\{x\}^2$$

$$\text{var}\{x\} = E\{x^2\} - E\{x\}^2 = m_x^2 - (m_x^1)^2$$

Für *mittelwertfreie* Zufallsvariablen gilt $E\{x\} = 0$ und in diesem Fall ist die Varianz mit dem 2. Moment identisch: $\text{var}\{x\} = E\{x^2\}$.

Informationsgehalt von Mittelwert und Varianz

Mittelwert und Varianz enthalten schon eine Menge von wichtigen Informationen über die Verteilung einer Zufallsvariablen. Zur vollständigen Beschreibung müssen aber auch alle höheren Momente oder die komplette Dichtefunktion bekannt sein!

Geht man allerdings –wie dies sehr häufig geschieht– von einer *Gauß-Verteilung* der Zufallsvariablen aus, dann beschreiben Mittelwert und Varianz (bzw. Standardabweichung) die Dichtefunktion vollständig! In diesem Fall muss man also nur mit Momenten bis 2. Ordnung arbeiten (*second order statistics*). Im Gegensatz dazu bezeichnet man den allgemeinen Fall, wo Momente höherer als 2. Ordnung Einsatz finden, als *higher order statistics*.

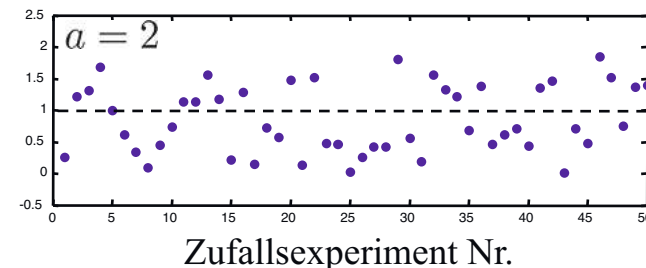
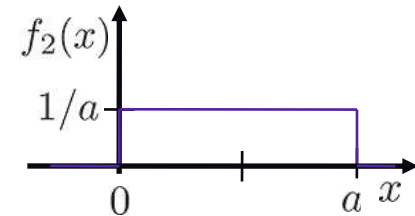
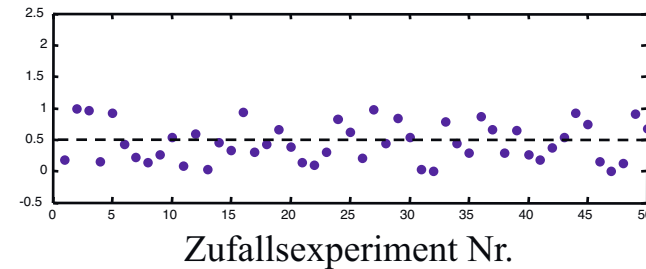
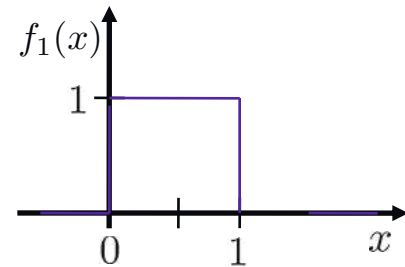
5.2 Erwartungswert, Momente und Varianz

Beispiel: Berechnung der Varianzen nebenstehender Dichten.

$$\begin{aligned}
 1.) \quad E\{x\} &= \frac{1}{2} & \text{var}\{x\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\{x\})^2 f_1(x) dx \\
 & & &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 dx = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) dx \\
 & & &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x \Big|_0^1 = \frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.) \quad E\{x\} &= \frac{a}{2} & \text{var}\{x\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\{x\})^2 f_2(x) dx \\
 & & &= \int_0^2 \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{a} dx = \frac{1}{a} \int_0^2 \left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4}\right) dx \\
 & & &= \frac{1}{a} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 + \frac{a^2}{4}x\right) \Big|_0^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12}
 \end{aligned}$$

Eine a -Mal so breite Verteilung liefert die a^2 -fache Varianz, weil Abstandskquadrate gemessen werden!



5.3 Korrelation

Kreuzkorrelation

Die **Kreuzkorrelation** zweier Zufallsvariablen x und y drückt deren „Gleichläufigkeit“ aus und ist als Erwartungswert ihres Produktes definiert:

$$r_{xy} = E\{x \cdot y\}$$

Besteht eine große Korrelation zwischen x und y , dann treten bei kleinen x -Werten meist auch kleine y -Werte auf (für $x < 0$ und $y < 0$ wird die Kreuzkorrelation positiv!) und umgekehrt und bei großen x -Werten treten meist große y -Werte auf und umgekehrt.

Berechnet wird die Kreuzkorrelierte zwischen x und y nach der bekannten Formel zur Auswertung des Erwartungswertes:

$$r_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy$$

Sind x und y statistisch unabhängig, dann gilt $f(x, y) = f(x)f(y)$ und die Berechnung lässt sich stark vereinfachen:

$$r_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x) f(y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy = E\{x\}E\{y\}$$

5.3 Korrelation

Interpretation von Korrelationen

Liegt eine große Kreuzkorrelation (oder kurz: Korrelation) zwischen zwei Größen vor, so sagt dies noch nicht zwangsläufig etwas über eine Ursache-Wirkungsbeziehung aus. So bestand über viele Jahrzehnte in Deutschland eine starke Korrelation zwischen der Geburtenrate und der Storchpopulation (beide stark abnehmend). Dennoch werden die Babies nicht von Störchen gebracht!

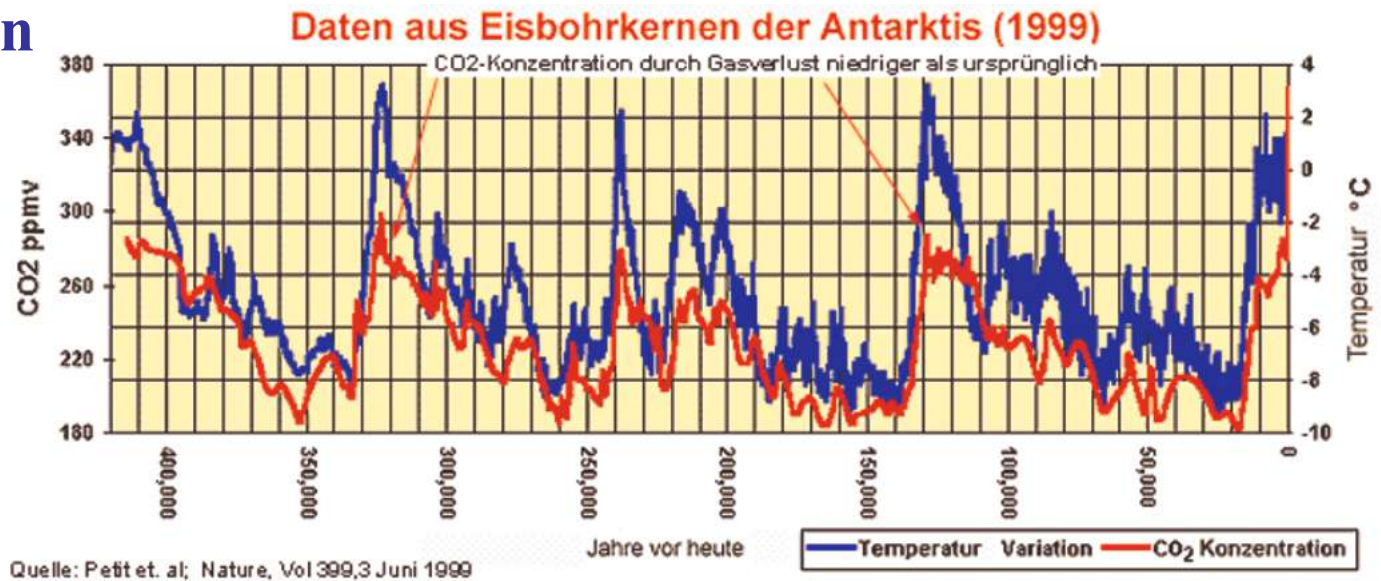
Eine starke Korrelation ist trotzdem ein guter Indikator für eine *mögliche* Ursache-Wirkungs-Beziehung. Allerdings lässt sich rein aus der starken Korrelation zwischen der Anwesenheit von Feuerwehrautos und Bränden noch nicht schlussfolgern, was davon die Ursache und was die Wirkung ist. Dazu benötigt man Systemverständnis!

Des Weiteren ist es möglich, dass zwei Größen stark miteinander korreliert sind, weil sie die Wirkung einer gemeinsamen Ursache (einer dritten Größe) sind. Z.B. ist heißes Wetter eine Ursache für a) erhöhte Kriminalität und b) erhöhten Eiskonsum. D.h. Kriminalität und Eiskonsum korrelieren miteinander, obwohl weder Eiskonsum eine Ursache für Kriminalität noch Kriminalität eine Ursache für Eiskonsum sind.

Bei der Interpretation von Korrelationen ist also äußerste Vorsicht geboten und sämtlich möglichen Ursachen in die Überlegungen mit einzubeziehen!

5.3 Korrelation

Beispiele



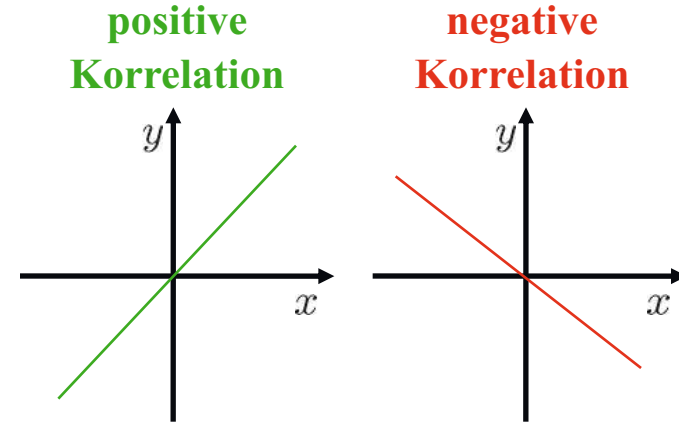
5.3 Korrelation

Ist y eine lineare Funktion von x , gilt also $y = ax$ mit $a > 0$, dann ist die Kreuzkorrelation zwischen x und y immer *positiv*:

$$r_{xy} = E\{x \cdot y\} = E\{x \cdot ax\} = aE\{x^2\} > 0$$

Ist y hingegen gegenläufig zu x , es gilt also $y = ax$ mit $a < 0$, dann ist die Kreuzkorrelation zwischen x und y immer *negativ*:

$$r_{xy} = E\{x \cdot y\} = E\{x \cdot ax\} = aE\{x^2\} < 0$$



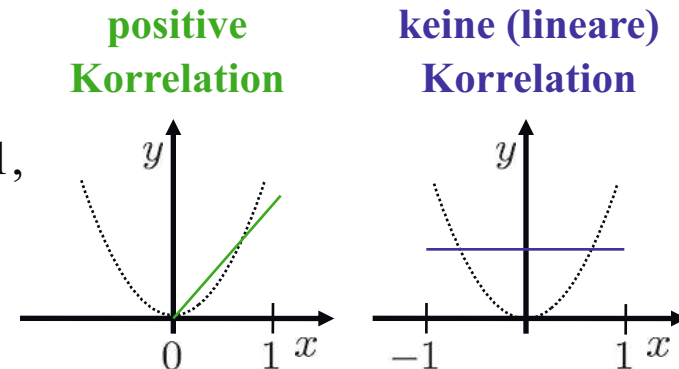
Existiert ein *nichtlinearer* Zusammenhang zwischen x und y , so hängen die Korrelationseigenschaften von der Verteilung der Zufallsvariablen ab.

Beispiel: Es gelte $y = x^2$

Ist die Zufallsvariable x z.B. gleichverteilt zwischen 0 und 1, dann entsteht eine positive Korrelation zwischen x und y .

Ist die Zufallsvariable x hingegen gleichverteilt zwischen -1 und 1 , dann entsteht keine Korrelation ($r_{xy} = 0$), obwohl

ja durchaus ein Zusammenhang zwischen x und y besteht, allerdings kein *linearer*!



5.3 Korrelation

Autokorrelation

Setzt man $y = x$ so entsteht die **Autokorrelierte**

$$r_{xx} = E\{x \cdot x\} = E\{x^2\}$$

Sie ist für *Zufallsvariablen* identisch mit dem 2. Moment, erhält für *Zufallsprozesse* (siehe weiter hinten) aber eine unabhängige Bedeutung.

Korrelation und Orthogonalität

Für *unkorrelierte* Zufallsvariablen lässt sich die Kreuzkorrelation vereinfacht aus $E\{x\} \cdot E\{y\}$ berechnen. Ist zudem mindestens eine der beiden Zufallsvariablen mittelwertfrei, so sind die beiden Zufallsvariablen *orthogonal* und es gilt $r_{xy} = 0$. Auf dieser Tatsache basieren sehr viele Anwendungen der Korrelation.

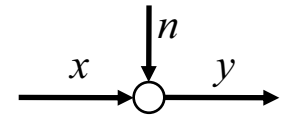
Korrelationen sind neben Varianzen und Mittelwerten die wichtigsten statistischen Merkmale.

5.3 Korrelation

Anwendungen der Korrelation

Extrem viele Anwendungen verwenden Korrelationsverfahren, um orthogonale Signale voneinander zu trennen. Sie basieren alle auf der Tatsache, dass die Kreuzkorrelation zweier orthogonaler Signale verschwindet. Damit ist es möglich ein Nutzsignal von einer Störung zu trennen, selbst wenn diese im selben Frequenzbereich liegen und daher klassische frequenz-selektive Filter (siehe Kapitel 4) nicht funktionieren.

Beispiel: Ein Signal x wird additiv durch eine mittelwertfreie und mit x nicht korrelierte (und damit orthogonale) Störung n gestört. Wie groß ist der Erwartungswert und die Autokorrelierte des gestörten Signals $y = x + n$?



$$E\{y\} = E\{x + n\} = E\{x\} + E\{n\} = E\{x\}$$

weil n mittelwertfrei ist!

gilt immer!

$$r_{yy} = E\{y^2\} = E\{(x + n)^2\} = E\{x^2 + 2xn + n^2\} = E\{x^2\} + 2E\{xn\} + E\{n^2\} = r_{xx} + 2r_{xn} + r_{nn}$$

$$= E\{x^2\} + 2E\{x\}E\{n\} + E\{n^2\} = E\{x^2\} + E\{n^2\} = r_{xx} + r_{nn}$$

gilt nur, wenn x und n unkorreliert!

weil x und n unkorreliert sind, gilt: $E\{xn\} = E\{x\}E\{n\}$!

Die Ausnutzung der Unkorreliertheit oder sogar Orthogonalität zwischen zwei additiv verknüpften Signalen ist die Basis jedes Korrelationsverfahrens.

5.3 Korrelation

Kovarianzen

Manchmal möchte man die Signale zunächst von ihren Mittelwerten befreien, bevor man die Korrelationseigenschaften untersucht. Dazu eignen sich die Kovarianzen. Sie entsprechen den Korrelationen der mittelwertbefreiten Signale ($m_x = E\{x\}$ und $m_y = E\{y\}$):

Kreuzkovarianz (oder nur Kovarianz): $c_{xy} = \text{cov}\{x, y\} = E\{(x - m_x) \cdot (y - m_y)\}$

Autokovarianz (oder nur Varianz): $c_{xx} = \text{cov}\{x, x\} = \text{var}\{x\} = E\{(x - m_x)^2\}$

Für mittelwertfreie Signale sind Kovarianzen und Korrelationen identisch!

Korrelationskoeffizient

Als normiertes Maß zwischen -1 und 1 für die Korrelation zwischen zwei Zufallsvariablen wird der Korrelationskoeffizient verwendet, der die Kreuzkovarianz zwischen x und y auf die Wurzel der Varianzen von x und y bezieht:

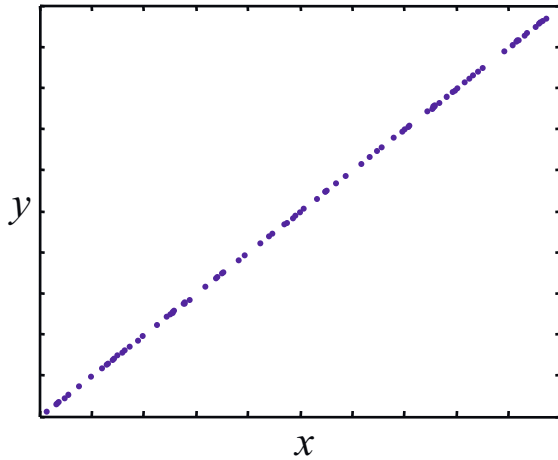
$$\rho_{xy} = \frac{\text{cov}\{x, y\}}{\sigma_x \sigma_y}$$

$0.8 < |\rho_{xy}|$: *starke* Korrelation $|\rho_{xy}| < 0.5$: *schwache* Korrelation
 $0.5 < |\rho_{xy}| < 0.8$: *mittlere* Korrelation

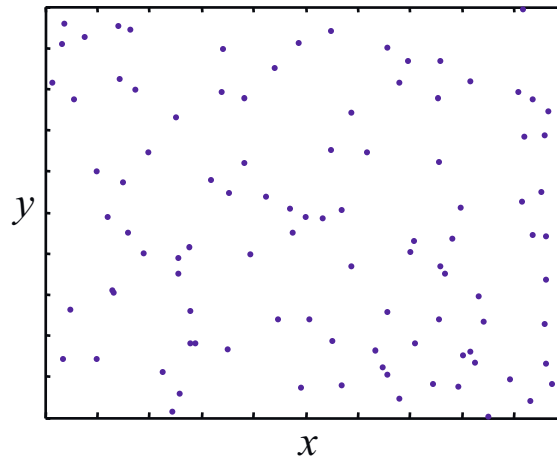
5.3 Korrelation

Beispiele: Korrelationskoeffizienten bei gleichverteilten Zufallsvariablen

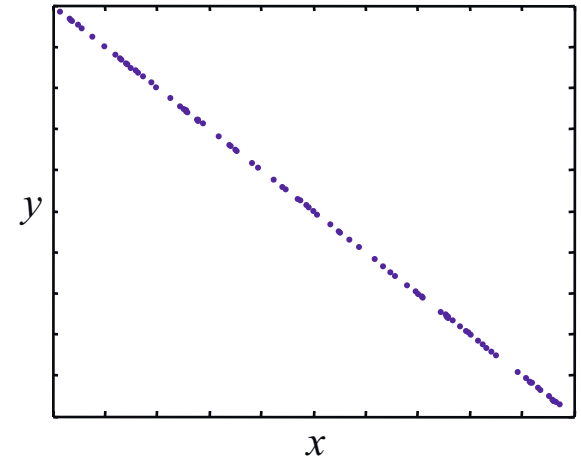
$$\rho_{xy} = 1$$



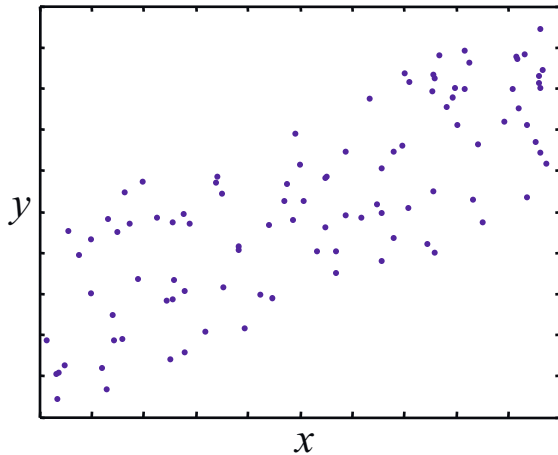
$$\rho_{xy} = 0$$



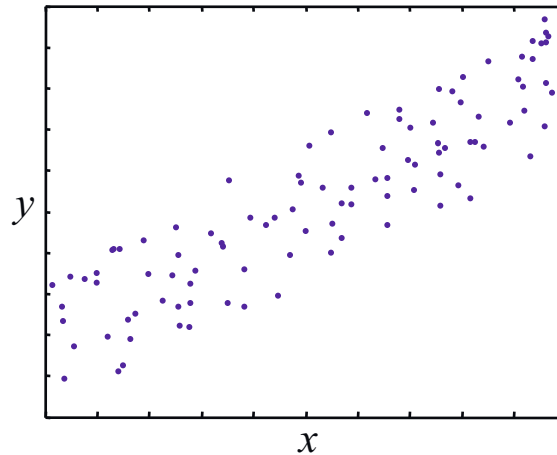
$$\rho_{xy} = -1$$



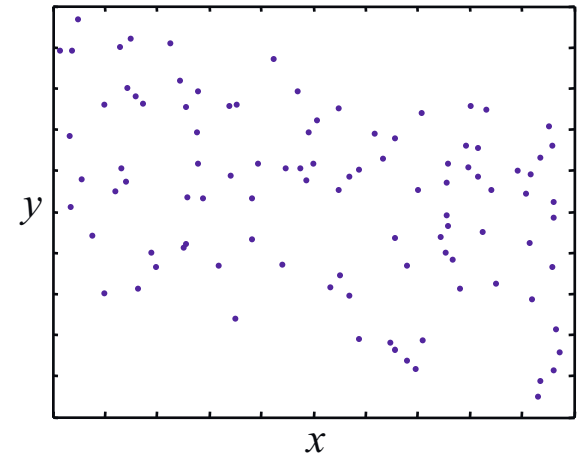
$$\rho_{xy} = 0.8$$



$$\rho_{xy} = 0.9$$



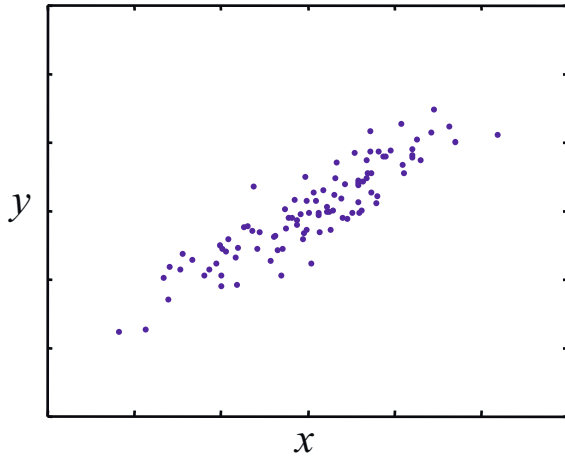
$$\rho_{xy} = -0.4$$



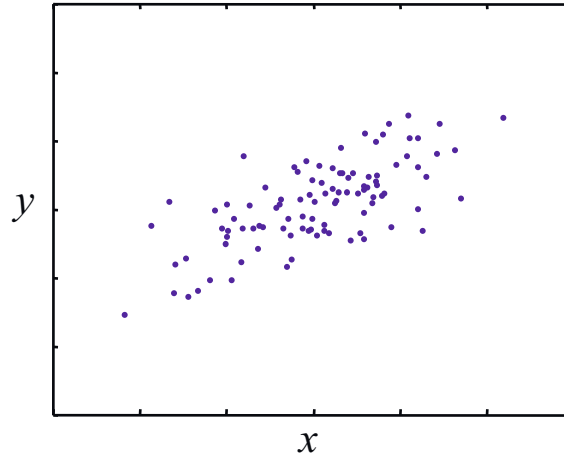
5.3 Korrelation

Beispiele: Korrelationskoeffizienten bei normalverteilten Zufallsvariablen

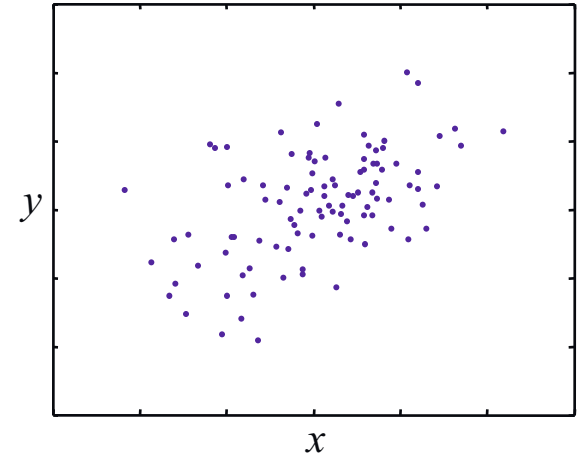
$$\rho_{xy} = 0.9$$



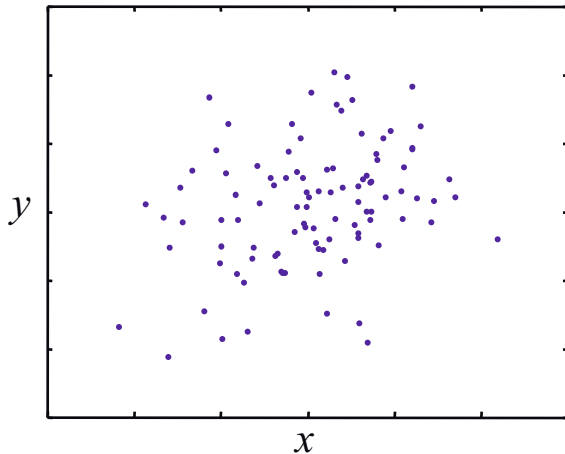
$$\rho_{xy} = 0.7$$



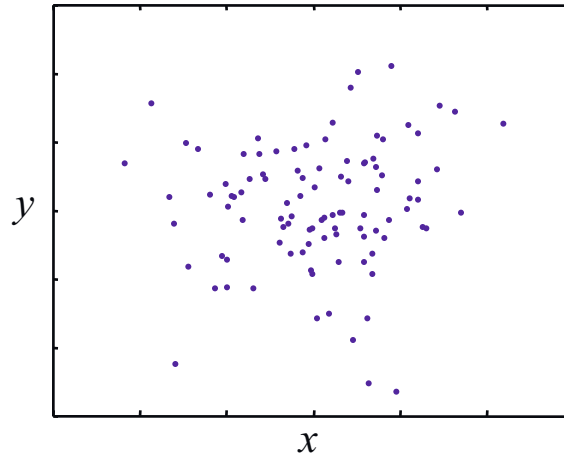
$$\rho_{xy} = 0.5$$



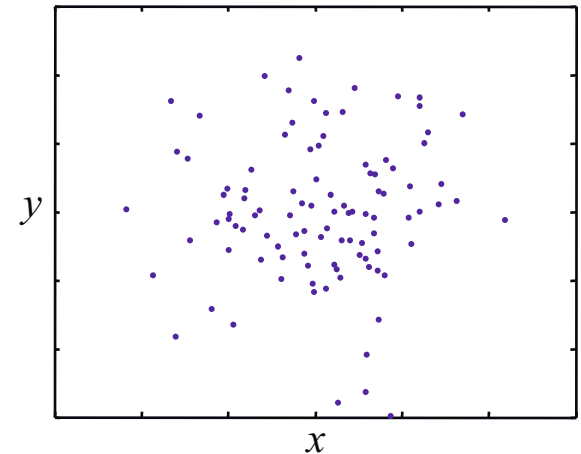
$$\rho_{xy} = 0.3$$



$$\rho_{xy} = 0.1$$

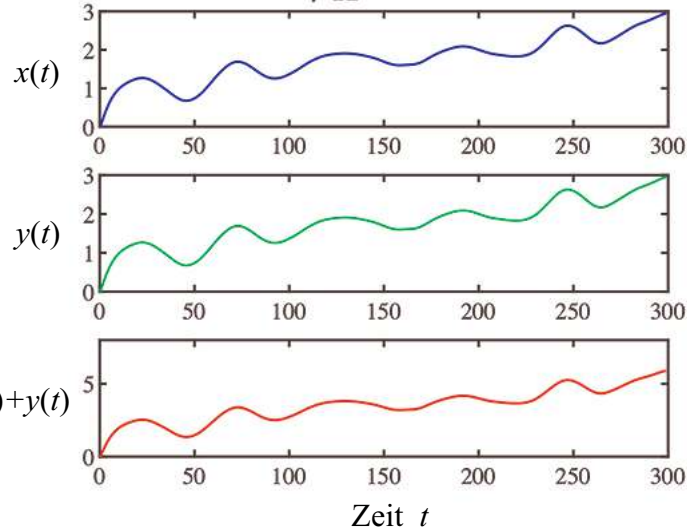


$$\rho_{xy} = 0$$

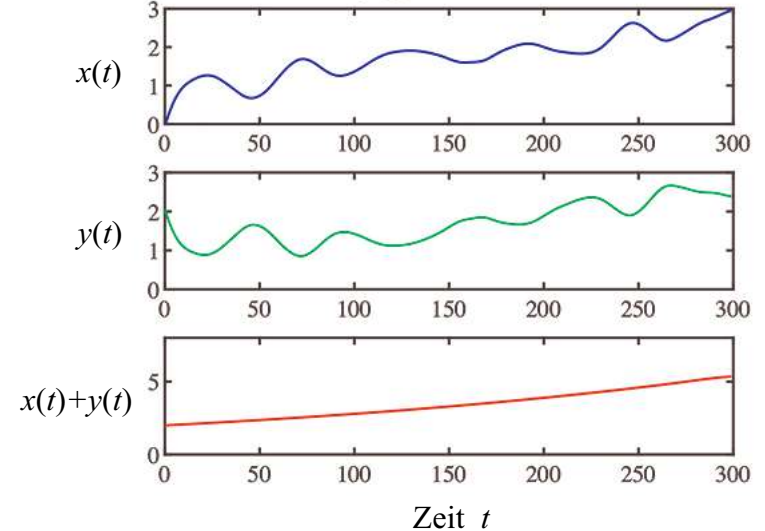


5.3 Korrelation Annahme: $x(t) = x_0(t) + n_1(t)$ und $y(t) = y_0(t) + n_2(t)$

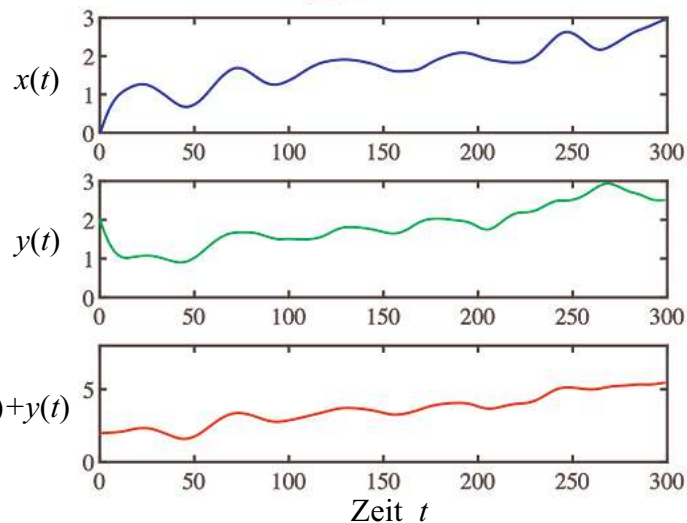
$\rho_{12} = 1$



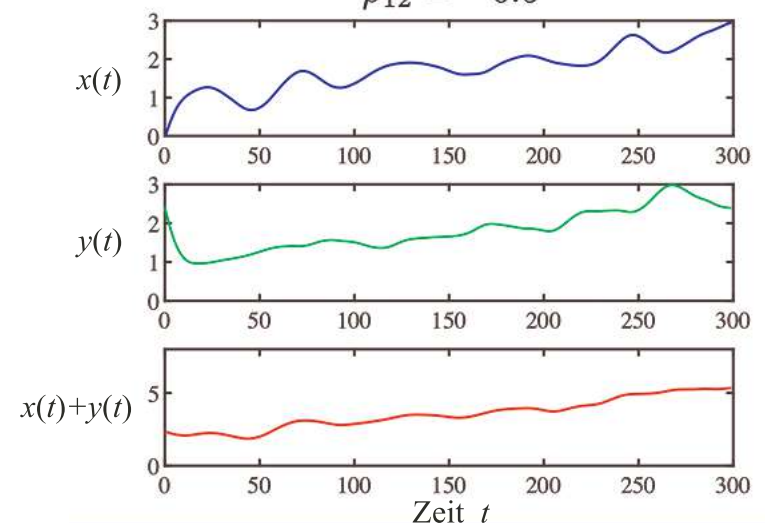
$\rho_{12} = -1$



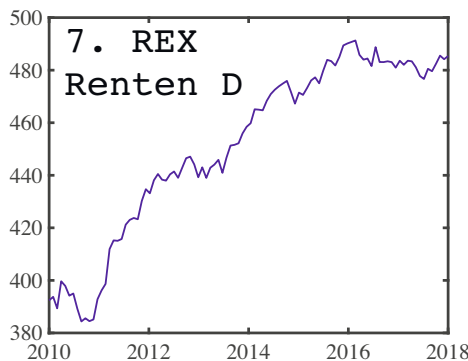
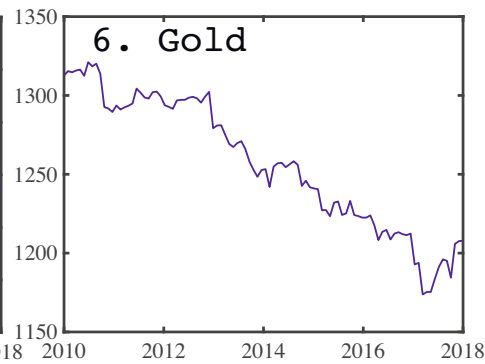
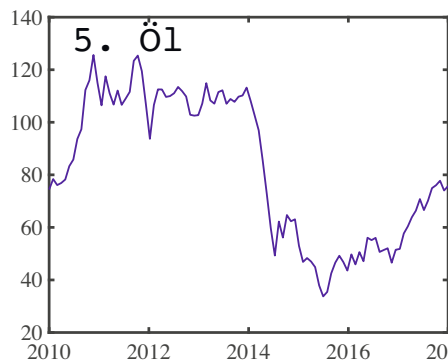
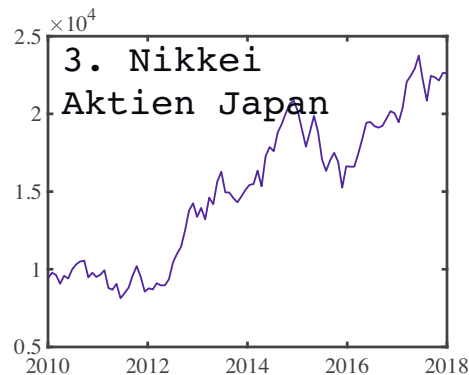
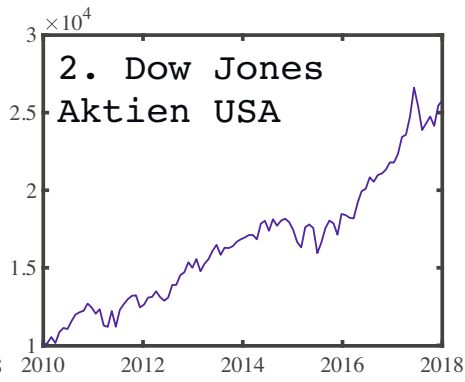
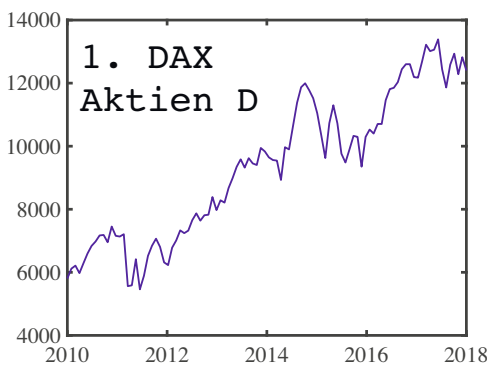
$\rho_{12} = 0$



$\rho_{12} = -0.5$



5.3 Korrelation



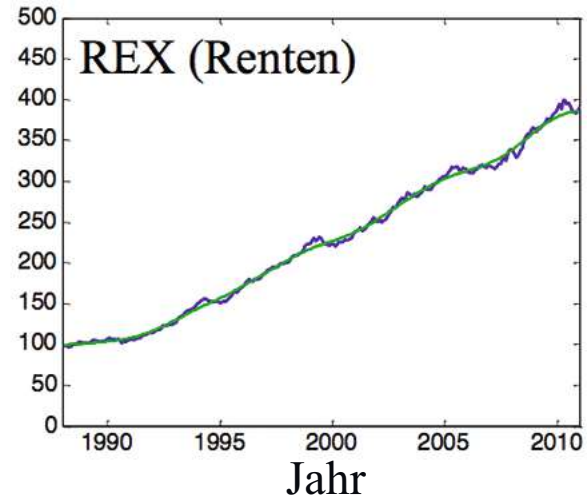
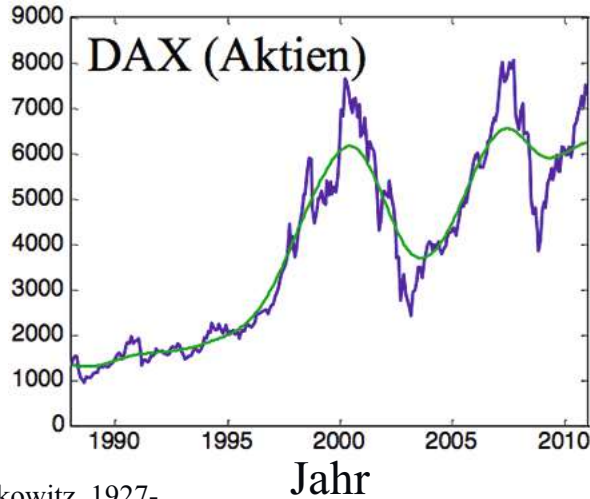
Die letzten 100 Börsenmonate...

Korrelationskoeffizientenmatrix:

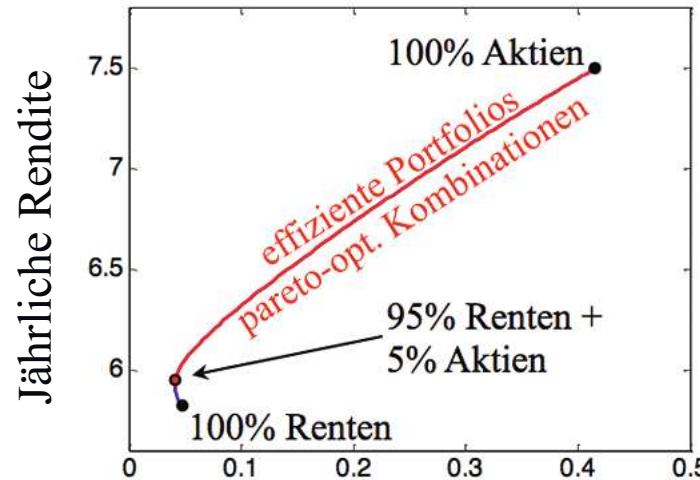
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	1.0000	0.9510	0.9771	0.7705	-0.6668	-0.9331	0.8624
2.	0.9510	1.0000	0.9398	0.7970	-0.5637	-0.9398	0.8402
3.	0.9771	0.9398	1.0000	0.7514	-0.7011	-0.9212	0.8569
4.	0.7705	0.7970	0.7514	1.0000	-0.2933	-0.6563	0.4568
5.	-0.6668	-0.5637	-0.7011	-0.2933	1.0000	0.7001	-0.6915
6.	-0.9331	-0.9398	-0.9212	-0.6563	0.7001	1.0000	-0.8811
7.	0.8624	0.8402	0.8569	0.4568	-0.6915	-0.8811	1.0000

5.3 Korrelation

Beispiel: Nobelpreis für Ökonomie an Harry Markowitz 1990 für Portfolio-Auswahl



Harry Markowitz, 1927-
(www.wikipedia.org)

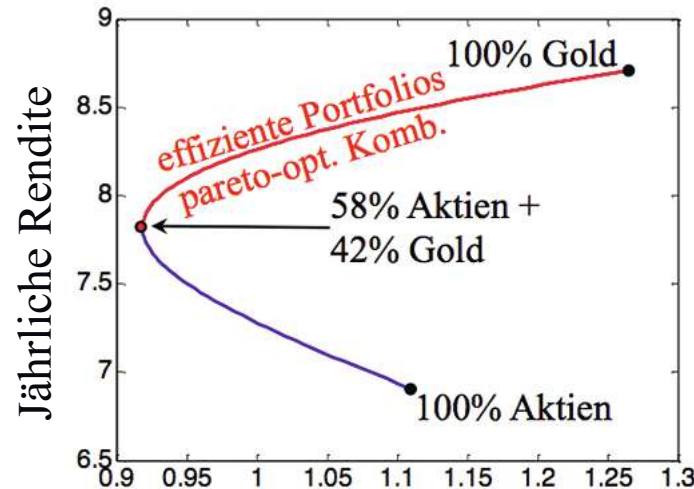
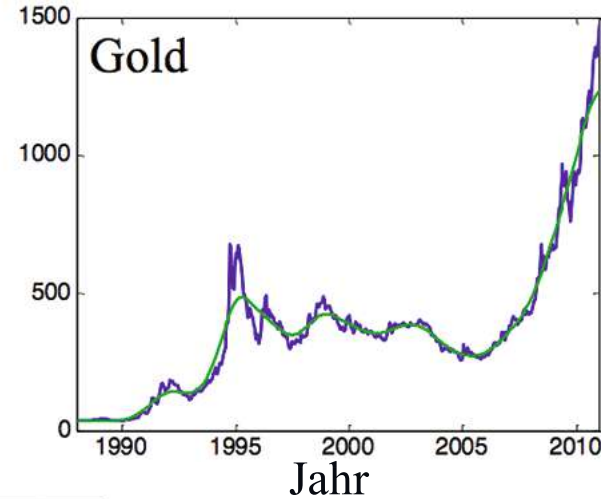
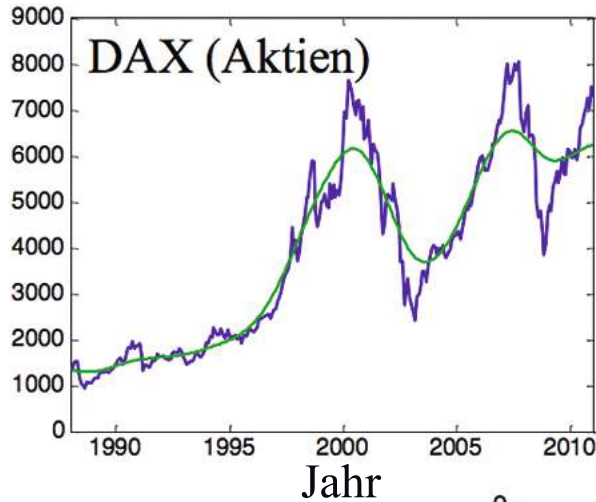


normiert auf den Kurs im Anfangsjahr 1989

Risiko oder Volatilität oder Standardabweichung um langfristiges **Mittel**

5.3 Korrelation

Beispiel: Nobelpreis für Ökonomie an Harry Markowitz 1990 für Portfolio-Auswahl



normiert auf den Kurs im Anfangsjahr 1989

Risiko oder Volatilität oder Standardabweichung um langfristiges **Mittel**

5.3 Korrelation

Optimales Portfolio für verschiedene Korrelationen

Alle Anteil-Kombinationen zweier Wertpapiere:

Wertpapier 1: Anteil x

Volatilität $\sigma_1 = 5\%$

Rendite $r_1 = 3\%$

risikoarm, wenig Ertrag



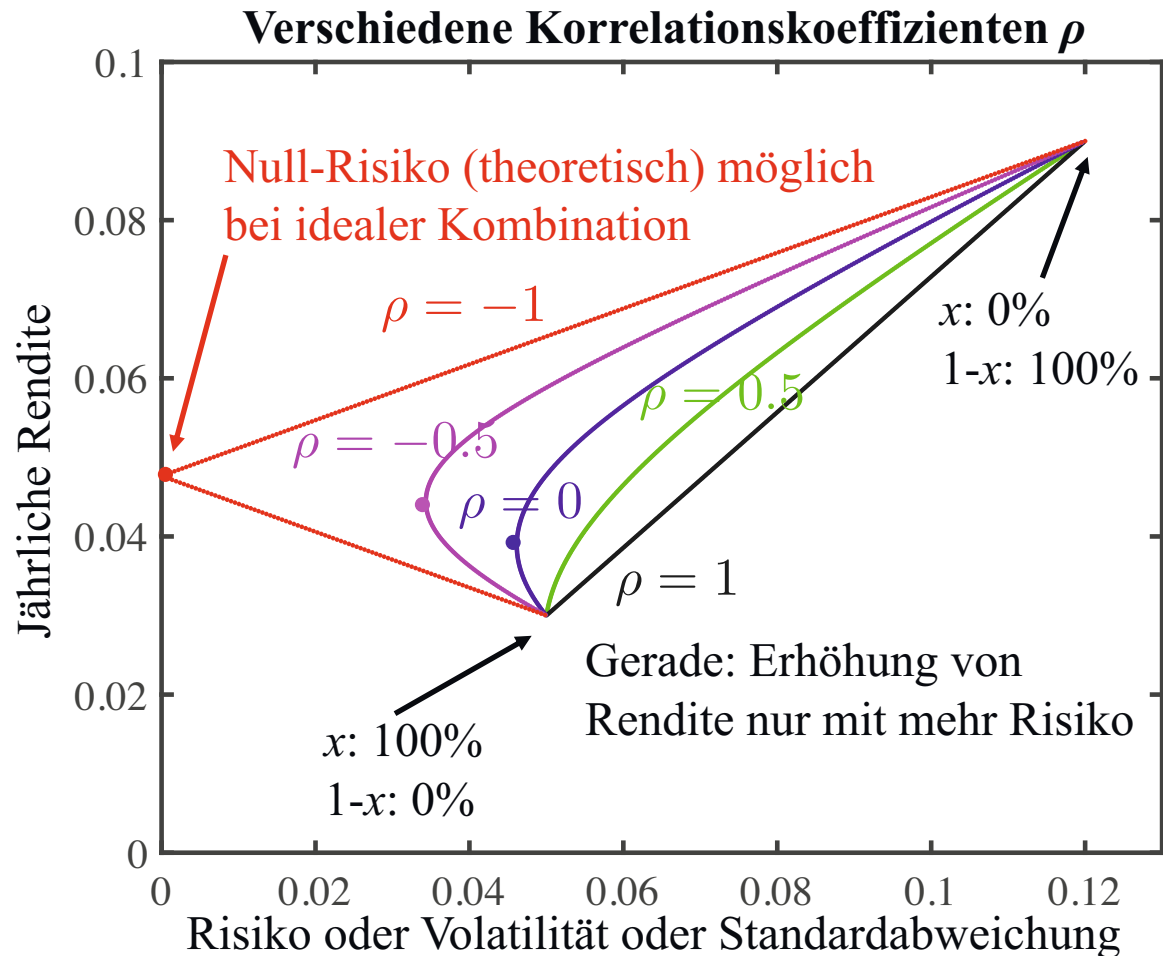
Wertpapier 2: Anteil $1-x$

Volatilität $\sigma_2 = 12\%$

Rendite $r_2 = 9\%$

risikoreich, viel Ertrag

$$\sigma_{\text{Kombi}}^2 = \sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2 (1-x)^2 + 2x(1-x)\sigma_1\sigma_2\rho$$



5.3 Korrelation

Probleme

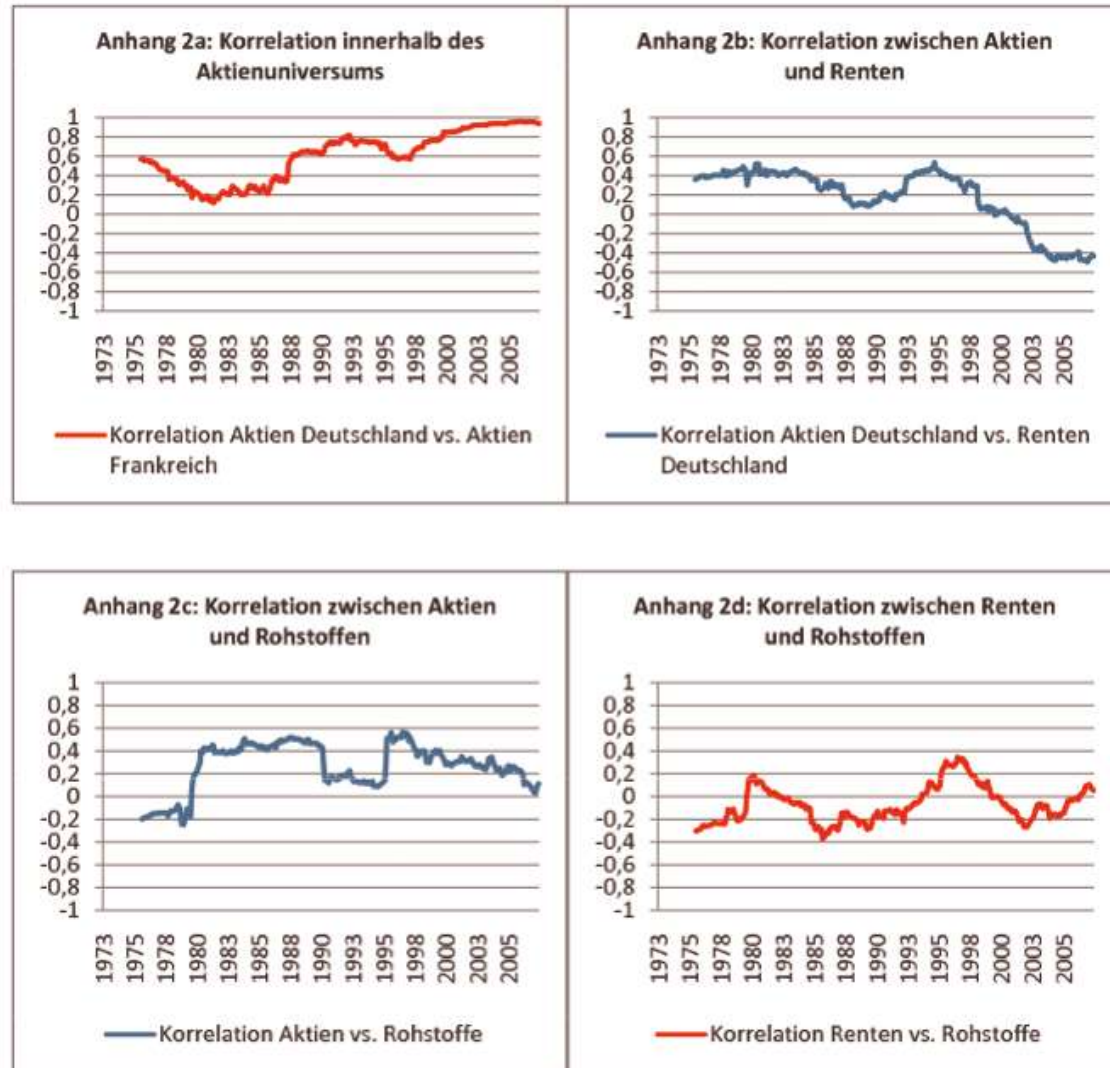
- Über welchen Zeitraum sollen Korrelationen betrachtet werden?
- Korrelationen ändern sich über die Zeit.

