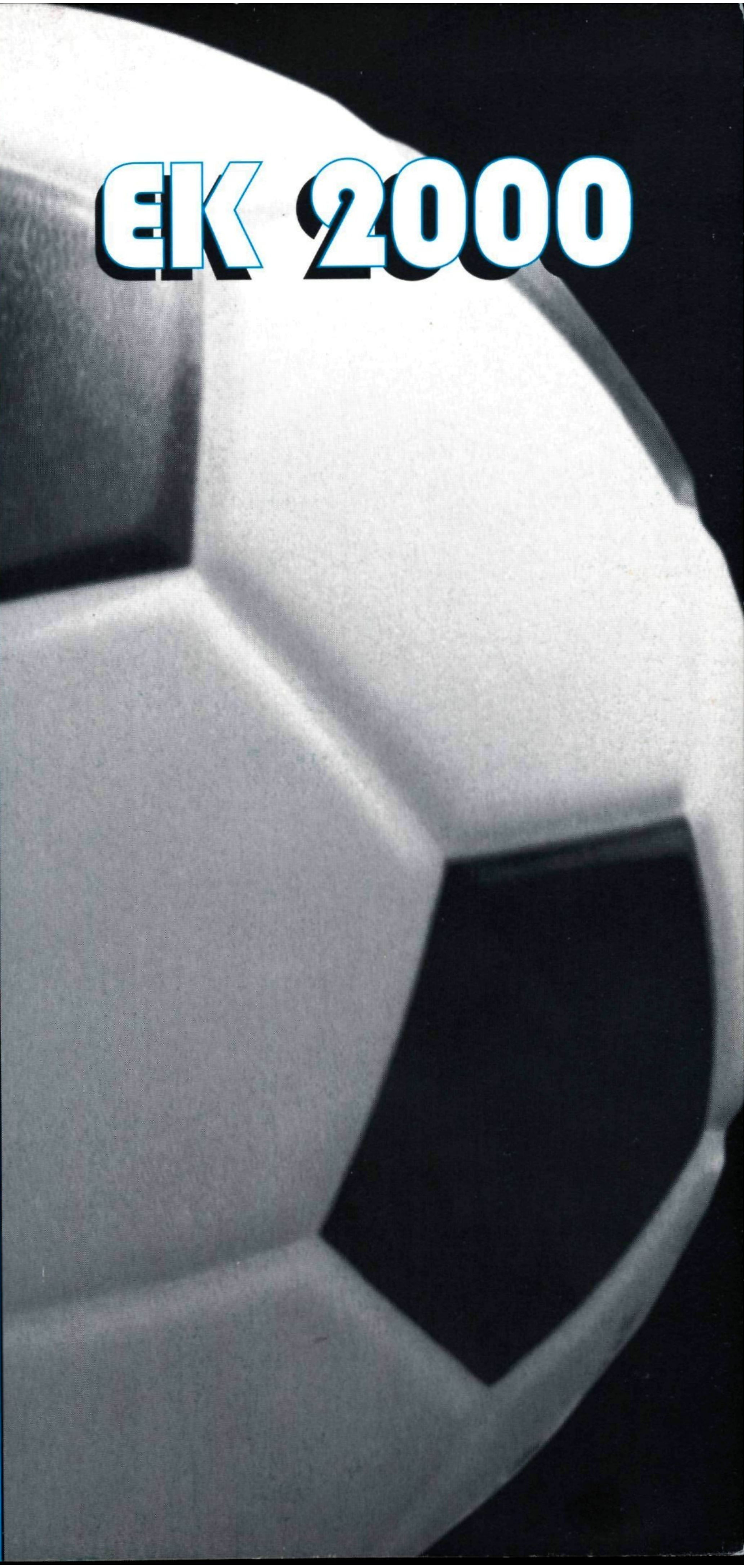
pythagoras

nr. 6



EK 2000

augustus 1999 38ste jaargang

Inhoud

1 **Zo snel mogelijk**

2 - 3 **Kleine nootjes**

Financiële wiskunde
4 - 7 **Risico's rond EK 2000**

Financiële wiskunde
8 t/m 10 **EK 2000: het zekere uit het onzeker**

Wiskunde en taal
11 **Differentiaal en integraal**

12 t/m 14 **Srinivasa Ramanujan**

15 t/m 16 **Ramanujan en de partitiefunctie**

17 t/m 19 **Het dominoprincipe**

Financiële wiskunde
20 t/m 21 **IBNR**

22 t/m 24 **Pythagoras Olympiade**

25 Oplossing **Zo snel mogelijk**

Boeken
26 - 28 **Kattenaids, robots en Fermat**

Drogredeneringen
29 **Alle Nederlanders zijn even oud**

30 t/m 33 **Vier Sangaku-opdrachten**

34 Problemen

35 Oplossingen **nr.5**

36 **Agenda**

COLOFON

uitgave
Pythagoras is een uitgave van het Wiskundig Genootschap en verschijnt zes keer per jaar.
Een jaargang loopt van september tot en met augustus. ISSN: 0033-4766

redactieadres
Redactie Pythagoras
t.a.v. Dion Gijswijt
Korteweg-de Vries Instituut voor wiskunde
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

e-mail
pythagoras@wins.uva.nl

www
www.wins.uva.nl/misc/pythagoras/

redactie
André de Boer
Dion Gijswijt
Klaas Pieter Hart
René Swarttouw
Chris Zaal

hoofd- en eindredactie
Chris Zaal

abonnee-administratie
telefoon: 0522-855175
fax: 0522-855176

grafisch ontwerp
WILDVLEES, Amsterdam

drukwerk
Giethoorn Ten Brink, Meppel

Potentiële werknemers van Microsoft krijgen bij hun sollicitatie een probleem voorgelegd. Ze krijgen vijf minuten de tijd om het op te lossen. Het probleem is bepaald niet gemakkelijk en veel kandidaten komen er dan ook niet uit. Ben jij geschikt om bij Microsoft te gaan werken? Ga de uitdaging aan!

Zo snel mogelijk

Leon van den Broek

Vier mensen A, B, C en D staan voor een rivier en moeten via een brug naar de overkant. Het is aardedonker en de brug is erg smal. De vier mensen hebben maar één zaklamp. Daarmee kunnen maar twee personen tegelijk over de brug (één persoon kan natuurlijk ook). Als er twee met de zaklamp naar de overkant zijn gegaan, moet iemand de zaklamp terugbrengen om een volgend tweetal te kunnen laten oversteken. De vier mensen lopen met verschillende snelheden.

A loopt het snelst van de vier; hij doet 1 minuut over de oversteek. B doet er 2 minuten over, C 4 minuten en D 6 minuten. De snelheid waarmee een tweetal loopt, wordt bepaald door de langzaamste. Als bijvoorbeeld B en D samen oversteken, doen ze er 6 minuten over. De vraag luidt: hoe kan het viertal in zo kort mogelijke tijd oversteken?

Sneller dan snel

Een voor de hand liggende aanpak is de volgende. A brengt elk van de anderen naar de overkant en brengt zelf steeds de zaklamp terug. Dat lijkt wel verstandig, want A is de snelste. Als hij achtereenvolgens B, C en D naar de overkant brengt, kost de hele operatie 2+1+4+1+6 = 14 minuten. Maar het kan sneller! Welke aanpak is de snelste en hoe lang duurt het dan in totaal?

Alle mogelijkheden

Je zou een hele lijst kunnen opstellen van alle mogelijke aanpakken. Dat is een lijst van 108 mogelijkheden (kan jij die 108 narekenen?). De computer is daarvoor geschikt. Maar voor de sollicitatie bij Microsoft zou dat te veel tijd kosten.

Op bladzijde 25 staat de oplossing van het probleem en ook de wiskunde waarmee je het probleem beter kunt begrijpen.

Kleine nootjes zijn eenvoudige vraagstukken die door iedereen 'gekraakt' kunnen worden, zonder enige wiskundige voorkennis. De oplossingen staan op de binnenkant van de achterflap.

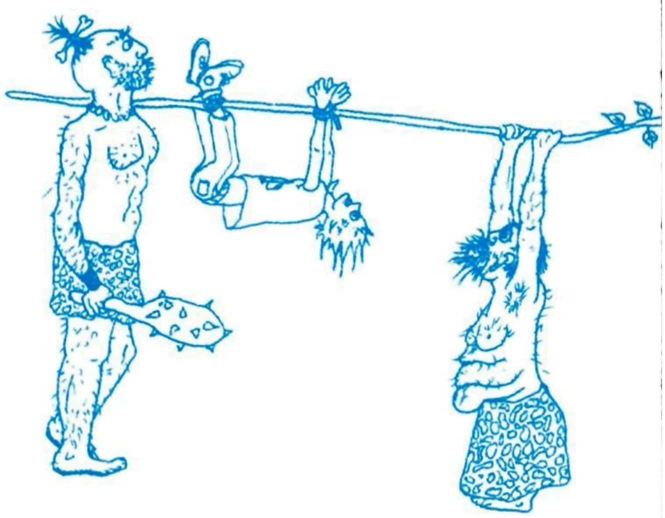
Kleine

Wijze Eik

Op een zonnige ochtend ben je aan het wandelen in het bos. Plots wordt je overmeesterd door een bende bosmensen. Geboeid rond een paal wordt je naar hun dorp in het bos gebracht. Je wordt gedwongen plaats te nemen op de hoek van een op de grond getekende driehoek. Vooraleer je geblinddoekt wordt zie je dat op de twee andere hoekpunten van de driehoek ook twee mensen zitten. Dan hoor je de stem van de leider van de bosmensen (de 'Wijze Eik') die je uitlegt waarom je hierheen bent gebracht. De Wijze Eik is stervende en heeft zijn onderdanen het land rondgestuurd om de drie slimste en verstandigste mensen te zoeken.

Jij bevindt je dus, tezamen met de andere twee in de driehoek. De Wijze Eik verklaart: "Ik heb jullie in een driehoek geplaatst zodat elk van jullie de andere twee kan zien. Jullie zijn nu geblinddoekt. Straks zal ik een stip op elk van jullie voorhoofden verven. Deze stip kan zowel groen als rood zijn. Wanneer ik de blinddoeken weghaal, moeten jullie je hand opsteken als jullie een groene stip zien bij tenminste een van beide personen tegenover jou (dat wil zeggen, een hand opsteken als je 1 of 2 groene stippen ziet). Zodra je weet welke kleur jouw stip heeft, zeg je het me en dan wordt jij de nieuwe leider."

Vervolgens tekent Wijze Eik een groene stip op elk van de drie hoofden. Hij haalt de blinddoeken weg en iedereen steekt zijn hand op. Na een tijdje spreekt de meest wijze (jij dus!): "O, grote Wijze Eik, de kleur van mijn stip is groen omdat ...". Ja, waarom eigenlijk? *Katty Terras*



nootjes

Rondetijden
Om een volle ronde af te leggen van een wielercircuit heeft een wielrenner precies 2 minuten en 13 seconden nodig. Hoe lang doet deze renner over 60 ronden? (Het antwoord kun je binnen 10 seconden geven.)

Parijs
Parijs begint met een p en eindigt met een e. Klopt dat?

More money
Vervang in de onderstaande optelsom de letters zó door een cijfer (van 0 tot en met 9), dat de optelsom klopt. Natuurlijk staat iedere letter voor een verschillend cijfer.

Katty Terras

$$\begin{array}{r} \text{SEND} \\ \text{MORE} + \\ \hline \text{MONEY} \end{array}$$

Augustusnummer
Wat komt eenmaal voor in juni, driemaal in augustus, maar in oktober nooit?

Licht uit
Aflopen week lukte het mijn vader om het slaapkamerlicht uit te doen en *voordat* het donker was in bed te springen. Tussen lichtknopje en bed zit een ruimte van 3 meter. Hoe kreeg mijn vader dat voor elkaar?

Vierendelen
Kun je een cirkel met één doorgetrokken lijn in vier delen verdelen met gelijke oppervlakte? Niet toegestaan: langs de omtrek gaan of een eerder getrokken stuk nogmaals doorlopen.

Amos Rosenthal, J.S.G. Maimonides

Financiële wisk

Niemand wil onnodige risico's lopen. Daarom houden mensen er niet van om voor grote bedragen weddenschappen af te sluiten. Bookmakers sluiten dagelijks veel weddenschappen af. Toch betekent dit niet dat bookmakers een riskant bestaan leiden. Sterker nog: een bookmaker die zijn vak verstaat heeft veel weddenschappen uitstaan, maar loopt geen enkel risico!

Risico's rond E

Hans Schumacher & Michel Vellekoop

In deze laatste aflevering van de serie over financiële wiskunde hebben we het over het omgaan met risico's. Zijn risico's altijd onvermijdelijk? Kun je het ene risico met het andere afdekken? Met het EK 2000 als voorbeeld gaan we het domein binnen van de risicomanagers, mensen die er een beroep van maken om te weten hoe je door risico's te combineren een geheel samenstelt waaruit alle risico is verdwenen.

Wedje maken?

Met een voorbeeld laten we zien hoe je aan risico's kunt rekenen. Volgend jaar organiseren Nederland en België samen het Europees kampioenschap voetbal: het EK 2000. Veronderstel dat de finale van het EK wordt gespeeld tussen de twee gastlanden Nederland en België. Op de dag vóór de finale willen tien voetballiefhebbers een gokje wagen en komen bij een bookmaker. Elk van de gokkers zet honderd gulden in op de uitslag; acht van de tien denken dat Nederland zal winnen, terwijl België bij de andere twee de favoriet is. In totaal ontvangt de bookmaker duizend gulden.

Aan degenen die op Nederland willen wedden belooft de bookmaker een uitbetaling van 5 : 4, dat wil zeggen, als Nederland wint krijgt men voor elke vier ingezette guldens vijf gulden terug. Aan degenen die op België wedden geeft de bookmaker een uitbetaling van 5 : 1; vijf guldens terug voor elke ingezette gulden.

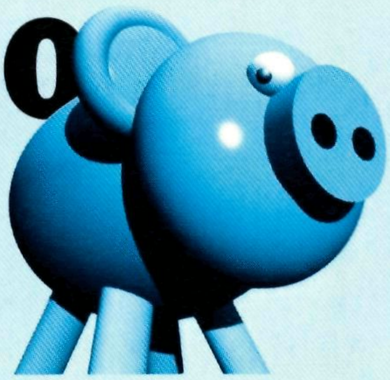
Na afloop van de finale zijn er twee mogelijkheden: Nederland is kampioen, of België. In het eerste geval betaalt de bookmaker 125 gulden uit aan ieder van de acht gokkers die op Nederland hebben gewed. Dat wordt precies gedekt door de duizend gulden die in totaal is ingezet. In het andere geval winnen de twee die op België gewed hebben ieder vijfhonderd gulden. Ook deze uitbetaling wordt gedekt door de ingezette duizend gulden. De bookmaker komt dus altijd uit.