ABER

- Korrelationen zwischen Aktien verschiedener Regionen ≈ 1 .
- Korrelationen zwischen Aktien und Renten ≈ 0 .
- Korrelationen zwischen Aktien und Rohstoffen ≈ 0 .
- Korrelationen zwischen Renten und Rohstoffen ≈ 0 .

Quelle: http://www.arero.de/files/jacobsmuellerweber_worldportfolio_2008.pdf

Korrelationen über 5 Jahre: Veränderung über die Zeit



Optimierung von Wertpapierdepots Was ist die Markowitz-Methode in der Praxis wert?

sind:

1. die geschätzten künftigen Renditen der in Frage kommenden Anlageprodukte,
2. die geschätzten künftigen Risiken der Anlageprodukte,

Anleger, die bei einem Geldprofi hat suchen, werden häufig mit der so genannten „Markowitz-Optimierung“ konfrontiert. Was ist diese Methode wert?

Das Problem gibt es nicht nur im Bereich der Geldanlage: Ein unbedarfter Kunde lässt sich von einer Berechnung beeindrucken, die er nicht versteht. Alles klingt sehr kompliziert und theoretisch, also, so denkt er, muss das präsentierte Ergebnis auch richtig sein. Dass es sich um eine „irgendwie optimierte“ Geldanlage handelt, hört sich für einen Anleger jedenfalls sehr gut an. Dennoch stellt sich die Frage, was es mit dieser Optimierung auf sich hat und wie viel sie tatsächlich in der Praxis wert ist.

■ Markowitz optimiert das Risiko-Rendite-Verhältnis

Ausgangspunkt der Markowitz-Optimierung ist, dass ein Investor nicht nur an der Rendite seiner Investitionen interessiert ist, sondern auch an den mit ihnen verbundenen Risiken. Aktienkursgewinne sind sehr schön, nur vie-

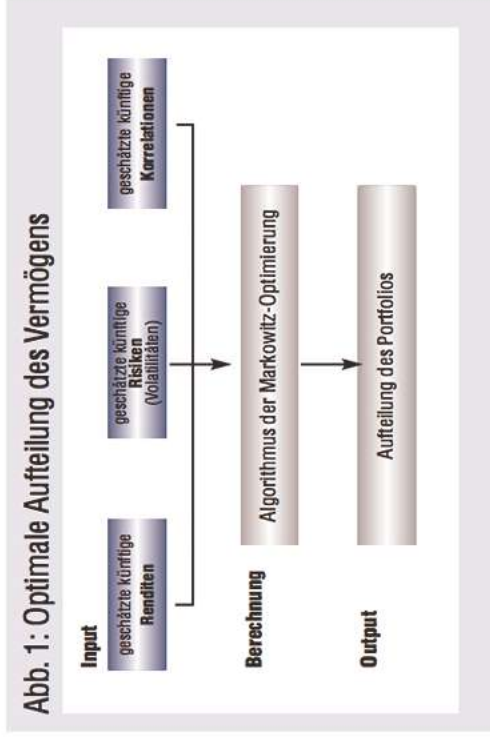


Abb. 1: Optimale Aufteilung des Vermögens

le Menschen meiden Aktien, weil sie Angst vor Kursverlusten haben. Kostolyne sagte einmal, dass Börsengewinnne Schmerzensgeld seien. Nicht jeder ist bereit sich dem Risiko solcher Schmerzen auszusetzen.

Andererseits versprechen im allgemeinen gerade die risikoreichen Anlagen höhere Renditen. So bergen Anleihen deutlich geringere Risiken als Aktien, spektakuläre Gewinne sind aber auch nicht zu erwarten. Das Problem ist also, das Vermögen so aufzuteilen, dass Risiko und Rendite in einem „optimalen“ Verhältnis zueinander stehen.

Ein Anleger wird in den seltensten Fällen sein gesamtes Geld nur in Aktien oder alternativ nur in Rentenpapieren stecken. Vielmehr wird er einen Teil seines Vermögen, sicher anlegen, und einen anderen Teil etwas spekulativer. Wie groß der eine Teil ist und der andere, wird von der Risikoneigung des Investors abhängen.

Die Markowitz-Optimierung berechnet eine Aufteilung des Vermögens (z.B. in Aktien und Renten), so dass das Risiko-Rendite-Verhältnis optimiert ist. „Optimiert“ bedeutet: bei gleichem Risiko gibt es keine Aufteilung des Vermögens, bei der eine höhere Rendite zu erwarten ist.

Die Optimierung ist eine Berechnung (auch Algorithmus genannt) deren Eingabeparameter folgende Werte

3. die Korrelationen der Anlageprodukte miteinander.

Nach einer komplexen Rechnung erhält man als Ergebnis die optimale Aufteilung des Vermögens auf die gewählten Anlageprodukte, so dass zu einer vorgegebenen Risikobereitschaft eine möglichst hohe Rendite zu erwarten ist.

► Renditen und Volatilitäten

Bei dieser Berechnung wird unter „Risiko“ die Schwankungsbreite des Kursverlaufes eines Anlageproduktes verstanden.

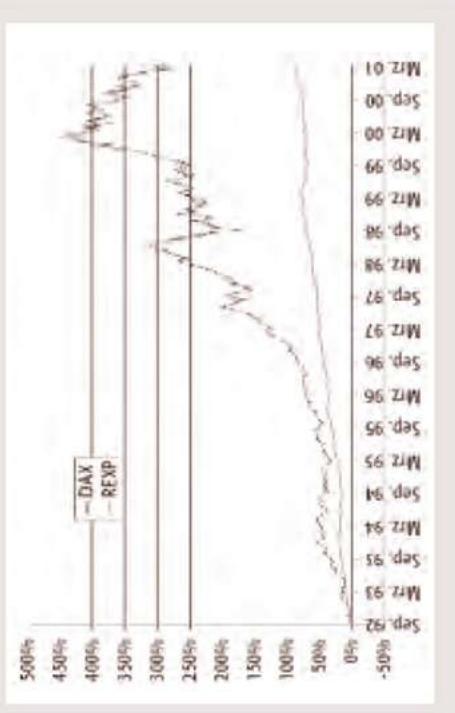
Vergleicht man die Wertentwicklung des deutschen Aktienindex DAX mit der des deutschen Rentenindex REX (siehe Chart), so sieht man deutlich, dass der DAX zwar eine deutlich höhere Rendite erzielt hat als der REX, aber mit größeren Schwankungen nach oben und unten. Ein mathematisches Maß für diese Schwankungen ist die Volatilität. Je stärker die Wertentwicklung eines Investments schwankt, je höher also die Volatilität ist, desto höher ist die Unsicherheit bzw. das Risiko, das mit diesem Investment verbunden ist.

So lag die Volatilität des DAX vom September 1992 bis heute bei 20,4%, die Volatilität des REX war in diesem Zeitraum bei 3,3%. Dafür erzielte der DAX eine Rendite von 18,6%,

Harry M. Markowitz hat in den 1950er Jahren seine Portfolio Selection Theory entwickelt, für die er später den Nobelpreis erhielt. Kern dieser Theorie ist die Intuition, dass es in Fragen der Geldanlage ratsam ist, nicht alles auf eine Karte zu setzen. Besser ist es, das Risiko auf mehrere Anlageprodukte zu streuen. Im Amerikanischen gibt es das Sprichwort: „Never put all your eggs into one basket“. Bekannt sind auch solche goldenen Regeln wie „ein Drittel Aktien, ein Drittel Renten, ein Drittel Immobilien“. Die Leistung Markowitz bestand darin, diese intuitiven Regeln mathematisch-wissenschaftlich fundieren zu können. Dieser Artikel soll einige der Grundideen dieser Theorie vermitteln und ihre Grenzen in der Praxis aufzeigen.

5.3 Korrelation

Abb. 2: Renditen und Volatilitäten



während der REXP nur 7,3% erreichte. Die höhere Rendite war mit einer höheren Volatilität verbunden.

■ Korrelation ist ein Maß für Streuungseffekte

Stellen wir uns ein Depot vor, das zur Hälfte in einem deutschen Aktienfonds investiert ist und zur anderen Hälfte in einen deutschen Rentenfonds. Nehmen wir an, dass der Aktienfonds eine Wertentwicklung hat in etwa wie der deutsche Aktienindex DAX, und der Rentenfonds in etwa wie der deutsche Rentenindex REXP.

Die Wertentwicklung des DAX seit 1992 lässt eine Rendite des Aktienfonds von 18,6% erwarten. Die Wertentwicklung des REXP seit 1992 legt nahe, für den Rentenfonds eine weitere durchschnittliche Rendite von 7,3% p.a. anzunehmen.

Da das Depot zur Hälfte in dem Aktienfonds investiert ist, zur anderen Hälfte in den Rentenfonds, kann man mit einer Rendite des Gesamtdépôts von 12,95% rechnen:

$$50\% \times 18,6\% + 50\% \times 7,3\% = 12,95\%$$

Da die Volatilität des DAX 20,4% ist, und die Volatilität des REXP 3,3%, könnte man nach derselben Logik annehmen, dass das Risiko des Gesamtdépôts bei 11,85% liegt:

$$50\% \times 20,4\% + 50\% \times 3,3\% = 11,85\%$$

Tatsächlich liegt die Volatilität des Gesamtdépôts aber bei 10,46%. Also deutlich niedriger als man zunächst vermuten sollte. Dieses Phänomen ist

Tage gibt, an denen sich Renten und Aktien gegenläufig verhalten, kommt es zu dem Streuungseffekt.

Die Streuung des Vermögens auf mehrere Investments ist sinnvoll, da erfahrungsgemäß die Wertentwicklung verschiedener Anlageprodukte unterschiedlich bis gegenläufig ist. Diese Erfahrung liegt den oben genannten goldenen Regeln der Geldanlage zu Grunde.

Das mathematische Maß für die Gegenläufigkeit von Kursentwicklungen ist die Korrelation.

Vergleicht man z.B. die Charts des DAX und des amerikanischen Aktienindex S&P 500, so erkennt man eine relativ hohe Gleichläufigkeit. Die Korrelation errechnet sich auf 0,5052:

Die Charts des DAX und des REXP sehen dagegen sehr unterschiedlich aus (siehe Abb. 2). Die Korrelation des

interessant und heißt Streuungseffekt. Das Risiko eines Gesamtdépôts ist ge-

Abb. 3: Korrelationsentwicklung



ringer als die Summe der Risiken seiner Bestandteile.

Dieser Streuungseffekt kommt daher, dass sich die Kursentwicklung des DAX und des REXP manchmal gegenläufig ist. So kam es z.B. vor, dass der DAX an einem Tag -0,8% gefallen ist, und der REXP 0,5% gestiegen ist. Ein Depot, das zu 50% in Aktien und zu 50% in Renten investiert ist, hat dann an diesem Tag -0,15% verloren:

$$50\% \times -0,8\% + 50\% \times 0,5\% = -0,15\%$$

Das heißt: die Tagesschwankung des Dépôts (0,15% nach unten) war geringer sowohl als die des DAX (0,8% nach unten) als auch die des REXP (0,5% nach oben). Da es öfter solche

DAX zum REXP ist nur 0,159.

► Effizienzlinien

Die Markowitz-Optimierung braucht als Eingabegrößen: die geschätzten künftigen Renditen der in Frage kommenden Anlageprodukte, die geschätzten künftigen Volatilitäten, sowie die Korrelationen der Anlageprodukte miteinander. Berechnet werden alle optimalen Dépôts. Diese Dépôts werden normalerweise als sog. Effizienzlinie dargestellt.

Die Effizienzlinie liest man folgendermaßen: Sucht man ein Depot mit einer Volatilität von 5%, so sollte man 19,8% Aktien und 80,2% Renten wählen. Sucht man ein Depot mit ei-

nem Risiko von 10%, so muss man 47,6% Aktien und 52,4% Renten wählen, etc.

Kritische Aspekte

Die Markowitz-Optimierung ist aus verschiedenen Gründen in der Praxis nicht sehr tauglich. Ein erster Grund besteht darin, dass kaum ein Anleger vermag, seine Risikoneigung in Prozenten einer Volatilität anzugeben.

Ein weiterer Kritikpunkt ist, dass die meisten Anleger Risiko nicht als Werteschwankung empfinden, sondern eher als Wahrscheinlichkeit eines Verlustes. Geldanlagen mit einseitigen Schwankungen nach oben werden normalerweise nicht als riskant wahrgenommen, sondern als sehr lukrativ. Während Investitionen, die dieselben Schwankungen aufweisen, als verlustreich und riskant gelten, wenn sie immer nach unten gerichtet sind.

Das Hauptargument aber, warum die Markowitz-Optimierung in der Praxis nicht anwendbar ist, besteht darin, dass die Renditen, Volatilitäten und Korrelationen geschätzt werden müssen. Als Indikator für die Schätzung dient die Vergangenheit. Hier macht es aber einen Unterschied, ob man ein Jahr zurück geht, zwei oder gar zehn. Je nachdem erhält man andere Schätzungen.

5.3 Korrelation

	8,5 Jahre	3 Jahre	2 Jahre
	DAX	DAX	DAX
Rendite p.a.	18,6%	7,3%	7,5%
Volatilität	20,4%	3,3%	26,3%
Korr(DAX)	1	0,159	1
Korr(REXP)	0,159	1	-0,062
			REXP
			4,6%
			10,4%
			23,1%
			3,3%
			0,012
			1

In der Tabelle sind beispielhaft die statistischen Ergebnisse für verschiedene Betrachtungszeiträume zurück dargestellt. Man sieht, dass die Werte zum Teil erheblich voneinander abweichen. So war die Korrelation des DAX zum REXP von 1992 bis heute 0,159. Von 1998 bis heute war sie aber -0,062.

Bei solch verschiedenen Ergebnissen...

Abb. 5: Effizienzlinie bei unterschiedlichen Zeitschienen

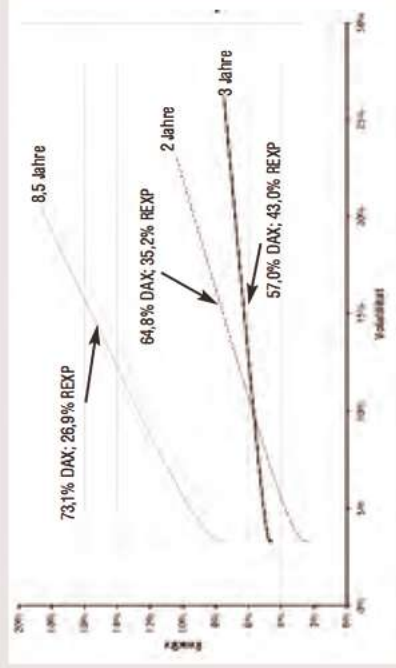


Abb. 4: Effizienzlinie optimiert

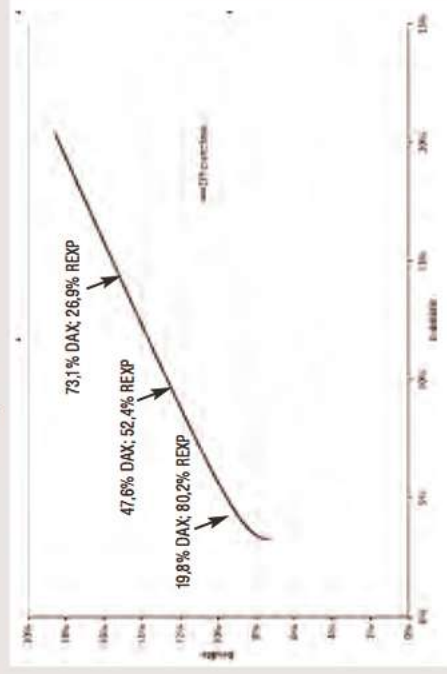


Diagramm 4 stellt das Ergebnis einer Optimierung dar mit den Eingabewerten:

	DAX	REXP
Rendite p.a.	18,6%	7,3%
Volatilität	20,4%	3,3%
Korr(DAX)	1	0,159
Korr(REXP)	0,159	1

sen, kann man sich mit Recht fragen, was das komplizierte mathematische Vorgehen der Optimierung überhaupt bringen soll. Die Ergebnisse sind stark abhängig von den Werten, mit denen die Berechnung startet. Die optimalen Depotaufteilungen sind dann zwar auf Kommastellen genau. Diese Genauigkeit verschiebt aber, dass die Ausgangswerte selber geschätzt sind. Es handelt sich also um eine Scheingenaugkeit.

Der Wert der Arbeiten von Markowitz besteht darin, das intuitive Gefühl, dass Streuung bei der Geldanlage einen Vorteil bringt, quantitativ-wissenschaftlich belegt zu haben. In Geldfragen des realen Lebens kann sie jedoch nur eine untergeordnete Rolle spielen. [15]

Dr. Dr. Hannes Peterreins
Kontakt: Tel.: 089 / 28 70 29-70,
E-Mail: peterreins@dr-peterreins.de



5.3 Korrelation

Kreuz- und Autokorrelationsfunktion

Berechnet man die Kreuzkorrelation nicht zwischen zwei Zufallsvariablen x und y , sondern zwischen zwei Zufallsprozessen $x(t)$ und $y(t)$, dann hängt das Ergebnis von den Zeitpunkten ab, zu denen $x(t)$ und $y(t)$ betrachtet werden. Im allgemeinen Fall können dies zwei Zeitpunkte t_1 und t_2 sein. Damit hängt die Kreuzkorrelierte zweier Zufallsprozesse von den zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 ab und wird deshalb **Kreuzkorrelationsfunktion (KKF)** genannt:

$$r_{xy}(t_1, t_2) = E \{x(t_1) \cdot y(t_2)\}$$

Entsprechendes gilt für die **Autokorrelationsfunktion (AKF)**:

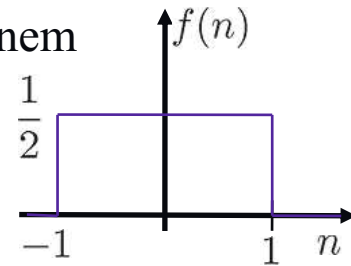
$$r_{xx}(t_1, t_2) = E \{x(t_1) \cdot x(t_2)\}$$

Im Gegensatz zur Autokorrelation von Zufallsvariablen hat die AKF eine eigenständige Bedeutung. Sie beschreibt die Gleichläufigkeit eines Signals $x(t)$ mit sich selbst zu anderen Zeitpunkten. Besonders ähnlich ist ein Signal zu sich selbst, wenn man es zum *selben* Zeitpunkt $t_2 = t_1$ betrachtet. An dieser Stelle ist die AKF am größten. Wiederholt sich ein Signal z.B. alle T Zeiteinheiten, ist also periodisch mit Periodendauer T , dann macht sich dies durch ebenso hohe Werte der AKF zu den Zeitpunkten $t_2 = t_1 \pm T$ und $t_2 = t_1 \pm 2T$ usw. bemerkbar.

5.3 Korrelation

Beispiel: Berechnung von Mittelwert, Varianz und Autokorrelationsfunktion

Ein Börsenindex wie z.B. der DAX soll langfristig als exponentiell ansteigende Funktion (dies modelliert eine durchschnittliche Verzinsung pro Jahr) plus einem weißen gleichverteilten „Zappeln“, das die kurzfristigen Kursschwankungen modelliert, beschrieben werden (das ist kein besonders genaues Modell!).



Zufallsprozess: $x(t) = e^{\alpha t} + n$

$$\text{Mittelwert: } E\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)f(n)dn = \int_{-1}^1 (e^{\alpha t} + n) \frac{1}{2}dn = \frac{1}{2} \left(e^{\alpha t}n + \frac{n^2}{2} \right) \Big|_{-1}^1 = e^{\alpha t}$$

$$\begin{aligned} \text{Varianz: } E\left\{[x(t) - E\{x(t)\}]^2\right\} &= E\left\{[x(t) - e^{\alpha t}]^2\right\} = E\{n^2(t)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} n^2 f(n)dn = \int_{-1}^1 n^2 \frac{1}{2}dn = \frac{1}{2} \frac{n^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

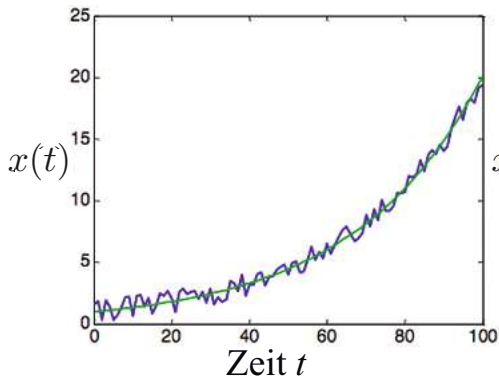
AKF:

$$\begin{aligned} E\{x(t_1)x(t_2)\} &= E\{[e^{\alpha t_1} + n(t_1)][(e^{\alpha t_2} + n(t_2))]\} = E\{[e^{\alpha t_1} + n(t_1)]\}E\{[e^{\alpha t_2} + n(t_2)]\} \\ &= e^{\alpha t_1}e^{\alpha t_2} = e^{\alpha(t_1+t_2)} \end{aligned}$$

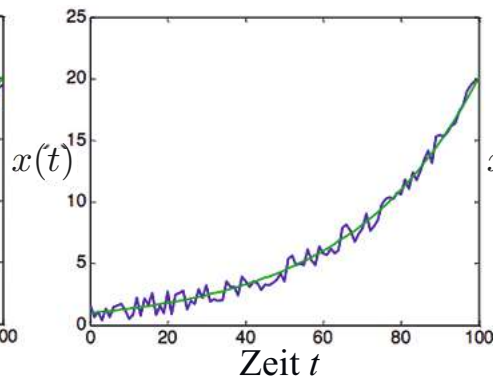
wegen Unabhängigkeit von $n(t_1)$ und $n(t_2)$.

5.3 Korrelation

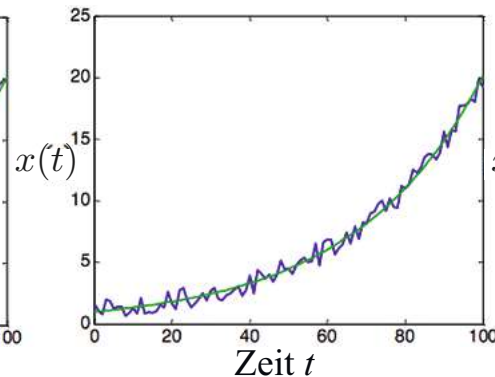
Musterfunktion 1



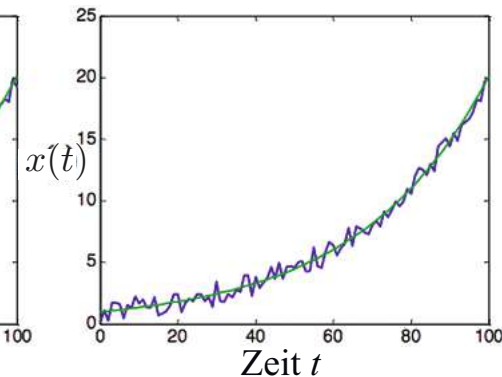
Musterfunktion 2



Musterfunktion 3

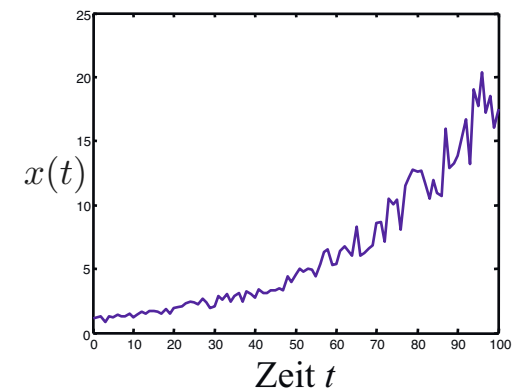


Musterfunktion 4



Beobachtungen:

- Mittelwert und AKF hängen von der Zeit t bzw. von den Zeiten t_1 und t_2 ab.
- Erwartungswerte werden berechnet, indem man über alle möglichen Realisierungen der Zufallsvariable n (hier: alle Musterfunktionen) integriert, jeweils gewichtet mit deren Auftrittswahrscheinlichkeit $f(n)$.
- Die Varianz liegt hier zeitinvariant bei $1/3$. Realistischer wäre auch, eine zeitvariante Varianz zu modellieren, so dass die relativen (prozentualen) Schwankungen gleich bleiben (siehe rechts), nicht wie in diesem Beispiel die absoluten.
- Statt der Gleichverteilung wäre eine Normalverteilung sicher realistischer für n .



5.4 Stationarität und Ergodizität

Stationarität

Ein Zufallsprozess ist *stationär*, wenn sich seine statistischen Eigenschaften nicht mit der Zeit ändern. Dies bedeutet, dass alle statistischen Kenngrößen wie Mittelwert, Varianz, AKF und auch die Momente höherer Ordnung nicht von der Zeit abhängen. Zwei Zufallsprozesse sind *verbunden stationär*, wenn beide stationär und ihre gemeinsamen statistischen Eigenschaften zeitinvariant sind.

Gilt für einen Zufallsprozess die Zeitinvarianz nur bezüglich der Momente 1. und 2. Ordnung, dann bezeichnet man diesen als *schwach stationär*.

Stationarität ist eine für den praktischen Umgang mit stochastischen Methoden sehr wichtige Eigenschaft. Oft muss man Stationarität annehmen, um überhaupt weiterrechnen zu können. Meistens ist die Annahme nur näherungsweise erfüllt (etwa vergleichbar zu Annahme der Linearität), was aber den Erfolg der eingesetzten Methoden nicht schmälert.

Viele Zufallsprozesse können kurzfristig als stationär angesehen werden, obwohl sie dies langfristig nicht sind. Z.B. weisen Börsenkurse klare langfristige Trends auf, was einem zeitlich veränderlichen Mittelwert entspricht. Auch verändert sich langfristig die Volatilität, was einer zeitlich veränderlichen Varianz entspricht. Börsenkurse können aber trotzdem auf kurze Sicht als näherungsweise stationär betrachtet werden.

5.4 Stationarität und Ergodizität

Mittelwert, Varianz und Korrelationsfunktionen für stationäre Zufallsprozesse

All diese statistischen Kenngrößen hängen nicht mehr von der absoluten Zeit t ab. D.h.:

Dichte: $f(x(t)) \neq fkt(t)$

Mittelwert: $E\{x(t)\} \neq fkt(t)$

Varianz: $\text{var}\{x(t)\} \neq fkt(t)$

AKF: $r_{xx}(t_1, t_2) = fkt(t_2 - t_1) = r_{xx}(t_2 - t_1) = r_{xx}(\tau)$

KKF: $r_{xy}(t_1, t_2) = fkt(t_2 - t_1) = r_{xy}(t_2 - t_1) = r_{xy}(\tau)$

Die Korrelationsfunktionen hängen also nicht mehr von den zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 ab, sondern nur noch von der zeitlichen Verschiebung der beiden Signale $\tau = t_2 - t_1$. Dadurch werden die Korrelationsfunktionen wesentlich einfacher handhabbar, lassen sich leicht in Abhängigkeit von τ graphisch darstellen und interpretieren.

Entsprechendes gilt für zeitdiskrete Zufallsprozesse mit den Zeitpunkten k_1, k_2 und $\chi = k_2 - k_1$.

Im Folgenden werden wir uns, wenn nicht ausdrücklich anders gesagt, mit stationären Zufallsprozessen beschäftigen.

5.4 Stationarität und Ergodizität

Eigenschaften der Autokorrelationsfunktion

1. Symmetrie: $r_{xx}(\tau) = r_{xx}(-\tau)$
2. Positiv bei 0: $r_{xx}(0) \geq 0$
3. Maximum bei 0: $r_{xx}(0) \geq r_{xx}(\tau)$
4. Periodizität: Sind alle Musterfunktionen $x(t)$ periodisch mit Periodendauer T , dann gilt dies auch für die AKF: $r_{xx}(\tau + T) = r_{xx}(\tau)$

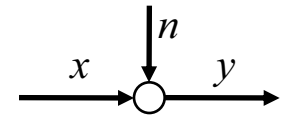
Eigenschaften der Kreuzkorrelationsfunktion

1. Vertauschung von x und y : $r_{yx}(\tau) = r_{xy}(-\tau)$

$$r_{xy}(\tau) = E\{x(t)y(t + \tau)\}$$

$$r_{yx}(-\tau) = E\{y(t)x(t - \tau)\} = E\{y(t + \tau)x(t)\} = r_{xy}(\tau)$$

5.4 Stationarität und Ergodizität



Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichte ist *die* Basis

Denken wir nochmal genauer über Zufallsprozesse nach. Nehmen wir dazu an, wir wollen eine bestimmte physikalische Größe, z.B. eine Temperatur, messen. Diese Temperatur sei konstant und werde durch die *deterministische Variable* x beschrieben. Beim Messen wird die Temperatur x durch eine große Zahl von nicht oder schwer kontrollierbaren Umgebungseinflüssen gestört, z.B. Luftzug, Sonneneinstrahlung, Vibrationen, usw. All diese Umgebungseinflüsse fassen wir summarisch in der *Zufallsvariablen* n zusammen. Wir messen also statt der wahren Temperatur x die gestörte Temperatur $y = x + n$. Die Messgröße y ist die Summe aus einer deterministischen und einer Zufallsvariablen und damit selbst eine Zufallsvariable, denn sie hängt (wie n) vom Zufall ab. Um nun mit der Messgröße y rechnen zu können, müssen wir Annahmen über die Art der Zufallsvariablen n machen.

Wir nehmen z.B. an, n sei normalverteilt mit Mittelwert $m_n = 0^\circ\text{C}$ und Standardabweichung $\sigma_n = 0.5^\circ\text{C}$, d.h. Varianz $\sigma_n^2 = 0.25(^\circ\text{C})^2$. Damit ist die Dichte von n vollständig spezifiziert und die Zufallsvariable n vollständig beschrieben! Nun können wir alles Interessante über die Messgröße y ausrechnen, z.B. alle statistischen Kenngrößen, wie Mittelwert, Varianz, Autokorrelation r_{yy} , Kreuzkorrelationen r_{yx} , r_{yn} , Momente höherer Ordnung usw.

Aber was tun wir, wenn wir die Dichte von n nicht vollständig kennen?

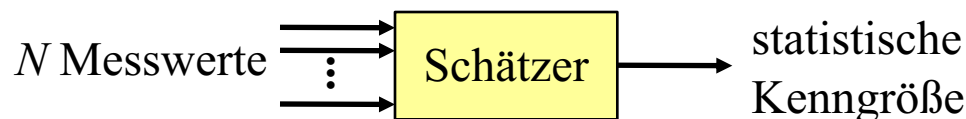
5.4 Stationarität und Ergodizität

Bestimmung statistischer Kenngrößen aus Messungen

Meist die einzige Wahl besteht in dem Versuch, die interessierenden statistischen Größen aus *Messungen* zu bestimmen. Dies kann entweder direkt geschehen oder indirekt, z.B. über eine Schätzung der Dichte und anschließende Berechnung mit Hilfe dieser geschätzten Dichte (an Stelle der unbekanntes wahren Dichte).

Da wir die Zufallsvariable nicht gleichzeitig viele Male auswerten können, müssen wir die Messungen nacheinander durchführen. D.h. wir messen $y(k)$ zu verschiedenen (diskreten) Zeitpunkten $k = 1, 2, \dots, N$. Damit werden aus den Zufallsvariablen n und y die zeitdiskreten Zufallsprozesse $n(k)$ und $y(k) = x(k) + n(k)$; $x(k)$ ist ein zeitdiskretes deterministisches Signal.

Nun können wir versuchen durch geeignete Formeln aus den N Messwerten, *Schätzwerte* für die interessierenden statistischen Kenngrößen zu erhalten. Die Ergebnisse werden niemals exakt sein, da die Anzahl der Messwerte N endlich ist. Allerdings können wir darauf hoffen, dass die Schätzwerte nahe an dem unbekanntes, wahren Werten liegen, wenn N „groß genug“ ist. Zu den statistischen Eigenschaften von Schätzwerten siehe Kapitel 5.5.



5.4 Stationarität und Ergodizität

Ergodizität

Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit die statistischen Größen auf die eben beschriebene Art aus Messungen ermittelt werden können?

Der Zufallsprozess muss ergodisch sein!

Dies bedeutet, dass in *einer* zeitlichen Realisierung (Musterfunktion) eines Zufallsprozesses die gesamte Information über diesen Zufallsprozess steckt und dass diese eine Realisierung (Musterfunktion) für diesen Zufallsprozess repräsentativ ist.

Damit ist es bei einem ergodischen Zufallsprozess $y(t)$ *egal*, ob man (in Gedanken) über alle möglichen Ergebnisse (**Schar**) eines Zufallsexperiments, jeweils gewichtet mit der Auftrittswahrscheinlichkeit $f(y)$, den Mittelwert bestimmt

Scharmittelwert: $m_y = E\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy$

oder ob man über die **Zeit** die Messwerte mittelt

Zeitmittelwert: $\hat{m}_y = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)$

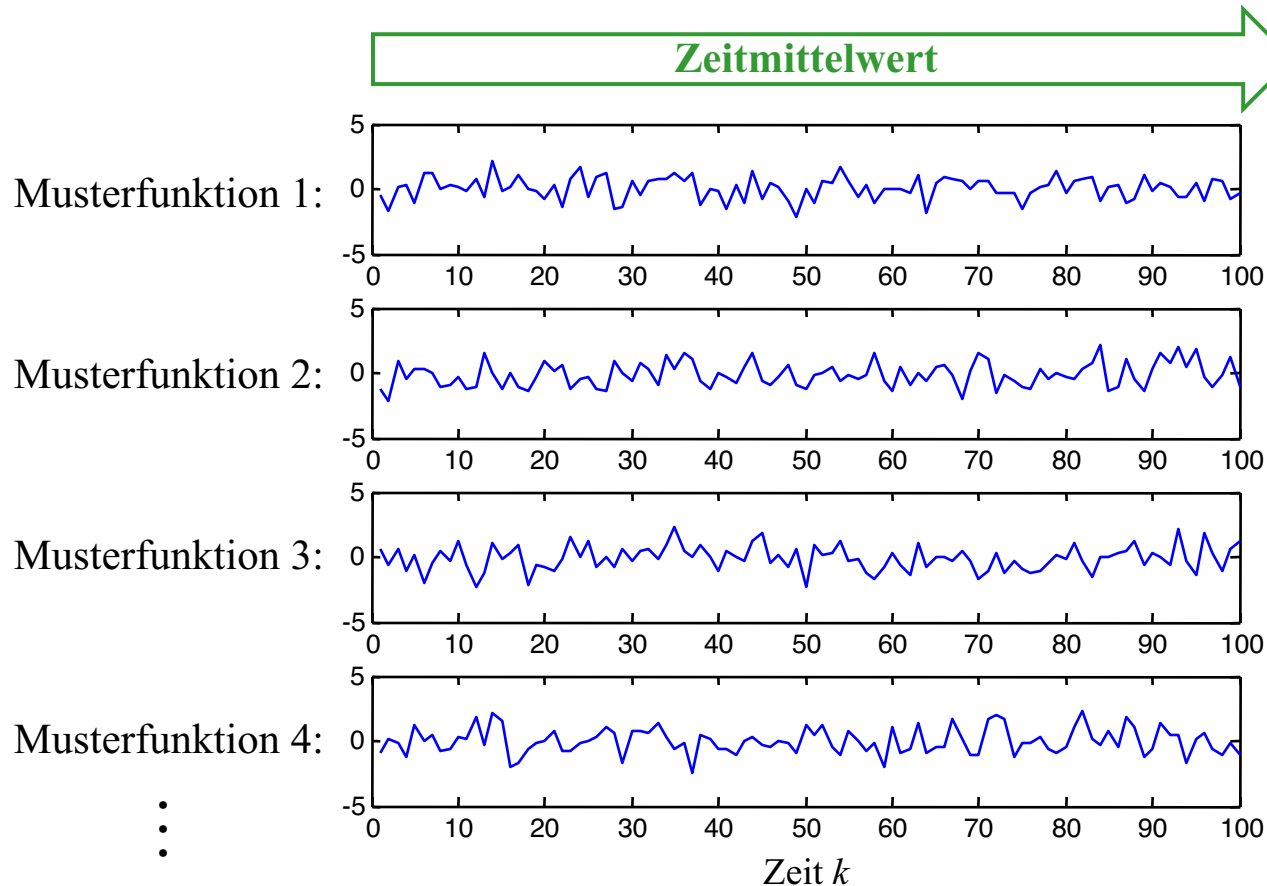
Für *zeitkontinuierliche*
Zufallsprozesse:

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt \approx \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$$

5.4 Stationarität und Ergodizität

Ergodizität

Ein Zufallsprozess heißt ergodisch, wenn die Zeitmittelwerte jeder Musterfunktion mit dem Scharmittelwert übereinstimmen.



Es gibt (meist) unendliche viele mögliche Musterfunktionen des Zufallsprozesses $y(k)$. Die Dichte $f(y(k))$ darf nicht von der Zeit k abhängen. Sonst würden sich die statistischen Eigenschaften von $y(k)$ über die Zeit ändern (instationär!) und $y(k)$ könnte niemals ergodisch sein.

5.4 Stationarität und Ergodizität

Interpretation der Ergodizität

Etwas abstrahiert kann man sich jede Musterfunktion, d.h. jede mögliche Realisierung des Zufallsprozesses, als Musikstück auf einem CD-Album vorstellen, welches zahlreiche Stücke enthält. Sind sich all diese Musikstücke in ihrer Art so ähnlich (haben so ähnliche statistische Eigenschaften), dass die Auswertung eines einzigen Stückes –egal welches – Alles über die gesamte CD aussagt, dann könnte man diese Musik als ergodisch bezeichnen. Böse Zungen behaupten, dies sei beispielsweise bei der Musik von „Modern Talking“ der Fall. Im Gegensatz zur Musik ist Ergodizität bei uns eine stark gewünschte Eigenschaft!

Ergodizität \Rightarrow Stationarität

Zeitmittelwerte sind immer *zeitunabhängig*, denn es werden ja die Werte aller Zeitpunkte für die Mittelwertbildung zusammenaddiert. Damit Ergodizität vorliegen kann, müssen daher auch die Scharmittelwerte zeitunabhängig sein. Deshalb ist jeder ergodische Prozess auch stationär (aber nicht notwendigerweise umgekehrt).

D.h. die statistischen Eigenschaften der Störung $n(k)$ (aus dem vorherigen Beispiel) müssen über die Zeit k hinweg konstant bleiben. Es dürfen sich weder Mittelwert, Varianz, noch andere statistische Kenngrößen ändern; sonst kann keine Ergodizität angenommen werden.

5.4 Stationarität und Ergodizität

Einschränkungen bei der Schätzung statistischer Größen

- In der Regel liegt nur *eine* Musterfunktion (Realisierung des Zufallsprozesses) vor, nämlich die gemessene. Zwar kann die Messung wiederholt werden, aber die dabei erzeugte zweite Musterfunktion wird dann zu einem anderen (späteren) Zeitpunkt erzeugt.
 1. Aus dieser Einschränkung folgt, dass wir keinen Scharmittelwert sondern nur einen Zeitmittelwert berechnen können, denn aus der potentiellen Schar an Musterfunktionen liegt nur eine vor.
 2. Ebenfalls folgt, dass instationäre Zufallsprozesse bei der Schätzung ernsthafte Probleme machen.
- Die gemessene Musterfunktion hat eine endliche Länge, d.h. die zeitliche Mittelung muss mit einer endlichen Anzahl von Messdaten N auskommen, was ihre Genauigkeit begrenzt.
- Wenn die Schätzung online in Echtzeit erfolgen soll, d.h. nicht mit vorher aufgezeichneten Werten, dann liegen nur aktuelle und vergangene Werte vor. Dies bedeutet, dass z.B. Korrelations- und Kovarianzfunktionen nur für negative Zeitverschiebungen τ oder χ berechnet werden können.

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Eigenschaften von Schätzwerten

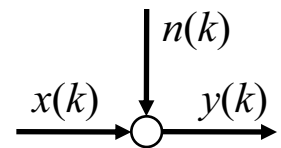
Ein *Schätzer* berechnet aus N Messwerten



eine oder mehrere statistische Kenngrößen. Typischerweise werden die Messwerte als Zufallsvariablen modelliert und ihre Anzahl N ist relativ groß. Die statistischen Kenngrößen sind damit ebenfalls Zufallsvariablen (denn sie werden ja aus Zufallsvariablen berechnet) und ihre Anzahl ist typischerweise relativ klein (hier gleich 1). Eine Schätzung kann deshalb auch als Informationskompression interpretiert werden. N Messwerte werden durch eine kleine Anzahl von Kenngrößen zusammengefasst.

Beispiel: Mittelwertbildung

Betrachten wir nochmal das Temperaturmessbeispiel:



$x(k)$ = deterministisches Signal „wahre Temperatur“ zum Zeitpunkt k

$n(k)$ = Zufallsprozess „Rauschen“ zum Zeitpunkt k

$y(k)$ = Zufallsprozess „gemessene Temperatur“ zum Zeitpunkt k

Wir nehmen an die wahre Temperatur sei unverändert $x(k) = 20^\circ\text{C}$. Das Rauschen $n(k)$ sei normalverteilt mit konstantem Mittelwert $m_n = 0^\circ\text{C}$ und konstanter Standardabweichung $\sigma_n = 0.5^\circ\text{C}$, d.h. Varianz $\sigma_n^2 = 0.25(^\circ\text{C})^2$. Wir nehmen an, der Zufallsprozess sei ergodisch.

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Beispiel: Mittelwertbildung

Da $y(k) = x(k) + n(k)$, ist die Zufallsvariable $y(k)$ ebenfalls normalverteilt und zwar mit Mittelwert $m_y = 20^\circ\text{C}$ und Standardabweichung $\sigma_y = 0.5^\circ\text{C}$ (Varianz $\sigma_y^2 = 0.25(^\circ\text{C})^2$).

Nun werden $N = 100$ Messwerte gemessen. Daraus soll der Mittelwert für y berechnet werden; $x(k)$ ist uns in der Realität natürlich unbekannt. Der übliche Schätzer zur Berechnung des Mittelwerts lautet:

$$\hat{m}_y = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)$$

Der geschätzte Mittelwert \hat{m}_y selbst ist wieder eine Zufallsvariable, denn er berechnet sich ja aus lauter Zufallsvariablen.

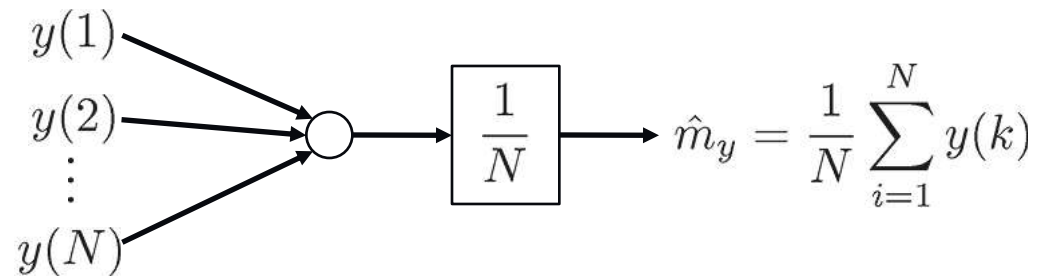
Welche Eigenschaften hat nun dieser geschätzte Mittelwert? Wie genau ist er im Mittel? Wie zuverlässig ist er? Wieviel besser wird er, wenn wir mehr Messwerte verwenden, also N vergrößern?

Um diese und ähnliche Fragen zu beantworten, müssen wir wissen wie \hat{m}_y verteilt ist, also welcher Dichte er folgt. Meist ist es auch ausreichend wenn wir wissen, welchen Mittelwert und welche Varianz diese Verteilung hat! Dies sind Eigenschaften der obigen Schätzformel!

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Eigenschaften des Schätzwerts für den Mittelwert

Der Schätzer für den Mittelwert addiert N Zufallsvariablen $y(1), y(2), \dots, y(N)$. Da in unserem Beispiel $y(k)$ normalverteilt ist, ergibt sich die Verteilung von \hat{m}_y aus der Summe von N Normalverteilungen (geteilt durch die Zahl N). Aus dem zentralen Grenzwertsatz der Statistik (Kapitel 5.1) wissen wir, dass eine Summe von unabhängigen Normalverteilungen wieder normalverteilt ist.



Die Summe von N unabhängigen, normalverteilten Zufallsvariablen mit den Mittelwerten m_i und den Varianzen σ_i^2 ($i = 1, 2, \dots, N$) ergibt eine normalverteilte Zufallsvariable mit dem Mittelwert $m_1 + m_2 + \dots + m_N$ und der Varianz $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_N^2$.

Man beachte, dass sich Mittelwerte und Varianzen (*nicht* Standardabweichungen!) addieren. Da wir hier noch den Faktor $1/N$ berücksichtigen müssen, ergibt sich eine Normalverteilung mit Mittelwert von $(m_1 + m_2 + \dots + m_N)/N$ und der Varianz $(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_N^2)/N^2$. Wenn alle Varianzen gleich sind ($\sigma^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_N^2$), dann ist die **Varianz des Mittelwerts σ^2/N** .

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Eigenschaften des Schätzwerts für den Mittelwert

Der Faktor $1/N$ wirkt sich linear auf den Mittelwert aber quadratisch auf die Varianz aus, weil für eine deterministische Variable k und eine Zufallsvariable x mit $y = kx$ gilt:

$$m_y = E\{y\} = E\{kx\} = kE\{x\} = km_x$$

$$\begin{aligned}\text{var}\{y\} &= E\{(y - m_y)^2\} = E\{(kx - km_x)^2\} = E\{k^2(x - m_x)^2\} = k^2E\{(x - m_x)^2\} \\ &= k^2\text{var}\{x\}\end{aligned}$$

Dichte des Schätzwerts für den Mittelwert

Da $y(k)$ stationär ist, sind Mittelwert und Varianz von $y(k)$ für alle Zeitpunkte k identisch. Somit gilt:

$$m_y = 20^\circ\text{C} = m_1 = m_2 = \dots = m_N \quad \text{und} \quad \sigma_y^2 = 0.25(^\circ\text{C})^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_N^2$$

Daher folgt \hat{m}_y einer Normalverteilung mit folgendem

$$\begin{aligned}\text{Mittelwert} &= m_y = 20^\circ\text{C} \quad \text{und} \quad \text{Varianz} = \sigma_y^2 / N = 0.0025(^\circ\text{C})^2 \text{ für } N = 100, \\ &\text{bzw. Standardabweichung} = \sigma_y / \sqrt{N} = 0.05^\circ\text{C} \text{ für } N = 100.\end{aligned}$$

Man beachte, dass sich die Varianz mit $1/N$ reduziert und damit die Standardabweichung um $1/\sqrt{N}$. Dies ergibt sich aus: $(\sigma_y^2 + \sigma_y^2 + \dots + \sigma_y^2) / N^2 = N\sigma_y^2 / N^2 = \sigma_y^2 / N$.

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Zusammenfassung: Dichte des Schätzwertes

Fassen wir unsere Ergebnisse für die Eigenschaften des geschätzten Mittelwerts zusammen:

- Der Schätzwert ist normalverteilt.
- Der Schätzwert ist im Mittel korrekt, auch für endliche N , denn sein Erwartungswert ist identisch mit dem (in Praxis unbekanntem) wahren Wert.
- Die Streuung (Standardabweichung) des Schätzergebnisses um seinen Mittelwert ist proportional zur Streuung des Messwerts σ_y und nimmt mit $1/\sqrt{N}$ ab, wobei N die Anzahl der in die Schätzung eingehenden unabhängigen Messwerte ist.