Winst

Een bookmaker die uitgaat van de genoemde uitbetalingsverhoudingen verdient niets: een verstandige bookmaker kiest daarom kleinere verhoudingen. In de bovenstaande

nde

2000



situatie kan hij bijvoorbeeld de verhouding 6 : 5 kiezen voor degenen die op Nederland wedden (voor elke ingezette honderd gulden een uitbetaling van 120 gulden). Voor degenen die op België inzetten kiest hij een verhouding van 4,8 : 1 (een uitbetaling van 480 gulden voor honderd gulden inzet). Als Nederland wint betaalt hij 8 × 120 gulden uit en houdt hij veertig gulden over. Wint België, dan is de uitbetaling tweemaal 480 gulden; ook in dit geval steekt hij vier tientjes in eigen zak.
Kortom, de bookmaker heeft tien weddenschappen uitstaan en desondanks loopt hij geen enkel risico. Sterker nog, nog voordat er een bal is getrapt weet hij zeker dat hij veertig gulden winst zal maken. Veertig gulden lijkt misschien niet veel, maar als er geen tien maar duizend mensen zijn die willen wedden, dan incasseert de bookmaker op deze manier vierduizend gulden. Zo kun je aan voetbal een aardige boterham verdienen zónder dat je hoeft te weten hoeveel spelers er in een elftal zitten!

De onbaatzuchtige bookmaker

Waar komen die verhoudingen 5 : 4 en 5 : 1 vandaan? Dat zullen we nu laten zien. In plaats van 800 en 200 gulden nemen we aan dat er een bedrag van a gulden is ingezet op Nederland en een bedrag b op België. We willen de uitbetalingsverhoudingen vinden waarbij de bookmaker quitte speelt.
Noem de verhouding voor Nederland x en die voor België y. Het totaal ingezette bedrag is $a + b$. Als Nederland wint dan moet er ax worden uitbetaald.
Dus $ax = a + b$, zodat:

$$x = (a + b)/a.$$

Op dezelfde manier vinden we

$$y = (a + b)/b.$$

Vullen we in $a = 800$ en $b = 200$, dan vinden we inderdaad $x = 1000/800 = 5 : 4$ en $y = 1000/200 = 5 : 1$.
Uit de formules voor x en y zien we dat ongeacht de ingezette bedragen er altijd geldt $1/x + 1/y = 1$ en $x : y = 1/a : 1/b$.
De formule $1/x + 1/y = 1$ kan veralgemeend worden naar situaties met meer dan twee kanshebbers, zoals bijvoorbeeld bij aanvang van het EK. Altijd geldt de *wet van de onbaatzuchtige bookmaker*: de som van de omgekeerde uitbetalingsverhoudingen is 1. Een bookmaker die zijn prijzen op deze manier vaststelt is inderdaad onbaatzuchtig, want hij houdt niets over. In de werkelijkheid zie je altijd dat de som van de uitbetalingsverhoudingen groter is dan 1. En hoe groter deze som, hoe meer de bookmaker in eigen zak stopt.

Geïmpliceerde kansen

De inzet bij een bookmaker kunnen we verdelen in een deel transactiekosten (het gedeelte dat de bookmaker voor zichzelf houdt) en een deel 'pure' weddenschap. Voor de pure weddenschap gaat de wet van de onbaatzuchtige bookmaker op. De omgekeerde uitbetalingsverhoudingen zijn dan positieve getallen met de eigenschap dat ze bij elkaar gelijk zijn aan 1.

Kansen zijn getallen die precies dezelfde eigenschappen hebben: ze zijn ook positief en het totaal van alle kansen is altijd 1. We kunnen daarom de omgekeerde uitbetalingsverhoudingen opvatten als kansen. In dit verband spreekt men wel van *geïmpliceerde kansen*, namelijk kansen die impliciet ('zonder het met zoveel woorden te zeggen') volgen uit de ingezette bedragen.

In het voorbeeld van de EK 2000 finale tussen Nederland en België zijn de geïmpliceerde winstkansen respectievelijk 4/5 en 1/5. Je kunt je afvragen: wat is de 'werkelijke' kans dat Nederland de finale wint? Over die vraag valt geen verantwoorde uitspraak te doen, want daarvoor komen EK-finales tussen Nederland en België te weinig voor.

De wet van de gelijke kansen

Soms kan niet alleen de bookmaker, maar ook de klant zeker zijn van winst. We

Een voorbeeld uit de KPN-Telecompetitie

Op 12 mei 1999 gaf de internationale bookmaker SSP de volgende uitbetalingen voor de wedstrijd PSV - AZ van zondag 16 mei:

winst PSV: 1,35 : 1
gelijkspel: 3,80 : 1
winst AZ: 5,50 : 1

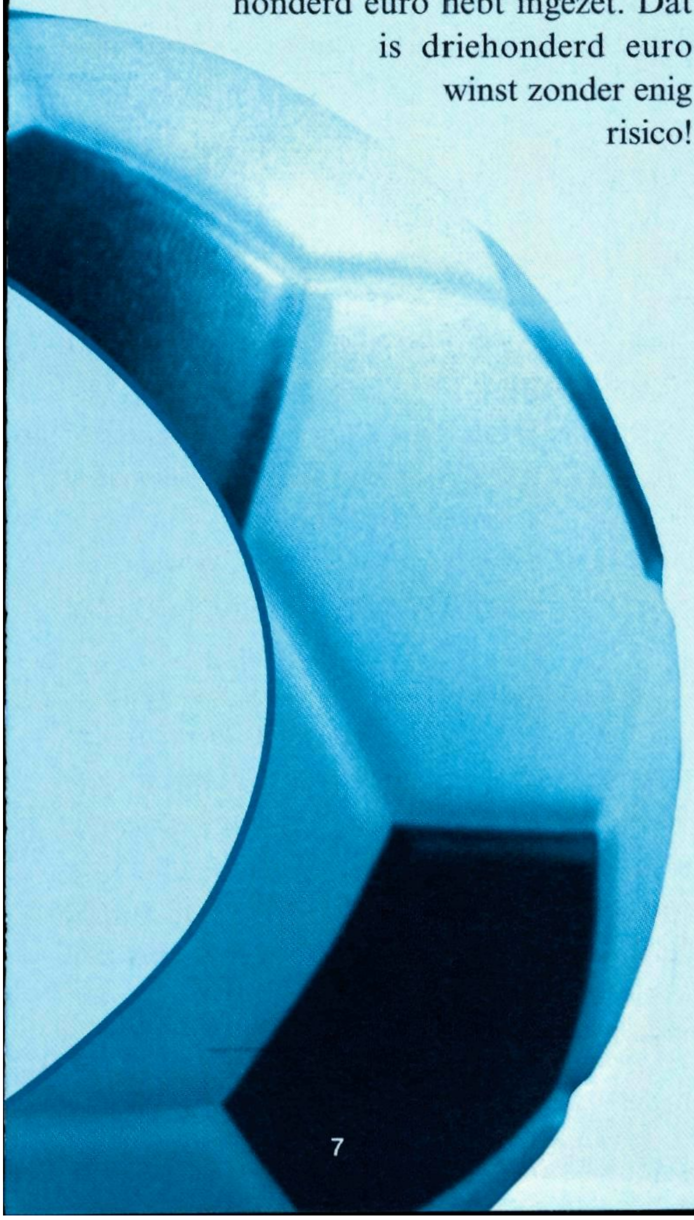
De omgekeerde uitbetalingsverhoudingen zijn 1/1,35, 1/3,8 en 1/5,5. Bij elkaar opgeteld krijgen we

$$\frac{1}{1{,}35} + \frac{1}{3{,}8} + \frac{1}{5{,}5} = 1{,}19$$

Delen we de omgekeerde uitbetalingsverhoudingen door de factor 1,19, dan vinden we de geïmpliceerde kansen voor winst, gelijkspel en verlies van PSV: 0,63, 0,22 en 0,15. Dat betekent dus *niet* dat bookmakers denken dat PSV 63% kans heeft om de wedstrijd te winnen. Het betekent alleen dat bookmakers denken dat 63% van alle mensen die op deze wedstrijd wedden op winst voor PSV zullen gokken, 22% op gelijkspel en 15% op verlies voor PSV.

Hoeveel gegarandeerde winst maakt SSP op deze weddenschap? We nemen aan dat de bookmakers het gedrag van hun klanten goed hebben ingeschat. Als PSV wint moeten ze 63% van de gokkers 1,35 maal hun inzet betalen, bij gelijkspel moeten ze 22% van de gokkers 3,8 maal hun inzet betalen. Als als PSV verliest betalen ze 15% van de gokkers 5,5 maal hun inzet. In elk van de drie gevallen is dat ongeveer 84% van de inzet. Je ziet: wat er ook gebeurt, SSP kan altijd 16% van de totale inzet in eigen zak steken.

gaan weer uit van het voorbeeld van de finale tussen Nederland en België de finale in het EK 2000. In Nederland gelden de uitbetalingsverhoudingen 5 : 4 en 5 : 1, maar stel dat bij bookmakers in België de situatie precies omgekeerd is; in België wordt 5 : 4 uitgekeerd als België wint en 5 : 1 als Nederland wint.
Wat kun je in dat geval doen? Zet honderd euro op België bij een bookmaker in Nederland, en in Belgë honderd euro op Nederland. Ongeacht de uitslag van de finale incasseer je dan altijd vijfhonderd euro, hetzij bij de Nederlandse bookmaker, hetzij bij zijn Belgische collega. Je ontvangt dus vijfhonderd euro, terwijl je maar tweehonderd euro hebt ingezet. Dat is driehonderd euro winst zonder enig risico!



Een nog beter idee is het om bij beide bookmakers duizend euro in te zetten, of zoveel als ze maar willen accepteren. Een dergelijke strategie wordt in de financiële wereld een *arbitrage* genoemd (in het voetbal heeft die term een andere betekenis).
Zolang de geïmpliceerde kansen in Nederland en in België verschillend zijn is er arbitrage mogelijk. Naarmate deze mogelijkheid meer wordt gebruikt zullen de uitbetalingsverhoudingen in de twee landen naar elkaar toe bewegen. Dit proces komt pas tot stilstand als de verhoudingen in beide landen gelijk zijn. Daarmee hebben we de *wet van de gelijke kansen* ontdekt: de geïmpliceerde kans op eenzelfde gebeurtenis moet overal gelijk zijn.

Praktische problemen

Soms gaat de wet van de gelijke kansen niet op. Dat ligt soms aan praktische problemen. Zo gaat het bovenstaande verhaal niet op als het Nederlanders niet toegestaan zou zijn in te zetten bij Belgische bookmakers. Ook ontstaan er problemen als je vanuit Nederland niet de Belgische uitbetalingsverhoudingen te weten kan komen. In de toekomst zullen de Europese integratie en Internet dergelijke problemen voorkomen.
Maar er zijn andere reden waarom de wet van de gelijke kansen niet helemaal opgaat. Dat heeft te maken met de winstmarge die bookmakers voor zichzelf aanhouden; daardoor kunnen geïmpliceerde kansen iets van elkaar verschillen zonder dat arbitrage lonend is.

Het verzinnen van strategieën om risico's uit te bannen of in ieder geval te beperken is een van de belangrijkste onderwerpen binnen de financiële wiskunde. Bij voetballen geldt hetzelfde. Een van de risico's is dat je geen kaartje voor de finale van het EK 2000 kan krijgen, als je favoriet in de finale speelt.

EK 2000
het zekere uit het onzekere

Hans Schumacher & Michel Vellekoop

Stel dat het Nederlandse voetbalteam volgend jaar in de finale zit van het EK 2000. Als je gelooft dat Nederland de finale zal winnen, dan kun je bij een bookmaker daarop wedden. Staat Nederland 5 : 4 bij de bookmaker, dan krijg je bij winst van Oranje voor elk vier ingezette guldens vijf gulden terug. Maar er bestaat natuurlijk een kans dat Nederland verliest, en dan ben je je inzet kwijt.

Om met beide kansen rekening te houden, gaan we over verwachtingen spreken — we zijn geïnteresseerd in de verwachte waarde van je winst. Die waarde is in jouw ogen natuurlijk positief, maar we gaan eens zien wat de verwachte waarde is in de ogen van de 'markt'.

Neutrale kansen

Stel dat een variabele met kans p de waarde a heeft en met kans $1-p$ de waarde b. De *verwachte waarde* is per definitie gelijk aan $pa + (1 - p)b$; het is een gewogen gemiddelde van de mogelijke uitkomsten, waarbij iedere uitkomst wordt meegewogen met de bijbehorende kans.

In het voorbeeld met Oranje in de EK-finale is bij een inzet van honderd gulden een kans van 4/5 op een winst van 25 gulden en een kans van 1/5 op een verlies van de inzet van 100 gulden. De verwachte waarde is dus gelijk aan $\frac{4}{5}$ keer 25 minus $\frac{1}{5}$ keer 100. De verwachte waarde van de weddenschap is dus 0 gulden!

In feite is verwachte waarde altijd 0 als je uitgaat van de geïmpliceerde kansen (zie p. 6). Immers, noem de inzet 1 en laat x de bijbehorende uitbetalingsverhouding zijn, x is een getal dat groter is dan 1. Bij winst is het resultaat $x-1$, bij verlies is het -1, want de inzet moet natuurlijk worden afgetrokken. De geïmpliceerde kans is $p = 1/x$. Op basis van deze kans is de verwachte waarde van het resultaat van de weddenschap gelijk aan:

$$p(x-1) + (1-p)(-1) = px - 1 = 0.$$

Met andere woorden, de verwachte waarde van *elke* weddenschap is 0 als de verwachting wordt genomen met betrekking tot de geïmpliceerde kansen. Deze kansen worden daarom ook wel *neutrale kansen* genoemd.

De halve finale

Wat is het nut van neutrale kansen? We geven een voorbeeld. Stel dat Nederland is doorgedrongen tot de halve finale van het EK 2000. Als gevolg daarvan ontstaat er een levendige zwarte handel in kaartjes voor de finale. De kaartjes voor een gewone zitplaats kosten 200 gulden. Op het moment dat Oranje de finale haalt zal de gekte losbreken en de prijs voor kaartjes omhoog schieten naar 600 gulden. Maar als Nederland de finale niet haalt, dan zullen zwarthandelaren moeite hebben hun kaartjes af te zetten voor tweehonderd gulden en zal naar verwachting de prijs dalen naar 100 gulden.

Voor de supporter die alleen geïnteresseerd is in een finale met Nederland erin doet zich nu een probleem voor: alvast een kaartje kopen levert het risico van een strop van 100 gulden; het kaartje van 200 gulden dat hij niet gebruikt kan hij alleen kwijt met een verlies van 100. Wachten met kopen kan leiden tot een situatie waarin er opeens 600 gulden op tafel moet komen.

Opties

In een situatie als boven kunnen opties nuttig zijn. Stel dat onze supporter met een handelaar afspreekt dat hij het recht krijgt om, nadat de halve finale gespeeld is, voor 300 gulden een kaartje voor de finale te kopen. Natuurlijk zal de supporter dat recht alleen gebruiken als Nederland de halve finale wint. Hoeveel moet de supporter hiervoor betalen?

Noem de prijs van de optie x. De afspraak met de handelaar kan worden gezien als een weddenschap die $300 - x$ oplevert als Nederland de finale haalt: 300 is het verschil tussen de dan geldende prijs van 600 en de afgesproken 300. In het andere geval levert de optie een verlies van x op, want dan is de optie niets waard. Als we een 'neutrale' kans p zouden weten dat Oranje de finale haalt, dan zou x volgen uit de vergelijking

$$p(300 - x) + (1 - p)(-x) = 0.$$

We vinden $x = p \cdot 300$, dat wil zeggen *de prijs is de verwachte waarde van het contract met betrekking tot de neutrale kansen*. Dit is een andere formulering van het neutraliteitsbeginsel voor weddenschappen (zie de voorgaande pagina), maar voor berekeningen is het handig om op deze manier tegen de situatie aan te kijken.

Om de prijs van de optie te berekenen, moeten we dus weten wat de neutrale kans is. De informatie die we nodig hebben komt uit de originele prijs van een kaartje: 200 gulden.

Als de neutrale kans p is, dan moet het dus zo zijn dat:

$$200 = p \cdot 600 + (1 - p) \cdot 100.$$

Hieruit volgt dat $p = 1/5$. De waarde van de optie is 1/5 maal 300, oftewel 60 gulden. Iedere andere prijs van de optie leidt tot een arbitragemogelijkheid (zie het aprilnummer van Pythagoras).

Is 60 gulden een aantrekkelijke prijs voor de supporter? Waarschijnlijk wel, want met de optie weet hij zeker dat hij een finale met Nederland erin kan zien voor niet meer dan 360 gulden. Om deze zekerheid te verkrijgen, hoeft hij alleen een risico te nemen van 60 gulden. Als hij nu al een kaartje zou kopen, zou hij 100 gulden risico lopen.

Het belang van dekking

De supporter vindt 60 gulden misschien een goede prijs voor de optie, maar hoe zit het met de handelaar? Die verdient met de verkoop van de optie zes tientjes. Daarvoor loopt hij het risico om voor 300 gulden een kaartje te moeten leveren dat eigenlijk 600 gulden waard is. In feite moet de handelaar denken als de bookmaker van p. 4 en 5. De handelaar heeft met de verkoop van de optie een weddenschap afgesloten en hij moet proberen deze af te dekken met een andere weddenschap. Het afdekken van het risico van de optie kan met de aankoop van toegangskaartjes. De aanschaf van één kaartje is te zien als een weddenschap met een inzet van 200 gulden (de aanschafprijs) en een opbrengst van 600 gulden als Nederland in de finale komt, en 100 gulden anders. Het verschil in opbrengt tussen winst en verlies is bij de optie 300 gulden (zie de tabel). Bij het toegangskaartje is dit verschil 500 gulden. Om het financiële risico van de optie te elimineren moet de handelaar 300/500 = 0,6 kaartje kopen (of liever gezegd, drie kaartjes voor elke vijf verkochte opties). Je kunt dan in alle gevallen nagaan dat de handelaar precies uitkomt als hij de optie voor de prijs van zestig gulden verkoopt. Net als de bookmaker hoeft ook de handelaar in opties op toegangskaartjes niets van voetballen te weten; hij heeft aan informatie over de toegangsprijzen genoeg.

	optie	kaartje
Winst Oranje	–300	600
Verlies Oranje	0	100

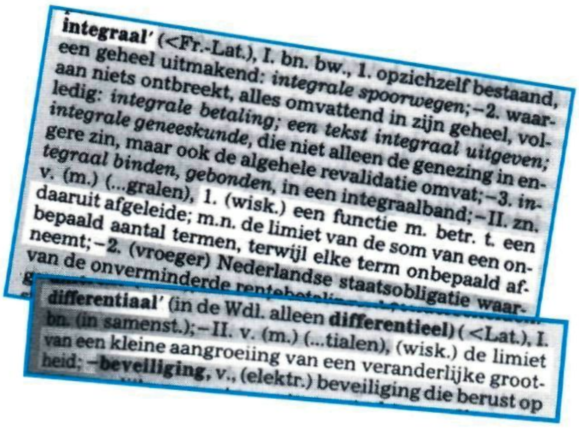
Tabel 1. De opbrengst voor de handelaar van optie en kaartje

Risicomanagement

Het elimineren van risico's door het combineren van verschillende contracten wordt *afdekken* genoemd. Bij banken en andere financiële instellingen zijn er hele afdelingen die zich hiermee bezighouden. Meestal hebben de risico's niet betrekking op een eenmalige gebeurtenis, maar op ontwikkelingen die zich in de loop van de tijd voordoen. Bijvoorbeeld het koersverloop van de dollar ten opzichte van de euro.

Door informatie te gebruiken over de grilligheid van dergelijke koersen (de zogenaamde *volatiliteit*) is ook hiervoor een afdekking mogelijk, en banken stellen deze constructies tegen betaling ter beschikking aan bedrijven. Bijvoorbeeld aan Europese bedrijven die in Amerika zaken doen.

○○ ∂ifferentiaal en ∫ntegraal



integraal' (<Fr.-Lat.), I. bn. bw., 1. opzichzelf bestaand, een geheel uitmakend: *integrale spoorwegen*;–2. waaraan niets ontbreekt, alles omvattend in zijn geheel, volledig: *integrale betaling; een tekst integraal uitgeven; integrale geneeskunde*, die niet alleen de genezing in engere zin, maar ook de algehele revalidatie omvat;–3. *integraal binden, gebonden*, in een integraalband;–II. zn. v. (m.) (...gralen), 1. (wisk.) een functie m. betr. t. een daaruit afgeleide; m.n. de limiet van de som van een onbepaald aantal termen, terwijl elke term onbepaald afneemt;–2. (vroeger) Nederlandse staatsobligatie waarvan de onverminderde rentebetaling ...

differentiaal' (in de Wdl. alleen **differentieel**) (<Lat.), I. bn. (in samenst.);–II. v. (m.) (...tialen), (wisk.) de limiet van een kleine aangroeiing van een veranderlijke grootheid; –**beveiliging**, v., (elektr.) beveiliging die berust op

Klaas Pieter Hart

Als je in een woordenboek de woorden 'differentiëren' en 'integreren' opzoekt, vind je naast de wiskundige ook nog andere betekenissen. Voor differentiëren vind je dingen die met verschillen te maken hebben, voor integreren dingen die met iets geheels te maken hebben. Dat is geen toeval want *differentia* is Latijn voor verschil en *integer* betekent geheel. *Integer* leeft in het Engels en in programmeertalen nog voort als 'geheel getal'.

Volgens *van Dale* betekent differentiëren "de differentiaal, respectievelijk het differentiaalquotiënt bepalen". Maar wat is een differentiaal?

Differentiëren

Het correct definiëren van wat een differentiaal is heeft de wiskundigen sinds het einde van de zeventiende eeuw bezig gehouden. Het intuïtieve antwoord werd gegeven door Leibniz, een van de ontdekkers van de differentiaal- en integraalrekening: 'een oneindig klein verschil'. Leibniz gebruikte eerst het bovengenoemde *differentia*, maar voerde later het woord differentiaal in omdat het toch niet over echte verschillen ging.

Om aan te geven wat Leibniz bedoelde bekijken we hoe hij de raaklijn aan de grafiek van $y = x^2$ in het punt (a, a^2) bepaald zou kunnen hebben. Kies een punt b oneindig dicht bij a en bereken het verschil: $b^2 - a^2 = (b + a)(b - a)$ en deel dit door $b - a$. Er komt uit $b + a$ en dat is gelijk aan $2a$ omdat $b - a$ oneindig klein is. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is dus $2a$.

Deze redenering deugde niet helemaal, want als $b + a = 2a$ dan moet $b - a = 0$, maar dan hebben we zojuist 0 gedeeld door 0. Aan de andere kant, de methode gaf meestal wel het goede antwoord; er moest dus wel iets deugdelijks achter zitten.

Tegenwoordig differentiëren we $f(x) = x^2$ door keurig een limiet te nemen:

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \lim_{b \to a} b + a = 2a.$$

Integreren

Voor Leibniz was de oppervlakte onder de grafiek van een functie gelijk aan de som van oneindig veel oneindig smalle rechthoekjes. Hij noemde de integraalrekening in het begin *calculus summatorius* (sommeer-rekening) en voerde de ∫ (een langgerekte s) in als symbool voor de oppervlakte.

Het waren de broers Johann en Jacob Bernoulli die de term *calculus integralis* (integraalrekening) voorstelden omdat ze vonden dat je bij het bepalen van de oppervlakte de rechthoekjes van Leibniz tot één geheel samenvoegt.

In de muziek kennen we de verhalen van Mozart en Beethoven, genieën die op achtjarige leeftijd viool- of pianoconcerten gaven en die beschikten over een wonderbaarlijk gevoel voor muziek. Sommige mensen worden geboren met dit vermogen om contact te hebben met de hogere sferen van de muziek. Iets dergelijks zien we ook in de wiskunde. Terwijl de meeste leerlingen op school op hun wiskundesommen zitten te zwoegen, zal een enkeling verveeld het raam uit staren omdat hij of zij de opgaven in een handomdraai af heeft. Ook in het wiskundig onderzoek zijn er van deze uitzonderlijke genieën. Als bovendien hun leven een opmerkelijk verloop heeft gehad, is er een mooi verhaal te vertellen.

Srinivasa Ramanujan

Frits Beukers

Het leven en werk van Srinivasa Ramanujan vormt het verhaal van een wiskundig genie dat een unieke plaats binnen de wiskunde inneemt. Hij werd geboren op 22 december 1887 in Zuid-India en groeide onder armelijke omstandigheden op.

Ramanujans eerste contact met wiskunde bestond uit een boekje van S.L. Loney over vlakke meetkunde, dat hij zich eigen maakte toen hij twaalf jaar was. Voor hem ging een hele wereld open toen hij een exemplaar van G.S. Carr's *Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics* in handen kreeg. Dit boek is een verzameling van zo'n 6000 wiskundige stellingen, de meeste zonder bewijs. Vanaf dat moment ging het aan de universiteit van Madras niet goed met Ramanujan. Hij besteedde al zijn energie aan de ontwikkeling van zijn eigen wiskundige kennis, waardoor hij de overige onderdelen van de studie zoals de Engelse taal vergat.

Klerk in Madras

Ramanujan heeft nooit een universitaire studie afgemaakt. In plaats daarvan had hij het geluk dat R. Ramachandra Rao, een weldoener die in wiskunde geïnteresseerd was, hem een toelage toekende. Hierdoor werd Ramanujan in staat gesteld om ongestoord te kunnen werken. Daar was overigens niet veel voor nodig. Ramachandra Rao schreef: "Een korte, onhandige verschijning, ongeschoren, niet erg schoon, met één opvallend kenmerk — stralende ogen — kwam binnen met een gerafeld schrift onder zijn arm. Hij was straatarm en was uit Kumbakonam gevlucht om in Madras de rust te vinden die hij voor zijn onderzoekingen nodig had. Hij drong zichzelf nooit aan anderen op en hij wilde rust. Het enige dat hij wilde was zich geen zorgen hoeven te maken over zijn dagelijks brood opdat hij verder kon dromen."

Srinivasa Ramanujan (1887-1920)

Een brief uit India

Om op de lange duur niemand tot last te zijn, nam Ramanujan in 1912 een baan aan als klerk in Madras. Daar werd hij door zijn Engelse superieuren aangemoedigd contact te zoeken met Engelse wiskundigen. Op 16 januari 1913 ontving G.H. Hardy, één van de bekendste Engelse wiskundigen uit zijn tijd, een brief van Ramanujan met de vraag of hij het bijgesloten werk wilde doornemen: "I would request you to go through the enclosed papers. Being poor, if you are convinced that there is anything of value I would like to have my theorems published. (...) Requesting to be excused for the trouble I give you, I remain, Dear Sir, Yours truly, S. Ramanujan."

Die avond bestudeerden Hardy en zijn collega J.E. Littlewood de ongeveer 120 formules en stellingen die Ramanujan bij zijn brief had gevoegd.

Crank mail

Over de hele wereld ontvangen wiskundigen regelmatig zogenaamde 'crank mail'. Dat is post van amateurs die ten onrechte menen een belangrijke wiskundige ontdekking te hebben gedaan. Soms beweren ze dat het lot van de hele wereld van hun berekeningen afhangt. Meestal blijkt de inhoud van deze brieven even verward te zijn als de geesten die ze opschreven.

Geniaal

In Ramanujans geval kwamen Hardy en Littlewood tot een heel ander oordeel: ze hadden te maken met een rasecht genie. Later zou Hardy op zijn persoonlijke talentenschaal Ramanujan een 100 geven. Littlewood zou een 30 krijgen en Hardy zelf een 25. David Hilbert, de bekendste wiskundige uit die tijd, kwam op Hardy's schaal niet verder dan 80.

Van een groot aantal van Ramanujan formules kon Hardy niet eens aantonen of ze wel of niet juist waren. Maar ze moesten wel juist zijn, want anders zou niemand op het idee komen dergelijke wonderbaarlijke formules op te schrijven, aldus Hardy.

Cambridge

Hardy nodigde Ramanujan onmiddellijk uit naar Cambridge te komen. Na enige strubbelingen van Ramanujans kant arriveerde hij in maart 1914 in Engeland. De volgende vijf jaren werkten Hardy en Ramanujan samen in Trinity College. In 1917 werd Ramanujan Fellow van de Royal Society in Londen en Fellow van Trinity College. Elk van deze eerbetonen was nog nooit aan een Indiaas geleerde ten deel gevallen.

Voorbeelden

Misschien ben je nieuwsgierig naar de wiskunde die Ramanujan allemaal uitdacht. Op de volgende pagina vind je een voorbeeld dat over zogenaamde partities gaat. Veel van Ramanujan's ontdekkingen hebben betrekking op oneindige reeksen en oneindige producten. Voorbeelden daarvan vind je op de homepage van Pythagoras (kijk bij het augustusnummer). Dit zijn geen onderwerpen die nu op de middelbare school behandeld worden, maar met de nieuwe tweede fase komt daar verandering in.

Terug in India

Helaas was het leven in Engeland voor Ramanujan niet makkelijk. Het klimaat en zijn vegetarisch dieet in Engeland in oorlogstijd zorgden er voor dat zijn gezondheid sterk achteruit ging.
In 1919 keerde Ramanujan naar India terug. Het jaar daarop, op 26 april 1920, overleed hij. Hij was toen 32 jaar. De diagnose destijds was tuberculose, maar tegenwoordig denkt men meer aan een sterk vitaminegebrek. Ondanks zijn slechte gezondheid bleef Ramanujan in zijn laatste jaren aan wiskunde werken. Het was bijna een levensbehoefte. De zogenaamde 'mock theta functies' die hij terug in India ontdekte vormen nog steeds een bron van raadsels voor hedendaagse wiskundigen.

Bizarre formules

Hoewel veel van Ramanujan's formules er bizar uitzien komen ze niet zomaar uit de lucht vallen. Meestal is er een diepere achterliggende theorie die een natuurlijke verklaring voor dergelijke formules geeft. Voor een aantal van Ramanujan's formules waren deze technieken in Hardy's tijd bekend, voor andere kon men veel later pas een verklaring geven.