Der Schätzer für den Mittelwert ist besonders einfach; insbesondere ist er *linear*. Deshalb bleibt auch die Normalverteilung erhalten. Andere Schätzer, wie z.B. der für die Varianz

$$\hat{\sigma}_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{m}_y)^2$$

sind komplizierter. Hier werden die normalverteilte Zufallsvariablen $y(k)$ und \hat{m}_y *quadratisch* aufsummiert. Deshalb folgt $\hat{\sigma}_y^2$ der sog. Chi-Quadrat-Verteilung (χ^2 -Verteilung). Deren Mittelwert und Varianz lassen sich aber immer noch recht leicht ausrechnen.

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Interpretation der Eigenschaften des Schätzwertes

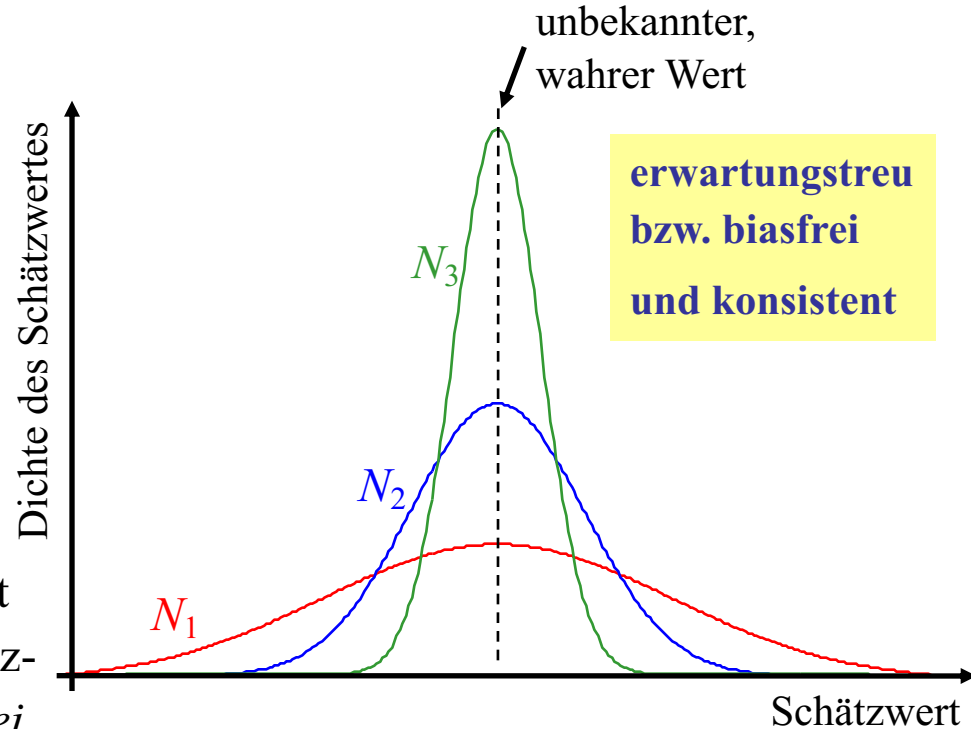
Meist ist die Dichte (normal, Chi-Quadrat, ...) des Schätzwertes nicht so wichtig. Es reicht aus, deren wichtigste Kenngrößen Mittelwert und Varianz zu bestimmen. Der genaue Verlauf der Dichte ist nur für sehr genaue quantitative Betrachtungen notwendig.

Welche Bedeutung hat nun der Mittelwert und die Varianz des Schätzwertes?

Betrachten wir dazu die typische Dichte eines Schätzwertes für 3 verschiedene Anzahlen von Messwerten $N_1 < N_2 < N_3$, z.B. $N_1 = 100$, $N_2 = 200$, $N_3 = 400$.

Da die Varianz mit $1/N$ abnimmt, liegen die Schätzwerte mit immer größerer Wahrscheinlichkeit in der Nähe des Mittelwerts, je größer N wird. Der Schätzwert wird immer verlässlicher.

Der Mittelwert des Schätzwertes ist hier mit dem wahren Wert identisch. So einen Schätzwert nennt man *erwartungstreu* oder *biasfrei*.

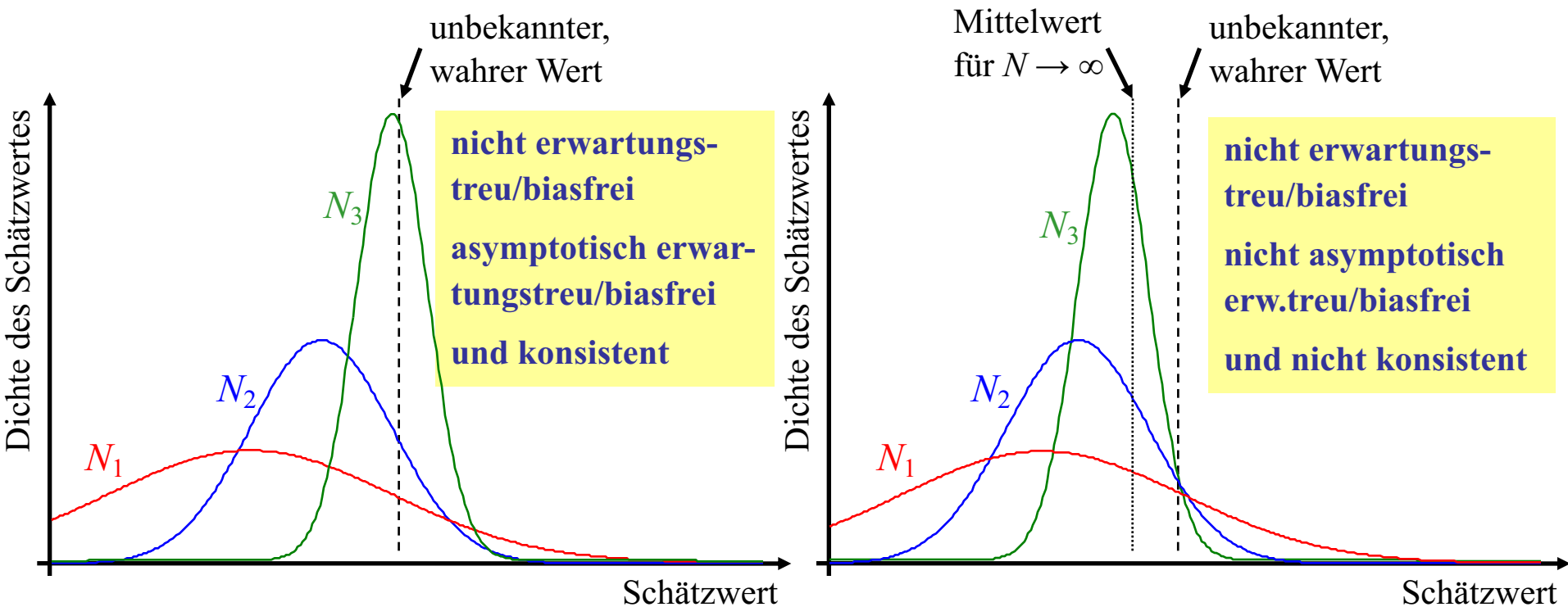


5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Weicht der Mittelwert des Schätzwertes vom wahren Wert ab, so ist der Schätzwert *nicht erwartungstreu* und weist einen *Bias*, d.h. einen *systematischen Schätzfehler*, auf.

Verschwindet der Bias aber für eine unendliche Anzahl an Messwerten, d.h. $N \rightarrow \infty$, dann ist der Schätzwert immerhin *asymptotisch erwartungstreu* bzw. *asymptotisch biasfrei*.

Strebt zudem die Schätzvarianz gegen 0, so ist der Schätzwert *konsistent*.



5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Erwartungstreue und Bias

Ein Schätzwert \hat{y} basierend auf N Messwerten wird *erwartungstreu* bzw. *biasfrei* genannt, wenn sein Mittelwert mit dem (unbekannten) wahren Wert y_0 identisch ist:

$$E\{\hat{y}\} = y_0$$

Andernfalls wird der Schätzwert *nicht erwartungstreu* bzw. *biasbehaftet* genannt. Der systematische Schätzfehler zwischen dem Mittelwert des Schätzwertes $E\{\hat{y}\}$ und dem wahren Wert y_0 wird *Bias* B genannt:

$$B = E\{\hat{y}\} - y_0$$

Verschwindet der Bias, wenn die Anzahl der Messwerte N gegen unendlich strebt, dann wird der Schätzwert *asymptotisch erwartungstreu* bzw. *asymptotisch biasfrei* genannt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} B = 0$$

Ist ein Schätzwert asymptotisch erwartungstreu und strebt die Schätzvarianz gegen 0, gilt also

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\{\hat{y}\} = y_0 \quad \text{und} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}\{\hat{y}\} = 0$$

so ist der Schätzwert *konsistent*.

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

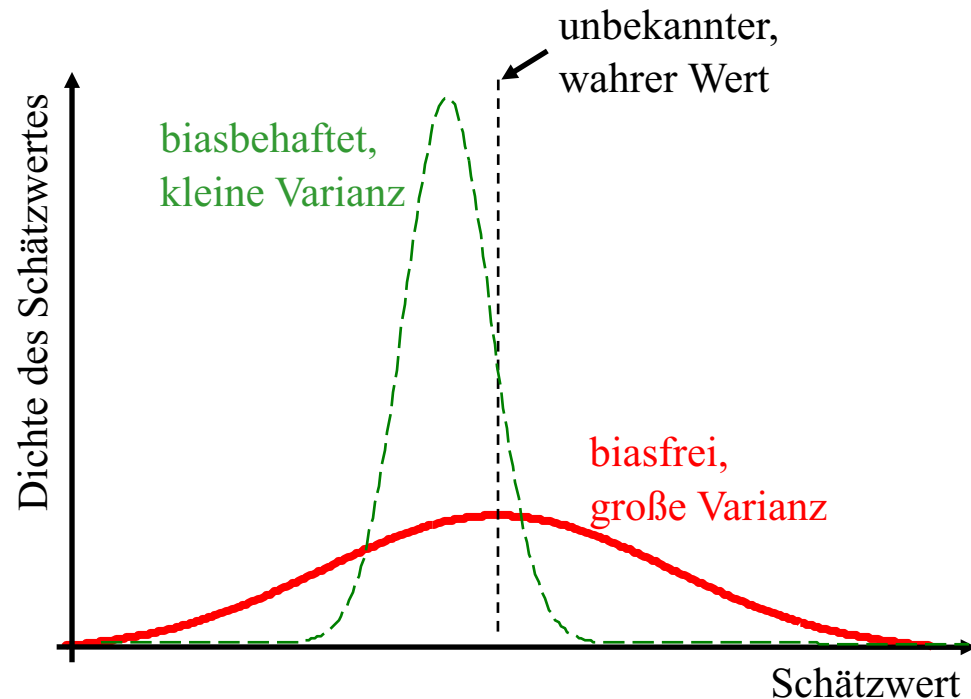
Bias versus Varianz

Im Idealfall hätte man gerne einen biasfreien Schätzwert mit möglichst kleiner Schätzvarianz. In vielen Fällen ist dies in der Tat möglich. Bei anspruchsvollen Schätzproblemen kann jedoch die Schätzvarianz des besten biasfreien Schätzers zu hoch sein (rote, fette Kurve). Manchmal ist es dann sinnvoll, einen Bias in Kauf zu nehmen, wenn im Austausch für dieses Zugeständnis eine kleinere Schätzvarianz erzielt werden kann (grün gestrichelt).

Bias und Varianz sind also in gewissem Umfang gegeneinander austauschbar.

Die Schätzvarianz lässt sich durch Inkaufnahme eines größeren Bias‘ reduzieren und umgekehrt. Ein Beispiel hierfür aus der Praxis sind die biasbehafteten KKF- und AKF-Schätzungen (s. weiter hinten).

In der Regel wird man aber immer einen asymptotisch biasfreien Schätzer fordern, dessen systematischer Schätzfehler also zumindest für $N \rightarrow \infty$ immer kleiner wird.



5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Wichtige Schätzwerte

Gegeben: N Messwerte $x(1), x(2), \dots, x(N)$.

$$\text{Mittelwert: } \hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k)$$

Dieser Schätzwert ist biasfrei.

$$\text{Varianz: } \hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (x(k) - \hat{m}_x)^2$$

Dieser Schätzwert ist biasfrei.

Der vielleicht näherliegende Schätzer

$$\hat{\hat{\sigma}}_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x(k) - \hat{m}_x)^2$$

weist einen Bias auf! Dies lässt sich verifizieren, indem man den Erwartungswert von $\hat{\sigma}_x^2$ bzw. $\hat{\hat{\sigma}}_x^2$ berechnet.

Info: Eine anschauliche Erklärung für die Verwendung des Nenners $N-1$ statt N in der Varianzschätzung liefert das Denken in *Freiheitsgraden*.

Durch die Schätzung des Mittelwerts wurde bereits ein Freiheitsgrad der Messdaten gebunden, denn ein Messwert ließe sich aus den $N-1$ übrigen Messwerten und dem Mittelwert rekonstruieren; er ist damit nicht mehr beliebig wählbar sondern gebunden. Daher stehen nur noch $N-1$ Freiheitsgrade zur Verfügung.

Bei einem vektoriellen Problem hätte man n , nicht nur 1 Mittelwert bestimmen müssen. Dann wäre der korrekte Nenner bei der Varianzschätzung $N-n$, also immer gleich der übrig gebliebenen Freiheitsgrade!

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Biasfreiheit der geschätzten Varianz

Der geschätzte Mittelwert lautet \hat{m}_x . Der wahre Mittelwert laute μ_x . Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} E\{\hat{\sigma}_x^2\} &= E\left\{\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^N(x(k)-\hat{m}_x)^2\right\} = \frac{1}{N-1}E\left\{\sum_{k=1}^N[(x(k)-\mu_x)-(\hat{m}_x-\mu_x)]^2\right\} \\ &= \frac{1}{N-1}E\left\{\underbrace{\sum_{k=1}^N(x(k)-\mu_x)^2}_{= N\sigma_x^2} - 2\underbrace{\sum_{k=1}^N(x(k)-\mu_x)(\hat{m}_x-\mu_x)}_{= -2N(\hat{m}_x-\mu_x)^2} + \underbrace{\sum_{k=1}^N(\hat{m}_x-\mu_x)^2}_{= N(\hat{m}_x-\mu_x)^2}\right\} \\ &= \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^N E\{(x(k)-\mu_x)^2\} - NE\{(\hat{m}_x-\mu_x)^2\} = \frac{1}{N-1}(N\sigma_x^2 - N\sigma_{\hat{m}_x}^2) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^N(x(k)-\mu_x) = N\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N x(k) - \sum_{k=1}^N \mu_x = N\hat{m}_x - N\mu_x = N(\hat{m}_x - \mu_x)$$

$$\hat{m}_x = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N x(k)$$

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

$$E \{ \hat{\sigma}_x^2 \} = \frac{N}{N-1} (\sigma_x^2 - \sigma_{\hat{m}_x}^2)$$

mit den Varianzen:

σ_x^2 : Varianz der Messdaten und $\sigma_{\hat{m}_x}^2$: Varianz des geschätzten Mittelwerts \hat{m}_x

Aus vorherigen Überlegungen wissen wir, dass die Varianz des geschätzten Mittelwerts mit $1/N$ abnimmt, vorausgesetzt die Messdaten sind voneinander statistisch unabhängig, d.h.:

$$\sigma_{\hat{m}_x}^2 = \frac{\sigma_x^2}{N}$$

Hiermit ergibt sich:

$$E \{ \hat{\sigma}_x^2 \} = \frac{N}{N-1} \left(\sigma_x^2 - \frac{\sigma_x^2}{N} \right) = \frac{N}{N-1} \frac{N\sigma_x^2 - \sigma_x^2}{N} = \sigma_x^2$$

Das bedeutet: Im Mittel liefert dieser Schätzer den wahren Wert der Varianz der Messdaten. Dieser Schätzwert ist somit biasfrei!

Hätte man anstelle des geschätzten Mittelwerts \hat{m}_x den (in der Praxis unbekannt) wahren Mittelwert μ_x in der Varianzschätzung verwendet, so müsste man für eine biasfreie Varianzschätzung den Nenner N statt $N-1$ verwenden.

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Schätzwerte für Korrelationen und Kovarianzen

Für ergodische Zufallsprozesse liefern folgende Formeln eine biasfreie Schätzung der Kreuz- und Autokorrelierten:

$$r_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k)y(k)$$

$$r_{xx} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x^2(k)$$

Entsprechendes gilt für die Kreuz- und Autokovarianzen, allerdings hier mit dem Nenner $N - 1$, da in die Schätzformel der geschätzte Mittelwert eingeht:

$$\text{cov}\{x, y\} = c_{xy} = \frac{1}{N - 1} \sum_{k=1}^N (x(k) - \hat{m}_x)(y(k) - \hat{m}_y)$$

$$\text{cov}\{x, x\} = c_{xx} = \frac{1}{N - 1} \sum_{k=1}^N (x(k) - \hat{m}_x)^2 = \text{var}\{x\}$$

$$\hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k)$$
$$\hat{m}_y = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)$$

Wie wir schon wissen, ist die Autokovarianz identisch mit der Varianz.

BEMERKUNG: In der Statistik sind Korrelationsfunktionen anders definiert, als normierte Kovarianzfunktionen. Daher kann es je nach Literatur zu Missverständnissen kommen!

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Schätzwerte für KKF und AKF

Die naheliegenden und *biasfreien* Schätzformeln für KKF und AKF verwenden im Nenner die Anzahl der Summanden, die mit zunehmender Zeitverschiebung der Zeitfolgen χ immer kleiner wird:

$$r_{xy}(\kappa) = \frac{1}{N - |\kappa|} \sum_{k=1}^N x(k)y(k + \kappa)$$

$$r_{xx}(\kappa) = \frac{1}{N - |\kappa|} \sum_{k=1}^N x(k)x(k + \kappa)$$

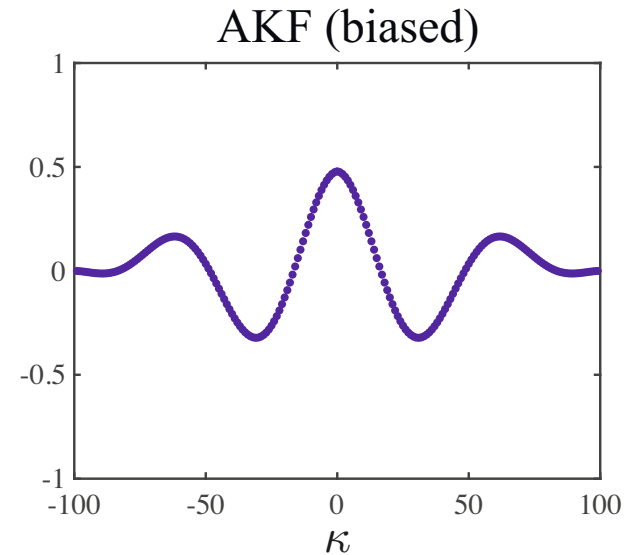
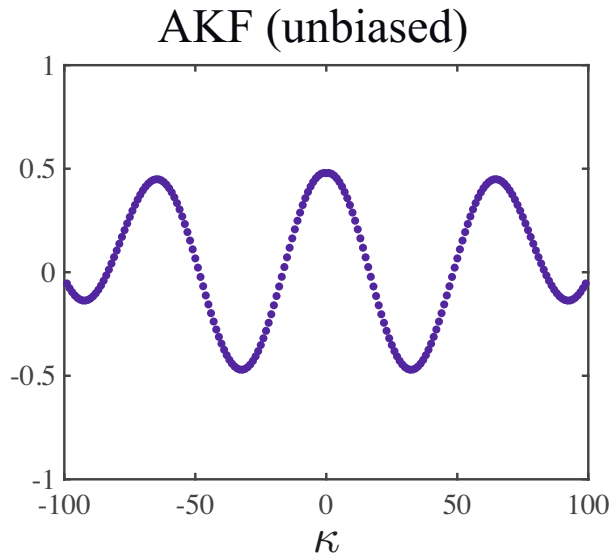
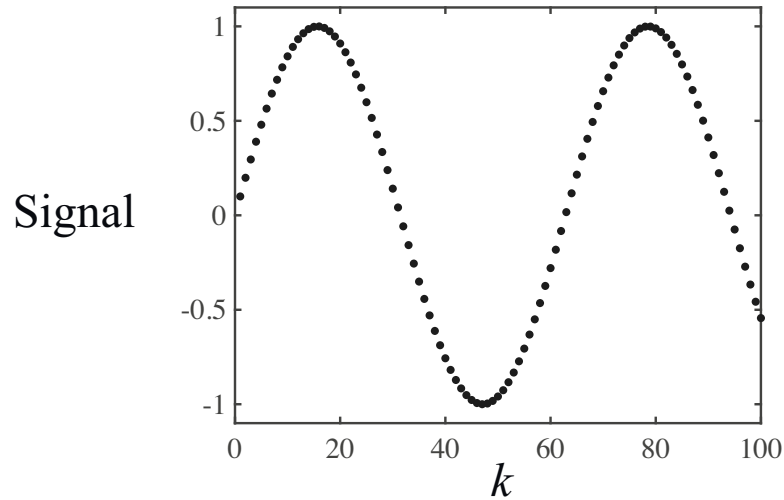
Die Messwerte $x(k)$ und $y(k)$ werden nur im Zeitintervall $k = 1, 2, \dots, N$ gemessen. Daher laufen diese Summen für $\chi \neq 0$ aus dem bekannten Zeitbereich heraus. Diese unbekanntenen Werte werden dann zu 0 angenommen (wie bei der DFT in Kapitel 3). Streng genommen müssten wir folgende Fallunterscheidung vornehmen, die auch hervorhebt, dass jeweils nur $N - |\chi|$ Summanden verwendet werden können:

$$\text{Für } \chi \leq 0: r_{xy}(\kappa) = \frac{1}{N - |\kappa|} \sum_{k=|\kappa|+1}^N x(k)y(k + \kappa) \quad r_{xx}(\kappa) = \frac{1}{N - |\kappa|} \sum_{k=|\kappa|+1}^N x(k)x(k + \kappa)$$

$$\text{Für } \chi > 0: r_{xy}(\kappa) = \frac{1}{N - \kappa} \sum_{k=1}^{N-\kappa} x(k)y(k + \kappa) \quad r_{xx}(\kappa) = \frac{1}{N - \kappa} \sum_{k=1}^{N-\kappa} x(k)x(k + \kappa)$$

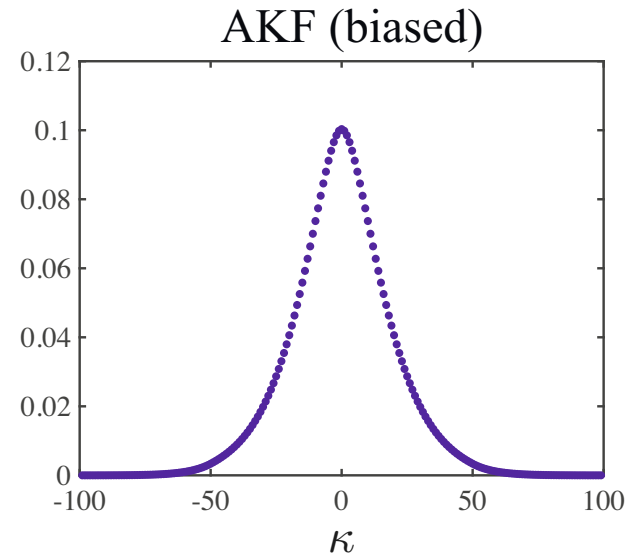
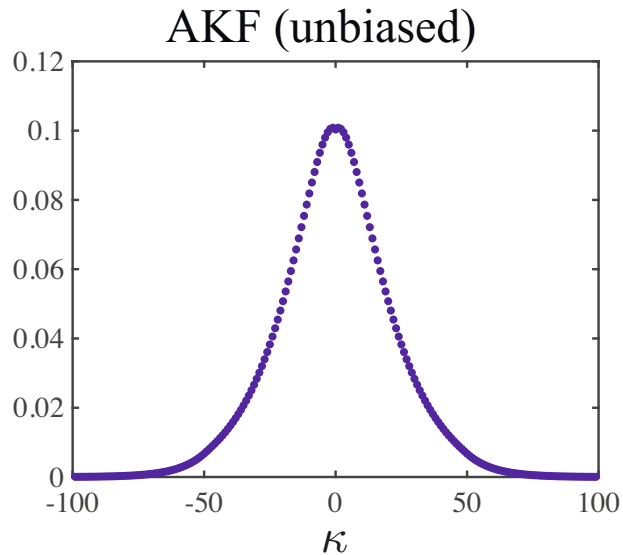
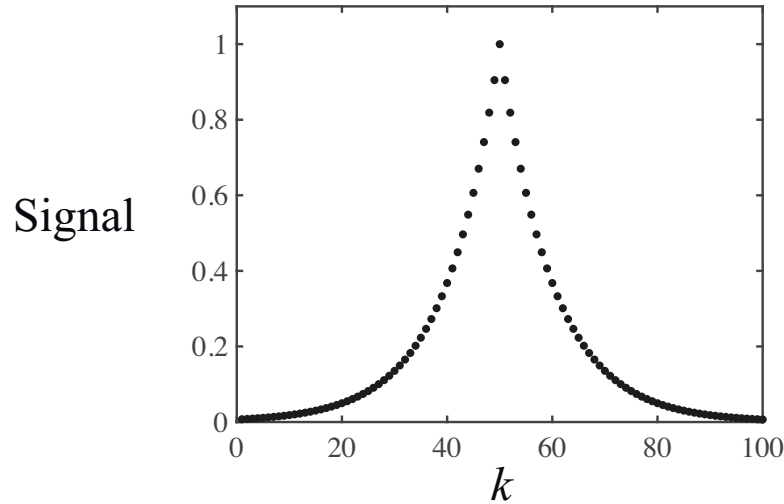
5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Beispiele für AKFs



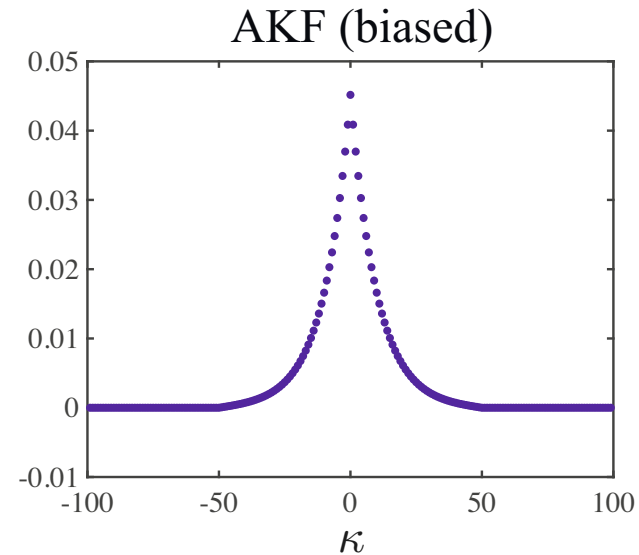
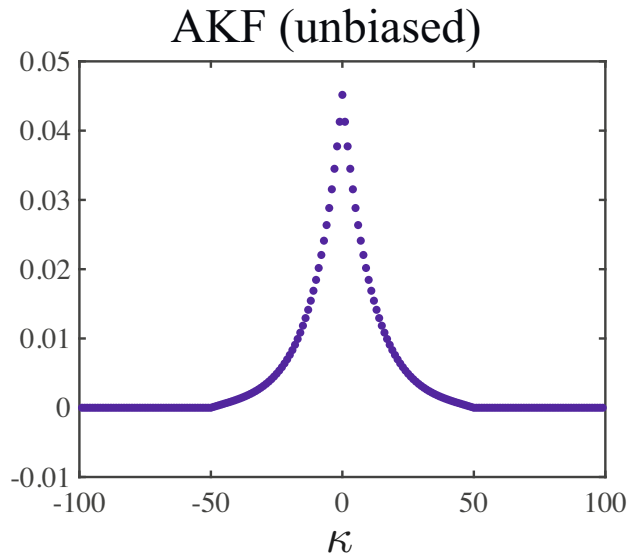
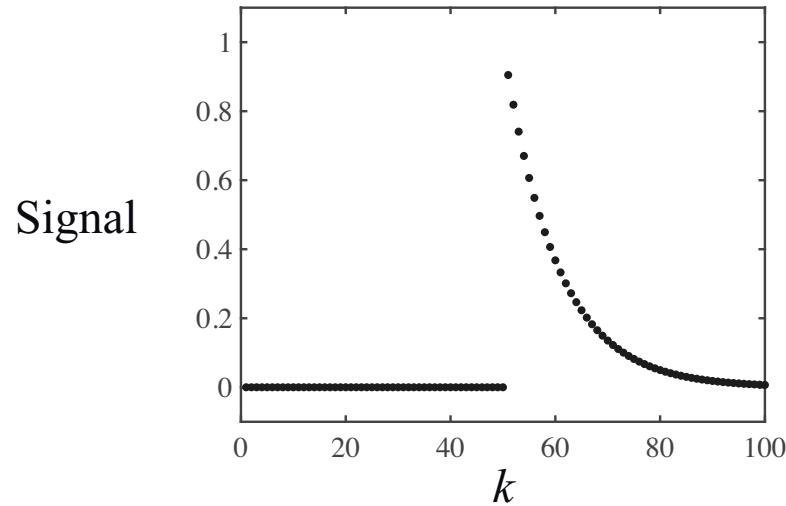
5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Beispiele für AKFs



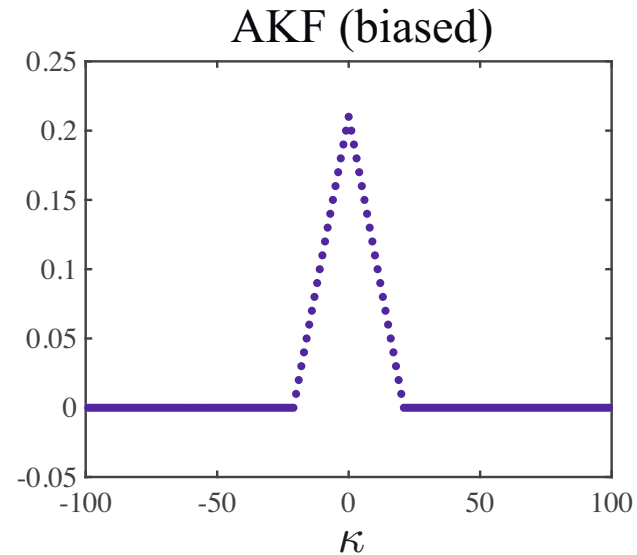
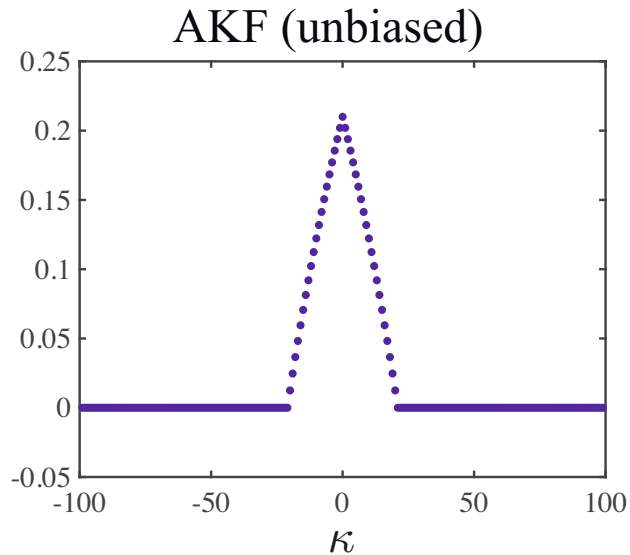
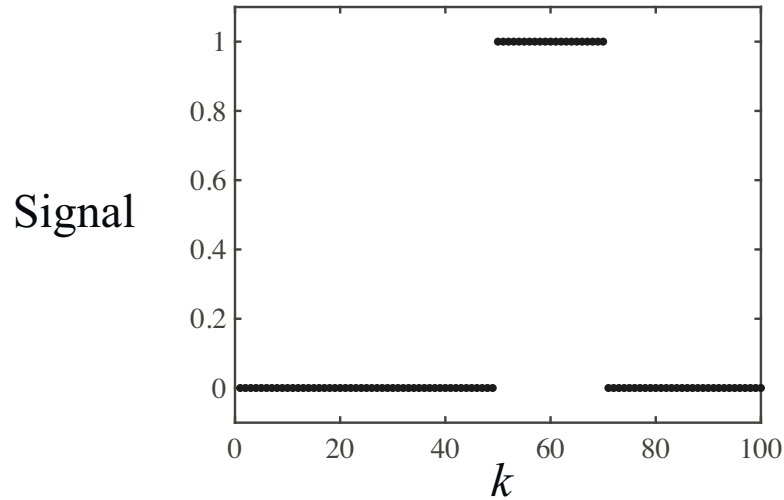
5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Beispiele für AKFs



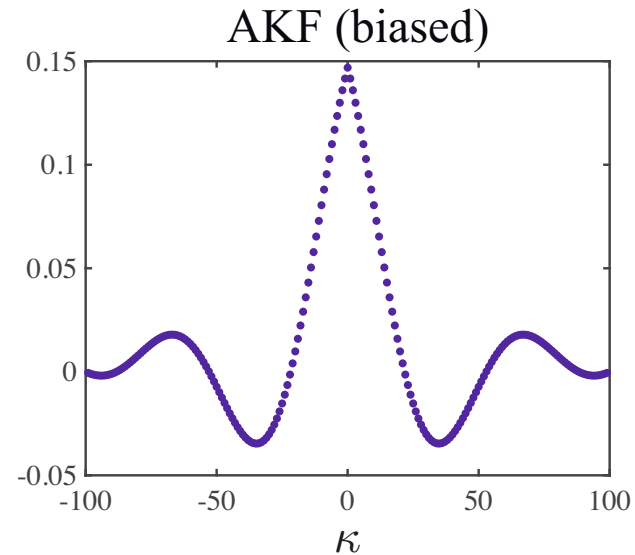
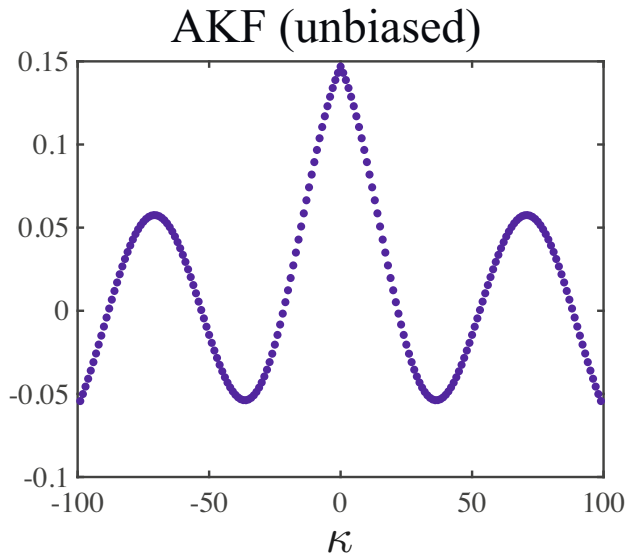
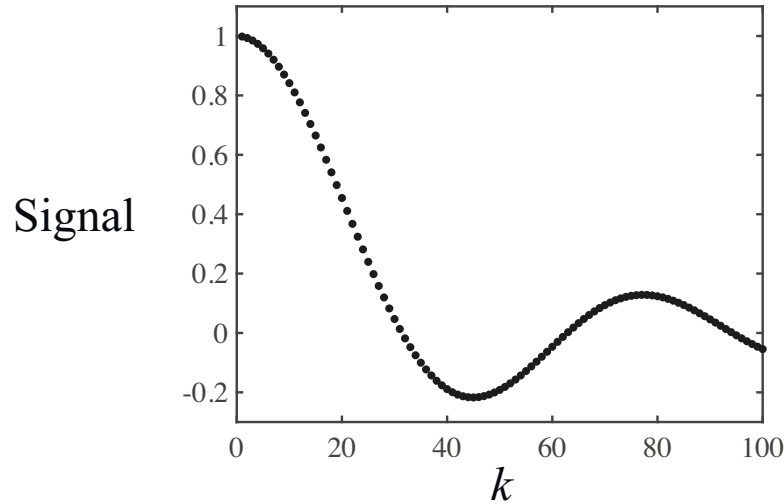
5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Beispiele für AKFs



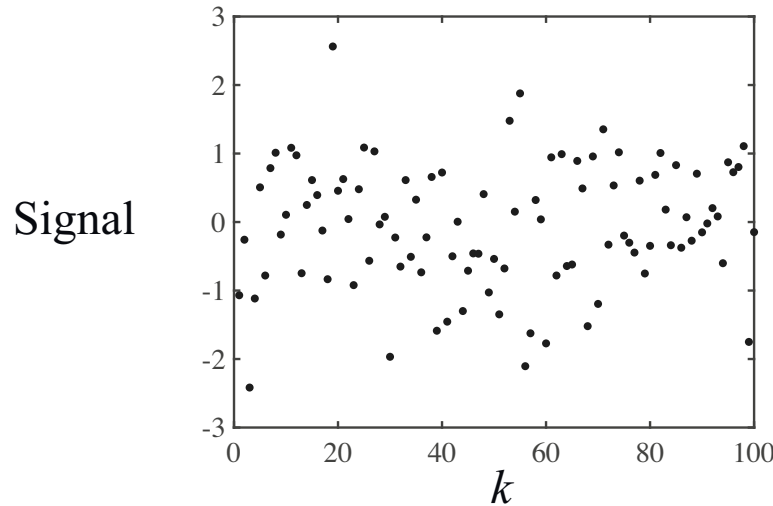
5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Beispiele für AKFs

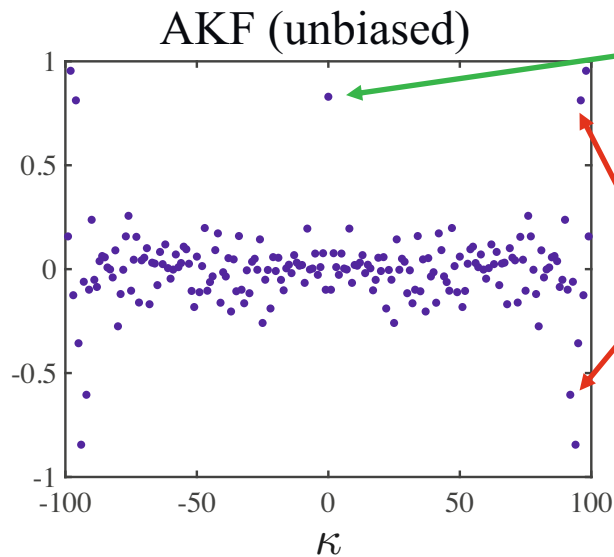


5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

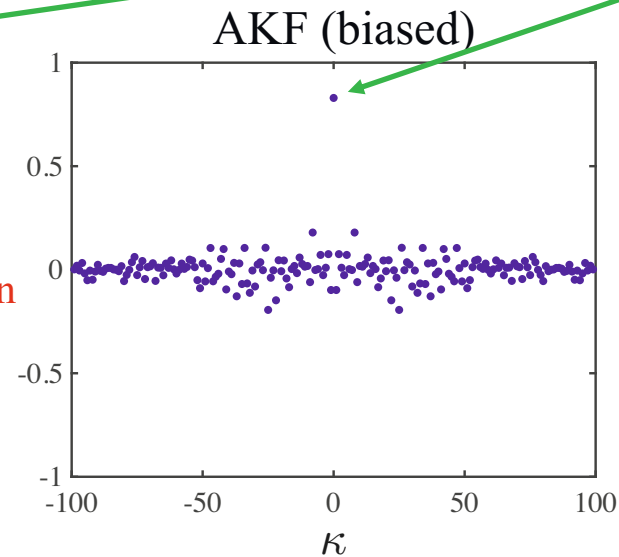
Beispiele für AKFs



signifikante Korrelation
nur für keine Zeit-
verschiebung: $\kappa = 0$

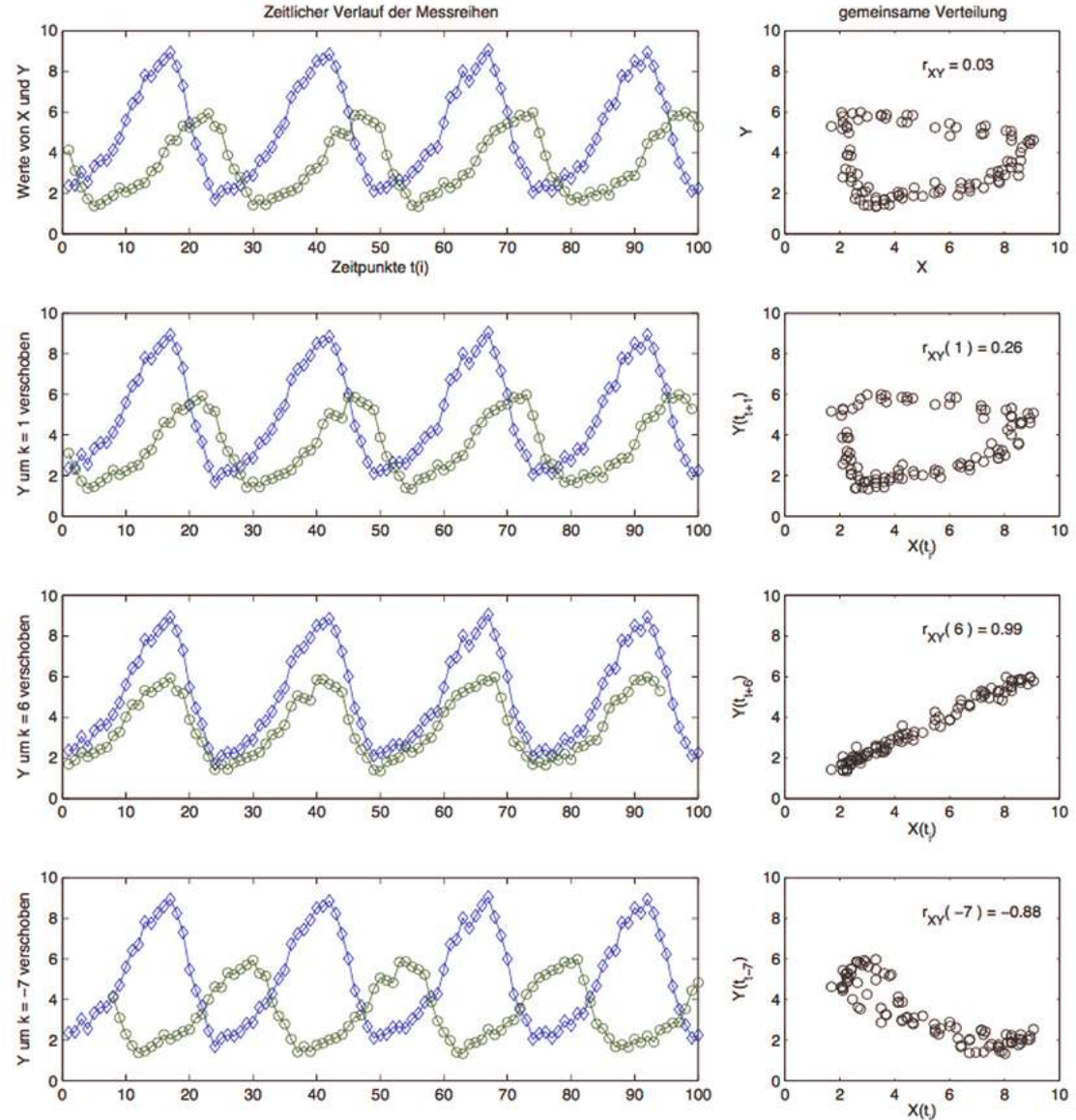


darum besser
biased schätzen



5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

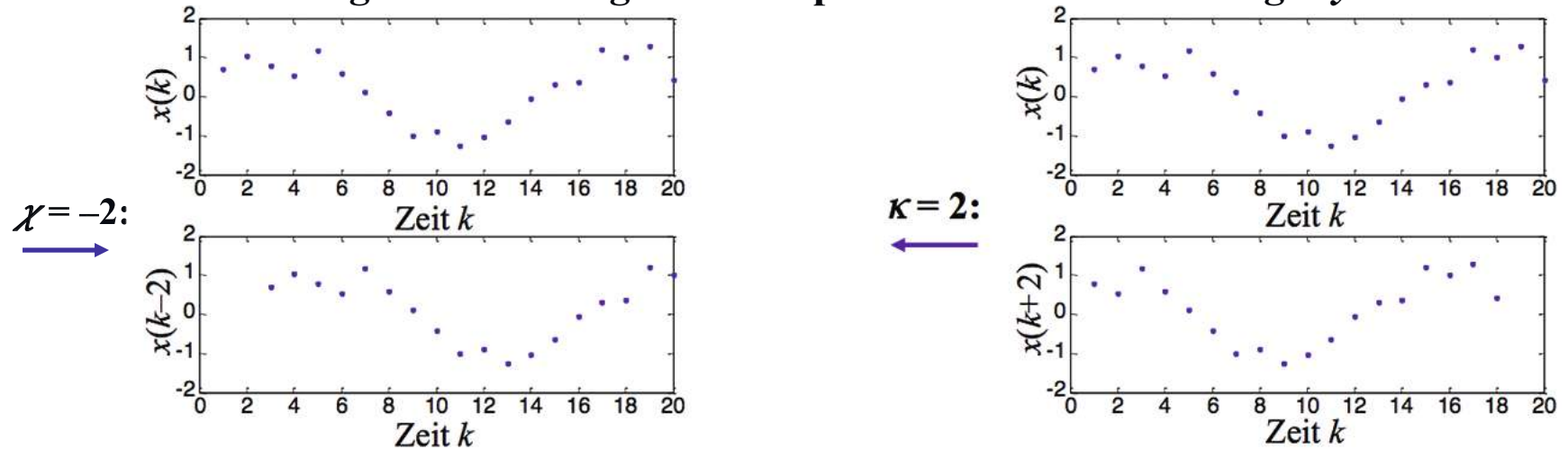
Sinn des Verschiebens



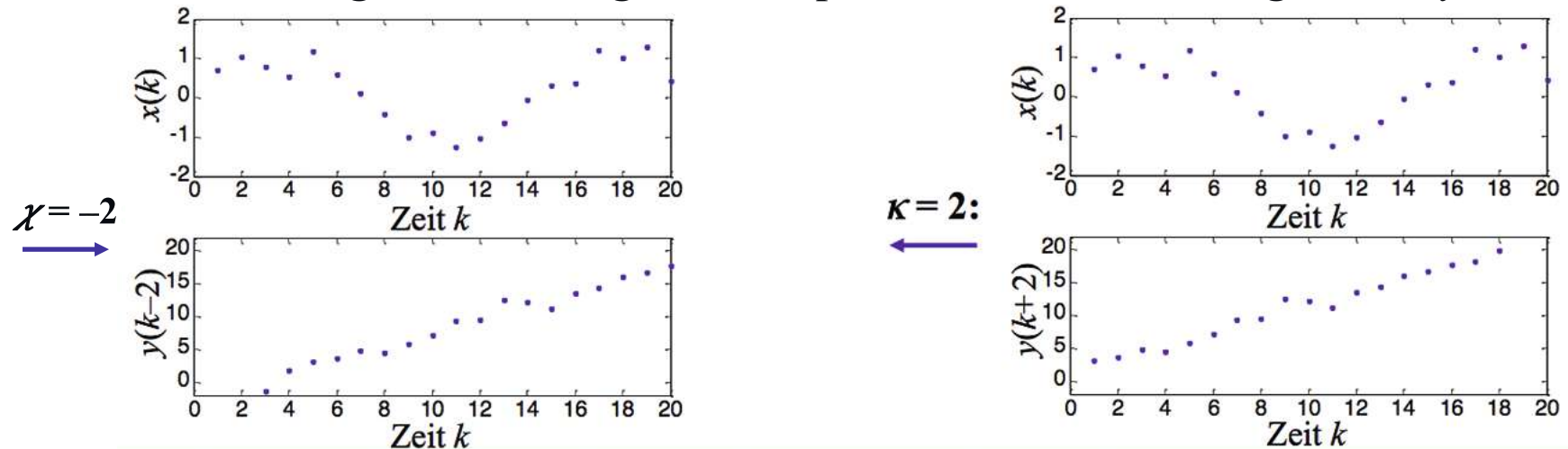
https://web.archive.org/web/20120711061734/http://www.mpi-magdeburg.mpg.de/people/kre/uni_sysbio/web/Skripte/statistik_vorles.pdf

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Veranschaulichung: AKF für negative und positive Zeitverschiebung: *Symmetrie!*



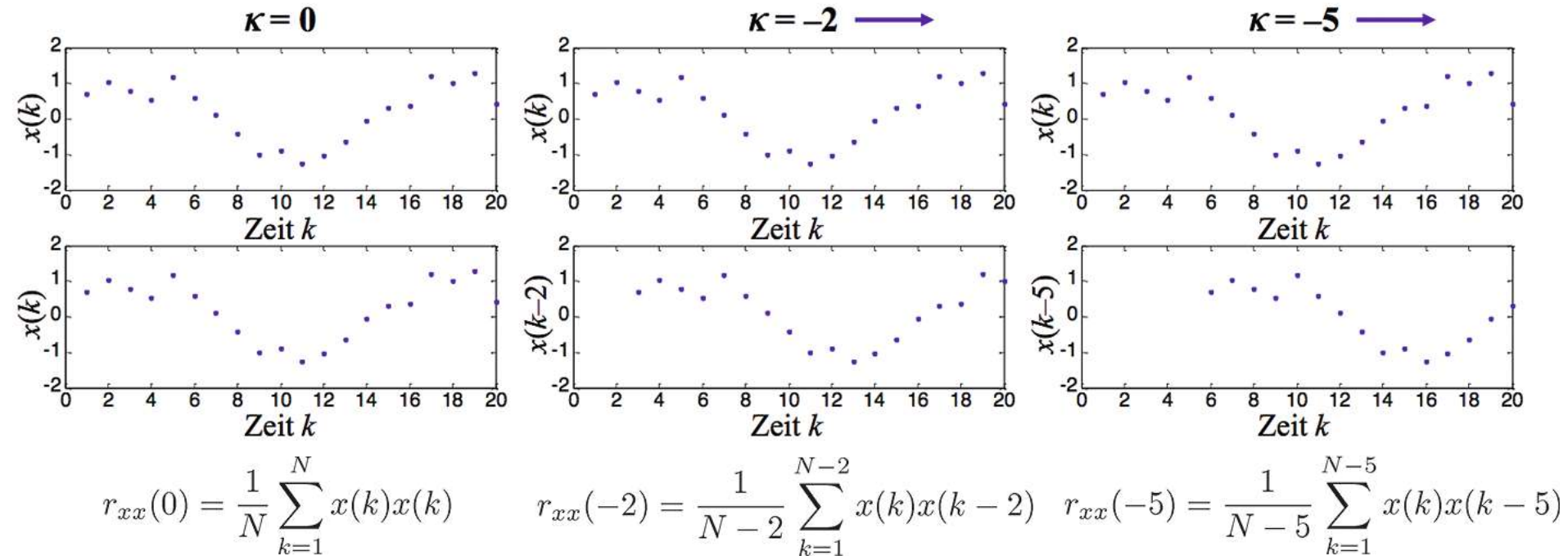
Veranschaulichung: KKF für negative und positive Zeitverschiebung: *keine Symmetrie!*



5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Beispiel: AKF

- Anzahl der Summanden: $N - |\kappa|$.
- Schätzung wird sehr ungenau für große $|\kappa|$, insbesondere für $|\kappa| \rightarrow N$.
- Bei Messung von periodischen Vorgängen, z.B. Drehzahlen, wiederholt sich das Signal nach einer Periode. Dann können die rechts „rausfallenden“ Daten links „reingeschoben“ werden und umgekehrt, wenn $k = 1, \dots, N$ einem Vielfachen einer Periode entspricht!



5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Erinnerung:

$$r_{xy}(k_2 - k_1) = E\{x(k_1)y(k_2)\}$$

Symmetrie bei AKF und KKF

Wie am Beispiel auf der vorherigen Folie zu erkennen, ist die AKF immer symmetrisch, d.h.

$$r_{xx}(-\kappa) = r_{xx}(\kappa)$$

$$\begin{aligned} r_{xx}(\kappa) &= E\{x(k)x(k + \kappa)\} \\ r_{xx}(-\kappa) &= E\{x(k)x(k - \kappa)\} = E\{x(k - \kappa)x(k)\} \end{aligned}$$

Dies lässt sich auch leicht anhand der Formel erkennen, wenn man die Summe ausschreibt:

Für $\kappa \leq 0$: $x(|\kappa| + 1)x(1) + x(|\kappa| + 2)x(2) + \dots + x(N - 1)x(N - 1 + \kappa) + x(N)x(N + \kappa)$

Für $\kappa > 0$: $x(1)x(\kappa + 1) + x(2)x(\kappa + 2) + \dots + x(N - 1 - \kappa)x(N - 1) + x(N - \kappa)x(N)$

Beide Ausdrücke sind unter Berücksichtigung des Vorzeichens von κ identisch!

Gleiches gilt für die KKF *nicht*, da $x(k)$ und $y(k)$ unterschiedliche Signale sind. Aber wenn man die beiden Signale miteinander vertauscht gilt:

$$r_{xy}(-\kappa) = r_{yx}(\kappa)$$

$$\begin{aligned} r_{xy}(-\kappa) &= E\{x(k)y(k - \kappa)\} \\ r_{yx}(\kappa) &= E\{y(k)x(k + \kappa)\} \end{aligned}$$

$$r_{xy}(-\kappa) = E\{x(k)y(k - \kappa)\} = E\{x(k + \kappa)y(k)\} = E\{y(k)x(k + \kappa)\} = r_{yx}(\kappa)$$

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Biasbehaftete Schätzwerte für KKF und AKF

Da die Schätzung der Korrelationsfunktion für betragsmäßig große Zeitverschiebungen χ auf sehr wenigen Messdaten beruht, steigt die Varianz der Schätzung erheblich an (geringer Mittelungseffekt!) und die geschätzten Werte werden sehr unzuverlässig, obwohl sie *im Mittel* korrekt sind (kein Bias).

Deshalb verwendet man häufig eine alternative Schätzformel für die Korrelationsfunktionen, die eine deutlich reduzierte Schätzvarianz aufweist. Allerdings weist diese Schätzung einen Bias auf, der mit betragsmäßig zunehmender Zeitverschiebungen χ ansteigt. Die varianzreduzierte aber biasbehaftete KKF- und AKF-Schätzformel lauten:

$$r'_{xy}(\kappa) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k)y(k + \kappa)$$

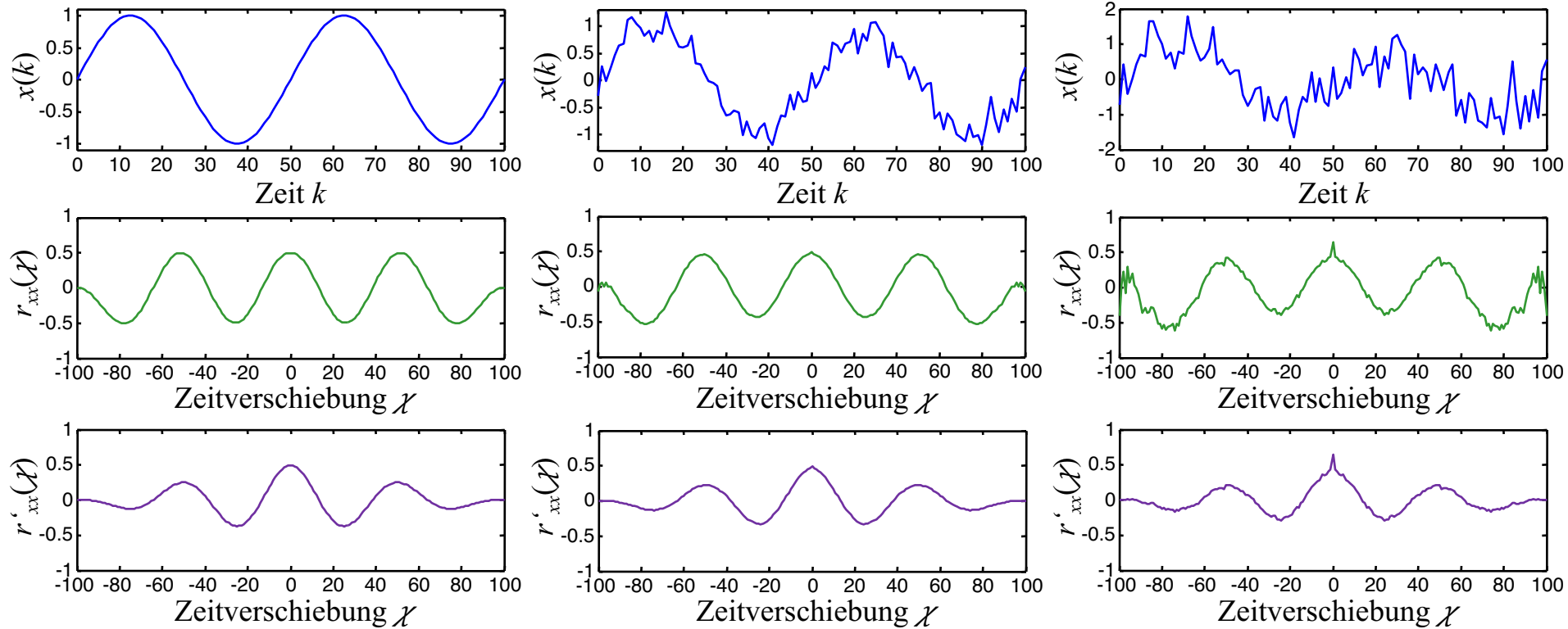
$$r'_{xx}(\kappa) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k)x(k + \kappa)$$

Weil hier durch das für $|\chi| > 0$ eigentlich zu große N statt $N - |\chi|$ geteilt wird, ist das Schätzergebnis systematisch betragsmäßig zu klein!

Die biasbehaftete Schätzformeln werden bevorzugt dann verwendet, wenn die Anzahl der Messdaten N sehr klein und/oder das Signal/Rauschverhältnis besonders schlecht sind.

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Beispiele für AKFs



- AKF ist *extrem unempfindlich* gegenüber Rauschen, selbst bei relativ wenigen Messwerten ($N = 101$).
- Biasbehaftete AKF-Schätzung reduziert die Schätzvarianz erheblich, drückt die AKF-Werte aber gegen 0, insbesondere für betragsmäßig große Zeitverschiebungen χ .

5.5 Geschwindigkeit und Drehzahl

Anwendung: Geschwindigkeitsmessung mit 2 Kameras und Korrelationsanalyse

Sind strukturierte Oberflächen vorhanden wie beim Schüttgut auf einem Förderband oder bei der Straße unter einem Fahrzeug so können diese Muster mit 2 räumlich versetzten Kameras aufgenommen werden

Aus dem Vergleich der Kamerasignale mittels Korrelationsanalyse kann das Zeitintervall Δt zwischen beiden Signalen bestimmt werden. Bei bekanntem Kameraabstand d lässt sich dann die Geschwindigkeit aus $v = d / \Delta t$ berechnen.

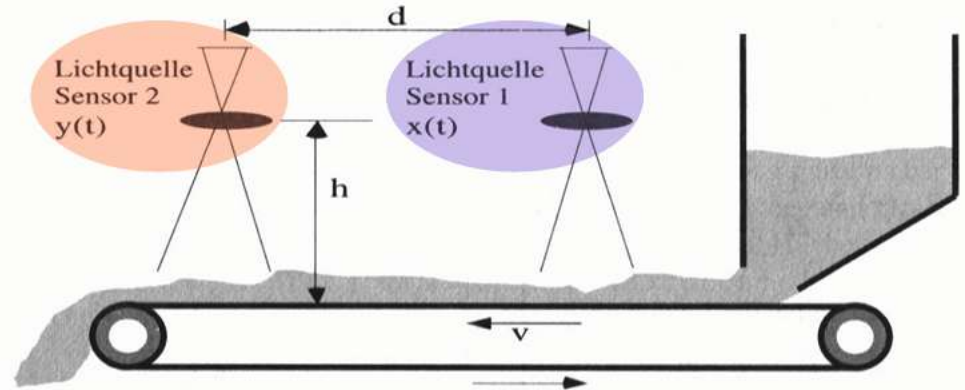
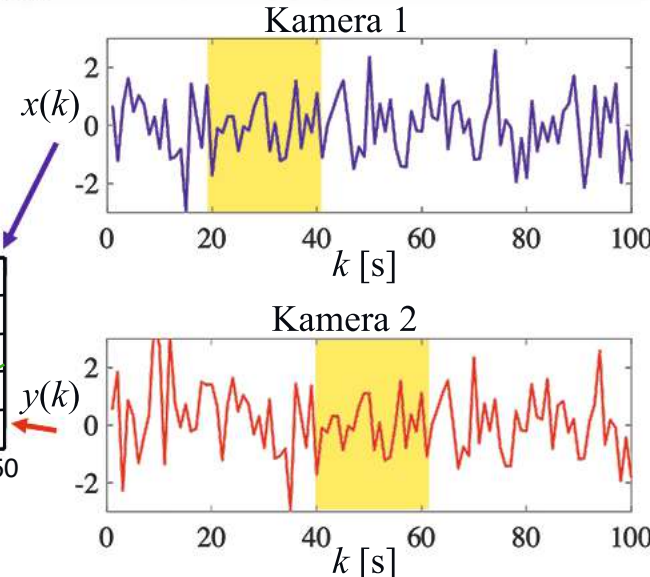
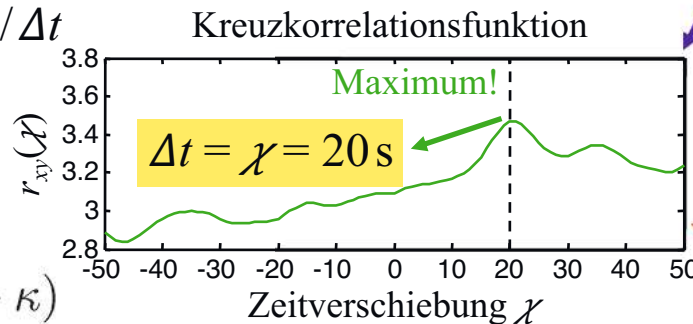


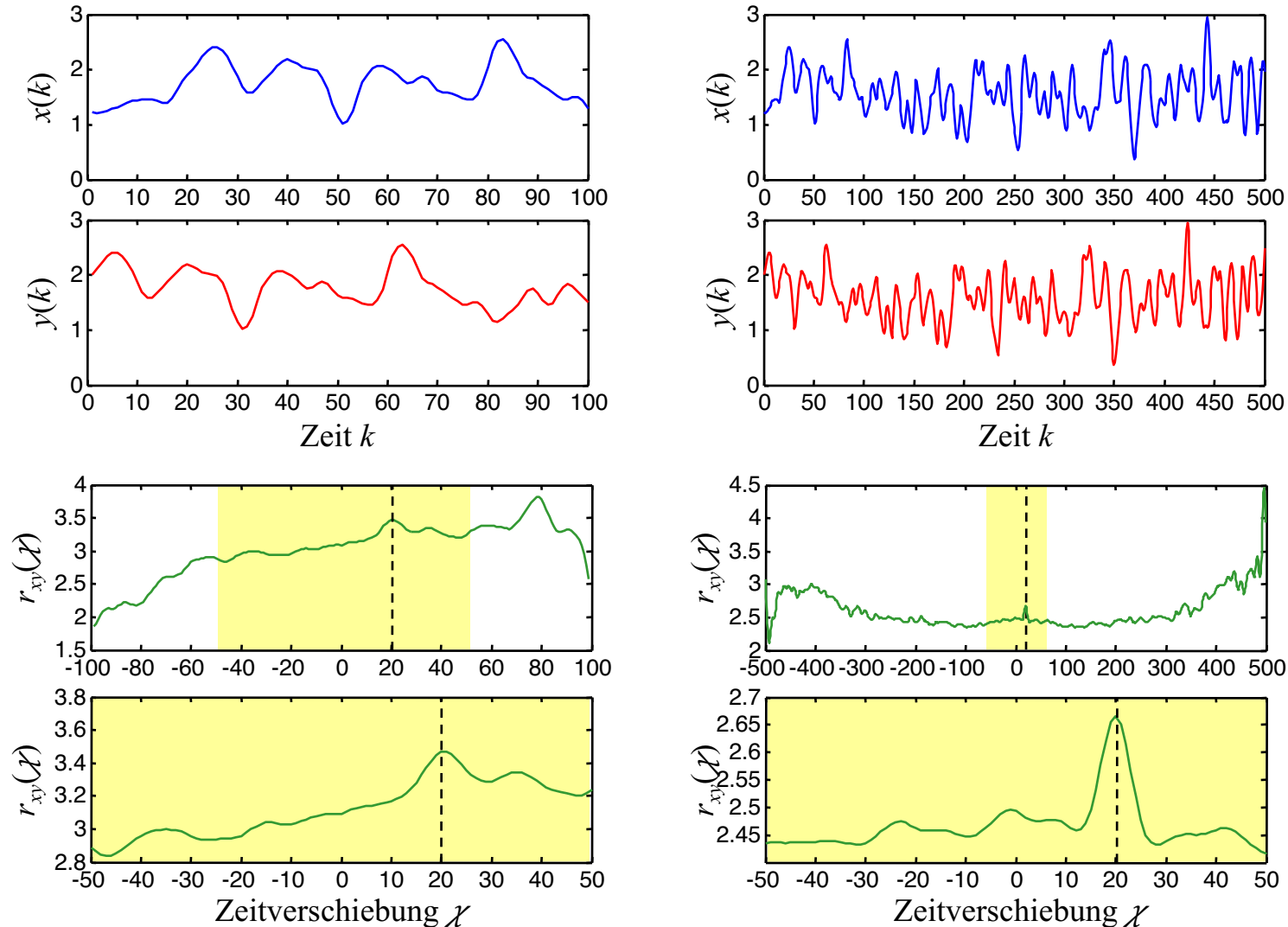
Abbildung 6.4. Modell eines Förderbandes zur berührungslosen Geschwindigkeitsmessung über das Laufzeitkorrelationsverfahren

$$r_{xy}(\kappa) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k-\kappa} x(k)y(k + \kappa)$$



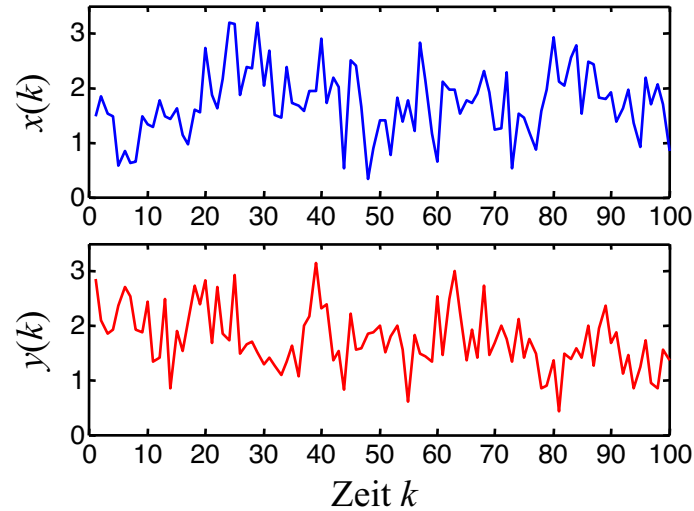
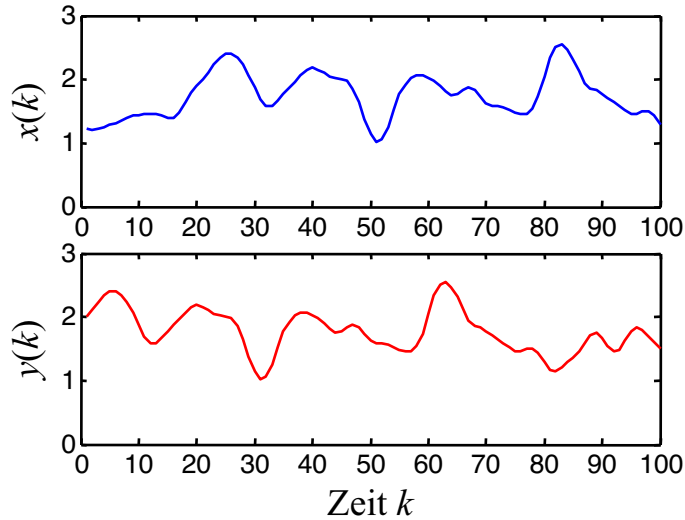
5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Ergebnisse Korrelationsmesstechnik: Einfluss der Datenmenge



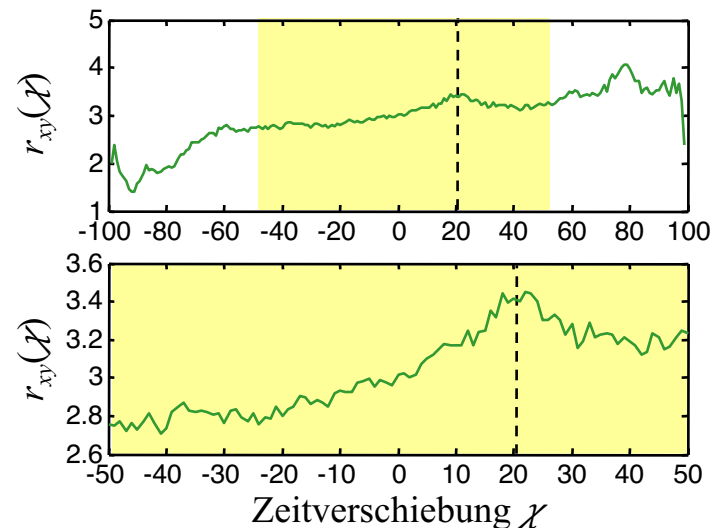
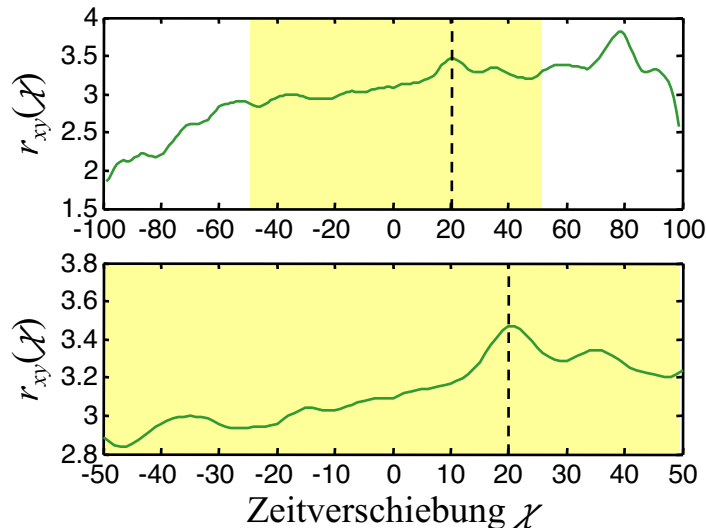
5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Ergebnisse Korrelationsmesstechnik: Einfluss des Rauschens



Signale sind mit unabhängigem Rauschen gestört!

Nutzsignale sind praktisch nicht mehr erkennbar!

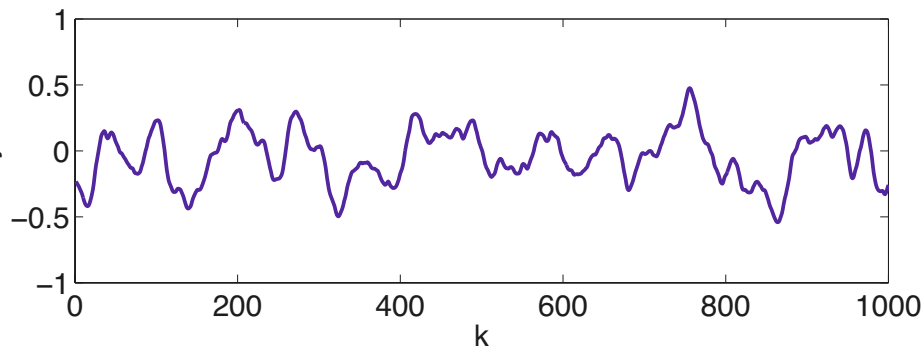
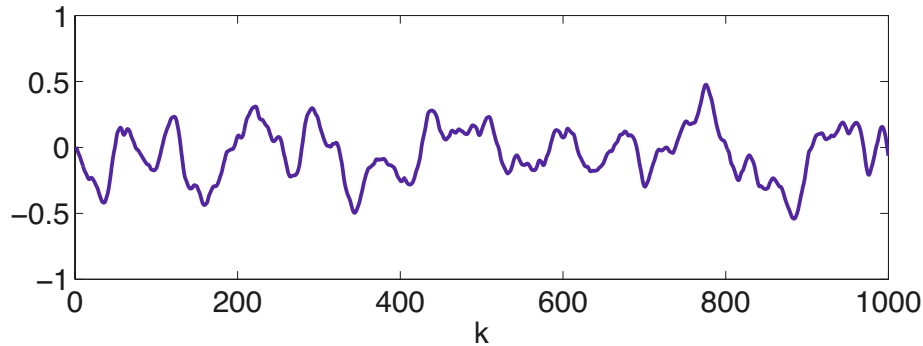


KKF durch starke Störung nur wenig beeinflusst!

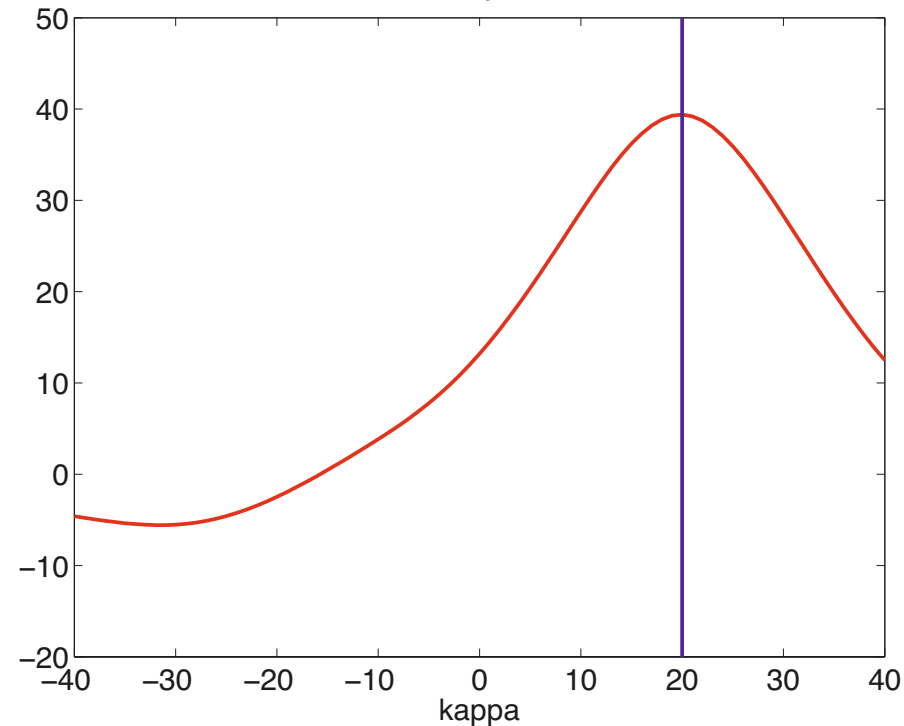
Maximum kann noch ungefähr korrekt gefunden werden!

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

sigma = 0.0



rxy



Standardabweichung der Rauschens: sigma

Eingang 1: x Eingang 2: y

Zeit: k Zeit: k

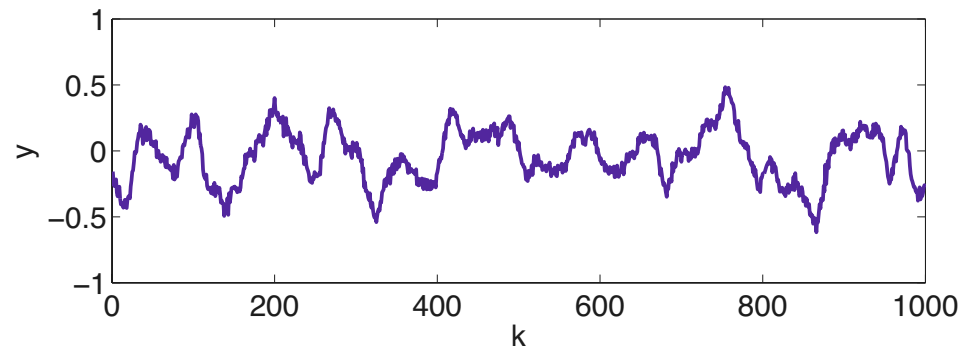
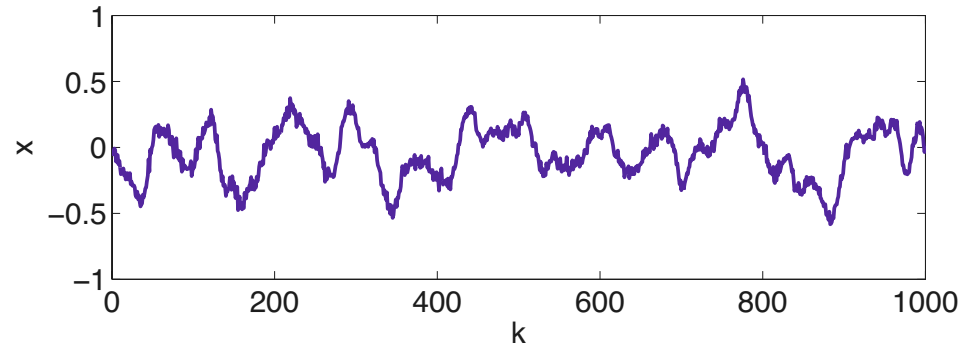
Zeitverschiebung zwischen x und y: 20

Kreuzkorrelationsfunktion: rxy

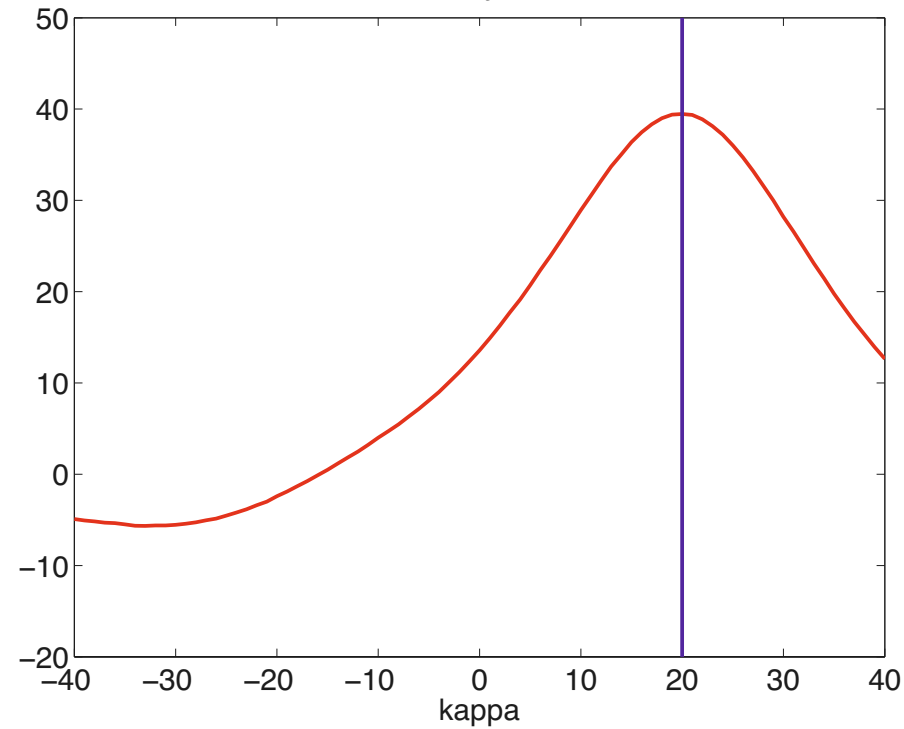
Zeitverschiebung: kappa

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

sigma = 0.03

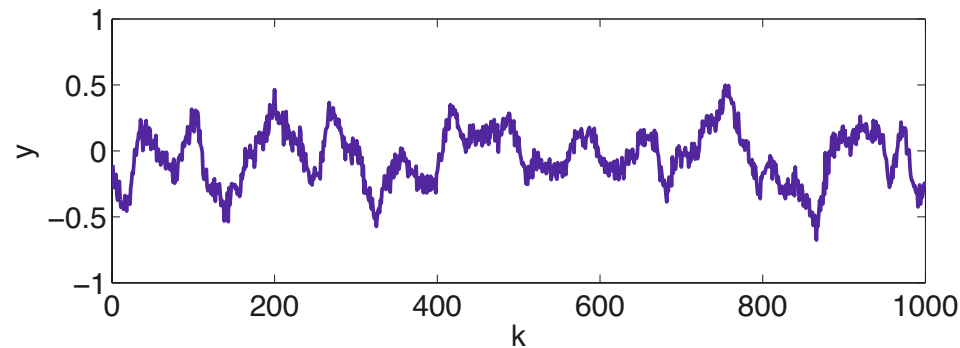
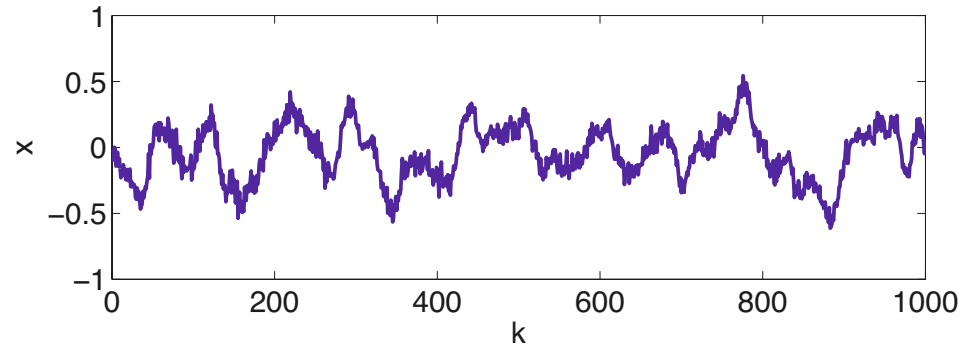


rxy

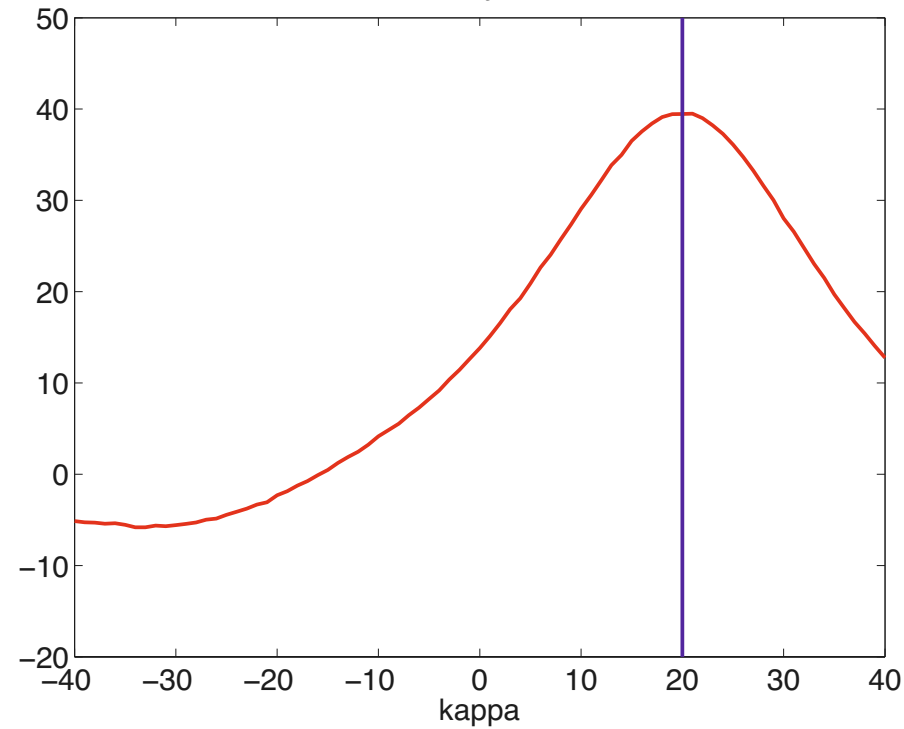


5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

sigma = 0.05

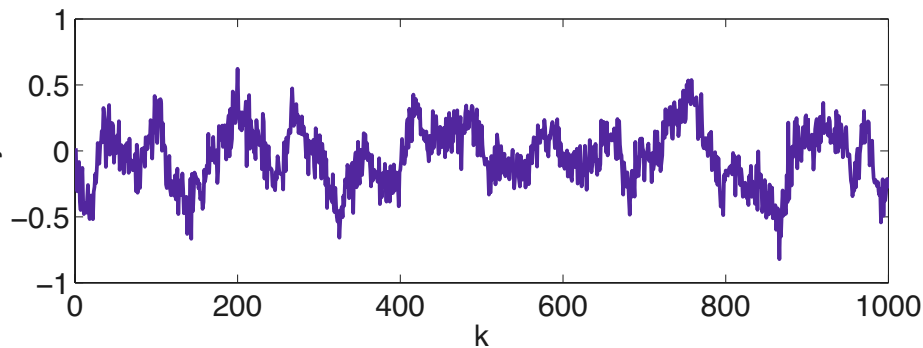
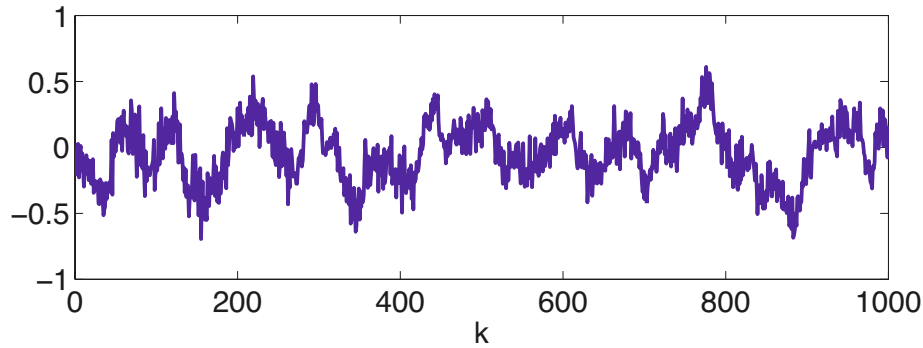


rxy

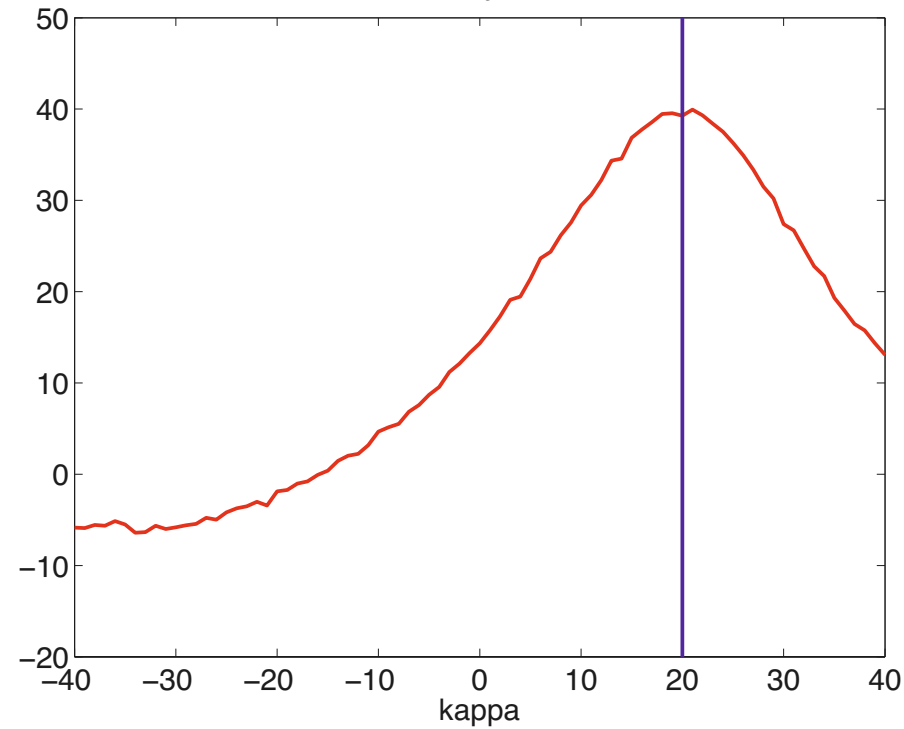


5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

sigma = 0.1

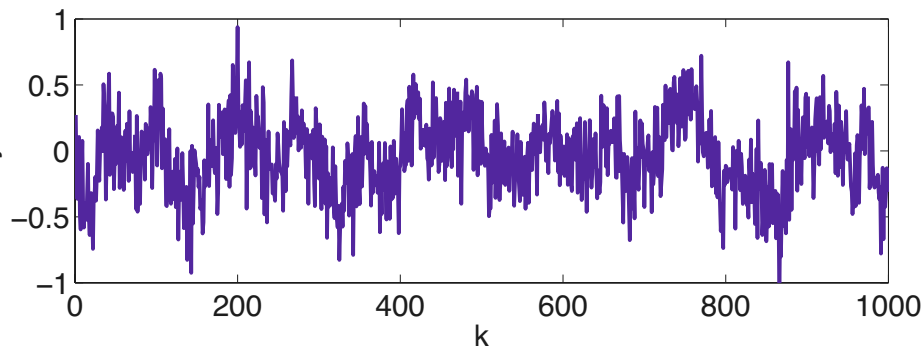
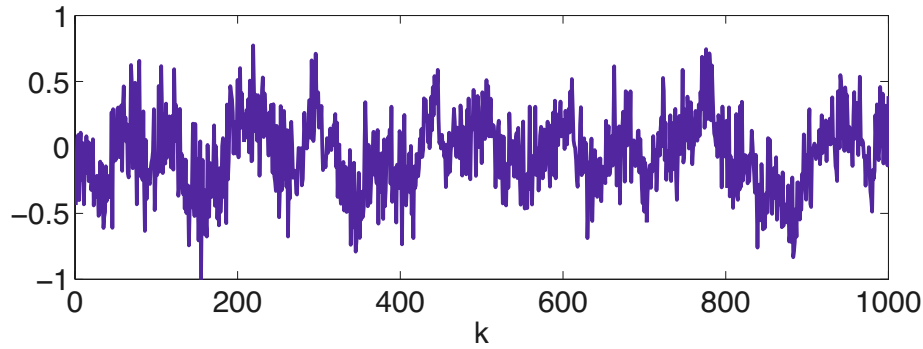


rxy

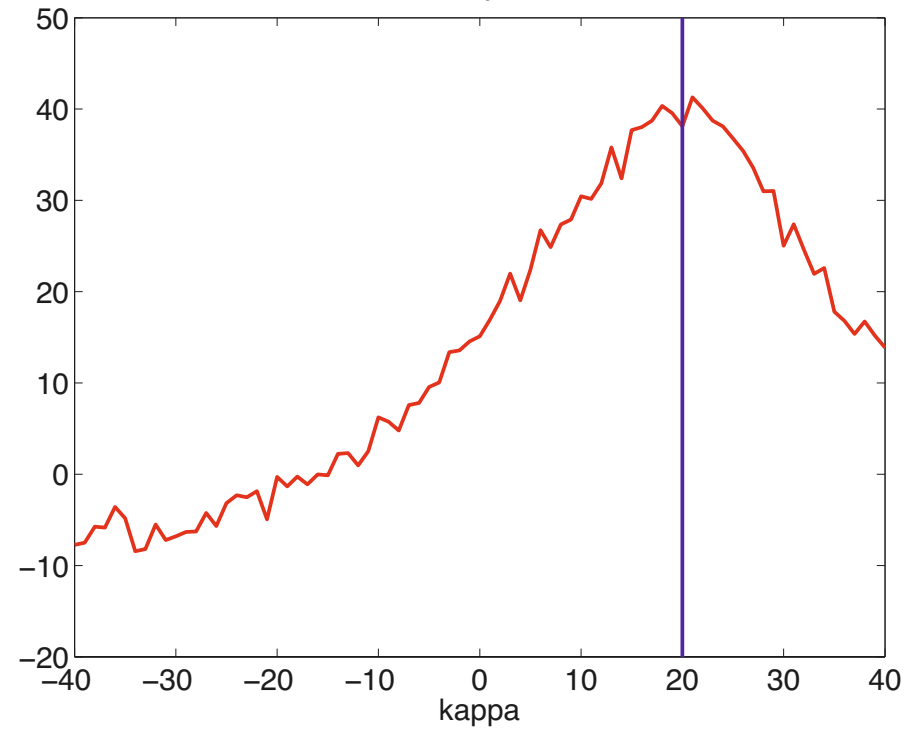


5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

sigma = 0.2

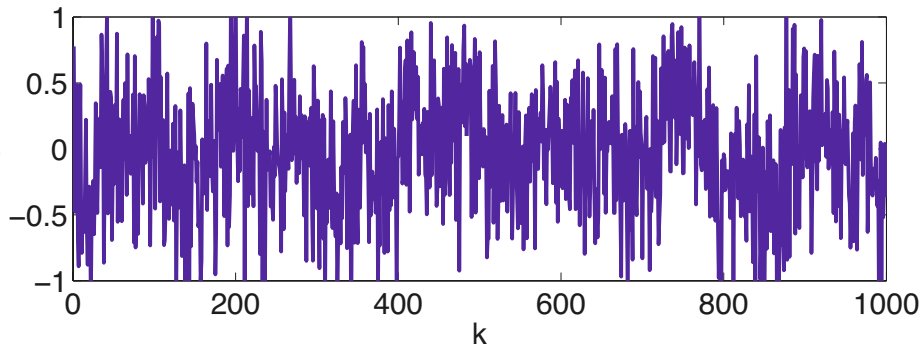
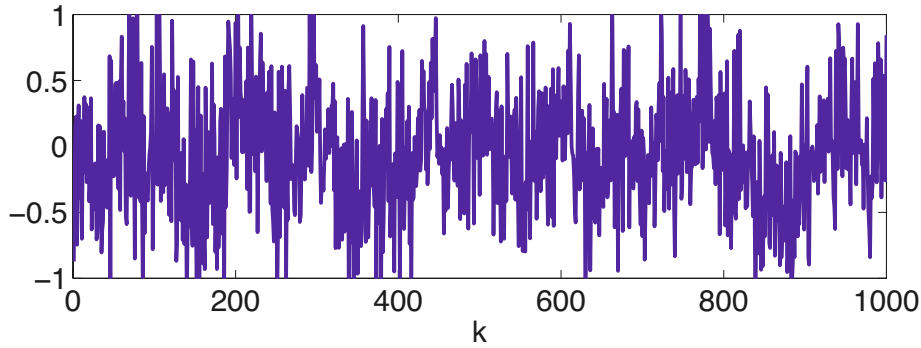


rxy

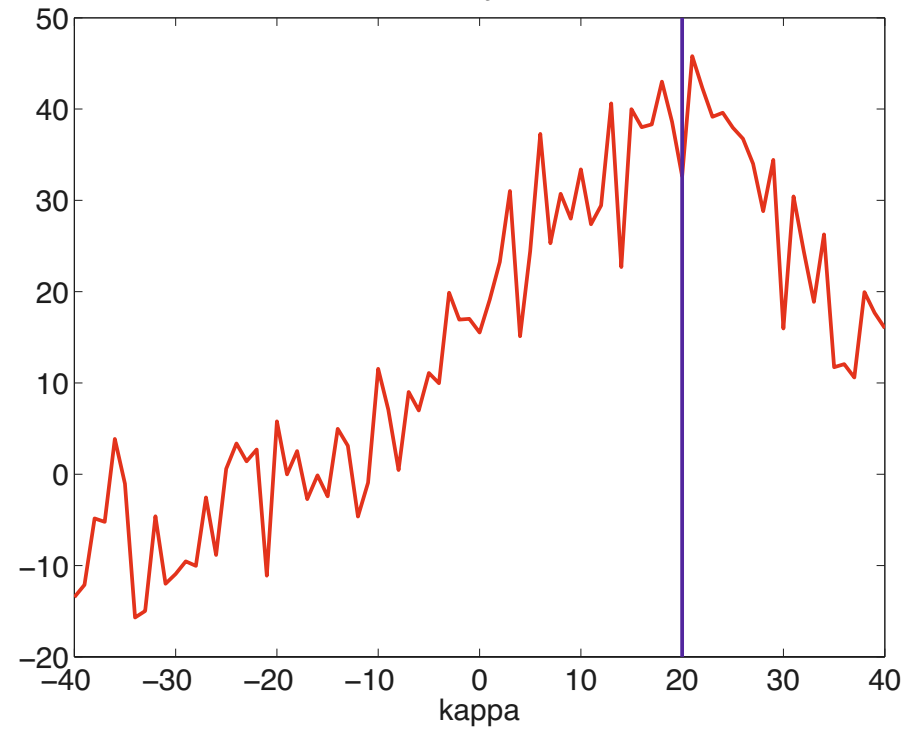


5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

sigma = 0.4

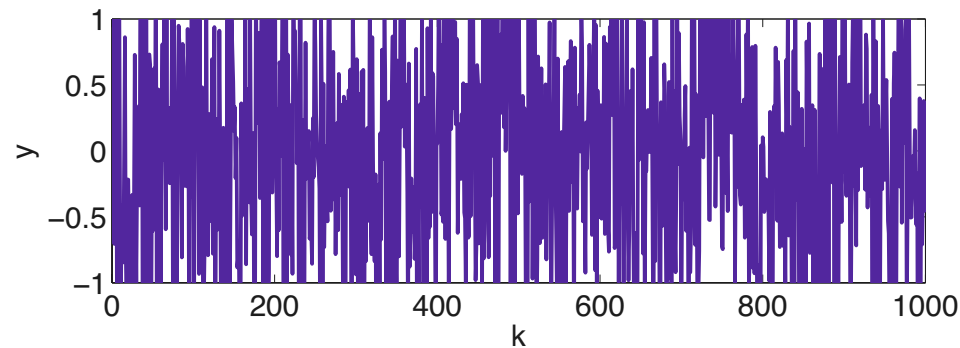
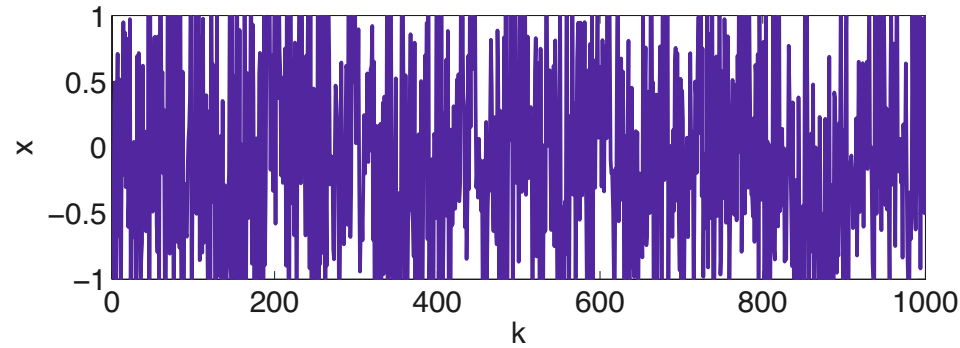