Ramanujans notebooks

Maar een klein deel van Ramanujans werk is gepubliceerd in wetenschappelijke tijdschriften. Het meeste werk is voor ons nagebleven in de vorm van schriften, waarvan een aantal pas in de jaren zestig in de bibliotheek van Cambridge werd ontdekt. In een omvangrijk project heeft Bruce Berndt deze 'notebooks' van Ramanujan onderzocht. Dit werk is pas enkele jaren geleden afgerond. Het resultaat is een serie van vijf boeken onder de titel *Ramanujan's Notebooks*. Het is een genot deze boeken door te bladeren en je over de resultaten erin te verbazen. Sommige onderwerpen hebben nog niets aan actualiteit verloren. In modellen voor theoretische natuurkunde, zoals statistische mechanica en stringtheorie, komen elementen van Ramanujans werk voor. Een aantal andere onderwerpen vormt nog steeds een mysterie voor de tegenwoordige wiskunde.

The man who knew infinity

Hardy zei zelf dat zijn kennismaking met Ramanujan een van de romantische momenten in zijn leven was. Het leven en werk van Ramanujan bevat inderdaad een element van mysterie en romantiek. In een recente BBC-documentaire over Ramanujan wordt dit heel mooi tot uiting gebracht. In het boek *The man who knew infinity: A life of the genius Ramanujan* van R. Kanigel wordt een boeiende beschrijving gegeven van het werk van Ramanujan en zijn samenwerking met Hardy.

De partitiefunctie geeft aan op hoeveel manieren een aantal knikkers kan worden opgedeeld in groepjes. Samen met Hardy heeft Ramanujan verschillende resultaten over de partitiefunctie ontdekt.

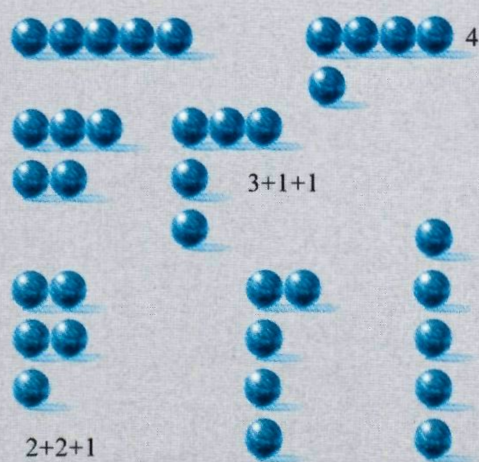
Ramanujan en de partitiefunctie

Frits Beukers

Een partitie van n voorwerpen is een opdeling van deze voorwerpen in groepjes. Zo kun je 5 knikkers verdelen in vier groepjes: één groepje van van 2 en drie groepjes van 1. Deze verdeling geeft een zogenaamde *partitie* van 5:

$$5 = 2 + 1 + 1 + 1.$$

De getallen in de som schrijven we gewoonlijk van groot naar klein op. Een andere partitie is $5 = 3 + 2$. Ook $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ (vijf groepjes) en $5 = 5$ (één groepje) zijn partities. Álle partities van 5 worden weergegeven in figuur 1:



Figuur 1. De partities van 5.

Het aantal partities van n geven we aan met $p(n)$. Dit aantal is dus een functie van n. In ons voorbeeld hebben we $p(5)=7$.

Tellen

Door te tellen kun je voor een aantal kleine waarden van n zelf het aantal partities $p(n)$ berekenen. De eerste paar waarden hebben we verzameld in tabel 2.

n	1	2	3	4	5	6	7
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	?

Tabel 2. De eerste paar waarden van de partitiefunctie. Je leest af dat $p(5) = 7$ (zie figuur 1). Kun je $p(7)$ berekenen?

Bizarre gelijkheden

De partitiefunctie heeft altijd de aandacht getrokken vanwege zijn bijzondere eigenschappen. Euler ontdekte bijvoorbeeld de volgende bizarre gelijkheid:

$$\begin{aligned} p(n) = {} & p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) \\ & - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) \\ & - p(n-22) - p(n-26) + p(n-35) \\ & + p(n-40) - \ldots \end{aligned}$$

Kun je hierin een patroon vinden? Als je het niet ziet schrijf dan de betrokken getallen als volgt op en kijk naar de verschillen tussen de getallen in elk paar en tussen de getallen in de opvolgende paren:

$$\begin{array}{rr} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 12 & 15 \\ 22 & 26 \\ 35 & 40 \\ .. & .. \end{array}$$

Euler gebruikte deze formule om $p(n)$ snel voor grote waarden van n uit te kunnen rekenen.

Ramanujans benaderingen

Ramanujan heeft in zijn werk daar een aantal opmerkelijke zaken aan toegevoegd. Bekend zijn zijn pogingen om een formule voor $p(n)$ te vinden. Zijn eerste benadering was de functie $q_1(n)$ gegeven door de formule:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\frac{d}{dn}\frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{24})}}}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}.$$

Deze functie gaf een verrassend goede benadering voor $p(n)$ zoals je in tabel 3 kunt zien. Ramanujan ontdekte echter een nog betere benadering, die gegeven wordt door de functie $q_2(n)$ met als formule:

$$q_1(n) + \frac{(-1)^n}{2\pi}\frac{d}{dn}\frac{e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{24})}}}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}.$$

Ramanujans vermoeden

Er bleek een rij steeds fijnere correcties op deze formule te bestaan met zulke goede benaderingen. Ramanujan vermoedde daarom dat er een exacte formule voor $p(n)$ zou moeten bestaan. Dit is heel opmerkelijk, want de functie $p(n)$ neemt alleen gehele waarden aan. De benaderende functies zijn, alhoewel ingewikkeld, gewone functies zoals je die in de analyse tegenkomt, en deze functies nemen in het algemeen geen gehele waarden aan. Later, in 1943, ontdekte Rademacher de precieze formule die Ramanujan zocht.

Meer informatie

Uitgebreidere informatie (onder andere over Rademachers formule) is te vinden op de homepage van Pythagoras (kijk bij het augustusnummer).

n	$q(n)$	$q_1(n)$	$q_2(n)$
10	42	41,62	42,06
50	204226	204211,07	204226,79
100	190569292	190568944,78	190569293,65
200	3972999029388	3972998993185,89	3972999029468,87

Tabel 3. Verschillende waarden van de partitiefunctie $p(n)$ en van de door Ramanujan gevonden benaderingen $q_1(n)$ en $q_2(n)$.

Wat heeft het wereldrecord dominostenen omgooien met wiskunde te maken? Het antwoord op deze vraag luidt: 'het domino-principe'. Dit is een krachtige techniek waarmee je allerlei wiskundige uitspraken kunt bewijzen.

Het domino-principe

André de Boer

Het wereldrecord dominostenen omtuimelen staat op 1,4 miljoen stenen. Het werd gevestigd op 28 augustus 1998 in Leeuwarden. Je hebt het misschien wel gezien op tv: een grote hal met een vloer-oppervlak van 4000 m^2 waarin een lint van 78 km dominostenen was uitgezet. In totaal waren er 2,3 miljoen stenen geplaatst. Op een gegeven moment kreeg de eerste steen een duwtje, deze viel om en gaf de tweede steen een duwtje, zodat deze omviel en waardoor ook de derde steen omviel ... enzovoort. Uiteindelijk vielen er 1,4 miljoen stenen om; net voldoende om het wereldrecord te vestigen en opgenomen te worden in het Guiness Book of Records.

Bewijzen

Stel je wilt bewijzen dat de som van de eerste n getallen gelijk is aan $\frac{1}{2}n(n+1)$. Met andere woorden, je wilt bewijzen dat:

$$1 = \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = 1$$
$$1 + 2 = \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2+1) = 3$$
$$1 + 2 + 3 = \tfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot (3+1) = 6$$

en ga zo maar door. In een formule:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \tfrac{1}{2}n(n + 1).$$

Je kunt controleren dat de formule klopt voor 1, 2 en 3.
Stel nu eens dat je wilt bewijzen dat deze formule klopt voor *alle* natuurlijke getallen 1, 2, 3, 4, ... Als je de formule eerst controleert voor 1, daarna voor 2, dan voor 3, dan voor 4, voor 5, voor 6, dan begrijp je dat het bewijs nooit afkomt. Ga maar na: stel dat je vanaf je achttiende tot je achtenzeventigste levensjaar elke dag acht uur aan dit bewijs werkt. Als je 1 minuut nodig hebt om de formule voor één getal te controleren, dan zal je bij je overlijden niet verder zijn dan het getal:

$$60 \times 365\tfrac{1}{4} \times 8 \times 60 = 10.519.200.$$

In deze berekening staat $365\frac{1}{4}$ omdat eens in de vier jaar een jaar 366 dagen telt. Je ziet dat je dan nog lang niet klaar bent. Zelfs de snelste computer zal het bewijs nooit af krijgen, eenvoudig omdat er te veel getallen zijn.

Volledige inductie

Er bestaat een techniek die het mogelijk maakt de formule in één klap voor alle getallen tegelijk te bewijzen. Deze techniek wordt *natuurlijke* of *volledige inductie* genoemd en doet met getallen hetzelfde als met de dominostenen gebeurde.

Voor deze methode hoef je de formule maar voor één geval te controleren, namelijk voor $n = 1$. Verder moet je het *domino-effect* aantonen. Dit houdt in dat je van een bewijs van de formule voor een bepaald getal een bewijs kunt maken voor het volgende getal.

Het bewijs van de formule voor een bepaald getal kun je je voorstellen als een omgevallen dominosteen. Het domino-effect garandeert dat als de formule voor een bepaald getal 'omgevallen is', de formule ook 'omvalt' voor het volgende getal.

Als je $n = 1$ gecontroleerd hebt, heb je de eerste steen omgegooid. Met het domino-effect volgt dan ook de tweede steen, de derde steen, enzovoort. Het domino-effect zorgt er voor dat als de formule 'omgevallen is' voor het lint van alle getallen tot en met de n-de steen, de formule ook omvalt voor de $(n + 1)$-ste steen. Zodoende weet je dan zeker dat de formule 'omvalt' voor *alle* getallen.

Een voorbeeld

Met volledige inductie gaan we de volgende formule voor $1+2+3+ \cdots + n$ bewijzen:

$$1+2+3+ \ldots +n = \tfrac{1}{2}n(n+1).$$

Daarvoor moeten we twee dingen doen:

1. de formule bewijzen voor $n=1$;

2. het domino-effect aantonen.

Gauss

Het dominoprincipe is niet de enige wiskundige bewijstechniek. Zo gaat het verhaal dat de jonge Gauss op school als strafwerk een keer de eerste 100 getallen bij elkaar op moest tellen. Binnen enkele seconden had hij al de uitkomst bepaald. Hoe deed hij dat? Hij telde het eerste getal uit $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$ bij het laatste getal op, het tweede getal bij het één na laatste getal en zo verder:

$$\begin{aligned} 1 + 100 &= 101 \\ 2 + 99 &= 101 \\ 3 + 98 &= 101 \\ &\cdots \\ 50 + 51 &= 101 \end{aligned}$$

Er staat nu 50 keer de uitkomst 101, dus het antwoord luidt:

$$50 \times 101 = 5050.$$

Deze methode bewijst voor $n = 100$ zónder volledige inductie de formule $1+ 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$, immers: $50 = \frac{1}{2} \times n$ en $101 = n +1$.

pythagoras

Ja, ik neem een

abonnement op Pythagoras

en ontvang de priemgetallenposter gratis

naam	
adres	
postcode en woonplaats	
telefoonnummer	
handtekening	

Een abonnement op Pythagoras kost ƒ 37,50 per jaar.
Bij tussentijdse abonnering ontvangt u alle nummers van de lopende jaargang. Wacht met betalen tot u de acceptgiro thuisgestuurd krijgt. Alle abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk is opgezegd bij de abonnee-administratie.

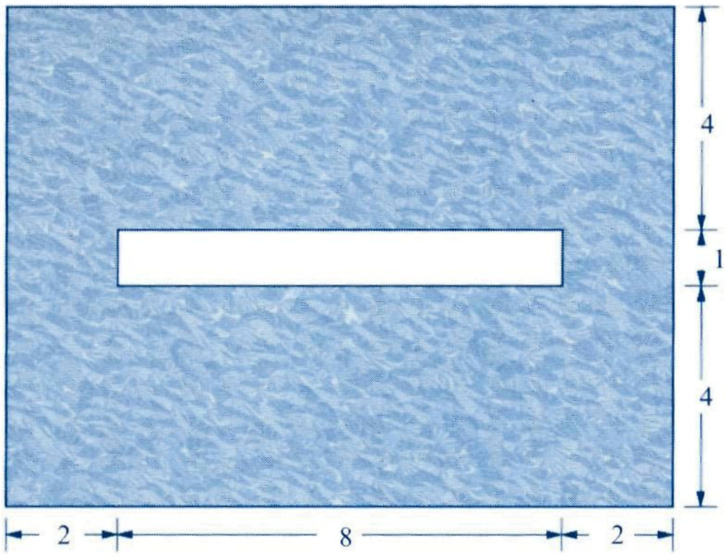
Postzegel
niet nodig

Gratis voor nieuwe abonnees: de priemgetallenposter

Pythagoras

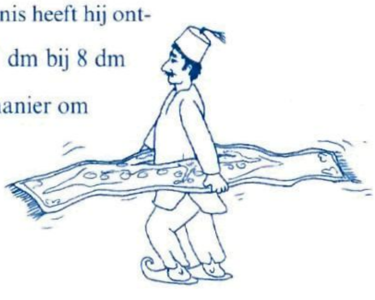
Antwoordnummer 17

7940 VB Meppel



Verknipt

Abdul, tapijtverkoper te Instanbul, heeft een probleem. Hij moet voor zonsondergang een stuk tapijt van 1 m bij 1 m leveren aan een Engelse toerist. Hij wil het maken van een stuk tapijt van 9 dm bij 12 dm dat hij nog heeft liggen, maar tot zijn grote ontsteltenis heeft hij ontdekt dat iemand er in het midden een stuk van 1 dm bij 8 dm heeft uitgeknipt. Abdul vindt echter al vlug een manier om het tapijt in twee stukken te knippen zó, dat hij het weer aan elkaar kan naaien met het gewenste resultaat. Zie jij hoe dit moet?



Postzegel
niet nodig

Pythagoras

Antwoordnummer 17

7940 VB Meppel

pythagoras

wiskundetijdschrift voor jongeren

Ja, ik neem een

leerlingabonnement

op Pythagoras

naam	
adres	
postcode en woonplaats	
telefoonnummer	
geboortedatum	klas
school	

Een leerlingabonnement op Pythagoras kost *ƒ* 30,- per jaar en geldt alléén voor leerlingen tot 18 jaar.

Bij tussentijdse abonnering ontvangt u alle nummers van de lopende jaargang. Wacht met betalen tot u een acceptgiro thuisgestuurd krijgt. Alle abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk is opgezegd bij de abonnee-administratie. Bij het bereiken van de 18-jarige leeftijd wordt dit abonnement automatisch omgezet in een gewoon abonnement.

Het bewijs

1. Voor $n = 1$ is de formule eenvoudig:

$$1 = \tfrac{1}{2} \cdot (1+1)$$

De eerste steen is omgekukeld.