rxy

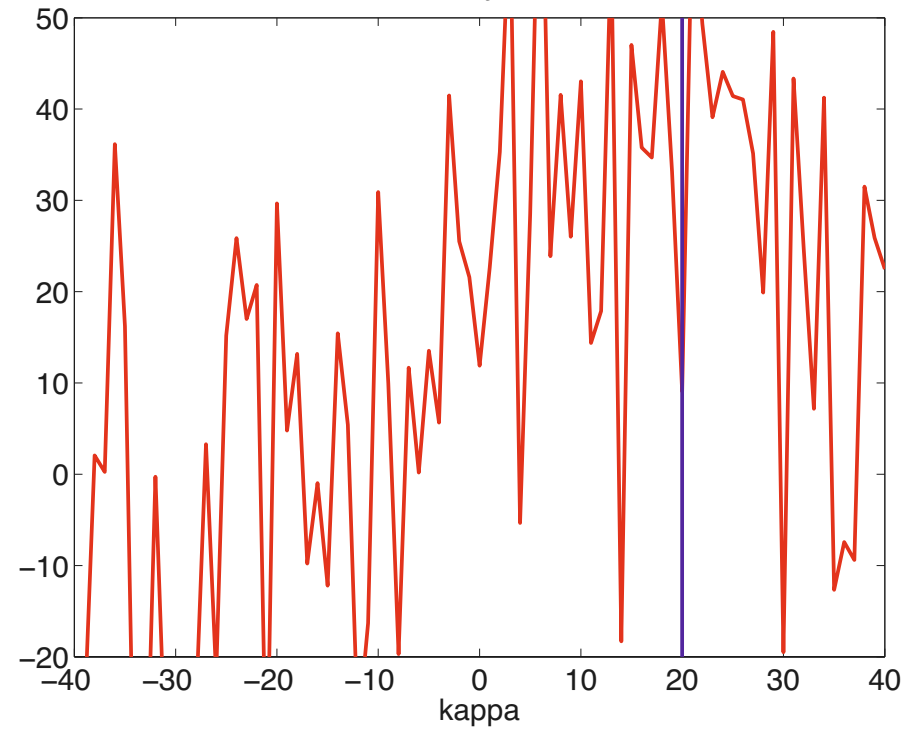


5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

sigma = 0.8

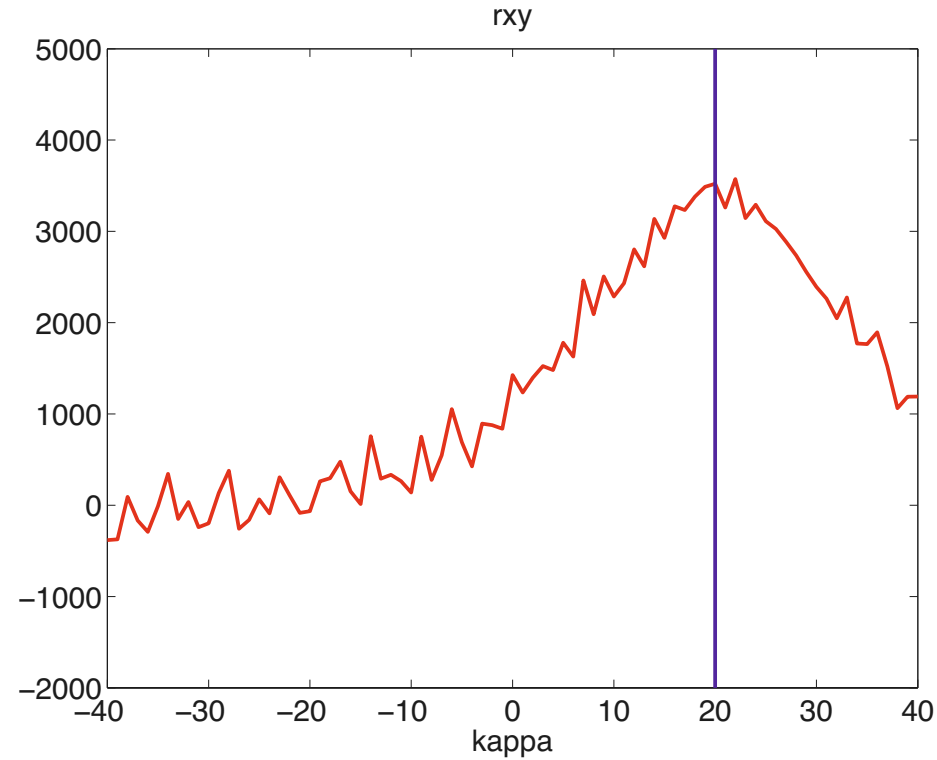
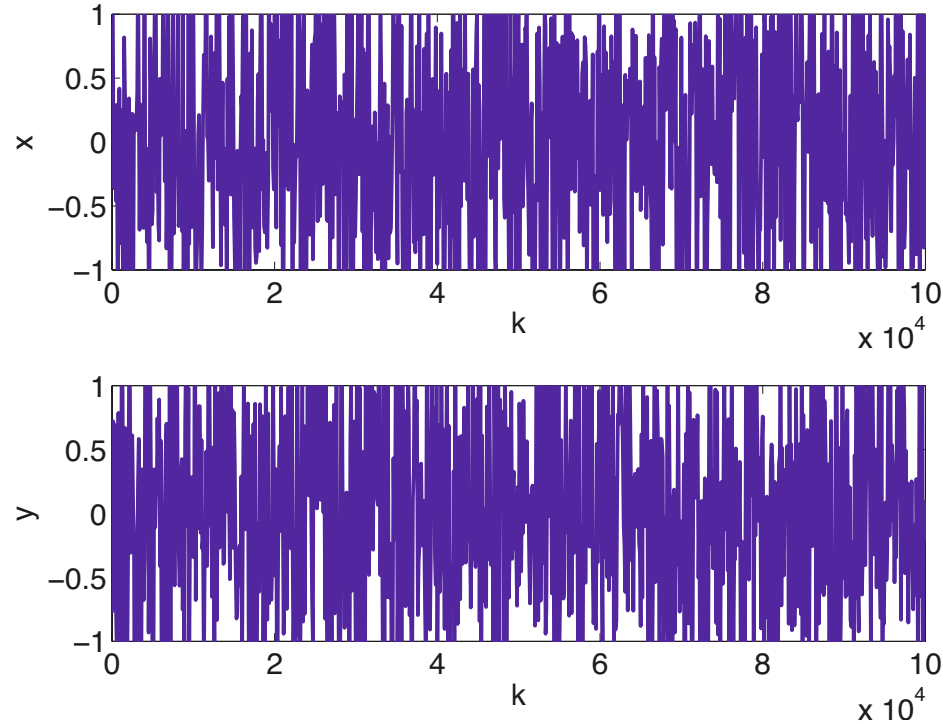


rxy



5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

sigma = 0.8



100 mal mehr Daten

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Beobachtungen

- Die KKF ist für betragsmäßig große Zeitverschiebungen χ völlig unzuverlässig. Hier kann Korrelationsschätzung nicht von der Periodizität des Messsignals profitieren.
- Man sollte die biasfreie KKF-Schätzung nur für Zeitverschiebungen von maximal $|\chi| < N/2$ verwenden. Ansonsten sind falsche Ergebnisse wahrscheinlich. Das globale KKF-Maximum liegt beim linken Beispiel mit $N = 100$ bei $\chi = 79$ falsch. Erst das zweitgrößte Maximum liegt bei $\chi = 20$ und zeigt damit den korrekten Wert für die Verschiebung zwischen $x(k)$ und $y(k)$ an.
- Korrelationsmethoden (wie alle statistischen Verfahren) funktionieren um so besser, je mehr Messdaten verwendet werden. Im rechten Beispiel mit $N = 500$ ist das Maximum der KKF im Intervall $-50 \leq \chi \leq 50$ wesentlich ausgeprägter und eindeutiger zu erkennen als im linken Beispiel mit $N = 100$.
- Selbst wenn die Nutzsignale voneinander unabhängig bis zur Unkenntlichkeit verrauscht werden, wird die geschätzte KKF nur wenig beeinflusst (sehr starke Rauschunterdrückung!) und die Methode funktioniert noch ausgezeichnet.
- **Korrelationsmethoden sind sehr leistungsfähig und leicht in der Praxis einsetzbar!**

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Korrelationsfunktionen für zeitkontinuierliche Signale

Wie schon in vielen anderen Zusammenhängen gesehen, entspricht die Summe im Zeitdiskreten dem Integral im Zeitkontinuierlichen (genau wie die Differenz im Zeitdiskreten der Ableitung im Zeitkontinuierlichen entspricht). Die Korrelationsfunktionen zeitkontinuierlicher Signale lassen sich also biasfrei wie folgt berechnen.

$$r_{xy}(\tau) = \frac{1}{T - |\tau|} \int_0^T x(t)y(t + \tau)dt$$

$$r_{xx}(\tau) = \frac{1}{T - |\tau|} \int_0^T x(t)x(t + \tau)dt$$

Für die biasbehafteten aber varianzreduzierten Schätzformeln sind jeweils die Nenner $T - |\tau|$ durch T zu ersetzen.

Alle im Zeitdiskreten gemachten Erweiterungen gelten im Zeitkontinuierlichen entsprechend.

$$r_{xy}(\kappa) = \frac{1}{N - |\kappa|} \sum_{k=1}^N x(k)y(k + \kappa)$$

$$r_{xx}(\kappa) = \frac{1}{N - |\kappa|} \sum_{k=1}^N x(k)x(k + \kappa)$$

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Schätzung der Kovarianzfunktionen

Die Kreuz- und Autokovarianzfunktionen können genauso geschätzt werden, wie KKF und AKF, nur müssen die Signal zuvor mittelwertbereinigt werden und der Nenner um 1 reduziert, um dem verbrauchten Freiheitsgrad für die Mittelwertschätzung Rechnung zu tragen. Damit ergeben sich folgende biasfreie Schätzgleichungen:

$$c_{xy}(\kappa) = \frac{1}{N - |\kappa| - 1} \sum_{k=1}^N (x(k) - \hat{m}_x) (y(k + \kappa) - \hat{m}_y)$$

$$c_{xx}(\kappa) = \frac{1}{N - |\kappa| - 1} \sum_{k=1}^N (x(k) - \hat{m}_x) (x(k + \kappa) - \hat{m}_x)$$

$$\hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k)$$

$$\hat{m}_y = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)$$

Für die biasbehafteten aber varianzreduzierten Schätzformeln sind jeweils die Nenner $N - |\kappa| - 1$ durch $N - 1$ zu ersetzen.

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Interpretation der Fourier-Transformation als Korrelationsfunktion

In vielen Anwendungen sucht man in einem Messsignal nach einer Kurvenform eines bestimmten Typs, z.B. Sägezahn-, Rechteck-, Sinusform bekannter Frequenz. Zwei wichtige Anwendungsbereiche für eine solche Aufgabenstellung sind:

- **Signalangepasstes Filter (*matched filter*):** Solche Filter werden z.B. bei der Abstandsmessung per Radar verwendet. Ein ausgesandtes Radarsignal wird vom Messobjekt (z.B. Auto) reflektiert und stark gestört wieder empfangen. Die (im Idealfall) zu erwartende Signalform ist bekannt aber der Empfangszeitpunkt soll ermittelt werden. Aus der Signallaufzeit wird der Abstand zum Messobjekt ermittelt.
- **Frequenzanalyse:** Es soll z.B. per Fourier-Analyse ermittelt werden, wie stark ein Sinus-Signal bestimmter Frequenz in einem Messsignal enthalten ist. Dies soll für alle Frequenzen ermittelt werden, um das Messsignal im Frequenzbereich darstellen zu können.

Beide Aufgaben sind im Prinzip Korrelationsaufgaben! Das signalangepasste Filter entspricht einer Korrelation des Messsignals mit dem ausgesandten Signal. Die Fourier-Analyse entspricht einer Korrelation mit Sinus-Signalen aller Frequenzen.

$$r_{xy}(0) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t)dt$$

$$X(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt$$

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Korrelation- und Kovarianzmatrizen

In vielen Anwendungen spielen *mehrere* Zufallsvariablen oder -prozesse eine Rolle. Diese werden dann häufig in einem Vektor zusammengefasst, z.B. für n Zustandsvariablen x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Der *Mittelwert* einer solchen vektoriellen Zufallsvariablen wird ganz einfach elementweise berechnet:

$$\mathbb{E}\{\underline{x}\} = \mathbb{E}\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}\{x_1\} \\ \mathbb{E}\{x_2\} \\ \vdots \\ \mathbb{E}\{x_n\} \end{pmatrix}$$

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Die *Korrelation* muss alle paarweisen Korrelationen zwischen den n Zufallsvariablen beschreiben. Diese lassen sich in Matrix-Form schreiben. Diese **Korrelations-Matrix** kann durch ein äußeres Produkt realisiert werden:

$$\begin{aligned} \underline{R}_{\underline{x}\underline{x}} &= \text{E} \{ \underline{x} \underline{x}^T \} = \text{E} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n) \right\} \\ &= \text{E} \left\{ \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & \cdots & x_1 x_n \\ x_2 x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2 x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n x_1 & x_n x_2 & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} r_{x_1 x_1} & r_{x_1 x_2} & \cdots & r_{x_1 x_n} \\ r_{x_1 x_2} & r_{x_2 x_2} & \cdots & r_{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{x_1 x_n} & r_{x_2 x_n} & \cdots & r_{x_n x_n} \end{pmatrix} = \underline{R}_{\underline{x}\underline{x}}^T \end{aligned}$$

Eigenschaften der Korrelations-Matrix:

- symmetrisch und positiv definit,
- diagonal für paarweise orthogonale Zufallsvariablen x_i und x_j mit $i \neq j$,
- enthält auf der Hauptdiagonale die zweiten Momente der einzelnen Zufallsvariablen x_i .

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Die **Kovarianz-Matrix** ist entsprechend definiert. Sie ist für mittelwertfreie Zufallsvariablen identisch mit der Korrelations-Matrix:

$$C_{\underline{x}\underline{x}} = E \left\{ (\underline{x} - \underline{m}_{\underline{x}})(\underline{x} - \underline{m}_{\underline{x}})^T \right\}$$

Sie enthält alle *Kovarianzen* zwischen den zwei Zufallsvariablen x_i und x_j mit $i \neq j$. Auf der Hauptdiagonalen stehen allerdings die *Varianzen* der einzelnen Zufallsvariablen x_i .

Deswegen wird sie manchmal auch (etwas umständlich) Varianz-Kovarianz-Matrix genannt.

Die Korrelations- bzw. Kovarianz-Matrix spielt in einer übergroßen Vielzahl von Anwendungen eine bedeutende Rolle. Sie ist die Erweiterung des zweiten Moments bzw. der Varianz für den mehrdimensionalen Fall.

Eine *mehrdimensionale Gaußglocke* wird durch ihre Mittelwerte und ihre Kovarianz-Matrix vollständig beschrieben. Die Kovarianz-Matrix beschreibt damit auch vollständig die *elliptisch geformten Höhenlinien* einer mehrdimensionalen Gaußglocke.

Auch die *Inverse* der Korrelations- bzw. Kovarianz-Matrix wird extrem häufig benötigt. Mittels Multiplikation mit der Inversen können die Korrelationen zwischen den Variablen heraus gerechnet werden, d.h. die Variablen werden *dekorreliert*. Das ist die Basis der Methode der kleinsten Quadrate (*least squares method*) und des Newton-Verfahrens.

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Beispiel: Zustandsraum

In der Zustandsraumdarstellung eines (nicht sprungfähigen) dynamischen Systems sei jeder Zustand x_i durch eine Störung v_i und der Ausgang y durch die Störung n verrauscht. Damit ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}\underline{x}(k+1) &= \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{b}u(k) + \underline{v}(k) \\ y(k) &= \underline{c}^T \underline{x}(k) + n(k)\end{aligned}$$

Das sog. *Prozessrauschen* (Störung der Zustände) wird dann in einem Vektor zusammengefasst, der genau wie der Zustandsvektor n -dimensional ist:

$$\underline{v}(k) = \begin{pmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \\ \vdots \\ v_n(k) \end{pmatrix}$$

und das sog. Ausgangsrauschen (Störung des Ausgangs) ist ein Skalar: $n(k)$.

Die Störsignale sind in der Regel mittelwertfrei. d.h. es gilt:

$$E\{\underline{v}(k)\} = \underline{0} \quad \text{und} \quad E\{n(k)\} = 0.$$

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Da die Zufallsprozesse mittelwertfrei sind, ergeben sich identische Korrelations- und Kovarianz-Matrizen. Da wir es hier mit Zufallsprozessen $v_i(k)$ und $n(k)$ zu tun haben, müssen wir die Korrelation (oder Kovarianz) für die Zufallsvariablen für verschiedene Zeitpunkte k_1 und k_2 berechnen. Der Einfachheit halber nehmen wir Stationarität an, so dass wir uns auf verschiedene Zeitverschiebungen $\chi = k_2 - k_1$ beschränken können:

$$\begin{aligned} \underline{R}_{\underline{v}\underline{v}}(\kappa) &= \mathbb{E} \left\{ \begin{pmatrix} v_1(k)v_1(k+\kappa) & v_1(k)v_2(k+\kappa) & \cdots & v_1(k)v_n(k+\kappa) \\ v_2(k)v_1(k+\kappa) & v_2(k)v_2(k+\kappa) & \cdots & v_2(k)v_n(k+\kappa) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n(k)v_1(k+\kappa) & v_n(k)v_2(k+\kappa) & \cdots & v_n(k)v_n(k+\kappa) \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} r_{v_1v_1}(\kappa) & r_{v_1v_2}(\kappa) & \cdots & r_{v_1v_n}(\kappa) \\ r_{v_2v_1}(\kappa) & r_{v_2v_2}(\kappa) & \cdots & r_{v_2v_n}(\kappa) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{v_nv_1}(\kappa) & r_{v_nv_2}(\kappa) & \cdots & r_{v_nv_n}(\kappa) \end{pmatrix} = \underline{C}_{\underline{v}\underline{v}}(\kappa) \end{aligned}$$

Für das Ausgangsrauschen $n(k)$ (kein Vektor!) ist die „Korrelation-Matrix“ nur skalar:

$$R_{nn}(\kappa) = \mathbb{E}\{n(k)n(k+\kappa)\} = r_{nn}(\kappa)$$

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Häufig wird angenommen, dass die Zufallsprozesse *weiß* sind (siehe Kapitel 5.6), d.h. dass $v_i(k_1)$ und $v_i(k_2)$ für $k_1 \neq k_2$ unkorreliert sind, die Zufallsvariablen zu jedem Zeitpunkt also völlig unabhängig von den Werten zu allen anderen Zeitpunkten sind. Dann sind alle Korrelations-Matrizen für $\chi \neq 0$ gleich $\underline{0}$. Nur für den unverschobenen Fall erhalten wir:

$$\begin{aligned} \underline{R}_{\underline{v}\underline{v}}(0) &= \text{E} \left\{ \begin{pmatrix} v_1(k)v_1(k) & v_1(k)v_2(k) & \cdots & v_1(k)v_n(k) \\ v_2(k)v_1(k) & v_2(k)v_2(k) & \cdots & v_2(k)v_n(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n(k)v_1(k) & v_n(k)v_2(k) & \cdots & v_n(k)v_n(k) \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} r_{v_1v_1}(0) & r_{v_1v_2}(0) & \cdots & r_{v_1v_n}(0) \\ r_{v_2v_1}(0) & r_{v_2v_2}(0) & \cdots & r_{v_2v_n}(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{v_nv_1}(0) & r_{v_nv_2}(0) & \cdots & r_{v_nv_n}(0) \end{pmatrix} = \underline{C}_{\underline{v}\underline{v}}(0) \end{aligned}$$

Eine weitere, häufig gemachte Annahme ist die paarweise statistische Unkorreliertheit zwischen den verschiedenen Zufallsprozessen $v_i(k)$ und $v_j(k)$ für $i \neq j$. Dann vereinfacht sich die Korrelations-Matrix weiter zu einer *Diagonal-Matrix*:

$$\underline{R}_{\underline{v}\underline{v}}(0) = \text{diag}\{r_{v_1v_1}(0), r_{v_2v_2}(0), \dots, r_{v_nv_n}(0)\}$$

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

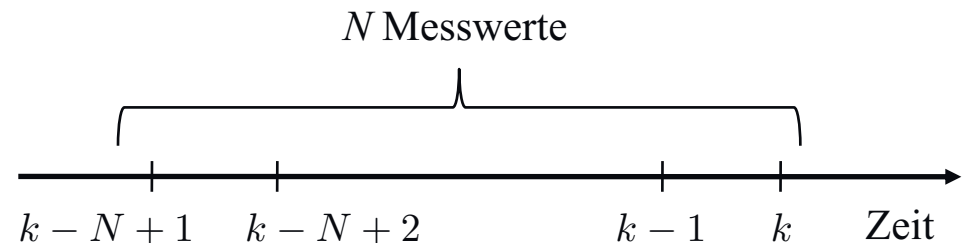
Beispiel: Zufallsprozess zur Modellierung von Rauschen

Oft haben Störungen einen rein stochastischen Charakter; dann bezeichnet man sie als *Rauschen*. Rauschen lässt sich über einen Zufallsprozess beschreiben. Für eine effiziente Signalverarbeitung speichert man die Messdaten üblicherweise in Vektoren ab. Wird z.B. vom Zeitpunkt $k = 1$ bis $k = N$ gemessen, so erzeugt man Vektoren folgenden Typs:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x(N) \\ x(N-1) \\ \vdots \\ x(2) \\ x(1) \end{pmatrix}$$

Im allgemeinen Fall kann man bei einer beliebigen Zeit starten und N Messwerte aufnehmen. Der Vektor wird typischerweise mit seinem neuesten Zeitpunkt benannt:

$$\underline{x}(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ x(k-1) \\ \vdots \\ x(k-N+2) \\ x(k-N+1) \end{pmatrix}$$



5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Da die Werte $x(k)$ zufälligen Charakter haben, ist es interessant sich zu fragen, wie stark ein Wert zu einem Zeitpunkt $x(k_1)$ mit einem Wert zu einem anderen Zeitpunkt $x(k_2)$ miteinander zusammenhängen bzw. korreliert sind. Darüber gibt die Korrelations-Matrix Auskunft:

$$\begin{aligned} \underline{R}_{\underline{x}\underline{x}} &= \mathbb{E}\{\underline{x}(k)\underline{x}^T(k)\} = \mathbb{E}\left\{ \begin{pmatrix} x(k) \\ x(k-1) \\ \vdots \\ x(k-N+1) \end{pmatrix} (x(k) \ x(k-1) \ \cdots \ x(k-N+1)) \right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{ \begin{pmatrix} x(k)x(k) & x(k)x(k-1) & \cdots & x(k)x(k-N+1) \\ x(k-1)x(k) & x(k-1)x(k-1) & \cdots & x(k-1)x(k-N+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(k-N+1)x(k) & x(k-N+1)x(k-1) & \cdots & x(k-N+1)x(k-N+1) \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(-1) & \cdots & r_{xx}(1-N) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}(2-N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(N-1) & r_{xx}(N-2) & \cdots & r_{xx}(0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

In der Korrelations-Matrix tauchen die Autokorrelierten für alle Zeitverschiebungen von 0 bis $N-1$ auf. Da die Autokorrelationsfunktion symmetrisch ist, gilt diese Eigenschaft auch für die Korrelations-Matrix. Sie weist aber darüber hinaus noch weitere strukturelle Besonderheiten auf. Die Korrelations-Matrix hat eine sog. *Toeplitz-Struktur*, denn alle Elemente ihrer Diagonalen (Haupt- und Nebendiagonalen) sind jeweils mit dem selben Wert belegt. Für solche Toeplitz-Matrizen gibt es besonders effiziente Verfahren –sog. schnelle Algorithmen– zur Inversion, deren Komplexität nur linear (statt kubisch!) mit ihrer Dimension ansteigt.

Anhand der Korrelations-Matrix kann man ablesen wie stark ein Zufallsprozess $x(k)$ mit sich selbst, aber zeitverschoben, korreliert ist. Im einfachsten Fall ist der Zufallsprozess weiß und es gibt daher überhaupt keinen Zusammenhang eines Zeitpunkts mit einem anderen, d.h. $x(k_1)$ und $x(k_2)$ sind für $k_1 \neq k_2$ völlig unkorreliert. Dann wird die Korrelationsmatrix diagonal:

$$\underline{R}_{xx} = \begin{pmatrix} r_{xx}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_{xx}(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{xx}(0) \end{pmatrix}$$

Otto Toeplitz , 1881-1940
(www.wikipedia.org)



5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Least-Squares-Schätzung unter Berücksichtigung der Kovarianz-Matrix des Rauschens

Es soll ein Modell optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate an Messdaten angepasst werden. Das Modell ist linear in den Parameter und daher von folgendem Typ:

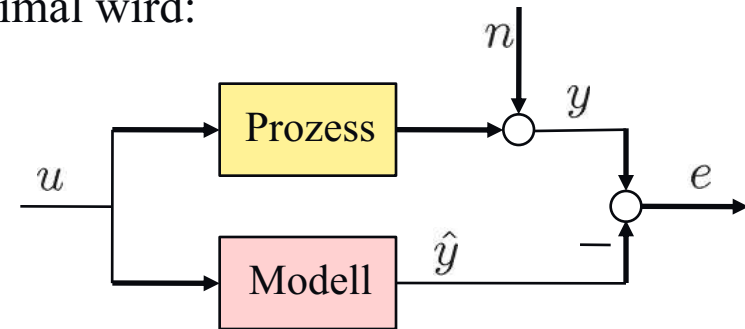
$$\hat{y} = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dots + \theta_n x_n$$

Die n Regressoren x_1, x_2, \dots, x_n lassen sich aus den Messdaten $\{u(k), y(k)\}$ berechnen und sind daher bekannt. Die n Parameter $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ sind unbekannt und sollen so berechnet werden, dass die Summe der Modellfehlerquadrate minimal wird:

$$\sum_{k=1}^N e^2(k) = \sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{y}(k))^2 \rightarrow \min.$$

Der gemessene Ausgang y ist additiv durch das Rauschen n gestört. Als Modell des obigen Typs kommen u.a. folgende in Frage:

- Gerade: $\hat{y} = \theta_1 + \theta_2 u$
- Polynom des Grades p : $\hat{y} = \theta_1 + \theta_2 u + \theta_3 u^2 + \dots + \theta_{p+1} u^p$
- Gewichtete Basisfunktionen (n Stück): $\hat{y} = \theta_1 \Phi_1(u) + \theta_2 \Phi_2(u) + \dots + \theta_n \Phi_n(u)$



5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Least-Squares-Schätzung unter Berücksichtigung der Kovarianz-Matrix des Rauschens

Die optimale Lösung dieses Parameterschätzproblems kann unter der Bedingungen, dass $n(k)$ weißes Rauschen ist, berechnet werden:

$$\hat{\underline{\theta}}_{\text{opt}} = (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{y}$$

Hierin enthält die $N \times n$ -dimensionale Regressions-Matrix \underline{X} in ihren Spalten alle Regressoren x_1, x_2, \dots, x_n zu allen Messzeitpunkten $k = 1, 2, \dots, N$ (in den Zeilen), der N -dimensionale Ausgangsvektor \underline{y} enthält den gemessenen Prozessausgang zu allen Messzeitpunkten und der n -dimensionale Parametervektor $\underline{\theta}$ enthält die Parameter des Modells:

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1(1) & x_2(1) & \cdots & x_n(1) \\ x_1(2) & x_2(2) & \cdots & x_n(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1(N) & x_2(N) & \cdots & x_n(N) \end{pmatrix} \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{pmatrix} \quad \underline{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix}$$

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Gewichtetes Least-Squares (WLS)

Standardmäßig sind in der Summe der Fehlerquadrate alle N Punkte gleichgewichtet:

$$J = e^2(1) + e^2(2) + \dots + e^2(N) \rightarrow \min.$$

Oft ist es interessant, manche Punkte stärker oder schwächer zu gewichten, d.h. man möchte die Verlustfunktion J erweitern zu

$$J = w_1 e^2(1) + w_2 e^2(2) + \dots + w_N e^2(N) \rightarrow \min.$$

Die Minimierung führt auf die *gewichtete* Least-Squares-Lösung:

$$\hat{\underline{\theta}}_{\text{opt}} = (\underline{X}^T \underline{W} \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{W} \underline{y}$$

$$\underline{W} = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & w_N \end{pmatrix}$$

Gründe für eine Gewichtung können sein:

- Auf manche Bereiche wird mehr Wert gelegt und sie werden daher stärker gewichtet ($w_i > 1$); eine höhere Genauigkeit ist erwünscht (auf Kosten anderer Bereiche).
- Daten sind ungleichförmig verteilt. Bei LS werden daher Bereiche mit dichten/vielen Daten stärker berücksichtigt als Bereiche mit dünnen/wenigen Daten. Eine Gewichtung kann dies kompensieren: $w_i < 1$ in dichten und $w_i > 1$ in dünnen Bereichen.

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Least-Squares-Schätzung unter Berücksichtigung der Kovarianz-Matrix des Rauschens

Ist das Rauschen $n(k)$ nicht weiß, sondern korreliert, dann kann man aus der Messung zu einem Zeitpunkt Informationen über das Rauschen zu einem anderen Zeitpunkt gewinnen. Diese Informationen stecken in der Kovarianz-Matrix des Rauschprozesses (identisch zur Korrelations-Matrix, da das Rauschen als mittelwertfrei angenommen werden kann). Ist diese als \underline{R}_{nn} bekannt, so kann diese Information optimal in der LS-Formel verwendet werden. Dies führt zur sog. *Markow-Schätzung*:

$$\hat{\underline{\theta}}_{\text{opt}} = (\underline{X}^T \underline{R}_{nn}^{-1} \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{R}_{nn}^{-1} \underline{y}$$

Andrei Markow, 1856-1922
(www.wikipedia.org)



Durch die Inverse der Kovarianz-Matrix wird das Rauschen dekorreliert und dessen vorher-sagbarer Anteil heraus gerechnet. Ist das Rauschen doch weiß, dann vereinfacht sich die Kovarianz-Matrix zur Diagonal-Matrix und die Markow-Schätzung ($\underline{W} = \underline{R}_{nn}^{-1}$) ist identisch mit dem WLS, wobei jeder Messwert mit dem Kehrwert der Rauschvarianz gewichtet wird:

$$\underline{R}_{nn} = \begin{pmatrix} \sigma_n^2(1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_n^2(2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2(N) \end{pmatrix} \quad \underline{R}_{nn}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_n^2(1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_n^2(2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\sigma_n^2(N) \end{pmatrix}$$

5.5 Schätzung wichtiger statistischer Größen

Ridge Regression

Wenn bei der Least-Squares-Schätzung die Parameter zu stark streuen (zu große Varianz), kann durch einen Strafterm (*penalty term*) die Lösung stabilisiert werden. Dafür kann man folgende erweiterte Verlustfunktion minimieren, die neben den Fehlerquadraten auch die Größe der Parameterwerte bestraft:

$$\sum_{k=1}^N e^2(k) + \lambda \sum_{j=1}^n \theta_j^2 \rightarrow \min.$$

Mit der Wahl von λ (Hyperparameter) wird die Stärke der Bestrafung eingestellt. $\lambda = 0$ führt wieder auf die ursprüngliche LS-Lösung. $\lambda > 0$ treibt die Parameterwerte gegen 0. Je größer λ gewählt wird, desto größer wird der Bias (systematische Unterschätzung der richtigen Parameterwerte) und desto geringer wird die Schätzvarianz. D.h. man nimmt einen systematische Fehler in Kauf, um die Streuung zu reduzieren. Dieses Vorgehen nennt man **Regularisierung**. Es wird umso ratsamer, je mehr Parameter n geschätzt werden sollen. Die Minimierung obiger Verlustfunktion führt auf folgende Lösung:

$$\hat{\underline{\theta}}_{\text{reg,opt}} = (\underline{X}^T \underline{X} + \lambda \underline{I})^{-1} \underline{X}^T \underline{y}$$

5.6 Leistungsdichtespektrum

Leistungsdichtespektrum (*Power Spectrum*)

Die Fourier- bzw. Laplace-Transformation deterministischer Signale hat uns die Welt des *Frequenzbereichs* eröffnet, die viele neue Einsichten und rechentechnische Vereinfachungen gebracht hat. Nun wollen wir diesen Übergang in den Frequenzbereich auch für Zufallsprozesse einführen. Es ist nicht (leicht) möglich und auch nicht besonders sinnvoll einzelne Musterfunktionen einer Fourier-Transformation zu unterwerfen.

Statt dessen werden wir die Korrelationsfunktionen, welche die wesentlichen statistischen Charakteristika enthalten, in den Frequenzbereich transformieren. Wir beschränken uns auf den stationären Fall. Für zeitkontinuierliche Zufallsprozesse tun wir dies mit der Fourier- bzw. Laplace-Transformation, für zeitdiskrete mit der z-Transformation:

	Zeitkontinuierlich e^{-sT}	Zeitdiskret $z^{-\kappa}$
Autoleistungsdichtespektrum:	$R_{xx}(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$	$R_{xx}(i\omega) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} r_{xx}(\kappa) e^{-i\omega T_0 \kappa}$
Kreuzleistungsdichtespektrum:	$R_{xy}(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$	$R_{xy}(i\omega) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} r_{xy}(\kappa) e^{-i\omega T_0 \kappa}$

5.6 Leistungsdichtespektrum

Leistungsdichtespektrum versus Amplitudendichtespektrum

Ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Leistungsdichtespektrum eines Zufallsprozesses und der Fourier-Transformierten eines deterministischen Signals wird schon an den Namen klar. Die Fläche unter dem Leistungsdichtespektrum beschreibt die *mittlere Leistung* (eine quadratische Größe), die im Zufallsprozess in diesem Frequenzbereich enthalten ist. Hingegen ist die Fourier-Transformierte eines deterministischen Signals ein Amplitudendichtespektrum, d.h. dessen Fläche beschreibt die Amplituden, die im Signal in diesem Frequenzbereich enthalten sind.

Herleitung der Formel für das Leistungsdichtespektrum

Beschränken wir uns auf zeitdiskrete Zufallsprozesse. Die zeitdiskrete Fourier-Transformierte eines Zufallsprozesses $x(k)$ ist:

$$X(i\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-i\omega T_0 k}$$

In der Praxis ist vom Zufallsprozess nur eine Musterfunktion (eine Realisierung) bekannt, z.B. die Messwerte für die Zeitpunkte $k = 0, 1, \dots, N$. Dann können wir auch nur diesen Teil

5.6 Leistungsdichtespektrum

für die zeitdiskrete Fourier-Transformation heranziehen:

$$X_N(i\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-i\omega T_0 k}$$

Erinnerung:

$$x = y + iz$$

$$x x^* = (y + iz)(y - iz) = y^2 + z^2 = |x|^2$$

Um den quadrierten Betrag von $X_N(i\omega)$ zu erhalten, müssen wir es mit seinem konjugiert komplexen $X_N^*(i\omega)$ multiplizieren:

$$\begin{aligned} |X_N(i\omega)|^2 &= X_N(i\omega)X_N^*(i\omega) = \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-i\omega T_0 k} \right) \left(\sum_{l=0}^{N-1} x(l)e^{i\omega T_0 l} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} x(k)x(l)e^{-i\omega T_0 (k-l)} \end{aligned}$$

Bilden wir nun den Erwartungswert auf beiden Seiten, so entsteht unter der Doppelsumme die Autokorrelationsfunktion von $x(k)$

$$E \left\{ |X(i\omega)|^2 \right\} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} E\{x(k)x(l)\} e^{-i\omega T_0 (k-l)} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} r_{xx}(k-l) e^{-i\omega T_0 (k-l)}$$

da für stationäre Zufallsprozesse gilt: $r_{xx}(k,l) = r_{xx}(l-k)$ und wegen der Symmetrie der AKF gilt: $r_{xx}(l-k) = r_{xx}(k-l)$.

5.6 Leistungsdichtespektrum

Setzen wir nun $\chi = k-l$, teilen durch N und berücksichtigen, dass unter der Doppelsumme die Zeitverschiebung $\chi = 0$ genau N Mal vorkommt, die Zeitverschiebungen $\chi = \pm 1$ genau $N-1$ Mal vorkommen, usw., so ergibt sich:

$$\frac{1}{N} \mathbb{E} \left\{ |X(i\omega)|^2 \right\} = \frac{1}{N} \sum_{\kappa=1-N}^{N-1} (N-|\kappa|) r_{xx}(\kappa) e^{-i\omega T_0 \kappa} = \sum_{\kappa=1-N}^{N-1} \left(1 - \frac{|\kappa|}{N} \right) r_{xx}(\kappa) e^{-i\omega T_0 \kappa}$$

Lassen wir nun die Anzahl der Messdaten N gegen unendlich gehen, dann erhalten wir die Definition für das Autoleistungsdichtespektrum $R_{xx}(i\omega)$ des Zufallsprozesses $x(k)$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \left\{ |X(i\omega)|^2 \right\} = R_{xx}(i\omega) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} r_{xx}(\kappa) e^{-i\omega T_0 \kappa}$$

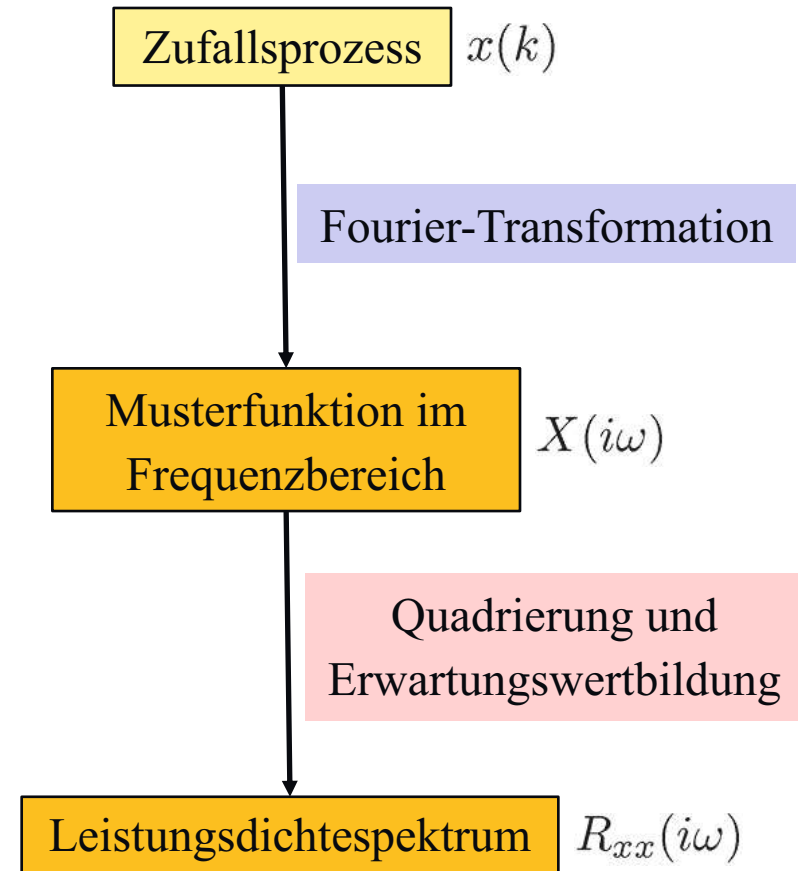
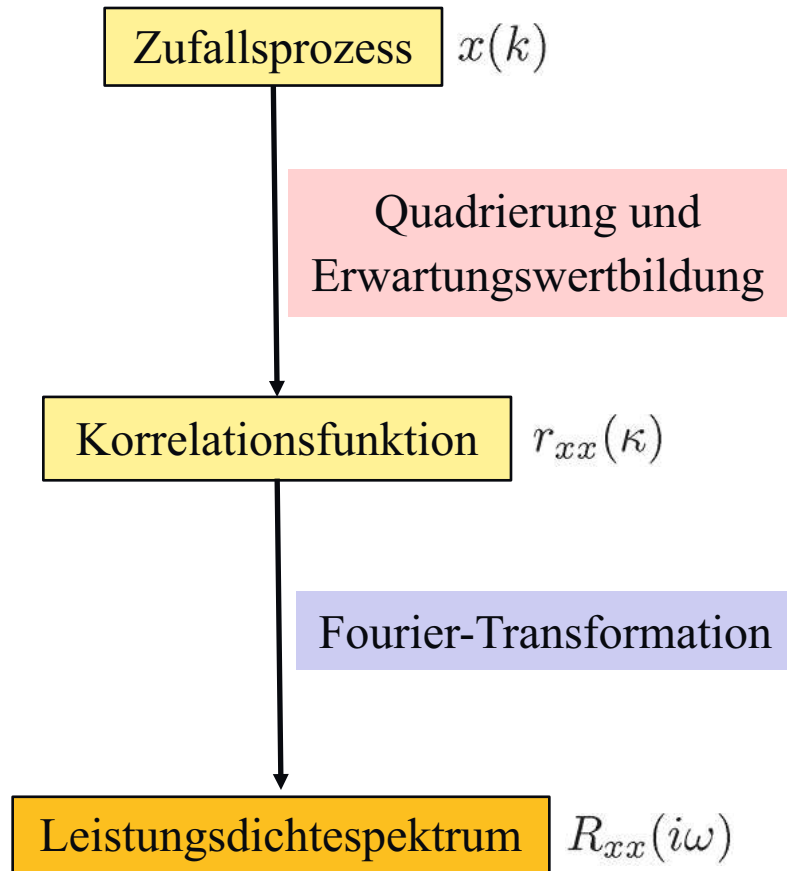
Diese Herleitung kann in gleicher Weise für das Kreuzleistungsdichtespektrum durchgeführt werden. Zwei Interpretationen für das Leistungsdichtespektrum werden sehr deutlich:

1. Als Fourier-Transformierte der Korrelationsfunktion.
2. Als mittlere Leistung eines Zufallsprozesses, wobei die Mittelung über alle möglichen Realisierungen (Musterfunktionen) dieses Zufallsprozesses erfolgt.

Beide Interpretationen sind korrekt und gleichwertig.

5.6 Leistungsdichtespektrum

Interpretationen des Leistungsdichtespektrums



5.6 Leistungsdichtespektrum

Eigenschaften des Leistungsdichtespektrums

1. Das Leistungsdichtespektrum eines Zufallsprozesses ist die Fourier-Transformierte der Autokorrelationsfunktion dieses Zufallsprozesses:

$$R_{xx}(i\omega) \longleftrightarrow r_{xx}(\kappa)$$

2. Das Leistungsdichtespektrum eines zeitdiskreten Zufallsprozesses ist periodisch mit der Abtastfrequenz ω_0 :

$$R_{xx}(i(\omega + n\omega_0)) = R_{xx}(i\omega)$$

3. Das Leistungsdichtespektrum ist reell.
4. Das Leistungsdichtespektrum ist positiv.
5. Das Leistungsdichtespektrum ist symmetrisch für reelle Zufallsprozesse.
6. Der mittlere quadratische Wert (d.h. die mittlere Leistung) eines zeitdiskreten Zufallsprozesses entspricht (bis auf einen Skalierungsfaktor) der Fläche unter dem Leistungsdichtespektrum (Erinnerung: $\Omega = \omega T_0$ und $\omega_0 T_0 = 2\pi$):

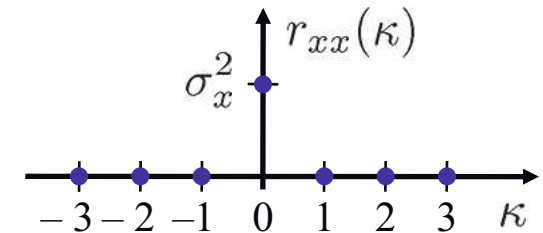
$$\sigma_x^2 = r_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} R_{xx}(i\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R_{xx}(i\Omega) d\Omega$$

5.6 Leistungsdichtespektrum

Weißes Rauschen (zeitdiskret)

Einen zeitstationären, mittelwertfreien Zufallsprozess $x(k)$, dessen Werte zu verschiedenen Zeitpunkten miteinander völlig unkorreliert sind, nennt man **weißes Rauschen**. Wegen der Unkorreliertheit und Mittelwertfreiheit sind $x(k_1)$ und $x(k_2)$ für $k_1 \neq k_2$ orthogonal, d.h. es gilt:

$$E\{x(k_1)x(k_2)\} = \begin{cases} r_{xx}(0) = \sigma_x^2 & \text{für } k_1 = k_2 \\ 0 & \text{für } k_1 \neq k_2 \end{cases}$$

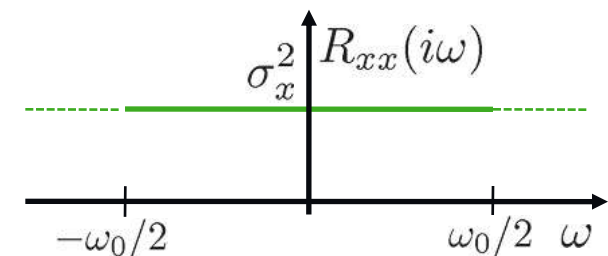


Zu jedem Abtastzeitpunkt wird bei einem weißen Zufallsprozess also neu gewürfelt. Die Kenntnis von $x(k)$ zu bestimmten Zeitpunkten enthält keine Information über $x(k)$ zu anderen Zeitpunkten und erlaubt daher keinerlei Vorhersage.

Das Leistungsdichtespektrum eines weißen Rauschens ist *konstant*, d.h. *alle Frequenzen* sind gleich stark vertreten. Daher hat das Rauschen auch seinen Namen in Anlehnung an weißes Licht, das ebenfalls alle (sichtbaren) Frequenzen elektromagnetischer Strahlung enthält.

$$R_{xx}(i\omega) = \sigma_x^2$$

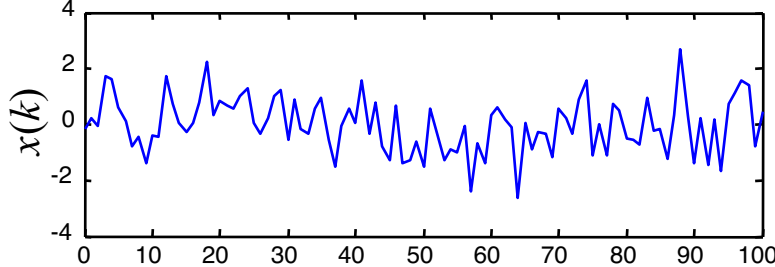
Der relevante Teil des Spektrums liegt zwischen $-\omega_0/2$ und $\omega_0/2$; der Rest sind Schattenspektren infolge der Abtastung.