2. In de volgende stap van het bewijs moeten we aantonen dat als de formule waar is voor het getal n, de formule ook waar is voor het volgende getal $n+1$. Stel dus dat de formule klopt voor het getal n. Men noemt deze aanname de *inductie-veronderstelling*:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1).$$

Let op: de formule geldt hier voor slechts één bepaalde n (en niet voor *alle* n). Nu volgt:

$$\begin{aligned}
&1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) \\
&= (1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (n+1) \\
&= \tfrac{1}{2}n(n+1) + (n+1) \\
&= (n+1)(\tfrac{1}{2}n+1) \\
&= \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2) \\
&= \tfrac{1}{2}(n+1)((n+1)+1).
\end{aligned}$$

Hier staat de formule die we wilden bewijzen, alleen staat nu op de plaats van de n het getal $n+1$. Met andere woorden: als de formule opgaat voor n, dan gaat hij ook op voor $n+1$.

Omdat we de formule waar is voor $n = 1$, is hij nu ook waar voor $n = 2$. En omdat hij waar is voor $n = 2$, is hij ook waar voor $n = 3$. En daarom ook voor $n = 4$, enzovoort. Met behulp van het domino-principe volgt dus dat de formule waar is voor alle getallen 1, 2, 3, 4, …

OPGAVEN.

1. Laat met volledige inductie zien dat voor alle n = 1, 2, 3, ... de volgende formule waar is:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

2. Bewijs voor alle n = 1, 2, 3, …

$$3^{2n+1} + 2^{n-1} \text{ is deelbaar door 7.}$$

De bewijzen kun je vinden op de homepage van Pythagoras. Heb je geen Internet, stuur dan een briefje naar de redactie, dan krijg je de oplossing thuisgestuurd.

Financiële wiskunde

IBNR

Dennis Dannenburg

Aan het begin van elk jaar maken verzekeringsmaatschappijen een inschatting van de hoeveelheid geld die zij nog moeten uitkeren voor verzekeringen die in het voorafgaande jaar (of eerder) liepen. Hieronder vallen uitkeringen voor schadegevallen die al wel doorgegeven zijn aan de verzekeraar maar nog niet zijn afgehandeld, bijvoorbeeld door juridische touwtrekkerij, maar ook schadegevallen die helemaal nog niet bekend zijn bij de verzekeraar. Denk bijvoorbeeld aan het ziekenhuis dat nog geen rekening heeft gestuurd aan de ziektekostenverzekeraar.

Incurred But Not Reported

In het verzekeringsjargon worden nog niet gemelde schaden aangeduid met de Engelse term Incurred But Not Reported (IBNR) claims en niet afgehandelde schaden als Reported But Not Settled (RBNS) claims. Tezamen heten ze gewoon IBNR-schaden. Het bedrag dat een verzekeraar naar verwachting in totaal nog moet uitkeren, wordt in een pot opzij gezet die de IBNR-voorziening of schadevoorziening wordt genoemd. Deze voorziening wordt berekend door actuarissen (verzekeringswiskundigen). Daarvoor maken zij gebruik van gegevens die uit het verleden bekend zijn over IBNR-schaden. Daarbij worden de schadebedragen die reeds zijn betaald onderverdeeld naar het verzekeringsjaar waarop ze betrekking hebben — het schadejaar geheten — en het aantal afwikkelingsjaren tussen schade- en het betalingsjaar. Op die manier ontstaat een driehoek met gegevens. In de tabel hieronder zie je een voorbeeld met schadebetalingen voor autoverzekeringen over de periode 1992 tot en met 1998.

	Afwikkelingsjaar						
	0	1	2	3	4	5	6
Schade-jaar							
1992	153	205	222	236	239	243	244
1993	121	197	229	239	242	243	
1994	182	262	282	303	305		
1995	197	279	317	336			
1996	254	339	385				
1997	201	287					
1998	261						

De schadebetalingen in de tabel staan vermeld per duizend gulden en zijn cumulatief, hetgeen wil zeggen dat voor ieder afwikkelingsjaar steeds het totaal uitgekeerde bedrag per schadejaar is opgenomen.

Als we ervan uitgaan dat zes jaar na het schadejaar alle schaden bekend zijn en afgehandeld, dan kunnen we de IBNR-voorziening berekenen door bovenstaande driehoek op de een of andere manier aan te vullen tot een vierkant. De voorziening is dan gelijk aan de som van de betalingen in de rechterkolom van het vierkant min het totaal van de bedragen die al zijn uitgekeerd en op de schuine zijde van de driehoek staan (261 + 287 + 385 + 336 + 305 + 243 + 244 = 2,061 miljoen).

Chain-Ladder methode

Van de talloze rekenmethoden om de driehoek uit te breiden tot een vierkant, is de Chain-Ladder methode een van de bekendste. Bij deze methode wordt verondersteld dat de verhouding tussen aangrenzende getallen in twee opeenvolgende kolommen steeds ongeveer hetzelfde is. We kunnen de factor tussen de twee kolommen berekenen door de som van de bedragen in de rechterkolom te delen door de som van de bedragen in de linker kolom. In onze voorbeeld-driehoek is de factor tussen de eerste en de tweede kolom gelijk aan:

$$\frac{205+197+262+279+339+287}{153+121+182+197+254+201} = 1{,}416.$$

Het ontbrekende getal in de tweede kolom berekenen we door het laatste bedrag in de eerste kolom te vermenigvuldigen met deze factor: 261 × 1,416 = 370.

Om vervolgens de twee ontbrekende bedragen in de derde kolom van afwikkelingsjaar 2 te bepalen, berekenen we eerst de verhouding tussen de tweede en derde kolom:

$$\frac{222+229+282+317+385}{205+197+262+279+339} = 1{,}119.$$

Dan vullen we het op een na laatste getal bij afwikkelingsjaar 2 aan met: 287 × 1,119 = 321. Het onderste bedrag krijgen we door de 370 die we al berekend hadden ook te vermenigvuldigen met 1,119 met als resultaat 414.

Voeren we dit Chain-Ladder recept uit voor alle kolommen in de driehoek, dan komen we uit op het volgende vierkant:

	Afwikkelingsjaar						
	0	1	2	3	4	5	6
Schade-jaar							
1992	153	205	222	236	239	243	244
1993	121	197	229	239	242	243	244
1994	182	262	282	303	305	308	309
1995	197	279	317	336	339	342	343
1996	254	339	385	408	412	416	418
1997	201	287	321	341	344	347	348
1998	261	370	414	439	443	447	449

De som van de bedragen in de laatste kolom is 2,355 miljoen gulden. Dit is het totaal aan uitkeringen dat de autoverzekeraar verwacht te moeten doen voor de schadejaren 1992 tot en met 1998. We zagen dat er al 2,061 miljoen is uitgekeerd, zodat 2355 – 2061 duizend gulden opzij gezet moet worden als voorziening, 294 duizend gulden dus.

Belastingen

Het aanvullen van gegevens in driehoeken komt niet alleen voor bij verzekeringen, maar bijvoorbeeld ook op het Ministerie van Financiën, waar men wil weten hoeveel de belastingontvangsten in de komende jaren zullen zijn. Net als bij schadebetalingen worden belastingen soms pas lange tijd na het jaar waar ze betrekking op hebben betaald. De voorspelling van de belastingopbrengsten wordt dan gebaseerd op een driehoek met jaarlijkse belastingontvangsten, uitgesplitst naar belastingjaar.

Kun jij de onderstaande opgaven oplossen? Stuur dan je oplossing naar het onderstaande adres en maak kans op een boekenbon van 25 gulden!

Pythagoras

Opgave 49

Het spel Hex wordt gespeeld op een driehoekig rooster van $n \times n$ punten in de vorm van een ruit. Om beurten leggen speler A en speler B een steen van hun eigen kleur op één van de nog lege punten. Beide spelers krijgen van tevoren twee tegenover elkaar liggende zijden van de ruit toegewezen. Een speler wint door een aaneengesloten pad van zijn eigen kleur te vormen dat zijn twee zijden verbindt.

In het onderstaande spel is n gelijk aan 4, speelt speler A met rood verticaal en speler B met zwart horizontaal. Speler A heeft gewonnen.

```
      z  z  r  .
     .  r  r  .
    .  r  z  z
   .  .  r  .
```

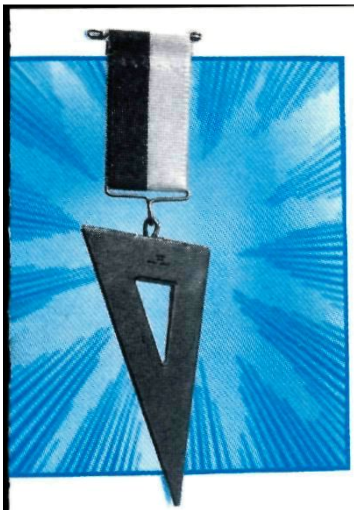
In de volgende spelsituatie speelt speler A ook verticaal met rood en speler B horizontaal met zwart. Speler B is aan zet. Bewijs dat hij kan winnen.

```
            .  .  .  .  .  .  .
           .  .  r  .  .  .  .
          .  .  .  .  z  .  .
         .  .  .  r  .  .  .
        .  .  r  z  r  .  .
       .  .  .  .  .  .  .
      .  .  .  .  .  z  .
```

Opgave 50

Laat zien dat voor elk natuurlijk getal n geldt:

$$\begin{aligned}&\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots+\tfrac{1}{n}\right)^2\\&+\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots+\tfrac{1}{n}\right)^2\\&+\left(\tfrac{1}{3}+\cdots+\tfrac{1}{n}\right)^2+\cdots+\left(\tfrac{1}{n}\right)^2\\&=2n-\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots+\tfrac{1}{n}\right)\end{aligned}$$



Olympiade

Stuur je oplossing naar:
Pythagoras Olympiade
TU Eindhoven
Faculteit Wiskunde
Hoofdgebouw kamer 9.50
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
email: sander@win.tue.nl

Vermeld bij de oplossing je *naam*, *adres*, *school* en *klas*. Stuur bij de antwoorden ook een *toelichting*, waarin uitgelegd wordt hoe je aan het antwoord gekomen bent (een berekening of een bewijs). Insturen is mogelijk tot en met 15 september 1999. Onder de inzenders van goede oplossingen wordt per opgave een boekenbon van vijfentwintig gulden verloot. Let op: het is de bedoeling dat je de oplossing *zelf* vindt!
Hieronder volgen de oplossingen van de opgaven uit het aprilnummer.

Veel succes!
Ronald van Luijk, Wim Oudshoorn en Sander van Rijnswou.

Opgave 45

Kies een getal van 13 cijfers (in het tientallig stelsel). Tel daarbij het getal op dat je krijgt door de cijfers achterstevoren op te schrijven. Laat zien dat het eindresultaat altijd een even cijfer bevat. Bijvoorbeeld, als je begint met 1234567890248, dan reken je uit: 1234567890248 + 8420987654321 = 9655555544569. Dit laatste getal bevat de even cijfers 4 en 6.

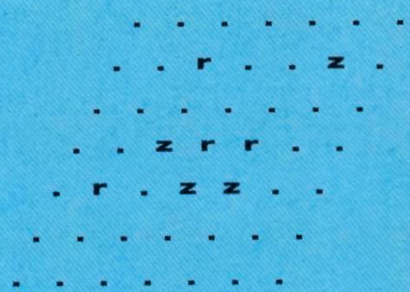
OPLOSSING. We schrijven een getal van 13 cijfers als volgt: abcdefghijklm. Elke letter stelt een decimaal voor. We moeten nu de volgende optelling uitvoeren.

$$\begin{array}{r} a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ i\ j\ k\ l\ m \\ \underline{m\ l\ k\ j\ i\ h\ g\ f\ e\ d\ c\ b\ a} + \end{array}$$

We nemen aan dat in het resultaat alle cijfers oneven zijn en kijken hoe lang we dat vol kunnen houden. In het midden staat onder elkaar $g + g = 2g$. Dat zou normaal gesproken een even cijfer opleveren.

Rectificatie opgave 47

Opgave 47 van het juninummer bevatte een aantal fouten. Deze opgave telt daarom niet mee voor de eindstand van de Pythagoras Olympiade. De correcte figuur is hiernaast afgebeeld. De opgave luidde: in volgende spelsituatie speelt speler *A* verticaal met rood en speler *B* horizontaal met zwart. Speler *A* is aan zet. Wat speler *A* ook doet, speler *B* kan winnen. Kun je dit bewijzen?



Pythagoras Olympiade

Blijkbaar levert de optelling juist daarvoor een '1-onthouden' op.

Daaruit volgt dat $h + f > 9$ ($h + f = 9$ kan niet, want levert een 0 op rechts van $g + g$). Maar als $h + f > 9$, dan krijgen we ook een 1 extra in de optelling $e + i$ aan de linkerkant. Blijkbaar levert $e + i$ een even decimaal op. Om te voorkomen dat $e + i$ rechts in de optelling een even cijfer oplevert, moet gelden $j + d > 9$. Door weer naar de linkerkant te kijken, zien we dat $c + k$ even is. Daarom moet gelden $l + b > 9$, zodat $a + m$ even is. Maar ja, dan is het meest rechtse cijfer even en dat kunnen we niet meer voorkomen. Er is dus minstens één even cijfer.

Deze opgave werd opgelost door: Herbert Beltman van de **Waerdenborch** te Holten, Johan de Ruiter van het **Farel College** te Ridderkerk, Michiel van Dam van het **Groene Hart Lyceum** te Alphen a/d Rijn, Jan Maas van het **Aloysius College** te Den Haag, Jan Tuitman van het **Praedinius Gymnasium** te Groningen, Peter Deleu uit Hulste (België), Gertjan Kok van het **Sint-Maartenscollege** te Rijswijk, H. Verdonk uit Den Haag.
De boekenbon gaat naar Jan Maas.

Opgave 46

We gaan elke breuk $\frac{a}{b}$ schrijven als som van breuken met teller 1. We doen dit als volgt. Kies het kleinste natuurlijke, positieve getal p zó, dat $\frac{a}{b} - \frac{1}{p}$ niet-negatief is. Vervolgens kiezen we de kleinste q zó, dat $\frac{a}{b} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ niet-negatief is. Zo gaan we verder, en we op nul uitkomen, dan hebben we $\frac{a}{b}$ op de gewenste manier geschreven. Laat zien dat dit algoritme werkt, dat wil zeggen dat je na eindig veel stappen altijd op nul uit komt. Een voorbeeld: als we starten met $\frac{4}{25}$, dan is de eerste breuk $\frac{1}{7}$, omdat $\frac{4}{25} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{150}$. We krijgen:

$$\frac{4}{25} = \frac{1}{7} + \frac{1}{59} + \frac{1}{5163} + \frac{1}{53307975}$$

OPLOSSING. Allereerst mogen we aannemen dat $\frac{a}{b}$ kleiner is dan 1. Als de breuk namelijk 1 is of groter, dan halen we er net zo lang $\frac{1}{1}$ af, totdat dit wél het geval is. Vervolgens laten we zien dat de teller van de tussenresultaten steeds afneemt. Als we dat gedaan hebben volgt daaruit dat het algoritme eindigt. De teller kan namelijk niet negatief kan worden. Als de teller steeds kleiner wordt, wordt de teller op een gegeven moment 0 en dan is het algoritme klaar. Veronderstel dat we van de breuk $\frac{a}{b}$ de breuk $\frac{1}{x}$ afhalen. We houden dan over

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{x} = \frac{ax - b}{bx}$$

We willen laten zien dat $ax - b$ kleiner is dan a. Het zou kunnen zijn dat de breuk nog te vereenvoudigen is, maar in dat geval wordt de teller nóg kleiner. Veronderstel dat $ax - b > a$. We kunnen x dan vervangen door $x - 1$ want $a(x - 1) - b = (ax - b) - a > 0$. Maar het algoritme schrijft voor steeds een zo groot mogelijke breuk van $\frac{a}{b}$ af te halen en $\frac{1}{x-1}$ is groter dan $\frac{1}{x}$. Conclusie: het algoritme stopt na een eindig aantal stappen. NB. Dit algoritme was al bekend aan Fibonacci (1170-1250).