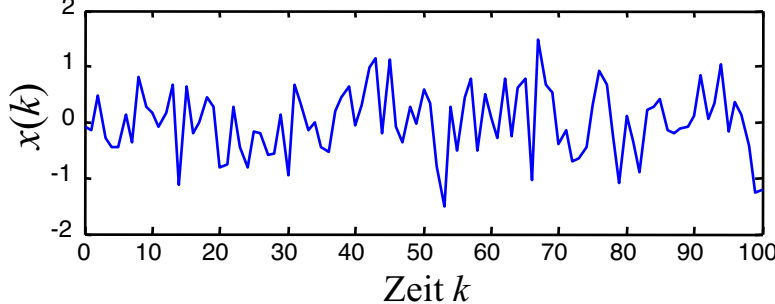
5.6 Leistungsdichtespektrum

Beispiele für weißes Rauschen

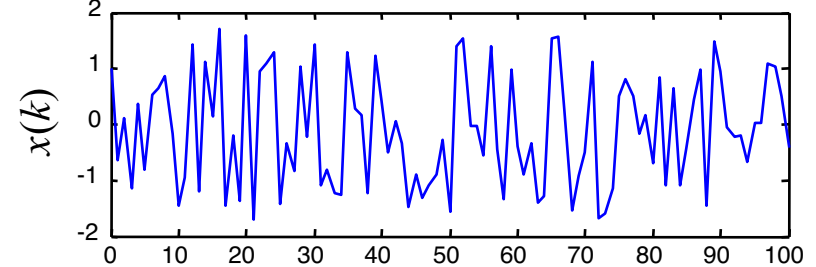
Normalverteilt mit $\sigma_x^2 = 1$, d.h. $3\sigma_x = 3$



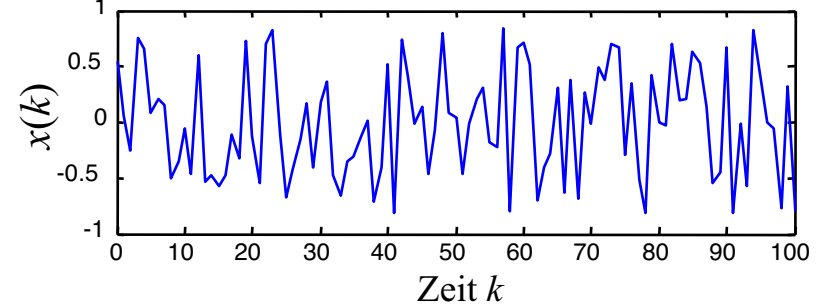
Normalverteilt mit $\sigma_x^2 = 1/4$, d.h. $3\sigma_x = 1,5$



Gleichverteilt mit $\sigma_x^2 = 1$, d.h. $3\sigma_x = 3$



Gleichverteilt mit $\sigma_x^2 = 1/4$, d.h. $3\sigma_x = 1,5$



Zeitkontinuierliches weißes Rauschen

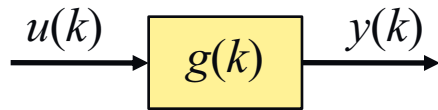
Im *zeitkontinuierlichen* Fall ist die AKF statt einem Kronecker-Delta gleich einem echten Dirac-Impuls bei $\tau = 0$. Dies entspricht einer unendlich hohen mittleren Leistung und ist daher in der Praxis nicht realisierbar. Trotzdem ist auch zeitkontinuierliches weißes Rauschen sehr wichtig als theoretische Idealisierung vergleichbar mit einem reinen D-Anteil in der Regelungstechnik.

5.6 Leistungsdichtespektrum

Transformation durch dynamische Systeme

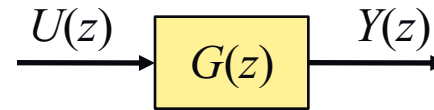
Was passiert mit den statistischen Charakteristika eines Zufallsprozesses, wenn dieser ein dynamisches System (Filter) passiert? Wie verändern sich dadurch Mittelwert, Varianz, AKF/KKF und Leistungsdichtespektren?

Ein dynamisches System ist durch seine Gewichtsfolge $g(k)$ oder alternativ durch dessen z-Transformierte, die Übertragungsfunktion, $G(z)$ vollständig beschrieben. Im Zeitbereich berechnet sich der Systemausgang mittels Faltung, im Frequenzbereich mittels Multiplikation:



$$y(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(l)u(k-l)$$

negative l nur für
akausale Systeme
relevant!



$$Y(z) = G(z)U(z)$$

Erinnerung: Frequenzgang $G(z = e^{i\omega T_0})$


5.6 Leistungsdichtespektrum

Transformation des Mittelwerts

$$m_y(k) = E\{y(k)\} = E\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty} g(l)u(k-l)\right\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(l)E\{u(k-l)\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(l)m_u(k-l)$$

Ist $u(k)$ stationär, dann hängen die Mittelwerte nicht von der Zeit ab und es gilt:

$$m_y = m_u \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(l) = m_u G(z=1)$$

 Verstärkung!

D.h. der Mittelwert wird einfach mit der statischen Verstärkung des dynamischen Systems transformiert.

Nebenrechnung:

$$G(z = e^{i\omega T_0}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(l)e^{-i\omega T_0 l} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(l)z^{-l}$$

Für $\omega = 0$ ergibt sich:

$$G(z = 1) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(l)$$

5.6 Leistungsdichtespektrum

Transformation der AKF und KKF

Berechnen wir zunächst wie die KKF mit der AKF über die Faltung zusammenhängen:

$$r_{uy}(k_1, k_2) = E\{u(k_1)y(k_2)\} = E\left\{u(k_1) \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(l)u(k_2 - l)\right\}$$

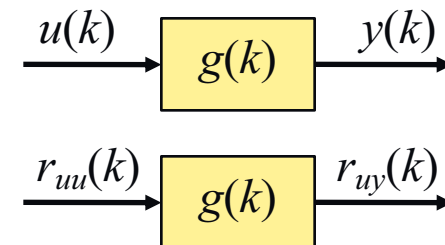
Vertauschen der Erwartungswertbildung und Summation liefert:

$$r_{uy}(k_1, k_2) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(l)E\{u(k_1)u(k_2 - l)\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(l)r_{uu}(k_1, k_2 - l)$$

Für stationäre Zufallsprozesse hängen die Formeln nur noch von der Zeitverschiebung ab, d.h. wir setzen $k_1 = k$ und $k_2 = k + \chi$:

$$r_{uy}(\kappa) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(l)r_{uu}(\kappa - l)$$

Der Zusammenhang zwischen $r_{uu}(\chi)$ und $r_{uy}(\chi)$ ist genauso wie der Zusammenhang zwischen $u(k)$ und $y(k)$ durch die Faltung gegeben!



5.6 Leistungsdichtespektrum

Analog kann man zeigen, dass gilt:

$$r_{yu}(\kappa) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(-l)r_{uu}(\kappa - l)$$

Hier wird also mit der ins Akausale gespiegelten Gewichtsfolge $g(-k)$ gefaltet! Führt man beide Faltungen hintereinander aus so ergibt sich, je nach Reihenfolge:



Die AKF von $u(k)$ transformiert sich also in die AKF von $y(k)$, indem man sie zunächst durch das dynamische System mit Gewichtsfolge $g(k)$ schickt und anschließend durch das dynamische System mit der gespiegelten Gewichtsfolge $g(-k)$ leitet (oder umgekehrt).

Da die AKF eine quadratische Größe ist, muss jedes der u in $r_{uu}(k)$ in ein y transformiert werden. Daher hängt $r_{yy}(k)$ mit $r_{uu}(k)$ über das *Quadrat* der Gewichtsfolge zusammen:

$$r_{yy}(\kappa) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(-l)g(m)r_{uu}(\kappa-l-m) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(l)g(-m)r_{uu}(\kappa-l-m)$$

5.6 Leistungsdichtespektrum

Transformation der Leistungsdichtespektren

Die Blockschaltbilder für den Zusammenhang zwischen den AKFs und KKF's können 1:1 in den Frequenzbereich übertragen werden, um die entsprechenden Zusammenhänge zwischen den Auto- und Kreuzleistungsdichtespektren zu erhalten. Allerdings müssen wir beachten, was die Spiegelung der Gewichtsfolge ins Akausale im Frequenzbereich bedeutet:

$$\begin{aligned} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(-l)e^{-i\omega T_0 l} &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(l)e^{-i\omega T_0(-l)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(l)e^{-i(-\omega)T_0 l} = G(e^{-i\omega T_0}) = G^*(e^{i\omega T_0}) \\ &= G(z^{-1}) = G(1/z) = G^*(z) \end{aligned}$$

D.h. ein dynamisches System mit der Gewichtsfolge $g(-k)$ entspricht im Frequenzbereich dem *konjugiert komplexen* System $G^*(z)$. Damit erhalten wir folgende Zusammenhänge:



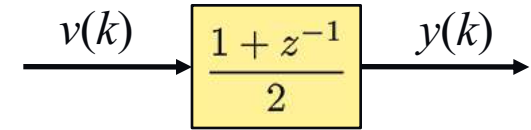
Die Autoleistungsdichtespektren von $u(k)$ und $y(k)$ hängen also wie folgt zusammen:

$$R_{yy}(i\omega) = G(i\omega)G^*(i\omega)R_{uu}(i\omega) = G^*(i\omega)G(i\omega)R_{uu}(i\omega) \rightarrow R_{yy}(i\omega) = |G(i\omega)|^2 R_{uu}(i\omega)$$

Die Phase von $G(i\omega)$ spielt hierbei also keine Rolle!

5.6 Leistungsdichtespektrum

Beispiel: Mittelwert-Filterung weißen Rauschens



Weißes Rauschen $v(k)$ mit Varianz σ_v^2 wird durch einen dynamischen FIR-Filter geschickt, der den Mittelwert des aktuellen und vergangenen Abtastwerts berechnet:

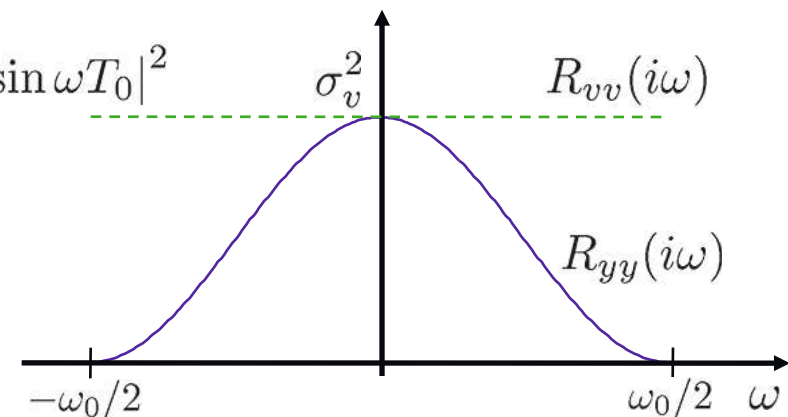
$y(k) = \frac{v(k) + v(k-1)}{2}$ Daraus ergeben sich Übertragungsfunktion und Frequenzgang:

$$G(z) = \frac{1}{2}(1 + z^{-1}) \quad G(i\omega) = \frac{1}{2}(1 + e^{-i\omega T_0})$$

Das Autoleistungsdichtespektrum des Ausgangs $y(k)$ kann nun wie folgt berechnet werden:

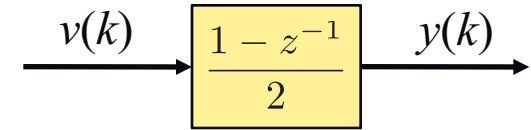
$$R_{yy}(i\omega) = |G(i\omega)|^2 R_{vv}(i\omega) = |G(i\omega)|^2 \sigma_v^2$$

$$\begin{aligned} |G(i\omega)|^2 &= \left| \frac{1}{2}(1 + e^{-i\omega T_0}) \right|^2 = \frac{1}{4} |1 + \cos \omega T_0 - i \sin \omega T_0|^2 \\ &= \frac{1}{4} (1 + 2\cos \omega T_0 + \cos^2 \omega T_0 + \sin^2 \omega T_0) \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos \omega T_0) \end{aligned}$$



5.6 Leistungsdichtespektrum

Beispiel: Das Gegenstück zum zuvor gezeigten Tiefpass ist folgender Hochpass



$$y(k) = \frac{v(k) - v(k-1)}{2}$$

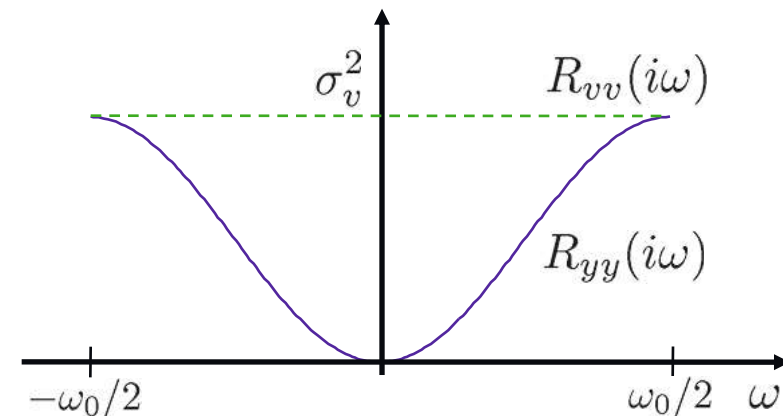
Hierfür ergibt sich folgender Frequenzgang:

$$G(i\omega) = \frac{1}{2} (1 - e^{-i\omega T_0})$$

Das Leistungsdichtespektrum von y (Betragsquadrat) ist demnach:

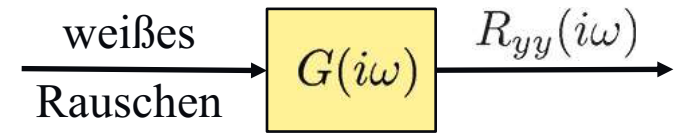
$$|G(i\omega)|^2 = \frac{1}{2} (1 - \cos\omega T_0)$$

Dieser Filter lässt also keine Gleichwerte (Frequenz $\omega = 0$) durch.



5.6 Leistungsdichtespektrum

Formfilter



Wird ein dynamisches System dazu verwendet weißes Rauschen in *farbiges Rauschen* mit einem gewünschten Spektrum umzuwandeln, so wird es als *Formfilter* bezeichnet. Da weißes Rauschen (mit Varianz σ_v^2) ein konstantes Leistungsdichtespektrum hat, entspricht die Form des Leistungsdichtespektrum des Formfilterausgangs dem Betragsquadrat von $G(i\omega)$:

$$R_{yy}(i\omega) = |G(i\omega)|^2 \sigma_v^2$$

Durch den Amplitudengang des Formfilters lässt sich also nahezu jedes beliebige Spektrum einstellen.

In vielen Anwendungen existiert das weiße Rauschen gar nicht wirklich, sondern ist rein fiktiv. Der Formfilter $G(i\omega)$ wird dann dazu genutzt, um die Charakteristik eines Störsignals zu beschreiben. Das Spektrum sollte in jenen Frequenzbereichen hohe Werte aufweisen, in denen starke Störungen auftreten. Tritt z.B. eine sinusförmige Störung bei 50 Hz auf (Netzeinstreuung!), so könnte dies durch ein schwach gedämpftes (oder gar ungedämpftes) konjugiert komplexes Polpaar im Nenner von $G(i\omega)$ modelliert werden. Eine Störanregung einer Brücke durch Wind im Bereich um 2 Hz (± 0.2 Hz) könnte durch einen Bandpassfilter mit Eckfrequenzen bei 1.8 Hz und 2.2 Hz beschrieben werden, usw.

5.6 Leistungsdichtespektrum

Spektralzerlegung

Häufig tritt die umgekehrte Problemstellung auf. Gegeben ist ein Leistungsdichtespektrum, gesucht der dazugehörige Formfilter, der aus weißem Rauschen ein solches Spektrum erzeugt. Dann muss aus $|G(i\omega)|^2$ auf $G(i\omega)$ geschlossen werden. Man kann zeigen (Spektralzerlegungstheorem, *spectral factorization theorem*), dass sich jedes $|G(i\omega)|^2$ in ein $G(i\omega)$ und eine $G^*(i\omega)$ zerlegen lässt, wobei gilt:

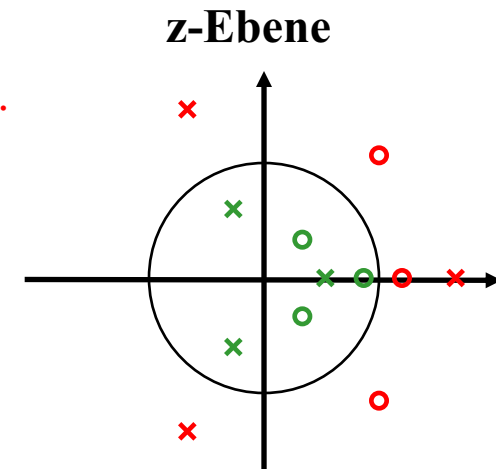
$$|G(i\omega)|^2 = G(i\omega)G^*(i\omega) \quad \text{mit}$$

$G(i\omega)$: Alle Pole und Nullstellen sind stabil (und evtl. grenzstabil).

$G^*(i\omega)$: Alle Pole und Nullstellen sind instabil (und evtl. grenzstabil).

Hat $G(i\omega)$ einen stabilen Pol oder eine stabile Nullstelle bei $z = z_s$, dann enthält $G^*(i\omega)$ den gespiegelten Pol oder die gespiegelte Nullstelle bei $z = 1/z_s$. Liegt $z = z_s$ im Einheitskreis, dann liegt $z = 1/z_s$ automatisch außerhalb.

Mit Hilfe der Spektralzerlegung können wir also für jedes Spektrum $|G(i\omega)|^2$ ein stabiles und phasenminimales Formfilter $G(i\omega)$ ermitteln.



5.6 Leistungsdichtespektrum

ARMA-Filter (*AutoRegressive Moving Average*)

Ein lineares Formfilter besteht im allgemeinen Fall aus einer Übertragungsfunktion mit Nennerpolynom $A(z)$ und Zählerpolynom $B(z)$. Die zugehörige Differenzengleichung im Zeitbereich lautet dann:

$$y(k) + a_1y(k-1) + \dots + a_ny(k-n) = v(k) + b_1v(k-1) + \dots + b_mv(k-m)$$

AR-Filter (*AutoRegressive*)

Zur einfachen Modellierung einiger Peaks im Spektrum reicht oft schon das AR-Filter aus, welches sich sehr leicht schätzen lässt:

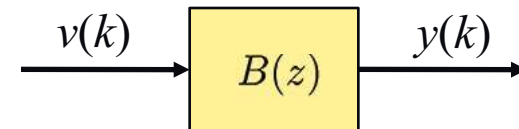
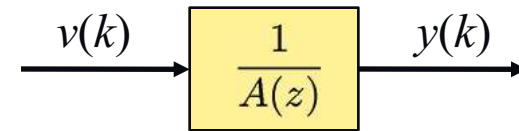
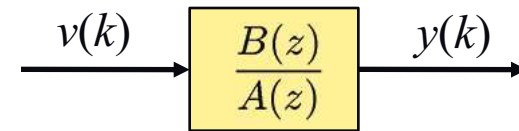
$$y(k) + a_1y(k-1) + \dots + a_ny(k-n) = v(k)$$

MA-Filter (*Moving Average*)

Da beim MA-Ansatz keine Rückkopplungen enthalten sind, können keine scharfen Überhöhungen modelliert werden. Dafür lassen sich sehr gute tiefe „Dellen“ (d.h. keine Störung) beschreiben. Selten benötigt.

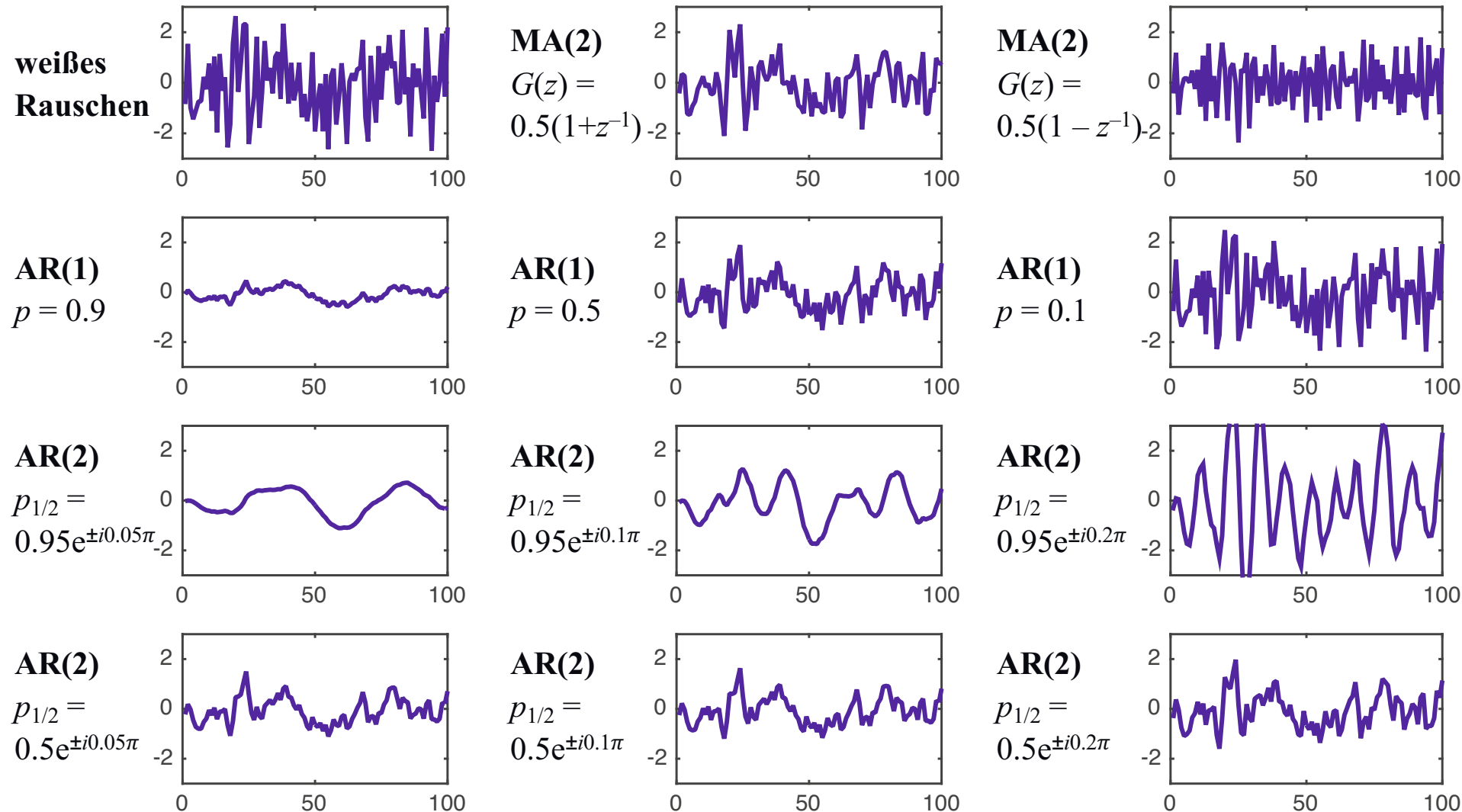
$$y(k) = v(k) + b_1v(k-1) + \dots + b_mv(k-m)$$

Bemerkung: Der b_0 -Parameter des Formfilters wird typischerweise auf 1 normiert, da dieser Freiheitsgrad schon über die mittlere Leistung des weißen Rauschen σ_v^2 abgedeckt ist.



5.6 Leistungsdichtespektrum

Beispiele für verschiedene Formfilter zur Erzeugung farbigen Rauschens



5.6 Leistungsdichtespektrum

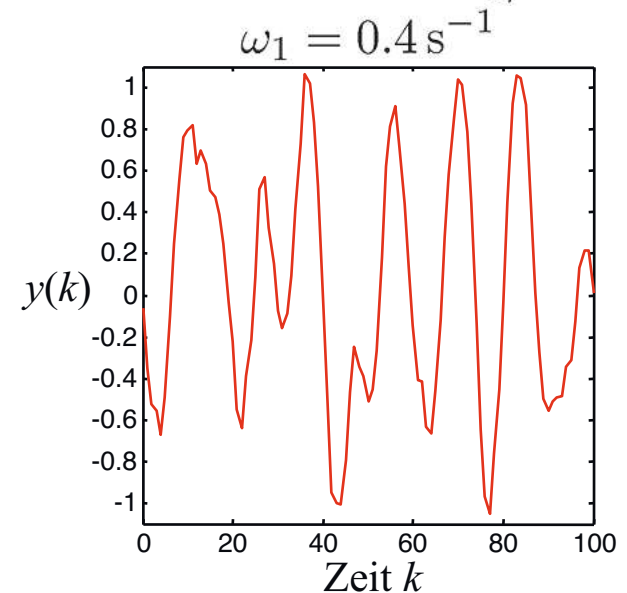
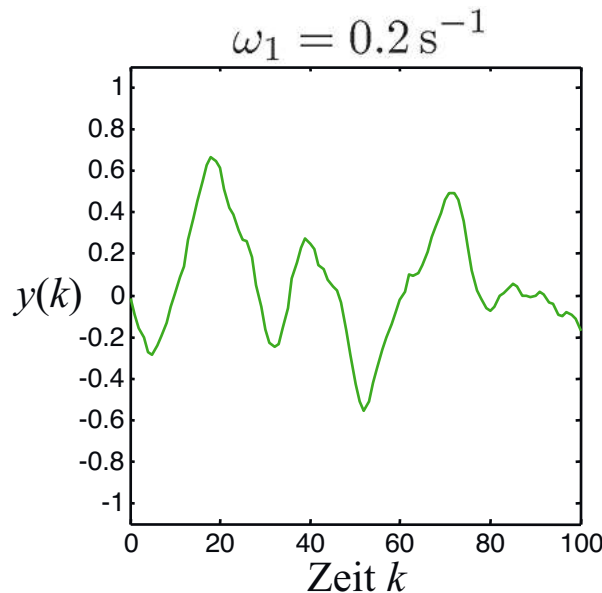
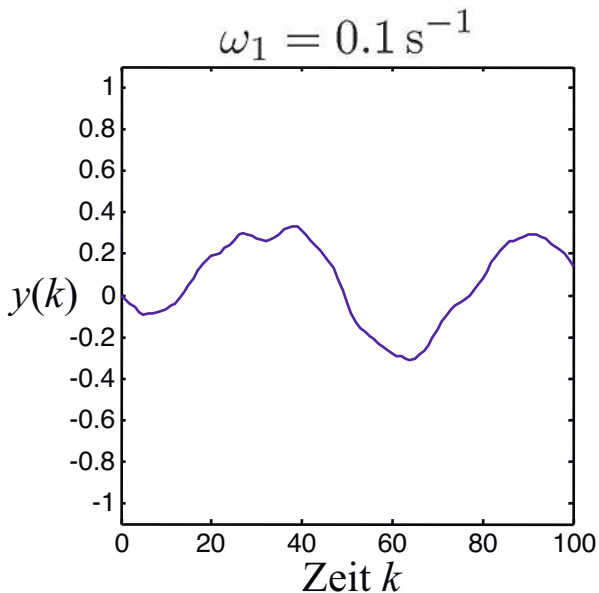
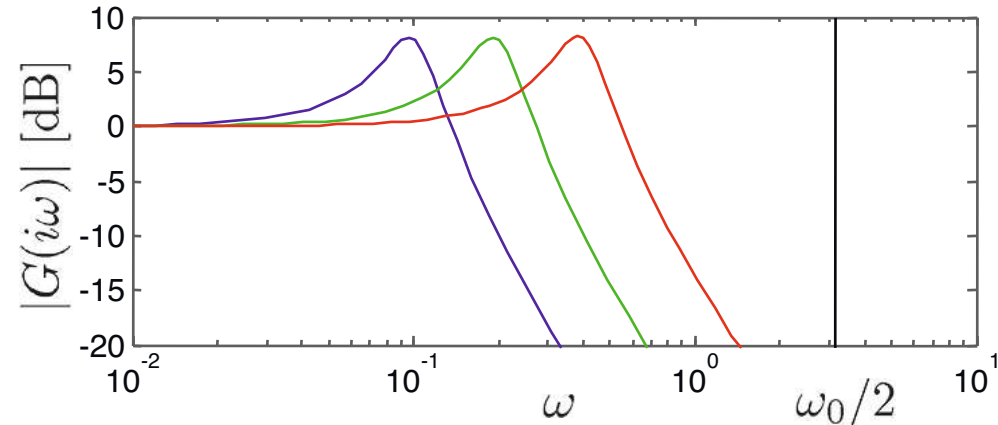
$$f_0 = 1 \text{ Hz}$$

$$\omega_0/2 = 3.14 \text{ s}^{-1}$$

Schwingungsmodellierung mit AR(2)-Formfiltern

Dämpfung $D = 0.2$

Gewünschte Frequenz:	Pole von $G(z)$
$\omega_1 = 0.1 \text{ s}^{-1}$	$p_{1/2} = 0.98 e^{\pm i5.6^\circ}$
$\omega_1 = 0.2 \text{ s}^{-1}$	$p_{1/2} = 0.96 e^{\pm i11.2^\circ}$
$\omega_1 = 0.4 \text{ s}^{-1}$	$p_{1/2} = 0.92 e^{\pm i22.5^\circ}$



5.6 Leistungsdichtespektrum

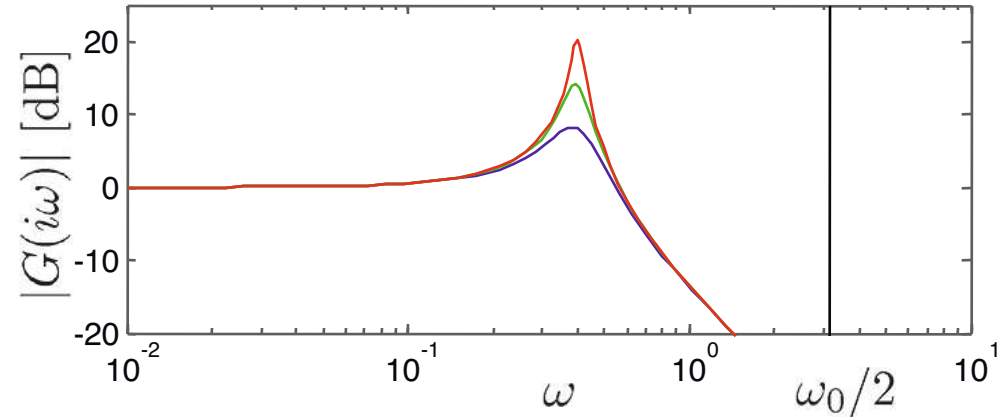
$$f_0 = 1 \text{ Hz}$$

$$\omega_0/2 = 3.14 \text{ s}^{-1}$$

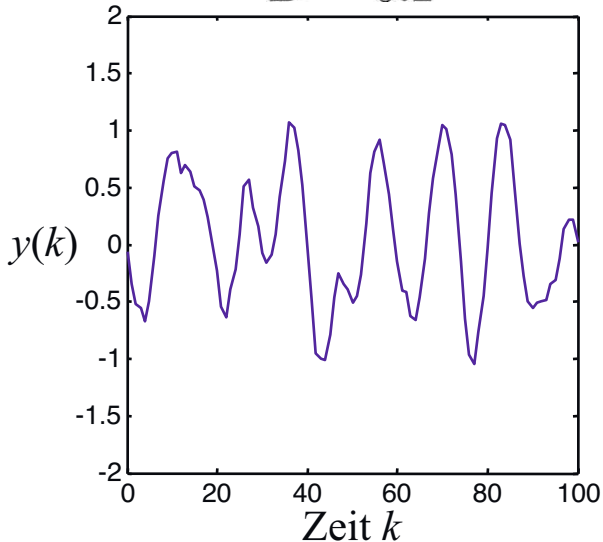
Schwingungsmodellierung mit AR(2)-Formfiltern

Schwingungsfrequenz $\omega_1 = 0.4 \text{ s}^{-1}$

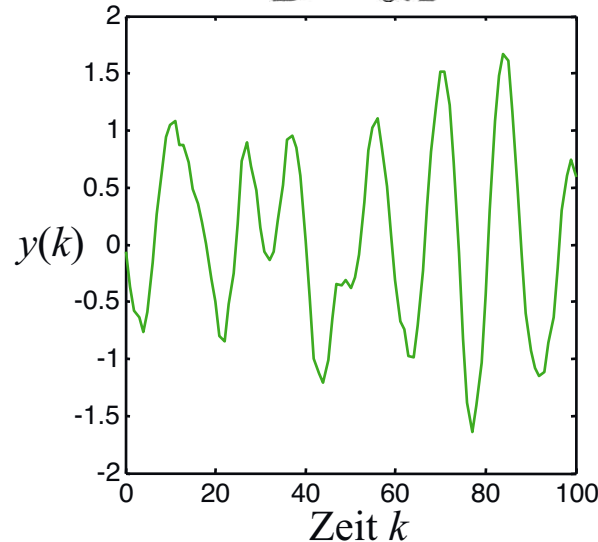
Gewünschte Dämpfung:	Pole von $G(z)$
$D = 0.2$	$p_{1/2} = 0.92 e^{\pm i22.5^\circ}$
$D = 0.1$	$p_{1/2} = 0.96 e^{\pm i22.8^\circ}$
$D = 0.05$	$p_{1/2} = 0.98 e^{\pm i22.9^\circ}$



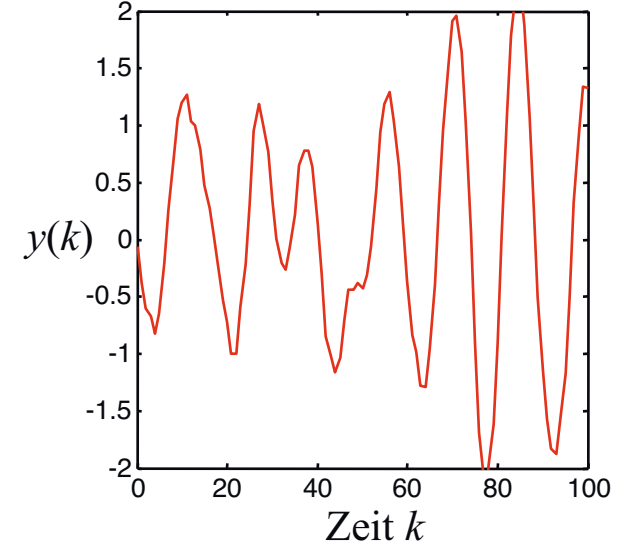
$D = 0.2$



$D = 0.1$



$D = 0.05$



5.6 Leistungsdichtespektrum

Erzeugung instationärer Zufallsprozesse

Solange der Formfilter stabil ist, entsteht durch die Filterung eines stationären Zufallsprozesses $v(k)$ wieder ein stationärer Zufallsprozess $y(k)$. Verwendet man hingegen ein grenzstabiles (oder gar instabiles) Formfilter, dann entsteht ein *instationärer* Zufallsprozess $y(k)$. Der in der Praxis wichtigste instationäre Fall ist das sog. **braune Rauschen**, auch *Brownian Motion* oder *Random Walk* genannt. Es entsteht durch Integration weißen Rauschens mittels folgendem Formfilter (für den zeitdiskreten Fall):



Während beim weißen Rauschen in jedem Abtastschritt durch Zufall ein neuer, unkorrelierter Wert ausgegeben wird, *addiert* man beim braunen Rauschen einen unkorrelierten Zufallswert zu dem Wert des vorherigen Abtastschritts. Dies entspricht einem Menschen, der bei jedem Schritt durch Zufall neu seine Laufrichtung bestimmt. Seine *Positionsänderungen* sind zufällig, nicht jedoch seine Position! Daher die Bezeichnung Random Walk. Die Brownsche Molekularbewegungen (1827 entdeckt) bezeichnet die thermisch getriebene Eigenbewegung von Teilchen und folgt ebenfalls dieser Vorschrift.

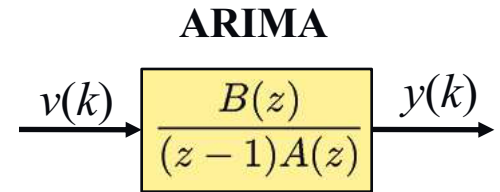
5.6 Leistungsdichtespektrum

Braunes Rauschen (*Brown Noise*)

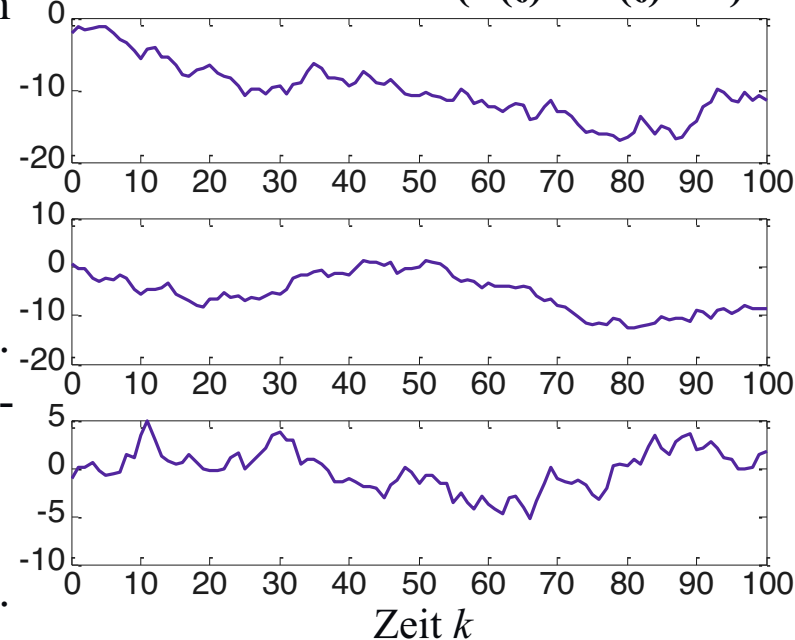
Stationäre Zufallsprozesse haben einen zeitlich konstanten Mittelwert. Dies ist bei vielen Anwendungen in der Praxis nicht der Fall. Oft wirken Störungen auf Prozesse, deren Mittelwerte sich zeitlich oder in Abhängigkeit anderer Prozessgrößen (Temperaturen, Drücke, etc.) ändern.

Eine wesentlich realistischere Beschreibung solcher Störungen gelingt über instationäre Zufallsprozess. Den einfachsten Fall, nämlich einen zeitveränderlichen Mittelwert, erreicht man durch einen grenzstabilen Pol bei $z = 1$ (I-Verhalten). Optional kann dieses I-Verhalten mit einem ARMA-Prozess kombiniert werden, was einen ARIMA-Prozess ergibt.

Diese Vorgehensweise kann beliebig erweitert werden. Z.B. können wir durch einen zweiten I-Anteil (Doppelpol bei $z = 1$) auch zeitliche veränderliche Trends modellieren. Auch instabile Pole zur Modellierung eines exponentiell ansteigenden Verlaufs sind denkbar.



**3 verschiedene Realisierungen
braunen Rauschens ($B(z) = A(z) = 1$)**

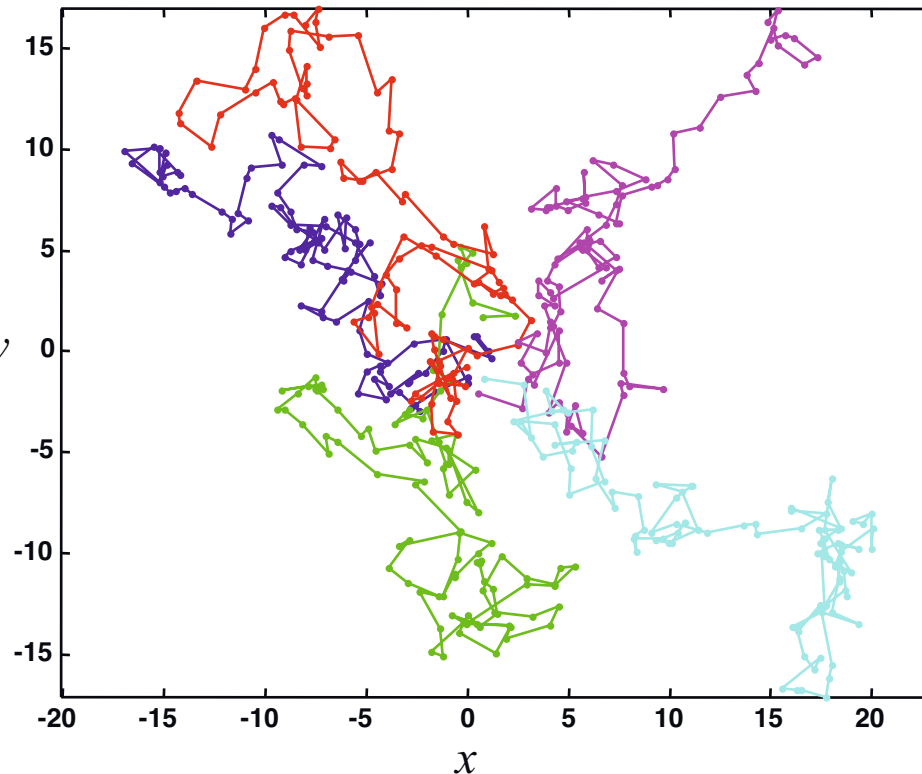


5.6 Leistungsdichtespektrum

2-dimensionales Braunes Rauschen

Noch schöner erkennt man den Bezug eines Braunen Rauschens zum Random Walk bzw. zur Brownschen Molekularbewegung im 2-dimensionalen Fall. Zu jedem Zeitschritt k werden dann zwei Zufallszahlen $x(k)$ und $y(k)$ erzeugt, die auf die aktuelle Position in den beiden Koordinatenrichtungen hinzuaddiert werden.

5 verschiedene Realisationen eines 2-dim. „Random Walk“- Zufallsprozesses mit jeweils 100 Zeitschritten



Robert Brown, 1773-1858
(www.wikipedia.org)



5.6 Leistungsdichtespektrum

Die Einheit „Dezibel“

Ein Dezibel [dB] ist 1/10 Bel [B], genau wie ein Dezimeter [dm] gleich 1/10 Meter [m] ist. Ursprünglich sind [dB] und [B] als Logarithmen zur Basis 10 von Leistungsverhältnissen definiert, d.h. für eine Leistung P verglichen mit einer Bezugs- oder Referenzleistung P_0 gilt:

$$P \text{ [dB]} = 10 \log \frac{P}{P_0}$$

Werden statt Leistungsverhältnisse Amplitudenverhältnisse in dB ausgedrückt, so ergibt sich:

$$A \text{ [dB]} = 10 \log \frac{A^2}{A_0^2} = 20 \log \frac{A}{A_0}$$

weil die Leistung proportional zum Quadrat der Amplitude ist: $P \sim A^2$.

Dezibel [dB]	P/P_0	A/A_0
3	2	$\sqrt{2}$
10	10	$\sqrt{10}$
20	100	10

5.6 Leistungsdichtespektrum

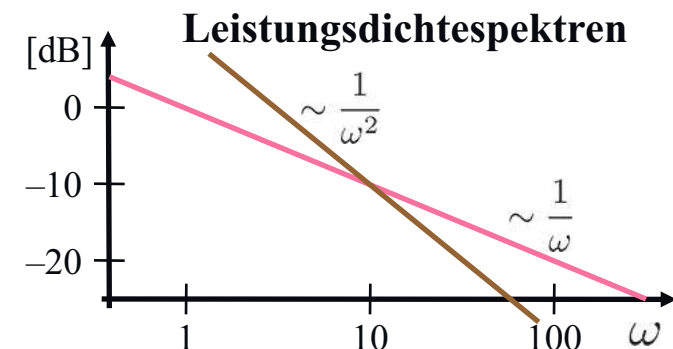
Braunes und Rosa Rauschen (*Brown and Pink Noise*)

Braunes Rauschen entsteht, indem man weißes Rauschen integriert, d.h. durch einen Formfilter mit der Übertragungsfunktion $G(s) = 1/s$ schickt. Daher fällt sein Leistungsdichtespektrum mit $|G(i\omega)|^2 = 1/\omega^2$ ab. Braunes Rauschen wird deshalb manchmal auch $1/\omega^2$ - oder $1/f^2$ -Rauschen genannt.

Das Leistungsdichtespektrum von *rosa Rauschen* hingegen fällt nur halb so schnell (in logarithmischer Skala) wie braunes Rauschen ab. Es wird daher auch $1/\omega$ - oder $1/f$ -Rauschen genannt. Theoretisch müsste es also durch einen Formfilter mit Übertragungsfunktion $G(s) = 1/s^{1/2}$ aus weißem Rauschen erzeugt werden können. Aber $G(s) = 1/s^{1/2}$ ist wegen der Potenz $1/2$ keine gebrochen rationale Funktion und daher kein realisierbares System; es kann höchstens in einem bestimmten Frequenzbereich approximiert werden. Trotz dieser Merkwürdigkeiten kommt rosa Rauschen ausgesprochen oft vor, z.B. in

elektronischen Schaltungen, Verkehrsnetzen, Astronomie, Meteorologie, Geologie, Ozeanographie, Radioaktivität, Finanzdaten, DNS-Sequenzen, Rhythmus des Herzschlags, Musik, gesprochene und geschriebene Sprache, ...

Quelle: <http://www.nslj-genetics.org/wli/1fnoise/>



5.6 Leistungsdichtespektrum

Schätzung des Leistungsdichtespektrums

In Kapitel 3.7 wurde die Schätzung eines Amplitudenspektrum beschrieben. Sehr ähnliche Methoden können auch zur Schätzung des Leistungsdichtespektrum verwendet werden. Insbesondere ist auch hier die Unterscheidung in zwei Klassen von Methoden wichtig:

- *Parametrische Methoden:* Die Basis bildet eine Modellvorstellung des stochastischen Prozesses, z.B. als AR, MA oder ARMA Prozess. Neben der Modellstruktur muss auch noch dessen Ordnung festgelegt (oder ausprobiert) werden. Geschätzt wird eine relative kleine Anzahl an Parametern. Diese Methoden funktionieren sehr gut, wenn die Modellvorstellung den tatsächlichen physikalischen Gegebenheiten entspricht oder nahe ist. Sie sind in der Lage das Spektrum mit sehr hoher Auflösung wiederzugeben, d.h. die Lage (Frequenz) von Peaks und deren Höhe kann sehr genau ermittelt werden.
- *Nichtparametrische Methoden:* Hier wird kein bestimmtes Modell zugrunde gelegt. Diese Methoden sind deshalb universeller aber auch nicht so genau wie parametrische Ansätze. Da bei nichtparametrischen Methoden ein sehr große Anzahl von „Parametern“ (theoretisch unendlich viele) bestimmt werden muss, sind sie viel rauschempfindlicher (kein oder wenig Mittelungseffekt). Dennoch können die Ergebnisse besser sein als bei parametrischen Verfahren mit schlechten Modellannahmen (Struktur und Ordnung).

5.7 Stochastische und deterministische Modelle

Deterministische versus stochastische Modellierung

In sehr vielen Fällen führen deterministische und stochastische Ansätze am Ende auf identische oder sehr ähnliche Ergebnisse. Die Denkweisen sind zum Teil deutlich unterschiedlich. Dies lässt mal die eine, mal die andere Formulierung intuitiver erscheinen. Insbesondere ist die Interpretation bei der Wahl von Tuning-Parametern von Bedeutung.

Beispiel: Methode der kleinsten Quadrate (least-squares)

Ausgangspunkt ist ein Modell, das linear in den unbekanntem Parametern θ_i ist:

$$\hat{y} = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dots + \theta_n x_n$$

Durch Messung bekannt sind $k = 1, 2, \dots, N$ Werte des Ausgangs $y(k)$ und der Regressoren $x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)$. Gesucht sind die Parameterwerte, bei denen der mittlere quadratische Modellfehler minimal wird.

Bei einer *deterministischen* Herangehensweise werden y und x_i durch deterministische Größen beschrieben und die quadratische Fehlersumme entspricht:

$$J = \sum_{k=1}^N e^2(k) = \sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{y}(k))^2 \rightarrow \min.$$

5.7 Stochastische und deterministische Modelle

Die optimalen Parameter des deterministischen Least-Squares-Problems berechnen sich zu:

$$\hat{\underline{\theta}} = (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{y}$$

Bei einer *stochastischen* Herangehensweise werden y und x_i durch Zufallsprozesse beschrieben und der mittlere quadratische Fehler entspricht:

$$J = E\{e^2(k)\} = E\{(y(k) - \hat{y}(k))^2\} \rightarrow \min.$$

Die optimalen Parameter des stochastischen Least-Squares-Problems berechnen sich zu:

$$\hat{\underline{\theta}} = \underline{R}_{xx}^{-1} \underline{r}_{xy}$$

Hierbei enthält die Autokorrelationsmatrix \underline{R}_{xx} die Korrelationen zwischen den verschiedenen Regressoren x_i und der Kreuzkorrelationsvektor \underline{r}_{xy} die Korrelationen zwischen den Regressoren x_i und dem Ausgang y :

$$\underline{R}_{xx} = \begin{pmatrix} r_{x_1 x_1}(0) & r_{x_1 x_2}(0) & \cdots & r_{x_1 x_n}(0) \\ r_{x_2 x_1}(0) & r_{x_2 x_2}(0) & \cdots & r_{x_2 x_n}(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{x_n x_1}(0) & r_{x_n x_2}(0) & \cdots & r_{x_n x_n}(0) \end{pmatrix} \quad \underline{r}_{xy} = \begin{pmatrix} r_{x_1 y}(0) \\ r_{x_2 y}(0) \\ \vdots \\ r_{x_n y}(0) \end{pmatrix}$$

Erinnerung:

$$r_{x_i x_j}(0) = E\{x_i(k)x_j(k)\}$$

$$r_{x_i y}(0) = E\{x_i(k)y(k)\}$$

5.7 Stochastische und deterministische Modelle

Eine genauer Blick auf die deterministische Lösung zeigt, dass dort genau die Schätzwerte für die entsprechenden Korrelation stehen. D.h. in der praktischen Anwendung sind beide Schätzformeln *identisch!*

$$\hat{\underline{\theta}} = (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{y} = \left(\frac{1}{N} \underline{X}^T \underline{X} \right)^{-1} \frac{1}{N} \underline{X}^T \underline{y} = \hat{R}_{\underline{x}\underline{x}}^{-1} \hat{r}_{\underline{x}\underline{y}}$$

$$\frac{1}{N} \underline{X}^T \underline{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_1^2(k) & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_1(k)x_2(k) & \cdots & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_1(k)x_n(k) \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_2(k)x_1(k) & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_2^2(k) & \cdots & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_2(k)x_n(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_n(k)x_1(k) & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_n(k)x_2(k) & \cdots & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_n^2(k) \end{pmatrix}$$

Schätzung für Auto-
korrelationsmatrix $\underline{R}_{\underline{x}\underline{x}}$

$$\frac{1}{N} \underline{X}^T \underline{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_1(k)y(k) \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_2(k)y(k) \\ \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_n(k)y(k) \end{pmatrix}$$

Schätzung für Kreuz-
korrelationsvektor $\underline{r}_{\underline{x}\underline{y}}$

5.7 Stochastische und deterministische Modelle

Beispiel: Luenberger-Beobachter und Kalman-Filter

Dieses Beispiel wird in „Digitale Regelung“ behandelt. Der Entwurf des deterministischen Luenberger-Beobachters führt auf die identischen Gleichungen wie die stationäre Lösung des stochastischen Kalman-Filters. Allerdings erlaubt die stochastische Version eine intuitivere Wahl der Tuning-Parameter in Form von Kovarianzmatrizen anstelle schwerer zu interpretierender Gewichtungsmatrizen im deterministischen Fall.