Deze opgave werd opgelost door: Herbert Beltman van de **Waerdenborch** te Holten, Jan Tuitman van het **Praedinius Gymnasium** te Groningen, Peter Deleu uit Hulste, Gertjan Kok van het **Sint-Maartenscollege** te Rijswijk. De boekenbon gaat naar Jan Tuitman.

Zo snel mogelijk

de oplossing van pagina 1

Leon van den Broek

Op bladzijde 1 werd de volgende aanpak voorgesteld: laat A de zaklamp steeds terugbrengen. Dus: A en B heen, A terug, A en C heen, A terug, en tenslotte A en D heen. Deze aanpak duurt 2+1+4+1+6 = 14 minuten.

De oplossing

Een andere aanpak is om de twee langzaamste mensen samen te laten lopen en de twee snelste de zaklamp terug te laten brengen. Dus: A en B heen, A terug, C en D heen, B terug, A en B heen. Nu is het viertal sneller aan de overkant, namelijk in

$$2+1+6+2+2 = 13 \text{ minuten.}$$

Je kunt zelf nagaan dat als je de twee langzaamste *niet* samen laat lopen, je minstens 14 minuten nodig hebt.
Bovendien kunnen de twee langzaamste niet als eerste of als laatste oversteken, want dan moet een van hen nog een keer, en dat kost ook meer dan 13 minuten. Sneller dan 13 minuten kan het dus niet.

Variabelen

Met een beetje wiskunde kunnen we het probleem analyseren. We maken het probleem algemener door variabelen in te voeren. Het aantal minuten dat A nodig heeft voor de oversteek noemen we a, de looptijden van B, C en D noemen we achtereenvolgens b, c en d. Stel $a < b < c < d$.
De eerste aanpak kost

$$b + a + c + a + d \text{ minuten.}$$

De tweede aanpak kost

$$b + a + d + b + b \text{ minuten.}$$

De tweede aanpak is sneller dan de eerste als $a + 3b + d < 2a + b + c + d$, ofwel als $2b < a+c$, ofwel als $b - a < c - b$. Een voordeel van deze wiskundige benadering is dat je hiermee goed kunt zien welke van de twee aanpakken het snelst is, ook voor andere loopsnelheden. Zo zie je dat de looptijd van de langzaamste er helemaal niet toe doet. Het gaat alleen om het verschil in looptijd van de snelste twee en het verschil in looptijd van de middelste twee!

Meer personen

Een tweede voordeel van het invoeren van variabelen is dat je hiermee ook het analoge probleem met vijf (of nog meer) mensen kunt aanpakken. Maar bij vijf personen wordt het allemaal wel ingewikkelder. Een volledige lijst telt dan al 4320 mogelijkheden. Uitdagingen genoeg!

BOEKEN

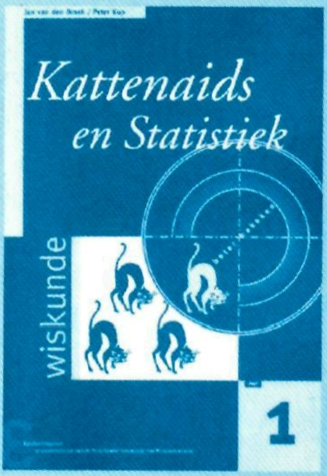
Kattenaids, robots en Fermat

Middelbare scholieren bespreken recent verschenen boeken en CD-roms.

In de nieuwe tweede fase van het vwo moet elke leerling naast de verplichte stof zelfstandig twee keuzeonderwerpen bestuderen. De boekjes uit de *Zebrareeks* zijn bedoeld als materiaal voor deze zelfstudie. Er komen boekjes over onder andere perspectieftekenen, iteratie en chaos, de gulden snede en schatten. In het voorjaar van 1999 is het eerste boekje uitgekomen — het gaat over het toetsen van hypotheses en heet *Kattenaids en statistiek*.

Zwerfkatten

Hebben zwerfkatten vaker kattenaids dan huiskatten? In *Kattenaids en statistiek* wordt deze vraag bekeken aan de hand van een steekproef onder Nederlandse asielkatten (echte zwerfkatten onderzoeken is nogal lastig). De gegevens zijn afkomstig van een onderzoek waarin geprobeerd werd te bepalen of kattenaids afhangt van eigenschappen zoals leeftijd, woonomgeving en geslacht van de kat.



In het boekje worden verschillende methodes en formules behandeld die gebruikt worden bij het toetsen van hypotheses. Ik heb de inhoud vergeleken met het hoofdstuk over het toetsen van hypotheses uit mijn wiskundemethode (Getal en Ruimte); *Kattenaids en statistiek* gaat telkens iets verder. De oefenopgaves gaan over praktijkvoorbeelden zoals aderverkalking bij roodstaartpapegaaien en zijn met de formules uit de hoofdstukken prima op te lossen. Er zijn geen andere hulpmiddelen nodig dan gezond verstand en een rekenmachine: de tabel van de normale verdeling staat achterin het boek, evenals de antwoorden van de opgaven.

Dit boekje biedt prima materiaal voor zelfstudie. Of de laatste hoofdstukken geschikt zijn voor de minder sterke leerlingen kan ik niet goed beoordelen, maar naar mijn idee is dit boekje op het juiste niveau geschreven. Het boek bevat een aantal slordigheden zoals tikfouten, maar dat mag geen probleem opleveren.

Kattenaids en statistiek is een aanwinst voor elke wiskunde A2 scholier in de tweede fase, en tevens voor alle overige geïnteresseerden. Het is te hopen dat de Zebrareeks op deze manier voortgezet wordt en dat alle scholen deze Zebra-boekjes gaan gebruiken.

Marte Koning

Robot-club

Als je je eigen robot kon bouwen, wat zou die dan doen? Dat kun je uitvinden met de cd-rom *Robot Club*. Een groep jongens en meisjes heeft een club opgericht die robots ontwerpt, bouwt en programmeert. Als jij lid wil worden is dat best, maar je moet je wel bewijzen.

Het spel

De opdracht van *Robot Club* is een robot te bouwen die verschillende handelingen kan uitvoeren. Je begint met het frame van de robot, vervolgens monteer je sensoren en rupsbanden. Daarna ga je de robot programmeren. De programmeertaal is vrij simpel: 'als dit, dan dat'.

Eerst moet je in een oefenfase een aantal testen doorwerken, daarna ben je een volwaardig lid van de *Robot Club*. Je moet nu een aantal klussen opknappen, en daarmee begint het echte spel. Van alles kan je aan je robot monteren, maar je moet kijken wat je nodig hebt. Met van alles moet rekening gehouden worden: vijanden, gif-plassen en obstakels kunnen je robot kapot maken; door te veel handelingen kan je energie opraken. Je moet je doel dus bereiken met zo min mogelijk handelingen.

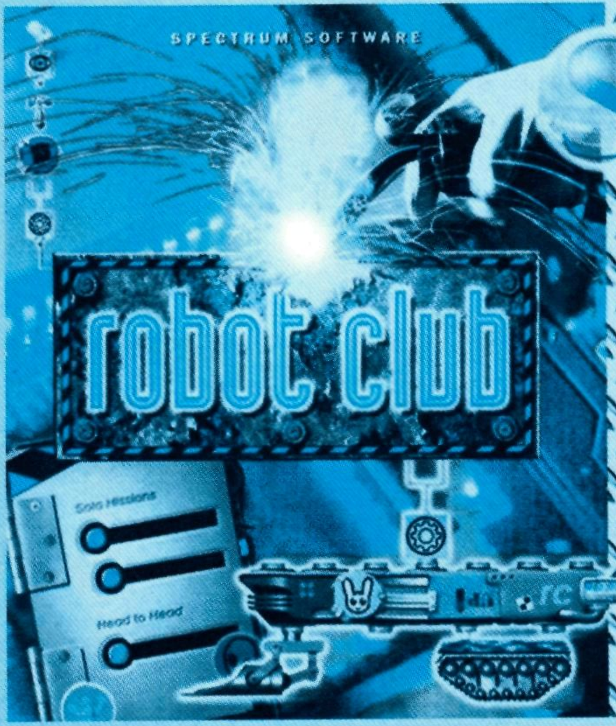
De test

Met deze informatie begon ik vol enthousiasme aan het spel. De testfase was eenvoudig, maar toen het echte werk begon vond ik de programmeertaal niet meer zo vanzelfsprekend. Als je bijvoorbeeld in taak 1 zegt dat hij op het eind naar taak 2 moet switchen, dan wordt er niet naar 2, maar naar 3 gesprongen! Ik begreep er niks van. Andere programmeertalen zoals Qbasic vind ik veel duidelijker.

Omdat het steeds maar niet lukte, begon het spel me danig te irriteren. Als het dan uiteindelijk lukt, kom je in de volgende opdracht weer vast te zitten. Zo ging het de hele tijd door. Nee, erg leuk vond ik het toen niet meer. Dit spel kan niet tippen aan *The Incredible Machine* (TIM), een vergelijkbaar spel. Bij TIM verloopt het spel veel vlotter: in een uur ben je in level 20, terwijl je bij *Robot Club* dan net de testfase en een of twee opdrachten afgerond hebt. Het enige pluspunt van *Robot Club* zijn de grappige video's.

De programmeertaal van *Robot Club* zou vanzelfsprekender moeten zijn, de grafische verzorging beter en misschien dat het spel met een leuk muziekje al veel aantrekkelijker wordt.

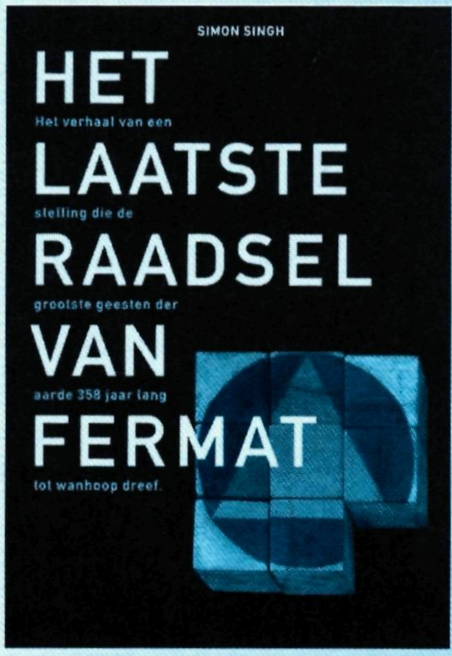
Jaïr Smits



hobby & vrije tijd

Fermat's raadsel

Toen Pierre de Fermat rond 1637 een terloopse aantekening in zijn exemplaar van Diophantus' *Arithmetica* maakte, had hij waarschijnlijk geen idee van de geweldig moeilijke opgave waarmee hij de wiskundige wereld opzadelde en waar generaties wiskundigen en amateurs zich na hem het hoofd over zouden breken. Fermat beweerde dat er geen oplossingen bestonden van de vergelijking $x^n + y^n = z^n$, waarbij x, y, z en n gehele getallen zijn met $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ en n groter dan 2. Dit was op zich een fantastische vondst, maar het probleem was dat Fermat er geen bewijs voor gaf. In de marge schreef hij dat hij een 'waarlijk spectaculair bewijs' gevonden had, maar dat er geen ruimte was om het te noteren. Over dit probleem, dat bekend geworden is als de laatste stelling van Fermat, schreef Simon Singh *Het laatste raadsel van Fermat*, met als ondertitel: "Het verhaal van een stelling die de grootste geesten der aarde 358 jaar tot wanhoop dreef".



Singh vertelt in acht hoofdstukken over de belangrijkste figuren in de geschiedenis van het probleem: van Pythagoras, op wiens stelling die van Fermat een variatie is, tot Andrew Wiles, die na jaren van eenzaam onderzoek in 1994 het bewijs leverde. Doordat Singh zich concentreert op het verhaal achter de Stelling en niet op de wiskunde die erbij betrokken is, is het boek ook zonder veel wiskundige kennis goed leesbaaar. Ook de iets moeilijker aanhangsels achter in het boek zijn goed te volgen.

Het bewijs van de Stelling van Fermat grijpt terug op allerlei deelgebieden van de wiskunde. Singh illustreert dit door behalve over getaltheorie ook kort te vertellen over onderwerpen als groepentheorie, meetkunde en topologie. Het nadeel hiervan is dat hij soms wat afdwaalt van het onderwerp. In hoofdstuk 6 en 7 volgt de schrijver Wiles op de voet bij zijn zoektocht naar het definitieve bewijs. Dit maakt het verhaal spannend, hoewel de afloop al bekend is.

Het laatste raadsel van Fermat is een goed leesbaar boek, aan te raden voor mensen die op zoek zijn naar het verhaal achter de wiskunde.

Allard Veldman

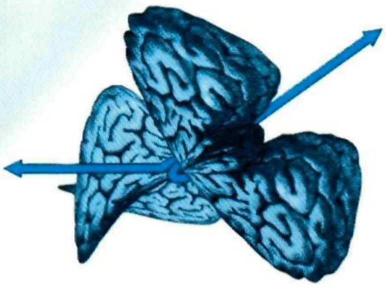
Besproken boeken/CD-rom's

Jan van de Broek en Peter Kop, *Kattenaids en statistiek*, Epsilon Uitgaven i.s.m. de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, ISBN 9050410502, fl. 14,75. (Speciale jaarabonnementen voor scholen)

Robot Club, Spectrum software, ISBN 9053440879, fl. 69,90.

Simon Singh, *Het laatste raadsel van Fermat*, De Arbeiderspers, ISBN 9029537280, fl. 59,90.

Drog redeneringen



Elders in dit nummer hebben we het domino-principe uit de doeken gedaan. Maar je moet het principe wel correct toepassen, want anders kun je hiermee aantonen dat in Nederland iedereen even oud is.

Alle Nederlanders zijn even oud

André de Boer

Iedereen in Nederland is even oud. Dat zullen we hier gaan bewijzen. In feite gaan we iets algemeners bewijzen, namelijk:

In elke groep mensen is iedereen even oud.

Als dit waar is, is ook iedereen in Nederland even oud. We bewijzen de algemenere bewering. Het aantal mensen in de groep noemen we n. Voor een bewijs met volledige inductie moeten we twee dingen aantonen:

1. nagaan dat de bewering geldt voor $n = 1$.

2. het *domino-effect*:
aannemende dat de bewering klopt voor n personen, moeten we aantonen dat de bewering ook klopt voor $n + 1$ personen.

Het bewijs

1. De eerste stap is eenvoudig. Er is maar één persoon, dus iedereen in de groep heeft dezelfde leeftijd. De eerste dominosteen van het bewijs is gevallen.

2. In de tweede stap van het bewijs moeten we het domino-effect aantonen: als de bewering klopt voor n personen, dan ook voor $n + 1$ personen. Neem daarom aan dat de uitspraak waar is voor elke gezelschap dat uit n personen bestaat, dit is de inductieveronderstelling. Bekijk nu een groep van $n + 1$ personen:

$$\underbrace{\bullet\bullet\bullet\cdots\bullet\bullet\bullet}_{n+1}$$

Als we de eerste of de laatste persoon weglaten, houden we n personen over:

$$\rlap{$\overbrace{}^{n}$}\bullet\;\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet\bullet\;\bullet}_{n}$$

Wegens de inductieveronderstelling zijn de eerste n personen allemaal even oud. Hetzelfde geldt voor de laatste n personen. De eerste persoon is dus even oud als een van de middelste $n - 1$ personen, die op zijn beurt even oud is als de laatste persoon. De eerste persoon is daarom even oud als de laatste persoon. Conclusie: alle $n + 1$ personen hebben dezelfde leeftijd. Nu het domino-effect is aangetoond en de bewering bewezen is voor een groep van 1 personen, geldt de bewering voor élk aantal personen: iedereen in Nederland is even oud!

We weten natuurlijk allemaal dat dit niet klopt. We hebben het principe van volledige inductie dus verkeerd gebruikt. Zie jij waar de fout zit? De oplossing van dit raadsel kun je vinden op de homepage van Pythagoras. Heb je geen Internet, stuur dan een briefje naar de redactie, dan krijg je de oplossing thuisgestuurd.

Vier Sangaku oplos

In het juninummer van Pythagoras stonden vier Sangaku-opdrachten: tradionele wiskundeproblemen die vroeger in Japanse tempels hingen. In dit nummer vind je de oplossingen.

Zsofia Ruttkay

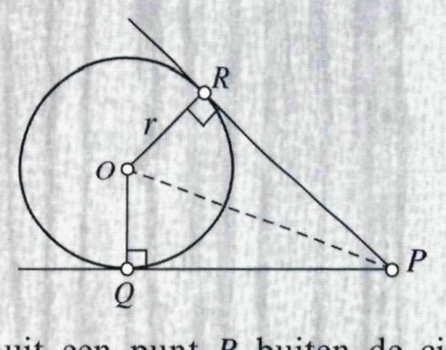
In het vorige nummer van Pythagoras stonden vier zogenaamde Sangaku-problemen. Een volledige uitleg van de opdrachten werd toen niet gegeven, evenmin als de oplossingen — die volgen op deze pagina's. Maar voordat we de opdrachten gaan bespreken, eerst een beetje meetkunde.

Cirkels en raaklijnen

Een raaklijn is een lijn die met de cirkel precies één punt gemeen heeft: het raakpunt. Om aan de slag te kunnen, zijn de volgende eigenschappen van raaklijnen nuttig. Dit zijn eigenlijk ook stellingen — probeer ze eerst te bewijzen.

I. Een raaklijn aan de cirkel staat loodrecht op de straal die het raakpunt met het middelpunt van de cirkel verbindt:

$$OQ \perp QP \text{ en } OR \perp RP.$$

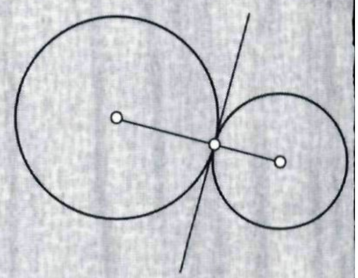


II. Vanuit een punt P buiten de cirkel lopen er twee raaklijnen aan de cirkel. De afstand van P tot de raakpunten is uit te drukken met behulp van de stelling van Pythagoras:

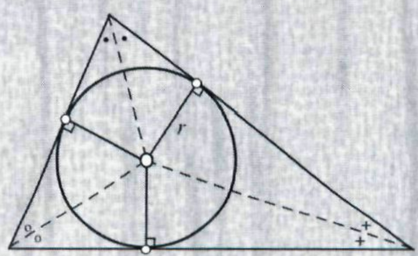
$$QP^2 = OP^2 - r^2 \text{ en } RP^2 = OP^2 - r^2.$$

In het bijzonder geldt $QP = RP$.

III. Als twee cirkels elkaar raken, dan ligt het raakpunt op de lijn die door het middelpunt van de cirkels gaat.



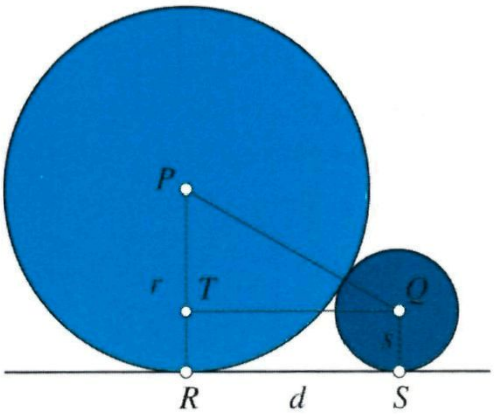
IV. In een willekeurige driehoek kun je altijd een cirkel trekken die elke zijde raakt, de zogenaamde *ingeschreven* cirkel.



V. Voor een driehoek met zijden a, b en c en straal r van de ingeschreven cirkel geldt:

$$\text{oppervlakte driehoek} = \frac{r(a+b+c)}{2}$$

Oplossing opdracht 1



Kijk naar de figuur. Laat de straal van de cirkels r en s zijn met $r \geq s$. Volgens (I) is $TQSR$ een rechthoek, zodat $PT = r - s$. Volgens (III) geldt: $PQ = s + t$. Nu gebruiken we de stelling van Pythagoras om d als de lengte van een zijde in de rechthoekige driehoek PQT te bepalen, namelijk:

$$d^2 = PQ^2 - PT^2.$$

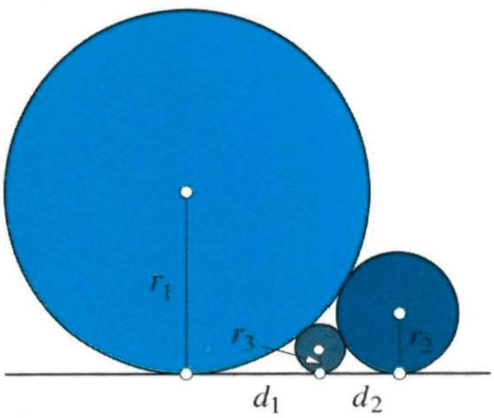
Als we in de rechterkant $PT = r - s$ en $PQ = s + t$ invullen, dan krijgen we: $d = 2\sqrt{st}$.

Oplossing opdracht 2

De formule die we moeten bewijzen is

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_2}} + \frac{1}{\sqrt{r_1}}.$$

Hieruit volgt dat $\frac{1}{\sqrt{r_3}}$ groter is dan $\frac{1}{\sqrt{r_2}}$ en $\frac{1}{\sqrt{r_1}}$. Dus is r_3 de straal van de kleinste cirkel.



Kijk nu naar de figuur, waarin we aangenomen hebben dat $r_1 \geq r_2 > r_3$. Van de vorige opdracht weten we dat:

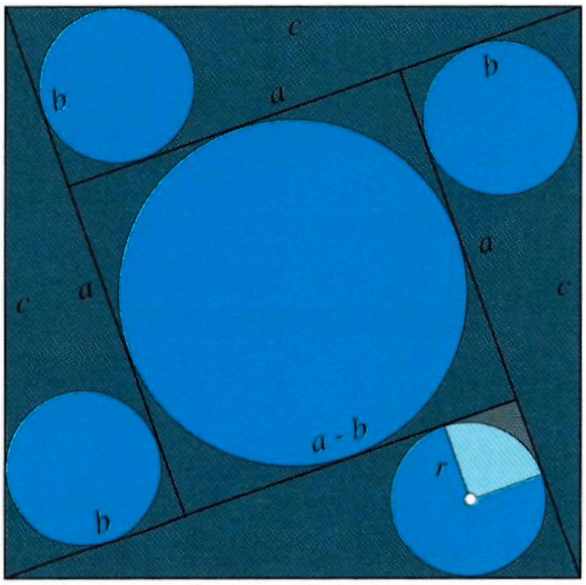
$$\begin{aligned} d_1 &= 2\sqrt{r_1 r_3} \\ d_2 &= 2\sqrt{r_2 r_3} \\ d_1 + d_2 &= 2\sqrt{r_1 r_2} \end{aligned}$$

Dus $\sqrt{r_1 r_2} = \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_1 r_3}$. Door beide kanten van deze vergelijking te delen door $\sqrt{r_1 r_2 r_3}$ krijgen we wat te bewijzen was, namelijk:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_2}} + \frac{1}{\sqrt{r_1}}.$$

Oplossing opdracht 3

Als je de tekening van deze Sangaku-opdracht zorgvuldig bekijkt, zie je dat deze is ontstaan door in het vierkant vier identieke rechthoekige driehoeken te tekenen, één op elke zijde van het vierkant. Van elke driehoek is de ingeschreven cirkel getekend. In het midden van het grote vierkant ontstaat een kleiner vierkant, waarvan ook



de ingeschreven cirkel getrokken is.

De figuur die je krijgt hangt af van de rechthoekige driehoek die je gekozen hebt. In de figuur hierboven is de middelste cirkel niet even groot als de vier andere, in de tekening in het juninummer was dat wel het geval. De Sangaku-opdracht is te bepalen wanneer alle cirkels even groot zijn.

Het bepalen van de straal r van een ingeschreven cirkel is in een rechthoekige driehoek niet moeilijk: je moet bedenken dat de raakpunten op de rechthoekszijden, het rechthoekige hoekpunt en het midden van de ingeschreven cirkel een vierkant vormen. Dit volgt gemakkelijk uit (I). Volgens (II) verdelen de raakpunten de zijden in zes stukken, waarvan de stukken met hetzelfde hoekpunt paarsgewijs even lang zijn (zie de figuur bij II). Dus $c = (a - r) + (b - r)$, zodat:

$$r = \frac{a + b - c}{2}.$$

Het kleine vierkant in het midden heeft zijde $(a - b)$, zodat de ingeschreven cirkel straal $(a - b)/2$ heeft. Die moet gelijk zijn aan r, zodat:

$$\frac{a - b}{2} = \frac{a + b - c}{2}$$

Hieruit volgt dat $b = c/2$. De rechthoekige driehoeken hebben daarom hoeken van 30° en 60° en er geldt $a = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot c$.

Nu zullen we eigenschap (III) gebruiken. De oppervlakte van elk van de rechthoekige driehoeken is $\frac{1}{2}ab$. Volgens (V) geldt:

$$\frac{ab}{2} = \frac{(a + b + c)r}{2}.$$

Hieruit volgt:

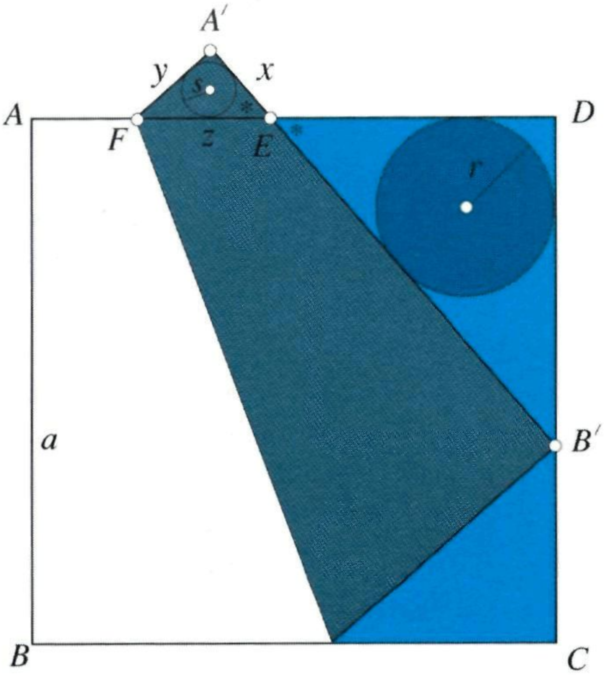
$$r = \frac{ab}{a + b + c}.$$

We weten al hoe groot a en b zijn: $a = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot c$ en $b = c/2$. Als we dit in de bovenstaande formule invullen, dan krijgen we:

$$r = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}c.$$

Oplossing opdracht 4

Deze laatste Sangaku-opdracht kan je goed demonstreren door een vierkant stuk papier (origamipapier of een servet) zó te vouwen, dat het hoekpunt B ergens op de zijde CD terecht komt. Noem dit punt B'. Dan zijn de driehoeken $FA'E$ en $B'DE$ rechthoekig en gelijkvormig, en de stralen van hun ingeschreven cirkels noemen we s en r. De opdracht is te bewijzen



dat waar je B' ook kiest, er altijd geldt $r = x$.

In de vorige opdracht hebben we gezien dat de diameter van een in een rechthoekige driehoek ingeschreven cirkel gelijk is aan de som van de twee rechte zijden minus de schuine zijde. Dus:

$$2s = x + y - z.$$

In de twee gelijkvormige driehoeken $FA'E$ en $B'DE$ is de verhouding van de straal van de ingeschreven cirkel tot een zijde hetzelfde. Met andere woorden:

$$\frac{r}{DE} = \frac{s}{A'E} \text{ en } \frac{r}{B'E} = \frac{s}{EF}.$$

Hieruit volgt:

$$r(EF - A'E) = s(B'E - DE).$$

Maar $EF - A'E = z - x$ en met a als de zijde van het vierkant: $B'E - DE = (a-x) - (a-y-z) = y + z - x$. Verder zagen we al dat $s = \frac{1}{2}(x + y - z)$, zodat:

$$\begin{aligned} r(z-x) &= \tfrac{1}{2}(x+y-z)(y-x+z) \\ &= \tfrac{1}{2}(y^2 - (x-z)^2) \\ &= \tfrac{1}{2}(y^2 - x^2 - z^2 + 2xz) \end{aligned}$$

In de rechterkant staat $y^2 - x^2 - z^2$. Dit is gelijk aan $-2x^2$, want volgens de stelling van Pythagoras geldt $x^2 + y^2 = z^2$ (de driehoek $EA'F$ is immers rechthoekig). Dus we hebben:

$$r(z-x) = \tfrac{1}{2}(2xz - 2x^2) = x(z-x).$$

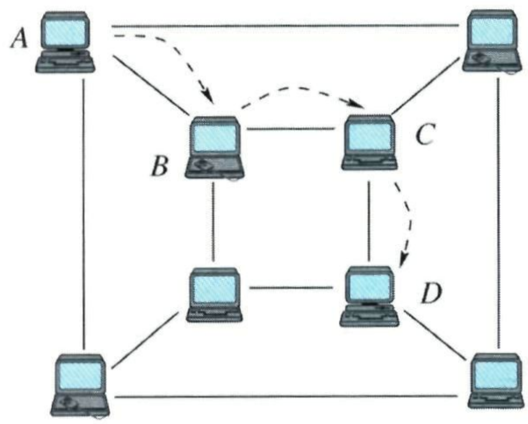
Hieruit volgt dat $r = x$. ◢

Problemen

Dion Gijswijt

Netwerken

In de figuur zie je een computernetwerk, waarbij elk van de acht computers verbonden is met drie andere computers. Dit netwerk is alleen niet erg handig, want als je een bericht van computer A naar computer D wilt sturen, moet dat bericht via twee andere computers gaan, bijvoorbeeld via B en C. Kun jij een netwerk van 10 computers maken, waarbij iedere computer met maximaal 3 andere computers is verbonden en berichten nooit via twee of meer computers hoeven te gaan?