Beispiel: Deterministische oder stochastische Störungen im Regelkreis

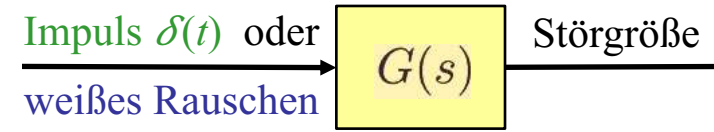
Wir kennen aus RT das “Innere Modell“-Prinzip, nach dem der Regelkreis ein dynamisches Modell der Störung (oder der Führungsgröße) enthalten muss, wenn er in Lage sein soll, diese ohne bleibende Regelabweichung auszuregeln.

Der wichtigste Spezialfall dieses Prinzips ist die bekannte Regel, dass zur Ausregelung sprungförmiger Stör- oder Führungsgrößen ein I-Anteil im Regelkreis (Regler oder Strecke) enthalten sein muss.

Allen fortgeschrittenen Reglerentwurfverfahren muss über ein *Störgrößenmodell* (*Führungsgrößenmodell*) bekannt gemacht werden, welchen Typs die Störung (Führungsgröße) ist. Dann “beachten“ sie das “Innere Modell“-Prinzip automatisch.

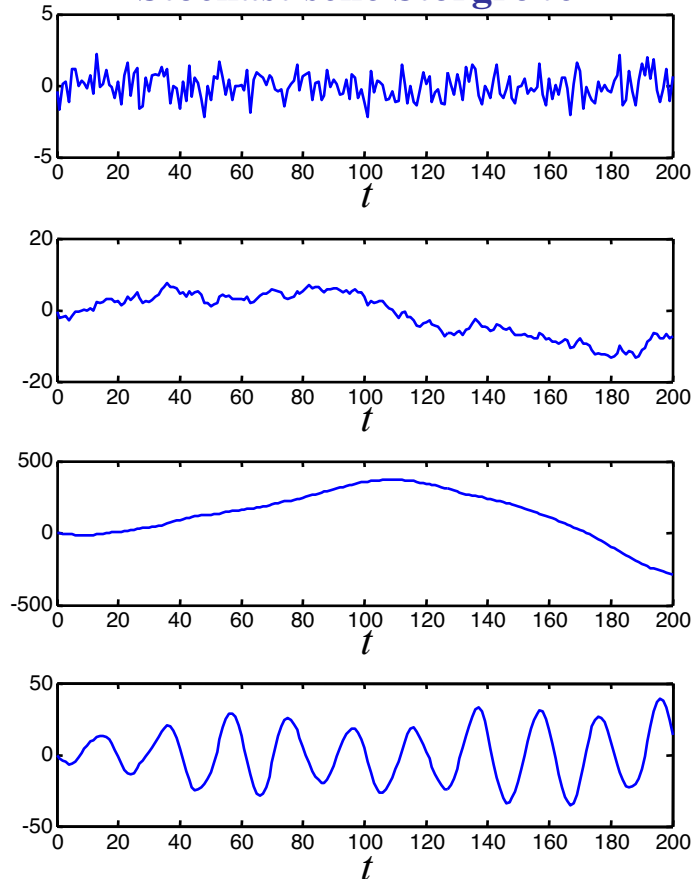
5.7 Stochastische und deterministische Modelle

Ein Störgrößenmodell (Führungsgrößenmodell) kann deterministischer oder stochastischer Natur sein. Beide Ansätze führen normalerweise auf identische Regler.



		Deterministische Störgrößen	
Impuls	$\delta(t)$	1	
Sprung	$\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$	
Rampe	t	$\frac{1}{s^2}$	
Sinus	$\sin \omega_1 t$	$\frac{1}{s^2 + \omega_1^2}$	

Stochastische Störgrößen



5.7 Stochastische und deterministische Modelle

Prädiktion korrelierter Zufallsprozesse

Da beim weißen Rauschen keinerlei Korrelation zwischen den Werten zweier unterschiedlicher Abtastschritte besteht, ist es unmöglich diesen Zufallsprozess vorherzusagen.

Die beste Prädiktion weißen Rauschens für den Zeitpunkt k bei Kenntnis einer Musterfunktion bis zum Zeitpunkt $k-1$ ist immer $\hat{y}(k) = 0$, da $y(k)$ mittelwertfrei ist.

Ist der Zufallsprozess hingegen korreliert, dann ist eine bessere Prädiktion möglich, und zwar um so besser, je stärkere Korrelationen vorliegen, weil die Zukunft dann stärker von der Vergangenheit abhängt.

Beispiel: Prädiktion eines AR(1)-Zufallsprozesses

Ein AR(1)-Zufallsprozess ist gegeben durch: $y(k) = a_1 y(k-1) + v(k)$. Der zu erwartende Ausgangswert ist deshalb:

$$\hat{y}(k) = E\{y(k)\} = E\{a_1 y(k-1)\} + E\{v(k)\} = a_1 y(k-1)$$

Es lässt sich zeigen, dass dies auch im Sinne des kleinsten quadratischen Prädiktionsfehlers der optimale Prädiktor ist.

Während die Prädiktion von AR-Prozessen nur auf vergangenen *Messwerten* basiert, werden für die Prädiktion von MA-/ARMA-Prozessen auch vergangene *Prädiktionswerte* benötigt.

5.7 Stochastische und deterministische Modelle

Beispiel: Prädiktion eines MA(2)-Zufallsprozesses

Ein MA(2)-Zufallsprozess ist gegeben durch: $y(k) = v(k) + b_1v(k - 1)$. Der zu erwartende Ausgangswert ist deshalb:

$$\hat{y}(k) = E\{y(k)\} = E\{v(k)\} + E\{b_1v(k - 1)\} = b_1E\{v(k - 1)\}$$

ACHTUNG: Über $v(k)$ ist noch nichts bekannt, und da es weiß ist, ist die beste Prädiktion gleich 0. Über $v(k-1)$ liegt aber durch die Messung von $y(k-1)$ indirekt Information vor, denn $v(k-1)$ hat ja im vorherigen Abtastschritt nach der MA(2)-Formel $y(k-1)$ mitbestimmt. Die beste Schätzung für das weiße Rauschen $v(k-1)$ ist der Prädiktionsfehler, d.h. die Differenz zwischen dem gemessenen und geschätzten Ausgangswert zum Zeitpunkt $k-1$:

$$E\{v(k - 1)\} = y(k - 1) - \hat{y}(k - 1) = e(k - 1)$$

Dabei folgen wir der Überlegung, dass im optimalen Fall der Fehler zwischen dem gemessenen Ausgangswert y und dem geschätzten Ausgangswert \hat{y} gerade der prinzipiell nicht vorhersagbare Teil ist. Anders ausgedrückt: Wenn der Prädiktionsfehler weiß ist, dann hat die Schätzung alle mögliche Information genutzt und nur noch der unpräzidierbare Teil ist übrig geblieben. Damit ergibt sich für den MA-Prozess ein *rekursiver* Prädiktor:

$$\hat{y}(k) = b_1(y(k - 1) - \hat{y}(k - 1))$$



Erzeugung von Zufallszahlen:

`rand;` *% Erzeugt gleichverteilte Zufallszahlen*

`randn;` *% Erzeugt normalverteilte Zufallszahlen*

Mittelwertberechnung:

`M = mean(A);` *% Berechnet den Mittelwert von A*

Varianz und Kovarianz von Zufallsvariablen:

`V = var(X);` *% Berechnet die Varianz von X*

`V = cov(X);` *% Berechnet die Kovarianz-Matrix von X*

`V = xcov(x,y);1` *% Kreuz- und Auto-Kovarianz zwischen x und y*



Korrelation von Zufallsvariablen:

```
RHO = corr(X,Y,...);2  % Korrelation zwischen X und Y. Verschiedene  
                        % Optionen zur Berechnung möglich
```

```
c = xcorr(x,y);1      % Berechnet die Kreuz-Korrelation eines  
                        % Zufallsprozesses. Auto-Korrelation als  
                        % Spezialfall (x = y)
```

¹ : *Signal Processing Toolbox*

² : *Statistics Toolbox*

6. Ausgewählte Methoden der Signalverarbeitung

Inhalt Kapitel 6

6. Ausgewählte Methoden der Signalverarbeitung

6.1 Hauptkomponentenanalyse

6.2 Clusteringverfahren

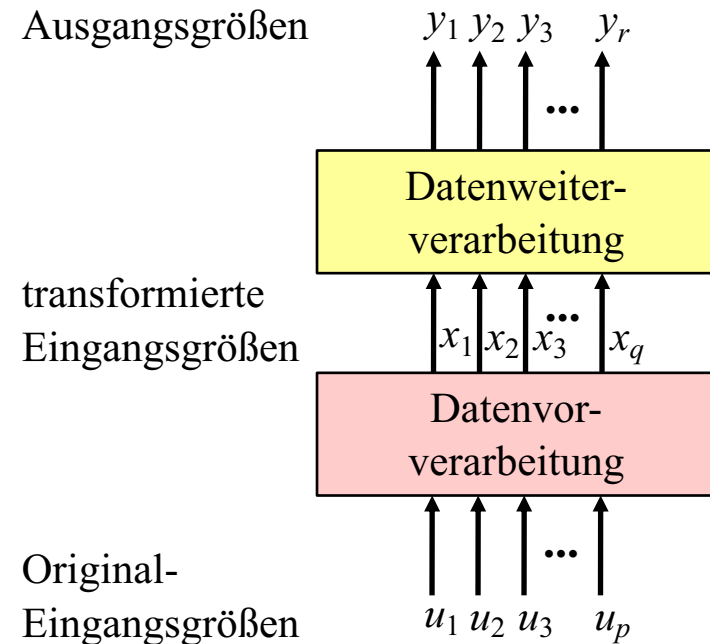
6.1 Hauptkomponentenanalyse

Datenvorverarbeitung

Komplexe Aufgaben der Signalverarbeitung werden häufig in zwei oder mehrere Teilschritte zerlegt, die jeder für sich einfacher zu handhaben sind. Typisch ist die Unterteilung in eine Stufe der Datenvorverarbeitung (*data preprocessing*) und eine Stufe der Datenweiterverarbeitung. Je nach Problemstellung kann die Datenvorverarbeitung verschiedenste Aufgaben übernehmen:

- Filterung, Glättung, Interpolation
- Transformation der Daten in ein neues Koordinatensystem
- Dimensionsreduktion, Datenkompression
- Transformation in den Frequenzbereich
- Merkmalsextraktion
- nichtlineare Transformation

Einige der gebräuchlichsten Methoden zur Datenvorverarbeitung werden wir im Folgenden kennen lernen.



6.1 Hauptkomponentenanalyse

Überwachtes versus unüberwachtes Lernen

Man unterscheidet zwischen Methoden des überwachten und unüberwachten Lernens:

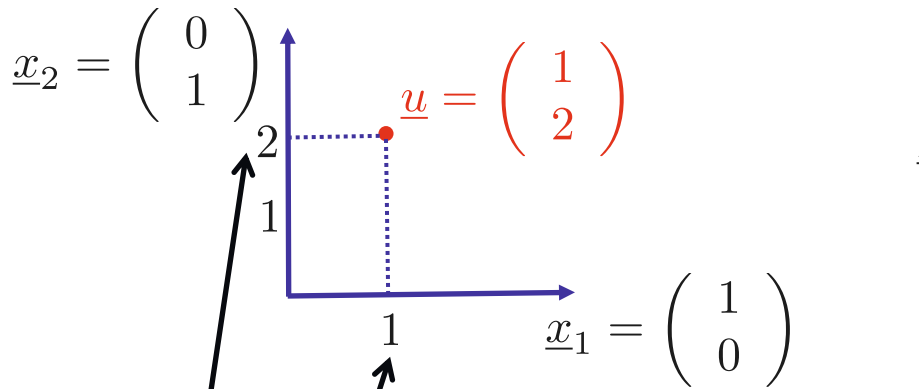
- *Überwachtes Lernen:* Das gewünschte Endergebnis y ist bekannt und wird mit dem Ergebnis der Methode \hat{y} verglichen. Es wird eine Gütefunktion anhängig von y und \hat{y} optimiert, z.B. der mittlere quadratische Fehler berechnet auf den vorliegenden Daten.
- *Unüberwachtes Lernen:* Das gewünschte Endergebnis y ist unbekannt oder wird ignoriert. Statt dessen wird ein Zwischenziel definiert, welches sich nur anhand der Eingangsdaten $\{u_i(k)\}$, $i = 1, 2, \dots, p$ und $k = 1, 2, \dots, N$, berechnen lässt. Oft spielt dabei die Datenverteilung im Eingangsraum eine wichtige Rolle.

Unüberwachtes Lernen ist meist einfacher zu bewerkstelligen, da ein Zwischenziel normalerweise leichter zu erreichen ist als das Endziel. Allerdings besteht die Gefahr, dass eine gute Erfüllung des Zwischenziels für das Endziel gar nicht hilfreich oder gar kontraproduktiv ist. Daher ist der Erfolg unüberwachten Lernens immer sehr kritisch zu hinterfragen.

Die hier vorgestellten und viele andere Methoden zur Datenvorverarbeitung sind unüberwacht (verwenden ausschließlich die Eingangsdaten) und relativ wenig rechenaufwendig.

6.1 Hauptkomponentenanalyse

Projektion von Vektoren

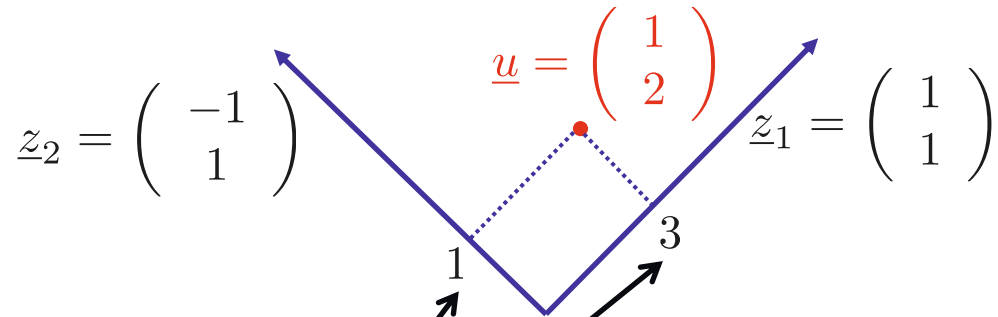


$$\underline{u}^T \underline{x}_1 = (1 \ 2)^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + 0 = 1$$

$$\underline{u}^T \underline{x}_2 = (1 \ 2)^T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + 2 = 2$$

$$|\underline{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Um den Betrag von \underline{u} konstant zu halten, müssen die Vektoren der Koordinatenachsen betragsmäßig auf eins normiert werden, d.h.:



$$\underline{u}^T \underline{z}_1 = (1 \ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 2 = 3$$

$$\underline{u}^T \underline{z}_2 = (1 \ 2) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 2 = 1$$

$$|\underline{u}_{\text{tansf}}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

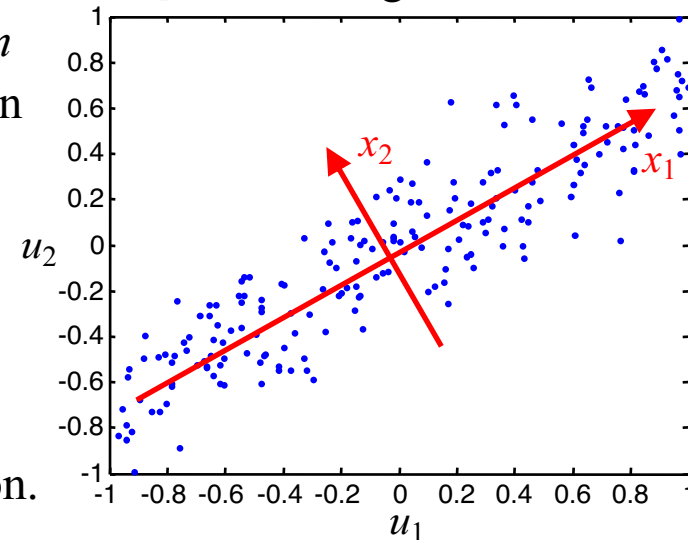
$$\underline{z}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \underline{z}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

6.1 Hauptkomponentenanalyse

Koordinatentransformation

Mittels der Hauptkomponentenanalyse (*principal component analysis, PCA*) werden Daten von einem kartesischen Koordinatensystem in ein anderes transformiert. Die 1. neue Achse soll in der Richtung der größten Varianz der Daten liegen, die 2. Achse senkrecht dazu wieder in der Richtung der größten Varianz der Daten, usw. Die Idee dahinter ist, dass die Daten sich entlang der Richtungen ihrer größten Varianz oft am besten beschreiben lassen und diese Achsen wichtiger sind als die Richtungen mit geringer Varianz.

Nebenstehendes Beispiel soll diese Idee weiter verdeutlichen. Die Datenverteilung zeigt eine starke Korrelation zwischen u_1 und u_2 . Diese lässt vermuten, dass u_1 und u_2 möglicherweise abhängig voneinander sind, z.B. der Vorschrift $u_2 = au_1 + n$ mit $a \neq 0.7$ und einem Rauschen n folgen. Die PCA legt nun die 1. Achse in Richtung der größten Varianz, also $x_1 = u_1 + au_2$, und die 2. Achse senkrecht dazu, also $x_2 = u_2 - au_1$. Wenn der vermutete Zusammenhang zwischen u_1 und u_2 wirklich zutrifft, dann gilt $x_2 = n$ und x_2 beschreibt nur Rauschen und könnte weggelassen werden (Dimensionsreduktion); es enthält keine Information.



6.1 Hauptkomponentenanalyse

ACHTUNG: Die Daten müssen mittelwertbefreit sein!

Herleitung der Hauptkomponentenanalyse (PCA)

Gehen wir von einem p -dimensionalen Raum aus. Dann besteht die Aufgabe der PCA darin, neue Achsen $\underline{x}_i = [x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{ip}]^T$ für $i = 1, 2, \dots, p$ zu finden, wobei die 1. Achse die größte Datenvarianz, die 2. Achse die zweitgrößte Datenvarianz, usw. aufweisen und alle Achsen senkrecht aufeinander stehen.

In der $N \times p$ -Datenmatrix \underline{U} werden alle Daten bzgl. der alten u -Koordinaten gespeichert:

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} \underline{u}^T(1) \\ \underline{u}^T(2) \\ \vdots \\ \underline{u}^T(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(1) & u_2(1) & \dots & u_p(1) \\ u_1(2) & u_2(2) & \dots & u_p(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1(N) & u_2(N) & \dots & u_p(N) \end{pmatrix}$$

← 2. Datenpunkt

↑ 2. alte Achse ↑ p Dimensionen

↙ N Datenpunkte

Die Skalarprodukte $\underline{u}^T(k) \underline{x}$ sind die Projektionen der $k = 1, 2, \dots, N$ Datenpunkte auf eine beliebige Achse $\underline{x} = \{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_p\}$. Sind die Daten mittelwertfrei (wenn nicht, kann dies stets durch Subtraktion des Mittelwerts erreicht werden), dann entspricht der folgende Ausdruck dem quadratischen Abstand vom Mittelwert (der gleich 0 ist): $(\underline{u}^T(k) \underline{x})^2$.

6.1 Hauptkomponentenanalyse

Berechnen wir diese Varianz für jeden Datenpunkt und summieren auf, so erhalten wir die Varianz der gesamten Daten entlang der neuen Achse \underline{x} :

$$\begin{aligned}(\underline{U} \underline{x})^T (\underline{U} \underline{x}) &= (\underline{u}^T(1)\underline{x} \quad \underline{u}^T(2)\underline{x} \quad \cdots \quad \underline{u}^T(N)\underline{x})^T \begin{pmatrix} \underline{u}^T(1)\underline{x} \\ \underline{u}^T(2)\underline{x} \\ \vdots \\ \underline{u}^T(N)\underline{x} \end{pmatrix} \\ &= (\underline{u}^T(1)\underline{x})^2 + (\underline{u}^T(2)\underline{x})^2 + \dots + (\underline{u}^T(N)\underline{x})^2\end{aligned}$$

Diesen Ausdruck wollen wir maximieren. Allerdings müssen wir verhindern, dass die Varianz einfach dadurch groß wird, dass die Skalierung der neuen Achsen sehr klein gewählt wird (und deshalb sehr große Zahlen entstehen). Dazu normieren wir die Achsenskalierung, d.h. wir setzen die quadratische Norm (Länge) der Achsen auf 1:

$$\underline{x}^T \underline{x} = 1$$

Mit dieser Nebenbedingung und λ als Lagrange-Multiplikator gelangen wir zu folgendem Maximierungsproblem:

$$(\underline{U} \underline{x})^T (\underline{U} \underline{x}) + \lambda (1 - \underline{x}^T \underline{x}) \longrightarrow \max_{\underline{x}}$$

6.1 Hauptkomponentenanalyse

Die Lösung dieses Maximierungsproblems führt auf folgendes Eigenwertproblem:

$$(\underline{U}^T \underline{U}) \underline{x} = \lambda \underline{x}$$

Der Eigenvektor mit dem größten Eigenwert λ_1 ist die 1. Achse \underline{x}_1 , der Eigenvektor mit dem zweitgrößten Eigenwert λ_2 ist die 2. Achse \underline{x}_2 , usw. bis zum kleinsten Eigenwert λ_p mit der p . Achse \underline{x}_p . Die Eigenwerte von $\underline{U}^T \underline{U}$ sind die quadrierten Singulärwerte von \underline{U} und können daher mit einer Singulärwertzerlegung (*singular value decomposition, SVD*) sehr genau berechnet werden, ohne die Matrix \underline{U} explizit zu quadrieren. Diese Eigenwerte sind alle positiv und die zugehörigen Eigenvektoren orthogonal bzw. sogar orthonormal zueinander.

Zum Schmunzeln...

Gene Golub ist Computerwissenschaftler an der Stanford University. Er hat mehr als jeder andere dazu beigetragen, die Singulärwertzerlegung zu einem der mächtigsten und verbreitetsten Werkzeuge der modernen Linearen Algebra zu machen.

Gene H. Golub, 1932-2007
(www.wikipedia.org)



Gene Golubs Nummernschild.

Fotografie von Professor Kroonenberg von der Universität Leiden.



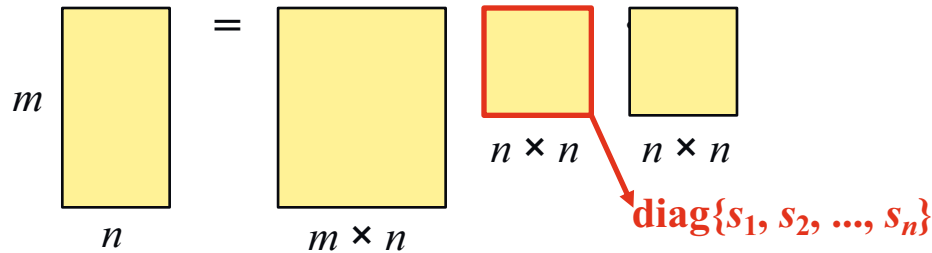
6.1 Hauptkomponentenanalyse

Singulärwertzerlegung (*singular value decomposition, SVD*)

Die SVD berechnet folgende Zerlegung der $m \times n$ -Matrix \underline{U} :

$$\underline{U} = \underline{W} \underline{S} \underline{V}^T$$

Hat \underline{U} mehr Zeilen als Spalten ($m > n$) ergeben sich folgende Dimensionen dieser Matrizen:



Die eingerahmte quadratische Matrix in \underline{S} enthält auf ihrer Diagonalen die Singulärwerte von \underline{U} . Diese sind identisch mit den Wurzeln der Eigenwerte von $\underline{U}^T \underline{U}$. Diese sind der Größe nach von groß nach klein geordnet.

Damit lässt sich die Matrix \underline{U} in eine Summe aus n äußeren Produkten zerlegen (jedes hat Rang 1), deren Einfluss durch die kleiner werdenden Singulärwerte immer geringer wird:

$$\underline{U} = s_1 \underline{w}_1 \underline{v}_1^T + s_2 \underline{w}_2 \underline{v}_2^T + \dots + s_n \underline{w}_n \underline{v}_n^T$$

mit

$$\underline{W} = (\underline{w}_1 \quad \underline{w}_2 \quad \dots \quad \underline{w}_n)$$

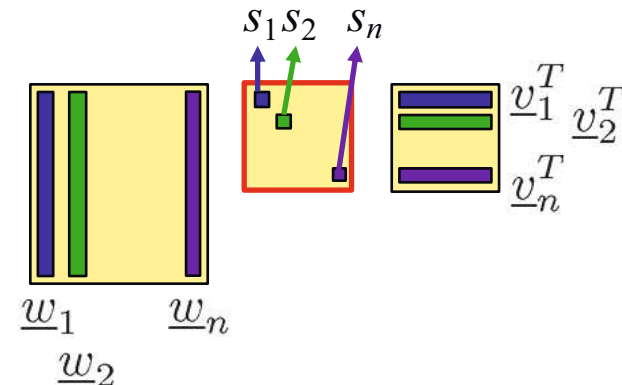
$$\underline{V} = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \quad \underline{v}_n)$$

Maximaler Rang = n

Ist der Rang von \underline{U}

gleich $r < n$, dann

sind $s_{r+1} = \dots = s_n = 0$.



6.1 Hauptkomponentenanalyse

Matrix \underline{U} hat nur Rang 2, denn $s_3 = 0$ und trägt damit nichts zum Rang bei.

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1013 & 0.7679 & -0.0183 \\ -0.2486 & 0.4881 & 0.5367 \\ -0.3958 & 0.2082 & -0.8133 \\ -0.5430 & -0.0717 & 0.0896 \\ -0.6902 & -0.3515 & 0.2053 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 35.1826 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4769 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.5193 & -0.5755 & -0.6318 \\ -0.7508 & -0.0459 & 0.6589 \\ -0.4082 & 0.8165 & -0.4082 \end{bmatrix}$$
$$= 35.1826 \begin{bmatrix} -0.1013 \\ -0.2486 \\ -0.3958 \\ -0.5430 \\ -0.6902 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.5193 & -0.5755 & -0.6318 \end{bmatrix} + 1.4769 \begin{bmatrix} 0.7679 \\ 0.4881 \\ 0.2082 \\ -0.0717 \\ -0.3515 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.7508 & -0.0459 & 0.6589 \end{bmatrix} + 0$$

Dimensionsreduktion mittels PCA

Die PCA transformiert zunächst lediglich Daten aus einem p -dimensionalen Raum in einen anderen, ebenfalls p -dimensionalen Raum. Das allein kann schon ein Vorteil sein, weil durch die neue Datenverteilung möglicherweise neue Einsichten gewonnen werden können.

Einen Schritt weiter geht die Dimensionsreduktion mittels PCA. Dabei werden alle Achsen, deren Datenvarianz unterhalb einer vorgegebenen Varianzschwelle (Tuningfaktor!) liegen, weggelassen. Man nimmt an, dass sich darin nur noch Rauschen verbirgt.

6.1 Hauptkomponentenanalyse

Transformation

In den Spalten der Matrix \underline{V} stehen die Eigenvektoren von $\underline{U}^T \underline{U}$. Man nennt diese auch die *rechten Singulärvektoren* von \underline{U} . Entsprechend stehen die *linken Singulärvektoren* von \underline{U} in den Spalten der Matrix \underline{W} und sind die Eigenvektoren von $\underline{U} \underline{U}^T$. Die Daten in der Matrix \underline{U} können dann linear in den neuen Raum transformiert werden:

$$\underline{X} = \underline{U} \underline{V}$$

Die Rücktransformation muss von \underline{X} auf \underline{U} zurückgerechnet werden:

$$\underline{U} = \underline{X} \underline{V}^{-1} = \underline{X} \underline{V}^T$$

Die letzte Gleichheit gilt, weil \underline{V} unitär ist, d.h. $\underline{V}^T \underline{V} = \underline{I}$ und $\underline{V} \underline{V}^T = \underline{I}$ und damit $\underline{V}^T = \underline{V}^{-1}$ ist. Die Einheitsvektoren in den Eigenvektorrichtungen werden also auf die neue Einheitsvektoren transformiert, weil dann $\underline{U} = \underline{V}$ gilt.

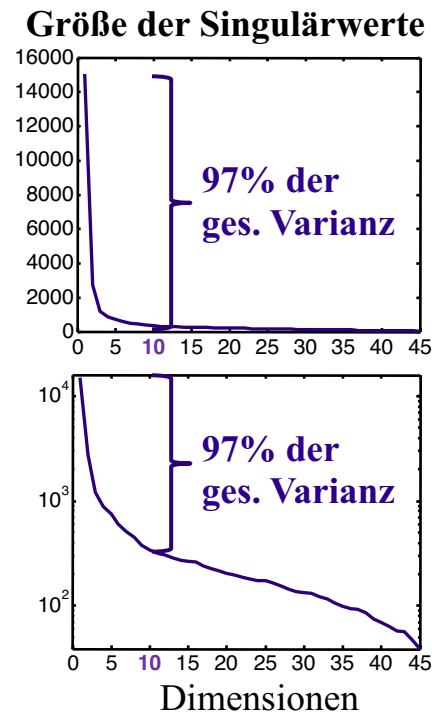
Im Falle einer Dimensionsreduktion werden nur die wichtigsten Hauptachsen (und damit Eigenvektoren) ausgewählt. Diese gehören zu den größten Eigenwerten von $\underline{U}^T \underline{U}$ bzw. sind äquivalent zu den größten Singulärwerten von \underline{U} . Da diese bei einer SVD der Größe nach geordnet sind, entspricht das den ersten Singulärwerten.

$$\underline{X}_{\text{red}} = \underline{U} \underline{V}_{\text{red}}$$

6.1 Hauptkomponentenanalyse

Beispiel: Kompression eines Graustufenbildes

- Bild mit 128×45 Pixel wird als 128×45 -dimensionale Matrix mit Grautonkodierung von „0“ (schwarz) bis „255“ (weiß) dargestellt.
- Schon die wichtigsten 5-10 Achsen aus der PCA beschreiben das Bild sehr gut. Die Singulärwerte fallen sehr schnell auf 0 ab, d.h. die weiteren Achsen beschreiben nur noch geringe Datenvarianzen.
- Rechenaufwand hoch, daher in Praxis oft vereinfachte Verfahren.



Original

Dimensionsreduktion auf ? Achsen:

45

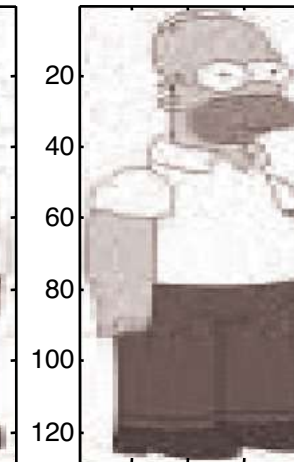
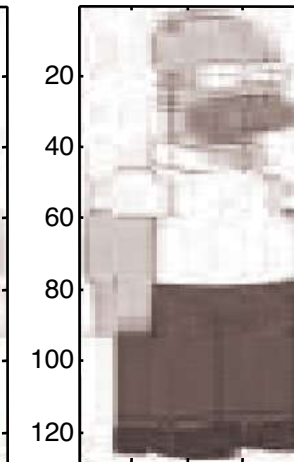
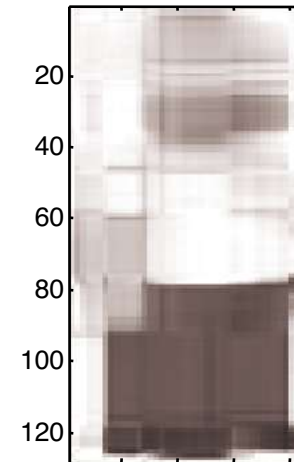
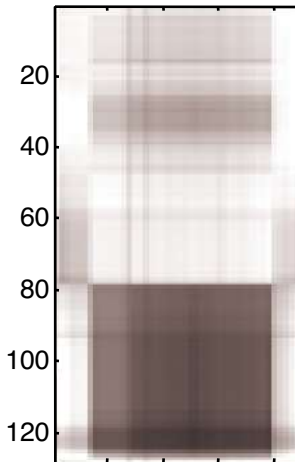
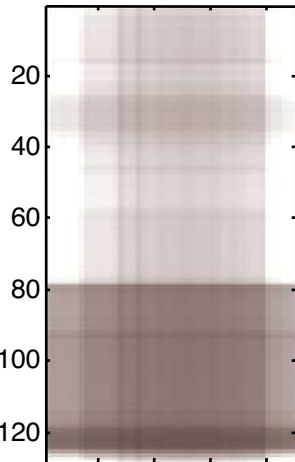
1

2

5

10

20

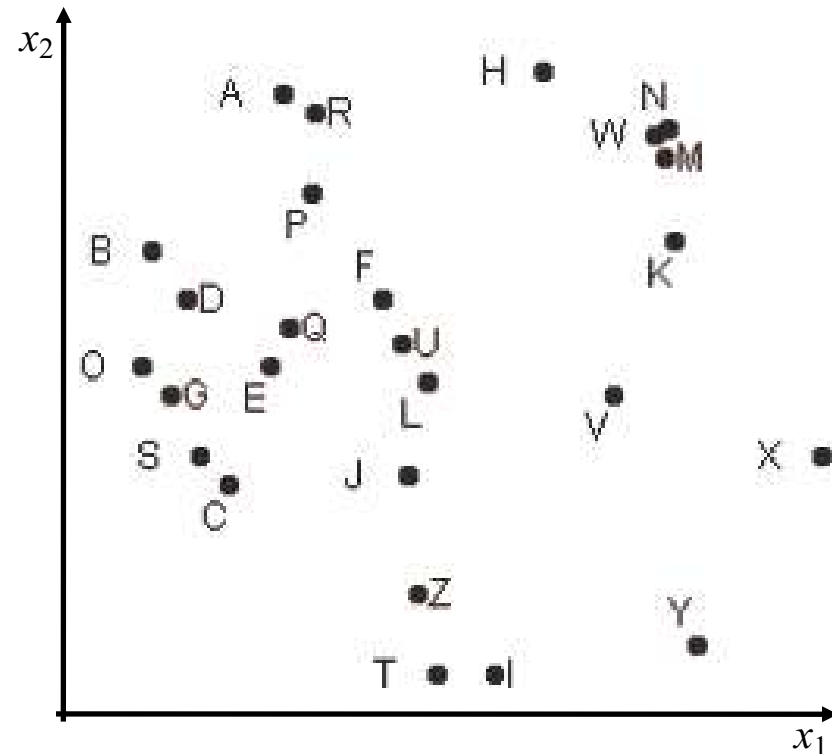
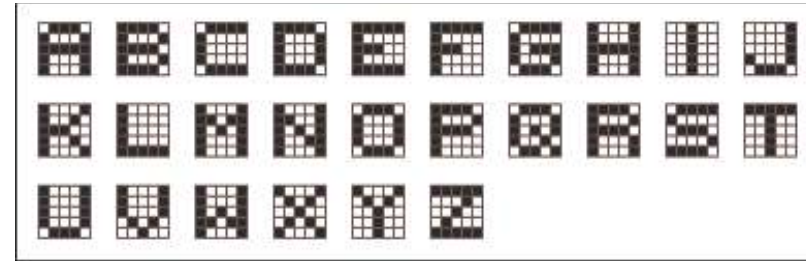


6.1 Hauptkomponentenanalyse

Beispiel: Buchstabenerkennung

Quelle: <http://www.cs.mcgill.ca/~sqr/dimr/dimreduction.html>

- Buchstaben A-Z in 5×5 Pixeln mit „0“ = „schwarz“ und „1“ = „weiß“ dargestellt.
- Jedes Pixel wird eine Achse u_1, u_2, \dots, u_{25} .
- Entlang jeder Achse wird der zum Pixel gehörende Helligkeitswert („0“ oder „1“) eingetragen, d.h. bei einem Bild ohne Graustufen gibt es nur Punkte bei 0 und bei 1.
- Den 25-dimensionalen Eingangsraum kann man sich als Hyper-Einheitswürfel vorstellen. Die Datenpunkte liegen nur auf den Ecken.
- PCA mit Dimensionsreduktion auf 2 Achsen x_1 und x_2 erklärt 44% der Datenvarianz.
- „A“ / „R“ und „W“ / „N“ / „M“ liegen dicht beisammen, lassen sich anhand der 2 Merkmale also schlecht unterscheiden. Für „X“ / „O“ und „T“ / „H“ und „A“ / „Y“ gilt das Gegenteil!



6.1 Hauptkomponentenanalyse

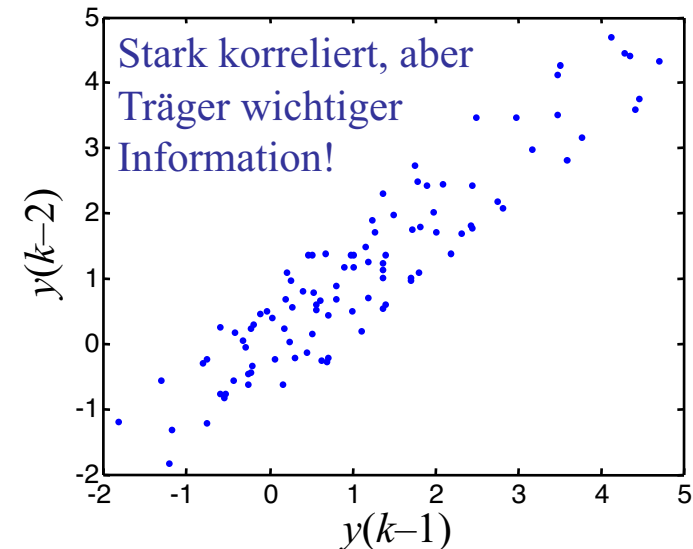
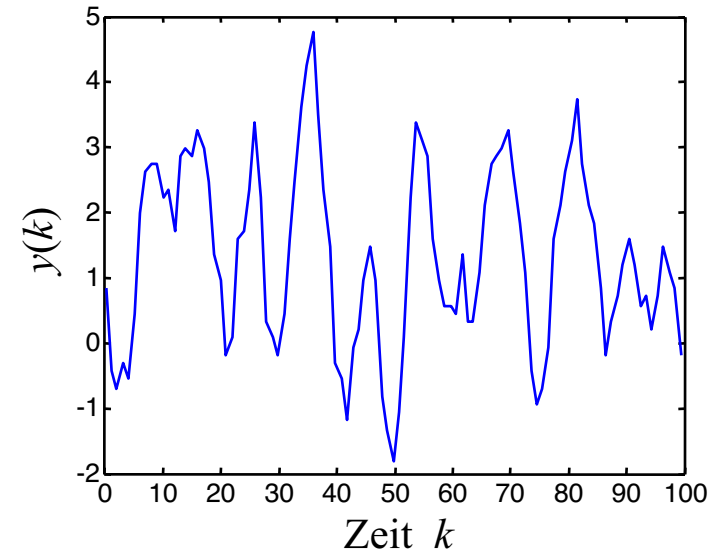
Schwierigkeiten bei Dimensionsreduktion

Die Annahme, dass Achsen mit geringer Datenvarianz redundant seien, kann sich aber als falsch erweisen. Eine geringe Varianz deutet zwar auf eine lineare Abhängigkeit hin, dies lässt sich aber durch Betrachtungen der Datenverteilung im Eingangsraum niemals sicher sagen. Dafür ist es notwendig, den Einfluss der Eingänge auf die relevanten Ausgangsgrößen zu kennen.

Z.B. ergibt sich bei dynamischen Prozessen notwendigerweise eine starke Korrelation zwischen zwei aufeinanderfolgenden Abtastwerten $y(k-1)$ und $y(k-2)$. Dennoch sind diese *nicht* redundant! Ein AR(2)-Prozess z.B. folgt der Gleichung:

$$y(k) = -a_1y(k-1) - a_2y(k-2) + v(k)$$

Obwohl $y(k-1)$ und $y(k-2)$ so stark korreliert sind (je stärker umso kleiner die Abtastzeit gewählt wird), sind beide Größen sehr wichtig und keinesfalls redundant.

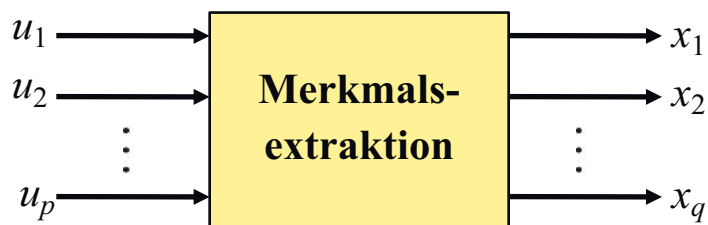


6.1 Hauptkomponentenanalyse

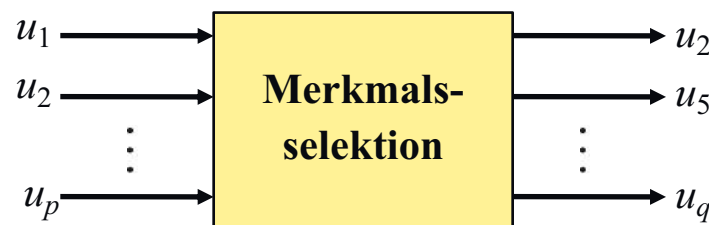
Merkmalsselektion versus -extraktion

Eine Dimensionsreduktion mittels PCA führt eine sog. *Merkmalsextraktion* durch. Dies bedeutet, dass aus einer ursprünglich großen Anzahl von Merkmalen (Eingängen) p eine kleinere Zahl q von Merkmalen erzeugt wird, welche aber i.A. von *allen* p ursprünglichen Merkmalen abhängen. Damit wird zwar die Anzahl der Eingangsgrößen für die Datenweiterverarbeitung und damit die Dimensionalität des Problems reduziert, aber es ist immer noch nötig alle p ursprünglichen Merkmale zu messen (oder zu erzeugen).

Eine noch wesentlich anspruchsvollere Aufgabe ist die sog. *Merkmalsselektion*. Dabei werden aus den ursprünglichen p Merkmalen eine kleiner Zahl von q Merkmalen ausgewählt. Dann ist auch nur noch die Messung dieser q Merkmale notwendig, die restlichen, nicht selektierten $p-q$ Merkmale werden gar nicht benötigt. Das ist ein sehr großer Vorteil. Außerdem ist die Interpretation der selektieren Merkmale trivial.



Jeder Ausgang x_i kann von *allen* u_j abhängen!



Jeder Ausgang ist mit *einem* Eingang identisch!

6.1 Hauptkomponentenanalyse

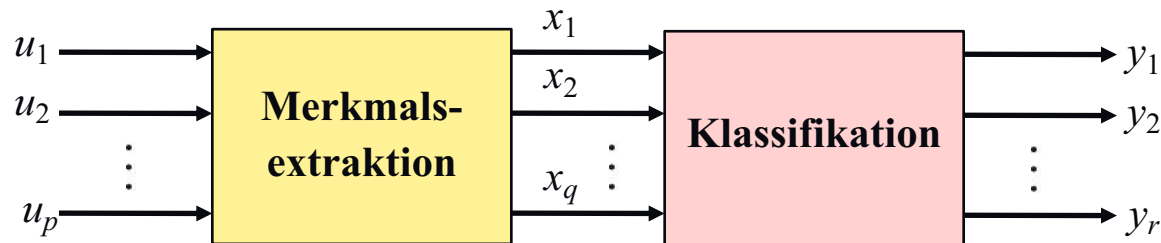
Anwendung: Klassifikation

Eine der häufigsten Anwendungen der PCA zur Datenvorverarbeitung und insbesondere auch zur Dimensionsreduktion (Merkmalsextraktion) sind Klassifikationsprobleme. Dabei geht es um die richtige Zuordnung zu einer von r Klassen anhand von gemessenen oder aus Messdaten berechneten Eingangsgrößen (Merkmale) u_1, u_2, \dots, u_p . Da die Anzahl der (möglichen) Merkmale oft sehr groß sein kann, wird meist zunächst z.B. mittels PCA eine Merkmalsextraktion durchgeführt, welche die Anzahl der Merkmale von p auf q reduziert. In einem zweiten Schritt muss dann nur noch eine q -dimensionales Klassifikationsproblem gelöst werden.

In dem *A-Z-Buchstabenbeispiel* war z.B. $r = 26$, $p = 5 \times 5 = 25$ und $q = 2$, wobei für eine zuverlässige Klassifikation q sicherlich gleich 3 oder 4 hätte gewählt werden müssen.

Bei einem *Münzautomaten* muss zwischen $r = 9$ Klassen (1c, 2c, 5c, 10c, 20c, 50c, 1€, 2€, „keine EUR-Münze“) unterschieden werden. Mögliche Eingangsgrößen sind:

- Gewicht, Farbe,
- Durchmesser, Dicke,
- Reflexionsgrad, ...



CLEVE'S CORNER

Professor SVD

Gene Golub ist Computerwissenschaftler an der Stanford University. Er hat mehr als jeder andere dazu beigetragen, die Singulärwertzerlegung zu einem der mächtigsten und verbreitetsten Werkzeuge der modernen linearen Algebra zu machen.



Gene Golubs Nummernschild. Fotografie von Professor P.M. Kroonenberg von der Universität Leiden.

Die Singulärwertzerlegung (SVD) ist eine relative neue Entwicklung. Laut Pete Stewart, dem Autor des 1993 erschienenen Artikels "On the Early History of the Singular Value Decomposition", wurde der Begriff *wiebers singulieres* zum ersten Mal um 1910 von Emile Picard im Zusammenhang mit Integralgleichungen verwendet. Picard verwendete hier das Adjektiv „singulär“

in der Bedeutung „außergewöhnlich“ oder „außerordentlich“. Ein Bezug zu singulären Matrizen bestand zu diesem Zeitpunkt noch nicht. Als ich in den frühen sechziger Jahren Doktorand war, wurde die SVD immer noch als ein ziemlich obskures theoretisches Konzept angesehen. In einem Buch, das George Forsythe und ich 1964 gemeinsam schrieben, wurde die SVD als eine relativ schlechte

Die Singulärwertzerlegung (SVD) ist eine Faktorisierung von Matrizen mit einer Vielzahl interessanter Anwendungen.

Methode beschrieben, die Norm und die Konditionszahl einer Matrix zu kennzeichnen. Einen praktischen Weg, SVDs zu berechnen, gab es noch nicht. Gene Golub und W. Kahan veröffentlichten 1965 den ersten Algorithmus, der das änderte. Die heute verwendete Form der SVD basiert auf einer 1970 von Gene Golub und Christian Reinsch veröffentlichten Vari-

VON CLEVE MOIER

ante dieses Algorithmus. Als 1980 die erste MATLAB*-Version erschien, war die SVD eines ihrer Highlights. Lassen Sie uns ein Beispiel in Form einer 2x2-Matrix erzeu- gen, indem wir den Vorgang umkehren und eine Matrix aus ihrer SVD berechnen. Wir setzen $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1/2$, $\theta = \pi/6$ und $\phi = \pi/4$. Es seien

$$U = \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} -\cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Die Matrizen U und V beschreiben Drehun- gen um die Winkel θ und ϕ , gefolgt von Spiegelungen in der ersten Dimension. Die Matrix Σ ist eine *diagonale* Skalentransfor- mation. Wenn man nun die Matrix A nach

$$A = U \Sigma V^T$$

berechnet, erhält man das Ergebnis

$$A = \begin{pmatrix} 1.4015 & -1.0480 \\ .4009 & 1.0133 \end{pmatrix}$$

Es besagt, dass die Matrix A erzeugt wird durch eine 45°-Drehung und eine Spiege- lung, gefolgt von unabhängigen Skaler- ungen der beiden Koordinatenrichtungen mit dem Faktor 2 beziehungsweise $1/2$ und schließlich durch eine 30°-Drehung, gefolgt von einer weiteren Spiegelung.