Een vijver graven

In een rechthoekige tuin van 6 bij 15 meter wil Misja een vierkante vijver graven, waarvan de kant 3 meter lang is. De vijver moet overal even diep worden en met de vrijkomende aarde wordt de rest van de tuin gelijkmatig opgehoogd. De vijver moet uiteindelijk 2 meter diep worden. Hoe diep moet Misja graven?

Goddelijke getallen

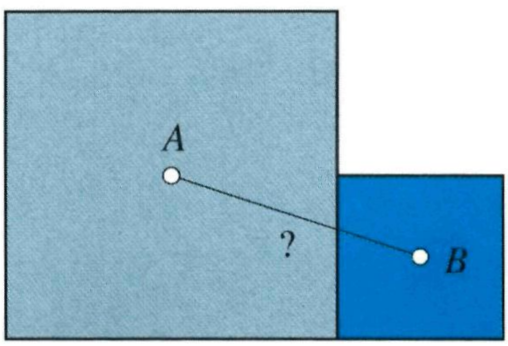
Er zijn *goddelijke* en *duivelse* getallen. Een getal kan niet zowel goddelijk als duivels zijn. Het getal 1 is zeker goddelijk. De aard van de overige getallen wordt bepaald door de volgende regel: de som van twee goddelijke getallen is duivels en de som van twee duivelse getallen is goddelijk. Welke positieve gehele getallen zijn goddelijk, welke zijn duivels en welke zijn geen van beide?

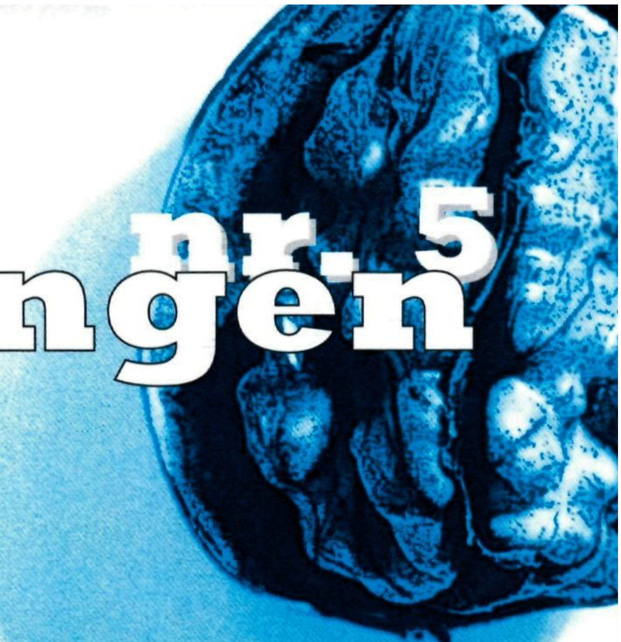
Gemene deler

De getallen 86415, 90958 en 95508 zijn alle drie deelbaar door een getal groter dan 1. Kun jij deze gemene deler vinden? Hint: je hoeft niet te delen!

Twee vierkanten

In de figuur zie je twee vierkanten. Kun jij de afstand tussen de middelpunten A en B uitrekenen als je weet dat de twee vierkanten samen een oppervlakte van 18 hebben?





Oplossingen nr. 5

Op deze pagina worden de oplossingen van problemen uit het vorige nummer van Pythagoras besproken.

Dion Gijswijt

Verschillende verschillen

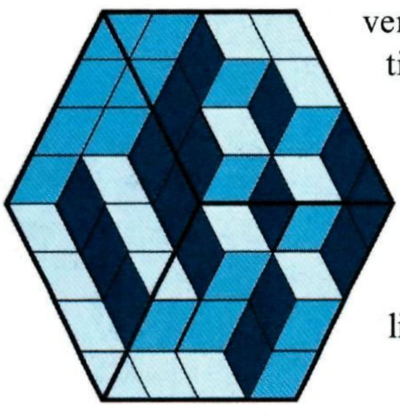
Kies de getallen 1, 3, 8, 11, 22 en 23.

Veelvlak

Neem het zijvlak met het grootste aantal zijden en noem dit aantal zijden n. Aan ieder van deze n zijden zit een ander zijvlak van het veelvlak, dus het veelvlak heeft minstens $n+1$ zijvlakken. Elk van deze zijvlakken heeft minstens 3 en ten hoogste n zijden. Er zijn dus meer zijvlakken dan er mogelijkheden zijn voor het aantal zijden, dus moeten er wel twee zijvlakken zijn met hetzelfde aantal zijden.

Wiebertjes

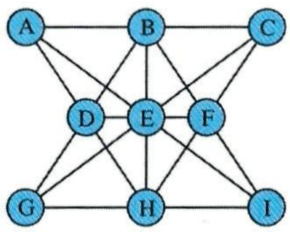
Zie de zeshoek als een kubus van 4×4×4 eenheden, en het patroon van wiebertjes als een stapel eenheidskubusjes. Het aantal wiebertjes in de drie verschillende richtingen is dan gelijk aan het aantal boven-, voor- en zijvlakjes. Daarvan zijn er evenveel, namelijk 4 maal 4.



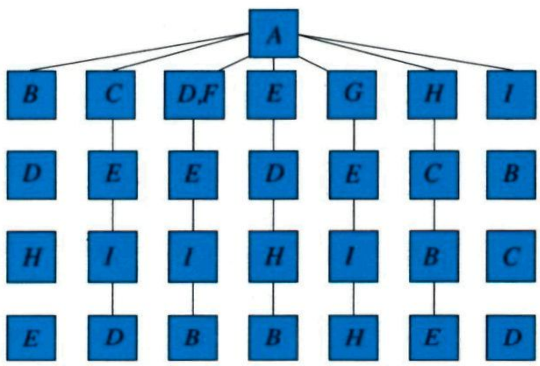
Doping

Van de 90 procent die niet hebben gebruikt, wordt 10 procent vals beschuldigd. Van de 10 procent die wel heeft gebruikt, wordt 90 procent terecht beschuldigd. Maar liefst 18 procent van de sporters wordt beschuldigd van doping, terwijl dat maar voor 9 procent van de sporters terecht is. De kans dat Erik daadwerkelijk X heeft gebruikt is daarom $\frac{9}{18}$, dus 50 procent!

Drie op een rij



Bij dit spel kan de eerste speler, Sandra, altijd winnen. Sandra speelt eerst op A. In het schema zie je, van boven naar beneden de zetten die Sandra doet om te winnen en de tegenzetten van Vincent. Bij de tweede zet heeft Vincent geen keus. Hij moet verhinderen dat Sandra drie op een rij krijgt. Na de derde zet van Sandra is het duidelijk dat zij altijd kan winnen.



Agenda

Data voor deze agenda aanmelden bij pythagoras@wins.uva.nl

ma 9 t/m vr 13 augustus '99: groep 6, 7 en 8 van de basisschool
ma 16 t/m vr 20 augustus '99: scholieren van het voortgezet onderwijs
Vierkant voor Wiskunde zomerkampen (020) 444 77 76
De zomerkampen van Vierkant zitten vol met interessante en boeiende wiskunde, wiskunst, spelletjes, sportactiviteiten en muziek.

vr 23 en za 24 augustus '99: CWI Amsterdam
do 29 en vr 30 augustus '99: TU Eindhoven
Vakantiecursus 1999: **Open problemen in de wiskunde** (020) 592 93 33
Voor leraren wiskunde en exacte vakken aan vwo, havo en vbo, en andere belangstellenden.

vrijdag 17 september 1999
2e ronde Nederlande Wiskunde Olympiade (026) 352 12 94
TU Eindhoven

zondag 10 oktober 1999: Wetenschapsdag
za 9 tot en met zo 17 oktober '99: Wetenschapsweek
Nationale Wetenschap & TechniekWeek 1999 www.weten.nl
Thema: *Tijd, van even tot eindeloos*

ma 19 t/m vr 23 oktober '99
Najaarsvoorlichtingsdagen TU Delft (015) 278 90 03

zaterdag 13 november '99
Jaarvergadering en studiedag van de NVvW (0321) 312 543
Nieuwe Lyceum, Bilthoven

vrijdag 26 november '99
Voorronde Wiskunde Alympiade (030) 2 611 611
Freudenthal Instituut, Utrecht

Oplossingen

Kleine nootjes

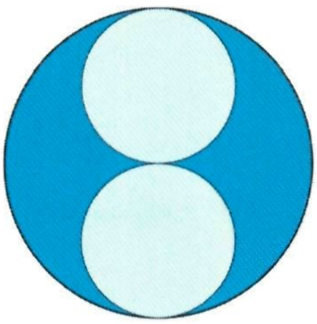
Augustusnummer
De letter u.

Rondetijden
2 uur en 13 minuten.

More money
De enige oplossing is:

$$\begin{array}{r} 9567 \\ 1085\ + \\ \hline 10652 \end{array}$$

Vierendelen



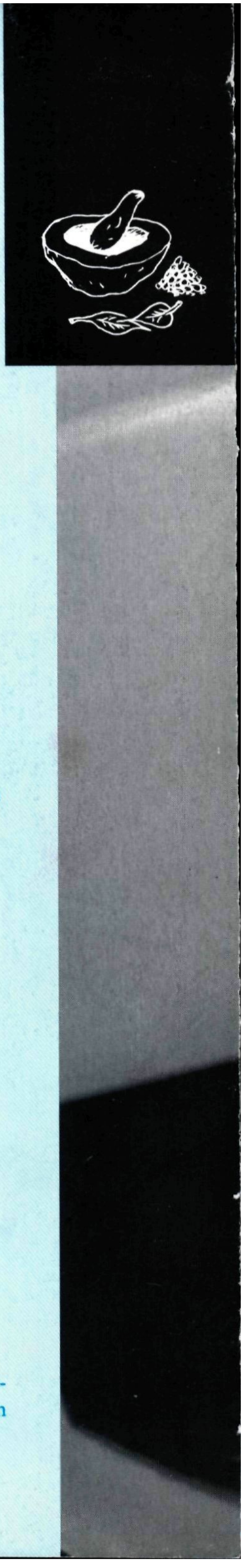
Licht uit
Het was overdag.

Wijze Eik
Iedereen steekt zijn hand op. Er zijn dus twee of drie groene stippen. Als er twee groene stippen zouden zijn, dan heb je zelf een rode stip; de beide andere gevangenen zien dan jouw rode stip en tevens de ander de hand opsteken — daaruit kunnen ze concluderen dat ze zelf een groene stip hebben. Dat gebeurt niet, en dus heb jij een groene stip.

Parijs
Dat klopt: Parijs begint met een p en eindigt begint met een e.

Over de medewerkers

dr. F. Beukers is docent getaltheorie aan de UU
drs. A.A.J. de Boer is leraar wiskunde aan de JSG Maimonides te Amsterdam
dr. L.A.M. van den Broek is leraar wiskunde aan de RSG Pantarijn te Wageningen
prof. dr. J. van de Craats is hoogleraar wiskunde aan de UvA, de Open Universiteit en de KMA
dr. D. Dannenburg is actuaris bij Posthuma Partners te Den Haag
D.C. Gijswijt is student wiskunde aan de UvA
B. de Jongste is recreatief wiskundige te Den Haag
M. Koning is leerling van klas 6 van het Stedelijk Gymnasium Johan van Oldebarnevelt te Amstersfoort
ir. A.A.J. Lefeber is AIO systeem- en besturingstheorie aan de UT
R. van Luijk is student wiskunde aan de UU
drs. W.R. Oudshoorn is AIO algebra en meetkunde aan de UG
ir. S.M. van Rijnswou is OIO computeralgebra aan de TUE
dr. Zs. M. Ruttkay is onderzoeker bij het CWI te Amsterdam
prof.dr. J.M. Schumacher is onderzoeker bij het CWI en deeltijd hoogleraar wiskunde aan de KUB
J. Smits is leerling van klas 4 van het Fons Vitae Lyceum te Amsterdam
dr. ir. R.F. Swarttouw is docent wiskunde aan de VU
A. Veldman is leerling van klas 5 van Gymnasium Felisenum te Velsen-Zuid
dr.ir. M.H. Vellekoop is docent Toegepaste Wiskunde aan de UT
drs. C.G. Zaal is docent wiskunde aan de TU Delft



Pythagoras

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van VWO en HAVO. Pythagoras verschijnt zes keer per jaar en stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

Abonnementen

Een abonnement op Pythagoras begint in september en eindigt in augustus van het volgende jaar. Aanmelden kan op één van de volgende manieren:
• telefonisch: 0522-855175, • per fax: 0522-855176,
• via Internet: www.wins.uva.nl/misc/pythagoras/
• schriftelijk (een postzegel is niet nodig):
Pythagoras, Antwoordnummer 17, 7940 VB Meppel.

Tarieven '98-'99

Een jaarabonnement op Pythagoras kost *f* 37,50. Losse nummers *f* 8,- of BF 160. Overige prijzen per jaar: Pythagoras België BF 950, Pythagoras buitenland *f* 52,50. Pythagoras/Archimedes *f* 67,50, Pythagoras/Archimedes België BF 1570, Pythagoras/Archimedes buitenland *f* 83,50.

Betaling

Wacht met betalen tot u een acceptgirokaart krijgt thuisgestuurd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt u alle nummers van de lopende jaargang. Alle abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk is opgezegd bij de abonnee-administratie: Pythagoras, Postbus 41, 7940 AA Meppel.

Bulkabonnementen *(gewijzigd met ingang van 1-12-1998)*

Voor scholen zijn er *bulkabonnementen*. Prijs: f 25,- per jaar. Minimum afname: vijf stuks, altijd 1 exemplaar gratis. De nummers en de rekening worden naar één (school)adres gestuurd. Dit schoolabonnement loopt aan het eind van het jaar af. Aanmelden bij de abonnee-administratie: 0522-855175.

Leerlingabonnementen *(nieuw)*

Voor individuele leerlingen in het middelbaar onderwijs (tot 18 jaar) zijn er *leerlingabonnementen*. Prijs: *f* 30,- per jaar. Nummers en rekening worden naar het huisadres gestuurd. Het leerlingabonnement is een *doorlopend* abonnement. Leerlingen dienen bij aanmelding hun geboortedatum en school te vermelden. Telefonisch aanmelden: 0522-855175

Uitgever

Wiskundig Genootschap, Postbus 80010, 3508 TA Utrecht

TU Delft

Pythagoras wordt gesponsord door de wiskunde-afdelingen van de Universiteit van Amsterdam en de Technische Universiteit Delft.