Die MATLAB-Funktion `eigs` erzeugt ein Diagramm, das die Singulärwertzerle- gung einer 2x2-Matrix demonstriert.

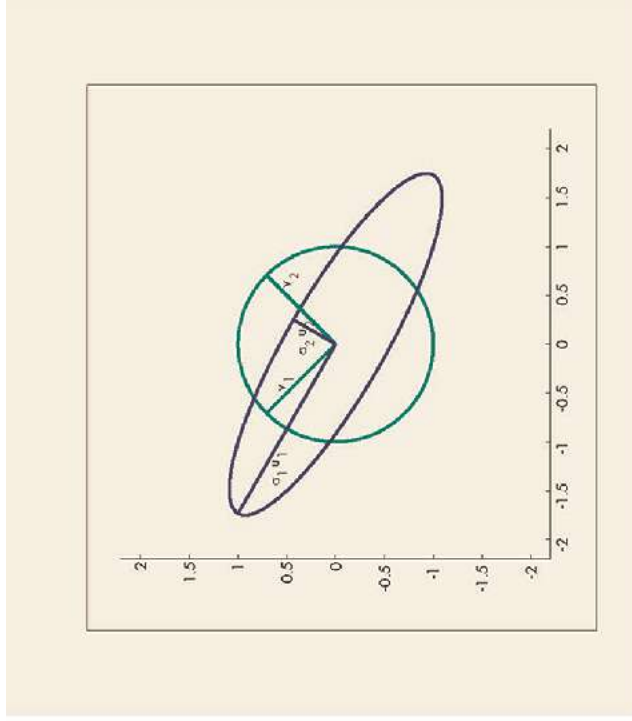


Abb. 1: Die von eigshow erzeugte SVD-Darstellung.

Wir geben dazu folgende Anweisungen ein:

```
A = [1.4015 -1.0480;
      -0.4009  1.0133]
eigshow(A)
```

Wenn man nun den Knopf „SVD“ klickt und die Maus etwas bewegt, erscheint Abbildung 1, wenn auch mit etwas anderer Beschriftung.

Der grüne Kreis ist der Einheitskreis in der Ebene. Die blaue Ellipse stellt das Bild des Kreises nach Transformation durch die Matrix A dar. Die grünen Vektoren v_1 und v_2 die für die Spalten von V stehen, und die blauen Vektoren u_1 und u_2 , die für die Spalten von U stehen, sind zwei verschiedene orthogonale Basen für den zweidimensionalen Raum.

Die Spalten von V sind um 45° gegen die Achsen der Abbildung gedreht, während die Spalten von U , die die große und kleine Halbachse der Ellipse bilden, um 30° gedreht sind. Die Matrix A transformiert v_1 in $\sigma_1 u_1$ und v_2 in $\sigma_2 u_2$.

Lassen Sie uns nun zu Matrizen der Ordnung m mal n übergehen. Eine der wichtigsten Eigenschaften der SVD ist ihre Anwendbarkeit auf orthogonale Matrizen. Eine reelle Matrix U ist orthogonal oder hat orthogonale Spalten, wenn gilt:

$$U^T U = I$$

tion wird damit unabhängig von allen Skalierungen oder Dehnungen in den Koordinatenrichtungen.

Der Rang einer Matrix ist die Zahl linear unabhängiger Zeilen, die wiederum identisch mit der Zahl linear unabhängiger Spalten ist. Der Rang einer Diagonalmatrix ist also offensichtlich gleich der Zahl der Diagonalelemente, die ungleich Null sind. Orthogonale Transformationen haben auf die Zahl linear unabhängiger Zeilen oder Spalten keinen Einfluss. Der Rang jeder Matrix ist damit immer gleich der Zahl aller Singulärwerte, die ungleich Null sind. Wir geben nun in MATLAB die Anweisung

```
type rank
```

ein, um zu untersuchen, wie man geschickte Toleranzen wählen kann und die nicht vernachlässigbar kleinen Singulärwerte findet. In traditionellen Kursen in Linearer Algebra wird meist noch die Zeilenreduzierte Stufenform (Reduced Row Echelon Form, RREF) besonders hervorgehoben. Wenn man aber mit ungenauen Daten und mit inkonformer Arithmetik arbeiten muss, ist diese Methode wenig zuverlässig. Die SVD ist eine Art moderner Ersatz für die RREF.

Eine quadratische Matrix ist *nichtsingulär*, wenn, und nur wenn, alle Diagonalelemente darin ungleich Null sind. Der numerisch zuverlässigste Weg zur Bestimmung, ob Matrizen singular sind, besteht darin, ihre Singulärwerte zu testen. Das geht erheblich einfacher, als ihre Determinanten zu berechnen, die fürchterliche Skalierungseigenschaften haben.

Mit Hilfe der Singulärwertzerlegung wird das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

zu

$$U\Sigma V^T x = b$$

Die Lösung dafür ist

$$x = V\Sigma^{-1}U^T b$$

Die Spalten von U stehen also paarweise senkrecht aufeinander und haben Einheitslänge. Geometrisch betrachtet sind Transformationen mit orthogonalen Matrizen eine Verallgemeinerung von Drehungen und Spiegelungen; alle Längen und Winkel bleiben dabei erhalten. Rechnerisch sind orthogonale Matrizen attraktiv, weil sie Rundungsfehler und andere Fehler nicht vergrößern. Jede reelle Matrix A, sogar eine nicht-quadratische Matrix, kann als Produkt dreier Matrizen geschrieben werden.

$$A = U\Sigma V^T$$

Die Matrix U ist orthogonal und hat genauso viele Spalten wie A. Die Matrix Σ hat die gleiche Größe wie A, besitzt aber nur auf ihrer Diagonale Elemente, die ungleich Null sind. Die Diagonalelemente von Σ sind die Singulärwerte und die Spalten von U und V sind die rechten und linken Singulärvektoren.

In der abstrakten Sprache der Linearen Algebra stellt eine Matrix eine lineare Transformation eines Vektorraums, den Definitionsbereich, in einen anderen Vektorraum, den Wertebereich, dar. Die SVD besagt also, dass es für jede lineare Transformation möglich ist, eine orthogonale Basis für den Definitionsbereich und eine (möglicherweise andere) orthogonale Basis für den Wertebereich zu wählen. Die Transforma-



12



50



120

Abb. 2: Näherungen des Ranges 12, 50 und 120 des Fotos von Gene Golub mit dem Rang 598.

Man multipliziert mit einer orthogonalen Matrix, teilt durch die Singulärwerte und multipliziert dann mit einer anderen orthogonalen Matrix. Der Rechenaufwand ist zwar höher als beim Gauß-Algorithmus, dafür sind aber die numerischen Eigenschaften dieses Verfahrens exzellent. Man kann abschätzen, ob die Singulärwerte vernachlässigbar klein sind und für den Fall, dass das zutrifft, das entsprechende singuläre System analysieren.

E_k sei das Vektorprodukt des k -ten linken und rechten Singulärvektors, also

$$E_k = u_k v_k^T$$

Dann kann A als eine Summe aus Matrizen vom Rang 1 ausgedrückt werden

$$A = \sum_{k=1}^N \sigma_k E_k$$

Wenn man nun die Singulärwerte in aufsteigender Reihenfolge ordnet, $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_r$, und die Summe nach r Termen abschneidet, ist das Ergebnis eine *Näherung* der Ausgangsmatrix vom Rang r . Der Fehler dieser Näherung hängt von der Größenordnung der vernachlässigten Singulärwerte ab. Wenn man auf diese Weise mit einer Datenmatrix verfährt, die durch Subtraktion des Mittelwertes jeder Spalte von der gesamten Spalte *zentriert* wurde, nennt man diesen Vorgang *Hauptkomponentenanalyse*

(Principal Component Analysis, PCA). Die rechten Singulärvektoren, v_j , sind die *Komponenten*, die skalierten linken Singulärvektoren, $\sigma_j u_j$, sind die so genannten *Scores*. PCAs werden meistens mit Hilfe der Eigenwerte und Eigenvektoren der Kovarianzmatrix AA^T beschrieben. Manchmal hat der SVD-Ansatz aber bessere numerische Eigenschaften.

SVDs und Matrizen-Approximationen werden häufig am Beispiel der Kompression eines Bildes demonstriert. Für unser Beispiel verwenden wir Gene Golubs Foto von seiner Webseite (Abb. 2). Das Bild hat 897 mal 598 Pixel. Wir schreiben die Werte für die Rot-, Grün- und Blauanteile einzeln untereinander, wodurch wir eine 2691-mal-598-Matrix erhalten. Wir führen dann eine einzige SVD durch. Nachdem wir so eine Näherung niedrigen Ranges durchgeführt haben, setzen wir die neuen RGB-Werte in das Bild ein. Wenn wir mit einem Rang von 12 arbeiten, stimmen bereits die Farben und man kann Gene erkennen. Das geht am besten, wenn man die Augen ein wenig zusammenkniff und das Gehirn das Bild rekonstruieren lässt. Bei einem Rang von 50 kann man bereits die Formeln auf der Tafel hinter Gene lesen. Wenn wir einen Rang von 120 wählen, gibt es kaum noch einen Unterschied zum maximalen Rang von 598. (Für eine echte Bildkompression eignet sich diese Methode allerdings weniger. Um ehrlich zu sein, meine Freunde aus

der Bildverarbeitung bezeichnen dies als „Bildverschlechterung“.)

Das Thema Eigenwerte wurde bis hierher praktisch noch gar nicht angeschnitten. Ich wollte nämlich zeigen, dass es möglich ist, über Singulärwerte zu reden, ohne dabei Eigenwerte zu erwähnen – obwohl beide natürlich eng mit einander verwandt sind. Wenn A quadratisch, symmetrisch und positiv definit ist, sind ihre Singulärwerte sogar mit den Eigenwerten identisch und die linken und rechten Singulärvektoren sind mit einander und mit den Eigenvektoren der Matrix identisch. Allgemeiner ausgedrückt sind die Singulärwerte von A die Quadratwurzeln der Eigenwerte von $A^T A$ oder $A A^T$. Singulärwerte sind dann wichtig, wenn man eine Matrix als Transformation eines Raums in einen anderen Raum mit möglicherweise anderen Dimensionen betrachtet. Eigenwerte dagegen sind wichtig, wenn man eine Matrix als Transformation eines Raums in sich selbst ansieht, beispielsweise bei gewöhnlichen linearen Gleichungen.

Google findet über 3.000.000 Webseiten, die den Begriff „Singular Value Decomposition“ enthalten und fast 200.000 Seiten mit „SVD MATLAB“. Einige dieser Seiten kannte ich schon, bevor ich diese Kolonne zu schreiben begann. Ein paar andere interessante Seiten habe ich erst beim Surfen entdeckt.

Professor SVD hat all das (und vieles mehr) möglich gemacht. Vielen Dank, Gene. ◀



Einige Suchergebnisse für den Begriff "Singular Value Decomposition"

- Die Wikipedia-Seiten zur SVD und PCA sind sehr gut und enthalten eine Reihe nützlicher Links, wenn auch nicht zueinander.

en.wikipedia.org/wiki/Singular_value_decomposition
en.wikipedia.org/wiki/Principal_component_analysis

- Rasmus Bro, Professor der Königlichen Tierärztlichen und Landwirtschaftlichen Universität in Dänemark, und Barry Wise, Leiter der Eigenvektor-Forschung in Wenatchee, Washington, beschäftigen sich beide mit der Chemometrie mit Hilfe von SVDs und PCAs. Ein Beispiel zeigt die Analyse des Absorptionsspektrums von Wasser zur Identifizierung flussaufwärts gelegener Verschmutzungsquellen.

www.models.kvl.dk/users/rasmus
www.eigenvektor.com

- Tammy Kolda und Brett Bader von den Sandia National Labs in Livermore, Kalifornien, haben die Tensor Toolbox für MATLAB entwickelt, mit der die PCA auf mehrdimensionale Datensätze verallgemeinert werden kann.

cs.mri.sandia.gov/~tgbkolda/TensorToolbox

- 2003 hat Lawrence Sirovich von der Mount Sinai School of Medicine in den Proceedings of the U.S. National Academy of Sciences den Artikel "A pattern Analysis of the second Rehnquist U.S. Supreme Court" veröffentlicht. Sein Artikel war Ausgangspunkt für Beiträge in der New York Times und der Washington Post, weil er ein unpolitisiertes, phänomenologisches Modell von Gerichtsentscheidungen aufstellt. Zwischen 1994 und 2002 hörte das Gericht 468 Fälle. Da es neun Richter gibt, von denen jeder in jedem Fall eine Mehrheits- oder Minderheitsposition einnimmt, bilden die Daten eine 468-mal-9-Matrix von +1s und -1s. Wären alle Entscheidungen per Münzwurf gefallen, hätte die Matrix ziemlich sicher den Rang 9 gehabt. Sirovich fand aber, dass der dritte Singulärwert um eine Größenordnung kleiner ist als der erste. Die Matrix hat also in guter Näherung den Rang 2. Anders ausgedrückt befinden sich die meisten Entscheidungen des Gerichts näherungsweise in einem zweidimensionalen Unterraum sämtlicher möglichen Urteile.

www.pnas.org/cgi/rapidprint/100/13/7432

- Bei der semantischgestützten Ähnlichkeitssuche sucht man nach Dokumenten, indem man die SVD auf Matrizen anwendet, die Wahrscheinlichkeiten des Auftretens von Begriffen in einem Artikel enthalten. Sollte beispielsweise eine Suche nach „Singulärwert“ auch nach „Eigenwert“ suchen? Michael Berry, Zlato Drmac und Liz Jessup haben dazu 1999 den Artikel "Matrices, Vector Spaces, and Information Retrieval" in der SIAM Review veröffentlicht.

epubs.siam.org/SIREV/volume-41/art_34703.html

- Der erste Google-Treffer zu "protein svd" ist "Protein Substate Modeling and Identification Using the SVD"; von Tod Romo von der Rice University. Die Seite stellt die Anwendung der SVD auf die Analyse der Struktur und der Bewegung von Proteinen vor und enthält einige wundervolle Grafiken.

bioc.rice.edu/~romo/Sprez/boc.html

- Die Biophysiker Michael Wall, Andreas Reichsteiner und Luis Rocha (Los Alamos) geben einen guten Online-Überblick über die SVD und PCA am Beispiel ihrer Anwendungen auf die Gene-expressions-Analyse.

public.lanl.gov/newall/kbweiz2002.html

- „Darstellung periodischer menschlicher Bewegungen mit Hilfe der Funktionsanalyse“, (2005), von Dirk Ormondt, Michael Black, Trevor Hastie und Hedvig Kjellström, beschreibt Methoden, bei denen Fourierzerlegungen und PCAs zur Analyse und Modellierung der Motion-Capture-Daten von Tätigkeiten wie dem Laufen eingesetzt werden.

www.csc.kth.se/~hedvig/publications/hc_05.pdf

- Ein ähnliches Thema hat der Artikel „Zerlegung biologischer Bewegungen: ein Gerüst für die Analyse und Synthese menschlicher Gangmuster“, (2002), von Nicholas Troje. Trojes Arbeit ist auch die Basis für eine "Eigenwalker"-Demo.

www.pumablabvision.org/2/15/2

www.mathworks.com/moler/ncm/walker.m

- Eine Suche bei der US Patent- und Warenzeichen-Behörde ergibt 1.197 US-Patente, die den Begriff „Singular Value Decomposition“ enthalten. Das älteste davon, "Ein fiberoptisches System zur Inspektion von Sandwich-Lötverbindungen in integrierten Schaltkreisen", stammt aus dem Jahr 1987. Daneben finden sich Titel wie „Kompression von Oberflächen-Lichtfeldern“, „Methode zur seismischen Überwachung“, „Semantische Suchen in Peer-to-Peer-Netzwerken“, „Biochemische Marker der Hirnfunktion“ und „Mit Diabetes lebert“.

www.uspto.gov/patft

QUELLEN

► **On the Early History of the Singular Value Decomposition**
locus.siam.org/SIREV/volume-35/art_1035134.html

► **Cleve's Corner Collection**
www.mathworks.com/ces/cleve

6.2 Clusteringverfahren

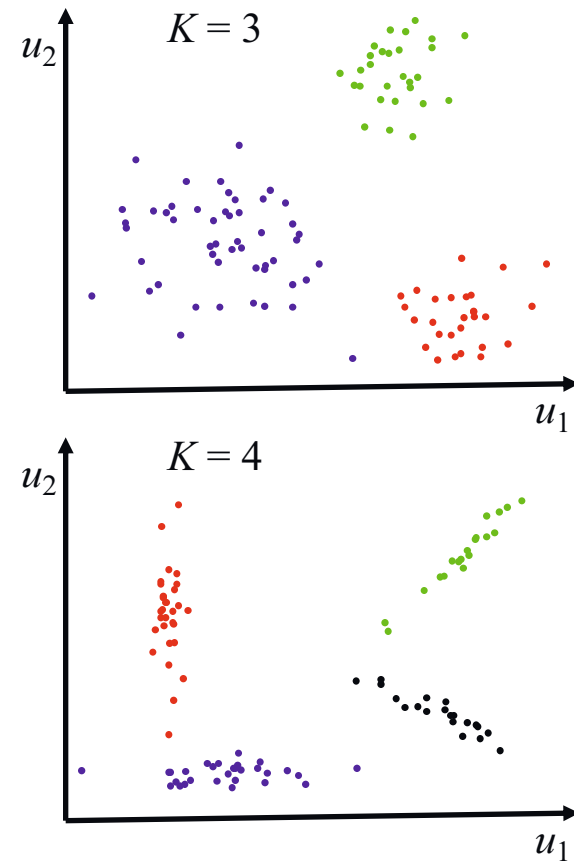
Prinzip des Clustering

Wie bei der PCA betrachtet das Clustering ausschließlich die Verteilung der Daten im *Eingangsraum*. Aufgabe des Clustering ist es, ähnliche Gruppen (*cluster*) bestehend aus Datenpunkten aufzuspüren. Diese Gruppen können je nach Anwendung und Verfahren verschiedene gewünschte Formen, genannt *Prototypen*, aufweisen, z.B. im 2-dimensionalen Eingangsraum: ausgefüllte Kreise oder Ellipsen, Linien, usw.

Es wird ein *Ähnlichkeitsmaß* als Gütefunktion definiert, das beschreibt, wie gut die Daten innerhalb einer Gruppe dem vorgegebenen Prototypen entsprechen. Z.B. wird beim bekanntesten Verfahren dem sog. *K-Means-Clustering*, folgende Gütefunktion verwendet:

$$J = \sum_{j=1}^K \sum_{i \in \mathcal{S}_j} \|u(i) - c_j\|^2 \longrightarrow \min_{c_j}$$

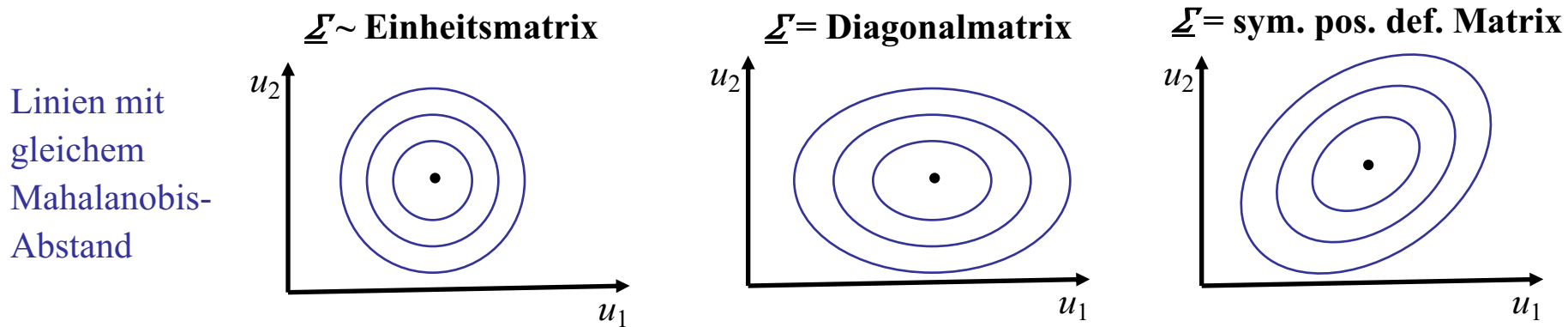
wobei K die Anzahl der Cluster beschreibt und $i \in \mathcal{S}_j$ die Datenpunkte herausgreift, die zum Cluster j gehören, d.h. seinem Schwerpunkt am nächsten sind (hier im Euklidischen Sinne).



6.2 Clusteringverfahren

Das K-Means-Clustering versucht also K kreisförmige Cluster zu finden, indem es die Summe der quadratischen Euklidischen Abstände aller Datenpunkte zu ihrem jeweiligen Cluster-Schwerpunkt minimiert. Dabei wird jeder Datenpunkt genau dem Cluster zugeordnet, dessen Schwerpunkt ihm am nächsten liegt.

Statt nach Kreisen zu suchen, kann man auch nach Ellipsen mit vorgegebenem Achsverhältnis und Drehrichtung (d.h. fester Kovarianzmatrix $\underline{\Sigma}$) suchen, indem man vom Euklidischen Abstand auf den sog. *Mahalanobis -Abstand* erweitert.



Eine Erweiterung auf beliebig viele Eingangsgrößen ist sehr leicht möglich.

Es ist auch möglich nach Ellipsen beliebiger (d.h. nicht vorgegebener) Form zu suchen. Dies erfordert allerdings komplexere Algorithmen nach *Gustafson-Kessel* für Ellipsen identischer Fläche bzw. *Gath-Geva* für Ellipsen beliebiger Fläche.

6.2 Clusteringverfahren

K-Means-Clustering

Der K-Means-Algorithmus funktioniert sehr einfach:

1. Wähle die Anzahl der Cluster K .
2. Initialisiere die Cluster-Zentren mit zufällig ausgewählten Datenpunkten.
3. Ordne jeden Datenpunkt dem Cluster zu, dessen Zentrum dem Datenpunkt am nächsten liegt (berechnet nach der gewählten Abstandsnorm).
4. Berechne die Schwerpunkte jedes Clusters durch Mittelwertbildung der Koordinaten der zugehörigen Datenpunkte.
5. Lege die neuen Cluster-Zentren auf diese Schwerpunkte.
6. Wenn sich mindestens ein Cluster-Zentrum geändert hat, dann gehe zu Schritt 3, sonst STOP.

Man kann zeigen, dass dieser Algorithmus die zuvor definierte Zielfunktion J minimiert. Allerdings kann das Verfahren in ein lokales Minimum konvergieren, was in Praxis aber nur sehr selten passiert. Da die Lösung von der zufälligen Initialisierung abhängt, sollte man im Zweifel mehrere Durchläufe mit unterschiedlicher Initialisierung vergleichen.

Schwierig bei allen Clusteringverfahren ist die „richtige“ Wahl der Clusteranzahl K .

6.2 Clusteringverfahren

Beispiele für K-Means-Clustering

Zur Interpretation der Bilder:

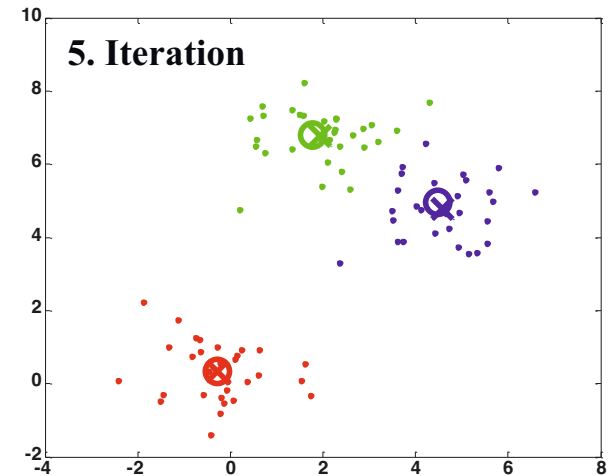
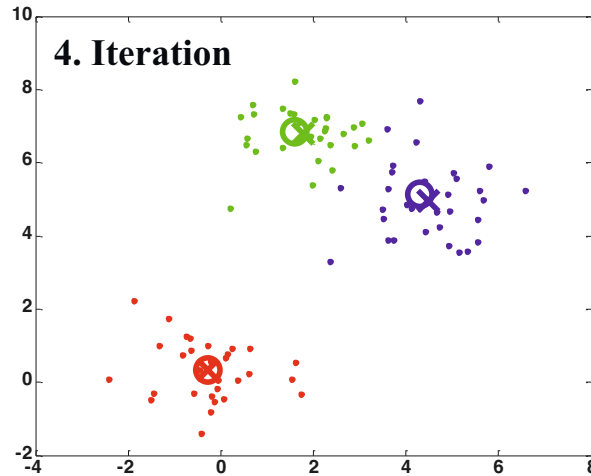
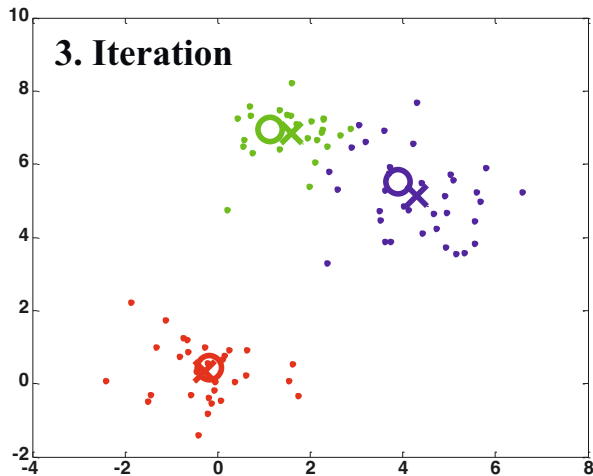
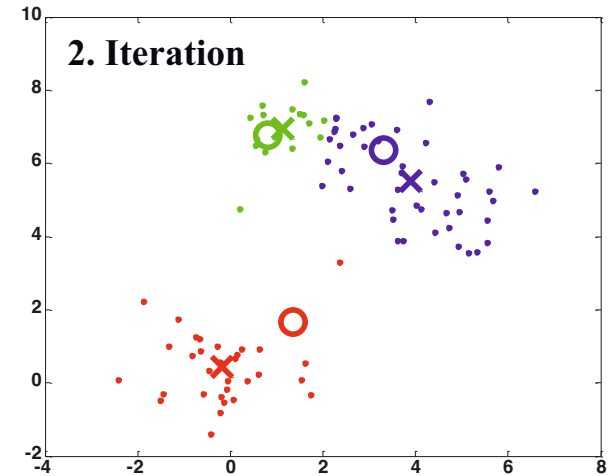
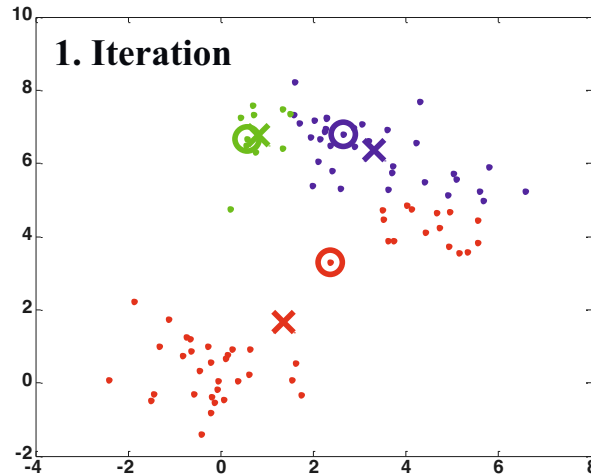
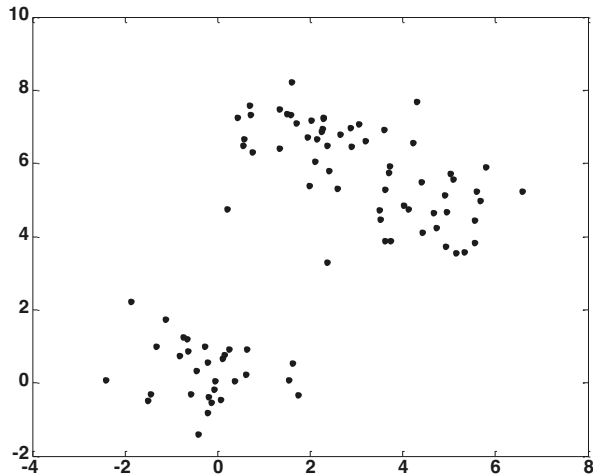
- Datenpunkte werden durch Punkte gekennzeichnet.
- Die alten Cluster-Zentren werden durch Kreise dargestellt.
- Die neuen Cluster-Zentren werden durch Kreuze dargestellt.
- Die Farben der Datenpunkte entsprechen der Zuordnung zum alten Cluster.

Beobachtungen:

- Die Konvergenz ist sehr schnell; es werden nur wenige Iterationen benötigt.
- Das globale Minimum der Zielfunktion scheint fast immer erreicht zu werden.
- Die Empfindlichkeit bezüglich der zufälligen Initialisierung ist gering.
- Für sinnvolle Ergebnisse muss die Clusteranzahl richtig gewählt sein.
- Die Normierung der Daten ist sehr wichtig, weil sonst eine (einige) Raumrichtungen bei der Cluster-Separation dominant bzw. irrelevant werden können.

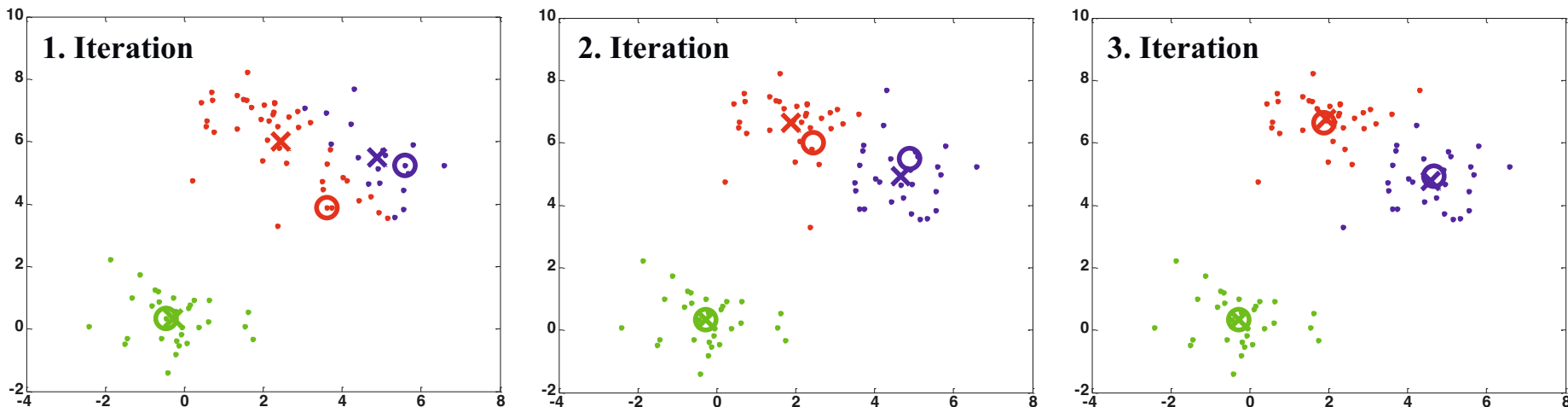
6.2 Clusteringverfahren

$K = 3$ 5 Iterationen bis zur Konvergenz

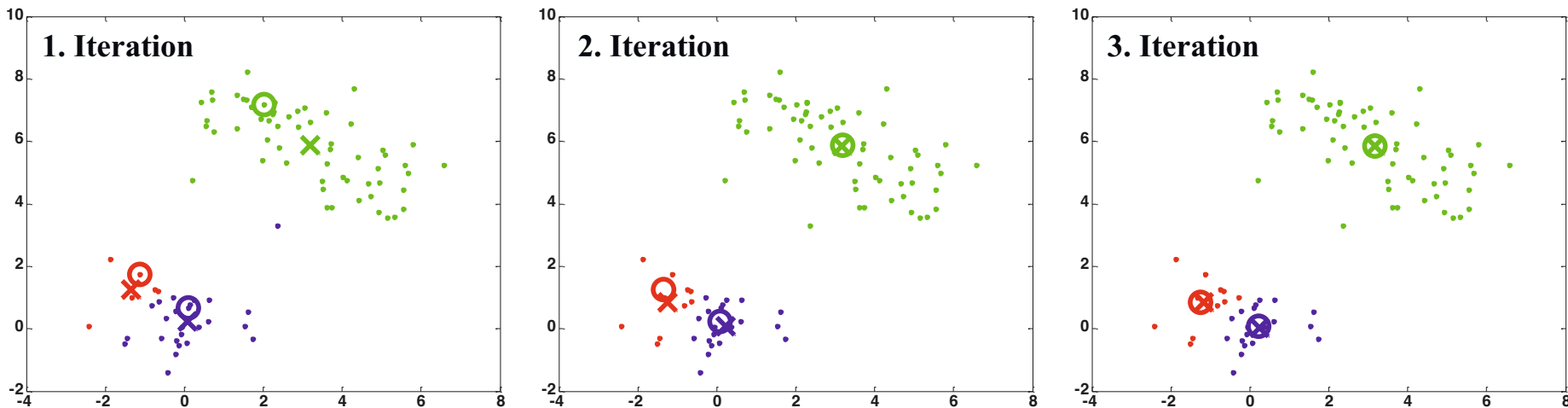


6.2 Clusteringverfahren

$K = 3$ 3 Iterationen bis zur Konvergenz Schnellere Konvergenz wegen glücklicher Initialisierung



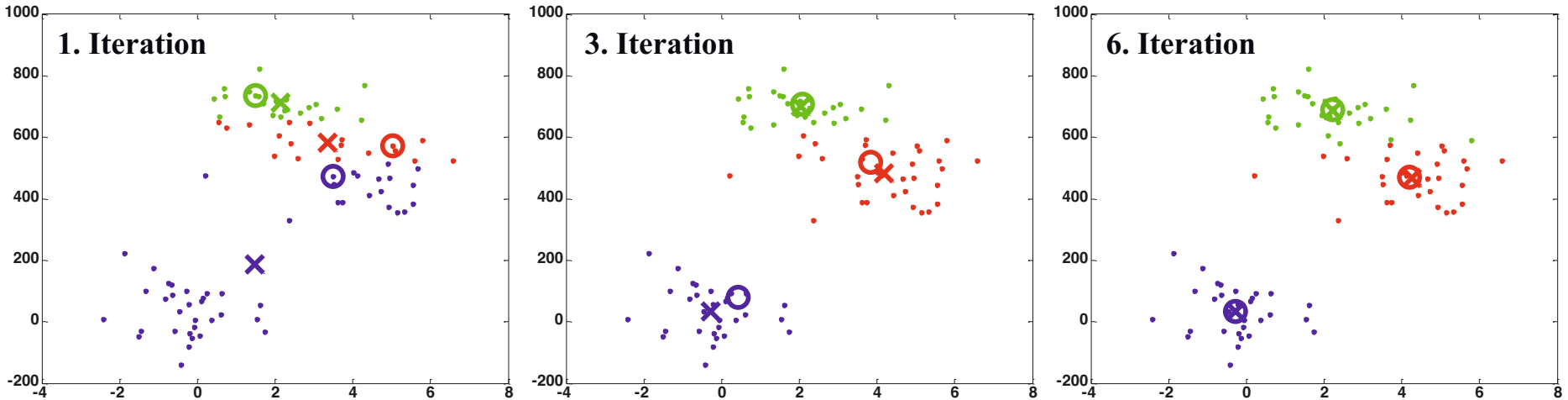
$K = 3$ 3 Iterationen bis zur Konvergenz Schlechtere Lösung wegen unglücklicher Initialisierung



6.2 Clusteringverfahren

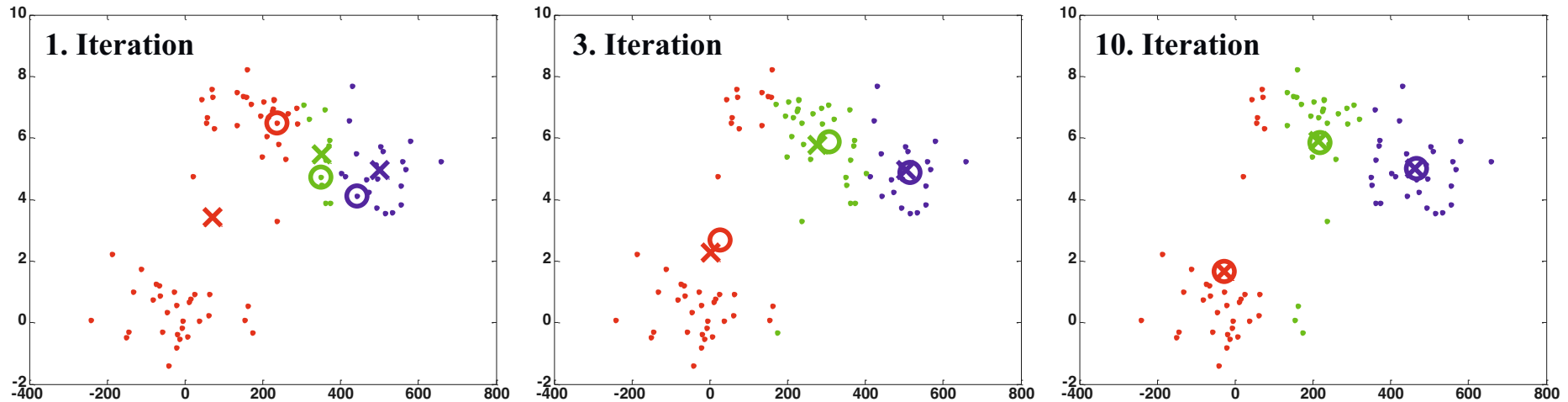
$K = 3$ 6 Iterationen bis zur Konvergenz

Skalierung der y -Achse um Faktor 100 größer



$K = 3$ 10 Iterationen bis zur Konvergenz

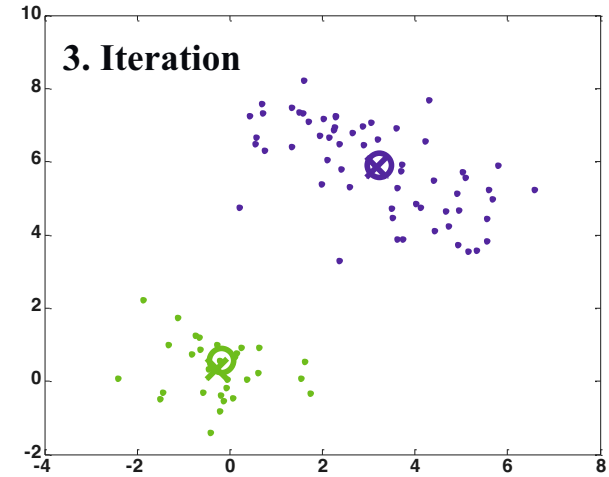
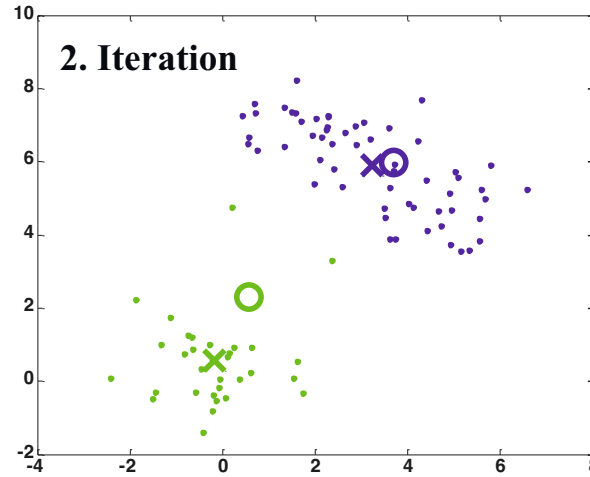
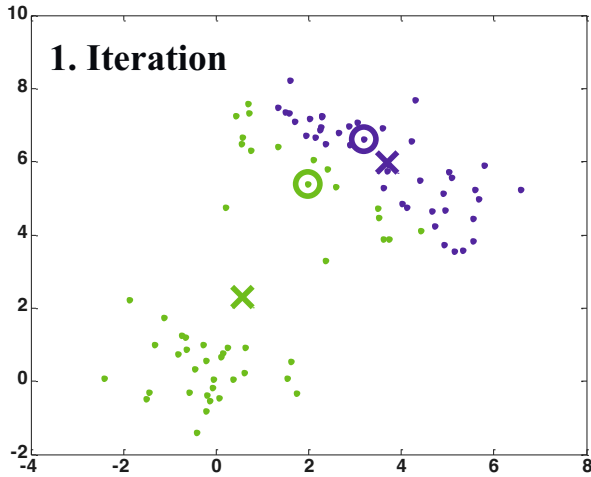
Skalierung der x -Achse um Faktor 100 größer



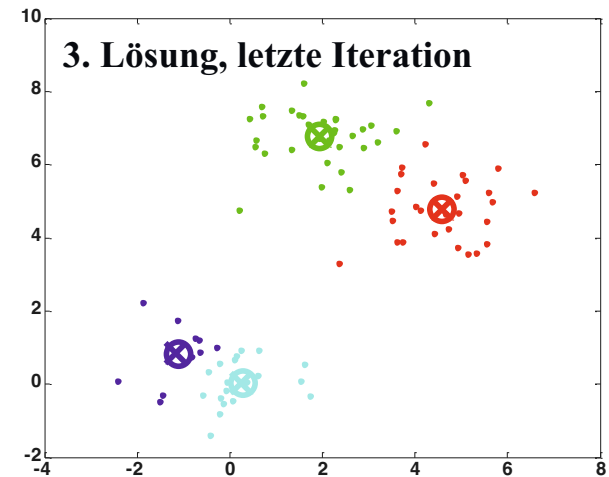
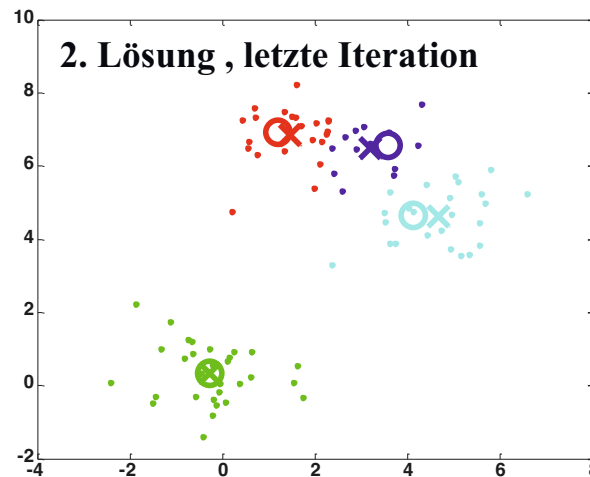
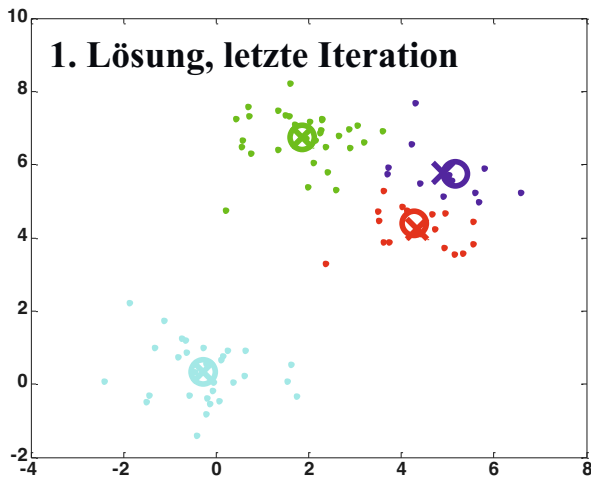
6.2 Clusteringverfahren

$K = 2$ 3 Iterationen bis zur Konvergenz

Lösung sehr stabil, d.h. unabhängig von Init.



$K = 4$ Viele verschiedene Lösungen abhängig von der Initialisierung



6.2 Clusteringverfahren

Fuzzy-Clustering

Die für das K-Means-Clustering verwendete Gütefunktion kann umgeschrieben werden:

$$J = \sum_{j=1}^K \sum_{i \in \mathcal{S}_j} \|u(i) - c_j\|^2 = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^N \mu_{ij} \|u(i) - c_j\|^2 \longrightarrow \min_{c_j}$$

Die 2. Summe läuft nun über alle Datenpunkte, nicht nur über die zum Cluster j zugehörigen. Damit die Gleichung erfüllt ist, muss gelten:

$$\mu_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls Datenpunkt } i \text{ zum Cluster } j \text{ gehört} \\ 0 & \text{falls Datenpunkt } i \text{ nicht zum Cluster } j \text{ gehört} \end{cases}$$

Die Größe μ_{ij} gibt also die Clusterzugehörigkeit an. Ein Wert von „1“ bedeutet „gehört dazu“ und ein Wert von „0“ bedeutet „gehört nicht dazu“. Es liegt nun nahe, μ_{ij} von einem binären Wert auf eine reelle Zahl zu erweitern, die den **Grad der Zugehörigkeit** angibt. Dann hätte ein Datenpunkt i , der fast auf halbem Wege zwischen Cluster-Zentrum 1 und 2 liegt (aber etwas näher am Cluster-Zentrum 1) z.B. die *Zugehörigkeitsgrade* $\mu_{i1} = 0.51$ und $\mu_{i2} = 0.49$. Liegt er etwas näher am Cluster-Zentrum 2, dann wäre z.B. $\mu_{i1} = 0.49$ und $\mu_{i2} = 0.51$. Es ergibt sich also kaum ein Unterschied, kein „Umschalten“ von einem Cluster zum anderen, sondern ein kontinuierlicher Übergang. Diese Philosophie verfolgt das sog. **Fuzzy-Clustering**.

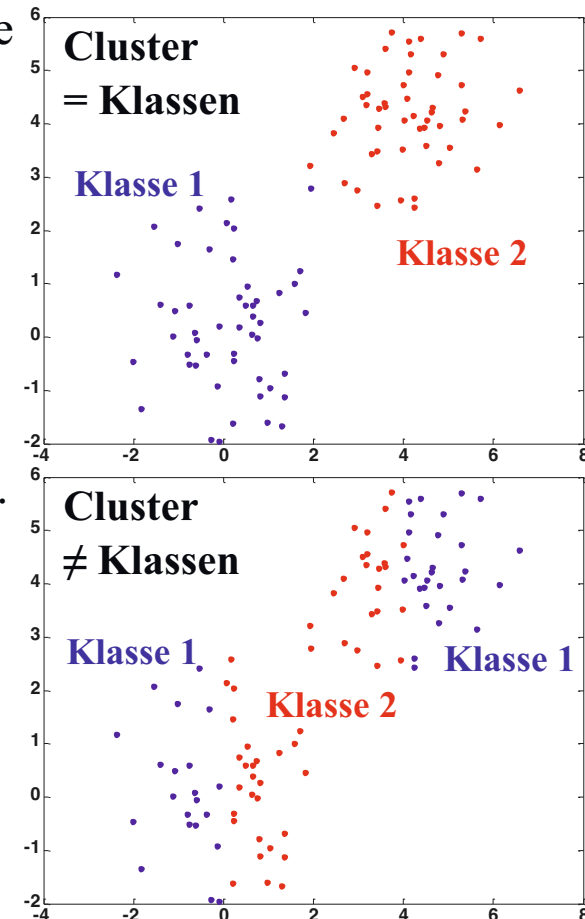
6.2 Clusteringverfahren

Clustering zur Klassifikation

Wie die PCA ist auch das Clustering eine sehr beliebte Datenvorverarbeitungsmethode zur Lösung von Klassifikationsaufgaben. Statt den Klassifikator direkt mit den evtl. sehr vielen Eingängen (Merkmalen) zu füttern, wird ihm die eindimensionale Nummer des Clusters mitgeteilt, zu dem ein Datenpunkt gehört. Auf diese Weise lässt sich leicht eine enorme Dimensionsreduktion erreichen.

Bei dieser Vorgehensweise wird unterstellt, dass eine bestimmte Gruppierung der Daten im Eingangsraum in Zusammenhang mit der Klassenzugehörigkeit steht. Dies ist in der Tat oft der Fall; meist kann man sogar jedem Cluster direkt eine Klasse zuordnen.

Aber es kann auch vorkommen, dass die Verteilung der Daten im Eingangsraum keinerlei Information über die Klassenzugehörigkeit enthalten. Die Datenverteilung kann z.B. durch Messbeschränkungen, Schwankungen von Umgebungsbedingungen oder reinen Zufall geprägt sein. In einem solchen Fall ist Clustering keine Hilfe und kann in die Irre führen!





Hauptkomponentenanalyse:

```
[COEFF,SCORE] = princomp(X);1
```

Singulärwertzerlegung:

```
[U,S,V] = svd(X);
```

Fuzzy-K-Means-Clustering:

```
[center,U,obj_fcn] = fcm(data,cluster_n);2
```

¹ : *Statistics Toolbox*

² : *Fuzzy Logic Toolbox*